UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Prof. José Carlos Eidam
CM041 - Cálculo I - Turma B - Segundo semestre de 2012

✰ Limites de funções

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

1) $\lim_{x\to -2} \dfrac{2x^3+9x^2+12x+4}{-x^3-2x^2+4x+8}$ 2) $\lim_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$ 3) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{2-\sqrt{x^3-4}}$

4) $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{\sqrt[4]{2x}-1}{\sqrt{2x-1}}$ 5) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{x^4+1}-1}{x^4}$ 6) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

7) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$ 8) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(20x)}{\operatorname{sen}(301x)}$ 9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2x))}{x}$

10) $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg}(3x)\operatorname{cossec}(6x))$ 11) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$ 12) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

13) $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ 14) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$ 15) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$

16) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}$ 17) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$ 18) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

19) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3-1)\cos\left(\dfrac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x-1}}$ 20) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ 21) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

22) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-x^2+7x-3}{2-x+5x^2-4x^3}$ 23) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$ 24) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$

25) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$ 26) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1}\right)$ 27) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{7x^6+5x^4+7}}{x^4+2}$

28) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}}$ 29) $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+9}+x+3)$ 30) $\lim_{x\to 2} \dfrac{(x^2-2x)\operatorname{sen}(x^2-4)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$

31) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3+x\cos(\sqrt{x})}{x^4\operatorname{sen}(1/x)+1}$ 32) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}(\operatorname{sen} x+\sqrt{x}\cos x)}{x\sqrt{x}-\operatorname{sen}(x\sqrt{x})}$ 33) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[4]{7x^{12}+5x^4+7}}{2x^3+2}$

34) $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$ 35) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1}$ 36) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x+2x^2\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{x-\sqrt{1+x^2}}$

2. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que $\left|f(x)\right|\le 2|x|$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x^3)}{x}$.

3. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $1+x^2+\dfrac{x^6}{3}\le f(x)+1\le \sec x^2+\dfrac{x^6}{3}$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)\cos\left(\frac{1}{x+x^2}\right)\right).$$

4. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $|\mathrm{sen}\, x| \leq f(x) \leq 3|x|$ e $0 \leq g(x) \leq 1 + |\mathrm{sen}\, x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\, g(x) + \cos x)$.

5. Sejam $c, L \in \mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3 + cx + c}{x^2 - 1} = L$. Determine c e L.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (a) Assumindo que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x}$.

   (b) Assumindo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   (c) Assumindo que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2 + x} = +\infty$, calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

7. A resolução abaixo está incorreta. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\underbrace{\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}-1\right)}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty}(x\cdot 0) = 0.\end{aligned}$$

8. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

   (a) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada positiva e $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty.$$

   (b) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = +\infty.$$

   (c) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - g(x) = +\infty$.

9. Dê exemplos de funções f e g tais que:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) = 1$.

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$.

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) \neq 0$.

10. Mostre que se $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e se g é limitada então $\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = 0$.

✰ Continuidade de Funções

11. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que a função f é contínua. Justifique.

(a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-4)+5, & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & \text{se } x < 2 \\ 5, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-4x+3|}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \dfrac{1+(-1)^{[x]}}{2}\operatorname{sen}(\pi x)$.

Obs.: o símbolo $[x]$ denota o maior inteiro que é menor ou igual a x e é definido por $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

12. Determine L para que a função dada seja contínua em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+2)-\operatorname{sen}(x+2)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^8+x^4}}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

13. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-1)^6}}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Verifique que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua no ponto $x = 1$? Por quê?

14. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

(a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua em $x = 0$, então f é contínua em $x = 0$.

(b) Se f e g são funções descontínuas em $x = 0$, então a função fg é descontínua em $x = 0$.

✰ Derivadas

15. Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto $\mathbf{I}$, $a \in \mathbf{I}$ e

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq a \\ g(x), & \text{se } x < a \end{cases}.$$

Prove que h é derivável em $x = a$ se, e somente se, $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

16. Encontre constantes a, b e c tais que a função $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c, & \text{se } x < 1 \\ x^2-5x+6, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ seja derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(0) = 0$.

17. Verifique se f é contínua e derivável no ponto x_0, sendo:

(a) $f(x)=\begin{cases}(x^2+x)\cos\frac{1}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$, $x_0=0$ (b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-x}{\sqrt{x-1}}, & \text{se } x>1\\ 1, & \text{se } x\leq 1\end{cases}$, $x_0=1$

(c) $f(x)=\begin{cases}x^2+\operatorname{sen} x, & \text{se } x>0\\ x^5+4x^3, & \text{se } x<0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$, $x_0=0$ (d) $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{5}x^5, & \text{se } x>1\\ x^4, & \text{se } x\leq 1\end{cases}$, $x_0=1$

(e) $f(x)=\begin{cases}x\operatorname{sen}\frac{1}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$, $x_0=0$ (f) $f(x)=\begin{cases}x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$, $x_0=0$

(g) $f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 1, & \text{se } x=0\end{cases}$, $x_0=0$ (h) $f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2+x^4}}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$, $x_0=0$

(i) $f(x)=|\operatorname{sen} x|$, $x_0=0$ j) $f(x)=|\operatorname{sen}(x^5)|$, $x_0=0$

k) $f(x)=\cos(\sqrt{|x|})$, $x_0=0$

18. Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}[(3+x)^2]-\operatorname{tg} 9}{x}$.

19. Calcule $f'(x)$ para as funções f abaixo:

1) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ 2) $f(x)=\frac{(2x^3+1)^{32}}{x+2}$ 3) $f(x)=\frac{4x-x^4}{(x^3+2)^{100}}$

4) $f(x)=x\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^5}-x^2\right)$ 5) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{(x^4+\operatorname{tg}^2 x+1)^2}$ 6) $f(x)=\sqrt[6]{x\operatorname{tg}^2 x}$

7) $f(x)=\frac{\sqrt{x}+\operatorname{cossec} x}{x^3+3x^2}$ 8) $f(x)=\sec\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ 9) $f(x)=\frac{x^2\operatorname{tg}(x^3-x^2)}{\sec x}$

10) $f(x)=x\operatorname{sen} x\cos x$ 11) $f(x)=\frac{(x+\lambda)^4}{x^4+\lambda^4}$ 12) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}(x-\operatorname{sen} x)}$

13) $f(x)=\frac{2x}{\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}}$ 14) $f(x)=\operatorname{cotg}(3x^2+5)$ 15) $f(x)=\frac{x^2}{\operatorname{sen}^{33}x\cos^{17}x}$

16) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}\operatorname{sen} x}{x^2\cos(x^2)}$

20. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ tal que $|f(x)|\leq|x^3+x^2|$, para todo $x\in\mathbb{R}$. A função f é derivável em 0?

21. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável em $a\in\,]0,+\infty[$. Calcule, em termos de $f'(a)$, o limite: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

22. Discuta as seguintes "soluções" para a questão "Considere a função $f(x)=x|x|$. Decida se f é derivável em $x=0$ e, em caso afirmativo, calcule $f'(0)$. Justifique suas afirmações."

"Solução 1": $f'(0)=0$, pois $f(0)=0$.

"Solução 2": Como a função $g(x)=|x|$ não é derivável em $x=0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x=0$. Logo f não é derivável em $x=0$.

"Solução 3": Temos $f(x)=h(x)g(x)$, onde $h(x)=x$ e $g(x)=|x|$. Assim:

$$f'(0)=h'(0)g(0)+h(0)g'(0);$$

como $g(0) = 0$ e $h(0) = 0$ então $f'(0) = 0$.

"Solução 4": Temos $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Logo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0,$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} -x = 0.$$

Portanto $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, ou seja $f'(0) = 0$.

23. Em que pontos f é derivável?

    (a) $f(x) = \sqrt{x^4 + x^6}$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$.

24. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $x = 0$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada e não derivável em $x = 0$. Calcule a derivada de $h(x) = f(x)\,g(x)$ no ponto $x = 0$.

25. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}\,\text{sen}\,(\sqrt[3]{x})$.

    (a) Calcule $f'(3)$.
    (b) Calcule $f'(0)$.
    (c) Seja $g(x) = \dfrac{(5 + f(x))(2x + 3\sec x)}{x + \text{tg}\, x + 4}$, onde f é a função dada acima. Calcule $g'(0)$.

26. Mostrar que a reta $y = -x$ é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encontre o ponto de tangência.

27. Determine todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$.

28. Seja $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 1}$. Determine todas as retas tangentes ao gráfico de f que passam pelo ponto $(0, 0)$.

29. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até 2ª ordem e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x f(x + 1 + \text{sen}\, 2x)$. Calcule $g''(x)$. Supondo $f'(1) = -2$, calcule $g''(0)$.

30. Seja $f(x) = |x^3|$. Calcule $f''(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f'' é derivável no ponto $x_0 = 0$? Justifique.

31. Sabe-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3 é $x + 2y = 6$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = (f(\sqrt{9 + 4x}))^2$. Determine $g'(0)$.

32. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ tem como intersecção um ponto que está numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

33. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2 - y)$. Admitindo f derivável, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$.

34. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 + xy + y^2 = 3$. Admitindo f derivável, determine as possíveis retas tangentes ao gráfico de f que são normais à reta $x - y + 1 = 0$.

35. Seja f derivável num intervalo aberto I contendo $x = -1$ e tal que

$$(f(x))^3 - (f(x))^2 + xf(x) = 2,$$

para todo $x \in I$. Encontre $f(-1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$.

36. Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua inversa f^{-1} seja também derivável. Use derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

desde que o denominador não seja nulo.

37. Usando o exercício anterior, encontre $(f^{-1})'(5)$ sabendo que $f(4) = 5$ e que $f'(4) = \frac{2}{3}$.

38. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = \cos(\operatorname{arctg} x)$	(b) $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$	(c) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2)$
(d) $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^3$	(e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$	(f) $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}})$
(g) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$	(h) $f(x) = x\operatorname{arctg}(x^2 - x)$	(i) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$

✰ Taxas relacionadas

39. (*Expansão Adiabática*) Quando certo gás composto sofre uma expansão adiabática, a sua pressão p e seu volume V satisfazem à equação $pV^{1,3} = k$, onde k é uma constante. Mostre que $-V\dfrac{dp}{dt} = 1,3\,p\dfrac{dV}{dt}$.

40. De um petroleiro quebrado vaza um grande volume V de óleo num mar calmo. Após a turbulência inicial ter acabado, o petróleo se expande num contorno circular de raio r e espessura uniforme h, onde r cresce e h de cresce de um modo determinado pela viscosidade e flutuabilidade do óleo. Experiências de laboratório sugerem que a espessura é inversamente proporcional à raiz quadrada do tempo decorrido: $h = \dfrac{c}{\sqrt{t}}$. Mostre que a taxa $\dfrac{dr}{dt}$ com que o petróleo se expande é inversamente proporcional a $t^{3/4}$.

41. Num certo instante t_0, a altura de um triângulo cresce à razão de 1 cm/min e sua área aumenta à razão de 2 cm^2/min. No instante t_0, sabendo que sua altura é 10 cm e sua área é 100 cm^2, qual a taxa de variação da base do triângulo?

42. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de 1,2 m, a taxa de variação com que a areia é despejada é de 0,081m^3/min. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante?

43. A aresta de um cubo cresce ao longo do tempo. Num certo instante t_0, o seu volume cresce a uma taxa de 10cm^3/min. Sabendo que, neste instante, a aresta do cubo mede 30cm, qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo?

44. Uma lâmpada está no solo a 15m de um edifício. Um homem de 1,8m de altura anda a partir da luz em direção ao edifício a 1,2m/s. Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o edifício diminui quando ele está a 12m do edifício e quando ele está a 9m do edifício.

45. Uma tina de água tem 10 m de comprimento e uma seção transversal com a forma de um trapézio isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se a tina for preenchida com água a uma taxa de $0,2\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$, quão rápido estará subindo o nível da água quando ela estiver a 30 cm de profundidade?

46. Uma câmera de televisão está posicionada a 4.000 pés de uma base de lançamento de foguete. O ângulo de elevação da câmera deve variar a uma taxa que possa focalizar o foguete. O mecanismo de foco da câmera também deve levar em conta o aumento da distância entre a câmera e o foguete. Vamos supor que o foguete suba verticalmente e com uma velocidade de 600 pés/s quando já tiver subido 3.000 pés. Quão rápido está variando a distância da câmera ao foguete nesse momento? Se a câmera de televisão apontar sempre na direção ao foguete, quão rápido estará variando o ângulo de elevação dela nesse mesmo momento?

47. (*Escada deslizante*) Uma escada de 25 pés está encostada na parede de uma casa e sua base está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede. Num certo instante, a base da escada se encontra a 7 pés da parede e está sendo empurrada a uma taxa de 2 pés por segundo.

    (a) Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo nesse instante?

    (b) Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a 7 pés da parede.

    (c) Calcule a taxa de variação do ângulo formado pela parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a 7 pés da parede.

✰ Respostas

(1) (1) $-3/4$; (2) $1/5$; (3) $-1/6$; (4) 0; (5) $1/5$; (6) $3/7$; (7) $\sqrt{2}$; (8) $\frac{20}{301}$; (9) 2; (10) $1/2$; (11) $1/6$; (12) -1; 13) -1; 14) $1/3$; (15) $-\infty$; (16) 0; (17) não existe; (18) não existe; (19) 0; (20) $-\infty$; (21) $+\infty$; (22) $-1/2$; (23) 0; (24) $1/3$; (25) 1; (26) $-\infty$; (27) 0; (28) $-\infty$; (29) 3; (30) $32\sqrt{2}$; (31) 3; (32) 0; (33) $-\sqrt[4]{7}/2$; (34) $1/2$; (35) não existe; (36) $-\infty$.

(2) 0; **(3)** 0; 0; **(4)** 1; **(5)** $c=-1$, $L=5/2$; **(6)** (a) 2; (b) 0; (c) $+\infty$; **(8)** (a) Falsa; (b) Verdadeira; (c) Falsa; **(11)**(a) $\mathbb{R}$; (b) $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; (c) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; (d) $\mathbb{R}$; **(12)** (a) $-\cos 2$; (b) 1; **(13)** Não; **(14)** (a), (b) são falsas; **(16)** $a=-3/2$, $b=0$ e $c=7/2$; **(17)** (a), (c), (e), (f), (g), (h), (i), (j), (k) são contínuas em x_0; (f), (g), (j) são deriváveis em x_0; **(18)** $6\sec^2 9$; **(20)** Sim; **(21)** $2\sqrt{a}f'(a)$; **(22)** Somente (4) está correta; **(23)** (a) em todos os pontos; (b) em $x_0 \neq 0$; **(24)** 0; **(25)** (a) $\frac{7}{3\sqrt[3]{12}}\operatorname{sen}(\sqrt[3]{3})+\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\cos(\sqrt[3]{3})$.; (b) -1; (c) $-\frac{1}{8}$;

(26) $(3,-3)$; **(27)** $(-1,-13)$, $y=16x+3$; $(0,7)$, $y=16x+7$; $(1,19)$, $y=16x+3$; **(28)** $y=9x$, $y=-x$; **(29)** -12; **(30)** Não; **(31)** -1; **(33)** $y=x$; **(34)** $y+x=2$; $y+x=-2$; **(35)** 2; $2x+7y-12=0$; **(41)** $-1,6$; **(42)** $\frac{1}{40\pi}$m/min; **(43)** $\frac{4}{3}$cm^2/min; **(44)** 3,6m/s; 0,9m/s; **(45)** $\frac{10}{3}$cm/min; **(46)** 360 pes/s; 0,096 rad/s; **(47)** (a) $\frac{7}{12}$pes/s; (b) $\frac{527}{24}$pes^2/s; (c) $\frac{1}{12}$rad/s.