ESPACES VECTORIELS

COMBINAISONS LINÉAIRES, CARACTÉRISATION ET INTERSECTION D'ESPACE VECTORIEL

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Combinaisons linéaires

Définition 1 *Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ des vecteurs de E. On dit que $x \in E$ est **combinaison linéaire** de x_1, x_2,..., x_n s'il existe $(\lambda_1,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que*

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

2 Caractérisation d'un espace vectoriel

Théorème 1 *Soit F une partie non vide de E. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si pour tout $(u_1, u_2) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a*

$$\lambda u_1 + \mu u_2 \in F.$$

Autrement dit si et seulement si toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient à F.

3 Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Théorème 2 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*