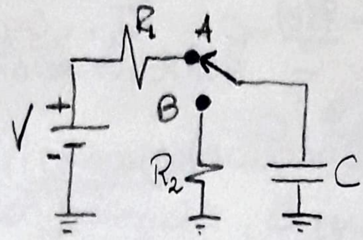
Trabajo Práctico N°10

P1. Un capacitor de capacitancia C se conecta a dos resistencias R_1 y R_2 y a una batería V



Inicialmente la llave se encuentra en la posición A

a) Calcule:
- Carga del Capacitor
- Corriente a través de R
- ΔV_C
- ΔV_R

$\forall t$

---

b) Grafique la función obtenida en a) en función del tiempo.

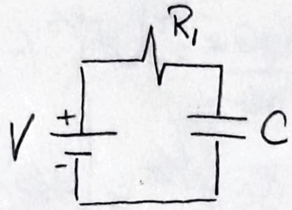
c) tasa de la energía del capacitor en función del tiempo

d) Encuentre la expresión de la energía almacenada en el capacitor en función del tiempo

e) Evalúe la potencia disipada en la Resistencia y entregada por la batería en función del tiempo.
Compare los resultados con el calculado en c) y discuta que sucede con la energía del sistema.

f) ¿Con la presencia de qué magnitud física está asociada la energía almacenada en el capacitor?

Dadas las circunstancias nuestro circuito tiene esta forma:



a) Se nos pide la carga del capacitor para todo instante de tiempo

donde $q(t) = Q_{máx}(1 - e^{-t/\tau})$; $\tau = RC$

la corriente a través de R donde $R = R_1$

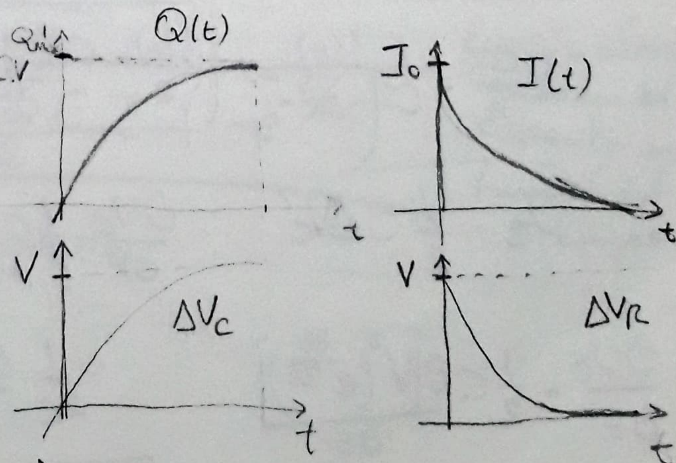
$\therefore I = \frac{V}{R_1} e^{-t/\tau}$

$$\Delta V_C = \frac{q(t)}{C} = \frac{\cancel{C} V(1-e^{-t/\tau})}{\cancel{C}} = V(1-e^{-t/\tau})$$

$$\Delta V_R = R_1 I(t) = R_1 \frac{V}{R_1} e^{-t/\tau} = V e^{-t/\tau}$$

---

b)



c) $\frac{\partial U_c}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2} C . \Delta V_c^2\right)}{\partial t} = \frac{1}{2} C . \frac{\partial\left[\frac{q(t)}{C}\right]^2}{\partial t} = \frac{1}{2C} . \frac{\partial q^2(t)}{\partial t}$

$q(t) = Q_{máx} . (1 - e^{-t/RC})$

c) Calcule la taza de variación del capacitor en función del tiempo

$$V - \Delta V_R - \Delta V_C = 0$$

$$V - I(t).R - \frac{q(t)}{C} = 0 \qquad I = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

$$q(t) = Q_{máx}.(1 - e^{-t/\tau})$$

$$I(t) = -\partial q / \partial t$$

$$IV - I^2R - \frac{Iq}{C} = 0$$

$$U_{capacitor} = \frac{I\,q(t)}{C} = I\Delta V_C$$

$$P = U_{\substack{ef. \\ Joule}} + U_{capacitor} \qquad \frac{\partial U_{capacitor}}{\partial t} = \frac{\partial (I\,\Delta V_C)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial q(t)}{\partial t} = \boxed{\frac{Q_{máx}}{C\varepsilon}}.(1 - e^{-t/\tau}).e^{-t/\tau}.(-1/\tau) \qquad \tau = RC$$

$$\frac{\partial q(t)}{\partial t} = \frac{(e^{-t/RC} - 1)\cancel{C}\varepsilon e^{-t/RC}}{R\cancel{C}} = \frac{\varepsilon e^{-t/RC}(e^{-t/RC} - 1)}{R} = I e^{-t/RC}(e^{-t/RC} - 1)$$

$$\frac{q(t)}{C}\frac{\partial q(t)}{\partial t} = \frac{1}{\cancel{C}}\cancel{C}\varepsilon(1 - e^{-t/RC}).I.e^{-t/RC}(e^{-t/RC} - 1)$$

$$= -\varepsilon I e^{-t/RC}(1 - e^{-t/RC})^2$$

$$i(t) = ?$$

Sí, lo que varía en un capacitor es la carga respecto del tiempo estamos hablando de corriente en el mismo que va a ser $\frac{\partial q}{\partial t}$.

$$\frac{\partial \Delta V_C}{\partial t} = [\partial \frac{q(t)}{C}]/\partial t = \frac{1}{C}\boxed{\frac{\partial q(t)}{\partial t}} = \frac{1}{C} i(t)$$

$$\frac{\partial \Delta V_C}{\partial t} = \frac{1}{C} i(t) \Rightarrow \boxed{i(t) = C\frac{\partial \Delta V_C}{\partial t}}$$

$$\boxed{U_C = \frac{1}{2}C\Delta V_C^2} \therefore \frac{\partial U_C}{\partial t} = \frac{1}{2}C\frac{\partial(\Delta V_C^2)}{\partial t} \to \frac{\partial\left[\left(\frac{q(t)}{C}\right)^2\right]}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{2C}\frac{\partial[q^2(t)]}{\partial t}$$

$$\frac{\partial U_C}{\partial t} = \frac{1}{2}C\frac{\partial[V^2(e^{-\frac{2t}{RC}})]}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{C}V^2 e^{-\frac{2t}{RC}}.\left(\frac{-\cancel{2}}{R\cancel{C}}\right) = \boxed{-\frac{V^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}}$$

Esto representa la pérdida de energía negativa en el capacitor durante el estado transitorio

d) Encuentre la expresión de

- La energía almacenada en el capacitor en función del tiempo. y.
- La energía total almacenada en el mismo.

②

Para esto partimos de la formula de kirchhoff

donde: $\mathcal{E} - V_R - V_C = 0$

$I\mathcal{E} - IV_R - IV_C = 0$

$P = IV_R + IV_C$

Partimos relacionando la formula con potencia de modo de llegar a la energía.

$V_R = I.R \quad V_C = \frac{q}{C}$

$P = \underbrace{I(t)R}_{\text{Potencia disipada por efecto Joule}} + \underbrace{I(t)\frac{q(t)}{C}}_{U_C}$

$U_C = -\frac{\partial q(t)}{\partial t}\frac{q(t)}{C}$

$q(t) = C\mathcal{E}(1-e^{-t/RC})$

$\frac{\partial q}{\partial t} = \cancel{C}\mathcal{E}(-e^{-t/RC}).(-1/R\cancel{C})$

$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\mathcal{E}e^{-t/RC}}{R_1} = Ie^{-t/RC}$

$= \left(-\frac{\mathcal{E}}{R_1}e^{-t/RC}\right).\left(\cancel{C}\mathcal{E}(1-e^{-t/RC})\right)\frac{1}{\cancel{C}} =$

$= -\frac{\mathcal{E}^2}{R_1}e^{-t/RC}(1-e^{-t/RC})$

$\boxed{\frac{1}{2}C\boxed{\mathcal{E}}^2}$

ΔV_C

$\Delta V_C = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q_{máx}(1-e^{-t/RC})}{C}$

$= \frac{\cancel{C}\mathcal{E}(1-e^{-t/RC})}{\cancel{C}}$

$U_C(t) = \frac{1}{2}C\left(\frac{q(t)}{C}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{2}C\,\mathcal{E}^2(1-e^{-t/R_1C})^2}$

Energía almacenada en el capacitor en función del Tiempo.

Energía total en el el capacitor:

$\boxed{U_C = \frac{1}{2}C\,\mathcal{E}^2}$

(e) Evalúe la potencia disipada por la Resistencia y entregada por la batería en función del tiempo.

$\mathcal{E}I$ es la potencia entregada por la batería

dónde: $\mathcal{E} I(t) = \mathcal{E}\dfrac{\partial q(t)}{\partial t} = \mathcal{E}\dfrac{Q_{máx}(1-e^{-t/RC})}{} = \mathcal{E} C\mathcal{E}(1-e^{-t/RC})$.

$= \boxed{C\mathcal{E}^2(1-e^{-t/RC})}$.

Potencia entregada por la batería en función del tiempo.

potencia disipada por la resistencia en función del tiempo:

$I(t)V_{R_1} = I(t)I(t).R_1$.

$= I^2(t)R_1 = \left(\dfrac{\mathcal{E}}{R_1}\right)^2(e^{-t/RC})^2.R_1 = \boxed{\dfrac{\mathcal{E}^2}{R_1}(e^{-t/RC})}$

La energía perdida por efecto Joule es igual a la tasa de variación de la energía en el capacitor.

f) ¿Con la presencia de que magnitud física está asociada la Energía en el capacitor?

$k_e = 8{,}99 \times 10^9 \left[\dfrac{N.m^2}{C^2}\right]$.

Campo eléctrico

$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q} = k_e \dfrac{q_1 q_2}{r^2}\check{r}.\dfrac{1}{q} \Rightarrow \left[\dfrac{N.\cancel{m^2}}{C^2}\right]\dfrac{\cancel{C}.\cancel{C}}{\cancel{m^2}}.\dfrac{1}{\cancel{C}} = \boxed{\dfrac{N}{C}}$

Almacenamiento de energía de campo eléctrico

El trabajo hecho al cargar el capacitor aparece como energía potencial U almacenada en el capacitor.

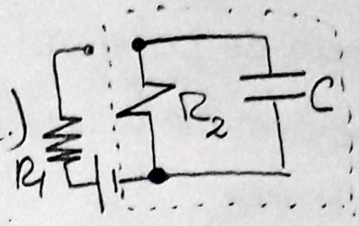
$\cancel{C}\dfrac{N m}{\cancel{C}}$

$U = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{1}{2}Q\,\Delta V = \dfrac{1}{2}C(\Delta V)^2$ $[N.m] = \boxed{\text{Joules}}$

$\dfrac{C^2}{F}$ $\quad C.V \quad F.V^2$

g) Si la llave es desplazada de la posición A a la B. (3)
encuentre las nuevas expresiones en función del tiempo para.

- la carga. ($q(t)$)
- diferencia de potencial del capacitor. (ΔV_C)
- corriente a través de la resistencia. [$i(t)$]



$$\boxed{q(t) = Q_0 e^{-t/RC}}$$

$$\Delta V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q_0 e^{-t/RC}}{C} \Rightarrow \text{Si } Q_0 = Q_{máx} \therefore C\varepsilon.$$

$$\frac{\cancel{C}\varepsilon e^{-t/RC}}{\cancel{C}} = \boxed{\varepsilon e^{-t/RC}}.$$

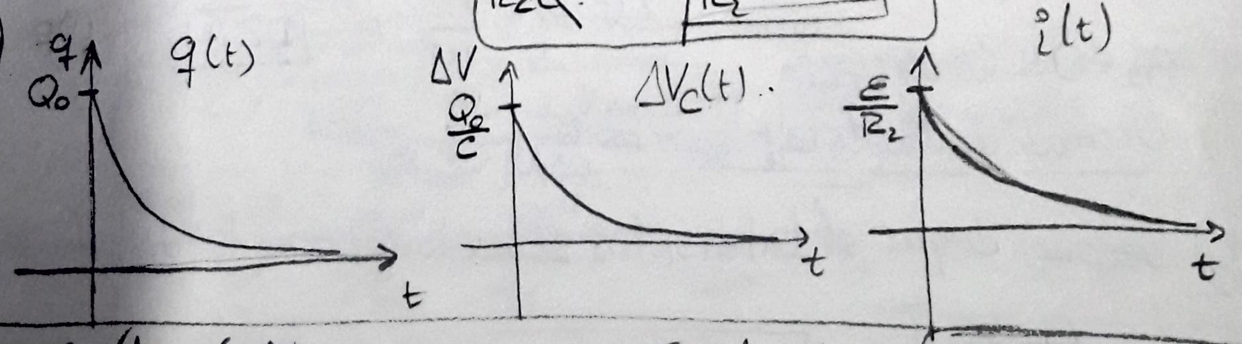
h) Graficque las expresiones obtenidas en g) en función del tiempo.

Ahora solo trabajamos sobre R_2, dado que R_1 está en la parte del circuito Abierto.

$$\therefore\ i(t) = -\frac{\partial q(t)}{\partial t} = -Q_0 e^{-t/R_2C}\left(-\frac{1}{R_2C}\right) = \boxed{\frac{Q_0 e^{-t/R_2C}}{R_2C}}.$$

$$\text{Si } (Q_0 = Q_{máx}):\ \frac{\cancel{C}\varepsilon e^{-t/R_2C}}{R_2\cancel{C}} = \boxed{\frac{\varepsilon}{R_2} e^{-t/R_2C}}$$

(h)



i) ¿Cuál será el tiempo de relajación del sistema cuando la llave se encuentra en A y cuando la llave se encuentra en B? Suponiendo $R_1 > R_2$

La carga tardará más, y la descarga será más rápido lo que se demuestra posteriormente.

¿Qué proceso se producirá más rápidamente la carga o la descarga?

Suponemos $\underline{Q_0 = Q_{máx}}$

(A) $q(t) = Q(1 - e^{-t/R_1C})$ $R_1 > R_2$

(B) $q(t) = Qe^{-t/R_2C}$

$$t\left(\ln\left|\frac{Q}{\ }\right| + 1\right) R_1C \quad t_1 > t_2$$

$$-\ln\left|\frac{q(t)}{Q}\right| R_2C = t \Rightarrow R_2\left(C\ln\left|\frac{Q}{q(t)}\right|\right) = t$$