UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso

UM BREVE COMENTÁRIO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Rafael Sergio Sampaio Emidio

Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

BELÉM - PA

2022

Rafael Sergio Sampaio Emidio

UM BREVE COMENTÁRIO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA) e ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais, como requisito parcial, para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

BELÉM - PA

2022

Rafael Sergio Sampaio Emidio

UM BREVE COMENTÁRIO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA) e ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais, como requisito parcial, para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa (Orientador)
FACMAT-UFPA

Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva
FACMAT-UFPA

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
FACMAT-UFPA

Data da defesa:
Conceito:

"À minha mãe, Sonia Maria Teixeira Sampaio
e à toda minha família."

Agradecimentos

Primeiramente sou grato a Deus por ter me dado saúde e vigor para finalizar esta caminhada, que toda honra seja dada à Ele.

À minha mãe, Sonia Maria Teixeira Sampaio, que sempre incentivou meus estudos não apenas com suporte financeiro mas também com palavras de motivção e encorajamento.

Ao meu falecido pai, Francisco Sergio Emidio, apesar da distância sempre me incentivou e deu suporte financeiro aos meus estudos até o 3° ano do Ensino médio. No começo de 2022 em Manaus, ele veio a falecer devido á um câncer, mas sou muito grato pela vida dele.

À minha vó, Maria da Conceição Gomes Teixeira, ao meu tio Daniel Teixeira Sampaio, por sempre terem me incentivado e acreditado em mim. Um agradecimento especial ao meu tio Izaque Teixeira Sampaio por ter sido meu paraninfo e já ter providenciado com antecedência meu anel de formatura.

Ao meu orientador Prof. Dr. Augusto Cesar dos Reis Costa, por toda a sua orientação durante a minha elaboração do trabalho e também por sua disponibilidade para tirar minhas dúvidas.

Agradeço aos membros da banca examinadora: Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva e Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma, por aceitarem participar da defesa do meu Trabalho de Conclusão de Curso.

À Faculade de Matemática e aos amigos que fiz durante curso.

Por último, à Universidade Federal do Pará, grato por ter passado por essa íncrivel e grandiosa instituição.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um breve estudo sobre equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Estudamos alguns métodos analíticos de determinação de soluções e importantes aplicações em determinadas áreas do conhecimento humano; como na biologia, química, física e matemática, envolvendo essas classes de equações e métodos.

Palavras-chave: Equações diferenciais de primeira ordem, solução, aplicações.

Abstract

In this paper we present a brief study of first order ordinary differential equations. We study some analytical methods for determining solutions and important applications in certain areas of human knowledge; such as biology, chemistry, physics, and mathematics, involving these classes of equations and methods.

Key-words: First order differential equations, solution, applications.

Lista de figuras

Sumário

1 Introdução

Newton e Leibniz, os criadores do cálculo, foram uns dos primeiros matemáticos que deram início aos estudos das equações diferenciais. Para resolver problemas físicos, era necessário equacionar o fenômeno estudado e através do cálculo de primitivas era possível encontrar a solução do problema. Um dos métodos mais usados era a quadratura, este método consiste em reduzir o problema para obter a solução pelo cálculo de primitivas. Devido ao baixo número de funções que poderiam ser resolvidas por funções elementares, surgiu no século XIX, o uso das séries de funções. Porém, algum tempo depois o método das séries de funções foi sendo usado de uma maneira descuidada, para tentar sanar isso surgiram os teoremas de existência e unicidade, que marcaram o inicío da fase moderna com Poincaré, no final do século XIX.

Na evolução dos estudos das equações diferenciais de primeira ordem foram surgindo métodos analíticos para a resolução dessas equações que se originaram de fenômenos físicos, químicos, biológicos, matemáticos, e entre outros.

Neste trabalho, no capítulo 2, apresentaremos uma breve teoria sobre equações diferenciais de primeira ordem e alguns métodos analíticos de resolução.

O capítulo 3 versa sobre aplicações envolvendo a teoria do capítulo 2.

2 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas. A forma geral de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é designada por

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

Neste capítulo estudaremos alguns casos especiais.

2.1 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

A forma geral das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é a seguinte

$$\dot{x} = p(t)x + q(t), \tag{2.1}$$

onde p e q são funções reais contínuas definidas em um intervalo aberto $[a, b]$ e $\dot{x}$ é a notação de derivada para x em relação a variável t. Precisamos encontrar uma função diferenciável $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ para satisfazer a equação (2.1). Para a solução desta equação, podemos obter a sua solução geral para encontrarmos todas as suas soluções, ou obtemos a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = p(t)x + q(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $t_0 \,\epsilon\, [a, b]$ e x_0 é um ponto dado. Verificaremos que (2.2) possui apenas uma solução, mas antes vamos determinar a solução geral de (2.1). Podemos considerar a equação de crescimento exponencial para uma solução da equação (2.1), dada por

$$\dot{x} = kx(t), \tag{2.3}$$

onde k é uma constante. Considerando uma função $x(t) = e^{kt}$ como uma solução de (2.3), os seus múltiplos ce^{kt} também serão soluções de (2.3), onde c é uma constante arbitrária. Para provarmos tal afirmação, vamos considerar a expressão $x(t)e^{-kt} = 1$ e expressando sua derivada em relação a t, obtemos

$$\frac{d}{dt}x(t)e^{-kt} = \dot{x}e^{-kt} - kx(t)e^{-kt} = 0$$

$$\dot{x}e^{-kt} = kx(t)e^{-kt}$$

$$\dot{x} = kx(t),$$

podemos notar que voltamos para equação (2.3), isto ocorre pois

$$x(t) = ce^{kt}$$

$$c = \frac{x(t)}{e^{kt}},$$

logo $x(t)e^{-kt} = c$, portanto ce^{kt} é uma solução geral de (2.3).

Então obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

como a solução geral de (2.3) é da forma ce^{kt}, podemos determinar a constante c:

$$x(t_0) = ce^{kt_0} = x_0.$$

Então, considerando $c = \dfrac{x_0}{e^{kt_0}}$ e substituindo na solução geral de (2.3), obtemos

$$x(t) = \frac{x_0}{e^{kt_0}} \cdot e^{kt}.$$

Portanto, a solução do problema é dada por

$$x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)},$$

para todo $t \epsilon \mathbb{R}$.

A equação (2.1) é uma equação linear homogênea. Logo, temos o seguinte problema de valor inicial para $q(t) \equiv 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = p(t)x \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

O problema (2.4) é um problema inicial de valor homogêneo, cuja a solução é dada por

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}. \tag{2.5}$$

Com o objetivo de simplificar as expressões, reescrevemos a equação (2.5) da seguinte maneira:

$$T(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}. \tag{2.6}$$

A seguir, mostraremos algumas propriedades da função T.

$(i) : T(t_0, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_0} p(s)\, ds} = e^{t_0 - t_0} = e^0 = 1.$

Portanto, $T(t_0,t_0)=1$.

$(ii): T(t_0,t)^{-1}=(e^{\int_t^{t_0}p(s)\,ds})^{-1}=e^{\int_{t_0}^{t}p(s)\,ds}=T(t,t_0)$

Logo, $T(t_0,t)^{-1}=T(t,t_0)$.

$(iii): T(t,t_0)T(t_0,s)=e^{\int_{t_0}^{t}p(s)\,ds}\cdot e^{\int_s^{t_0}p(s)\,ds}=e^{\int_{t_0}^{t}p(s)+\int_s^{t_0}p(s)\,ds}=e^{\int_s^{t}p(s)\,ds}=T(t,s)$

Então, $T(t,t_0)T(t_0,s)=T(t,s)$.

Concluímos que para a função T, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}&T(t_0,t_0)=1,\\&T(t,t_0)=T(t_0,t)^{-1},\\&T(t,t_0)T(t_0,s)=T(t,s).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Para determinarmos a solução geral do problema de valor incial (2.2), utilizaremos um fator integrante $\mu(t)$, e multiplicaremos em ambos os lados da equação:

$$\mu(t)(\dot{x}-p(t)x)=\mu(t)q(t).$$

Determinaremos $\mu(t)$ igualando o primeiro membro da expressão anterior a derivada do produto de x por μ, logo

$$\mu(\dot{x}-p(t)x)=\frac{d}{dt}(\mu x)=\dot{\mu}x+\mu\dot{x}.$$

Então, podemos igualar as seguintes expressões

$$-\mu p(t)x=\dot{\mu}x.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\dot{\mu}&=-\mu p(t)\\\frac{\dot{\mu}}{\mu}&=-p(t)\\\frac{d}{dt}(ln\mu)&=-p(t),\end{aligned}$$

integrando em ambos os lados, obtemos

$$ln\mu=-\int p(s)\,ds.$$

Logo, calculando uma primitiva de p obtemos para o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} = e^{\int_{t}^{t_0} p(s)\,ds} = T(t_0, t).$$

Então temos de $\dfrac{d}{dt}(\mu x) = \mu(t)q(t)$:

$$\frac{d}{dt}(T(t_0,t)x(t)) = T(t_0,t)q(t),$$

integrando em ambos os lados de t_0 a t:

$$T(t_0,t)x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} T(t_0,s)q(s)\,ds.$$

Portanto, podemos obter a solução do problema de valor inicial (2.2) e utilizando as propriedades (2.7), multiplicamos a última expressão por $T(t,t_0)$ e vamos obter:

$$x(t) = T(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t,s)q(s)\,ds, \tag{2.8}$$

a equação (2.8) é chamada de fórmula de variação de constantes, fórmula esta que pode ser escrita como solução do problema de valor inicial (2.2).

Podemos concluir que a existência da equação obtida é dada pela verificação se ela é solução da equação diferencial. A diferenciabilidade das expressões acima são dadas pela condição de p e q serem contínuas em $[a,b]$.

Em particular, se o coeficiente $p(t)$ for igual a uma constante k, temos

$$T(t,t_0) = e^{k(t-t_0)}.$$

Então temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = kx + q(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

e pela fórmula de variação de constantes, dada na equação (2.8), obtemos

$$x(t) = e^{k(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{k(t-s)}q(s)ds.$$

Se temos um ponto a associado a uma função $x_1(t)$ e um ponto b associado a uma função $x_2(t)$, podemos verificar que essas funções são soluções da equação (2.1) da seguinte maneira:

$$x_1(t) = ae^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds},$$

$$x_2(t) = be^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}.$$

Logo temos

$$x_1(t) - x_2(t) = ae^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} - be^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}$$
$$x_1(t) - x_2(t) = (a-b)e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}$$
$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds},$$

então podemos afirmar que $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução do problema de valor inicial (2.4), onde $x_0 = a - b$. Logo, todas as soluções de (2.1) são obtidas somando uma solução particular com a solução geral da equação homogênea associada em (2.4). Logo, podemos dizer que o termo da fórmula da variação de constantes

$$\int_{t_0}^{t} e^{k(t-s)} q(s) ds$$

é uma solução particular de (2.1). Assim temos um metódo mais rápido para determinar uma solução de (2.1), considerando uma constante $q(t) \equiv q_0$, $x_p(t) = -q_0/k$ é uma solução particular de

$$\dot{x} = kx + q_0, \tag{2.9}$$

pois

$$\dot{x} = k.\frac{-q_0}{k} + q_0$$
$$\dot{x} = 0.$$

Então temos,

$$\dot{x} = kx + q_0$$
$$kx = \dot{x} - q_0$$
$$x(t) = \frac{\dot{x}}{k} - \frac{q_0}{k}.$$

Portanto,

$$x(t) = ce^{kt} - \frac{q_0}{k}$$

será a solução geral de (2.9), tal que c é uma constante qualquer que pode ser obtida através da condição $x(t_0) = x_0$.

2.2 Equações Separáveis

Uma equação diferencial da forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)},\ g(y) \neq 0, \tag{2.10}$$

é chamada de equação separável, onde $y' = dy/dx$. Consideramos f e g funções contínuas em intervalos abertos reais, tal que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $g : (c, d) \to \mathbb{R}$. Logo escrevemos (2.10) da forma

$$g(y)y' = f(x). \tag{2.11}$$

Seja uma função $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Se $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ e $y((\alpha, \beta)) \subset (c, d)$, tal que $g(y(x)) \neq 0$, a função y será uma solução de (2.10) para todo $x \ \epsilon\ (\alpha, \beta)$. Como a equação (2.10) não é linear, as soluções não necessariamente estarão definidas para todo x no segundo membro definido. Considerando $y(x)$ uma solução e G uma primitiva de g, onde $G' = g$, obtemos a partir de (2.11):

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = f(x)$$

$$G(y(x)) = f(x)dx,$$

então obtemos

$$G(y(x)) = F(x) + C, \tag{2.12}$$

onde F é uma primitiva de f.

Dado um ponto $x_0 \ \epsilon\ (\alpha, \beta)$, então temos que $y(x_0) = y_0 \ \epsilon\ (c, d)$. Logo a constante C será determinada da seguinte maneira:

$$C = G(y(x)) - F(x)$$

$$C = G(y(x_0)) - F(x_0)$$

$$C = G(y_0) - F(x_0),$$

substituindo C na expressão (2.12), obtemos

$$G(y(x)) = F(x) + G(y_0) - F(x_0)$$

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0).$$

Como G é uma primitiva de g e F é uma primitiva de f, podemos escrever a última expressão como

$$\int_{y_0}^{y(x)} g(y)\, dy = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx. \tag{2.13}$$

O que mostramos acima foi que dada uma solução de (2.10), esta solução irá satisfazer a expressão (2.12). Podemos concluir que dada uma relação $G(y) = F(x) + C$ e um ponto (x_0, y_0) que satisfaz essa relação, onde $G'(y_0) = g(y_0) \neq 0$, dado também um intervalo aberto (α, β) contendo x_0 e uma função de classe C^1, através do Teorema das funções implícitas podemos garantir que esse intervalo existe e que satifaz a relação (2.12), logo trata-se de uma solução de (2.1). Em seguida, analisaremos alguns exemplos de equações separáveis.

Exemplo 1: Resolva a equação $y' = \dfrac{x}{y}$.

Resolução: Como $yy' = x$, obtemos $y^2 = x^2 + C$. Verificaremos algumas soluções dessa equação variando a constante C. Por exemplo, quando $C = 0$ obtemos quatro soluções:

$$y_1(x) = x,\ x > 0;$$

$$y_2(x) = -x,\ x > 0;$$

$$y_3(x) = x,\ x < 0;$$

$$y_4(x) = -x,\ x < 0.$$

Para $C = 1$, temos duas soluções:

$$y_1(x) = +\sqrt{x^2+1},\ -\infty < x < \infty,$$

$$y_2(x) = -\sqrt{x^2+1},\ -\infty < x < \infty.$$

E para $C = -1$, temos quatro soluções:

$$y_1(x) = +\sqrt{x^2-1},\ x > 1;$$

$$y_2(x) = -\sqrt{x^2-1},\ x > 1;$$

$$y_3(x) = +\sqrt{x^2-1},\ x < -1;$$

$$y_4(x) = -\sqrt{x^2-1},\ x > -1.$$

Através dos intervalos (a,b) e (α,β) podemos encontrar várias outras soluções, porém analisando cada ponto (x_0,y_0), onde $y_0 \neq 0$, temos somente uma solução $y(x)$, tal que algumas soluções se estendem para todo x e outras apenas por uma semirreta. Então a solução do problema de valor inicial para $y(3)=2$ é dado por $C=5$, logo a solução é

$$y(x) = +\sqrt{x^2-5},\ x > \sqrt{5}.$$

Exemplo 2: Resolva a equação $y' = \dfrac{x^2}{y^2}$.

Resolução: Podemos escrever este exemplo na forma $y^2y' = x^2$, logo obtemos $y^3 = x^3 + C$. Analisando as soluções, para $C=0$, temos duas soluções:

$$y_1(x) = x,\ x > 0;$$

$$y_2(x) = x,\ x < 0.$$

Para $C=1$, obtemos outras duas soluções:

$$y_1(x) = \sqrt[3]{x^3+1},\ x < -1;$$

$$y_2(x) = \sqrt[3]{x^3+1},\ x > -1.$$

Para $C=-1$, temos:

$$y_1(x) = \sqrt[3]{x^3-1},\ x < 1;$$

$$y_2(x) = \sqrt[3]{x^3-1},\ x > 1.$$

Então podemos concluir que a solução do problema de valor inicial $y^2y' = x^2$, para $y(2)=-3$, obtem-se que $C=-35$, logo

$$y(x) = \sqrt[3]{x^3-35},\ x < \sqrt[3]{35}.$$

Exemplo 3: Resolva a equação $y' = -2xy$.

Resolução: Podemos notar que $g(y) = 1/y$, logo a solução não passará por $y(x) = 0$. Escrevemos a equação na forma

$$\frac{y'}{y} = -2x,\ y \neq 0,$$

então obtemos

$$lny = -x^2 + C.$$

Portanto, obtemos duas soluções para cada $C \in \mathbb{R}$:

$$y_1(x) = e^{-x^2+C},$$

$$y_2(x) = -e^{-x^2+C}.$$

A seguir, apresentaremos algumas definições e teoremas.

Definição 2.1: Uma equação da forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.14}$$

é chamada de equação autônoma, pois a função f depende apenas de x e não da variável independente t.

Uma propriedade dessas equações diz que se $x(t)$ é solução de (2.14), então uma função $y(t)$ também é solução de (2.14), porém esta função depende não só de t mas também de uma constante c, ou seja, $y(t) = x(t + c)$. Então podemos afirmar através da existência e unicidade de solução que a solução do problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

é dada por $x(t)$ se e somente se, $y(t) = x(t + t_0)$ for solução de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Concluimos que para equações autônomas, consideramos apenas condições iniciais onde $t_0 = 0$.

Definição 2.2: Se $\bar{x}$ é um zero da função, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$, logo $x(t) \equiv \bar{x}$ é uma solução de (2.14). Sendo assim, $x(t)$ é chamada de solução equilíbrio ou estacionária e o ponto $\bar{x}$ é chamado de ponto de equilíbrio ou singularidade.
Definição 2.3: Dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|x_0 - \bar{x}| < \varepsilon$. $\bar{x}$ será um ponto de equilíbrio estável, se a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

é dada por $|x(t) - \bar{x}| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Um ponto estável $\bar{x}$, será chamado de assintoticamente estável se existir um $\eta > 0$, tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$, onde $|x_0 - \bar{x}| < \eta$. Um ponto de equilíbrio será instável quando ele não for estável.

Teorema 2.1: Se $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio e $f(\bar{x})$ é uma solução de (2.14), $\bar{x}$ é assintoticamente estável se $f'(\bar{x}) < 0$ e $\bar{x}$ é assintoticamente instável quando $f'(\bar{x}) > 0$.
Demonstração: Elevando a expressão $x(t) - \bar{x}$ ao quadrado e analisando a sua variação através da regra da cadeia, temos que

$$\frac{d}{dt}(x(t) - \bar{x})^2 = 2(x(t) - \bar{x})\dot{x},$$

se considerarmos $\dot{x} = f(x)$ e x como uma função dependente da variável t, temos a seguinte expressão:

$$2(x(t) - \bar{x})f(x(t)).$$

Como $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio, consequentemente, pela definição 2, temos que $f(\bar{x}) = 0$. Através do Teorema do Valor Médio, a última expressão pode ser obtida da seguinte maneira:

$$f'(\xi(t)) = \frac{f(x(t)) - f(\bar{x})}{x(t) - \bar{x}},$$

onde $f'(\xi(t))$ é um valor entre $x(t)$ e $\bar{x}$, então multiplicando o numerador e o denominador da expressão acima por $2(x(t) - \bar{x})$, obtemos

$$f'(\xi(t)) = \frac{f(x(t)) - f(\bar{x})}{x(t) - \bar{x}} \times \frac{2(x(t) - \bar{x})}{2(x(t) - \bar{x})}$$

$$f'(\xi(t)) = \frac{2(x(t) - \bar{x})[f(x(t)) - f(\bar{x})]}{2(x(t) - \bar{x})^2}$$

$$2(x(t) - \bar{x})[f(x(t)) - f(\bar{x})] = 2(x(t) - \bar{x})^2 f'(\xi(t)),$$

e como $f(\bar{x}) = 0$, podemos escrever:

$$2(x(t) - \bar{x})(f(x(t)) = 2(x(t) - \bar{x})^2 f'(\xi(t)).$$

Se analisarmos $\bar{x}$ como um ponto assintóticamente estável, ou seja, $f'(\bar{x}) < 0$, pela continuidade de f' existe $\eta > 0$, tal que $f'(x) < -\eta < 0$ e existe um $\delta > 0$ para todo $|x - \bar{x}| < \delta$. Então, para qualquer ponto t_0, temos que $|x(t_0) - \bar{x}| < \delta$ é uma solução para (2.14), consequentemente a variação de $x(t) - \bar{x}$ dada por $\alpha(t) = (x(t) - \bar{x})^2$ é decrescente para $t \geq t_0$. Podemos analisar também que

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) \leq -\eta\alpha(t) \text{ para } t \geq t_0,$$

considerando uma solução geral para (2.14), temos que $\alpha(t) \leq ce^{-\eta t}$, isto implica que $x(t)$ tende a $\bar{x}$ quando $t \to \infty$. Para $f'(\bar{x}) > 0$, temos que a solução para (2.14) é dada por $|x(t_0) - \bar{x}| > \delta$, então $\alpha(t) = (x(t) - \bar{x})^2$ é crescente para $t \geq t_0$.

A seguir enunciaremos o teorema de Existência, Unicidade e Depedência Contínua. Veremos que este teorema nos permite encontrar a solução de um problema de valor inicial, através da existência e unicidade desta solução.

Teorema 2.2: Seja Ω um intervalo aberto no plano (x, y), neste intervalo está definido a função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Supondo que a derivada parcial em relação à y, dada por $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ também seja contínua, temos para cada ponto (x_0, y_0) em Ω um intervalo aberto I que contém x_0, uma única função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$, onde $(x, \phi(x)) \, \epsilon \, \Omega$ para todo $x \, \epsilon \, I$. Logo, teremos a solução do problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

3 Aplicações

3.1 Dinâmica de uma População e Noções de Estabilidade

Nesta sessão veremos os conceitos de estabilidade e instabilidade através de alguns modelos criados para análise da variação de uma população com o tempo. Cada modelo leva em conta a influência de vários fenômenos biológicos e sociológicos na evolução da população, e cada modelo possui uma taxa de crescimento da população $p(t)$, onde t é o tempo, taxa essa definida por $\dot{p}(t)/p(t)$.

3.1.1 O Modelo Malthusiano

Este modelo basicamente assume que a taxa de crescimento de uma população é dado por uma constante λ, então a equação que rege o crescimento dessa população é dado

$$\dot{p} = \lambda p. \tag{3.1}$$

Então com base nos estudos feitos anteriormente sobre equações lineares de primeira ordem, vemos que (3.1) é um problema de valor inicial homogêneo, considerando p_0 como população inicial, temos como solução geral:

$$p(t) = p_0 e^{\lambda(t-t_0)},$$

e com a condição inicial $p(t_0) = p_0$, a solução para (3.1) é dada por

$$p(t) = p(t_0)e^{\lambda(t-t_0)},$$

onde esta solução apresenta um crescimento exponencial se $\lambda > 0$, porém não é possível que este crescimento se mantenha para sempre. O modelo apresentado por Malthus gerou várias controvérsias no século XIX, pois ele afirmava que a população mundial crescia em razão geométrica e os recursos para sobrevivência humana cresciam em razão aritmética. Portanto a tendência da humanidade é ser controlada por fome, doenças, miséria, etc. Um modelo desta natureza pode descrever o crescimento populacional de micro-organismos que se reproduzem por mitose.

3.1.2 O Modelo de Verhulst - A Logística

A constante λ é a taxa de crescimento da população, dado pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade, ou seja: $\lambda = \lambda_n - \lambda_m$. Este modelo propõe que λ seja constante, logo este modelo não leva em conta certos mecânismos de controle populacional, como hábitos sexuais e comportamento coletivo. Verhulst propôs um modelo em que a taxa de crescimento descresce linearmente com a população, modelo este dado por: $\lambda = a - bp$, onde a e b são constantes positivas. O modelo de Verhulst pode ser escrito na equação diferencial separável como

$$\dot{p} = (a - bp)p. \tag{3.2}$$

Podemos observar que ainda não é um modelo ideal, pois não leva em conta que a taxa de produção de novos seres da espécie humana, depende da idade dos pais. Existem modelos que levam este e outros fatores em consideração através de equações diferenciais com retardamento e equações integro-diferenciais. A equação (3.2) é conhecida como equação de Verhulst-Pearl, desenvolvida por Verhulst para estudar as populações da França e da Bélgica em 1834, e em 1920 por Pearl e Reed para o estudo da população dos Estados Unidos.

Podemos analisar que os modelos acima são funções que não dependem da variável t e sim da variável p, logo as equações (3.1) e (3.2) são exemplos de equações autônomas, onde seus pontos de equilibrío são dados por $\bar{x} = 0$ para (3.1), $\bar{x} = 0$ e $\bar{x} = a/b$ para (3.2). Podemos verificar também que para (3.1), $\bar{x} = 0$ é um ponto assintoticamente instavel. Para (3.2), $\bar{x} = a/b$ será um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e $\bar{x} = 0$ será um ponto instável.

Verificaremos a seguinte decomposição, para integrar a expressão (3.2):

$$\frac{1}{ap} + \frac{b}{a(a-bp)} = \frac{a(a-bp) + abp}{a^2p(a-bp)}$$

$$\frac{a^2}{a^2p(a-bp)} = \frac{1}{p(a-bp)},$$

logo

$$\frac{1}{p(a-bp)} = \frac{1}{ap} + \frac{b}{a(a-bp)}.$$

Multiplicando a última expressão por $\dot{p}$, obtemos

$$\frac{\dot{p}}{ap} + \frac{b\dot{p}}{a(a-bp)} = 1,$$

integrando em ambos os lados, temos a seguinte expressão

$$\frac{1}{a}lnp - \frac{1}{a}ln(a-bp) = t + C, \; C = constante$$

$$\frac{1}{a}lnp = t + C + \frac{1}{a}ln(a - bp)$$
$$lnp = at + aC + ln(a - bp).$$

Então temos

$$|p| = |a - bp|e^{at} \cdot e^{aC},$$

se considerarmos $p(t_0) = p_0$, obtemos

$$|p_0| = |a - bp_0|e^{at_0} \cdot e^{aC}.$$

Vamos obter a equação (3.3) fazendo uma razão entre as duas últimas expressões

$$\frac{|p|}{|p_0|} = \frac{|a - bp|e^{at} \cdot e^{aC}}{|a - bp_0|e^{at_0} \cdot e^{aC}}$$

$$\left|\frac{p}{p_0}\right| = \left|\frac{a - bp}{a - bp_0}\right| e^{a(t-t_0)}, \tag{3.3}$$

onde $p_0 \neq 0$ e $p_0 \neq \frac{a}{b}$. Então, retirando os valores absolutos de (3.3), obtemos:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{a - bp}{a - bp_0} \cdot e^{a(t-t_0)}$$

$$p(a - bp_0) = p_0(a - bp)e^{a(t-t_0)}$$

$$p(a - bp_0) = p_0ae^{a(t-t_0)} - p_0bpe^{a(t-t_0)}$$

$$p(a - bp_0) + p_0bpe^{a(t-t_0)} = p_0ae^{a(t-t_0)}$$

$$p(a - bp_0 + p_0be^{a(t-t_0)}) = p_0ae^{a(t-t_0)}$$

$$p = \frac{p_0ae^{a(t-t_0)}}{(a - bp_0 + p_0be^{a(t-t_0)})},$$

multiplicando o numerador e o denominador por $e^{-a(t-t_0)}$, temos:

$$p = \frac{p_0ae^{a(t-t_0)}}{(a - bp_0 + p_0be^{a(t-t_0)})} \times \frac{e^{-a(t-t_0)}}{e^{-a(t-t_0)}}.$$

Portanto, podemos explicitar $p(t)$:

$$p(t) = \frac{ap_0}{p_0b + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}}. \tag{3.4}$$

Análise da solução: Analisando (3.2), podemos ver $p(t) = 0$, $p(t) = a/b \equiv p_\infty$ são suas soluções. A notação p_∞ é justificada da seguinte maneira: se em (3.4) $t \to \infty$, logo

$p(t) \to p_\infty$. Então de (3.4) obtemos que $p_\infty = a/b$, esta solução é chamada de população limite e será o valor assintótico para uma população inicial, tal que $p_0 > 0$. Podemos analisar dois casos: o primeiro se $p_0 > p_\infty$ e o segundo se $0 < p_0 < p_\infty$. No primeiro caso, p(t) descresce exponencialmente tendendo para p_∞. No segundo caso, a população irá crescer e também tenderá a p_∞, onde o gráfico de $p(t)$ será uma curva em forma de S entre as retas $p = 0$ e $p = p_\infty$, esta curva é chamada de logística. Pois derivando (3.2), obtemos:

$$\ddot{p} = (a - bp)' \cdot p + (a - bp) \cdot \dot{p}$$

$$\ddot{p} = -b\dot{p}p + a\dot{p} - bp\dot{p}$$

$$\ddot{p} = (a - 2bp)\dot{p}.$$

Podemos concluir que a curva logística tem um ponto de inflexão quando $p(t) = \dfrac{a}{2b}$, pois

$$\ddot{p} = (a - 2b\frac{a}{2b})\dot{p} = 0,$$

significa que a população cresce com derivada positiva e em seguida o crescimento se torna mais lento, isto ocorre até a função atingir o valor $p_\infty/2$ como mostra a figura 1:

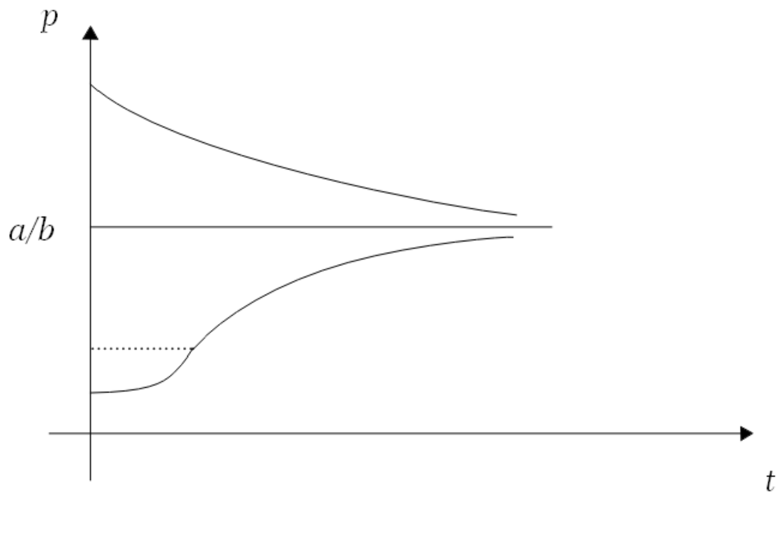

Figura 1: Curva logística.

3.2 Resfriamento de um Corpo

Podemos analisar o fenômeno da variação de temperatura em um corpo por perda de calor para o meio ambiente através do seguinte modelo:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \tag{3.5}$$

onde dT/dt é o fluxo de calor através das paredes do corpo, T é a temperatura constante por todo o corpo que depende apenas do tempo t, T_a é a temperatura do meio ambiente que é constante com o tempo e por último, k é uma constante positiva determinada pelas propriedades físicas do corpo. Na situação dada, o calor flui da fonte quente para fonte fria, então se $T > T_a$, a temperatura T descresce e o corpo se resfria, portanto isto justifica o sinal negativo em (3.5). Agora, se $T < T_a$, a temperatura T cresce e o corpo irá se aquecer. O modelo apresentado acima é chamada Lei de Resfriamento de Newton, Newton elaborou este modelo estudando uma bola de metal aquecida.

Considerando a condição inicial de temperatura $T(0) = T_0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \\ \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Através do métodos da sessão 2.1, a solução do problema pode ser obtida da seguinte forma:

$$\int \frac{1}{T - T_a} dT = \int -k dt$$

$$ln(T - T_a) + c_1 = -kt + c_2$$

$$ln(T - T_a) = -kt + C$$

$$T - T_a = e^{-kt+C},$$

usando a condição inicial $T(0) = T_0$, temos

$$e^C = T_0 - T_a.$$

Logo, obtemos a solução do problema:

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a. \tag{3.6}$$

Análise da solução: Na expressão (3.5), podemos ver que $T(t)$ descrece monotonicamente com t quando $T > T_a$, $T(t)$ irá crescer monotonicamente quando $T < T_a$ e quando for $T(t)$ for constante temos que $T = T_a$. Na expressão (3.6) temos a mesma conclusão, pois $T(t)$ tende monotonicamente para T_a quando $t \to +\infty$. Portanto, a temperatura T_a é chamada Temperatura de Equilíbrio.

A lei da conservação da quantidade de calor diz que o calor de um corpo é dada pelo produto de sua massa, seu calor específico e a variação de temperatura. Considerando m e m_a, respectivamente, as massas do corpo e do ambiente, c e c_a, respectivamente, os calores específicos do corpo e do ambiente, a Lei da Conservação da Quantidade de Calor pode ser escrita da seguinte forma para esta situação:

$$mc(T_0 - T) = m_a c_a (T_a - T_{a,0}), \tag{3.7}$$

onde sabemos pelas demonstrações anteriores que T e T_a são, respectivamente, as temperaturas do corpo e do ambiente em função do tempo t, mas nesta equação, elas são as temperaturas finais de cada um. $T_0 = T(0)$ será a temperatura inicial do corpo e $T_{a,0} = T_a(0)$ é a temperatura inicial do ambiente. Em (3.7), temos que $T_0 > T$, isso se deve ao fato de o corpo estar cedendo calor ao ambiente, logo a temperatura inicial do corpo será maior que a final.

Isolando T_a em (3.7), obtemos a seguinte expressão:

$$T_a = \frac{mc(T_0 - T)}{m_a c_a} + T_{a,0}.$$

Vamos igualar $(mc)/(m_a c_a)$ a uma constante A, logo

$$T_a = A(T_0 - T) + T_{a,0},$$

substituindo a expressão acima em (3.5), temos

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= -k(T - A(T_0 - T) - T_{a,0}) \\
\frac{dT}{dt} &= -k(T - AT_0 + AT - T_{a,0}) \\
\frac{dT}{dt} &= -k(T(1 + A) - AT_0 - T_{a,0}) \\
\frac{dT}{dt} &= -k(1 + A)T + k(AT_0 + T_{a,0}).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dT}{dt} + k(1 + A)T = k(AT_0 + T_{a,0}). \tag{3.8}$$

Logo, através da equação (3.8) temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} + k(1+A)T = k(AT_0 + T_{a,0}) \\ \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Para resolvermos o problema, precimos determinar o fator integrante dado por $\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$, onde $a(t) = k(1+A)$, temos

$$\mu(t) = e^{\int k(1+A)dt}$$
$$\mu(t) = e^{k(1+A)t}.$$

Então, multiplicando por μ todos os membros da equação (3.8), obtemos

$$e^{k(1+A)t} \cdot \frac{dT}{dt} + k(1+A)T \cdot e^{k(1+A)t} = k(AT_0 + T_{a,0}) \cdot e^{k(1+A)t},$$

logo, temos

$$(\mu T)\frac{d}{dt} = k(AT_0 + T_{a,0}) \cdot e^{k(1+A)t}$$
$$\mu T = \int k(AT_0 + T_{a,0}) \cdot e^{k(1+A)t} dt$$
$$\mu T = k(AT_0 + T_{a,0}) \int e^{k(1+A)t} dt,$$

substituindo $\mu = e^{k(1+A)t}$ e resolvendo a integral, temos

$$T = \frac{k(AT_0 + T_{a,0})}{e^{k(1+A)t}} \cdot \left(\frac{e^{k(1+A)t}}{k(1+A)} + c \right).$$

Para determinar c, utilizamos a condição inicial $T(0) = T_0$, logo

$$T_0 = k(AT_0 + T_{a,0}) \cdot \left(\frac{1}{k(1+A)} + c \right),$$

então isolando c na expressão acima, obtemos

$$c = \frac{(1+A)T_0 - (T_{a,0} + AT_0)}{k(T_{a,0} + AT_0)(1+A)}.$$

Substituindo c na solução do problema, temos a seguinte expressão

$$T(t) = \frac{T_{a,0} + AT_0}{1+A} + \frac{T_0 - T_{a,0}}{1+A} \cdot e^{-k(1+A)t}. \tag{3.9}$$

Podemos analisar na expressão (3.9), que a temperatura do corpo decresce monotonicamente quando $T_0 > T_{a,0}$ e cresce monotonicamente quando $T_0 < T_{a,0}$. Agora, chamaremos de $\bar{T}$ o primeiro termo do segundo membro da expressão (3.9):

$$\bar{T} = \frac{T_{a,0} + AT_0}{1+A},$$

substituindo A por $(mc)/(m_a c_a)$, obtemos a seguinte média ponderada:

$$\bar{T} = \frac{m_a c_a T_{a,0} + mcT_0}{m_a c_a + mc}.$$

Portanto, dizemos que a temperatura $\bar{T}$ é chamada de temperatura de equilíbrio, pois $T_a(t)$ tende a $\bar{T}$ quando t tende ao infinito.

A seguir apresentaremos três problemas envolvendo esse modelo.

Problema 1. Um Corpo a $100C$ é posto numa sala, onde a temperatura ambiente se mantém constantemente a $25C$. Após 5 minutos a temperatura do corpo caiu para $90C$. Decorrido quanto tempo estará o corpo a $50C$?

Resolução: Primeiramente, analisaremos os primeiros 5 minutos de resfriamento. Então, utilizando a equação (3.6) e sabendo que $T(5) = 90$, determinamos a constante k:

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

$$90 = (100 - 25)e^{-5k} + 25,$$

fazendo as operações, obtemos a seguinte expressão:

$$e^{5k} = \frac{15}{13}.$$

Aplicando o logaritmo natural, obtemos

$$k = \frac{1}{5} ln\left(\frac{15}{13}\right).$$

Analisando o segundo resfriamento, temos

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

$$50 = (90 - 25)e^{-\frac{1}{5}ln\left(\frac{15}{13}\right)t} + 25,$$

então vamos obter a seguinte expressão para determinar o tempo:

$$\left(\frac{15}{13}\right)^{\frac{t}{5}} = \frac{13}{5}.$$

Logo, aplicando o logaritmo

$$t = 5 \cdot \frac{ln\left(\frac{13}{5}\right)}{ln\left(\frac{15}{13}\right)} \cong 34.$$

Portanto, o tempo necessário para o corpo estar a $50C$ é aproximadamente 34 minutos após o primeiro resfriamento.

Problema 2. Um corpo a $100C$ é posto numa sala de temperatura desconhecida, mas que é mantida constante. Sabendo que após 10 minutos o corpo está a $90C$ e após 20 minutos a $82C$, calcule a temperatura na sala.
Solução: Analisando do instante de 0 a 10 minutos, temos que

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

$$90 = (100 - T_a)e^{-10k} + T_a,$$

isolando o termo e^{10k}, obtemos

$$e^{10k} = \frac{100 - T_a}{90 - T_a}.$$

Agora, analisamos os próximos 20 minutos onde o corpo fica a 82°C:

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

$$82 = (90 - T_a)e^{-20k} + T_a,$$

isolando o termo e^{20k}, obtemos

$$e^{20k} = \frac{90 - T_a}{82 - T_a}$$

$$(e^{10k})^2 = \frac{90 - T_a}{82 - T_a}$$

$$\left(\frac{100 - T_a}{90 - T_a}\right)^2 = \frac{90 - T_a}{82 - T_a}.$$

Então, encontramos a seguinte equação do 2° grau:

$$12{T_a}^2 - 2100T_a + 91000 = 0,$$

cuja as raízes são próximas de

$$T_a = \{79, 96\}.$$

Para o problema descrito, o corpo está perdendo calor para o ambiente, isto significa que $T > T_a$, então o resultado satisfatório para o problema é a temperatura da sala estar a aproximadamente a $79C$.

Problema 3. Qual deve ser a temperatura da água para que um corpo a $100C$ nela imerso venha a uma temperatura de $30C$ em meia hora? Sabe-se que o corpo é de ferro (calor específico $0,113calg^{-1}(C)^{-1}$ e tem massa de $500g$, enquanto que a água (calor específico 1) tem massa $4000g$. Assuma $k = 0,05$.

Resolução: Primeiramente determinaremos o valor da constante A:

$$A = \frac{mc}{m_a c_a} = \frac{0,113 \cdot 500}{1 \cdot 4000} = 0,015.$$

Utilizando a expressão (3.9), determinaremos a temperatura inicial da água

$$T(t) = \frac{T_{a,0} + AT_0}{1+A} + \frac{T_0 - T_{a,0}}{1+A} \cdot e^{-k(1+A)t}$$

$$30 = \frac{T_{a,0} + 0,015 \cdot 100}{1+0,015} + \frac{100 - T_{a,0}}{1+0,015} \cdot e^{-0,05(1+0,015)30},$$

fazendo as operações e isolando $T_{a,0}$, obtemos

$$T_{a,0} = \frac{13,17}{3,6} \cong 3,65.$$

Utilizando a Lei da Conservação da Quantidade de calor, temos

$$mc(T_0 - T) = m_a c_a (T_a - T_{a,0})$$

$$0,113 \cdot 500(100 - 30) = 1 \cdot 4000(T_a - 3,65),$$

isolando T_a, obtemos

$$T_a = \frac{0,113 \cdot 5 \cdot 7}{4} + 3,65 \cong 4,64.$$

Portanto, a temperatura da água é aproximadamente $4,64C$.

3.3 Diluição de Soluções

Um resevatório que contém V litros de água pura, recebe uma solução de água salgada que contém c kg de sal por litro de solução, a uma vazão a de litros/segundo de forma constante. O reservatório possui um mecânismo de agitação que torna a solução homogênea, então ao mesmo tempo que se injeta água salgada, se retira do reservatório a solução formada na mesma vazão dita anteriormente (a litros/segundo). Portanto, seja $x(t)$ a quantidade de sal em kg no reservatório em função do tempo t, a concentração de sal na solução é dada por $x/V\ kg/l$. Então podemos descrever esta situação através da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = ac - a\frac{x}{V}, \tag{3.10}$$

e considerando a condição $x(0) = 0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a\dfrac{x}{V} = ac \\ \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Para encontrarmos a solução do problema, precisamos determinar o fator integrante $\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$, onde $a(t) = \dfrac{a}{V}$, logo

$$\mu(t) = e^{\int \frac{a}{V}dt}$$

$$\mu(t) = e^{\frac{at}{V}}.$$

Então, multiplicando todos os membros da equação (3.10), por $\mu(t)$, obtemos

$$\frac{dx}{dt}e^{\frac{at}{V}} + a\frac{x}{V}e^{\frac{at}{V}} = ace^{\frac{at}{V}}.$$

Temos

$$(\mu x)\frac{d}{dt} = ace^{\frac{at}{V}}$$

$$\mu x = ac\int e^{\frac{at}{V}}dt$$

$$\mu x = cVe^{\frac{at}{V}} + k$$

$$x = cV + ke^{-\frac{at}{V}}.$$

Para determinar k, utlizamos a condição inicial $x(0) = 0$

$$x(0) = cV + ke^0$$

$$k = -cV.$$

Portanto a solução do problema será dada por:

$$x(t) = cV(1 - e^{-\frac{at}{v}}) \tag{3.11}$$

Análise da solução: Podemos notar que quando $t \to \infty$, a concentração de sal dada por $x(t)/V$ tende para c, assim como em resfriamento de um corpo em que a solução nos dava uma temperatura de equilíbrio, no caso de diluição das soluções podemos encontrar o equilíbrio entre a solução salina injetada e a solução no reservatório, pois em ambos os casos a matemática é a mesma.

Agora, vamos supor que a solução homogênea caia em um segundo reservatório que também contém V litros de água pura. E neste novo reservatório também há um mecânismo de agitação, com a mesma vazão de a litros/segundo. A quantidade de sal no segundo reservatório é dada por $y(t)$ e varia de acordo com a equação:

$$\frac{dy}{dt} = -a\frac{y}{V} + a\frac{x}{V},$$

substituindo $x(t)$ da expressão (3.11) na expressão acima e considerando a condição $y(0) = 0$, obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{a}{V} y = ac(1 - e^{-\frac{at}{V}}) \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Utilizando o fator integrante $\mu(t) = e^{a(t)}$, onde $a(t) = \dfrac{a}{V}$, temos

$$\mu(t) = e^{\int \frac{a}{V} dt}$$

$$\mu(t) = e^{\frac{at}{V}}.$$

Multiplicando $\mu(t)$ em todos os membros da solução do problema, obtemos

$$\frac{dy}{dt} e^{\frac{at}{V}} + \frac{a}{V} y e^{\frac{at}{V}} = ac(1 - e^{-\frac{at}{V}}) e^{\frac{at}{V}},$$

temos

$$(\mu y) \frac{d}{dt} = ac(1 - e^{-\frac{at}{V}}) e^{\frac{at}{V}}$$

$$\mu y = ac \int (1 - e^{-\frac{at}{V}}) e^{\frac{at}{V}} dt$$

$$\mu y = ac \left[\frac{V}{a} (e^{\frac{at}{V}} - t) + k \right],$$

realizando as operações, podemos encontrar que a função $y(t)$ é dada por

$$y(t) = cV - cVte^{-\frac{at}{V}} + acke^{-\frac{at}{V}}.$$

Para determinarmos k, usamos a condição inicial $y(0) = 0$

$$0 = cV + acke^{0}$$

$$k = -\frac{V}{a}.$$

Substituindo na função, obtemos que a solução do problema, será dada por

$$y(t) = cV - cV(1 + t)e^{-\frac{at}{V}}.$$

Da mesma forma para a concentração $x(t)$, a concentração de $y(t)$ também cresce monotonicamente para c no segundo reservatório quando $t \to \infty$.

3.4 Por que uma corda enrolada em um poste sustenta um barco?

Imaginemos uma corda presa a uma superfície cilíndrica vertical com coeficiente de atrito estático μ. O contato da corda com a superficíe gera um setor circular AB com ângulo $\alpha < 180°$, geralmente $\alpha > 360°$ por conta de várias voltas que são dadas pela corda no poste, mas para melhor compreensão consideremos menor que 180°. Existe uma força T_0 aplicada em uma das extremidades e na outra extremidade uma força T_1, onde essas forças estão em equilíbrio como mostra a figura 2.

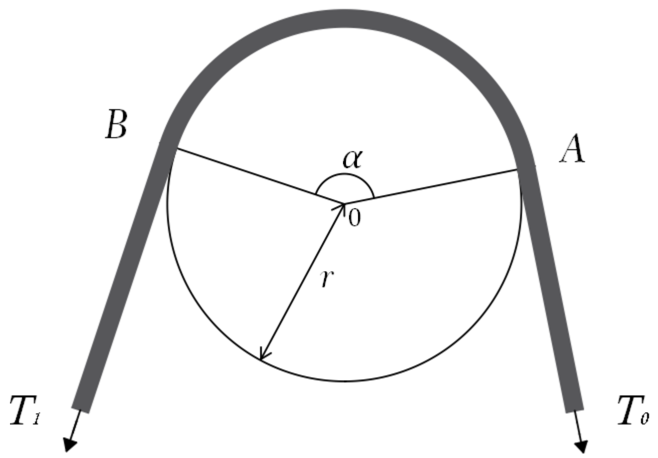

Figura 2: Corda amarrada a uma superficíe cilíndrica de forma vertical.

Agora consideremos a decomposição dessas forças como mostra a figura 3:

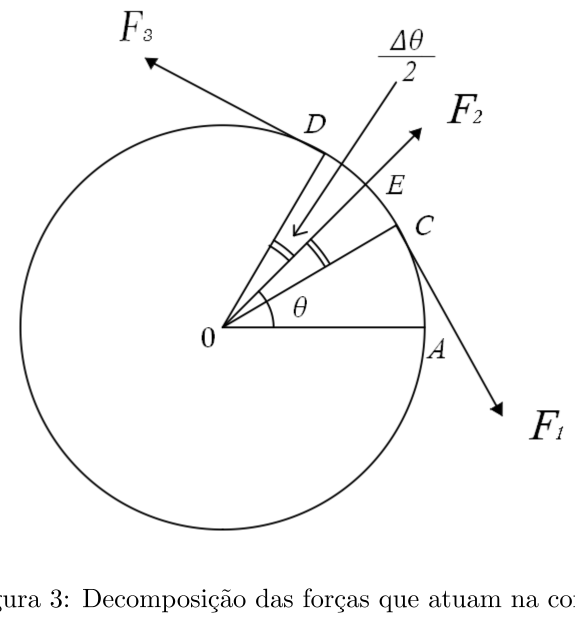

Figura 3: Decomposição das forças que atuam na corda.

Sabendo que $T(\theta)$ é a tensão no ponto da corda que corresponde ao ângulo θ a partir do segmento $0A$ no sentindo anti-horário, fazemos as seguintes análises:
F_1 é a tensão da corda no ponto C, o que implica

$$|F_1| = T\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right).$$

F_2 é a soma da tensão no ponto D com a força de atrito a partir de F_3, logo

$$|F_2| = T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) + \mu|F_3|.$$

F_3 será a reação total da superficíe ao longo do arco CD, dado por

$$|F_3| = N(\theta)r\Delta\theta,$$

onde $N(\theta)$ é a reação da superfície sobre a corda e $r\Delta\theta$ é comprimento do arco CD.

Analisando as forças F_2 e F_3, podemos notar que a força de atrito é dada por $\mu N(\theta)r\Delta\theta$, onde sabemos pela análise da força F_3 que $N(\theta)r\Delta\theta$ é a reação total da superfície ao longo do arco CD e que possui comprimento $r\Delta\theta$. Pelo fato do arco CD estar em equilíbrio, temos que $F_1 + F_2 + F_3 = 0$, logo projetando a equação sobre a direção F_3 como mostra a figura 4.

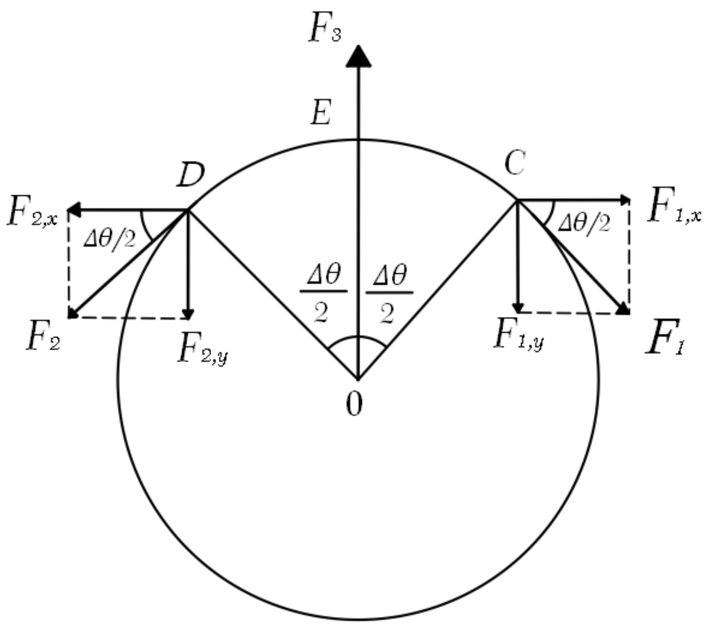

Figura 4: Diagrama de forças.

Analisando o diagrama de forças, temos as seguintes equações:

$$-F_{1,y} - F_{2,y} + F_3 = 0,$$

$F_{1,y}$ será dado por $T\left(\theta-\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)sen\dfrac{\Delta\theta}{2}$,
$F_{2,y}$ será dado por $T\left(\theta+\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)sen\dfrac{\Delta\theta}{2}+\mu N(\theta)r\Delta\theta sen\dfrac{\Delta\theta}{2}$.

Portanto, temos a seguinte expressão:

$$N(\theta)r\Delta\theta - T\left(\theta-\frac{\Delta\theta}{2}\right)sen\frac{\Delta\theta}{2} - T\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)sen\frac{\Delta\theta}{2} - \mu N(\theta)r\Delta\theta sen\frac{\Delta\theta}{2} = 0. \tag{3.12}$$

Na demonstração acima analisamos as forças na direção do eixo y, agora na direção do eixo x, temos

$$F_{1,x} - F_{2,x} = 0,$$

$F_{1,x}$ será dado por $T\left(\theta-\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)cos\dfrac{\Delta\theta}{2}$,
$F_{2,x}$ será dado por $T\left(\theta+\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)cos\dfrac{\Delta\theta}{2}+\mu N(\theta)r\Delta\theta cos\dfrac{\Delta\theta}{2}$.

Portanto, obtemos a seguinte expressão:

$$T\left(\theta-\frac{\Delta\theta}{2}\right)cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu N(\theta)r\Delta\theta cos\frac{\Delta\theta}{2} = 0. \tag{3.13}$$

Dividindo as equações (3.12) e (3.13) por $\Delta\theta$ e aplicando o limite quando $\Delta\theta \to 0$, obtemos duas equações dadas por:

$$rN(\theta) - T(\theta) = 0, \tag{3.14}$$

$$\frac{dT}{d\theta}(\theta) + \mu rN(\theta) = 0. \tag{3.15}$$

Isolando $N(\theta)$ em (3.14) e substituindo em (3.15), obtemos

$$\frac{dT}{d\theta} + \mu T = 0.$$

Considerando a condição $T(0) = T_0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{d\theta} + \mu T = 0 \\ \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Resolvendo o problema, temos

$$\int \frac{1}{T}dT = \int -\mu d\theta$$
$$lnT = -\mu\theta + c$$

$$T = e^c \cdot e^{-\mu\theta},$$

considerando a condição inicial $T(0) = T_0$, obtemos

$$e^c = T_0.$$

Então a solução do problema é dada por

$$T(\theta) = T_0 e^{-\mu\theta}.$$

Análise da solução: Podemos concluir que a força para a corda sustentar um barco enrolada num poste gerando um setor de ângulo α é dada por $T_1 = T_0 e^{-\mu\alpha}$. Então podemos notar que quanto menor for o ângulo α, menor será T_1, ou seja, menor será a força necessária para aplicar na outra extremidade como mostra figura 2. Então, concluimos que quanto mais voltas a corda fizer no poste, a força T_1 será tão pequena que apenas o peso da corda jogada sobre o solo é suficiente para manter o equilíbrio.

A seguir, apresentaremos um exemplo.

Exemplo 1. Suponha que a corda dá duas voltas completas em torno do poste, cujo coeficiente de atrito é $0,4$. Supondo que a força T_0 é $1000N$, calcule T_1 para que haja equilíbrio.
Resolução: Utilizando a fórmula $T_1 = T_0 e^{-\mu\alpha}$, temos

$$T_1 = 1000 e^{0,4 \cdot 4\pi}$$

Logo, $T_1 = 6,56N$.

Anteriormente, vimos como uma corda sustenta um barco enrolada em uma superfície cilíndrica vertical, agora ver o caso em que superfície cilíndrica está posicionada de forma horizontal como mostra a figura 5. Assim como no exemplo anterior, consideremos que há um atrito entre a corda e o cilindro, e vamos considerar que o peso da corda é dado por ω. Um objeto de massa m é mantido suspenso por conta do atrito da corda e a um pequeno pedaço da corda.

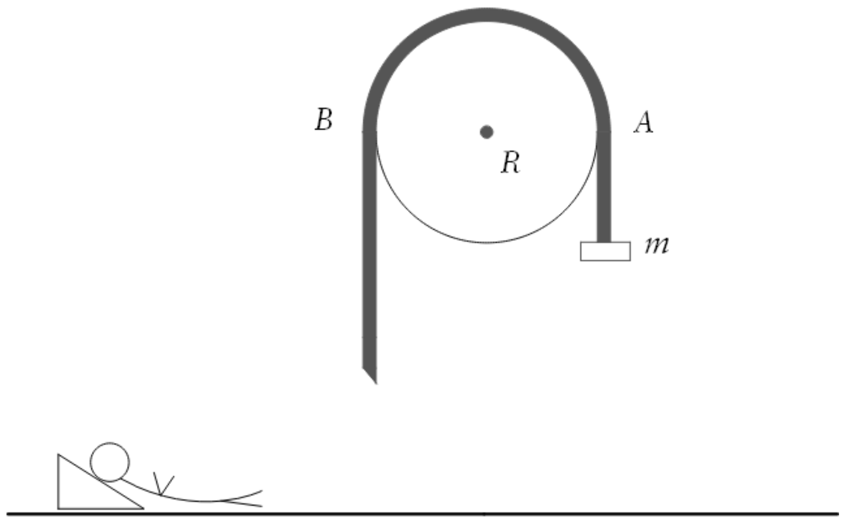

Figura 5: Corda amarrada a uma superfície cilíndrica de forma horizontal.

As equações de equilíbrio são as mesmas vistas para o cilíndro vertical, porém, para o somatório das forças tanto em x quanto em y, aparecerá mais um termo dado pela tração da corda que obtemos da seguinte maneira:

$$sen(\theta) = -\frac{T_{y,1}}{T},$$

$$cos(\theta) = -\frac{T_{x,1}}{T}.$$

A tração T será dada pelo produto do peso da corda com o comprimento de arco, portanto $-\omega r(\Delta\theta)sen(\theta)$ aparecerá em (3.12) e $-\omega r(\Delta\theta)cos(\theta)$ aparecerá em (3.13).

Logo, reescrevemos as equações (3.14) e (3.15) como

$$rN(\theta) - T(\theta) - \omega r sen(\theta) = 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{dT}{d\theta} + \mu r N(\theta) - \omega r cos(\theta) = 0. \tag{3.17}$$

Isolando $N(\theta)$ em (3.16) e substituindo em (3.17), obtemos

$$\frac{dT}{d\theta} + \mu T = \omega r(cos(\theta) - \mu sen(\theta)). \tag{3.18}$$

Logo, considerando $T(0) = T_0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{d\theta} + \mu T = \omega r(cos(\theta) - \mu sen(\theta)) \\ \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Temos que o fator integrante é dado por $\delta = e^{\mu\theta}$, logo temos

$$\delta T = \int \omega r(cos(\theta) - \mu sen(\theta))e^{\mu\theta} d\theta,$$

resolvendo a integral e passando δ para o outro lado da igualdade obtemos a expressão:

$$T(\theta) = \frac{\omega r}{1 + \mu^2}\left[2\mu cos(\theta) + (1 - \mu^2)sen(\theta)\right] + Ce^{-\mu\theta}, \tag{3.19}$$

utilizando a condição inicial $T(0) = T_0$, obtemos o valor de C:

$$C = T_0 - \frac{2\mu\omega r}{1 + \mu^2}.$$

Portanto, a solução do problema será dada por

$$T(\theta) = \frac{\omega r}{1 + \mu^2}\left[2\mu cos(\theta) + (1 - \mu^2)sen(\theta)\right] + \left[T_0 - \frac{2\mu\omega r}{1 + \mu^2}\right] e^{-\mu\theta}. \tag{3.20}$$

A seguir, apresentaremos um problema.

Problema 1. Determine $T(\pi)$ sabendo que após o ponto A há um pedaço de corda de comprimento ℓ onde pende uma massa m.

Solução: Para a situação dada, a tração T_0 será contrária ao peso da corda e ao peso do objeto de massa m, e como o peso da corda é dado por unidade de comprimento, temos que

$$T_0 = \omega\ell + mg.$$

Logo, utilizando a expressão (3.20), temos

$$T(\pi) = \frac{\omega r}{1 + \mu^2}\left[2\mu cos(\pi) + (1 - \mu^2)sen(\pi)\right] + \left[\omega\ell + mg - \frac{2\mu\omega r}{1 + \mu^2}\right] e^{-\mu\pi},$$

portanto temos como resposta a expressão:

$$T(\pi) = -\frac{2\mu\omega r}{1 + \mu^2} + \left[\omega\ell + mg - \frac{2\mu\omega r}{1 + \mu^2}\right] e^{-\mu\pi}.$$

3.5 A Tractriz

Considerando o plano (x, y), uma curva delimitada pela tangência entre um ponto de tangência e pelo eixo x de forma constante é chamada de tractriz como podemos ver na figura 6:

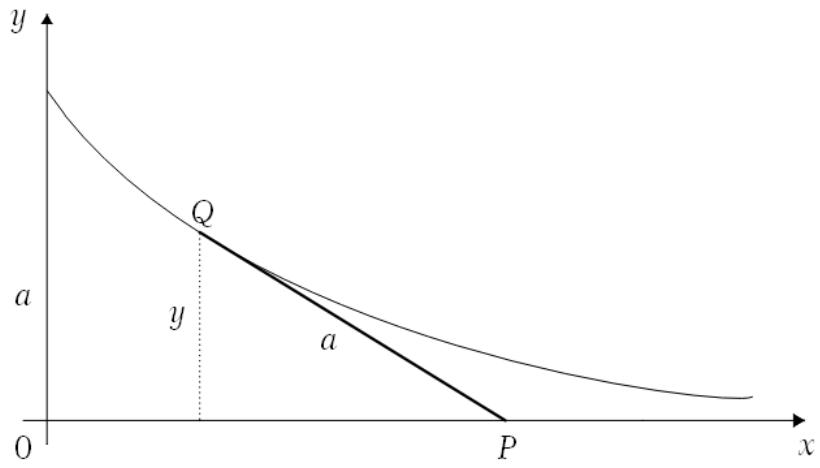

Figura 6: Curva tractriz.

Uma partícula Q de massa m, será arrastada ao longo de uma corda QP, essa corda é mantida de forma bem esticada e sua extremidade P está sobre o eixo x, então a tractriz é formada ao longo da curva descrita pela partícula Q. Considerando as coordenadas $Q(x, y)$, $P(x_a, 0)$ e $R(x, 0)$, temos a seguinte relação pelo teorema de Pitágoras:

$$QP^2 = QR^2 + RP^2$$

$$a^2 = y^2 + (x - x_a)^2,$$

isolando o termo $x - x_a$, obtemos

$$x - x_a = \pm\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Para o problema vamos considerar $-\sqrt{a^2 - y^2}$, pois o trajeto da partícula Q forma uma reta no sentido decrescente. Então, lembrando da equação da reta que passa por um ponto, temos

$$y - y(x_a) = y' \cdot (x - x_a),$$

sabendo que $y(x_a) = 0$, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \tag{3.21}$$

onde a é o comprimento do segmento QP e $x(y)$ será a função que descreve a curva feita pela partícula Q.

Sabendo que $y' = dx/dy$, podemos rescreever a expressão (3.21) da seguinte maneira:

$$-dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy,$$

logo devemos encontrar uma primitiva de $\sqrt{a^2 - y^2}/y$, sabendo que $y = a\ sen(\theta)$ temos

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \int \frac{a^2 - a^2 sen^2(\theta)}{a\ sen(\theta)} dy,$$

e utilizando a mudança de variável, obtemos

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = a \int \frac{cos^2(\theta)}{sen(\theta)} d\theta = a \int \frac{d\theta}{sen(\theta)} - a \int sen(\theta) d\theta.$$

Para resolvermos $a \int d\theta/sen(\theta)$, devemos lembrar

$$sen(\theta) = \frac{2tg\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)},$$

então

$$a \int \frac{d\theta}{sen(\theta)} = a \int \frac{1 + tg^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{2tg\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} d\theta.$$

Aplicando a mudança de variável $u = tg\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, onde $du = \dfrac{1}{2}\left(1 + tg^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right) d\theta$, obtemos

$$a \int \frac{2du}{2u} = a\ ln|u| = a\ ln\left|tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

Logo, a primitiva de $\sqrt{a^2 - y^2}/y$ será dada por

$$a\ ln\left|tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| + acos(\theta).$$

Agora, precisamos voltar para a variável y. Para isso, vamos utilizar a expressão abaixo

$$tg(\theta) = \frac{2tg\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)},$$

denotando $x = tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e fazendo as operações, obtemos a seguinte equação do 2° grau:

$$tg(\theta)x^2 + 2x - tg(\theta) = 0,$$

cuja as raízes serão dadas por:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4tg(\theta)tg(\theta}}{2tg(\theta)}.$$

Temos

$$x_1 = \frac{1 - cos(\theta)}{sen(\theta)}\ ,\ x_2 = \frac{-1 - cos(\theta)}{sen(\theta)}.$$

Como θ é menor que 90, então $\theta/2$ terá que ser positivo, logo a raiz utilizada será a x_1. Então temos

$$sen(\theta) = \frac{y}{a}\ e\ cos(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a},$$

logo teremos de x_1:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}}{\frac{y}{a}}$$

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

Portanto, a solução da expressão

$$-dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}dy$$

será dada por

$$-x + c = a\ ln\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) + \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Considerando o problema de valor inicial com a condição $y(0) = a$, vamos obter que $c = 0$. Portanto a solução da equação diferencial (3.21) será dada por

$$x = -a\ ln\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2},$$

onde esta solução é a equação da tractriz $x(y)$, explicitada de maneira que y é a variável independente e x sendo a variável dependente.

O estudo da tractriz é mais aprofundado em Geometria Diferencial, onde a rotação da tractriz em torno do eixo x gera uma superficie chamada pseudoesfera, onde essa superficie possui curvatura gaussiana negativa constante em todos os pontos, exceto dos pontos no plano $x = 0$.

Existe uma aplicação mecânica para a tractriz chamada pivot de Schiele. Essa aplicação consiste em determinar a forma de uma ponta de eixo vertical, onde essa ponta gira sobre os rolamentos de modo que a reação vertical V dos rolamentos seja constante em todos os pontos na superfície de contacto. Temos também que o desgaste da ponta do eixo de cada altura seja uniforme. Podemos observar o gráfico desta aplicação na figura 7.

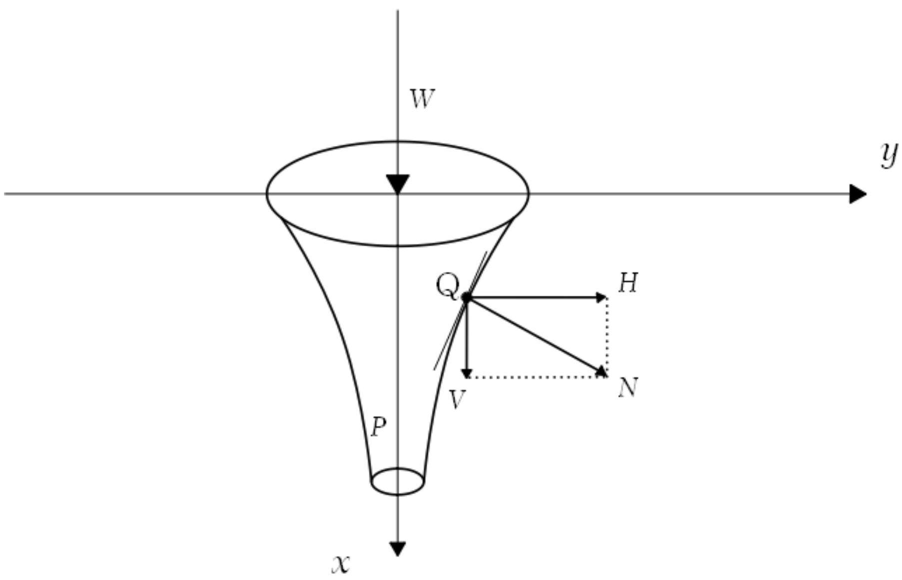

Figura 7: Aplicação da tractriz (Pivot de Schiele).

Podemos deduzir a equação da curva da secção longitudinal da ponta do eixo da seguinte maneira: N será a reação dos rolamentos sobre o eixo em cada ponto na superfície lateral, W será o peso do eixo, logo o somatório das projeções verticais de N será igual a W. Seja A a projeção horizontal na superfície lateral da ponta do eixo, como a projeção vertical de N é constante em todos os pontos, temos que reação vertical V será dada por

$$V = \frac{W}{A}. \tag{3.22}$$

Pela hipótese de desgaste uniforme temos que o desgaste é constante com y, o estudo da mecânica diz que o desgaste é proporcional ao trabalho da força de atrito μN em uma rotação completa do eixo. Logo

$$2\pi y\mu N = constante. \tag{3.23}$$

Agora, analisando a semelhança de triângulos temos a seguinte igualdade

$$\frac{N}{V} = \frac{\bar{PQ}}{y}.$$

Logo podemos concluir através das expressões (3.22) e (3.23), que o segmento $\bar{PQ}$ deve ser constante. Com isso, a curva da secção longitudinal da ponta do eixo será uma tractriz, e portanto, a ponta do eixo terá a forma de uma pseudoesfera.

3.6 A Catenária

A catenária foi um problema proposto por Leonardo da Vinci, problema esse que consiste na determinação da forma tomada por um cabo flexível (a tensão do cabo é sempre no sentido da tangente) e inextensível (pois não se estende), onde este cabo esta suspenso em dois pontos A e B, e o único peso para ser considerado é o seu próprio peso. Este problema foi resolvido incorretamente por Galileu, onde ele mostrou que a curva do cabo forma uma parábola. Em 1960, James Bernoulli fez várias resalvas sobre esse problema e um ano depois o seu irmão Johann Bernoulli junto com Leibniz e Huyghens resolveram o problema da catenária, o nome "catenária"foi dado por Leibniz. Em uma carta para um amigo, Johann explicou que Galileu estava errado em dizer que a catenária era uma parábola, a parábola realmente serve para a construção da catenária, mas são coisas distintas, ele explicou que a parábola é uma curva algébrica e a catenária é uma curva transcendente. Podemos entender melhor a resolução de Johann e seus amigos na figura 8.

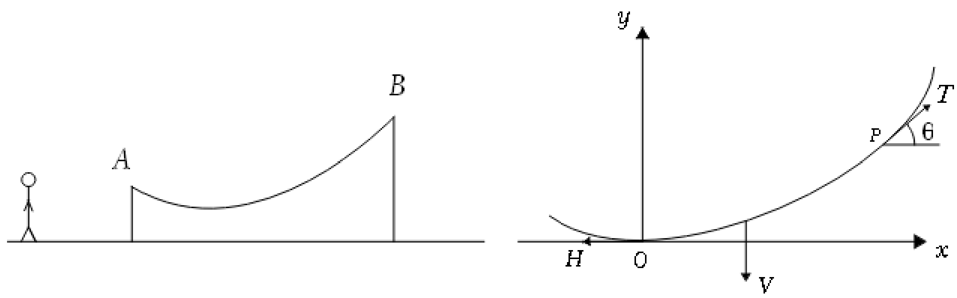

Figura 8: Representações da curva catenária.

Seja um sistema cartesiano com origem no ponto mais baixo da curva, onde o eixo y coincide com o eixo vertical. Considerando o equilíbrio do trecho OP do cabo, temos que $H + T + V = 0$. Onde H é a tensão do cabo no ponto mais baixo, T é a tensão do cabo no ponto $P = (x, y)$ e V é o peso do segmento OP. Se considerarmos ω como o peso por unidade de comprimento e s o comprimento do arco OP, temos que $V = \omega s$. Então as equações de equilíbrio projetadas sobre os dois eixos serão dadas por:

$$-H + Tcos(\theta) = 0, \tag{3.24}$$

$$-V + Tsen(\theta) = 0. \tag{3.25}$$

Isolando T em (3.24) e (3.25), obtemos

$$tg(\theta) = \frac{\omega}{H}s. \tag{3.26}$$

Como ω e H são constantes, podemos considerar ω/H igual a apenas uma constante c. Considerando $tg(\theta) = y'$, obtemos

$$y'' = c\frac{ds}{dx}.$$

Através de estudos da geometria diferencial, podemos escrever a função do comprimento de arco s com a seguinte equação:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Portanto, temos a seguinte equação diferencial

$$y'' = c\sqrt{1 + (y')^2}. \tag{3.27}$$

Para resolvermos (3.27), introduzimos a variável $p = y'$, logo obtemos a seguinte equação separável de primeira ordem

$$p' = c\sqrt{1 + p^2} \tag{3.28}$$

Sabendo que $p' = dp/dx$, obtemos de (3.28) a seguinte expressão:

$$cdx = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}dp,$$

considerando a mudança de variável $p = cotg(\theta)$, podemos calcular a primitiva de $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}dp = -\int \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2(\theta)}}csc^2(\theta)d\theta = -\int \frac{1}{\sqrt{csc^2(\theta)}}csc^2(\theta)d\theta,$$

logo obtemos

$$-\int csc(\theta)d\theta = -\int \frac{1}{sen(\theta)}d\theta = -ln\left|tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

Para voltarmos para a variável p, lembremos que no modelo da tractriz tinhamos a seguinte expressão

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-cos(\theta)}{sen(\theta)},$$

desmebrando essa expressão, temos

$$\frac{1-cos(\theta)}{sen(\theta)} = \frac{1}{sen(\theta)} - \frac{cos(\theta}{sen(\theta)} = csc(\theta) - cotg(\theta).$$

Sabemos que $p = cotg(\theta)$, para determinarmos $csc(\theta)$, usamos a seguinte identidade trigonométrica

$$1 + cotg^2(\theta) = csc^2(\theta),$$

logo vamos obter

$$1 + p^2 = csc^2(\theta)$$

$$csc(\theta) = \sqrt{1+p^2}.$$

Então, a primitiva procurada é dada por

$$-ln(\sqrt{1+p^2} - p).$$

Portanto, a solução da expressão

$$cdx = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}dp$$

será dada por

$$cx + k = -ln(\sqrt{1+p^2} - p).$$

Considerando o problema de valor inicial com a condição $p(0) = y'(0) = 0$, vamos obter que $k = 0$. Reescrevendo a solução acima para eliminarmos o logaritmo natural, temos

$$e^{-cx} = \sqrt{1+(y')^2} - y'. \tag{3.29}$$

Elevando toda a expressão (3.29) ao quadrado, obtemos

$$(y')^2 + 1 - 2y' \cdot \sqrt{(y')^2+1} = e^{-2cx},$$

de (3.29), sabemos

$$\sqrt{1+(y')^2} = e^{-cx} + y',$$

logo obtemos

$$(y')^2 + 1 = e^{-2cx} + 2y' \cdot (e^{-cx} + y').$$

Fazendo as operações, e isolando o termo y', obtemos

$$y' = \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2}.$$

Sabendo que $y' = dy/dx$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sabemos que $\dfrac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} = sinh(cx)$, então fazendo a integração

$$\int dy = \int senh(cx)dx$$

$$y = \frac{1}{c}cosh(cx) + k,$$

utilizando a condição inicial $y(0) = 0$, temos

$$0 = \frac{1}{c}cosh(0) + k$$

$$k = -\frac{1}{c}.$$

Portanto a solução da equação diferencial (3.27), será dada por

$$y(x) = \frac{1}{c}(cosh(cx) - 1). \tag{3.30}$$

Análise da solução: Podemos concluir que a curva catenária é um cabo flexivel e inextensível suspenso em dois pontos e que está sujeita a seu próprio peso, onde a sua curva forma o gráfico de um co-seno hiperbólico.

Analisando a solução em (3.30), podemos ver que o valor de H faz parte da solução e apesar de não ser constante, não é um dos dados do problema inicial. Escrevendo os termos dessa solução em outros parâmetros geométricos, podemos fazer as seguintes análises:

1 - a é o afastamento horizontal entre os dois pontos extremos do cabo, dado pelos pontos A e B.

2 - d é a flexa da catenária.

3 - ℓ é o comprimento do cabo.

Através da figura 9, podemos ver a descrição da curva catenária pelos parâmetros a, d e ℓ.

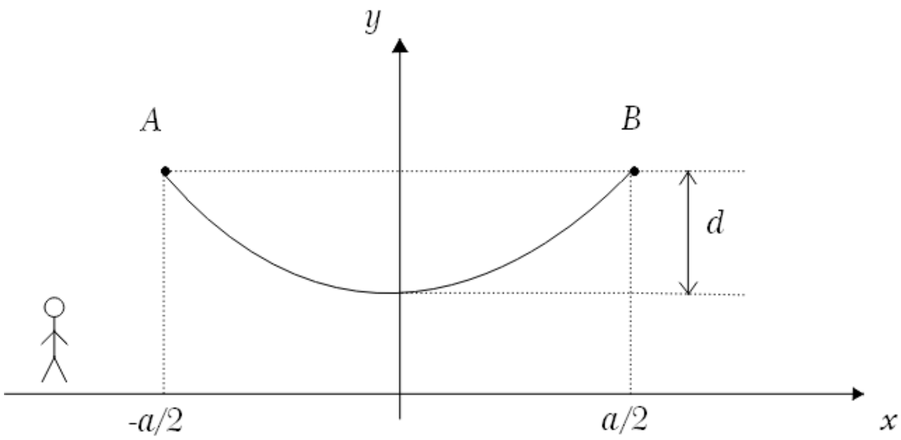

Figura 9: Curva catenária considerando os parâmetros a, d e ℓ.

3.7 Espelho Parabólico

Neste problema determinamos a forma de um refletor, onde todos os raios refletidos por ele e os raios provenientes de uma fonte luminosa pontual, saem paralelos a uma direção fixada R como mostra a figura 10. No estudo da geometria elementar, a curva que possui essa propriedade é o parabolóide de revolução, gerado pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo, onde coloca-se a fonte luminosa no foco da parábola geradora. Vamos demonstrar que o parabolóide é a única superfície que possui essa propriedade, através da unicidade e existência desse resultado dados pela geometria.

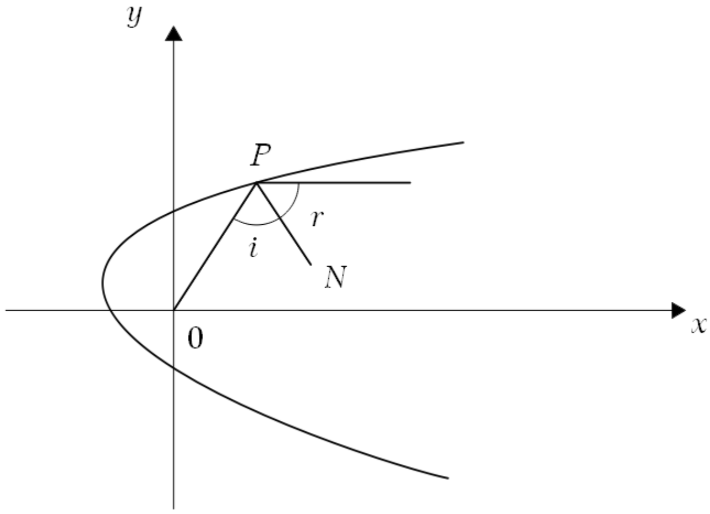

Figura 10: Curva representativa do espelho parabólico.

Supondo que a fonte luminosa esteja na origem e que a direção R seja o eixo x. Usaremos a notação $y(x)$ como a função que descreve a secção longitudinal do refletor. Na figura 10, podemos ver o raio luminoso saindo da origem e se refletindo no ponto P e temos que N é a reta normal à curva no ponto P. Pela lei de reflexão da Ótica Geométrica, temos que o ângulo de inicidência i é igual ao ângulo de reflexão r. Para encontrarmos a equação diferencial que descreve a curva do espelho parabólico consideremos a decomposição da fonte luminosa como mostra a figura 11:

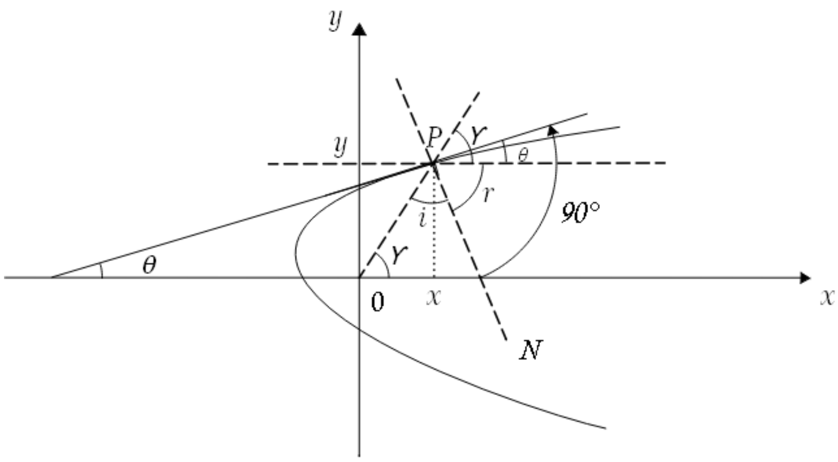

Figura 11: Decomposição da fonte luminosa.

Considerando dy/dx como o coeficiente ângular no ponto $P = (x, y)$, vamos ter

$$tg(\theta) = \frac{dy}{dx}.$$

Podemos observar na figura que o ângulo de reflexão é dado por $\theta = 90 - r$, logo

$$\frac{dy}{dx} = tg(90 - r),$$

temos também

$$tg(\gamma) = \frac{y}{x},$$

e pelo ângulo de incidência, temos que $\gamma = 180 - (r + i)$. Como $r = i$, temos

$$\frac{y}{x} = tg(180 - 2r),$$

onde

$$\frac{y}{x} = tg(2(90 - r))$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2tg\left(\frac{2(90-r)}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{2(90-r)}{2}\right)}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2tg(90 - r)}{1 - tg^2(90 - r)}.$$

Lembrando que $dy/dx = y' = tg(90 - r)$, vamos obter

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - (y')^2},$$

então temos a seguinte expressão

$$y(y')^2 + 2xy' - y = 0. \tag{3.31}$$

Simplificando toda a expressão (3.31) por y, obtemos

$$(y')^2 + \frac{2x}{y}y' - 1 = 0,$$

calculando as raízes da equação do 2° grau acima, temos

$$y' = \frac{\frac{-2x}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{2x}{y}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}.$$

Logo, o par de equações diferenciais correspondentes a expressão (3.31) é dado por

$$y' = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}. \tag{3.32}$$

Agora, retirando as exatas raízes da equação (3.31), temos

$$y' = \frac{-2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4 \cdot y \cdot (-y)}}{2y}$$

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y},$$

logo obtemos a seguinte equação diferencial

$$yy' + x = \pm\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.33}$$

Introduzindo a variável dependente $z = z(x)$, vamos ter que $z' = \pm 1$. Logo podemos rescreever (3.33) da seguinte maneira

$$zz' = \pm z,$$

sabendo que $z' = dz/dx$, obtemos da equação diferencial acima

$$\int dz = \pm \int dx$$

$$z = \pm x + c,$$

considerando $z(x)$, tal que $z^2 = x^2 + y^2$, temos

$$y^2 = z^2 - x^2$$

$$y^2 = (\pm x + c)^2 - x^2.$$

Portanto obtemos

$$y^2 = \pm 2xc + c^2.$$

Análise da solução: Este resultado corresponde a equação de duas parábolas coincidentes com o eixo x. Para $+2xc$, temos uma parábola com a concavidade para a direita cujo o vértice é $\left(-\frac{c}{2}, 0\right)$. Para $-2xc$, temos uma parábola com a concavidade para a esquerda cujo o vértice é $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$.

3.8 As Curvas de Perseguição

Vamos imaginar que um gato persegue um rato no plano (x, y). O rato estava comendo queijo na origem e o gato localizado no ponto $G = (a, 0)$, o gato faminto parte em direção ao rato e o rato por sua vez, foge do gato correndo ao longo do eixo y no sentido positivo com uma velocidade constante ν. O gato ao correr em direção ao rato com uma velocidade constante ω, forma uma curva, e o problema desta sessão consiste em determinar a curva descrita pelo gato nos parâmetros a, ν e ω. Considerando que após um tempo t, o gato estará em um ponto $P = (x, y)$ e como o deslocamento do rato se dá ao longo do eixo y, logo a sua segunda coordenada será dada por esse deslocamento, então ele estará no ponto $Q = (0, \nu t)$ como podemos ver na figura 12. Olhando agora para o deslocamento do gato, podemos calcular o seu deslocamento L através do comprimento de arco PG que vai de a até x, então temos

$$L = \int_x^a \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx,$$

sabendo que o deslocamento L é dado por $t\omega$, o tempo que o gato levou para chegar até o ponto P será dado por

$$t = \frac{1}{\omega} \int_x^a \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx. \tag{3.34}$$

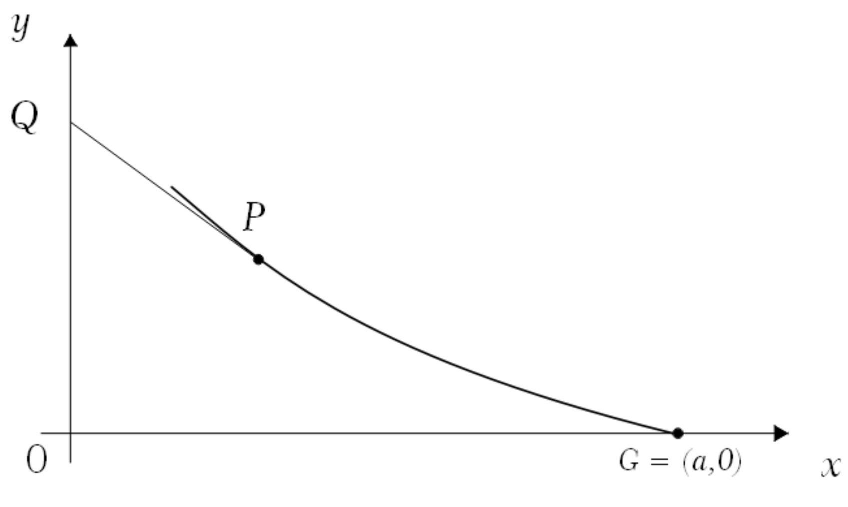

Figura 12: Curva de perseguição.

Agora, considerando o ponto P de coordenadas arbitrárias (x, y) temos pela geometria da figura:

$$y' = \frac{\bar{OQ} - y}{0 - x},$$

logo obtemos

$$\bar{OQ} = y - y'x,$$

e como $\bar{OQ} = \nu t$, temos

$$\nu t = y - y'x. \tag{3.35}$$

Logo, de (3.34) e (3.35), obtemos

$$\frac{y - y'x}{\nu} = \frac{1}{\omega}\int_x^a \sqrt{1 + |y'(x)|^2}dx$$

$$\frac{\nu}{\omega}\int_x^a \sqrt{1 + |y'(x)|^2}dx = y - y'x,$$

invertendo o intervalo de integração da equação acima e aplicando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$-\frac{\nu}{\omega}\int_a^x \sqrt{1 + |y'(x)|^2}dx = y - y'x,$$

logo vamos obter

$$\frac{\nu}{\omega}\int_a^x \sqrt{1 + |y'(x)|^2}dx = y'x - y,$$

derivando a expressão acima em relação a variável x, temos

$$\frac{\nu}{\omega}\sqrt{1 + |y'(x)|^2} = (y''x + y') - y',$$

então obtemos a seguinte expressão

$$c\sqrt{1 + |y'(x)|^2} = xy'', \tag{3.36}$$

onde $c = \nu/\omega$. Introduzindo a variável $p = y'$, temos a seguinte expressão

$$c\sqrt{1 + p^2} = xp'. \tag{3.37}$$

Sabendo que $p' = dp/dx$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{c}{x}dx = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}dp \\ \\ p(a) = 0. \end{cases}$$

Na sessão 2.5, sobre a catenária, vimos que a primitiva de $1/\sqrt{1+p^2}$ é dada por

$$-ln(\sqrt{p^2 + 1} - p),$$

logo a solução geral do problema de valor inicial será dada por

$$c\ lnx + k = -ln(\sqrt{p^2+1} - 1).$$

Utilizando a condição inicial $p(a) = 0$, temos

$$c\ lna + k = -ln(1)$$

$$k = -c\ lna,$$

então vamos obter da solução de (3.37):

$$c\ lna - c\ lnx = ln(\sqrt{p^2+1} - 1)$$

$$\sqrt{p^2+1} - p = \left(\frac{a}{x}\right)^c. \tag{3.38}$$

Da expressão (3.38), vamos obter

$$\left(\left[\frac{a}{x}\right]^c + p\right)^2 = p^2 + 1,$$

fazendo as operações, temos

$$\left(\frac{a}{x}\right)^{2c} + 2\left(\frac{a}{x}\right)^c p = 1,$$

e isolando a variável p, obtemos

$$p = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^c - \left(\frac{a}{x}\right)^c\right].$$

Sabendo que $p = y' = dy/dx$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} dy = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{x}{a}\right)^c - \left(\dfrac{a}{x}\right)^c\right] dx \\ \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Primeiramente, vamos resolver o problema acima para o caso $c \neq 1$. Para isso, usaremos o método da subtituição para resolver a integral do problema, onde

$$u = \frac{x}{a}; \quad dx = adu,$$

$$v = \frac{a}{x}; \quad dx = -\frac{a}{v^2}dv.$$

Logo, fazendo as substuições na equação do problema, obtemos

$$\int dy = \frac{1}{2}\left[\int \left(\frac{x}{a}\right)^c dx - \int \left(\frac{a}{x}\right)^c dx\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left(a\int u^c du + a\int v^{c-2} dv\right)$$

$$y = \frac{a}{2}\left[\frac{u^{c+1}}{c+1} + \frac{v^{c-1}}{c-1}\right] + k.$$

Voltando para a variável x, temos

$$y = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{c-1}\right] + k,$$

utilizando a condição inicial $y(a) = 0$, temos que

$$0 = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{a}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{a}\right)^{c-1}\right] + k,$$

aplicando as operações, obtemos o valor de k:

$$k = -\frac{ac}{c^2-1}.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial para $c \neq 1$, será dada por

$$y(x) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{c-1}\right] - \frac{ac}{c^2-1}. \tag{3.39}$$

Agora, para $c = 1$, temos outro problema de valor inicial:

$$\begin{cases} dy = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{x}{a}\right) - \left(\dfrac{a}{x}\right)\right] dx \\ \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Aplicando a integração, obtemos

$$\int dy = \frac{1}{2}\int \left[\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{a}{x}\right)\right] dx$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2a} - a\ lnx\right) + k,$$

usando a condição inicial $y(a) = 0$, obtemos

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2a} - a\ lna\right) + k,$$

logo obtemos que o valor de k será dado por

$$k = \frac{a\ lna}{2} - \frac{a}{4}.$$

Então, escrevendo a solução do problema

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2a} - a\ lnx\right) + \frac{a\ lna}{2} - \frac{a}{4}.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial para $c = 1$, será dada por

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2a} - a\ lnx\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\ lna\right). \tag{3.40}$$

Análise da solução: Se considerarmos $c \geq 1$, consequentemente a velocidade do rato seria maior que a do gato, ou seja, $\nu \geq \omega$. Porém, se analisarmos o caso para $c < 1$, vamos ter que a velocidade do gato será a maior, ou seja, $\nu < \omega$. Podemos determinar o instante e o ponto da coordenada sobre o eixo y onde o encontro entre os dois aconteceria.

Para determinar o instante, utilizaremos a equação (3.39), para $y(0) = \nu t$, onde νt representa o deslocamento do rato. Logo obtemos

$$y(0) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{0}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{0}{a}\right)^{1-c}\right] - \frac{a\left(\frac{\nu}{\omega}\right)}{\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 - 1}$$

$$\nu t = \frac{\frac{-a\nu}{\omega}}{\frac{\nu^2 - \omega^2}{\omega^2}},$$

organizando a expressão acima, vamos obter que o instante que o gato encontra o rato é dado por

$$t = \frac{a\omega}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Já o ponto de encontro entre os dois, também pode ser encontrado pela expressão (3.39), agora considerando a condição $y(0) = E$, onde E será o ponto de encontro. Logo temos

$$y(0) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{0}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{0}{a}\right)^{1-c}\right] - \frac{a\left(\frac{\nu}{\omega}\right)}{\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 - 1}$$

$$E = -\frac{a\left(\frac{\nu}{\omega}\right)}{\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 - 1},$$

organizando a expressao acima, obtemos que o ponto da ordenada sobre o eixo y onde o gato encontra o rato, é dado por

$$E = \frac{a\nu\omega}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Referências

[1] BOYCE, William; DIPRIMA, Richard; MEADE, Douglas. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

[2] BRONSON, Richard. **Moderna Introdução Às Equações Diferenciais**. 1. ed. São Paulo: Editora McGraw-Hill, 1977.

[3] DE FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[4] KREIDER, Donald; KULLER, Robert; OSTBERG, Donald. **Equações Diferenciais**. Ed. da Universidade de São Paulo, 1972.

[5] KREYSZIG, Erwin. **Matemática Superior**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Livros Técnicos e Científicos, 1969.

[6] PINTO, Alex Oliveira. **Equações Diferenciais Ordinárias: Um estudo dos modelos matemáticos que descrevem a Catenária e a Tractriz**. 2021. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Centro de Estudos Superiores de Tefé, Universidade do Estado do Amazonas, Tefé/Am, 2021.