UMA ANÁLISE DA DINÂMICA DA APROXIMAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS SÍSMICAS POR MEIO DO MÉTODO *LOWRANK*

Lucas de Castro Costa (aluno) & Maria Amélia Novais Schleicher (Orientadora)

Resumo

Neste projeto de doutorado, o aluno deverá analizar a extrapolação do campo de onda em tempo pelo método *lowrank*. Este método compreende a aproximação do operador da propagação de onda no domínio misto de espaço e número de onda. A decomposição *lowrank* é aplicada à matriz propagadora, selecionando um conjunto de menor dimensão de localizações espaciais representativas e um conjunto de menor dimensão de números de onda representativas. Devido a sua flexibilidade, o método pode ser implementado para diferentes formulações da equação de onda, sejam essas acústicas ou elásticas, por exemplo. Basta dispor de uma expressão fechada para a velocidade de fase das ondas a serem propagadas. Numa recente dissertação de mestrado, observamos que, apesar do método ter sido desenvolvido utilizando apenas argumentos cinemáticos, a sua dinâmica é surpeendentemente boa em meios acústicos simples. O objetivo do presente projeto está em investigar se esta observação se sustenta em meios mais gerais.

1 Introdução

Este é um projeto de doutorado a ser desenvolvido no curso de Engenharia do Petróleo, linha Geofísica de Reservatórios, da FEM – UNICAMP, pelo aluno Lucas de Castro Costa sob a orientação da Profa. Dra. Amélia Novais.

A Geofísica dedica-se à determinação do interior da terra por meios físicos aplicados na superfície dela. Entre os vários métodos físicos empregados pare este objetivo, a sísmica tem um papel fundamental. Métodos sísmicos trabalham usando os princípios da ecografia. Eles baseiam-se na propagação de energia em forma de ondas elásticas ou acústicas na Terra.

O objetivo principal tanto da sismologia de terremotos quanto da sísmica de exploração é a construção da melhor imagem possível das camadas geológicas na subsuperfície a partir do registros das ondas sísmicas na superfície. Para este objetivo, é imprescindível um bom entendimento da propagação de ondas em meios acústicos e elásticos, bem como a capacidade de simulação da mesma, conhecida como modelamento sísmico. Neste projeto de doutorado, pretendemos investigar o comportamento dinâmico de um método recente para realizar o modelamento sísmico, o método *lorank*. Este conhecimento será de grande importância no emprego do método *lowrank* na inversão da forma completa da onda.

1.1 Revisão da Área de Conhecimento

O modelamento sísmico consiste na representação do campo de onda em um determinado meio. Como a solução analítica da equação da onda só é possível em meios demasiadamente simples, necessita-se de aproximações numéricas para encontrar soluções da equação da onda em meios reais. Assim é possível conhecer o comportamento do campo de onda em meios de interesse, que variam por suas características físicas. Esses meios podem ser isotrópicos quando as propriedades do meio são as mesmas em qualquer direção ou anisotrópicos quando as propriedades do meio variam com a direção.

Um método convencional é a extrapolação do campo de onda em tempo, aproximando as derivadas parciais da equação da onda por um esquema de diferenças finitas (FD, *Finite Differences*) (Etgen, 1986), que transforma a EDP num modelo discreto aproximando as derivadas parciais. Essa aproximações são obtidas facilmente da expansão de Taylor. As aproximações de diferenças finitas de ordem superior providenciam uma maior fidelidade na propagação do campo de onda permitindo computar, de forma acurada, ondas em modelos complexos e de grande porte (Etgen, 1986), sendo uma das suas principais desvantagens sua dispersão numérica, cuja redução aumenta o custo computacional.

Outra maneira frequentemente empregada é o uso dos métodos espectrais que usam a transformada de Fourier como ferramenta na equação da onda para manipulá-la nos domínios das variáveis associadas ao espectro, isto é, a frequência temporal e a frequência espacial ou número de onda, associadas às coordenadas do tempo e espaço, respectivamente. Os métodos espectrais proporcionam uma melhor precisão (Tal-Ezer et al., 1987). As suas principais desvantagens são as suas condições de contorno periódicas.

Um método relativamente recente é o modelamento da propagação de onda pelo método *lowrank*. Ele compreende a aproximação do operador da propagação de onda no domínio misto de espaço e número de onda. A decomposição *lowrank* é aplicada à matriz propagadora, selecionando um conjunto de menor dimensão de localizações espaciais representativas e um conjunto de menor dimensão de números de onda representativas (Fomel et al., 2013). O algoritmo de multiescala direcional implementado é usado como uma solução rápida para problemas de espalhamento acústico de alta frequência realizando um procedimento aleatório para gerar uma representação *lowrank* (Engquist e Ying, 2009). Devido a sua flexibilidade, o método pode ser implementado para diferentes formulações da equação de onda, sejam essas acústicas ou elásticas, por exemplo. Basta dispor de uma expressão fechada para a velocidade de fase das ondas a serem propagadas.

Numa recente dissertação de mestrado desenvolvida com a mesma orientadora (Landeta, 2022), foi feita uma avaliação do modelamento da propagação de ondas sísmicas em um meio acústico pelo método *lowrank* incluindo uma comparação com o método de diferenças finitas para fins de avaliar o desempenho quanto à precisão, eficiência e custo computacional. Observamos que, apesar de desenvolvida utilizando apenas argumentos cinemáticos, a dinâmica do método é surpeendentemente boa em meios acústicos simples (ver também Schleicher et al., 2022). Sendo assim, o objetivo deste projeto é investigar se esta observação se sustenta em meios mais gerais.

1.2 Desenvolvimento

1.2.1 Embasamento teórico

O método *lowrank* se baseia na solução aproximada da equação da onda acústica por meio de uma candidata justificada cinematicamente, de modo a gerar uma matriz propagadora no domínio misto, a qual implementa-se com o método *lowrank* para representá-la fazendo uso de sua esparsidade. O desenvolvimento apresentado a seguir segue o trabalho de Fomel et al. (2013).

A equação da onda acústica 3D com densidade constante é dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P(\mathbf{x}, t) = v^2 \Delta P(\mathbf{x}, t), \tag{1}$$

onde v denota a velocidade de propagação, e P é o campo de pressão acústica.

Para um meio com velocidade dependente das variáveis espaciais, procuramos uma solução usando a candidata

$$P(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{k}, t_0) e^{i\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)} d\mathbf{k}, \tag{2}$$

onde $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)$ representa uma função fase generalizada definida no domínio misto de espaço e número de onda. A substituição da candidata (2) na equação da onda (1), considerando $t = t_0 + \Delta t$, fornece uma aproximação de primeira ordem para a fase, dada por

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t) \approx \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} + v(\mathbf{x}) \|\mathbf{k}\| \Delta t. \tag{3}$$

A última equação é a expressão encontrada por Etgen e Brandsberg-Dahl (2009). A equação (3) explica a generalidade da aproximação (2) porque ela continua aplicável quando se possui uma expressão fechada para a velocidade de fase no espaço misto $(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, i.e., $v = v(\mathbf{x}, \mathbf{k})$. Logo, a equação (2) fica

$$P(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{k}, t_0) e^{i[\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} + v(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \|\mathbf{k}\| \Delta t]} d\mathbf{k}. \tag{4}$$

Uma expressão numericamente mais estável para o campo de onda $P(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t)$ é obtida ao somar a correspondente expressão para $t = t_0 - \Delta t$ e subtrair $2P(\mathbf{x}, t_0)$, resultando em

$$P(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t) \approx 2P(\mathbf{x}, t_0) - P(\mathbf{x}, t_0 - \Delta t) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{k}, t_0) e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} [\cos(v(\mathbf{x}) \|\mathbf{k}\| \Delta t) - 1] d\mathbf{k}. \tag{5}$$

1.2.2 Matriz de extrapolação de onda e método *lowrank*

Ao discretizar a equação (5), nós nos deparamos com a matriz de extrapolação de onda, definida por

$$W_{jl} = W(\mathbf{x}_j, \mathbf{k}_l) \approx 2[\cos(v(\mathbf{x}_j, \mathbf{k}_l) \|\mathbf{k}_l\| \Delta t) - 1]. \tag{6}$$

A matriz W com dimensão $N_x \times N_k$, onde N_x e N_k são as dimensões dos vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{k}$, respectivamente, depende das variáveis espaciais e espectrais. Deste modo W é uma matriz de grande porte, porém esparsa. O objetivo do método *lowrank* é tirar proveito da esparsidade e decompor a matriz utilizando matrizes de dimensões menores. Ou seja, procura-se uma fatoração aproximada de (6), com Δt fixo, da forma

$$W(\mathbf{x},\mathbf{k}) \approx \sum_{m=1}^{M_k} \sum_{n=1}^{M_x} U(\mathbf{x},\mathbf{k}_m) M_{mn} V(\mathbf{x}_n,\mathbf{k}), \tag{7}$$

onde M_x e M_k são dimensões significativamente menores do que N_x e N_k.

O custo computacional do uso dessa última representação na equação (5) é equivalente a aplicar M_x transformadas rápidas de Fourier, enquanto o custo de multiplicação matricial é reduzido de $N_x \times N_k$ para duas vezes $M_x \times M_k$. O problema da equação (7) consiste em encontrar as matrizes U e V de dimensões $N_x \times M_k$ e $M_x \times N_k$, respectivamente. A procura exaustiva por estas matrizes seria proibitivamente caro. Engquist e Ying (2009) desenvolveram um método que realiza a decomposição da matriz de extrapolação de forma aproximada com um custo computacional reduzido. Este método foi aprimorado e ajustado ao modelamento sísmico por Fomel et al. (2013).

1.3 Objetivos

O modelamento exposto está focado na fase da propagação, ou seja, tem como objetivo principal descrever a cinemática da propagação da onda em meios heterogêneos. Porém, sendo uma generalização aproximada da solução exata da equação da onda para um meio com velocidade constante, espera-se um comportamento dinâmico aproximado. Essa expectativa se confirmou nos testes numéricos de Schleicher et al. (2022) para a propagação de ondas bidimensionais em meios acústicos com um refletor horizontal plano. Neste projeto, pretendemos investigar se esta observação se sustenta em situações mais gerais. Iniciaremos os estudos com modelos mais realistas, depois consideraremos a equação acústica para meios com densidade variável e, em seguida, procuraremos generalizar para outras equações da onda.

2 Cronograma

Semestre	**Atividade**
1S/2024	Cursar disciplinas obrigatórias e eletivas. Participar do *Seminário do Grupo de Geofísica Computacional* / curso *Tópicos em Matemática Aplicada a Geofísica*. Levantamento bibliográfico. Início dos estudos bibliográficos.
2S/2024	Cursar disciplinas para efeito de cumprimento de créditos. Familiarizar-se com a literatura sobre o método *lowrank*. Início dos trabalhos teóricos. Participar do *Seminário do Grupo de Geofísica Computacional.*
1S/2025	Cursar disciplinas complementares. Trabalhos teóricos. Início dos trabalhos implementacionais. Início da redação do relatório de qualificação. Participar do *Seminário do Grupo de Geofísica Computacional.*

2S/2025 Trabalhos teóricos e implementacionais. Testes numéricos. Redação do relatório de qualificação. Prestar o Exame de Qualificação, o qual consiste na apresentação da proposta de tese perante banca qualificada. Participar do *Seminário do Grupo de Geofísica Computacional.*

1S/2026 Propor correções dinâmicas ao método *lowrank*, se cabível. Implementação e testes das mesmas. Início da redação da tese. Incorporação das sugestões da banca de qualificação. Participar do *Seminário do Grupo de Geofísica Computacional.*

2S/2026 Trabalhos implementacionais e estudos numéricos intensivos. Testes de qualidade das correções propostas. Redação da tese. Participar do *Seminário do Grupo de Geofísica Computacional.*

1S/2027 Trabalhos implementacionais e estudos numéricos intensivos. Testes de qualidade das condições de imagem propostas. Redação da tese. Participar do *Seminário do Grupo de Geofísica Computacional.*

2S/2027 Discutir os resultados numéricos. Testes numéricos adicionais. Redação da versão final da tese. Participar do *Seminário do Grupo de Geofísica Computacional.*

Fevereiro de 2028: Defesa da tese.

3 Referências e Bibliografia

Engquist, B. e L. Ying, 2009, A fast directional algorithm for high frequency acoustic scattering in two dimensions: Communications in Mathematical Sciences, **7**, 327–345.

Etgen, J. T., 1986, High-order finite-difference reverse time migration with the 2-way non-reflecting wave equation.

Etgen, J. T. e S. Brandsberg-Dahl, 2009, The pseudo-analytical method: Application of pseudo-Laplacians to acoustic and acoustic anisotropic wave propagation: SEG Technical Program Expanded Abstracts, **28**, 2552–2556.

Fomel, S., L. Ying e X. Song, 2013, Seismic wave extrapolation using lowrank symbol approximation: Geophysical Prospecting, **61**, 526–536.

Landeta, A. V., 2022, Avaliação do modelamento da propagação de ondas sísmicas pelo método lowrank: Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp).

Schleicher, J., J. C. Costa, A. Novais e A. V. Landeta B., 2022, Amplitude behavior in low-rank acoustic modeling: Brazilian Journal of Geophysics, **40**.

Tal-Ezer, H., D. Kosloff e Z. Koren, 1987, An Accurate Scheme for Seismic Forward Modelling: Geophysical Prospecting, **35**, 479–490.