Circuitos Elétricos

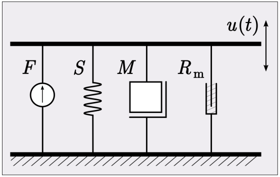
Ana Luiza Ferrari, Lucas Antunes Reis, Yuri Peres Asnis

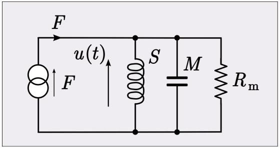
Instituto de Física de São Carlos - USP

17 de novembro de 2019

Introdução Teórica

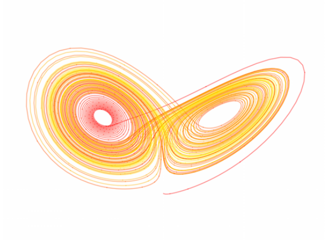
Motivação para o circuito escolhido





Análogos mecânicos

Existe **caos** em circuitos elétricos?



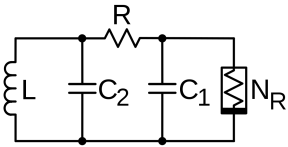
Teoria do Caos

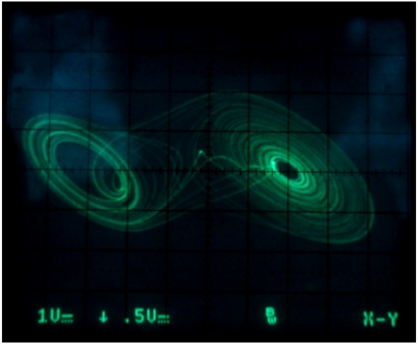
- A teoria do caos foca em sistemas dinâmicos **extremamente sensíveis a condições iniciais**.
- São determinísticos, mas não previsíveis.

"Chaos: When the present determines the future, but the approximate present does not approximately determine the future."

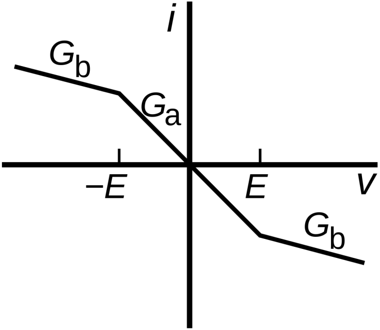
(Edward Lorenz)

- Inventado em 1983 $\rightarrow$ circuito simples que apresenta **comportamento caótico no mundo real**.



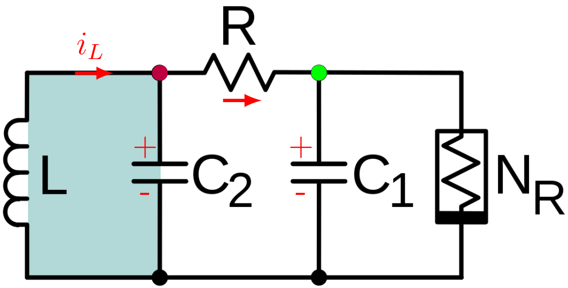


1. Um indutor.
2. Um resistor linear.
3. Dois capacitores.
4. Um resistor não linear $\rightarrow$ **diodo de Chua**.



A equação que define o diodo de Chua é

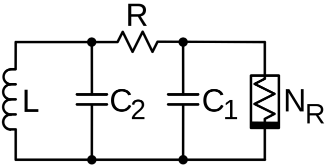
$$i_R = \begin{cases} G_b V + (G_b - G_a)E, & \text{if } V \leq -E \\ G_a V, & \text{if } |V| < E \\ G_b V - (G_b - G_a)E, & \text{if } V \geq -E \end{cases}$$



1 $L\frac{di_L}{dt} = -V_2$

2 $\frac{(V_2 - V_1)}{R} = C_1\frac{dV_1}{dt} + i_R$

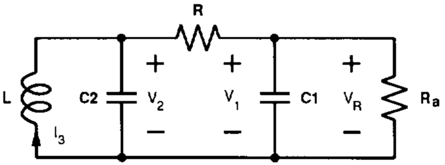
3 $i_L = \frac{(V_2 - V_1)}{R} + C_2\frac{dV_2}{dt}$



- Vamos estudar o circuito para os seguintes parâmetros

$$
\begin{aligned}
L &= 18mH;\\
C_2 &= 100mF;\\
C_1 &= 10nF;\\
G_A &= -55/60ms;\\
G_b &= -9/22ms;\\
E &= 1V.
\end{aligned}
$$

Pontos de equilíbrio: Região D_0



Circuito equivalente. Aqui, $R_a = 1/G_a$.

- D_0 é a região central da curva do diodo de Chua.
- Se as variáveis não variam com o tempo, encontramos o ponto fixo:

$$
\begin{aligned}
i_L &= 0, \\
V_1 &= 0, \\
V_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Pontos de equilíbrio: Região D_0

Expansão em torno do equilíbrio: $(x, y) = (x_0, y_0) + (\xi, \nu)$

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\nu} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \xi \\ \nu \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{\xi}(t) \equiv \begin{bmatrix} \xi \\ \nu \end{bmatrix} \equiv \vec{\xi}_0 e^{\lambda t} \longrightarrow M\vec{\xi}_0 = \lambda \vec{\xi}_0$$

- A estabilidade do ponto fixo é determinada pelos autovalores de

$$J_a = \begin{bmatrix} 0 & -1/L & 0 \\ 1/C_2 & -G/C_2 & G/C_2 \\ 0 & G/C_1 & -G_a/C_1 \end{bmatrix}$$

.

- Para $G = 550\mu S$, temos

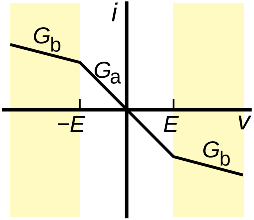
$$\gamma_0 \approx 25291$$

$$\sigma_0 \pm i\omega_0 \approx -5852 \pm i19720$$

Se afasta na direção do autovetor de γ_0,

com uma hélice cada vez mais estreita.

Pontos de equilíbrio: Região $D_\pm$



- $D_\pm$ são as regiões externas da curva do diodo de Chua.
- Se as variáveis não variam com o tempo, encontramos os pontos fixos:

$$P_- = \begin{bmatrix} \frac{G(G_b - G_a)E}{G+G_b} \\ 0 \\ \frac{(G_a - G_b)E}{G+G_b} \end{bmatrix}, \quad P_+ = \begin{bmatrix} \frac{G(G_a - G_b)E}{G+G_b} \\ 0 \\ \frac{(G_b - G_a)E}{G+G_b} \end{bmatrix}$$

.

Pontos de equilíbrio: Região $D_\pm$

- A estabilidade dos pontos fixos é determinada pelos autovalores de

$$J_b = \begin{bmatrix} 0 & -1/L & 0 \\ 1/C_2 & -G/C_2 & G/C_2 \\ 0 & G/C_1 & -G_b/C_1 \end{bmatrix}$$

.

- Para $G = 550\mu S$, temos

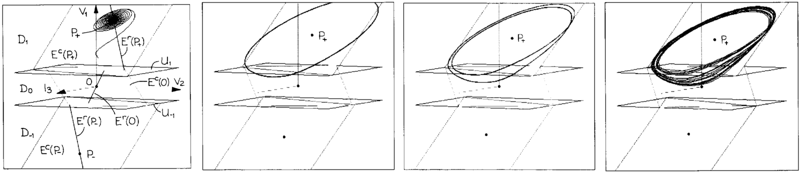
$$\gamma_1 \approx -23284$$

$$\sigma_1 \pm i\omega_1 \approx 1022 \pm i19260$$

Se aproxima na direção do autovetor de γ_1,

com uma hélice cada vez mais larga.

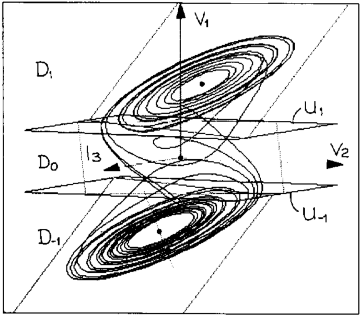
Comportamento Global: duplicações de período.



$R = 2000\Omega$

- Partimos da região D_+, onde P_+ é estável e 0 é instável.
- Diminuindo R, P_+ se torna instável e o sistema orbita os pontos fixos.
- O **período da órbita é duplicado até o infito** $\rightarrow$ atrator estranho (caos) .

- Curva do diodo de Chua é uma **função ímpar**.
- Todo atrator entre P_+ e P_0 tem um atrator simétrico em P_- e P_0.
- Diminuindo R, esperamos observar o atrator duplo.



Trajetórias colapsadas.

Metodologia

Objetivo principal

Simular a rota para o caos no circuito de Chua, partindo das trajetórias estáveis até o atrator estranho, pela **variação da resistência**.

- Pretendemos observar
  1. o fenômeno de duplicação de período nas curvas de tensão por tempo dos capacitores;
  2. a variação do expoente de Lyapunov no processo;
  3. o diagrama de bifurcações das tensões dos capacitores.

Resolvendo as leis de Kirchoff

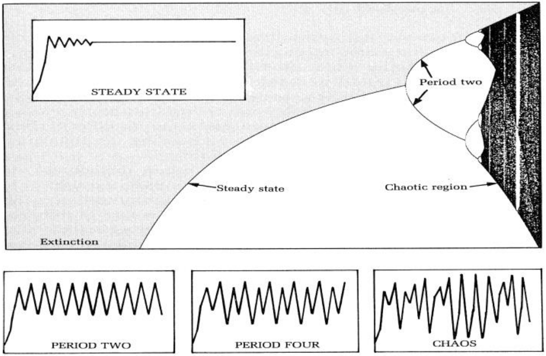
- O sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dV_2}{dt} & = -\frac{(V_2 - V_1)}{RC_2} + \frac{i_L}{C_2} \\ \frac{dV_1}{dt} & = \frac{(V_2 - V_1)}{RC_1} - \frac{i_R}{C_1} \\ \frac{di_L}{dt} & = -\frac{V_2}{L} \end{cases}$$

  será resolvido com a função `scipy.integrate.solve_ivp`.
- Essa função é uma variação do método de Runge-Kutta.

- Calcularemos as trajetórias com condições iniciais
  1. $i_{T,0}, V_{1,0}, V_{2,0})$ e
  2. $(i_{T,0} + \delta i_{T,0}, V_{1,0} + \delta V_{1,0}, V_{2,0} + \delta V_{2,0})$.
- A distância entre as trajétorias deve seguir a tendência $d \propto e^{\lambda t}$.
- Esperamos encontrar $\lambda > 0$ para o atrator estranho.

Diagramas de bifurcação



Exemplo: Mapa logístico.

- Faremos o diagrama de bifurcação plotando os máximos locais da tensão (`scipy.signal.argrelmax`) em função da resistência R.

Dificuldades previstas

Dificuldade computacional

- Uma EDO diferente deve ser resolvida para cada valor de R.
- Velocidade da função `solve_ivp`.

Dificuldade de escolha de parâmetros

- A velocidade do código $\rightarrow$ escolha das condições iniciais.
- As "perturbações" (Lyapunov) devem ser pequenas, mas maiores que erros numéricos.

Solução

- Profiling $\rightarrow$ escolha do método de integração entre

$$\{RK45, RK23, Radau, BDF, LSODA\}.$$

- *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **Three steps to Chaos - Part II: A Chua's circuit Primer**, Michael Peter Kennedy.
- *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **A Universal Circuit for Studying and Generating Chaos**, Leon O. Chua, Chai Wah Wu, Anshan Huang and Guo-Qun Zhong.