Equações diferenciais

Rafael Sergio Sampaio Emidio

XXX Seminário de Iniciação Científica 2019
Bolsa PIBIC/PRODOUTOR
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Orientador: Augusto César dos Reis Costa

7 de Dezembro de 2022

Introdução

O objetivo deste trabalho é mostrar que a esfera é uma superfície rígida através de relações entre propriedades locais e globais de curvas e superfícies da Geometria Diferencial. Iremos verificar que se uma superfície regular S conexa e compacta possui curvatura gaussiana K constante, então S é uma esfera.

Palavras-chave: superfícies regulares, esfera, curvaturas.

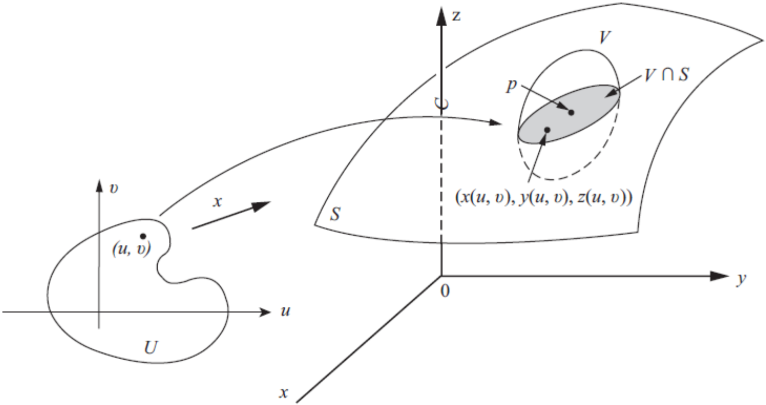
Superfície regular

Uma superfície regular S é um subconjunto do espaço tal que para todo ponto p, existe uma aplicação $X : U \to V \cap S$, onde U é um aberto em R^2, V uma vizinhança de p e X satisfaz as seguintes condições:

1. X é diferenciável;
2. X é homeomorfismo;
3. A diferencial $dX_q : R^2 \to R^3$ é injetiva.

Superfície regular

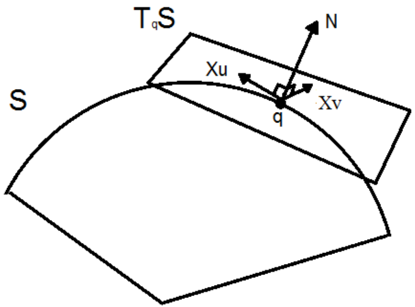
Neste caso, chamamos X de um parametrização de S. Assim, dado $(u, v) \in U$ temos $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.



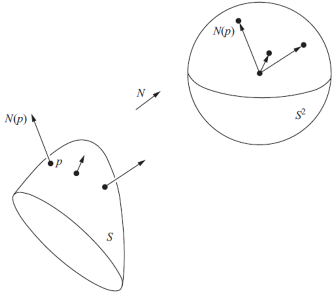
Aplicação de Gauss

Dada uma parametrização $X : U \subset R^2 \to S$ de uma superfície regular S em um ponto $p \in S$. Desde que $\{X_u, X_v\}$ constitui uma base para T_qS, podemos definir para cada ponto $q \in X(U)$, um vetor normal unitário da seguinte maneira:

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}, \qquad q \in X(q)$$



Se a superfície S possui uma orientação N, podemos garantir a existência da aplicação $N : S \rightarrow R^3$ que toma seus valores em uma esfera unitária



A aplicação $N : S \rightarrow S^2$ é chamada de aplicação normal de Gauss de S. Podemos verificar que a diferencial $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ é uma aplicação linear auto-adjunta.

Portanto, para cada ponto $p \in S$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS, tal que

$$dN_p(e_1) = -k_1 e_1$$

$$dN_p(e_2) = -k_2 e_2$$

Onde k_1 e k_2 são respectivamente, o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental $\mathrm{II}_p(v) = - < dN_p(v), v >$, ou seja, são os valores extremos da curvatura normal em p, tal que $k_1 \geq k_2$. Os autovalores k_1 e k_2 são chamados de curvaturas principais e os autovetores e_1 e e_2 são chamados de direções principais.

- **Curvatura gaussiana (K)**: É o determinante da diferencial dN_p de S em p

$$K = k_1 k_2.$$

- **Curvatura média (H)**: É o negativo do traço da diferencial dN_p de S em p:

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Um ponto de uma superfície regular S é chamado de:

1. Elíptico se $K > 0$;
2. Hiperbólico se $K < 0$;
3. Parabólico se $K = 0$, com $dN_p \neq 0$;
4. Planar se $dN_p = 0$.

Obs1: Se $k_1(p) = k_2(p)$ então dizemos que p é um ponto umbílico de S.

Obs2: Se todos os pontos de uma superfície S são umbílicos, então S está contida em um plano ou em uma esfera.

Aplicação de Gauss em coordenadas locais

Através do estudo da aplicação de Gauss em coordenadas locais, obtemos as seguintes equações para a curvatura Gaussiana K e a curvatura média H:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \qquad H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

Onde:

- E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental $I_p(w) = < w, w > = |w|^2$;
- e, f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental $\mathrm{II}(v) = - < dN_p(v), v >$.

Equações de compatibilidade

As equações de compatibalidade são dadas pelas fórmulas de Gauss e pelas equações de Mainardi-Codazzi.

- Os coeficientes Γ_{ij}^{k}, $i,j,k = 1,2$ são chamados de símbolos de Christoffel, obtidos nas derivadas dos vetores X_u, X_v e N.

Feitas várias demonstrações, foram encontradas as quatro equações de compatibilidade:

$$(\Gamma_{12}^{2})_u - (\Gamma_{11}^{2})_v + \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2} + \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2} = -EK \quad (1)$$

$$(\Gamma_{12}^{1})_u - (\Gamma_{11}^{1})_v + \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1} = FK \quad (2)$$

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^{1} + f(\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{1}) - g\Gamma_{11}^{2} \quad (3)$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^{1} + f(\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{1}) - g\Gamma_{12}^{2} \quad (4)$$

Obs3: Equações de compatibilidade quando as curvas coordenadas são linhas de curvaturas ($F = f = 0$)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\} \tag{1}$$

$$e_v = \frac{E_v}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right) \tag{3}$$

$$g_u = \frac{G_u}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right) \tag{4}$$

Rigidez da esfera

Teorema 1

Seja S uma superfície conexa e compacta com curvatura gaussiana K constante. Então S é uma esfera.

Para provar o Teorema 1, serão necessários alguns resultados. Estes resultados serão demonstrados através de 2 lemas.

Lema 1

Seja S uma superfície regular e $p \in S$ satisfazendo as seguintes condições:

1. $K(p) > 0$*; isto é, a curvatura gaussiana em* p *é positiva.*
2. p *é ao mesmo tempo um ponto de máximo local da função* k_1 *e um ponto de mínimo local da função* $k_2 (k_1 \geq k_2)$.

Então p *é um ponto umbílico de* S.

Demonstração: Vamos supor que p não é um ponto umbílico e obter uma contradição.
Se p não é um ponto umbílico de S, podemos parametrizar uma vizinhança coordenada de p por coordenadas (u, v) tais que as curvas coordenas são linhas de curvaturas. Então vamos ter que $F = f = 0$. Logo as curvaturas principais k_1 e k_2 serão dadas por

$$k_1 = \frac{e}{E}, \qquad k_2 = \frac{g}{G}. \tag{5}$$

Nestas condições as equações (3) e (4) de Mainardi-Codazzi são escritas como

$$e_v = \frac{E_v}{2}(k_1 + k_2) \tag{6}$$

$$g_u = \frac{G_u}{2}(k_1 + k_2) \tag{7}$$

Derivando a primeira equação de (5) com relação a v e usando (6), obtemos

$$E(k_1)_v = \frac{E_v}{2}(-k_1 + k_2) \tag{8}$$

Analogamente, derivando a segunda equação de (5) com relação u e usando (7), obtemos

$$E(k_2)_u = \frac{G_u}{2}(k_1 - k_2) \tag{9}$$

Por outro lado, quando $F = 0$, a formula de Gauss (1) para K se reduz

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}$$

Logo,

$$-2KEG = E_{vv} + G_{uu} + ME_v + NG_u \tag{10}$$

A partir de (8) e (9), obtemos expressões para Ev e Gu que depois de derivadas, introduzimos na equação (10) obtendo

$$-2KEG = -\frac{2E}{k_1 - k_2}(k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1 - k_2}(k_2)_{uu} + \bar{M}(k_1)_v + \bar{N}(k_2)_u$$

Donde,

$$-2(k_1 - k_2)KEG = -2E(k_1)_{vv} + 2G(k_2)_{uu} + \tilde{M}(k_1)_v + \tilde{N}(k_2)_u \tag{11}$$

Como k_1 atinge um máximo local em p e k_2 atinge um mínimo local em p, temos

$$(k_1)_v = 0, \quad (k_2)_u = 0, \quad (k_1)_{vv} \leq 0, \quad (k_2)_{uu} \geq 0$$

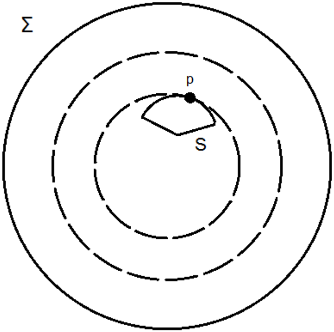
em p. No entanto, isto implica que o segundo membro da equação (11) é positivo ou nulo, o que é uma contradição, logo o ponto p é um ponto umbílico de S.

Lema 2

Uma superfície regular compacta $S \subset R^3$ tem pelo menos, um ponto elíptico.

Demonstração: Como S é compacta, S é limitada. Portanto S está contida em alguma esfera em R^3, consideremos uma esfera Σ. Através de sucessivas diminuições do raio da esfera Σ, obtemos um ponto onde a mesma irá tocar em S, chamaremos de ponto p. Portanto, Σ e S são tangentes em p.

Observando as sessões normais em p, notamos que qualquer curvatura normal de S em p é maior ou igual que a curvatura normal de Σ em p. Logo concluímos que $K_{S(p)} \geq K_{\Sigma(p)} > 0$, portanto p é um ponto elíptico desejado.



Demonstração do teorema 1: Como S é compacta, ela possui um ponto elíptico pelo Lema 2. Como K é constante, devemos ter $K > 0$ em S. Como $K = k_1 k_2$ é uma constante positiva, p é ao mesmo tempo o máximo local da função k_1 e o mínimo local da função k_2. Pelo lema 1 p é um ponto umbílico de S, isto é, $k_1(p) = k_2(p)$. Agora seja um ponto $q \in S$, tal que $k_1(q) \geq k_2(q)$ temos

$$k_1(p) \geq k_1(q) \geq k_2(q) \geq k_2(p) = k_1(p).$$

Portanto $k_1(q) = k_2(q)$ para todo $q \in S$. Podemos concluir de uma maneira definitiva que todos os pontos de S são umbílicos. Como $K > 0$, S está contida em uma esfera Σ pela observação 2. Por compacidade, S é fechada em Σ, e como S é uma superfície regular, S é aberta em Σ. Como Σ é conexa e S é aberta e fechada em Σ, teremos que $S = \Sigma$. Portanto S é uma esfera.

Bibliografia

DO CARMO, M. **Differential Geometry of curves and surfaces**. Pretince-Hall (1976)

TENEBLAT, K. **Introdução e geometria diferencial**. Editora Blücher (2008)

ARAÚJO, P. **Geometria Diferencial**. Coleção Matemática Universitária – IMPA (2004)

Obrigado pela atenção!