FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

## Cátedra

# Investigación Operativa

**Prof. Titular Dr. Ing. Jorge E. Núñez Mc Leod**

***UNIDAD 7: Teoría de Colas***

**Cátedra**

# Investigación Operativa

***UNIDAD 7: Teoría de Colas***

***7.A. Modelos***

Introducción y presentación. Aplicaciones. Fundamentos y terminología. Estructura básica de los modelos de colas: población de entrada, cola, disciplina de la cola, mecanismo de servicio. Distribuciones Exponencial y de Poisson. Estados: transitorio y estable. Medidas de desempeño en estado estable. Fórmula de Little. Notación de Kendall y tipificación de los modelos. Modelo M/M/1.

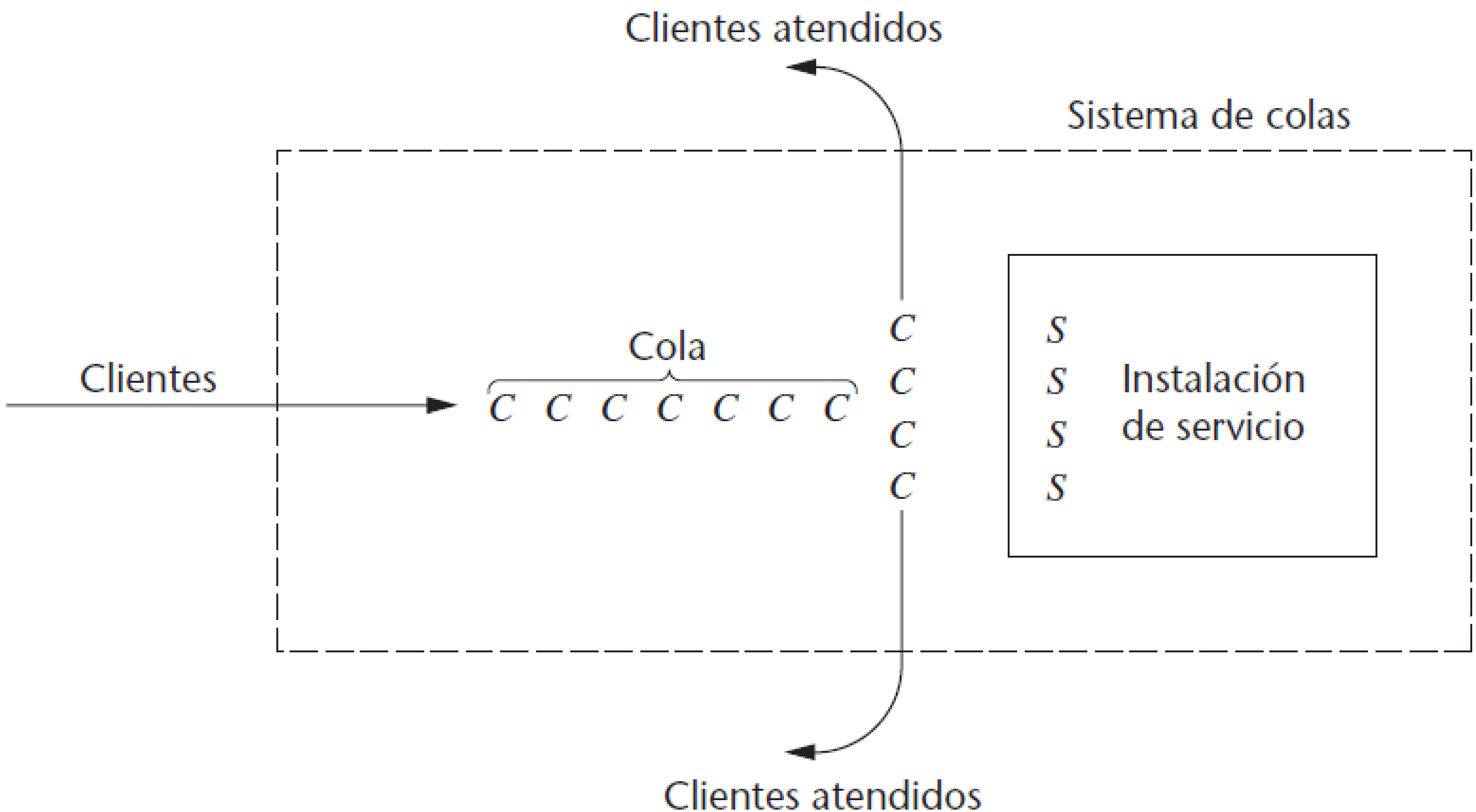
***7.B. Modelos estocásticos***

Introducción a la simulación de colas. Caracterización estadística de variables. Líneas de espera. Modelo. Simulación. Caracterización estadística de resultados.

***7.A. Fundamentos***

***Introducción y presentación. Aplicaciones. Fundamentos y terminología. Estructura básica de los modelos de colas: población de entrada, cola, disciplina de la cola, mecanismo de servicio. Distribuciones Exponencial y de Poisson. Estados: transitorio y estable. Medidas de desempeño en estado estable. Fórmula de Little. Resultados transitorios y resultados estables. Aspecto económico. Notación de Kendall y tipificación de los modelos.***

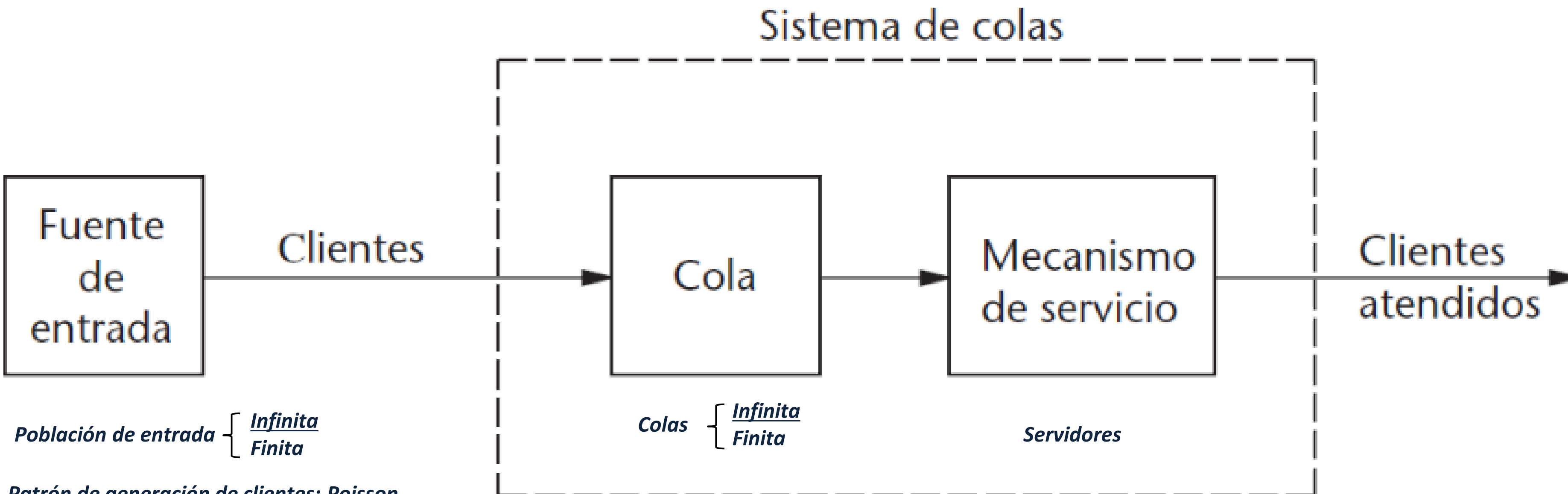
Ver Investigación de Operaciones, Hillier-Lieberman, 9na Edición, Capítulo 17, págs. 708-721.



*7.A. Fundamentos*

***Introducción y presentación. Aplicaciones. Fundamentos y terminología. Estructura básica de los modelos de colas: población de entrada, cola, disciplina de la cola, mecanismo de servicio. Distribuciones Exponencial y de Poisson. Estados: transitorio y estable. Medidas de desempeño en estado estable. Fórmula de Little. Resultados transitorios y resultados estables. Aspecto económico. Notación de Kendall y tipificación de los modelos.***

Fuente: Investigación de Operaciones, Hillier-Lieberman, 9na Edición, Capítulo 17, págs. 708-721.




***Población de entrada*** { ***Infinita*** / ***Finita***

***Colas*** { ***Infinita*** / ***Finita***

***Servidores***

***Patrón de generación de clientes: Poisson***
***Tiempo entre llegadas: Exponencial***

colas infinitas, no necesariamente infinitas
Tiene mas clientes que servicios para abastecer clientes antes de terminar horario laboral.
Encarece producto, horas extras y maq. trabajando horas extras

***Disciplina de la cola*** { ***FIFO*** / ***LIFO*** / ***Aleatoria*** / ***Predefinida (Disciplina General)***

***Tiempo de Servicio*** { ***Exponencial*** / ***Determinística (tiempos constantes)*** / ***Erlang***

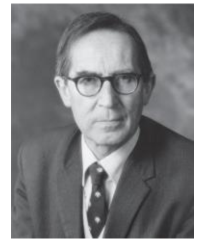
## *7.A. Fundamentos*

***Introducción y presentación. Aplicaciones. Fundamentos y terminología. Estructura básica de los modelos de colas: población de entrada, cola, disciplina de la cola, mecanismo de servicio. Distribuciones Exponencial y de Poisson. Estados: transitorio y estable. Medidas de desempeño en estado estable. Fórmula de Little. Resultados transitorios y resultados estables. Aspecto económico. Notación de Kendall y tipificación de los modelos.***

Ver Investigación de Operaciones, Taha, 9na Edición, Capítulo 18, pags. 593-617.

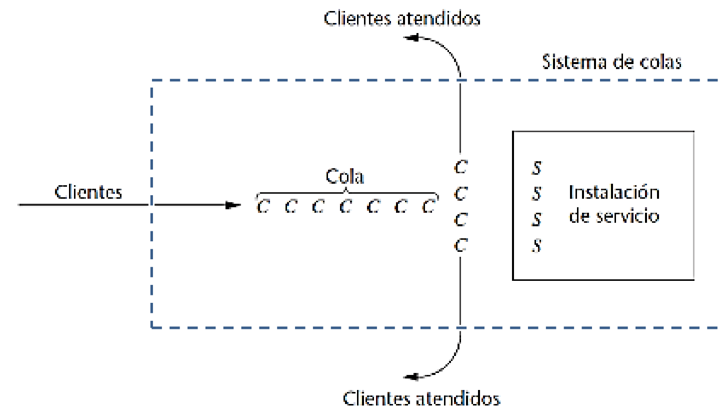
### Notación de Kendall

$$(a/b/c):(d/e/f)$$



**David G. Kendall**

| | |
|---|---|
| *a* | Distribución de las llegadas |
| *b* | Distribución de las salidas (tiempo de servicio) |
| *c* | Cantidad de servidores paralelos |
| *d* | Disciplina de la cola |
| *e* | Número máximo permitido en el sistema (finita o infinita) |
| *f* | Tamaño de la fuente (finita o infinita) |

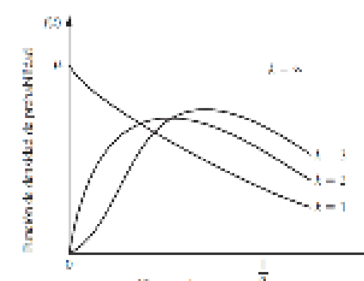



$$(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$$

*Distribuciones:*

- *M: distribución exponencial (markoviana)*
- *D: distribución deterministica (tiempos constantes)*
- *$E_k$: distribución Erlang (parámetro de forma k)*
- *G: distribución general (permite cualquier distribución arbitraria)*

**Agner Krarup Erlang**



**7.A. Fundamentos**

***Introducción y presentación. Aplicaciones. Fundamentos y terminología. Estructura básica de los modelos de colas: población de entrada, cola, disciplina de la cola, mecanismo de servicio. Distribuciones Exponencial y de Poisson. Estados: transitorio y estable. Medidas de desempeño en estado estable. Fórmula de Little. Resultados transitorios y resultados estables. Aspecto económico. Notación de Kendall y tipificación de los modelos.***

Ver Investigación de Operaciones, Hillier-Lieberman, 9na Edición, Capítulo 17, págs. 708-721.

## *Terminología y notación*

Estado del sistema = número de clientes en el sistema.

Longitud de la cola = número de clientes que esperan servicio.

= estado del sistema *menos* número de clientes a quienes se les da el servicio.

$N(t)$ = número de clientes en el sistema de colas en el tiempo $t$ ($t \geq 0$).

$P_n(t)$ = probabilidad de que exactamente $n$ clientes estén en el sistema en el tiempo $t$, dado el número en el tiempo 0.

$s$ = número de servidores (canales de servicio en paralelo) en el sistema de colas.

$\lambda_n$ = tasa media de llegadas (número esperado de llegadas por unidad de tiempo) de nuevos clientes cuando hay $n$ clientes en el sistema.

$\mu_n$ = tasa media de servicio en todo el sistema (número esperado de clientes que completan su servicio por unidad de tiempo) cuando hay $n$ clientes en el sistema. *Nota*: $\mu_n$ representa la tasa *combinada* a la que todos los servidores *ocupados* (aquellos que están sirviendo a un cliente) logran terminar sus servicios.

Tiempo esperado entre llegadas
$1/\lambda$

Tiempo esperado de servicio
$1/\mu$

Factor de utilización
$\rho = \lambda/s\mu$

factor menor a 1, achica colas
=1, colas siguen igual
mayor a 1, se agrandan colas

***7.A. Fundamentos***

***Introducción y presentación. Aplicaciones. Fundamentos y terminología. Estructura básica de los modelos de colas: población de entrada, cola, disciplina de la cola, mecanismo de servicio. Distribuciones Exponencial y de Poisson. Estados: transitorio y estable. Medidas de desempeño en estado estable. Fórmula de Little. Resultados transitorios y resultados estables. Aspecto económico. Notación de Kendall y tipificación de los modelos.***

Ver Investigación de Operaciones, Taha, 9na Edición, Capítulo 18, pags. 593-617.

## *Terminología y notación en condición de estado estable*

| | |
|---|---|
| $P_n$ | *probabilidad de que haya exactamente n clientes en el sistema* |
| $L$ | *número esperado de clientes en el sistema* |
| $L_q$ | *longitud esperada de la cola (excluye los clientes que están siendo atendidos)* $L_q = \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)P_n$ |
| $W$ | *tiempo de espera en el sistema (incluye el tiempo de servicio) para cada cliente* $W = E(W)$ |
| $W_q$ | *tiempo de espera en la cola (excluye el tiempo de servicio) para cada cliente* $W_q = E(W_q)$ |

Fórmula de Little

$L = \lambda.W$

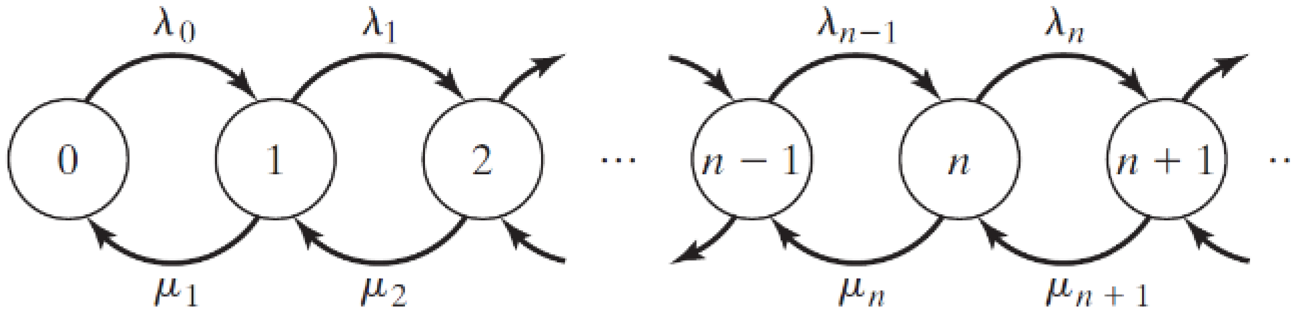
$L_q = \lambda.W_q$

$W = Wq + 1/\mu$

modelo discreto, no continuo

# *Modelo de colas general de poisson*

Ver Investigación de Operaciones, Taha, 9na Edición, Capítulo 18, 606.




en cada n, excepto en 0, tengo 2 formas de llegar

$$\begin{pmatrix}\text{Tasa de flujo de entrada} \\ \text{esperada al estado } n\end{pmatrix} = \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix}\text{Tasa de flujo de salida} \\ \text{esperada del estado } n\end{pmatrix} = (\lambda_n + \mu_n)p_n \qquad (2)$$

(1)=(2) $\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)p_n,\ n = 1, 2, \ldots$ **Ecuación de balanceo**

**Ecuación de balanceo para el estado 0**

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

$$p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right)p_0$$

probabilidad de estado 0, mas facil de calcular q todos

$$p_n = \left(\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_1}\right)p_0,\ n = 1, 2, \ldots$$

**Ecuación de balanceo para el estado 1**

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1)p_1$$

$$p_2 = \left(\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}\right)p_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$