MÉCANIQUE DU POINT

PH111

Cours et Exercices

2021-2022

Enseignants :

- Grégory Huber (gregory.huber@ipsa.fr)
- Roxana Perrier (ioana-roxana.perrier@ipsa.fr)
- Elisa Fabiani (elisa.fabiani@ipsa.fr)

Grégory Huber - Fabrice Lamareille - Mélanie Le Gac

Organisation du module

- Le module de PH111 est divisé en 4 grandes parties : Rappels, Repérage d'un point, Mécanique du point en référentiel galiléen, Oscillateurs.
- Chaque chapitre du cours (sauf la partie 1 et quelques exceptions) suivra l'organisation ci-dessous :
  - La première séance (mardi) sera consacrée à l'**appropriation du cours** : exercice de cours (démonstration ou application directe du cours) + travail en groupe que l'enseignant vous distribuera au moment de la séance et qui sera noté.
  - La deuxième séance (vendredi) sera consacrée aux exercices de **travaux dirigés** (TD) donnés dans ce fascicule. Les TD auront une durée variable suivant les chapitres (voir planning ci-dessous)
- Vous serez évalués par un **DS de 2 heures** (à la fin de la deuxième partie), un **partiel de 2 heures** portant sur l'ensemble du programme (à la fin du semestre), un **mini-projet**, des **TP,** des **activités de groupes**, et **des interrogations surprises**.
- Il vous est explicitement demandé de veiller à **préparer votre cerveau à l'apprentissage** en lisant le cours et en regardant les Mimos **avant** la séance d'appropriation du chapitre correspondant. Le non-respect de cette règle aboutirait à un mauvais apprentissage à long terme et très probablement à de mauvaises notes.
- Pour les mêmes raisons, il est vous est demandé de ne pas réviser les différents contrôles et examens exclusivement au dernier moment, mais de **répartir ces révisions dans le temps** en utilisant toutes les possibilités que votre emploi du temps laisse à votre disposition.
- Si vous souhaitez de l'aide, vous pouvez nous contacter à tout moment dans nos bureaux ou à l'aide de nos adresses email :
  - Reponsable de module : Grégory Huber (gregory.huber@ipsa.fr)
  - Enseignants : Roxana Perrier (ioana-roxana.perrier@ipsa.fr), Elisa Fabiani (elisa.fabiani@ipsa.fr)
  - Responsable de département : Mélanie Le Gac (melanie.legac@ipsa.fr).

Planning des séances

Les séances d'appropriation du cours sont désignées par le titre du chapitre correspondant.

Semaine	Séance 1	Séance 2
PARTIE 1 : Rappels		
PARTIE 2 : Repérage d'un point		
40	Coordonnées cartésiennes et cylindriques	TD n°1
41	Référentiels et dérivées de vecteurs	TD n°2
PARTIE 3 : Mécanique du point en référentiel galiléen		
42	Cinématique du point	TD n°3
43	Dynamique du point	TD n°4
44	VACANCES	
45	TD n°4	TD n°4
46	DS	
47	MINI-PROJET	
PARTIE 4 : Oscillateurs		
48	Equilibre et forces de rappels	TD n°5
49	Oscillateurs harmoniques	MINI-PROJET
50	TD n°6	TD n°6
51	VACANCES	
52	VACANCES	
1	Oscillateurs amortis	TD n°7
2	Oscillateurs forcés	TD n°8

Table des matières

Première partie

Cours

Chapitre 1

Rappels

I Analyse dimensionnelle

Mimos : « Dimensions Homogénéité Unités », « Analyse dimensionnelle »

1 Grandeurs physiques et dimensions

Les **grandeurs physiques** caractérisent les propriétés et/ou l'état d'un objet (ex : longueur d'une corde, vitesse d'une voiture, masse d'une bille, etc.).
La **dimension** d'une grandeur physique correspond à sa nature, indépendamment de l'objet étudié (ex : longueur, vitesse, masse, etc.).
En mécanique, les trois **dimensions fondamentales** sont :

- **La masse**, notée M.
- **La longueur**, notée L.
- **Le temps**, noté T.

On définit en physique quatre autres dimensions fondamentales qui ne sont pas utiles en mécanique :

- La température, notée θ.
- La quantité de matière, notée N.
- L'intensité électrique, notée I.
- L'intensité lumineuse, notée J.

2 Équation aux dimensions

En mécanique, toutes les grandeurs ont pour dimension soit l'une des trois dimensions fondamentales M, L ou T, soit un produit ou un quotient de ces dernières (ex : une vitesse est une longueur divisée par un temps).
La formule donnant la dimension d'une grandeur s'appelle l'**équation aux dimensions :**

$$\boxed{[x] = \mathrm{M}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta}\mathrm{T}^{\gamma}}$$

- x est la grandeur physique dont on cherche la dimension,
- α, β et γ sont des entiers positifs ou négatifs. Si ces trois entiers sont nuls, la grandeur est **sans dimension**.

On retrouve généralement l'équation aux dimensions en se basant sur une équation connue reliant la grandeur dont on cherche la dimension à d'autres grandeurs plus simples. Par exemple, pour trouver la dimension d'une énergie on peut utiliser la définition de l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$[E_c] = [m] \times [v]^2 = \mathrm{M} \times \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)^2 = \mathrm{ML^2T^{-2}}$$

Vérifier l'**homogénéïté** d'une formule est une étape importante consistant à vérifier :

- que les grandeurs dont on fait la somme sont toutes de la même dimension,
- que les grandeurs de part et d'autre du signe égal sont de la même dimension,
- que les grandeurs intervenant dans une fonction mathématiques (ex : cosinus, sinus, exponentiel, etc.) sont sans dimension.

3 Système d'unité

Mesurer une grandeur physique, c'est lui attribuer une **valeur numérique**. Cependant cette mesure n'est jamais qu'une comparaison entre la grandeur considérée et un étalon de référence. Par exemple, quand on mesure une longueur en mètres, on compte le nombre de fois que l'étalon mètre est présent dans la longueur considérée.

Un système d'unité associe à chaque dimension (fondamentale ou non) un étalon appelé **unité**. Les unités de base du **système international** sont :

- **La seconde**, de symbole s, pour la dimension temps.
- **Le mètre**, de symbole m, pour la dimension longueur.
- **Le kilogramme**, de symbole kg, pour la dimension masse.

Dans ce cours de physique, nous utiliserons également des unités associées à des combinaisons de dimensions fondamentales :

- **Le Joule**, de symbole J, pour la dimension énergie $[E] = \mathrm{ML^2T^{-2}}$.
- **Le Watt**, de symbole W, pour la dimension puissance $[P] = \mathrm{ML^2T^{-3}}$.
- **Le Newton**, de symbole N, pour la dimension force $[F] = \mathrm{MLT^{-2}}$.

L'équation aux dimensions permet de retrouver la correspondance entre l'unité usuelle d'une grandeur et les unités de base du système (ex : $1\mathrm{J} = 1\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$).

On peut passer d'un système d'unité à un autre en appliquant l'équation aux dimensions aux facteurs de conversion des unités de base. Par exemple, imaginons l'unité usuelle d'énergie dans le système d'unité « CMT » basé sur le centimètre (10^{-2}m), la minute (60s) et la tonne (1000kg). On peut calculer la valeur de cette unité (que nous appelerons JCMT) par rapport à l'unité usuelle dans le système international (le Joule) en appliquant :

$$1\mathrm{JCMT} = 1000[\mathrm{M}] \times \left(10^{-2}\right)^2 [\mathrm{L}^2] \times (60)^{-2} [\mathrm{T}^{-2}] = 2,7 \cdot 10^{-5}\mathrm{J}$$

En conséquence on pourra aussi écrire la conversion :

$$E_{S.I.}(\text{en Joules}) = E_{CMT}(\text{en JCMT}) \times 2.7 \cdot 10^{-5}$$

NB Les grandeurs sans dimension ne sont pas pour autant sans unité. Par exemple un angle n'a pas de dimension, mais peut s'exprimer en radians (système international), en degrés ou encore en grades. Le pourcent est aussi une unité associée à un nombre sans dimension.

NB Le symbole des unités qui sont des noms de personnes commencent par une majuscule, sinon par une minuscule.

II Incertitudes

Mimos : « Ordre de grandeur - Mesures - Incertitudes », « Calcul d'incertitudes »

1 Erreurs de mesure

Lors d'une mesure, il existe toujours une erreur entre la **valeur mesurée** et la **valeur exacte** d'une grandeur. Cette erreur dépend :

- de la précision des appareils de mesure,
- de la précision de l'expérimentateur,
- de variations aléatoires (connues ou non) des conditions de l'expérience.

L'erreur absolue ou **incertitude absolue** Δx d'une grandeur x est l'écart entre la valeur mesurée et la valeur exacte (ou théorique) :

$$\Delta x = |x_m - x_e|$$

Dans la majorité des expériences, on ignore cependant la valeur exacte de la grandeur mesurée. De plus, on fait rarement une seule mesure. On estime couramment :

- La valeur mesurée comme la **moyenne** des différentes mesures x_i (N mesures) :

$$x_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

- L'incertitude absolue comme **l'écart-type** :

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_m)^2}$$

NB On peut aussi calculer l'incertitude absolue sur la valeur moyenne, qui donne la précision avec laquelle ce nombre est calculé indépendamment des variations aléatoires de l'expérience (aussi appelées la *dispersion*) :

$$\Delta\left(x_m\right) = \frac{\Delta x}{\sqrt{N}}$$

On peut voir aisément sur un graphique avec une certaine dispersion que si on calcule la moyenne avec un petit nombre de points, cette dernière sera potentiellement très éloignée de sa valeur réelle. Il faut donc un nombre de mesures suffisant pour calculer la valeur moyenne avec une précision satisfaisante, et ce d'autant plus que l'incertitude absolue est grande. On note qu'il existe aussi une incertitude sur l'écart-type $\Delta(\Delta x)$ que nous ne développerons pas.

2 Calculs d'incertitudes

L'**incertitude relative** d'une mesure est le rapport entre l'**incertitude absolue** et la **valeur mesurée** (en valeur absolue). Elle se note :

$$\frac{\Delta x}{x}$$

Attention cependant l'incertitude absolue ne se calcule pas en divisant l'écart-type par x (ce qui n'aurait aucun sens puisque x peut prendre différentes valeurs selon la mesure). De plus, l'incertitude est toujours un nombre positif. La formule exacte est donc :

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x}{|x_m|}$$

L'erreur de mesure étant de la même dimension que la mesure elle-même, l'incertitude relative est un nombre **sans dimension**. On peut choisir de l'exprimer sans unité, ou avec une unité comme le pourcent (%) par exemple.

Lorsqu'une grandeur est la **somme ou la soustraction** de deux autres grandeurs, les **incertitudes absolues s'ajoutent** :

$$\boxed{\Delta(a+b) = \Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b}$$

Lorsqu'une grandeur est le **produit ou le quotient** de deux autres grandeurs, les **incertitudes relatives s'ajoutent** :

$$\boxed{\frac{\Delta(a \times b)}{a \times b} = \frac{\Delta(a/b)}{a/b} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}}$$

NB Les incertitudes sont toujours des nombres positifs et on ne soustrait jamais des incertitudes entre elles.

On peut aussi calculer l'incertitude absolue à l'aide de la méthode des dérivées partielles. Si on connaît la formule reliant la grandeur x aux grandeurs a, b, c, etc., alors :

$$\boxed{\Delta x = \left|\frac{\partial x}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial x}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial x}{\partial c}\right| \Delta c + \text{etc.}}$$

3 Ordres de grandeur

On écrit couramment le résultat d'une expérience sous la forme :

$$x = x_m \pm \Delta x$$

Dans cette expression, on arrondira la valeur mesurée à l'ordre de grandeur de l'incertitude absolue. Si par exemple on mesure une longueur avec une incertitude absolue de l'ordre du centimètre, la valeur mesurée, quel que soit son propre ordre de grandeur, sera arrondie au centimètre.

$$x_1 = 5\text{cm} \pm 1\text{cm}$$

$$x_2 = 2,05\text{m} \pm 1\text{cm}$$

$$x_3 = 3,86345\text{km} \pm 1\text{cm}$$

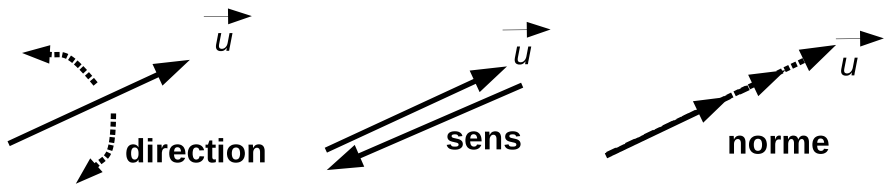
Le nombre de chiffres significatifs dépend donc du rapport entre la valeur mesurée et son incertitude absolue, autrement dit de l'incertitude relative. Plus l'incertitude relative est petite, plus on pourra conserver de chiffres significatifs. De plus, différentes grandeurs n'ayant pas forcément la même incertitude relative dans un même problème physique, celles-ci n'auront pas forcément le même nombre de chiffres significatifs.

III Vecteurs

1 Définitions

Un vecteur est un objet mathématiques caractérisé par :

- une **direction**,
- un **sens**,
- une **norme**.



En physique un vecteur peut représenter un **déplacement** entre deux points. Par exemple $\overrightarrow{AB}$ représente le déplacement du point A vers le point B, ou encore la **position** du point B par rapport à A. Mais on utilise aussi les vecteurs pour représenter d'autres grandeurs ayant une direction et un sens : la **vitesse**, **l'accélération**, une **force**, ... La dimension du vecteur est celle de la grandeur qu'il représente.

Dans l'espace à 3 dimensions, on peut décomposer tout vecteur sous la forme d'une combinaison linéaire de trois vecteurs de **base** :

$$\boxed{\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}}$$

- $\vec{u}$ est le vecteur que l'on veut définir
- $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les trois vecteurs de base
- u_x, u_y et u_z sont appelées les **composantes** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Les composantes et la norme d'un vecteur sont des **grandeurs scalaires**, c'est-à-dire qu'il s'agit uniquement de *nombres sans direction ni sens*.

Lorsque la base utilisée est implicite, on peut également écrire les composantes d'un vecteur sous la forme verticale :

$$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}}$$

2 Propriétés particulières

- Deux vecteurs sont dits **colinéaires** si leurs directions sont les mêmes (mais pas forcément leur sens, ni leur norme). On note : $\vec{u} \mathbin{/\!/} \vec{v}$.
- Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** si leurs directions respectives forment un angle droit. On note : $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Un vecteur est dit **unitaire** si sa norme vaut 1. *Il est à noter que cette définition dépend du système d'unité choisi.*
- On peut toujours obtenir un vecteur unitaire en le divisant par sa propre norme :

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \text{ est un vecteur unitaire}$$

- Un vecteur **nul** est un vecteur dont les trois composantes ainsi que sa norme sont nuls :

$$\left\| \vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 0$$

- Une base est dite **orthonormée** si tous ses vecteurs sont unitaires et orthogonaux deux à deux. Dans la suite de ce cours, nous travaillerons exclusivement avec des bases orthonormées.

Si la base est orthonormée, on peut alors calculer la **norme** d'un vecteur (notée $\|\vec{u}\|$) comme la *racine carrée de la somme de ses composantes au carré* :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}$$

La norme est une grandeur scalaire.

Un exemple courant de base orthonormée est la base **cartésienne** (voir aussi définition plus complète dans le chapitre « Coordonnées cartésiennes et cylindriques »). Dans cette base on peut définir un **vecteur déplacement** entre deux points comme la *différence entre les coordonnées des deux points* :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Il faudra se souvenir que cette définition <u>n'est pas valable</u> pour les autres types de bases non-cartésiennes que nous étudierons dans ce cours.

3 Opérations simples

La **somme** de deux vecteurs est égale à la somme de leurs composantes :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \vec{w} \begin{pmatrix} w_x = u_x + v_x \\ w_y = u_y + v_y \\ w_z = u_z + v_z \end{pmatrix}$$

Le produit d'un vecteur par une grandeur scalaire est égal au produit de ses composantes par cette même grandeur :

$$\lambda \times \vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \vec{v} \begin{pmatrix} v_x = \lambda u_x \\ v_y = \lambda u_y \\ v_z = \lambda u_z \end{pmatrix}$$

On remarquera que $\lambda \times \vec{u}$ est colinéaire à $\vec{u}$. Les vecteurs sont par ailleurs dans le même sens ou de sens opposé selon que λ est positif ou négatif.

Le **produit scalaire** (noté $\cdot$) de deux vecteurs est une **grandeur scalaire** égale au *produit de leurs normes par le cosinus de l'angle entre leurs deux directions* :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})}$$

- $\widehat{\vec{u};\vec{v}}$ est l'angle entre les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On remarque que deux vecteurs **orthogonaux** ont forcément un produit scalaire nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi/2) = 0$$

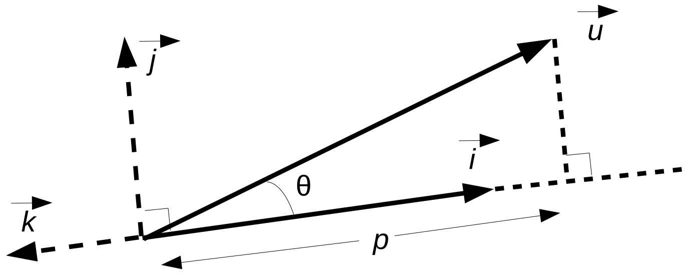
En base **orthonormée**, le produit scalaire se calcule aussi comme *la somme des produits de leurs composantes* :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}$$

IV Calcul vectoriel

1 Projections de vecteurs

La **projection** d'un vecteur consiste à calculer la longueur projetée d'un vecteur sur un autre vecteur. On utilisera pour cela les relations trigonométriques du triangle rectangle. On souhaite par exemple projeter le vecteur $\vec{u}$ par rapport au vecteur $\vec{i}$ tels que définis ci-dessous :



On note $P_{\vec{i}}(\vec{u})$ la projection cherchée (notée p sur le schéma). Dans le triangle rectangle dessiné, on a la relation :

$$\cos\theta = \frac{p}{\|\vec{u}\|}$$

D'où

$$\boxed{P_{\vec{i}}(\vec{u}) = p = \|\vec{u}\|\cos\theta}$$

Cette formule reste vraie tant que l'angle θ est l'**angle aigu** entre le vecteur projeté ($\vec{u}$) et le vecteur de projection ($\vec{i}$). Mais on peut aussi l'utiliser pour projeter le vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{j}$ à condition qu'il soit **orthogonal** à $\vec{i}$ (voir schéma). En effet, dans ces conditions, l'angle entre $\vec{u}$et $\vec{j}$ vaut $\pi/2-\theta$, ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{P_{\vec{j}}(\vec{u}) = \|\vec{u}\|\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \|\vec{u}\|\sin(\theta)}$$

Il est aussi possible de projeter le vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{k}$ colinéaire et de de **sens opposé** à $\vec{i}$ (voir schéma) :

$$\boxed{P_{\vec{k}}(\vec{u}) = -P_{\vec{i}}(\vec{u}) = -\|\vec{u}\|\cos\theta}$$

Autrement dit pour projeter un vecteur sur n'importe quel autre vecteur, la méthode consiste :

- à identifier l'angle aigu entre les deux vecteurs, dans ce cas la projection est proportionnelle au cosinus de cet angle,
- **ou** à identifier son complémentaire ($\pi/2-\theta$), dans ce cas la projection est proportionnelle au sinus de cet angle,
- **ou** à projeter sur le vecteur de sens opposé à celui désiré, puis d'ajouter un signe $-$ au résultat.

On remarque que la projection est liée au produit scalaire. En effet :

$$P_{\vec{i}}(\vec{u}) = \|\vec{u}\|\cos\theta = \frac{\left\|\vec{i}\right\| \times \|\vec{u}\|\cos\theta}{\left\|\vec{i}\right\|} = \boxed{\frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{\left\|\vec{i}\right\|}}$$

Dans un espace à trois dimensions, **tout vecteur** peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de **deux autres vecteurs <u>unitaires</u>**. Les coefficients de cette combinaison ne sont autres que les projections du premier vecteur sur les deux autres. Ainsi :

$$\vec{u} = P_{\vec{i}}(\vec{u}) \times \frac{\vec{i}}{\left\|\vec{i}\right\|} + P_{\vec{j}}(\vec{u}) \times \frac{\vec{j}}{\left\|\vec{j}\right\|} = (\vec{u}\cdot\vec{i})\frac{\vec{i}}{\left\|\vec{i}\right\|^2} + (\vec{u}\cdot\vec{j})\frac{\vec{j}}{\left\|\vec{j}\right\|^2}$$

2 Produit vectoriel

Le **produit vectoriel** (noté $\wedge$) de deux vecteurs est un **vecteur** dont la norme est égale au *produit de leurs normes par le sinus de l'angle entre leurs deux directions* :

$$\boxed{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \left|\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})\right|}$$

On remarque que deux vecteurs **colinéaires** ont forcément un produit vectoriel nul :

$$\vec{u} \,/\!\!/\, \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(0) = 0$$

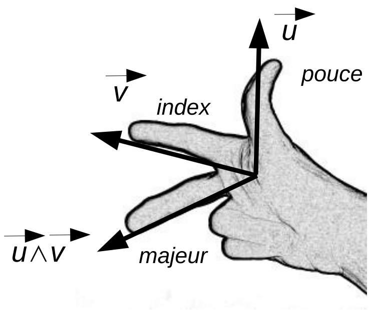
Par ailleurs, la direction du produit vectoriel est normale au plan formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, autrement dit **le produit vectoriel de deux vecteurs est toujours orthogonal à ces deux vecteurs à la fois**.

$$(\vec{u}\wedge\vec{v}) \perp \vec{u} \ ; \ (\vec{u}\wedge\vec{v}) \perp \vec{v}$$

ou écrit autrement :

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{u} = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{v} = 0$$

Le sens du produit vectoriel est tel que la base $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ soit **directe**, c'est-à-dire qu'elle obéit à la **règle des trois doigts de la main <u>droite</u>** telle que schématisée ci-dessous :



Une autre façon de définir cette règle est la suivante :

- si l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ va dans le sens trigonométrique, alors leur produit vectoriel vient vers nous,
- si l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ va dans le sens horaire, alors leur produit vectoriel part dans le sens opposé.

En vertu de cette règle, le produit vectoriel n'est pas commutatif. En effet on pourra écrire :

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}}$$

Dans n'importe quelle base **orthonormée**, il existe une façon commode de calculer le produit vectoriel avec les composantes des deux vecteurs et leur notation verticale :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{u_x} \\ u_y \\ u_z \\ u_x \\ u_y \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \circlearrowright \\ \circlearrowright \\ \circlearrowright \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \cancel{v_x} \\ v_y \\ v_z \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}}$$

La méthode consiste à recopier les deux premières lignes en bas, puis à faire le produit en croix (désigné ici par le symbole $\circlearrowright$) en commençant par la seconde ligne.

Chapitre 2

Repérage d'un point

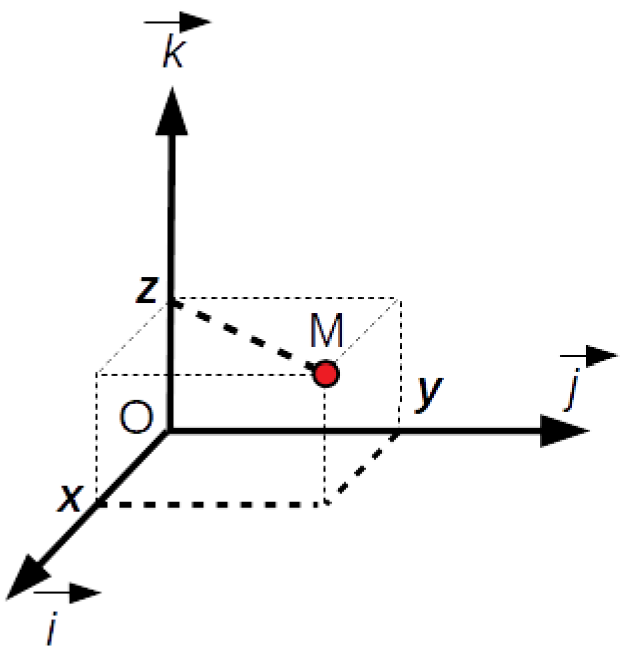
I Repères cartésien, cylindrique et sphérique

Mimos : « Grandeurs cinématiques de base », « Systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques », « Systèmes de coordonnées sphériques »

1 Définitions

- Une **base** est un ensemble de trois vecteurs définissant trois directions dans l'espace. On utilise couramment, mais pas obligatoirement, la base **orthonormée** munie de vecteurs unitaires et tous orthogonaux entre eux.
- Les **composantes** d'un vecteur sont trois nombres permettant de définir celui-ci proportionnellement aux trois vecteurs de la base choisie. *Les composantes d'un vecteur dépendent donc de la base choisie.*
- Un **repère** est défini par une base et un **point d'origine.**
- Les **coordonnées** sont trois nombres permettant de retrouver la **position relative** de n'importe quel point dans l'espace, par rapport au point d'origine et en fonction des vecteurs de la base. *Les coordonnées d'un point dépendent donc du repère choisi.*
- Un **référentiel** est défini par un repère auquel on ajoute une horloge et une origine des temps.

2 Repère cartésien



La base cartésienne orthonormée est matérialisée par trois vecteurs unitaires et orthogonaux **indépendants du point étudié**. On la note couramment $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ou $(\overrightarrow{u_x}; \overrightarrow{u_y}; \overrightarrow{u_z})$. Si on note O son point d'origine, le repère cartésien sera alors noté $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ou $(O; \overrightarrow{u_x}; \overrightarrow{u_y}; \overrightarrow{u_z})$.

On lui associe les **coordonnées cartésiennes**, notées couramment $(x; y; z)$, telles que les coordonnées d'un point M soient aussi les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$\boxed{M(x; y; z) \iff \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées dans la base cartésienne, **comme dans toute base orthonormée** :

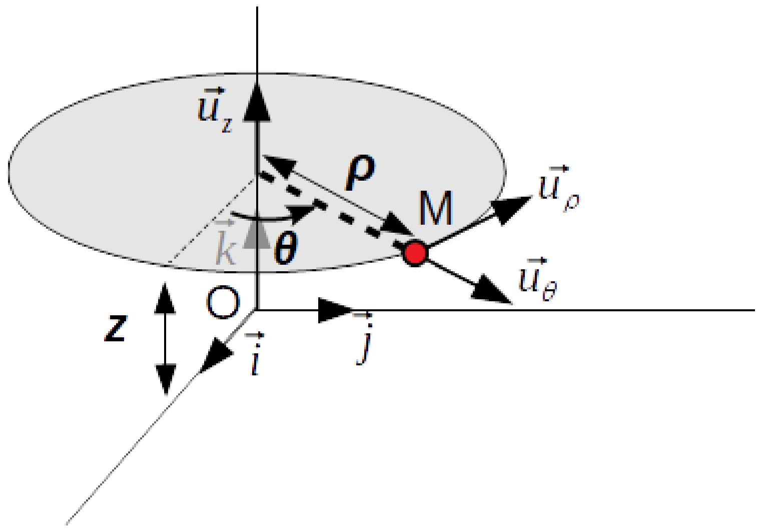
$$\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

On peut en déduire une expression des coordonnées cartésiennes à partir du produit scalaire :

$$\begin{cases} x = & \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} \\ y = & \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} \\ z = & \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} \end{cases}$$

3 Repère cylindrique



La base cylindrique orthonormée est matérialisée par trois vecteurs unitaires et orthogonaux **dont deux dépendent du point étudié.** On la note couramment $(\overrightarrow{u_\rho}; \overrightarrow{u_\theta}; \overrightarrow{u_z})$. Si on note O son point d'origine, le repère cylindrique sera alors noté $(O; \overrightarrow{u_\rho}; \overrightarrow{u_\theta}; \overrightarrow{u_z})$.

On lui associe les **coordonnées cylindriques**, notées couramment $(\rho; \theta; z)$, telles que les coordonnées d'un point M représentent :

- La distance ρ du point M à l'axe (Oz).
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
- L'angle θ entre l'axe (Ox) et la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le plan horizontal (Oxy).
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \text{ ou } \cos\theta = \frac{x}{\rho} \text{ ou } \sin\theta = \frac{y}{\rho}$$
- L'altitude z du point M par rapport au plan horizontal (Oxy).
$$z = z$$

NB Les coordonnées ρ et θ du repère cylindrique sont également les coordonnées polaires de la projection du point M dans le plan (Oxy).

La base cylindrique est définie telle que deux des coordonnées cylindriques soient également les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$\boxed{M(\rho;\theta;z) \iff \overrightarrow{OM} = \rho \cdot \overrightarrow{u_\rho} + z \cdot \overrightarrow{u_z}}$$

ou encore avec le produit scalaire :

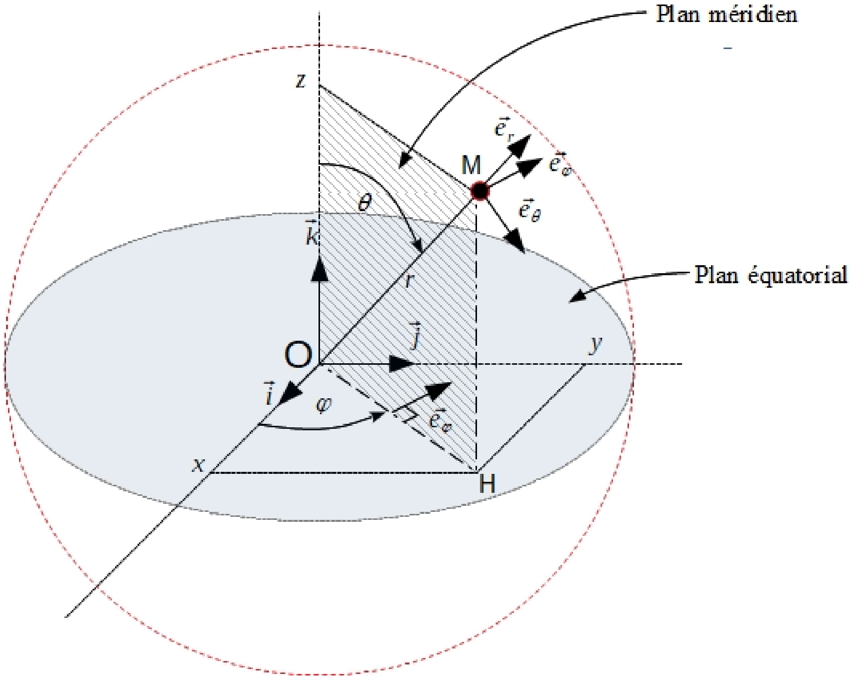
$$\begin{cases} \rho = & \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_\rho} \\ z = & \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_z} \end{cases}$$

On notera bien que le vecteur de base $\overrightarrow{u_\theta}$ **n'est pas utilisé** pour définir le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et que la coordonnée θ **n'est pas une de ses composantes**.

Le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ est défini comme orthogonal à $\overrightarrow{u_\rho}$ et $\overrightarrow{u_z}$ et **allant dans le sens des θ croissants**.

Schéma représentant les coordonnées cylindriques du point M et la base associée :

4 Repère sphérique



La base sphérique orthonormée est matérialisée par trois vecteurs unitaires et orthogonaux **dépendant tous les trois du point étudié.** On la note couramment $(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_\varphi})$. Si on note O son point d'origine, le repère sphérique sera alors noté $(O;\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_\varphi})$.

On lui associe les **coordonnées sphériques**, notées couramment $(r;\theta;\varphi)$, telles que les coordonnées d'un point M représentent :

- La distance r du point M au point O, aussi appelée rayon vecteur :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- L'angle θ entre l'axe (Oz) et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, aussi appelée colatitude :

$$\cos\theta = \frac{z}{r}$$

  Attention : l'angle θ est compté **positif dans le sens horaire**, et non pas dans le sens trigonométrique habituel (afin que la base $(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_\varphi})$ soit directe).

- L'angle φ entre l'axe (Ox) et la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le plan horizontal (Oxy), aussi appelée longitude :

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

La base sphérique est définie telle que le rayon vecteur soit **l'unique composante** du vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$\boxed{M(r;\theta;\varphi) \iff \overrightarrow{OM} = r \cdot \overrightarrow{e_r}}$$

Le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$ est défini dans le plan formé par les vecteurs $\vec{k}$ et $\overrightarrow{e_r}$ et orthogonal à $\overrightarrow{e_r}$. Le vecteur $\overrightarrow{e_\varphi}$ est défini dans le plan (Oxy) et orthogonal à $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ sont définis **dans le sens des θ et des φ croissants**, respectivement.

Exercice de cours

On définit un point O comme point d'origine. On définit la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et la base cylindrique $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$. Soit un point M quelconque de l'espace.

1. Quelles sont les coordonnées cartésiennes et cylindriques du point M et du point O ?
2. Représenter les coordonnées du point M sur un schéma (on se placera dans le cas particulier $z = 0$).
3. Exprimer les vecteurs de la base cylindrique en fonction de ceux de la base cartésienne et inversement.
4. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en utilisant la base cartésienne et les coordonnées cartésiennes.
5. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en utilisant la base cylindrique et les coordonnées cylindriques.
6. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en utilisant la base cartésienne et les coordonnées cylindriques.
7. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en utilisant la base cylindrique et les coordonnées cartésiennes.
8. Quel vecteur de la base cylindrique n'est jamais utilisé pour repérer un point ?

II Référentiels et dérivées de vecteurs

1 Référentiels courants

Il existe plusieurs référentiels cartésiens courants dont les axes ou le point d'origine varient en fonction des expériences :

- Le **référentiel local** a pour origine l'un des points du laboratoire. Ses axes sont la verticale du lieu et deux directions particulières dans le plan horizontal (par exemple le sud et l'est).
- Le **référentiel terrestre** a pour origine le centre de la Terre. Ses axes sont l'axe des pôles et deux directions particulières dans le plan de l'équateur (par exemple le méridien de Greenwich et le point de longitude 90° Est). Le passage du référentiel terrestre au référentiel local est un simple changement de repère. *Ils sont considérés comme fixe l'un par rapport à l'autre.*
- Le **référentiel géocentrique** a pour origine le centre de la Terre et pour axes la direction de trois étoiles supposées fixes. *Le référentiel terrestre est en* ***rotation*** *par rapport au référentiel géocentrique.*
- Le **référentiel héliocentrique** (ou référentiel de Kepler) a pour origine le centre du Soleil et pour axes la direction de trois étoiles supposées fixes. *Le référentiel géocentrique est en* ***translation*** *par rapport au référentiel héliocentrique.*
- Le référentiel de Copernic a pour origine le barycentre du système solaire et pour axes la direction de trois étoiles supposées fixes.

2 Dérivées de vecteurs

La **dérivée** d'un vecteur est toujours définie **par rapport à un référentiel** donné. En effet, le résultat dépend à la fois :

- de la variation du vecteur par rapport au repère choisi,
- **et de la variation du repère** lui-même dans son référentiel.

Dans l'expression d'un vecteur il faut donc non seulement :

- dériver ses composantes,
- mais aussi dériver éventuellement les vecteurs de base si ceux-ci ne sont pas fixes.

Par exemple, dans un référentiel cartésien $R(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les vecteurs $\overrightarrow{u_\rho}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ de la base cylindrique ne sont pas fixes, car ils sont définis en fonction de la position du point. Pour calculer la dérivée de $\overrightarrow{u_\rho}$ par rapport à l'angle θ **dans le référentiel** R on commence par l'exprimer dans la base lié au référentiel R, c'est à dire $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

$$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta}_{|R} = \frac{d\left(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}\right)}{d\theta}_{|R}$$

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant fixes dans le référentiel R, ils sont donc considérés comme des constantes dans le calcul de la dérivée qui devient :

$$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta}_{|R} = \frac{d\cos\theta}{d\theta}\vec{i}+\frac{d\sin\theta}{d\theta}\vec{j}$$

Les composantes n'étant pas des vecteurs mais des scalaires, leur dérivée ne dépend pas du référentiel. Il n'est donc pas nécessaire de préciser qu'on dérive dans le référentiel R. Finalement, la dérivée du vecteur $\overrightarrow{u_\rho}$ par rapport à θ dans le référentiel R est :

$$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta}_{|R} = -\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j} = \overrightarrow{u_\theta}$$

De même, on calcule la dérivée du vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ par rapport à θ dans le référentiel R :

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta}_{|R} = \frac{d\left(-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}\right)}{d\theta}_{|R} = -\frac{d\sin\theta}{d\theta}\vec{i}+\frac{d\cos\theta}{d\theta}\vec{j} = -\cos\theta\vec{i}-\sin\theta\vec{j} = -\overrightarrow{u_\rho}$$

En mécanique du point, on est souvent amené à calculer des dérivées temporelles. On calcule maintenant les dérivées de $\overrightarrow{u_\rho}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ par rapport au temps dans le référentiel R.

$$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt}_{|R} = \frac{d\cos\theta}{dt}\vec{i} + \frac{d\sin\theta}{dt}\vec{j}$$

Il ne faut pas oublier que θ est en réalité une fonction du temps : $\theta(t)$, donc

$$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt}_{|R} = -\dot{\theta}\sin\theta\vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta\vec{j}$$

Finalement,

$$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt}_{|R} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

De même, on démontre que

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}_{|R} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_\rho}$$

Exercice de cours

Soit R le référentiel lié au repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et R' le référentiel lié au repère cylindrique $(0, \vec{u_\rho}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$.

1. Représenter sur un schéma les repères R et R' (on placera un point M quelconque).
2. Exprimer les vecteurs de la base cylindrique avec ceux de la base cartésienne.
3. Calculer les dérivées par rapport à θ des vecteurs de la base cylindrique dans le référentiel R puis dans le référentiel R'.
4. Exprimer les vecteurs de la base cartésienne avec ceux de la base cylindrique.
5. Calculer les dérivées par rapport à θ des vecteurs de la base cylindrique dans le référentiel R puis dans le référentiel R'.
6. Reprendre les deux questions précédentes en dérivant cette fois-ci par rapport au temps.

Chapitre 3

Mécanique du point en référentiel galiléen

I Cinématique du point

Mimos : « Systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques »

1 Vitesse

Le **vecteur vitesse** indique en chaque point la variation instantanée du vecteur position, **à la fois en direction et en norme**.

Le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position. ***Il dépend donc du référentiel par rapport auquel il est calculé***. Dans un référentiel R quelconque d'origine O, la vitesse du point M se calcule :

$$\boxed{\vec{v}(M)_{/R} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R}$$

NB Le vecteur vitesse peut s'*exprimer* à l'aide de n'importe quels vecteurs de base, même s'ils sont différents de ceux du référentiel de *calcul*.

Dans la suite, on considère que le référentiel R est lié au repère cartésien. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont donc constants. Ainsi, en exprimant le vecteur en **coordonnées cartésiennes**, on obtient :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)}{dt}\right|_R = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Si le vecteur est exprimé en **coordonnées cylindriques** (mais toujours calculé par rapport au référentiel cartésien), on a :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\left(\rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}\right)}{dt}\right|_R = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

2 Accélération

Le **vecteur accélération** indique en chaque point la variation instantanée du vecteur vitesse, **à la fois en direction et en norme**.

Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse, donc la dérivée seconde du vecteur position. ***Comme le vecteur vitesse, il dépend du référentiel par rapport auquel il est calculé***. Dans le référentiel R d'origine O, l'accélération du point M se calcule :

$$\boxed{\vec{a}(M)_{/R} = \left.\frac{d\vec{v}(M)_{/R}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R}$$

En **coordonnées cartésiennes**, on a donc :

$$\vec{a}(M)_{/R} = \left.\frac{d\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right)}{dt}\right|_R = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

et en **coordonnées cylindriques :**

$$\vec{a}(M)_{/R} = \left.\frac{d\left(\dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}\right)}{dt}\right|_R = \ddot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \dot{\rho}\left.\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt}\right|_R + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\dot{\theta}\left.\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}\right|_R + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

or on peut calculer :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta}\right|_R \times \frac{d\theta}{dt} = \left.\frac{d\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right)}{d\theta}\right|_R \times \frac{d\theta}{dt} = \left(-\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right) \times \dot{\theta} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_\rho}$$

d'où :

$$\vec{a}(M)_{/R} = \ddot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - \rho\dot{\theta} \times \dot{\theta}\overrightarrow{u_\rho} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\vec{a}(M)_{/R} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

3 Nature du mouvement

La **trajectoire** d'un point est l'ensemble des positions occupées par ce point en fonction du temps. Le vecteur vitesse est toujours **tangent** à la trajectoire.

Le mouvement est **rectiligne et uniforme** si le vecteur vitesse est constant (ou de façon équivalente si son accélération est nulle) :

$$\left.\frac{d\vec{v}(M)_{/R}}{dt}\right|_R = \vec{0}\left(= \vec{a}(M)_{/R}\right)$$

Le mouvement est **uniforme** si la norme du vecteur vitesse est constante (et on fera attention cette fois à ne pas confondre la dérivée de la norme qui est un scalaire avec l'accélération qui est un vecteur) :

$$\frac{d\left\|\vec{v}(M)_{/R}\right\|}{dt} = 0\left(\neq \vec{a}(M)_{/R}\right)$$

Or $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$, d'où :

$$\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{d\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}}{dt} = \frac{2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}}{2\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{\|\vec{v}\|}$$

On peut en conclure :

$$\begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{a} = 0 & \text{mouvement uniforme} \\ \vec{v}\cdot\vec{a} > 0 & \text{mouvement accéléré} \\ \vec{v}\cdot\vec{a} < 0 & \text{mouvement retardé} \end{cases}$$

Exercice de cours

On considère un point matériel M se déplaçant dans le référentiel R lié au repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note R' le référentiel lié au repère cylindrique $(0, \vec{u_\rho}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$.

1. Faire un schéma du problème en représentant le repère cartésien et le repère cylindrique..
2. Exprimer dans la base cartésienne les vecteurs position, vitesse et accélération par rapport au référentiel R.
3. Exprimer dans la base cylindrique les vecteurs position, vitesse et accélération par rapport au référentiel R.
4. On considère que le point M se déplace sur l'axe $(O, \vec{i})$ dans le sens de $\vec{i}$. Représenter les vecteurs position, vitesse, et accélération à un instant donné.
5. On considère maintenant que le point M se déplace sur un cercle, dans le référentiel R, avec une vitesse angulaire constante. Représenter les vecteurs position, vitesse, et accélération à un instant donné.
6. Montrer que $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$ et $\vec{v}\cdot\vec{a}$ sont de même signe. Que peut-on en déduire ?

II Dynamique du point

Mimos : « Modélisation de forces classiques »

Mimos : « Lois de Newton Référentiel galiléen », « Exemple de mouvement »

1 Bilan des forces

Définitions

Un **point matériel** est un point auquel on associe une **masse**. Il représente la **trajectoire** d'un objet et peut être soumis à des **forces** définissant ou modifiant cette trajectoire.
Une force est caractérisée par une direction, un sens, une intensité et un point d'application. On peut la représenter mathématiquement par :

- un vecteur
- **et** un point d'application.

Attraction gravitationnelle et poids

Deux corps de masses respectives m_A et m_B sont attirées l'une vers l'autre par la force d'attraction gravitationnelle. La norme de cette force a pour expression :

$$\boxed{F = G\frac{m_A m_B}{d^2}}$$

où d est la distance qui sépare les deux masses et G la constante gravitationnelle ($G = 6,67408\times10^{-11}N.m^2.kg^{-2}$).
A la surface de la Terre, un point matériel subit l'attraction terreste et aussi la force d'inertie d'entraînement (dont nous parlerons plus tard) due à la rotation de la Terre sur elle-même. Le **poids** est la somme de ces deux forces. C'est donc une force qui intervient dans tous les problèmes *sans exception* à la surface de la Terre. Il est défini par le vecteur noté $\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$ où m est la masse du point matériel et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

- La direction et le sens de $\vec{g}$ donnent la direction de la **verticale descendante** du lieu (soit dans le repère local $\vec{g} = -g\vec{k}$).
- En France métropolitaine, $\|\vec{g}\| = 9,81\,\mathrm{m/s}^2$.

Forces de réaction

Lorsque l'objet étudié est posé sur un support, relié à un fil ou une tige, des **forces de réaction** s'exercent :

- Dans le cas d'une tige ou d'un fil, la réaction est appelée **tension** et se note communément $\vec{T}$.
  - Elle est colinéaire à la tige ou au fil et s'applique au point de contact avec l'objet.
  - Dans un problème physique, *la tension est souvent une inconnue*, mais son calcul à partir des autres données du problème permet de vérifier la limite de résistance de la tige ou du fil.
  - Dans le cas d'un ressort, la tension est connue et s'exprime : $\boxed{\vec{T} = -k\Delta l\vec{u}}$ avec k le coefficient de raideur, Δl l'allongement du ressort, et $\vec{u}$ le vecteur unitaire dans la direction du ressort et dans le sens d'allongement du ressort.
- Dans le cas d'un support rigide, la **réaction du support**, communément notée $\vec{R}$, est la somme de deux composantes :
  - L'une **normale** au support communément notée $\vec{R}_N$, souvent inconnue, mais dont le calcul permet de vérifier ses limites structurelles : elle est nécessairement normal au support et orientée vers l'extérieur.
  - L'autre **tangentielle** au support communément notée $\vec{R}_T$. Elle représente les **forces de frottement solide** dues au contact entre l'objet et le support. Comme son nom l'indique elle est tangente au support et s'oppose au mouvement. Elle obéit généralement à la loi de Coulomb telle que $\boxed{\vec{R}_T = -\mu\left\|\vec{R}_N\right\|\vec{T}}$ où μ est un coefficient constant et $\vec{T}$ le vecteur unitaire colinéaire et opposé au vecteur vitesse : $\vec{T} = \dfrac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$.

  - S'il n'y a pas de frottements, la réaction du support se réduit à sa réaction normale.

- Lorsque l'objet est plongé dans un fluide (liquide, gaz), il est également soumis à des **forces de frottement fluide**.
  - Leur intensité peut être proportionnelle à la vitesse s'il n'y a pas de turbulences (écoulement laminaire) : $\boxed{\vec{F} = -\lambda\vec{v}}$ où λ est une constante positive.
  - Ou leur intensité peut être proportionnelle au carré de la vitesse dans le cas de mouvement turbulent : $\boxed{\vec{F} = -\lambda \left\|\vec{v}\right\| \vec{v}}$ (soit $\left\|\vec{F}\right\| = \lambda \left\|\vec{v}\right\|^2$).

Dans tous les cas (fluide ou solide), le vecteur représentant la force de frottement est **toujours colinéaire et en sens opposé au vecteur vitesse**.

- Dans un fluide, l'objet est également soumis à la **poussée d'Archimède** (conséquence des forces de pression) :
  - Elle est égale à l'**opposé du poids** du volume de fluide déplacé : $\boxed{\vec{P_a} = -m_a\vec{g}}$ où m_a est la masse de fluide déplacé.
  - On peut aussi exprimer $m_a = \rho_a V$ où ρ_a est la masse volumique du fluide et V le volume de l'objet immergé.

NB Toutes les forces de réaction décrites ci-dessus sont des conséquences macroscopiques des interactions électro-magnétiques entre les particules microscopiques. Cette liste est non-exhaustive.

Résultante

Afin d'étudier la trajectoire d'un point matériel, il convient en premier lieu d'effectuer un **bilan des forces**, c'est-à-dire calculer **la somme de toutes les forces s'appliquant en ce point**. On l'appelle la **résultante** des forces extérieures et on la note :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{P}_a + ...$$

Pour faciliter les calculs ultérieurs, il convient d'exprimer toutes les forces **dans la même base**. Il n'est pas nécessaire que cette base soit celle qui définit le référentiel d'étude : *la base de projection peut aussi bien être fixe ou mobile !*

2 Lois du mouvement de Newton

Première loi de Newton : principe d'inertie

Dans un **référentiel galiléen,** un point matériel **isolé** (soumis à une **résultante nulle** $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$) est à l'**équilibre**, c'est-à-dire que :

- soit il est **au repos** ($\vec{v}(M)_{/R} = \vec{0}$),
- soit il est animé d'un **mouvement rectiligne uniforme** ($\vec{v}(M)_{/R} = \overrightarrow{cte}$). *Le repos est un cas particulier de mouvement rectiligne uniforme.*

Un référentiel est considéré galiléen s'il n'accélère pas par rapport à un autre référentiel galiléen. En d'autres termes, est considéré comme galiléen n'importe quel référentiel en **translation rectiligne uniforme** ($\vec{v}(O')_{/R} = \overrightarrow{cte}$) , **sans rotation** ($\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$) par rapport à un autre référentiel galiléen. On démontrera cela dans le chapitre « Dynamique du point » au prochain semestre.

Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

La **quantité de mouvement** d'un point matériel est le produit de sa masse par sa vitesse. Elle dépend donc du référentiel d'étude.

$$\vec{p}(M)_{/R} = m \cdot \vec{v}(M)_R$$

Si R est un référentiel galiléen, alors la dérivée temporelle de la quantité de mouvement est égale à la résultante des forces extérieures. C'est le **principe fondamental de la dynamique** (PFD) :

$$\frac{d\vec{p}(M)_{/R}}{dt}_{|R} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Lorsque la masse ne varie pas, on écrit aussi couramment cette loi sous la forme :

$$\boxed{m\vec{a}(M)_{/R} = \sum \vec{F}_{ext}}$$

On retrouve la condition d'équilibre d'un point isolé dans un référentiel galiléen :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Longleftrightarrow m\vec{a}(M)_{/R} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{v}(M)_{/R} = \overrightarrow{cte}$$

Troisième loi de Newton : principe d'action-réaction

Tout corps A exerçant une force sur un corps B (action) subit une force de même norme, même direction mais sens opposé exercée par le corps B (réaction) :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

Résolution

Résoudre un problème de dynamique revient à déterminer la trajectoire d'un point matériel à partir de son accélération, elle-même déterminée par la résultante des forces extérieures. C'est donc le raisonnement inverse de la cinématique qui vise à calculer la vitesse et l'accélération d'un point matériel à partir de sa trajectoire.

La cinématique s'applique à l'observation, alors que la dynamique est un raisonnement théorique. L'accord nécessaire entre les deux permet de déduire des résultats d'une expérience.

On résout le problème de dynamique par intégrations successives. On détermine d'abord l'accélération :

$$\vec{a}(M;t)_{/R} = \frac{\sum \vec{F}_{ext}(t)}{m}$$

Par ailleurs la primitive de l'accélération est la vitesse. On peut donc écrire l'intégrale ci-dessous :

$$\int_{t_0}^{t} \vec{a}(M;t)_{/R}dt = \left[\vec{v}(M;t)_{/R}\right]_{t_0}^{t} = \vec{v}(M;t)_{/R} - \vec{v}(M;t_0)_{/R}$$

Connaissant les conditions initiales, on peut donc isoler la vitesse dans l'expression ci-dessous (où l'intégrale de l'accélération est calculée à partir de son expression littérale, elle-même déduite du PFD) :

$$\vec{v}(M;t)_{/R} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(M;t)_{/R}dt + \vec{v}(M;t_0)_{/R}$$

Le même raisonnement s'applique pour trouver la position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(M;t)_{/R}dt + \overrightarrow{OM}(t_0)$$

NB Il est courant de donner les conditions initiales en $t_0 = 0$, ce qui permet d'intégrer entre 0 et t et de simplifier en général ce calcul. Cependant, il pourra aussi s'avérer plus astucieux dans certains cas d'intégrer avec d'autres bornes.

NB Il est possible que la résultante des forces fasse elle-même intervenir la position ou la vitesse du point M. Le PFD s'exprime alors sous la forme d'une équation différentielle *qu'il n'est pas possible* de résoudre avec la méthode simple décrite ci-dessus.

Exercice de cours

On étudie la chute (avec vitesse initiale) d'un corps M de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen R lié au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{k}$ orienté vers le haut et O un point de la surface terrestre. A l'instant $t_0 = 0s$, on connaît la position et la vitesse du point M. On suppose que le mouvement du point M se fera dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

1. Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M.
2. Dans la suite de l'exercice on négligera l'influence de l'atmosphère sur le mouvement. Écrire le principe fondamental de la dynamique dans sa forme la plus générale puis simplifier le dans le cas de l'exercice.
3. En déduire le vecteur vitesse du point M dans le référentiel terrestre.
4. En déduire le vecteur position du point M dans le référentiel terrestre.
5. Quelles sont les équations horaires du mouvement ?
6. En déduire l'équation de la trajectoire du point M. Quelle est sa forme ?

Chapitre 4

Oscillateurs

I Équilibre et forces de rappel

Mimos : « Mouvements autour d'une position d'équilibre stable »,

1 Équilibre

Un **oscillateur** est un point matériel dont la position varie périodiquement autour d'un point d'**équilibre stable**.

Un **oscillateur harmonique** est un oscillateur dont le mouvement s'exprime sous la forme d'une fonction **sinusoïdale**.

Pour rappel, la notion d'équilibre s'applique à un point isolé, c'est-à-dire dont la résultante des forces est nulle. Le point d'**équilibre** correspond à une **accélération nulle**, donc :

- soit à un point matériel au repos ou en translation rectiligne uniforme, mais dans ce cas on ne parle pas d'oscillateur,
- soit au point mathématiques où la dérivée du vecteur vitesse s'annule **localement,** car la vitesse y passe par un minimum ou un maximum. Le point matériel ne fait alors que passer par le point d'équilibre sans s'y arrêter.

NB Dans un oscillateur le point de repos (où la vitesse s'annule localement, mais pas sa dérivée), n'a rien à voir avec le point d'équilibre (où l'accélération s'annule localement, mais pas la vitesse). Dans la plupart des cas, l'accélération est au contraire maximale au point de repos.

Un point d'**équilibre instable** est un point d'équilibre autour duquel la position du point matériel n'oscille pas périodiquement, mais s'en éloigne au contraire inexorablement (voir exemple plus loin avec le pendule simple).

2 Forces de rappel

Un oscillateur est nécessairement soumis à une **force de rappel**, c'est-à-dire une force qui **s'oppose** à tout mouvement autour de la position d'équilibre. *Cette force peut être la somme de plusieurs forces élémentaires.* La force de rappel assure la **stabilité du point d'équilibre**.

La force de rappel s'écrit donc **toujours** sous la forme :

$$\boxed{\vec{F}_r = -\kappa(\chi - \chi_e)\overrightarrow{u_\chi}}$$

où κ est le **coefficient de rappel**, **positif** (constant pour un oscillateur harmonique), χ la position du point matériel dépendant du temps, $\overrightarrow{u_\chi}$ le vecteur unitaire (de sens constant) le long duquel s'opère le mouvement et χ_e la **position d'équilibre** de l'oscillateur (constante).

On vérifie que cette expression obéit bien à la définition du point d'équilibre donnée au paragraphe précédent (résultante des forces nulle). En effet la force de rappel s'annule lorsque $\chi = \chi_e$.

NB La grandeur χ représente ici **n'importe quelle variable** représentant la position du point matériel. Il peut s'agir de la variable x d'un repère cartésien, ou tout aussi bien des variables y, z, des variables ρ ou θ du repère polaire, des variables r, θ ou φ du repère sphérique, ou d'une combinaison d'entre elles. La même remarque s'applique au vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\chi}$.

3 Tension d'un ressort

Le ressort est l'exemple le plus simple de force de rappel. Étiré ou comprimé, la force qu'il exerce est appelée **tension du ressort** et s'exprime :

$$\boxed{\vec{T}_{\text{ressort}} = -k\Delta l \cdot \vec{u}}$$

où k est la **constante de raideur** du ressort, Δl son **allongement** (positif lorsqu'il est étiré, négatif lorsqu'il est comprimé) et $\vec{u}$ le vecteur unitaire le long duquel le ressort est **étiré**. On peut aussi exprimer l'allongement sous la forme $\Delta l = l - l_0$ où l est la longueur du ressort en fonction du temps et l_0 sa **longueur à vide**, c'est-à-dire la longueur qu'il adopte en l'absence de contraintes extérieures.

On peut étudier deux exemples simples (*en négligeant dans les deux cas les forces de frottement qui seront étudiées plus loin*) :

- Ressort posé sur un support se déplaçant horizontalement : le poids et la réaction du support s'annulent, car le point est au repos verticalement. Le point matériel est donc uniquement soumis à la tension du ressort qui est aussi la force de rappel de l'oscillateur :

  $$\vec{F}_r = \vec{T}_{\text{ressort}} = -k(x - x_0)\overrightarrow{u_x}$$

  Ici la position d'équilibre x_e est confondue avec la position du ressort à vide x_0. La constante de raideur k du ressort et le cofficient de rappel κ de l'oscillateur sont confondus.

- Ressort suspendu verticalement (avec $\overrightarrow{u_z}$ verticale descendante) : l'oscillateur est soumis à **la somme de la tension du ressort et de son propre poids** :

  $$\vec{T}_{\text{ressort}} + \vec{P} = -k(z - z_0) + \overrightarrow{u_z} + mg\overrightarrow{u_z} = -k(z - z_0 - \frac{mg}{k})\overrightarrow{u_z}$$

  Afin de retrouver les caractéristiques de l'oscillateur, on rappelle l'expression générale d'une force de rappel :

  $$\vec{F}_r = -k(z - z_e)\overrightarrow{u_z}$$

  On retrouve donc par identification la position d'équilibre $z_e = z_0 + \frac{mg}{k}$ <u>qui n'est pas confondue</u> avec la position du ressort à videz_0. Comme dans l'exemple précédent, la constante de raideur k du ressort et le cofficient de rappel κ de l'oscillateur sont confondus.

NB Les deux exemples ci-dessus sont des cas simples. L'axe du ressort peut également être en diagonale, voire varier en fonction du temps. Il peut aussi y avoir d'autres forces que le poids. Néanmoins la méthode consistera toujours à identifier la résultante des forces à une force de rappel, afin de retrouver la position d'équilibre et le coefficient de rappel.

Exercice de cours

1. A quelle force est nécessairement soumis un oscillateur ? Exprimer cette force dans le cas général en nommant chacun des termes.
2. On se place dans le cas d'un point matériel M de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort horizontal (l'autre extrémité est accrochée à l'origine du repère O). Établir le bilan des forces et montrer qu'on peut identifier la résultante des forces extérieures agissant sur la masse M à une force de rappel.
3. Quelle est la position d'équilibre du ressort ?
4. Appliquer le principe fondamental de la dynamique et en déduire une équation différentielle sur la position de la masse.
5. Mêmes questions dans le cas d'un ressort vertical (sur la Terre).

II Oscillateurs harmoniques

Mimos : « Oscillateur harmonique »

1 Ressort

Un point matériel M de masse m est accroché à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k dont l'extrémité est fixée. Le tout est posé sur un support horizontal. Les forces extérieures agissant sur M sont :

- le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$
- la réaction du support : $\vec{R}_N = ||\vec{R}_N||\vec{k}$
- la tension du ressort : $\vec{T} = -k\Delta l\vec{u} = -k(l-l_0)\vec{i} = -k(x-l_0)\vec{i}$

On néglige tous les frottements. Le point M étant toujours en contact avec le support horizontal, le poids et la réaction du support se compensent. On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a}(M)_R = \vec{T}$$

On exprime l'égalité ci-dessus dans la base cartésienne et on la projette suivant le vecteur $\vec{i}$.

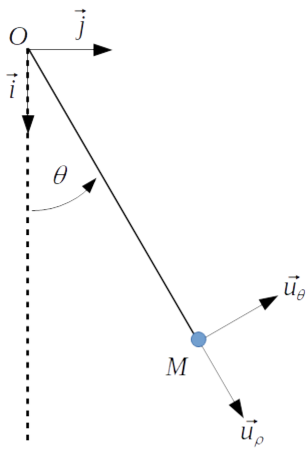
$$m\ddot{x} = -k(x-l_0)$$

On peut simplifier l'égalité ci-dessus par le changement de variable suivant : $X = x - l_0$. On obtient

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

2 Pendule simple



Le pendule simple est un autre exemple classique d'oscillateur. Il est constitué d'une masse suspendue à une tige **rigide** de longueur L. On note θ l'angle entre la verticale et la position de la tige en fonction du temps. Le point matériel est soumis aux forces suivantes :

- le poids : $m\vec{g} = mg\cos\theta\vec{u}_\rho - mg\sin\theta\vec{u}_\theta$
- la tension de la tige : $\vec{T} = -||\vec{T}||\vec{u}_\rho$

Dans l'hypothèse des petites oscillations ($\theta \approx 0$), on peut faire l'approximation $\sin\theta \approx \theta$, ce qui revient à assimiler la composante selon $\overrightarrow{u_\theta}$ de la résultantes des forces à une force de rappel :

$$\left(\vec{P}+\vec{T}\right)\cdot\overrightarrow{u_\theta} = -mg\theta = -\kappa\left(\theta-\theta_e\right)$$

où $\kappa = mg$ est le coefficient de rappel et $\theta_e = 0$ la position d'**équilibre relatif** du pendule.

En ce point, le pendule *n'est pas à l'équilibre au sens strict*, car il suit une trajectoire curviligne (donc l'accélération normale n'est pas nulle). On parle d'équilibre relatif, en un point où seule **l'accélération tangentielle s'annule** (ici $\vec{a}\cdot\overrightarrow{u_\theta} = L\ddot{\theta} = 0$). Le long de la trajectoire, on retrouve bien dans ce cas le comportement d'un oscillateur.

NB L'hypothèse des petites oscillations permet de retrouver l'expression d'une force de rappel à coefficient constant, correspondant à un **oscillateur harmonique**. Néanmoins, même sans faire cette hypothèse, le pendule simple peut quand même être assimilé à un oscillateur (non harmonique).

On remarquera qu'il existe un autre point d'équilibre relatif pour lequel la résultante des forces est nulle : $\theta_{e2} = \pi$, car $\sin\pi = 0$. On peut donc autour de ce point faire l'approximation $\theta \approx \pi$ qui revient à $\sin\theta \approx \pi - \theta$. La résultante des forces devient alors :

$$\left(\vec{P}+\vec{T}\right)\cdot\overrightarrow{u_\theta} = -mg\left(\pi-\theta\right) = mg\left(\theta-\pi\right)$$

Cette définition n'est pas celle d'une force de rappel, car la force va dans le même sens que le mouvement du point matériel au lieu de s'y opposer. Mathématiquement, on constate qu'il manque un signe $-$ pour que l'expression corresponde à celle d'une force de rappel. Ici le pendule n'oscille pas autour du point θ_{e2}, mais au contraire s'en éloigne. Il s'agit d'un point d'**équilibre instable**.

On applique maintenant le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a}(M)_R = \vec{P}+\vec{T}$$

Dans la base cylindrique, il s'écrit :

$$mL\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - mL\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho = \left(mg\cos\theta - ||\vec{T}||\right)\vec{u}_\rho - mg\sin\theta\vec{u}_\theta$$

En projetant cette équation vectorielle sur les vecteurs $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} L\ddot{\theta} = -g\sin\theta \\ -L\dot{\theta}^2 = g\cos\theta - ||\vec{T}|| \end{cases}$$

En se concentrant uniquement sur la projection sur $\vec{u}_\theta$ et en faisant l'hypothèse des petites oscillations on a :

$$L\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

On peut également écrire cette équation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

3 Résolution

Pour le ressort et pour le pendule on obtient finalement la même forme d'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0}$$

On reconnaît une équation différentielle d'ordre 2, sans dérivée première ($\dot{X}$ n'apparaît pas dans l'équation) et sans second membre (0 à droite de l'égalité). On remarque également que le coefficient devant X est nécessairement positif car il est au carré. Il s'agit de l'équation différentielle caractéristique des oscillateurs harmoniques.

Le discriminant de cette équation différentielle $\Delta = -4\omega_0^2$ est toujours négatif, ce qui signifie que la solution est **périodique** et décrite par la fonction **sinusoïdale** :

$$\boxed{X(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

où A et φ sont des constantes à déterminer en fonction des conditions initiales.

- A est l'**amplitude** de l'oscillateur.
- ω_0 est sa **pulsation propre**. On peut la relier à sa fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et à sa période $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
- φ est sa **phase**.

Si un changement de variable a été fait comme dans le cas du ressort, on n'oubliera pas de revenir à la variable initiale :

$$x(t) = X(t) + l_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + l_0$$

Dans le cas du pendule on aura :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Dans les deux cas, M oscille autour de la position d'équilibre ($x = l_0$ pour le ressort, $\theta = 0$ pour le pendule).

NB La solution de l'équation différentielle peut aussi s'écrire sous la forme $X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ où A et B sont des constantes.

Exercice de cours

1. Rappeler l'équation différentielle à laquelle obéit un ressort horizontal et montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme :$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$. Quelle est l'unité du terme ω_0 ? Quel est le nom de ce terme ? Donner son expression.
2. Montrer qu'un pendule simple obéit à la même forme d'équation. Donner l'expression de ω_0.
3. Montrer alors que $X(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0)$ est solution de cette équation différentielle. Montrer que la forme équivalente $X(t) = Acos(\omega_0 t + \phi)$ est aussi solution.
4. Déterminer les constantes avec les conditions initiales $X(0) = X_0$ et $\dot{X}(0) = 0$.

III Oscillateurs amortis

Mimos : « Oscillateur amorti »

1 Mise en équation

Afin de généraliser, on pose ϵ tel que $\epsilon = 1$ lorsqu'on travaille en cartésien (comme pour le ressort) et $\epsilon = L$ lorsqu'on travaille en cylindrique (comme pour le pendule).

- une force de rappel :
$$\vec{F}_r = -\kappa(\chi - \chi_e)\overrightarrow{u_\chi}$$
$\chi = x$ dans le cas du ressort, $\chi = \theta$ dans le cas du pendule et $\kappa = k$ dans le cas du ressort, $\kappa = mg$ dans le cas du pendule.
- et une **force de frottement** proportionnelle à la vitesse :
$$\vec{F}_f = -\lambda\vec{v}$$

On rappelle que le vecteur $\overrightarrow{u_\chi}$ est le vecteur unitaire le long duquel s'opère la mouvement de l'oscillateur. On peut donc écrire :

$$\vec{F}_f = -\lambda\epsilon\dot{\chi}\overrightarrow{u_\chi}$$

Le PFD s'écrit donc :

$$m\vec{a} = \vec{F}_r + \vec{F}_f$$

$$m\epsilon\ddot{\chi} = -\kappa\left(\chi - \chi_e\right) - \lambda\epsilon\dot{\chi}$$

On peut faire le changement de variable $X = \chi - \chi_e$. On alors $\ddot{X} = \ddot{\chi}$ et $\dot{X} = \dot{\chi}$ car χ_e est une constante, soit l'équation :

$$m\epsilon\ddot{X} + \lambda\epsilon\dot{X} + \kappa X = 0$$

ou encore

$$\boxed{\ddot{X} + 2\alpha\dot{X} + \omega_0^2 X = 0}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\epsilon m}}$ la pulsation propre et le **coefficient d'amortissement** :

$$\alpha = \frac{\lambda}{2m}$$

2 Solution

On reconnaît une équation différentielle dont un calcule le discriminant :

$$\Delta = 4\alpha^2 - 4\omega_0^2 = \frac{\lambda^2}{m^2} - 4\frac{\kappa}{\epsilon m}$$

Contrairement à l'oscillateur harmonique, le discriminant n'est pas toujours négatif. Son signe dépend des valeurs relatives du coefficient d'amortissement et de la pulsation propre, donc indirectement des valeurs relatives des coefficients de frottement et de rappel. On définit aussi couramment le **facteur de qualité** de l'oscillateur :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \sqrt{\frac{\kappa}{\epsilon m}} \times \frac{m}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\kappa m}{\epsilon}}$$

On distingue donc trois cas :

1. Le discriminant est positif : $\Delta > 0$, $\alpha > \omega_0$ ou encore $Q < \frac{1}{2}$. La solution de l'équation est **apériodique** et s'écrit :
$$X(t) = e^{-\alpha t}\left(Ae^{rt} + Be^{-rt}\right)$$
avec $r = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

2. Le discriminant est nul : $\Delta = 0$, $\alpha = \omega_0$ ou encore $Q = \frac{1}{2}$. La solution de l'équation est **critique** et s'écrit :

$$X(t) = e^{-\alpha t}\left(At + B\right)$$

3. Le discriminant est négatif comme dans le cas d'un oscillateur harmonique : $\Delta < 0$, $\alpha < \omega_0$ ou encore $Q > \frac{1}{2}$. La solution de l'équation est **pseudo-périodique** et s'écrit :

$$\boxed{X(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)}$$

ou

$$X(t) = e^{-\alpha t} A\cos(\omega t + \varphi)$$

avec $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$ la **pseudo-pulsation** de l'oscillateur à partir de laquelle on définit la **pseudo-période :**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \neq \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Comme pour l'oscillateur harmonique, A et φ représentent respectivement l'amplitude et la phase.

Il est à noter que dans les deux premiers cas la solution n'est pas périodique, et donc que l'on sort de la définition d'un oscillateur. L'oscillateur amorti à proprement parlé correspond uniquement au cas pseudo-périodique.

Cependant, on peut aussi remarquer que celui-ci n'est pas non plus *strictement* périodique (d'où l'appellation « pseudo-périodique »), car la fonction sinusoïdale est enveloppée par une fonction exponentielle qui fait décroître l'amplitude effective $Ae^{-\alpha t}$ des oscillations.

NB Dans les trois cas, il ne faut pas oublier de se ramener à l'expression de $\chi(t)$ en ajoutant la position d'équilibre aux solutions ci-dessus :

$$\chi(t) = X(t) + \chi_e$$

Il devient **ensuite** possible de retrouver les constantes A et B ou φ à l'aide des conditions initiales.

Exercice de cours

1. On considère une masse m accrochée à un ressort horizontale de longueur à vide l_0. En considérant qu'une force de frottement fluides (laminaire) agit sur la masse, montrer que la position de cette masse obéit à une équation différentielle de la forme : $\ddot{X} + 2\alpha\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$. Quelle est l'unité du terme α ? Quel est le nom de ce terme ?

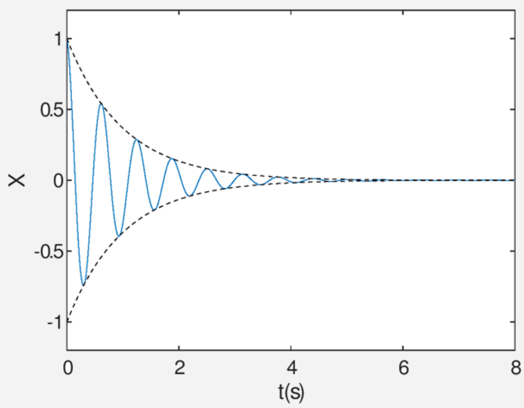
2. Même question dans le cas d'un pendule simple.

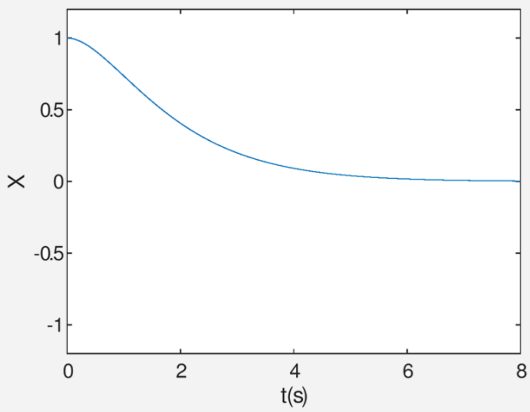
3. Montrer que dans le cas $\alpha^2 < w_0^2, X(t) = e^{-\alpha t}(Acos(\omega t) + Bsin(\omega t))$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ est solution de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti.

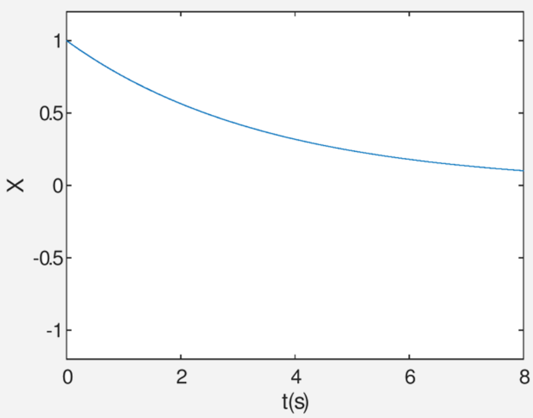
4. Montrer que dans le cas $\alpha^2 = w_0^2$, $X(t) = e^{-\alpha t}(At + B)$ est solution de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti.

5. Montrer que dans le cas $\alpha^2 > w_0^2$, $X(t) = e^{-\alpha t}(Ae^{rt} + Be^{-rt})$avec $r = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ est solution de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti.

6. On trace l'allure des solutions données dans les questions précédentes. Identifier le régime correspondant à chacune des courbes.







IV Oscillateurs forcés

1 Mise en équation

On considère un point matériel soumis à une force de rappel, une force de frottement proportionnelle à la vitesse et une force dite excitatrice. La **force excitatrice** est une force généralement extérieure au système étudié ayant tendance à le faire sortir de son état d'équilibre naturel.

La force excitatrice peut ou non dépendre du temps. On se placera dans le cas général où elle dépend du temps :

$$\vec{F}_e(t)$$

Le PFD s'écrit donc :

$$m\vec{a} = \vec{F}_r + \vec{F}_f + \vec{F}_e(t)$$

et en projection sur l'axe $\overrightarrow{u_\chi}$:

$$m\epsilon\ddot{\chi} = -\kappa\left(\chi - \chi_e\right) - \lambda\epsilon\dot{\chi} + \vec{F}_e(t)\cdot\overrightarrow{u_\chi}$$

Finalement, on fait comme d'habitude le changement de variable $X = \chi - \chi_e$:

$$m\epsilon\ddot{X} + \lambda\epsilon\dot{X} + \kappa X = f_e(t)$$

où $f_e(t)$, dite **fonction excitatrice** ou **fonction de forçage**, représente la projection de la force excitatrice le long du mouvement de l'oscillateur. On identifiant la pulsation propre et le facteur d'amortissement, on arrive à l'équation finale :

$$\boxed{\ddot{X} + 2\alpha\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f_e(t)}{m\epsilon}}$$

2 Résolution

La solution de l'équation ci-dessus est la somme de deux fonctions :

- La solution de l'**équation sans seconde membre**, comme vue plus haut dans la partie « oscillateur amorti ». Cette solution est aussi appelée la **solution homogène** : $X_h(t)$.
- La **solution particulière** de l'équation complète : $X_p(t)$. On peut démontrer que cette solution doit être de la même nature mathématiques que le second membre de l'équation, autrement dit la fonction de forçage $f_e(t)$:
  - Si la fonction de forçage est une constante, la solution particulière le sera aussi : $X_p(t) = K$.
  - Si la fonction de forçage est sinusoïdale, la solution particulière le sera aussi, et **de même pulsation** :

    $$X_p(t) = A_p\cos(\omega_f t + \varphi_p)$$

    où ω_f est la **pulsation de forçage** (la pulsation de la fonction de forçage), et A_p et φ_p des constantes *différentes de celles de la solution homogène et non déterminées à l'aide des conditions initiales (voir section suivante).*

La solution générale de l'équation est donc la somme des solutions homogène et particulière :

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

Il ne faut pas oublier de se ramener à la variable $\chi(t)$ en ajoutant la position d'équilibre :

$$\chi(t) = X(t) + \chi_e = X_h(t) + X_p(t) + \chi_e$$

On remarque enfin que la solution homogène tend vers zéro à cause du facteur $e^{-\alpha t}$ qu'elle contient. Elle finira donc toujours par devenir négligeable au bout d'un certain temps par rapport à la solution particulière. On distingue deux régimes :

- Le régime **transitoire** durant lequel les solutions homogène et particulière cohabitent.
- Le régime **établi** où seule subsiste la solution particulière, car la solution homogène est devenue négligeable.

3 Excitation sinusoïdale en régime établi

On se place dans le cas d'une de fonction de forçage sinusoïdale de pulsation ω_f et d'amplitude A_f. On se place également en **régime établi**, où la solution générale peut par définition s'approximer à la solution particulière :

$$X(t) \approx X_p(t) = A_p \cos(\omega_f t + \varphi_p)$$

On cherche à calculer les valeurs des constantes A_p et φ_p. On utilise pour cela, afin de faciliter les calculs, la **notation complexe :**

$$\underline{X_p} = A_p e^{i(\omega_f t + \varphi_p)} = \underline{A_p} e^{i\omega_f t}$$

$$\underline{f_e} = A_f e^{i\omega_f t}$$

Les fonctions $X_p(t)$ et $f_e(t)$ correspondent aux parties réelles des fonctions complexes $\underline{X_p}$ et $\underline{f_e}$. L'amplitude A_p et le déphasage φ_p sont respectivement **le module** et **l'argument** de l'**amplitude complexe** $\underline{A_p}$. Il reste donc à calculer la fonction $\underline{A_p}$ en remplaçant dans l'équation du système les fonctions réelles par leurs équivalents complexes :

$$\ddot{\underline{X_p}} + 2\alpha \dot{\underline{X_p}} + \omega_0^2 \underline{X_p} = \frac{\underline{f_e}}{m\epsilon}$$

Or, par propriété de la dérivée d'une exponentielle, $\dot{\underline{X_p}} = i\omega_f \underline{A_p} e^{i\omega_f t} = i\omega_f \underline{X_p}$ et $\ddot{\underline{X_p}} = (i\omega_f)^2 \underline{X_p} = -\omega_f^2 \underline{X_p}$. D'où l'équation :

$$m\epsilon \left(-\omega_f^2 + i2\alpha\omega_f + \omega_0^2\right) \underline{X_p} = \underline{f_e}$$

On peut finalement simplifer par $e^{i\omega_f t}$ pour obtenir l'expression de l'amplitude complexe :

$$m\epsilon \left(-\omega_f^2 + i2\alpha\omega_f + \omega_0^2\right) \underline{A_p} = A_f$$

soit :

$$\underline{A_p} = \frac{A_f}{m\epsilon\left(\omega_0^2 - \omega_f^2 + i2\alpha\omega_f\right)}$$

Pour l'amplitude de la solution particulière, on obtient donc en faisant le module :

$$A_p = \left|\underline{A_p}\right| = \frac{A_f}{m\epsilon\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega_f^2}}$$

On peut démontrer (par un tableau de variation) que cette fonction admet un maximum appelé **résonance** lorsque $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$. Cette résonance n'existe que si $\omega_0 > \alpha\sqrt{2}$ ou si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice de cours

1. On considère un oscillateur forcé (sans amortissement pour l'instant). A quelles forces extérieures est soumis ce système ?
2. A l'aide du principe fondamental de la dynamique, écrire l'équation différentielle à laquelle obéit ce système (on se placera dans le cas d'un ressort $\epsilon = 1$).
3. Expliquer comment résoudre cette équation différentielle. A quoi correspond le premier terme ? Que va-t-il devenir au fur et à mesure du temps ?
4. En considérant que la fonction de forçage est sinusoïdale, calculer l'expression de la solution particulière.
5. Calculer la fréquence de résonance du système.
6. Reprendre les questions précédentes en considérant maintenant les amortissements.

Deuxième partie

Travaux dirigés

TD n°1

Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

Exercice 1: **Conversions de coordonnées I**

1) On définit le point A par ses coordonnées cartésiennes $A(2,2,1)$.
Exprimer ses coordonnées cylindriques.

2) On définit le point B par ses coordonnées cylindriques : $\rho_B=2\sqrt{2}; \theta_B=\frac{3\pi}{4}; z_B=1$

Exprimer ses coordonnées cartésiennes.

3) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base cartésienne.

Exercice 2 : **Conversion de coordonnées II**

1) P est un point de coordonnées sphériques (r,θ,φ). Représenter le point P, les vecteurs de la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et les vecteurs de la base sphérique $\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi}$ sur deux schémas en 2 dimensions : la projection méridienne correspondant au plan $(P;\vec{e_r};\vec{e_\theta})$ et la projection équatoriale correspondant au plan $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Ajouter sur les deux schémas le point H projection du point P dans le plan (Oxy), et le vecteur $\vec{u_\rho}$ de la base cylindrique associée au point H.

2) Exprimer la projection des vecteurs $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ selon les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{u_\rho}$ en fonction de la colatitude θ.

3) Exprimer la projection des vecteurs $\vec{u_\rho}$ et $\vec{e_\varphi}$ selon les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de la longitude φ.

4) En déduire les composantes des vecteurs de base ($\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi}$) dans la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

5) Exprimer en fonction de ses coordonnées sphériques les composantes de $\overrightarrow{OP}$ dans la base sphérique puis cartésienne.

Exercice 3 : **Trajectoire d'un point**

1) Un point M du plan (O,x,y) a pour coordonnées polaires : $M\begin{Bmatrix}\rho=2b\cos(\omega t)\\ \theta=\omega t\end{Bmatrix}$
où b et ω sont deux constantes positives. Trouver l'équation polaire $\rho=f(\theta)$ du point M.

2) Exprimer l'abscisse x du point M en fonction de b et θ.

3) Exprimer la somme x^2+y^2 en fonction de b et x.

4) En déduire l'équation cartésienne reliant les coordonnées x et y du point M sous la forme :
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

5) L'équation ci-dessus est l'équation d'un cercle de rayon R et de centre C (x_0;y_0).
Quelle est la trajectoire du point M ?

TD n°2

Référentiels et dérivées de vecteurs

Exercice 1 : **Référentiels terrestre et géocentrique**

Soit M un point immobile sur la surface terrestre à l'équateur. Le centre de la Terre est noté O et son rayon est noté r_t. On considère le référentiel R_G lié au repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k})$ avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ appartenant au plan équatorial. On considère également le référentiel R_T lié au repère cylindrique $(O;\vec{u}_\rho;\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$

À deux dimensions, dans le repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j})$ noté R, le point A a pour coordonnées cartésiennes x_A et y_A. Il est fixe dans le référentiel R.

1) Faire un schéma du problème en faisant apparaître les différentes bases. A quoi correspondent les référentiels R_G et R_T ?

2) Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne puis dans la base cylindrique.

3) Dériver les deux expressions précédentes par rapport au temps dans le référentiel R_G. Ces deux expressions sont-elles égales ?

4) Dériver ces deux mêmes expressions par rapport au temps dans le référentiel R_T. Ces deux expressions sont-elles égales ?

Exercice 2 : **Dérivées de vecteurs dans deux référentiels**

1) Un point P se déplace dans le repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Soient ρ et θ les coordonnées polaires de P dans le repère cylindrique $(O;\vec{u_\rho};\vec{u_\theta};\vec{u_z})$. On prendra z=0.

On définit le point H tel que le vecteur $\overrightarrow{PH}$ soit de norme constante l et de même sens que $\vec{j}$. Exprimer $\overrightarrow{PH}$ dans la base cartésienne.

2) Calculer la dérivée de $\overrightarrow{PH}$ par rapport à θ dans le référentiel R lié repère cartésien en utilisant les coordonnées cartésiennes.

3) Exprimer par projection le vecteur $\overrightarrow{PH}$ dans la base cylindrique.

4) Calculer la dérivée de $\overrightarrow{PH}$ par rapport à θ dans le référentiel R_1 lié au repère cylindrique en utilisant les coordonnées cylindriques.

5) Exprimer le résultat obtenu $\frac{d\overrightarrow{PH}}{d\theta}|_{R_1}$ dans la base cartésienne. Comparer à $\frac{d\overrightarrow{PH}}{d\theta}|_R$ trouvé plus haut.

6) Calculer la dérivée de $\overrightarrow{PH}$ par rapport à θ dans le référentiel R lié repère cartésien en utilisant cette fois-ci les coordonnées cylindriques. Conclure.

7) On appelle α l'angle entre la direction du vecteur $\vec{u_\rho}$ et celle du vecteur $\overrightarrow{PH}$. Calculer en réutilisant les résultats précédant la dérivée de $\overrightarrow{PH}$ par rapport à α dans le référentiel R_1 (on exprimera dans un premier temps α en fonction de θ).

TD n°3
Cinématique du point

Exercice 1 : **Mouvement curviligne d'un ballon sonde**

1) Un ballon sonde part de l'origine du repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ avec une vitesse d'ascension verticale $v_z=5{,}0\pm0{,}5\,\mathrm{m.s^{-1}}$ indépendante de son altitude.

Le vent lui communique par ailleurs une vitesse horizontale $v_x=\dfrac{z}{\tau}$ proportionnelle à l'altitude *z*, τ étant une constante égale à 8±1 dans l'unité usuelle du système international. Donner la dimension et l'unité de la constante τ.

2) Exprimer le vecteur vitesse et sa norme dans le référentiel lié au repère cartésien.

3) Calculer la vitesse en km/h du ballon sonde en à une altitude de 0m, 100m, et 200m

4) Exprimer le vecteur accélération et sa norme en fonction de v_z et τ dans le référentiel lié au repère cartésien. Calculer son ordre de grandeur.

5) Déterminer la nature du mouvement.

Exercice 2 : **Mouvement circulaire**

1) Dans le repère cartésien $(O,\vec{u_x},\vec{u_y},\vec{u_z})$, le point M a pour équations horaires :

$$\overrightarrow{OM}\begin{Bmatrix} x=x_0+a\cos(\omega t) \\ y=a\sin(\omega t) \\ z=0 \end{Bmatrix}$$

Faire une analyse dimensionnelle, donner les dimensions et unités usuelles dans le système international des constantes x_0, *a* et ω.
Pour les applications numériques, on prendra x_0, *a* et ω égaux à la valeur 1 dans leur unité usuelle, avec une incertitude relative de 1 %.

2) Trouver l'équation cartésienne (*x* en fonction de *y*) de la trajectoire du point M. Démontrer qu'il s'agit d'un cercle dont on définira les coordonnées du centre C et le rayon *R* (donner leurs valeurs avec leurs incertitudes absolues).

3) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(M)_R$ du point M dans le référentiel lié au repère cartésien. Puis calculer sa norme $\|\vec{v}(M)_R\|$ et son incertitude relative. Préciser sa direction par rapport à la trajectoire.

4) Exprimer les coordonnées cylindriques du point M dans le repère $(C,\vec{u_\rho},\vec{u_\theta},\vec{u_z})$ puis les composantes du vecteur $\overrightarrow{CM}$ dans la base cylindrique.

5) Exprimer en utilisant cette fois les coordonnées cylindriques le vecteur vitesse $\vec{v}(M)_R$ du point M dans le référentiel lié au repère cartésien.

6) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(M)_{R2}$ du point M dans le référentiel R2 lié au repère cylindrique.

7) Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}(M)_R$ du point M dans le référentiel lié au repère cartésien. Calculer sa norme $\|\vec{a}(M)_R\|$ et son incertitude relative.

8) Calculer la dérivée de la norme $\|\vec{v}(M)_R\|$ du vecteur vitesse et comparer au résultat précédent.

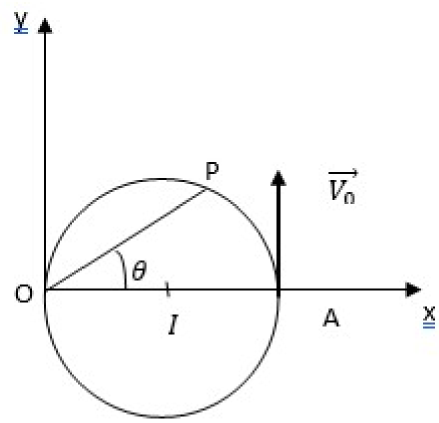
9) Comparer le vecteur accélération au vecteur $\overrightarrow{CM}$. Compte tenu de la trajectoire connue du point M, que peut-on dire sans calcul de l'orientation du vecteur accélération par rapport au vecteur vitesse ?

10) Vérifier votre intuition en calculant le produit scalaire $\vec{v}(M)_R \cdot \vec{a}(M)_R$ dans la base cylindrique.

11) À partir des résultats des questions précédentes, déterminer par deux méthodes indépendantes la nature du mouvement.

Exercice 3 : **Mouvement d'un pompon dans un manège**

1) Soit un repère cartésien $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ dans lequel tourne un manège de rayon R autour du point I de coordonnées (R ;0;0).
Depuis sa cabine située au point O, le gérant du manège dans sa grande dextérité tire un pompon de telle sorte qu'il suive exactement le mouvement d'un enfant situé sur le manège.
Le mouvement du pompon est représenté par le point P. *Le point A représente un point quelconque du manège situé à la distance 2R du gérant sur l'axe Ox et de vitesse V_0 positive.*
On cherche à étudier le mouvement du pompon par rapport au gérant et on utilisera pour cela le repère cylindrique $(O, \vec{u_\rho}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$.



On notera ρ et θ les coordonnées polaires du point P dans ce repère.

De quelle nature est le triangle OPA inscrit dans le cercle de centre I et de rayon R ?
Utiliser cette propriété pour déterminer par projection la valeur de ρ en fonction de R et θ.

2) Représenter sur la figure la base polaire $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta})$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OP}$ dans le repère cylindrique $(O, \vec{u_\rho}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$.

3) Exprimer en coordonnées cylindriques le vecteur vitesse du point P dans le référentiel R lié au repère cartésien.

4) Exprimer en coordonnées cylindriques le vecteur accélération du point P dans le référentiel R lié au repère cartésien.

5) Exprimer la norme du vecteur vitesse en fonction de R et $\dot{\theta}$.

6) On suppose maintenant la vitesse de rotation du manège constante et égale à V_0=0,25±0,01 m/s. En déduire la valeur de $\dot{\theta}$ sachant que R=3m.

7) Donner l'expression de la vitesse à laquelle le pompon s'éloigne ou s'approche du gérant indépendamment de sa rotation, autrement dit la composante de la vitesse de pompon selon l'axe $\overrightarrow{u_\rho}$. Pour quelles valeurs de θ cette vitesse est-elle minimale, maximale ou nulle ? Calculer l'ordre de grandeur du minimum et du maximum.

<u>Exercice 4 :</u> **Mouvement d'un point sur une roue**

1) Dans le repère cartésien $\left(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}\right)$, une roue de rayon *a*, de centre C, roule sans glisser sur une route matérialisée par l'axe Ox, tout en restant dans le plan (O,x,y). Le point I représente à chaque instant le point de contact entre la roue et la route. Le point A représente un point quelconque appartenant au périmètre de la roue et suivant son mouvement.
À l'instant initial *t*=0, les points A et I sont tous deux confondus avec l'origine du repère. Faire un schéma du problème à un instant quelconque *t*>0 tel que la roue a fait moins d'un quart de tour sur elle-même. On notera θ l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CA}$ et on prendra la convention des angles positifs dans le sens horaire.

2) Représenter sur le schéma la base polaire $\left(\overrightarrow{u_\rho}; \overrightarrow{u_\theta}\right)$ liée à la position du point A par rapport au point d'origine C et à l'angle θ défini ci-dessus.

3) Déterminer les coordonnées du point A et les composantes du vecteur $\overrightarrow{CA}$ dans le repère polaire $\left(C, \overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$.

4) Un roulement "sans glissement" signifie que les distances parcourues par la roue le long de la route et le long de son périmètre sont égales. Autrement dit, la distance OI et l'arc de cercle IA sont égaux. En déduire une relation entre la distance OI, la constante *a* et l'angle θ.

5) En déduire les composantes du vecteur $\overrightarrow{OI}$ dans la base cartésienne, puis celles du vecteur $\overrightarrow{OC}$ en utilisant la relation de Chasles.

6) Projeter dans la base cartésienne $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$ les composantes cylindriques du vecteur $\overrightarrow{CA}$ obtenues plus haut. En déduire les coordonnées cartésiennes du point A dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$ en fonction de *a* et θ.

7) Calculer dans un tableau les coordonnées cartésiennes du point A pour θ variant de 0 à 2π par pas de $\pi/2$. On prendra *a*=20cm. Tracer la trajectoire de A dans le plan (O,x,y).

8) Exprimer en coordonnées cartésiennes la vitesse $\vec{v}(A)_R$ du point A dans le référentiel R lié au repère $\left(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}\right)$.

9) Calculer sa norme $\left\|\vec{v}(A)_R\right\|$. Pour quelle position de A le vecteur vitesse s'annule-t-il ? Commenter ce résultat.

10) Pour quelle position de A la norme du vecteur vitesse passe-t-elle par un maximum ? Exprimer puis calculer ce maximum. On prendra $\dot{\theta} = 15\,\text{rad.s}^{-1}$.

TD n°4
Dynamique du point

Exercice 1 : **Forces de réaction sur un solide**

1) Un point matériel P de masse m est lancé dans le vide sur un support horizontal matérialisé par l'axe (Ox) avec une vitesse initiale $V_0=2\,\mathrm{m.s^{-1}}$ à 3 % près. On repère la position de P sur la droite par son abscisse x. L'axe (Oy) représente la verticale du lieu. Quelles sont les forces en présence ?

2) Projeter les différentes forces dans la base cartésienne $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) Pourquoi le mouvement est-il strictement horizontal (pas de composante verticale) ?

4) Représenter sur un schéma le vecteur vitesse du point P et les différentes forces qui s'y appliquent.

5) On applique la loi de Coulomb. Exprimer les composantes de la force de frottement solide.

6) Que deviennent les réponses aux deux dernières questions si l'objet est lancé dans le sens opposé ? Commenter.

7) On donne $\mu=2\cdot10^{-2}$ dans l'unité de base du système international. Quelle est cette unité ? En déduire l'ordre de grandeur de la force de frottement solide pour un point de masse $m=250\pm1\,\mathrm{g}$ (l'incertitude relative sur µ est de 2%).

8) Appliquer le principe fondamental de la dynamique au mouvement du point P.

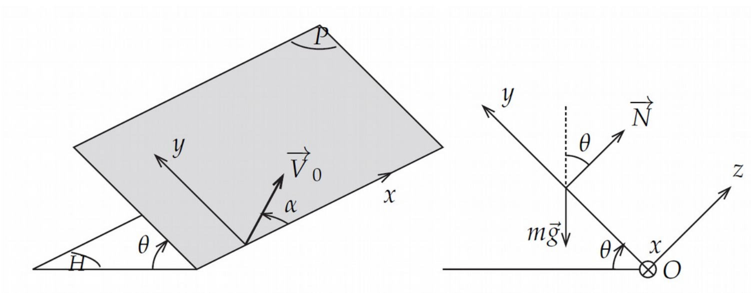
9) Projeter la relation obtenue sur l'axe (Ox) afin d'obtenir une équation différentielle.

10) Intégrer l'équation obtenue en fonction du temps entre les bornes *0* et *t*. En déduire l'expression de la vitesse *v(t)* du point P à l'instant *t* en fonction de µ, V_0 et g.

11) Calculer le temps nécessaire pour que le point P s'arrête et son incertitude relative.

12) Que peut-on dire de la force de frottement solide lorsque le point P est à l'arrêt ?

Exercice 2 : **Mouvement d'un point glissant sur une surface inclinée**



1) Un plan P fait un angle $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ avec le plan horizontal H qu'il coupe selon une droite D. Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur la partie du plan P située au-dessus du plan

H. Le point M est lancé depuis la droite D avec une vitesse initiale V_0 faisant un angle α avec la droite D (voir schéma). Effectuer le bilan des forces appliquées à M.
On exprimera les forces dans la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x};\overrightarrow{u_y};\overrightarrow{u_z})$ telle que définie sur le schéma.

2) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, écrire l'équation vectorielle du mouvement en coordonnées cartésiennes dans le référentiel lié au repère $(O;\overrightarrow{u_x};\overrightarrow{u_y};\overrightarrow{u_z})$.

3) En déduire par projection trois équations différentielles scalaires. On simplifiera l'une d'elle en remarquant que le point M ne peut ni décoller du plan P, ni le traverser.

4) Intégrer ces équations pour trouver les équations horaires de la position en coordonnées cartésiennes du point P.

5) Trouver la nature de la trajectoire du point P en exprimant y en fonction de x.

6) Exprimer la réaction du support (notée N sur le schéma) en fonction des données du problème.

Exercice 3 : **Forces de réaction dans un fluide**

1) Une bille d'acier de diamètre égal à 2mm descend verticalement dans une cuve contenant un fluide de masse volumique connue ρ_0. On note par ailleurs ρ_a la masse volumique de l'acier.
On considère dans un premier temps que le fluide est de la glycérine. La force de frottement peut alors s'exprimer sous la forme : $\vec{F}=-6\pi R\mu\vec{v}$ où μ est le coefficient de viscosité dynamique de la glycérine et R le rayon de la sphère. Déterminer la dimension de μ.

2) Trouver une unité équivalente au poiseuille (Pl), l'unité de la viscosité dynamique dans le système international.

3) Faire le bilan des forces exercées sur cette bille dans la glycérine. Calculer les composantes de la résultante des forces dans le repère cartésien (on notera (Oz) l'axe vertical descendant).

4) On considère maintenant la même bille d'acier dans l'air. On peut alors écrire la norme de la force de frottement sous la forme :

$$\|\vec{F}\|=k^{\alpha}\pi R^{\beta}v^{\gamma}$$

où k est un coefficient homogène à une masse volumique. Écrire l'équation aux dimensions de la force de frottement et en déduire les valeurs des exposants α, β et γ.

5) L'écoulement de l'air est-il considéré comme turbulent ou non turbulent ? De quelle grandeur caractéristique de la bille cette force de frottement dépend-elle ?

6) Établir une expression du vecteur représentant la force de frottement en fonction du vecteur vitesse.

7) Faire le bilan des efforts exercés sur cette bille dans l'air. Calculer les composantes de la résultante des forces dans le repère cartésien.

8) Appliquer le principe fondamental de la dynamique au cas de la bille dans la glycérine et projeter la relation le long de l'axe (Oz).

9) Comment évolue la vitesse de la bille en fonction du temps ? Comment évolue la force de frottement ? Jusqu'à quel point ?

10) En déduire l'expression de la vitesse limite que la bille ne pourra pas dépasser.

11) On donne la masse volumique de l'acier $\rho_a = 8500\,\mathrm{kg\,.m^{-3}}$, la masse volumique de la glycérine $\rho_0 = 1320\,\mathrm{kg.\,m^{-3}}$ et sa viscosité dynamique μ=0.83 Pl. Calculer la vitesse limite.

12) Appliquer le principe fondamental de la dynamique au cas de la bille dans l'air et projeter la relation le long de l'axe (Oz) .

13) En déduire l'expression de la vitesse limite que la bille ne pourra pas dépasser.

14) On donne la masse volumique de l'air $\rho_0 = 1{,}23\,\mathrm{kg.\,m^{-3}}$ et la valeur du coefficient de frottement k=0,25 kg.m^{-3}. Calculer la vitesse limite.

<u>Exercice 4 :</u> **Frottements visqueux**

Un mobile P de masse m est astreint à se déplacer sur l'axe Ox horizontal sous l'action :

- d'une force de tension : $\vec{T} = -mk^2 x \vec{e_x}$
- d'une force de frottement visqueux : $\vec{F} = -2mk\,\dot{x}\vec{e_x}$

avec $x = \|\vec{OP}\|$ et k constante positive.

1) Faire le bilan des forces et appliquer le PFD en projection sur $\vec{e_x}$.

2) Déterminer l'équation horaire du mouvement $x(t)$ sachant qu'à t=0, P se trouve en O avec une vitesse V_0>0.

3) Déterminer l'instant t_l où la vitesse de P s'annule et la position x_1 correspondante.

4) Décrire le mouvement de P. Tracer x(t) en fonction de t.

TD n°5
Équilibre et forces de rappel

Exercice 1 : **Masse suspendue à un ressort**

1) On suspend une masse m=50g à une extrémité notée M d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 inconnues. On constate qu'à l'équilibre le ressort s'allonge de $\Delta l_e = 10\,\text{cm}$. Définir le référentiel d'étude, une base de projection et faire le bilan des forces.
Pour simplifier le problème on prendra la verticale descendante et l'origine confondue avec l'autre extrémité A du ressort (point d'attache).

2) Appliquer le PFD et en déduire l'équation différentielle du mouvement du point M que l'on ne résoudra pas pour l'instant.

3) Que devient cette équation à l'équilibre ? En déduire une relation entre Δl_e et les données du problème.

4) Identifier la résultante des forces à une force de rappel afin de retrouver le coefficient de rappel et la position d'équilibre. Comparer au résultat de la question précédente.

5) Calculer la constante de raideur k du ressort. Trouver son unité par une analyse dimensionnelle. Calculer son incertitude absolue si l'allongement du ressort est mesuré avec une incertitude relative de 5 %.

6) On étudie maintenant le même problème en prenant la verticale ascendante et un point d'origine situé sous le point M tel que le point d'attache du ressort soit une altitude z_A. Réécrire le bilan des forces et le PFD dans ce nouveau repère.

7) Vérifier à l'équilibre que l'on retrouve bien la même expression de Δl_e que précédemment.

Exercice 2 : **Ressort horizontal en référentiel non-galiléen**

1) Soit un référentiel cartésien absolu supposé galiléen $R(O;\vec{I};\vec{J};\vec{K})$. Soit un référentiel cartésien relatif non-galiléen $R'(O;\vec{i};\vec{j};\vec{K})$ en rotation par rapport à R autour de l'axe $(O\vec{K})$ et de vitesse angulaire constante Ω. Un point matériel de masse m est assujetti à se déplacer sans frottement sur une tige rigide suivant l'axe $(O\vec{i})$. Un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 est fixé au point O (immobile) et au point M.
Faire le bilan des forces extérieures dans la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{K})$.

2) On repère le point M par sa coordonnée x le long de la tige. Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération du point M par rapport au référentiel R'.

3) Comme on travaille en référentiel non galiléen, on doit prendre en compte deux forces supplémentaires qui sont la force d'inertie d'entraînement (ou force centrifuge) et la force de Coriolis que nous étudierons prochainement. On admet que leurs expressions sont les suivantes : $\vec{F}_{ie} = +m\Omega^2 x\vec{i}$ et $\vec{F}_{iC} = -2m\Omega\dot{x}\vec{j}$. Appliquer le PFD au mouvement du point M dans R'. Quelles sont les forces qui se compensent ?

4) Identifier la résultante des forces à une force de rappel et en déduire son coefficient de rappel, ainsi que la position d'équilibre du point M. À quelle condition a-t-on affaire à un oscillateur ? Que peut-on dire dans le cas contraire ?

TD n°6
Oscillateurs harmoniques

Exercice 1 : **Ressort en diagonale**

1) Un point matériel M de masse m est assujetti à se déplacer sans frottements sur une droite horizontale. Le point M est fixé à l'une des extrémités d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est fixée au point A immobile sur l'axe vertical à une hauteur $a>l_0$ au-dessus du point O.
Faire un schéma du problème et y représenter les forces en présence.

2) Projeter le vecteur $\vec{u}$ d'étirement du ressort dans la base cartésienne en introduisant l'angle θ entre la verticale et le ressort. Exprimer le bilan des forces dans la base cartésienne.

3) Projeter le PFD sur l'axe vertical. En déduire l'expression de la réaction normale du support.

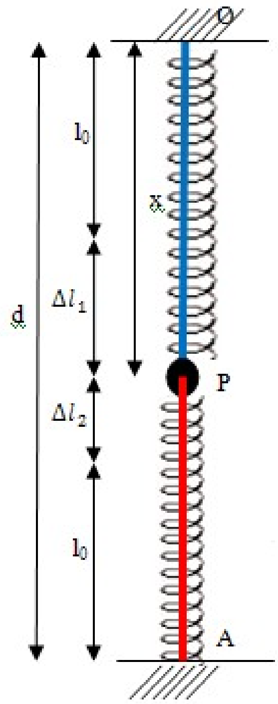
4) En déduire l'expression de la résultante des forces en fonction d'allongement du ressort Δl, k et θ.

5) Exprimer par trigonométrie la résultante des forces en fonction de x, a, k et l_0.

6) On suppose que x^2 est négligeable devant a^2. En déduire que la résultante des forces est identifiable à une force de rappel dont on exprimera le coefficient de rappel et la position d'équilibre.

7) Que se passerait-il si a était plus petit que l_0 ? Expliquer physiquement ce résultat.

Exercice 2 : **Oscillation entre deux ressorts**



Soit un point P de masse m. Ce point est fixé aux extrémités de deux ressorts identiques de raideur k, et de longueur à vide l_0.
Les deux ressorts sont disposés selon la verticale descendante $\vec{i}$ du référentiel galiléen $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Les deux autres extrémités des ressorts sont fixées aux points O et A, distants de d.
On repère le point P par sa coordonnée x=OP.

1) Exprimer le vecteur d'étirement $\vec{u}_1$ et la longueur l_1 du ressort du haut. Exprimer le vecteur d'étirement $\vec{u}_2$ et la longueur l_2 du ressort du bas.

2) Faire le bilan des forces, et établir puis simplifier l'expression de la résultante des forces appliquées à P.

3) Déterminer la valeur x_e pour laquelle P est en équilibre.

4) On pose $X(t)=x(t)-x_e$. Appliquer le PFD et former l'équation différentielle à laquelle obéit $X(t)$ lorsque P est écarté de sa position d'équilibre.

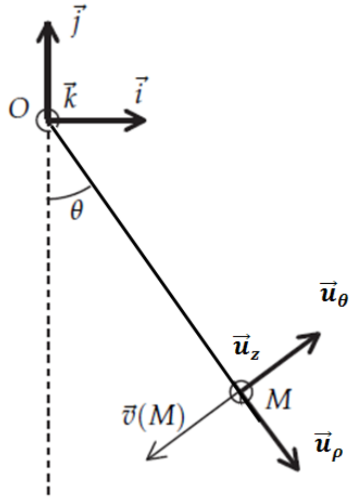
5) Donner la pulsation ω_0 et la période T_0 du mouvement.

6) Déterminer l'équation horaire $x(t)$ sachant qu'à l'instant $t=0$, P se trouve à mi-distance de O et de A avec une vitesse nulle.

7) Indiquer les limites de la trajectoire et décrire son mouvement en fonction des données du problème.

8) Calculer la période et l'amplitude du mouvement pour m=100 g et k=5 $kg.s^{-2}$.

<u>Exercice 3 :</u> **Étude d'un pendule**



1) Soit un pendule constitué d'un point matériel M de masse m attaché à tige rigide de longueur *l.* On note θ l'angle entre la verticale et la tige (voir figure). À l'instant initial, le point est lâché sans vitesse initiale de la position $\theta=\theta_0$.
Faire la liste des forces en présence.

2) Définir le référentiel d'étude et choisir une base de projection. Justifier le choix de la base la plus appropriée compte tenu des inconnues du problème.

3) Exprimer en fonction des données du problème les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}(M)_R$ et accélération $\vec{a}(M)_R$ dans la base choisie et par rapport au référentiel d'étude.

4) Exprimer les forces puis la résultante dans la base choisie.

5) Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel d'étude supposé galiléen.

6) Projeter la relation obtenue dans la base choisie pour obtenir deux équations scalaires.

7) Donner l'équation différentielle du mouvement reliant la variable θ à ses dérivées temporelles et aux données du problème. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme $\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$ dans le cas des petites oscillations ($\theta \ll 1$, $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$).

8) Exprimer puis calculer la pulsation ω_0 .

9) Vérifier que l'équation ci-dessus a pour solution : $\theta = A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ où *A* et *B* sont des constantes. Déterminer *A* et *B* en fonction des conditions initiales définies au début de l'exercice.

10) Toujours dans l'hypothèse des petites oscillations et en négligeant les forces de réaction de l'air, exprimer la tension de la tige en fonction du temps.

11) Déterminer l'expression de la valeur maximale de la tension de la tige.

12) La tige casse si la tension dépasse 0,2 N. Pour quelle valeur de θ_0 cette limite structurelle est-elle atteinte ?

Exercice 4 : **Mouvement à deux dimensions**

Dans le plan (xOy) du référentiel galiléen $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un point matériel P de masse *m* est soumis à la seule action d'une force de rappel dont l'expression est : $\vec{F}(P)=-k\overrightarrow{OP}$.
À l'instant t=0, P se trouve au point de coordonnées cartésiennes $A(d,0)$ et est lancé avec le vecteur vitesse de composantes $\overrightarrow{V_0}(0,V_0)$.

1) Faire un schéma du problème en représentant le point A et le point P à un instant t quelconque.

2) Appliquer le PFD au point P et en déduire deux équations différentielles en *x* et en *y*.

3) Résoudre ces équations afin d'établir les loi horaires $x(t)$ et $y(t)$ du point P.

4) Démontrer que l'équation de la trajectoire peut se mettre sous la forme de l'équation d'une ellipse : $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ où a et b sont les demi-grand et demi-petit axes de l'ellipse.
Discuter la forme de la trajectoire selon les valeurs de V_0.

TD n°7
Oscillateurs amortis

Exercice 1 : **Période d'un pendule simple**

1) On considère un pendule constitué d'une masse *m* accrochée à une tige rigide de longueur *L* et oscillant librement dans le plan vertical d'un référentiel galiléen. Établir le bilan des forces exprimées dans la base cylindrique.

2) Rappeler les vecteurs position, vitesse et accélération du point M dans la base cylindrique.

3) Appliquer le PFD et l'approximation des petites oscillations afin de retrouver l'équation en θ d'un oscillateur harmonique.

4) Retrouver à partir de la résultante des forces l'expression du coefficient de rappel et de la position d'équilibre relatif.

5) Calculer la période T du pendule avec L=18cm ; m=1 kg.

6) Résoudre l'équation différentielle en θ en supposant qu'à l'instant initial le pendule est lancé depuis l'angle θ_0=22° avec une vitesse nulle.

7) On ajoute au bilan des forces une force de frottement fluide de la forme $\vec{F}=-\lambda\vec{v}(M)_R$ où λ est le coefficient de frottement positif. Exprimer cette force dans la base cylindrique et réécrire le PFD.

8) Réécrire l'équation différentielle en θ dans l'hypothèse des petites oscillations. Identifier à l'équation d'un oscillateur amorti en exprimant la pulsation propre et le coefficient d'amortissement.

9) Faire l'analyse dimensionnelle des coefficients de frottement et d'amortissement, ainsi que du facteur de qualité *Q* que vous exprimerez en fonction des données du problème.

10) Discuter la nature de la solution en fonction des données du problème.

11) On prend λ=1,2 $kg.s^{-1}$. Résoudre l'équation différentielle avec les mêmes données et conditions initiales que dans le TD précédent (*on prendra la formule avec les constantes A et B pour simplifier les calculs*).

12) Calculer la pseudo-période du pendule. Comparer à la période obtenue sans prendre en compte les frottements (erreur relative?).

13) Calculer au bout de combien d'oscillations le pendule semble s'arrêter (amplitude effective inférieure à 1 % de l'angle initial θ_0).

Exercice 2 : **Mesure de viscosité**

Une sphère de masse *m* et de rayon *R* est animée d'une vitesse *V*. Elle est plongée dans un liquide de masse volumique *ρ* et de viscosité *η*, et soumise à une force de frottement qui lorsque la vitesse est faible (régime laminaire de Stokes), a pour expression : $\vec{F}=-6\pi\eta R\vec{V}$.
Cette sphère est suspendue à un ressort de raideur *k* se comportant comme un oscillateur. On mesure sa pseudo-période d'oscillations *T.* Dans l'air, où les frottements et la poussée d'Archimède sont négligeables, sa période propre est T_0.

1) Effectuer le bilan des forces appliquées à la sphère. On prendra $\vec{k}$ la long de la verticale descendante, et l'origine O du repère au point d'attache fixe du ressort.

2) En identifiant la force de rappel, donner la position z_e de la sphère à l'équilibre.

3) On pose $Z = z - z_e$. Donner l'équation différentielle à laquelle obéit Z(t).

4) Donner la solution générale de l'équation différentielle en régime pseudo-périodique (on ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration).

5) Exprimer la viscosité η en fonction de T, T_0, m et R. *On pourra commencer pour cela par exprimer* $\omega_0^2 - \omega^2$. Vérifier à l'aide d'une analyse dimensionnelle.

6) Calculer η pour T_0=1s ; T=1,3s ; m=1,05 kg ; R=2 cm.

TD n°8
Oscillateurs forcés

Exercice 1 : **Étude de la suspension d'une voiture**

On étudie le mouvement vertical d'un véhicule de masse totale M=1t. On suppose qu'il possède une unique suspension assimilable à un ressort de raideur $K=10^5 \text{kg.s}^{-2}$ couplé avec un amortisseur de coefficient de frottement $K'=4\times10^3 \text{kg.s}^{-1}$.
Sur un axe vertical (OZ) orienté suivant la verticale ascendante, on notera z_v la position du véhicule sur cet axe, et z_s la position de la roue du véhicule en contact avec le sol.
Le véhicule se déplace horizontalement avec une vitesse V sur un sol ondulé assimilé à une sinusoïde de période spatiale $L=2m$ et d'amplitude $z_{s0}=5cm$. On supposera que le rayon de la roue est nul c'est-à-dire que la position de la roue est égale à chaque instant à la position du sol.
La force d'amortissement visqueux est donnée par : $\overrightarrow{F'}=-K'(\dot{z}_v-\dot{z}_s)\vec{k}$ proportionnelle aux vitesses relatives des deux extrémités de l'amortisseur.

1) Déterminer l'expression de la pulsation de forçage ω_f de la suspension en fonction de la vitesse V du véhicule et de la période spatiale L.
On pourra pour cela calculer le temps que met le véhicule pour parcourir la distance entre deux bosses ou deux creux successifs du sol.

2) Faire un schéma du problème et y représenter les différentes forces (on précisera l'état du système pour justifier les sens des vecteurs).

3) Exprimer la longueur du ressort en fonction de z_v et z_s. En déduire la tension du ressort appliquée au véhicule. Exprimer les autres forces.

4) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au véhicule de masse M, trouver l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée $z_v(t)$.

5) Donner l'expression z_{v0} de la position de véhicule lorsqu'il est au repos et que $z_s=0$.

6) Poser le changement de variable $u=z_v-z_{v0}$ et écrire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ puis l'identifier à l'équation d'un oscillateur forcé.

7) Quelle est la forme de la solution en régime établi ? Donner son expression complexe $\underline{u}$ en fonction de son amplitude complexe $\underline{u}^*$ et de la pulsation de forçage ω_f.

8) Donner l'expression complexe $\underline{z_s}$ des oscillations du sol. Appliquer l'équation différentielle de l'oscillateur aux fonctions complexes ainsi définies.

9) En déduire la relation entre l'amplitude u* des oscillations du véhicule et l'amplitude z_{s0} des oscillations du sol en fonction de la pulsation de forçage ω_f.

10) Calculer la fréquence et l'amplitude des oscillations du véhicule pour V=50km/h.

11) Y a-t-il une allure où il faut éviter de rouler sur le sol ondulé ? Si oui pour quelle raison ? Calculer sa valeur en supposant exacte la formule donné dans le cours pour calculer la pulsation de résonance.

12) Tracer la courbe u^*/z_{s0} en fonction de ω_f (on calculera pour cela les limites en 0 et en l'infini).

Exercice 2 : **Forçage proportionnel au temps**

Un point M de masse *m* est fixé à un ressort de raideur *k* et de longueur à vide l_0 dont l'autre extrémité est fixée en O, origine du référentiel d'étude galiléen. Le point M peut se déplacer sur l'axe horizontal (Ox). Les frottements solides du support sont modélisés par la force $\vec{F}=-\lambda\vec{V}$. Le point M est également soumis à une force d'excitation proportionnelle au temps $\vec{f}=F_0 t\,\vec{e_x}$.
Initialement le ressort est à sa longueur à vide et le point M est immobile.

1) Faire le bilan des forces dans la base cartésienne.

2) Appliquer le PFD et le projeter de façon à retrouver l'équation d'un oscillateur forcé dont on exprimera la position d'équilibre, la pulsation propre, le coefficient d'amortissement et la fonction excitatrice en fonction des données du problème.

3) Donner l'expression générale de la solution particulière de l'équation différentielle. On introduira pour cela deux coefficients constants *a* et *b*.

4) Appliquer l'équation différentielle à la solution particulière et déterminer les expressions des coefficients *a* et *b* en fonction des données du problème.
On utilisera pour cela la propriété que deux fonctions affines égales ont leurs coefficients égaux.
Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue de la solution particulière.

5) Donner l'expression générale de la solution homogène de l'équation différentielle dans le cas d'un frottement très faible et dans le cas d'un frottement très fort.

6) En déduire dans le premier cas uniquement en utilisant les conditions initiales la position du point M en fonction du temps.