Radiação eletromagnética

Ana Luiza Ferrari, Lucas Antunes Reis, Yuri Peres Asnis

Instituto de Física de São Carlos - USP

30 de setembro de 2019

Tempo retardado

- Ondas eletromagnéticas viajam a velocidade da luz c.

- Para o caso não-estático, o que importa não é o status da fonte de luz agora, e sim as condições de um dado momento atrás - tempo retardado t_r - quando a "informação"deixou a fonte.

- Como a informação viaja uma distância $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$, logo

$$t_r = t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c} \tag{1}$$

- Quando uma carga acelera, seus campos transportarão energia para o infinito.

- A potência que passa por umas superfície será a integral do vetor de Poynting

$$P(r,t) = \oint \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{a} = \frac{1}{\mu_0} \oint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{a} \tag{2}$$

- Como as ondas viajam a velocidade da luz, essa energia foi emitida da fonte em um tempo passado $t_0 = t - r/c$, então a potência irradiada é

$$P_{rad}(t_0) = \lim_{x \to \infty} P\left(r, t_0 + \frac{r}{c}\right) \tag{3}$$

Potenciais retardados

- Campos de uma carga pontual em movimento:
  Usando os potenciais de Liénard-Wiechert, temos que:

$$\boxed{\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r},t\right)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{|\boldsymbol{R}|}{\left[(\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{u}\right]^3}\left[\left(c^2-v^2\right)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{R}\times\left(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}\right)\right]} \tag{4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{r},t\right)=\frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{R}}\times\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r},t\right)} \tag{5}$$

- Onde $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_r$ e $\boldsymbol{u}=c\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{v}$

Abordagem

- Para encontrarmos as soluções precisamos resolver a seguinte equação para t_{ret}:

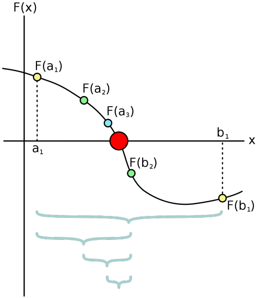
$$t_{ret} = t - \frac{r_{ret}}{c} = t - \frac{|\boldsymbol{R}(t) - \boldsymbol{r}(t_{ret})|}{c}$$

- Definindo $f(t_{ret})$:

$$f(t_{ret}) \equiv t - t_{ret} - \frac{r_{ret}}{c}$$

- Portanto queremos encontrar um valor de t_{ret} que satisfaça $f(t_{ret}) = 0$.

Método da Bisseção

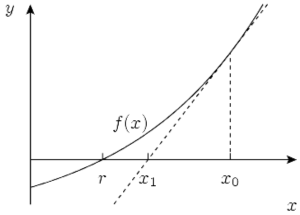


- Seja $[a, b]$ um intervalo de f tal que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$.
- $p_m = \frac{a+b}{2}$
- Casos:

1. $f(b) \cdot f(p_m) < 0 \Longrightarrow \exists f(x) = 0 : x \in [p_m, b]$
2. $f(a) \cdot f(p_m) > 0 \Longrightarrow \exists f(x) = 0 : x \in [a, p_m]$

- Repetir até encontrar $f(x) = 0$.

Método de Newton

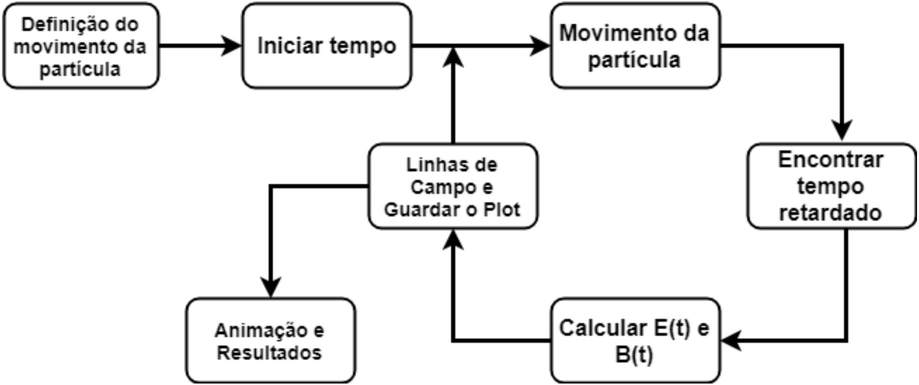


- Utiliza da razão entre a função e sua derivada para estimar a solução :

$$t_n = t_{n-1} - \frac{f(t_{n-1})}{\frac{df(t)}{dt}\Big|_{t_{rec}=t_{n-1}}}$$

- **Vantagens**: Rápido.
- **Desvantagens**: Pode nos retornar valores incorretos.

Estrutura



Definição do movimento da partícula
Iniciar tempo
Movimento da partícula
Encontrar tempo retardado
Calcular E(t) e B(t)
Linhas de Campo e Guardar o Plot
Animação e Resultados

Abordagem alternativa

- Uma abordagem alternativa é proposta no artigo *Electric field lines of relativistically moving point charges*.
- As linhas de campo são linhas contínuas, tangenciais ao campo elétrico.
- As linhas são descritas por curvas parametrizadas por s, tal que

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}(s)}{ds} \propto \mathbf{E}[\mathbf{p}(s)]}$$

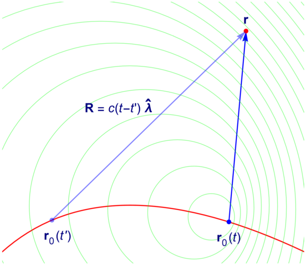
O tempo retardado como parâmetro

- Qualquer posição no espaço pode ser descrita por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0}(t') + \mathbf{R}(t').$$

- Em particular, para as linhas de campo, temos

$$\mathbf{p}(t') = \mathbf{r_0}(t') + \mathbf{R}(t') = \mathbf{r_0}(t') + c(t - t')\hat{\lambda}(t')$$



O tempo retardado como parâmetro

- Como a linha de campo deve ser tangente ao campo elétrico

$$\frac{d\mathbf{p}(t')}{dt'} = c(\hat{\lambda} - \beta) + \gamma^2 \mathbf{R} \times [(\hat{\lambda} - \beta) \times \dot{\beta}].$$

- Por fim, usando a relação entre a curva parametrizada e o versor $\hat{\lambda}$, obtemos

$$\boxed{\frac{d\hat{\lambda}(t')}{dt'} = \gamma^2 [(\hat{\lambda} - \beta) \times \dot{\beta}] \times \hat{\lambda}}.$$

- A EDO acima pode ser facilmente resolvida com a função `odeint`, do `scipy.integrate`.

Vantagens e desvantagens do método proposto

- A simplicidade torna a implementação rápida.
- É fácil mudar o cálculo para diferentes trajetórias.
- É mais lento.
- Nos informa sobre o campo apenas qualitativamente.

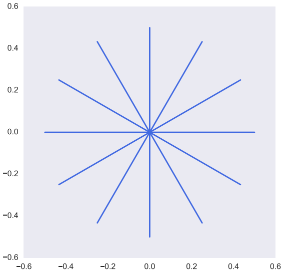


Figura: Linhas de campo de uma carga parada. A inicialização de $\hat{\lambda}$ nos dá bastante controle sobre a direção das linhas de campo.

- A proposta é estudar os campos de radiação para o movimento oscilatório vertical e para o síncrotron.

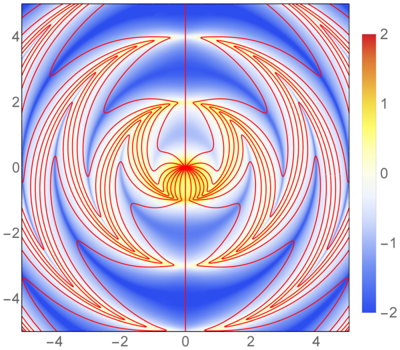


Figura: Movimento oscilatório.

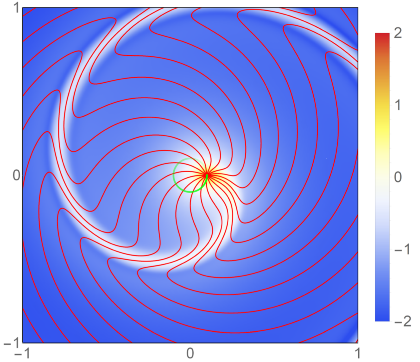


Figura: Radiação de síncroton.

Tempo por frame

- O tempo para criar o frame deve ser pequeno → animação.

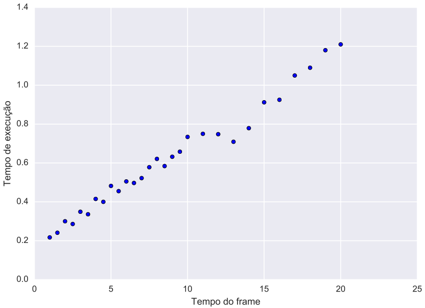


Figura: O tempo de execução cresce linearmente.

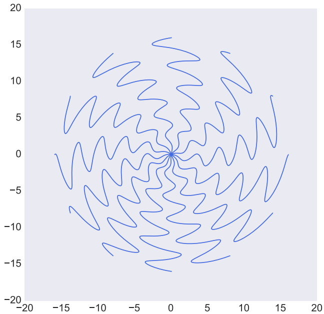
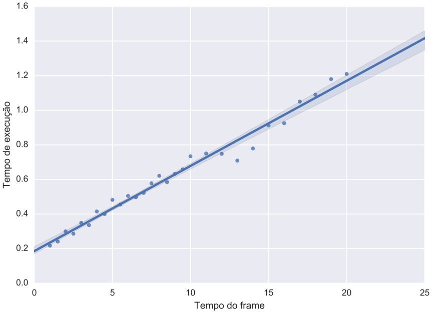


Figura: $v = 0.2c$, $t = 20s$, $\omega = 2s^{-1}$.

Tempo para a animação

- Para verificarmos se nossa abordagem é possível, estimamos o tempo necessário para a criação de $20s$ de animação, com $16 frames/s$.



- O tempo necessário é

$$T_{tot} = \sum_{t=0}^{20} T_{ex}(t) = 216s = 3.6\text{min}.$$

Animações com `matplotlib`

- Para nossos objetivos, usaremos a função `ArtistAnimation`.

1. Criamos a figura (`fig`);
2. Armazenamos os plots em uma lista de listas. (`artists`);
3. Criamos a animação com

```
animation.ArtistAnimation(fig, ims,interval=50, repeat_delay=3000)
```

Dificuldades previstas

- Cálculo do campo magnético.
- Escolha do método a ser abordado.
- Cálculo do vetor de Poynting e da potência irradiada