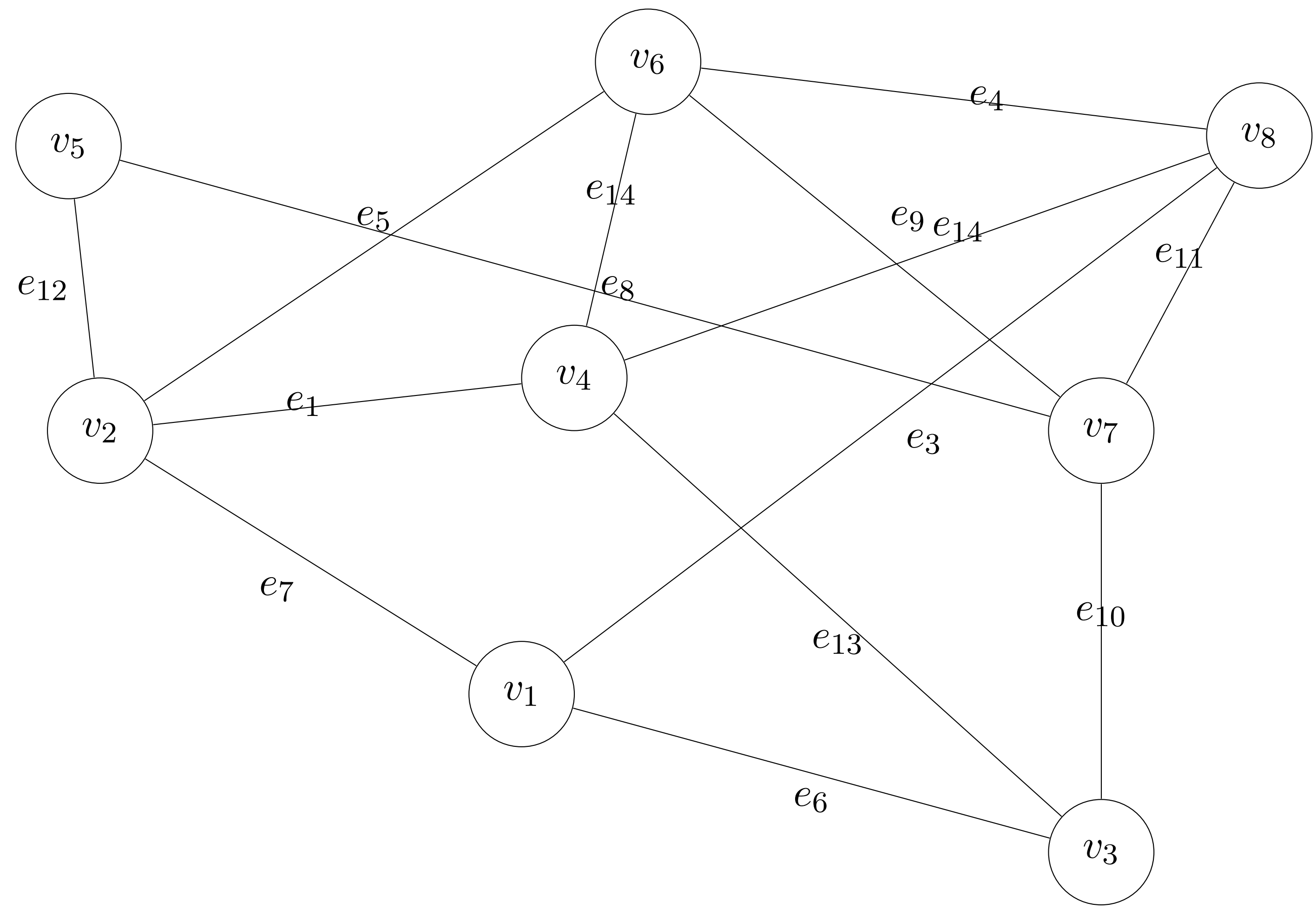
Trabalho de Teoria dos Grafos

Aluno: Guilherme Leitão Bastos, Lucas Barbosa de Oliveira
Professor: Glauber Ferreira Cintra
Disciplina: Grafos

20 de julho de 2025

Questão 1

Seja G o grafo abaixo, utilizado nas questões de 1 a 4. Exiba uma trilha aberta de Euler e uma trilha fechada de Euler em G. Se não for possível, justifique.



Resposta:

$$v_1 \xrightarrow{e_7} v_2 \xrightarrow{e_1} v_4 \xrightarrow{e_{13}} v_3 \xrightarrow{e_6} v_1 \xrightarrow{e_3} v_8 \xrightarrow{e_4} v_6 \xrightarrow{e_9} v_7 \xrightarrow{e_8} v_5 \xrightarrow{e_{12}} v_2 \xrightarrow{e_5} v_6 \xrightarrow{e_{14}} v_4 \xrightarrow{e_{14}} v_8 \xrightarrow{e_{11}} v_7 \xrightarrow{e_{10}} v_3$$

No grafo apresentado, não existe uma trilha de Euler fechada porque há exatamente dois vértices com grau ímpar. Segundo o teorema de Euler, para que um grafo conexo possua uma trilha de Euler fechada (também chamada de circuito euleriano), todos os seus vértices devem ter grau par. Caso contrário, se houver exatamente dois vértices de grau ímpar, só é possível existir uma trilha de Euler aberta, que começa em um vértice ímpar e termina no outro. Portanto, a presença desses dois vértices ímpares impede a existência de um caminho fechado que percorra todas as arestas exatamente uma vez.

Questão 2

Exiba uma representação planar de G. Se não for possível, justifique.

Resposta:

Questão 3

Seja x o índice cromático de G. Determine x. Exiba uma x-aresta-coloração de G e indique se ela é equilibrada. Justifique por que não existe uma aresta-coloração própria para G que utilize menos de x cores.

Resposta:

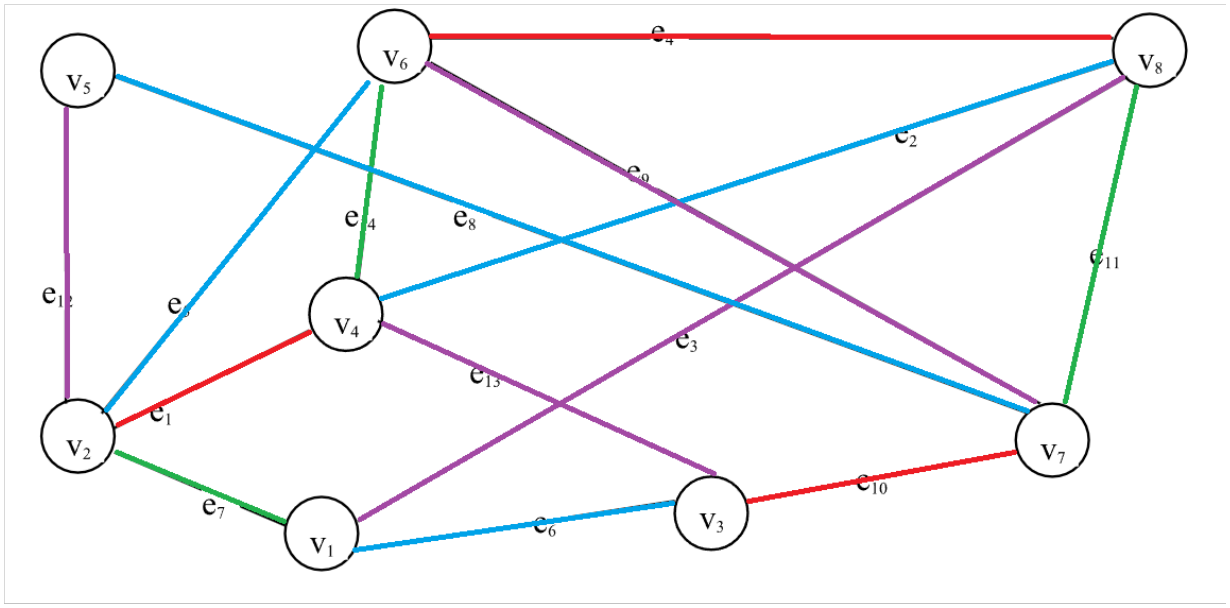


Figura 1: x-aresta-coloração

Não existe uma aresta-coloração própria para o grafo G que utilize menos de 4 cores porque o grau máximo do grafo é 4, o que implica, pelo teorema de Vizing, que o número cromático das arestas $\chi'(G)$ é igual a 4 ou 5. Como o grau mínimo é 3 e o grafo é suficientemente conectado, para evitar que arestas adjacentes compartilhem a mesma cor, são necessárias no mínimo 4 cores para colorir todas as arestas de forma própria. Isso ocorre porque cada vértice de grau 4 tem 4 arestas incidentes, todas precisando de cores distintas para garantir que não haja conflito, logo, com menos de 4 cores não é possível realizar uma coloração própria das arestas.

Questão 4

Seja y o número cromático de G. Determine y. Exiba uma y-vértice-coloração de G e indique se ela é equilibrada. Justifique por que não existe uma vértice-coloração própria para G que utilize menos de y cores.

Resposta:

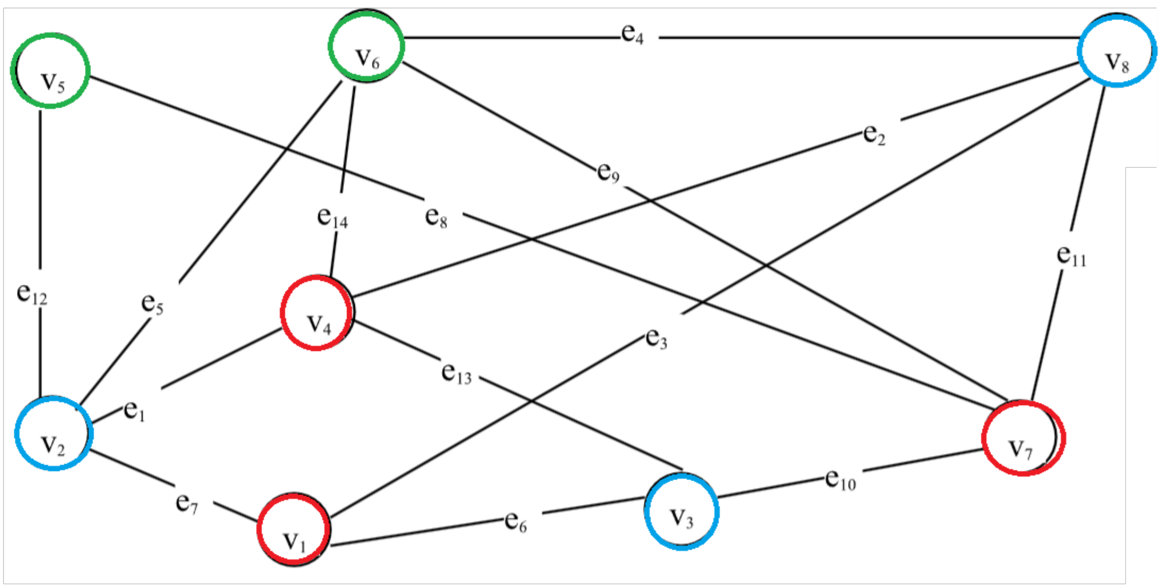


Figura 2: x-vértice-coloração

Não existe uma coloração própria dos vértices para o grafo G que utilize menos de 4 cores porque o grau máximo do grafo é 4, e pelo teorema de Brooks, o número cromático $\chi(G)$ do grafo é no máximo igual ao seu grau máximo, exceto em casos especiais. Como o grau mínimo é 3 e o grafo não é um grafo completo nem um ciclo ímpar, é necessário usar pelo menos 4 cores para garantir que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Assim, com menos de 4 cores não é possível fazer uma coloração própria dos vértices de G.

Questão 5

A tabela abaixo indica quais tarefas cada trabalhador está habilitado a executar. Atribua exatamente uma tarefa para cada trabalhador de modo que cada tarefa seja realizada por um trabalhador que esteja habilitado para executá-la.

Trabalhador\Tarefa	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Abel		✔					✔		
Brás				✔					✔
Caio			✔			✔			
Davi		✔							✔
Elza			✔				✔		
Fred	✔			✔		✔			
Geni					✔			✔	
Hugo					✔				✔
Iago	✔							✔	

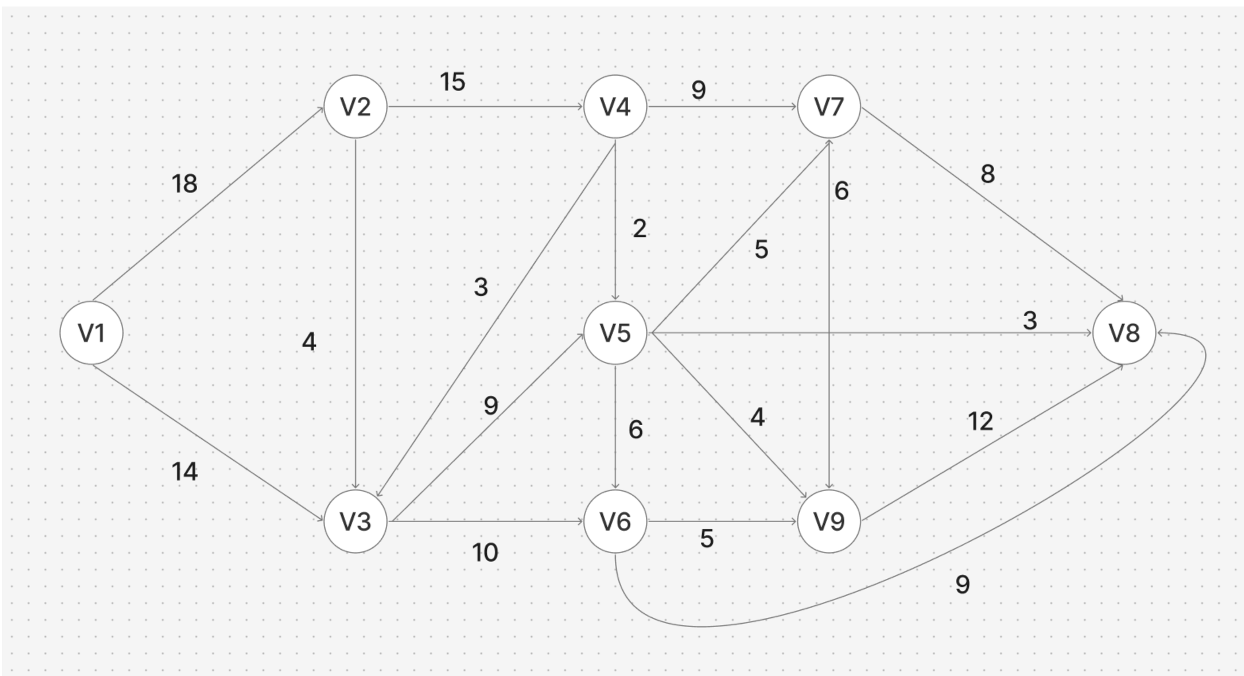
Resposta:

Questão 6

Determine um fluxo de volume máximo do vértice 1 para o vértice 8, na rede representada pela matriz de incidências abaixo. Exiba um (1,8)-corte com capacidade igual à do seu fluxo.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
v_1	-1	-1																
v_2	1		-1	-1														
v_3		1	1		1	-1	-1											
v_4				1	-1			-1		-1								
v_5						1		1	-1		-1	-1					-1	
v_6							1		1				-1					-1
v_7										1	1			-1	-1			
v_8												1	1	1		1		
v_9															1	-1	1	1
Capacidade	18	14	4	15	3	9	10	2	6	9	5	3	9	8	6	12	4	5

Resposta:



Questão 7

Toda floresta com pelo menos uma aresta possui número cromático igual a 2. Prove ou refute esta afirmação.

Resposta: Toda floresta com pelo menos uma aresta possui número cromático igual a 2 porque uma floresta é, por definição, um grafo acíclico, ou seja, uma união de árvores disjuntas. Toda árvore é bipartida, pois é possível colorir seus vértices com duas cores de forma que vértices adjacentes recebam cores diferentes, já que não há ciclos que possam causar conflitos de coloração. Essa coloração pode ser feita, por exemplo, por uma busca em largura (BFS), alternando as cores a cada nível. Como cada componente de uma floresta é uma árvore e todas são 2-coloríveis, a floresta como um todo também será 2-colorível, logo seu número cromático é igual a 2.