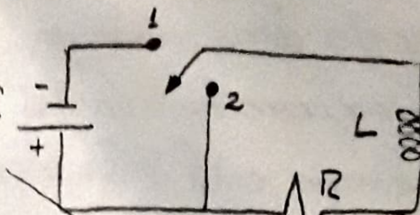
P4. Supongo que el interruptor de la figura está inicialmente en la posición 1.

8

a) Calcule la corriente que pasa através de la resistencia y la diferencia de potencial en los extremos de la bobina y en los extremos de la resistencia para todo instante de tiempo.

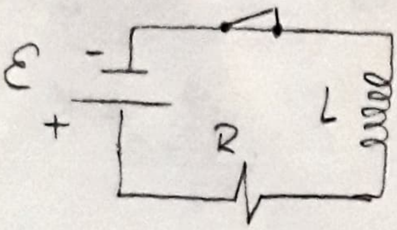
i_R en $t=0$ la bobina actúa como una llave abierta oponiendose al paso de la corriente.

ΔV_L

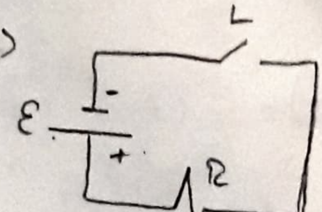


El campo magnetico de la bobina

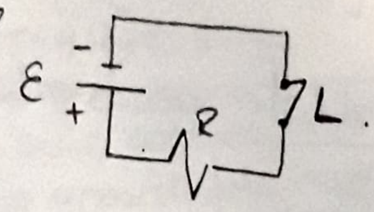
ΔV_R Circuito con la llave en la posición 1:



$t=0 \Rightarrow$



$t \to \infty$



$$i(t) = I_{máx} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t \cdot R}{L}}\right)$$

$$I_{máx} = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \forall t$$

$$\Delta V_L = L \cdot \frac{dI}{dt} \qquad \frac{dI}{dt} = I_{máx} \cdot \left(-e^{-\frac{tR}{L}}\right) \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) = \frac{R}{L} I_{máx} \left(e^{-\frac{tR}{L}}\right) = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-\frac{tR}{L}}$$

$$I_{máx} \to \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$\Delta V_L = \cancel{L} \frac{\mathcal{E}}{\cancel{L}} e^{-\frac{tR}{L}} = \mathcal{E} e^{-\frac{tR}{L}} \Rightarrow \Delta V_L = \mathcal{E} e^{-\frac{tR}{L}}$$

$$\boxed{\Delta V_L = \mathcal{E} e^{-\frac{tR}{L}}}$$

$$\Delta V_R = I(t) \cdot R = \frac{\mathcal{E}}{\cancel{R}} \left(1 - e^{-\frac{tR}{L}}\right) \cancel{R} = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{tR}{L}}\right)$$

$$\boxed{\Delta V_R = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{tR}{L}}\right)}$$

b) Calcule la tasa de variación de la energía en la bobina como función del tiempo:

tomamos el apartado de consideraciones energeticas:

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad \text{Potencia de la batería} = \text{Ef. Joule} + \frac{dU_B}{dt}$$

$$I\mathcal{E} = I^2R + IL\frac{dI}{dt} \qquad \frac{dU_B}{dt} = IL\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-\frac{tR}{L}} \Rightarrow \left[I\mathcal{E} e^{-t\frac{R}{L}}\right] = \frac{dU_B}{dt}$$

$$\frac{dU_B}{dt} = I\varepsilon e^{-t\frac{R}{L}} = \frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-t\frac{R}{L}})\varepsilon e^{-t\frac{R}{L}} = \frac{\varepsilon^2}{R}(1-e^{-t\frac{R}{L}})e^{-t\frac{R}{L}}.$$

c) Encuentre la expresión de la energía almacenada en la bobina como función del tiempo y la energía total almacenada en la misma.

La energía almacenada en la bobina como función del tiempo está dado por:

$$U_B = \int \left(\frac{dU_B}{dt}\right)dt \Rightarrow \frac{dU_B}{dt} = LI\frac{dI}{dt}.$$

$$U_B = \int \left[LI\frac{dI}{\cancel{dt}}\right]\cancel{dt} = \int LI\,dI = \frac{LI^2}{2}.$$

Donde $I = i(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-t\frac{R}{L}})$

$$(1-e^{-t\frac{R}{L}})^2 = 1-2e^{-t\frac{R}{L}}+e^{-2t\frac{R}{L}}$$

$$\therefore U_B(t) = \frac{L}{2}\left[\frac{\varepsilon^2}{R^2}(1-e^{-t\frac{R}{L}})^2\right].$$

$\therefore$ la energía total almacenada en la bobina está dado por:

$$\frac{1}{2}L\frac{\varepsilon^2}{R^2} = \boxed{\frac{1}{2}L(I_{máx})^2}.$$

d) Evalúe la potencia disipada en la resistencia y entregada por la batería como función del tiempo. Compare los resultados obtenidos con el calculado en c).

La potencia entregada por la batería como función del tiempo:

$$\varepsilon I(t) = \varepsilon\left[\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-t\frac{R}{L}})\right] = \frac{\varepsilon^2}{R}(1-e^{-t\frac{R}{L}}).$$

La potencia disipada por la Resistencia: como función del tiempo

$$I\Delta V_R(t) = I(t)I(t)R = I^2(t)R$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-t\frac{R}{L}})$$

$$I^2(t)R = \frac{\varepsilon^2}{R^{\cancel{2}}}(1-e^{-t\frac{R}{L}})^2\cancel{R} = \frac{\varepsilon^2}{R}(1-e^{-t\frac{R}{L}})^2.$$