Universidade Federal de Sergipe - CCET - DMA
Disciplina: Cálculo A - 2022.1
Data: 28/09/2022
Prof.: Naldisson dos Santos.

Gabarito da Segunda Avaliação

1. Derive a função.

(a) [1,0] $y = \dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{x}$.

(b) [1,0] $y = (x^3 + 1)^3$.

(c) [1,0] $y = (x + 1)^{x+1}$.

(d) [1,0] $y = -\ln(cos\ x)$.

Solução. (a)

$$y = \frac{x^2}{x} + \frac{x^{1/2}}{x} = x + x^{-1/2} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{2}x^{-3/2}.$$

(b)

$$y' = 3(x^3 + 1)^2.(3x^2) = 9x^2(x^3 + 1)^2.$$

(c)

$$\ln(y) = (x+1)\ln(x+1) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} \Rightarrow y' = y[\ln(x+1)+1] \Rightarrow y' = (x+1)^{x+1}[\ln(x+1)+1].$$

(d)

$$y' = -\left[\frac{-sen\ x}{cos\ x}\right] = \frac{sen\ x}{cos\ x} = tg\ x.$$

2.[2,0] Em quais pontos da curva $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ a reta tangente é horizontal?

Solução. Derivando implicitamente, temos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}\right) = \frac{d}{dx}(1) \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{yy'}{8} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{4x}{y}.$$

A tangente será horizontal nos pontos onde $y'(x) = 0$, isto é,

$$-\frac{4x}{y} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Substituindo $x = 0$ na equação $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ obtemos que $y = \pm 4$. Logo, os pontos da curva onde as tangentes são horizontais são:

$$(0, -4) \ \text{ e } \ (0, 4).$$

3.[2,0] Um tanque cilíndrico com raio de 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m^3/min. Quão rápido a altura da água está aumentando?

Solução. Sejam $V(t)$ e $h(t)$ o volume e a altura do cilindro, respectivamente. Então, por hipótese, $\frac{dV}{dt} = 3\ m^3/min$ e $r = 5\ m$, onde r é o seu raio. Temos que $V = \pi r^2 h$ é a fórmula do volume do cilindro. Queremos encontrar $\frac{dh}{dt}$. Para isso, temos

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \pi r^2 \frac{dh}{dt} = 3 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{25\pi} \approx 0,038\ m/min.$$

4.[2,0] Seja $f(x) = \log_a(x+1)$. Para qual valor de a ocorre $f'(0) = 1$.

Solução. Temos

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(a)}.$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\ln(a)} = 1 \Rightarrow ln(a) = 1 \Rightarrow a = e.$$

Extra.[2,0] Encontre a aproximação linear da função $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt[3]{0,95}$ e $\sqrt[3]{1,1}$

Solução. Temos

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

Como $f(0) = 1$ e $f'(0) = \frac{1}{3}$, segue que a aproximação linear de f em $a = 0$ é

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + \frac{x}{3}.$$

Dessa forma,

$$\sqrt[3]{x+1} \approx 1 + \frac{x}{3} \ \text{ se } \ x \approx 0.$$

Tomando $x = -0,05$, obtemos

$$\sqrt[3]{0,95} \approx 1 - \frac{0,05}{3} \approx 0,983.$$

Tomando $x = 0,1$, obtemos

$$\sqrt[3]{1,1} \approx 1 + \frac{0,1}{3} \approx 1,033.$$