UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso

UM BREVE COMENTÁRIO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Rafael Sergio Sampaio Emidio

Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

BELÉM - PA

2022

Rafael Sergio Sampaio Emidio

UM BREVE COMENTÁRIO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA) e ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais, como requisito parcial, para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

BELÉM - PA

2022

Rafael Sergio Sampaio Emidio

UM BREVE COMENTÁRIO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA) e ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais, como requisito parcial, para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa (Orientador)
FACMAT-UFPA

Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva
FACMAT-UFPA

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg
FACMAT-UFPA

Data da defesa:
Conceito:

"À minha mãe, Sonia Maria Teixeira Sampaio
e à toda minha família."

Agradecimentos

Primeiramente sou grato a Deus por ter me dado saúde e vigor para finalizar esta caminhada, que toda honra seja dada à Ele.

À minha mãe, Sonia Maria Teixeira Sampaio, que sempre incentivou meus estudos não apenas com suporte financeiro mas também com palavras de motivção e encorajamento.

Ao meu falecido pai, Francisco Sergio Emidio, apesar da distância sempre me incentivou e deu suporte financeiro aos meus estudos até o 3° ano do Ensino médio. No começo de 2022 em Manaus, ele veio a falecer devido á um câncer, mas sou muito grato pela vida dele.

À minha vó, Maria da Conceição Gomes Teixeira, ao meu tio Daniel Teixeira Sampaio, por sempre terem me incentivado e acreditado em mim. Um agradecimento especial ao meu tio Izaque Teixeira Sampaio por ter sido meu paraninfo e já ter providenciado com antecedência meu anel de formatura.

Ao meu orientador Prof. Dr. Augusto Cesar dos Reis Costa, por toda a sua orientação durante a minha elaboração do trabalho e também por sua disponibilidade para tirar minhas dúvidas.

Agradeço aos membros da banca examinadora: Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva e Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg, por aceitarem participar da defesa do meu Trabalho de Conclusão de Curso.

À Faculade de Matemática e aos amigos que fiz durante curso.

Por último, à Universidade Federal do Pará, grato por ter passado por essa íncrivel e grandiosa instituição.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos como podemos obter a solução de uma equação diferencial linear, especificamente de primeira ordem, e algumas aplicações desse tipo de equação. Através do Teorema Fundamental do Cálculo, podemos calcular primitivas da forma $F(x)+c$ de uma determinada função f derivável, assim, encontraremos a solução geral de uma equação diferencial de primeira ordem. Através de uma condição inicial, podemos encontrar o valor da constante c e obtermos a solução da equação, portanto, resolvemos um problema de valor de inicial. Primeiramente, estudaremos como podemos obter a solução de uma equação diferencial e no estudo das equações separáveis veremos algumas características dessas equações, aplicaremos o comportamento dessas equações em alguns modelos de dinâmicas populacionais, e por fim, veremos a aplicação dessas equações em certos fenômenos da química, da física e da geometria diferencial.

Palavras-chave: Equações diferenciais, dinâmica populacional, aplicações, problema de valor inicial, condição inicial, solução da equação.

Abstract

In this paper we will present how we can obtain the solution of a linear differential equation, specifically of the first order, and some applications of this type of equation. Using the Fundamental Theorem of Calculus, we can calculate primitives of the form $F(x) + c$ of a given derivable function f, so we will find the general solution of a first order differential equation. Through an initial condition, we can find the value of the constant c and obtain the solution of the equation, so we solve an initial value problem. First, we will study how we can obtain the solution of a differential equation and in the study of separable equations we will see some characteristics of these equations, we will apply the behavior of these equations to some models of population dynamics, and finally, we will see the application of these equations to certain phenomena in chemistry, physics, and differential geometry.

Key-words: Differential equations, population dynamics, applications, initial value problem, initial condition, solution of the equation.

Sumário

Lista de figuras

1 Introdução

Newton e Leibniz, os criadores do cálculo, foram os matemáticos que deram o pontapé inicial no estudo das equações diferenciais. Para resolver problemas físicos, era necessário equacionar o fenômeno estudado e através do cálculo de primitivas era possível encontrar a solução do problema. Um dos métodos mais usados era a quadratura, este método consiste em reduzir o problema para obter a solução pelo cálculo de primitivas. Devido ao baixo número de funções que poderiam ser resolvidas por funções elementares, surgiu no século XIX, o uso das séries de funções. Porém, algum tempo depois o método das séries de funções foi sendo usado de uma maneira descuidada, para tentar sanar isso surgiram os teoremas de existência e unicidade, que marcaram o inicío da fase moderna com Poincaré, no final do século XIX.

Atualmente o principal foco das equações diferenciais é o cálculo de primitivas, buscamos neste trabalho como podemos observar certos comportamentos da física e da química através das equações diferenciais lineares e das equações separáveis, onde essas equações e a suas soluções são obtidas através do cálculo de primitivas, estudadas no Teorema Fundamental do Cálculo, e através de uma condição inicial obtemos a solução dessa equação de maneira explícita. Vale ressaltar que além de comportamentos da natureza estudados na física, na química e comportamentos de curvas na geometria diferencial, as equações difereciais de primeira ordem também são utilizadas para observar o comportamento de uma dinâmica populacional.

2 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

No estudo das equações diferenciais de primeira ordem, temos como objetivo, determinar se existe uma função f com duas variáveis que possua uma solução. Por exemplo, a função

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

é uma equação diferencial de primeira ordem, onde qualquer função diferenciável $y = F(t)$ é uma solução solução de f para todo t em um determinado intervalo, logo encontraremos uma solução geral pela primitiva $F(t) + c$, e através de uma condição inicial encontraremos a solução da equação.

2.1 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Podemos considerar uma equação diferencial linear ordinária linear de primeira ordem com a seguinte expressão

$$\dot{x} = p(t)x + q(t), \tag{2.1}$$

onde p e q são funções reais contínuas definidas em um intervalo aberto $[a, b]$ e $\dot{x}$ é a notação de derivada para x em relação a variável t. Precisamos encontrar uma função diferenciável $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ para satisfazer a equação (2.1). Para a solução desta equação, podemos obter a sua solução geral para encontrarmos todas as suas soluções, ou obtemos a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = p(t)x + q(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $t_0 \in [a, b]$ e x_0 é um ponto dado. Verificaremos que (2.2) possui apenas uma solução, mas antes vamos determinar a solução geral de (2.1). Podemos considerar a equação de crescimento exponencial para uma solução da equação (2.1), dada por

$$\dot{x} = kx(t), \tag{2.3}$$

onde k é uma constante. Considerando uma função $x(t) = e^{kt}$ como uma solução de (2.3), os seus múltiplos ce^{kt} também serão soluções de (2.3), onde c é uma constante arbitrária. Para provarmos tal afirmação, vamos considerar a expressão $x(t)e^{-kt} = 1$ e expressando sua derivada em relação a t, obtemos

$$\frac{d}{dt}x(t)e^{-kt} = \dot{x}e^{-kt} - kx(t)e^{-kt} = 0$$

$$\dot{x}e^{-kt} = kx(t)e^{-kt}$$

$$\dot{x} = kx(t),$$

podemos notar que voltamos para equação (2.3), isto ocorre pois

$$x(t) = ce^{kt}$$

$$c = \frac{x(t)}{e^{kt}},$$

logo $x(t)e^{-kt} = c$, portanto ce^{kt} é uma solução geral de (2.3).

Então obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

como a solução geral de (2.3) é da forma ce^{kt}, podemos determinar a constante c:

$$x(t_0) = ce^{kt_0} = x_0.$$

Então, considerando $c = \dfrac{x_0}{e^{kt_0}}$ e substituindo na solução geral de (2.3), obtemos

$$x(t) = \frac{x_0}{e^{kt_0}} \cdot e^{kt}.$$

Portanto, a solução do problema é dada por

$$x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

A equação (2.1) é uma equação linear homogênea. Logo, temos o seguinte problema de valor inicial para $q(t) \equiv 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = p(t)x \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

O problema (2.4) é um problema inicial de valor homogêneo, cuja a solução é dada por

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}. \tag{2.5}$$

Com o objetivo de simplificar as expressões, reescrevemos a equação (2.5) da seguinte maneira:

$$T(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}. \tag{2.6}$$

A seguir, mostraremos algumas propriedades da função T.

$(i) : T(t_0, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_0} p(s)\, ds} = e^{t_0 - t_0} = e^0 = 1.$

Portanto, $T(t_0, t_0) = 1$.

$(ii) : T(t_0, t)^{-1} = (e^{\int_{t}^{t_0} p(s)\, ds})^{-1} = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} = T(t, t_0)$

Logo, $T(t_0, t)^{-1} = T(t, t_0)$.

$(iii) : T(t, t_0)T(t_0, s) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} \cdot e^{\int_{s}^{t_0} p(s)\, ds} = e^{\int_{t_0}^{t} p(s) + \int_{s}^{t_0} p(s)\, ds} = e^{\int_{s}^{t} p(s)\, ds} = T(t, s)$

Então, $T(t, t_0)T(t_0, s) = T(t, s)$.

Concluímos que para a função T, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} &T(t_0, t_0) = 1, \\ &T(t, t_0) = T(t_0, t)^{-1}, \\ &T(t, t_0)T(t_0, s) = T(t, s). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Para determinarmos a solução geral do problema de valor incial (2.2), utilizaremos um fator integrante $\mu(t)$, e multiplicaremos em ambos os lados da equação:

$$\mu(t)(\dot{x} - p(t)x) = \mu(t)q(t).$$

Determinaremos $\mu(t)$ igualando o primeiro membro da expressão anterior a derivada do produto de x por μ, logo

$$\mu(\dot{x} - p(t)x) = \frac{d}{dt}(\mu x) = \dot{\mu}x + \mu\dot{x}.$$

Então, podemos igualar as seguintes expressões

$$-\mu p(t)x = \dot{\mu}x.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= -\mu p(t) \\ \frac{\dot{\mu}}{\mu} &= -p(t) \\ \frac{d}{dt}(ln\mu) &= -p(t), \end{aligned}$$

integrando em ambos os lados, obtemos

$$ln\mu = -\int p(s)\,ds.$$

Logo, calculando uma primitiva de p obtemos para o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} = e^{\int_{t}^{t_0} p(s)\,ds} = T(t_0, t).$$

Então temos de $\dfrac{d}{dt}(\mu x) = \mu(t)q(t)$:

$$\frac{d}{dt}(T(t_0, t)x(t)) = T(t_0, t)q(t),$$

integrando em ambos os lados de t_0 a t:

$$T(t_0, t)x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} T(t_0, s)q(s)\,ds.$$

Portanto, podemos obter a solução do problema de valor inicial (2.2) e utilizando as propriedades (2.7), multiplicamos a última expressão por $T(t, t_0)$ e vamos obter:

$$x(t) = T(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t, s)q(s)\,ds, \tag{2.8}$$

a equação (2.8) é chamada de fórmula de variação de constantes, fórmula esta que pode ser escrita como solução do problema de valor inicial (2.2).

Podemos concluir que a existência da equação obtida é dada pela verificação se ela é solução da equação diferencial. A diferenciabilidade das expressões acima são dadas pela condição de p e q serem contínuas em $[a, b]$.

Em particular, se o coeficiente $p(t)$ for igual a uma constante k, temos

$$T(t, t_0) = e^{k(t-t_0)}.$$

Então temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = kx + q(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

e pela fórmula de variação de constantes, dada na equação (2.8), obtemos

$$x(t) = e^{k(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{k(t-s)}q(s)ds.$$

Se temos um ponto a associado a uma função $x_1(t)$ e um ponto b associado a uma função $x_2(t)$, podemos verificar que essas funções são soluções da equação (2.1) da seguinte maneira:

$$x_1(t) = ae^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds},$$

$$x_2(t) = be^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}.$$

Logo temos

$$x_1(t) - x_2(t) = ae^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} - be^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}$$
$$x_1(t) - x_2(t) = (a-b)e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}$$
$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds},$$

então podemos afirmar que $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução do problema de valor inicial (2.4), onde $x_0 = a - b$. Logo, todas as soluções de (2.1) são obtidas somando uma solução particular com a solução geral da equação homogênea associada em (2.4). Logo, podemos dizer que o termo da fórmula da variação de constantes

$$\int_{t_0}^{t} e^{k(t-s)} q(s) ds$$

é uma solução particular de (2.1). Assim temos um metódo mais rápido para determinar uma solução de (2.1), considerando uma constante $q(t) \equiv q_0$, $x_p(t) = -q_0/k$ é uma solução particular de

$$\dot{x} = kx + q_0, \tag{2.9}$$

pois

$$\dot{x} = k.\frac{-q_0}{k} + q_0$$
$$\dot{x} = 0.$$

Então temos,

$$\dot{x} = kx + q_0$$

$$kx = \dot{x} - q_0$$
$$x(t) = \frac{\dot{x}}{k} - \frac{q_0}{k}.$$

Portanto,

$$x(t) = ce^{kt} - \frac{q_0}{k}$$

será a solução geral de (2.9), tal que c é uma constante qualquer que pode ser obtida através da condição $x(t_0) = x_0$.

2.2 Equações Separáveis

Uma equação diferencial da forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \ g(y) \neq 0, \tag{2.10}$$

é chamada de equação separável, onde $y' = dy/dx$. Consideramos f e g funções contínuas em intervalos abertos reais, tal que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $g : (c,d) \to \mathbb{R}$. Logo escrevemos (2.10) da forma

$$g(y)y' = f(x). \tag{2.11}$$

Seja uma função $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Se $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ e $y((\alpha,\beta)) \subset (c,d)$, tal que $g(y(x)) \neq 0$, a função y será uma solução de (2.10) para todo $x \ \epsilon \ (\alpha,\beta)$. Como a equação (2.10) não é linear, as soluções não necessariamente estarão definidas para todo x no segundo membro definido. Considerando $y(x)$ uma solução e G uma primitiva de g, onde $G' = g$, obtemos a partir de (2.11):

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = f(x)$$

$$G(y(x)) = f(x)dx,$$

então obtemos

$$G(y(x)) = F(x) + C, \tag{2.12}$$

onde F é uma primitiva de f.

Dado um ponto $x_0 \ \epsilon \ (\alpha,\beta)$, então temos que $y(x_0) = y_0 \ \epsilon \ (c,d)$. Logo a constante C será determinada da seguinte maneira:

$$C = G(y(x)) - F(x)$$

$$C = G(y(x_0)) - F(x_0)$$

$$C = G(y_0) - F(x_0),$$

substituindo C na expressão (2.12), obtemos

$$G(y(x)) = F(x) + G(y_0) - F(x_0)$$

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0).$$

Como G é uma primitiva de g e F é uma primitiva de f, podemos escrever a última expressão como

$$\int_{y_0}^{y(x)} g(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{2.13}$$

O que mostramos acima foi que dada uma solução de (2.10), esta solução irá satisfazer a expressão (2.12). Podemos concluir que dada uma relação $G(y) = F(x) + C$ e um ponto (x_0, y_0) que satisfaz essa relação, onde $G'(y_0) = g(y_0) \neq 0$, dado também um intervalo aberto (α, β) contendo x_0 e uma função de classe C^1, através do Teorema das funções implícitas podemos garantir que esse intervalo existe e que satifaz a relação (2.12), logo trata-se de uma solução de (2.1). Em seguida, analisaremos alguns exemplos de equações separáveis.

Exemplo 1: Resolva a equação $y' = \dfrac{x}{y}$.

Resolução: Como $yy' = x$, obtemos $y^2 = x^2 + C$. Verificaremos algumas soluções dessa equação variando a constante C. Por exemplo, quando $C = 0$ obtemos quatro soluções:

$$y_1(x) = x,\ \ x > 0;$$

$$y_2(x) = -x,\ \ x > 0;$$

$$y_3(x) = x,\ \ x < 0;$$

$$y_4(x) = -x,\ \ x < 0.$$

Para $C = 1$, temos duas soluções:

$$y_1(x) = +\sqrt{x^2+1},\ \ -\infty < x < \infty,$$

$$y_2(x) = -\sqrt{x^2+1},\ \ -\infty < x < \infty.$$

E para $C = -1$, temos quatro soluções:

$$y_1(x) = +\sqrt{x^2-1},\ \ x > 1;$$

$$y_2(x) = -\sqrt{x^2-1},\ \ x > 1;$$

$$y_3(x) = +\sqrt{x^2-1},\ \ x < -1;$$

$$y_4(x) = -\sqrt{x^2-1},\ \ x > -1.$$

Através dos intervalos (a,b) e (α,β) podemos encontrar várias outras soluções, porém analisando cada ponto (x_0,y_0), onde $y_0 \neq 0$, temos somente uma solução $y(x)$, tal que algumas soluções se estendem para todo x e outras apenas por uma semirreta. Então a solução do problema de valor inicial para $y(3)=2$ é dado por $C=5$, logo a solução é

$$y(x) = +\sqrt{x^2-5},\ x > \sqrt{5}.$$

Exemplo 2: Resolva a equação $y' = \dfrac{x^2}{y^2}$.

Resolução: Podemos escrever este exemplo na forma $y^2y' = x^2$, logo obtemos $y^3 = x^3 + C$. Analisando as soluções, para $C=0$, temos duas soluções:

$$y_1(x) = x,\ x > 0;$$

$$y_2(x) = x,\ x < 0.$$

Para $C=1$, obtemos outras duas soluções:

$$y_1(x) = \sqrt[3]{x^3+1},\ x < -1;$$

$$y_2(x) = \sqrt[3]{x^3+1},\ x > -1.$$

Para $C=-1$, temos:

$$y_1(x) = \sqrt[3]{x^3-1},\ x < 1;$$

$$y_2(x) = \sqrt[3]{x^3-1},\ x > 1.$$

Então podemos concluir que a solução do problema de valor inicial $y^2y' = x^2$, para $y(2) = -3$, obtem-se que $C = -35$, logo

$$y(x) = \sqrt[3]{x^3-35},\ x < \sqrt[3]{35}.$$

Exemplo 3: Resolva a equação $y' = -2xy$.

Resolução: Podemos notar que $g(y) = 1/y$, logo a solução não passará por $y(x) = 0$. Escrevemos a equação na forma

$$\frac{y'}{y} = -2x,\ y \neq 0,$$

então obtemos

$$lny = -x^2 + C.$$

Portanto, obtemos duas soluções para cada $C \epsilon \mathbb{R}$:

$$y_1(x) = e^{-x^2+C},$$

$$y_2(x) = -e^{-x^2+C}.$$

A seguir, apresentaremos algumas definições e teoremas.

Definição 2.1: Uma equação da forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.14}$$

é chamada de equação autônoma, pois a função f depende apenas de x e não da variável independente t.

Uma propriedade dessas equações diz que se $x(t)$ é solução de (2.14), então uma função $y(t)$ também é solução de (2.14), porém esta função depende não só de t mas também de uma constante c, ou seja, $y(t) = x(t + c)$. Então podemos afirmar através da existência e unicidade de solução que a solução do problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

é dada por $x(t)$ se e somente se, $y(t) = x(t + t_0)$ for solução de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Concluimos que para equações autônomas, consideramos apenas condições iniciais onde $t_0 = 0$.

Definição 2.2: Se $\bar{x}$ é um zero da função, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$, logo $x(t) \equiv \bar{x}$ é uma solução de (2.14). Sendo assim, $x(t)$ é chamada de solução equilíbrio ou estacionária e o ponto $\bar{x}$ é chamado de ponto de equilíbrio ou singularidade.

Definição 2.3: Dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|x_0 - \bar{x}| < \varepsilon$. $\bar{x}$ será um ponto de equilíbrio estável, se a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

é dada por $|x(t) - \bar{x}| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Um ponto estável $\bar{x}$, será chamado de assintoticamente estável se existir um $\eta > 0$, tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$, onde $|x_0 - \bar{x}| < \eta$. Um ponto de equilíbrio será instável quando ele não for estável.

Teorema 2.1: Se $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio e $f(\bar{x})$ é uma solução de (2.14), $\bar{x}$ é assintoticamente estável se $f'(\bar{x}) < 0$ e $\bar{x}$ é assintoticamente instável quando $f'(\bar{x}) > 0$.
Demonstração: Elevando a expressão $x(t) - \bar{x}$ ao quadrado e analisando a sua variação através da regra da cadeia, temos que

$$\frac{d}{dt}(x(t) - \bar{x})^2 = 2(x(t) - \bar{x})\dot{x},$$

se considerarmos $\dot{x} = f(x)$ e x como uma função dependente da variável t, temos a seguinte expressão:

$$2(x(t) - \bar{x})f(x(t)).$$

Como $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio, consequentemente, pela definição 2, temos que $f(\bar{x}) = 0$. Através do Teorema do Valor Médio, a última expressão pode ser obtida da seguinte maneira:

$$f'(\xi(t)) = \frac{f(x(t)) - f(\bar{x})}{x(t) - \bar{x}},$$

onde $f'(\xi(t))$ é um valor entre $x(t)$ e $\bar{x}$, então multiplicando o numerador e o denominador da expressão acima por $2(x(t) - \bar{x})$, obtemos

$$f'(\xi(t)) = \frac{f(x(t)) - f(\bar{x})}{x(t) - \bar{x}} \times \frac{2(x(t) - \bar{x})}{2(x(t) - \bar{x})}$$

$$f'(\xi(t)) = \frac{2(x(t) - \bar{x})[f(x(t)) - f(\bar{x})]}{2(x(t) - \bar{x})^2}$$

$$2(x(t) - \bar{x})[f(x(t)) - f(\bar{x})] = 2(x(t) - \bar{x})^2 f'(\xi(t)),$$

e como $f(\bar{x}) = 0$, podemos escrever:

$$2(x(t) - \bar{x})(f(x(t)) = 2(x(t) - \bar{x})^2 f'(\xi(t)).$$

Se analisarmos $\bar{x}$ como um ponto assintóticamente estável, ou seja, $f'(\bar{x}) < 0$, pela continuidade de f' existe $\eta > 0$, tal que $f'(x) < -\eta < 0$ e existe um $\delta > 0$ para todo $|x - \bar{x}| < \delta$. Então, para qualquer ponto t_0, temos que $|x(t_0) - \bar{x}| < \delta$ é uma solução para (2.14), consequentemente a variação de $x(t) - \bar{x}$ dada por $\alpha(t) = (x(t) - \bar{x})^2$ é decrescente para $t \geq t_0$. Podemos analisar também que

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) \leq -\eta\alpha(t) \text{ para } t \geq t_0,$$

considerando uma solução geral para (2.14), temos que $\alpha(t) \leq ce^{-\eta t}$, isto implica que $x(t)$ tende a $\bar{x}$ quando $t \to \infty$. Para $f'(\bar{x}) > 0$, temos que a solução para (2.14) é dada por $|x(t_0) - \bar{x}| > \delta$, então $\alpha(t) = (x(t) - \bar{x})^2$ é crescente para $t \geq t_0$.

A seguir enunciaremos o teorema de Existência, Unicidade e Depedência Contínua. Veremos que este teorema nos permite encontrar a solução de um problema de valor inicial, através da existência e unicidade desta solução.

Teorema 2.2: Seja Ω um intervalo aberto no plano (x, y), neste intervalo está definido a função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Supondo que a derivada parcial em relação à y, dada por $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ também seja contínua, temos para cada ponto (x_0, y_0) em Ω um intervalo aberto I que contém x_0, uma única função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$, onde $(x, \phi(x)) \; \epsilon \; \Omega$ para todo $x \; \epsilon \; I$. Logo, teremos a solução do problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

3 Aplicações

3.1 Dinâmica de uma População e Noções de Estabilidade

Nesta sessão veremos os conceitos de estabilidade e instabilidade através de alguns modelos criados para análise da variação de uma população com o tempo. Cada modelo leva em conta a influência de vários fenômenos biológicos e sociológicos na evolução da população, e cada modelo possui uma taxa de crescimento da população $p(t)$, onde t é o tempo, taxa essa definida por $\dot{p}(t)/p(t)$.

3.1.1 O Modelo Malthusiano

Este modelo basicamente assume que a taxa de crescimento de uma população é dado por uma constante λ, então a equação que rege o crescimento dessa população é dado

$$\dot{p} = \lambda p. \tag{3.1}$$

Então com base nos estudos feitos anteriormente sobre equações lineares de primeira ordem, vemos que (3.1) é um problema de valor inicial homogêneo, considerando p_0 como população inicial, temos como solução geral:

$$p(t) = p_0 e^{\lambda(t-t_0)},$$

e com a condição inicial $p(t_0) = p_0$, a solução para (3.1) é dada por

$$p(t) = p(t_0)e^{\lambda(t-t_0)},$$

onde esta solução apresenta um crescimento exponencial se $\lambda > 0$, porém não é possível que este crescimento se mantenha para sempre. O modelo apresentado por Malthus gerou várias controvérsias no século XIX, pois ele afirmava que a população mundial crescia em razão geométrica e os recursos para sobrevivência humana cresciam em razão aritmética. Portanto a tendência da humanidade é ser controlada por fome, doenças, miséria, etc. Um modelo desta natureza pode descrever o crescimento populacional de micro-organismos que se reproduzem por mitose.

3.1.2 O Modelo de Verhulst - A Logística

A constante λ é a taxa de crescimento da população, dado pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade, ou seja: $\lambda = \lambda_n - \lambda_m$. Este modelo propõe que λ seja constante, logo este modelo não leva em conta certos mecânismos de controle populacional, como hábitos sexuais e comportamento coletivo. Verhulst propôs um modelo em que a taxa de crescimento descresce linearmente com a população, modelo este dado por: $\lambda = a - bp$, onde a e b são constantes positivas. O modelo de Verhulst pode ser escrito na equação diferencial separável como

$$\dot{p} = (a - bp)p. \tag{3.2}$$

Podemos observar que ainda não é um modelo ideal, pois não leva em conta que a taxa de produção de novos seres da espécie humana, depende da idade dos pais. Existem modelos que levam este e outros fatores em consideração através de equações diferenciais com retardamento e equações integro-diferenciais. A equação (3.2) é conhecida como equação de Verhulst-Pearl, desenvolvida por Verhulst para estudar as populações da França e da Bélgica em 1834, e em 1920 por Pearl e Reed para o estudo da população dos Estados Unidos.

Podemos analisar que os modelos acima são funções que não dependem da variável t e sim da variável p, logo as equações (3.1) e (3.2) são exemplos de equações autônomas, onde seus pontos de equilibrío são dados por $\bar{x} = 0$ para (3.1), $\bar{x} = 0$ e $\bar{x} = a/b$ para (3.2). Podemos verificar também que para (3.1), $\bar{x} = 0$ é um ponto assintoticamente instavel. Para (3.2), $\bar{x} = a/b$ será um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e $\bar{x} = 0$ será um ponto instável.

Verificaremos a seguinte decomposição, para integrar a expressão (3.2):

$$\frac{1}{ap} + \frac{b}{a(a-bp)} = \frac{a(a-bp) + abp}{a^2 p(a-bp)}$$

$$\frac{a^2}{a^2 p(a-bp)} = \frac{1}{p(a-bp)},$$

logo

$$\frac{1}{p(a-bp)} = \frac{1}{ap} + \frac{b}{a(a-bp)}.$$

Multiplicando a última expressão por $\dot{p}$, obtemos

$$\frac{\dot{p}}{ap} + \frac{b\dot{p}}{a(a-bp)} = 1,$$

integrando em ambos os lados, temos a seguinte expressão

$$\frac{1}{a} lnp - \frac{1}{a} ln(a - bp) = t + C, \ C = constante$$

$$\frac{1}{a}lnp = t + C + \frac{1}{a}ln(a - bp)$$
$$lnp = at + aC + ln(a - bp).$$

Então temos

$$|p| = |a - bp|e^{at} \cdot e^{aC},$$

se considerarmos $p(t_0) = p_0$, obtemos

$$|p_0| = |a - bp_0|e^{at_0} \cdot e^{aC}.$$

Vamos obter a equação (3.3) fazendo uma razão entre as duas últimas expressões

$$\frac{|p|}{|p_0|} = \frac{|a - bp|e^{at} \cdot e^{aC}}{|a - bp_0|e^{at_0} \cdot e^{aC}}$$
$$\left|\frac{p}{p_0}\right| = \left|\frac{a - bp}{a - bp_0}\right| e^{a(t-t_0)}, \tag{3.3}$$

onde $p_0 \neq 0$ e $p_0 \neq \frac{a}{b}$. Então, retirando os valores absolutos de (3.3), obtemos:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{a - bp}{a - bp_0} \cdot e^{a(t-t_0)}$$
$$p(a - bp_0) = p_0(a - bp)e^{a(t-t_0)}$$
$$p(a - bp_0) = p_0ae^{a(t-t_0)} - p_0bpe^{a(t-t_0)}$$
$$p(a - bp_0) + p_0bpe^{a(t-t_0)} = p_0ae^{a(t-t_0)}$$
$$p(a - bp_0 + p_0be^{a(t-t_0)}) = p_0ae^{a(t-t_0)}$$
$$p = \frac{p_0ae^{a(t-t_0)}}{(a - bp_0 + p_0be^{a(t-t_0)})},$$

multiplicando o numerador e o denominador por $e^{-a(t-t_0)}$, temos:

$$p = \frac{p_0ae^{a(t-t_0)}}{(a - bp_0 + p_0be^{a(t-t_0)})} \times \frac{e^{-a(t-t_0)}}{e^{-a(t-t_0)}}.$$

Portanto, podemos explicitar $p(t)$:

$$p(t) = \frac{ap_0}{p_0b + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}}. \tag{3.4}$$

Análise da solução: Analisando (3.2), podemos ver $p(t) = 0$, $p(t) = a/b \equiv p_\infty$ são suas soluções. A notação p_∞ é justificada da seguinte maneira: se em (3.4) $t \to \infty$, logo

$p(t) \to p_\infty$. Então de (3.4) obtemos que $p_\infty = a/b$, esta solução é chamada de população limite e será o valor assintótico para uma população inicial, tal que $p_0 > 0$. Podemos analisar dois casos: o primeiro se $p_0 > p_\infty$ e o segundo se $0 < p_0 < p_\infty$. No primeiro caso, p(t) descresce exponencialmente tendendo para p_∞. No segundo caso, a população irá crescer e também tenderá a p_∞, onde o gráfico de $p(t)$ será uma curva em forma de S entre as retas $p = 0$ e $p = p_\infty$, esta curva é chamada de logística. Pois derivando (3.2), obtemos:

$$\ddot{p} = (a - bp)' \cdot p + (a - bp) \cdot \dot{p}$$

$$\ddot{p} = -b\dot{p}p + a\dot{p} - bp\dot{p}$$

$$\ddot{p} = (a - 2bp)\dot{p}.$$

Podemos concluir que a curva logística tem um ponto de inflexão quando $p(t) = \dfrac{a}{2b}$, pois

$$\ddot{p} = (a - 2b\frac{a}{2b})\dot{p} = 0,$$

significa que a população cresce com derivada positiva e em seguida o crescimento se torna mais lento, isto ocorre até a função atingir o valor $p_\infty/2$ como mostra a figura 1:

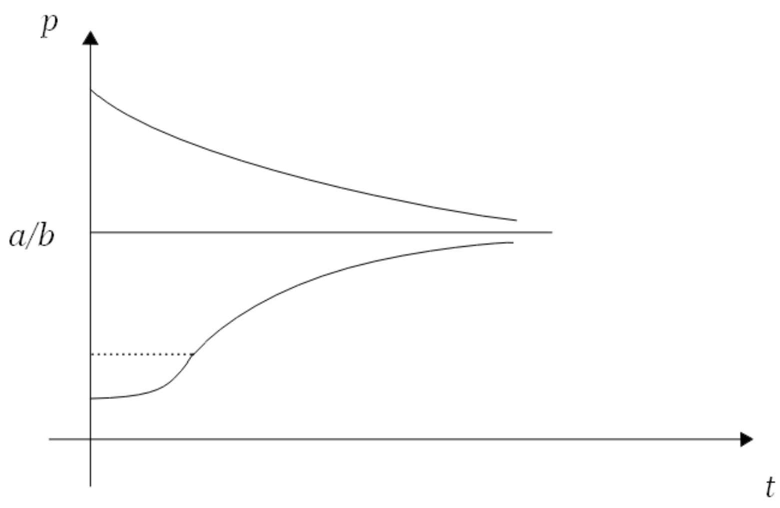

Figura 1: Curva logística.

3.2 Resfriamento de um Corpo

Podemos analisar o fenômeno da variação de temperatura em um corpo por perda de calor para o meio ambiente através do seguinte modelo:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \tag{3.5}$$

onde dT/dt é o fluxo de calor através das paredes do corpo, T é a temperatura constante por todo o corpo que depende apenas do tempo t, T_a é a temperatura do meio ambiente que é constante com o tempo e por último, k é uma constante positiva determinada pelas propriedades físicas do corpo. Na situação dada, o calor flui da fonte quente para fonte fria, então se $T > T_a$, a temperatura T descresce e o corpo se resfria, portanto isto justifica o sinal negativo em (3.5). Agora, se $T < T_a$, a temperatura T cresce e o corpo irá se aquecer. O modelo apresentado acima é chamada Lei de Resfriamento de Newton, Newton elaborou este modelo estudando uma bola de metal aquecida.

Considerando a condição inicial de temperatura $T(0) = T_0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \\ \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Através do métodos da sessão 2.1, a solução do problema pode ser obtida da seguinte forma:

$$\int \frac{1}{T - T_a} dT = \int -k dt$$

$$ln(T - T_a) + c_1 = -kt + c_2$$

$$ln(T - T_a) = -kt + C$$

$$T - T_a = e^{-kt+C},$$

usando a condição inicial $T(0) = T_0$, temos

$$e^C = T_0 - T_a.$$

Logo, obtemos a solução do problema:

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a. \tag{3.6}$$

Análise da solução: Na expressão (3.5), podemos ver que $T(t)$ descrece monotonicamente com t quando $T > T_a$, $T(t)$ irá crescer monotonicamente quando $T < T_a$ e quando for $T(t)$ for constante temos que $T = T_a$. Na expressão (3.6) temos a mesma conclusão, pois $T(t)$ tende monotonicamente para T_a quando $t \to +\infty$. Portanto, a temperatura T_a é chamada Temperatura de Equilíbrio.

A lei da conservação da quantidade de calor diz que o calor de um corpo é dada pelo produto de sua massa, seu calor específico e a variação de temperatura. Considerando m e m_a, respectivamente, as massas do corpo e do ambiente, c e c_a, respectivamente, os calores específicos do corpo e do ambiente, a Lei da Conservação da Quantidade de Calor pode ser escrita da seguinte forma para esta situação:

$$mc(T_0 - T) = m_a c_a (T_a - T_{a,0}), \tag{3.7}$$

onde sabemos pelas demonstrações anteriores que T e T_a são, respectivamente, as temperaturas do corpo e do ambiente em função do tempo t, mas nesta equação, elas são as temperaturas finais de cada um. $T_0 = T(0)$ será a temperatura inicial do corpo e $T_{a,0} = T_a(0)$ é a temperatura inicial do ambiente. Em (3.7), temos que $T_0 > T$, isso se deve ao fato de o corpo estar cedendo calor ao ambiente, logo a temperatura inicial do corpo será maior que a final.

Isolando T_a em (3.7), obtemos a seguinte expressão:

$$T_a = \frac{mc(T_0 - T)}{m_a c_a} + T_{a,0}.$$

Vamos igualar $(mc)/(m_a c_a)$ a uma constante A, logo

$$T_a = A(T_0 - T) + T_{a,0},$$

substituindo a expressão acima em (3.5), temos

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= -k(T - A(T_0 - T) - T_{a,0}) \\
\frac{dT}{dt} &= -k(T - AT_0 + AT - T_{a,0}) \\
\frac{dT}{dt} &= -k(T(1 + A) - AT_0 - T_{a,0}) \\
\frac{dT}{dt} &= -k(1 + A)T + k(AT_0 + T_{a,0}).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dT}{dt} + k(1 + A)T = k(AT_0 + T_{a,0}). \tag{3.8}$$

Logo, através da equação (3.8) temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} + k(1+A)T = k(AT_0 + T_{a,0}) \\ \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Para resolvermos o problema, precimos determinar o fator integrante dado por $\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$, onde $a(t) = k(1+A)$, temos

$$\mu(t) = e^{\int k(1+A)dt}$$
$$\mu(t) = e^{k(1+A)t}.$$

Então, multiplicando por μ todos os membros da equação (3.8), obtemos

$$e^{k(1+A)t} \cdot \frac{dT}{dt} + k(1+A)T \cdot e^{k(1+A)t} = k(AT_0 + T_{a,0}) \cdot e^{k(1+A)t},$$

logo, temos

$$(\mu T)\frac{d}{dt} = k(AT_0 + T_{a,0}) \cdot e^{k(1+A)t}$$
$$\mu T = \int k(AT_0 + T_{a,0}) \cdot e^{k(1+A)t} dt$$
$$\mu T = k(AT_0 + T_{a,0}) \int e^{k(1+A)t} dt,$$

substituindo $\mu = e^{k(1+A)t}$ e resolvendo a integral, temos

$$T = \frac{k(AT_0 + T_{a,0})}{e^{k(1+A)t}} \cdot \left(\frac{e^{k(1+A)t}}{k(1+A)} + c \right).$$

Para determinar c, utilizamos a condição inicial $T(0) = T_0$, logo

$$T_0 = k(AT_0 + T_{a,0}) \cdot \left(\frac{1}{k(1+A)} + c \right),$$

então isolando c na expressão acima, obtemos

$$c = \frac{(1+A)T_0 - (T_{a,0} + AT_0)}{k(T_{a,0} + AT_0)(1+A)}.$$

Substituindo c na solução do problema, temos a seguinte expressão

$$T(t) = \frac{T_{a,0} + AT_0}{1+A} + \frac{T_0 - T_{a,0}}{1+A} \cdot e^{-k(1+A)t}. \tag{3.9}$$

Podemos analisar na expressão (3.9), que a temperatura do corpo decresce monotonicamente quando $T_0 > T_{a,0}$ e cresce monotonicamente quando $T_0 < T_{a,0}$. Agora, chamaremos de $\bar{T}$ o primeiro termo do segundo membro da expressão (3.9):

$$\bar{T} = \frac{T_{a,0} + AT_0}{1+A},$$

substituindo A por $(mc)/(m_a c_a)$, obtemos a seguinte média ponderada:

$$\bar{T} = \frac{m_a c_a T_{a,0} + mcT_0}{m_a c_a + mc}.$$

Portanto, dizemos que a temperatura $\bar{T}$ é chamada de temperatura de equilíbrio, pois $T_a(t)$ tende a $\bar{T}$ quando t tende ao infinito.

A seguir apresentaremos três problemas envolvendo esse modelo.

Problema 1. Um Corpo a $100C$ é posto numa sala, onde a temperatura ambiente se mantém constantemente a $25C$. Após 5 minutos a temperatura do corpo caiu para $90C$. Decorrido quanto tempo estará o corpo a $50C$?

Resolução: Primeiramente, analisaremos os primeiros 5 minutos de resfriamento. Então, utilizando a equação (3.6) e sabendo que $T(5) = 90$, determinamos a constante k:

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

$$90 = (100 - 25)e^{-5k} + 25,$$

fazendo as operações, obtemos a seguinte expressão:

$$e^{5k} = \frac{15}{13}.$$

Aplicando o logaritmo natural, obtemos

$$k = \frac{1}{5} ln\left(\frac{15}{13}\right).$$

Analisando o segundo resfriamento, temos

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

$$50 = (90 - 25)e^{-\frac{1}{5}ln\left(\frac{15}{13}\right)t} + 25,$$

então vamos obter a seguinte expressão para determinar o tempo:

$$\left(\frac{15}{13}\right)^{\frac{t}{5}} = \frac{13}{5}.$$

Logo, aplicando o logaritmo

$$t = 5 \cdot \frac{ln\left(\frac{13}{5}\right)}{ln\left(\frac{15}{13}\right)} \cong 34.$$

Portanto, o tempo necessário para o corpo estar a $50C$ é aproximadamente 34 minutos após o primeiro resfriamento.

Problema 2. Um corpo a $100C$ é posto numa sala de temperatura desconhecida, mas que é mantida constante. Sabendo que após 10 minutos o corpo está a $90C$ e após 20 minutos a $82C$, calcule a temperatura na sala.

Solução: Analisando do instante de 0 a 10 minutos, temos que

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

$$90 = (100 - T_a)e^{-10k} + T_a,$$

isolando o termo e^{10k}, obtemos

$$e^{10k} = \frac{100 - T_a}{90 - T_a}.$$

Agora, analisamos os próximos 20 minutos onde o corpo fica a 82°C:

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

$$82 = (90 - T_a)e^{-20k} + T_a,$$

isolando o termo e^{20k}, obtemos

$$e^{20k} = \frac{90 - T_a}{82 - T_a}$$

$$(e^{10k})^2 = \frac{90 - T_a}{82 - T_a}$$

$$\left(\frac{100 - T_a}{90 - T_a}\right)^2 = \frac{90 - T_a}{82 - T_a}.$$

Então, encontramos a seguinte equação do 2° grau:

$$12{T_a}^2 - 2100T_a + 91000 = 0,$$

cuja as raízes são próximas de

$$T_a = \{79, 96\}.$$

Para o problema descrito, o corpo está perdendo calor para o ambiente, isto significa que $T > T_a$, então o resultado satisfatório para o problema é a temperatura da sala estar a aproximadamente a $79C$.

Problema 3. Qual deve ser a temperatura da água para que um corpo a $100C$ nela imerso venha a uma temperatura de $30C$ em meia hora? Sabe-se que o corpo é de ferro (calor específico $0,113 cal g^{-1}(C)^{-1}$ e tem massa de $500g$, enquanto que a água (calor específico 1) tem massa $4000g$. Assuma $k = 0,05$.

Resolução: Primeiramente determinaremos o valor da constante A:

$$A = \frac{mc}{m_a c_a} = \frac{0,113 \cdot 500}{1 \cdot 4000} = 0,015.$$

Utilizando a expressão (3.9), determinaremos a temperatura inicial da água

$$T(t) = \frac{T_{a,0} + AT_0}{1+A} + \frac{T_0 - T_{a,0}}{1+A} \cdot e^{-k(1+A)t}$$

$$30 = \frac{T_{a,0} + 0,015 \cdot 100}{1+0,015} + \frac{100 - T_{a,0}}{1+0,015} \cdot e^{-0,05(1+0,015)30},$$

fazendo as operações e isolando $T_{a,0}$, obtemos

$$T_{a,0} = \frac{13,17}{3,6} \cong 3,65.$$

Utilizando a Lei da Conservação da Quantidade de calor, temos

$$mc(T_0 - T) = m_a c_a (T_a - T_{a,0})$$

$$0,113 \cdot 500(100 - 30) = 1 \cdot 4000(T_a - 3,65),$$

isolando T_a, obtemos

$$T_a = \frac{0,113 \cdot 5 \cdot 7}{4} + 3,65 \cong 4,64.$$

Portanto, a temperatura da água é aproximadamente $4,64C$.

3.3 Diluição de Soluções

Um resevatório que contém V litros de água pura, recebe uma solução de água salgada que contém c kg de sal por litro de solução, a uma vazão a de litros/segundo de forma constante. O reservatório possui um mecânismo de agitação que torna a solução homogênea, então ao mesmo tempo que se injeta água salgada, se retira do reservatório a solução formada na mesma vazão dita anteriormente (a litros/segundo). Portanto, seja $x(t)$ a quantidade de sal em kg no reservatório em função do tempo t, a concentração de sal na solução é dada por $x/V\ kg/l$. Então podemos descrever esta situação através da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = ac - a\frac{x}{V}, \tag{3.10}$$

e considerando a condição $x(0) = 0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a\dfrac{x}{V} = ac \\ \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Para encontrarmos a solução do problema, precisamos determinar o fator integrante $\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$, onde $a(t) = \dfrac{a}{V}$, logo

$$\mu(t) = e^{\int \frac{a}{V} dt}$$

$$\mu(t) = e^{\frac{at}{V}}.$$

Então, multiplicando todos os membros da equação (3.10), por $\mu(t)$, obtemos

$$\frac{dx}{dt}e^{\frac{at}{V}} + a\frac{x}{V}e^{\frac{at}{V}} = ace^{\frac{at}{V}}.$$

Temos

$$(\mu x)\frac{d}{dt} = ace^{\frac{at}{V}}$$

$$\mu x = ac\int e^{\frac{at}{V}}dt$$

$$\mu x = cVe^{\frac{at}{V}} + k$$

$$x = cV + ke^{-\frac{at}{V}}.$$

Para determinar k, utlizamos a condição inicial $x(0) = 0$

$$x(0) = cV + ke^0$$

$$k = -cV.$$

Portanto a solução do problema será dada por:

$$x(t) = cV(1 - e^{-\frac{at}{v}}) \tag{3.11}$$

Análise da solução: Podemos notar que quando $t \to \infty$, a concentração de sal dada por $x(t)/V$ tende para c, assim como em resfriamento de um corpo em que a solução nos dava uma temperatura de equilíbrio, no caso de diluição das soluções podemos encontrar o equilíbrio entre a solução salina injetada e a solução no reservatório, pois em ambos os casos a matemática é a mesma.

Agora, vamos supor que a solução homogênea caia em um segundo reservatório que também contém V litros de água pura. E neste novo reservatório também há um mecânismo de agitação, com a mesma vazão de a litros/segundo. A quantidade de sal no segundo reservatório é dada por $y(t)$ e varia de acordo com a equação:

$$\frac{dy}{dt} = -a\frac{y}{V} + a\frac{x}{V},$$

substituindo $x(t)$ da expressão (3.11) na expressão acima e considerando a condição $y(0) = 0$, obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{a}{V}y = ac(1 - e^{-\frac{at}{V}}) \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Utilizando o fator integrante $\mu(t) = e^{a(t)}$, onde $a(t) = \dfrac{a}{V}$, temos

$$\mu(t) = e^{\int \frac{a}{V} dt}$$

$$\mu(t) = e^{\frac{at}{V}}.$$

Multiplicando $\mu(t)$ em todos os membros da solução do problema, obtemos

$$\frac{dy}{dt}e^{\frac{at}{V}} + \frac{a}{V}ye^{\frac{at}{V}} = ac(1 - e^{-\frac{at}{V}})e^{\frac{at}{V}},$$

temos

$$(\mu y)\frac{d}{dt} = ac(1 - e^{-\frac{at}{V}})e^{\frac{at}{V}}$$

$$\mu y = ac\int (1 - e^{-\frac{at}{V}})e^{\frac{at}{V}} dt$$

$$\mu y = ac\left[\frac{V}{a}(e^{\frac{at}{V}} - t) + k\right],$$

realizando as operações, podemos encontrar que a função $y(t)$ é dada por

$$y(t) = cV - cVte^{-\frac{at}{V}} + acke^{-\frac{at}{V}}.$$

Para determinarmos k, usamos a condição inicial $y(0) = 0$

$$0 = cV + acke^{0}$$

$$k = -\frac{V}{a}.$$

Substituindo na função, obtemos que a solução do problema, será dada por

$$y(t) = cV - cV(1 + t)e^{-\frac{at}{V}}.$$

Da mesma forma para a concentração $x(t)$, a concentração de $y(t)$ também cresce monotonicamente para c no segundo reservatório quando $t \to \infty$.

3.4 Por que uma corda enrolada em um poste sustenta um barco?

Imaginemos uma corda presa a uma superfície cilíndrica vertical com coeficiente de atrito estático μ. O contato da corda com a superficíe gera um setor circular AB com ângulo $\alpha < 180°$, geralmente $\alpha > 360°$ por conta de várias voltas que são dadas pela corda no poste, mas para melhor compreensão consideremos menor que 180°. Existe uma força T_0 aplicada em uma das extremidades e na outra extremidade uma força T_1, onde essas forças estão em equilíbrio como mostra a figura 2.

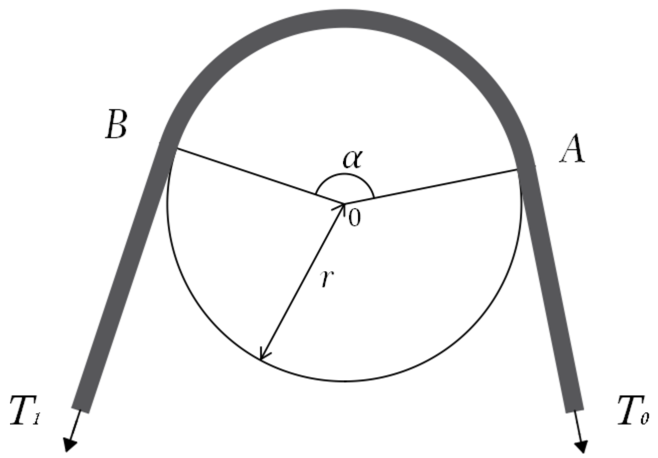

Figura 2: Corda amarrada a uma superficíe cilíndrica de forma vertical.

Agora consideremos a decomposição dessas forças como mostra a figura 3:

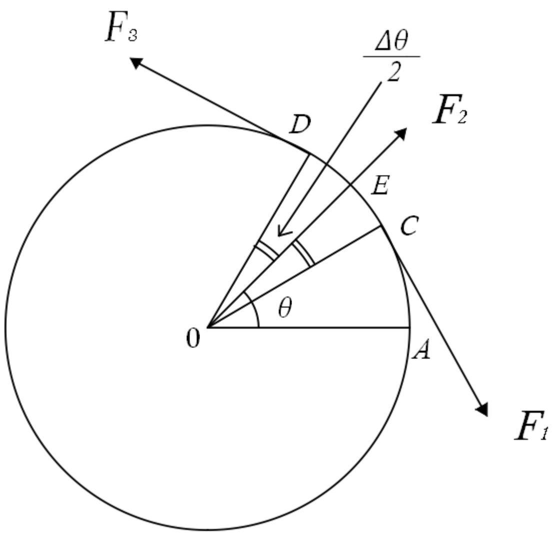

Figura 3: Decomposição das forças que atuam na corda.

Sabendo que $T(\theta)$ é a tensão no ponto da corda que corresponde ao ângulo θ a partir do segmento $0A$ no sentindo anti-horário, fazemos as seguintes análises:
F_1 é a tensão da corda no ponto C, o que implica

$$|F_1| = T\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right).$$

F_2 é a soma da tensão no ponto D com a força de atrito a partir de F_3, logo

$$|F_2| = T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) + \mu|F_3|.$$

F_3 será a reação total da superficíe ao longo do arco CD, dado por

$$|F_3| = N(\theta)r\Delta\theta,$$

onde $N(\theta)$ é a reação da superfície sobre a corda e $r\Delta\theta$ é comprimento do arco CD.

Analisando as forças F_2 e F_3, podemos notar que a força de atrito é dada por $\mu N(\theta)r\Delta\theta$, onde sabemos pela análise da força F_3 que $N(\theta)r\Delta\theta$ é a reação total da superfície ao longo do arco CD e que possui comprimento $r\Delta\theta$. Pelo fato do arco CD estar em equilíbrio, temos que $F_1 + F_2 + F_3 = 0$, logo projetando a equação sobre a direção F_3 como mostra a figura 4.

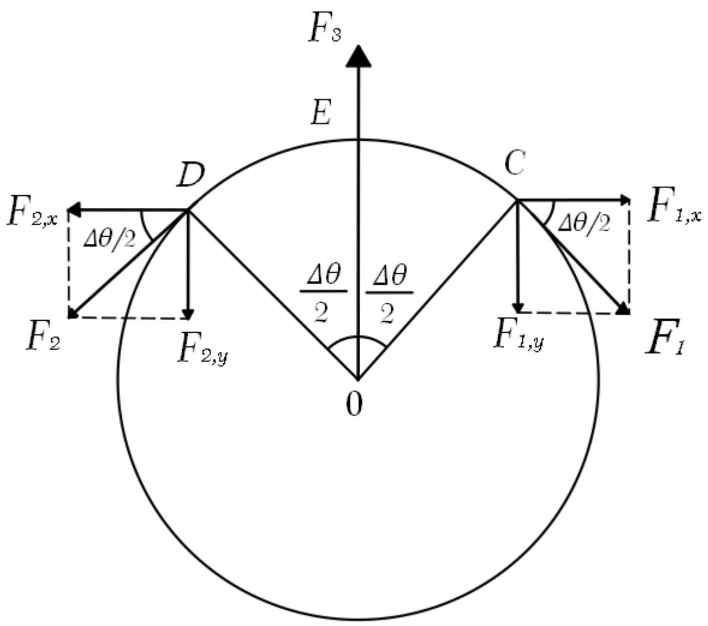

Figura 4: Diagrama de forças.

Analisando o diagrama de forças, temos as seguintes equações:

$$-F_{1,y} - F_{2,y} + F_3 = 0,$$

$F_{1,y}$ será dado por $T\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) sen\frac{\Delta\theta}{2}$,
$F_{2,y}$ será dado por $T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) sen\frac{\Delta\theta}{2} + \mu N(\theta) r \Delta\theta sen\frac{\Delta\theta}{2}$.

Portanto, temos a seguinte expressão:

$$N(\theta) r \Delta\theta - T\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) sen\frac{\Delta\theta}{2} - T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) sen\frac{\Delta\theta}{2} - \mu N(\theta) r \Delta\theta sen\frac{\Delta\theta}{2} = 0. \quad (3.12)$$

Na demonstração acima analisamos as forças na direção do eixo y, agora na direção do eixo x, temos

$$F_{1,x} - F_{2,x} = 0,$$

$F_{1,x}$ será dado por $T\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) cos\frac{\Delta\theta}{2}$,
$F_{2,x}$ será dado por $T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) cos\frac{\Delta\theta}{2} + \mu N(\theta) r \Delta\theta cos\frac{\Delta\theta}{2}$.

Portanto, obtemos a seguinte expressão:

$$T\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu N(\theta) r \Delta\theta cos\frac{\Delta\theta}{2} = 0. \quad (3.13)$$

Dividindo as equações (3.12) e (3.13) por $\Delta\theta$ e aplicando o limite quando $\Delta\theta \to 0$, obtemos duas equações dadas por:

$$rN(\theta) - T(\theta) = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{dT}{d\theta}(\theta) + \mu r N(\theta) = 0. \quad (3.15)$$

Isolando $N(\theta)$ em (3.14) e substituindo em (3.15), obtemos

$$\frac{dT}{d\theta} + \mu T = 0.$$

Considerando a condição $T(0) = T_0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dT}{d\theta} + \mu T = 0 \\ \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Resolvendo o problema, temos

$$\int \frac{1}{T} dT = \int -\mu d\theta$$

$$lnT = -\mu\theta + c$$

$$T = e^c \cdot e^{-\mu\theta},$$

considerando a condição inicial $T(0) = T_0$, obtemos

$$e^c = T_0.$$

Então a solução do problema é dada por

$$T(\theta) = T_0 e^{-\mu\theta}.$$

Análise da solução: Podemos concluir que a força para a corda sustentar um barco enrolada num poste gerando um setor de ângulo α é dada por $T_1 = T_0 e^{-\mu\alpha}$. Então podemos notar que quanto menor for o ângulo α, menor será T_1, ou seja, menor será a força necessária para aplicar na outra extremidade como mostra figura 2. Então, concluimos que quanto mais voltas a corda fizer no poste, a força T_1 será tão pequena que apenas o peso da corda jogada sobre o solo é suficiente para manter o equilíbrio.

A seguir, apresentaremos um exemplo.

Exemplo 1. Suponha que a corda dá duas voltas completas em torno do poste, cujo coeficiente de atrito é $0,4$. Supondo que a força T_0 é $1000N$, calcule T_1 para que haja equilíbrio.
Resolução: Utilizando a fórmula $T_1 = T_0 e^{-\mu\alpha}$, temos

$$T_1 = 1000e^{0,4\cdot 4\pi}$$

Logo, $T_1 = 6,56N$.

Anteriormente, vimos como uma corda sustenta um barco enrolada em uma superfície cilíndrica vertical, agora ver o caso em que superfície cilíndrica está posicionada de forma horizontal como mostra a figura 5. Assim como no exemplo anterior, consideremos que há um atrito entre a corda e o cilindro, e vamos considerar que o peso da corda é dado por ω. Um objeto de massa m é mantido suspenso por conta do atrito da corda e a um pequeno pedaço da corda.

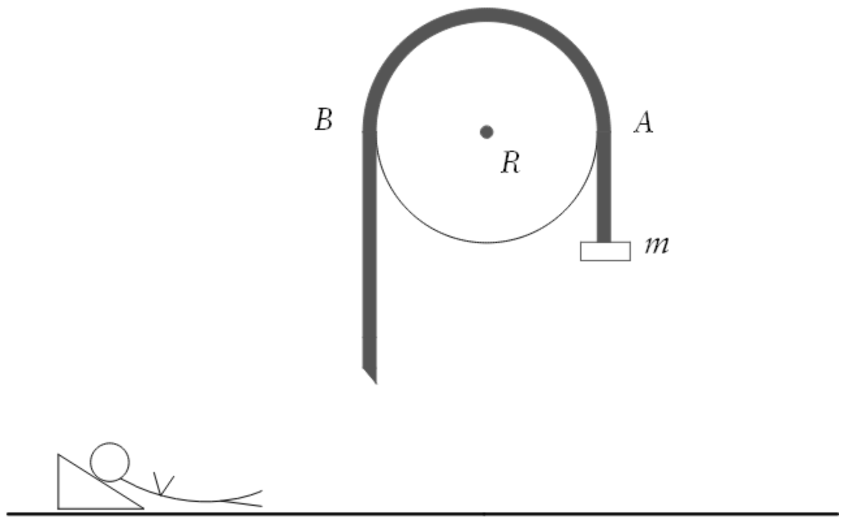

Figura 5: Corda amarrada a uma superficíe cilíndrica de forma horizontal.

As equações de equilíbrio são as mesmas vistas para o cilíndro vertical, porém, para o somatório das forças tanto em x quanto em y, aparecerá mais um termo dado pela tração da corda que obtemos da seguinte maneira:

$$sen(\theta) = -\frac{T_{y,1}}{T},$$

$$cos(\theta) = -\frac{T_{x,1}}{T}.$$

A tração T será dada pelo produto do peso da corda com o comprimento de arco, portanto $-\omega r(\Delta\theta)sen(\theta)$ aparecerá em (3.12) e $-\omega r(\Delta\theta)cos(\theta)$ aparecerá em (3.13).

Logo, reescrevemos as equações (3.14) e (3.15) como

$$rN(\theta) - T(\theta) - \omega rsen(\theta) = 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{dT}{d\theta} + \mu rN(\theta) - \omega rcos(\theta) = 0. \tag{3.17}$$

Isolando $N(\theta)$ em (3.16) e substituindo em (3.17), obtemos

$$\frac{dT}{d\theta} + \mu T = \omega r(cos(\theta) - \mu sen(\theta)). \tag{3.18}$$

Logo, considerando $T(0) = T_0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{d\theta} + \mu T = \omega r(cos(\theta) - \mu sen(\theta)) \\ \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Temos que o fator integrante é dado por $\delta = e^{\mu\theta}$, logo temos

$$\delta T = \int \omega r(cos(\theta) - \mu sen(\theta))e^{\mu\theta} d\theta,$$

resolvendo a integral e passando δ para o outro lado da igualdade obtemos a expressão:

$$T(\theta) = \frac{\omega r}{1+\mu^2}\left[2\mu cos(\theta) + (1-\mu^2)sen(\theta)\right] + Ce^{-\mu\theta}, \tag{3.19}$$

utilizando a condição inicial $T(0) = T_0$, obtemos o valor de C:

$$C = T_0 - \frac{2\mu\omega r}{1+\mu^2}.$$

Portanto, a solução do problema será dada por

$$T(\theta) = \frac{\omega r}{1+\mu^2}\left[2\mu cos(\theta) + (1-\mu^2)sen(\theta)\right] + \left[T_0 - \frac{2\mu\omega r}{1+\mu^2}\right]e^{-\mu\theta}. \tag{3.20}$$

A seguir, apresentaremos um problema.

Problema 1. Determine $T(\pi)$ sabendo que após o ponto A há um pedaço de corda de comprimento ℓ onde pende uma massa m.

<u>Solução</u>: Para a situação dada, a tração T_0 será contrária ao peso da corda e ao peso do objeto de massa m, e como o peso da corda é dado por unidade de comprimento, temos que

$$T_0 = \omega\ell + mg.$$

Logo, utilizando a expressão (3.20), temos

$$T(\pi) = \frac{\omega r}{1+\mu^2}\left[2\mu cos(\pi) + (1-\mu^2)sen(\pi)\right] + \left[\omega\ell + mg - \frac{2\mu\omega r}{1+\mu^2}\right]e^{-\mu\pi},$$

portanto temos como resposta a expressão:

$$T(\pi) = -\frac{2\mu\omega r}{1+\mu^2} + \left[\omega\ell + mg - \frac{2\mu\omega r}{1+\mu^2}\right]e^{-\mu\pi}.$$

3.5 A Tractriz

Considerando o plano (x, y), uma curva delimitada pela tangência entre um ponto de tangência e pelo eixo x de forma constante é chamada de tractriz como podemos ver na figura 6:

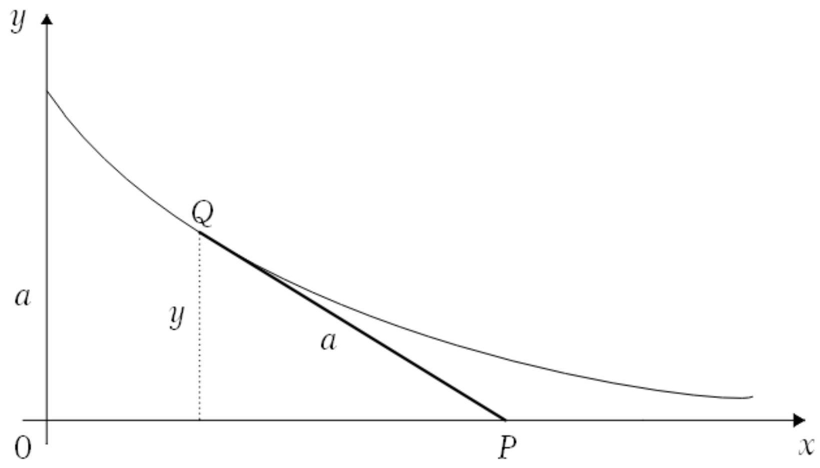

Figura 6: Curva tractriz.

Uma partícula Q de massa m, será arrastada ao longo de uma corda QP, essa corda é mantida de forma bem esticada e sua extremidade P está sobre o eixo x, então a tractriz é formada ao longo da curva descrita pela partícula Q. Considerando as coordenadas $Q(x, y)$, $P(x_a, 0)$ e $R(x, 0)$, temos a seguinte relação pelo teorema de Pitágoras:

$$QP^2 = QR^2 + RP^2$$

$$a^2 = y^2 + (x - x_a)^2,$$

isolando o termo $x - x_a$, obtemos

$$x - x_a = \pm\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Para o problema vamos considerar $-\sqrt{a^2 - y^2}$, pois o trajeto da partícula Q forma uma reta no sentido decrescente. Então, lembrando da equação da reta que passa por um ponto, temos

$$y - y(x_a) = y' \cdot (x - x_a),$$

sabendo que $y(x_a) = 0$, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \tag{3.21}$$

onde a é o comprimento do segmento QP e $x(y)$ será a função que descreve a curva feita pela partícula Q.

Sabendo que $y' = dx/dy$, podemos rescreever a expressão (3.21) da seguinte maneira:

$$-dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy,$$

logo devemos encontrar uma primitiva de $\sqrt{a^2 - y^2}/y$, sabendo que $y = a\ sen(\theta)$ temos

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \int \frac{a^2 - a^2 sen^2(\theta)}{a\ sen(\theta)} dy,$$

e utilizando a mudança de variável, obtemos

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = a \int \frac{cos^2(\theta)}{sen(\theta)} d\theta = a \int \frac{d\theta}{sen(\theta)} - a \int sen(\theta) d\theta.$$

Para resolvermos $a \int d\theta/sen(\theta)$, devemos lembrar

$$sen(\theta) = \frac{2tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

então

$$a \int \frac{d\theta}{sen(\theta)} = a \int \frac{1 + tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2tg\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta.$$

Aplicando a mudança de variável $u = tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$, onde $du = \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta$, obtemos

$$a \int \frac{2du}{2u} = a\ ln|u| = a\ ln\left|tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

Logo, a primitiva de $\sqrt{a^2 - y^2}/y$ será dada por

$$a\ ln\left|tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| + acos(\theta).$$

Agora, precisamos voltar para a variável y. Para isso, vamos utilizar a expressão abaixo

$$tg(\theta) = \frac{2tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

denotando $x = tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e fazendo as operações, obtemos a seguinte equação do 2° grau:

$$tg(\theta)x^2 + 2x - tg(\theta) = 0,$$

cuja as raízes serão dadas por:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4tg(\theta)tg(\theta}}{2tg(\theta)}.$$

Temos

$$x_1 = \frac{1 - cos(\theta)}{sen(\theta)} \ , \ x_2 = \frac{-1 - cos(\theta)}{sen(\theta)}.$$

Como θ é menor que 90, então $\theta/2$ terá que ser positivo, logo a raiz utilizada será a x_1. Então temos

$$sen(\theta) = \frac{y}{a} \ e \ cos(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a},$$

logo teremos de x_1:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}}{\frac{y}{a}}$$

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

Portanto, a solução da expressão

$$-dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}dy$$

será dada por

$$-x + c = a \ ln\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) + \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Considerando o problema de valor inicial com a condição $y(0) = a$, vamos obter que $c = 0$. Portanto a solução da equação diferencial (3.21) será dada por

$$x = -a \ ln\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2},$$

onde esta solução é a equação da tractriz $x(y)$, explicitada de maneira que y é a variável independente e x sendo a variável dependente.

O estudo da tractriz é mais aprofundado em Geometria Diferencial, onde a rotação da tractriz em torno do eixo x gera uma superficie chamada pseudoesfera, onde essa superficie possui curvatura gaussiana negativa constante em todos os pontos, exceto dos pontos no plano $x = 0$.

Existe uma aplicação mecânica para a tractriz chamada pivot de Schiele. Essa aplicação consiste em determinar a forma de uma ponta de eixo vertical, onde essa ponta gira sobre os rolamentos de modo que a reação vertical V dos rolamentos seja constante em todos os pontos na superfície de contacto. Temos também que o desgaste da ponta do eixo de cada altura seja uniforme. Podemos observar o gráfico desta aplicação na figura 7.

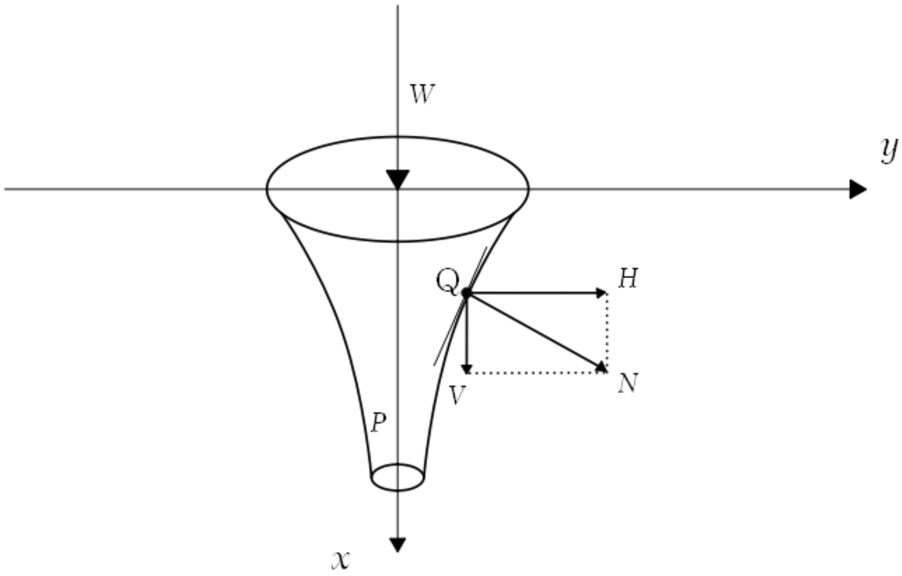

Figura 7: Aplicação da tractriz (Pivot de Schiele).

Podemos deduzir a equação da curva da secção longitudinal da ponta do eixo da seguinte maneira: N será a reação dos rolamentos sobre o eixo em cada ponto na superfície lateral, W será o peso do eixo, logo o somatório das projeções verticais de N será igual a W. Seja A a projeção horizontal na superfície lateral da ponta do eixo, como a projeção vertical de N é constante em todos os pontos, temos que reação vertical V será dada por

$$V = \frac{W}{A}. \tag{3.22}$$

Pela hipótese de desgaste uniforme temos que o desgaste é constante com y, o estudo da mecânica diz que o desgaste é proporcional ao trabalho da força de atrito μN em uma rotação completa do eixo. Logo

$$2\pi y\mu N = constante. \tag{3.23}$$

Agora, analisando a semelhança de triângulos temos a seguinte igualdade

$$\frac{N}{V} = \frac{\bar{PQ}}{y}.$$

Logo podemos concluir através das expressões (3.22) e (3.23), que o segmento $\bar{PQ}$ deve ser constante. Com isso, a curva da secção longitudinal da ponta do eixo será uma tractriz, e portanto, a ponta do eixo terá a forma de uma pseudoesfera.

3.6 A Catenária

A catenária foi um problema proposto por Leonardo da Vinci, problema esse que consiste na determinação da forma tomada por um cabo flexível (a tensão do cabo é sempre no sentido da tangente) e inextensível (pois não se estende), onde este cabo esta suspenso em dois pontos A e B, e o único peso para ser considerado é o seu próprio peso. Este problema foi resolvido incorretamente por Galileu, onde ele mostrou que a curva do cabo forma uma parábola. Em 1960, James Bernoulli fez várias resalvas sobre esse problema e um ano depois o seu irmão Johann Bernoulli junto com Leibniz e Huyghens resolveram o problema da catenária, o nome "catenária"foi dado por Leibniz. Em uma carta para um amigo, Johann explicou que Galileu estava errado em dizer que a catenária era uma parábola, a parábola realmente serve para a construção da catenária, mas são coisas distintas, ele explicou que a parábola é uma curva algébrica e a catenária é uma curva transcendente. Podemos entender melhor a resolução de Johann e seus amigos na figura 8.

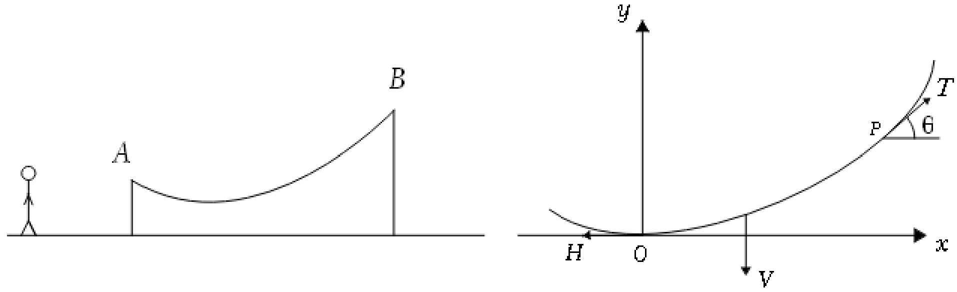

Figura 8: Representações da curva catenária.

Seja um sistema cartesiano com origem no ponto mais baixo da curva, onde o eixo y coincide com o eixo vertical. Considerando o equilíbrio do trecho OP do cabo, temos que $H + T + V = 0$. Onde H é a tensão do cabo no ponto mais baixo, T é a tensão do cabo no ponto $P = (x, y)$ e V é o peso do segmento OP. Se considerarmos ω como o peso por unidade de comprimento e s o comprimento do arco OP, temos que $V = \omega s$. Então as equações de equilíbrio projetadas sobre os dois eixos serão dadas por:

$$-H + Tcos(\theta) = 0, \tag{3.24}$$

$$-V + Tsen(\theta) = 0. \tag{3.25}$$

Isolando T em (3.24) e (3.25), obtemos

$$tg(\theta) = \frac{\omega}{H}s. \tag{3.26}$$

Como ω e H são constantes, podemos considerar ω/H igual a apenas uma constante c. Considerando $tg(\theta) = y'$, obtemos

$$y'' = c\frac{ds}{dx}.$$

Através de estudos da geometria diferencial, podemos escrever a função do comprimento de arco s com a seguinte equação:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Portanto, temos a seguinte equação diferencial

$$y'' = c\sqrt{1 + (y')^2}. \tag{3.27}$$

Para resolvermos (3.27), introduzimos a variável $p = y'$, logo obtemos a seguinte equação separável de primeira ordem

$$p' = c\sqrt{1 + p^2} \tag{3.28}$$

Sabendo que $p' = dp/dx$, obtemos de (3.28) a seguinte expressão:

$$cdx = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}dp,$$

considerando a mudança de variável $p = cotg(\theta)$, podemos calcular a primitiva de $\dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}dp = -\int \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2(\theta)}}csc^2(\theta)d\theta = -\int \frac{1}{\sqrt{csc^2(\theta)}}csc^2(\theta)d\theta,$$

logo obtemos

$$-\int csc(\theta)d\theta = -\int \frac{1}{sen(\theta)}d\theta = -ln\left|tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

Para voltarmos para a variável p, lembremos que no modelo da tractriz tinhamos a seguinte expressão

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-cos(\theta)}{sen(\theta)},$$

desmebrando essa expressão, temos

$$\frac{1-cos(\theta)}{sen(\theta)} = \frac{1}{sen(\theta)} - \frac{cos(\theta}{sen(\theta)} = csc(\theta) - cotg(\theta).$$

Sabemos que $p = cotg(\theta)$, para determinarmos $csc(\theta)$, usamos a seguinte identidade trigonométrica

$$1 + cotg^2(\theta) = csc^2(\theta),$$

logo vamos obter

$$1 + p^2 = csc^2(\theta)$$

$$csc(\theta) = \sqrt{1+p^2}.$$

Então, a primitiva procurada é dada por

$$-ln(\sqrt{1+p^2} - p).$$

Portanto, a solução da expressão

$$cdx = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}dp$$

será dada por

$$cx + k = -ln(\sqrt{1+p^2} - p).$$

Considerando o problema de valor inicial com a condição $p(0) = y'(0) = 0$, vamos obter que $k = 0$. Reescrevendo a solução acima para eliminarmos o logaritmo natural, temos

$$e^{-cx} = \sqrt{1+(y')^2} - y'. \tag{3.29}$$

Elevando toda a expressão (3.29) ao quadrado, obtemos

$$(y')^2 + 1 - 2y' \cdot \sqrt{(y')^2+1} = e^{-2cx},$$

de (3.29), sabemos

$$\sqrt{1+(y')^2} = e^{-cx} + y',$$

logo obtemos

$$(y')^2 + 1 = e^{-2cx} + 2y' \cdot (e^{-cx} + y').$$

Fazendo as operações, e isolando o termo y', obtemos

$$y' = \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2}.$$

Sabendo que $y' = dy/dx$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sabemos que $\dfrac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} = sinh(cx)$, então fazendo a integração

$$\int dy = \int senh(cx)dx$$

$$y = \frac{1}{c}cosh(cx) + k,$$

utilizando a condição inicial $y(0) = 0$, temos

$$0 = \frac{1}{c}cosh(0) + k$$

$$k = -\frac{1}{c}.$$

Portanto a solução da equação diferencial (3.27), será dada por

$$y(x) = \frac{1}{c}(cosh(cx) - 1). \tag{3.30}$$

Análise da solução: Podemos concluir que a curva catenária é um cabo flexivel e inextensível suspenso em dois pontos e que está sujeita a seu próprio peso, onde a sua curva forma o gráfico de um co-seno hiperbólico.

Analisando a solução em (3.30), podemos ver que o valor de H faz parte da solução e apesar de não ser constante, não é um dos dados do problema inicial. Escrevendo os termos dessa solução em outros parâmetros geométricos, podemos fazer as seguintes análises:

1 - a é o afastamento horizontal entre os dois pontos extremos do cabo, dado pelos pontos A e B.

2 - d é a flexa da catenária.

3 - ℓ é o comprimento do cabo.

Através da figura 9, podemos ver a descrição da curva catenária pelos parâmetros a, d e ℓ.

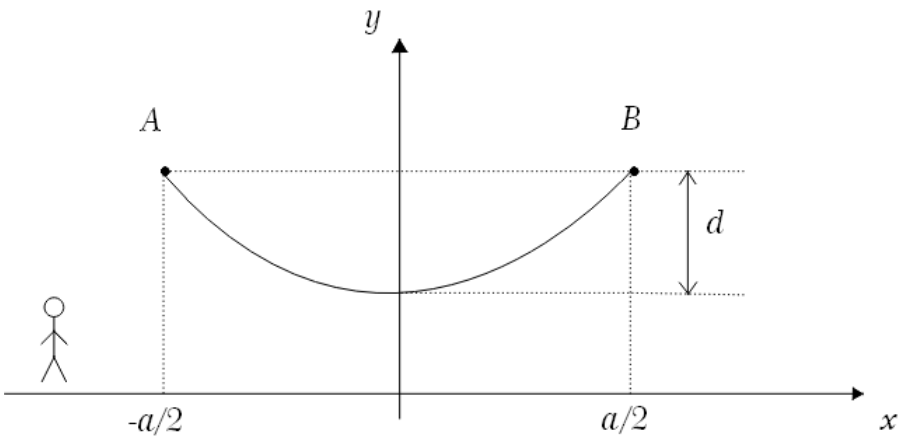

Figura 9: Curva catenária considerando os parâmetros a, d e ℓ.

3.7 Espelho Parabólico

Neste problema determinamos a forma de um refletor, onde todos os raios refletidos por ele e os raios provenientes de uma fonte luminosa pontual, saem paralelos a uma direção fixada R como mostra a figura 10. No estudo da geometria elementar, a curva que possui essa propriedade é o parabolóide de revolução, gerado pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo, onde coloca-se a fonte luminosa no foco da parábola geradora. Vamos demonstrar que o parabolóide é a única superfície que possui essa propriedade, através da unicidade e existência desse resultado dados pela geometria.

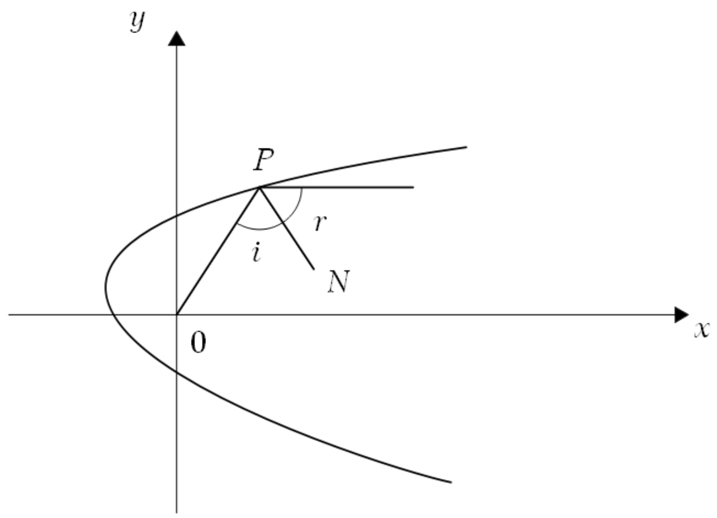

Figura 10: Curva representativa do espelho parabólico.

Supondo que a fonte luminosa esteja na origem e que a direção R seja o eixo x. Usaremos a notação $y(x)$ como a função que descreve a secção longitudinal do refletor. Na figura 10, podemos ver o raio luminoso saindo da origem e se refletindo no ponto P e temos que N é a reta normal à curva no ponto P. Pela lei de reflexão da Ótica Geométrica, temos que o ângulo de inicidência i é igual ao ângulo de reflexão r. Para encontrarmos a equação diferencial que descreve a curva do espelho parabólico consideremos a decomposição da fonte luminosa como mostra a figura 11:

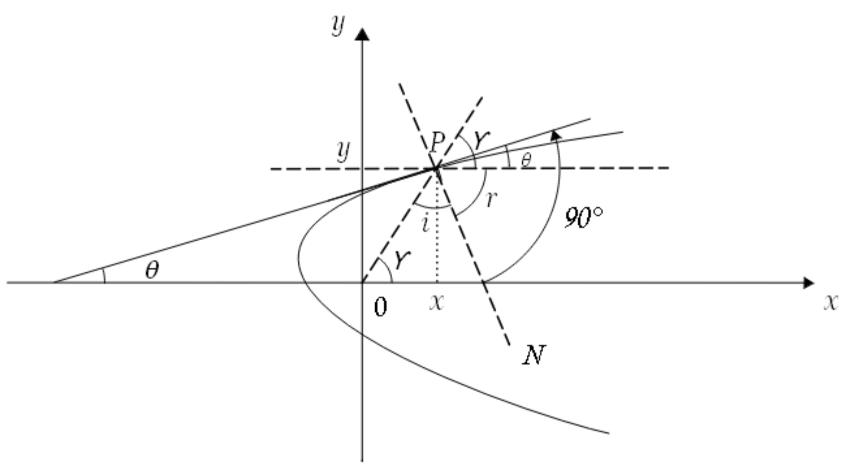

Figura 11: Decomposição da fonte luminosa.

Considerando dy/dx como o coeficiente ângular no ponto $P = (x, y)$, vamos ter

$$tg(\theta) = \frac{dy}{dx}.$$

Podemos observar na figura que o ângulo de reflexão é dado por $\theta = 90 - r$, logo

$$\frac{dy}{dx} = tg(90 - r),$$

temos também

$$tg(\gamma) = \frac{y}{x},$$

e pelo ângulo de incidência, temos que $\gamma = 180 - (r + i)$. Como $r = i$, temos

$$\frac{y}{x} = tg(180 - 2r),$$

onde

$$\frac{y}{x} = tg(2(90 - r))$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2tg\left(\frac{2(90-r)}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{2(90-r)}{2}\right)}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2tg(90 - r)}{1 - tg^2(90 - r)}.$$

Lembrando que $dy/dx = y' = tg(90 - r)$, vamos obter

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - (y')^2},$$

então temos a seguinte expressão

$$y(y')^2 + 2xy' - y = 0. \tag{3.31}$$

Simplificando toda a expressão (3.31) por y, obtemos

$$(y')^2 + \frac{2x}{y}y' - 1 = 0,$$

calculando as raízes da equação do 2° grau acima, temos

$$y' = \frac{\frac{-2x}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{2x}{y}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}.$$

Logo, o par de equações diferenciais correspondentes a expressão (3.31) é dado por

$$y' = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}. \tag{3.32}$$

Agora, retirando as exatas raízes da equação (3.31), temos

$$y' = \frac{-2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4 \cdot y \cdot (-y)}}{2y}$$

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y},$$

logo obtemos a seguinte equação diferencial

$$yy' + x = \pm\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.33}$$

Introduzindo a variável dependente $z = z(x)$, vamos ter que $z' = \pm 1$. Logo podemos rescreever (3.33) da seguinte maneira

$$zz' = \pm z,$$

sabendo que $z' = dz/dx$, obtemos da equação diferencial acima

$$\int dz = \pm \int dx$$

$$z = \pm x + c,$$

considerando $z(x)$, tal que $z^2 = x^2 + y^2$, temos

$$y^2 = z^2 - x^2$$

$$y^2 = (\pm x + c)^2 - x^2.$$

Portanto obtemos

$$y^2 = \pm 2xc + c^2.$$

Análise da solução: Este resultado corresponde a equação de duas parábolas coincidentes com o eixo x. Para $+2xc$, temos uma parábola com a concavidade para a direita cujo o vértice é $\left(-\frac{c}{2}, 0\right)$. Para $-2xc$, temos uma parábola com a concavidade para a esquerda cujo o vértice é $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$.

3.8 As Curvas de Perseguição

Vamos imaginar que um gato persegue um rato no plano (x, y). O rato estava comendo queijo na origem e o gato localizado no ponto $G = (a, 0)$, o gato faminto parte em direção ao rato e o rato por sua vez, foge do gato correndo ao longo do eixo y no sentido positivo com uma velocidade constante ν. O gato ao correr em direção ao rato com uma velocidade constante ω, forma uma curva, e o problema desta sessão consiste em determinar a curva descrita pelo gato nos parâmetros a, ν e ω. Considerando que após um tempo t, o gato estará em um ponto $P = (x, y)$ e como o deslocamento do rato se dá ao longo do eixo y, logo a sua segunda coordenada será dada por esse deslocamento, então ele estará no ponto $Q = (0, \nu t)$ como podemos ver na figura 12. Olhando agora para o deslocamento do gato, podemos calcular o seu deslocamento L através do comprimento de arco PG que vai de a até x, então temos

$$L = \int_x^a \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx,$$

sabendo que o deslocamento L é dado por $t\omega$, o tempo que o gato levou para chegar até o ponto P será dado por

$$t = \frac{1}{\omega} \int_x^a \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx. \tag{3.34}$$

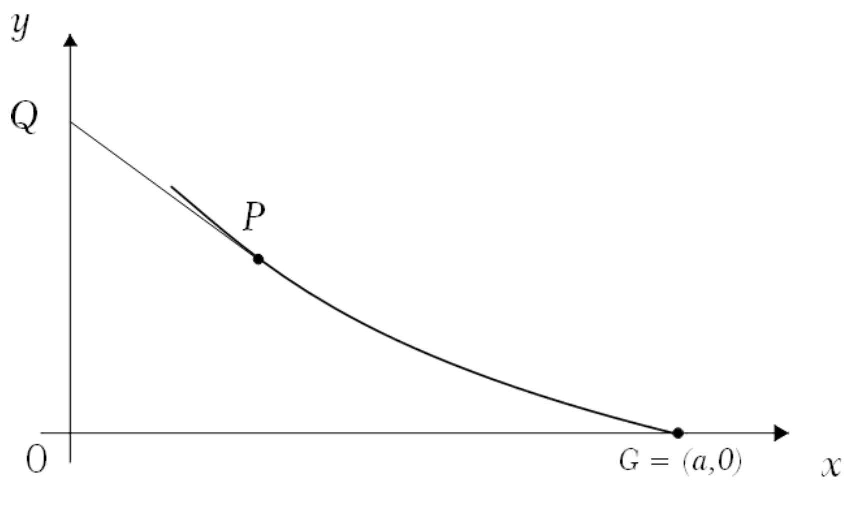

Figura 12: Curva de perseguição.

Agora, considerando o ponto P de coordenadas arbitrárias (x, y) temos pela geometria da figura:

$$y' = \frac{\bar{OQ} - y}{0 - x},$$

logo obtemos

$$\bar{OQ} = y - y'x,$$

e como $\bar{OQ} = \nu t$, temos

$$\nu t = y - y'x. \tag{3.35}$$

Logo, de (3.34) e (3.35), obtemos

$$\frac{y - y'x}{\nu} = \frac{1}{\omega} \int_x^a \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx$$

$$\frac{\nu}{\omega} \int_x^a \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx = y - y'x,$$

invertendo o intervalo de integração da equação acima e aplicando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$-\frac{\nu}{\omega} \int_a^x \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx = y - y'x,$$

logo vamos obter

$$\frac{\nu}{\omega} \int_a^x \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx = y'x - y,$$

derivando a expressão acima em relação a variável x, temos

$$\frac{\nu}{\omega} \sqrt{1 + |y'(x)|^2} = (y''x + y') - y',$$

então obtemos a seguinte expressão

$$c\sqrt{1 + |y'(x)|^2} = xy'', \tag{3.36}$$

onde $c = \nu/\omega$. Introduzindo a variável $p = y'$, temos a seguinte expressão

$$c\sqrt{1 + p^2} = xp'. \tag{3.37}$$

Sabendo que $p' = dp/dx$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{c}{x} dx = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} dp \\ \\ p(a) = 0. \end{cases}$$

Na sessão 2.5, sobre a catenária, vimos que a primitiva de $1/\sqrt{1 + p^2}$ é dada por

$$-ln(\sqrt{p^2 + 1} - p),$$

logo a solução geral do problema de valor inicial será dada por

$$c\ lnx + k = -ln(\sqrt{p^2+1} - 1).$$

Utilizando a condição inicial $p(a) = 0$, temos

$$c\ lna + k = -ln(1)$$

$$k = -c\ lna,$$

então vamos obter da solução de (3.37):

$$c\ lna - c\ lnx = ln(\sqrt{p^2+1} - 1)$$

$$\sqrt{p^2+1} - p = \left(\frac{a}{x}\right)^c. \tag{3.38}$$

Da expressão (3.38), vamos obter

$$\left(\left[\frac{a}{x}\right]^c + p\right)^2 = p^2 + 1,$$

fazendo as operações, temos

$$\left(\frac{a}{x}\right)^{2c} + 2\left(\frac{a}{x}\right)^c p = 1,$$

e isolando a variável p, obtemos

$$p = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^c - \left(\frac{a}{x}\right)^c\right].$$

Sabendo que $p = y' = dy/dx$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} dy = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^c - \left(\frac{a}{x}\right)^c\right] dx \\ \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Primeiramente, vamos resolver o problema acima para o caso $c \neq 1$. Para isso, usaremos o método da subtituição para resolver a integral do problema, onde

$$u = \frac{x}{a}; \quad dx = adu,$$

$$v = \frac{a}{x}; \quad dx = -\frac{a}{v^2}dv.$$

Logo, fazendo as substuições na equação do problema, obtemos

$$\int dy = \frac{1}{2}\left[\int \left(\frac{x}{a}\right)^c dx - \int \left(\frac{a}{x}\right)^c dx\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left(a\int u^c du + a\int v^{c-2}dv\right)$$

$$y = \frac{a}{2}\left[\frac{u^{c+1}}{c+1} + \frac{v^{c-1}}{c-1}\right] + k.$$

Voltando para a variável x, temos

$$y = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{c-1}\right] + k,$$

utilizando a condição inicial $y(a) = 0$, temos que

$$0 = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{a}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{a}\right)^{c-1}\right] + k,$$

aplicando as operações, obtemos o valor de k:

$$k = -\frac{ac}{c^2-1}.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial para $c \neq 1$, será dada por

$$y(x) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{c-1}\right] - \frac{ac}{c^2-1}. \tag{3.39}$$

Agora, para $c = 1$, temos outro problema de valor inicial:

$$\begin{cases} dy = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{x}{a}\right) - \left(\dfrac{a}{x}\right)\right] dx \\ \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Aplicando a integração, obtemos

$$\int dy = \frac{1}{2}\int \left[\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{a}{x}\right)\right] dx$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2a} - a\ lnx\right) + k,$$

usando a condição inicial $y(a) = 0$, obtemos

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2a} - a\ lna\right) + k,$$

logo obtemos que o valor de k será dado por

$$k = \frac{a\ lna}{2} - \frac{a}{4}.$$

Então, escrevendo a solução do problema

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2a} - a\ lnx\right) + \frac{a\ lna}{2} - \frac{a}{4}.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial para $c = 1$, será dada por

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2a} - a\ lnx\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\ lna\right). \tag{3.40}$$

Análise da solução: Se considerarmos $c \geq 1$, consequentemente a velocidade do rato seria maior que a do gato, ou seja, $\nu \geq \omega$. Porém, se analisarmos o caso para $c < 1$, vamos ter que a velocidade do gato será a maior, ou seja, $\nu < \omega$. Podemos determinar o instante e o ponto da coordenada sobre o eixo y onde o encontro entre os dois aconteceria.

Para determinar o instante, utilizaremos a equação (3.39), para $y(0) = \nu t$, onde νt representa o deslocamento do rato. Logo obtemos

$$y(0) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{0}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{0}{a}\right)^{1-c}\right] - \frac{a\left(\frac{\nu}{\omega}\right)}{\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 - 1}$$

$$\nu t = \frac{\frac{-a\nu}{\omega}}{\frac{\nu^2 - \omega^2}{\omega^2}},$$

organizando a expressão acima, vamos obter que o instante que o gato encontra o rato é dado por

$$t = \frac{a\omega}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Já o ponto de encontro entre os dois, também pode ser encontrado pela expressão (3.39), agora considerando a condição $y(0) = E$, onde E será o ponto de encontro. Logo temos

$$y(0) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{0}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{0}{a}\right)^{1-c}\right] - \frac{a\left(\frac{\nu}{\omega}\right)}{\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 - 1}$$

$$E = -\frac{a\left(\frac{\nu}{\omega}\right)}{\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 - 1},$$

organizando a expressao acima, obtemos que o ponto da ordenada sobre o eixo y onde o gato encontra o rato, é dado por

$$E = \frac{a\nu\omega}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Referências

[1] BOYCE, William; DIPRIMA, Richard; MEADE, Douglas. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

[2] BRONSON, Richard. **Moderna Introdução Às Equações Diferenciais**. 1. ed. São Paulo: Editora McGraw-Hill, 1977.

[3] FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[4] KREIDER, Donald; KULLER, Robert; OSTBERG, Donald. **Equações Diferenciais**. Ed. da Universidade de São Paulo, 1972.

[5] KREYSZIG, Erwin. **Matemática Superior**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Livros Técnicos e Científicos, 1969.

[6] PINTO, Alex Oliveira. **Equações Diferenciais Ordinárias: Um estudo dos modelos matemáticos que descrevem a Catenária e a Tractriz**. 2021. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Centro de Estudos Superiores de Tefé, Universidade do Estado do Amazonas, Tefé/Am, 2021.