



# Relatório da Disciplina Métodos Computacionais

Professor: Jéssé Carvalho Costa

Emilia Hartmann

Pós graduação em Geofísica (Ufpa)

15 de julho de 2019

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>MODELAGEM DIRETA (DIFERENÇAS FINITAS)</b>	<b>3</b>
2.1	EQUAÇÃO DE ONDA ACÚSTICA DE SEGUNDA ORDEM . . . . .	3
2.2	FONTE SÍSMICA . . . . .	3
2.3	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA . . . . .	4
2.4	ESTABILIDADE E DISPERSÃO NUMÉRICAS . . . . .	5
2.4.1	Dispersão numérica . . . . .	5
2.4.2	Estabilidade numérica . . . . .	5
2.5	ABSORÇÃO NAS BORDAS (CPML) . . . . .	6
2.6	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS . . . . .	11
2.6.1	Modelo homogêneo . . . . .	11
2.6.2	Modelo de Marmousi . . . . .	13
<b>3</b>	<b>MODELAGEM BORN POR DIFERENÇAS FINITAS</b>	<b>15</b>
3.1	SISTEMA DE EQUAÇÕES DE ONDA . . . . .	15
3.2	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS . . . . .	17
3.2.1	Modelo homogêneo com ponto difrator no centro . . . . .	17
3.2.2	Modelo de Marmousi . . . . .	19
<b>4</b>	<b>MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO (RTM)</b>	<b>21</b>
4.1	FILTRO APLICADO À IMAGEM MIGRADA . . . . .	21
4.2	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS USANDO O DADO BORN . . . . .	22
4.2.1	Modelo homogêneo com ponto difrator no centro . . . . .	22
4.2.2	Modelo de Marmousi . . . . .	24
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>26</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>27</b>

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Assinatura da fonte usada: Ricker com frequência pico de 8 Hz. . . . .	3
2.2	Bordas adicionadas ao torno do modelo limitado para simular um meio ilimitado no processo de modelagem, cujo $\sigma$ se refere ao amortecimento do campo de onda que age apenas na região da borda. . . . .	6
2.3	Gráfico do coeficiente $\alpha_i$ . A linha vermelha tracejada se refere ao limite entre as extremidades do modelo limitado e as bordas. . . . .	10
2.4	Gráfico do coeficiente $\sigma_i$ . A linha vermelha tracejada se refere ao limite entre as extremidades do modelo limitado e as bordas. . . . .	11
2.5	Snapshot do campo de pressão no modelo homogêneo com o tiro na posição $(x, z) = (4596, 1452)$ . . . . .	12
2.6	Snapshot do campo de pressão no modelo homogêneo com o tiro na posição $(x, z) = (4596, 1452)$ e sem bordas absorventes (cpml). . . . .	12
2.7	Snapshot do campo de pressão no modelo homogêneo com bordas absorventes (cpml) e com a fonte na posição $(x, z) = (4596, 1452)$ . . . . .	13
2.8	Modelo de velocidade utilizado para a modelagem direta: modelo de Marmousi. . . . .	13
2.9	Snapshot do campo de pressão no modelo Marmousi com bordas absorventes (cpml) e com a fonte na posição $(x, z) = (4596, 12)$ . . . . .	14
3.1	Modelo com ponto difrator no centro do modelo com uma velocidade de 1.5% maior que a velocidade nos pontos ao redor do mesmo. . . . .	17
3.2	Instante inicial da modelagem Born a fim de evidenciar as "fontes" geradas no topo e base do ponto difrator. . . . .	18
3.3	Sismograma com um tiro no meio do eixo horizontal e com 20 receptores igualmente espaçados em ambos os lados (meio suavizado do modelo com ponto difrator). . . . .	18
3.4	Sismograma com um tiro no meio do eixo horizontal e com 20 receptores igualmente espaçados em ambos os lados (modelo com ponto difrator). . .	19
3.5	Sismograma com um tiro no meio do eixo horizontal e com 39 receptores igualmente espaçados em ambos os lados (modelo de Marmousi). . . . .	20
3.6	Sismograma com um tiro no meio do eixo horizontal e com 39 receptores igualmente espaçados em ambos os lados (modelo de Marmousi). . . . .	20
4.1	Ilustração dos campos de onda: direto e retropropagado, respectivamente (Bulcão, 2014). . . . .	21
4.2	Imageamento do ponto difrator no centro do modelo homogêneo com presença de ruídos de baixa frequência. . . . .	22

4.3	Imageamento do ponto difrator no centro do modelo homogêneo com filtro laplaciano aplicado ao mesmo. . . . .	23
4.4	Imagem migrada do modelo de Marmousi sem filtro. . . . .	24
4.5	Imagem migrada do modelo de Marmousi filtrada. . . . .	24

# 1 INTRODUÇÃO

Na exploração por sísmica de reflexão existem três estágios principais: aquisição de dados, processamento e interpretação, sendo que o segundo estágio, de processamento, é subdividido (geralmente) em três processos fundamentais: deconvolução, empilhamento e migração (Ramalho, 2014). O interesse para este trabalho se dá na migração a qual tem a finalidade de colapsar as difrações e reposicionar os eventos sísmicos corretamente, permitindo, assim, que o dado esteja mais adequado para a interpretação.

O marco inicial da técnica de migração se deu na década de 50 com Hagedoorn (1954), o qual introduziu o uso de curvas padrões de frente de onda e de difrações, possibilitando a migração manual de dados sísmicos previamente interpretados. Nas décadas subsequentes, a migração foi baseada na equação de onda (Claerbout, 1971) e houve o advento de computadores para o processamento de dados sísmicos.

Duas etapas são cruciais e constituem qualquer técnica de imageamento do que se trate: extrapolação dos campos de onda desde a superfície de aquisição e aplicação de uma condição de imagem. A extrapolação dos campos consiste em um processo de modelagem, e pode ser realizada por meio de algum método de solução da equação da onda, comumente numérica (Matias, 2009).

A metodologia, comumente usada, de diferenças finitas tem, também, se desenvolvido bastante nos últimos anos e tem a vantagem de ser um método recursivo e não possuir restrições quanto aos modelos de velocidade utilizados. Porém, como todo o método, este possui suas desvantagens também, como, por exemplo, problemas de dispersão e estabilidade numérica. Diante disso, uma nova técnica de migração, que faz uso desses operadores de diferenças finitas, foi apresentada por Hildebrand (1987). A mesma, chamou-se de reverse-time-migration (RTM) e é considerada a forma mais precisa de efetuar a migração em meios heterogêneos.

A RTM (reverse time migration), usada neste trabalho, pode ser aplicada em um dado pós-empilhado (modelo do refletor explosivo) ou pré-empilhado organizado em família de fonte comum, obtendo a imagem pelo princípio de Claerbout (1971) que diz: "O refletor existe nos pontos da subsuperfície onde a primeira chegada da onda descendente (onda direta da fonte) coincide no tempo  $t$  (tempo de propagação) e no espaço  $(x, y, z)$  com a onda ascendente (onda refletida)".

Contudo, a RTM é uma técnica cara comparada às outras técnicas de migração que utilizam a equação de onda de sentido único, em virtude da exigência de alta demanda computacional e uma capacidade de armazenamento cada vez mais alta (Araujo e Bahia, 2009). Entretanto, atualmente, se tem um grande avanço da tecnologia dos computadores e a implementação dos algoritmos de imageamento sísmicos em profundidade, em máquinas paralelas (Cluster de PC's), fazendo com que a RTM seja a cada dia mais viável

(Araujo e Bahia, 2009).

No capítulo 2 será discutido o embasamento teórico da modelagem 2D direta (obtenção do campo de onda de pressão) com ênfase na eficiência das bordas absorventes e seus resultados numéricos. No capítulo 3 é discutido a modelagem Born, a qual tem como finalidade fornecer um dado sísmico mais "limpo" para a migração reversa no tempo (RTM). E, no capítulo 4, discute-se a teoria da RTM e os seus respectivos resultados numéricos.

## 2 MODELAGEM DIRETA (DIFERENÇAS FINITAS)

### 2.1 EQUAÇÃO DE ONDA ACÚSTICA DE SEGUNDA ORDEM

A modelagem direta se baseia na equação de onda. Esta, constitui o pilar fundamental do método sísmico (Matias, 2009), uma vez que representa a propagação do campo de onda estabelecendo a relação de dependência entre variações espacial e temporal do campo de pressão gerado pela onda. A equação utilizada na modelagem direta foi:

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) + q(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

que é a equação de onda acústica de segunda ordem, sendo  $\mathbf{x} = (x, z)$  com  $p(\mathbf{x}, t)$  representando o campo de pressão,  $c(\mathbf{x})$  a velocidade do meio e  $q(\mathbf{x}, t)$  a fonte monopolar.

### 2.2 FONTE SÍSMICA

A assinatura da fonte utilizada para a modelagem é expresso, matematicamente na equação 2.2.

$$S(t) = [1 - 2\pi^2 f_p^2 t_d^2] e^{-\pi^2 f_p^2 t_d^2} \quad (2.2)$$

e é representada por um pulso Ricker de banda limitada e determinada duração, onde  $f_p$  representa a frequência pico e  $t_d$  a defasagem no tempo. Na figura 2.1 temos a fonte Ricker com frequência dominante de 8 Hz. Usamos, neste trabalho, fontes de injeção de

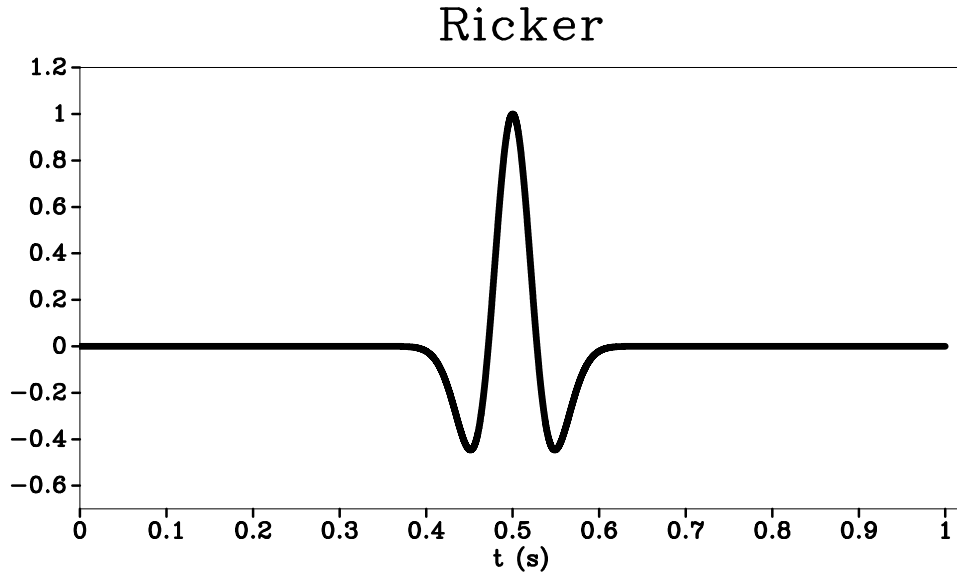


Figura 2.1: Assinatura da fonte usada: Ricker com frequência pico de 8 Hz.

volume como na relação abaixo:

$$q(\mathbf{x}, t) = S(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S), \quad (2.3)$$

onde  $S(t)$  é a assinatura da Wavelet e  $\mathbf{x}_S$  a posição da mesma.

### 2.3 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA

Para a implementação da equação de onda acústica de segunda ordem, equação 2.1, usamos a discretização de cada variável no seu respectivo ponto da malha e aproximamos as derivadas temporal e espacial por diferenças finitas centralizadas (mais precisas):

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}, \quad (2.4)$$

onde  $f(x)$  é uma função qualquer e  $\Delta x$  a diferença entre pontos consecutivos seja no tempo ou espaço. Porém, para derivadas de segunda ordem (obtidas pela série de Taylor), temos:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}. \quad (2.5)$$

Retomando a equação 2.1, notamos que há um laplaciano de  $p(\mathbf{x}, t)$  (primeiro termo do lado direito da equação), o qual, na forma discretizada, torna-se:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) &\approx c^2(\mathbf{x})2d_o p(x, z, t) \\ &+ c^2(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^n d_j \left( \frac{p(x + j\Delta x, z, t) - p(x - j\Delta x, z, t)}{\Delta x^2} \right) \\ &+ c^2(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^n d_j \left( \frac{p(x, z + j\Delta z, t) - p(x, z - j\Delta z, t)}{\Delta z^2} \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

sendo  $n$  o comprimento do operador de diferenças finitas usado na modelagem e  $d_j$  os coeficientes do operador de diferenças finitas. O comprimento usado neste trabalho foi 4, ou seja, foi feita uma aproximação por diferenças finitas de oitava ordem.

Substituindo a equação 2.6 na equação 2.1, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &\approx c^2(\mathbf{x})2d_o p(x, z, t) \\ &+ c^2(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^n d_j \left( \frac{p(x + j\Delta x, z, t) - p(x - j\Delta x, z, t)}{\Delta x^2} \right) \\ &+ c^2(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^n d_j \left( \frac{p(x, z + j\Delta z, t) - p(x, z - j\Delta z, t)}{\Delta z^2} \right) \\ &+ c^2(\mathbf{x})q(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.7)$$



Por fim, discretizamos a equação 2.7 no tempo também, resultando:

$$\begin{aligned}
p(x, z, t + \Delta t) &\approx p(x, z, t - \Delta t) - 2p(x, z, t) \\
&+ (c(\mathbf{x})\Delta t)^2 2d_o p(x, z, t) \\
&+ (c(\mathbf{x})\Delta t)^2 \sum_{j=1}^n d_j \left( \frac{p(x + j\Delta x, z, t) - p(x - j\Delta x, z, t)}{\Delta x^2} \right) \\
&+ (c(\mathbf{x})\Delta t)^2 \sum_{j=1}^n d_j \left( \frac{p(x, z + j\Delta z, t) - p(x, z - j\Delta z, t)}{\Delta z^2} \right) \\
&+ (c(\mathbf{x})\Delta t)^2 q(\mathbf{x}, t).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Este resultado corresponde à equação usada na atualização do campo de pressão a cada passo de  $\Delta t$ , sendo que a cada passo do mesmo é calculado o campo  $p(\mathbf{x}, t)$  a cada ponto da malha.

## 2.4 ESTABILIDADE E DISPERSÃO NUMÉRICAS

### 2.4.1 Dispersão numérica

Infelizmente, a solução da equação da onda por diferenças finitas apresenta dispersão numérica intrínseca ao método. A solução da equação da onda apresentada por operadores de diferenças finitas é estável dentro de limites impostos à amostragem temporal (Matias, 2009). Aumentar a ordem do operador encontrando os coeficientes adequados pode diminuir tais efeitos, mas isto ocorre ao preço de um custo computacional proporcionalmente maior. E, independente disto, o problema de dispersão é intrínseco ao método e não há uma regra que torne o método perfeitamente livre de dispersão (Matias, 2009). Diante desse problema, obtemos um menor  $\Delta x$  e  $\Delta z$  eficiente de tal forma que tenha uma mínima dispersão, obedecendo à seguinte relação:

$$\max(\Delta x, \Delta z) < \frac{1}{G} \frac{c_{\min}}{f_{\max}}, \tag{2.9}$$

sendo que  $\Delta x$  e  $\Delta z$  são os espaçamentos do grid no eixo  $x$  e  $z$  respectivamente.  $c_{\min}$  é a velocidade mínima do meio,  $f_{\max}$ , a frequência pico do pulso fonte e,  $G$ , uma constante correspondente ao número de pontos total usados pelo operador de diferenças finitas, i.e., o número mínimo de pontos na malha necessários para representar o menor comprimento de onda.

### 2.4.2 Estabilidade numérica

A estabilidade numérica ocorre em soluções numéricas que utilizam o esquema com o avanço explícito no tempo, nas quais há a necessidade de colocar uma restrição à mag-

nitude do passo no tempo. Pois, o incremento no tempo deve ser, sempre, menor que o tempo necessário para que a onda viaje entre os pontos adjacentes da malha ( $\Delta x$  e/ou  $\Delta z$ ), senão, obtemos resultados incorretos. Supondo, na nossa malha, que  $\Delta h = \Delta x = \Delta z$ , utilizamos a discretização temporal de Spijker (2016) que segue com:

$$\Delta t \leq \mu \frac{\Delta h}{c_{\text{máx}}}, \quad (2.10)$$

onde  $c_{\text{máx}}$  é a velocidade máxima do meio e  $\mu$  o parâmetro que garante a condição de convergência para a solução numérica. A importância de garantir a estabilidade numérica se resume, então, a evitar resultados espúrios à medida que o cálculo é realizado.

## 2.5 ABSORÇÃO NAS BORDAS (CPML)

Com a finalidade de simular um meio ilimitado, Berenger (1994) introduziu a PML (perfect Matched Layer), uma borda adicional em torno do meio limitado (Figura 2.2) com efeito "esponjoso", i.e., com amortecimento do campo de onda que chega nos limites do modelo a fim de evitar as reflexões dos mesmos e, assim, interferir no sinal registrado.

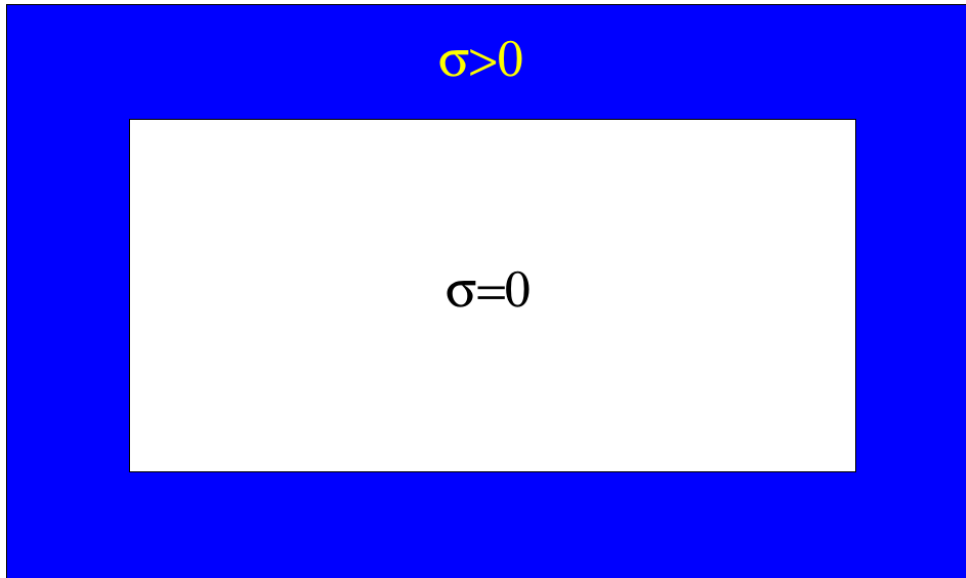


Figura 2.2: Bordas adicionadas ao torno do modelo limitado para simular um meio ilimitado no processo de modelagem, cujo  $\sigma$  se refere ao amortecimento do campo de onda que age apenas na região da borda.

Nos anos de 2000, Roden e Gedney (2000) reformularam a PML, controlando, agora, as reflexões de baixa frequência atrasados no tempo e o melhoramento da absorção de ondas evanescentes. Esta reformulação se trata de uma PML convolucional (CPML), na qual é adicionada um parâmetro  $\alpha$  como mostrado na equação 2.13.

As equações da CPML, de modo simplificado, são obtidas pela substituição de uma

parâmetro complexo de estiramento ( $S_i$ ) na equação de onda acústica modificada, equação 2.12, pela seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{i}} = \mathcal{F}^{-1} \frac{1}{S_i} * \frac{\partial}{\partial i}, \quad (2.11)$$

na qual temos a aplicação do parâmetro  $S_i$  na derivada espacial, sendo  $i$  a direção da coordenada espacial, i.e.,  $i \in \{x, y, z\}$ . Assim, a equação de onda acústica de segunda ordem no domínio da frequência, torna-se:

$$(-j\omega)^2 \hat{p}_i = c^2(\mathbf{x}) \left[ \frac{1}{S_i} \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{1}{S_i} \frac{\partial \hat{p}}{\partial i} \right) \right], \quad (2.12)$$

onde  $\hat{p} = \sum \hat{p}_i$  e  $\hat{p}_i$  são os campos de onda não físicos. Sendo  $S_i$ , o parâmetro descrito na equação 2.13.

$$S_i = 1 + \frac{\sigma_i}{\alpha_i + (-j\omega)}, \quad (2.13)$$

onde  $\sigma_i$  é o fator de amortecimento que controla a absorção da onda acústica,  $\omega$  é a frequência angular,  $j$  é o número imaginário tal que  $j^2 = -1$  e  $\alpha_i$  é um parâmetro real que é responsável pelo deslocamento no plano complexo. Da equação da onda, equação 2.12, chamamos os termos no lado direito da equação que acompanham  $c^2(\mathbf{x})$  de  $\psi_i(t)$ , ou seja:

$$\hat{\psi}_i = \frac{1}{S_i} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial i}, \quad (2.14)$$

onde  $\phi_i(t)$  é:

$$\hat{\phi}_i = \frac{1}{S_i} \frac{\partial \hat{p}}{\partial i}. \quad (2.15)$$

Fazendo a substituição de  $S_i$  nas equações 2.14 e 2.15, temos, respectivamente:

$$\hat{\psi}_i = \left\{ \frac{\alpha_i + (-j\omega)}{\beta_i + (-j\omega)} \right\} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial i} \quad (2.16)$$

e

$$\hat{\phi}_i = \left\{ \frac{\alpha_i + (-j\omega)}{\beta_i + (-j\omega)} \right\} \frac{\partial \hat{p}}{\partial i}, \quad (2.17)$$

sendo  $\beta_i = \alpha_i + \sigma_i$ . Podemos, ainda, reescrever a equação 2.18 da seguinte forma:

$$\hat{\phi}_i = \left\{ \frac{\alpha_i}{\beta_i + (-j\omega)} \right\} \frac{\partial \hat{p}}{\partial i} + \left\{ \frac{(-j\omega)}{\beta_i + (-j\omega)} \right\} \frac{\partial \hat{p}}{\partial i}. \quad (2.18)$$

Lembrando que:

$$\mathcal{F} \{ \mu(t) e^{-\beta_i t} \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) e^{-\beta_i t} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\beta_i + (-j\omega)}, \quad (2.19)$$

chegamos no resultado de  $\phi_i(t)$  (no domínio do tempo):

$$\phi_i(t) = -\sigma_i \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) e^{-\beta_i(t-\tau)} \frac{\partial p(\tau)}{\partial i} d\tau + \frac{\partial p(t)}{\partial i} \quad (2.20)$$

ou ainda, pressupondo que  $p(\mathbf{x}, t)$  é causal, temos que:

$$\phi_i(t) = -\sigma_i \int_0^t e^{-\beta_i(t-\tau)} \frac{\partial p(\tau)}{\partial i} d\tau + \frac{\partial p(t)}{\partial i}. \quad (2.21)$$

De forma análoga para  $\psi_i(t)$ , obtemos:

$$\psi_i(t) = -\sigma_i \int_0^t e^{-\beta_i(t-\tau)} \frac{\partial \phi_i(\tau)}{\partial i} d\tau + \frac{\partial \phi_i(t)}{\partial i}. \quad (2.22)$$

Por questão de organização, reescrevemos as equações 2.21 e 2.22 em função das variáveis  $\zeta_i$  e  $\xi_i(t)$ , obtendo:

$$\phi_i(t) = \zeta_i + \frac{\partial p(t)}{\partial i} \quad (2.23)$$

e

$$\psi_i(t) = \xi_i(t) + \frac{\partial \phi_i(t)}{\partial i}. \quad (2.24)$$

Sendo  $\zeta_i$  e  $\xi_i(t)$ , respectivamente igual à:

$$\zeta_i = -\sigma_i \int_0^t e^{-\beta_i(t-\tau)} \frac{\partial p(\tau)}{\partial i} d\tau \quad (2.25)$$

e

$$\xi_i(t) = -\sigma_i \int_0^t e^{-\beta_i(t-\tau)} \frac{\partial \phi_i(\tau)}{\partial i} d\tau. \quad (2.26)$$

Na implementação por diferenças finitas, precisamos da forma discreta da equação da onda utilizada (equação 2.8) e isso, implica que tenhamos um avanço no tempo de  $\Delta t$ . Portanto, precisamos de  $\zeta_i$  e  $\xi_i(t)$  avançados de um passo temporal  $\Delta t$ . A seguir, será feita a demonstração para, somente,  $\zeta_i(t + \Delta t)$  uma vez que a dedução é similar para a

outra variável. Avançando  $\zeta_i$  no tempo, temos que:

$$\zeta_i(t + \Delta t) = -\sigma_i \int_0^{t+\Delta t} e^{-\beta_i(t+\Delta t-\tau)} \frac{\partial p(\tau)}{\partial i} d\tau, \quad (2.27)$$

ou melhor,

$$\begin{aligned} \zeta_i(t + \Delta t) &= e^{-\beta_i \Delta t} (-\sigma_i) \int_0^t e^{-\beta_i(t-\tau)} \frac{\partial p(\tau)}{\partial i} d\tau \\ &+ e^{-\beta_i \Delta t} (-\sigma_i) \int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta_i(t-\tau)} \frac{\partial p(\tau)}{\partial i} d\tau. \end{aligned} \quad (2.28)$$

A primeira parcela do lado direito da equação 2.28 pode ser reescrita em função de  $\zeta_i(t)$  pela equação 2.25, ficando:

$$\zeta_i(t + \Delta t) = e^{-\beta_i \Delta t} \zeta_i(t) + e^{-\beta_i \Delta t} (-\sigma_i) \int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta_i(t-\tau)} \frac{\partial p(\tau)}{\partial i} d\tau. \quad (2.29)$$

Supondo que o campo de pressão  $p(\mathbf{x}, t)$  é contínuo, i.e., não varia, em um avanço temporal de  $\Delta t$ , podemos retirar a dependência de  $p(\mathbf{x}, \tau)$  em relação à  $\tau$  no segundo termo à direita da equação 2.29 e calcular a integral (que se torna simples) chegando no seguinte resultado:

$$\zeta_i(t + \Delta t) = e^{-\beta_i \Delta t} \zeta_i(t) + e^{-\beta_i \Delta t} (-\sigma_i) \left[ \frac{e^{\beta_i \Delta t} - 1}{\beta_i} \right] \frac{\partial p(t)}{\partial i}. \quad (2.30)$$

Ainda podemos reescrevê-lo como:

$$\zeta_i(t + \Delta t) = e^{-\beta_i \Delta t} \zeta_i(t) + (-\sigma_i) \left[ \frac{1 - e^{-\beta_i \Delta t}}{\beta_i} \right] \frac{\partial p(t)}{\partial i}. \quad (2.31)$$

Para simplificar, escrevemos a equação 2.31 da seguinte maneira:

$$\zeta_i(t + \Delta t) = a_i \zeta_i(t) + b_i \frac{\partial p(t)}{\partial i}, \quad (2.32)$$

onde

$$a_i = e^{-\beta_i \Delta t} \quad b_i = (-\sigma_i) \left[ \frac{1 - e^{-\beta_i \Delta t}}{\beta_i} \right]. \quad (2.33)$$

Podemos, de forma análoga a dedução da equação 2.34, encontrar uma atualização para  $\xi_i(t)$  tal que

$$\xi_i(t + \Delta t) = a_i \xi_i(t) + b_i \frac{\partial \phi_i(t)}{\partial i} \quad (2.34)$$

e, substituindo a equação 2.23 na equação 2.34, resulta na equação:

$$\xi_i(t + \Delta t) = a_i \xi_i(t) + b_i \frac{\partial}{\partial i} \left[ \zeta_i(t) + \frac{\partial p(t)}{\partial i} \right] \quad (2.35)$$

Neste momento, temos todas as variáveis necessárias à atualização do campo de pressão com CPML, logo, iremos fazer as devidas substituições para tal. Primeiramente, substituímos a equação 2.23 na equação 2.24, obtendo:

$$\psi_i(t) = \xi_i(t) + \frac{\partial}{\partial i} \left[ \zeta_i(t) + \frac{\partial p(t)}{\partial i} \right], \quad (2.36)$$

ou melhor,

$$\psi_i(t) = \xi_i(t) + \frac{\partial \zeta_i(t)}{\partial i} + \frac{\partial^2 p(t)}{\partial i^2}. \quad (2.37)$$

Retomando a equação 2.12 no domínio do tempo com a substituição da parcela das derivadas espaciais (equação 2.16) pela equação de  $\psi_i(t)$  atualizada, equação 2.37, temos:

$$\frac{\partial p_i(t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{x}) \left[ \xi_i(t) + \frac{\partial \zeta_i(t)}{\partial i} + \frac{\partial^2 p(t)}{\partial i^2} \right]. \quad (2.38)$$

Mostramos o comportamento dos coeficientes de amortecimento, em uma direção, nas Figuras 2.3 e 2.4 tanto no modelo limitado quanto nas bordas do modelo.

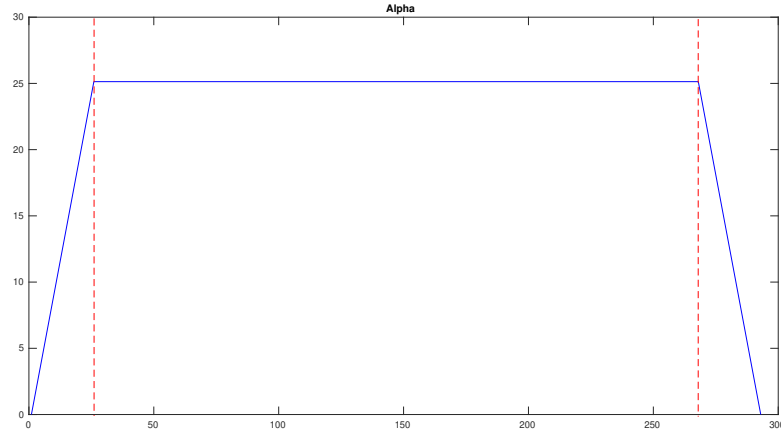


Figura 2.3: Gráfico do coeficiente  $\alpha_i$ . A linha vermelha tracejada se refere ao limite entre as extremidades do modelo limitado e as bordas.

Utilizamos, para a implementação da borda absorvente (CPML) os coeficientes iniciais descritos no paper Komatitsch e Martin (2007).

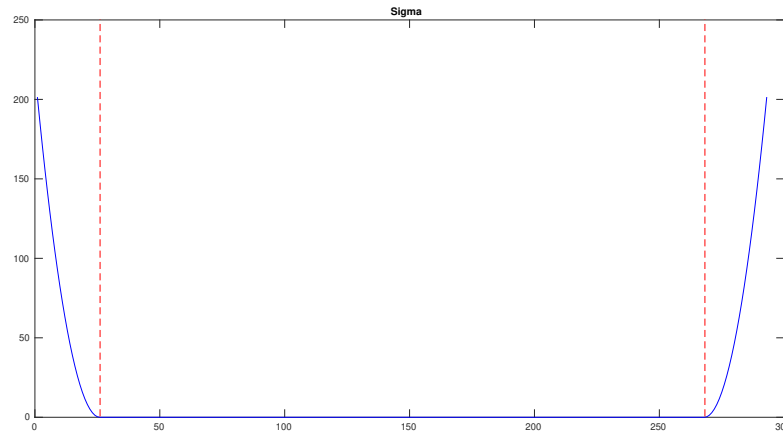


Figura 2.4: Gráfico do coeficiente  $\sigma_i$ . A linha vermelha tracejada se refere ao limite entre as extremidades do modelo limitado e as bordas.

## 2.6 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Foram feitos, para a modelagem direta, 2 experimentos: o primeiro em um modelo homogêneo a fim de possibilitar uma boa visualização da eficiência da borda absorvente. E o segundo experimento, em um modelo geologicamente mais complexo, o modelo de Marmousi.

### 2.6.1 Modelo homogêneo

Apresentamos, nesta seção, "fotos" do campo de pressão em alguns instantes de tempo para possibilitar a visualização da eficiência das bordas absorventes (CPML) aplicadas no processo de modelagem. O teste foi realizado a partir da equação acústica de segunda ordem, equação 2.38, a qual foi demonstrada usando o método de diferenças finitas em um modelo com velocidade constante de 2500 m/s.

Dois instantes de tempo são ilustrados nas Figuras 2.5 e 2.9 a fim de mostrar a eficiência da borda absorvente na parte inferior do modelo.

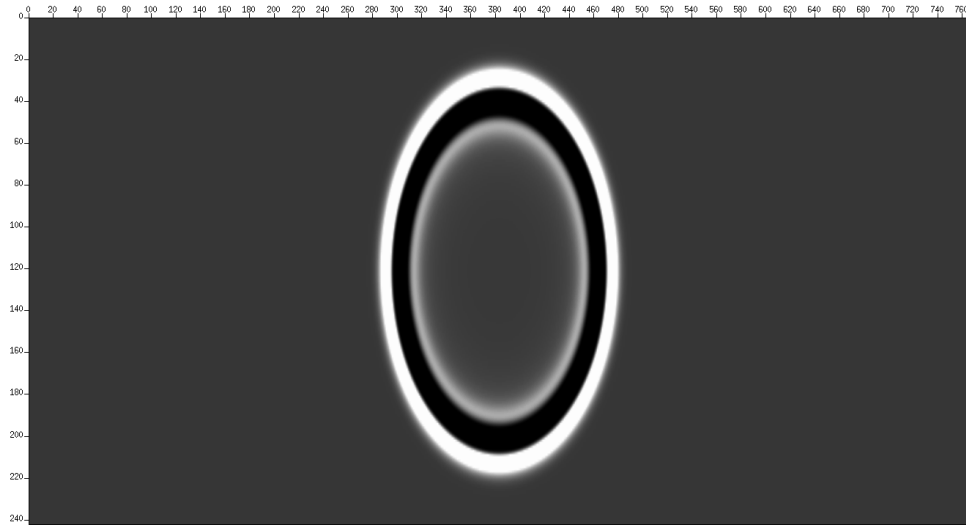


Figura 2.5: Snapshot do campo de pressão no modelo homogêneo com o tiro na posição  $(x, z) = (4596, 1452)$ .



Figura 2.6: Snapshot do campo de pressão no modelo homogêneo com o tiro na posição  $(x, z) = (4596, 1452)$  e sem bordas absorventes (cpml).



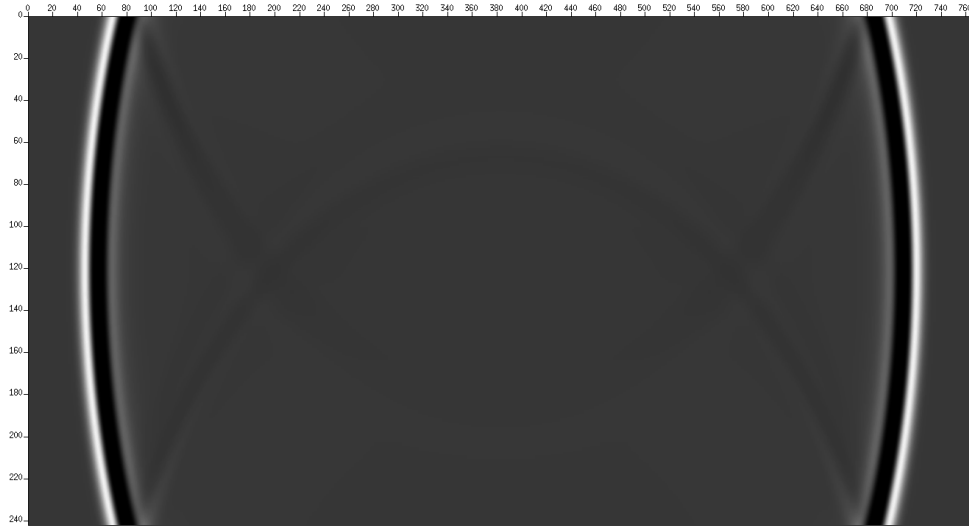
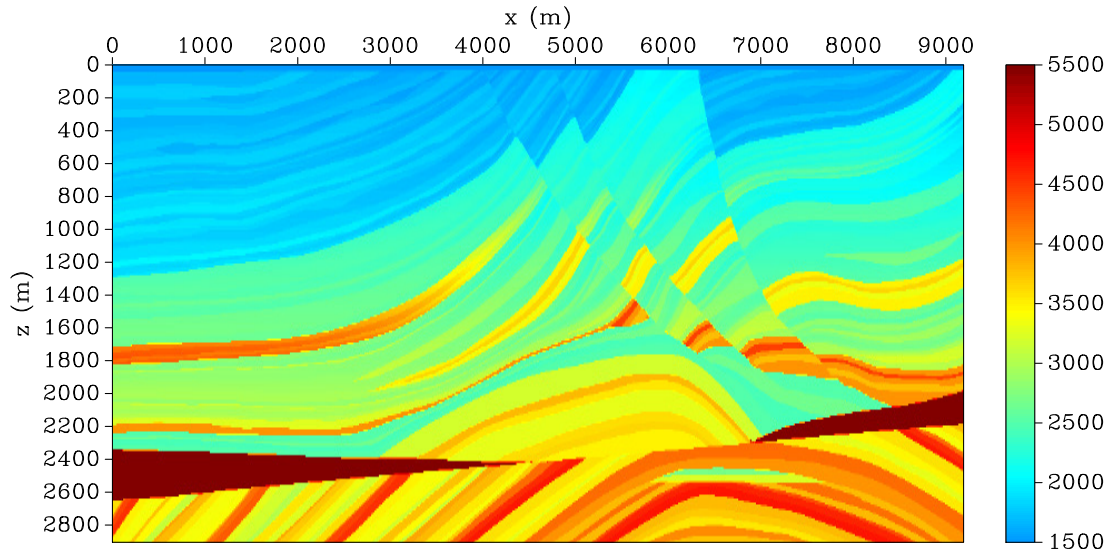


Figura 2.7: Snapshot do campo de pressão no modelo homogêneo com bordas absorventes (cpml) e com a fonte na posição  $(x, z) = (4596, 1452)$ .

### 2.6.2 Modelo de Marmousi

Foi usado o modelo de Marmousi como teste para a modelagem direta. Este modelo contém 243 amostras no eixo da profundidade (eixo  $z$ ) e 767 amostras no eixo horizontal (eixo  $x$ ) espaçadas de 12 metros nas duas direções  $(x, z)$  com origem no zero  $(ox, oz) = (0, 0)$ .



Modelo de Marmousi

Figura 2.8: Modelo de velocidade utilizado para a modelagem direta: modelo de Marmousi.

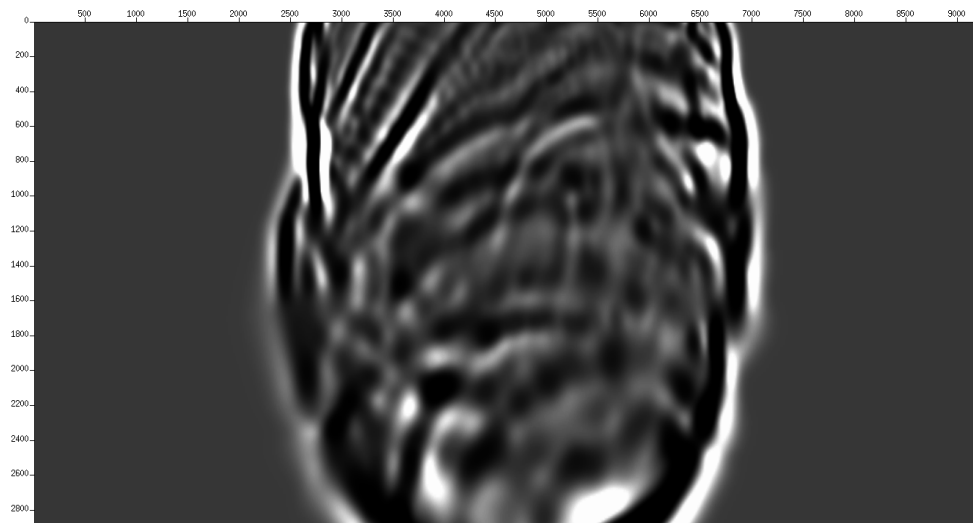


Figura 2.9: Snapshot do campo de pressão no modelo Marmousi com bordas absorventes (cpml) e com a fonte na posição  $(x, z) = (4596, 12)$ .

### 3 MODELAGEM BORN POR DIFERENÇAS FINITAS

A modelagem Born é utilizada neste trabalho porque, justamente, ela consegue retirar os espalhamentos múltiplos do dado de entrada. E, isso é crucial para a migração reversa no tempo (RTM) já que esta técnica funcionada bem, somente, para espalhamentos simples (com, apenas, reflexões primárias).

Esta modelagem se baseia em duas equações de onda: a primeira se refere ao campo de pressão em um meio de referência (meio de fundo ou suavizado), e a segunda se refere ao campo de pressão de Born devido a uma perturbação no meio de velocidade. Vamos, a seguir, mostrar a dedução do sistema de equações de Born.

#### 3.1 SISTEMA DE EQUAÇÕES DE ONDA

O sistema de equações segundo um meio de referência e um meio perturbado, respectivamente, é:

$$\frac{1}{c_o^2(\mathbf{x})} \frac{\partial p_o(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 p_o(\mathbf{x}, t) = S(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \quad (3.1)$$

e

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) = S(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S), \quad (3.2)$$

onde  $c_o(\mathbf{x})$  é a velocidade do meio de referência,  $c(\mathbf{x})$  a velocidade com uma perturbação comparado à  $c_o(\mathbf{x})$ ,  $p_o(\mathbf{x}, t)$  campo de pressão referente à velocidade  $c_o(\mathbf{x})$  e o campo  $p(\mathbf{x}, t)$  referente à velocidade  $c(\mathbf{x})$ . Por simplificação, iremos continuar os cálculos com os argumentos implícitos.

Vamos supor uma pequena perturbação  $\delta c$  tal que  $c = c_o + \delta c$  e  $p = p_o + \delta p$ . Substituindo a equação 3.2 pela perturbação, temos que:

$$\frac{1}{(c_o + \delta c)^2} \frac{\partial (p_o + \delta p)}{\partial t^2} - \nabla^2 (p_o + \delta p) = S(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S). \quad (3.3)$$

Podemos aproximar a primeira parcela do lado esquerdo da equação acima,  $\frac{1}{c_o + \delta c^2}$ , pela seguinte relação:

$$\frac{1}{(c_o + \delta c)^2} = \frac{1}{c_o^2 + 2c_o\delta c + \delta c^2} \approx \frac{1}{c_o^2 + 2c_o\delta c}, \quad (3.4)$$

na qual retiramos o termo  $\delta c^2$  uma vez que a perturbação é tão pequena que podemos desprezar este termo. Continuando a aproximação, podemos multiplicar e dividir o resultado

por um termo (destacado):

$$\frac{1}{c_o^2 + 2c_o\delta c} = \frac{1}{c_o} \left\{ \frac{1}{c_o + 2\delta c} \right\} \frac{c_o - 2\delta c}{c_o - 2\delta c} = \frac{1}{c_o} \left\{ \frac{c_o - 2\delta c}{c_o^2 - 4\delta c^2} \right\}. \quad (3.5)$$

Obtendo como resultado:

$$\frac{1}{c_o^2 + 2c_o\delta c} = \frac{1}{c_o^2} - \frac{2\delta c}{c_o^3}. \quad (3.6)$$

Agora, que chegamos no resultado desejado, substituímos o mesmo na equação 3.3, chegando na relação

$$\left\{ \frac{1}{c_o^2} - \frac{2\delta c}{c_o^3} \right\} \frac{\partial(p_o + \delta p)}{\partial t^2} - \nabla^2(p_o + \delta p) = S(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S). \quad (3.7)$$

Manipulando a equação 3.7, obtemos que:

$$\left\{ \frac{1}{c_o^2} \right\} \frac{\partial p_o}{\partial t^2} - \nabla^2 p_o + \left\{ \frac{1}{c_o^2} \right\} \frac{\partial \delta p}{\partial t^2} - \nabla^2 \delta p - \left\{ \frac{2\delta c}{c_o^3} \right\} \frac{\partial p_o}{\partial t^2} - \left\{ \frac{2\delta c}{c_o^3} \right\} \frac{\partial \delta p}{\partial t^2} = S(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S). \quad (3.8)$$

A última parcela do lado esquerdo da equação 3.8 pode ser desprezado já que são valores bem pequenos:

$$\left\{ \frac{1}{c_o^2} \right\} \frac{\partial p_o}{\partial t^2} - \nabla^2 p_o + \left\{ \frac{1}{c_o^2} \right\} \frac{\partial \delta p}{\partial t^2} - \nabla^2 \delta p - \left\{ \frac{2\delta c}{c_o^3} \right\} \frac{\partial p_o}{\partial t^2} = S(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S). \quad (3.9)$$

Fazendo, também, a substituição das duas primeiras parcelas da equação 3.9 pela sua relação da equação 3.1, obtemos:

$$S(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) + \left\{ \frac{1}{c_o^2} \right\} \frac{\partial \delta p}{\partial t^2} - \nabla^2 \delta p - \left\{ \frac{2\delta c}{c_o^3} \right\} \frac{\partial p_o}{\partial t^2} = S(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S), \quad (3.10)$$

assim, a equação acima se torna:

$$\left\{ \frac{1}{c_o^2} \right\} \frac{\partial \delta p}{\partial t^2} - \nabla^2 \delta p = \left\{ \frac{2\delta c}{c_o^3} \right\} \frac{\partial p_o}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

e, substituindo a parcela do lado direito da equação 3.11 pela relação da equação 3.1, temos que:

$$\left\{ \frac{1}{c_o^2} \right\} \frac{\partial \delta p}{\partial t^2} - \nabla^2 \delta p = 2c_o^2 \frac{\delta c}{c_o} \nabla^2 p_o \quad (3.12)$$

que é a equação que possibilita obter o campo de pressão de Born (perturbado) a partir de um meio de velocidade perturbado, também.

Portanto, para a implementação precisamos do campo de Born, mas também, do campo de pressão de referência uma vez que a injeção de fonte da equação 3.12 necessita do laplaciano do campo de pressão no meio de referência.

### 3.2 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Dois modelos foram escolhidos para se realizar a modelagem Born: (1) modelo homogêneo com ponto difrator no centro e; (2) modelo de Marmousi. Em ambos os testes temos a dimensão de  $(\text{dimX}, \text{dimZ}) = (9192, 2904)$  iniciados da origem e espaçados de 12 metros nas duas direções, totalizando 243 amostras na direção da profundidade (eixo z) e 767 amostras na direção horizontal (eixo x).

#### 3.2.1 Modelo homogêneo com ponto difrator no centro

O primeiro teste com modelagem Born se deu em um meio homogêneo com ponto difrator no centro do mesmo, veja Figura 3.1, cuja velocidade é 1,5% maior que a velocidade do meio de fundo.

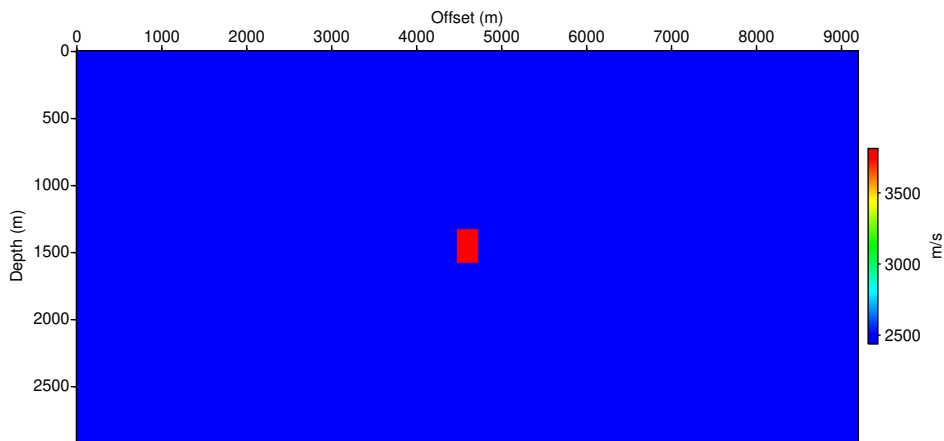


Figura 3.1: Modelo com ponto difrator no centro do modelo com uma velocidade de 1.5% maior que a velocidade nos pontos ao redor do mesmo.

A escolha deste tipo de meio foi com a intenção de visualizar como a modelagem Born funciona, uma vez que a equação 3.12 permite obter um campo de pressão devido fontes presentes nas heterogeneidades do meio. Ou melhor, na modelagem Born, vão ser geradas "fontes" nos locais onde se tem diferenças de velocidades como podemos visualizar na imagem 3.2. A aquisição escolhida para gerar a Figura 3.2 é constituída de uma geometria CSG (common-shot-gather), ou melhor, de uma aquisição end-on, na qual temos uma fonte à direita de um conjunto de receptores que a acompanham. O tiro está posicionado à 12 metros de profundidade e à 8733 metros na horizontal, contendo 96 receptores com offset mínimo e máximo de 192 e 2472 metros, respectivamente. Estes foram espaçados de 24 metros e estão na profundidade de 24 metros.

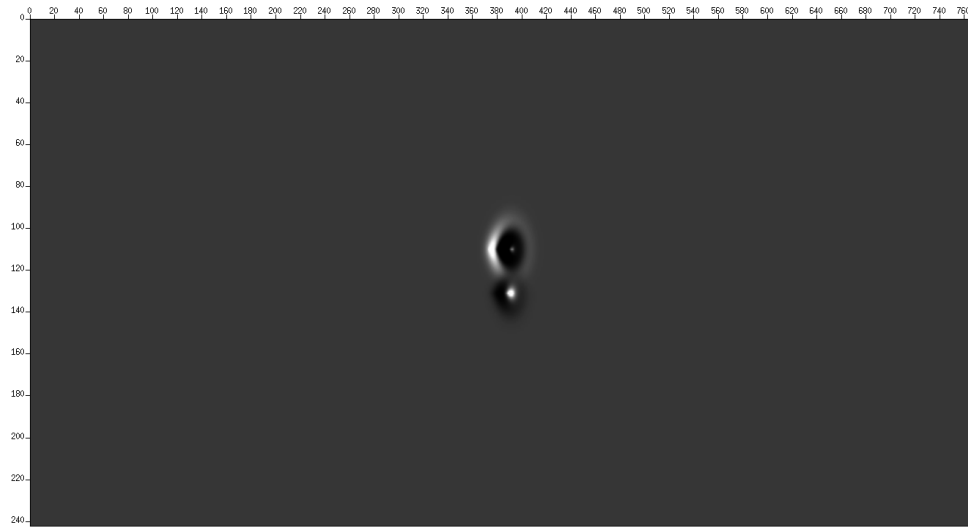


Figura 3.2: Instante inicial da modelagem Born a fim de evidenciar as "fontes" geradas no topo e base do ponto difrator.

Na imagem 3.2 podemos ver fontes geradas no topo e base do ponto difrator, sendo mais evidente no topo da heterogeneidade devido à iluminação da aquisição escolhida.

Sismogramas irão ser apresentados a fim de mostrar que a modelagem Born consegue retirar os efeitos da onda direta. A aquisição foi realizada com uma fonte no centro do eixo horizontal (4596 metros) e à profundidade de 12 metros com o registro dos traços feitos por 20 receptores, igualmente espaçados tanto do lado direito da fonte quanto ao lado esquerdo da mesma à uma profundidade de 24 metros e espaçamento de 450 metros. Veja a Figura 3.4.

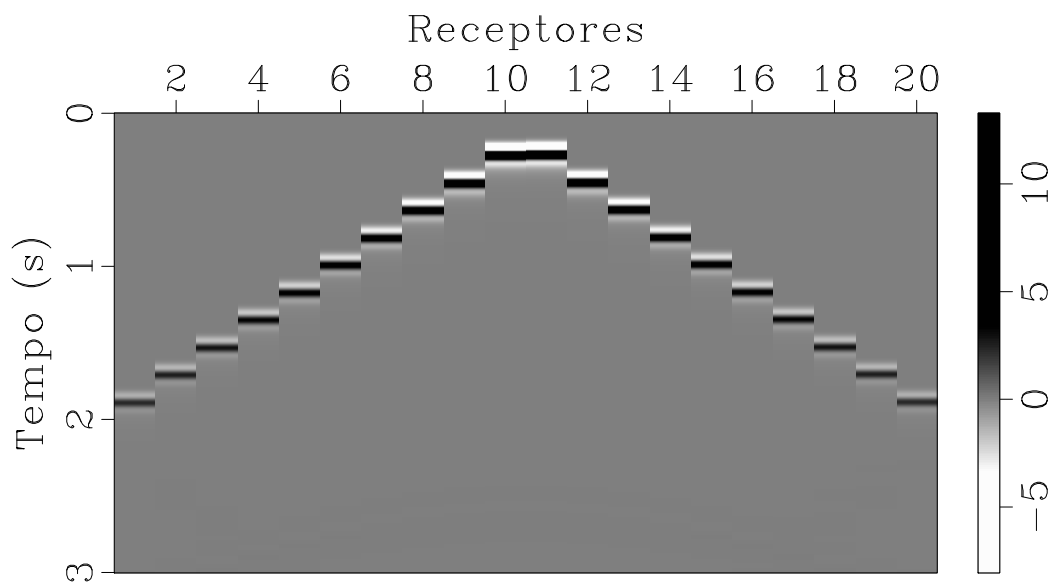


Figura 3.3: Sismograma com um tiro no meio do eixo horizontal e com 20 receptores igualmente espaçados em ambos os lados (meio suavizado do modelo com ponto difrator).

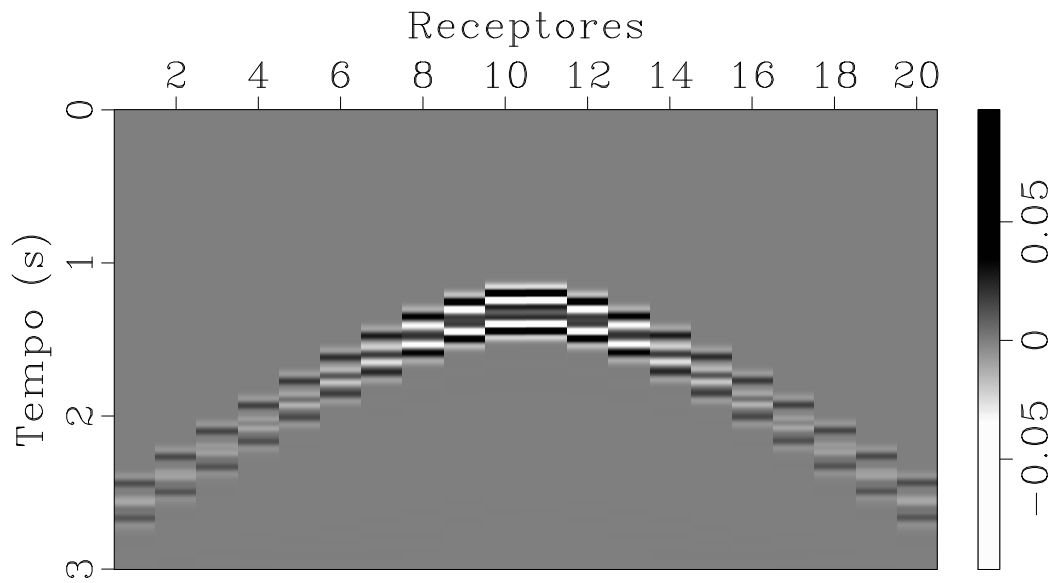


Figura 3.4: Sismograma com um tiro no meio do eixo horizontal e com 20 receptores igualmente espaçados em ambos os lados (modelo com ponto difrator).

Vemos que na Figura 3.3 temos apenas a onda direta da campo de onda que foi modelada em um meio suavizado. E, na Figura 3.4 vemos que temos as reflexões primárias do campo de pressão, mas sem o evento da onda direta como desejado.

### 3.2.2 Modelo de Marmousi

No modelo de Marmousi, Figura 2.8, apresentamos, também os sismogramas com 39 receptores, igualmente, espaçados de 225 metros à profundidade de 24 metros e com uma fonte no meio do eixo horizontal à 12 metros de profundidade. A modelagem foi feita no modelo de Marmousi e na sua versão suavizada a fim de perceber a presença ou não da onda direta. Porém, por escolhermos um modelo, geologicamente, complexo e com muitas lâminas finas logo na superfície do mesmo fez com o que o sismograma da modelagem Born desse um sinal similar a um sismograma padrão (sem Born) e percebemos isso nas posições da onda direta.

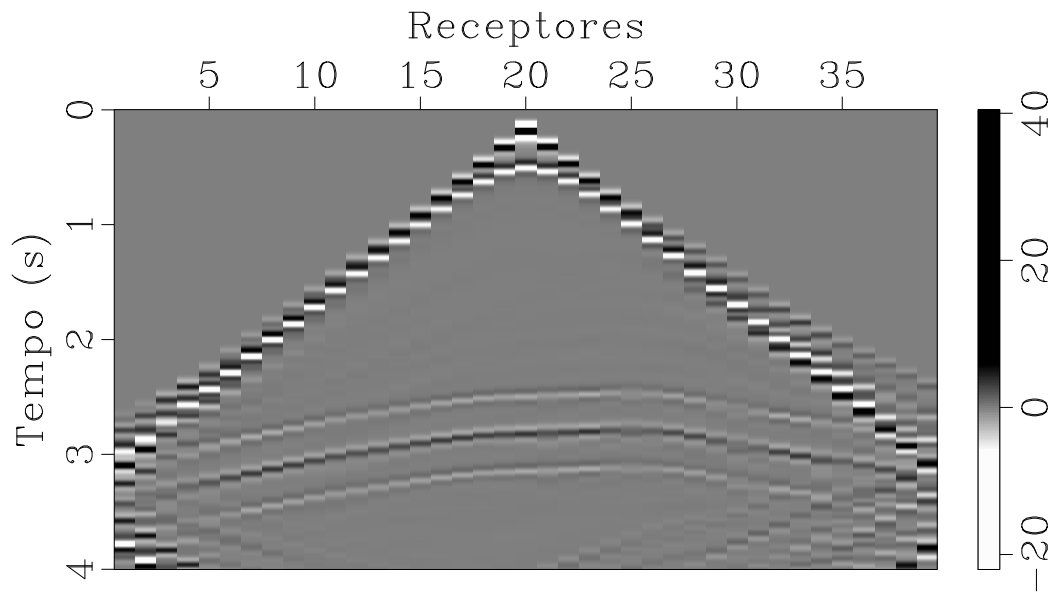


Figura 3.5: Sismograma com um tiro no meio do eixo horizontal e com 39 receptores igualmente espaçados em ambos os lados (modelo de Marmousi).

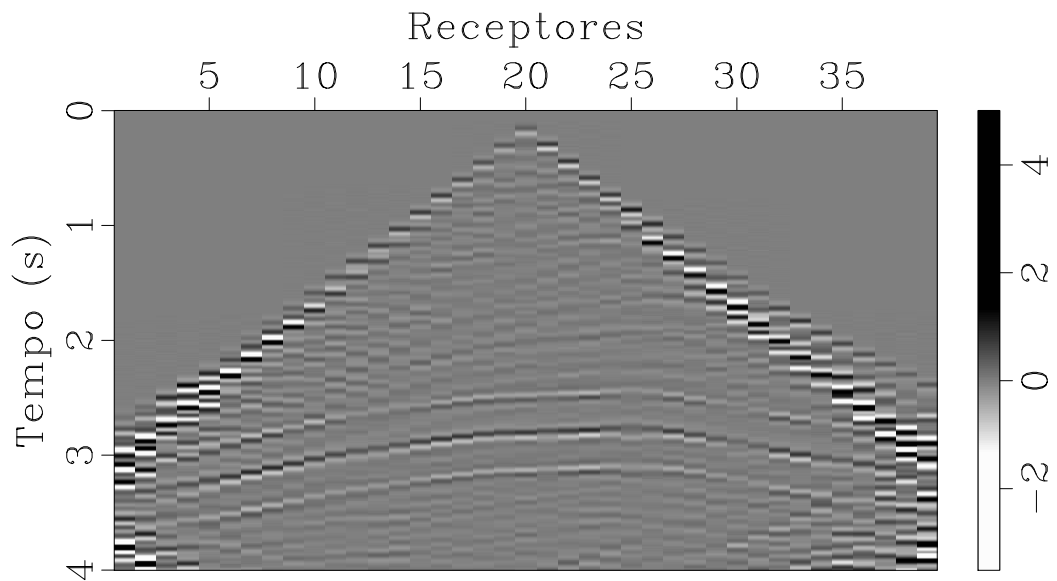


Figura 3.6: Sismograma com um tiro no meio do eixo horizontal e com 39 receptores igualmente espaçados em ambos os lados (modelo de Marmousi).

Vemos na Figura 3.5 o campo de pressão em um meio de referência (modelo de Marmousi suavizado) e notamos a onda direta de forma bem nítida. E, na Figura 3.6 vemos que temos as reflexões primárias do campo de pressão, embora tenhamos um evento parecido com a onda direta e que pode, ser, confundida com a mesma.



## 4 MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO (RTM)

A Migração Reversa no Tempo consiste, basicamente, em retropropagar o campo de onda registrado, i.e., propagar o sinal do tempo final para o tempo inicial, na qual é aplicada uma condição de imagem para obter a imagem em profundidade (Figura 4.1). Porém, a RTM funciona bem, apenas, para dados com espalhamento simples, ou seja, sem reflexões múltiplas, diretas e outras que não sejam primárias tornando a técnica mais cara. E, a modelagem Born permite que você tenha um dado registrado com apenas reflexões primárias e, assim, viável para efetuar uma RTM.

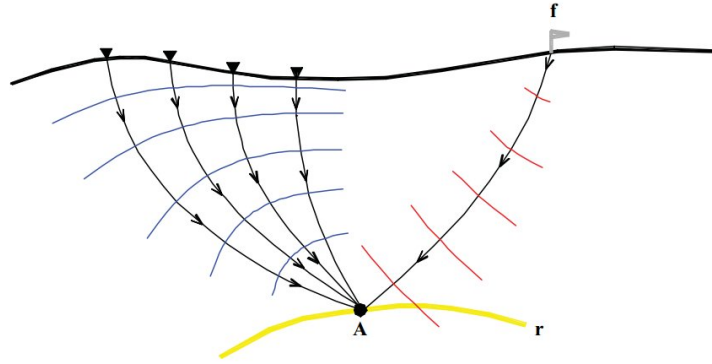


Figura 4.1: Ilustração dos campos de onda: direto e retropropagado, respectivamente (Bulcão, 2014).

Esta técnica de imageamento (RTM) apresenta vantagens quando comparado com outras técnicas por solucionar a equação de onda completa da onda e viabilizar o imageamento de estruturas mais complexas (Matias, 2009).

$$I(\mathbf{x}) = \sum_s \int_0^T \sum_r p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) p_r(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_r) dt, \quad (4.1)$$

na qual  $I(\mathbf{x})$  é a imagem final migrada para cada ponto da imagem,  $\mathbf{x}_s$  e  $\mathbf{x}_r$  são, respectivamente a posição da fonte e do receptor,  $T$  é o tempo de registro,  $p_s$  o campo que tem começo na fonte (campo "forward") e  $p_r$  o campo que é retropropagado dos receptores (campo "backward").

### 4.1 FILTRO APLICADO À IMAGEM MIGRADA

Ao efetuar a migração RTM, a imagem obtida apresenta ruídos de baixa frequência em toda a extensão da mesma devido à condição de imagem aplicado, a qual gera resultados em pontos que contém componentes de baixa frequência (pontos, estes, que não correspondem à refletorres sísmicos). Portanto, diante disso, foi-se aplicado um filtro laplaciano na imagem migrada a fim

de atenuar tais ruídos mostrada na equação abaixo:

$$p_{filtrado}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial z^2}. \quad (4.2)$$

## 4.2 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS USANDO O DADO BORN

Dois testes foram feitos: (1) modelo homogêneo com ponto difrator no centro e; (2) modelo de Marmousi. O primeiro experimento veio com a intenção de tornar mais nítida a diferença da imagem migrada sem filtro e com filtro, além de possibilitar uma boa visualização do topo e base do ponto difrator. O segundo experimento teve o propósito de imagear o modelo Marmousi usando um dado Born de entrada para a RTM, pois sabemos que este tipo de dado é o indicado para esta forma de migração.

### 4.2.1 Modelo homogêneo com ponto difrator no centro

A aquisição escolhida para gerar as Figuras 4.2 e 4.3 é constituída de uma geometria CSG (common-shot-gather), ou melhor, de uma aquisição end-on, na qual temos uma fonte à direita de um conjunto de receptores que a acompanham. Foram dados 10 tiros à profundidade de 12 metros, espaçados de 637 metros e tendo início na posição de 3000 metros. Cada tiro contendo 96 receptores com offset mínimo e máximo de 192 e 2472 metros, respectivamente. Estes foram espaçados de 24 metros e estão na profundidade de 24 metros.

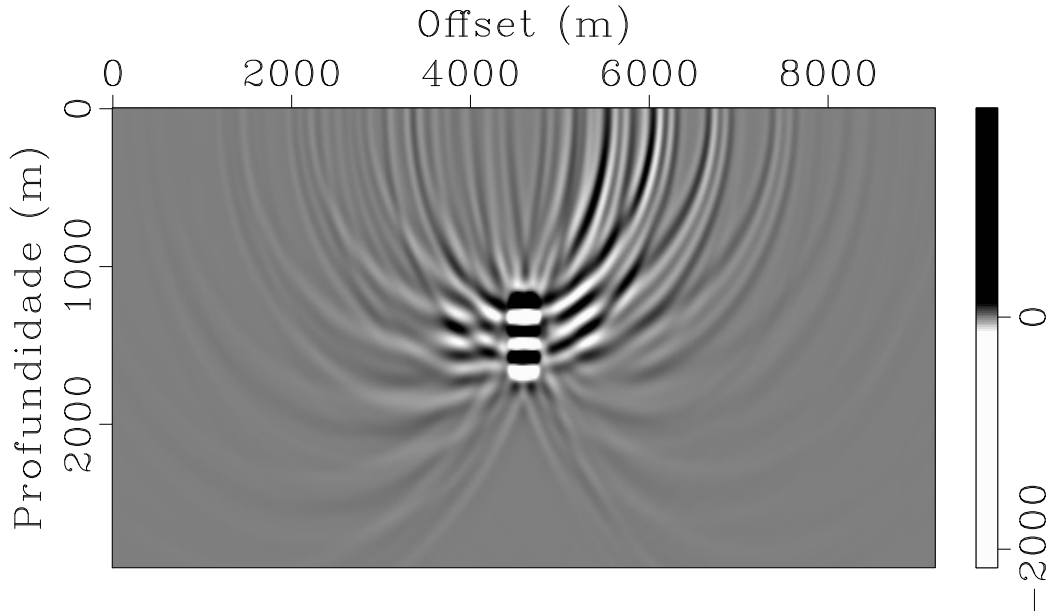


Figura 4.2: Imageamento do ponto difrator no centro do modelo homogêneo com presença de ruídos de baixa frequência.

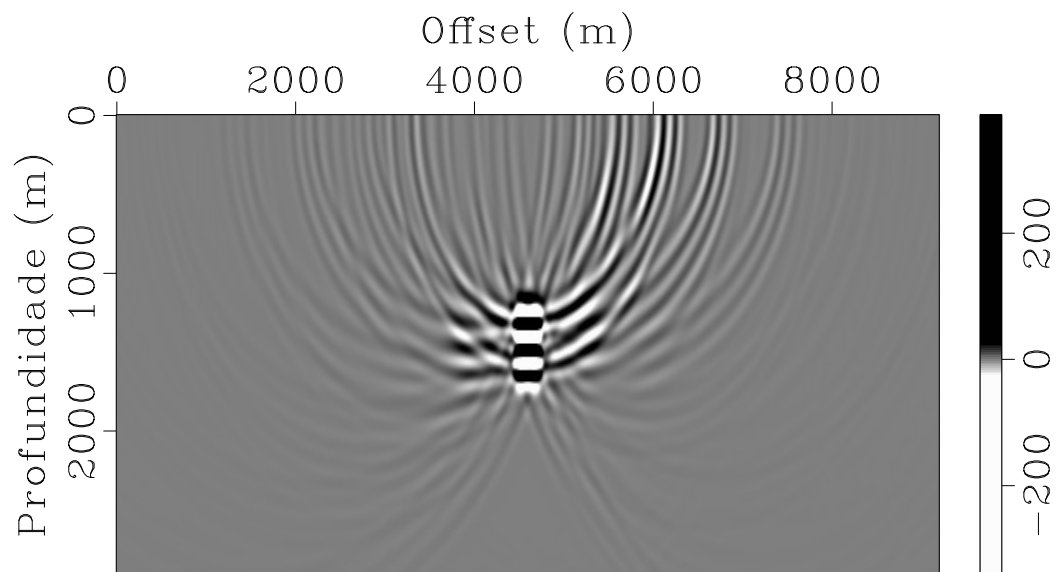


Figura 4.3: Imageamento do ponto difrator no centro do modelo homogêneo com filtro laplaciano aplicado ao mesmo.

Ambas as Figuras 4.2 e 4.3 imageam de forma satisfatória e nítida o topo e base do ponto difrator, embora tenhamos alguns ruídos de baixa frequência e artefatos (eventos falsos ou mal posicionados) nas duas Figuras. Porém a Figura 4.3 apresentam uma leve atenuação dos ruídos de baixa frequência devido à aplicação do filtro laplaciano na mesma.

#### 4.2.2 Modelo de Marmousi

Para o modelo de Marmousi, utilizou-se um aquisição similar à usada para o modelo com ponto difrator, diferenciando, apenas no espaçamento das fontes e, consequentemente, no número de tiros que foram, respectivamente de 24 metros e 240 tiros. Na Figura 4.4 temos a RTM sem filtro do dado marmousi e na Figura 4.5 a imagem migrada e filtrada a fim de atenuar os ruídos de baixa frequência.

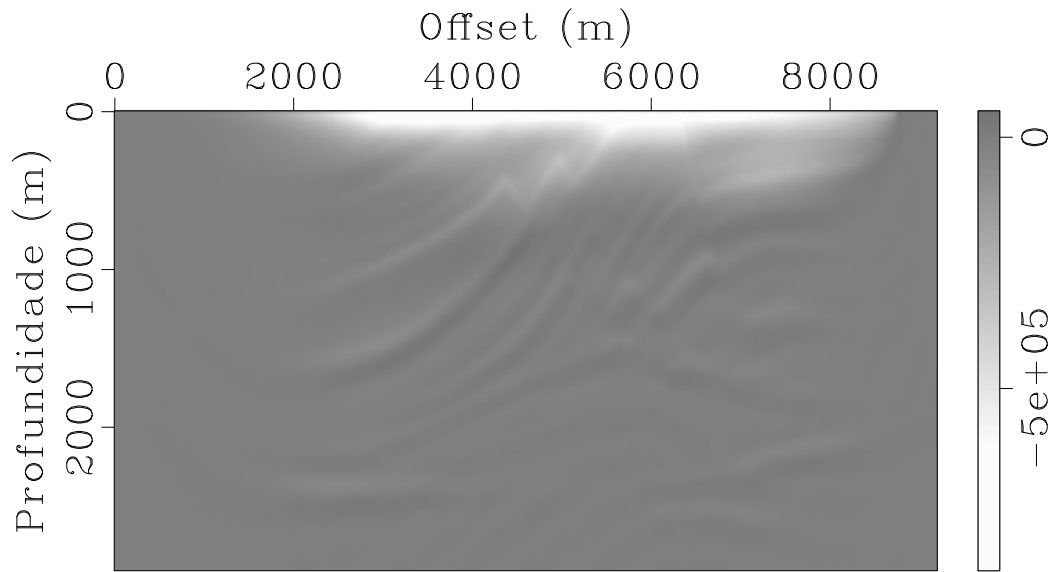


Figura 4.4: Imagem migrada do modelo de Marmousi sem filtro.

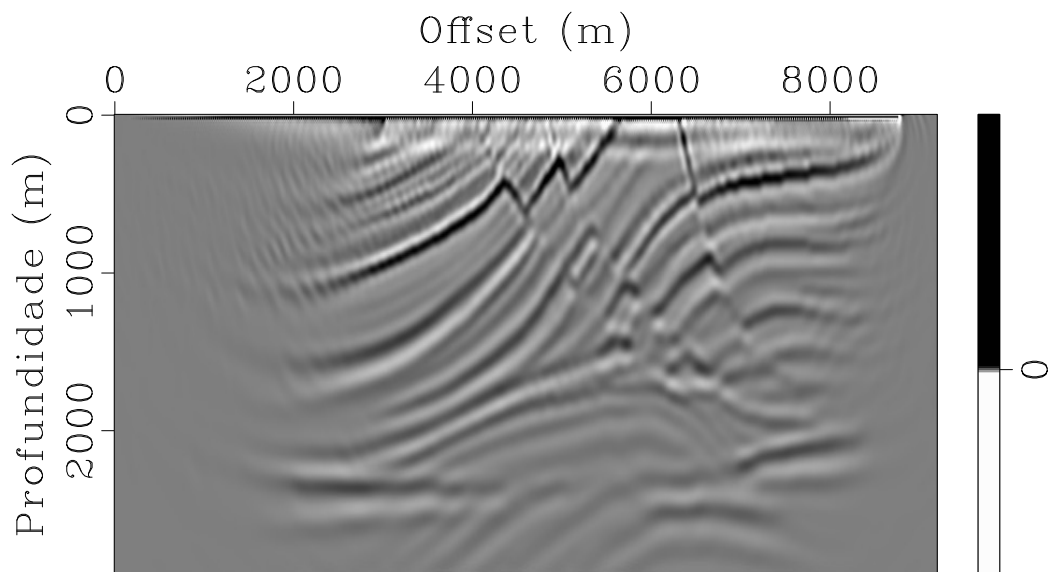


Figura 4.5: Imagem migrada do modelo de Marmousi filtrada.

A Figura 4.4 é a imagem migrada do modelo de Marmousi e notamos que a mesma conseguiu delinear a maior parte das estruturas complexas deste modelo. Almejou-se, também, como no modelo anterior (com ponto difrator), aplicar o filtro laplaciano para atenuar alguns ruídos de baixa frequência na Figura 4.4, obtendo a Figura 4.5. Notamos, na Figura 4.5 que o filtro teve um bom desempenho na imagem migrada conseguindo fornecer uma imagem que delineasse de forma bem mais nítida as estruturas do modelo Marmousi.

## 5 CONCLUSÕES

Este trabalho, inicia-se com a extrapolação do campo de onda das fontes, na qual se deseja verificar a eficiência das bordas absorventes (C-PML) em meio homogêneo, primeiramente, e em um meio mais complexo (modelo de Marmousi) por fim. Para isso, implementou-se a equação acústica de segunda ordem no domínio do tempo pelo esquema de diferenças finitas usando modelos 2d. Os resultados mostraram-se satisfatórios uma vez que a modelagem teve uma boa eficiência ao absorver os campos de onda nas bordas do mesmo, evitando as reflexões indesejadas.

Após termos uma modelagem com bordas absorventes adequadas, realizamos uma modelagem Born a fim de gerar sismogramas com, apenas, reflexões primárias (espalhamento simples) pois algumas técnicas de imageamento e inversão necessitam de um dado com espalhamento simples, como no caso do RTM. Os resultados também foram satisfatórios para os dois experimentos realizados: modelo homogêneo com ponto difrator no centro e modelo Marmousi.

Por fim, foi realizada a migração no tempo reverso (RTM) nos mesmos experimentos descritos no parágrafo acima usando o dado Born do modelo de Marmousi, modelando o campo de onda pelo esquema de diferenças finitas da fontes e dos receptores. Os resultados foram satisfatórios para o primeiro teste (com ponto difrator), no qual tivemos boa delineação do topo e da base do ponto difrator, embora tenhamos a presença de alguns artefatos. E, no segundo teste (modelo Marmousi), conseguimos, também, uma imagem que conseguiu acompanhar as estruturas do modelo em profundidade como desejado.

Acredita-se que vários passos podem ainda ser realizados para melhorar a imagem migrada final, a exemplo de técnicas de pré-condicionamento que evitem pontos imagens nas posições das fontes e receptores próximos à superfície do modelo.

## REFERÊNCIAS

- Araujo, E.S.D.E. e Bahia, S., 2009, Modelagem sísmica e migração reversa no tempo: uma implementação usando placas gráficas (GPU). Tese de Doutorado, ufba.
- Berenger, J.P., 1994, Berenger-1994.pdf. Journal of Computational Physics, 16.
- Bulcão, A., 2014, A modelagem e migração reversa no tempo empregando operadores elásticos e acústicos. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Claerbout, J.F., 1971, Toward a Unified Theory of Reflector Mapping. Geophysics, **36**, 467.
- Hagedoorn, J.G., 1954, A process of seismic reflection interpretation. Geophysical Prospecting, **2**(2), 85–127.
- Hildebrand, S.T., 1987, Reverse-time depth migration: Impedance imaging condition. Geophysics, **52**(8), 1060–1064.
- Komatitsch, D. e Martin, R., 2007, An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation. Geophysics, **72**(5), SM155–SM167.
- Matias, M.M.A., 2009, Imageamento Marchenko e condições de imagem aplicadas às componentes da função de Green. Essay, Universidade Federal da Bahia.
- Ramalho, V.K., 2014, Modelagem sísmica e migração reversa no tempo: uma implementação usando placas gráficas ( GPU ).
- Roden, J.A. e Gedney, S.D., 2000, Convolutional PML ( CPML ): An Efficient FDTD Implementation of the CFS-PML for Arbitrary Media. Microwave and Optical Technology Letters, (June 2000), 1–18.
- Spijker, M.N., 2016, Regions of stability , equivalence theorems and the Courant-Friedrichs-Lewy condition Numerische Mathematik Regions of Stability , Equivalence Theorems and the Courant-Friedrichs-Lewy Condition. Numerische Mathematik, (May 2014), 8, doi: 10.1007/BF01389633.