Solução para a Função de Green em um meio homogêneo, isotrópico e ilimitado

June 30, 2021

Abstract

1 Equação da Onda escalar para uma fonte pontual e impulsiva

Neste texto será derivada a solução para o deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ em decorrência de uma força de corpo pontual e unidirecional com magnitude que varia no tempo, fixada em um ponto O de um meio homogêneo, isotrópico, ilimitado e elástico. A equação a ser resolvida para que se determine $\mathbf{u}$ é dada por:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \tag{1}$$

onde a força de corpo $\mathbf{f}$ é dada por $f_i = X_0(t)\delta(\mathbf{x})\delta_{i1}$, e temos condições iniciais dadas por $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$, e $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = 0$ para $\mathbf{x} \neq 0$.

Nessas condições, podemos escrever o campo de deslocamento como

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t) = X_0 * G_{n1}, \tag{2}$$

onde G é a Função de Green para a equação 1 dada uma fonte pontual, impulsiva e unidirecional. Para desenvolver a solução $\mathbf{u}$, é interessante que se faça uma análise preliminar da Função de Green para a Equação da Onda escalar, dada por:´

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)g(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t). \tag{3}$$

As propriedades da solução obtida a partir dessa equação são de extrema importância para simplificar a solução da equação 1. O primeiro passo para a solução da equação 3 é introduzir a definição da Transformada de Fourier temporal e espacial, dada por:

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iint F(\mathbf{k}, \omega)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}d\omega d^3\mathbf{k}, \tag{4}$$

onde $\mathbf{k}$ é o número de onda e ω a frequência. Aplicando essa definição em ambos os lados da equação 3, obtemos que a Função de Green é dada por:

$$G(\mathbf{k},\omega) = \frac{c^2}{\omega^2 - c^2\mathbf{k}^2}. \tag{5}$$

Podemos então calcular a Função de Green $g(\mathbf{x},t)$ utilizando a definição da Transformada de Fourier espacial e temporal

$$g(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iint \frac{c^2}{\omega^2 - c^2\mathbf{k}^2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} d\omega d^3\mathbf{k}. \tag{6}$$

A solução é dada por:

$$g(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\delta\Big(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\Big)}{|\mathbf{x}|}. \tag{7}$$

Dada esta solução, três propriedades importantes devem ser lembradas para uso futuro. A primeira é que um deslocamento da no tempo e no espaço dado por $\ddot{g}_1 = \delta(\mathbf{x}-\xi)\delta(t-\tau) + c^2\nabla^2 g_1$, gera um deslocamento temporal e espacial na solução, dada por:

$$g1(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\delta\Big(t - \tau - \frac{|\mathbf{x}-\xi|}{c}\Big)}{|\mathbf{x}-\xi|}. \tag{8}$$

A segunda é que para uma fonte pontual, mas com magnitude que varia no tempo dada por $\ddot{g}_2 = \delta(\mathbf{x}-\xi)f(t) + c^2\nabla^2 g_2$, a solução é dada pela superposição de soluções do tipo g_1

$$g_2(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g_1(\mathbf{x},t) d\tau = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{f\Big(t - \frac{|\mathbf{x}-\xi|}{c}\Big)}{|\mathbf{x}-\xi|}. \tag{9}$$

Finialmente, a terceira, quando a fonte se extende por um volume, assim como no tempo, temos:

$$\frac{\partial^2 g_3}{\partial t^2} = \frac{\Phi(\mathbf{x},t)}{\rho} + \alpha^2\nabla^2 g_3, \tag{10}$$

com a fonte dada por:

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V \Phi(\xi,\tau)\delta(\mathbf{x}-\xi)\delta(t-\tau) dV(\xi). \tag{11}$$

A solução para esse caso será:

$$g_3(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\alpha^2\rho}\iiint_V \frac{\Phi\Big(\xi, t - \frac{|\mathbf{x}-\xi|}{\alpha}\Big)}{|\mathbf{x}-\xi|} dV. \tag{12}$$

2 Teorema de Lamé

Para que possamos obter a solução da equação 1, iremos reescrever-la na forma de equações do tipo 10. Para isso, iremos utilizar o Teorema de Helmholtz, que será descrito a seguir.

Dado um campo vetorial $\mathbf{Z}$, podemos escreve-lo em termos de pontenciais de Helmholtz, na forma:

$$\mathbf{Z} = \nabla X + \nabla \times \mathbf{Y} \tag{13}$$

Para construir os potenciais X e $\mathbf{Y}$, basta que solucionemos a equação de Poisson $\nabla^2 \mathbf{W} = \mathbf{Z}$ e utilizemos a relação:

$$\nabla^2 \mathbf{W} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{W}), \tag{14}$$

escolhendo os potenciais como:

$$X = \nabla \cdot \mathbf{W}, \quad \mathbf{Y} = -\nabla \times \mathbf{W}, \tag{15}$$

podemos calcular estes a partir da solução da equação dada por

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = -\iiint_V \frac{\mathbf{Z}(\xi)}{4\pi|\mathbf{x} - \xi|} dV(\xi). \tag{16}$$

O primeiro passo para solucionar a equação 1, é escrever o campo de deslocamento $\mathbf{u}$ e a fonte $\mathbf{f}$ na forma dos seus potenciais de Helmholtz como:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \psi \tag{17}$$

$$\mathbf{f} = \nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi} \tag{18}$$

Substituindo as expressões 17 e 18 na 1, obtemos as expressões:

$$\begin{aligned} &\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}) - (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \nabla \phi + \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\psi}) \\ &\quad + \mu \nabla \times (\nabla \times \nabla \phi + \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}) - (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla^2 \phi) + \mu \nabla \times (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi}. \tag{20}$$

Sabendo que $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \nabla^2 \boldsymbol{\psi}$ e que $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$, temos

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \phi) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \times \boldsymbol{\psi}) - (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla^2 \phi) - \mu \nabla \times (\nabla^2 \boldsymbol{\psi}) = \nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi}. \tag{21}$$

Podemos reorganizar a equação 21 em função dos seus termos compressionais e cisalhantes como

$$\ddot{\phi} = \frac{\Phi}{\rho} + \alpha^2 \nabla^2 \phi, \tag{22}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\Psi}{\rho} + \beta^2 \nabla^2 \psi, \tag{23}$$

chamadas componentes P e S de $\mathbf{u}$.

Sabendo que $\mathbf{f} = X_0(t)\delta(\mathbf{x})\widehat{\mathbf{x}}_1 = \nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi}$, podemos construir os potenciais a partir da solução da equação de Helmholtz.

$$\mathbf{W} = -\frac{X_0(t)}{4\pi} \iiint_V (1,0,0) \frac{\delta(\xi) dV}{|\mathbf{x} - \xi|} = -\frac{X_0(t)}{4\pi|\mathbf{x}|}\widehat{\mathbf{x}}_1 \tag{24}$$

$$\Phi = \nabla \cdot \mathbf{W} = -\frac{X_0(t)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \tag{25}$$