

Potenciais e campos elétricos: a equação de Laplace

Ana Luiza Ferrari, Lucas Antunes Reis, Yuri Peres Asnis

Instituto de Física de São Carlos - USP

16 de setembro de 2019

1 Descrição do problema

2 Descrição do Programa

3 Resultados

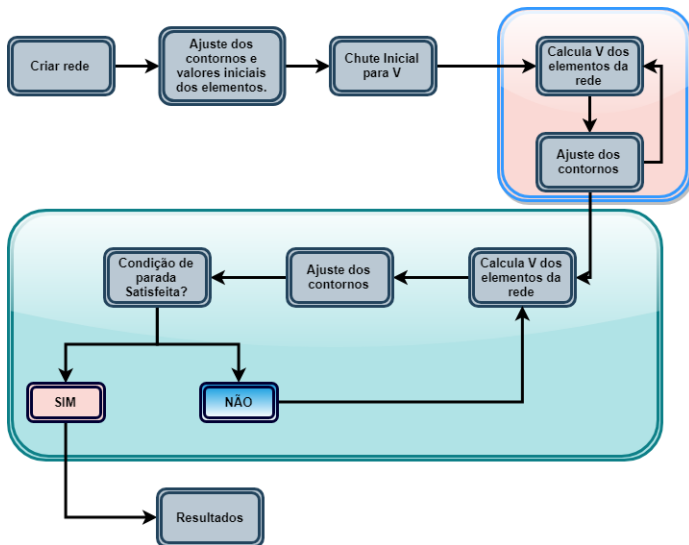
Discretização da Equação de Laplace 2D

- Assumindo que os passos em x e y são os mesmos ($\Delta x = \Delta y$), então resolvendo a equação de Laplace para $V(i, j)$, obtém-se

$$V(i, j) = \frac{1}{4} [V(i + 1, j) + V(i, j + 1) + V(i - 1, j) + V(i, j - 1)] \quad (1)$$

- O valor do potencial em qualquer ponto do plano é a média de V sobre todos seus pontos vizinhos

Estrutura do Programa



Chute Inicial e Convergência

- Iniciar os elementos internos da rede com valores arbitrários.
- O resultado final deve ser independente da escolha, alterando somente o tempo de convergência.

- **Sugestão:**

$$V_{ij} = \overline{V}_{bound}$$

- Convergência:

$$V_{ij}^{k+1} - V_{ij}^k < \epsilon$$

Jacobi × Gauss-Seidel

- A informação sobre as atualizações viaja muito devagar na rede.

Jacobi

Usa os valores da iteração anterior para calcular $V_{i,j}$.

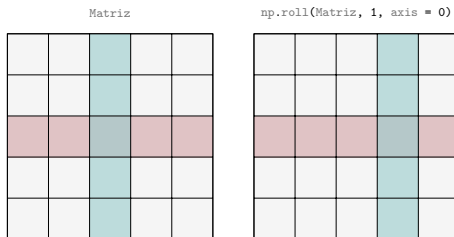
- É mais simples.
- Nos permite fugir dos *loops* do python.
- É mais lento.

Gauss-Seidel

Cada novo valor é usado no cálculo do vizinho.

- Propaga a informação mais rápido ($2\times$).
- A implementação requer *loops* do python.

- Para fugirmos dos *loops* do python, vamos usar a função `np.roll`.

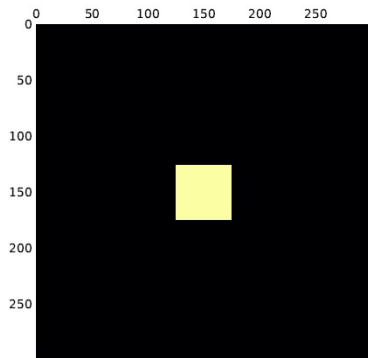


$$V_{i,j}^{n+1} = (V_{i+1,j}^n + V_{i-1,j}^n + V_{i,j+1}^n + V_{i,j-1}^n) / 4$$

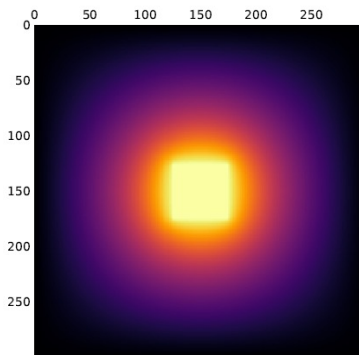


```
V_novo = (np.roll(V, 1, 0) np.roll(V, -1, 0) + np.roll(V, 1, 1) + np.roll(V, -1, 1))/4
```

Resultados para o problema abordado



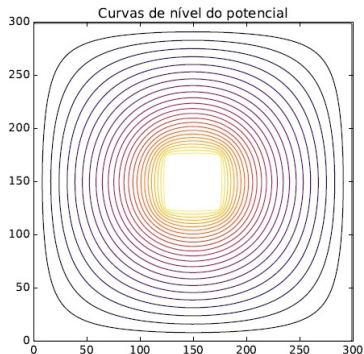
(a) Condição inicial para V



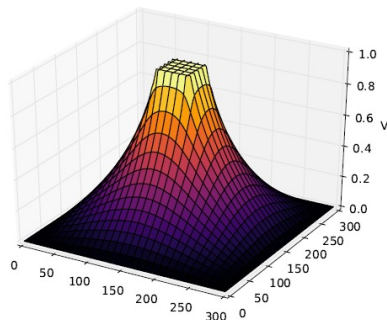
(b) Condição final de V

Figura: Evolução espacial da configuração do potencial eletrostático.

Resultados para o problema abordado



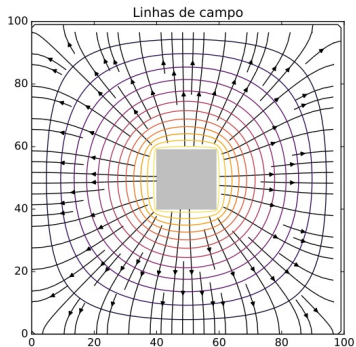
(a) Equipotenciais



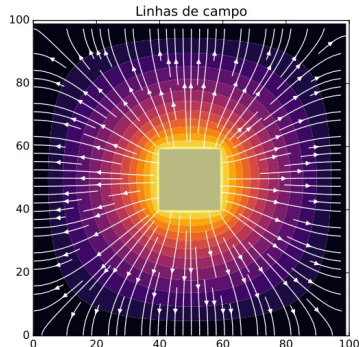
(b) Equipotenciais

- Figura(a): Bordas da superfície metálica → equipotenciais são mais densas. Isso se dá ao fato do poder das pontas, onde o campo elétrico é mais intenso nessas regiões.

Resultados para o problema abordado



(c) Equipotenciais e campo elétrico

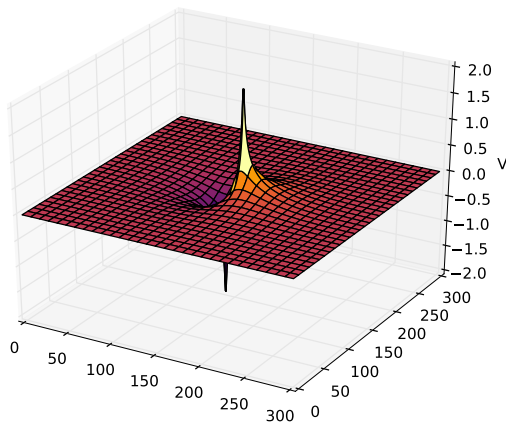


(d) Equipotenciais e campo elétrico

- Observa-se pelos gráficos acima a perpendicularidade das linhas de campo elétrico para com as equipotenciais

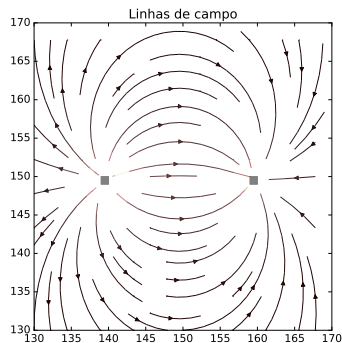
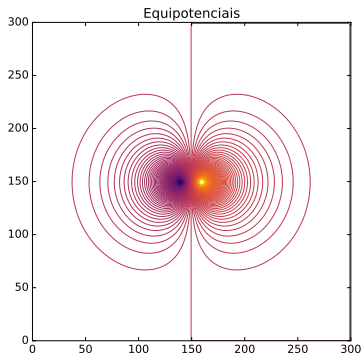
Resultados para duas cargas opostas

- Conforme $L \rightarrow 0$, a configuração tende à um dipolo ideal.



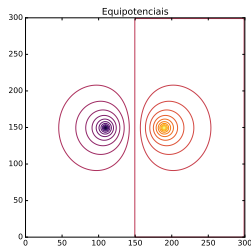
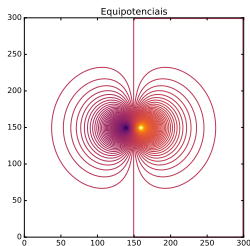
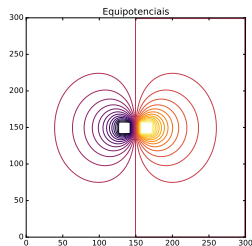
Resultados para duas cargas opostas

- Conforme $L \rightarrow 0$, a configuração tende à um dipolo ideal.



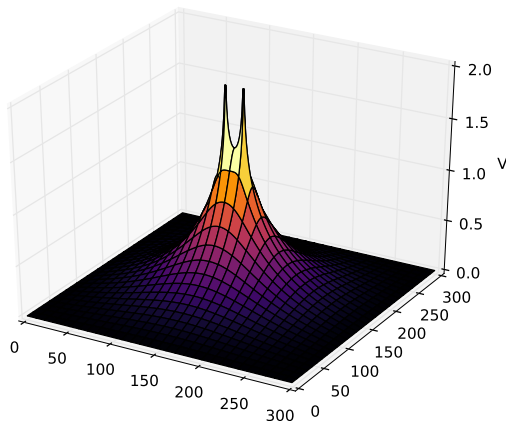
Resultados para duas cargas opostas

- Como esperado, as equipotenciais são mais próximas das de um dipolo ideal quando as cargas estão localizadas e próximas.

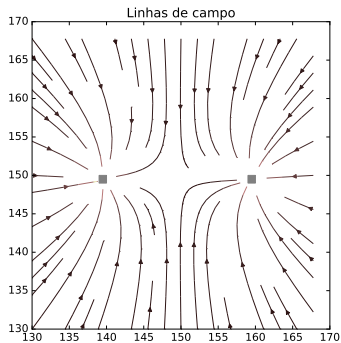
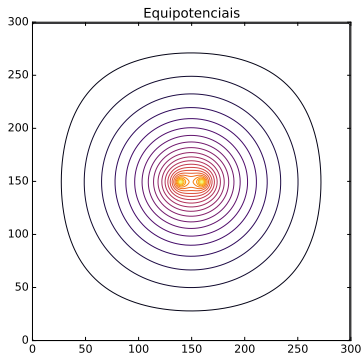


Resultados para duas cargas iguais

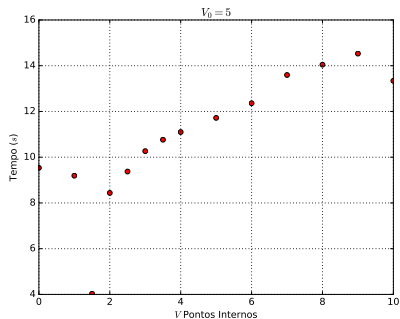
- Como esperado, não existem mínimos locais no potencial eletrostático encontrado.



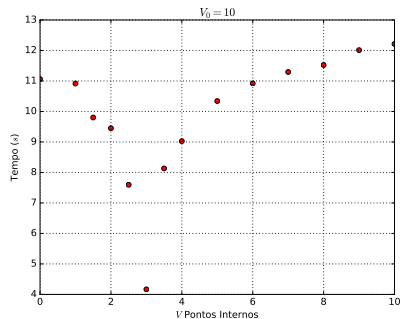
Resultados para duas cargas iguais



Tempo de Convergência



■ $V = 1.5$



■ $V = 3$