Difração de Fresnel

Ana Luiza Ferrari, Lucas Antunes Reis, Yuri Peres Asnis

Instituto de Física de São Carlos - USP

14 de outubro de 2019

- Representação de funções definidas em um intervalo infinito e sem nenhuma periodicidade particular.

- Comumente representada como funções que variam no tempo.

- Única imposição necessária

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \tag{1}$$

seja finita

- Dado que $f(x) = \sum C_n e^{-ik_n x}$ e que $C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{ik_n x}dx$ então conseguimos escrever $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{ik_n \xi} d\xi \right] e^{-ik_n x} \frac{\pi}{L} \tag{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k_n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{ik_n \xi} d\xi \right] e^{-ik_n x} \Delta k_n \tag{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{L\to\infty} \sum_{k_n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{ik_n \xi} d\xi \right] e^{-ik_n x} \Delta k_n \tag{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{ik_n \xi} d\xi \right] e^{-ikx} dk \tag{5}$$

- Dada então uma função $f(x)$ absolutamente integrável,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx \tag{6}$$

é chamada de função transformada da função $f(x)$.

- Notação: $\hat{f}(k) = \mathscr{F}\{f(x)\}(k)$

- Propriedades:

- $\mathscr{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}(k) = \alpha \hat{f}(k) + \beta \hat{g}(k)$

- $\mathscr{F}\{f'(x)\}(k) = -ik\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$

Convolução

- Definição: A convolução de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ é definida por:

$$(f \circledast g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \;\; g(t-\xi) \;\; d\xi \tag{7}$$

- Propriedades:

- comutativa: $(f \circledast g) = (g \circledast f)$

- Seja $(f \circledast g) = h(t)$ então

$$\mathscr{F}\{h(t)\}(w) = \mathscr{F}\{g(t)\}(w) \;\; \mathscr{F}\{f(t)\}(w) \tag{8}$$

$$\hat{h}(w) = \hat{f}(w) \;\; \hat{g}(w) \tag{9}$$

- Uma onda eletromagnética obedece a equação de onda

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \nabla^2\Psi = 0.$$

- Podemos escrever esta onda como a composição de um envelope estacionário com uma onda plana,

$$\Psi(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\left[\Psi_e(x,y,z)e^{i(\omega t - kz)} + c.c.\right].$$

- Assumindo que o envelope varia pouco com z, obtemos a equação

$$\boxed{2ik\frac{\partial\Psi_e}{\partial z} = \frac{\partial^2\Psi_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi_e}{\partial y^2}}.$$

- Aplicando a transformada de Fourier (xy) na equação anterior, obtemos

$$\hat{\Psi}_{ez} = \frac{i}{2k}(\omega_x^2 + \omega_y^2)\hat{\Psi}_e.$$

- Esta EDO é facilmente integrada e resulta em

$$\hat{\Psi}_e(\omega_x, \omega_y, z) = \hat{\Psi}_{e0} e^{(i/2k)(\omega_x^2+\omega_y^2)z};$$

com

$$\hat{\Psi}_{e0} = F_{xy}\{\Psi_e\}_{z=0}.$$

- Aplicando a transformada inversa, e rearranjando a integral, obtemos o resultado final para a função envelope.

$$\Psi_e(x,y,z) = \frac{ik}{2\pi z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_{e0}(x',y')e^{(-ik/2z)((x-x')^2+(y-y')^2)}dx'dy',$$

onde $\Psi_{e0} = \Psi_e\big|_{z=0}$.

- Por fim, esta equação pode ser reescrita para campos eletromagnéticos como

$$\boxed{E(x,y,z) = \frac{ie^{-ikz}}{\lambda z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E_0(x',y',0)e^{(-ik/2z)((x-x')^2+(y-y')^2)}dx'dy'}$$

e descreve a difração de Fresnel para uma amplitude inicial complexa arbitrária.

O ponto de Arago

- Fresnel apresentou sua formulação matemática para a propagação da luz na Academia de Ciência.
- Na ocasião, Poisson argumentou que uma tela circular opaca teria no centro de sua **sombra** um ponto de intensidade máxima .
- Este experimento foi feito por Arago.

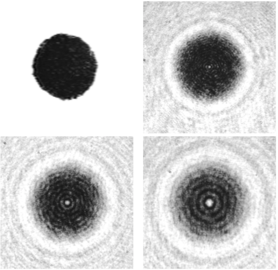


Figura: Reprodução da experiência de Arago.

Princípio de Huygens

- Proposta por Christian Huygens no final do século XVII.

- Cada ponto de uma frente de onda se comporta como uma nova fonte de ondas elementares.

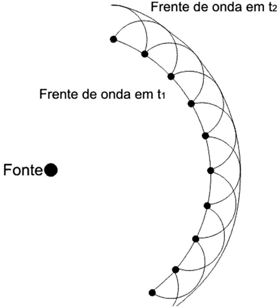
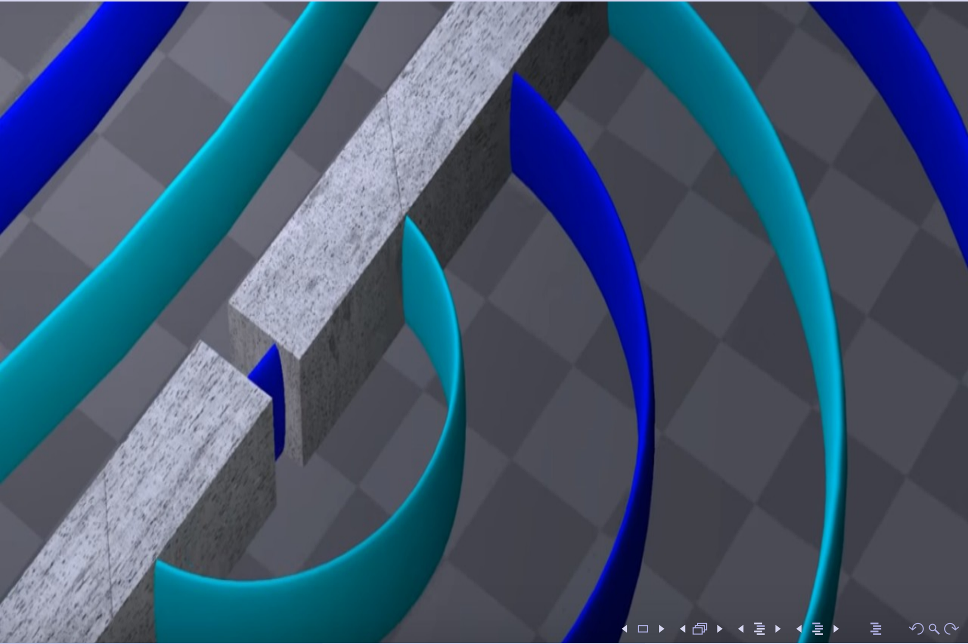
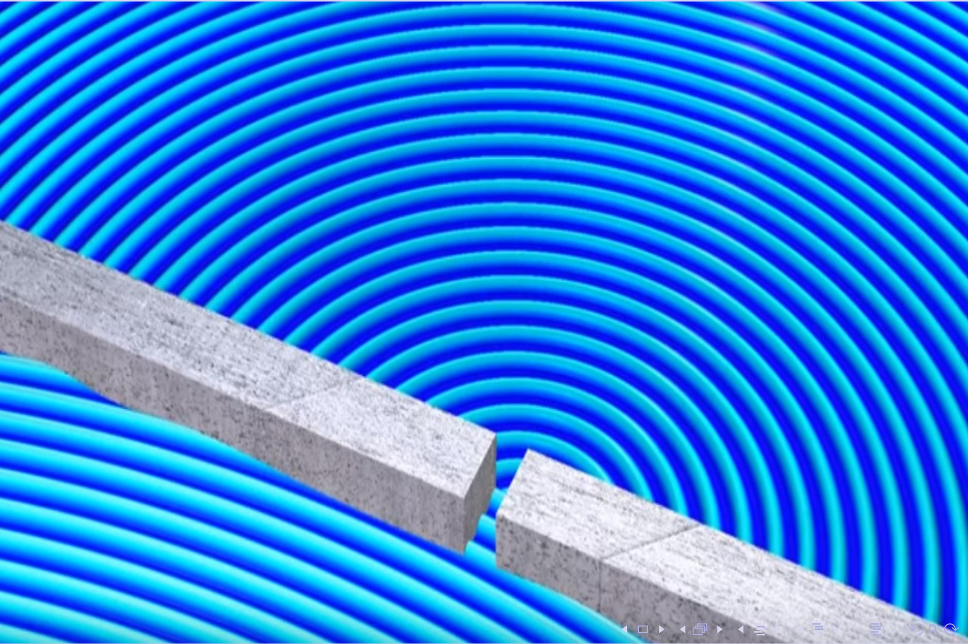


Figura: Reprodução da frente de onda através do Princípio de Huygens.

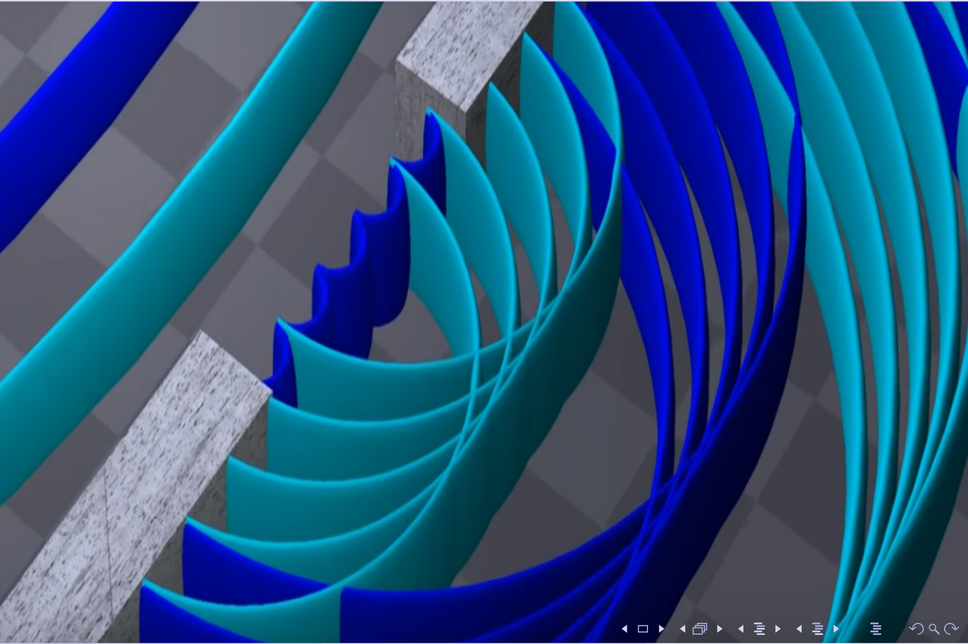
Orifício do tamanho do comprimento de onda



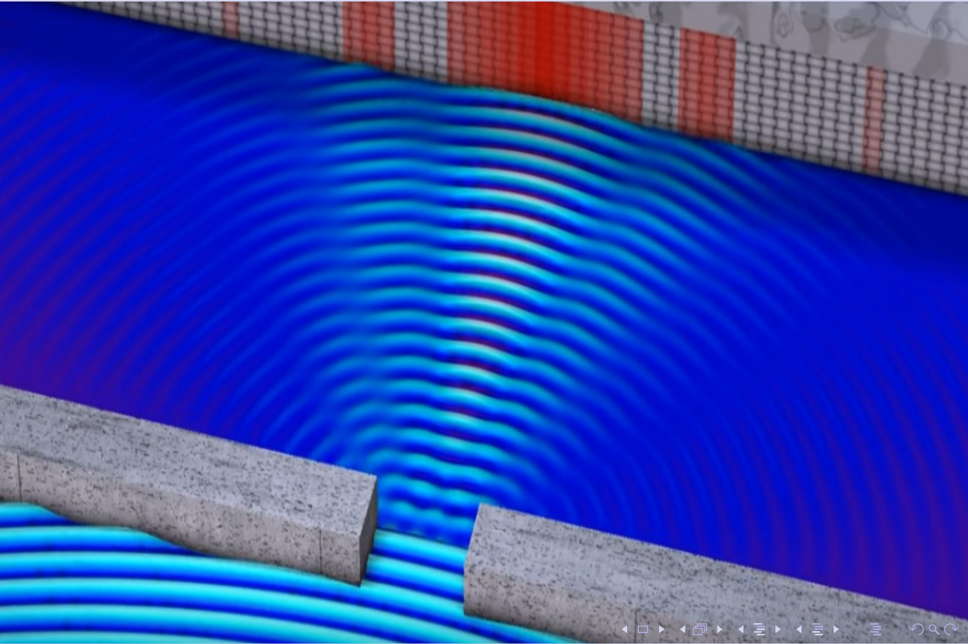
Apenas uma nova fonte de onda passa



Orifício maior que o comprimento de onda



Cinco novas fontes de onda passam



- Faremos uso da **Análise de Fourier** para calcular o padrão de difração de Fresnel.
- Decompondo uma onda incidente em uma soma de ondas planas, temos que para cada uma delas :

$$\boxed{U = U_0 e^{i(q_x x + q_y y + q_z z)}}$$

sendo (q_x, q_y, q_z) o vetor de onda e U_0 o valor do campo na origem.

- Em uma tela perpendicular à direção da luz recebida, o campo em um ponto z_0 é dado por:

$$\boxed{U = U_0 e^{iq_z z_0} = U_0 e^{i(q^2 - q_x^2 - q_y^2)^{1/2}}}$$

- Podemos definir então o fator de fase como:

$$\boxed{\phi \equiv e^{iq_z z_0}}$$

- Abordando a origem do obstáculo em z = 0 e situado no plano xy, temos que:

$$\boxed{U(q_x, q_y) = \int\int_{abertura} e^{i(q_x x + q_y y)} dxdy}$$

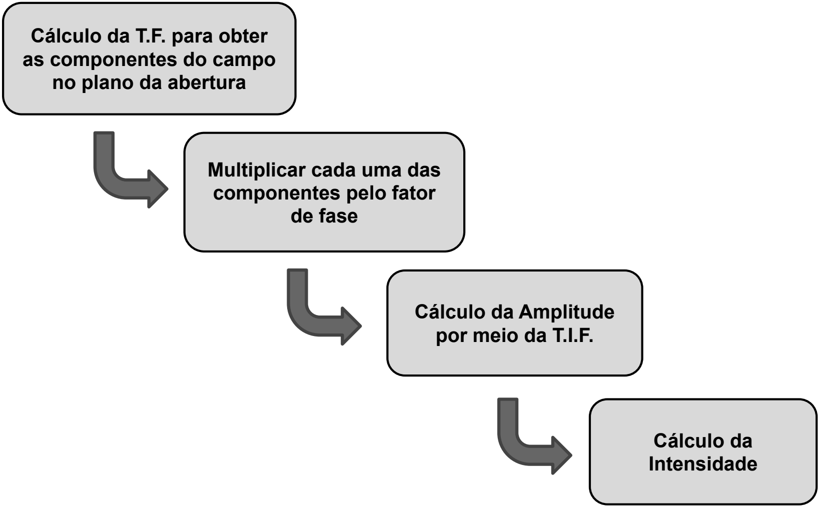
A integral acima possui a mesma estrutura da definição da Transformada de Fourier

- Discrete *Fast Fourier Transform*
- Para calcularmos a Transformada faremos uso do método `numpy.fft.fft(numpy.ndarray())`

```
# f = exp((2*pi*n/L) * i)
>>> np.fft.fft(np.exp(2j * np.pi * np.arange(10) / 10))
array([-3.44509285e-16+1.22464680e-16j,8.00000000e+00-8.52069395e-16j,
3.44509285e-16+1.22464680e-16j, 0.00000000e+00+1.22464680e-16j,
9.95799250e-17+1.22464680e-16j, -8.88178420e-16+1.17281316e-16j,
-9.95799250e-17+1.22464680e-16j,0.00000000e+00+1.22464680e-16j])
```

- De modo análogo, a inversa pode ser obtida pelo método `numpy.fft.ifft(numpy.ndarray())`

Estrutura Método 1



Método 2

- O segundo método é baseado na formulação de convolução da difração de Fresnel, isso é

$$E(x, y, z) = E(x, y, 0) * h(x, y, z),$$

onde

$$h(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{(ik/2z)(x^2+y^2)}.$$

`difracao(z)`

`fftconvolve(h(z),E0())`
Avalia a função no anteparo de projeção

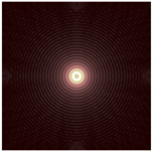
`plt.imshow(padrao)`
Avalia a função no anteparo de projeção

`h(z)`
Avalia a função no anteparo de projeção

→ `Grid_()`
Discretiza os anteparos

`E0()`
Avalia o campo inicial no anteparo da fenda

→ `Grid_()`
Discretiza os anteparos



`t = 3.292s`

Número de Fresnel

- O número de Fresnel é definido por

$$F = \frac{r^2}{\lambda L}.$$

- Dois regimes de difração são descritos pela aproximação de Fresnel:
  1. $F \ll 1$: O aparato está longe e a aproximação de Fraunhofer também pode ser empregada.
  2. $F \sim 1$: O aparato está perto e apenas a aproximação de Fresnel traz uma boa descrição.

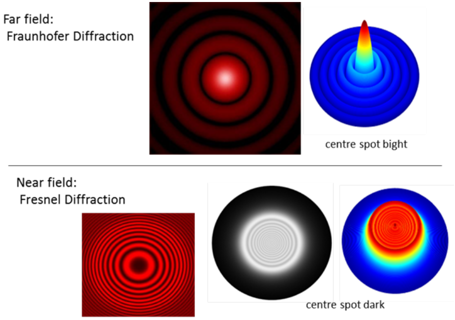


Figura: Caption

- O artigo *"Numerical simulation of Fresnel and Fraunhofer diffractions of monochromatic and white light"* traz os resultados da figura abaixo.

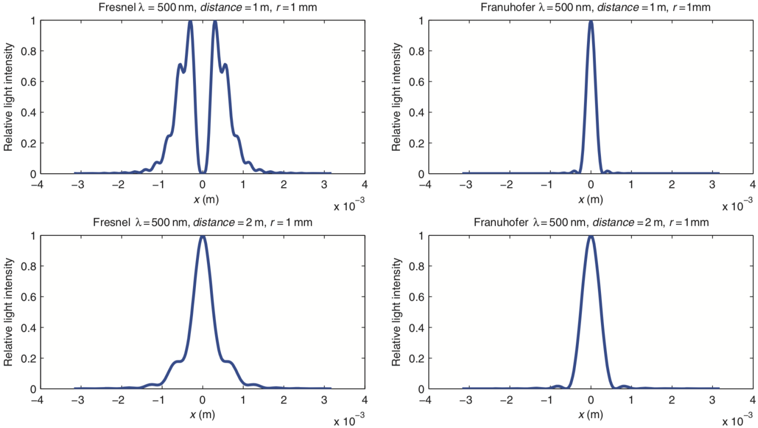


Figura: Na figura acima, vemos que com o aumento da distância ao anteparo, a aproximação de Fraunhofer se torna cada vez melhor.

Plano

- Vamos buscar resultados para as seguintes fendas:
  1. Fenda circular;
  2. Fenda quadrada;
  3. Meio plano;
  4. Ponto de Arago.
- Para três diferentes números de Fresnel, marcando os dois regimes e a transição.

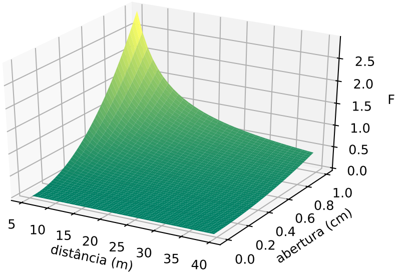


Figura: O gráfico acima mostra a relação entre distância, abertura e número de Fresnel. Nosso objetivo é pegar três pontos desta superfície para cada caso.

Dificuldades previstas

- Embora não precisemos de muita resolução para o padrão no anteparo, o gráfico de *Intensidade* $\times$ x será mais difícil de ser obtido.

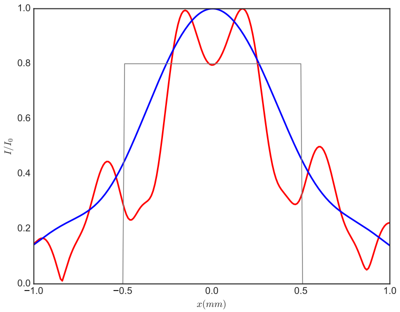


Figura: Código preliminar

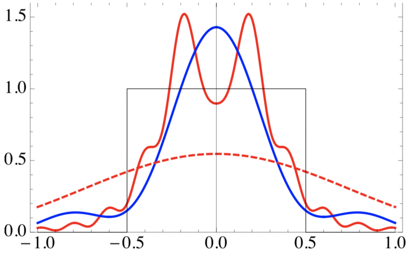


Figura: Artigo

- A resolução deve ser alta e o anteparo grande, sem que o código fique muito lento.