1

HEURÍSTICAS CONSTRUTIVAS

Heurísticas construtivas são métodos que constroem uma solução para um determinado problema elemento a elemento. A escolha de como este elemento é inserido ou não na solução a cada passo depende da estratégia de inserção sendo adotada e do problema de otimização sendo resolvido. As estratégias de inserção podem seguir uma lógica totalmente aleatória ou gananciosa, também chamada de gulosa, ou alguma regra específica própria do problema.

Vejamos um pequeno: o problema da mochila. Seja um conjunto I de itens que podemos colocar numa mochila de capacidade de b unidades de peso. Cada item $i \in I$ possui uma importância relativa w_i e um peso p_i que pode ser inserido uma única vez na mochila. Desejamos escolher um subconjunto $S \subseteq I$ de itens que maxixmize a importância relativa total enquanto respeitem a capacidade da mochila.

Podemos modelar este problema usando uma variável de decisão $x_i \in \{0, 1\}$ para indicar se o item $i \in I$ é inserido, $x_i = 1$, ou não, $x_i = 0$, na mochila. Isto nos permite escrever a seguinte formulação:

$$\max \sum_{i \in I} w_i x_i \tag{1.0.1}$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i \in I} p_i x_i \leq b \tag{1.0.2}$$

$$x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I \tag{1.0.3}$$

A função objetivo (1.0.1) maximiza a importância relativa total dos itens inseridos; enquanto a restrição (1.0.2) representa a capacidade da mochila. As restrições (1.0.3) representam o domínio das variáveis.

Dependendo de como as heurísticas construtivas são pensadas, não é incomum a geração de soluções iniciais inviáveis. Por exemplo, uma solução totalmente aleatória pode propor a inserção de uma quantidade de elementos cujo peso total viole a capacidade de mochila. Nestes casos, podemos ou evitar a geração de uma solução inviável ou usar um procedimento para viabilizar a solução ou atribuir a esta solução ou um custo muito baixo ou muito alto dependendo do sentido da otimização, i.e., se o problema é de maximização ou minimização, respectivamente.

Para o problema da mochila acima, podemos reescrever a função objetivo do problema como uma função de penalidade para a violação da capacidade ou:

$$f(x) = \sum_{i \in I} w_i x_i - M \max\left\{ \sum_{i \in I} p_i x_i - b, 0 \right\}$$

onde $M = \sum_{i \in I} w_i$ representa a penalidade por unidade de violação da mochila. Esta função nos permite avaliar agora soluções viáveis e inviáveis para o problema da mochila, independentemente da heurística construtiva pensada.

Vamos agora implementar três procedimentos construtivos para o problema da mochila e verificar qual será o melhor em relação a qualidade da solução obtida. Como estamos trabalhando com procedimentos estocásticos, i.e., existe uma componente aletória na escolha dos itens fazendo com que, a cada vez que o procedimento seja executado uma solução diferente será obtida, vamos montar um experimento estístico para verificar se há diferenças estatísticas entre os métodos.

Vamos pegar as onze instâncias que temos e resolvê-las 30 vezes cada uma usando uma semente diferente para o gerador de números aleatórios do Python. Esta semente será seu **número de matrícula** somados a uma constante. Para cada instância e método, vamos guardar a mediana dessas 30 soluções.

De posse da medianas para cada instância e método construtivo, vamos usar o teste de Friedman para determinar se existe diferença estatistica significativa entre as medianas dos três métodos. Este é um teste estatístico não paramétrico que é padrão para comparar três ou mais amostras que são dependentes/pareadas, como no nosso caso, onde os métodos heurísticos construtivos foram testados nas mesmas instâncias.

A **hipótese nula** (H_0) é de que todos os métodos são iguais, i.e., geram soluções que são estatisticamente equivalentes. Se o teste de Friedman rejeitar H_0, ou seja, o *p-value* for baixo i.e., $\rho < \alpha$ com $\alpha = 0.05$ normalmentei, então pelo menos um dos métodos será diferente dos outros.

Se o teste de Friedman indicar que há uma diferença significativa, vamos fazer testes pós-hoc ou comparações pareadas para determinar quais pares de métodos são diferentes entre si.

Para fazer as comparações pós-hoc, vamos usar o método de **Wilcoxon signed-rank** para cada par de método, mas teremos de aplicar uma correção, como a correção de **Bonferroni** ou **Holm**, para ajustar o *p-value*.

Para visualizar estas análises, vamos fazer dois diagramas, um de caixa (*box plot*) e outro de clãs ou diagrama das diferenças hierarquizadas para montar uma hierarquia estatística dos métodos.

O *box plot* no permite entender visualmente a distribuição de desempenho em torno da mediana, enquanto o *difference diagram* diagrama de clãs nos permite ter uma hierarquia estatística formal, i.e., quem é melhor que quem e quem é semelhante a quem com base nos *p-values* corrigidos.

O QUE DEVE SER FEITO

1. No código em anexo, temos três métodos construtivos diferentes: *random_solution*, *random_solution2*, e *partial_greedy*. Execute o código e veja os resultados obtidos e os gráficos gerados.

2. Explique os gráficos e os resultados. No diagrama de diferenças, explique o que significa o eixo horizonte e a sua escala.

3. Você deve propor dois métodos diferentes construtivos que utilizem alguma componente estocástica para substituir os dois métodos *random_solution* e *random_solution2*. A ideia é tentar ser melhor do que o método *partial_greedy*.

4. Depois de elaborado, você deve repetir os testes e explicar os resultados obtidos.