UM BREVE COMENTÁRIO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Rafael Sergio Sampaio Emidio

Trabalho de Conclusão de Curso
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Orientador: Augusto César dos Reis Costa

11 de Dezembro de 2022

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um breve estudo sobre equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Estudamos alguns métodos analíticos de determinação de soluções e importantes aplicações em determinadas áreas do conhecimento humano; como na biologia, química, física e matemática, envolvendo essas classes de equações e métodos.

Palavras-chave: Equações diferenciais de primeira ordem, solução, aplicações.

Introdução

Newton e Leibniz, os criadores do cálculo, foram uns dos primeiros matemáticos que deram início aos estudos das equações diferenciais. Para resolver problemas físicos, era necessário equacionar o fenômeno estudado e através do cálculo de primitivas era possível encontrar a solução do problema. Um dos métodos mais usados era a quadratura, este método consiste em reduzir o problema para obter a solução pelo cálculo de primitivas. Devido ao baixo número de funções que poderiam ser resolvidas por funções elementares, surgiu no século XIX, o uso das séries de funções. Porém, algum tempo depois o método das séries de funções foi sendo usado de uma maneira descuidada, para tentar sanar isso surgiram os teoremas de existência e unicidade, que marcaram o inicío da fase moderna com Poincaré, no final do século XIX. Na evolução dos estudos das equações diferenciais de primeira ordem foram surgindo métodos analíticos para a resolução dessas equações que se originaram de fenômenos físicos, químicos, biológicos, matemáticos, e entre outros.

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas. A forma geral de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é designada por

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

A forma geral das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é a seguinte

$$\dot{x} = p(t)x + q(t), \tag{2.1}$$

onde $\dot{x} = dx/dt$. Precisamos encontrar uma função diferenciável $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ para satisfazer a equação (2.1). Para a solução desta equação, vamos considerar o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = p(t)x + q(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Vamos primeiro determinar a solução geral de (2.1), para depois verificarmos que (2.2) possui apenas uma solução. Consideremos como uma solução de (2.1) uma equação de crescimento exponencial dada por

$$\dot{x} = kx(t). \tag{2.3}$$

Considerando uma função $x(t) = e^{kt}$ como uma solução de (2.3), os seus múltiplos ce^{kt} também serão soluções de (2.3) e considerando a condição $x(t_0) = x_0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

Através da condição inicial $x(t_0) = x_0$, o valor da constante c será dado por

$$c = \frac{x_0}{e^{kt_0}}$$

Portanto, obtemos como solução do problema:

$$x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Podemos escrever a equação (2.1) como o seguinte problema de valor inicial com $q(t) \equiv 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = p(t)x \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

A equação (2.4) é um problema inicial de valor homogêneo, cuja a solução é dada por

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}. \tag{2.5}$$

Com o objetivo de simplificar as expressões, reescrevemos a equação (2.5) da seguinte maneira:

$$T(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}. \tag{2.6}$$

Temos as seguintes propriedades para a função T:

$$\begin{aligned} &T(t_0, t_0) = 1, \\ &T(t, t_0) = T(t_0, t)^{-1}, \\ &T(t, t_0)T(t_0, s) = T(t, s). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Voltemos agora, para o problema de valor inicial (2.2), para determinarmos sua solução utilizaremos um fator integrante $\mu(t)$, e multiplicaremos em ambos os lados da equação:

$$\mu(t)(\dot{x} - p(t)x) = \mu(t)q(t).$$

Determinaremos $\mu(t)$ igualando o primeiro membro da expressão anterior a derivada do produto de x por μ, logo

$$\mu(\dot{x} - p(t)x) = \frac{d}{dt}(\mu x) = \dot{\mu}x + \mu\dot{x}.$$

Então, podemos igualar as seguintes expressões

$$-\mu p(t)x = \dot{\mu}x.$$

Logo, integrando em ambos os lados, obtemos

$$ln\mu = -\int p(s)\, ds.$$

Logo, $\mu(t)$ será dado por:

$$\mu(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} = e^{\int_{t}^{t_0} p(s)\, ds} = T(t_0, t).$$

Então temos de $\dfrac{d}{dt}(\mu x) = \mu(t)q(t)$:

$$\frac{d}{dt}(T(t_0, t)x(t)) = T(t_0, t)q(t),$$

integrando em ambos os lados de t_0 a t:

$$T(t_0, t)x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} T(t_0, s)q(s)\, ds.$$

Portanto, podemos obter a solução do problema de valor inicial (2.2) e utilizando as propriedades (2.7), multiplicamos a última expressão por $T(t, t_0)$ e vamos obter:

$$x(t) = T(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t, s)q(s)\, ds, \tag{2.8}$$

a equação (2.8) é chamada de fórmula de variação de constantes, fórmula esta que pode ser escrita como solução do problema de valor inicial (2.2).

Em particular, se o coeficiente $p(t)$ for igual a uma constante k, temos

$$T(t,t_0) = e^{k(t-t_0)}.$$

Então temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = kx + q(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

e pela fórmula de variação de constantes, dada na equação (2.8), obtemos

$$x(t) = e^{k(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{k(t-s)}q(s)ds.$$

Se existe um ponto a associado a uma função $x_1(t)$ e um ponto b associado a uma função $x_2(t)$, podemos verificar que essas funções são soluções do problema de valor inicial (2.1) da seguinte maneira:

$$x_1(t) = ae^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds},$$

$$x_2(t) = be^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}.$$

Logo,

$$x_1(t) - x_2(t) = (a - b)e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}$$

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds},$$

então podemos afirmar que $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução do problema de valor inicial (2.4), onde $x_0 = a - b$. Logo, todas as soluções de (2.1) são obtidas somando uma solução particular com a solução geral da equação homogênea associada em (2.4). Logo, podemos dizer que o termo da fórmula da variação de constantes

$$\int_{t_0}^{t} e^{k(t-s)} q(s) ds$$

é uma solução particular de (2.1).

Equações Separáveis

Uma equação diferencial da forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{2.9}$$

é chamada de equação separável, onde $g(y) \neq 0$ e $y' = dy/dx$. Consideramos f e g funções contínuas em intervalos abertos reais, tal que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $g : (c, d) \to \mathbb{R}$. Logo escrevemos (2.9) da forma

$$g(y)y' = f(x). \tag{2.10}$$

Considerando uma função $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 uma solução para (2.9) e G uma primitiva de g, onde $G' = g$, teremos a partir de (2.10):

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

então obtemos

$$G(y(x)) = F(x) + C, \tag{2.11}$$

onde F é uma primitiva de f. Dado um ponto $x_0 \epsilon (\alpha, \beta)$, então temos uma condição inicial dada por $y(x_0) = y_0$, onde $y_0 \epsilon \ y(\alpha, \beta)$. Logo a constante C será dada determinada por

$$C = G(y_0) - F(x_0),$$

substituindo C na expressão (2.11), vamos obter

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0).$$

Como G é uma primitiva de g e F é uma primitiva de f, podemos escrever a última expressão como

$$\int_{y_0}^{y(x)} g(y)\, dy = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx. \tag{2.12}$$

O que mostramos acima foi que dada uma solução de (2.9), esta solução irá satisfazer a expressão (2.11). Podemos concluir que dada uma relação $G(y) = F(x) + C$ e um ponto (x_0, y_0) que satisfaz essa relação, onde $G'(y_0) = g(y_0) \neq 0$, dado também um intervalo aberto (α, β) contendo x_0 e uma função de classe C^1, através do Teorema das funções implícitas podemos garantir que esse intervalo existe e que satifaz a relação (2.11), logo trata-se de uma solução de (2.1).

Exemplo 1: Resolva a equação $y' = \dfrac{x}{y}$.

Resolução: Como $yy' = x$, teremos como solução geral $y^2 = x^2 + C$. Se considerarmos um problema de valor inicial com a condição $y(3) = 2$, obtemos $C = -5$, logo a solução é dada por

$$y(x) = +\sqrt{x^2 - 5}, \; x > \sqrt{5}.$$

Teorema: Seja Ω um intervalo aberto no plano (x, y), neste intervalo está definido a função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Supondo que a derivada parcial em relação à y, dada por $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ também seja contínua, temos para cada ponto (x_0, y_0) em Ω um intervalo aberto I que contém x_0, uma única função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$, onde $(x, \phi(x)) \in \Omega$ para todo $x \in I$. Logo, ϕ será a solução do problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Dinâmica de uma População e Noções de Estabilidade

- O Modelo Malthusiano

Este modelo basicamente assume que a taxa de crescimento de uma população é dado por uma constante λ, então a equação que rege o crescimento dessa população é dado

$$\dot{p} = \lambda p. \tag{3.1}$$

Considerando p_0 como população inicial, temos como solução geral do problema de valor inicial homogêneo (3.1):

$$p(t) = p_0 e^{\lambda(t-t_0)},$$

e com a condição inicial $p(t_0) = p_0$, a solução para (3.1) é dada por

$$p(t) = p(t_0)e^{\lambda(t-t_0)},$$

onde esta solução apresenta um crescimento exponencial se $\lambda > 0$, porém não é possível que este crescimento se mantenha para sempre. Um modelo desta natureza pode descrever o crescimento populacional de micro-organismos que se reproduzem por mitose.

- O Modelo de Verhulst - A Logística

Neste modelo proposto por Verhulst em 1834, constante λ é a taxa de crescimento da população, dado pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade, ou seja: $\lambda = \lambda_n - \lambda_m$. Verhulst propôs um modelo em que a taxa de crescimento decresce linearmente com a população, modelo este dado por: $\lambda = a - bp$, onde a e b são constantes positivas. Este modelo é dado por

$$\dot{p} = (a - bp)p. \tag{3.2}$$

Podemos observar que ainda não é um modelo ideal, pois não leva em conta que a taxa de produção de novos seres da espécie humana, depende da idade dos pais.

Considerando $p(t_0) = p_0$ como condição inicial, a solução para (3.2) será dada por:

$$p(t) = \frac{ap_0}{p_0 b + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}}. \qquad (3.3)$$

Análise da solução: A solução do modelo proposto por Verhulst, forma o gráfico da chamada curva logística. Onde este gráfico forma uma curva em forma de S entre as retas $p = 0$ e $p = a/b$ (soluções de (3.2)). Em $p = a/2b$ existe um ponto de inflexão pois $a/2b$ é uma solução para $\ddot{p}$. Esta curva é formada para o caso $0 < p_0 < a/b$, para $p_0 > a/b$ a curva descresce exponencialmente para a/b.

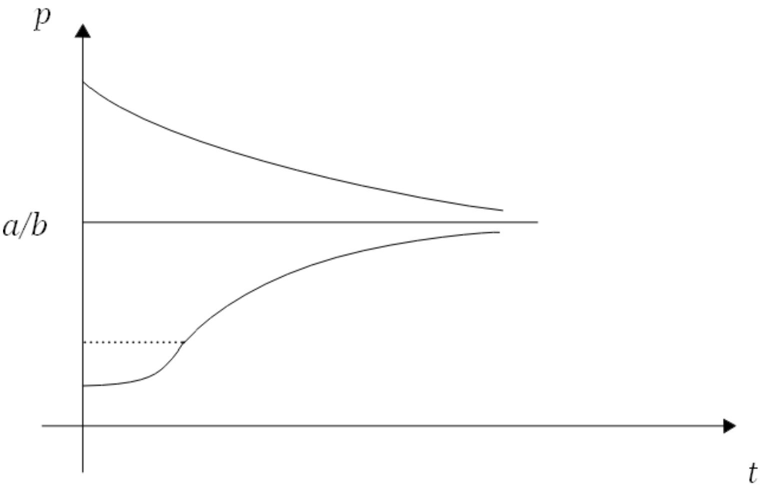


Figura: Curva logística

Resfriamento de um Corpo

Podemos analisar o fenômeno da variação de temperatura em um corpo por perda de calor para o meio ambiente através do seguinte modelo:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \tag{3.4}$$

onde dT/dt é o fluxo de calor, T é a temperatura do corpo dependente do tempo t, T_a é a temperatura do meio ambiente, k é uma constante positiva determinada pelas propriedades físicas do corpo. Na situação dada, o calor flui da fonte quente para fonte fria, então se $T > T_a$, a temperatura T descresce e o corpo se resfria, portanto isto justifica o sinal negativo em (3.4). Agora, se $T < T_a$, a temperatura T cresce e o corpo irá se aquecer. O modelo apresentado acima é chamada Lei de Resfriamento de Newton, Newton elaborou este modelo estudando uma bola de metal aquecida.

Considerando a condição inicial de temperatura $T(0) = T_0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \\ \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Através do métodos da sessão 2.1, a solução do problema é dada por

$$T - T_a = e^{-kt+C},$$

usando a condição inicial $T(0) = T_0$,

$$e^C = T_0 - T_a.$$

Logo, obtemos a solução do problema:

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a. \tag{3.5}$$

Análise da solução: Na expressão (3.4), podemos ver que $T(t)$ descrece monotonicamente com t quando $T > T_a$, $T(t)$ irá crescer monotonicamente quando $T < T_a$ e quando for $T(t)$ for constante teremos $T = T_a$. Na expressão (3.5) temos a mesma conclusão, pois $T(t)$ tende monotonicamente para T_a quando $t \to +\infty$. Portanto, a temperatura T_a é chamada Temperatura de Equilíbrio.

Diluição de Soluções

Um reservatório com capacidade de V litros de água pura, recebe uma solução de água salgada que contém c kg de sal por litro de solução, a uma vazão de a litros/segundo de forma constante. Portanto, seja $x(t)$ a quantidade de sal em kg no reservatório em função do tempo t, a concentração de sal na solução é dada por $x/V \; kg/l$. Então podemos descrever esta situação através da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = ac - a\frac{x}{V}, \tag{3.6}$$

e considerando a condição $x(0) = 0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a\dfrac{x}{V} = ac \\ \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Para encontrarmos a solução do problema, precisamos determinar o fator integrante $\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$, onde $a(t) = \dfrac{a}{V}$, logo

$$\mu(t) = e^{\frac{at}{V}}.$$

Então, multiplicando todos os membros da equação (3.6), por $\mu(t)$, obtemos

$$(\mu x)\frac{d}{dt} = ace^{\frac{at}{V}}$$

$$x = cV + ke^{-\frac{at}{V}}.$$

Para determinar k, utilizamos a condição inicial $x(0) = 0$, logo

$$k = -cV.$$

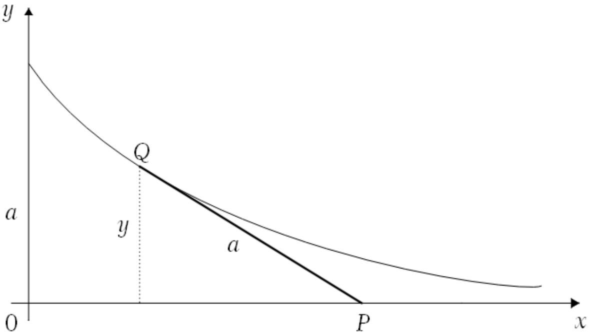
Portanto a solução do problema será dada por:

$$x(t) = cV(1 - e^{-\frac{at}{v}}) \tag{3.7}$$

Análise da solução: Podemos notar que quando $t \to \infty$, a concentração de sal dada por $x(t)/V$ tende para c, assim como em resfriamento de um corpo em que a solução nos dava uma temperatura de equilíbrio, no caso de diluição das soluções podemos encontrar o equilíbrio entre a solução salina injetada e a solução no reservatório, pois em ambos os casos a matemática é a mesma.

A Tractriz

Uma partícula Q de massa m, será arrastada ao longo de uma corda QP, essa corda é mantida de forma bem esticada e sua extremidade P está sobre o eixo x, então a tractriz é formada ao longo da curva descrita pela partícula Q como é mostrado na figura 6.



Considerando as coordenadas $Q(x, y)$, $P(x_a, 0)$ e $R(x, 0)$, temos a seguinte relação pelo teorema de Pitágoras:

$$QP^2 = QR^2 + RP^2$$

$$a^2 = y^2 + (x - x_a)^2,$$

isolando o termo $x - x_a$, obtemos

$$x - x_a = \pm\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Para o problema vamos considerar $-\sqrt{a^2 - y^2}$. Então, lembrando da equação da reta que passa por um ponto, temos

$$y - y(x_a) = y' \cdot (x - x_a),$$

sabendo que $y(x_a) = 0$, teremos a seguinte equação diferencial:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \qquad (3.8)$$

Sabendo que $y' = dx/dy$, podemos rescreever a expressão (3.8) da seguinte maneira:

$$-dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy,$$

uma primitiva de $\sqrt{a^2 - y^2}/y$, é dada por

$$-x + c = a\ ln\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) + \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Considerando o problema de valor inicial com a condição $y(0) = a$, vamos obter que $c = 0$. Portanto a solução da equação diferencial (3.8) será dada por

$$x = -a\ ln\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2},$$

onde esta solução é a equação da tractriz $x(y)$, explicitada de maneira que y é a variável independente e x sendo a variável dependente.

As Curvas de Perseguição

Vamos imaginar que um gato persegue um rato no plano (x, y). O rato estava comendo queijo na origem e o gato localizado no ponto $G = (a, 0)$, o gato faminto parte em direção ao rato e o rato por sua vez, foge do gato correndo ao longo do eixo y no sentido positivo com uma velocidade constante ν. O gato ao correr em direção ao rato com uma velocidade constante ω, forma uma curva como podemos ver na figura 12, e o problema desta sessão consiste em determinar a curva descrita pelo gato nos parâmetros a, ν e ω.

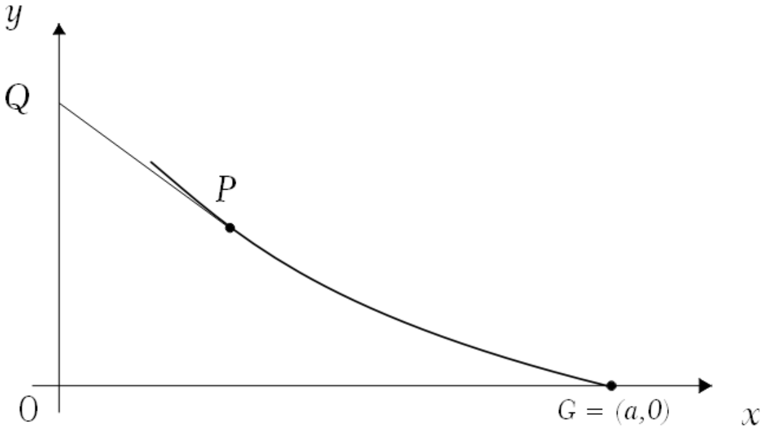


Figura: Curva de perseguição.

Considerando que após um tempo t, o gato estará em um ponto $P = (x, y)$ e como o deslocamento do rato se dá ao longo do eixo y, logo a sua segunda coordenada será dada por esse deslocamento, então ele estará no ponto $Q = (0, \nu t)$ c. Olhando agora para o deslocamento do gato, podemos calcular o seu deslocamento L através do comprimento de arco PG que vai de a até x, então teremos

$$L = \int_x^a \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx,$$

sabendo que o deslocamento L é dado por $t\omega$, o tempo que o gato levou para chegar até o ponto P será dado por

$$t = \frac{1}{\omega} \int_x^a \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx. \tag{3.9}$$

Agora, considerando o ponto P de coordenadas arbitrárias (x, y) temos pela geometria da figura:

$$y' = \frac{\bar{OQ} - y}{0 - x},$$

logo

$$\bar{OQ} = y - y'x,$$

e como $\bar{OQ} = \nu t$,

$$\nu t = y - y'x. \tag{3.10}$$

Logo, de (3.9) e (3.10), temos a expressão

$$\frac{\nu}{\omega}\int_x^a \sqrt{1+|y'(x)|^2}dx = y - y'x,$$

derivando a expressão acima em relação a variável x, obtemos

$$c\sqrt{1+|y'(x)|^2} = xy'', \tag{3.11}$$

onde $c = \nu/\omega$. Introduzindo a variável $p = y'$, teremos a seguinte expressão

$$c\sqrt{1+p^2} = xp'. \tag{3.12}$$

Sabendo que $p' = dp/dx$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{x}dx = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}dp \\ \\ p(a) = 0. \end{cases}$$

Uma primitiva de $1/\sqrt{1+p^2}$ é dada por

$$-ln(\sqrt{p^2+1} - p),$$

logo a solução geral do problema de valor inicial será dada por

$$c \cdot lnx + k = -ln(\sqrt{p^2+1} - 1).$$

Utilizando a condição inicial $p(a) = 0$, vamos obter

$$k = -c \cdot lna.$$

Então vamos obter da solução de (3.12):

$$c \cdot lna - c \cdot lnx = ln(\sqrt{p^2+1} - 1)$$

$$\sqrt{p^2+1} - p = \left(\frac{a}{x}\right)^c. \tag{3.13}$$

Da expressão (3.13), isolando a variável p, obtemos

$$p = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^c - \left(\frac{a}{x}\right)^c\right].$$

Sabendo que $p = y' = dy/dx$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^c - \left(\frac{a}{x}\right)^c\right] \\ \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Para $c \neq 1$, vamos obter como solução geral do problema:

$$y = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{c-1}\right] + k.$$

Utilizando a condição inicial $y(a) = 0$,

$$k = -\frac{ac}{c^2 - 1}.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial será dada por

$$y(x) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{c-1}\right] - \frac{ac}{c^2-1}. \quad (3.14)$$

Análise da solução: Se considerarmos $c \geq 1$, consequentemente a velocidade do rato seria maior que a do gato, ou seja, $\nu \geq \omega$. Porém, se analisarmos o caso para $c < 1$, vamos ter que a velocidade do gato será a maior, ou seja, $\nu < \omega$. Podemos determinar o instante e o ponto da coordenada sobre o eixo y onde o encontro entre os dois aconteceria.

Para determinar o instante, utilizaremos a equação (3.14), para $y(0) = \nu t$, onde νt representa o deslocamento do rato. Logo obtemos que o instante que o gato encontra o rato é dado por

$$t = \frac{a\omega}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Já o ponto de encontro entre os dois, também pode ser encontrado pela expressão (3.14), agora considerando a condição $y(0) = E$, onde E será o ponto de encontro. Logo temos que o ponto da ordenada sobre o eixo y onde o gato encontra o rato, é dado por

$$E = \frac{a\nu\omega}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Referências bibliográficas

[1] BOYCE, William; DIPRIMA, Richard; MEADE, Douglas. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

[2] FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[3] PINTO, Alex Oliveira. **Equações Diferenciais Ordinárias: Um estudo dos modelos matemáticos que descrevem a Catenária e a Tractriz**. 2021. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Centro de Estudos Superiores de Tefé, Universidade do Estado do Amazonas, Tefé/Am, 2021.

Referências bibliográficas

[4] KREYSZIG, Erwin. **Matemática Superior**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Livros Técnicos e Científicos, 1969.

[5] KREIDER, Donald; KULLER, Robert; OSTBERG, Donald. **Equações Diferenciais**. Ed. da Universidade de São Paulo, 1972.

[6] BRONSON, Richard. **Moderna Introdução Às Equações Diferenciais**. 1. ed. São Paulo: Editora McGraw-Hill, 1977.

Obrigado pela atenção!