3) Dados los problemas de decisiones de Independent Set y Vertex Cover, realizar dos reducciones.

a. Reducir Independent Set a Vertex Cover.

b. Reducir Vertex Cover a Independent Set.

1. Reducir Independent Set a Vertex Cover, es decir, IS <=p VC:

Tengo un algoritmo que dado un grafo y un número K, me permite obtener, de ser posible, un Vertex Cover (VC) de, a lo sumo, K vértices.

Como me interesa obtener un Independent Set (IS) de tamaño, como mínimo, K en un grafo dado, voy a tener que transformar el problema pasándole, al algoritmo, el grafo y H = V – K. De esta forma, si es posible, voy a obtener un VC con las características solicitadas. Si no lo es, voy a poder determinar inmediatamente que es imposible encontrar un IS del tamaño deseado.

En los casos que fue posible encontrar un VC, voy a realizar una transformación sobre el resultado obtenido que consiste agarrar todos los vértices no pertenecientes al VC que, finalmente, serán quiénes formen parte del IS.

A continuación, debo demostrar que la reducción es correcta. Para esto debo resolver la siguiente implicancia doble:

**Hay IS de, mínimo, K vértices 🡨🡪 Hay VC de, a lo sumo, V – K vértices**

Hay IS 🡪 Hay VC,

Si un vértice está en el IS, todos sus adyacentes no lo están. Por lo tanto, si agarramos todos los adyacentes de cada vértice del IS, deberíamos cubrir todas las aristas del grafo. Supongamos que selecciono un vértice del IS y lo conecto a otro también perteneciente: estaría corrompiendo mi IS. Por lo tanto, para cada par de vértices del IS, pertenecientes a una misma componente conexa, debería haber, al menos, un vértice intermedio que los delimite y que, por ende, de estar en un VC cubriría a todos sus adyacentes. De esta forma, queda demostrada la implicancia.

Hay VC 🡪 Hay IS,

Si un vértice no está en el VC significa que necesariamente todos sus adyacentes están en este. Supongamos que existe un vértice no está en el VC y es adyacente a otro que tampoco está en el VC. Esto haría que una arista no haya sido cubierta y, por lo tanto, el VC no habría sido válido. Por lo tanto, queda demostrado que agarrando todos los vértices que no están en el VC, se obtiene un conjunto de vértices para los cuáles sus adyacentes no pertenecerán al conjunto.

Por lo tanto, queda demostrado que IS <=p VC.

1. Reducir Vertex Cover a Independent Set, es decir, VC <=p IS:

Consiste en una reducción inversa a la anterior que, utilizando la misma transformación, me permite concluir que VC <=p IS.