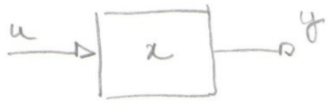
* CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

$\underset{\sim}{x}(0) = 0\,!$

Processo:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = C \cdot x \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} X(s) \cdot s = A \cdot X + B\,U(s) \\ X(s) \cdot (s\mathbb{I} - A) = B \cdot U(s) \\ X(s) = (s\mathbb{I} - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) \end{array}$$



$$Y(s) = C \cdot X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (s\mathbb{I} - A)^{-1} \cdot B$$

Problema de controle:

Determinar u de forma a y seguir uma referência y^*

Lei de controle:

$$u = -K \cdot x + y^*$$

Sistema em malha fechada:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$= Ax + B \cdot (-Kx + y^*)$$
$$\dot{x} = \underbrace{(A - BK)}_{} \cdot x + B \cdot y^*$$

Dinâmica do sistema em malha fechada: pólos do sistema $= A_c$

$$X(s) \cdot s = A_c \cdot X(s) + B \cdot Y^*(s)$$
$$X(s) \cdot (s\mathbb{I} - A_c) = B \cdot Y^*(s)$$
$$Y(s) = C \cdot X(s) = C \cdot (s\mathbb{I} - A_c)^{-1}\, B \cdot Y^*$$

$$\frac{Y(s)}{Y^*(s)} = C \cdot (s\mathbb{I} - A_c)^{-1} \cdot B$$: Função de transferência em malha fechada

$$= \frac{C \cdot \operatorname{adj}(s\mathbb{I} - A_c) \cdot B}{\det(s\mathbb{I} - A_c)}$$

Os polos do sistema em malha fechada são raízes da equação

$$\det(s\mathbb{I} - A_c) = 0$$

ou seja, os auto-valores de $A_c = A - BK$. Sendo $\dim(K) = n_u \times n_x$, e havendo n_x polos no sistema, é possível escolher K de forma a alocar os polos onde se deseja, desde que o processo seja controlável.

O processo é controlável se

$$C_M = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n_x-1}B]$$

for de posto completo, ou seja, tiver posto igual a sua mínima dimensão, no caso n_x.

No matlab, duas funções podem ser usadas para alocação de polos:

place : número de polos repetidos não pode ser maior que n_u

acker : permite multiplicidade de polos maior que n_u

Exemplo : $K = place(A, B, [p_1, \dots, p_{n_x}])$;

Se $n_x > 2$, pode-se escolher um ou dois polos dominantes e o restante 5 vezes mais rápidos, e relacionar os polos dominantes com os parâmetros de resposta temporal desejada.

Em regime permanente, $\dot{x} = 0$ e então

$$0 = A_c \cdot \bar{x} + B y^*$$
$$\bar{y} = C \cdot \bar{x}$$

sendo $\bar{x} = -A_c^{-1} \cdot B y^*$, então $\bar{y} = -C \cdot A_c^{-1} B \cdot y^*$

Logo, o ganho de regime permanente em malha fechada é dado por

$$K_{ss} = -C \cdot A_c^{-1} B$$

Para erro nulo de seguimento, deve-se ter

$$K_{ss} = 1$$

Mas isso não é possível já que C e B são do processo, e A_c é determinado conforme a posição desejada para os pólos.

No entanto, um grau de liberdade a mais seria obtido se a lei de controle for

$$u = -Kx + N \cdot y^*$$

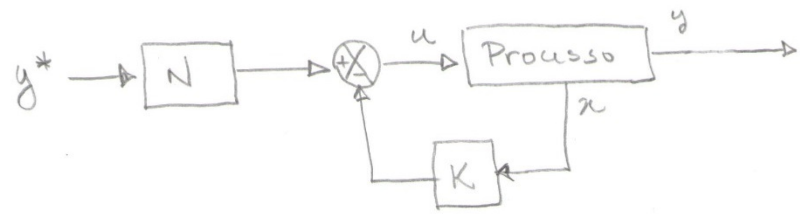
do qual se obtém

$$K_{ss} = -C \cdot A_c^{-1} B \cdot N$$

Para obter $K_{ss} = 1$, basta fazer

$$N = -(C A_c^{-1} B)^{-1}$$

Logo, no simulink teríamos



Para tanto, faz-se necessário dispor de x.

Quando não se tiver acesso a todos os elementos de x, uma estimativa $\hat{x}$ pode ser obtida a partir de y fazendo-se uso de um observador de estado

A forma geral do observador é dada por

$$\dot{\hat{x}} = A.\hat{x} + Bu + L(y-\hat{y})$$
$$\hat{y} = C.\hat{x}$$

Se definirmos o erro de observação $\tilde{x} = x - \hat{x}$, então

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - L(y-\hat{y}) \\ &= A.(x-\hat{x}) - L(Cx - C\hat{x}) \\ &= (A-LC).(x-\hat{x})\end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A-LC).\tilde{x}$$

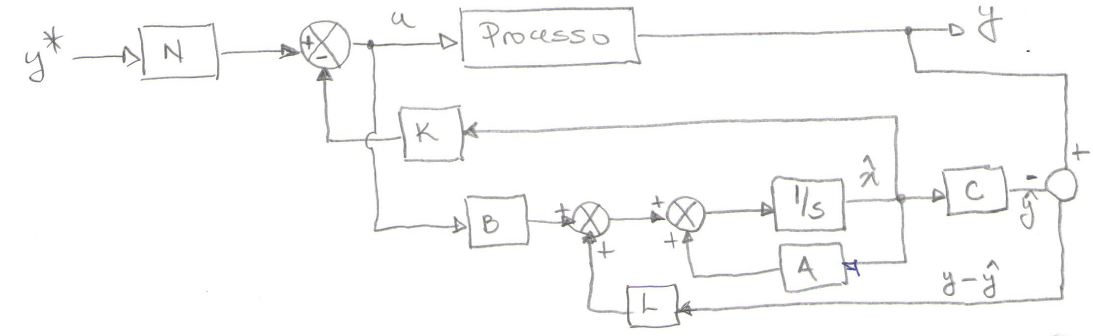
que é um sistema dinâmico autônomo (sem entrada) cuja dinâmica é dada pelos polos de $(A-LC)=A_o$

Esses polos podem ser alocados usando também place ou acker.

Exemplo: $L = \text{place}(A^T, C^T, [o_1, \ldots, o_{n_x}])^T$

em que o_i, $i=1,\ldots,n_x$, são os polos do observador.

Em geral, escolhem-se os polos do observador de modo a serem mais rápidos do que os polos do controlador. Assim, o sistema de controle fica:



A inclusão de um canal integral permite alcançar erro nulo em regime permanente de y em relação a y^*. Para tanto, se faz necessário aumentar a ordem do sistema incluindo mais uma variável ou estado:

$$x_i = \int_0^t (y^* - Cx)\,d\tau = \int_0^t (y^* - y)\,d\tau$$

ou ainda

$$\dot{x}_i = y^* - Cx = y^* - y$$

O sistema estendido fica

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y^*$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

Sendo a lei de controle por realimentação de estados dada por

$$u = -K_e \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} K & K_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

resultando em

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot K_e}_{A_c\text{, cujos polos podem ser alocados usando place}} \Bigg) \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y^*$$

Ke é determinado usando Ke = acker(Ae, Be, Pe), com pe sendo o vetor com polos desejados em malha fechada. O projeto do observador permanece o mesmo.