Métricas críticas do funcional volume sobre variedades compactas com bordo

Adam Oliveira da Silva

Universidade Federal do Pará - UFPA

22 de Setembro de 2019

Organização da Palestra

Organização da Palestra

- Motivações
- Exemplos
- Alguns resultados de Rigidez
- Estimativas de volume

Considerações iniciais

Considerações iniciais

Consideremos:

- (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa de dimensão $n \geq 3$;

Considerações iniciais

Consideremos:

- (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa de dimensão $n \geq 3$;
- $\mathcal{M}$ o espaço das métricas Riemannianas suaves sobre M;

Considerações iniciais

Consideremos:

- (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa de dimensão $n \geq 3$;
- $\mathcal{M}$ o espaço das métricas Riemannianas suaves sobre M;
- $\mathcal{G}$ o grupo de difeomorfismos sobre M.

Consideremos:

- (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa de dimensão $n \geq 3$;
- $\mathcal{M}$ o espaço das métricas Riemannianas suaves sobre M;
- $\mathcal{G}$ o grupo de difeomorfismos sobre M.

Definição:

Chamamos um funcional $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ de Funcional Riemanniano, se ele é invariante pela ação do grupo $\mathcal{G}$, isto é, se $\mathcal{F}(\varphi^* g) = \mathcal{F}(g)$ para cada $\varphi \in \mathcal{G}$ e $g \in \mathcal{M}$.

Gradiente de funcionais Riemannianos

Definition

Um funcional Riemanniano $\mathcal{F}$ possui um gradiente em g, se existe $a \in \Gamma(S^2(T^*M))$ tal que para todo $h \in \Gamma(S^2(T^*M))$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(g(t))\Big|_{t=0} = \mathcal{F}'_g(h) = \langle a, h\rangle_{L^2}.$$

Gradiente de funcionais Riemannianos

Definition

Um funcional Riemanniano $\mathcal{F}$ possui um gradiente em g, se existe $a \in \Gamma(S^2(T^*M))$ tal que para todo $h \in \Gamma(S^2(T^*M))$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(g(t))\Big|_{t=0} = \mathcal{F}'_g(h) = \langle a, h \rangle_{L^2}.$$

Neste caso, dizemos que a é o gradiente de $\mathcal{F}$ e denotaremos por $a = \nabla \mathcal{F}$.

O **tensor curvatura de Riemann** é o $(1,3)-$tensor $Rm : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$\begin{aligned} Rm\,(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,Z}Z \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

O **tensor curvatura de Riemann** é o $(1,3)-$tensor $Rm : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$\begin{aligned} Rm\,(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,Z}Z \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

$$Rm\,(X,Y,Z,W) = -\langle Rm\,(X,Y)Z, W\rangle.$$

O **tensor curvatura de Riemann** é o $(1,3)-$tensor $Rm : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$\begin{aligned} Rm\,(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,Z}Z \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

$$Rm\,(X,Y,Z,W) = -\langle Rm\,(X,Y)Z, W\rangle.$$

Em coordenadas:

$$\begin{aligned} Rm(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= R_{ijk}{}^l\partial_l \\ Rm(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) &= R_{ijkl}. \end{aligned}$$

Assim,

$$R_{ijkl} = -\langle Rm(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l\rangle = -\langle R_{ijk}{}^m\partial_m, \partial_l\rangle = -R_{ijk}{}^m g_{ml},$$

isto é, o índice superior desce na terceira posição.

Dado um plano bidimensional $\Pi \subset T_pM$ e $X_p, Y_p \in T_pM$ vetores que geram Π, então

$$K(\Pi) = \frac{Rm(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}, \tag{1}$$

não depende da base escolhida para Π, e é chamada **curvatura seccional** do plano Π.

Dado um plano bidimensional $\Pi \subset T_pM$ e $X_p, Y_p \in T_pM$ vetores que geram Π, então

$$K(\Pi) = \frac{Rm(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}, \tag{1}$$

não depende da base escolhida para Π, e é chamada **curvatura seccional** do plano Π.
Uma variedade Riemanniana completa e com curvatura seccional constante é dita uma **forma espacial**.

O **tensor de Ricci** é definido como o $(0,2)-$ tensor

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = tr(U \to \mathrm{Rm}(U,X)Y).$$

Em coordenadas teremos:

$$R_{ij} = R_{lij}{}^{l} = g^{lm}R_{limj}$$

e a **curvatura escalar** é

$$R = g^{ij}R_{ij}.$$

Motivação: Comparação de Volume

Motivação: Comparação de Volume

(Bishop - Gromov, 1964)

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com $Ric \geq (n-1)kg$, k constante, e $p \in M$ um ponto arbitrário. Então

$$Vol(B_r(p)) \leq Vol(B_r^k).$$

Motivação: Comparação de Volume

(Bishop - Gromov, 1964)

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com $Ric \geq (n-1)kg$, k constante, e $p \in M$ um ponto arbitrário. Então

$$Vol(B_r(p)) \leq Vol(B_r^k).$$

Pergunta:

(Bishop - Gromov, 1964)

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com $Ric \geq (n-1)kg$, k constante, e $p \in M$ um ponto arbitrário. Então

$$Vol(B_r(p)) \leq Vol(B_r^k).$$

Pergunta:

- controle na curvatura escalar$\Rightarrow$ Comparação de volume ?

Motivação: Comparação de Volume

(Bishop - Gromov, 1964)

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com $Ric \geq (n-1)kg$, k constante, e $p \in M$ um ponto arbitrário. Então

$$Vol(B_r(p)) \leq Vol(B_r^k).$$

Pergunta:

- controle na curvatura escalar$\Rightarrow$ Comparação de volume ?

Conjectura: (Schoen, 1989)

Seja (M^n, g) uma variedade hiperbólica fechada. Se h é outra métrica sobre M com $R_h \geq R_g$, então $Vol(h) \geq Vol(g)$.

(Miao -Tam, 2009)

(Miao -Tam, 2009)

- (M^3, g) uma variedade Riemanniana com bordo $\partial M = \Sigma$.

(Miao -Tam, 2009)

- (M^3, g) uma variedade Riemanniana com bordo $\partial M = \Sigma$.
- (Σ, γ) isometricamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ como uma hipersuperfície estritamente convexa Σ_0.

(Miao -Tam, 2009)

- (M^3, g) uma variedade Riemanniana com bordo $\partial M = \Sigma$.
- (Σ, γ) isometricamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ como uma hipersuperfície estritamente convexa Σ_0.
- g ponto crítico do funcional volume $V(.)$ sobre $\mathcal{M}^0_\gamma = \{g, R_g = 0 \text{ e } g|_\Sigma = \gamma\}$.

- (M^3, g) uma variedade Riemanniana com bordo $\partial M = \Sigma$.
- (Σ, γ) isometricamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ como uma hipersuperfície estritamente convexa Σ_0.
- g ponto crítico do funcional volume $V(.)$ sobre $\mathcal{M}^0_\gamma = \{g, R_g = 0 \text{ e } g|_\Sigma = \gamma\}$.

Então

$$V_g \geq V_0,$$

com igualdade $\Leftrightarrow$ (M, g) é isométrica à bola Euclidiana padrão.

Motivação: Caracterização variacional

Motivação: Caracterização variacional

Hilbert (1915):

Hilbert (1915):

Funcional curvatura escalar total ou Funcional de Einstein-Hilbert

$$g \to \int_M R_g dV_g,$$

onde R_g e dV_g denotam, respectivamente, a curvatura escalar e a forma de volume de M^n.

Motivação: Caracterização variacional

Hilbert (1915):

Funcional curvatura escalar total ou Funcional de Einstein-Hilbert

$$g \rightarrow \int_M R_g dV_g,$$

onde R_g e dV_g denotam, respectivamente, a curvatura escalar e a forma de volume de M^n.

Relatividade Geral: As equações de Einstein surgem como as equações de Euler-Lagrange desse funcional.

$$\mathcal{M}_1 = \{g \in \mathcal{M} | Vol(g) = 1\}$$

$$\mathcal{M}_1 = \{g \in \mathcal{M} | Vol(g) = 1\}$$

(Hilbert, 1915)

Uma métrica $g \in \mathcal{M}_1$ é ponto crítico para o funcional de Einstein-Hilbert se, e somente se, g é uma métrica de Einstein, isto é, $Ric_g = \frac{R_g}{n} g$.

$$\mathcal{M}_1 = \{g \in \mathcal{M} | Vol(g) = 1\}$$

(Hilbert, 1915)

Uma métrica $g \in \mathcal{M}_1$ é ponto crítico para o funcional de Einstein-Hilbert se, e somente se, g é uma métrica de Einstein, isto é, $Ric_g = \frac{R_g}{n} g$.

Problema de Yamabe:

$$\mathcal{M}_1 = \{g \in \mathcal{M} | Vol(g) = 1\}$$

(Hilbert, 1915)

Uma métrica $g \in \mathcal{M}_1$ é ponto crítico para o funcional de Einstein-Hilbert se, e somente se, g é uma métrica de Einstein, isto é, $Ric_g = \frac{R_g}{n} g$.

Problema de Yamabe:

(Schoen, 1984)

Dada uma variedade Riemanniana (M, g), o funcional

$$g \to Vol(g)^{-(n-2)/n} \int_M R_g dV_g$$

atinge um mínimo na classe conforme de g.

Consideremos:

Consideremos:

- (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa, compacta e com bordo conexo suave Σ, $n \geq 3$.

Consideremos:

- (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa, compacta e com bordo conexo suave Σ, $n \geq 3$.
- γ uma métrica suave sobre Σ.

Consideremos:

- (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa, compacta e com bordo conexo suave Σ, $n \geq 3$.
- γ uma métrica suave sobre Σ.
- $\mathcal{M}_\gamma^R = \{g \in \mathcal{M}; R_g = R \ \text{ e } \ g|_{T\Sigma} = \gamma\}$.

Consideremos:

- (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa, compacta e com bordo conexo suave Σ, $n \geq 3$.
- γ uma métrica suave sobre Σ.
- $\mathcal{M}_\gamma^R = \{g \in \mathcal{M}; R_g = R \text{ e } g|_{T\Sigma} = \gamma\}$.
- O funcional volume $V : \mathcal{M}_\gamma^R \to \mathbb{R}$ dado por

$$V(g) = \int_M dV_g.$$

Caracterização variacional

Caracterização variacional

Teorema (Miao e Tam, 2009)

Seja $g \in \mathcal{M}_\gamma^R$ tal que o primeiro autovalor de Dirichlet de $(n-1)\Delta_g + R$ é positivo. Então g é ponto crítico do funcional volume $V(\cdot)$ em $\mathcal{M}_\gamma^R$ se, e somente se, existe uma função f em M satisfazendo o seguinte sistema de Equações Diferenciais Parciais

$$\begin{cases} -(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g, & \text{em } M \\ f = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

Caracterização variacional

Teorema (Miao e Tam, 2009)

Seja $g \in \mathcal{M}_\gamma^R$ *tal que o primeiro autovalor de Dirichlet de* $(n-1)\Delta_g + R$ *é positivo. Então* g *é ponto crítico do funcional volume* $V(\cdot)$ *em* $\mathcal{M}_\gamma^R$ *se, e somente se, existe uma função* f *em* M *satisfazendo o seguinte sistema de Equações Diferenciais Parciais*

$$\begin{cases} -(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g, & \text{em } M \\ f = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

Observação

Se (M, g) *satisfaz* $-(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g$, *então* R_g *é constante.*

Definição

Uma **métrica crítica de Miao-Tam**, *ou simplesmente* **métrica crítica**, *é uma tripla* (M^n, g, f), $n \geq 3$, *onde* (M^n, g) *é uma variedade Riemanniana compacta e conexa com bordo suave* $\partial M = \Sigma$ *e* f *é uma função suave em* M *tal que* $f^{-1}(0) = \Sigma$ *e satisfaz ao seguinte sistema de equações:*

$$-(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g,$$

onde $\nabla_g^2 f$ *denota o Hessiano de* f. *Tal função* f *será chamada de função potencial.*

Definição

Uma **métrica crítica de Miao-Tam**, *ou simplesmente* **métrica crítica**, *é uma tripla* (M^n, g, f), $n \geq 3$, *onde* (M^n, g) *é uma variedade Riemanniana compacta e conexa com bordo suave* $\partial M = \Sigma$ *e* f *é uma função suave em* M *tal que* $f^{-1}(0) = \Sigma$ *e satisfaz ao seguinte sistema de equações:*

$$-(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g,$$

onde $\nabla_g^2 f$ *denota o Hessiano de* f. *Tal função* f *será chamada de função potencial.*

(Miao e Tam, 2009)

g é ponto crítico de $V \Leftrightarrow g$ é uma métrica de Miao-Tam.

Exemplos de métricas de Miao-Tam

Exemplos de métricas de Miao-Tam

Bola geodésica em $\mathbb{R}^n$

- (M^n, g) bola geodésica centrada na origem de raio R_0 em $\mathbb{R}^n$;
- $f(x) = \frac{1}{2(n-1)}(R_0^2 - |x|^2)$.

Exemplos de métricas de Miao-Tam

Bola geodésica em $\mathbb{R}^n$

- (M^n, g) bola geodésica centrada na origem de raio R_0 em $\mathbb{R}^n$;
- $f(x) = \frac{1}{2(n-1)}(R_0^2 - |x|^2)$.

Bola geodésica em $\mathbb{H}^n$

- (M^n, g) bola geodésica centrada em $p \in \mathbb{H}^n$ de raio R_0;
- $f(x) = \frac{1}{(n-1)}(1 - \frac{\cosh r(x)}{\cosh R_0})$.

Exemplos de métricas de Miao-Tam

Bola geodésica em $\mathbb{R}^n$

- (M^n, g) bola geodésica centrada na origem de raio R_0 em $\mathbb{R}^n$;
- $f(x) = \frac{1}{2(n-1)}(R_0^2 - |x|^2)$.

Bola geodésica em $\mathbb{H}^n$

- (M^n, g) bola geodésica centrada em $p \in \mathbb{H}^n$ de raio R_0;
- $f(x) = \frac{1}{(n-1)}(1 - \frac{\cosh r(x)}{\cosh R_0})$.

Bola geodésica em $\mathbb{S}^n$

- (M^n, g) bola geodésica centrada em $p \in \mathbb{S}^n$ de raio $R_0 < \frac{\pi}{2}$;
- $f(x) = \frac{1}{(n-1)}(\frac{\cos r(x)}{\cos R_0} - 1)$.

Alguns resultados existentes

Alguns resultados existentes

(Miao e Tam, 2009)

Se M é um domínio limitado com bordo suave em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$ (se $M^n \subset \mathbb{S}^n$, suponha ainda que $V(M) < \frac{1}{2}V(\mathbb{S}^n)$). Então a correspondente métrica nesse espaço é um ponto crítico do funcional volume $V(\cdot)$ em $\mathcal{M}_\gamma^R$ se, e somente se, M é uma bola geodésica.

Alguns resultados existentes

(Miao e Tam, 2009)

Se M é um domínio limitado com bordo suave em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$ (se $M^n \subset \mathbb{S}^n$, suponha ainda que $V(M) < \frac{1}{2}V(\mathbb{S}^n)$). Então a correspondente métrica nesse espaço é um ponto crítico do funcional volume $V(\cdot)$ em $\mathcal{M}_\gamma^R$ se, e somente se, M é uma bola geodésica.

Questão

As bolas geodésicas das formas espaciais simplesmente conexas $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são as únicas métricas críticas de Miao-Tam?

Alguns resultados existentes

(Miao e Tam, 2009)

Se M é um domínio limitado com bordo suave em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$ (se $M^n \subset \mathbb{S}^n$, suponha ainda que $V(M) < \frac{1}{2}V(\mathbb{S}^n)$). Então a correspondente métrica nesse espaço é um ponto crítico do funcional volume $V(\cdot)$ em $\mathcal{M}_\gamma^R$ se, e somente se, M é uma bola geodésica.

Questão

As bolas geodésicas das formas espaciais simplesmente conexas $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são as únicas métricas críticas de Miao-Tam?
Não!!!

Alguns resultados existentes

(Miao e Tam, 2009)

Se M é um domínio limitado com bordo suave em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$ (se $M^n \subset \mathbb{S}^n$, suponha ainda que $V(M) < \frac{1}{2}V(\mathbb{S}^n)$). Então a correspondente métrica nesse espaço é um ponto crítico do funcional volume $V(\cdot)$ em $\mathcal{M}_\gamma^R$ se, e somente se, M é uma bola geodésica.

Questão

As bolas geodésicas das formas espaciais simplesmente conexas $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são as únicas métricas críticas de Miao-Tam?
Não!!!

(Miao e Tam, 2011)

Construiram exemplos de métricas críticas conformemente planas que não são métricas de Einstein.

(Miao e Tam, 2011)

Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam localmente conformemente plana, simplesmente conexa e com bordo Σ isométrico à esfera canônica $\mathbb{S}^{n-1}$. Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.

(Miao e Tam, 2011)

Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam localmente conformemente plana, simplesmente conexa e com bordo Σ isométrico à esfera canônica $\mathbb{S}^{n-1}$. Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.

(Miao e Tam, 2011)

Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam Einstein e bordo Σ suave. Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.

Classificação de métricas críticas de Miao-Tam

- (Barros-Diógenes-Ribeiro Jr, 2015)
  ✓n=4, simp. conexa, Bach-flat e $\Sigma \approx \mathbb{S}^3$

Classificação de métricas críticas de Miao-Tam

- (Barros-Diógenes-Ribeiro Jr, 2015)
  ✓n=4, simp. conexa, Bach-flat e $\Sigma \approx \mathbb{S}^3$
- (Kim-Shin, 2016)
  ✓n=4, simp. conexa, $divW = 0$ e $\Sigma \approx \mathbb{S}^3$

Classificação de métricas críticas de Miao-Tam

- (Barros-Diógenes-Ribeiro Jr, 2015)
  ✓n=4, simp. conexa, Bach-flat e $\Sigma \approx \mathbb{S}^3$
- (Kim-Shin, 2016)
  ✓n=4, simp. conexa, $divW = 0$ e $\Sigma \approx \mathbb{S}^3$
- (Baltazar-Ribeiro Jr., 2017)
  ✓Ricci Paralelo

Classificação de métricas críticas de Miao-Tam

- (Barros-Diógenes-Ribeiro Jr, 2015)
  ✓n=4, simp. conexa, Bach-flat e $\Sigma \approx \mathbb{S}^3$
- (Kim-Shin, 2016)
  ✓n=4, simp. conexa, $divW = 0$ e $\Sigma \approx \mathbb{S}^3$
- (Baltazar-Ribeiro Jr., 2017)
  ✓Ricci Paralelo

Em qualquer caso temos que M^n é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.

(Batista-Diógenes-Raniere-Ribeiro Jr., 2016)

Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam, compacta, orientada, com bordo conexo Σ e curvatura escalar não negativa. Então, Σ é uma esfera bidimensional e

$$|\Sigma| \leq \frac{4\pi}{C(R)}, \tag{2}$$

onde $C(R) = \frac{R}{6} + \frac{1}{4|\nabla f|^2}$ é constante. Além disso, a igualdade em (2) ocorre se, e somente se, (M^3, g) é isométrica a bola geodésica em alguma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$.

(Batista-Diógenes-Raniere-Ribeiro Jr., 2016)

Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam, compacta, orientada, com bordo conexo Σ e curvatura escalar não negativa. Então, Σ é uma esfera bidimensional e

$$|\Sigma| \leq \frac{4\pi}{C(R)}, \tag{2}$$

onde $C(R) = \frac{R}{6} + \frac{1}{4|\nabla f|^2}$ é constante. Além disso, a igualdade em (2) ocorre se, e somente se, (M^3, g) é isométrica a bola geodésica em alguma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$.

Observação

Ainda em 2016, E. Barbosa et al. mostraram que este resultado também é válido no caso de curvatura escalar negativa, supondo a curvatura média do bordo $H > 2$.

Teorema (Barros, —, 2017)

Seja (M^n, g, f), $n \geq 4$, *uma métrica crítica de Miao-Tam, compacta, orientada, com bordo conexo* Σ *e curvatura escalar* $R = n(n-1)\varepsilon$, *onde* $\varepsilon = -1, 0, 1$. *Suponha que* Σ *seja uma variedade de Einstein com curvatura escalar* R^{Σ} *positiva. Se* $\varepsilon = -1$, *assumimos ainda que a curvatura média de* Σ *satisfaz* $H > n-1$. *Então temos*

$$|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{Y(\mathbb{S}^{n-1}, [g_{can}])}{C(R)}, \tag{3}$$

onde $C(R) = \frac{n-2}{n}R + \frac{n-2}{n-1}H^2$ *é uma constante positiva. Além disso, a igualdade ocorre em* (3) *se, e somente se,* (M^n, g) *é isométrica a uma bola geodésica em alguma das formas espaciais simplesmente conexas* $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{H}^n$.

Considerações

Considerações

- (M^n, g) variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$;

Considerações

- (M^n, g) variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$;
- $[g]$ a classe conforme de uma métrica $g \in \mathcal{M}$;

Considerações

- (M^n, g) variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$;
- $[g]$ a classe conforme de uma métrica $g \in \mathcal{M}$;
- Constante de Yamabe:

$$Y(M,[g]) = \inf_{\tilde{g}\in[g]} \frac{\int_M R_{\tilde{g}} dV_{\tilde{g}}}{\left(\int_M dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Considerações

- (M^n, g) variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$;
- $[g]$ a classe conforme de uma métrica $g \in \mathcal{M}$;
- Constante de Yamabe:

$$Y(M,[g]) = \inf_{\tilde{g}\in[g]} \frac{\int_M R_{\tilde{g}} dV_{\tilde{g}}}{\left(\int_M dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

- $Y(\mathbb{S}^n, [g_{can}]) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$, onde ω_n denota o volume da esfera canônica unitária $\mathbb{S}^n$.

Fatos sobre métricas críticas de Miao-Tam

Fatos sobre métricas críticas de Miao-Tam

$$\begin{cases} -(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g & \text{em} \quad M \\ f = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma. \end{cases}$$

Fatos sobre métricas críticas de Miao-Tam

$$\begin{cases} -(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g & \text{em} \quad M \\ f = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma. \end{cases}$$

- Curvatura escalar constante $R_g = n(n-1)\varepsilon$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$;

Fatos sobre métricas críticas de Miao-Tam

$$\begin{cases} -(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g & \text{em} \quad M \\ f = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma. \end{cases}$$

- Curvatura escalar constante $R_g = n(n-1)\varepsilon$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$;
- $|\nabla f|$ é constante positiva sobre Σ;

Fatos sobre métricas críticas de Miao-Tam

$$\begin{cases} -(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g & \text{em} \quad M \\ f = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma. \end{cases}$$

- Curvatura escalar constante $R_g = n(n-1)\varepsilon$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$;
- $|\nabla f|$ é constante positiva sobre Σ;
- Σ é uma hipersuperfície totalmente umbílica com curvatura média $H = \frac{1}{|\nabla f|}$;

Fatos sobre métricas críticas de Miao-Tam

$$\begin{cases} -(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - fRic_g = g & \text{em} \quad M \\ f = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma. \end{cases}$$

- Curvatura escalar constante $R_g = n(n-1)\varepsilon$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$;
- $|\nabla f|$ é constante positiva sobre Σ;
- Σ é uma hipersuperfície totalmente umbílica com curvatura média $H = \frac{1}{|\nabla f|}$;
- $2Ric(\nu, \nu) + R^{\Sigma} = R + \frac{n-2}{n-1}H^2$, onde $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ é o campo normal unitário exterior ao bordo Σ.

$$f\mathring{Ric} = \mathring{\nabla}^2 f$$

$$f|\mathring{Ric}|^2 = \langle \mathring{Ric}, \mathring{\nabla}^2 f\rangle = div(\mathring{Ric}(\nabla f)).$$

Lemma

Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, orientada, conexa e com bordo suave conexo Σ. Então,

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g = -H\int_\Sigma \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f)ds.$$

Proposição

Seja (M^n, g, f), $n \geq 3$, *uma métrica crítica de Miao-Tam compacta, orientada, conexa, com bordo suave conexo* Σ *e curvatura escalar* $R = n(n-1)\varepsilon$, *onde* $\varepsilon = -1, 0, 1$. *Então, a seguinte identidade ocorre*

$$\int_{\Sigma} R^{\Sigma} ds = 2H \int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g + C(R)|\Sigma|,$$

onde $C(R)$ *é uma constante dada por*

$$C(R) = \frac{n-2}{n-1}(H^2 + (n-1)^2\varepsilon).$$

(Ilias, 1983)

Seja (M^n, g), $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana compacta sem bordo. Suponha que $\mathcal{R}(M,g) \geq \mathcal{R}(\mathbb{S}^n, \frac{1}{\delta} g_{can}) = (n-1)\delta > 0$, então

$$\begin{aligned} \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g \right)^{\frac{n-2}{n}} &\leq [K(n,2)]^2 \left(\frac{\omega_n(\delta)}{|M|} \right)^{\frac{2}{n}} \int_M |\nabla f|^2 dV_g \\ &+ |M|^{-\frac{2}{n}} \int_M |f|^2 dV_g, \end{aligned}$$

para toda $f \in H^{1,2}(M)$, onde $\omega_n(\delta) = \delta^{-\frac{n}{2}} \omega_n$.

$$\mathcal{R}(M,g) = \inf\{Ric(V,V) \mid V \in TM, |V|_g = 1\};$$

$$K(n,2) = \sqrt{\frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}}$$

é a melhor constante para desigualdades do tipo Sobolev:

$$\Big(\int_\Sigma |\varphi|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} \leq A\Big(\int_\Sigma |\nabla\varphi|^q ds\Big)^{\frac{1}{q}} + B\Big(\int_\Sigma |\varphi|^q ds\Big)^{\frac{1}{q}}, \quad (4)$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n-1}$, $1 \leq q < n-1$ e $q \in \mathbb{R}$.

Aplicando à variedade Σ^{n-1} o teorema citado devido à Ilias para $\delta = \frac{R^{\Sigma}}{(n-1)(n-2)} > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Sigma} |\varphi|^{\frac{2(n-1)}{n-3}} ds\right)^{\frac{n-3}{n-1}} &\leq [K(n-1,2)]^2 \left(\frac{\omega_{n-1}(\delta)}{|\Sigma|}\right)^{\frac{2}{n-1}} \int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 ds \\ &+ |\Sigma|^{-\frac{2}{n-1}} \int_{\Sigma} |\varphi|^2 ds, \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in H^{1,2}(\Sigma)$, onde $\omega_{n-1}(\delta) = \delta^{-\frac{n-1}{2}} \omega_{n-1}$, $\omega_{n-1} = |\mathbb{S}^{n-1}|$ e $K(n-1,2)$ é a melhor constante para desigualdades do tipo Sobolev.

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Sigma |\varphi|^{\frac{2(n-1)}{n-3}} ds\right)^{\frac{n-3}{2(n-1)}} &\leq [K(n-1,2)]\left(\frac{\omega_{n-1}(\delta)}{|\Sigma|}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_\Sigma |\nabla\varphi|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ |\Sigma|^{-\frac{1}{n-1}}\left(\int_\Sigma |\varphi|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\left(\int_\Sigma |\varphi|^{\frac{2(n-1)}{n-3}} ds\right)^{\frac{n-3}{2(n-1)}} &\leq [K(n-1,2)]\left(\frac{\omega_{n-1}(\delta)}{|\Sigma|}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_\Sigma |\nabla\varphi|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ |\Sigma|^{-\frac{1}{n-1}}\left(\int_\Sigma |\varphi|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Com isto, temos

$$(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}} \geq \delta|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}}.$$

$$
\begin{aligned}
\Big(\int_\Sigma |\varphi|^{\frac{2(n-1)}{n-3}} ds\Big)^{\frac{n-3}{2(n-1)}} &\le [K(n-1,2)]\Big(\frac{\omega_{n-1}(\delta)}{|\Sigma|}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\Big(\int_\Sigma |\nabla\varphi|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&+ |\Sigma|^{-\frac{1}{n-1}}\Big(\int_\Sigma |\varphi|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Com isto, temos

$$
(\omega_{n-1})^{\frac{2}{n-1}} \ge \delta|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}}.
$$

Substintuindo $\delta = \frac{R^\Sigma}{(n-1)(n-2)} > 0$, obtemos

$$
Y(\mathbb{S}^{n-1}, [g_{can}]) \ge R^\Sigma|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}}. \tag{5}
$$

Prova

Integrando a equação anterior sobre Σ e usando a Proposição acima, obtemos

$$|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{Y(\mathbb{S}^{n-1},[g_{can}])}{C(R)}. \tag{6}$$

Integrando a equação anterior sobre Σ e usando a Proposição acima, obtemos

$$|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{Y(\mathbb{S}^{n-1}, [g_{can}])}{C(R)}. \tag{6}$$

Além disso, se ocorre a igualdade em (6) devemos ter

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g = 0.$$

Isto é, (M^n, g) é uma variedade de Einstein.

Prova

Integrando a equação anterior sobre Σ e usando a Proposição acima, obtemos

$$|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{Y(\mathbb{S}^{n-1}, [g_{can}])}{C(R)}. \tag{6}$$

Além disso, se ocorre a igualdade em (6) devemos ter

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g = 0.$$

Isto é, (M^n, g) é uma variedade de Einstein.Logo, temos que M^n é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.

Prova

Integrando a equação anterior sobre Σ e usando a Proposição acima, obtemos

$$|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{Y(\mathbb{S}^{n-1}, [g_{can}])}{C(R)}. \tag{6}$$

Além disso, se ocorre a igualdade em (6) devemos ter

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g = 0.$$

Isto é, (M^n, g) é uma variedade de Einstein.Logo, temos que M^n é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.
A recíproca??

Prova

Integrando a equação anterior sobre Σ e usando a Proposição acima, obtemos

$$|\Sigma|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{Y(\mathbb{S}^{n-1},[g_{can}])}{C(R)}. \tag{6}$$

Além disso, se ocorre a igualdade em (6) devemos ter

$$\int_M f|\mathring{Ric}|^2 dV_g = 0.$$

Isto é, (M^n, g) é uma variedade de Einstein.Logo, temos que M^n é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.
A recíproca?? (Exercício)

Corolário

Seja (M^n, g, f), $n \geq 4$, uma métrica crítica de Miao-Tam, compacta, orientada, com bordo conexo Σ isométrico à esfera canônica $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ de raio $r = \left(\frac{(n-1)(n-2)}{C(R)}\right)^{1/2}$, e curvatura escalar $R = n(n-1)\varepsilon$, onde $\varepsilon = -1, 0, 1$. Além disso, se $\varepsilon = -1$, assumimos que a curvatura média de Σ satisfaz $H > n-1$. Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em alguma das formas espaciais simplesmente conexas $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.

Corolário

Seja (M^n, g, f), $n \geq 4$, *uma métrica crítica de Miao-Tam, compacta, orientada, com bordo conexo* Σ *isométrico à esfera canônica* $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ *de raio* $r = \left(\frac{(n-1)(n-2)}{C(R)}\right)^{1/2}$, *e curvatura escalar* $R = n(n-1)\varepsilon$, *onde* $\varepsilon = -1, 0, 1$. *Além disso, se* $\varepsilon = -1$, *assumimos que a curvatura média de* Σ *satisfaz* $H > n-1$. *Então* (M^n, g) *é isométrica a uma bola geodésica em alguma das formas espaciais simplesmente conexas* $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{H}^n$.

Corolário

Com as mesmas condições do Teorema, porém $R \geq 0$, *deduzimos*

$$\left(\frac{nH}{n-1}\right)^{\frac{2}{n-1}} |M|^{\frac{2}{n-1}} \leq \frac{Y(\mathbb{S}^{n-1}, [g_{can}])}{C(R)}. \tag{7}$$

Ainda, a igualdade acontece em (7) *se, e somente se,* (M^n, g) *é isométrica a uma bola geodésica no espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$.

Obrigado!