Ondas elásticas em um meio homogêneo, isotrópico e ilimitado

Professor: Jessé Costa
Universidade Federal do Pará

14 de julho de 2021

Sumário

Solução para a função de Green em um meio homogêneo, isotrópico e ilimitado

Solução de Stokes (1849): tomando $X_0(t)$ como uma força pontual atuando na direção x_j na origem e usando os co-senos directores,

$$
\begin{aligned}
u_i(\boldsymbol{x}, t) &= X_0(t) * G_{ij}(\boldsymbol{x}, t; \xi, 0) \\
&= \frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\,\frac{1}{r^3}\int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0\,(t-\tau)\,d\tau \\
&+ \frac{1}{4\pi\alpha^2\rho}\gamma_i\gamma_j\,\frac{1}{r}X_0\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) \\
&- \frac{1}{4\pi\beta^2\rho}(\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\,\frac{1}{r}X_0\left(t-\frac{r}{\beta}\right).
\end{aligned}
$$

Near-field de modo P e S   Far-field de onda P   Far-field de onda S

Propriedades do *far-field* para onda P

Deslocamento $\boldsymbol{u}^P$ é dado por

$$u_i^P(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma_i\gamma_j\frac{1}{r}X_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right)$$

1. Atenua com r^{-1};
2. Forma da onda;
3. Propaga com a velocidade $\alpha(\alpha^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho)$;
4. Forma da onda de deslocamento;
5. Direção de deslocamento $\boldsymbol{u}^P$ em $\boldsymbol{x}$ é paralela a direção $\boldsymbol{\gamma}$ da fonte.

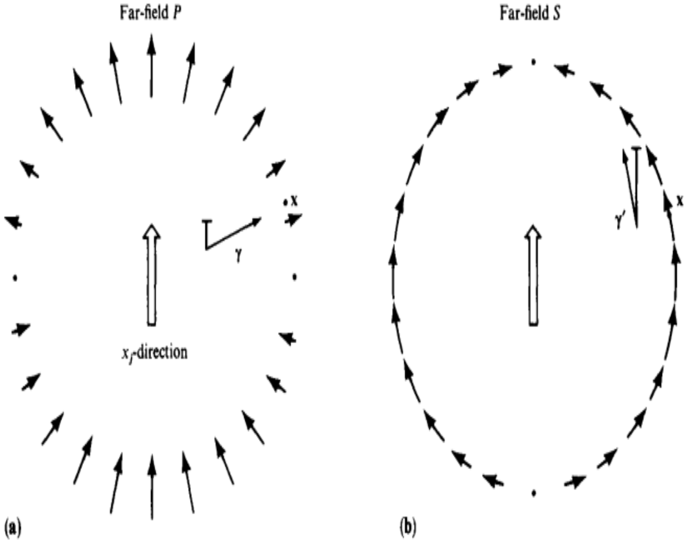
Propriedades do *far-field* para onda S

Deslocamento $\boldsymbol{u}^S$ é dado por

$$u_i^S(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j)\frac{1}{r}X_0\left(t - \frac{r}{\beta}\right)$$

1. Atenua com r^{-1};
2. Propaga com a velocidade β;
3. Forma da onda de deslocamento;
4. Direção de deslocamento $\boldsymbol{u}^S$ em $\boldsymbol{x}$ é perpendicular a direção γ da fonte.

Padrões de radiação de $\boldsymbol{u}^P$ e $\boldsymbol{u}^S$



Sumário

Propriedades dos termos do Near-Field

- Definimos o campo de deslocamento próximo u^N por:

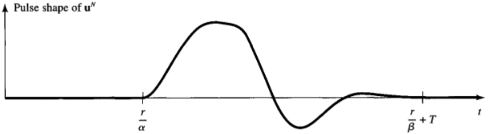
$$u_i^N(x,t) = \frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau)\, d\tau \ . \tag{1}$$

- Polarizaçao da onda

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i xj}\frac{1}{r} = \frac{2}{r^3}\gamma_i\gamma_j - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{x_i}\left(\frac{x_j - \xi_j}{r}\right) = \frac{(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})}{r^3} \tag{2}$$

- Representação da combinação de onda-P e onda- S

$$(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) = 2\gamma_i\gamma_j + (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \tag{3}$$



- Definimos o campo de deslocamento próximo u^N por:

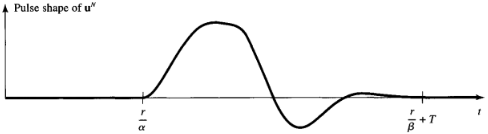
$$u_i^N(x,t) = \frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau)\,d\tau\ . \tag{1}$$

- Polarizaçao da onda

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i xj}\frac{1}{r} = \frac{2}{r^3}\gamma_i\gamma_j - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{x_i}\left(\frac{x_j - \xi_j}{r}\right) = \frac{(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})}{r^3} \tag{2}$$

- Representação da combinação de onda-P e onda- S

$$(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) = 2\gamma_i\gamma_j + (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \tag{3}$$



Propriedades dos termos do Near-Field

- Definimos o campo de deslocamento próximo u^N por:

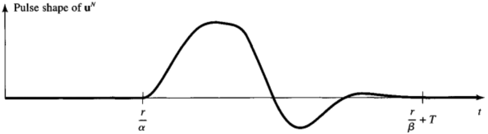
$$u_i^N(x,t) = \frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau)\,d\tau \ . \tag{1}$$

- Polarizaçao da onda

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i xj}\frac{1}{r} = \frac{2}{r^3}\gamma_i\gamma_j - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{x_i}\left(\frac{x_j - \xi_j}{r}\right) = \frac{(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})}{r^3} \tag{2}$$

- Representação da combinação de onda-P e onda- S

$$(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) = 2\gamma_i\gamma_j + (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \tag{3}$$



Propriedades dos termos do Near-Field

- Definimos o campo de deslocamento próximo u^N por:

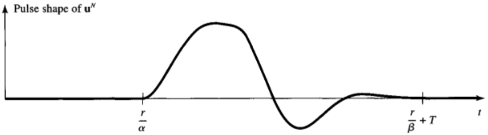
$$u_i^N(x,t) = \frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau)\,d\tau \ . \tag{1}$$

- Polarizaçao da onda

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i xj}\frac{1}{r} = \frac{2}{r^3}\gamma_i\gamma_j - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{x_i}\left(\frac{x_j-\xi_j}{r}\right) = \frac{(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})}{r^3} \tag{2}$$

- Representação da combinação de onda-P e onda- S

$$(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) = 2\gamma_i\gamma_j + (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \tag{3}$$



Propriedades dos termos do Near-Field

- Definimos o campo de deslocamento próximo u^N por:

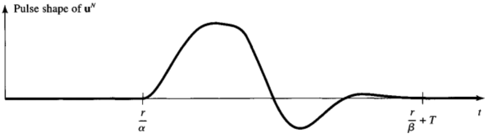
$$u_i^N(x,t) = \frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau)\,d\tau \;. \qquad (1)$$

- Polarizaçao da onda

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i xj}\frac{1}{r} = \frac{2}{r^3}\gamma_i\gamma_j - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{x_i}\left(\frac{x_j - \xi_j}{r}\right) = \frac{(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})}{r^3} \qquad (2)$$

- Representação da combinação de onda-P e onda- S

$$(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) = 2\gamma_i\gamma_j + (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \qquad (3)$$



- componente longitudinal

$$u^N.\gamma = \gamma_j \frac{1}{2\pi\rho r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau)\, d\tau \ . \tag{4}$$

- componente transversal

$$u^N.\gamma' = -\gamma_j' \frac{1}{4\pi\rho r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau)\, d\tau \ . \tag{5}$$

Near-Field (Campos próximos)

- Para o deslocamento Near-Field, não é possível identificar as propriedades simples como nos campos distantes;
- Podemos identificar o tempo de transito e a duração do deslocamento em um receptor fixo;
- A duração do movimento do campo de deslocamento Near Field é igual a diferença entre os tempos de transitos das ondas P e S mais o termo T.

Sumário

Caso para o tensor de momento

$$
\begin{aligned}
M_{pq} * G_{np,q} \quad = \quad & \left(\frac{15\gamma_n\gamma_p\gamma_q - 3\gamma_n\delta_{pq} - 3\gamma_p\delta_{nq} - 3\gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho}\right)\frac{1}{r^4}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau M_{pq}(t-\tau)d\tau \\
& + \left(\frac{6\gamma_n\gamma_p\gamma_q - \gamma_n\delta_{pq} - \gamma_p\delta_{nq} - \gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho\alpha^2}\right)\frac{1}{r^2}M_{pq}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) \\
& - \left(\frac{6\gamma_n\gamma_p\gamma_q - \gamma_n\delta_{pq} - \gamma_p\delta_{nq} - \gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho\beta^2}\right)\frac{1}{r^2}M_{pq}\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \\
& + \frac{\gamma_n\gamma_p\gamma_q}{4\pi\alpha^3}\frac{1}{r}\dot{M}_{pq}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) - \left(\frac{\gamma_n\gamma_p - \delta_{np}}{4\pi\beta^3}\right)\gamma_q\frac{1}{r}\dot{M}_{pq}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)
\end{aligned}
$$

Near-field de modo P e S   Far-field de onda P   Far-field de onda S

Termos intermediários

Para fonte isotrópica

$$M_{pq} = x(t)\delta_{pq}$$

$$\begin{aligned}
M_{pq} * G_{np,q} \quad = \quad & \left(\frac{15\gamma_n\gamma_p\gamma_p - 15\gamma_n}{4\pi\rho}\right)\frac{1}{r^4}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau x(t-\tau)d\tau \\
& + \left(\frac{6\gamma_n\gamma_p\gamma_p - 5\gamma_n}{4\pi\rho\alpha^2}\right)\frac{1}{r^2}x\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) \\
& - \left(\frac{6\gamma_n\gamma_p\gamma_p - 5\gamma_n}{4\pi\rho\beta^2}\right)\frac{1}{r^2}x\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \\
& + \frac{\gamma_n\gamma_p\gamma_p}{4\pi\alpha^3}\frac{1}{r}\dot{x}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) - \frac{\gamma_n\gamma_p\gamma_p - \gamma_n}{4\pi\beta^3}\frac{1}{r}\dot{x}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

Para *Double Couple*

$$M_{pq} = x(t)(M_{13} + M_{31})$$

$$\begin{aligned}
M_{pq} * G_{np,q} \quad = \quad & [(15\gamma_n\gamma_1\gamma_3 - 3\gamma_1\delta_{n3} - 3\gamma_3\delta_{n1}) + (15\gamma_n\gamma_3\gamma_1 - 3\gamma_3\delta_{n1} - 3\gamma_1\delta_{n3})] \\
& \frac{1}{r^4}\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau x(t-\tau)d\tau \\
& -[(6\gamma_n\gamma_1\gamma_3 - \gamma_1\delta_{n3} - \gamma_3\delta_{n1}) + (6\gamma_n\gamma_3\gamma_1 - \gamma_3\delta_{n1} - \gamma_1\delta_{n3})] \\
& \frac{1}{4\pi\rho}\frac{1}{\alpha^2 r^2} x\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \\
& +[(6\gamma_n\gamma_1\gamma_3 - \gamma_1\delta_{n3} - \gamma_3\delta_{n1}) + (6\gamma_n\gamma_3\gamma_1 - \gamma_3\delta_{n1} - \gamma_1\delta_{n3})] \\
& \frac{1}{4\pi\rho}\frac{1}{\beta^2 r^2} x\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \\
& +(\gamma_n\gamma_1\gamma_3 + \gamma_n\gamma_3\gamma_1)\frac{1}{4\pi\alpha^3}\frac{1}{r}\dot{x}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \\
& -[(\gamma_n\gamma_1 - \delta_{n1})\gamma_3 + (\gamma_n\gamma_3 - \delta_{n3})\gamma_1]\frac{1}{4\pi\beta^3}\frac{1}{r}\dot{x}\left(t - \frac{r}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

Obrigado pela atenção!