

Geometria Diferencial Global. Um estudo sobre a rigidez da esfera

Rafael Sergio Sampaio Emidio

XXX Seminário de Iniciação Científica 2019
Bolsa PIBIC/PRODOUTOR
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Orientador: Adam Oliveira da Silva

30 de Setembro de 2019

O objetivo deste trabalho é mostrar que a esfera é uma superfície rígida através de relações entre propriedades locais e globais de curvas e superfícies da Geometria Diferencial. Iremos verificar que se uma superfície regular S conexa e compacta possui curvatura gaussiana K constante, então S é uma esfera.

Palavras-chave: superfícies regulares, esfera, curvaturas.

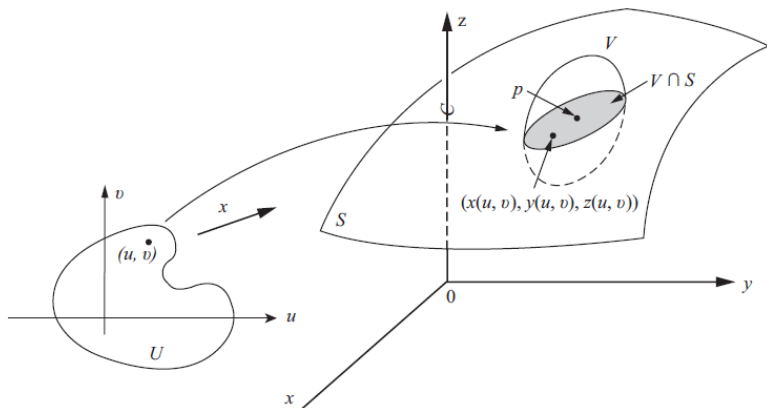
Superfície regular

Uma superfície regular S é um subconjunto do espaço tal que para todo ponto p , existe uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$, onde U é um aberto em R^2 , V uma vizinhança de p e X satisfaz as seguintes condições:

- 1 X é diferenciável;
- 2 X é homeomorfismo;
- 3 A diferencial $dX_q : R^2 \rightarrow R^3$ é injetiva.

Superfície regular

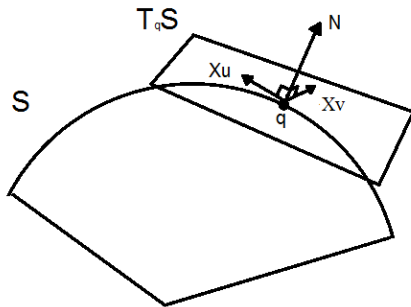
Neste caso, chamamos X de uma parametrização de S . Assim, dado $(u, v) \in U$ temos $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.



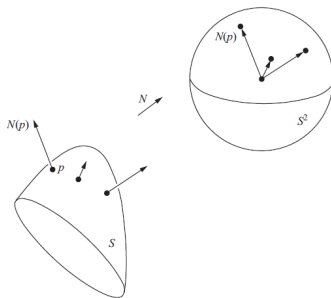
Aplicação de Gauss

Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de uma superfície regular S em um ponto $p \in S$. Desde que $\{X_u, X_v\}$ constitui uma base para $T_q S$, podemos definir para cada ponto $q \in X(U)$, um vetor normal unitário da seguinte maneira:

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}, \quad q \in X(U)$$



Se a superfície S possui uma orientação N , podemos garantir a existência da aplicação $N : S \rightarrow R^3$ que toma seus valores em uma esfera unitária



A aplicação $N : S \rightarrow S^2$ é chamada de aplicação normal de Gauss de S . Podemos verificar que a diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ é uma aplicação linear auto-adjunta.

Portanto, para cada ponto $p \in S$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$, tal que

$$dN_p(e_1) = -k_1 e_1$$

$$dN_p(e_2) = -k_2 e_2$$

Onde k_1 e k_2 são respectivamente, o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental $\Pi_p(v) = - \langle dN_p(v), v \rangle$, ou seja, são os valores extremos da curvatura normal em p , tal que $k_1 \geq k_2$.

Os autovalores k_1 e k_2 são chamados de curvaturas principais e os autovetores e_1 e e_2 são chamados de direções principais.

- **Curvatura gaussiana (K):** É o determinante da diferencial dN_p de S em p

$$K = k_1 k_2.$$

- **Curvatura média (H):** É o negativo do traço da diferencial dN_p de S em p :

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Um ponto de uma superfície regular S é chamado de:

- 1 Elíptico se $K > 0$;
- 2 Hiperbólico se $K < 0$;
- 3 Parabólico se $K = 0$, com $dN_p \neq 0$;
- 4 Planar se $dN_p = 0$.

Obs1: Se $k_1(p) = k_2(p)$ então dizemos que p é um ponto umbílico de S .

Obs2: Se todos os pontos de uma superfície S são umbílicos, então S está contida em um plano ou em uma esfera.

Aplicação de Gauss em coordenadas locais

Através do estudo da aplicação de Gauss em coordenadas locais, obtemos as seguintes equações para a curvatura Gaussiana K e a curvatura média H :

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

Onde:

- E , F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental $I_p(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$;
- e , f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental $II(v) = - \langle dN_p(v), v \rangle$.

Equações de compatibilidade

As equações de compatibilidade são dadas pelas fórmulas de Gauss e pelas equações de Mainardi-Codazzi.

- Os coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ são chamados de símbolos de Christoffel, obtidos nas derivadas dos vetores X_u , X_v e N .

Feitas várias demonstrações, foram encontradas as quatro equações de compatibilidade:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -EK \quad (1)$$

$$(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 = FK \quad (2)$$

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \quad (3)$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \quad (4)$$

Obs3: Equações de compatibilidade quando as curvas coordenadas são linhas de curvaturas ($F = f = 0$)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} \quad (1)$$

$$e_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \quad (3)$$

$$g_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \quad (4)$$

Teorema 1

Seja S uma superfície conexa e compacta com curvatura gaussiana K constante. Então S é uma esfera.

Para provar o Teorema 1, serão necessários alguns resultados. Estes resultados serão demonstrados através de 2 lemas.

Lema 1

Seja S uma superfície regular e $p \in S$ satisfazendo as seguintes condições:

- ❶ $K(p) > 0$; isto é, a curvatura gaussiana em p é positiva.
- ❷ p é ao mesmo tempo um ponto de máximo local da função k_1 e um ponto de mínimo local da função k_2 ($k_1 \geq k_2$).

Então p é um ponto umbílico de S .

Demonstração: Vamos supor que p não é um ponto umbílico e obter uma contradição.

Se p não é um ponto umbílico de S , podemos parametrizar uma vizinhança coordenada de p por coordenadas (u, v) tais que as curvas coordenadas são linhas de curvaturas. Então vamos ter que $F = f = 0$. Logo as curvaturas principais k_1 e k_2 serão dadas por

$$k_1 = \frac{e}{E}, \quad k_2 = \frac{g}{G}. \quad (5)$$

Nestas condições as equações (3) e (4) de Mainardi-Codazzi são escritas como

$$e_v = \frac{E_v}{2}(k_1 + k_2) \quad (6)$$

$$g_u = \frac{G_u}{2}(k_1 + k_2) \quad (7)$$

Derivando a primeira equação de (5) com relação a v e usando (6), obtemos

$$E(k_1)_v = \frac{E_v}{2}(-k_1 + k_2) \quad (8)$$

Analogamente, derivando a segunda equação de (5) com relação a u e usando (7), obtemos

$$E(k_2)_u = \frac{G_u}{2}(k_1 - k_2) \quad (9)$$

Por outro lado, quando $F = 0$, a formula de Gauss (1) para K se reduz

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

Logo,

$$-2KEG = E_{vv} + G_{uu} + ME_v + NG_u \quad (10)$$

A partir de (8) e (9), obtemos expressões para E_v e G_u que depois de derivadas, introduzimos na equação (10) obtendo

$$-2KEG = -\frac{2E}{k_1 - k_2}(k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1 - k_2}(k_2)_{uu} + \bar{M}(k_1)_v + \bar{N}(k_2)_u$$

Donde,

$$-2(k_1 - k_2)KEG = -2E(k_1)_{vv} + 2G(k_2)_{uu} + \tilde{M}(k_1)_v + \tilde{N}(k_2)_u \quad (11)$$

Como k_1 atinge um máximo local em p e k_2 atinge um mínimo local em p , temos

$$(k_1)_v = 0, \quad (k_2)_u = 0, \quad (k_1)_{vv} \leq 0, \quad (k_2)_{uu} \geq 0$$

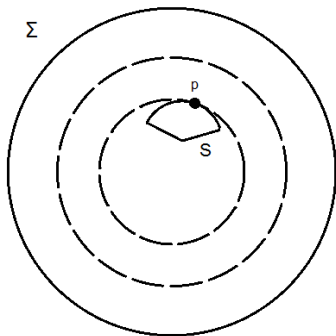
em p . No entanto, isto implica que o segundo membro da equação (11) é positivo ou nulo, o que é uma contradição, logo o ponto p é um ponto umbílico de S .

Lema 2

Uma superfície regular compacta $S \subset R^3$ tem pelo menos, um ponto elíptico.

Demonstração: Como S é compacta, S é limitada. Portanto S está contida em alguma esfera em R^3 , consideremos uma esfera Σ . Através de sucessivas diminuições do raio da esfera Σ , obtemos um ponto onde a mesma irá tocar em S , chamaremos de ponto p . Portanto, Σ e S são tangentes em p .

Observando as sessões normais em p , notamos que qualquer curvatura normal de S em p é maior ou igual que a curvatura normal de Σ em p . Logo concluímos que $K_{S(p)} \geq K_{\Sigma(p)} > 0$, portanto p é um ponto elíptico desejado.



Demonstração do teorema 1: Como S é compacta, ela possui um ponto elíptico pelo Lema 2. Como K é constante, devemos ter $K > 0$ em S . Como $K = k_1 k_2$ é uma constante positiva, p é ao mesmo tempo o máximo local da função k_1 e o mínimo local da função k_2 . Pelo lema 1 p é um ponto umbílico de S , isto é, $k_1(p) = k_2(p)$. Agora seja um ponto $q \in S$, tal que $k_1(q) \geq k_2(q)$ temos

$$k_1(p) \geq k_1(q) \geq k_2(q) \geq k_2(p) = k_1(p).$$

Portanto $k_1(q) = k_2(q)$ para todo $q \in S$. Podemos concluir de uma maneira definitiva que todos os pontos de S são umbílicos. Como $K > 0$, S está contida em uma esfera Σ pela observação 2. Por compacidade, S é fechada em Σ , e como S é uma superfície regular, S é aberta em Σ . Como Σ é conexa e S é aberta e fechada em Σ , teremos que $S = \Sigma$. Portanto S é uma esfera.

DO CARMO, M. **Differential Geometry of curves and surfaces**.
Prentice-Hall (1976)

TENEBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. Editora
Blücher (2008)

ARAÚJO, P. **Geometria Diferencial**. Coleção Matemática Univer-
sitária – IMPA (2004)

Obrigado pela atenção!