TC01 - MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Amanda Kellen, Lucas Araujo Azevedo e Miguel Henrique Ferreira Pinto

***Abstract*— No presente documento apresentamos a modelagem das funções objetivo e restrições referente a um problema de otimização de máquinas paralelas e tarefas indivisíveis.**

***Index Terms*— Otimização, makespan, máquinas paralelas, função objetivo e restrições**

I. Introdução

Enfrentamos um problema de otimização em que sua resolução será dividida em 4 entregas, neste documento apresentamos a primeira entrega que consiste na modelagem das funções objetivo do problema e suas restrições. O nosso problema trata-se de máquinas paralelas e tarefas indivisíveis, sendo que cada máquina possui um tempo único para executar cada tarefa. Sabemos também que cada tarefa possui um data ideal para término e se caso essa data não seja respeitada há uma penalização referente ao atraso. Temos por objetivo otimizar o resultado da execução dessas máquinas utilizando os conhecimentos adquiridos na disciplina de teoria da decisão.

A. Formulação do problema

$M \Rightarrow$ Quantidade de máquinas, $i\epsilon\left\{i,...,M\right\}$
$N \Rightarrow$ Quantidade de tarefas, $j\epsilon\left\{j,...,N\right\}$
$t_{ij} \Rightarrow$ Tempo de processamento da tarefa j na máquina i
$d \Rightarrow$ Data ideal de entrega para todas as tarefas
$W_j \Rightarrow$ Penalidade por dia de atraso da tarefa j
$C_{max} \Rightarrow$ Makespan[1](tempo máximo para a execução das tarefas com base na máquina que leva maior tempo para encerrar o processamento das tarefas)

$$X_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{se a tarefa j precede imediatamente k na máq. i} \\ 0,\ \text{Caso Contrário} \end{cases} \tag{1}$$

$T_j = max\left\{C_j - d, 0\right\} \Rightarrow$ atraso da tarefa j

$$minf_1(x) = C_{max} = max\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} t_{ij}x_{ijk}\right) i\epsilon\left\{i,...,M\right\} \tag{2}$$

$$minf_2(x) = \sum_{j=1}^{N} w_j t_j \tag{3}$$

Sujeitas as restrições:

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N+1} x_{ijk} = 1, \forall j\epsilon\left\{1,...,N\right\} \tag{4}$$

$$C_{max} \geq \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N+1} t_{ij}x_{ijk}, \forall i\epsilon\left\{1,...,M\right\} \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{N} x_{i0k} \leq 1, \forall i\epsilon\left\{1,...,M\right\} \tag{6}$$

$$\sum_{j=1,j\neq h}^{N+1} x_{ijh} - \sum_{k=1,k\neq h}^{N+1} x_{ihk} = 0, \forall h\epsilon\left\{1,...,N\right\} e\forall i\epsilon\left\{1,...,M\right\} \tag{7}$$

$$C_{ik}C_{ij} - L + \left(t_{ij} + L\right)x_{ijk}, \forall \text{j e k}\epsilon\left\{1,..,N\right\} \tag{8}$$

$$T_j \geq C_j - d, \forall j\epsilon\left\{1,...,N\right\} \tag{9}$$

$$T\epsilon R_{+}^{n} \tag{10}$$

$$X\epsilon B^{M(N+1)(N+1))} \tag{11}$$

1) Variáveis - 1: Variáveis definidas para o nosso problema. Importante ressaltar que a penalidade de atraso se refere a dias que ultrapassam o due date definido para cada tarefa.

2) Função Objetivo $f_1(x) - 2$: Essa função nos trás o tempo de execução máximo de uma máquina, somando todas as tarefas que foram executadas na mesma. Nosso objetivo tratasse de minimizar este tempo máximo de execução das máquinas para que o nosso processo de execução das tarefas e sua entrega aconteça de maneira mais breve o possível.

3) Função Objetivo $f_2(x) - 3$: Se refere a soma ponderada dos atrasos que ocorreram com a penalidade W_j. No nosso problema a entrega tem que ser feita de maneira mais rápida possível respeitando o tempo ideal de cada tarefa com o objetivo de obter uma menor quantidade de atrasos.

4) Restrições - 4: Cada tarefa deverá ir para uma máquina obrigatoriamente, garantindo que todas as tarefas sejam executadas.

5) Restrições - 5: Nesta restrição garantimos que o tempo máximo de execução seja respeitado, ou seja, o tempo de execução de nenhuma tarefa ultrapassa o nosso makespan garantindo o mínimo tempo de finalização de todas as maquinas.

6) Restrições - 6: Essa restrição nos permite deixar máquinas sem tarefas atribuídas e define se é possível ou não atribuir uma determinada tarefa a uma determinada máquina.

7) Restrições - 7: Restrição de fluxo para verificar se eu posso ou não atribuir uma tarefa subsequente a uma determinada maquina para continuar a execução. Validando se existem tarefas procedentes e precedentes a tarefa atual a ser atribuída.

8) Restrições - 8: Se refere ao tempo para execução de uma tarefa k após uma tarefa j em que L é um valor arbitrário superior a d. Caso não houver tarefa posterior, devemos considerar apenas o tempo de execução da tarefa j.

9) Restrições - 9: Restrição referente ao tempo de atraso, ela delimita que o tempo de execução da tarefa tem que ser limitado pelo tempo d definido.

10) Variável X - 11: Nossa variável X é binária representa uma matriz de 3 dimensões, limitando as dimensões pela quantidade de máquinas e tarefas.

II. Dificuldades Enfrentadas

Na primeira parte do TP que tem como objetivo apresentar a modelagem do problema que será discutido ao longo do semestre, tivemos as dificuldades apresentadas abaixo.

- Entendimento do problema: Para melhor entendimento do problema retratado precisamos realizar pesquisas bibliográficas e para tal utilizamos o livro [2];
- Modelagem do problema: A modelagem do problema foi onde obtivemos a maior dificuldade pois não conseguíamos pensar em um modelo de incluir a penalidade W_j em nossas tentativas. Devido a dificuldade apresentada nesta parte do trabalho, foi utilizado o modelo sugerido em sala de aula.

III. Conclusão

Vemos que esse problema possui conceitos muitos complexos, porém após definir as restrições e as funções objetivos conseguimos seguir com um projeto mais palpável em seu desenvolvimento. Nas próximas etapas iremos desenvolver soluções multi e mono objetivamente.

Esse trabalho está nos dando a oportunidade de desenvolver a resolução de um problema complexo com a opção de aplicação de técnicas diferentes das trabalhadas em sala e presentes em outras matérias.

References

[1] "Makespan." `https://en.wikipedia.org/wiki/Makespan`. [Online; acessado em 2 de Novembro de 2021].

[2] "Pesquisa operacional: para cursos de engenharia," tech. rep.