

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
FACULDADE DE GEOFÍSICA

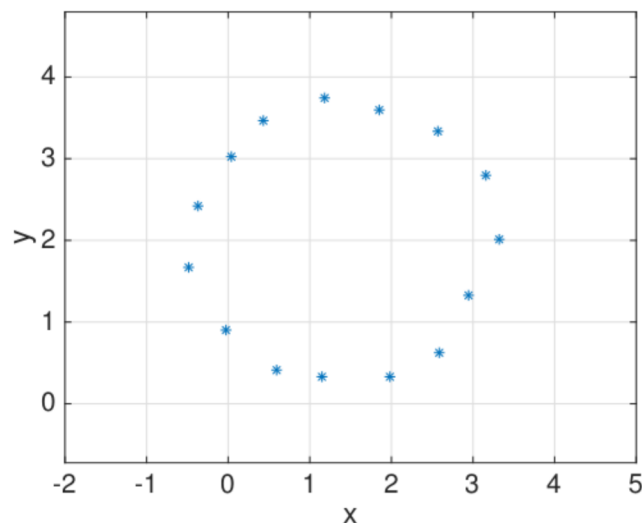
PROVA DE PROGRAMAÇÃO COMPUTACIONAL

Prof. Cícero Régis

26/02/21

## Mais uma de mínimos quadrados

Os pontos mostrados na figura deveriam fazer parte de uma circunferência, mas como as medidas de suas coordenadas contêm um certo nível de erro, é impossível construir uma circunferência que passe por todos eles. Então, vamos estimar as propriedades da circunferência que melhor ajusta este conjunto de pontos usando o método de mínimos quadrados lineares.



O problema é construído da seguinte maneira: A geometria analítica nos ensina que a equação de uma circunferência de raio  $R$ , com centro nas coordenadas  $(x_0, y_0)$  é

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Abrindo os quadrados, esta equação pode ser reescrita como

$$x^2 - 2x x_0 + x_0^2 + y^2 - 2y y_0 + y_0^2 = R^2.$$

Agora, vamos agrupar os termos com os parâmetros que definem a circunferência:

$$2x_0 x + 2y_0 y + R^2 - x_0^2 - y_0^2 = x^2 + y^2.$$

Criamos um problema linear definindo três parâmetros relacionados aos três parâmetros da circunferência:

$$p_1 = 2x_0,$$

$$p_2 = 2y_0,$$

$$p_3 = R^2 - x_0^2 - y_0^2.$$

Para um conjunto de  $N$  pontos, teremos um sistema de equações lineares da seguinte forma:

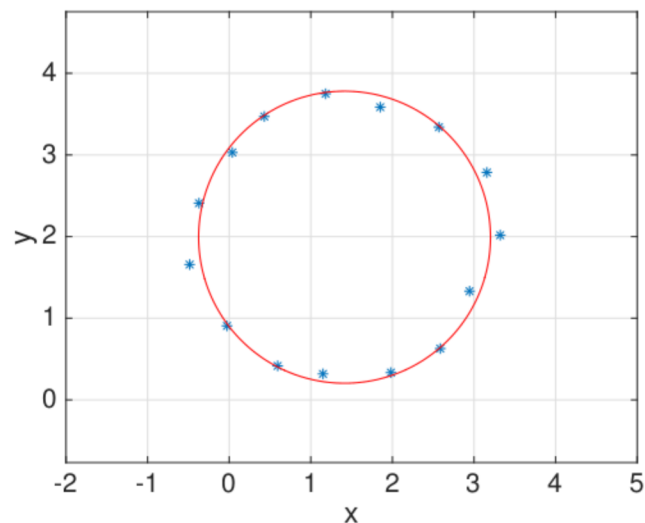
$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 y_1 + p_3 &= x_1^2 + y_1^2 \\ p_1 x_2 + p_2 y_2 + p_3 &= x_2^2 + y_2^2 \\ &\vdots \\ p_1 x_N + p_2 y_N + p_3 &= x_N^2 + y_N^2 \end{aligned}$$

que na forma matricial fica

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ \vdots \\ x_N^2 + y_N^2 \end{bmatrix}.$$

Então, encontramos a solução de mínimos quadrados para este sistema sobredeterminado e a partir dela determinamos  $x_0$ ,  $y_0$  e  $R$ .

Sua tarefa é construir um programa que receba os valores das coordenadas  $x$  e  $y$  de  $N$  pontos e calcule uma estimativa do raio e das coordenadas do centro da circunferência que melhor ajusta estes pontos, ou seja, uma assim:



Teste seu programa com as coordenadas que estão no arquivo `dados_circ.dat`. Os 15 pontos no arquivo foram gerados com  $x_0 = 1.4$ ,  $y_0 = 2$  e  $R = 1.8$ . Verifique se sua estimativa está próxima destes valores.