MATA52 - Exercícios da Semana 03

- Grupo: Avenger
- Autores:
    - Lucas dos Santos Lima (Responsável)
        - Responsável pela resolução da questão 3 pesquisando e aplicando conhecimentos utilizados nas questões anteriores, vistos em aula e no livro recomendado da disciplina. Além disso discuti com Monique sobre o fato da resposta que ela forneceu para a questão 2 ser suficiente para responder a 4.
    - Elis Marcela de Souza Alcantara
        - Resolvi a primeira questão, pesquisando e aplicando o método da substituição, gostei bastante da manipulação com a constante d que foi feita em aula e manipulei de outra forma (somando).
    - Bruno de Lucas Santos Barbosa
        - A terceira semana foi um tanto quanto problemática, tivemos dificuldades para marcar o encontro síncrono, então fomos conversando de forma assíncrona e resolvendo os exercícios conforme encontrávamos durante a semana, primordialmente na qui
    - Monique Silva
        - Resolvi a segunda e a quarta questão, com base nos estudos e no conteúdo fornecido durante as aulas da disciplina. Consegui entender e mostrar como a recorrência da segunda questão possui uma suposição falha. Em seguida, na questão quatro, mostrei como alterar a suposição para incluir um termo de ordem inferior faz-se necessário para a provar que a suposição inicial é verdadeira.

Instruções (não apagar)

1. Após criar este notebook, altere o nome do notebook/documentação incluindo o nome do seu grupo. Por exemplo, se você é do grupo Ouro, altere o nome do notebook para "MATA53-Semana02-Ouro.ipynb"
2. Compartilhe este documento com todos os membros do grupo (para participarem da elaboração deste documento). É importante que o notebook utilizado seja o mesmo compartilhado para que os registros de participação e colaboração fiquem salvos no histórico.

3. Incluia o nome completo dos autores na lista de autores que auxiliaram na elaboração deste notebook. Destaque o responsável como sendo o(a) primeiro(a) autor(a). Relatar brevemente a contribuição de cada membro do grupo.
4. Utilize os recursos de blocos de texto e de código para adicionar as suas respostas, sem alterar os blocos de texto e código existente. Não economize, esses blocos são de graça.
5. Ao concluir a atividade, compartilhe o notebook com januario.ufba@gmail.com (dando permisão para edição) e deixando o aviso de notificação marcado, para que eu receba o seu e-mail. Identificar o nome do grupo na mensagem de compartilhamento.

Exercícios

1. Prove que a solução para a recorrência $T(n) = 4T(n/2) + n$ é $O(n^2)$

Resposta 1:

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n = O(n^2)$

Precisamos provar que existem constantes c e n_0 tais que, se $n \geq n_0$, então $T(n) \leq cn^2$.

Sabemos que $T(1) = 1$, então podemos partir dessa igualdade, logo:

$T(1) = 1$

$1 \leq 1^2c$, desde que $c \geq 1$.

Provando que $T(n) \leq cn^2$, se $n \geq 1$.

Hipótese: $T(x) \leq cx^2 \ \forall \ 1 \leq x < n$

Sabemos que $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$. Como $\frac{n}{2} < n$ (sendo $n > 1$), vale por hipótese que $T(\frac{n}{2}) \leq c(\frac{n}{2})^2$.

Simplificando $c(\frac{n}{2})^2 = \frac{cn^2}{4}$

Logo:

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n \leq 4\frac{cn^2}{4} + n = cn^2 + n$

$cn^2 + n \leq cn^2$

Onde $n \leq 0$

Mudando o curso da indução e provando que $T(n) \leq cn^2 + d$

$T(1) = 1$

$1 \leq 1^2c + d$, desde que $c + d \geq 1$.

Provando que $T(n) \leq cn^2 + d$, se $n \geq 1$.

Hipótese: $T(x) \leq cx^2 + d \, \forall \, 1 \leq x < n$

Realizando a substituição:

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n \leq 4(\frac{cn^2}{4} + d) + n = cn^2 + d + n \leq cn^2$

Essa expressão é válida pois $d + n \leq 0$ sempre que d ≤ -n

Então d = -1:

Como $c + d \geq 1$, temos $c = 2$

$T(n) \leq 2n - 1 \leq cn^2$

2. Usando o teorema mestre, é possível mostrar que a solução da recorrência $T(n) = 4T(n/3) + n$ é $T(n) = \theta(n^{log_3 4})$. Prove que o método da substituição com a hipótese $T(n) \leq cn^{\log_3 4}$ não funciona.

Resposta 2:

Considere $T(n) = 4T(\frac{n}{3})^{\log_3 4} + n$

Suposição: $T(n) = \theta(n^{log_3 4})$

Precisamos provar que existem constantes c e n_0 tal que $T(n) \leq cn^{\log_3 4}$ para todo $n \geq n0$, onde c e n_0 são constantes positivas.

$T(n) = 4T(\frac{n}{3})^{\log_3 4} + n$

$\leq 4c(\frac{n}{3})^{\log_3 4} + n$

$= 4c(\frac{n^{\log_3 4}}{3^{\log_3 4}}) + n$

$= 4c(\frac{n^{\log_3 4}}{4}) + n$

$= cn^{\log_3 4} + n$

Conclusão: Não é possível prosseguir, pois anularia a hipotése que $T(n) \leq cn^{\log_3 4}$.

Se a recorrência é dada por $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ existem soluções na forma $\theta(n^{log_b a})$. O teorema mestre afirma uma solução semelhante sob certas condições.

3. Podemos aplicar o teorema mestre na seguinte recorrência? $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \lg n$? Seja sua resposta sim ou não, justifique-a.

Resposta 3

Sim.

Retornando ao teorema mestre, temos que:

Com $a \geq 1, b > 1$ e $k > 0$ para $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + \Theta(n^k)$

Vale que:

1. Se a > b^k, então $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$
2. Se a = b^k, então $T(n) = \Theta(n^K log_b a)$
3. Se a < b^k, então $T(n) = \Theta(n^k)$

Assim, podemos considerar, $a = 4, b = 2ek = 2$ e teremos que:

a = b^k ou 4 = 2^2

E finalmente podemos considerar: T(n) = Θ($n^2 log_2 4$) ou T(n) = Θ($2n^2$) ou T(n) = Θ(n^2)

4. Altere a hipótese utilizada na questão 2 para resolver a recorrência apresentada na mesma.

Resposta 4

Relembrando o resultado encontrado na questão 2:

Vamos supor $T(n) \leq cn^{\log_3 4}$ para todo $n \geq n_0$, onde c e n_0 são constantes positivas.

$T(n) = 4T(\frac{n}{3})^{\log_3 4} + n$

$\leq 4c(\frac{n}{3})^{\log_3 4} + n$

$= 4c(\frac{n^{\log_3 4}}{3^{\log_3 4}}) + n$

$= 4c(\frac{n^{\log_3 4}}{4}) + n$

$= cn^{\log_3 4} + n$

Não é possível prosseguir, pois anularia a hipotése que $T(n) \leq cn^{\log_3 4}$. Com isso, não podemos provar nossa suposição em sua forma exata. Então, precisamos modificar nossa suposição subtraindo um termo de ordem inferior.

Dessa forma:

Vamos assumir $T(n) \leq 4T(\frac{n}{3})^{\log_3 4} + n - dn$ para todo $n \geq n_0$, onde, c, d, e n_0 são constantes positivas.

$T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n \leq 4(c(\frac{n^{\log_3 4}}{3}))$

$= 4c(\frac{n^{\log_3 4}}{3^{\log_3 4}}) - 4(\frac{dn}{3}) + n$

$= 4c(\frac{n^{\log_3 4}}{4}) - 4(\frac{dn}{3}) + n$

$= cn^{\log_3 4} - dn - \frac{dn}{3} + n$

$= cn^{\log_3 4} - dn - (\frac{d}{3})n$

$\leq cn^{\log_3 4} - dn$

O último passo se confirma enquanto $(\frac{d}{3-1})n \geq 0$ Se escolhermos $n_0 = 1$, então precisamos $d \geq 3$