Propagação de Ondas Sísmicas

Ricardo Biloti

biloti@unicamp.br

GGC – IMECC – UNICAMP

2S/2020

http://goo.gl/TJ5V30

Conteúdo

Revisão

Campos

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Campo escalar

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Campo vetorial

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \equiv (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \phi_3(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

onde cada ϕ_j é um campo escalar.

Todas as quantidades vetoriais serão representadas em negrito. Sendo assim, $\mathbf{x}$ é um vetor enquanto que x é um escalar.

Densidade ou porosidade de um meio são exemplos de campos escalares, ou seja, a cada ponto do espaço tridimensional atribuí-se apenas um valor escalar para essas quantidades.

O vetor velocidade de um fluxo é um exemplo de um campo vetorial. Ele indica a direção de propagação do fluxo em cada ponto do espaço tridimensional e seu módulo indica a velocidade do fluxo naquele ponto.

Em Cálculo não há, em geral, a necessidade de especificar se quantidades vetoriais são representadas como vetores linha ou coluna. Esta distinção é importante e usual no âmbito da Álgebra Linear. Note porém que em algumas fórmulas é conveniente usar a notação de Álgebra Linear e, nesses casos assumiremos que quantidades vetorais são representadas como vetores coluna.

Operadores diferenciais

Operador nabla

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$$

Gradiente

Se f é um campo escalar, então ∇f é o campo vetorial definido por

$$\begin{aligned} \nabla f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto \nabla f(\mathbf{x}) \equiv (\partial_x f(\mathbf{x}), \partial_y f(\mathbf{x}), \partial_z f(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Operadores diferenciais

Divergente

Se ϕ é um campo vetorial, então $\nabla \cdot \phi$ é um campo escalar definido por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \phi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto \nabla \cdot \phi(\mathbf{x}) \equiv \partial_x \phi_1(\mathbf{x}) + \partial_y \phi_2(\mathbf{x}) + \partial_z \phi_3(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Rotacional

Se ϕ é um campo vetorial, então $\nabla \times \phi$ é um campo vetorial definido por

$$\begin{aligned} \nabla \times \phi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto \nabla \times \phi(\mathbf{x}) \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \phi_1(\mathbf{x}) & \phi_2(\mathbf{x}) & \phi_3(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Operadores diferenciais

Jacobiano

Se ϕ é um campo vetorial, então $J\phi$ é a matriz definida por

$$\begin{aligned} J\phi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^{3\times 3} \\ \mathbf{x} &\mapsto J\phi(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \nabla\phi_1(\mathbf{x})^T \\ \nabla\phi_2(\mathbf{x})^T \\ \nabla\phi_3(\mathbf{x})^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja $[\nabla\phi(\mathbf{x})]_{ij} = \partial_j \phi_i(\mathbf{x})$. Se f é um campo escalar, então $Jf(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})^T$.

No caso da matriz jacobiana, a representação apresentada assume que o vetor gradiente é coluna.

Operadores diferenciais

Laplaciano

Se f é um campo escalar, então $\Delta f \equiv \nabla \cdot \nabla f$ é um campo escalar definido por

$$\begin{array}{rcl} \Delta f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \mathbf{x} & \mapsto & \Delta f(\mathbf{x}) = \partial_{xx} f(\mathbf{x}) + \partial_{yy} f(\mathbf{x}) + \partial_{zz} f(\mathbf{x}) \end{array}$$

Se ϕ é um campo vetorial, então $\Delta \phi$ é um campo vetorial definido por

$$\begin{array}{rcl} \Delta \phi : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} & \mapsto & \Delta \phi(\mathbf{x}) = (\Delta \phi_1(\mathbf{x}), \Delta \phi_2(\mathbf{x}), \Delta \phi_3(\mathbf{x})) \end{array}$$

Operadores diferenciais

Hessiana

Se f é um campo escalar então $\nabla^2 f$ é a matriz definida por

$$\begin{array}{rcl} \nabla^2 f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^{3\times 3} \\ \mathbf{x} & \mapsto & \nabla^2 f(\mathbf{x}) = [\partial_{ij} f(\mathbf{x})] \end{array}$$

Integral de superfície

Se f é um campo escalar e Σ é uma superfície com normal unitária $\mathbf{n}$, então integral de superfície de f é denotada por

$$\int_{\Sigma} f(\mathbf{x})\, dS,$$

onde dS é o elemento de área da superfície.

Se a superfície Σ for parametrizada por $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(u,v)$, com $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, então

$$\int_{\Sigma} f(\mathbf{x})\, dS = \iint_{\Omega} f(\mathbf{x}(u,v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| dudv.$$

Como exemplo, considere $f(\mathbf{x}) = 2xy$ e Σ é a superfície definida por $\mathbf{x} = (u, v, u^2)$, para $0 \leq u, v \leq 1$.

O elemento de área é

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| dudv = \|(1,0,2u) \times (0,1,0)\| dudv = \sqrt{1+4u^2}\, dudv.$$

A integral de superfície é dada por

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} f(\mathbf{x})\, dS &= \int_0^1 \int_0^1 2uv\sqrt{1+4u^2}\, dudv \\ &= \int_0^1 v \left[\int_0^1 2u\sqrt{1+4u^2}\, du \right] dv \\ &\text{se } w = 1+4u^2,\ dw = 8udu,\ \text{então} \\ &= \frac{1}{8}\int_0^5 \sqrt{w} dw = \frac{1}{8}\frac{2}{3} w^{3/2}\Big|_1^5 = \frac{\sqrt{125}-1}{12}. \end{aligned}$$

Fluxo de um campo vetorial

Se ϕ é um campo vetorial e Σ é uma superfície com normal unitária $\mathbf{n}$, então o fluxo de ϕ na através de Σ é definida como

$$\int_\Sigma \phi \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

onde dS é o elemento de área da superfície.

Se Σ é definida por $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(u, v)$, para $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, então

$$\int_\Sigma \phi \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_\Omega \phi(\mathbf{x}(u, v)) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right] dudv.$$

Por exemplo, considere o campo vetorial $\phi(\mathbf{x}) = (10, x^2 + y^2, -2xy)$ e a superfície Σ dada por $\mathbf{x} = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$, para $0 \leq u, v \leq 1$.

O produto vetorial necessário é

$$\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right] = (1, 0, -2u) \times (0, 1, -2v) = (2u, 2v, 1).$$

O produto escalar fica

$$\phi(\mathbf{x}) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\right] = (10, u^2 + v^2, -2uv) \cdot (2u, 2v, 1) = 20u + 2v(u^2 + v^2) - 2uv.$$

Por fim, o fluxo é computado como

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[20u + 2v(u^2 + v^2) - 2uv\right] dudv = 31/3.$$

Transformada de Fourier – 1D

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}\, d\omega$$

Para representar a transformada de Fourier, também é comum utilizar a notação $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ e $f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$.

Esta convenção é a mesma adotada em Bleistein et al. (2000), Chapman (2004), Devaney (2012) e Stolt e Weglein (2012), entre outros. Entretanto, Pujol (2003) troca os sinais na definição da transformada de Fourier no tempo.

Distribuições ou *Funções generalizadas*

Distribuições não são funções. Distribuições operam sobre funções.

- $C_0^\infty(\mathbb{R})$, é o conjuto de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com suporte compacto e infinitamente diferenciáveis.
- Formalmente, $d : C_0^\infty \to \mathbb{R}$ é uma distribuição se
  - d é linear, i.é, $\langle d, \alpha f + \beta g\rangle = \alpha\langle d, f\rangle + \beta\langle d, g\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
  - d é contínua, i.é, $\langle d, f_j\rangle \to \langle d, f\rangle$, se $f_j \to f$.
- A derivada d' de uma distribuição d é definida por $\langle d', f\rangle = -\langle d, f'\rangle$.

O conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é denominado conjunto das funções teste de Schwartz. Qualquer função linear de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}$ é dita um funcional linear. Desta forma, distribuições são funcionais lineares contínuos em $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Distribuições operam apenas sobre funções teste. Entretanto, no decorrer do curso, veremos que algumas distribuições, como a Delta de Dirac, podem operar com funções mais gerais que essas, como funções contínuas por exemplo.

O suporte de uma função $f : \Omega \to R$, é o conjunto $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$, ou seja, todos os pontos onde a função é não-nula, bem como a fronteira desse conjunto.

Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é compacto se for fechado e limitado, por exemplo, todos os intervalos finitos $[a, b]$ são compactos.

Dizemos que $f_j \to f$ em C_0^∞ se existe um compacto K tal que o $\operatorname{supp} f_j \subset K$, para todo j e se $f_j^{(k)}$ converge uniformemente para $f^{(k)}$, para todo k.

Exemplo

Por exemplo, $d : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\langle d, f \rangle = \int_0^1 f(t)\, dt$$

define uma distribuição.

Com efeito, é simples verificar que d é linear. Para verificar que d é contínua, basta observar que se $f_j \to f$ então

$$\lim_{j\to\infty} \langle d, f_j \rangle = \lim_{j\to\infty} \int_0^1 f_j(t)\, dt = \int_0^1 \lim_{j\to\infty} f_j(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt = \langle d, f \rangle.$$

Distribuições regulares

- u é localmente integrável, se $\int_a^b |u(t)|\, dt < \infty$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

Toda função localmente integrável u define um distribuição d_u, dada por

$$\langle d_u, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) f(t)\, dt$$

Distribuições deste tipo são chamadas distribuições regulares.

Por exemplo, condisere a função $u(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$. Essa função é localmente integrável, visto que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b t^n\, dt = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} < \infty.$$

Portanto, a u define a distribuição d_u, dada por

$$\langle d_u, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)\, dt.$$

u é dito o *núcleo* da distribuição d_u.

Distribuições singulares

Distribuições que não podem ser representadas na forma integrais, são ditas distribuições singulares.

Delta de Dirac

A distribuição δ, definida por $\langle \delta, f \rangle = f(0)$, é uma distribuição singular.

Apesar disto, é comum encontrar δ definida pela propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt = f(0)$$

Então

$$\hat{\delta}(\omega) = 1 \qquad \text{e} \qquad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, d\omega$$

Dizer que a Delta de Dirac não pode ser representada por uma integral, significa dizer que não há um núcleo $\delta(t)$ que possa ser empregado dentro de uma integral para definir a distribuição δ. Isso significa, para sermos rigorosos, que deveríamos apenas utilizar a notação $\langle \delta, f \rangle$ para representar a aplicação de δ a f. Porém é usual aceitar certa liberdade em escrever

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt = f(0),$$

como se de fato existisse um núcleo $\delta(x)$. Isto simplifica a escrita e as contas com a Delta de Dirac, tornando-as mais familiares. Porém a integral acima jamais deve ser intepretada como se de fato fosse a integral do produto de duas funções.

Propriedades da Delta de Dirac

- $\displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)f(t)\,dt = f(0)$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)\,dt = f(a)$
- Se h é diferenciável, $h(T) = 0$ e $h'(T) \neq 0$,

$$\int_{T-\epsilon}^{T+\epsilon} \delta(h(t))f(t)\,dt = \frac{f(T)}{|h'(T)|}$$

As três propriedades foram escritas em termos da *representação integral* da Delta de Dirac, que já vimos que não existe de fato. Aproveitamos para lembrar novamente que isto é apenas uma maneira simplificada de escrita. Todas essas propriedade podem ser escritas rigorosamente sem o uso da integral.

Por exemplo, a primeira propriedade seria

$$\langle \delta, f\rangle = \langle \delta, I_\epsilon f\rangle = f(0),$$

onde $I_\epsilon(x) = 1$, se $|x| \leq \epsilon$ e $I_\epsilon(x) = 0$, se $|x| > \epsilon$.

A segunda propriedade é a definição da distribuição δ_a, ou seja, $\langle \delta_a, f\rangle = f(a) = \langle \delta, f(a - \cdot)\rangle$.

Analogamente, a terceira propriedade também pode ser vista como a definição de uma nova distribuição, δ_h, em termos da δ.

Função sinal

$$s(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

- $s'(t) = 2\delta(t)$
- $\hat{s}(\omega) = \dfrac{2i}{\omega}$

A derivada de uma distribuição d é definida como $\langle d', f\rangle = -\langle d, f'\rangle$, para f no espaço das funções teste. Com isso, a primeira propriedade segue de

$$\langle s', f\rangle = -\langle s, f'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} s(t)f'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f'(t)\,dt - \int_{0}^{\infty} f'(t)\,dt = 2f(0) = \langle 2\delta, f\rangle,$$

pois f tem suporte compacto, e assim $f(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Para a segunda propriedade, observe que para qualquer constante C,

$$\mathcal{F}\{(s(t) + C)'\} = \mathcal{F}\{2\delta(t)\} = 2,$$

e que, da propriedade da transformada de Fourier para derivadas, i.é, $\mathcal{F}\{u'\} = -i\omega\hat{u}(\omega)$,

$$\mathcal{F}\{(s(t) + C)'\} = -i\omega\left[\hat{s} + 2\pi C\delta(\omega)\right].$$

Logo

$$\hat{s} = \frac{2i}{\omega} + C\delta(\omega).$$

Porém, como s é uma função ímpar, sua transformada também deve ser ímpar. Isso implica que $C = 0$, visto que δ é par.

Função degrau ou de Heaviside

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- $\mu'(t) = \delta(t)$
- $\hat{\mu}(\omega) = \dfrac{i}{\omega} + \pi\delta(\omega)$

A função μ foi definida apenas para $t \neq 0$. Enquanto μ for utilizada apenas como integrando, isso não é importante, uma vez que, do ponto de vista da integração, o valor que a função assume em um único ponto não altera o valor da integral.

Reescrevendo a função de Heaviside em termos da função sinal, as duas propriedades são facilmente provadas.

Princípios físicos

Princípios físicos

- O movimento das partículas do meio, por conta da ação da propagação da onda, é regido pela segunda lei de Newton.
- Momentaneamente, a propagação da onda deforma um volume infinitesimal do meio, alterando sua forma e volume.
- A relações constitutivas expressam como as forças exercícidas sobre o meio se relacionam com a pressão e a velocidade das partículas.

Esta brevíssima introdução é baseada em Fokkema e van den Berg (1993).

As relações constitutivas são determinadas experimentamente para cada meio. Quando as forças impostas ao meio relacionam-se linearmente com a pressão e a velocidade da partícula, dizemos que o meio é *linear*.

Outras propriedades observadas são se o meio reage instantaneamente ou não às forças a ele aplicadas e se a reação do meio em uma determinada porção depende apenas das forças aplicadas àquela mesma porção do meio. Como as propriedades do meio variam espacialmente também é algo que deve ser determinado experimentalmente (meio isotrópico versus anisotrópico, e meio homogêneo versus heterogêneo).

Leis físicas da propagação em meio acústico

$\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	(kg/m^3)	Densidade
$\nu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	(Pa^{-1})	Compressibilidade $(1/\kappa)$
$\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	(Pa)	Pressão acústica
$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$	(m/s)	Velocidade da partícula
$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$	(N/m^3)	Densidade de força da fonte
$q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	(s^{-1})	Densidade da taxa de injeção

Equação do movimento

$$\nabla\psi + \rho\mathbf{v}_t = \mathbf{f},$$

Equação da deformação

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \nu\psi_t = q$$

A dedução destas equações foge ao escopo deste curso. Entretanto, é possível (e aconselhável) verificar que as unidades estão corretas, apenas como forma de certificar-se que algum erro grosseiro não foi cometido. Com efeito, lembrando que Pa $=$ N/m^2 e N$=$kg$\cdot$m/s^2, temos que os termos da equação do movimento tem a unidade

$$[\nabla\psi] = [\rho\mathbf{v}_t] = \frac{1}{\text{m}} \cdot \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^3} = [\mathbf{f}].$$

O mesmo pode ser feito para a equação da deformação.

A saber, compressibilidade é o inverso do módulo de Bulk (κ); e se $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é o vetor deslocamento, então $\mathbf{v} = \mathbf{u}_t$.

Equação para a pressão

Equação do movimento

$$\nabla\psi + \rho\mathbf{v}_t = \mathbf{f},$$

Equação da deformação

$$\nabla\cdot\mathbf{v} + \nu\psi_t = q$$

$$\nu\psi_{tt} = q_t - \nabla\cdot\mathbf{v}_t$$

$$\nu\psi_{tt} = q_t - \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{f}}{\rho} - \frac{1}{\rho}\nabla\psi\right)$$

$$(\rho\nu)\psi_{tt} - \rho\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla\psi\right) = \rho q_t - \rho\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{f}}{\rho}\right)$$

$$\frac{1}{c^2}\psi_{tt} - \rho\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla\psi\right) = F(\mathbf{x}, t)$$

As duas equações podem ser combinadas para obter apenas uma equação para pressão acústica. Basta, derivar com respeito ao tempo a equação da deformação, e substituir $\mathbf{v}_t$, usando a equação do movimento.

Observe que a unidade de $\rho\nu$ é s^2m^{-2}, logo, estamos denotando este termo por $1/c^2$, onde c tem dimensão de velocidade. Essa velocidade é na verdade uma propriedade física do meio e não a velocidade de uma partícula do meio sujeita a perturbação.

Observe também que a unidade de F é $kg/(m^3s^2) = N/m^4$.

Equação homogênea da onda

- Densidade: $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
- Velocidade: $c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
- Pressão: $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Equação da Onda Acústica

$$\frac{1}{c^2}\psi_{tt} - \rho\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho}\nabla\psi\right) = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\psi_{tt} - \Delta\psi = 0 \qquad (\text{para } \rho \text{ constante})$$

Esta é a equação da onda acústica 3D, em coordenadas cartesianas. Esta equação também é denominada equação da onda escalar, visto que ψ é um campo escalar. No caso de ondas sísmicas ψ representa pressão.

Como não há termo fonte, dizemos que a equação é homogênea. Mais a frente veremos como determinar a solução dessa equação, quando houver um termo fonte.

Tanto a velocidade c quando a densidade ρ são campos escalares que caracterizam o meio de propagação. Na situação particular em que a densidade do meio não varia espacialmente, a equação fica mais simples, dependendo apenas da velocidade.

Equação da onda acústica 1D

Caso 1D com velocidade constante

$$\frac{1}{c^2}\psi_{tt} - \psi_{xx} = 0$$

Aplicando Fourier no tempo,

$$\hat{\psi}_{xx}(x,\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\hat{\psi}(x,\omega) = 0.$$

Logo

$$\hat{\psi}(x,\omega) = \hat{f}(\omega)e^{i\frac{\omega}{c}x} + \hat{g}(\omega)e^{-i\frac{\omega}{c}x}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= f(t) * \delta(t - x/c) + g(t) * \delta(t + x/c)\\ &= f(t - x/c) + g(t + x/c)\end{aligned}$$

Para ganhar intuição, vamos iniciar o estudo no caso de um meio homogêneo unidimensional. Nesta situação a equação da onda simplifica-se e admite solução analítica. Esta equação serve de modelo por exemplo para vibrações em uma corda homogênea tensionada.

Há várias formas de buscar a solução geral dessa equação. D'Alembert a resolveu através de uma mudança de váriáveis. Aqui faremos isso por meio da transformada de Fourier no tempo.

Ao aplicar a transformada de Fourier a ambos os lados da equação, obtem-se uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, cuja solução é simples. Como a equação diferencial é em x, os coeficientes arbitrários da solução geral podem depender de ω.

Para concluir, basta aplicar a transformada de Fourier inversa, para o que precisamos de algumas propriedades da transformada. Lembrando que $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ e $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{i\omega a}\hat{f}(\omega)$, conclui-se que $\mathcal{F}^{-1}[e^{i\omega x/c}\cdot 1] = \delta(t - x/c)$. Além disso, é preciso lembrar também que a transformada inversa de um produto de duas funções é o produto de convolução das transformadas inversas de cada uma.

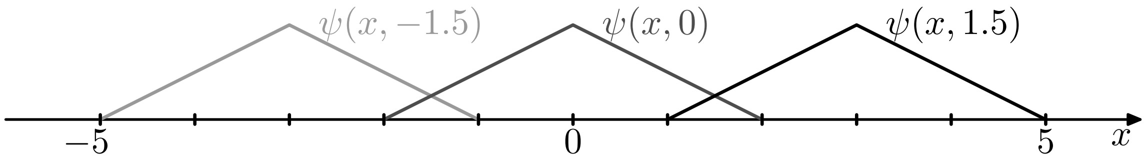
Por fim, observe que

$$f(t) * \delta(t - x/c) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - x/c - \tau) f(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t + x/c) f(\tau)\, d\tau = f(t - x/c),$$

pois $\delta(t) = \delta(-t)$.

Exemplo 1

$$\psi(x,t) = f(t - x/2), \qquad f(u) = \max\{1 - |u|, 0\}$$



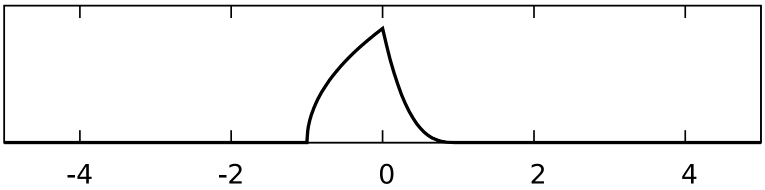
A interpretação de $f(t - x/c)$ é de um pulso com formato dado pela função f propagando-se no sentido positivo do eixo x, a medida que o tempo aumenta (supondo que $c > 0$). Essa propagação dá-se com velocidade c. Isto é, a cada intervalo de tempo Δt, o pulso translada-se rigidamente por $c\Delta t$ unidades de espaço.

Observe que a forma do pulso não é alterada com a propagação, nem mesmo por um fator de amplitude.

Analogamente, $g(t + x/c)$ representa um pulso propagando-se no sentido negativo do eixo x.

Exemplo 2

$$\psi(x,t) = f(t - x/2), \qquad f(u) = \begin{cases} \sqrt{1+u}, & -1 < u \leq 0, \\ (1-u)^3, & 0 \leq u < 1, \\ 0, & |u| \geq 1. \end{cases}$$

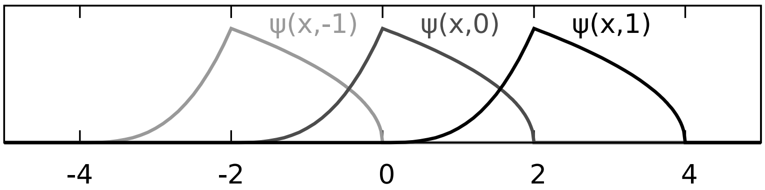


Vale destacar que o formato do pulso é a reflexão do gráfico de f, visto que a variável x vai com o sinal trocado no argumento de f.

Já no caso do pulso representado por g, como a variável x no argumento de g tem sinal positivo, o pulso que se propaga não é refletido em relação ao gráfico de g.

Exemplo 2

$$\psi(x,t) = f(t - x/2), \qquad f(u) = \begin{cases} \sqrt{1+u}, & -1 < u \le 0, \\ (1-u)^3, & 0 \le u < 1, \\ 0, & |u| \ge 1. \end{cases}$$



Observe a propagação de um pulso assimétrico, para diferentes instantes do tempo. Identifique o efeito do sinal negativo na variável x e do fator multiplicativo $1/2$.

Equação da onda acústica 3D

Caso 3D

Para ρ e c constantes:

$$\frac{1}{c^2}\psi_{tt} - \Delta\psi = 0$$

Ansatz:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = f\left(t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{c}\right)$$

$$\psi_{tt} = \left[f''(\cdot) + g''(\cdot)\right]$$

$$\partial_{jj}\psi = \left[f''(\cdot) + g''(\cdot)\right]\left(\frac{n_j}{c}\right)^2, \quad j = 1, 2, 3$$

Usando a intuição ganha no caso unidimensional, ao invés de tentar resolver a equação no caso 3D por um técnica geral, vamos verificar se existe solução com a mesma estrutura encontrada no caso 1D. Ou seja, vamos buscar uma solução que possa ser interpretada como dois pulsos propagando-se em direções opostas no espaço. Ainda estamos mantendo as hipóteses de velocidade e densidade constantes.

A direção de propagação será determinada por um vetor **n**, arbitrariamente escolhido.

O que faremos é impor que o *ansatz* (palpite) escolhido satisfaça a equação diferencial. Começamos computados as derivadas necessárias.

Onda plana

$$\frac{1}{c^2}\left[f''(\cdot)+g''(\cdot)\right]-\left[f''(\cdot)+g''(\cdot)\right]\left(\frac{n_1^2+n_2^2+n_3^2}{c^2}\right)=0$$

Logo, teremos uma solução desde que

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$$

Para cada t fixo (frentes de onda), ψ é constante se

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=\text{constante}$$

Esta é a equação de um plano com vetor normal **n**.

Ao substituir a proposta de solução na equação, vemos que esta proposta de fato será solução desde que o vetor **n** tenha norma 1.

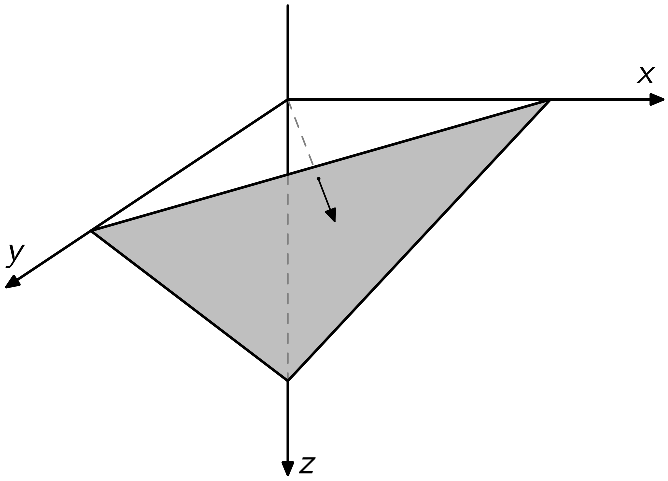
A frente de onda, ou seja o lugar geométrico no espaço onde a onda está em fase, são os pontos **x** onde $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}$ é constante. Isso nada mais é que a equação de um plano com vetor normal **n**.

Onda plana homogênea

Se $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ com $\|\mathbf{n}\| = 1$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = f\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right)$$

é dita uma onda plana homogênea.



Onda plana não-homogênea

Se $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^3$, com parte imaginária não nula e $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = f\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right)$$

é dita uma onda plana não-homogênea.

Neste caso, $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e tanto sua parte real quanto sua parte imaginária são soluções reais da equação da onda, porém o vetor $\mathbf{n}$ perde o sentido físico de ser a direção de propagação.

Onda plana harmônica

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} \, d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{f}(\omega) e^{-i\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{c}\right)} + \hat{g}(\omega) e^{-i\omega\left(t + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{c}\right)} \right] \, d\omega$$

Onda Plana Harmônica

ψ é escrita como uma superposição de ondas planas harmônicas, dadas por

$$\psi_\omega^{\pm}(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega\left(t \pm \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{c}\right)}$$

Com o auxílio da transformada de Fourier, podemos ver que uma onda plana se escreve com combinação de ondas planas harmônicas, sendo que os pesos dessa combinação são as transformadas de Fourier de f e g.

Como a equação da onda é linear, também é claro que a soma, ou superposição, de ondas planas, em diferentes direções de propagação, também é solução da equação da equação da onda.

Solução geral

Acabamos de encontrar uma solução da equação da onda com uma estrutura particular: solução de onda plana.

É possível resolver a equação da onda acústica 3D em meio homogêneo, sem impor uma certa simetria?

Nossa tentativa será em resolver a equação da onda de forma mais geral, sem impor nenhum tipo de simetria particular.

Equação de Helmholtz

Aplicando Fourier no tempo, a equação da onda acústica fica

$$\Delta\hat{\psi}(\mathbf{x},\omega) + \kappa^2\hat{\psi}(\mathbf{x},\omega) = 0,$$

onde $\kappa = \omega/c$.

Vamos procurar uma solução separável, isto é, da forma

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},\omega) = X(x,\omega)Y(y,\omega)Z(z,\omega).$$

Vamos trabalhar com a equação da onda acústica, no domínio da frequência. Por meio da transformada de Fourier no tempo, a equação da onda acústica é convertida na equação de Helmholtz. Para simplificar a notação, definimos $\kappa = \omega/c$.

A equação de Hemlholtz é uma equação diferencial parcial apenas nas variáveis espaciais. Para resolvê-la nos valeremos do método de *separação de variáveis*, onde a se propõem a solução da forma $\hat{\psi}(\mathbf{x},\omega) = X(x,\omega)Y(y,\omega)Z(z,\omega)$.

Para substituir esse *ansatz* na equação, é necessário calcular $\Delta\hat{\psi}$. Com efeito,

$$\Delta\hat{\psi} = \frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}YZ + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}XZ + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}XY.$$

Observe ainda que

$$\frac{\Delta\hat{\psi}}{\psi} = \frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}.$$

Equações ordinárias

Se $\hat{\psi} = XYZ$, a equação de Helmholtz fica

$$\left(\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2\right) + \left(\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2\right) + \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2\right) = 0,$$

onde $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \kappa^2$.

Como as variáveis são independentes,

$$\left(\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2\right) = 0, \qquad \left(\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2\right) = 0, \qquad \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2\right) = 0.$$

Como cada um das parcelas da equação diferencial depende apenas de uma das variáveis espaciais livres, a única opção para que a equação seja satisfeita em todo o espaço é que cada parcela seja identicamente nula.

Com isso, temos três equações diferenciais ordinárias independentes para resolver, uma em cada variável espacial.

Solução separável

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(x,\omega) + k_x^2 X(x,\omega) = 0$$

admite soluções da forma $X(x,\omega) = C(k_x,\omega)e^{ik_x x}$.

Assim,

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},\omega) = A(\mathbf{k},\omega)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z),$$
$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \kappa^2$$

ou

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},\omega) = A(\kappa\mathbf{n},\omega)e^{i\kappa\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z),$$
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Como cada uma das equações ordinárias tem a mesma forma, podemos analisar uma delas apenas. Observando essa equação, percebe-se imediatamente que uma solução tem a forma $e^{ik_x x}$, enquanto que outra seria $e^{-ik_x x}$. Como, mais a frente consideraremos a superposição sobre todos os possíveis valores de k_x (positivos e negativos), podemos ficar com apenas uma delas.

O mesmo vale para as outras duas equações ordinárias. Sendo assim, uma solução geral para a equação de Helmholtz tem a forma de uma constante (com respeito às variáveis espaciais) multiplicada $e^{ik_x x}e^{ik_y y}e^{ik_z z} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, respeitando que $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \kappa^2$.

Alternativamente, $\mathbf{k} = \kappa\mathbf{n}$, onde $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, com $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Em princípio, o vetor $\mathbf{k}$ (assim como $\mathbf{n}$) pode ser complexo, desde que a condição anterior seja satisfeita.

Caso real

Se $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, e $\|n\| = 1$, em coordenadas esféricas,

$$\mathbf{n} = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta),$$

com $0 \leq \phi < 2\pi$ e $0 \leq \theta < \pi$.

Superpondo todas as possíveis soluções, para ω fixo,

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} A(\kappa\mathbf{n}, \omega) e^{i\kappa\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} \sin\theta d\phi d\theta,$$

onde $\kappa = \omega/c$.

No caso de $\mathbf{n}$ ser um vetor real, a condição de que $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ significa que esse vetor tem norma 1. Portanto, $\mathbf{n}$ pode ser representado em coordenadas esféricas, por meio dos ângulos ϕ e θ.

Pela linearidade e homogeneidada da equação de Helmholtz, a superposição de soluções também é solução. Desta forma, a superposição das soluções para todos os possíveis vetores $\mathbf{n}$ é computada por uma integral sobre a superfíćie de uma esfera da raio 1, onde A é uma função arbitrária para a qual a integral faça sentido.

Expansão em ondas planas no tempo

$$\psi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} A(\kappa\mathbf{n},\omega)e^{i(\kappa\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\,\sin\theta d\phi d\theta d\omega,$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} \tilde{A}(\kappa\mathbf{n},c\kappa)e^{i\kappa(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}\,\kappa^2\sin\theta d\phi d\theta d\kappa,$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{A}(\mathbf{k},c\kappa)e^{ic\kappa(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/c-t)}\,d\mathbf{k} + \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{A}(\mathbf{k},-c\kappa)e^{ic\kappa(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/c+t)}\,d\mathbf{k}$$

Ao aplicar a transformada de Fourier inversa, podemos finalmente obter a expressão para a solução da equação da onda acústica.

Por conveniência defina $\tilde{A} = 4c\pi^2 A/\kappa^2$. Com isso, podemos fazer a troca da variável de integração, de ω para $c\kappa$ e logo se identifica o elemento de volume em coordenadas esféricas $dV = \kappa^2 \sin\theta d\phi d\theta d\kappa$.

Ao partir a integral em κ em duas, uma de $-\infty$ a 0 e outra de 0 a ∞, obtemos finalmente a representação em tempo para a função ψ.

Expansão em ondas planas homogêneas

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} A(\mathbf{k}, c\kappa) \psi^-_{c\kappa}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{k} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} A(\mathbf{k}, -c\kappa) \psi^+_{-c\kappa}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{k}$$

Para simplificar a notação, voltamos a usar A para a função arbitrária na integral.

Ao observar que $e^{ic\kappa(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/c-t)} = \psi^-_{c\kappa}(\mathbf{x}, t)$ e $e^{ic\kappa(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/c+t)} = \psi^+_{-c\kappa}(\mathbf{x}, t)$, obtemos finalmente a representação da solução da equação da onda acústica como uma expansão em ondas planas homogêneas. Repare que a expansão tem dois termos, um para as frequências positivas e outro para as negativas.

Em meios dispersivos, onde a amplitude de uma onda plana decai com a propagação, $\mathrm{Im}(\kappa) > 0$. Nesse caso, não é possível representar a solução da equação da onda apenas como a superposição de ondas planas *homogêneas* (cuja amplitude se mantém constante durante a propagação), mas sim faz-se necessário utilizar também ondas planas *não-homogêneas*.

Outras soluções?

Será que existem soluções da equação da onda

que apresentem outros tipos de simetria?

Apesar de poder decompor uma onda em somas de ondas planas, essa nem sempre é uma boa escolha. Em certas circunstâncias é natural lidar com outros tipos de simetria.

Simetria esférica

E se o problema tiver simetria esférica?

Vamos procurar uma solução que dependa apenas de $r = \|\mathbf{x}\|$, ou seja,

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \phi(r, t)$$

No caso de uma fonte pontual no espaço, em um meio homogêneo, intuitivamente as frentes de onda devem ter simetria esférica. Sendo assim, é de interesse procurar soluções para a equação da onda que apresentem simetria esférica.

Do ponto de vista matemático, isso significa buscar soluções que dependam apenas da distância do ponto à origem.

$$\psi(\mathbf{x},t) = \phi(r,t)$$

$$\psi_{tt} = \phi_{tt}$$

$$\partial_j \psi = \frac{\partial}{\partial r}\phi \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} = \phi_r \, \frac{x_j}{r}$$

$$\partial_{jj}\psi = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_r \, \frac{x_j}{r}\right) = \frac{\partial \phi_r}{\partial x_j}\frac{x_j}{r} + \phi_r \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{r}\right)$$

$$= \phi_{rr}\frac{x_j^2}{r^2} + \phi_r\left(\frac{r - x_j^2/r}{r^2}\right) = \left(\frac{x_j}{r}\right)^2\left[\phi_{rr} - \frac{1}{r}\phi_r\right] + \frac{1}{r}\phi_r$$

Para impor que $\psi(\mathbf{x},t) = \phi(r,t)$ seja solução da equação da onda é necessário computar as derivadas ψ_{tt} e $\Delta\psi$.

Como $r = \|\mathbf{x}\|$,

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{2}\frac{2x_j}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_j}{r}.$$

Substituindo

$$\Delta\psi = \left[\phi_{rr} - \frac{1}{r}\phi_r\right] + \frac{3}{r}\phi_r = \phi_{rr} + \frac{2}{r}\phi_r = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[r\phi]$$

Logo

$$\frac{1}{c^2}\psi_{tt} - \Delta\psi = 0,$$

fica

$$\frac{1}{c^2}\phi_{tt} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}[r\phi]\frac{1}{r} = 0$$

ou ainda

$$\frac{1}{c^2}[r\phi]_{tt} - [r\phi]_{rr} = 0$$

(equação acústica 1D em $r\phi$)

Supreendentemente, descobrimos que a função $[r\phi(r,t)]$ satisfaz a equação da onda acústica 1D, a qual já sabemos poder ser escrita como a soma de dois pulsos propagando-se em sentidos opostos.

Solução de onda esférica

$$\phi(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

Para t fixo, ϕ é constante se r for constante, ou seja, a frente de onda é uma casca esférica.

Enquanto que $\frac{1}{r} f(t - r/c)$ representa uma frente de onda esférica expandindo-se, o segundo termo, $\frac{1}{r} g(t + r/c)$ representa uma frente de onda esférica contraíndo-se.

Observe também que o fator $(1/r)$ representa uma decréscimo de amplitude, com a distância da origem. Qual seria a interpretação física disso? Por que não havia um fator de amplitude no caso de ondas planas?

A energia gerada pela fonte está distribuída na frente de onda, ou seja, na casca esférica. A medida que o raio da casca esférica aumenta, a área da superfície aumenta com r^2, a densidade de energia decai com $1/r^2$. Como a energia é conservada e a amplitude de oscilação da onda é proporcional à raiz quadrada da energia, a amplitude decai com $1/r$.

Onda esférica harmônica

$$\phi(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(r,\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\hat{f}(\omega)\frac{1}{r}e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} + \hat{g}(\omega)\frac{1}{r}e^{-i\omega\left(t+\frac{r}{c}\right)}\right]\,d\omega$$

Onda Esférica Harmônica

ϕ é escrita como uma superposição de ondas esféricas harmônicas, dadas por

$$\phi_\omega^{\pm}(r,t) = \frac{1}{r}e^{-i\omega\left(t\pm\frac{r}{c}\right)}$$

Observe que ϕ é singular em $r = 0$.

Procedendo de maneira análoga ao caso da solução de onda plana, podemos também nos valer da transformada de Fourier para escrever a solução de onda esférica como uma superposição da ondas esféricas harmônicas.

Equação da onda acústica 3D com fonte

Fonte pontual

- Velocidade c e densidade ρ, ambas constantes
- $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, termo fonte

Se $F(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t)$, então dizemos que a fonte é impulsiva e pontual. Neste caso, G, a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2} G_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta G(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t) \\ G(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{para } t < 0 \qquad \text{(Causalidade)} \end{cases}$$

é denominada função de Green.

Como F não é uma *função*, no sentido clássico, mas sim uma *distribuição*, G também deve ser entendida como uma distribuição. A denominação *função* de Green é usual, entretanto.

A solução deste problema, é denominada função de Green causal. Causalidade é a condição que impõe que o campo só pode ser não nulo, após a ação da fonte. Trocando-se essa condição para $G(\mathbf{x}, t) = 0$ para $t > 0$, teríamos a função de Green *anticausal*.

Fourier no espaço

$$\hat{G}(\mathbf{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, t)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d\mathbf{x}$$

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{G}(\mathbf{k}, t)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d\mathbf{k}$$

Repare que a convenção adotada para os sinais da transformada de Fourier no espaço é oposta à convenção para os sinais da transformada de Fourier no tempo.

Tome cuidado com os sinais na definição da Transformada de Fourier, principalmente quando for utilizar propriedades da transformada, como no caso da transformada da derivada e transformada da função deslocada.

Aplicando Fourier

Para $t > 0$, se $\sigma = c\|\mathbf{k}\|$,

$$\frac{1}{c^2}G_{tt}(\mathbf{x},t) - \Delta G(\mathbf{x},t) = 0 \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \hat{G}_{tt}(\mathbf{k},t) + \sigma^2\hat{G}(\mathbf{k},t) = 0$$

cuja solução é

$$\hat{G}(\mathbf{k},t) = a(\mathbf{k})\sin(\sigma t) + b(\mathbf{k})\cos(\sigma t).$$

Pela causalidade e continuidade,

$$0 = \lim_{t\to 0_+} \hat{G}(\mathbf{k},t) = b(\mathbf{k}).$$

Logo, $\hat{G}(\mathbf{k},t) = a(\mathbf{k})\sin(\sigma t)$, para $t > 0$.

Integrando em t

$$\hat{G}_{tt}(\mathbf{k},t) + \sigma^2 \hat{G}(\mathbf{k},t) = c^2 \delta(t)$$

Integrando em $(-\epsilon, \epsilon)$ em t e lembrando que $G \equiv 0$, para $t < 0$,

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \hat{G}_{tt}(\mathbf{k},t)\, dt + \sigma^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \hat{G}(\mathbf{k},t)\, dt = c^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\, dt = c^2$$

$$\left[\hat{G}_t(\mathbf{k},\epsilon) - 0\right] + \sigma^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \hat{G}(\mathbf{k},t)\, dt = c^2$$

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \left[\hat{G}_t(\mathbf{k},\epsilon) - 0\right] + \sigma^2 \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \hat{G}(\mathbf{k},t)\, dt = c^2$$

$$a(\mathbf{k})\sigma = c^2 \qquad \text{ou} \qquad a(\mathbf{k}) = \frac{c}{\|\mathbf{k}\|}$$

Portanto, $\hat{G}(\mathbf{k},t) = \dfrac{c}{\|\mathbf{k}\|} \sin(c\|\mathbf{k}\|t)$.

Voltando ao espaço

$$G(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \hat{G}(\mathbf{k},t)e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,d\mathbf{k}$$

Considere um sistema de coordenadas esféricas, tal que θ seja o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{k}$.

$$\begin{aligned} k_x &= R\sin\theta\cos\phi & \qquad 0 &\le R < \infty \\ k_y &= R\sin\theta\sin\phi & 0 &\le \phi \le 2\pi \\ k_z &= R\cos\theta & 0 &\le \theta \le \pi \end{aligned}$$

$$d\mathbf{k} = R^2\sin\theta\,dR\,d\phi\,d\theta$$

Com isto, $G(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|}\delta\left(t - \frac{\|\mathbf{x}\|}{c}\right)$.

Nesse sistema de coordenadas, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = \|\mathbf{k}\|\|\mathbf{x}\|\cos\theta = \|\mathbf{x}\|R\cos\theta$. Assim, para $t > 0$,

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{G}(\mathbf{k},t)e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,d\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{c}{\|\mathbf{k}\|}\sin(c\|\mathbf{k}\|t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,d\mathbf{k} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{c}{R}\sin(cRt)e^{i\|\mathbf{x}\|R\cos\theta}\,R^2\sin\theta\,dR\,d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} cR\sin(cRt)e^{i\|\mathbf{x}\|R\cos\theta}\,\sin\theta\,dR\,d\theta = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty} cR\sin(cRt)e^{i\|\mathbf{x}\|Ru}\,dR\,du \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} cR\sin(cRt)\left.\frac{e^{i\|\mathbf{x}\|Ru}}{i\|\mathbf{x}\|R}\right|_{-1}^{1} dR = \frac{2c}{(2\pi)^2\|\mathbf{x}\|}\int_0^{\infty}\sin(cRt)\sin(\|\mathbf{x}\|R)\,dR \\
&= \frac{c}{(2\pi)^2\|\mathbf{x}\|}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(cRt)\sin(\|\mathbf{x}\|R)\,dR \qquad \text{(função par)} \\
&= \frac{c}{(2\pi)^2\|\mathbf{x}\|}\frac{1}{(2i)^2}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{icRt}-e^{-icRt})(e^{i\|\mathbf{x}\|R}-e^{-i\|\mathbf{x}\|R})\,dR \\
&= \frac{c}{(2\pi)^2\|\mathbf{x}\|}\frac{1}{(2i)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iR(ct+\|\mathbf{x}\|)} - e^{iR(ct-\|\mathbf{x}\|)} - e^{-iR(ct-\|\mathbf{x}\|)} + e^{-iR(ct+\|\mathbf{x}\|)}\,dR \\
&= -\frac{1}{4}\frac{c}{2\pi\|\mathbf{x}\|}[\delta(ct+\|\mathbf{x}\|)-\delta(ct-\|\mathbf{x}\|)-\delta(-ct+\|\mathbf{x}\|)+\delta(-ct-\|\mathbf{x}\|)] = \frac{c}{4\pi\|\mathbf{x}\|}\delta(ct-\|\mathbf{x}\|)
\end{aligned}$$

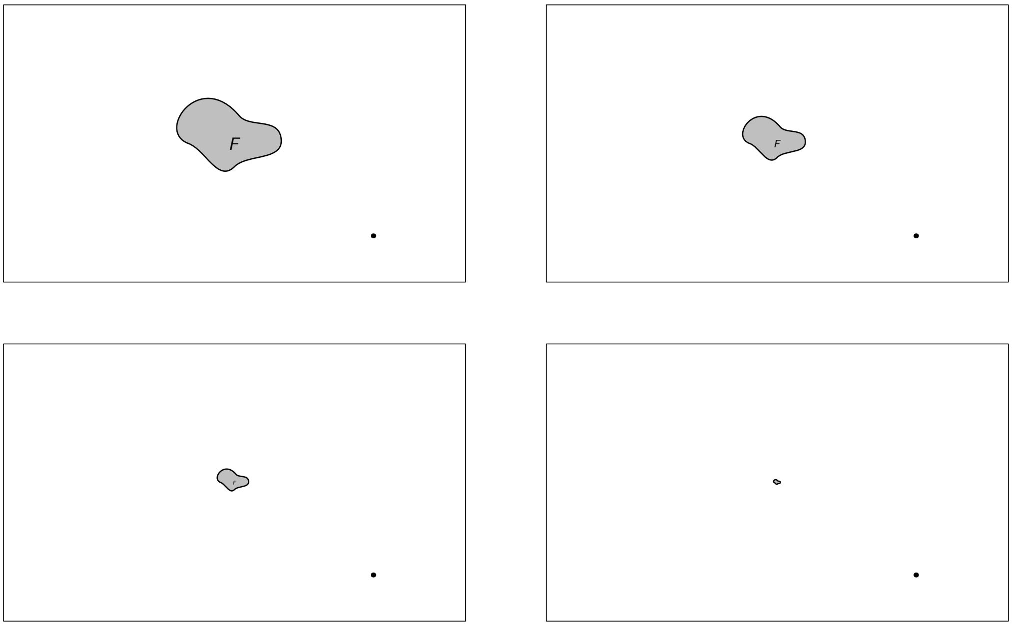
Fonte "arbitrária"

- Velocidade c constante
- F tem suporte compacto no espaço, i.é,
  termo fonte $F(\mathbf{x}, t)$ atua em uma região limitada do espaço

$$\frac{1}{c^2}\psi_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta\psi(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t)$$

Que outras condições podem ser impostas sobre ψ para que haja solução única?

De longe, tudo é pontual



Se a região destacada corresponde ao suporte espacial do termo fonte, observe que a medida que o ponto de observação se distancia dessa região, melhor o termo fonte pode ser aproximado por uma fonte pontual.

Como a “Green” se comporta?

Princípio

De longe, qualquer onda se comporta como se tivesse sido emitida por uma fonte pontual.

Vejamos como a função de Green (resposta a uma fonte pontual) se comporta.

$$\hat{G}(\mathbf{x},\omega) = \frac{e^{i\omega r/c}}{4\pi r}, \qquad r\hat{G}(\mathbf{x},\omega) \text{ é limitada}$$

$$\frac{d\hat{G}}{dr}(\mathbf{x},\omega) = \frac{i\omega}{c}\hat{G} - \frac{1}{r}\hat{G}, \qquad r\left(\hat{G}_r - \frac{i\omega}{c}\hat{G}\right) \to 0, \text{ quando } r \to \infty$$

$r = \|\mathbf{x}\|$.

Condições de Radiação de Sommerfeld

Dizemos que $\hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega)$ satisfaz as condições de radiação de Sommerfeld se

$$r\hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega) \text{ é limitada}$$

$$r\left(\hat{\psi}_r - \frac{i\omega}{c}\hat{\psi}\right) \to 0, \text{ quando } r \to \infty$$

$r = \|\mathbf{x}\|$.

Solução geral com termo fonte

- Velocidade c constante
- ψ satisfaz as condições de radiação de Sommerfeld

$$\frac{1}{c^2}\psi_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta\psi(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t)$$

Então

$$\psi(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{x}, t) *_{x,t} F(\mathbf{x}, t)$$

A demonstração de que as condições de radiação de Sommerfeld garantem unicidade da solução pode ser encontrada em (Courant, 1962, seção 4.5).

Segunda identidade de Green

Se f e g são campos escalares, duas vezes diferenciávies, então

$$\oint_{\Sigma} [f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{V} [f(\mathbf{x})\Delta g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\Delta f(\mathbf{x})]\, dV,$$

- V um volume finito em $\mathbb{R}^3$
- Σ a superfície de V
- $\mathbf{n}$ é a normal a Σ, apontando para fora

Green, sua identidade e a equação de Helmholtz

- $\mathcal{L}\hat{u} \equiv \Delta\hat{u} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\hat{u}$
- $\hat{G}_{\mathbf{y}}$, função de Green para fonte em $\mathbf{y}$

$$\begin{aligned}
\int_V \left\{\hat{G}_{\mathbf{y}}\mathcal{L}\hat{\psi} - \hat{\psi}\mathcal{L}\hat{G}_{\mathbf{y}}\right\} dV &= \int_V \left\{\hat{G}_{\mathbf{y}}\left[\Delta\hat{\psi} + \frac{\omega^2}{c^2}\hat{\psi}\right] - \hat{\psi}\left[\Delta\hat{G}_{\mathbf{y}} + \frac{\omega^2}{c^2}\hat{G}_{\mathbf{y}}\right]\right\} dV \\
&= \int_V \left\{\hat{G}_{\mathbf{y}}\Delta\hat{\psi} - \hat{\psi}\Delta\hat{G}_{\mathbf{y}}\right\} dV \\
&= \oint_\Sigma [\hat{G}_{\mathbf{y}}\nabla\hat{\psi} - \hat{\psi}\nabla\hat{G}_{\mathbf{y}}]\cdot\mathbf{n}\, dS
\end{aligned}$$

Por outro lado...

Como

$$\mathcal{L}\hat{\psi}(\mathbf{x},\omega) = -\hat{F}(\mathbf{x},\omega) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}\hat{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x},\omega) = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

$$\begin{aligned}\int_V \left\{\hat{G}_{\mathbf{y}}\mathcal{L}\hat{\psi} - \hat{\psi}\mathcal{L}\hat{G}_{\mathbf{y}}\right\} dV &= -\int_V \hat{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\hat{F}(\mathbf{x})\, dV + \int_V \hat{\psi}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, dV \\ &= \hat{\psi}(\mathbf{y}) - \int_V \hat{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\hat{F}(\mathbf{x})\, dV\end{aligned}$$

No desenvolvimento, a dependência em ω é omitida apenas por concisão.

Comparando ambos...

$$\hat{\psi}(\mathbf{y}) = \int_V \hat{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\hat{F}(\mathbf{x})\, dV + \oint_\Sigma [\hat{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\nabla\hat{\psi}(\mathbf{x}) - \hat{\psi}(\mathbf{x})\nabla\hat{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Tomando V como a esfera de raio r,

$$\oint_\Sigma [\hat{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\nabla\hat{\psi}(\mathbf{x}) - \hat{\psi}(\mathbf{x})\nabla\hat{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_\Sigma \hat{G}_{\mathbf{y}}\hat{\psi}_r - \hat{\psi}\hat{G}_{\mathbf{y},r}\, dS$$

$$= \oint_\Sigma \hat{G}_{\mathbf{y}}\left(\hat{\psi}_r - \frac{i\omega}{c}\hat{\psi}\right) - \hat{\psi}\left(\hat{G}_{\mathbf{y},r} - \frac{i\omega}{c}\hat{G}_{\mathbf{y}}\right)\, dS$$

Integral de superfície

Em coordenadas esféricas

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\Sigma} \hat{G}_{\mathbf{y}} \left(\hat{\psi}_r - \frac{i\omega}{c}\hat{\psi} \right) - \hat{\psi} \left(\hat{G}_{\mathbf{y},r} - \frac{i\omega}{c}\hat{G}_{\mathbf{y}} \right) \, dS \\
&\qquad = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[r\hat{G}_{\mathbf{y}} \right] \left[r \left(\hat{\psi}_r - \frac{i\omega}{c}\hat{\psi} \right) \right] - \left[r\hat{\psi} \right] \left[r \left(\hat{G}_{\mathbf{y},r} - \frac{i\omega}{c}\hat{G}_{\mathbf{y}} \right) \right] \right\} \sin\theta \, d\phi \, d\theta
\end{aligned}
$$

Como $\hat{\psi}$ e $\hat{G}_{\mathbf{y}}$ satisfazem *Sommerfeld*, a integral de superfície vai a zero, quando $r \to \infty$.

Lembre que o elemento de área de uma casca esférica de raio r, em coordenadas esféricas, é dado por $dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$.

Por fim

$$\hat{\psi}(\mathbf{y},\omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{G}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x},\omega)\hat{F}(\mathbf{x},\omega)\, d\mathbf{x}$$

Porém, em meio homogêneo,

$$\hat{\psi}(\mathbf{y},\omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{G}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\omega)\hat{F}(\mathbf{x},\omega)\, d\mathbf{x} = \left[\hat{G} *_{\mathbf{y}} \hat{F}\right](\mathbf{y},\omega)$$

Logo

$$\psi(\mathbf{x},t) = G(\mathbf{x},t) *_{\mathbf{x},t} F(\mathbf{x},t)$$

Solução da eq. da onda acústica com fonte

$$\psi(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{x}, t) *_{\mathbf{x},t} F(\mathbf{x}, t)$$

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}, t) &= G(\mathbf{x}, t) *_{x,t} F(\mathbf{x}, t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \int_{\mathbb{R}} d\tau \; G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) F(\mathbf{y}, \tau) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \, \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \int_{\mathbb{R}} d\tau \, \delta\left(t - \tau - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c\right) F(\mathbf{y}, \tau) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \, \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} F(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c)
\end{aligned}$$

Equação da onda elástica 3D com fonte

Decomposição de campos vetoriais

Decomposição de Helmholtz

Todo campo vetorial $\mathbf{v}$ pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\chi},$$

onde ϕ é um campo escalar e $\boldsymbol{\chi}$ é um campo vetorial tal que $\nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = 0$.

Se $\mathbf{w}$ é solução de $\Delta\mathbf{w} = \mathbf{v}$, então

$$\mathbf{v} = \Delta\mathbf{w} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{w}).$$

Logo, $\phi = (\nabla \cdot \mathbf{w})$ e $\boldsymbol{\chi} = -(\nabla \times \mathbf{w})$.

Suponha que $\mathbf{w}$ é a solução de $\Delta\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Usando a identidade $\Delta\mathbf{w} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{w})$, fica claro que o resultado da decomposição de Helmholtz vale se $\phi = (\nabla \cdot \mathbf{w})$ e $\boldsymbol{\chi} = -(\nabla \times \mathbf{w})$. Logo, para efetivamente conhecer os fatores ϕ e $\boldsymbol{\chi}$, garantidos pela decomposição de Helmholtz, basta encontrar $\mathbf{w}$, solução de um problema de Laplace.

Como resolver $\Delta \mathbf{w} = \mathbf{v}$?

Observe a equação da onda acústica com o $\mathbf{v}$ como termo fonte.

$$\frac{1}{c^2}\mathbf{w}_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

Se não houver dependência temporal, a equação fica $\Delta \mathbf{w} = -\mathbf{v}$, e cuja solução é

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\, d\mathbf{y},$$

contanto que $\|\mathbf{v}(\mathbf{x})\| = \mathcal{O}(1/r^2)$, quando $r = \|\mathbf{x}\| \to \infty$.

Já vimos que a solução da equação da onda acústica

$$\frac{1}{c^2}\mathbf{w}_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}),$$

em meio homogêneo é dada por,

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{y})}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\, d\mathbf{y},$$

visto que $\mathbf{v}$ não depende de t. Logo, sem essa dependência temporal, a equação da onda acústica, torna-se a equação de Laplace e a solução $\mathbf{w}$ que queríamos pode ser inferida.

Para garantir a existência de solução, lembre que antes havíamos pedido que o termo fonte tivesse suporte compacto. De fato, é possível garantir existência de solução para a equação de Laplace com condições mais fracas. A equação admite solução se $\|\mathbf{v}(\mathbf{x})\| = \mathcal{O}(1/r^2)$, ou seja, se $\|\mathbf{v}(\mathbf{x})\| \leq C/r^2$, para alguma constante $C > 0$, quando $r = \|\mathbf{x}\| \to \infty$.

Para mais detalhes, veja (Pujol, 2003, p. 281).

Equação da onda

- Velocidade P: $\alpha \in \mathbb{R}$
- Velocidade S: $\beta \in \mathbb{R}$
- Fonte: $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
- Deslocamento: $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Equação da Onda Elástica em meio homogêneo

$$\mathbf{u}_{tt} = \alpha^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{F}$$

Assim como no caso da equação da onda acústica, não é possível obter uma solução analítica para a equação da onda elástica quando os parâmetros do meio variam espacialmente. Como nos interessa compreender os fundamentos da propagação em um meio elástico, consideraremos o caso de um meio homogêneo.

Um meio elástico é caracterizado pelo parâmetros de Lamé, λ e μ, além da densidade ρ. Quando esses parâmetros não variam espacialmente, a equação da onda elástica passa a depender dos parâmetros

$$\alpha = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} \quad \text{e} \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Veremos que esses parâmetros, α e β ditarão a velocidade de propagação de duas ondas.

Decomposições

Utilizando a decomposição de Helmholtz, cada campo vetorial abaixo se escreve como:

- $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla g(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$
- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \nabla A(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x})$
- $\mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) = \nabla C(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{x})$

onde g, A e C são campos escalares e $\mathbf{h}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$ são campos vetoriais com divergente nulo.

Integrando no tempo

$$\mathbf{u}_{tt} = \alpha^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{F}$$

Integrando duas vezes no tempo, temos

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \alpha^2 \nabla \int_0^t d\tau \int_0^\tau (\nabla \cdot \mathbf{u})\, ds - \beta^2 \nabla \times \int_0^t d\tau \int_0^\tau (\nabla \times \mathbf{u})\, ds$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mathbf{F}\, ds + t\mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$$

Agrupando

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \nabla\left\{\alpha^2\int_0^t d\tau\int_0^\tau\left(\nabla\cdot\mathbf{u}+\frac{1}{\alpha^2}g\right)\,ds + Ct + A\right\}$$
$$+\nabla\times\left\{\beta^2\int_0^t d\tau\int_0^\tau\left(-\nabla\times\mathbf{u}+\frac{1}{\beta^2}\mathbf{h}\right)\,ds + \mathbf{D}t + \mathbf{B}\right\}$$

Logo, $\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\chi}$, onde

$$\phi(\mathbf{x},t) = \alpha^2\int_0^t d\tau\int_0^\tau\left(\nabla\cdot\mathbf{u}+\frac{1}{\alpha^2}g\right)\,ds + Ct + A$$

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x},t) = \beta^2\int_0^t d\tau\int_0^\tau\left(-\nabla\times\mathbf{u}+\frac{1}{\beta^2}\mathbf{h}\right)\,ds + \mathbf{D}t + \mathbf{B}$$

χ tem divergente nulo

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \beta^2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau \left(-\nabla \times \mathbf{u} + \frac{1}{\beta^2}\mathbf{h} \right) ds + \mathbf{D}t + \mathbf{B}$$

Observe que $\nabla \cdot \chi = 0$, pois

$$\nabla \cdot \chi(\mathbf{x}, t) = \beta^2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau \left(-\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} + \frac{1}{\beta^2}\nabla \cdot \mathbf{h} \right) ds + (\nabla \cdot \mathbf{D})t + \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

pois $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0$, e $\mathbf{h}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$ tem divergente nulo, por hipótese.

Decomposição de Helmholtz para $\mathbf{u}$

Portanto, $\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\chi}$, com $\nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = 0$, e

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \alpha^2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau \left(\Delta\phi + \frac{1}{\alpha^2} g\right) ds + Ct + A$$

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t) = \beta^2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau \left(\Delta\boldsymbol{\chi} + \frac{1}{\beta^2} \mathbf{h}\right) ds + \mathbf{D}t + \mathbf{B}$$

Usamos que

$$\begin{aligned} -\nabla \times \mathbf{u} &= -\nabla \times (\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\chi}) \\ &= -\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\chi} \\ &= \Delta\boldsymbol{\chi} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\chi}) = \Delta\boldsymbol{\chi}, \end{aligned}$$

pois $\nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = 0$.

Equações de onda acústica para ϕ e χ

Derivando duas vezes no tempo, obtemos as equações para ϕ e χ como

$$\phi_{tt}(\mathbf{x}, t) = \alpha^2 \Delta\phi(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)$$

$$\chi_{tt}(\mathbf{x}, t) = \beta^2 \Delta\chi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$$

Solução da equação da onda elástica com fonte em meio homogêneo

Se **u** satisfaz

$$\mathbf{u}_{tt} = \alpha^2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \beta^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + \mathbf{F}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \nabla A(\mathbf{x}) + \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{u}_t(\mathbf{x},0) = \nabla C(\mathbf{x}) + \nabla\times\mathbf{D}(\mathbf{x})$$

com $\mathbf{F} = \nabla g + \nabla\times\mathbf{h}$, então $\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\chi}$, onde ϕ e $\boldsymbol{\chi}$ são soluções das seguintes equações da onda acústica

$$\phi_{tt}(\mathbf{x},t) = \alpha^2\Delta\phi(\mathbf{x},t) + g(\mathbf{x},t) \qquad \boldsymbol{\chi}_{tt}(\mathbf{x},t) = \beta^2\Delta\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x},t) + \mathbf{h}(\mathbf{x},t)$$

$$\phi(\mathbf{x},0) = A \qquad \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x},0) = \mathbf{B}$$
$$\phi_t(\mathbf{x},0) = C \qquad \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{x},0) = \mathbf{D}$$

Onda P (pressão) e onda S (cisalhante)

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\chi}$$

A componente $\nabla\phi$ é a onda P (pressão), com rotacional zero.

A componente $\nabla \times \boldsymbol{\chi}$ é a onda S (cisalhante), com divergente nulo.

Ondas planas

Vamos procurar uma solução da equação da onda elástica 3D, com velocidades constantes, que tenha a forma de uma onda plana, ou seja

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{d}\, f\left(t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{c}\right),$$

para algum $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ com $\|\mathbf{n}\| = 1$ e $c \in \mathbb{R}$.

Vejamos que

$$\mathbf{u}_{tt} = \mathbf{d}\, f''(\cdot), \qquad \partial_j \mathbf{u} = -\mathbf{d}\, f'(\cdot)\frac{\mathbf{n}_j}{c}.$$

Logo

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = -\frac{1}{c} f'(\cdot)(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n}), \qquad \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) = \frac{1}{c^2} f''(\cdot)(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n},$$

$$\Delta\mathbf{u} = \frac{1}{c^2} f''(\cdot)\mathbf{d}.$$

Substituindo...

$$\mathbf{u}_{tt} = \alpha^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

$$f''(\cdot)\mathbf{d} = \frac{\alpha^2}{c^2} f''(\cdot)(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \beta^2 \left[\frac{1}{c^2} f''(\cdot)(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \frac{1}{c^2} f''(\cdot)\mathbf{d} \right]$$

$$\left[1 - \frac{\beta^2}{c^2}\right] \mathbf{d} = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{c^2}\right] \mathbf{n}$$

Computando o produto escalar por **n**, temos

$$\left[1 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right] (\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) = 0$$

Caso 1: $c = \alpha$

$$\left[1 - \frac{\beta^2}{c^2}\right] \mathbf{d} = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{c^2}\right] \mathbf{n}$$

Portanto $\mathbf{d} = \gamma \mathbf{n}$, para algum $\gamma \in \mathbb{R}$.

Onda Longitudinal ou Onda P

O movimento é na direção da propagação.

$$\boldsymbol{\mu}_P(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n}\, f\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\alpha}\right)$$

Além disso, $\nabla \times \boldsymbol{\mu}_P = 0$ (movimento irrotacional).

Caso 2: $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) = 0$

$$\left[1 - \frac{\beta^2}{c^2}\right] \mathbf{d} = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{c^2}\right] \mathbf{n}$$

Portanto $c = \beta$ e $\mathbf{d} = \mathbf{n}^\perp$.

Onda Transversal ou Onda S

O movimento é na direção ortogonal à direção de propagação.

$$\boldsymbol{\mu}_S(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n}^\perp f\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\beta}\right)$$

Além disso, $\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}_S = 0$.

Função de Green para equação da onda elástica 3D

A função de Green é a solução de

$$\mathbf{G}_{tt} = \alpha^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \beta^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{F},$$

onde $\mathbf{F} = \delta(t)\delta(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$.

Vamos agora computar a função de Green causau da onda elástica, em meio homogêneo, de modo a poder representar explicitamente a solução geral da equação da onda elástica, nesta situação.

Para isso, vamos considerar um o termo fonte instantâneo e impulsivo e, sem perda de generalidade, na direção do vetor $\mathbf{e}_1$.

Decomposição de Helmholtz para $\mathbf{F}$

Se $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla g(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$, então

$$g = \nabla \cdot \mathbf{w}, \quad \text{e} \quad \mathbf{h} = -\nabla \times \mathbf{w},$$

para

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y}, t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \, d\mathbf{y} = -\frac{\delta(t)\mathbf{e}_1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \, d\mathbf{y} = -\frac{\delta(t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|}\mathbf{e}_1$$

Vimos que a resolução da equação da onda elástica pode ser desacoplada na resolução de duas equações da onda acústica e para isto é necessário representar o termo fonte como prescrito pela decomposição de Helmholtz.

O primeiro passo é computar o campo vetorial $\mathbf{w}$, a partir do qual será possível computar os campos g e $\mathbf{h}$.

Campos g e $\mathbf{h}$

Se $\mathbf{w} = -\dfrac{\delta(t)}{4\pi r}\mathbf{e}_1$, para $r = \|\mathbf{x}\|$, então

$$g(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{w} = -\frac{\delta(t)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{r}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \times \mathbf{w} = \frac{\delta(t)}{4\pi}\left(0, \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}, -\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{r}\right)$$

Decomposição de Helmholtz para a função de Green

Já vimos que $\mathbf{G} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\chi}$, onde

$$\phi_{tt}(\mathbf{x}, t) = \alpha^2 \Delta\phi(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t),$$

$$\boldsymbol{\chi}_{tt}(\mathbf{x}, t) = \beta^2 \Delta\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{h}(\mathbf{x}, t).$$

A solução destas equações pode ser escrita em termos da função de Green para equação da onda acústica.

Quando deduzimos a função de Green para a equação da onda acústica, a velocidade aparecia como denominador no termo da derivada segunda no tempo. Sendo assim, a função que faz o papel de fonte, para podermos utilizar o resultado anterior deve ser g/α^2. O mesmo comentário se aplica para a equação em $\boldsymbol{\chi}$.

Solução para ϕ

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\alpha^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/\alpha)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \, d\mathbf{y}$$

$$= -\frac{1}{(4\pi\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/\alpha)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{\|\mathbf{y}\|} \, d\mathbf{y}$$

$$= -\frac{1}{(4\pi\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(t - h/\alpha)}{h} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R} \, d\mathbf{y}$$

onde $h = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ e $R = \|\mathbf{y}\|$.

Coordenadas esféricas centradas em x

Fazendo a mudança de coordenadas de **y** para (h, θ, ϕ), temos que

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{(4\pi\alpha)^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(t - h/\alpha)}{h} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R} \, d\mathbf{y}$$

$$= -\frac{1}{(4\pi\alpha)^2} \int_0^\infty \frac{\delta(t - h/\alpha)}{h} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R} \sin\theta \, d\theta d\phi \right\} h^2 \, dh$$

Lembre que em coordenadas esféricas o elemento de volume é dado por $d\mathbf{y} = h^2 \sin\theta \, d\theta d\phi dh$.

Integral de superfície

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{1}{R}\sin\theta\, d\theta d\phi = \begin{cases} 0, & \text{para fonte dentro da esfera } (h > r) \\ 4\pi\dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{1}{r}, & \text{para fonte fora da esfera } (h < r) \end{cases}$$

Esta integral aparece no estudo de potenciais gravitacionais e detalhes de sua resolução podem ser encontrados em (Aki e Richards, 2009, p. 71).

Campo escalar ϕ

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{(4\pi\alpha)^2} \int_0^{\infty} \frac{\delta(t - h/\alpha)}{h} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R} \sin\theta \, d\theta d\phi \right\} h^2 \, dh \\
&= -\frac{1}{4\pi\alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \right) \int_0^{r} h\delta(t - h/\alpha) \, dh \\
&= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \right) \int_0^{r/\alpha} \tau\delta(t - \tau) \, d\tau \\
&= -\frac{t}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \right) \mu(r/\alpha - t)
\end{aligned}
$$

Observe que a integral da delta de Dirac só não é nula se o intervalo de integração contiver o zero do argumento da delta. Neste caso, a integral só será não nula se $0 < t < r/\alpha$. Como estamos computando a função de Green causal, já estamos assumindo que $t > 0$.

Campo vetorial χ

De forma análoga,

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{4\pi}\left(0, \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}, -\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{r}\right)\mu(r/\beta - t)$$

Observe que cada componente do campo χ tem a mesma estrutura do campo ϕ, variando apenas o sinal e a direção da derivada parcial de $1/r$.

Algumas derivadas necessárias

Se $\gamma_i = x_i/r$ e $\mathbf{\Gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \mathbf{x}/r$, então

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \qquad \nabla r = \mathbf{\Gamma}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r^3} = -\frac{\gamma_i}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{x_i}{r^3} = \frac{1}{r^3}(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \qquad \nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^3}(3\gamma_i\mathbf{\Gamma} - \mathbf{e}_i)$$

Computando $\nabla\phi$

$$\phi(\mathbf{x},t) = -\frac{t}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{r}\right)\mu(r/\alpha - t)$$

$$\begin{aligned}
\nabla\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}\right)\mu(r/c-t)\right] &= \nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}\right)\mu(r/c-t) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}\right)\nabla\mu(r/c-t) \\
&= \frac{1}{r^3}\left(3\gamma_i\boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{e}_i\right)\mu(r/c-t) + \left(-\frac{\gamma_i}{r^2}\right)\frac{\delta(r/c-t)}{c}\boldsymbol{\Gamma} \\
&= \frac{1}{r^3}\left(3\gamma_i\boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{e}_i\right)\mu(r/c-t) - \frac{\gamma_i\boldsymbol{\Gamma}}{cr^2}\delta(r/c-t) \qquad (\star)
\end{aligned}$$

$$\nabla\phi(\mathbf{x},t) = -\frac{t}{4\pi}\left\{\frac{1}{r^3}\left(3\gamma_1\boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{e}_1\right)\mu(r/\alpha-t) - \frac{\gamma_1\boldsymbol{\Gamma}}{\alpha r^2}\delta(r/\alpha-t)\right\}$$

Para computar $\nabla\phi$ e $\nabla\times\boldsymbol{\chi}$, vamos computar derivadas comuns que aparecerão na derivação.

Computando $\nabla \times \chi$

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{4\pi}\left(0, \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}, -\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{r}\right)\mu(r/\beta - t)$$

$$(\nabla \times \chi)_1 = \frac{t}{4\pi}\left[-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{r}\mu(\cdot)\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\mu(\cdot)\right)\right]$$

$$(\nabla \times \chi)_2 = \frac{t}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{r}\mu(\cdot)\right)$$

$$(\nabla \times \chi)_3 = \frac{t}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\mu(\cdot)\right)$$

Computando $(\nabla \times \boldsymbol{\chi})_1$ com o auxílio de $(\star)$

$$
\begin{aligned}
(\nabla \times \boldsymbol{\chi})_1 &= \frac{t}{4\pi}\left[-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{r}\mu(\cdot)\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\mu(\cdot)\right)\right] \\
&= \frac{t}{4\pi}\left[-\frac{1}{r^3}(3\gamma_2^2 + 3\gamma_3^2 - 2)\mu(r/\beta - t) + \frac{\gamma_2^2+\gamma_3^2}{\beta r^2}\delta(r/\beta - t)\right] \\
&= \frac{t}{4\pi}\left[\frac{1}{r^3}(3\gamma_1^2 - 1)\mu(r/\beta - t) + \frac{1-\gamma_1^2}{\beta r^2}\delta(r/\beta - t)\right]
\end{aligned}
$$

Aqui usamos que $\|\boldsymbol{\Gamma}\| = 1$, e portanto $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Computando $(\nabla \times \boldsymbol{\chi})_{2,3}$ com o auxílio de $(\star)$

$$
\begin{aligned}
(\nabla \times \boldsymbol{\chi})_2 &= \frac{t}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{r} \mu(\cdot) \right) \\
&= \frac{t}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} (3\gamma_1\gamma_2) \mu(r/\beta - t) - \frac{\gamma_1\gamma_2}{\beta r^2} \delta(r/\beta - t) \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla \times \boldsymbol{\chi})_3 &= \frac{t}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r} \mu(\cdot) \right) \\
&= \frac{t}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} (3\gamma_1\gamma_3) \mu(r/\beta - t) - \frac{\gamma_1\gamma_3}{\beta r^2} \delta(r/\beta - t) \right]
\end{aligned}
$$

Escrevendo $\nabla \times \boldsymbol{\chi}$ vetorialmente...

$$\nabla \times \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{4\pi}\left[(3\gamma_1\boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{e}_1)\frac{1}{r^3}\mu(r/\beta - t) + (\mathbf{e}_1 - \gamma_1\boldsymbol{\Gamma})\frac{1}{\beta r^2}\delta(r/\beta - t)\right]$$

Usando que $t\delta(r/\beta - t) = \frac{r}{\beta}\delta(r/\beta - t)$,

$$\nabla \times \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{4\pi}(3\gamma_1\boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{e}_1)\frac{1}{r^3}\mu(r/\beta - t) + (\mathbf{e}_1 - \gamma_1\boldsymbol{\Gamma})\frac{1}{4\pi\beta^2 r}\delta(r/\beta - t)$$

Função de Green para impulso na direção $\mathbf{e}_1$

Como $\mathbf{G}_1 = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\chi}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_1 = & \frac{t}{4\pi r^3}[\mu(r/\beta - t) - \mu(r/\alpha - t)](3\gamma_1\mathbf{\Gamma} - \mathbf{e}_1) \\ & + \frac{\delta(r/\alpha - t)}{4\pi\alpha^2 r}\gamma_1\mathbf{\Gamma} + \frac{\delta(r/\beta - t)}{4\pi\beta^2 r}(\mathbf{e}_1 - \gamma_1\mathbf{\Gamma})\end{aligned}$$

Função de Green para impulso na direção $\mathbf{e}_j$

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_j(\mathbf{x},t) =& \frac{t}{4\pi r^3}[\mu(r/\beta - t) - \mu(r/\alpha - t)](3\gamma_j\mathbf{\Gamma} - \mathbf{e}_j)\\ &+ \frac{\delta(r/\alpha - t)}{4\pi\alpha^2 r}\gamma_j\mathbf{\Gamma} + \frac{\delta(r/\beta - t)}{4\pi\beta^2 r}(\mathbf{e}_j - \gamma_j\mathbf{\Gamma})\end{aligned}$$

ou ainda

$$\mathbf{G}_j(\mathbf{x},t) = \frac{(3\gamma_j\mathbf{\Gamma} - \mathbf{e}_j)}{4\pi r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau\delta(t-\tau)\,d\tau + \gamma_j\mathbf{\Gamma}\frac{\delta(t - r/\alpha)}{4\pi\alpha^2 r} + (\mathbf{e}_j - \gamma_j\mathbf{\Gamma})\frac{\delta(t - r/\beta)}{4\pi\beta^2 r}$$

Usamos que

$$t[\mu(r/\beta - t) - \mu(r/\alpha - t)] = \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau\delta(t-\tau)\,d\tau,$$

cuja demonstração é deixada como exercício.

Interpretação

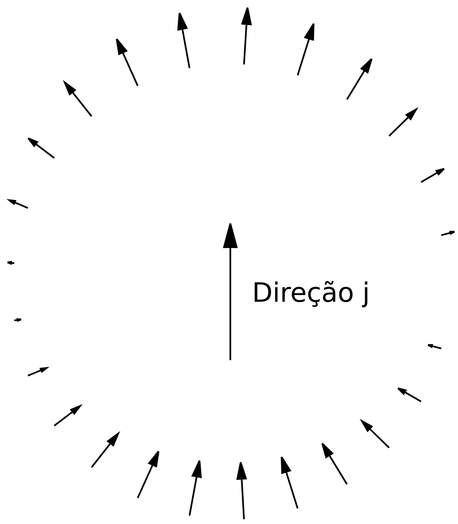
$$\mathbf{G}_j(\mathbf{x},t) = \underbrace{\frac{(3\gamma_j\boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{e}_j)}{4\pi r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau\delta(t-\tau)\,d\tau}_{\text{Campo próximo } \mathcal{O}(1/r^2)} + \underbrace{\gamma_j\boldsymbol{\Gamma}\frac{\delta(t-r/\alpha)}{4\pi\alpha^2 r} + (\mathbf{e}_j - \gamma_j\boldsymbol{\Gamma})\frac{\delta(t-r/\beta)}{4\pi\beta^2 r}}_{\text{Campo distante } \mathcal{O}(1/r)}$$

Campo distante para onda P

$$u_P(\mathbf{x}, t) = \gamma_j \mathbf{\Gamma} \frac{\delta(t - r/\alpha)}{4\pi\alpha^2 r}$$

- É atenuado com $1/r$
- O pulso registrado é proporcional ao pulso emitido, atrasado pelo tempo de propagação r/α
- A velocidade de propagação é α
- O deslocamento percebido é proporcional à força aplicada
- A direção de propagação é radial (ou *longitudinal*) e esta também é a direção de oscilação das partículas

Padrão de radiação do campo distante para onda P

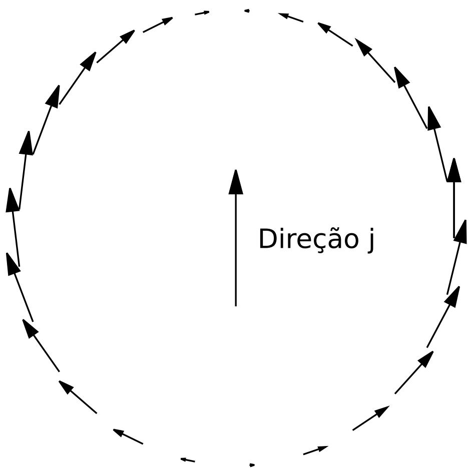


Campo distante para onda S

$$u_S(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{e}_j - \gamma_j \mathbf{\Gamma}) \frac{\delta(t - r/\beta)}{4\pi\beta^2 r}$$

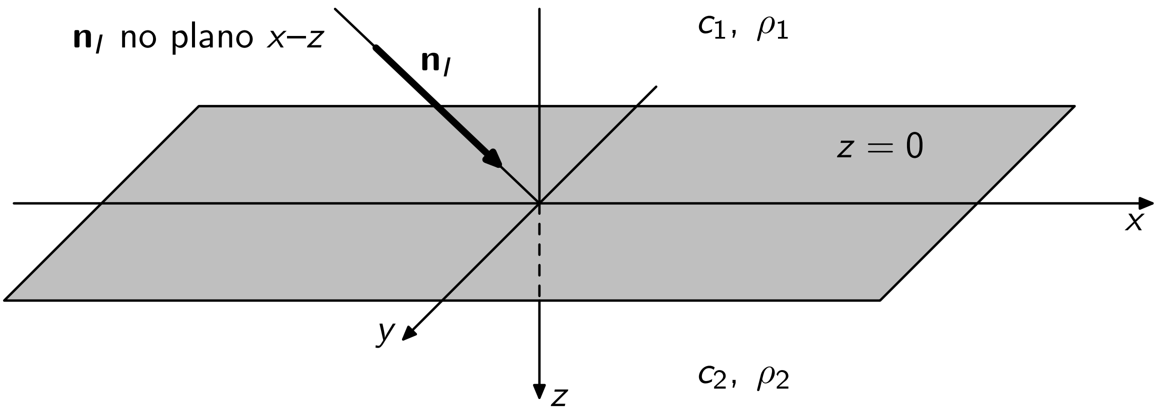
- É atenuado com $1/r$
- O pulso registrado é proporcional ao pulso emitido, atrasado pelo tempo de propagação r/β
- A velocidade de propagação é β
- O deslocamento percebido é proporcional à força aplicada
- A direção de propagação é radial, mas a direção de oscilação das partículas é perpendicular [$(\mathbf{e}_j - \gamma_j \mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{\Gamma} = 0$]

Padrão de radiação do campo distante para onda S



Ondas planas incidindo em interfaces planas

Geometria



Considere uma interface plana ($z = 0$), dividindo o espaço em dois meios homogêneos, um deles com parâmetros c_1 e ρ_1 e outro com parâmetros c_2 e ρ_2.

Nesta interface, incide uma onda plana $\mathbf{u}_I$, com direção de propagação $\mathbf{n}_I$. O sistema de coordenadas é tal que $(\mathbf{n}_I)_2 = 0$.

Ondas planas de deslocamento

- Onda incidente:
$$\mathbf{u}_I(\mathbf{x}, t) = a_I e^{i\omega(t - \mathbf{n}_I \cdot \mathbf{x}/c_1)} \mathbf{n}_I$$
- Onda refletida:
$$\mathbf{u}_R(\mathbf{x}, t) = a_R e^{i\omega(t - \mathbf{n}_R \cdot \mathbf{x}/c_1)} \mathbf{n}_R$$
- Onda transmitida:
$$\mathbf{u}_T(\mathbf{x}, t) = a_T e^{i\omega(t - \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{x}/c_2)} \mathbf{n}_T$$

Lembre que $\|\mathbf{n}_.\| = 1$.

Acoplamento na interface

Se $\mathbf{u}$ é deslocamento, então $\psi = -\rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u}$ é pressão.

O campo de pressão é contínuo

$$\psi_I(\mathbf{x}, t) + \psi_R(\mathbf{x}, t) = \psi_T(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x, y, 0)$$

O deslocamento normal é contínuo

$$[\mathbf{u}_I(\mathbf{x}, t)]_3 + [\mathbf{u}_R(\mathbf{x}, t)]_3 = [\mathbf{u}_T(\mathbf{x}, t)]_3, \quad \mathbf{x} = (x, y, 0)$$

Se $\mathbf{u}$ é o vetor deslocamento, então o vetor velocidade de partícula é $\mathbf{v} = \mathbf{u}_t$. Com isto, a equação da deformação em meio acústico (sem fonte) é $\nabla \cdot \mathbf{u}_t + \nu\psi_t = 0$. Desta forma, o campo de pressão ψ se escreve como $\psi_t = -\rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_t$, visto que $1/\nu = \rho c^2$. Integrando em tempo, temos a relação entre a pressão e o deslocamento.

Enquanto que, no caso da sísmica, o campo de pressão é contínuo, o campo de deslocamento de partículas, sobre a interface, não precisa ser contínuo, visto que pode haver cisalhamento. Entretanto, como não pode haver descolamento entre os meios, o campo de deslocamento deve ser contínuo, na componente vertical à interface (Fokkema e van den Berg, 1993, p. 67).

Continuidade da pressão

Como $\psi.(\mathbf{x}, t) = -\rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u}. = \rho c a e^{i\omega(t - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/c)}$, a condição de continuidade fica

$$\rho_1 c_1 a_I e^{i\omega(t-\mathbf{n}_I\cdot\mathbf{x}/c_1)} + \rho_1 c_1 a_R e^{i\omega(t-\mathbf{n}_R\cdot\mathbf{x}/c_1)} = \rho_2 c_2 a_T e^{i\omega(t-\mathbf{n}_T\cdot\mathbf{x}/c_2)}, \qquad \mathbf{x} = (x, y, 0).$$

Para $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$,

$$\rho_1 c_1 a_I + \rho_1 c_1 a_R = \rho_2 c_2 a_T$$

Como vale para todo $\mathbf{x} = (x, y, 0)$,

$$\frac{\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{x}}{c_1} = \frac{\mathbf{n}_R \cdot \mathbf{x}}{c_1} = \frac{\mathbf{n}_T \cdot \mathbf{x}}{c_2}$$

Como a continuidade do campo de pressão vale para qualquer ponto sobre a interface (plano $z = 0$), em particular vale no ponto $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$. Isso dá origem a primeira relação entre as amplitudes de cada onda plana.

Além disso, para que a continuidade do campo de pressão valha para quaisquer pontos dos plano, a única opção é que as fase seja todas iguais, o que dá origem à segunda relação.

Propagação no plano

Para $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$, temos que

$$\frac{(\mathbf{n}_I)_1}{c_1} = \frac{(\mathbf{n}_R)_1}{c_1} = \frac{(\mathbf{n}_T)_1}{c_2}$$

Além disso,

$$(\mathbf{n}_j)_2 = 0, \qquad j = I, R, T$$

Por uma questão de simetria, como a direção de propagação está contída no plano $x - -z$, isto é, $(\mathbf{n}_I)_2 = 0$, o mesmo deve ocorrer com as direções de propagação $\mathbf{n}_R$ e $\mathbf{n}_T$. Assim, a relação entre as fases deduzida anteriormente simplifica-se.

Continuidade do deslocamento normal

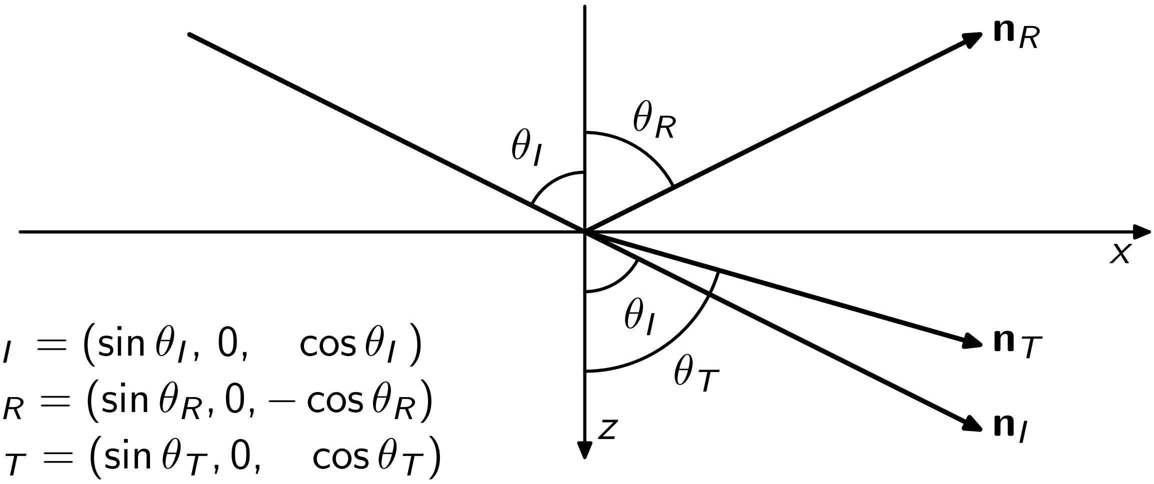
Como

$$(\mathbf{u}_I)_3 + (\mathbf{u}_R)_3 = (\mathbf{u}_T)_3, \qquad \mathbf{x} = (x, y, 0)$$

temos que

$$a_I(\mathbf{n}_I)_3 + a_R(\mathbf{n}_R)_3 = a_T(\mathbf{n}_T)_3$$

Direções de propagação



$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_I &= (\sin\theta_I,\, 0,\, \cos\theta_I\,) \\
\mathbf{n}_R &= (\sin\theta_R, 0, -\cos\theta_R) \\
\mathbf{n}_T &= (\sin\theta_T, 0, \cos\theta_T)
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\frac{(\mathbf{n}_I)_1}{c_1} = \frac{(\mathbf{n}_R)_1}{c_1} = \frac{(\mathbf{n}_T)_1}{c_2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin\theta_I}{c_1} = \frac{\sin\theta_R}{c_1} = \frac{\sin\theta_T}{c_2}.$$

e a equação

$$a_I(\mathbf{n}_I)_3 + a_R(\mathbf{n}_R)_3 = a_T(\mathbf{n}_T)_3 \quad\Rightarrow\quad a_I\cos\theta_I - a_R\cos\theta_R = a_t\cos\theta_T$$

Coeficientes de reflexão e transmissão

Definindo
$$R = \frac{\rho_1 c_1 a_R}{\rho_1 c_1 a_I} \quad \text{e} \quad T = \frac{\rho_2 c_2 a_T}{\rho_1 c_1 a_I},$$
obtemos as seguintes relações
$$1 + R = T$$
e

Lei de Snell

$$\frac{\sin\theta_I}{c_1} = \frac{\sin\theta_R}{c_1} = \frac{\sin\theta_T}{c_2}$$

Coeficiente de reflexão explícito

Se θ é o ângulo de incidência, podemos escrever explicitamente

$$R(\theta) = \frac{\rho_2 c_2 \cos\theta - \rho_1 c_1 \sqrt{1 - (c_2/c_1)^2 (\sin\theta)^2}}{\rho_2 c_2 \cos\theta + \rho_1 c_1 \sqrt{1 - (c_2/c_1)^2 (\sin\theta)^2}}$$

Definido $p = \frac{\sin\theta}{c_1}$ e $p_j = 1/c_j$,

$$R(p) = \frac{\rho_2 \sqrt{p_1^2 - p^2} - \rho_1 \sqrt{p_2^2 - p^2}}{\rho_2 \sqrt{p_1^2 - p^2} + \rho_1 \sqrt{p_2^2 - p^2}}$$

$R(\theta)$ e $T(\theta)$ são obtidos, resolvendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} (\rho_1 c_1) R & - & (\rho_2 c_2) T & = & -(\rho_1 c_1), \\ \cos\theta_R R & + & \cos\theta_T T & = & \cos\theta_I, \end{array} \right.$$

e depois utilizando a lei de Snell para relacionar os ângulos de reflexão e transmissão com o ângulo de incidência, denominado simplesmente de θ.

Análise do coeficiente de reflexão acústica

Reflexão crítica

Se $c_2 > c_1$, pela Lei de Snell

$$\sin\theta_T = \frac{c_2}{c_1}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \theta_T > \theta.$$

Quando $\theta = \arcsin(c_1/c_2)$, teremos que $\theta_T = \pi/2$. Definimos o ângulo crítico como

$$\theta_C = \arcsin\left(\frac{c_1}{c_2}\right).$$

Se $\theta > \theta_C$, θ_T é dado por $\theta_T = \frac{\pi}{2} - i\tau$, $\tau > 0$ e $\sin\theta = \cosh(\tau) > 1$.

Qual o sinal correto da parte imaginária de $\theta_T = \frac{\pi}{2} \pm i\tau$? Como $\sin\theta_T = \cosh(\tau)$ e cosh é par, o sinal não faz diferença para o cálculo do seno, mas faz para outros cálculos, como no caso da solução das equações de Zoeppritz.

O correto seria que o sinal da parte imaginária fosse negativo nesse caso.

Casos particulares

- Fronteira livre ($c_2 = 0$): $R(\theta) = -1$ e $T(\theta) = 0$
- Incidência normal ($\theta = 0$):

$$R_0 \equiv R(0) = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \quad \text{e} \quad T_0 \equiv T(0) = \frac{2A_1}{A_2 + A_1}$$

  onde $A = \rho c$ (impedância acústica).
- Incidência crítica ($\theta = \theta_C$):

$$R(\theta_C) = 1 \text{ e } \quad T(\theta_C) = \frac{2A_1}{A_2}$$

Caso geral

- Para $0 \le \theta < \theta_C$, R é real e $|R| < 1$
- Para $\theta = \theta_C$, $R = 1$
- Para $\theta_C < \theta < \frac{\pi}{2}$, R é complexo e $|R| = 1$
- Para $\theta = \frac{\pi}{2}$, $R = -1$

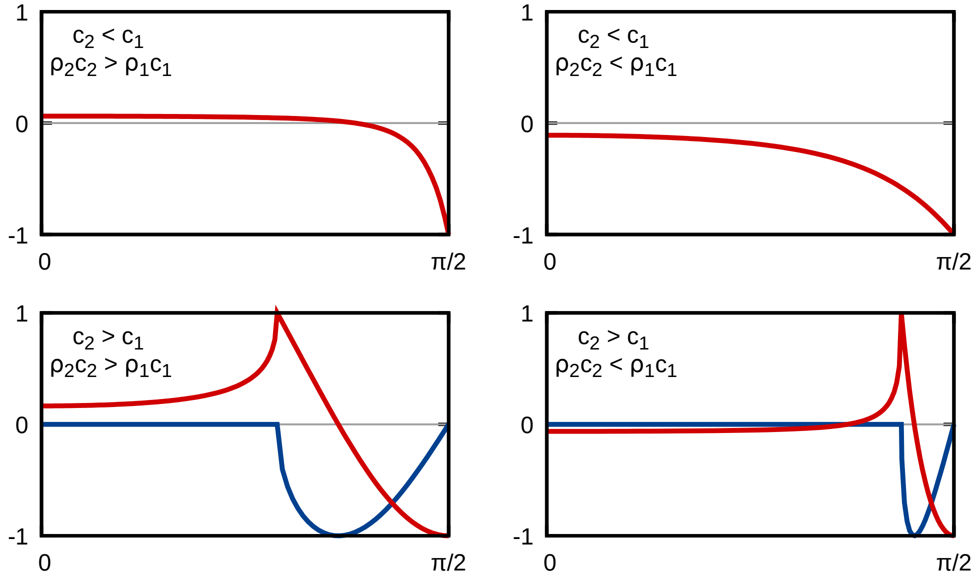
Observe que em reflexões for pós-críticas, como $(\sin\theta)c_2/c_1 > 1$, a raiz quadrada na expressão do coeficiente de reflexão passa a ser complexa, logo $R(\theta) = (a - bi)/(a + bi)$, onde $a = \rho_2 c_2 \cos\theta$ e $b = \rho_1 c_1 \sqrt{(c_2/c_1)^2(\sin\theta)^2 - 1}$. Como

$$R(\theta) = \frac{a - bi}{a + bi} = \frac{(a^2 - b^2) - 2abi}{a^2 + b^2},$$

podemos ver que

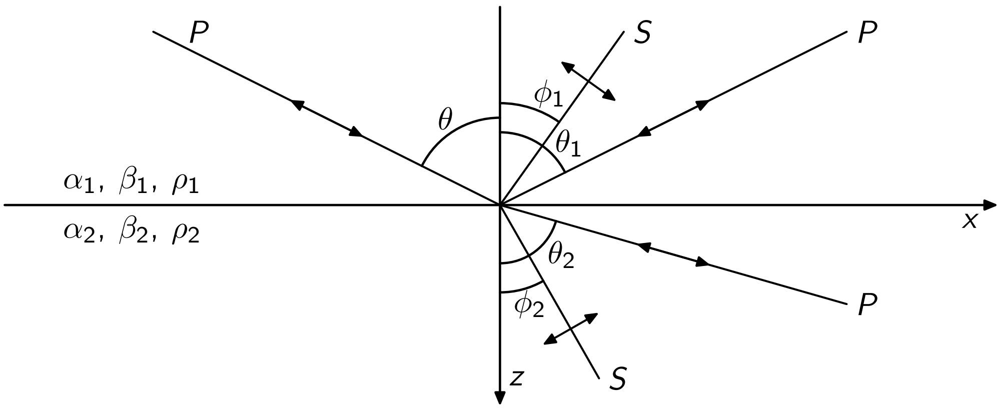
$$|R(\theta)|^2 = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2}\left[(a^2 - b^2)^2 + (-2ab)^2\right] = 1.$$

Exemplos de coeficientes de reflexão



Coeficientes de reflexão elástica

Lei de Snell



$$p = \frac{\sin\theta}{\alpha_1} = \frac{\sin\theta_1}{\alpha_1} = \frac{\sin\phi_1}{\beta_1} = \frac{\sin\theta_2}{\alpha_2} = \frac{\sin\phi_2}{\beta_2}$$

Observe que $0 \leq 1/p < 1/\alpha_1$ e $\alpha_j > \beta_j$, $j = 1, 2$. Além disso $\cos\theta_j = \sqrt{1 - \alpha_j^2 p^2}$ e $\cos\phi_j = \sqrt{1 - \beta_j^2 p^2}$.

Equações de Zoeppritz

$$\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\phi_1 & -\sin\theta_2 & \cos\phi_2 \\ \cos\theta & -\sin\phi_1 & \cos\theta_2 & \sin\phi_2 \\ \sin 2\theta & a_1\cos 2\phi_1 & b_1 \sin 2\phi_2 & -c_1\cos 2\phi_2 \\ \cos 2\phi_1 & -a_2\sin 2\phi_1 & -b_2\cos 2\phi_2 & -c_2\sin 2\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{PP} \\ R_{PS} \\ T_{PP} \\ T_{PS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ \sin 2\theta \\ -\cos 2\phi_1 \end{bmatrix}$$

onde

$$a_1 = \alpha_1/\beta_1 \qquad b_1 = (\alpha_1\beta_2^2\rho_2)/(\alpha_2\beta_1^2\rho_1) \qquad c_1 = (\alpha_1\beta_2\rho_2)/(\beta_1^2\rho_1)$$

$$a_2 = \beta_1/\alpha_1 \qquad b_2 = (\alpha_2\rho_2)/(\alpha_1\rho_1) \qquad c_2 = (\beta_2\rho_2)/(\alpha_1^2\rho_1)$$

Coeficientes de reflexão R_{PP} e R_{PS}

$$R_{PP} = \frac{A + B - C - D + E - F}{A + B + C + D + E + F}, \quad R_{PS} = \frac{-(G + H)}{A + B + C + D + E + F}$$

onde

$$\begin{array}{lll}
A = q^2 p^2 P_1 Q_1 P_2 Q_2 & B = \rho_1 \rho_2 \beta_1 \alpha_2 P_1 Q_2 & C = \rho_1 \rho_2 \alpha_1 \beta_2 Q_1 P_2 \\
D = \alpha_1 \beta_1 P_2 Q_2 Y^2 & E = \alpha_2 \beta_2 P_1 Q_1 X^2 & F = \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 p^2 Z^2 \\
G = 2\alpha_1 pq P_1 P_2 Q_2 Y & H = 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_2 p P_1 XZ & q = 2(\rho_1 \beta_2^2 - \rho_1 \beta_1^2) \\
X = \rho_2 - qp^2 & Y = \rho_1 + qp^2 & Z = \rho_2 - \rho_1 - qp^2
\end{array}$$

$$P_j = \cos\theta_j = \sqrt{1 - \alpha_j^2 p^2} \quad \text{e} \quad Q_j = \cos\phi_j = \sqrt{1 - \beta_j^2 p^2}$$

Aproximação de Aki & Richards para R_{PP} e R_{PS}

Seja $\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$ e $\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$. Se $|\Delta\gamma/\gamma| \ll 1$, para $\gamma = \alpha, \beta, \rho$, então

$$R_{PP} \approx A + B(\sin\theta)^2 + C(\sin\theta\tan\theta)^2 \quad \text{e} \quad R_{PS} \approx -\sin\theta[D + E(\sin\theta)^2]$$

onde

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right] \approx \left[\frac{\rho_2\alpha_2 - \rho_1\alpha_1}{\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1}\right] = R_{PP}(\theta = 0),$$

$$B = \frac{1}{2}\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left[\frac{\Delta\rho}{\rho} + 2\frac{\Delta\beta}{\beta}\right], \qquad C = \frac{1}{2}\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$$

Aproximação de Shuey

Para $\theta < 30^\circ$, $(\sin\theta)^2 \approx (\tan\theta)^2$, então

$$R_{PP} \approx A + B(\sin\theta)^2 \overbrace{\cancel{+C(\sin\theta\tan\theta)^2}}^{\mathcal{O}((\sin\theta)^4)}$$

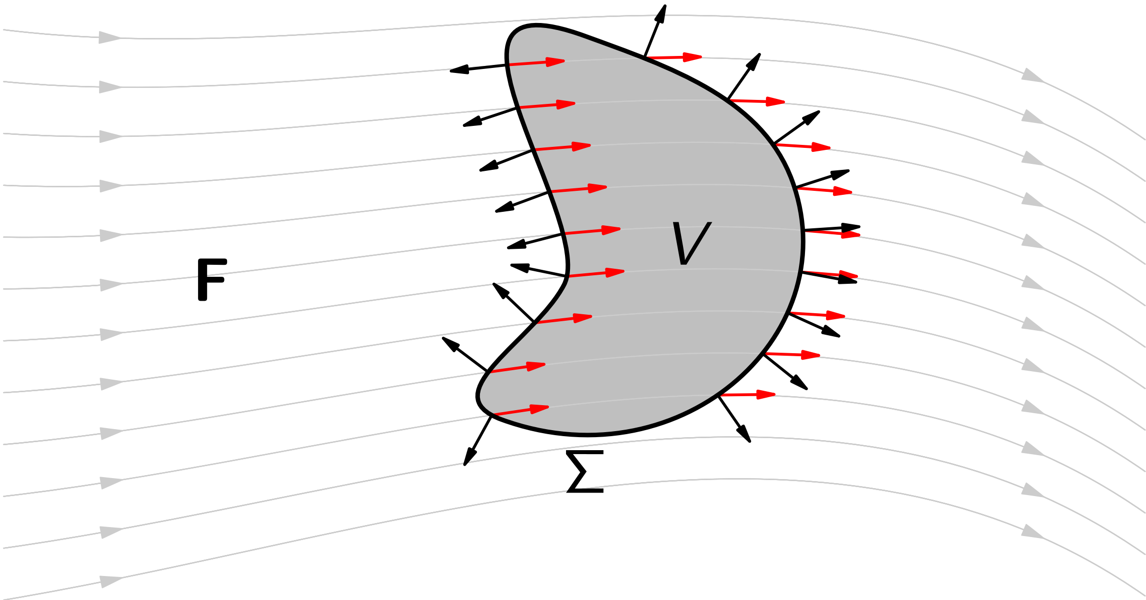
onde

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right] \approx \left[\frac{\rho_2\alpha_2 - \rho_1\alpha_1}{\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1}\right] = R_{PP}(\theta = 0),$$

$$B = \frac{1}{2}\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left[\frac{\Delta\rho}{\rho} + 2\frac{\Delta\beta}{\beta}\right]$$

Teorema da divergência

Teorema da divergência



Seja **F** um campo vetorial no espaço, representando um fluxo. O teorema da divergência fala sobre o efeito desse fluxo ao atravessar uma região finita V do espaço, limitada pela superfície Σ.

Teorema da divergência

- $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x})$
- $\Sigma : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$, superfície fechada e orientável

$$\oint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

onde $\mathbf{n} \, dS = \pm \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) dudv$, com $\|\mathbf{n}\| = 1$, normal unitária apontando para fora do volume V.

O teorema da divergência é a descrição de um princípio de conservação. A integral de volume representa a variação da quantidade dentro volume, enquanto que a integral de superfície representa o saldo líquido da quantidade que flui através das bordas da região.

Por exemplo, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$ representa um fluxo de massa, onde $\rho(\mathbf{x})$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ são a densidade e o vetor velocidade do fluxo em $\mathbf{x}$, respectivamente. Assim, $[\mathbf{F}(\mathbf{x})]$=kg/(m^2·s). O integrando da integral de volume tem unidade $[\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})]$=kg/(m^3·s) e portanto a integral de volume tem unidade kg/s, ou seja, representa a variação de massa dentro do volume V. Já a integral de superfície representa a quantidade líquida de massa que entra ou saí do volume limitado por Σ.

Exemplos de superfícies

- Se $z = \zeta(x, y)$, então $\sigma(x, y) = (x, y, \zeta(x, y))$, então

$$\mathbf{n}\, dS = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \zeta_x \\ 0 & 1 & \zeta_y \end{vmatrix} dxdy = (-\zeta_x, -\zeta_y, 1)\, dxdy$$

- Se Σ é um plano, $\sigma(u, v) = u\mathbf{p} + v\mathbf{q} + \mathbf{r}$, para $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, então

$$\mathbf{n}\, dS = (\mathbf{p} \times \mathbf{q})\, dudv$$

Esfera

Para uma esfera de raio R e centro em $\mathbf{x}_0$, temos que

$$\sigma(\theta, \phi) = \mathbf{x}_0 + R(\cos\phi \sin\theta,\ \sin\phi \sin\theta,\ \cos\theta) \equiv \mathbf{x},$$

para $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}\, dS &= R^2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\phi\cos\theta & \sin\phi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta & 0 \end{vmatrix} d\theta d\phi \\
&= R^2(\sin^2\theta\cos\phi,\ \sin^2\theta\sin\phi,\ \cos^2\phi\cos\theta\sin\theta + \sin^2\phi\cos\theta\sin\theta)\ d\theta d\phi \\
&= R\sin\theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\ d\theta d\phi
\end{aligned}$$

Exemplo na esfera

Se $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, e considerarmos uma esfera centrada na origem, com raio R,

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, \mathbf{x} \cdot (R \sin\theta \mathbf{x})$$
$$= 2\pi R^3 (-\cos\theta)|_0^{\pi} = 4\pi R^3$$

Por outro lado,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV = \iiint_{\|\mathbf{x}\| \leq R} \nabla \cdot \mathbf{x}\, dxdydz = 3\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^3$$

Segunda Identidade de Green

Considere $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciáveis.

Pelo teorema da divergência para $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})$, temos

$$\oint_\Sigma [f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V [f(\mathbf{x})\Delta g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\Delta f(\mathbf{x})]\, dV$$

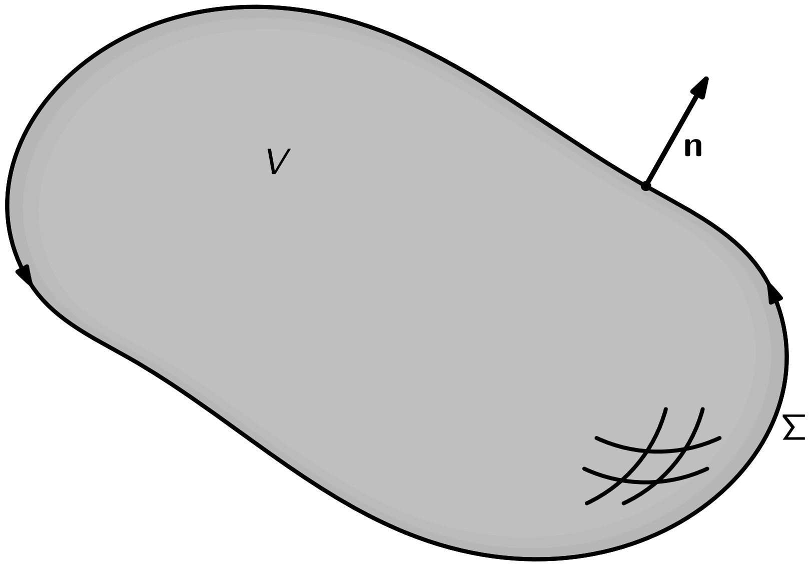
Relacionando dois campos

Dois campos de onda

$$\frac{\omega^2}{c_A(\mathbf{x})^2}\hat{\psi}_A + \Delta\hat{\psi}_A = -\hat{F}_A(\mathbf{x},\omega), \qquad \frac{\omega^2}{c_B(\mathbf{x})^2}\hat{\psi}_B + \Delta\hat{\psi}_B = -\hat{F}_B(\mathbf{x},\omega)$$

- c_A pode ser um modelo de referência e c_B um modelo perturbado
- c_A pode ser um modelo suave e c_B um modelo com refletores
- $\hat{F}_A$ pode ser uma fonte pontual e $\hat{F}_B$ pode ser a fonte real

Volume de integração



Aplicando o Teorema da Divergência

$$\oint_{\Sigma} [\hat{\psi}_A \nabla \hat{\psi}_B - \hat{\psi}_B \nabla \hat{\psi}_A] \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \hat{\psi}_A \Delta \hat{\psi}_B - \hat{\psi}_B \Delta \hat{\psi}_A \, dV$$

$$= \int_V \hat{\psi}_A \left[-\hat{F}_B(\mathbf{x},\omega) - \frac{\omega^2}{c_B(\mathbf{x})^2} \hat{\psi}_B \right] - \hat{\psi}_B \left[-\hat{F}_A(\mathbf{x},\omega) - \frac{\omega^2}{c_A(\mathbf{x})^2} \hat{\psi}_A \right] dV$$

$$= - \int_V \hat{\psi}_A \hat{F}_B(\mathbf{x},\omega)\, dV + \int_V \hat{\psi}_B \hat{F}_A(\mathbf{x},\omega)\, dV +$$

$$\omega^2 \int_V \hat{\psi}_A \hat{\psi}_B \left[\frac{1}{c_A(\mathbf{x})^2} - \frac{1}{c_B(\mathbf{x})^2} \right] dV$$

Integral de Kirchhoff-Helmholtz

Se

$$\frac{1}{c_B(\mathbf{x})^2} = \frac{1}{c_A(\mathbf{x})^2}[1 - r(\mathbf{x})], \quad \text{i.é} \quad r(x) = 1 - \frac{c_A(\mathbf{x})^2}{c_B(\mathbf{x})^2},$$

então

$$\oint_\Sigma [\hat{\psi}_A \nabla \hat{\psi}_B - \hat{\psi}_B \nabla \hat{\psi}_A] \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V [\hat{\psi}_B \hat{F}_A - \hat{\psi}_A \hat{F}_B] + \hat{\psi}_A \hat{\psi}_B \left[\frac{\omega^2}{c_A(\mathbf{x})^2} - \frac{\omega^2}{c_B(\mathbf{x})^2}\right] dV$$

$$\oint_\Sigma [\hat{\psi}_A \nabla \hat{\psi}_B - \hat{\psi}_B \nabla \hat{\psi}_A] \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V [\hat{\psi}_B \hat{F}_A - \hat{\psi}_A \hat{F}_B] + \hat{\psi}_A \hat{\psi}_B \left[\frac{\omega^2 r(\mathbf{x})}{c_A(\mathbf{x})^2}\right] dV,$$

para qualquer volume finito V, limitado pela superfície Σ.

Casos particulares

$$\oint_{\Sigma} [\hat{\psi}_A \nabla \hat{\psi}_B - \hat{\psi}_B \nabla \hat{\psi}_A] \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V [\hat{\psi}_B \hat{F}_A - \hat{\psi}_A \hat{F}_B] + \hat{\psi}_A \hat{\psi}_B \left[\frac{\omega^2 r(\mathbf{x})}{c_A(\mathbf{x})^2} \right] dV,$$

- Fronteira livre: $\hat{\psi}_{A,B}(\mathbf{x}, \omega) = 0$, $\mathbf{x} \in \Sigma$
- Fronteira rígida: $\nabla \hat{\psi}_{A,B}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{x} \in \Sigma$
- V não contém fontes: $\hat{F}_{A,B}(\mathbf{x}, \omega) = 0$, $\mathbf{x} \in V$

Solução para termo fonte arbitrário

Fonte geral em meio não homogêneo

Seja $\mathcal{L} \equiv \left(\frac{1}{c(\mathbf{x})^2}\partial_{tt} - \Delta\right)$. Suponha conhecida a função de Green G, solução de

$$\begin{cases} \mathcal{L}G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t), \qquad G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = 0, \quad t < 0, \\ \text{Condições de radiação de Sommerfeld.} \end{cases}$$

Seja ψ, solução de

$$\begin{cases} \mathcal{L}\psi(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t), \\ \text{Condições de radiação de Sommerfeld.} \end{cases}$$

Como relacionar ψ e G?

Diferentemente do que fizemos antes, agora tanto ψ quanto G satisfazem a equação da onda para o mesmo campo de velocidade, c, porém com termos fontes diferentes.

Teorema da divergência *de novo*

Seja S uma casca esférica, centrada na origem, de raio R.

$$\oint_S [\hat{G}\nabla\hat{\psi} - \hat{\psi}\nabla\hat{G}] \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \hat{G}\Delta\hat{\psi} - \hat{\psi}\Delta\hat{G}\, dV$$

$$= \int_V \hat{G}\left[-\hat{F}(\mathbf{x},\omega) - \frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2}\hat{\psi}\right] - \hat{\psi}\left[-\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) - \frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2}\hat{G}\right]\, dV$$

$$= -\int_V \hat{G}(\mathbf{x},\omega;\mathbf{x}_0)\hat{F}(\mathbf{x},\omega)\, dV + \int_V \hat{\psi}(\mathbf{x},\omega)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\, dV$$

Campo para fonte qualquer

Tomando $R \to \infty$, as condições de radiação de Sommerfeld permitem concluir que a integral de superfície vai a zero. Assim

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}_0, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) \hat{F}(\mathbf{x}, \omega)\, d\mathbf{x},$$

ou no tempo

$$\psi(\mathbf{x}_0, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) *_t F(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}.$$

Teorema da Reciprocidade

Se $F(\mathbf{x},t) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\delta(t)$, então $\psi(\mathbf{x},t) \equiv G(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_1)$, por definição. Porém, pelo resultado anterior

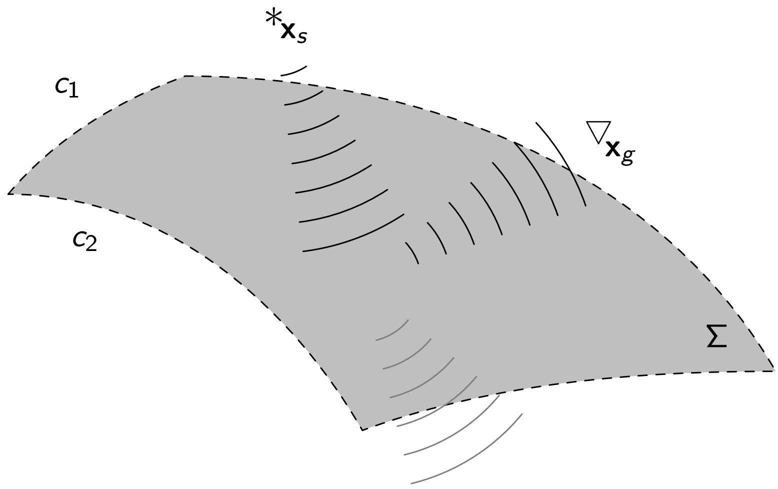
$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}_0,t) &= \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0) *_t F(\mathbf{x},t)\, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} [G(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0) *_t \delta(t)]\ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\, d\mathbf{x} = G(\mathbf{x}_1,t;\mathbf{x}_0)
\end{aligned}$$

ou seja

$$G(\mathbf{x}_0,t;\mathbf{x}_1) = G(\mathbf{x}_1,t;\mathbf{x}_0)$$

Campo refletido por uma interface

Reflexão em interface suave



Seja $c_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $c_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ duas funções suaves, representando campos de velocidade. Seja Σ é uma interface suave, infinita e suave, divindo o espaço em dois semiespaços. A velocidade $c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deste meio é definida como

$$c(x) = \begin{cases} c_1(x), & \mathbf{x} \text{ acima de } \Sigma, \\ c_2(x), & \mathbf{x} \text{ abaixo de } \Sigma. \end{cases}$$

Acima de Σ estão localizados tanto a fonte, em $\mathbf{x}_s$, quanto o receptor, em $\mathbf{x}_g$.

A onda emitida em $\mathbf{x}_s$, ao atingir a superfície Σ é em parte espalhada, sendo registrada em $\mathbf{x}_g$, e em parte transmitida ao meio abaixo de Σ.

Propagação acústica

Campo de onda acústica originado por fonte em $\mathbf{x}_s$:

$$\frac{1}{c(\mathbf{x})^2}\psi_{tt} - \Delta\psi = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)\delta(t) \qquad (\psi \equiv \psi(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s))$$

Função de Green do espaço livre (sem interface):

$$\frac{1}{c_1(\mathbf{x})^2} G^M_{tt} - \Delta G^M = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_M)\delta(t) \qquad (G^M \equiv G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_M))$$

ψ é campo de onda acústica total, originado por uma fonte pontual e instantânea em $\mathbf{x}_s$. Repare que a velocidade para este campo é c.

A função de Green *do espaço livre*, ou seja, do meio sem a interface Σ, é G, sastifazendo a equação da onda acústica com velocidade c_1.

Na frequência

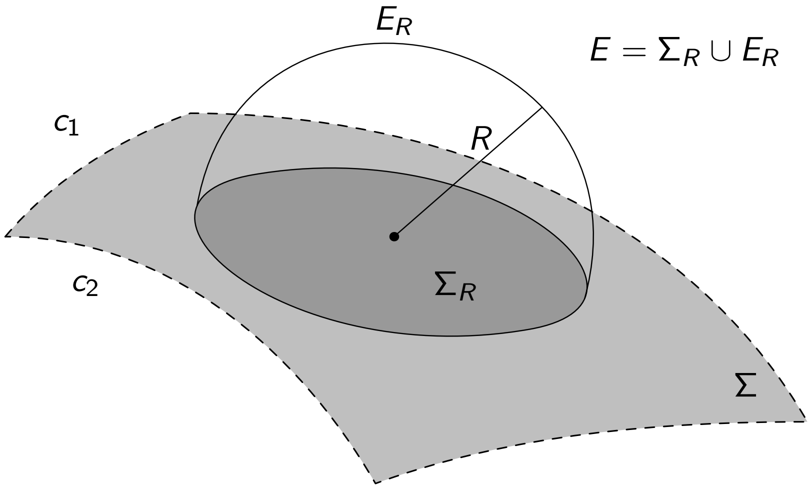
Campo de onda acústica originado por fonte em $\mathbf{x}_s$:

$$\frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2}\hat{\psi} + \Delta\hat{\psi} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \qquad (\hat{\psi} \equiv \hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s))$$

Função de Green do espaço livre (sem interface):

$$\frac{\omega^2}{c_1(\mathbf{x})^2}\hat{G}^M + \Delta\hat{G}^M = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) \qquad (\hat{G}^M \equiv \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_M))$$

Geometria de integração



Utilizaremos a segunda identidade de Green e para isso é necessário definir um volume finito para a integração. O volume V é delimitado ela superfície fechada $E = \Sigma_R \cup E_R$. Σ_R é a intersecção da superfície Σ com uma esfera, de raio R e centro sobre a superfície Σ. E_R é a porção da esfera acima da superfície Σ.

Segunda identidade de Green com $\hat\psi$ e $\hat G^g$

$$
\begin{aligned}
&\oint_E [\hat G^g \nabla \hat\psi - \hat\psi \nabla \hat G^g] \cdot \mathbf{n}\, dS \\
&= \int_V \left[\hat G^g \left(-\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) - \frac{\omega^2}{c^2} \hat\psi \right) - \hat\psi \left(-\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_g) - \frac{\omega^2}{c_1^2} \hat G^g \right) \right] dV \\
&= -\hat G^g(\mathbf{x}_s, \omega; \mathbf{x}_g) + \hat\psi(\mathbf{x}_g, \omega; \mathbf{x}_s)
\end{aligned}
$$

pois $c(\mathbf{x}) = c_1(\mathbf{x})$ para $x \in V$. Analogamente, com $\hat G^s$ no lugar de $\hat\psi$,

$$
\oint_E [\hat G^g \nabla \hat G^s - \hat G^s \nabla \hat G^g] \cdot \mathbf{n}\, dS = -\hat G^g(\mathbf{x}_s, \omega; \mathbf{x}_g) + \hat G^s(\mathbf{x}_g, \omega; \mathbf{x}_s)
$$

Considere a aplicação da segunda identidade de Green com os campos $\hat\psi$ e $\hat G^g$ (função de Green gerada por uma fonte em $\mathbf{x}_g$).

Como o volume de integração está inteiro acima de Σ, $c(\mathbf{x}) = c_1(\mathbf{x})$, para $\mathbf{x} \in V$.

De forma análoga, usar novamente a segunda identidade de Green, porém agora com os campos $\hat G^s$ e $\hat G^g$, ou seja, com as funções de Green geradas por fontes em $\mathbf{x}_s$ e $\mathbf{x}_g$, respectivamente.

Campo total = campo emitido + campo refletido

Definindo:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},\omega;\mathbf{x}_s) \equiv \hat{G}(\mathbf{x},\omega;\mathbf{x}_s) + \hat{\varphi}(\mathbf{x},\omega;\mathbf{x}_s)$$

temos que

$$\oint_\Sigma [\hat{G}^g \nabla\hat{\varphi} - \hat{\varphi}\nabla\hat{G}^g]\cdot\mathbf{n}\,dS = \hat{\varphi}(\mathbf{x}_g,\omega;\mathbf{x}_s)$$

Se $\hat{\varphi}$ satisfaz as condições de radiação de Sommerfeld, tomando $R \to \infty$, $\Sigma_R \to \Sigma$, temos que

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}_g,\omega;\mathbf{x}_s) = \int_\Sigma [\hat{G}^g \nabla\hat{\varphi} - \hat{\varphi}\nabla\hat{G}^g]\cdot\mathbf{n}\,dS$$

Como G^s representa o campo que se propaga no espaço livre e ψ representa o campo total, a diferença entre ψ e G^s representa apenas o campo espalhado.

Ao tomar o limite quando o raio R tende a infinito, a superfície de integração Σ_R tende à superfície Σ e a integral sobre a superfície E_R tende a zero, em virtude das condições de radiação de Sommerfeld.

Equação integral de Kirchhoff-Helmholtz

O campo espalhado é dado por:

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}_g, \omega; \mathbf{x}_s) = \int_{\Sigma} [\hat{\varphi} \nabla \hat{G}^g - \hat{G}^g \nabla \hat{\varphi}] \cdot \mathbf{n} \, dS$$

onde o sentido de **n** foi alterado para "cima".

- Equação exata
- Necessário conhecer $\hat{\varphi}$ sobre Σ

A integral de Kirchhoff-Helmholtz permite representar o campo espalhado em qualquer ponto acima de Σ, conhecendo a função de Green gerada no ponto de interesse e o próprio campo espalhado, mas apenas sobre a superfície Σ.

Aproximação de Kirchhoff

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}_g, \omega; \mathbf{x}_s) = \int_{\Sigma} [\hat{\varphi} \nabla \hat{G}^g - \hat{G}^g \nabla \hat{\varphi}] \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Como aproximar $\hat{\varphi}$ e $\nabla \hat{\varphi} \cdot \mathbf{n} = \partial_{\mathbf{n}} \hat{\varphi}$ sobre Σ?

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) &\approx \quad R(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s) \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) \\ \partial_{\mathbf{n}} \hat{\varphi}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) &\approx -R(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s) \partial_{\mathbf{n}} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{x} \in \Sigma$ e R é o coeficiente de reflexão.

Para obter uma expressão explícita de cálculo do campo espalhado a partir da integral de Kirchhoff-Helmholtz, é necessário aproximar o próprio campo espalhado, mas apenas sobre a interface Σ.

A aproximação de Kirchhoff define o campo espalhado como o campo incidente multiplicado pelo coeficiente de reflexão, e a derivada normal do campo espalhado é definida de forma análoga, porém com o sinal trocado para dar conta do sentido de propagação revertido pela reflexão.

Essa aproximação seria de fato correta se Σ fosse um plano. No caso de Σ não ser um plano, o próprio campo espalhado pode atingir novamente a interface Σ e dar origem a *espalhamentos múltiplos*, que não estariam assim contemplados.

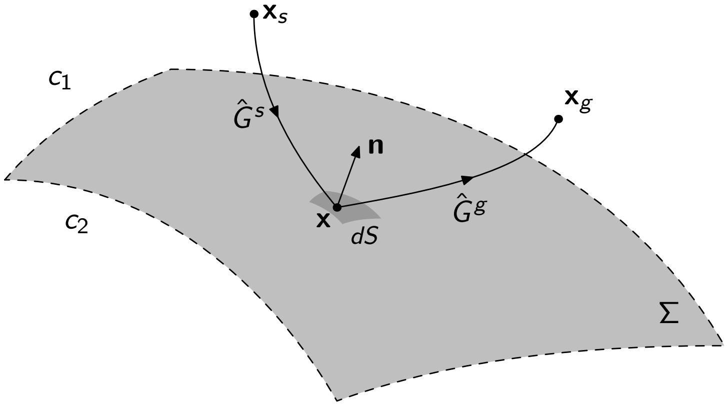
Aproximação de Kirchhoff

$$
\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\mathbf{x}_g, \omega; \mathbf{x}_s) &\approx \int_\Sigma R(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s)[\hat{G}^s \nabla \hat{G}^g + \hat{G}^g \nabla \hat{G}^s] \cdot \mathbf{n} \, dS \\
&= \int_\Sigma R(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s) \nabla (\hat{G}^s \hat{G}^g) \cdot \mathbf{n} \, dS \\
&= \int_\Sigma R(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s) \partial_{\mathbf{n}} (\hat{G}^s \hat{G}^g) \, dS
\end{aligned}
$$

onde **n** é normal unitária apontando para cima.

Geometricamente

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}_g, \omega; \mathbf{x}_s) \approx \int_\Sigma R(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s)\partial_{\mathbf{n}}(\hat{G}^s \hat{G}^g)\, dS$$



Essa expressão pode ser utilizada para aproximar o campo espalhado desde que tenhamos uma forma de computar ou aproximar a função de Green do espaço livre. Para meios heterogêneos, veremos que isso pode ser feito, por exemplo, através da Teoria dos Raios.

Gradiente da Green, em meio homogêneo

Para a função de Green do espaço livre em um meio homogêneo, se $L_M = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_M\|$, temos que

$$
\begin{aligned}
\nabla \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_M) &= \nabla \left(\frac{e^{i\omega L_M/c}}{4\pi L_M} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{i\omega}{c} \frac{e^{i\omega L_M/c}}{L_M} \nabla L_M - \frac{e^{i\omega L_M/c}}{L_M^2} \nabla L_M \right) \\
&= \left(\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{L_M} \right) \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_M) \nabla L_M \\
&= \left(\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{L_M} \right) \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_M) \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_M}{L_M} \right)
\end{aligned}
$$

No caso de um meio homogêneo acima da interface Σ, a função de Green é conhecida.

Aproximação de alta frequência

Se considerarmos apenas a componente de mais alta frequência

$$\nabla \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_M) \approx \frac{i\omega}{c} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_M) \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_M}{L_M} \right)$$

Como

$$\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_M}{L_M} \right) \cdot \mathbf{n} = -\cos\theta_M,$$

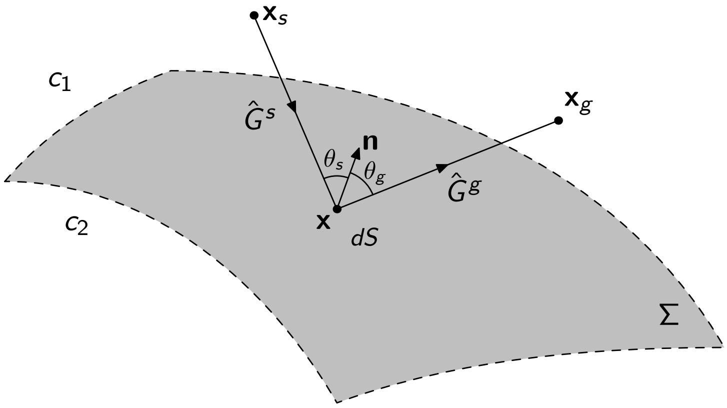
ficamos com

$$\partial_{\mathbf{n}} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_M) \approx -\frac{i\omega}{c} \cos\theta_M \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_M)$$

Ao reter apenas a componente de mais alta frequência, estamos nos concentrando na reflexão, em detrimento de outros fenômenos de espalhamento de ordem mais baixa, como as difrações.

Aproximação de Kirchhoff para o campo espalhado

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}_g, \omega; \mathbf{x}_s) \approx -i\omega \int_\Sigma R(\theta_s)\hat{G}^s\hat{G}^g \left(\frac{\cos\theta_s + \cos\theta_g}{c_1}\right) dS$$



Como agora estamos considerando apenas meio homogêneo, $R(\mathbf{x}; \mathbf{x}_s) \equiv R(\theta_s)$.

Aproximação de Kirchhoff, no tempo

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}_g,\omega;\mathbf{x}_s) \approx -i\omega \int_\Sigma R(\theta_s)\hat{G}^s\hat{G}^g \left(\frac{\cos\theta_s+\cos\theta_g}{c_1}\right)\, dS$$

$$= -i\omega \int_\Sigma \frac{R(\theta_s)}{16\pi^2 L_s L_g} e^{i\omega(L_s+L_g)/c_1} \left(\frac{\cos\theta_s+\cos\theta_g}{c_1}\right)\, dS$$

Passando a inversa da Transformada de Fourier,

$$\varphi(\mathbf{x}_g,t;\mathbf{x}_s) \approx \partial_t \int_\Sigma \frac{R(\theta_s)}{16\pi^2 L_s L_g}\delta\left(t-\frac{L_s+L_g}{c_1}\right) \left(\frac{\cos\theta_s+\cos\theta_g}{c_1}\right)\, dS$$

O termo $(\cos\theta_s+\cos\theta_g/c_1)$ é denominado fator de obliquidade enquanto que $(1/L_s L_g)$ é o espalhamento geométrico.

Fonte qualquer

Se ao invés de termos uma fonte pontual, tivermos uma fonte $F(\mathbf{x}, t)$, a solução geral, no caso de meio homogêneo, é dada por

$$\varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_s) *_{\mathbf{x},t} F(\mathbf{x}, t)$$

Efeito de uma perturbação no modelo de velocidade

Meio perturbado

- $c_0(\mathbf{x})$, uma velocidade de propagação de referência
- $c(\mathbf{x})$, a velocidade do meio

$$\frac{1}{c(\mathbf{x})^2} = \frac{1}{c_0(\mathbf{x})^2}[1 - r(\mathbf{x})].$$

ou seja,

$$r(\mathbf{x}) = 1 - \frac{c_0(\mathbf{x})^2}{c(\mathbf{x})^2}.$$

Campos total e de referência

$$\psi = \psi_0 + \phi$$

Campo total

$$\frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2}\hat{\psi} + \Delta\hat{\psi} = -\hat{F}(\mathbf{x},\omega)$$

Campo de referência

$$\frac{\omega^2}{c_0(\mathbf{x})^2}\hat{\psi}_0 + \Delta\hat{\psi}_0 = -\hat{F}(\mathbf{x},\omega)$$

Logo

$$\frac{\omega^2}{c_0(\mathbf{x})^2}\hat{\phi} + \Delta\hat{\phi} = \frac{\omega^2}{c_0(\mathbf{x})^2} r(\mathbf{x})(\hat{\psi}_0 + \hat{\phi})$$

Para chegar a uma equação para $\hat{\phi}$ basta subtrair a equação para $\hat{\psi}$ da equação para $\hat{\psi}_0$, e usar que $\phi = \psi - \psi_0$.Com efeito, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2}\hat{\psi} + \Delta\hat{\psi}\right] - \left[\frac{\omega^2}{c_0(\mathbf{x})^2}\hat{\psi}_0 + \Delta\hat{\psi}_0\right] \\
&= \left[\frac{\omega^2}{c_0(\mathbf{x})^2}[1 - r(\mathbf{x})]\hat{\psi} + \Delta\hat{\psi}\right] - \left[\frac{\omega^2}{c_0(\mathbf{x})^2}\hat{\psi}_0 + \Delta\hat{\psi}_0\right] \\
&= \left[\frac{\omega^2}{c_0(\mathbf{x})^2}\hat{\phi} + \Delta\hat{\phi}\right] - \frac{\omega^2}{c_0(\mathbf{x})^2} r(\mathbf{x})\hat{\psi}
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\omega^2}{c_0(\mathbf{x})^2}\hat{\phi} + \Delta\hat{\phi} = \frac{\omega^2}{c_0(\mathbf{x})^2} r(\mathbf{x}) \left[\hat{\psi}_0 + \hat{\phi}\right].$$

Usando Green

$$\frac{\omega^2}{c_0(\mathbf{x})^2}\hat{\phi} + \Delta\hat{\phi} = \frac{\omega^2}{c_0(\mathbf{x})^2} r(\mathbf{x})(\hat{\psi}_0 + \hat{\phi})$$

Equação de Lippmann–Schwinger

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}_g, \omega) = -\omega^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{r(\mathbf{x})}{c_0(\mathbf{x})^2} \left[\hat{\psi}_0(\mathbf{x}, \omega) + \hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega)\right] \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g)\, d\mathbf{x}$$

Já sabemos representar a solução da equação em termos da função de Green. Com isso chegamos à equação de Lippmann-Schwinger, onde G é a função de Green computada no meio de referência.

Lembrando que $\phi = \psi - \psi_0$, a equação de Lippmann-Schwinger pode também ser reescrita como

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}_g, \omega) = \hat{\psi}_0(\mathbf{x}_g, \omega) - \omega^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{r(\mathbf{x})}{c_0(\mathbf{x})^2} \left[\hat{\psi}_0(\mathbf{x}, \omega) + \hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega)\right] \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g)\, d\mathbf{x}$$

Reescrevendo em termos de $\hat{\psi}$

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}_g, \omega) = \hat{\psi}_0(\mathbf{x}_g, \omega) - \omega^2 \int_{\mathbb{R}^3} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) \frac{r(\mathbf{x})}{c_0(\mathbf{x})^2} \hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega)\, d\mathbf{x}$$

Podemos resumir isso como

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_0 + \mathcal{B}\hat{\psi},$$

onde $\mathcal{B}$ é o operador definido por

$$\mathcal{B}\hat{\psi}(\mathbf{x}_g, \omega) = -\omega^2 \int_{\mathbb{R}^3} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) \frac{r(\mathbf{x})}{c_0(\mathbf{x})^2} \hat{\psi}(\mathbf{x}, \omega)\, d\mathbf{x}$$

Com isto, a equação de Lippmann-Schwinger fica

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_0 + \mathcal{B}\hat{\psi}.$$

Série de Born

Se $\hat{\psi} = \hat{\psi}_0 + \mathcal{B}\hat{\psi}$ e I denota o operador identidade, então

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= (I - \mathcal{B})^{-1}\hat{\psi}_0 \\ &= (I + \mathcal{B} + \mathcal{B}^2 + \mathcal{B}^3 + \cdots)\hat{\psi}_0, \end{aligned}$$

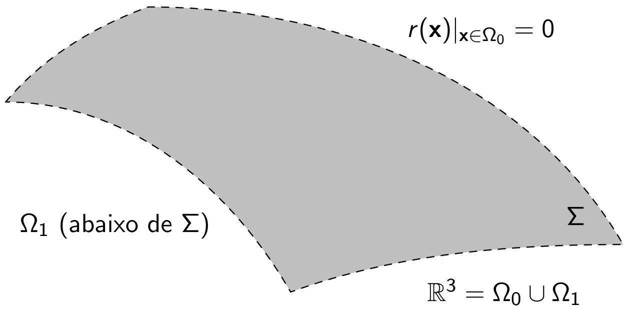
desde que a perturbação r no campo de velocidade seja pequena.

Note que $\mathcal{B}$ é um operador linear. Além disso é limitado, por argumentos de conservação de energia. Se $\|\mathcal{B}\| < 1$, ou seja, para pequenas perturbações no campo de velocidade, então

$$(I - \mathcal{B})^{-1} = (I + \mathcal{B} + \mathcal{B}^2 + \mathcal{B}^3 + \cdots),$$

onde a série no lado direito é convergente.

Perturbação abaixo de um refletor



$$\hat{\phi}(\mathbf{x}_g, \omega) = -\omega^2 \int_{\Omega_1} \frac{r(\mathbf{x})}{c_0(\mathbf{x})^2} \left[\hat{\psi}_0(\mathbf{x}, \omega) + \hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega)\right] \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g)\, dV$$

Se a perturbação ocorre apenas abaixo de uma superfície Σ, então $r(\mathbf{x}) = 0$, acima de Σ, ou seja, para $\mathbf{x} \in \Omega_0$.

Aproximação de Born

$$|\hat{\phi}| \ll |\hat{\psi}_0|$$

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}_g, \omega) = -\omega^2 \int_{\Omega_1} \frac{r(\mathbf{x})}{c_0(\mathbf{x})^2} \left[\hat{\psi}_0(\mathbf{x}, \omega) + \hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega)\right] \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g)\, dV$$

$$\approx -\omega^2 \int_{\Omega_1} \frac{r(\mathbf{x})}{c_0(\mathbf{x})^2} \hat{\psi}_0(\mathbf{x}, \omega) \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g)\, dV$$

Esta aproximação é equivalente a manter apenas os dois primeiro termos da série de Born, ou seja,

$$\hat{\psi} \approx (I + \mathcal{B})\hat{\psi}_0.$$

Background homogêneo e fonte pontual

- $\hat{F}(\mathbf{x},\omega) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_s) \Rightarrow \hat{\psi}_0(\mathbf{x},\omega) = \hat{G}(\mathbf{x},\omega;\mathbf{x}_s)$
- $c_0(\mathbf{x})$ constante $\quad \Rightarrow \hat{G}(\mathbf{x},\omega;\mathbf{x}_M) = \dfrac{e^{i\omega L_M/c_0}}{4\pi L_M}$, onde $L_M = \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_M\|$.

Então

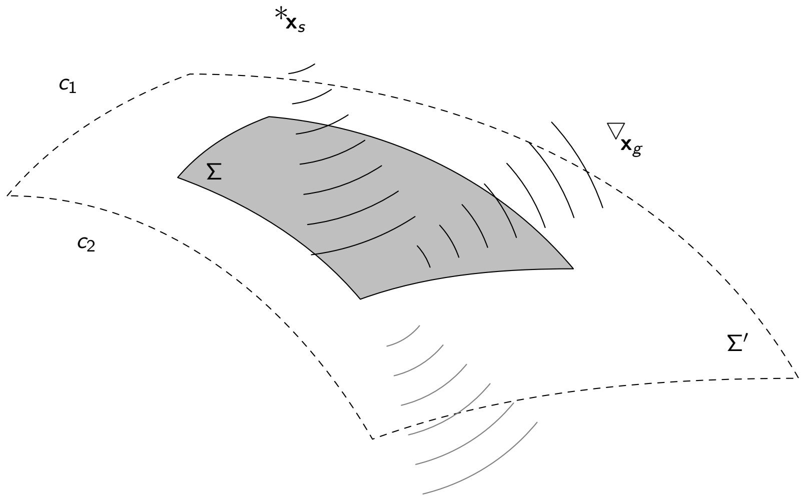
$$\hat{\phi}(\mathbf{x}_g,\omega;\mathbf{x}_s) \approx -\frac{\omega^2}{16\pi^2 c_0^2}\int_{\Omega_1} \frac{r(\mathbf{x})}{L_s L_g} e^{i\omega(L_s+L_g)/c_0}\, dV$$

ou

$$\phi(\mathbf{x}_g,t;\mathbf{x}_s) \approx \frac{1}{16\pi^2 c_0^2}\,\partial_{tt}\int_{\Omega_1} \frac{r(\mathbf{x})}{L_s L_g}\,\delta\left(t-\frac{L_s+L_g}{c_0}\right) dV$$

Campo espalhado por uma interface finita

Espalhamento por uma interface finita



Aproximação de Kirchhoff

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}_g, \omega; \mathbf{x}_s) = \int_{\Sigma'} [\hat{\varphi} \nabla \hat{G}^g - \hat{G}^g \nabla \hat{\varphi}] \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Se $\mathbf{y} \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\mathbf{y}, \omega; \mathbf{x}_s) &\approx \quad R(\mathbf{y}; \mathbf{x}_s) \hat{G}^s(\mathbf{y}, \omega; \mathbf{x}_s) \\ \partial_{\mathbf{n}} \hat{\varphi}(\mathbf{y}, \omega; \mathbf{x}_s) &\approx -R(\mathbf{y}; \mathbf{x}_s) \partial_{\mathbf{n}} \hat{G}^s(\mathbf{y}, \omega; \mathbf{x}_s) \end{aligned}$$

Se $\mathbf{y} \in \Sigma' \backslash \Sigma$, $\hat{\varphi}(\mathbf{y}, \omega) = 0$ (não há espalhamento em $\Sigma' \backslash \Sigma$).

Campo espalhado em meio homogêneo

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}_g, \omega; \mathbf{x}_s) \approx \int_\Sigma R(\mathbf{y}; \mathbf{x}_s) \partial_\mathbf{n}(\hat{G}^s \hat{G}^g)\, dS$$

Haviamos visto que, em meio homogêneo,

$$\nabla \hat{G}(\mathbf{y}, \omega; \mathbf{x}) = \left(\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{L}\right) \hat{G}(\mathbf{y}, \omega; \mathbf{x}) \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{L}\right)$$

Assim,

$$\partial_\mathbf{n} \hat{G}(\mathbf{y}, \omega; \mathbf{x}) = -\left(\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{L}\right) \cos\theta\, \hat{G}(\mathbf{y}, \omega; \mathbf{x})$$

Aqui, $L = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.

Campo espalhado em afastamento nulo ($\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_g \equiv x$)

Se $R(\theta)$ não variar muito,

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, \omega) \approx -\frac{R}{8\pi^2} \int_\Sigma \left(\frac{i\omega}{cL^2} - \frac{1}{L^3} \right) e^{2i\omega L/c} \cos\theta dS,$$

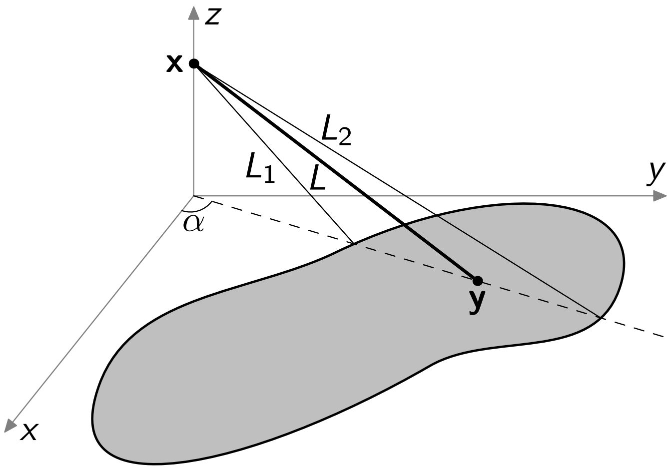
onde

- $L = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$,
- θ é o ângulo entre $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ e a normal à Σ
- $\mathbf{y} \in \Sigma$ é a variável de integração

Se o meio for homogêneo, $\hat{G}(\mathbf{y}, \omega; \mathbf{x}) = e^{i\omega L/c}/(4\pi L)$, onde $L = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. No caso de fonte e receptor coincidentes, definimos $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_s = \mathbf{x}_g$.

Sistema de coordenadas para integração

Suponha que Σ está contido no plano xy e $\mathbf{x} = (0, 0, H)$



Vamos considerar um caso mais simples, no qual a interface Σ está contida no plano xy e o ponto de observação está sobre o eixo z (Trorey, 1970).

No sistema de coordenadas proposto, para cada valor de α, L_1 e L_2 são os limites inferior e superior para L, a distância entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, dada por $L^2 = y_1^2 + y_2^2 + H^2$. Além disso, $\mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ e $\|\mathbf{y}\|^2 = L^2 - H^2$.

Lembrando que o elemento de superfície é dado por

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial L} \right\| d\alpha dL,$$

temos que $\mathbf{y}_\alpha = \|\mathbf{y}\|(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$ e $\mathbf{y}_L = \frac{L}{\|\mathbf{y}\|}(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$. Logo,

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial L} = L(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \times (\cos\alpha, \sin\alpha, 0) = L(0, 0, -1).$$

e portanto $dS = L\, dL\, d\alpha$.

Caso I: Σ não contém a origem

$$\hat{\varphi}_I(\mathbf{x},\omega) \approx -\frac{R}{8\pi^2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{L_1}^{L_2}\left(\frac{i\omega}{cL^2}-\frac{1}{L^3}\right)e^{2i\omega L/c}\cos\theta\, L dL\, d\alpha$$

$$= -\frac{HR}{8\pi^2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{L_1}^{L_2}\left(\frac{i\omega}{cL^2}-\frac{1}{L^3}\right)e^{2i\omega L/c} dL\, d\alpha$$

Da figura anterior podemos ver que $\cos\theta = H/L$.

Integrando em L

Observe que

$$\int_{L_1}^{L_2} \left(\frac{i\omega}{cL^2} - \frac{1}{L^3} \right) e^{2i\omega L/c}\, dL = \left. \frac{e^{2i\omega L/c}}{2L^2} \right|_{L_1}^{L_2}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_I(\mathbf{x},\omega) &\approx -\frac{HR}{8\pi^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{e^{2i\omega L_2/c}}{2L_2^2} - \frac{e^{2i\omega L_1/c}}{2L_1^2}\, d\alpha \\
&= -\frac{HR}{8\pi^2} \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{e^{2i\omega L_2/c}}{2L_2^2}\, d\alpha + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{e^{2i\omega L_1/c}}{2L_1^2}\, d\alpha \right] \\
&= -\frac{HR}{8\pi^2} \oint_{\gamma} \frac{e^{2i\omega L/c}}{2L^2} \frac{1}{\|\gamma'(s)\|} d\gamma
\end{aligned}$$

γ é a curva que parametriza a fronteira de Σ, no sentido anti-horário, $d\gamma = \|\gamma'(s)\| ds$ é o elemento de comprimento de arco, para um parâmetro s que percorre a curva.

Caso II: Σ contendo a origem

Se Σ contém a origem, então $L_1 = H$, constante. Assim

$$\hat{\varphi}_{II}(\mathbf{x},\omega) \approx -\frac{HR}{8\pi^2}\left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\omega L_2/c}}{2L_2^2} - \frac{e^{2i\omega L_1/c}}{2L_1^2}\,d\alpha\right]$$

$$= \frac{HR}{4\pi}\frac{e^{2i\omega H/c}}{2H^2} - \frac{HR}{8\pi^2}\oint_\gamma \frac{e^{2i\omega L/c}}{2L^2}\frac{1}{\|\gamma'(s)\|}d\gamma$$

$$= \frac{R}{8\pi H}e^{2i\omega H/c} - \frac{HR}{8\pi^2}\oint_\gamma \frac{e^{2i\omega L/c}}{2L^2}\frac{1}{\|\gamma'(s)\|}d\gamma$$

Campo espalhado com em sem reflexão

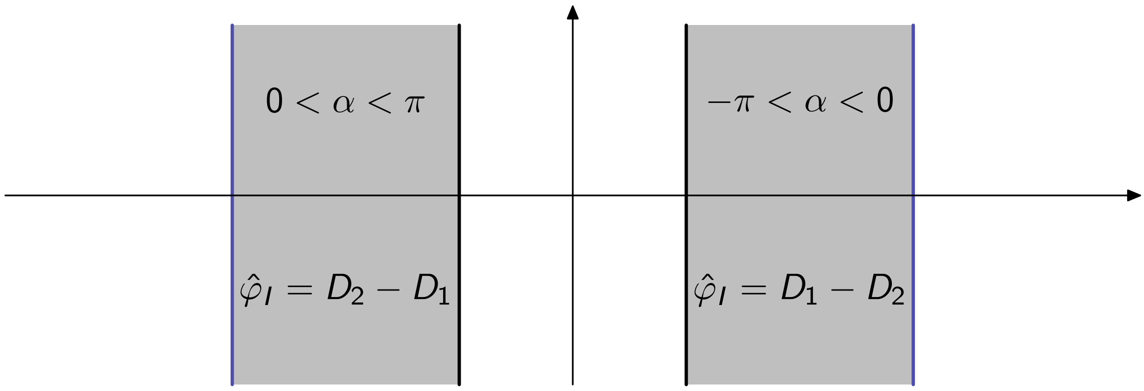
$$\hat{\varphi}_{II}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{R}{8\pi H} e^{2i\omega H/c} + \hat{\varphi}_I(\mathbf{x}, \omega)$$

- φ_I representa a resposta quando não há reflexão
- φ_{II} representa a resposta quando há reflexão
- O termo $R/(8\pi H)e^{2i\omega H/c}$ é a reflexão especular, que no tempo fica

$$\frac{R}{4\pi(2H)}\delta(t - 2H/c)$$

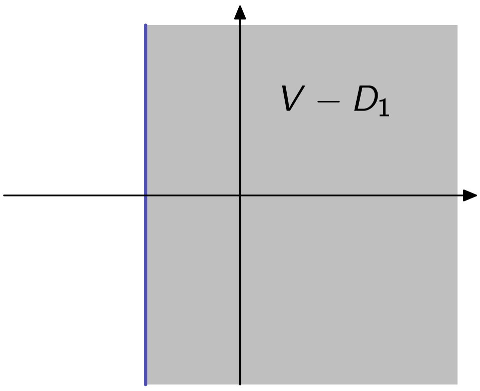
Se a superfície se estender ao infinito, $\hat{\varphi}_I$ vai a zero, restando apenas a resposta de reflexão.

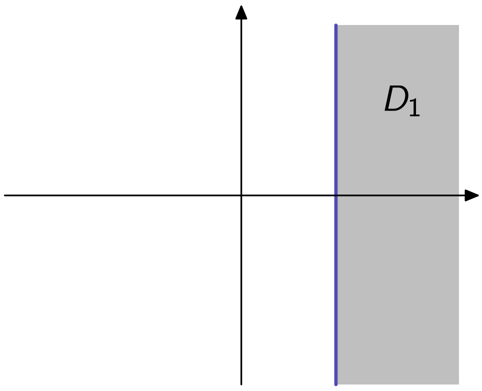
Inversão de fase



Uma faixa que estende infinitamente paralela ao eixo x, ao ser posicionada simetricamente em relação a esse eixo, tem sua resposta de difração invertida. Essa mudança de fase é percebida experimentalmente quando o ponto de registro troca de lado em relação ao difrator.

Relação entre amplitudes





Na figura, D_1 representa o valor da integral sobre a borda próxima da origem e V representa a contribuição da reflexão. A integral sobre a borda no infinito vai a zero.

Quando a faixa toca o eixo, surge a reflexão. Nesse caso, por continuidade devemos ter que

$$\hat{\varphi}_{II} = V - D1 = D1 = \hat{\varphi}_I.$$

Logo, quando a **x** estiver exatamente sobre a borda, a amplitude da difração é metade da amplitude da reflexão.

Aproximações assintóticas

Objetivo

Aproximar a função de Green em um meio heterogêneo

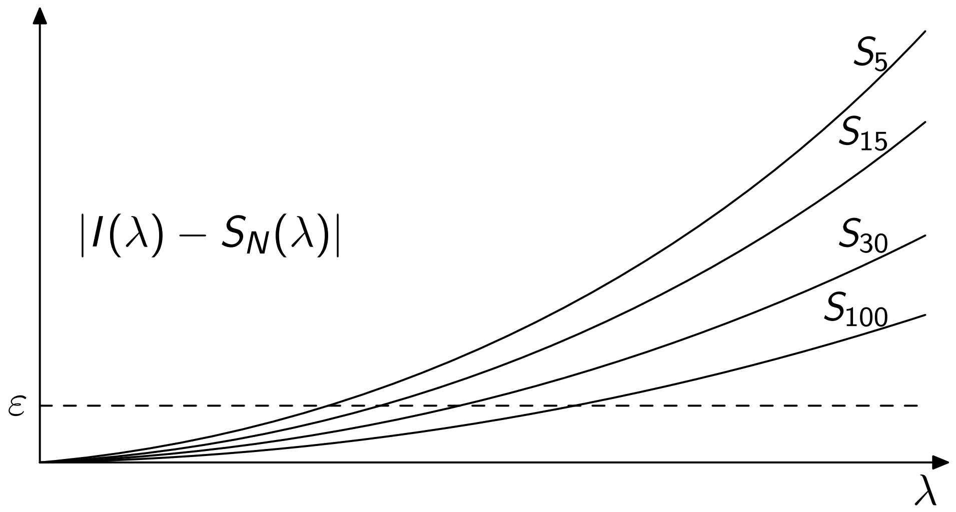
Função de Green em meio homogêneo

Para meio homogêneo,

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \omega) = A(\mathbf{x}) e^{i\omega T(\mathbf{x})} \omega^{\beta},$$

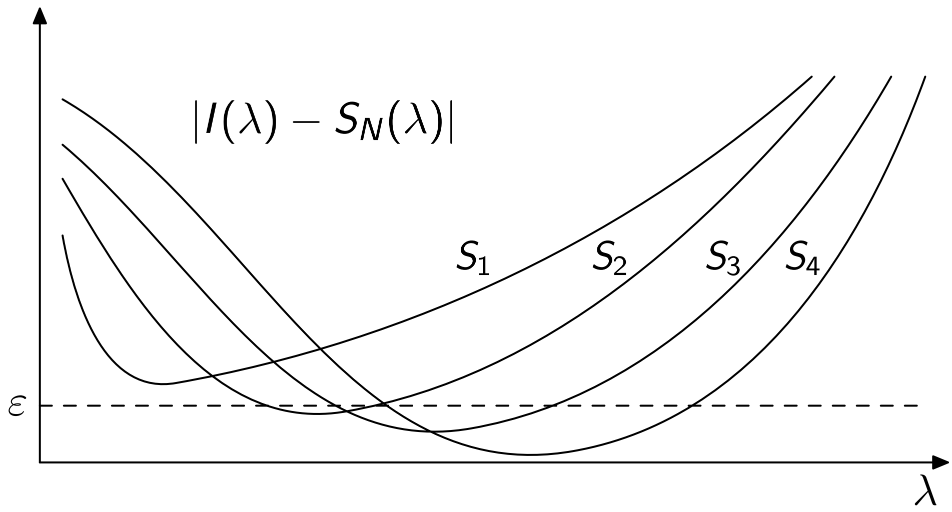
com $\beta = -1$ em 1D, $\beta = -1/2$ em 2D e $\beta = 0$ em 3D.

Aproximação por série convergente



As somas parciais S_N de uma série convergente que aproxima $I(\lambda)$ são boas aproximações quando λ está próximo do ponto onde foi feita a expansão (por exemplo, em torno de zero). Mas a medida que λ se afasta desse ponto, mais e mais termos são necessários para que a soma parcial da série seja uma aproximação razoável.

Aproximação assintótica



No caso de aproximações assintóticas, todas as somas parciais podem ser divergentes, mas mesmo assim, para cada valor fixo de λ há uma soma parcial específica que fornece a melhor aproximação. Além disso, a medida que λ cresce, o erro dessa melhor aproximação vai zero.

Ansatz

Queremos uma aproximação assintótica para a solução da equação de Helmholtz homogênea

$$\frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2}\hat{\psi}(\mathbf{x},\omega) + \Delta\hat{\psi}(\mathbf{x},\omega) = 0$$

da forma

$$\hat{S}(\mathbf{x},\omega) = \omega^\beta e^{i\omega\tau(\mathbf{x})}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j}$$

quando $|\omega| \to \infty$.

Note que β não pode ser determinado apenas pela equação diferencial.

Se queríamos aproximar a função de Green, cujo termo fonte é $\delta(\mathbf{x})\delta(t)$, por que vamos estudar a equação de Helmholtz homogênea?

A razão para isso é que tanto uma onda gerada por uma fonte pontual, como a onda espalhada por uma interface, tem sua propagação governada pela equação de Helmholtz homogênea. O que difere as duas são as condições iniciais. A determinação dessas condições iniciais será discutida mais a frente.

Por fim, perceba que ao deixar β livre podemos assumir, sem qualquer perda de generalidade, que $A_0(\mathbf{x}) \neq 0$. Por quê?

Derivadas de $\hat{S}$

Se $\hat{S}(\mathbf{x},\omega) = U \cdot V$, com $U = \omega^{\beta} e^{i\omega\tau(\mathbf{x})}$ e $V = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j}$, mostre que

$$\nabla\hat{S} = \nabla U \cdot V + U \cdot \nabla V$$

e

$$\Delta\hat{S} = \nabla \cdot \nabla\hat{S} = \Delta U V + 2\nabla U \cdot \nabla V + U\Delta V$$

Derivadas de U e V

$$\nabla U = \nabla\left(\omega^{\beta} e^{i\omega\tau(\mathbf{x})}\right) = \omega^{\beta} e^{i\omega\tau(\mathbf{x})}(i\omega)\nabla\tau(\mathbf{x}) = i\omega\nabla\tau(\mathbf{x})U$$

$$\begin{aligned}
\Delta U = \nabla\cdot\nabla U &= i\omega\left[\Delta\tau(\mathbf{x})U + \nabla\tau(\mathbf{x})\cdot\nabla U\right] \\
&= i\omega\left[\Delta\tau(\mathbf{x})U + i\omega\nabla\tau(\mathbf{x})\cdot\nabla\tau(\mathbf{x})U\right] \\
&= i\omega\left[\Delta\tau(\mathbf{x}) + i\omega\|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2\right]U
\end{aligned}$$

$$\nabla V = \nabla\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\nabla A_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j}$$

$$\Delta V = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Delta A_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j}$$

Laplaciano de $\hat{S}$

$$
\begin{aligned}
\Delta \hat{S} &= \Delta U\, V + 2\nabla U \cdot \nabla V + U\, \Delta V \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} i\omega U \left[\Delta\tau - i\omega \|\nabla\tau\|^2\right] \frac{A_j}{(i\omega)^j} + 2i\omega U \nabla\tau \cdot \frac{\nabla A_j}{(i\omega)^j} + U \frac{\Delta A_j}{(i\omega)^j} \\
&= U \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\|\nabla\tau\|^2 A_j}{(i\omega)^{j-2}} + \frac{\Delta\tau A_j + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_j}{(i\omega)^{j-1}} + \frac{\Delta A_j}{(i\omega)^j} \right]
\end{aligned}
$$

Equações Iconal e do Transporte

$$\frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2}\hat{S} + \Delta\hat{S} = U\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(\|\nabla\tau\|^2 - 1/c(\mathbf{x})^2)A_j}{(i\omega)^{j-2}} + \frac{A_j\Delta\tau + 2\nabla\tau\cdot\nabla A_j}{(i\omega)^{j-1}} + \frac{\Delta A_j}{(i\omega)^j}\right] = 0$$

Ou seja

$$\|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2 = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2}$$ Equação iconal

$$A_0(\mathbf{x})\Delta\tau(\mathbf{x}) + 2\nabla\tau(\mathbf{x})\cdot\nabla A_0(\mathbf{x}) = 0$$ Equação do transporte

$$A_j(\mathbf{x})\Delta\tau(\mathbf{x}) + 2\nabla\tau(\mathbf{x})\cdot\nabla A_j(\mathbf{x}) = -\Delta A_{j-1}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \dots$$

Equação iconal

Equação diferencial parcial, de primeira ordem, não-linear.

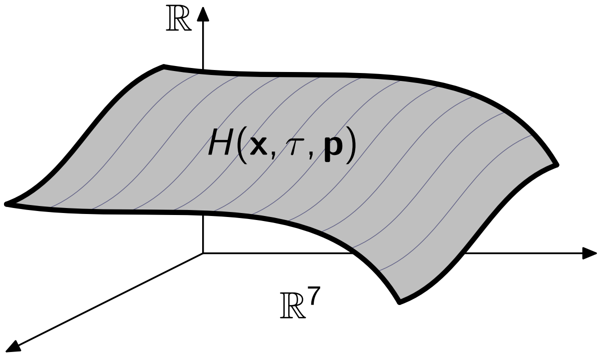
$$\|\nabla\tau(\mathbf{x})\|^2 = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2}$$

Como resolver a equação iconal?

Teoria dos Raios – cinemática

Formulação

$$\begin{cases} H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ H(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{p}) \equiv \dfrac{\lambda(\mathbf{x})}{2} \left[\|\mathbf{p}\|^2 - \dfrac{1}{c(\mathbf{x})^2} \right] = 0, \quad \text{onde } \mathbf{p}(\mathbf{x}) \equiv \nabla\tau(\mathbf{x}), \text{ e } \lambda(\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases}$$



A função λ é arbitrária, desde que seja diferenciável e nunca se anule.

Teoria de Características

Para uma equação diferencial parcial não-linear de primeira ordem,

$$H(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{p}) = 0,$$

onde $\mathbf{p} = \nabla\tau$, as curvas características são dadas pela solução do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \nabla_{\mathbf{p}} H, \qquad \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = -\left[H_\tau \mathbf{p} + \nabla_{\mathbf{x}} H\right], \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} = \mathbf{p}^T \nabla_{\mathbf{p}} H.$$

Ao longo dessas curvas, H é constante. Logo, se em algum ponto da curva H for zero, a curva estará inteira sobre a hipersurpefície $H = 0$.

Andando sobre $H = 0$

Para ver como surgem as curvas características, sejam $\delta\mathbf{x}$ um pequeno deslocamento, $\delta\tau = \tau(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - \tau(\mathbf{x})$ e $\delta\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - \mathbf{p}(\mathbf{x})$, tais que

$$H(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, \tau + \delta\tau, \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) - H(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{p}) = 0$$

Aproximação de primeira ordem

Logo

$$
\begin{aligned}
0 &= H(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\tau+\delta\tau,\mathbf{p}+\delta\mathbf{p}) - H(\mathbf{x},\tau,\mathbf{p}) \\
&\approx \nabla_{\mathbf{x}} H^T \delta\mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \tau}\delta\tau + \nabla_{\mathbf{p}} H^T \delta\mathbf{p} \\
&= \left[\nabla_{\mathbf{x}} H^T + \frac{\partial H}{\partial \tau}\nabla\tau^T + \nabla_{\mathbf{p}} H^T \nabla^2\tau \right] \delta\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Pois

- $\delta\tau = \tau(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) - \tau(\mathbf{x}) \approx \nabla\tau^T\delta\mathbf{x}$
- $\delta\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) - \mathbf{p}(\mathbf{x}) \approx J_{\mathbf{x}}\mathbf{p}\,\delta\mathbf{x} = \nabla^2\tau\delta\mathbf{x}$

Equação quase-linear

$$\nabla_{\mathbf{x}} H + \frac{\partial H}{\partial \tau} \nabla \tau + \nabla^2 \tau \nabla_{\mathbf{p}} H = 0$$

Com isso, ao se deslocar sobre a superfície $H = 0$,

$$\nabla^2 \tau \nabla_{\mathbf{p}} H = -\left[\nabla_{\mathbf{x}} H + \frac{\partial H}{\partial \tau} \nabla \tau\right]$$

Como cada componente de $\delta \mathbf{x}$ é independente, temos que $\left[\nabla_{\mathbf{x}} H + \frac{\partial H}{\partial \tau} \nabla \tau + \nabla^2 \tau \nabla_{\mathbf{p}} H\right]$ deve ser identicamente nulo, e isso nos fornece uma equação quase-linear.

Curvas características

$$\nabla^2\tau\nabla_{\mathbf{p}}H = -\left[\nabla_{\mathbf{x}}H + \frac{\partial H}{\partial \tau}\nabla\tau\right]$$

Sendo assim, sobre a superfície $H = 0$, considere as trajetórias parametrizadas por $\sigma \in \mathbb{R}$, dadas por

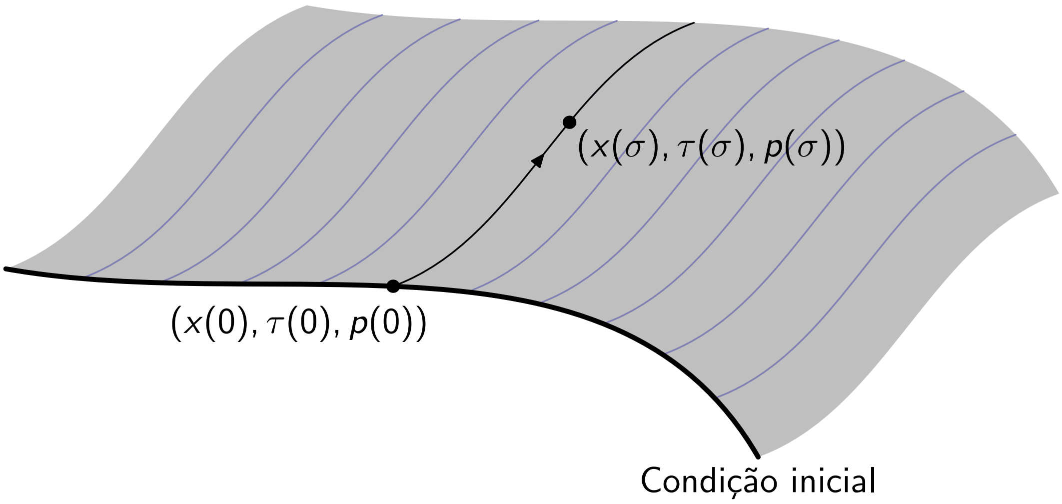
$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \nabla_{\mathbf{p}}H.$$

Com isso

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \nabla\tau^T\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{p}^T\nabla_{\mathbf{p}}H$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \nabla^2\tau\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = -\left[\nabla_{\mathbf{x}}H + \frac{\partial H}{\partial \tau}\mathbf{p}\right]$$

Parametrização por curvas características



Sistema de traçado de raios

$$H(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{p}) \equiv \frac{\lambda(\mathbf{x})}{2}\left[\|\mathbf{p}\|^2 - \frac{1}{c(\mathbf{x})^2}\right]$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \nabla_{\mathbf{p}} H = \lambda \mathbf{p}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = -\left[\nabla_{\mathbf{x}} H + \frac{\partial H}{\partial \tau}\mathbf{p}\right] = -\frac{\lambda}{c(\mathbf{x})^3}\nabla c(\mathbf{x})$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \mathbf{p}^T \nabla_{\mathbf{p}} H = \frac{\lambda}{c(\mathbf{x})^2}$$

Escolhas para λ

Se $\lambda = 1$, então $[\sigma] = L^2/T$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \lambda\mathbf{p} \qquad\qquad \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{p}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = -\frac{\lambda}{c(\mathbf{x})^3}\nabla c(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = -\frac{1}{c(\mathbf{x})^3}\nabla c(\mathbf{x})$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\lambda}{c(\mathbf{x})^2} \qquad\qquad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2}$$

σ representa um parâmetro crescente ao longo do raio.

Escolhas para λ

Se $\lambda = c(\mathbf{x})$, então $[\sigma] = L$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \lambda \mathbf{p} \qquad\qquad \frac{d\mathbf{x}}{ds} = c(\mathbf{x})\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = -\frac{\lambda}{c(\mathbf{x})^3}\nabla c(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = -\frac{1}{c(\mathbf{x})^2}\nabla c(\mathbf{x})$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\lambda}{c(\mathbf{x})^2} \qquad\qquad \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{c(\mathbf{x})}$$

σ é o comprimento de arco.

Escolhas para λ

Se $\lambda = c(\mathbf{x})^2$, então $[\sigma] = T$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \lambda \mathbf{p} \qquad\qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = c(\mathbf{x})^2 \mathbf{p}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = -\frac{\lambda}{c(\mathbf{x})^3} \nabla c(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{1}{c(\mathbf{x})} \nabla c(\mathbf{x})$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\lambda}{c(\mathbf{x})^2} \qquad\qquad \frac{d\tau}{dt} = 1$$

σ é o tempo de trânsito.

Teoria dos Raios – dinâmica

Amplitude ao longo dos raios

A amplitude do campo de onda é regida pela equação do transporte:

$$A_0(\mathbf{x})\Delta\tau(\mathbf{x}) + 2\nabla\tau(\mathbf{x}) \cdot \nabla A_0(\mathbf{x}) = 0$$

Multiplicando por A_0, temos

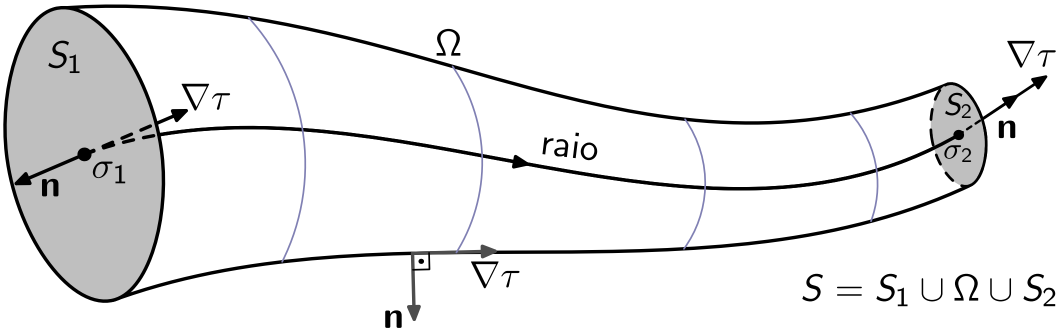
$$\nabla \cdot \left[A_0^2(\mathbf{x})\nabla\tau(\mathbf{x})\right] = 0$$

Com o Teorema da Divergência, temos

$$\oint_S A_0^2(\mathbf{x})\nabla\tau(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot \left[A_0^2(\mathbf{x})\nabla\tau(\mathbf{x})\right] dV = 0$$

Lembre que o Teorema da Divergência é válido para qualquer volume finito V delimitado pela superfície S, respeitadas as condições sobre S. Resta então, escolher uma superfície S conveniente.

Tubo de raios



Vamos tomar como S um tubo de raios, ou seja, a S_1 e S_2 são superfícies ortogonais a um raio central escolhido e essas superfícies são conectadas por raios na vizinhança desse mesmo raio central. Construído assim, as normais de S_1 e S_2 estarão na mesma direção do vetor $\mathbf{p} = \nabla\tau$ (com o sentido apropriado) e a normal a Ω será ortogonal a $\mathbf{p}$.

Quantidade conservada ao longo do raio

$$0 = \oint_S A_0^2 \nabla\tau \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} + \int_{\Omega} + \int_{S_2} A_0^2 \nabla\tau \cdot \mathbf{n}\, dS$$

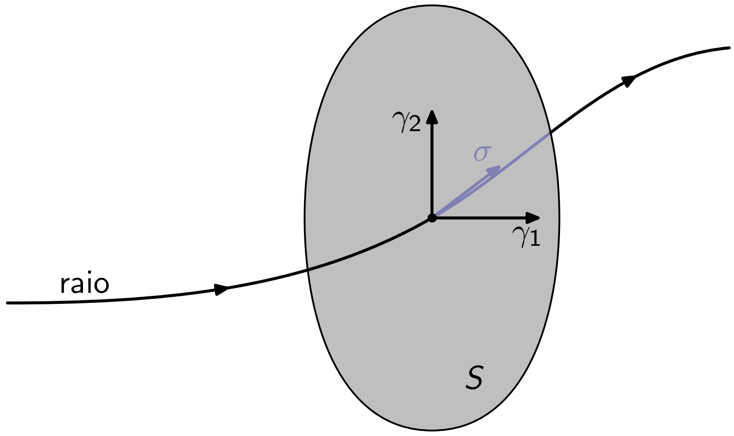
$$= -\iint_{S_1} + \iint_{S_2} A_0^2 \nabla\tau \cdot \frac{\nabla\tau}{\|\nabla\tau\|}\, dS$$

Logo

$$\int_{S_1} A_0^2 \|\nabla\tau\|\, dS = \int_{S_2} A_0^2 \|\nabla\tau\|\, dS$$

A integral de superfície sobre Ω é nula visto que $\nabla\tau \cdot \mathbf{n} = 0$. Percebemos assim que a integral de $A_0^2\|\nabla\tau\|$ é conservada, ao longo do tubo de raios.

Sistema de coordenadas centrado no raio



$$dS = \underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} \right\|}_{\mu(\sigma)} d\gamma_1 d\gamma_2$$

Amplitude ao longo do raio

De
$$\int_{S_1} A_0^2 \|\nabla\tau\| dS = \int_{S_2} A_0^2 \|\nabla\tau\| dS$$
temos que
$$A_0^2(\sigma_1)\frac{\mu(\sigma_1)}{c(\sigma_1)} = A_0^2(\sigma_2)\frac{\mu(\sigma_2)}{c(\sigma_2)}$$
ou, de forma geral,
$$A_0^2(\sigma) = A_0^2(\sigma_0)\frac{\mu(\sigma_0)}{c(\sigma_0)}\frac{c(\sigma)}{\mu(\sigma)}$$
Obs: Estamos abusando da notação $f(\sigma) \equiv f(\mathbf{x}(\sigma))$.

Lembre que $\|\nabla\tau(\mathbf{x})\| = 1/c(\mathbf{x})$.

1^{a} EDO para a amplitude

A equação do transporte, multiplicada por λA, é:

$$\lambda A^2 \Delta\tau + 2\lambda A \nabla A \cdot \nabla\tau = 0$$

Ao longo do raio, vimos que

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma} = \lambda \mathbf{p} = \lambda \nabla\tau$$

Com isso,

$$\lambda A^2 \Delta\tau + 2A\nabla A \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dA^2}{d\sigma} = -\lambda A^2 \Delta\tau$$

Para simplificar a notação, usamos A no lugar de A_0.

$2^{\underline{a}}$ EDO para a amplitude

Por outro lado, como $A^2(\sigma) = A^2(\sigma_0)\dfrac{\mu(\sigma_0)}{c(\sigma_0)}\dfrac{c(\sigma)}{\mu(\sigma)}$, temos que

$$\frac{dA^2}{d\sigma} = A^2(\sigma_0)\frac{\mu(\sigma_0)}{c(\sigma_0)}\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{c(\sigma)}{\mu(\sigma)}\right] = A^2(\sigma)\frac{\mu(\sigma)}{c(\sigma)}\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{c(\sigma)}{\mu(\sigma)}\right]$$

Portanto

$$\frac{dA^2}{d\sigma} = A^2\frac{d}{d\sigma}\ln\left[\frac{c(\sigma)}{\mu(\sigma)}\right]$$

Laplaciano do tempo de trânsito

$$\begin{cases} \dfrac{dA^2}{d\sigma} = -\lambda A^2 \Delta\tau \\[2ex] \dfrac{dA^2}{d\sigma} = A^2 \dfrac{d}{d\sigma} \ln \left[\dfrac{c(\sigma)}{\mu(\sigma)} \right] \end{cases} \Rightarrow \qquad \Delta\tau = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\sigma} \ln \left[\frac{\mu(\sigma)}{c(\sigma)} \right]$$

Resta saber como computar $\mu(\sigma)$.

Lembre que $\ln \left[\dfrac{c(\sigma)}{\mu(\sigma)} \right] = -\ln \left[\dfrac{\mu(\sigma)}{c(\sigma)} \right]$.

Jacobianos ao longo do raio

Sejam

$$M(\sigma) \equiv J_\gamma(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_1} & \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$$N(\sigma) \equiv J_\gamma(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial \gamma_1} & \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial \gamma_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

EDO para $M(\sigma)$

$$
\begin{aligned}
\frac{dM}{d\sigma} &= \frac{d}{d\sigma} J_\gamma(\mathbf{x}) = J_\gamma\left(\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}\right) = J_\gamma(\lambda\mathbf{p}) \\
&= \lambda J_\gamma(\mathbf{p}) + \mathbf{p} J_\gamma(\lambda) \\
&= \lambda N + \mathbf{p} J_{\mathbf{x}}(\lambda) J_\gamma(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\frac{dM}{d\sigma} = \lambda N + \mathbf{p}(\nabla\lambda)^T M
$$

EDO para $N(\sigma)$

$$\frac{dN}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma} J_\gamma(\mathbf{p}) = J_\gamma\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma}\right) = J_\gamma\left(-\frac{\lambda}{c(\mathbf{x})^3}\nabla c(\mathbf{x})\right)$$

$$\text{se } q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2c(\mathbf{x})^2}, \quad \text{então } \nabla q = -\frac{1}{c(\mathbf{x})^3}\nabla c(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned}\frac{dN}{d\sigma} &= J_\gamma(\lambda\nabla q) = \lambda J_\gamma(\nabla q) + \nabla q J_\gamma(\lambda) \\ &= \lambda J_{\mathbf{x}}(\nabla q) J_\gamma(\mathbf{x}) + \nabla q J_x(\lambda) J_\gamma(\mathbf{x}) \\ &= \lambda \nabla^2 q M + \nabla q (\nabla\lambda)^T M\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{dN}{d\sigma} = \left[\lambda\nabla^2 q + \nabla q(\nabla\lambda)^T\right] M$$

Sistema completo de traçamento de raios

O sistema de traçamento de raios é formado por 19 e.d.o's de primeira ordem:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \lambda \mathbf{p}, \qquad \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \lambda \nabla q, \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\lambda}{c(\mathbf{x})^2},$$

$$\frac{dM}{d\sigma} = \lambda N + \mathbf{p}(\nabla\lambda)^T M, \qquad \frac{dN}{d\sigma} = \left[\lambda \nabla^2 q + \nabla q (\nabla\lambda)^T\right] M.$$

com $q = \dfrac{1}{2c(\mathbf{x})^2}$, onde $\mathbf{x}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, $\tau \in \mathbb{R}$, e $M, N \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, e $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Sistema de traçamento de raios com $\lambda = 1$

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \mathbf{p}, \qquad \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = -\frac{1}{c(\mathbf{x})^3}\nabla c(\mathbf{x}), \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2},$$

$$\frac{dM}{d\sigma} = N, \qquad \frac{dN}{d\sigma} = \frac{1}{c^4}\left[3\nabla c(\nabla c)^T - c\nabla^2 c\right] M$$

onde $\mathbf{x}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, $\tau \in \mathbb{R}$, $M, N \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ e $c \equiv c(\mathbf{x})$.

Sistema de traçamento de raios com $\lambda = c(\mathbf{x})$

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c(\mathbf{x})\mathbf{p}, \qquad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = -\frac{1}{c(\mathbf{x})^2}\nabla c(\mathbf{x}) \qquad \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{c(\mathbf{x})},$$

$$\frac{dM}{ds} = cN + \mathbf{p}(\nabla c)^T M, \qquad \frac{dN}{ds} = \frac{1}{c^3}\left[2\nabla c(\nabla c)^T - c\nabla^2 c\right] M.$$

onde $\mathbf{x}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, $\tau \in \mathbb{R}$, $M, N \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ e $c \equiv c(\mathbf{x})$.

Sistema de traçamento de raios com $\lambda = c(\mathbf{x})^2$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = c(\mathbf{x})^2\mathbf{p}, \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{1}{c(\mathbf{x})}\nabla c(\mathbf{x}), \qquad \frac{d\tau}{dt} = 1,$$

$$\frac{dM}{dt} = c^2 N + 2c\mathbf{p}(\nabla c)^T M, \qquad \frac{dN}{dt} = \frac{1}{c^2}\left[\nabla c(\nabla c)^T - c\nabla^2 c\right] M.$$

onde $\mathbf{x}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, $\tau \in \mathbb{R}$, $M, N \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ e $c \equiv c(\mathbf{x})$.

De $M(\sigma)$ a $\mu(\sigma)$

Lembrando que, por definição,

$$\mu(\sigma) = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} \right\| \qquad \text{e} \qquad M(\sigma) \equiv J_\gamma(\mathbf{x})$$

uma vez tendo computado M ao longo do raio, para obter μ basta observar que

$$\mu(\sigma) = \|M_1 \times M_2\|,$$

onde M_1 e M_2 são as colunas da matriz M.

Condições iniciais para o traçado de raios

Condições iniciais para fonte pontual

Para pode integrar o sistema e.d.o's do traçamento de raios é preciso fornecer condições iniciais para as 19 equações ordinárias.

No caso de fonte pontual, $F(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t)$, temos que

- $\sigma_0 = 0$
- $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$
- $\tau(0) = 0$
- $\mathbf{p}(0) = ?$
- $M(0) = ?$
- $N(0) = ?$

Condição inicial para $\mathbf{p}$

Pela equação iconal,

$$\|\mathbf{p}\| = \frac{1}{c(\mathbf{x})}.$$

Portanto

$$\mathbf{p}(0) = \frac{1}{c(\mathbf{x}_0)} \left(\cos\gamma_1 \sin\gamma_2, \sin\gamma_1 \sin\gamma_2, \cos\gamma_2\right)^T,$$

com $0 \leq \gamma_1 \leq 2\pi$ e $0 \leq \gamma_2 \leq \pi$.

Condição inicial para M e N

Vimos que, para quaisquer σ e σ_1,

$$A(\sigma) = A(\sigma_1)\sqrt{\frac{\mu(\sigma_1)}{c(\sigma_1)}}\sqrt{\frac{c(\sigma)}{\mu(\sigma)}} = K\sqrt{\frac{c(\sigma)}{\mu(\sigma)}},$$

onde K é uma constante. Logo, podemos computar

$$K = \lim_{\sigma\to 0} A(\sigma)\sqrt{\frac{\mu(\sigma)}{c(\sigma)}}.$$

Como K depende apenas do comportamento do campo em uma vizinhança de $\mathbf{x}_0$, basta computar o limite para em um meio homogêneo ao redor de $\mathbf{x}_0$.

Amplitude em meio homogêneo

Se $c(\mathbf{x}) \equiv c(\mathbf{x}_0)$, então

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p}(\sigma) = \mathbf{p}(0), \quad \text{com } \|\mathbf{p}(0)\| = \frac{1}{c(\mathbf{x}_0)},$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = \lambda\mathbf{p}(0) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x}(\sigma) = \mathbf{x}_0 + \sigma\lambda\mathbf{p}(0)$$

Da função de Green para meio homogêneo, sabemos que amplitude em um meio homogêneo é

$$\tilde{A}(\sigma) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \frac{c(\mathbf{x}_0)}{4\pi\lambda\sigma}.$$

Estamos utilizando $\tilde{A}$ para distinguir entre a amplitude no caso geral e a amplitude no caso homogêneo, que será utilizada apenas para obter as condições iniciais necessárias ao caso geral.

M em meio homogêneo

$$M(\sigma) \equiv J_\gamma(\mathbf{x}) = J_\gamma(\mathbf{x}_0 + \sigma\lambda\mathbf{p}(0)) = \sigma\lambda J_\gamma(\mathbf{p}(0))$$

$$= \frac{\sigma\lambda}{c(\mathbf{x}_0)} \begin{bmatrix} -\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 & \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \\ \cos\gamma_1 \sin\gamma_2 & \sin\gamma_1 \cos\gamma_2 \\ 0 & -\sin\gamma_2 \end{bmatrix}$$

Portanto $M(0) = 0 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ e

$$\mu(\sigma) \equiv \|M_1(\sigma) \times M_2(\sigma)\| = \frac{\sigma^2\lambda^2}{c(\mathbf{x}_0)^2} \sin\gamma_2$$

Constantes K, $M(0)$, e $N(0)$

$$K \equiv \lim_{\sigma\to 0} \tilde{A}(\sigma)\sqrt{\frac{\mu(\sigma)}{c(\sigma)}} = \lim_{\sigma\to 0} \frac{c(\mathbf{x}_0)}{4\pi\lambda\sigma}\sqrt{\frac{\sigma^2\lambda^2}{c(\mathbf{x}_0)^2}}\sqrt{\frac{\sin\gamma_2}{c(\sigma)}} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\sin\gamma_2}{c(\mathbf{x}_0)}}$$

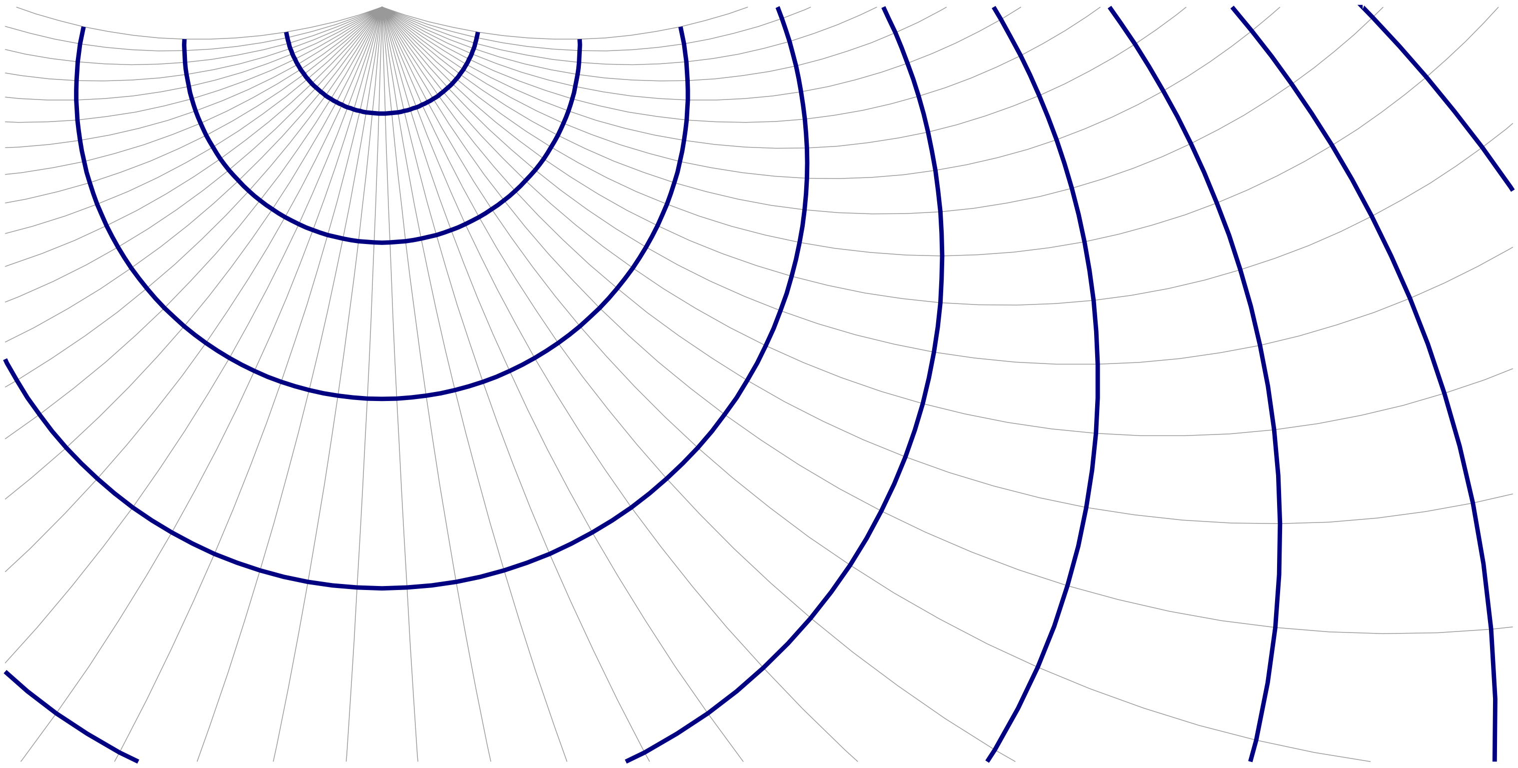
Finalmente,

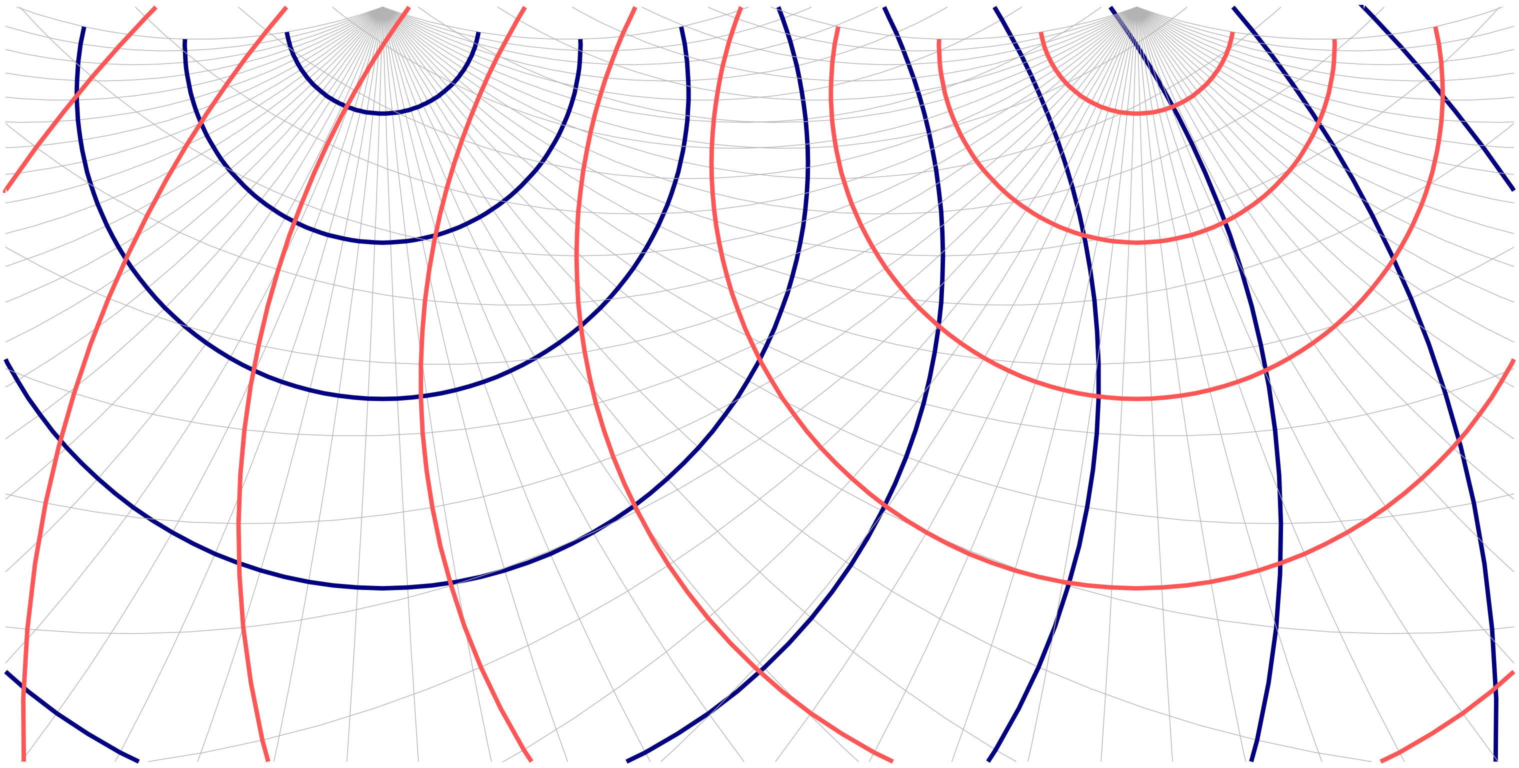
$$A(\sigma) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\sin\gamma_2}{c(\mathbf{x}_0)}\frac{c(\sigma)}{\mu(\sigma)}},$$

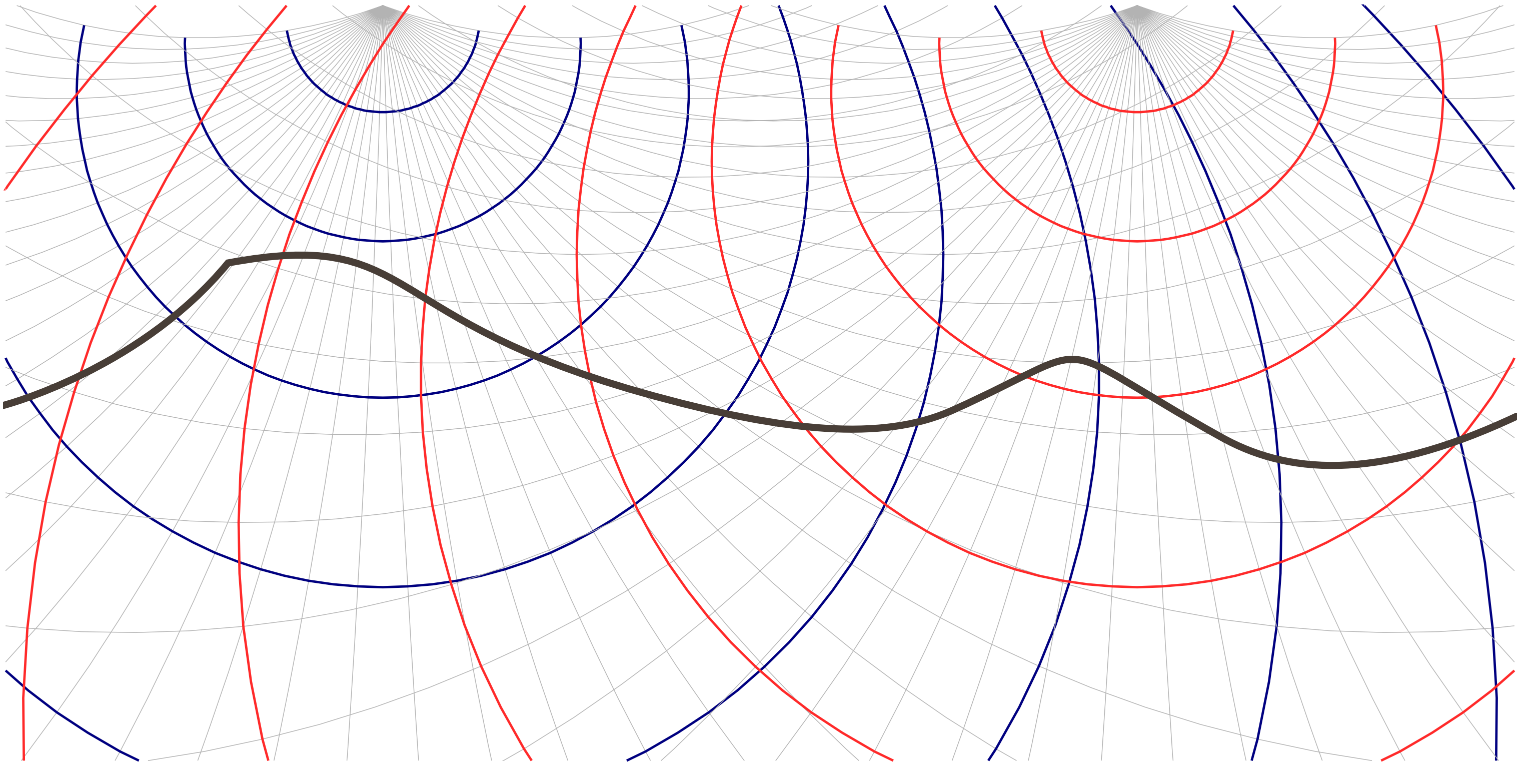
$M(0) = 0$, e

$$N(0) = \frac{1}{c(\mathbf{x}_0)}\begin{bmatrix} -\sin\gamma_1\sin\gamma_2 & \cos\gamma_1\cos\gamma_2 \\ \cos\gamma_1\sin\gamma_2 & \sin\gamma_1\cos\gamma_2 \\ 0 & -\sin\gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Repare que a constante K foi computada utilizando $\tilde{A}$, amplitude do caso homogêneo, e μ também do caso homogêneo.







Referências

Aki, K. e Richards, P. G. (2009). *Quantitative Seismology*. University Science Books, 2ª edição.

Bleistein, N., Cohen, J. K., e Stockwell, Jr., J. W. (2000). *Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration and Inversion*. Springer.

Chapman, C. (2004). *Fundamentals of Seismic Wave Propagation*. Cambridge University Press, Cambridge.

Courant, R. (1962). *Methods of Mathematical Physics: Partial Differential Equations*, volume II. Wiley-VCH GmbH & Co. KGaA.

Devaney, A. J. (2012). *Mathematical Foundations of Imaging, Tomography and Wavefield Inversion*. Cambridge University Press, Cambridge.

Fokkema, J. T. e van den Berg, P. M. (1993). *Seismic Applications of Acoustic Reciprocity*. Elsevier, Amsterdam.

Pujol, J. (2003). *Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology*. Cambridge University Press, Cambridge.

Stolt, R. H. e Weglein, A. B. (2012). *Seismic Imaging and Inversion: Application of Linear Inverse Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

Trorey, A. W. (1970). A simple theory for seismic diffractions. *Geophysics*, 35(5):762–784.