

# Aspectos da modelagem sísmica computacional

Jessé Costa\*,

\*Universidade Federal do Pará, INCT-GP

September 30, 2020

- Modelagem Sísmica
- Meios Acústicos
- Modelagem numérica usando diferenças finitas
- Condições de fronteira com casamento de impedância
- Modelagem numérica usando métodos espectrais

- Modelagem Sísmica
- Meios Acústicos
- Modelagem numérica usando diferenças finitas
- Condições de fronteira com casamento de impedância
- Modelagem numérica usando métodos espectrais

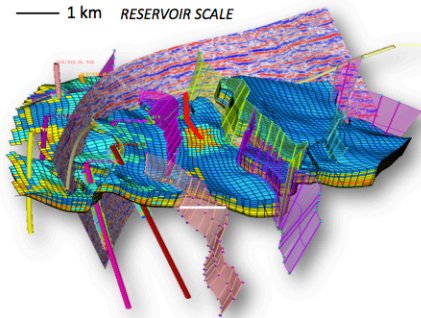
- Modelagem Sísmica
- Meios Acústicos
- Modelagem numérica usando diferenças finitas
- Condições de fronteira com casamento de impedância
- Modelagem numérica usando métodos espectrais

- Modelagem Sísmica
- Meios Acústicos
- Modelagem numérica usando diferenças finitas
- Condições de fronteira com casamento de impedância
- Modelagem numérica usando métodos espectrais

- Modelagem Sísmica
- Meios Acústicos
- Modelagem numérica usando diferenças finitas
- Condições de fronteira com casamento de impedância
- Modelagem numérica usando métodos espectrais

## *Grand Challenge for Computational Geoscience* ***The earth is heterogeneous on all scales.***

*We are just beginning to come to grips with the importance of heterogeneity in the earth and how it limits our ability to explore for and exploit underground resources in a sustainable way.*



— 100  $\mu\text{m}$  PORE SCALE

Michael Orisntaglio, Yale University & SEAM II project Manager

Propriedades das Rochas:

$V_{argila}$

Porosidade

Saturação de Fluidos, etc..



Propriedades das Rochas:

$V_{argila}$

Porosidade

Saturação de Fluidos, etc..

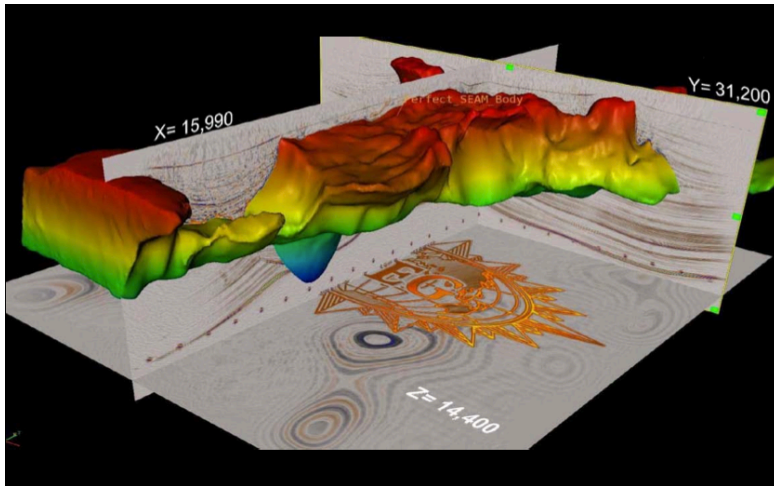
Parâmetros geofísicos :

$\rho$

$V_p, V_s, C_{IJ}$

$Q, \sigma, \text{etc..}$

# Modelagem Sísmica



SEAM I salt model

# Modelagem Sísmica



Aquisição sísmica marinha

# Modelagem para imageamento sísmico: meio viscoelástico

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + f_i(\mathbf{x}, t)$$
$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \eta_{ijkl}(\mathbf{x}, t - \tau) \frac{\partial v_k(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_l} + M_{ij}(\mathbf{x}, t)$$

$\mathbf{x}, t$ : posição, tempo

$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  campo de tensão

$v_i(\mathbf{x}, t)$  campo de velocidade das partículas do meio

convenção da soma sobre índices repetidos

# Modelagem para imageamento sísmico: meio viscoelástico

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + f_i(\mathbf{x}, t)$$
$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \eta_{ijkl}(\mathbf{x}, t - \tau) \frac{\partial v_k(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_l} + M_{ij}(\mathbf{x}, t)$$

$\rho(\mathbf{x})$ : densidade de massa

$\eta_{ijkl}(\mathbf{x})$ : tensor viscoelástico

convenção da soma sobre índices repetidos

# Modelagem para imageamento sísmico: meio viscoelástico

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + f_i(\mathbf{x}, t)$$
$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \eta_{ijkl}(\mathbf{x}, t - \tau) \frac{\partial v_k(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_l} + M_{ij}(\mathbf{x}, t)$$

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ : densidade de fontes dipolares

$M_{ij}(\mathbf{x}, t)$ : tensor de momento

convecção da soma sobre índices repetidos

# Modelagem para imageamento sísmico: meio viscoelástico

heterogeneidade

# Modelagem para imageamento sísmico: meio viscoelástico

heterogeneidade  
anisotropia



# Modelagem para imageamento sísmico: meio viscoelástico

heterogeneidade

anisotropia

atenuação e dispersão

# Modelagem para imageamento sísmico: meio viscoelástico

heterogeneidade

anisotropia

atenuação e dispersão

três modos de ondas de volume ( $P, qS_1, qS_2$ )

# Modelagem para imageamento sísmico: meio viscoelástico

heterogeneidade

anisotropia

atenuação e dispersão

três modos de ondas de volume ( $P$ ,  $qS_1$ ,  $qS_2$ )

ondas de superfície

# Modelagem para imageamento sísmico: meio viscoelástico

heterogeneidade

anisotropia

atenuação e dispersão

três modos de ondas de volume ( $P, qS_1, qS_2$ )

ondas de superfície

21 funções complexas independentes  $\tilde{\eta}_{ijkl}(\mathbf{x}, \omega)$

# Meios Acústicos (fluidos)

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -K(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + q(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

$\mathbf{x}, t$ : posição, tempo

$p(\mathbf{x}, t)$  campo de pressão

$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  campo de velocidade das partículas do meio

# Meios Acústicos (fluidos)

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -K(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + q(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

$\rho(\mathbf{x})$ : densidade de massa

$K(\mathbf{x})$ : módulo de incompressibilidade

# Meios Acústicos (fluidos)

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -K(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + q(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ : densidade de fontes dipolares

$q(\mathbf{x}, t)$ : taxa de injeção de pressão na fonte

# Meios Acústicos: equação densidade variável

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = K \nabla \cdot \left( \frac{\nabla p}{\rho} \right) + \frac{\partial q}{\partial t} - K \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{f}}{\rho} \right)$$



# Modelagem Sísmica:SEAM model

Dimensão : 35 km  $\times$  40 km  $\times$  15 km

Malha uniforme: 10 m

Modelo:  $\rho$ ,  $V_p$  84GB

$V_{min} = 1490\text{m/s}$     $V_{max} = 4800\text{ m/s}$

# Modelagem Sísmica: SEAM model

Modelagem por diferenças finitas:

$$f_{max} = 30 \text{ Hz}$$

Offset máximo=10 km

62478 tiros, 450.000 traços/tiro

3.5 GB por tiro

**220 TB** início 2009-término 2011

Modelagem elástica  $\approx 100\times$  Modelagem Acústica

# Equação escalar com densidade constante

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p + \frac{\partial q}{\partial t} - c^2 \nabla \cdot \mathbf{f}$$

$c(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ : velocidade de propagação

# Equação da onda

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p + s(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$$

$c(\mathbf{x})$ : velocidade de propagação

$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$ : fonte puntual em  $\mathbf{x}_s$

$s(t)$ : pulso fonte

# Equação da onda: soluções em meios homogêneos

Ondas esféricas

$$p(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{s(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|}$$

Ondas planas

$$p(\mathbf{x}, t) = p\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) \exp\left[i\left(\frac{\omega \mathbf{n}}{c} \cdot \mathbf{x} - \omega t\right)\right] d\omega$$

$\mathbf{k} \equiv \frac{\omega \mathbf{n}}{c}$  : número de onda

# Equação da onda: soluções em meios heterogêneos

## Soluções analíticas:

meios com simetria: plana, esférica, cilíndrica,...

# Equação da onda: soluções em meios heterogêneos

## Aproximações Assintóticas:

WKBJ: meios estratificados plana

Teoria do raio, feixes gaussianos, Maslov, estados coerentes,...

# Equação da onda: soluções em meios heterogêneos

## Aproximações numéricas:

- Refletividade: meios estratificados

- Diferenças finitas

- Elementos finitos

- métodos espectrais



## Acurácia

quantos comprimentos de onda a propagar...

## Custo computacional

operações de ponto flutuante  
armazenamento

## Especificação do modelo

malha regular e uniforme

malha regular não uniforme

malha não estruturada

## Condições de fronteira

fronteira livre

fronteiras internas

fronteiras absorventes

## Elementos Finitos Espectral

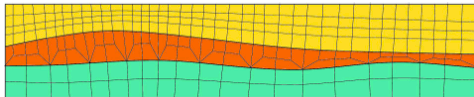


Figure 3.1: Two dimensional mesh of curved structures using size doubling in the middle layer.

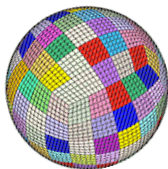


Figure 3.2: A “cubed sphere” mesh of the globe. (Taken from KOMATITSCH & TROMP [2002a]).

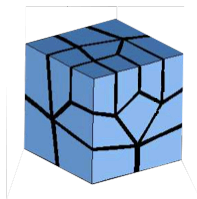


Figure 3.3: Illustration of a three-dimensional meshing of a cube. (Taken from MÜLLER-HANNEMANN [2000]).

Diferenças finitas:

- malha regular (fácil de especificar o modelo)

- fácil de programar

- emula bem a física

- custo aumenta em escala razoável

$$f(x_0 \pm h) = f(x_0) \pm f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 \pm \mathcal{O}(h^3)$$

forward

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$f(x_0 \pm h) = f(x_0) \pm f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 \pm \mathcal{O}(h^3)$$

backward:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h)$$



$$f(x_0 \pm h) = f(x_0) \pm f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 \pm \mathcal{O}(h^3)$$

central

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h/2) - f(x_0 - h/2)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

- i) aproximar operadores diferenciais por diferenças em uma malha
- ii) ordem da aproximação depende do ponto de atribuição da derivada

# Diferenças Finitas: cálculo dos coeficientes

Avaliar as derivadas de  $x^K$  para  $K = 1, 3, \dots, 2N - 1$

$$Kx_0^{K-1}h = \sum_{j=0}^{N-1} d_j [(x_0 + (j + \frac{1}{2})h)^K - (x_0 - (j + \frac{1}{2})h)^K]$$

$d_j$ : coeficientes do operador de diferenças

$$K \left( \frac{x_0}{h} \right)^{K-1} h^K = h^K \sum_{j=0}^{N-1} d_j \left[ \left( \frac{x_0}{h} + \frac{2j+1}{2} \right)^K - \left( \frac{x_0}{h} - \frac{2j+1}{2} \right)^K \right]$$

# Diferenças Finitas: cálculo dos coeficientes

Em  $x_0 = 0$  e  $h = 1$

$$K\delta_{K,1} = 2 \sum_{j=0}^{N-1} d_j \left( \frac{2j+1}{2} \right)^K \quad K = 1, 3, \dots, 2N-1$$

A solução deste sistema linear determina os coeficientes  $d_j$  para uma aproximação de ordem  $2N$ .

# Diferenças Finitas: cálculo dos coeficientes

Para aproximação da derivada segunda:

$$K(K-1)\delta_{K,2} = d_0\delta_{K,1} + 2 \sum_{j=1}^{N-1} d_j j^K \quad K = 0, 2, \dots, 2N$$

A solução deste sistema linear determina os coeficientes  $d_j$  para uma aproximação de ordem  $2N + 2$ .

# Diferenças Finitas: Equação da onda

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \frac{p(x, y, t + \Delta) - 2p(x, y, t) + p(x, y, t - \Delta)}{\Delta^2} + \mathcal{O}(\Delta^2) \\ \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} &= \frac{d_0 p(x, y, t) + \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x + jh, y, t) + p(x - jh, y, t))}{h^2} \\ &+ \mathcal{O}(h^{2N})\end{aligned}$$

# Diferenças Finitas: Equação da onda

$$\begin{aligned} p(x, y, t + \Delta) = & 2p(x, y, t) - p(x, y, t - \Delta) \\ & + \left( \frac{c(x, y)\Delta}{h} \right)^2 [2d_0 p(x, y, t) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x + jh, y, t) + p(x - jh, y, t)) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x, y + jh, t) + p(x, y - jh, t))] \\ & + \Delta t^2 s(t) \delta_{BL}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \mathcal{O}(\Delta^2, h^{2N}) \end{aligned}$$

# Diferenças Finitas: Equação da onda

$$\begin{aligned} p(x, y, t + \Delta) = & 2p(x, y, t) - p(x, y, t - \Delta) \\ & + \left( \frac{c(x, y)\Delta}{h} \right)^2 [2d_0 p(x, y, t) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x + jh, y, t) + p(x - jh, y, t)) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x, y + jh, t) + p(x, y - jh, t)) \\ & + \Delta t^2 s(t) \delta_{BL}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \mathcal{O}(\Delta^2, h^{2N}) \end{aligned}$$

$$\delta_{BL}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = \exp[-(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)/2h^2]$$



# Teorema de Lax

"Um esquema de diferenças finitas consistente para um problema de valor inicial bem posto é convergente se e somente se ele é estável."

$$p(x, y, t) = \exp [i (k \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$\sin^2 \left( \frac{\omega \Delta}{2} \right) = -\frac{\mu^2}{2} \left\{ d_0 + \sum_{j=1}^{N-1} d_j [\cos (jkh \cos \phi) + \cos (jkh \sin \phi)] \right\}$$

$$\mathbf{n} \equiv (\cos \phi, \sin \phi) \text{ e } \mu \equiv c\Delta/h.$$

$$p(x, y, t) = \exp [i (k \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$\sin^2 \left( \frac{\omega \Delta}{2} \right) = -\frac{\mu^2}{2} \left\{ d_0 + \sum_{j=1}^{N-1} d_j [\cos(jkh \cos \phi) + \cos(jkh \sin \phi)] \right\}$$

$\mathbf{n} \equiv (\cos \phi, \sin \phi)$  e  $\mu \equiv c\Delta/h$ .

Para evitar aliasing:

$$0 \leq \omega \Delta \leq \pi$$

$$p(x, y, t) = \exp [i (k \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$\sin^2 \left( \frac{\omega \Delta}{2} \right) = -\frac{\mu^2}{2} \left\{ d_0 + \sum_{j=1}^{N-1} d_j [\cos(jkh \cos \phi) + \cos(jkh \sin \phi)] \right\}$$

$\mathbf{n} \equiv (\cos \phi, \sin \phi)$  e  $\mu \equiv c\Delta/h$ .

Para evitar aliasing:

$$0 \leq \omega \Delta \leq \pi$$

$$0 \leq kh \leq \pi$$

Condição de estabilidade:

$$\mu = \frac{c\Delta}{h} < \sqrt{\frac{2}{|d_0 + 2 \sum_1^{N-1} d_j \cos(j\pi/\sqrt{2})|}} = \mu_L$$
$$\Delta < \mu_L \frac{h}{c}$$

Velocidade de fase  $c_{FD} = \omega/k$ :

$$\frac{c_{FD}}{c} = \frac{2}{\mu kh} \sin^{-1} \left[ \mu \sqrt{-\frac{d_0 + \sum_{j=1}^{N-1} d_j (\cos jkh \cos \phi + \cos jkh \sin \phi)}{2}} \right]$$

$c_{FD}(k, \phi)$  : dispersão e anisotropia numérica

Velocidade de grupo  $\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega$  :

$$\left(\frac{v_g}{c}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{\sin(\mu kh)}\right)^2 \left\{ \left[ \sum_{j=1}^{N-1} j d_j \sin(jkh \cos \phi) \right]^2 + \left[ \sum_{j=1}^{N-1} j d_j \sin(jkh \sin \phi) \right]^2 \right\}$$

$v_g(k)$  : dispersão e anisotropia numérica

# Otimização dos coeficientes para reduzir dispersão

Ajuste de da velocidade de fase por quadrados mínimos no intervalo  $0 < kh < \alpha\pi/2$ :

$$\sin^2 \left( \frac{c_{FD}}{C} \mu kh \right) = -\frac{\mu^2}{2} \left\{ d_0 + \sum_{j=1}^{N-1} d_j [\cos(jkh \cos \phi) + \cos(jkh \sin \phi)] \right\}$$

sujeito a:

$$d_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} d_j = 0$$

e

$$d_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} d_j j^2 = 2$$



# Otimização dos coeficientes

Ajuste da velocidade de fase e velocidade de grupo por quadrados mínimos no intervalo  $0 < kh < \alpha\pi/2$ :

$$\left(\frac{v_g}{c}\right)^2 \left(\frac{\sin(\mu kh)}{\mu}\right)^2 = \left\{ \left[ \sum_{j=1}^{N-1} j d_j \sin(jkh \cos \phi) \right]^2 + \left[ \sum_{j=1}^{N-1} j d_j \sin(jkh \sin \phi) \right]^2 \right\}$$

sujeito a:

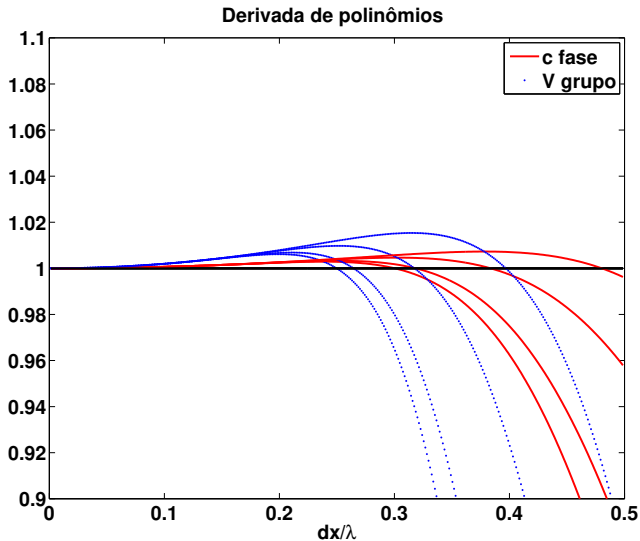
$$d_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} d_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{N-1} d_j j^2 = 2$$

Para tratamentos mais elaborados:

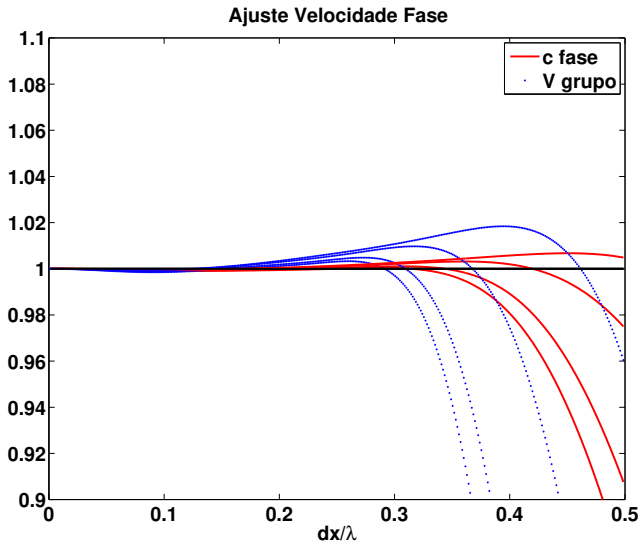
Holberg, O, 1987. Geophysical Prospecting.35,629-655, 1987.

Kosloff et al., 2010. Geophysics.75(6),T167-T174.

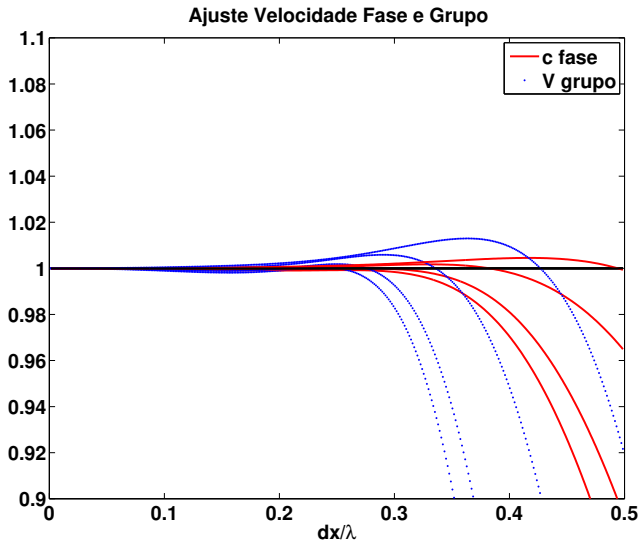
# Otimização dos coeficientes



# Otimização dos coeficientes



# Otimização dos coeficientes



Atenuação ao direcional:

$$P(x, y, \omega) = \exp \left[ \frac{i\omega}{c} \left[ n_x \left( 1 - \frac{\Gamma(x)}{i\omega} \right) x + n_y y \right] \right]$$

$$X = x \left( 1 - \frac{\Gamma(x)}{i\omega} \right) = x - \frac{1}{i\omega} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi$$

$$(-i\omega)^2 P(\mathbf{x}, \omega) = c^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \mathbf{x}} = \left(1 - \frac{\sigma}{i\omega}\right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$$
$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{1}{1 + \sigma/(-i\omega)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \equiv \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$$

$$(-i\omega)^2 P(\mathbf{x}, \omega) = c^2 \left[ \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{1}{S} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right]$$

# Fronteiras Absorventes: PML

Considerando fronteiras PML ao longo  $x$  e  $y$ :

$$(-i\omega)^2 P(\mathbf{x}, \omega) = c^2 \left[ \frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{S_x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{1}{S_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{S_y} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right]$$

$$(-i\omega)^2 S_x S_y P(\mathbf{x}, \omega) = c^2 \left[ S_y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{S_x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + S_x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{S_y} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right]$$

$$S_x \equiv 1 + \sigma_x(x)/(-i\omega) \quad S_y \equiv 1 + \sigma_y(y)/(-i\omega)$$

# Fronteiras Absorventes: PML

Considerando fronteiras PML ao longo  $x$  e  $y$ :

$$(-i\omega)^2 S_x S_y P(\mathbf{x}, \omega) = c^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{S_y}{S_x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{S_x}{S_y} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right]$$

$$(-i\omega)^2 S_x S_y P(\mathbf{x}, \omega) = c^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{(-i\omega) S_y}{(-i\omega) S_x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{(-i\omega) S_x}{(-i\omega) S_y} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right]$$

$$\phi_x \equiv \frac{1}{(-i\omega) S_x} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \phi_y \equiv \frac{1}{(-i\omega) S_y} \frac{\partial P}{\partial y}$$



# Fronteiras Absorventes: PML

Considerando fronteiras PML ao longo  $x$  e  $y$ :

$$(-i\omega)^2 S_x S_y P(\mathbf{x}, \omega) = c^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} ((-i\omega) S_y \phi_x) + \frac{\partial}{\partial y} ((-i\omega) S_x \phi_y) \right]$$

$$(-i\omega)\phi_x + \sigma_x(x)\phi_x = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$(-i\omega)\phi_y + \sigma_y(y)\phi_y = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$(-i\omega)^2 S_x S_y P(\mathbf{x}, \omega) = c^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} ((-i\omega + \sigma_y)\phi_x) + \frac{\partial}{\partial y} ((-i\omega + \sigma_x)\phi_y) \right]$$

# Fronteiras Absorventes: PML

Considerando fronteiras PML ao longo  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} (-i\omega)^2 S_x S_y P(\mathbf{x}, \omega) &= c^2 \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right. \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} ((\sigma_y - \sigma_x) \phi_x) \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} ((\sigma_x - \sigma_y) \phi_y) \right] \end{aligned}$$

$$(-i\omega) \phi_x + \sigma_x(x) \phi_x = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$(-i\omega) \phi_y + \sigma_y(y) \phi_y = \frac{\partial P}{\partial y}$$

# Fronteiras Absorventes: PML

No domínio do tempo  $p(x, y, t)$ ,  $\phi_x(x, y, t)$  e  $\phi_y(x, y, t)$  obedecem ao sistema de equações:

$$\ddot{p} + (\sigma_x + \sigma_y)\dot{p} + \sigma_x\sigma_y p = c^2 \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} ((\sigma_y - \sigma_x)\phi_x) \frac{\partial}{\partial y} ((\sigma_x - \sigma_y)\phi_y) \right]$$

$$\dot{\phi}_x + \sigma_x(x)\phi_x = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\dot{\phi}_y + \sigma_y(y)\phi_y = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$\phi_x(x, y, t + \Delta t)$  e  $\phi_y(x, y, t + \Delta t)$  podem ser computadas recursivamente a partir das soluções:

$$\phi_x(x, y, t) = \int_0^t d\tau \exp[-\sigma_x(x)(t - \tau)] \frac{\partial p(x, y, \tau)}{\partial x}$$

$$\phi_y(x, y, t) = \int_0^t d\tau \exp[-\sigma_y(y)(t - \tau)] \frac{\partial p(x, y, \tau)}{\partial y}$$

$$\sigma > 0$$

$$\sigma = 0$$

# Fronteiras Absorventes: PML

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{no domínio de interesse} \\ \frac{3}{2} \log\left(\frac{1}{R}\right) c_{max} \Delta t \left(\frac{x}{L}\right)^2 & \text{nas bordas} \end{cases}$$

$R$ : coef. de reflexão desejado para incidência normal  $\approx 10^{-6}$

$L$ : largura da banda de absorção  $\approx \frac{\lambda}{2} = \frac{c_{max}}{2f_{pico}}$

$c_{max}$ : velocidade máxima do modelo

$\Delta t$ : FD time step

Collino & Tsogka, 2001. Geophysics, 66(1),294-307.

- a) Muito eficazes para modelagem acústica

# Fronteiras Absorventes: PML

- a) Muito eficazes para modelagem acústica
- b) Campos auxiliares implementados apenas nas regiões de absorção.



# Fronteiras Absorventes: PML

- a) Muito eficazes para modelagem acústica
- b) Campos auxiliares implementados apenas nas regiões de absorção.
- c) Várias abordagens na literatura CPML, M-PML, etc...

# Fronteiras Absorventes: PML

- a) Muito eficazes para modelagem acústica
- b) Campos auxiliares implementados apenas nas regiões de absorção.
- c) Várias abordagens na literatura CPML, M-PML, etc...
- d) podem apresentar instabilidade (meios elásticos anisotrópicos, ondas de superfície)

# Fronteiras Absorventes: implementação simples

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \sigma(x, y) \frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \nabla^2 p$$

$$\sigma(x, y) = \gamma(x) + \gamma(y)$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{no domínio de interesse} \\ \pi f_{pico} \Delta \left(\frac{x}{L}\right)^2 & \text{nas bordas} \end{cases}$$

$f_{pico}$ : frequência pico do pulso

$L$ : largura da banda de absorção  $\approx \lambda = \frac{c_{max}}{f_{pico}}$

$$\begin{aligned}
 p(x, y, t + \Delta) &= 2p(x, y, t) + p(x, y, t - \Delta) \\
 &+ \Delta \frac{\gamma(x) + \gamma(y)}{2} [p(x, y, t + \Delta) - p(x, y, t - \Delta)] \\
 &= \left( \frac{c(x, y)\Delta}{h} \right)^2 [2d_0 p(x, y, t) \\
 &+ \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x + jh, y, t) + p(x - jh, y, t)) \\
 &+ \sum_{j=1}^{N-1} d_j (p(x, y + jh, t) + p(x, y - jh, t))] \\
 &+ \Delta t^2 s(t) \delta_{BL}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \mathcal{O}(\Delta t^2, h^{2N})
 \end{aligned}$$

# Fronteiras Absorventes: região de absorção

$$\sigma > 0$$

$$\sigma = 0$$

- 1 Determine a frequência máxima do pulso sísmico  $f_{max}$

# Modelagem FD: escolha de $h$ e $\Delta$

- 1 Determine a frequência máxima do pulso sísmico  $f_{max}$
- 2 Determine o comprimento de onda mínimo:  
$$\lambda_{min} = c_{min}/f_{max}$$

# Modelagem FD: escolha de $h$ e $\Delta$

- 1 Determine a frequência máxima do pulso sísmico  $f_{max}$
- 2 Determine o comprimento de onda mínimo:  
$$\lambda_{min} = c_{min}/f_{max}$$
- 3  $h = \lambda_{min}/N$ .  $N$  deve ser avaliado a partir das curvas de dispersão do esquema.



# Modelagem FD: escolha de $h$ e $\Delta$

- 1 Determine a frequência máxima do pulso sísmico  $f_{max}$
- 2 Determine o comprimento de onda mínimo:  
$$\lambda_{min} = c_{min}/f_{max}$$
- 3  $h = \lambda_{min}/N$ .  $N$  deve ser avaliado a partir das curvas de dispersão do esquema.
- 4  $\Delta = \mu h/c_{max}$

## 1 Armazenamento :

$$N_x \times N_y \times N_z = V \left( \frac{N f_{max}}{C_{min}} \right)^D$$

$D$  : dimensão do domínio

$V$  : volume do domínio

$T$  : tempo de simulação

$N_d$ : comprimento do operador de FD

- 1 Armazenamento :

$$N_x \times N_y \times N_z = V \left( \frac{N f_{max}}{c_{min}} \right)^D$$

- 2 Número de operações :

$$N_x \times N_y \times N_z \times N_t \times N_d = N_d V \frac{T c_{max} N^D}{\mu c_{min}^D} f_{max}^{D+1}$$

$D$  : dimensão do domínio

$V$  : volume do domínio

$T$  : tempo de simulação

$N_d$ : comprimento do operador de FD

Cálculo de derivadas espaciais

$$\frac{\partial^n p(\mathbf{x}, t)}{\partial x^n} = FFT_x^{-1}[(ik_x)^n FFT_x[p(\mathbf{x}, t)]]$$

- a) Amostragem no limite de Nyquist (menor custo de armazenamento)

Cálculo de derivadas espaciais

$$\frac{\partial^n p(\mathbf{x}, t)}{\partial x^n} = FFT_x^{-1}[(ik_x)^n FFT_x[p(\mathbf{x}, t)]]$$

- a) Amostragem no limite de Nyquist (menor custo de armazenamento)
- b) Resposta espectral do operador correta até Nyquist ( $\pi/h$ )

Cálculo de derivadas espaciais

$$\frac{\partial^n p(\mathbf{x}, t)}{\partial x^n} = FFT_x^{-1}[(ik_x)^n FFT_x[p(\mathbf{x}, t)]]$$

- a) Amostragem no limite de Nyquist (menor custo de armazenamento)
- b) Resposta espectral do operador correta até Nyquist ( $\pi/h$ )
- c) Condições de contorno periódicas

# Métodos pseudo-espectrais: evolução temporal usando REM

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{x}) \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L}^2 p(\mathbf{x}, t)$$

Para meios homogêneos:

$$p(\mathbf{x}, t + \Delta t) + p(\mathbf{x}, t - \Delta t) = 2 \cos(\mathbf{L} \Delta t) p(\mathbf{x}, t)$$

# Métodos pseudo-espectrais: evolução temporal usando REM

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{x}) \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L}^2 p(\mathbf{x}, t)$$

Para meios homogêneos:

$$p(\mathbf{x}, t + \Delta t) + p(\mathbf{x}, t - \Delta t) = 2 \cos(\mathbf{L} \Delta t) p(\mathbf{x}, t)$$



# Métodos pseudo-espectrais: evolução temporal REM

$$\cos(\mathbf{L}\Delta t) = \sum_{k=0}^M c_{2k} J_{2k}(\Delta t R) Q_{2k} \left( \frac{i\mathbf{L}}{R} \right)$$

$$c_0 = 1 \quad c_{2k} = 2, \quad k > 1$$

$$Q_{n+2}(x) = 2(2x^2 + 1)Q_n(x) - Q_{n-2}(x), \quad Q_0(x) = 1 \quad Q_2 = 2x^2 + 1$$

$$R > \pi c_{max} \sqrt{\left(\frac{1}{h_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_y}\right)^2}, \quad M > R\Delta t$$

$$J_{2M}(\Delta t R) \approx 10^{-6}$$

Tal-Ezer, H., 1986. SIAM Journal on Numerical Analysis, 23, 11-26

Pestana & Stoffa, 2010. Geophysics. V75(4), T121-T131.

Tessmer, 2011. Geophysics. V76(4), S177-T185.

# Métodos pseudo-espectrais: evolução temporal REM

- a) permite passos no tempo iguais a taxa de amostragem dos dados sísmicos

# Métodos pseudo-espectrais: evolução temporal REM

- a) permite passos no tempo iguais a taxa de amostragem dos dados sísmicos
- b) combinado com FFT para avaliação acurácia limitada a precisão do sistema de ponto flutuante