Dans ce mémo, on montre que numéroter les tuiles pour les identifier directement par les cartes tactiques produit les mêmes répartitions aléatoires qu'identifier les tuiles par des positions numérotées et fixes du terrain.

Définissons quatre ensembles :

- L'ensemble $\mathcal{T}$ des tuiles.
- L'ensemble $\mathcal{X}$ des positions du terrain.
- L'ensemble $\mathcal{C}$ des cartes tactiques.
- L'ensemble $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, 37\}$ qui permet d'indexer les ensembles $\mathcal{T}$, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{C}$.

Pour formaliser les deux procédures de sélections aléatoires des tuiles et des positions, définissons plusieurs applications. Les applications aléatoires reçoivent un indice « $*$ » et sont coloriées afin de bien les repérer.

- La pose aléatoire des tuiles sur le terrain $\mathcal{X}$ est représentée par l'application aléatoire T_* :
$$T_* : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$$
- La pioche mélangée des cartes tactiques est représentée par l'application aléatoire P_* :
$$P_* : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$$
- Le numéro inscrit sur chaque carte est représenté par l'application déterministe I :
$$I : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$$
- Le numéro inscrit sur chaque tuile est représenté par l'application déterministe J :
$$J : \mathcal{N} \to \mathcal{T}$$
- Les positions numérotées du terrain sont représentées par l'application déterministe K :
$$K : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$$

La **première procédure**, exécutée à l'instant « n », consiste à :

- Prendre la carte tactique au sommet de la pioche : $c = P_*(n)$.
- Interpréter le numéro « $i = I^{-1}(c)$ » inscrit sur cette carte comme une position de terrain numérotée « $x = K(i)$ ».
- Sélectionner la tuile « $t = T_*(x)$ » à cette position « x ».
- La procédure complète correspond à l'enchaînement suivant :
$$\mathcal{N} \xrightarrow{P_*} \mathcal{C} \xrightarrow{I^{-1}} \mathcal{N} \xrightarrow{K} \mathcal{X} \xrightarrow{T_*} \mathcal{T}$$
- La tuile est sélectionnée par l'application suivante :
$$T_* \circ K \circ I^{-1} \circ P_*$$
- La position de terrain est sélectionnée par l'application :
$$K \circ I^{-1} \circ P_*$$

La **seconde procédure**, exécutée à l'instant « n », consiste à :

- Prendre la carte tactique au sommet de la pioche : $c = P_*(n)$.
- Interpréter le numéro « $i = I^{-1}(c)$ » inscrit sur cette carte comme indexant directement la tuile « $t = J(i)$ ».
- Cette tuile est trouvée en position « $x = T_*^{-1}(t)$ ».
- La procédure complète correspond à l'enchaînement suivant :
$$\mathcal{N} \xrightarrow{P_*} \mathcal{C} \xrightarrow{I^{-1}} \mathcal{N} \xrightarrow{J} \mathcal{T} \xrightarrow{T_*^{-1}} \mathcal{X}$$
- La tuile est sélectionnée par l'application suivante :

$$J \circ I^{-1} \circ P_*$$

- La position de terrain est sélectionnée par l'application :

$$T_*^{-1} \circ J \circ I^{-1} \circ P_*$$

Le tableau synthétique suivant permet de comparer les deux procédures :

Procédure	Sélection de la position	Sélection de la tuile
N°1	$K \circ I^{-1} \circ P_*$	$T_* \circ K \circ I^{-1} \circ P_*$
N°2	$T_*^{-1} \circ J \circ I^{-1} \circ P_*$	$J \circ I^{-1} \circ P_*$

Notons que les séquences « $K \circ I^{-1}$ » et « $J \circ I^{-1}$ » sont déterministes et bijectives. Donc ces séquences ne biaisent pas les distributions de probabilités.

$$\mathcal{C} \xrightarrow{K \circ I^{-1}} \mathcal{X} \quad ; \quad \mathcal{C} \xrightarrow{J \circ I^{-1}} \mathcal{T}$$

Synthèse :

- Les deux procédures mettent en œuvre les deux sources indépendantes d'aléa, T_* et P_*.
- Dans la procédure n°1, la position repose uniquement sur P_* et la tuile repose sur P_* et T_*.
- Dans la procédure n°2, la position repose sur P_* et T_* et la tuile repose uniquement sur P_*.

Conclusion : les **deux procédures** sont **équivalentes** du point de vue des répartitions aléatoires des tuiles et de leurs positions. Numéroter les tuiles est donc une solution viable.