Geometria Diferencial Global. Um estudo sobre a rigidez da esfera.

XXX Seminário de Iniciação científica 2019

Discente: Rafael Sergio Sampaio Emidio

Bolsa PIBIC/PRODOUTOR

Instituto de Ciências exatas e naturais

Orientador: Adam Oliveira da Silva

Introdução

O objetivo deste trabalho é mostrar que a esfera é uma superfície rígida através de relações entre propriedades locais e globais de curvas e superfícies da Geometria Diferencial. Iremos verificar que se uma superfície regular S conexa e compacta possui curvatura gaussiana K constante, então S é uma esfera.

Palavras-chave: superfícies regulares, esfera, curvaturas.

Superfície regular

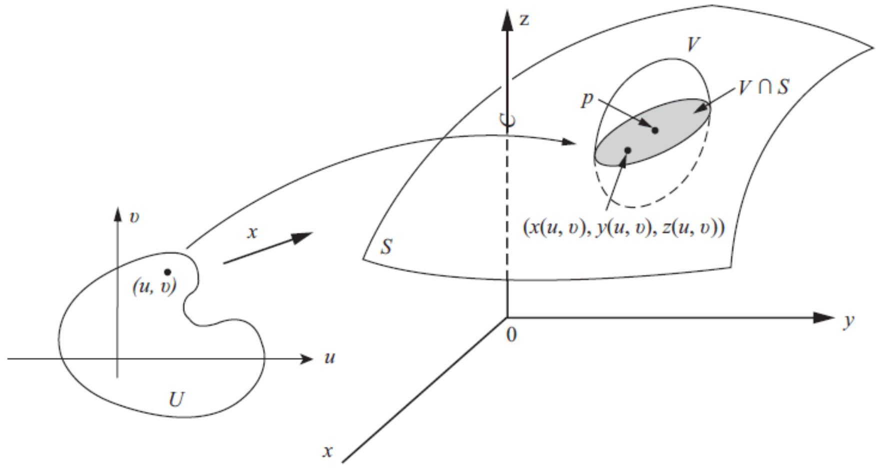
Uma superfície regular S é um subconjunto do espaço tal que para todo ponto p, existe uma aplicação X: U $\rightarrow$ V$\cap$S, onde U é um aberto em R^2 , V uma vizinhança de p e X satisfaz as seguintes condições:

1) X é diferenciável;

2) X é homeomorfismo;

3) A diferencial dXq: $R^2 \rightarrow R^3$ é injetiva.

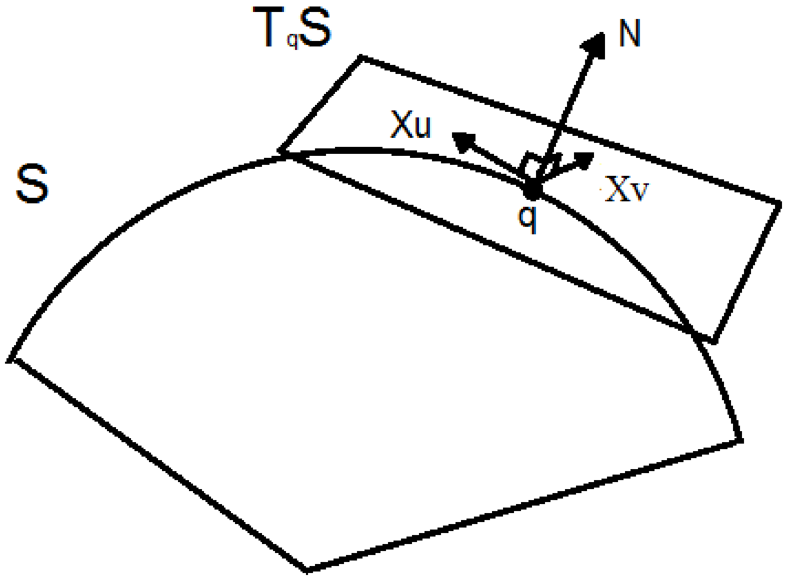
Neste caso, chamamos X de um parametrização de S. Assim, dado (u, v) $\in$ U temos X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).



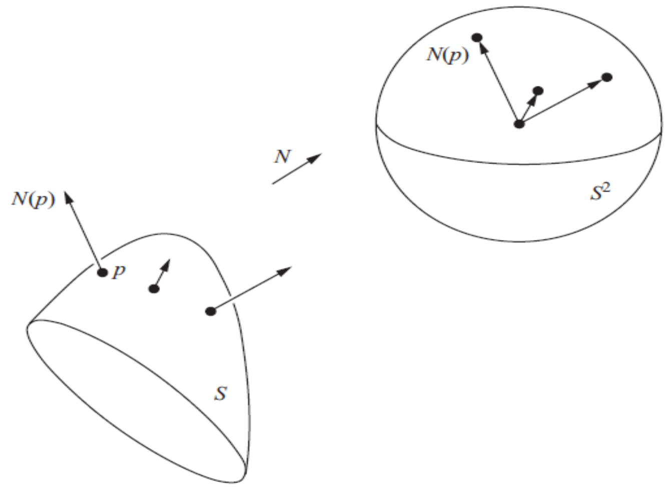
Aplicação de Gauss

Dada uma parametrização $X: U \subset R^2 \rightarrow S$ de uma superfície regular S em um ponto $p \in S$. Desde que $\{X_u, X_v\}$ constitui uma base para T_qS, podemos definir para cada ponto $q \in X(U)$, um vetor normal unitário da seguinte maneira:

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(q), \qquad q \in X(q)$$



Se a superfície S possui uma orientação N, podemos garantir a existência da aplicação N: $S \rightarrow R^3$ que toma seus valores em uma esfera unitária



Logo a aplicação N: $S \rightarrow S^2$ é chamada de aplicação normal de Gauss de S. Podemos verificar que a diferencial dN_p: $T_pS \rightarrow T_pS$ é uma aplicação linear auto-adjunta.

Portanto, Para cada ponto $p \in S$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS, tal que

$$dN_p(e_1) = k_1 e_1$$

$$dN_p(e_2) = k_2 e_2$$

Onde onde k_1 e k_2 são respectivamente, o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental $II_p(v) = - < dN_p(v), v>$, ou seja, são os valores extremos da curvatura normal em p, tal que $k_1 \geq k_2$.

Os autovalores k_1 e k_2 são chamados de curvaturas principais e os autovetores e_1 e e_2 são chamados de direções principais.

● **Curvatura gaussiana (K)**: É o determinante da diferencial dN_p de S em p:

$$K = k_1 k_2.$$

● **Curvatura média (H)**: É o negativo do traço da diferencial dN_p de S em p:

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Um ponto de uma superfície regular S é chamado de:

1 – Elíptico se $K > 0$;

2 – Hiperbólico se $K < 0$;

3 – Parabólico se $K = 0$, com $dN_p \neq 0$;

4 – Planar se $dN_p = 0$.

Obs: Se $k_1(p) = k_2(p)$ então dizemos que p é um ponto umbílico de S.

Obs 2: Se todos os pontos de uma superfície S são umbílicos, então S está contida em um plano ou em uma esfera.

Aplicação de Gauss em coordenadas locais

Através do estudo da aplicação de Gauss em coordenadas locais, obtemos as seguintes equações para a curvatura Gaussiana K e a curvatura média H:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \qquad H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

Onde:

- E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental $I_p(w) = \langle w,w \rangle = |w|^2$;
- *e*, *f* e *g* são os coeficientes da segunda forma fundamental $II(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$.

Equações de compatibilidade

As equações de compatibalidade são dadas pelas fórmulas de Gauss e pelas equações de Mainardi-Codazzi.

- Os coeficientes Γ_{ij}^{k} , i,j,k = 1,2 são chamados de símbolos de Christoffel, obtidos nas derivadas dos vetores X_u, X_v e N.

Feitas várias demonstrações, foram encontradas as quatro equações de compatibilidade:

$$(\Gamma_{12}^{2})_u - (\Gamma_{11}^{2})_v + \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2} + \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2} = -EK \qquad (1)$$

$$(\Gamma_{12}^{1})_u - (\Gamma_{11}^{1})_v + \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1} = FK \qquad (2)$$

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^{1} + f(\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{1}) - g\Gamma_{11}^{2} \qquad (3)$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^{1} + f(\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{1}) - g\Gamma_{12}^{2} \qquad (4)$$

Obs: Equações de compatibilidade quando as curvas coordenadas são linhas de curvaturas (F = *f* = 0)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\} \qquad (1)$$

$$e_v = \frac{E_v}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right) \qquad (3)$$

$$g_u = \frac{G_u}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right) \qquad (4)$$

Rigidez da esfera

Teorema 1. Seja S uma superfície conexa e compacta com curvatura gaussiana K constante. Então S é uma esfera.

Para provar o Teorema 1, serão necessários alguns resultados. Estes resultados serão demonstrados através de 2 lemas.

Lema 1. Seja S uma superfície regular e $p \in S$ satisfazendo as seguintes condições:

1. $K(p) > 0$; isto é, a curvatura gaussiana em p é positiva.

2. p é ao mesmo tempo um ponto de máximo local da função k_1 e um ponto de mínimo local da função k_2 ($k_1 \geq k_2$).

Então p é um ponto umbílico de S.

Demonstração: Vamos supor que p não é um ponto umbílico e obter uma contradição.

Se p não é um ponto umbílico de S, podemos parametrizar uma vizinhança coordenada de p por coordenadas (u,v) tais que as curvas coordenas são linhas de curvaturas. Então vamos ter que F = f = 0. Logo as curvaturas principais k_1 e k_2 serão dadas por

$$k_1 = \frac{e}{\mathrm{E}} \quad , \quad k_2 = \frac{g}{\mathrm{G}}. \tag{5}$$

Nestas condições as equações (3) e (4) de Mainardi-Codazzi são escritas como

$$e_{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{v}}}{2}\left(k_1 + k_2\right) \tag{6}$$

$$g_{\mathrm{u}} = \frac{\mathrm{G}_{\mathrm{u}}}{2}\left(k_1 + k_2\right) \tag{7}$$

Derivando a primeira equação de (5) com relação a v e usando (6), obtemos

$$E(k_1)_v = \frac{E_v}{2}\left(-k_1 + k_2\right) \tag{8}$$

Analogamente, derivando a segunda equação de (5) com relação u e usando (7), obtemos

$$G(k_2)_u = \frac{G_u}{2}\left(k_1 - k_2\right) \tag{9}$$

Por outro lado, quando F = 0, a formula de Gauss (1) para K se reduz

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}$$

Logo,

$$-2KEG = E_{vv} + G_{uu} + ME_v + NG_u \tag{10}$$

A partir de (8) e (9), obtemos expressões para E_v e G_u que depois de derivadas, introduzimos na equação (10) obtendo

$$-2KEG = -\frac{2E}{k_1 - k_2}(k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1 - k_2}(k_2)_{uu} + \bar{M}(k_1)_v + \bar{N}(k_2)_u$$

Donde,

$$-2(k_1 - k_2)KEG = -2E(k_1)_{vv} + 2G(k_2)_{uu} + \tilde{M}(k_1)_v + \tilde{N}(k_2)_u \tag{11}$$

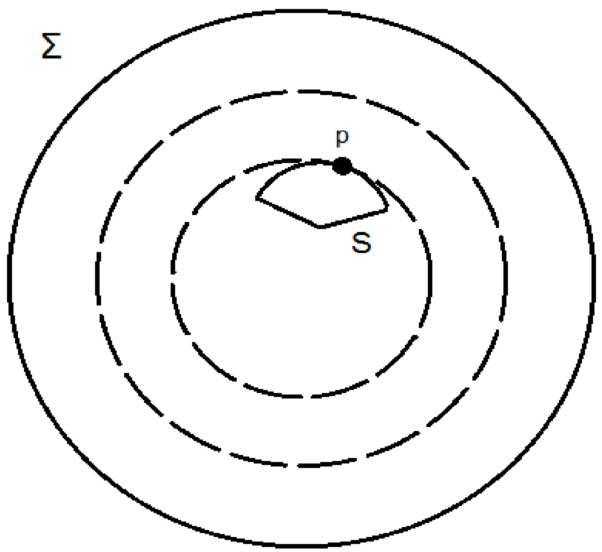
Como k_1 atinge um máximo local em p e k_2 atinge um mínimo local em p, temos

$$(k_1)_v = 0, \qquad (k_2)_u = 0, \qquad (k_1)_{vv} \leq 0, \qquad (k_2)_{uu} \geq 0$$

em p. No entanto, isto implica que o segundo membro da equação (11) é positivo ou nulo, o que é uma contradição, logo o ponto p é um ponto umbílico de S.

Lema 2. Uma superfície regular compacta $S \subset R^3$ tem pelo menos, um ponto elíptico.

Demonstração: Como S é compacta, S é limitada. Portanto S está contida em alguma esfera em R^3, consideremos uma esfera Σ. Através de sucessivas diminuições do raio da esfera Σ, obtemos um ponto onde a mesma irá tocar em S, chamaremos de ponto p. Portanto, Σ e S são tangentes em p. Observando as sessões normais em p, notamos que qualquer curvatura normal de S em p é maior ou igual que a curvatura normal de Σ em p. Logo concluímos que $K_{S(p)} \geq K_{\Sigma(p)} > 0$, portanto p é um ponto elíptico desejado.



Demonstração do teorema 1: Como S é compacta, ela possui um ponto elíptico pelo Lema 2. Como K é constante, devemos ter $K > 0$ em S. Como $K = k_1k_2$ é uma constante positiva, pelo lema 1 p é um ponto umbílico de S, isto é, $k_1(p) = k_2(p)$. Agora seja um ponto $q \in S$, tal que $k_1(q) \geq k_2(q)$ temos

$$k_1(p) \geq k_1(q) \geq k_2(q) \geq k_2(p) = k_1(p).$$

Portanto $k_1(q) = k_2(q)$ para todo $q \in S$. Podemos concluir de uma maneira definitiva que todos os pontos de S são umbílicos. Como $K > 0$, S está contida em uma esfera Σ pela observação 2. Por compacidade, S é fechada em Σ, e como S é uma superfície regular, S é aberta em Σ. Como Σ é conexa e S é aberta e fechada em Σ, teremos que $S = \Sigma$. Portanto S é uma esfera.

Obrigado pela atenção!