

Lista de exercícios #1

Grafos e Algoritmos Computacionais

1 - Seja V um conjunto qualquer, com cardinalidade igual a n . Denotamos por V^2 o conjunto de todos os pares não ordenados de elementos distintos de V . Qual a cardinalidade de V^2 em função de n ?

2 - Um grafo G é dito **completo** se $G = (V, V^2)$. O grafo completo com n vértices é denotado K_n . Para cada um dos seguintes grafos, desenhe e cite $|E|$, onde E se refere ao conjunto de arestas do grafo.

- a) K_3
- b) K_4
- c) K_5

3 - Considere um grafo onde cada vértice representa uma casa de um tabuleiro de xadrez reduzido, com dimensões 3 por 3. Cada aresta desse grafo indica que é possível o movimento de uma peça entre duas casas.

- a) Chamamos de grafo da torre o grafo dos movimentos possíveis da torre nesse tabuleiro. Desenhe o grafo da torre no tabuleiro de xadrez 3 por 3.
- b) De forma análoga, desenhe o grafo do bispo no tabuleiro 3 por 3
- c) Desenhe o grafo do cavalo no tabuleiro 3 por 3.
- d) Desenhe o grafo do rei no tabuleiro 3 por 3.
- e) Desenhe o grafo da dama no tabuleiro 3 por 3.

4 - Um k -cubo é um grafo definido da seguinte maneira. Cada vértice é uma sequência $b_1 b_2 \dots b_k$ onde cada b_i pertence a $\{0, 1\}$. Dois vértices são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Desenhe os grafos dos cubos de dimensões 1, 2 e 3.

5 - A grade p por q é o grafo definido da seguinte maneira: o conjunto de vértices é dado pelo produto cartesiano entre $\{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}$ e dois vértices (i_1, j_1) e (i_2, j_2) são adjacentes se e somente se $(i_1 - i_2)^2 + (j_1 - j_2)^2 = 1$. Quantas arestas possui a grade p por q ?

6 - Seja V o conjunto de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ com dois elementos. Sejam v e w elementos de V . Considere um grafo onde v e w são adjacentes se $v \cap w = \emptyset$. Esse grafo é chamado grafo de Petersen. Desenhe esse grafo.

7 - Duas arestas de um grafo são adjacentes se incidem em um mesmo vértice. O grafo das arestas de um grafo G , denotado por $L(G)$, é um grafo onde cada vértice corresponde a uma aresta de G , e dois vértices são adjacentes se as respectivas arestas também forem. Desenhe o grafo das arestas de K_5 .

8 - O complemento de um grafo (V, E) é o grafo dado por $(V, V^2 - E)$.

a) Desenhe o complemento do grafo das arestas de K_5 .

b) Desenhe o complemento do grafo de Petersen.

9 - Mostre que o grafo das arestas de K_5 é isomorfo ao complemento do grafo de Petersen.

10 - Mostre que todo grafo tem número par de vértices de grau ímpar.

11 - Mostre que todo grafo com dois ou mais vértices possui ao menos dois vértices de mesmo grau.

12 - Seja $G(V, E)$ um grafo qualquer. Dizemos que duas arestas de G são adjacentes se possuem um vértice em comum. O grafo das arestas de G , denotado por $G'(V', E')$, é o grafo onde $V' = E$, e dois vértices a, b de V' são adjacentes se as arestas correspondentes de E também o forem. Desenhe o grafo das arestas de um K_4 .

13 - Mostre que todo caminho simples (caminho onde cada vértice aparece apenas uma vez) é bipartido.

14 - Mostre que um ciclo simples é bipartido se e somente se é de tamanho par