

## Relatório de Trabalho para o Primeiro Exercício Programa



## Sumário

Introdução.....	3
Fundamentos Teóricos e resolução de pequenos exercícios. ....	3
Aplicação dos conceitos por meio de exemplos:.....	9
Exemplo 1.1:.....	9
Valores encontrado pelo código:.....	10
Exemplo 1.2:.....	11
Valores encontrado pelo código:.....	11
Exemplo 2:.....	12
Valores encontrado pelo código – Função 1: .....	13
Valores encontrado pelo código – Função 2: .....	13
Exemplo 3:.....	13
Valores encontrado pelo código – Função 1: .....	14
Valores encontrado pelo código – Função 2: .....	14
Exemplo 4:.....	15
Valores encontrado pelo código – Função 1: .....	16
Valores encontrado pelo código – Função 2: .....	17
Conclusão.....	18

## Introdução

Pretende-se alcançar por meio deste trabalho a complementação dos estudos das matérias teóricas ministradas em curso, por meio de sua aplicação em um exercício prático. O exercício consiste na aplicação da integração numérica pelo método de Gauss.

## Fundamentos Teóricos e resolução de pequenos exercícios.

Apresentamos aqui a fórmula geral de integração numérica, utilizando-se os nós  $x_j$  e os pesos  $\omega_j$ . Os pesos e nós são escolhidos de acordo com algum critério preestabelecido, e neste caso, o critério será:

“Tornar a aproximação exata para todos os polinômios de grau menor ou igual a  $\kappa$ , com o maior valor de  $\kappa$  possível”

Percebemos então que nosso enfoque é em funções polinomiais, que de forma geral possuam as formas:

$$P_n(x) = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \dots + C_n \cdot x^n = \sum_{j=1}^n C_j \cdot x^j \quad (1)$$

Ou

$$P_n(x) = C \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = C \cdot \prod_{j=0}^n (x - x_j) \quad (2)$$

Escrevendo de forma compacta temos:

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^n C_j \cdot x^j \quad (3)$$

O valor  $\kappa$  simboliza o grau do polinômio, portanto, um polinômio de grau  $\kappa$  será representado por  $P_k(x) = \sum_{j=1}^k C_j \cdot x^k$ . Deseja-se então utilizar as fórmulas de Gauss para tratar de polinômios com o maior grau possível, minimizando o erro. Temos então:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^n \omega_j \cdot f(x_j) \quad (4)$$

É que nos atentemos ao número de amostras que iremos utilizar para nossa integração, uma vez que uma integração onde todos os pontos de amostra são as raízes do polinômio resultaria em zero, pois o termo  $f(x_j) = 0$  em cada elemento da somatória.

Podemos observar então que, dados os pontos de amostra  $n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e o polinômio

$$R(x) = (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2)^2 \cdot \dots \cdot (x - x_n)^2$$

temos um polinômio de grau  $2n$ , estritamente positivo, em que a integral é estritamente positiva. As raízes do dito polinômio coincidem com os valores de amostra, assim

$[\omega_j \cdot f(x_j)] = 0$ , o que faria com que nossa aproximação nos levasse a um valor nulo num caso em que claramente isto é impossível. Então temos nossa condição:  $k \leq 2n - 1$ .

Esta condição nasce para que seja possível montar um sistema de equações em que o número de equações seja maior ou igual ao número de incógnitas. Isso torna-se claro aplicando (3) na função do tipo  $f_k(x) = x^k$ , e para melhor visualização foi escolhido  $n=3$ , portanto  $k = [0,1,2,3,4,5]$ :

$$\int_a^b x^0 dx = \omega_1 \cdot [x_1^0] + \omega_2 \cdot [x_2^0] + \omega_3 \cdot [x_3^0]$$

$$\int_a^b x^1 dx = \omega_1 \cdot [x_1^1] + \omega_2 \cdot [x_2^1] + \omega_3 \cdot [x_3^1]$$

$$\int_a^b x^2 dx = \omega_1 \cdot [x_1^2] + \omega_2 \cdot [x_2^2] + \omega_3 \cdot [x_3^2]$$

$$\int_a^b x^3 dx = \omega_1 \cdot [x_1^3] + \omega_2 \cdot [x_2^3] + \omega_3 \cdot [x_3^3]$$

$$\int_a^b x^4 dx = \omega_1 \cdot [x_1^4] + \omega_2 \cdot [x_2^4] + \omega_3 \cdot [x_3^4]$$

$$\int_a^b x^5 dx = \omega_1 \cdot [x_1^5] + \omega_2 \cdot [x_2^5] + \omega_3 \cdot [x_3^5]$$

#### Exemplo 1 – Sistema de equações

Temos um sistema de 6 variáveis  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, x_1, x_2, x_3,)$  e 6 equações. Como se trata de um sistema em que cada linha é linearmente independente, pois varia-se o grau do polinômio, concluímos que existe solução.

Como nossa aproximação leva em conta que a função a ser aproximada deve ter o menor erro possível para o maior grau de função possível, escrevemos:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ \sum_{j=1}^n \omega_j \cdot f(x_j) \right] + E_n(f)$$

Queremos então que  $E_n(f) = 0$ . Mas então caímos no caso antes descrito. Dessa forma podemos resolver:

**Exercício: Prove que, se  $E_n(f_k) = 0$ , para todo  $k \in \{0, \dots, 2n - 1\}$ , então  $E_n(p) = 0$  para qualquer polinômio de grau menor ou igual a  $2n-1$ .**

**Resposta:** É possível representar um polinômio qualquer como somatório ou produto (1) e (2), e estes sempre serão formados a partir de seu grau e coeficientes [com  $C=k+1$ ], ou grau, coeficiente  $C$  e raízes [com  $R=k$ ]. Também é conhecido que é possível transformar de um formato para outro em qualquer dos casos. Assim, para que seja montado um sistema como demonstrado no Exemplo 1, apenas dependemos do grau do polinômio, sendo aceito um polinômio qualquer. Como provamos que, desde que existam os nós e pesos corretos,  $E_n(f_k) = 0$  temos também que  $E_n(p) = 0$ .

Para analisar a existência e o comportamento dos nós e pesos para cada  $p(x)$  partimos da verificação da seguinte condição:

$$x(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

$$q(x) = \text{polinômio de grau} \leq n - 1$$

$$\int_a^b x(x) \cdot q(x) dx = 0 \quad (5)$$

Primeiro devemos nos atentar que  $s(x) = x(x) \cdot q(x)$  possui grau  $\kappa \leq 2n - 1$ , e que, portanto, podemos aplicar (4), mas percebemos que cada uma das parcelas acaba por cancelarem-se:

$$\begin{aligned} \int_a^b s(x) dx &= \omega_1 \cdot [(x_1 - x_1) \cdot (x_1 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_1 - x_n) q(x_1)] + \\ &+ \omega_2 \cdot [(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_2 - x_n) q(x_2)] + \dots + \\ &+ \omega_n \cdot [(x_n - x_1) \cdot (x_n - x_2) \cdot \dots \cdot (x_n - x_n) q(x_n)] \end{aligned}$$

Portanto, existe um polinômio  $x(x)$  ortogonal a qualquer polinômio  $q(x)$  de grau menor ou igual a  $n - 1$  em relação ao produto interno:

$$\langle x(x), q(x) \rangle = \int_a^b x(x) \cdot q(x) dx \quad (6)$$

No entanto, existe uma única família  $F$  de polinômios mônicos, em que o grau de  $x_j(x)$  é  $j$  e que são dois a dois ortogonais em relação ao produto interno definido como (6). Conclui-se a partir disso que  $x(x)$  utilizado em (5) é o polinômio em questão.

Complementarmente a isso, nota-se que, ao aplicar (4) em  $q(x)$  temos a garantia de que ao menos um dos valores utilizados não é a raiz de  $q(x)$ , o que garante que não cairemos no problema de valores nulos em integrações estritamente positivas. Também se extrai que “Se os nós e os pesos usados em (4) são tais que  $E_n(f) = 0$  para todos os polinômios  $f(x)$  de grau menor ou igual a  $2n-1$ , então os nós têm de ser as raízes do polinômio  $x(x)$  da família  $F$  descrita acima”.

#### **Provando que as raízes de $x(x)$ pertencem ao intervalo $[a, b]$ :**

Primeiro vamos nos lembrar da seguinte manipulação para primitivação de funções:

$$\int_a^b f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) dx$$

Aplicando tal artifício em nosso caso teremos:

$$\int_a^b x(x) \cdot P_n(x) dx = \left[ x(x) \cdot \int_a^b P_n(x) dx \right] \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} x(x) \cdot P_n(x) dx ; \text{ Mas}$$

$$\int_a^b \frac{d}{dx} x(x) \cdot P_n(x) dx = [x(x) \cdot P_n(x)] \Big|_a^b - \int_a^b x(x) \cdot \frac{d}{dx} P_n(x) dx$$

Quando se deriva um polinômio tem-se que cada um de seus elementos (na forma de somatório) se multiplica pelo grau do expoente, e seu grau decresce por 1. Assim, garante-se que a propriedade vista anteriormente segue em vigor:

$$\int_a^b x(x) \cdot \frac{d}{dx} P_n(x) dx = 0$$

Portanto

$$\int_a^b x(x) \cdot P_n(x) dx = \left[ x(x) \cdot \int_a^b P_n(x) dx \right] \Big|_a^b - [x(x) \cdot P_n(x)] \Big|_a^b = 0$$

Temos assim:

$$\left( x(x) \cdot \left[ \int_a^b P_n(x) dx \right] \right) \Big|_a^b = (x(x) \cdot [P_n(x)]) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b P_n(x) dx = \left[ C_0, \frac{C_1}{2}, \dots, \frac{C_n}{n+1} \right] \cdot [b-a, b^2-a^2, \dots, b^{n+1}-a^{n+1}] = cte$$

$$x(x) \Big|_a^b = x(b) - x(a)$$

$$(x(x) \cdot P_n(x)) \Big|_a^b = x(b) \cdot P_n(b) - x(a) \cdot P_n(a)$$

$$cte \cdot x(b) - cte \cdot x(a) = x(b) \cdot P_n(b) - x(a) \cdot P_n(a)$$

$$x(b) \cdot \{cte - P_n(b)\} - x(a) \cdot \{cte - P_n(a)\} = 0$$

Como vemos que:

$$P_n(a) \neq \left[ C_0, \frac{C_1}{2}, \dots, \frac{C_n}{n+1} \right] \cdot [b-a, b^2-a^2, \dots, b^{n+1}-a^{n+1}]$$

$$P_n(b) \neq \left[ C_0, \frac{C_1}{2}, \dots, \frac{C_n}{n+1} \right] \cdot [b-a, b^2-a^2, \dots, b^{n+1}-a^{n+1}]$$

Então só nos resta a possibilidade de que  $x(a) = x(b) = 0$

Dessa forma chegamos que

$$[(b-x_1) \dots (b-x_n)] = 0$$

$$[(a-x_1) \dots (b-x_n)] = 0$$

Portanto. Algum  $x_j$  deve ser igual a  $a$  e algum  $x_j$  deve ser igual a  $b$

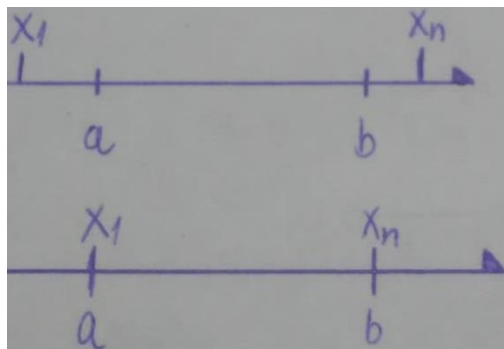


Figura 3 – visualizando possibilidades no intervalo de integração.

O que provamos com isso é que, como  $a \neq b$  duas das amostras  $\{x_j : 0 \leq j \leq n\}$  são iguais a  $[a, b]$ . Agora, para provar que as amostras fazem parte do intervalo  $[a, b]$  basta escolhermos  $P_1(x)$  e  $x_2(x)$ , e chegaremos em:

$$[(b - x_1)(b - x_2)] = 0$$

$$[(a - x_1)(b - x_2)] = 0$$

Finalmente, garantindo que, ao existirem  $\{x_j : 0 \leq j \leq n\}$ , garantimos também que esses são parte do intervalo de integração, pois  $x_j$  está confinado entre  $a$  e  $b$ .

**Exercício:**

**Seja  $\{p_k\}$  uma família de polinômios ortogonais em relação ao produto interno:**

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx$$

**Com grau de  $p_k$  igual a  $k$ . Prove que para todo  $n \geq 1$ ,  $p_n$  tem  $n$  raízes reais distintas contidas no intervalo aberto  $(a, b)$ . Se  $\{q_k\}$  for outra família de polinômios ortogonais em relação ao mesmo produto interno, então  $q_n$  tem as mesmas raízes que  $p_n$ .**

Como visto anteriormente, no caso da existência de uma família de polinômios ortogonais em relação ao produto interno especificado, prova-se que esta possui suas  $n$  raízes reais no intervalo  $(a, b)$  quando chega-se em:

$$[(b - x_1) \dots (b - x_n)] = 0$$

$$[(a - x_1) \dots (b - x_n)] = 0$$

No caso, basta que façamos:

$$p_n(x) = C \cdot \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

$$x(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

Portanto

$$p_n(x) = C \cdot x(x)$$

Enquanto

$$q(x) = p_{n-1}(x)$$

Rearranjando os termos fica evidente que vale

$$\int_a^b p_n(x) \cdot p_{n-1}(x) dx = \int_a^b C \cdot x(x) \cdot q(x) dx = 0$$

Realiza-se o mesmo procedimento que foi usado para provar que as raízes de  $x(x)$  são pertencentes ao intervalo  $(a, b)$ . E assim, prova-se que:

**Para todo  $n \geq 1$ ,  $p_n$  tem  $n$  raízes reais distintas contidas no intervalo aberto  $(a, b)$ .**

Para provar que  $q_n$  tem as mesmas raízes que  $p_n$ , basta que lembremos da fórmula de recorrência para gerar polinômios mônicos ortogonais.

$$G_{-1}(x) = 0$$

$$G_0(x) = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle x \cdot G_0, G_0 \rangle}{\langle G_0, G_0 \rangle}$$

$$\beta_1 = \frac{\langle x \cdot G_{-1}, G_{-1} \rangle}{\langle G_{-1}, G_{-1} \rangle}$$

$$G_1(x) = (x - \alpha_1)G_0 - \beta_1 G_{-1}(x)$$

Com isso temos que genericamente:

$$\alpha_n = \frac{\langle x \cdot G_{n-1}, G_{n-1} \rangle}{\langle G_{n-1}, G_{n-1} \rangle}$$

$$\beta_n = \frac{\langle x \cdot G_{n-2}, G_{n-2} \rangle}{\langle G_{n-2}, G_{n-2} \rangle}$$

$$G_n(x) = (x - \alpha_n)G_{n-1} - \beta_n G_{n-2}(x)$$

Com isso podemos obter uma família de polinômios ortogonais mônicos a depender somente do intervalo de integração definido no produto interno. Como  $q_n$  e  $p_n$  são ambos ortogonais ao mesmo produto interno, então pode-se concluir que cada polinômio de grau menor ou igual a  $n$  da família  $q_n$  é uma combinação linear dos polinômios de grau também menor ou igual a  $n$  de  $G_n$ , e o mesmo vale para  $p_n$ . Portanto, ambos terão as mesmas raízes.

Após observar quais serão os pontos, as raízes do polinômio de Legendre, escolhidos para o cálculo da integral, e conhecendo uma forma de encontrar os pesos associados a cada raiz, chegamos ao ponto de calcular a integral, por assim dizer, de qualquer polinômio de grau menor ou igual a  $2n - 1$ . No entanto estamos restritos a realizar esse cálculo apenas no intervalo  $[-1; 1]$ , e sabemos que as aplicações mais relevantes se darão fora de um intervalo fixo. Buscamos então uma forma de utilizar o que conhecemos até então para calcular em um intervalo genérico  $[a; b]$ .

**Exercício:** “Outros valores de  $n$  e seus respectivos  $n$ ’os e pesos podem ser usados. Devido à paridade, as raízes dos polinômios de Legendre são simétricas em torno da origem, e cada par  $-x_j$  e  $x_j$  de raízes simétricas tem o mesmo peso  $\omega_j$ . Note que conhecendo as fórmulas de Gauss para o intervalo  $[-1, 1]$ , podemos obter as fórmulas de Gauss em qualquer intervalo  $[a, b]$  usando mudança de variável. Os nós são linearmente transportados do intervalo  $[-1, 1]$  para o intervalo  $[a, b]$  e os pesos são multiplicados por um fator de escala (qual?)”

Para encontrarmos as raízes basta realizarmos um transporte linear, de forma que cada raiz será redefinida a depender do intervalo escolhido. Isso é feito de forma simples:

$$1 = \alpha \cdot b + \beta$$

$$-1 = \alpha \cdot a + \beta$$

$$2 = \alpha(b - a)$$



$$\alpha = \frac{2}{b-a}$$

$$\beta = 1 - \frac{2b}{b-a}$$

Com isso faremos o transporte das raízes com:

$$h(x_j) = \frac{2}{b-a} (x_j - b) + 1$$

Quanto aos pesos, sabemos que eles serão corrigidos pela multiplicação de um fator de escala. Qual será ele? Faremos da seguinte forma:

$$\omega_i = \int_a^b Li(x)dx = K \int_{-1}^1 Li(x)dx$$

$$\omega_i = \int_{-1}^1 Li(y(x))dx = K \int_{-1}^1 Li(x)dx$$

$$y(x) = \alpha \cdot x + \beta$$

$$Li(x) = \prod_{(k \neq i)} \prod_{(k=1)}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

$$K = \frac{\int_{-1}^1 Li(x)dx}{\int_{-1}^1 Li(y(x))dx} = \frac{\int_{-1}^1 \prod \frac{x - x_k}{x_i - x_k} dx}{\int_{-1}^1 \prod \frac{\alpha x + \beta - \alpha x_k - \beta}{\alpha x_i + \beta - \alpha x_k - \beta} dx}$$

Fica claro que, na porção inferior da fração, os coeficientes  $\beta$  se cancelam e que podemos deixar o coeficiente  $\alpha$  em evidência, de forma que, se este não for zero, também se cancela. Lembramos que, se  $\alpha = 0$  acabamos por fazer ambos os limites da integral se tornarem o mesmo valor,  $\beta$ , e por conseguinte, teríamos  $\int dx = 0$  para qualquer função. Obtemos com isso:

$$K = \frac{\int_{-1}^1 \prod \frac{x - x_k}{x_i - x_k} dx}{\int_{-1}^1 \prod \frac{x - x_k}{x_i - x_k} dx} = 1$$

Agora temos tudo que é necessário para utilizar os métodos apresentados para realizar o cálculo de forma geral, aplicável a qualquer polinômio, teoricamente de qualquer grau, em quaisquer limites forem dados.

Lembrando que a fórmula de Gauss é:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^n \omega_j \cdot f(x_j)$$

## Aplicação dos conceitos por meio de exemplos:

### Exemplo 1.1:

Calcular o volume do cubo cujas arestas têm comprimento 1.

Resposta:

Nosso objetivo é extrair uma função  $f(x, y)$  tal que  $\int \int f(x, y) dx = \int F(x) dx$ . O objetivo é que possamos aplicar o método de Gauss para integrais duplas para obter os valores. Nesse primeiro exemplo podemos nos guiar pelo conhecimento prévio da resposta, além de ser um exemplo simples. Dessa forma:

- $f(x, y) = 1$
- $g(x) = 0 ; h(x) = 1$

$$\int_0^1 \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

Dessa forma, podemos rapidamente chegar em:

$$\int_0^1 dx = 1$$

Observações:

- Nossa função é  $P_0$ , portanto, seguindo que  $\kappa \leq 2n - 1$  chegamos que  $\frac{1}{2} \leq n$ , e como  $n$  é inteiro positivo  $n \geq 1$ .
- Não será necessário utilizar funções nos limites da integral, apenas valores exatos.
- Nossa função é  $f(x, y) = 1$

O motivo pelo qual essa integral deve assumir valores exatos exceto por erros de arredondamento provém do fato de que tal integral dupla não possui função de grau algum, e seus limites são constantes. Dessa forma, não há aplicação de fato do método de Gauss, de modo que nosso algoritmo apenas faz o cálculo de cada porção da forma geométrica, além de que, como visto no desenvolvimento teórico, o algoritmo deve resultar em um valor exato para  $k \leq 2n - 1$ .

Valores encontrado pelo código:

Ao executar o código com  $n = 6, 8$  e  $10$ , e utilizando a precisão de  $10e-16$ , o valor máximo de casas com as quais o Python3 trabalha, obtivemos os seguintes resultados:

$$n = 6 \Rightarrow I = 0.9999999999999988$$

$$n = 8 \Rightarrow I = 1.0000000000000024$$

$$n = 10 \Rightarrow I = 0.9999999999999746$$

Por observação dos valores, vemos que valores elevados para o número de nós fazem com que se acumule erros de arredondamento. Por conta disso foi testado  $n = 2$ :

$$n = 2 \Rightarrow I = 1.0$$

Por conta de valores de  $n$  elevados evidenciarem erros de arredondamento foi executado o seguinte teste:

$$n = 22 \Rightarrow I = 0.9999999930847404$$

A forma com que o algoritmo foi desenvolvido não permite que se teste com  $n = 1$ . Conclui-se que, mesmo no caso em que  $n = 22$  temos uma boa aproximação, abrangendo até a 8ª casa decimal.

### Exemplo 1.2:

Calcular o volume do tetraedro com vértices  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  e  $(0,0,1)$

Resposta:

Para obter a equação do plano iremos utilizar dois vetores e um ponto. Dessa forma:

$$\vec{u} = (-1,0,1)$$

$$\vec{v} = (-1,1,0)$$

$$P = (1,0,0)$$

Dessa forma teremos uma equação vetorial do plano:

$$\chi = P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

Para encontrar os valores que satisfarão nossos  $\lambda$  e  $\mu$  simplesmente montamos equações vetoriais com dois pontos existentes no plano que queremos. Dessa forma teremos:

$$\lambda = 1$$

$$\mu = 1$$

Sabendo que  $\chi = (x, y, z)$  montamos a equação algébrica do plano a partir da relação

$$\begin{vmatrix} (\chi - P) \\ \lambda \vec{u} \\ \mu \vec{v} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + y + z = 1$$

Com isso podemos repetir o processo realizado no exemplo 1.1:

- $f(x, y) = 1 - x - y$
- $g(x) = 0; h(x) = 1 - x$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x - y \, dy \, dx &= \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (x-1)^2 \, dx = \frac{1}{6} \cong 0.16666 \dots \end{aligned}$$

Observações:

- Nossa função é do tipo  $P_2$ , portanto, seguindo que  $\kappa \leq 2n - 1$  chegamos que  $\frac{3}{2} \leq n$ , e como  $n$  é inteiro positivo  $n \geq 2$ .
- Os limites da integral serão dados por funções em  $x$ .
- Nossa função é  $f(x, y) = 1 - x - y$

Valores encontrado pelo código:

Ao executar o código com  $n = 6, 8$  e  $10$ , e utilizando a precisão de  $10e-16$ , obtivemos os seguintes resultados:

$$n = 6 \Rightarrow I = 0.1666666666666665$$

$$n = 8 \Rightarrow I = 0.16666666666666673$$

$$n = 10 \Rightarrow I = 0.16666666666666624$$

Por observação dos valores, vemos que, novamente, ocorre um certo acúmulo de erros de arredondamento. Por conta disso foi testado também  $n = 2$ :

$$n = 2 \Rightarrow I = 0.16666666666666669$$

Novamente o acúmulo de erros de arredondamento é um fator determinante no cálculo. Por conta de se observar isso no extremo menor do número de nós, foi também testado um valor relativamente alto para observar essa influência:

$$n = 22 \Rightarrow I = 0.16666666496689309$$

Conclui-se que, mesmo no caso em que  $n = 22$ , o valor encontrado até a 8ª casa decimal ainda possui grande precisão. No entanto, prevê-se que, para  $n \gg 22$  já não se aplique tal análise.

### Exemplo 2:

Considerando-se:

$$\int_0^1 \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

A área da região no primeiro quadrante limitada pelos eixos e pela curva  $y = 1 - x^2$  pode ser obtida por:

$$A = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x^2} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^{\sqrt{1-y}} dx \right] dy = \frac{2}{3}$$

Calcule numericamente as duas integrais duplas acima e observe os resultados.

Resposta:

Devido à função a ser integrada somente ser polinomial em um dos casos espera-se um mau comportamento na obtenção das integrais no caso em que o limite superior da integral interna é  $\sqrt{1-y}$ .

Observações:

- Será considerado que  $f_1(x)$  é a equação a ser integrada à esquerda, e  $f_2(x)$  a equação a ser integrada à direita.
- Nossa função 1 é  $P_2$ , portanto, seguindo que  $\kappa \leq 2n - 1$  chegamos que  $\frac{3}{2} \leq n$ , e como  $n$  é inteiro positivo  $n \geq 2$ . Nossa função 2 não se aplica a este conceito, mas pode-se dizer que é  $P_{\frac{1}{2}}$ , portanto  $\frac{3}{4} \leq n$
- Em um dos casos os limites da função são bem comportados, no outro implica em calcular a integral de uma função não polinomial.
- Nossas funções são  $f_1(x) = 1 - x^2$  e  $f_2(y) = \sqrt{1-y}$ . É a existência dessa segunda função que nos faz esperar valores pouco precisos ou até mesmo caóticos.

#### Valores encontrado pelo código – Função 1:

Ao executar o código com  $n = 6, 8$  e  $10$ , para  $f(x, y) = 1$ ;  $g(x) = 0$ ;  $h(x) = 1 - x^2$  e utilizando a precisão de  $10e-16$ , obtivemos os seguintes resultados:

$$n = 6 \Rightarrow I = 0.6666666666666657$$

$$n = 8 \Rightarrow I = 0.6666666666666659$$

$$n = 10 \Rightarrow I = 0.6666666666666648$$

Neste teste não se observou com tanta intensidade o acúmulo de erros por arredondamento, e por conta disso foram realizados outros 2 testes, com  $n$  extremamente alto e  $n$  extremamente baixo, assim como anteriormente.

$$n = 2 \Rightarrow I = 0.6666666666666666$$

O acúmulo de erros novamente está se revelando como considerável.

$$n = 22 \Rightarrow I = 0.666666661126602$$

Conclui-se que, mesmo no caso em que  $n = 22$ , temos efetivamente a obtenção do valor exato da integral, caso se considere o valor encontrado até a 8ª casa decimal. No entanto, prevê-se que, para  $n \gg 22$  já não se aplique tal análise.

#### Valores encontrado pelo código – Função 2:

Ao executar o código com  $n = 6, 8$  e  $10$ , para  $f(x, y) = 1$ ;  $g(x) = 0$ ;  $h(x) = \sqrt{1 - x}$  e utilizando a precisão de  $10e-16$ , obtivemos os seguintes resultados:

$$n = 6 \Rightarrow I = 0.6670464379156129$$

$$n = 8 \Rightarrow I = 0.666835580100176$$

$$n = 10 \Rightarrow I = 0.6667560429364907$$

Neste teste não se observou acúmulo de erros por arredondamento, pelo contrário, e por conta disso foram realizados outros 2 testes, assim como anteriormente.

$$n = 2 \Rightarrow I = 0.6738873386790492$$

$$n = 22 \Rightarrow I = 0.6666757097107385$$

Agora percebe-se que, quanto maior o  $n$ , maior a precisão do resultado. Nenhum dos casos pode-se considerar que o valor foi exato, pois foi alcançada a precisão no máximo até a quarta casa decimal.

#### Exemplo 3:

Considere a superfície descrita por  $z = e^{\frac{y}{x}}$ ,  $0.1 \leq x \leq 0.5$ ,  $x^3 \leq y \leq x^2$ . Calcule a sua área e o volume da região abaixo dela.

Obs: A área de uma superfície de equação  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}$  é:

$$V = \int \int_R \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dx dy$$

Com essas informações temos como discriminar duas funções, uma para a área e outra para o volume, sendo o volume encontrado pela integral:

$$\int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^2} e^{\left(\frac{y}{x}\right)} dy dx = 0.0333056$$

E sendo a área encontrada pela integral:

$$\int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^2} \sqrt{\frac{y^2 e^{\frac{2y}{x}}}{x^4} + \frac{e^{\frac{2y}{x}}}{x^2} + 1} dy dx = 0.105498$$

Com  $f_1(x, y)$  a função que, ao ser integrada, nos dará o volume, e com  $f_2(x, y)$  a função que, ao ser integrada nos dará a área da superfície.

Valores encontrado pelo código – Função 1:

Ao executar o código com  $n = 6, 8$  e  $10$ , para  $f(x, y) = e^{\left(\frac{y}{x}\right)}$ ;  $g(x) = x^2$ ;  $h(x) = x^3$  e utilizando a precisão de  $10e-16$ , obtivemos os seguintes resultados:

$$n = 6 \Rightarrow I = 0.03330556611623714$$

$$n = 8 \Rightarrow I = 0.03330556611623223$$

$$n = 10 \Rightarrow I = 0.033305566116231304$$

Neste teste não se observou acúmulo de erros por arredondamento, pelo contrário, e por conta disso foram realizados outros 2 testes, assim como anteriormente.

$$n = 2 \Rightarrow I = 0.0333453874623914$$

$$n = 22 \Rightarrow I = 0.03330556591587115$$

Devido à incapacidade de se calcular a integral exata com mais casas decimais, não se garante até qual casa decimal está garantida a resposta, no entanto, vemos que para valores elevados de  $n$ , as casas decimais tendem a convergir.

Valores encontrado pelo código – Função 2:

Ao executar o código com  $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 19, 21$  e  $22$ , para  $f(x, y) =$

$\sqrt{\frac{y^2 e^{\frac{2y}{x}}}{x^4} + \frac{e^{\frac{2y}{x}}}{x^2} + 1}$ ;  $g(x) = x^2$ ;  $h(x) = x^3$  e utilizando a precisão de  $10e-16$ , obtivemos os seguintes resultados:

$$n = 2 \Rightarrow I = 0.10556566936548893$$

$$n = 4 \Rightarrow I = 0.10549788363428579$$

$$n = 6 \Rightarrow I = 0.10549788240049773$$

$$n = 8 \Rightarrow I = 0.10549788240052049$$

$$n = 10 \Rightarrow I = 0.1054978824005173$$

$$n = 12 \Rightarrow I = 0.10549788240056437$$

$$n = 15 \Rightarrow I = 0.10549788240099833$$

$$n = 19 \Rightarrow I = 0.10549788241067914$$

$$n = 21 \Rightarrow I = 0.10549788239322666$$

$$n = 22 \Rightarrow I = 0.10549788166313445$$

Devido à incapacidade de se calcular a integral exata com mais casas decimais, não se garante até qual casa decimal está garantida a resposta. Calculando-se para diversos valores de  $n$  vemos que os valores se tornam um tanto caóticos.

#### Exemplo 4:

Considere uma região fechada  $R$  do plano  $xy$  e seja  $\gamma$  uma reta no mesmo plano, que não intercepta o interior de  $R$ . O volume  $V$  do sólido de revolução obtido pela rotação da região  $R$  em torno de  $\gamma$  é

$$V = 2\pi \int \int_R d_\gamma(x, y) dx dy$$

Onde  $d_\gamma(x, y)$  é a distância do ponto  $(x, y)$  até a reta  $\gamma$ . Use esta expressão para calcular o volume da calota esférica de altura  $\frac{1}{4}$  da esfera de raio 1, e o volume do sólido de revolução obtido da rotação da região delimitada por  $x = 0$ ;  $x = e^{-y^2}$ ;  $y = -1$ ;  $y = 1$ , em torno do eixo  $y$ .

Com essas informações iremos discriminar duas integrais. Para o volume do sólido de revolução em formato de calota esférica teremos:

A região delimitada é tal que

$$R = \left\{ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \mid 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{7}}{4}; \frac{3}{4} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

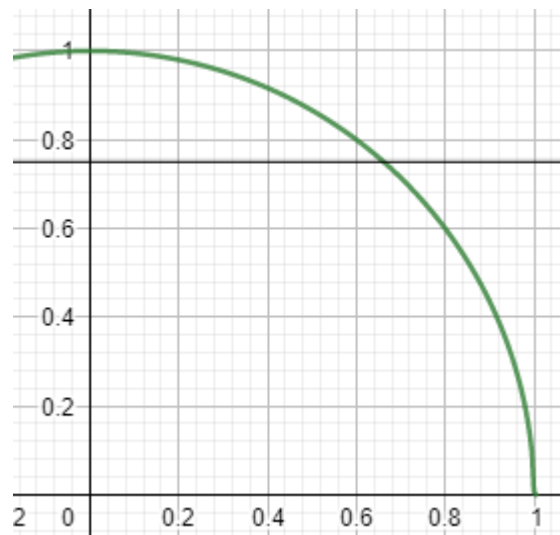
A fórmula pra calcular o volume da calota esférica é

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3r - h^2)$$

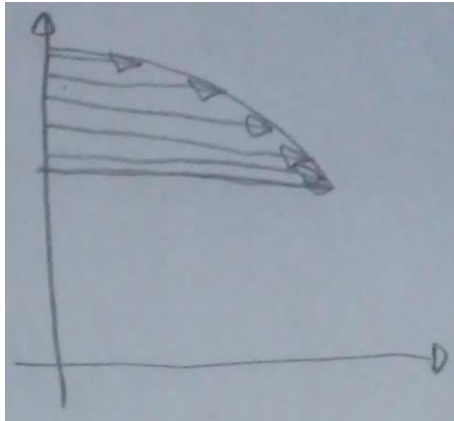
Com  $r = 1$  e  $h = \frac{1}{4}$  temos  $V = 0.17998707911191522$

Mas isso ainda não resolve a integral

$$V = 2\pi \int \int_R d_\gamma(x, y) dx dy$$



Queremos a área que também corresponde aos limites da região R, entre a curva verde e a curva cinza. Temos com isso nossos limites de integração. Como queremos  $\gamma$  sendo o eixo  $y$  podemos fazer  $d_\gamma(x, y) = \sqrt{(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2}$ . A distância até o eixo formará uma quantidade de linhas horizontais (na direção de  $x$ ).



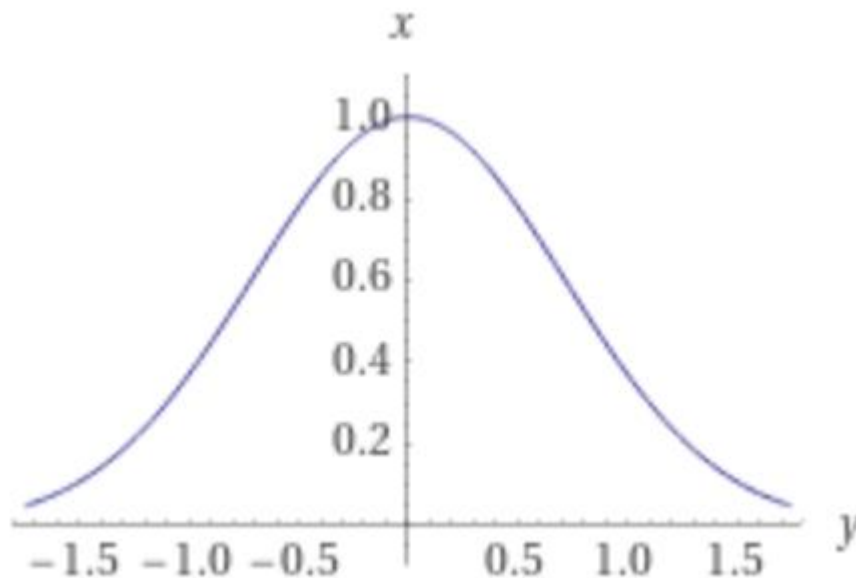
Quando escolhermos nossos pontos teremos que a distância  $(y - y_0) = 0$ , devido à natureza da integração. A distância, dessa forma será dada como

$$d_\gamma(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2}, \text{ mas } x_0 = 0, \text{ então } d_\gamma(x, y) = |x|$$

Finalmente temos o que é preciso para a primeira integral. Para a segunda tomamos

$$R = \{0 \leq x \leq e^{-y^2}; -1 \leq y \leq 1\}$$

Analogamente à primeira função, teremos que a distância é o módulo de uma coordenada, mas nesse caso será  $d_\gamma(x, y) = |y|$



Valores encontrado pelo código – Função 1:

Ao executar o código com  $n = 6, 8$  e  $10$ , para  $d_\gamma(x, y) = |x|$ ;  $g(x) = \frac{3}{4}$ ;  $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$  e utilizando a precisão de  $10e-16$ , obtivemos os seguintes resultados:



$$n = 6 \Rightarrow I = 0.17998708490297827$$

$$n = 8 \Rightarrow I = 0.1799870791297171$$

$$n = 10 \Rightarrow I = 0.1799870791119706$$

Neste exemplo vemos a convergência para o valor exato à medida que se aumenta o número de nós  $n$ . Novamente calculamos dois valores de  $n$  para melhor analisarmos o comportamento do algoritmo.

$$n = 2 \Rightarrow I = 0.18158007546387728$$

$$n = 22 \Rightarrow I = 0.17998707752513193$$

Vemos que para valores elevados de  $n$ , as casas decimais tendem a convergir para o valor exato  $I = 0.17998707911191522$

Valores encontrado pelo código – Função 2:

Ao executar o código com  $n = 6, 8$  e  $10$ , para  $d_\gamma(x, y) = |y|$ ;  $g(x) = 0$ ;  $h(x) = e^{-x^2}$  e utilizando a precisão de  $10e-16$ , obtivemos os seguintes resultados:

$$n = 6 \Rightarrow I = 3.7581650328967044$$

$$n = 8 \Rightarrow I = 3.758249262439461$$

$$n = 10 \Rightarrow I = 3.758249633209269$$

Neste exemplo vemos a convergência para o valor exato à medida que se aumenta o número de nós  $n$ . Novamente calculamos dois valores de  $n$  para melhor analisarmos o comportamento do algoritmo.

$$n = 2 \Rightarrow I = 3.225894898760055$$

$$n = 22 \Rightarrow I = 3.7582496038170015$$

Vemos que para valores elevados de  $n$ , as casas decimais tendem a convergir para o valor exato  $I = 3.7582496342318343$

## Conclusão

Pela observação dos dados, manipulação e implementação do código em linguagem de programação foi possível obter uma maior familiaridade com os métodos numéricos expostos tanto em aula como no desenvolvimento teórico do próprio enunciado.

Apesar de o método escolhido ser destinado a integrar polinômios, tal ferramenta funciona satisfatoriamente bem para outros tipos de funções, inclusive para limites quaisquer.

Para funções polinomiais foi observado que a melhor aproximação será aquela em que temos o menor número de nós possível e aceitável, devido à erros de arredondamento. Para outras funções em geral foi observado o comportamento oposto, sendo um maior número de nós levando à convergência.

Em um caso em específico, da função 2 do exemplo 3, mostrou-se que nem sempre tal algoritmo irá simplesmente convergir para sua resposta exata.

De toda forma, os resultados para fins práticos foram satisfatórios, e, em termos de usabilidade, o algoritmo possui grande potencial para aplicação, como também possui potencial como projeto de programação, pois é preciso admitir que poderia ser intensamente otimizado, e que sua implementação poderia utilizar de ferramentas mais adequadas.

Quanto à comunicação durante a elaboração do presente trabalho, o grupo mergulhou nos conceitos, e evoluiu de forma a alcançar o nível de debates de abstração complexa dos elementos componentes dessa tarefa. A aplicação em si trouxe à luz que teorias numéricas estão a favor de soluções de problemas no mundo real, e que tais ferramentas não estão num patamar inalcançável, e que existem para que possamos usufruir de suas vantagens e particularidades.

O tempo empregado para concluir-se este trabalho também foi elemento decisivo para o amadurecimento deste, que evoluiu em versões, sendo esta final a sétima versão. Os meses utilizados para o desenvolvimento foram esclarecedores e elucidantes. De forma geral, o grupo se orgulha do que foi desenvolvido e espera que o futuro traga outros desafios tais como esse.