Notas de aula de Grafos e Algoritmos Computacionais

Daniel Oliveira Dantas

20 de outubro de 2020

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Exercícios preliminares

1. Defina matriz quadrada.
2. Defina matriz simétrica.
3. O que é um conjunto?
4. Defina cardinalidade de um conjunto.
5. Defina par ordenado.
6. Defina par não-ordenado.
7. Defina produto cartesiano de dois cojuntos.
8. Defina conjunto das partes.
9. Qual é a cardinalidade do conjunto das partes de um conjunto A em função da cardinalidade de A?
10. Quando podemos dizer que dois conjuntos são iguais?
11. A cardinalidade do conjunto dos números naturais é maior, menor ou igual à do conjunto dos números racionais?
12. A cardinalidade do conjunto dos números naturais é maior, menor ou igual à do conjunto dos números reais?
13. Como provar que dois conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade?
14. Defina função bijetora.
15. Seja R o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Podemos dizer que R pertence a si mesmo?

Capítulo 2

Uma iniciação à Teoria dos Grafos

Capítulo 2 de Szwarcfiter, *Grafos e Algoritmos Computacionais* [1].

2.1 Introdução

Serão dadas neste capítulo algumas definições de Teoria dos Grafos.

2.2 Os primeiros conceitos

— Grafo: representado por $G(V, E)$, é um conjunto finito não vazio V e um conjunto E de pares não ordenados de elementos distintos de V. Ver Figura 2.5.
— Vértices: são os elementos de V.
— Arestas: são os elementos de E.

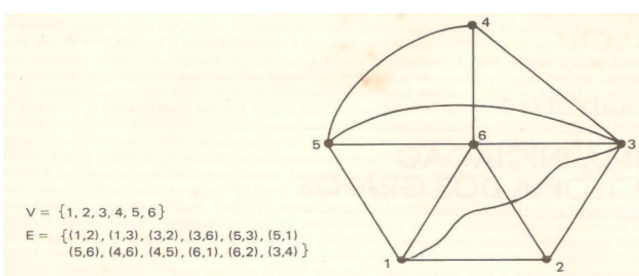


Figura 2.1: Um grafo $G(V, E)$ e sua representação geométrica.

Fonte: Szwarcfiter [1].

— Grafo trivial: é um grafo onde $|V| = 1$.
— Vértices adjacentes: dois vértices v, w são ditos adjacentes quando existe uma aresta e tal que $e = (v, w)$; em outras palavras, quando alguma aresta incide em v e w.
— Arestas adjacentes: são arestas que possuem uma extremidade em comum, ou seja, que incidem em algum vértice em comum.
— Isomorfismo entre grafos: dois grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$, com $|V_1| = |V_2|$, são ditos isomorfos se e somente se (sse) existe uma função bijetora $f : V_1 \mapsto V_2$ tal que $(v, w) \in E_1$ sse $(f(v), f(w)) \in E_2$ para todo $v, w \in V_1$. Ver Figura 2.2.

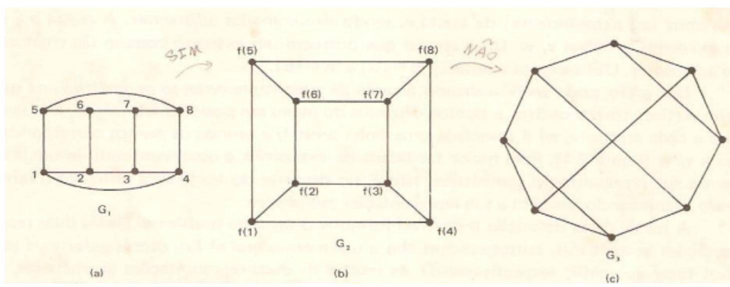
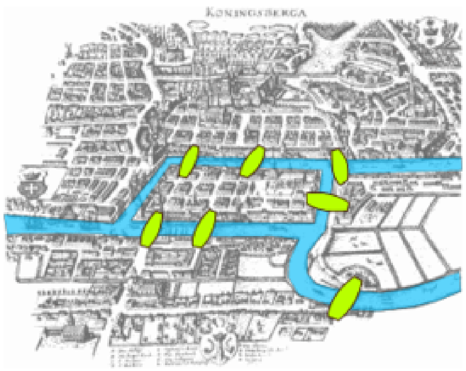


Figura 2.2: Os grafos G_1 e G_2 são isomorfos um ao outro, mas não a G_3.

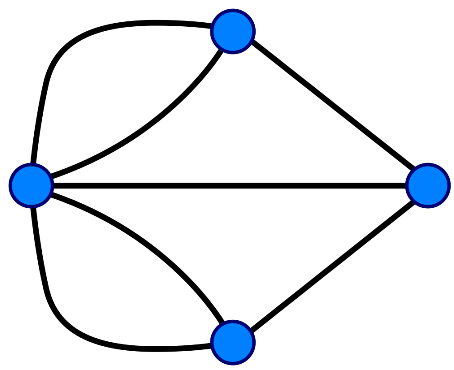
Fonte: Szwarcfiter [1].

— Grafo com laços: $G(V, E)$ é um conjunto finito não vazio V e um conjunto E de pares não ordenados de elementos de V.
— Grafo dirigido: $G(V, E)$ é um conjunto finito não vazio V e um conjunto E de pares ordenados de elementos de V.
— Multigrafo: $G(V, E)$ é um conjunto finito não vazio V e um multiconjunto E de pares não ordenados de elementos de V.
— Grau de um vértice v é o número de arestas que incidem em v. Laços são contados duas vezes. É denotado por grau(v).
— Vértice isolado: é um vértice com grau zero.
— Grafo regular de grau r: é um grafo em que todos os vértices possuem o mesmo grau r.
— Caminho: uma sequência de vértices $v_1, \ldots, v_k$ tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E, 1 \leq i < k$ é denominada caminho de v_1 a v_k. Seu comprimento é $k - 1$.
— Alcance: dizemos que um vértice v alcança um vértice w se existe um caminho de v a w.
— Caminho simples: caminho onde todos os vértices de v_1 a v_k são diferentes.
— Trajeto: caminho onde todas as arestas são distintas.
— Ciclo: é um caminho $v_1, \ldots, v_{k+1}$ em que $v_1 = v_{k+1}$ e $k \geq 3$.
— Ciclo simples: é um ciclo onde todos os vértices são diferentes, exceto o primeiro e o último.
— Grafo acíclico: é um grafo que não possui ciclos simples.

— Ciclos idênticos: ciclos obtidos um do outro por uma rotação de seus vértices.
— Caminho Hamiltoniano: caminho que contém cada vértice do grafo exatamente uma vez.
— Ciclo Hamiltoniano: ciclo $v_1, \ldots, v_{k+1}$ onde o caminho $v_1, \ldots, v_k$ é Hamiltoniano.
— Caminho ou ciclo Euleriano: caminho ou ciclo que contém cada aresta do grafo exatamente uma vez.



(a) Pontes de Konigsberg.



(b) Representação geométrica.

Figura 2.3: Existe caminho que percorra todas as pontes uma única vez?

Fonte: Wikipedia.

— Grafo conexo: grafo onde, entre cada par de vértices, existe um caminho.
— Grafo desconexo: grafo que não é conexo. Em outras palavras, grafo em que existe algum par de vértices entre os quais não existe caminho.
— Grafo totalmente desconexo: grafo que não possui arestas.
— Subconjunto maximal em relação à propriedade P: seja S um conjunto e $S' \subseteq S$, S' é dito maximal em relação à propriedade P quando S' satisfaz P e não existe subconjunto $S'' \supset S'$ que satisfaça P.
— Componente conexo: subgrafo de um grafo G maximal com relação à conectividade.
— Subconjunto minimal em relação à propriedade P: definido de forma análoga ao subconjunto maximal.
— Distância entre dois vértices v e w: denotada por $d(v, w)$ é o comprimento do menor caminho entre v e w.
— Subtração e adição de vértices e arestas: seja $G(V, E)$ um grafo.
- Seja $e \in E$ uma aresta, denota-se por $G - e$ o grafo obtido de G pela exclusão da aresta e.
- Seja (v, w) um par de vértices não adjacentes de G, denota-se por $G + (v, w)$ o grafo obtido de G adicionando-se a aresta (v, w).
- Seja $v \in V$ um vértice, denota-se por $G - v$ o grafo obtido da remoção do vértice v e de todas as arestas nele incidentes.

- Seja $v \notin V$ um vértice, denota-se por $G + v$ o grafo obtido de G adicionando-se o vértice v.

— Teorema 2.1: um grafo conexo G possui ciclo Euleriano sse todo vértice de G possui grau par.

- $\Rightarrow$ Seja C um ciclo Euleriano de G. Para cada ocorrência de um vértice v em C, somamos 2 a seu grau pelo fato de uma ocorrência corresponder a uma aresta de entrada e uma de saída. Portanto, todo vértice de G possui grau par.
- $\Leftarrow$ Assuma que todos os vértices de G têm grau par. Começamos de um vértice arbitrário v e percorremos um ciclo começando e terminando em v, sem repetir arestas. Se todas as arestas foram visitadas, então G é Euleriano. Se não, removemos de G as arestas pertencentes a C e vértices isolados após a remoção, ficando com o grafo G'. Todos os vértices de G' têm grau par. Partimos então de algum vértice $u \in G'$ pertencente ao ciclo C e percorremos outro ciclo. O processo é repetido até que o grafo fique vazio. Um ciclo Euleriano pode ser obtido da concatenação de todos os ciclos encontrados. Portanto, G possui ciclo Euleriano. $\blacksquare$

— Grafo completo: é um grafo que possui uma aresta entre cada par de seus vértices. É denotado por K_n, onde $n = |V|$. Possui $\binom{n}{2}$ arestas.

— Complemento de um grafo $G(V, E)$: é o grafo $\bar{G}$ que também possui V como conjunto de vértices e possui como conjunto de arestas $V^2 - E$, onde V^2 denota o conjunto de todos os pares não ordenados de elementos distintos de V.

— Grafo bipartido: um grafo $G(V, E)$ é bipartido quando seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2, tais que toda aresta incide em um vértice de V_1 e em um vértice de V_2.

— Grafo bipartido completo: possui uma aresta para par de vértices (v_1, v_2), onde $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. É denotado por K_{n_1,n_2}, onde $n_1 = |V_1|$ e $n_2 = |V_2|$. Possui $n_1 \times n_2$ arestas.

— Grafo bipartido completo: possui uma aresta para cada par de vértices (v_1, v_2) onde $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. É denotado por K_{n_1,n_2} onde $n_1 = |V_1|$ e $n_2 = |V_2|$. Possui $n_1 \times n_2$ arestas.

— Teorema 2.2: um grafo $G(V, E)$ é bipartido sse todo ciclo de G possui comprimento par.

- $\Rightarrow$ Seja $G(V, E)$ um grafo bipartido e $V = A \cup B$, com $A \cap B = \emptyset$, e todo $e \in E$ é da forma (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$. Suponha que G possui um ciclo C de comprimento ímpar $C = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ onde n é o comprimento do ciclo. Suponha sem perda de generalidade que $v_1 \in A$. Segue que $v_2 \in B$, $v_3 \in A$ e assim por diante. Então $v_k \in A$ se k é ímpar e $v_k \in B$ se k é par. O n é ímpar então $v_n \in A$. Sabemos que $v_1 \in A$, mas $(v_n, v_1) \in C$, o que contradiz a hipótese de que G é bipartido. Então G não possui ciclos de comprimento ímpar.
- $\Leftarrow$ Suponha que G não possua ciclos de comprimento ímpar. Seja C um ciclo em $G(V, E)$, um grafo onde $V = A \cup B$, com $A \cap B = \emptyset$. Escolha algum v_1 qualquer. Suponha sem perda de generalidade que $v_1 \in A$.

Suponha ainda que $v_2 \in B$ e que $v_k \in A$ se k for ímpar e $v_k \in B$ se k for par. Como o ciclo C tem comprimento igual a n, (v_n, v_1) pertence ao ciclo e $v_n \in B$. Portanto, toda aresta incide em um vértice de A e em um vértice de B. Então o grafo é bipartido. ■

— Subgrafo: dizemos que o grafo $G_2(V_2, E_2)$ é subgrafo de $G_1(V_1, E_1)$ se $V_2 \subseteq V_1$ e $E_2 \subseteq E_1$. Se G_2 possui toda aresta (v, w) de G_1 tal que ambos v e w estão em V_2, dizemos que G_2 é o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices V_2. Dizemos ainda que V_2 induz G_2.

— Clique: chamamos de clique de um grafo G um subgrafo de G que é completo.

— Conjunto independente de vértices: é um subgrafo induzido de um grafo G sem nenhuma aresta.

— Tamanho: chamamos de tamanho de um clique ou de um conjunto independente de vértices a cardinalidade de seu conjunto de vértices.

2.3 Árvores

— Árvore: chamamos de árvore o grafo $T(V, E)$ acíclico e conexo.

— Folha: chamamos de folha um vértice v de uma árvore T se seu grau for menor ou igual a 1. Caso tenha grau maior que 1, dizemos que v é um vértice interior.

— Floresta: é um conjunto de uma ou mais árvores. Todo grafo acíclico é uma floresta.

— Teorema 2.3: um grafo $G(V, E)$ é uma árvore sse existir um único caminho entre cada par (v, w) de vértices de G.

- $\Rightarrow$ Seja G uma árvore. Então G é conexo. Como G é conexo, existe caminho entre quaisquer pares de vértices v e w. Suponha que existam dois caminhos distintos entre v e w. A concatenação desses dois caminhos contém um ciclo, contradizendo o fato de G ser uma árvore. Portanto, existe um único caminho entre cada par de vértices de G.
- $\Leftarrow$ Se existe um único caminho entre cada par de vértices de G então G é conexo. O grafo G não possui ciclos contendo v e w pois, se possuísse, haveria dois caminhos distintos entre v e w. Como G é conexo e acíclico, então G é uma árvore. ■

— Lema do aperto de mão: seja $G(V, E)$ um grafo, a soma dos graus de seus vértices é igual a $2|E|$.

- Demonstração: cada aresta incide exatamente em dois vértices. O grau de cada vértice v é definido como o número de arestas que incidem em v. Portanto, quando somamos os graus de todos os vértices, estamos contando cada aresta duas vezes.

— Ponte: seja $G(V, E)$ um grafo conexo, dizemos que uma aresta $e \in E$ é uma ponte se sua remoção faz com que o grafo fique desconexo.

— Teorema 2.A: sejam $G(V, E)$ um grafo conexo e $e \in E$ uma aresta, e é ponte sse e não faz parte de nenhum ciclo simples de G.

- $\Rightarrow$ Suponha que a aresta $e = (v_1, v_2)$ faz parte de um ciclo simples $C = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1)$. Podemos afirmar que $G - e$ é conexo, pois continua existindo caminho entre todos os seus pares de vértices. Esses caminhos são obtidos a partir dos caminhos entre todos os pares de vértices da seguinte maneira: se a aresta (v_1, v_2) aparece nesse caminho em $G - e$, essa aresta pode ser substituída por $(v_1, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_3, v_2)$; se não aparece, o caminho permanece o mesmo. Portanto $G - e$ é conexo e e não é ponte.
- $\Leftarrow$ Seja $e = (v_1, v_2)$ uma aresta que não faz parte de nenhum ciclo simples de G. Suponha que e não é uma ponte. Então $G - e$ é conexo e existe caminho simples C entre v_1 e v_2 em $G - e$. Mas a concatenação de C com e produz um ciclo simples, contradizendo a hipótese. Portanto, e é ponte. ■

— Teorema 2.B: seja T uma árvore, toda aresta de T é uma ponte.

- Demonstração: se T é árvore, então não há ciclos simples em T. Portanto, para toda aresta e de T, e não faz parte de ciclos simples. Então, e é ponte. ■

— Teorema 2.C: seja T um grafo conexo com n vértices, T é árvore sse T possui $n - 1$ arestas.

- $\Rightarrow$ Seja T uma árvore com n vértices, e $P(n)$ a proposição de que uma árvore com n vértices possui $n - 1$ arestas, para $n > 0$. $P(1)$ afirma que uma árvore com 1 vértice não possui arestas, o que é verdade e é a base da indução. Suponha que $P(k)$ é verdade. Então uma árvore T_k com k vértices possui $k - 1$ arestas. Considere um vértice v de T_k. Adicione a T_k um vértice w e a aresta (v, w), resultando no grafo T_{k+1}. O vértice (v, w) é ponte, pois sua remoção deixa w isolado e T_{k+1} desconexo. Como T_k é árvore, todas as suas arestas são pontes. A aresta (v, w) também é ponte, portanto, todas as arestas de T_{k+1} são pontes. O grafo T_{k+1} é conexo, pois T_k é conexo e existe caminho entre w e todos os vértices de T_k. O grafo T_{k+1} não possui ciclos simples, pois todas as suas arestas são pontes. Como T_{k+1} é conexo e não possui ciclos simples, T_{k+1} é árvore com uma aresta e um vértice a mais que T_k. Portanto a proposição $P(k + 1)$ vale.
- $\Leftarrow$ Seja T um grafo conexo com $n - 1$ arestas e n vértices. Suponha que T não é uma árvore. Então T contém possui ciclo simples e é possível remover uma aresta mantendo o grafo conexo. Removemos então uma aresta que não é ponte e obtemos o grafo T', com n vértices, $n - 2$ arestas e conexo. Partimos do grafo T' com n vértices e sem arestas. Escolha dois vértices v_1 e v_2 e ligue-os com uma aresta rotulada como e_1. Escolha outro vértice, rotule-o como v_3 e ligue-o a v_1 com uma aresta rotulada como e_2. Continuamos assim até o vértice v_{n-1} e a aresta e_{n-2}. Foram usadas as $n - 2$ arestas e ainda há um vértice isolado, ou seja, o grafo não é conexo. Portanto T não contém ciclo simples e deve ser uma árvore. ■

— Teorema 2.E: São definições equivalentes de árvore:

$$
\begin{array}{lll}
T \text{ é árvore} & \Leftrightarrow_1 & T \text{ é conexo e acíclico} \\
& \Leftrightarrow_2 & T \text{ é conexo e possui } |V|-1 \text{ arestas} \\
& \Leftrightarrow_3 & \text{toda aresta de } T \text{ é ponte} \\
& \Leftrightarrow_4 & \text{existe um único caminho entre cada par de vértices de } T \\
& \Leftrightarrow_5 & T \text{ é acíclico e adicionando uma aresta criamos um ciclo simples}
\end{array}
$$

- $\Leftrightarrow_1$ Definição original de árvore.
- $\Leftrightarrow_2$ Teorema 2.C.
- $\Leftrightarrow_3$ Teorema 2.B.
- $\Leftrightarrow_4$ Teorema 2.3.
- $\Rightarrow_5$ Suponha que $T(V, E)$ é conexo e acíclico. Sejam u e v dois vértices de v não vizinhos. Seja $P = (u, u_1, u_2, \ldots, v)$ um caminho de u a v. Adicione a T a aresta (u, v). Então, $(u, u_1, u_2, \ldots, v, u)$ é um ciclo simples em T.
- $\Leftarrow_5$ Suponha que T é acíclico e que, adicionando uma aresta, criamos um ciclo simples em T. Se T fosse desconexo, poderíamos adicionar uma aresta e para conectar dois componentes conexos de T. Essa aresta e seria uma ponte e não estaria em nenhum ciclo simples. Então, se toda aresta adicionada forma um ciclo, T só pode ser conexo. Portanto, T é conexo e acíclico. ■

2.4 Planaridade

— Planaridade: seja $G(V, E)$ um grafo e R uma representação planar de G em um plano. A representação R é dita plana quando não houver cruzamento de arestas em R. Um grafo é dito planar quando admite representação plana. As arestas de R dividem o plano em regiões que são denominadas faces de R. A região não limitada por faces é chamada face externa.

— Teorema (característica de Euler): seja G um grafo conexo planar. Então vale a fórmula

$$|V| + f = |E| + 2$$

onde f é o número de faces.

- Demonstração:
  - Para cada face com mais de 3 arestas, acrescente novas arestas até que esteja dividida apenas em triângulos. Cada aresta adicionada aumenta em 1 o número de faces, portanto, a fórmula continua válida.
  - Repita o passo anterior até que o grafo seja composto apenas por triângulos.
  - Aplique repetidamente algum dos passos a seguir até que sobre apenas um triângulo:
    - Remover um triângulo com apenas uma aresta adjacente à face externa. Isso diminui em 1 o número de faces e em 1 o número de arestas, mantendo a fórmula válida.

- ■ Remover um triângulo com duas arestas adjacentes à face externa. Isso diminui em 1 o número de faces, em 1 o número de vértices e em 2 o número de arestas, mantendo a fórmula válida.
- ○ Ao final teremos apenas um triângulo, com $|V| = 3$, $|E| = 3$ e $f = 2$, com uma face interior e uma externa, portanto, a fórmula é válida.

— Lema 2.5: seja G um grafo conexo planar. Então vale a fórmula

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

onde f é o número de faces.

- Demonstração: cada face é delimitada por 3 ou mais arestas, e cada aresta pertence a 2 faces, portanto, $2|E| \geq 3f$, ou seja, $\frac{2}{3}|E| \geq f$. Substituindo na fórmula da característica de Euler, temos:

$$f = |E| - |V| + 2$$

$$\frac{2}{3}|E| \geq |E| - |V| + 2$$

$$-\frac{1}{3}|E| \geq -|V| + 2$$

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

1. Verifique a validade da característica de Euler nos grafos
   (a) K_3
   (b) K_4
   (c) do tetraedro
   (d) do cubo
   (e) do octaedro
   (f) do dodecaedro
   (g) do icosaedro

2. Verifique a validade do Lema 2.5 nos grafos
   (a) da questão anterior
   (b) K_5
   (c) K_{33}

— Lema 2.6.1: o grafo K_5 não é planar.

- Demonstração: em K_5, $|E| = 10$ e $|V| = 5$, não satisfazendo o Lema 2.5.

— Lema 2.6.2: o grafo K_{33} não é planar.

- Demonstração: em K_{33}, cada face tem 4 arestas, pois o menor ciclo simples de K_{33} tem comprimento 4. Como cada aresta pertence a 2 faces, $2|E| \geq 4f$. Mas $|E| = 9$ e $f = 5$ contradizendo a fórmula. Portanto K_{33} não é planar.

2.5 Coloração

— Coloração: uma coloração é uma atribuição de cores aos vértices de um grafo de maneira que vértices adjacentes fiquem com cores diferentes. Em outras palavras, é uma função $f : V \to c$ tal que para cada par de vértices $v, w \in V$, se $(v, w) \in E$ então $f(v) \neq f(w)$. Uma k-coloração é uma coloração que utiliza k cores.

— Coloração mínima: coloração que utiliza o menor número possível de cores.

— Número cromático de um grafo G é a cardinalidade do conjunto c associado a uma coloração mínima de G.

— Teorema: seja $G(V, E)$ um grafo, $G(V, E)$ é bicolorível sse $G(V, E)$ é bipartido.

- $\Rightarrow$ Se $G(V, E)$ é bicolorível, considere uma coloração de G com cores c_1 e c_2. Sejam V_1 e V_2 os subconjuntos de vértices com cores c_1 e c_2 respectivamente. V_1 e V_2 biparticionam G.
- $\Leftarrow$ Se $G(V, E)$ é bipartido, sejam V_1 e V_2 os subconjuntos de vértices que o biparticionam. Atribua as cores c_1 e c_2 aos elementos de V_1 e V_2 respectivamente. Temos assim uma 2-coloração, já que vértices adjacentes têm cores diferentes.

— Teorema das 4 cores: grafos planares são 4-coloríveis.

- Demonstração:
  - `https://books.google.com.br/books?id=ePYbCAAAQBAJ`

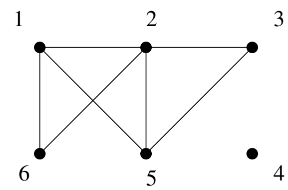
2.6 Representação

— Matriz de adjacências: dado um grafo $G(V, E)$, a matriz de adjacências $R = \{r_{ij}\}$ é uma matriz $|V| \times |V|$ tal que

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E$$
$$r_{ij} = 0 \text{ caso contrário}$$

- Considere o grafo G_1 abaixo. Sua representação através de uma matriz de adjacências seria a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Grafo G_1.

— Matriz de incidências: dado um grafo $G(V, E)$, a matriz de incidências $B = \{b_{ij}\}$ é uma matriz $|V| \times |E|$ tal que

$$b_{ij} = 1 \Leftrightarrow v_i \text{ incide em } e_j$$
$$b_{ij} = 0 \text{ caso contrário}$$

- Considere o mesmo grafo G_1 mostrado acima. Considere ainda que os índices j de 1 a 7 correspondem às arestas (1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (2, 6) e (3, 5) nessa ordem. Sua representação através de uma matriz de incidências seria a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

— Estrutura de adjacências: dado um grafo $G(V, E)$, a estrutura de adjacências S de G é um conjunto de $|V|$ listas $L(v)$, uma para cada $v \in V$. Cada lista $L(v)$ é denominada lista de adjacências de v e contém os vértices w adjacentes a v em G.

- A Figura 2.4 abaixo mostra um exemplo de grafo e a estrutura de adjacências correspondente.

2.7 Grafos dirigidos

— Grafo dirigido ou digrafo: $G(V, E)$ é um conjunto finito não vazio V e um conjunto E de pares ordenados de elementos distintos de V. Portanto, em um digrafo, uma aresta (v, w) possui uma única direção, de v para w. Diz-se também que (v, w) é divergente de v e convergente a w. Caminhos e ciclos em um digrafo devem obedecer ao direcionamento das arestas. É possível haver ciclos de comprimento 2 quando (v, w) e (w, v) pertencem a E simultaneamente.

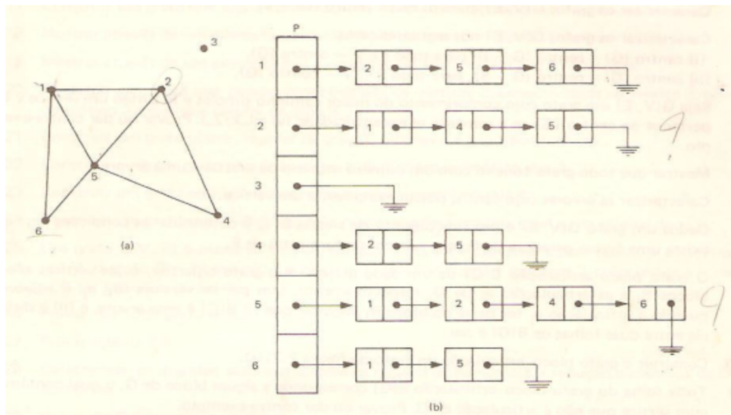


Figura 2.4: Estrutura de adjacências.

Fonte: Szwarcfiter [1].

— Grafo subjacente: é uma versão não dirigida de $D(V, E)$, ou seja, o grafo obtido trocando-se os pares ordenados (v, w) de E por pares não ordenados.
— Grau de entrada: número de arestas convergentes a v. Uma fonte é um vértice com grau de entrada nulo.
— Grau de saída: número de arestas divergentes de v. Um sumidouro é um vértice com grau de saída nulo.
— Digrafo fortemente conexo: é um digrafo $D(V, E)$ em que, para todo par de vértices (v, w) existe caminho de v para w e também de w para v.
— Digrafo unilateralmente conexo: é um digrafo $D(V, E)$ em que, para todo par de vértices (v, w) existe caminho de v para w e/ou de w para v.
— Digrafo fracamente conexo: é um digrafo $D(V, E)$ cujo grafo subjacente é conexo.
— Digrafo desconexo: é um digrafo $D(V, E)$ cujo grafo subjacente é desconexo.
— Fechamento transitivo: é o maior digrafo $D_f(V, E_f)$ que preserva a alcançabilidade de D.
— Redução transitiva: é o menor digrafo $D_r(V, E_r)$ que preserva a alcançabilidade de D. Também é conhecida como diagrama de Hasse.

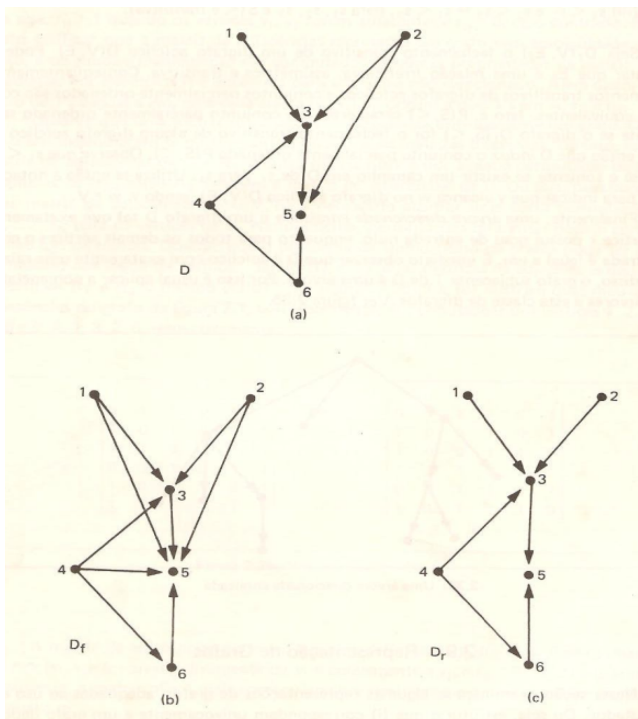


Figura 2.5: (a) Um digrafo $D(V, E)$; (b) seu fechamento transitivo, e; (c) sua redução transitiva.

Fonte: Szwarcfiter [1].

— Conjunto parcialmente ordenado ou poset: denotado pelo par $(S, \leq)$, é um conjunto não vazio S e uma relação binária $\leq$ em S satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $s_1 \leq s_1$ para $s_1 \in S$ (reflexiva)

2. $s_1 \leq s_2$ e $s_2 \leq s_1 \Rightarrow s_1 = s_2$ para $s_1, s_2 \in S$ (anti-simétrica)

3. $s_1 \leq s_2$ e $s_2 \leq s_3 \Rightarrow s_1 \leq s_3$ para $s_1, s_2, s_3 \in S$ (transitiva)

- Um poset também pode ser definido pelo par $(S, <)$, onde $<$ é uma relação binária definida por $s_1 < s_2 \Leftrightarrow s_1 \leq s_2$ e $s_1 \neq s_2$. A relação $<$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $s_1 \not< s_1$ para $s_1 \in S$ (irreflexiva)

2. $s_1 < s_2 \Rightarrow s_2 \not< s_1$ para $s_1, s_2 \in S$ (assimétrica)

3. $s_1 < s_2$ e $s_2 < s_3 \Rightarrow s_1 < s_3$ para $s_1, s_2, s_3 \in S$ (transitiva)

- Seja $D_f(V, E_f)$ o fechamento transitivo de um digrafo acíclico $D(V, E)$. Pode-se constatar qeu E_f é uma relação irreflexiva, assimétrica e transitiva. Portanto, fechamentos transitivos e posets são conceitos equivalentes. Dizemos então que D induz o conjunto parcialmente ordenado $P(V, <)$. Podemos dizer que $v < w$ em P sse v alcança w em D, onde $v, w \in V$.

— Árvore dirigida enraizada: é um digrafo $D(V, E)$ tal que um vértice dito a raiz possui grau de entrada nulo, grau de saída não nulo, e todos os demais possuem grau de entrada igual a 1. Esse digrafo é acíclico e seu grafo subjacente é uma árvore.

2.8 Exercícios

1. Para responder os itens a seguir, considere o grafo G_2 abaixo.

    (a) Encontre um caminho Hamiltoniano.

    (b) Encontre um ciclo Hamiltoniano.

    (c) Encontre um caminho Euleriano.

    (d) Encontre um ciclo Euleriano em $G_2 - (5, 8)$.

    (e) Forneça uma lista de vértices que induza um conjunto indepentente de vértices.

    (f) Forneça uma lista de vértices que induza um conjunto indepentente de vértices de tamanho 4.

    (g) Forneça uma lista de vértices que induza um clique de tamanho 3.

    (h) Forneça uma lista de vértices que induza um clique de tamanho 4.

    (i) Forneça uma lista de vértices que induza um clique de tamanho 5.

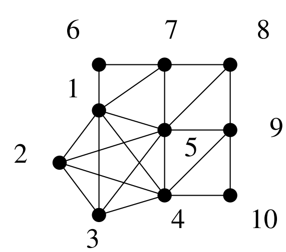
    (j) Quantas arestas possui uma árvore com todos os vértices de G_2?

    (k) Dê um exemplo de árvore que seja um subgrafo de G_2.

    (l) Forneça sua matriz de adjacências.

    (m) Forneça sua matriz de incidências.

    (n) Forneça sua estrutura de adjacências.



Grafo G_2.

2. Forneça um algoritmo que recebe um grafo e um vértice como parâmetros, executa uma busca em largura e retorna uma lista de vértices na ordem em que foram percorridos.

3. Forneça um algoritmo que recebe um grafo, um vértice a e um vértice b como parâmetros. Retorna o caminho mais curto entre a e b.

Capítulo 3

Técnicas básicas

Capítulos 3 e 4 de Szwarcfiter, *Grafos e Algoritmos Computacionais* [1].

3.1 Introdução

Serão vistos neste capítulo alguns algoritmos básicos em grafos.

3.2 Ordenação topológica

— Como visto na seção 2.7, sabemos que um digrafo acíclico $D(V, E)$ induz um conjunto parcialmente ordenado $(V, <)$. A relação $<$ é definida por $v < w \Leftrightarrow v$ alcança w em D para todo $v, w \in V$. Com isso, é possível ordenar os vértices do digrafo de modo a obter uma sequência $v1, \ldots, v_n$, onde $n = |V|$ satisfazendo

$$v_i, < v_j \Rightarrow i < j \text{ para } i, j \in [1, n]$$

Algorithm 1: Ordenação topológica em digrafo

Data: digrafo acíclico $D(V, E)$
for $j = 1, \ldots, |V|$ **do**
  escolher vértice w com grau de entrada nulo;
  remover w de V;
  $v_j \leftarrow w$;
end

3.3 Busca em árvores

— Busca em árvores:

- Busca em profundidade: visitamos primeiro a raiz. Do vértice atual, caso tenha filhos, visitamos seu primeiro filho não visitado; caso não tenha, retornamos para seu pai.
- Busca em largura: visitamos primeiro a raiz. Colocamos os filhos do vértice atual em uma fila. Visitamos cada vértice da fila até que se esvazie.

Exercícios

1. Considere a árvore abaixo. Em que ordem os vértices serão visitados pela primeira vez

   (a) em uma busca em profundidade?

   (b) em uma busca em largura?

```
            a
           / \
          /   \
         /     \
        /       \
       /         \
      b           c
     / \         /|\
    /   \       / | \
   d     e     f  g  h
  / \    |    /     / \
 i   j   k   l     m   n
```

— Busca em grafos: em um grafo não há raiz, pai, filhos, direita, esquerda ou níveis, como em uma árvore. Para se ter controle dos vértices já visitados, evitando visitas múltiplas a um mesmo vértice, é necessário associar a cada vértice atributos ou marcas.

- Busca em largura:

Algorithm 2: Busca em largura em grafo

Data: grafo conexo $G(V, E)$
escolher, enfileirar e marcar vértice inicial arbitrário;
while fila não vazia **do**
  $v \leftarrow$ desenfileira();
  marcar e enfileirar vizinhos de v não marcados;
end

- Busca em profundidade:

Algorithm 3: Busca em profundidade em grafo

```
Data: grafo conexo G(V, E)
escolher vértice inicial arbitrário v;
executar P(v);
def P(x):
    marcar x;
    empilhar x;
    for w ∈ adjacencia(x) do
        if w não é marcado then
            P(w);
        end
    end
    desempilhar x;
end
```

3.4 Busca irrestrita

— Busca irrestrita: o algoritmo de busca irrestrita que veremos aqui é uma variação da busca em profundidade que permite que um mesmo vértice seja visitado várias vezes. Uma busca irrestrita em profundidade constrói uma árvore denominada árvore irrestrita de profundidade. A Figura 5.1 mostra um exemplo desse tipo de árvore.

Algorithm 4: Busca irrestrita em grafo

```
Data: grafo conexo G(V, E)
escolher vértice inicial arbitrário v;
executar P(v);
def P(x):
    marcar x;
    empilhar x;
    for w ∈ adjacencia(x) do
        if w não é marcado then
            P(w);
        end
    end
    desempilhar x;
    desmarcar x;
end
```

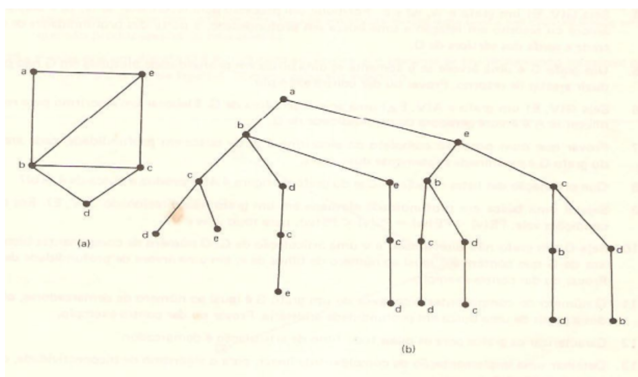


Figura 3.1: (a) Um grafo $G(V, E)$; (b) árvore irrestrita de profundidade.

Fonte: Szwarcfiter [1].

Capítulo 4

Outras técnicas

Capítulo 5 de Szwarcfiter, *Grafos e Algoritmos Computacionais* [1].

4.1 Introdução

Serão vistos neste capítulo alguns algoritmos em grafos.

4.2 Árvore geradora mínima

— Grafo ponderado: é um grafo que possui uma função relacionando o conjunto de vértices ou de arestas a algum valor numérico, conhecido como peso ou custo.

— Árvore geradora mínima (AGM): seja $G(V, E)$ um grafo conexo em que cada aresta possui um peso, o problema da árvore geradora mínima consiste em encontrar uma árvore que conecte todos os vértices de V cuja soma dos pesos é a menor possível.

- Algoritmo de Kruskal: usa *union-find trees* com *path compression* e *union by rank*.

Algorithm 5: Algoritmo de Kruskal

```
Data: grafo conexo G(V, E) com função de custo associada às arestas
ordenar as arestas por ordem não decrescente de custo;
associar cada vértice a um conjunto distinto;
for e ∈ E em ordem não decrescente de peso do
    if e liga vértices de conjuntos diferentes then
        unir os dois conjuntos;
        marcar e como parte da AGM;
    end
end
```

- Algoritmo de Prim: usa uma fila de prioridades implementada com *heap*.

Algorithm 6: Algoritmo de Prim

```
Data: grafo conexo G(V, E) com função de custo associada às arestas
inicializar V₂ = {x} onde x é um vértice arbitrário;
inicializar E₂ = {};
while V₂ ≠ V do
  | escolher aresta (u, v) tal que u ∈ V₂ e v ∉ V₂ cujo peso seja mínimo;
  | adicionar v a V₂ e (u, v) a E₂;
end
Retornar G₂(V₂, E₂), que representa a AGM;
```

4.3 Menor distância em grafos

Algorithm 7: Algoritmo de Dijkstra

```
Data: grafo G(V, E), origem s
def Inicializa(G, s):
  | for v ∈ V do
  |   | dist(v) = ∞;
  |   | pai(v) = NULL;
  | end
  | dist(s) = 0;
end
def Relax(u, v):
  | if dist(v) > dist(u) + peso((u, v)) then
  |   | dist(v) = dist(u) + peso((u, v));
  |   | pai(v) = u;
  | end
end
def Dijkstra(G, s):
  | Inicializa(G, s)
  | Q = V /* Inserir todos os vértices em fila de prioridade. */
  |       /* Prioridade maior quanto menor o peso. */
  | while fila Q não vazia do
  |   | u = desenfileira(Q) /* Vértice mais próximo a s */
  |   | for v ∈ adjacencia(u) do
  |   |   | Relax(u, v)
  |   | end
  | end
end
```

Capítulo 5

Fluxo em redes

Capítulo 6 de Szwarcfiter, *Grafos e Algoritmos Computacionais* [1].

5.1 Introdução

Serão vistos neste capítulo definições e algoritmos relacionados a fluxo em redes.

5.2 O problema do fluxo máximo

— Multidigrafo $D(V, E)$ é um conjunto finito não vazio V e um multiconjunto E de pares ordenados de elementos distintos de V. Portanto, pode haver mais de uma aresta (v, w) simultaneamente.

— Rede é um multidigrafo $D(V, E)$ em que a cada aresta e está associado uma capacidade $c(e)$.

— Fluxo: considere uma rede $D(V, E)$ contendo dois vértices especiais $s, t \in V$ denominados origem e destino respectivamente. Os vértices s e t possuem as seguintes propriedades:

- s é uma fonte que alcança todos os vértices;
- t é um sumidouro alcançado por todos os vértices.

  Um fluxo f de s a t em D é uma função que a cada aresta $e \in E$ associa um número real não negativo $f(e)$ com as seguintes propriedades:
- $0 \leq f(e) \leq c(e)$
- $\sum_{w_1} f(w_1, v) = \sum_{w_2} f(v, w_2)$ para todo $v \neq s, t$.

— Fluxo ilegal: fluxo que não satisfaz as propriedades da definição.

— Valor do fluxo no vértice v é dado pela somatória dos fluxos nas arestas convergentes a v ou divergentes de v. De forma análoga, é dada pela soma dos fluxos das arestas divergentes de s ou convergentes a t.

— Valor do fluxo no digrafo $D(V, E)$ é denotado por $f(D)$ e é igual a $f(s)$.

— Aresta saturada: é uma aresta em que $f(e) = c(e)$.

— Vértice saturado: é um vértice com todas as arestas convergentes e/ou divergentes saturadas.

— Fluxo maximal: fluxo onde todo caminho de s a t possui alguma aresta saturada.

— Corte: seja $S \subseteq V$ um subconjunto de vértices tal que $s \in S$, $t \notin S$ e $\bar{S} = V - S$ seu complemento, um corte $(S, \bar{S})$ em D é o subconjunto das arestas que possuem uma extremidade em S e outra em $\bar{S}$.

— Capacidade de um corte $c(S, \bar{S})$: sejam $(S, \bar{S})^+ = \{(v, w) \in E | v \in S, w \in \bar{S}\}$ e $(S, \bar{S})^- = \{(v, w) \in E | v \in \bar{S}, w \in S\}$, a capacidade $c(S, \bar{S})$ é o somatório das capacidades das arestas de $(S, \bar{S})^+$, ou seja,

$$c(S, \bar{S}) = \sum_{e \in (S, \bar{S})^+} c(e)$$

.

— Fluxo no corte $f(S, \bar{S})$: seja f um fluxo e $(S, \bar{S})$ um corte, o fluxo $f(S, \bar{S})$ no corte $(S, \bar{S})$ é definido como a diferença

$$f(S, \bar{S}) = \sum_{e \in (S, \bar{S})^+} f(e) - \sum_{e \in (S, \bar{S})^-} f(e)$$

.

— Lema: seja f um fluxo e $(S, \bar{S})$ um corte em um digrafo D. Temos que $f(S, \bar{S}) = f(D)$.

— Aresta direta: aresta e tal que $c(e) - f(e) > 0$

— Aresta contrária: aresta e tal que $f(e) > 0$

— Digrafo residual $D'(f)$: seja $D(V, E)$ um digrafo e f um fluxo,

- se (v, w) é aresta direta de D então (v, w) é aresta direta de D' com capacidade $c'(v, w) = c(v, w) - f(v, w)$.
- se (v, w) é aresta contrária de D então (w, v) é aresta contrária de D' com capacidade $c'(w, v) = f(v, w)$.

— Caminho aumentante para f é um caminho no digrafo residual D' que permite aumentar o fluxo no digrafo D.

— Lema: seja f um fluxo em um digrafo D e D' seu digrafo residual correspondente. Se existe caminho aumentante de s a t, o fluxo pode ser aumentado de um valor igual à menor capacidade das arestas do caminho.

— Corte mínimo: corte com a menor capacidade no digrafo D.

— Fluxo máximo: fluxo com o maior valor possível no digrafo D. O fluxo máximo não pode ultrapassar a capacidade do corte mínimo.

$$f(D) = f(S, \bar{S}) = \sum_{e \in (S, \bar{S})^+} f(e) - \sum_{e \in (S, \bar{S})^-} f(e) \leq \sum_{e \in (S, \bar{S})^+} c(e) = c(S, \bar{S})$$

— Teorema: o valor do fluxo máximo em um digrafo D é igual à capacidade do corte mínimo de D.

— Corolário: um fluxo f em um digrafo D é máximo sse não existir caminho

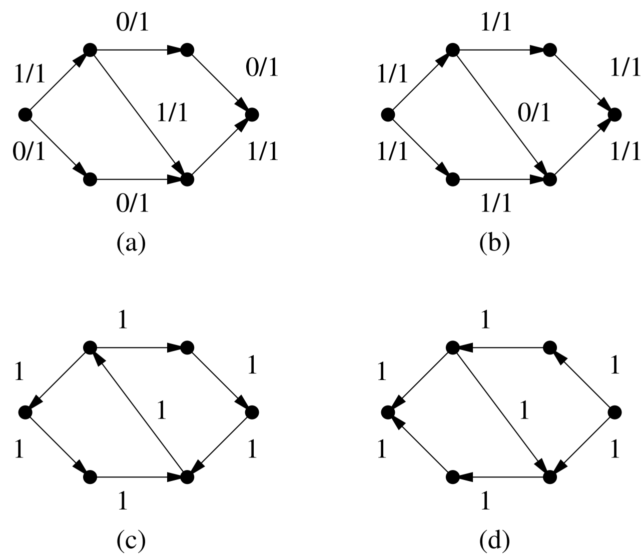


Figura 5.1: (a) Fluxo maximal; (b) fluxo máximo; (c) digrafo residual no fluxo maximal; (d) digrafo residual no fluxo máximo.

Fonte: Szwarcfiter [1].

aumentante para f no digrafo residual D'.

Algorithm 8: Fluxo máximo em rede

Data: digrafo $D(V, E)$ com capacidades c(e) positivas para todo $e \in E$; origem $s \in V$; destino $t \in V$

$F = 0$;

for $e \in E$ **do**

  $f(e) = 0$;

end

construir o digrafo residual $D'(f)$;

while existe caminho $(v_1, \ldots, v_k)$ de $s = v_1$ a $t = v_k$ em D' **do**

  $F' = min\{c'(v_j, v_{j+1}) | 1 \leq j < k\}$;

  for $j \in 1, \ldots, k-1$ **do**

    if (v_j, v_{j+1}) é aresta direta **then**

      $f(v_j, v_{j+1}) += F'$;

    else

      $f(v_{j+1}, v_j) -= F'$;

    end

  end

  $F = F + F'$;

  recalcular D';

end

Referências Bibliográficas

[1] Jayme Luiz Szwarcfiter. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Campus, Rio de Janeiro, 2 edition, 1986.