MATA52 - Exercícios da Semana 02

- Grupo: Paládio
- Autores:
    - Elis Marcela de Souza Alcantara (Responsável)
        - Convidei os membros para uma primeira tentativa de realizar a lista na quarta-feira (16/03) e todos compareceram, avançamos bastante e respondemos juntos três questões. Marquei mais um encontro na sexta-feira (18/03) e novamente todos compareceram e finalizamos a questão que restava.
    - Bruno de Lucas Barbosa
        - Presente em todos os encontros, auxiliou em todas as questões e durante a pesquisa e esclarecimento de dúvidas.
    - Lucas dos Santos Lima
        - Presente em todos os encontros, auxiliou em todas as questões e durante a pesquisa e esclarecimento de dúvidas.
    - Monique Silva
        - Presente em todos os encontros, auxiliou em todas as questões e durante a pesquisa e esclarecimento de dúvidas.

Instruções (não apagar)

1. Após criar este notebook, altere o nome do notebook/documentação incluindo o nome do seu grupo. Por exemplo, se você é do grupo Ouro, altere o nome do notebook para "MATA53-Semana02-Ouro.ipynb"
2. Compartilhe este documento com todos os membros do grupo (para participarem da elaboração deste documento). É importante que o notebook utilizado seja o mesmo compartilhado para que os registros de participação e colaboração fiquem salvos no histórico.
3. Incluia o nome completo dos autores na lista de autores que auxiliaram na elaboração deste notebook. Destaque o responsável como sendo o(a) primeiro(a) autor(a). Relatar brevemente a contribuição de cada membro do grupo.
4. Utilize os recursos de blocos de texto e de código para adicionar as suas respostas, sem alterar os blocos de texto e código existente. Não economize, esses blocos são de graça.

5. Ao concluir a atividade, compartilhe o notebook com januario.ufba@gmail.com (dando permissão para edição) e deixando o aviso de notificação marcado, para que eu receba o seu e-mail. Identificar o nome do grupo na mensagem de compartilhamento.

Exercícios

1. Aplique o método da substituição para mostrar que $T(n) = O(g(n))$ para a relação $T(n) = T(n-1) + n$ e $g(n) = n^2$.

Resposta 1:

$T(n) = O(n^2)$, visto que $g(n) = n^2$

Assim, sabemos que: $T(n) \leq cn^2$

Aplicando a substituição:

$T(n) = c(n-1)^2 + n$

Resolvendo a equação, temos:

$T(n) = cn^2 - 2cn + c + n$

Eliminando as constantes, temos:

$T(n) = n^2 - n + n$

Agora, tanto aplicando a propriedade dos termos dominantes quanto somente realizando a subtração, encontramos o resultado:

$T(n) = n^2$, que é o equivalente à função g(n), portanto:

$T(n) = g(n)$ e as duas possuirão complexidade $O(g(n))$ ou $O(n^2)$.

2. Mostre a árvore de recursão e encontre os limites assintóticos da relação de recorrência

$T(n) = 3T(n/4) + n$. Para verificar a correção da sua

Resposta 2:

Recorrência $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n$

Fórmula: $T(n) = a\frac{n}{b} + f(n)$

Árvore de recursão:

```
                    --------------------- n ----------------------
                  /                       |                        \
          -- T(n/4) --              -- T(n/4) --              -- T(n/4) --
         /      |      \           /      |      \           /      |      \
  T(n/16) T(n/16) T(n/16)  T(n/16) T(n/16) T(n/16)  T(n/16) T(n/16) T(n/16)
  .          .        .        .         .        .        .         .         .
  .          .        .        .         .        .        .         .         .
  .          .        .        .         .        .        .         .         .
  T(1)      T(1)     T(1)     T(1)      T(1)     T(1)     T(1)      T(1)    T(1)
```

A árvore de recursão é T(n), faz três chamadas cada de tamanho n/4, então o próximo nível será T(n/4) e cada uma dessas também faz três chamadas com tamanho n/16, como é demostrado no exemplo acima.

Em cada um desses níveis, temos n trabalhos. A raiz é n e seus filhos são $3(\frac{n}{4})$, então $9(\frac{n}{16})$, e assim por diante.

Podemos então perceber um padrão na árvore recursiva, a medida que aumenta o nível, aumenta também o custo corresponde ao somatório das folhas em cada nível.

Em profundidade $i = 0, 1, 2, \ldots, lgn$ da árvore tem 3^i nós, de custo $n/4^i$

Custo:

$n * \sum_{i=0}^{\log_4^{n-1}} (\frac{3}{4})^i$

Essa série converge a 4n, então podemos descobrir o trabalho total realizado.

$3^{\log_4 n} * \Theta(1) = \Theta(n^{\log_4 3}) + 4n = O(n) + 4n$

Como 4n é uma constante, podemos concluir que sua ordem é **O(n)**.

$T(n) = O(n)$

Verificação usando método da substituição:

Recorrência $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n$

Suposição: $T(n) = O(n)$

Vamos supor que $T(n) \leq cn^{\log_4 3} - dn$, para todo n ≥ n_0, onde c, d e n são constantes positivas.

$T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n$

$\leq 3(c(\frac{n}{4})^{lg4^3} - (\frac{dn}{4})) + n$

$= 3c(\frac{n^{\log_4 3}}{4\log_4 3}) - 3(\frac{dn}{4})) + n$

$= cn^{\log_4 3} - dn - \frac{dn}{4} + n$

$= cn^{\log_4 3} - dn - (\frac{d}{4} - 1)n$

$\leq cn^{\log_4 3} - dn$

O último passo se confirma enquanto $(\frac{d}{4} - 1)n \geq 0$

Se escolhermos $n_0 = 1$ entãoa hipótese funciona para qualquer $d \geq 4$

3. Usando o método mestre, resolva a recorrência $T(n) = 4T(n/2) + n$

Resposta 3:

Teorema Mestre:

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes e seja $f(n)$ uma função. Para $T(n) = aT(n/b) + f(n)$.

1. se $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;
2. se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} logn)$;
3. se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$ e para n suficientemente grande temos $a * f(n/b) \leq c * f(n)$ para alguma constante $c < 1$, então $T(n) = \Theta(f(n))$.

Observamos na questão que a = 4, b = 2 e f(n) é uma função assintoticamente positiva, logo essas condições são supridas.

Resolvendo a recorrência, através da comparação com a expressão $n^{\log_b a}$:

$n^{\log_b a}$

Substituindo a = 4 e b = 2

$n^{\log_2 4}$

Resolvendo o $\log_2 4$

$\log_2 4$ = 2

Chegamos ao seguinte resultado:

n^2

Podemos ver que a partir desse resultado, o primeiro caso do Teorema Mestre é suprido.

4. Resolva a formulação recursiva $T(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + \Theta(n)$

Resposta 4:

$n*(T(n)) = n*(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + \Theta(n))$

$nT(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n\Theta(n)$

$nT(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n\Theta(n)$

Caso utilizássemos o número (n - 1), encontraríamos de forma semelhante:

$(n-1)T(n-1) = \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + (n-1)\Theta(n)$

Agora subtraindo essa última da primeira, teríamos:

$nT(n) - (n-1)T(n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n\Theta(n) - [\sum_{i=0}^{n-2} T(i) + n\Theta(n) - \Theta(n)]$

$nT(n) - (n-1)T(n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n\Theta(n) - \sum_{i=0}^{n-2} T(i) - n\Theta(n)$

Agora consideramos nΘ(n) = nΘ(n - 1), podemos eliminálos pois estamos subtraindo:

$nT(n) - (n-1)T(n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) - \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + \Theta(n)$

Continuando:

$nT(n) - nT(n-1) + T(n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) - \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + \Theta(n)$

Agora relembramos que:

$\sum_{i=0}^{n-1} T(i) = \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + T(n-1) + \Theta(n)$

Substituindo esse valor:

$nT(n) - nT(n-1) + T(n-1) = \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + T(n-1) - \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + \Theta(n)$

Temos:

$nT(n) - nT(n-1) + T(n-1) = T(n-1) + \Theta(n)$

Continuando:

$$nT(n) - nT(n-1) = T(n-1) - T(n-1) + \Theta(n)$$

E dividindo cada lado por n, encontramos:

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

Agora imaginando como a situação decorreria brutalmente, teríamos:

O primeiro passo custaria: Θ(n) ou n

O segundo passo custaria: Θ(n - 1) ou n - 1

O terceiro passo custaria: Θ(n - 2) ou n - 2

O quarto passo custaria: Θ(n - 3) ou n - 3

. . .

E assim sucessivamente até 0.

Então utilizando a soma de P.A. , teremos uma função:

$\frac{n(n+1)}{2}$

Equivalente a:

$\frac{(n^2+n)}{2}$, uma função de Ordem n^2 ou $\Theta(n^2)$