Resumo

Neste trabalho apresentaremos como podemos obter a solução de uma equação diferencial linear, especificamente de primeira ordem, e algumas aplicações desse tipo de equação. Através do Teorema Fundamental do Cálculo, podemos calcular primitivas da forma $F(x) + c$ de uma determinada função f derivável, assim, encontraremos a solução geral de uma equação diferencial de primeira ordem. Através de uma condição inicial, podemos encontrar o valor da constante c e obtermos a solução da equação, portanto, resolvemos um problema de valor de inicial. Primeiramente, estudaremos como podemos obter a solução de uma equação diferencial e no estudo das equações separáveis veremos algumas características dessas equações, aplicaremos o comportamento dessas equações em alguns modelos de dinâmicas populacionais, e por fim, veremos a aplicação dessas equações em certos fenômenos da química, da física e da geometria diferencial.

Palavras-chave: Equações diferenciais, dinâmica populacional, aplicações, problema de valor inicial, condição inicial, solução da equação.

Newton e Leibniz, os criadores do cálculo, foram os matemáticos que deram o pontapé inicial no estudo das equações diferenciais. Para resolver problemas físicos, era necessário equacionar o fenômeno estudado e através do cálculo de primitivas era possível encontrar a solução do problema. Os métodos mais usados para solucionar uma equação era a quadratura e as séries de funções. Porém, algum tempo esses métodos foram sendo desgastados, então surgiram os teoremas de existência e unicidade, que marcaram o inicío da fase moderna com Poincaré, no final do século XIX. Atualmente o Teorema Fundamental do Cálculo é o método mais utilizado para calcularmos primitvas, buscamos neste trabalho como podemos observar certos comportamentos da física e da química através das equações diferenciais lineares e das equações separáveis, onde essas equações e a suas soluções são obtidas pelo do cálculo de primitivas, e através de uma condição inicial obtemos a solução dessa equação de maneira explícita.

No estudo das equações diferenciais de primeira ordem, temos como objetivo, determinar se existe uma função f com duas variáveis que possua uma solução. Por exemplo, a função

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

é uma equação diferencial de primeira ordem, onde qualquer função diferenciável $y = F(t)$ é uma solução solução de f para todo t em um determinado intervalo, logo encontraremos uma solução geral pela primitiva $F(t) + c$, e através de uma condição inicial encontraremos a solução da equação.

Podemos considerar uma equação diferencial linear ordinária linear de primeira ordem com a seguinte expressão

$$\dot{x} = p(t)x + q(t), \tag{1}$$

onde $\dot{x} = dx/dt$. Precisamos encontrar uma função diferenciável $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ para satisfazer a equação (1). Para a solução desta equação, vamos considerar o seguinte problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = p(t)x + q(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Vamos primeiro determinar a solução geral de (1), para depois verificarmos que (2) possui apenas uma solução. Consideremos como uma solução de (1) uma equação de crescimento exponencial dada por

$$\dot{x} = kx(t). \tag{3}$$

Considerando uma função $x(t) = e^{kt}$ como uma solução de (3), os seus múltiplos ce^{kt} também serão soluções de (3) e considerando a condição $x(t_0) = x_0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

Através da condição inicial $x(t_0) = x_0$, o valor da constante c será dado por

$$c = \frac{x_0}{e^{kt_0}}$$

Portanto, obtemos como solução do problema:

$$x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Podemos escrever a equação (1) como o seguinte problema de valor inicial com $q(t) \equiv 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = p(t)x \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{4}$$

A equação (4) é um problema inicial de valor homogêneo, cuja a solução é dada por

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}. \tag{5}$$

Com o objetivo de simplificar as expressões, reescrevemos a equação (5) da seguinte maneira:

$$T(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}. \tag{6}$$

Temos as seguintes propriedades para a função T:

$$\begin{aligned} &T(t_0, t_0) = 1, \\ &T(t, t_0) = T(t_0, t)^{-1}, \\ &T(t, t_0)T(t_0, s) = T(t, s). \end{aligned} \tag{7}$$

Voltemos agora, para o problema de valor inicial (2), para determinarmos sua solução utilizaremos um fator integrante $\mu(t)$, e multiplicaremos em ambos os lados da equação:

$$\mu(t)(\dot{x} - p(t)x) = \mu(t)q(t).$$

Determinaremos $\mu(t)$ igualando o primeiro membro da expressão anterior a derivada do produto de x por μ, logo

$$\mu(\dot{x} - p(t)x) = \frac{d}{dt}(\mu x) = \dot{\mu}x + \mu\dot{x}.$$

Então, podemos igualar as seguintes expressões

$$-\mu p(t)x = \dot{\mu}x.$$

Logo, integrando em ambos os lados, obtemos

$$ln\mu = -\int p(s)\,ds.$$

Logo, $\mu(t)$ será dado por:

$$\mu(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} = e^{\int_{t}^{t_0} p(s)\,ds} = T(t_0, t).$$

Então temos de $\frac{d}{dt}(\mu x) = \mu(t)q(t)$:

$$\frac{d}{dt}(T(t_0, t)x(t)) = T(t_0, t)q(t),$$

integrando em ambos os lados de t_0 a t:

$$T(t_0, t)x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} T(t_0, s)q(s)\, ds.$$

Portanto, podemos obter a solução do problema de valor inicial (2) e utilizando as propriedades (7), multiplicamos a última expressão por $T(t, t_0)$ e vamos obter:

$$x(t) = T(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t, s)q(s)\, ds, \tag{8}$$

a equação (8) é chamada de fórmula de variação de constantes, fórmula esta que pode ser escrita como solução do problema de valor inicial (2).

Em particular, se o coeficiente $p(t)$ for igual a uma constante k, temos

$$T(t, t_0) = e^{k(t-t_0)}.$$

Então temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = kx + q(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

e pela fórmula de variação de constantes, dada na equação (8), obtemos

$$x(t) = e^{k(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{k(t-s)}q(s)ds.$$

Se temos um ponto a associado a uma função $x_1(t)$ e um ponto b associado a uma função $x_2(t)$, podemos verificar que essas funções são soluções do problema de valor inicial (1) da seguinte maneira:

$$x_1(t) = ae^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds},$$

$$x_2(t) = be^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}.$$

Logo,

$$x_1(t) - x_2(t) = (a-b)e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}$$

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds},$$

então podemos afirmar que $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é uma solução do problema de valor inicial (4), onde $x_0 = a - b$. Logo, todas as soluções de (1) são obtidas somando uma solução particular com a solução geral da equação homogênea associada em (4). Logo, podemos dizer que o termo da fórmula da variação de constantes

$$\int_{t_0}^{t} e^{k(t-s)} q(s) ds$$

é uma solução particular de (1).

Uma equação diferencial da forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{9}$$

é chamada de equação separável, onde $g(y) \neq 0$ e $y' = dy/dx$. Consideramos f e g funções contínuas em intervalos abertos reais, tal que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $g : (c, d) \to \mathbb{R}$. Logo escrevemos (9) da forma

$$g(y)y' = f(x). \tag{10}$$

Considerando uma função $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 uma solução para (9) e G uma primitiva de g, onde $G' = g$, obtemos a partir de (10):

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

então obtemos

$$G(y(x)) = F(x) + C, \tag{11}$$

onde F é uma primitiva de f. Dado um ponto $x_0 \, \epsilon \, (\alpha, \beta)$, então temos uma condição inicial dada por $y(x_0) = y_0$, onde $y_0 \epsilon \; y(\alpha, \beta)$. Logo a constante C será dada determinada por

$$C = G(y_0) - F(x_0),$$

substituindo C na expressão (11), obtemos

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0).$$

Como G é uma primitiva de g e F é uma primitiva de f, podemos escrever a última expressão como

$$\int_{y_0}^{y(x)} g(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{12}$$

O que mostramos acima foi que dada uma solução de (9), esta solução irá satisfazer a expressão (11). Podemos concluir que dada uma relação $G(y) = F(x) + C$ e um ponto (x_0, y_0) que satisfaz essa relação, onde $G'(y_0) = g(y_0) \neq 0$, dado também um intervalo aberto (α, β) contendo x_0 e uma função de classe C^1, através do Teorema das funções implícitas podemos garantir que esse intervalo existe e que satifaz a relação (11), logo trata-se de uma solução de (1).

Exemplo 1: Resolva a equação $y' = \dfrac{x}{y}$.

Resolução: Como $yy' = x$, obtemos $y^2 = x^2 + C$. Se considerarmos um problema de valor inicial com a condição $y(3) = 2$, obtemos que $C = -5$, logo a solução é dada por

$$y(x) = +\sqrt{x^2 - 5}, \; x > \sqrt{5}.$$

Definição 2.1: Uma equação da forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{13}$$

é chamada de equação autônoma, pois a função f depende apenas de x e não da variável independente t.

Definição 2.2: Se $\bar{x}$ é um zero da função, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$, logo $x(t) \equiv \bar{x}$ é uma solução de (13). Sendo assim, $x(t)$ é chamada de solução equilíbrio ou estacionária e o ponto $\bar{x}$ é chamado de ponto de equilíbrio ou singularidade.

Teorema 2.1: Se $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio e $f(\bar{x})$ é uma solução de (13), $\bar{x}$ é assintoticamente estável se $f'(\bar{x}) < 0$ e $\bar{x}$ é assintoticamente instável quando $f'(\bar{x}) > 0$.

Teorema 2.2: Seja Ω um intervalo aberto no plano (x, y), neste intervalo está definido a função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Supondo que a derivada parcial em relação à y, dada por $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ também seja contínua, temos para cada ponto (x_0, y_0) em Ω um intervalo aberto I que contém x_0, uma única função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$, onde $(x, \phi(x)) \epsilon \Omega$ para todo $x \epsilon I$. Logo, teremos a solução do problema de valor inicial dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{array} \right.$$

- Dinâmica de uma População e Noções de Estabilidade

Nesta sessão veremos os conceitos de estabilidade e instabilidade através de alguns modelos criados para análise da variação de uma população com o tempo. Cada modelo leva em conta a influência de vários fenômenos biológicos e sociológicos na evolução da população, e cada modelo possui uma taxa de crescimento da população $p(t)$, onde t é o tempo, taxa essa definida por $\dot{p}(t)/p(t)$.

- O Modelo Malthusiano

Este modelo basicamente assume que a taxa de crescimento de uma população é dado por uma constante λ, então a equação que rege o crescimento dessa população é dado

$$\dot{p} = \lambda p. \tag{14}$$

Considerando p_0 como população inicial, temos como solução geral do problema de valor inicial homogêneo (14):

$$p(t) = p_0 e^{\lambda(t-t_0)},$$

e com a condição inicial $p(t_0) = p_0$, a solução para (14) é dada por

$$p(t) = p(t_0) e^{\lambda(t-t_0)},$$

onde esta solução apresenta um crescimento exponencial se $\lambda > 0$, porém não é possível que este crescimento se mantenha para sempre. Um modelo desta natureza pode descrever o crescimento populacional de microorganismos que se reproduzem por mitose.

A constante λ é a taxa de crescimento da população, dado pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade, ou seja: $\lambda = \lambda_n - \lambda_m$. Verhulst propôs um modelo em que a taxa de crescimento decresce linearmente com a população, modelo este dado por: $\lambda = a - bp$, onde a e b são constantes positivas. Este modelo é dado por

$$\dot{p} = (a - bp)p. \tag{15}$$

Podemos observar que ainda não é um modelo ideal, pois não leva em conta que a taxa de produção de novos seres da espécie humana, depende da idade dos pais. A equação (15) é conhecida como equação de Verhulst-Pearl, desenvolvida por Verhulst para estudar as populações da França e da Bélgica em 1834, e em 1920 por Pearl e Reed para o estudo da população dos Estados Unidos.

Podemos analisar que os modelos acima são funções que não dependem da variável t e sim da variável p, logo as equações (14) e (15) são exemplos de equações autônomas, onde seus pontos de equilibrío são dados por $\bar{x} = 0$ para (14), $\bar{x} = 0$ e $\bar{x} = a/b$ para (15). Podemos verificar também que para (14), $\bar{x} = 0$ é um ponto assintoticamente instavel. Para (15), $\bar{x} = a/b$ será um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e $\bar{x} = 0$ será um ponto instável.

A solução para (15) será dada por:

$$p(t) = \frac{ap_0}{p_0 b + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}}. \tag{16}$$

Análise da solução: Analisando (15), podemos ver $p(t) = 0$, $p(t) = a/b \equiv p_\infty$ são suas soluções. A notação p_∞ é justificada da seguinte maneira: se em (16) $t \to \infty$, logo $p(t) \to p_\infty$. Então de (16) obtemos que $p_\infty = a/b$, esta solução é chamada de população limite e será o valor assintótico para uma população inicial, tal que $p_0 > 0$. Podemos analisar dois casos: o primeiro se $p_0 > p_\infty$ e o segundo se $0 < p_0 < p_\infty$. No primeiro caso, p(t) descresce exponencialmente tendendo para p_∞. No segundo caso, a população irá crescer e também tenderá a p_∞, onde o gráfico de $p(t)$ será uma curva em forma de S entre as retas $p = 0$ e $p = p_\infty$, esta curva é chamada de logística. Pois derivando (15), obtemos:

$$\ddot{p} = (a - 2bp)\dot{p}.$$

Podemos concluir que a curva logística tem um ponto de inflexão quando $p(t) = \frac{a}{2b}$, pois

$$\ddot{p} = (a - 2b\frac{a}{2b})\dot{p} = 0,$$

significa que a população cresce com derivada positiva e em seguida o crescimento se torna mais lento, isto ocorre até a função atingir o valor $p_\infty/2$ como mostra a figura 1:

figura1

- Resfriamento de um Corpo

Podemos analisar o fenômeno da variação de temperatura em um corpo por perda de calor para o meio ambiente através do seguinte modelo:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \tag{17}$$

onde dT/dt é o fluxo de calor, T é a temperatura do corpo dependente do tempo t, T_a é a temperatura do meio ambiente, k é uma constante positiva determinada pelas propriedades físicas do corpo. Na situação dada, o calor flui da fonte quente para fonte fria, então se $T > T_a$, a temperatura T descresce e o corpo se resfria, portanto isto justifica o sinal negativo em (17). Agora, se $T < T_a$, a temperatura T cresce e o corpo irá se aquecer. O modelo apresentado acima é chamada Lei de Resfriamento de Newton, Newton elaborou este modelo estudando uma bola de metal aquecida.

Considerando a condição inicial de temperatura $T(0) = T_0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \\ \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Através do métodos da sessão 2.1, a solução do problema é dada por

$$T - T_a = e^{-kt+C},$$

usando a condição inicial $T(0) = T_0$, temos

$$e^C = T_0 - T_a.$$

Logo, obtemos a solução do problema:

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a. \tag{18}$$

Análise da solução: Na expressão (17), podemos ver que $T(t)$ descrece monotonicamente com t quando $T > T_a$, $T(t)$ irá crescer monotonicamente quando $T < T_a$ e quando for $T(t)$ for constante temos que $T = T_a$. Na expressão (18) temos a mesma conclusão, pois $T(t)$ tende monotonicamente para T_a quando $t \to +\infty$. Portanto, a temperatura T_a é chamada Temperatura de Equilíbrio.

Um resevatório com capacidade de V litros de água pura, recebe uma solução de água salgada que contém c kg de sal por litro de solução, a uma vazão de a litros/segundo de forma constante. Portanto, seja $x(t)$ a quantidade de sal em kg no reservatório em função do tempo t, a concentração de sal na solução é dada por $x/V\ kg/l$. Então podemos descrever esta situação através da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = ac - a\frac{x}{V}, \tag{19}$$

e considerando a condição $x(0) = 0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a\dfrac{x}{V} = ac \\ \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Para encontrarmos a solução do problema, precisamos determinar o fator integrante $\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$, onde $a(t) = \dfrac{a}{V}$, logo

$$\mu(t) = e^{\frac{at}{V}}.$$

Então, multiplicando todos os membros da equação (19), por $\mu(t)$, obtemos

$$(\mu x)\frac{d}{dt} = ace^{\frac{at}{V}}$$

$$x = cV + ke^{-\frac{at}{V}}.$$

Para determinar k, utlizamos a condição inicial $x(0) = 0$, logo

$$k = -cV.$$

Portanto a solução do problema será dada por:

$$x(t) = cV(1 - e^{-\frac{at}{v}}) \tag{20}$$

Análise da solução: Podemos notar que quando $t \to \infty$, a concentração de sal dada por $x(t)/V$ tende para c, assim como em resfriamento de um corpo em que a solução nos dava uma temperatura de equilíbrio, no caso de diluição das soluções podemos encontrar o equilíbrio entre a solução salina injetada e a solução no reservatório, pois em ambos os casos a matemática é a mesma.

Por que uma corda enrolada em um poste sustenta um barco?

Imaginemos uma corda presa a uma superfície cilíndrica vertical com coeficiente de atrito estático μ. O contato da corda com a superficíe gera um setor circular AB com ângulo $\alpha < 180^\circ$. Existe uma força T_0 aplicada em uma das extremidades e na outra extremidade uma força T_1, onde essas forças estão em equilíbrio como mostra a figura 2.

Figura2

Agora consideremos a decomposição dessas forças como mostra a figura 3:

Figura3

Sabendo que $T(\theta)$ é a tensão no ponto da corda que corresponde ao ângulo θ a partir do segmento $0A$ no sentindo anti-horário, fazemos as seguintes análises:
F_1 é a tensão da corda no ponto C, o que implica

$$|F_1| = T\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right).$$

F_2 é a soma da tensão no ponto D com a força de atrito a partir de F_3, logo

$$|F_2| = T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) + \mu|F_3|.$$

F_3 será a reação total da superficíe ao longo do arco CD, dado por

$$|F_3| = N(\theta)r\Delta\theta,$$

onde $N(\theta)$ é a reação da superfície sobre a corda e $r\Delta\theta$ é comprimento do arco CD.

Analisando as forças F_2 e F_3, podemos notar que a força de atrito é dada por $\mu N(\theta)r\Delta\theta$, onde sabemos pela análise da força F_3 que $N(\theta)r\Delta\theta$ é a reação total da superfície ao longo do arco CD e que possui comprimento $r\Delta\theta$. Pelo fato do arco CD estar em equilíbrio, temos que $F_1 + F_2 + F_3 = 0$, logo projetando a equação sobre a direção F_3 como mostra a figura 4.

Figura4

Analisando o diagrama de forças, temos as seguintes equações:

$$-F_{1,y} - F_{2,y} + F_3 = 0,$$

$F_{1,y}$ será dado por $T\left(\theta - \dfrac{\Delta\theta}{2}\right) sen\dfrac{\Delta\theta}{2}$,

$F_{2,y}$ será dado por $T\left(\theta + \dfrac{\Delta\theta}{2}\right) sen\dfrac{\Delta\theta}{2} + \mu N(\theta) r \Delta\theta sen\dfrac{\Delta\theta}{2}$.

Portanto, temos a seguinte expressão:

$$N(\theta)r\Delta\theta - T\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) sen\frac{\Delta\theta}{2} - T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) sen\frac{\Delta\theta}{2} - \mu N(\theta)r\Delta\theta sen\frac{\Delta\theta}{2} = 0. \tag{21}$$

Na demonstração acima analisamos as forças na direção do eixo y, agora na direção do eixo x, temos

$$F_{1,x} - F_{2,x} = 0,$$

$F_{1,x}$ será dado por $T\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) cos\frac{\Delta\theta}{2}$,

$F_{2,x}$ será dado por $T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) cos\frac{\Delta\theta}{2} + \mu N(\theta)r\Delta\theta cos\frac{\Delta\theta}{2}$.

Portanto, obtemos a seguinte expressão:

$$T\left(\theta - \frac{\Delta\theta}{2}\right) cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu N(\theta)r\Delta\theta cos\frac{\Delta\theta}{2} = 0. \tag{22}$$

Dividindo as equações (21) e (22) por $\Delta\theta$ e aplicando o limite quando $\Delta\theta \to 0$, obtemos duas equações dadas por:

$$rN(\theta) - T(\theta) = 0, \tag{23}$$

$$\frac{dT}{d\theta}(\theta) + \mu r N(\theta) = 0. \tag{24}$$

Isolando $N(\theta)$ em (23) e substituindo em (24), obtemos

$$\frac{dT}{d\theta} + \mu T = 0.$$

Considerando a condição $T(0) = T_0$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{d\theta} + \mu T = 0 \\ \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Resolvendo o problema, temos

$$lnT = -\mu\theta + c$$

$$T = e^c \cdot e^{-\mu\theta},$$

considerando a condição inicial $T(0) = T_0$, obtemos

$$e^c = T_0.$$

Então a solução do problema é dada por

$$T(\theta) = T_0 e^{-\mu\theta}.$$

Análise da solução: Podemos concluir que a força para a corda sustentar um barco enrolada num poste gerando um setor de ângulo α é dada por $T_1 = T_0 e^{-\mu\alpha}$. Então podemos notar que quanto menor for o ângulo α, menor será T_1, ou seja, menor será a força necessária para aplicar na outra extremidade como mostra figura 2. Então, concluimos que quanto mais voltas a corda fizer no poste, a força T_1 será tão pequena que apenas o peso da corda jogada sobre o solo é suficiente para manter o equilíbrio.

A Tractriz

Uma partícula Q de massa m, será arrastada ao longo de uma corda QP, essa corda é mantida de forma bem esticada e sua extremidade P está sobre o eixo x, então a tractriz é formada ao longo da curva descrita pela partícula Q como é mostrado na figura 6.

Figura6

Considerando as coordenadas $Q(x, y)$, $P(x_a, 0)$ e $R(x, 0)$, temos a seguinte relação pelo teorema de Pitágoras:

$$QP^2 = QR^2 + RP^2$$
$$a^2 = y^2 + (x - x_a)^2,$$

isolando o termo $x - x_a$, obtemos

$$x - x_a = \pm\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Para o problema vamos considerar $-\sqrt{a^2 - y^2}$. Então, lembrando da equação da reta que passa por um ponto, temos

$$y - y(x_a) = y' \cdot (x - x_a),$$

sabendo que $y(x_a) = 0$, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \tag{25}$$

Sabendo que $y' = dx/dy$, podemos rescreever a expressão (25) da seguinte maneira:

$$-dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy,$$

uma primitiva de $\sqrt{a^2 - y^2}/y$, é dada por

$$-x + c = a\ ln\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) + \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Considerando o problema de valor inicial com a condição $y(0) = a$, vamos obter que $c = 0$. Portanto a solução da equação diferencial (25) será dada por

$$x = -a\ ln\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2},$$

onde esta solução é a equação da tractriz $x(y)$, explicitada de maneira que y é a variável independente e x sendo a variável dependente.

Vamos imaginar que um gato persegue um rato no plano (x, y). O rato estava comendo queijo na origem e o gato localizado no ponto $G = (a, 0)$, o gato faminto parte em direção ao rato e o rato por sua vez, foge do gato correndo ao longo do eixo y no sentido positivo com uma velocidade constante ν. O gato ao correr em direção ao rato com uma velocidade constante ω, forma uma curva como podemos ver na figura 12, e o problema desta sessão consiste em determinar a curva descrita pelo gato nos parâmetros a, ν e ω.

Figura12

Considerando que após um tempo t, o gato estará em um ponto $P = (x, y)$ e como o deslocamento do rato se dá ao longo do eixo y, logo a sua segunda coordenada será dada por esse deslocamento, então ele estará no ponto $Q = (0, \nu t)$ c. Olhando agora para o deslocamento do gato, podemos calcular o seu deslocamento L através do comprimento de arco PG que vai de a até x, então temos

$$L = \int_x^a \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx,$$

sabendo que o deslocamento L é dado por $t\omega$, o tempo que o gato levou para chegar até o ponto P será dado por

$$t = \frac{1}{\omega} \int_x^a \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx. \tag{26}$$

Agora, considerando o ponto P de coordenadas arbitrárias (x, y) temos pela geometria da figura:

$$y' = \frac{\bar{OQ} - y}{0 - x},$$

logo obtemos

$$\bar{OQ} = y - y'x,$$

e como $\bar{OQ} = \nu t$, temos

$$\nu t = y - y'x. \tag{27}$$

Logo, de (26) e (27), temos a expressão

$$\frac{\nu}{\omega}\int_x^a \sqrt{1+|y'(x)|^2}dx = y - y'x,$$

derivando a expressão acima em relação a variável x, obtemos

$$c\sqrt{1+|y'(x)|^2} = xy'', \tag{28}$$

onde $c = \nu/\omega$. Introduzindo a variável $p = y'$, temos a seguinte expressão

$$c\sqrt{1+p^2} = xp'. \tag{29}$$

Sabendo que $p' = dp/dx$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{x} dx = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}} dp \\ \\ p(a) = 0. \end{cases}$$

Uma primitiva de $1/\sqrt{1+p^2}$ é dada por

$$-ln(\sqrt{p^2+1} - p),$$

logo a solução geral do problema de valor inicial será dada por

$$c \cdot lnx + k = -ln(\sqrt{p^2+1} - 1).$$

Utilizando a condição inicial $p(a) = 0$, temos

$$k = -c \cdot lna.$$

Então vamos obter da solução de (29):

$$c \cdot lna - c \cdot lnx = ln(\sqrt{p^2+1} - 1)$$

$$\sqrt{p^2+1} - p = \left(\frac{a}{x}\right)^c. \tag{30}$$

Da expressão (30), isolando a variável p, obtemos

$$p = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^c - \left(\frac{a}{x}\right)^c\right].$$

Sabendo que $p = y' = dy/dx$, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^c - \left(\frac{a}{x}\right)^c\right] \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Para $c \neq 1$, vamos obter como solução geral do problema:

$$y = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{c-1}\right] + k.$$

Utilizando a condição inicial $y(a) = 0$, temos

$$k = -\frac{ac}{c^2 - 1}.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial será dada por

$$y(x) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{c+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{c-1}\right] - \frac{ac}{c^2-1}. \qquad (31)$$

Análise da solução: Se considerarmos $c \geq 1$, consequentemente a velocidade do rato seria maior que a do gato, ou seja, $\nu \geq \omega$. Porém, se analisarmos o caso para $c < 1$, vamos ter que a velocidade do gato será a maior, ou seja, $\nu < \omega$. Podemos determinar o instante e o ponto da coordenada sobre o eixo y onde o encontro entre os dois aconteceria.

Para determinar o instante, utilizaremos a equação (31), para $y(0) = \nu t$, onde νt representa o deslocamento do rato. Logo obtemos que o instante que o gato encontra o rato é dado por

$$t = \frac{a\omega}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Já o ponto de encontro entre os dois, também pode ser encontrado pela expressão (31), agora considerando a condição $y(0) = E$, onde E será o ponto de encontro. Logo temos que o ponto da ordenada sobre o eixo y onde o gato encontra o rato, é dado por

$$E = \frac{a\nu\omega}{\omega^2 - \nu^2}.$$

[1] BOYCE, William; DIPRIMA, Richard; MEADE, Douglas. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

[2] FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[3] PINTO, Alex Oliveira. **Equações Diferenciais Ordinárias: Um estudo dos modelos matemáticos que descrevem a Catenária e a Tractriz**. 2021. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Centro de Estudos Superiores de Tefé, Universidade do Estado do Amazonas, Tefé/Am, 2021.