Ma112

Chapitre VII.

Fonctions réelles de la variable réelle

VII.1. Définitions générales

▷ *MA12, module 7 — Notions de fonction*

VII.1.1. Définitions et opérations sur les fonctions

Définition 1. Une **fonction d'une variable réelle à valeurs réelles** est une application $f : U \to \mathbb{R}$ avec $U \subset \mathbb{R}$.

L'ensemble U est appelé le ________________ de la fonction f.

Rappelons également la définition suivante.

Définition 2. Le **graphe** d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est le sous-ensemble $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$\Gamma_f = \underline{\qquad\qquad\qquad} .$$

Exemple.

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

Définition 3. (Opérations usuelles sur les fonctions) Soient $f, g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit :

- la **somme** de f et g comme la fonction $f + g : U \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in U, \quad (f+g)(x) = \underline{\qquad\qquad},$$

- le **produit** de f et g comme la fonction $f \times g : U \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in U, \quad (f \times g)(x) = \underline{\qquad\qquad},$$

- la multiplication de f par le *scalaire* λ comme la fonction $\lambda \cdot f : U \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in U, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \underline{\qquad}.$$

VII.1.2. Propriétés d'une fonction

Définition 4. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est **majorée** sur U si ______________________________,
- f est **minorée** sur U si ______________________________,
- f est **bornée** sur U si ______________________________.

Définition 5. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :

- **croissante** sur U si ______________________________,
- **strictement croissante** sur U si ______________________________,
- **décroissante** sur U si ______________________________,
- **strictement décroissante** sur U si ______________________________,
- **monotone** sur U si elle est croissante ou décroissante sur U,
- **strictement monotone** sur U si elle est strict. croissante ou strict. décroissante sur U.

Exemple.

- $x \mapsto \sqrt{x}$ est ______________________ sur $[0, +\infty[$,
- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ln :]0, +\infty[$ sont ______________________,
- La fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$$

  n'est pas __________. En revanche, sa *restriction*

$$\left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$$

  est ______________________.

Définition 6. Soit I un intervalle de la forme $]-a, a[$, $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :

- **paire** si $\forall\, x \in I,\ f(-x) =$ ______,
- **impaire** si $\forall\, x \in I,\ f(-x) =$ ______.

Remarque. Cette définition s'applique plus généralement à toute fonction définie sur un ensemble I **centré en zéro**, c'est-à-dire tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x \in I \implies -x \in I.$$

On peut par exemple dire que la fonction tangente est impaire sur son domaine de définition

$$\mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposition 1.

- Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à ______________.
- Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à ______________.

Exemple.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{2n}$ est ____ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{2n+1}$ est ______ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est ____, tandis que $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est ______.

Définition 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $T > 0$. On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **périodique de période** T (ou T-périodique) si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

Proposition 2. Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le graphe d'une fonction T-périodique est invariant par ____________________.

Exemple.

- $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont ____________.
- La fonction tangente est __________.

VII.2. Limite d'une fonction réelle

▷ *MA12, module 8 — Limite d'une fonction réelle*

VII.2.1. Limite en une valeur x_0 finie

Dans ce chapitre, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on notera $\bar{I}$ l'ensemble I muni de ses extrémités (uniquement lorsqu'elles sont finies). Par exemple,

- si $I =]0, 2[$, alors $\bar{I}$ désigne l'intervalle $[0, 2]$,
- si $I = [1, 4]$, alors $\bar{I} = I = [1, 4]$,
- si $I =]-\infty, 3[$, alors $\bar{I} =]-\infty, 3]$.

Cela permettra de noter simplement « $x \in \bar{I}$ » au lieu de « x est un élément de I ou une extrémité de I ».

Définition 8. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, soit $x_0 \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour **limite** ℓ en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in I, \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \implies \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou plus rarement $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

Cette définition, en apparence compliquée, exprime simplement l'idée que $f(x)$ peut être aussi proche de ℓ que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de x_0. En effet,

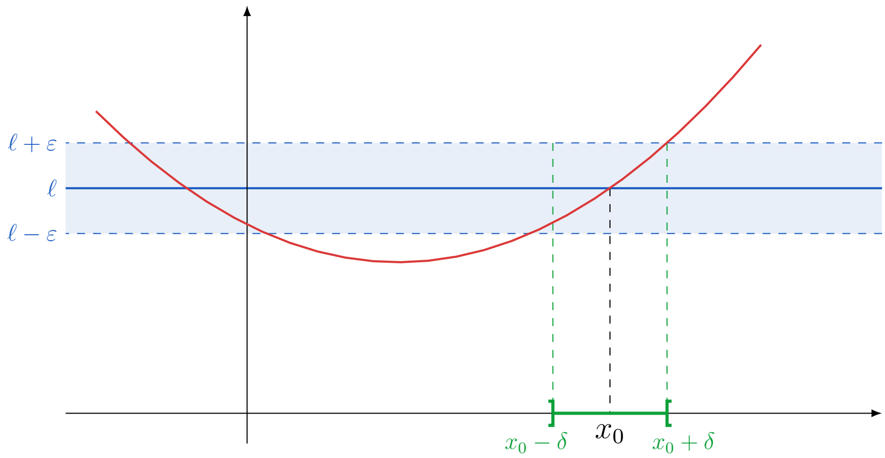
- remarquez que la condition $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ est équivalente à

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon,$$

  ce qui revient encore à dire que x appartient à l'intervalle ouvert centré en ℓ :

$$J_\varepsilon =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\,.$$

- De même, la condition $|x - x_0| < \delta$ revient à dire que, sur la droite réelle, x se situe à une distance inférieure à δ de x_0, c'est-à-dire que x appartient à $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.



La définition de limite demande donc que, peu importe la valeur de $\varepsilon > 0$ choisie (donc, en particulier, aussi petit que l'on choisisse l'intervalle J_ε), il soit possible de trouver un « seuil » $\delta > 0$ qui garantisse que tous les éléments $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ont leur image $f(x)$ dans J_ε. Évidemment, la valeur de δ dépendra directement de la valeur de ε choisie.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = 3x + 1$. Montrons que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 7.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$. Soit $x \in I$ tel que $|x - 2| < \delta$. On a alors

$$|f(x) - 7| = |(3x + 1) - 7| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3\delta = \varepsilon.$$

Ceci prouve donc que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 7| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire que la fonction f a pour limite 7 en $x_0 = 2$.

Remarque. *Faire une figure peut vous aider à comprendre pourquoi on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.*

Remarque. En pratique, on ne passera pas par la définition pour montrer qu'une fonction admet une limite en un point x_0 donné. On utilisera plutôt les résultats des sections à venir pour éviter les raisonnement à base de epsilon.

Exemple.

- Pour tout $x_0 \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \_\_\_\_$.
- La fonction partie entière n'admet pas de limite aux points $x_0 \in \_$.

Définition 9. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in \bar{I}$.

- On dit que f a pour **limite** $+\infty$ en x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si
$$\forall\, A > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in I,\ |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A.$$
- On dit que f a pour **limite** $-\infty$ en x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, si
$$\forall\, A > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in I,\ |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A.$$

VII.2.2. Limites en $+\infty$ et $-\infty$

Définition 10. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour **limite** ℓ en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, si
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B > 0,\ \forall\, x \in I,\ x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
- On dit que f a pour **limite** $+\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, si
$$\forall\, A > 0,\ \exists\, B > 0,\ \forall\, x \in I,\ x > B \implies f(x) > A.$$
- On dit que f a pour **limite** $-\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, si
$$\forall\, A > 0,\ \exists\, B > 0,\ \forall\, x \in I,\ x > B \implies f(x) < -A.$$

Remarque. On définit de manière similaire la notion de limite en $-\infty$ pour une fonction f définie sur un intervalle de la forme $I =]-\infty, b[$:

- on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B > 0,\ \forall\, x \in I,\ x < -B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$,
- on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall\, A > 0,\ \exists\, B > 0,\ \forall\, x \in I,\ x < -B \implies f(x) > A$,
- on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si $\forall\, A > 0,\ \exists\, B > 0,\ \forall\, x \in I,\ x < -B \implies f(x) < -A$.

Les exemples suivants sont à connaître :

Exemple.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = \_\_\_$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} \_\_\_ & \text{si } n \text{ est pair}, \\ \_\_\_ & \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

Exemple. Soient

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ Q(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

deux fonctions polynomiales réelles. Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \_\_\_ & \text{si } n > m, \\ \_\_\_ & \text{si } n = m, \\ \_\_\_ & \text{si } n < m. \end{cases}$$

Ce résultat se démontre à partir de l'exemple précédent en effectuant la factorisation

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right)}{x^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^m} \right)}$$

puis en simplifiant le quotient $\frac{x^n}{x^m}$ suivant les valeurs de n et m. Ce raisonnement pourrait s'adapter au calcul de la limite en $-\infty$, mais pas au calcul de la limite en une valeur $x_0 \in \mathbb{R}$ finie.

VII.2.3. Propriétés de la limite

Dans ce chapitre, on note $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ainsi, quand on parlera de limite en $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, cela désignera indifféremment une limite en une valeur finie $x_0 \in \mathbb{R}$, en $-\infty$ ou en $+\infty$.

Proposition 3. Si une fonction f admet une limite en $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique.

Proposition 4. (Opérations sur les limites finies) Soient f et g deux fonctions, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ tels que

$$\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}.$$

Alors :

1. $\lim\limits_{x_0} (\lambda \cdot f) = \_\_\_$,
2. $\lim\limits_{x_0} (f + g) = \_\_\_$,
3. $\lim\limits_{x_0} (f \times g) = \_\_\_$,
4. si $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{x_0} \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\ell}$.

Remarque. Attention, dans le cas où $\ell = 0$ on ne peut pas conclure sur la limite de $1/f$ sans information supplémentaire sur le signe de $f(x)$ au voisinage de x_0.

Proposition 5. Soit f une fonction et $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$, alors

$$\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0.$$

Proposition 6. (Composition de limites) Soient f et g deux fonctions telles que la composée $g \circ f$ soit définie au voisinage de $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Alors :

$$(\lim_{x_0} f = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{\ell} g = \ell') \implies \underline{\hspace{3cm}}.$$

Exemple. Soit u une fonction telle que $u(x)$ tend vers 2 lorsque x tend vers $x_0 \in \mathbb{R}$. Posons

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{u(x)^2} + \ln u(x)}.$$

Sachant que lorsque x tend vers x_0, $u(x)$ tend vers 2, alors on peut affirmer que

- $u(x)^2$ tend vers 4 et donc $\frac{1}{u(x)^2}$ tend vers $\frac{1}{4}$ (par opérations sur les limites finies),
- $u(x)$ reste strictement positif sur un voisinage de x_0, donc $\ln u(x)$ est bien définie sur ce voisinage et $\ln u(x) \to \ln(2)$ lorsque $x \to x_0$ (par composée de limites).

Par somme de limites finies, on peut donc affirmer que

$$1 + \frac{1}{u(x)^2} + \ln u(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1 + \frac{1}{4} + \ln 2 > 0$$

ce qui garantit d'une part que $f(x)$ est bien définie au voisinage de x_0, et que de plus (par composée de limites)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \ln 2}.$$

Proposition 7. (Opérations sur les limites infinies) Soient f et g deux fonctions et $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la limite en x_0 de $(\lambda \cdot f)$ est donnée dans le tableau suivant :

	$\lim\limits_{x_0} f = -\infty$	$\lim\limits_{x_0} f = +\infty$
$\lambda > 0$	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda = 0$	**FI**	**FI**
$\lambda < 0$	$+\infty$	$-\infty$

- La limite en x_0 de $f + g$ est donnée dans le tableau suivant :

	$\lim\limits_{x_0} f = -\infty$	$\lim\limits_{x_0} f = +\infty$
$\lim\limits_{x_0} g = \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x_0} g = -\infty$	$-\infty$	**FI**
$\lim\limits_{x_0} g = +\infty$	**FI**	$+\infty$

- La limite en x_0 de $f \times g$ est donnée dans le tableau suivant :

	$\lim\limits_{x_0} f = -\infty$	$\lim\limits_{x_0} f = +\infty$
$\lim\limits_{x_0} g = \ell'$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ **FI** si $\ell' = 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ **FI** si $\ell' = 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$\lim\limits_{x_0} g = -\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x_0} g = +\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- Pour la limite en x_0 de $\dfrac{f}{g}$, on se ramène aux propriétés précédentes en étudiant le produit $f \times \dfrac{1}{g}$.

Dans la tableau, on a noté **FI** pour *forme indéterminée*, c'est-à-dire les cas où il est impossible de donner une réponse générale. En pratique dans ces cas-là, il faut mener des calculs pour espérer se ramener à une nouvelle forme qui n'est plus indéterminée (on dit alors qu'on a *levé* l'indétermination).

Remarque. Concrètement, il faut se méfier des opérations suivantes qui ne sont pas définies :

$$\infty - \infty, \qquad 0 \times \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}$$

(et par extension 1^∞ et ∞^0 qui se ramènent au cas $0 \times \infty$ via la formule $x^y = e^{y \ln(x)}$).

Proposition 8. (Comparaison de limites) Soient f, g, h trois fonctions et soit $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$.

- Si $f \leqslant g$, $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors ______.
- Si $f \leqslant g$ et $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, alors ____________.
- Si $f \leqslant g$ et $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$, alors $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$.
- Si $f \leqslant g \leqslant h$ et $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors _________.

Remarque. Attention, la notation $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ est à comprendre comme donnant deux informations :

- la limite de f en x_0 existe,
- sa valeur est ℓ.

Démonstration. (Inverse d'une limite finie) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrons que si $\lim\limits_{x_0} f = \ell > 0$, alors $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$.

1. Montrons que $1/f$ est bien définie et bornée sur un voisinage de x_0.
   Par définition de la limite, on sait que l'assertion

$$\mathcal{P}(\varepsilon) : \quad \exists\, \delta > 0, \quad \forall\, x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

   est vraie pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier pour $\varepsilon_1 = \ell/2$, l'assertion $\mathcal{P}(\varepsilon_1)$ garantit qu'il existe un réel

$\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I$,

$$|x - x_0| < \delta_1 \implies 0 < \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2}.$$

Ceci garantit que sur l'intervalle $J =]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$, la fonction $1/f$ est bien définie (puisque f ne s'annule pas), et bornée puisque pour tout $x \in J$ on a

$$\frac{2}{\ell} > \frac{1}{f(x)} > \frac{2}{3\ell}.$$

2. Montrons maintenant que la limite de $1/f$ en x_0 et $1/\ell$.

Notons d'abord que

$$\forall x \in J, \quad \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell - f(x)}{\ell f(x)}\right| = \frac{|f(x) - \ell|}{\ell f(x)}$$

puisque $\ell > 0$ (par hypothèse) et $f(x) > 0$ lorsque $x \in J$ (d'après l'étape précédente). Or, on a aussi vu précédemment que $1/f$ est majoré par $M = \frac{2}{\ell} > 0$ sur J, donc finalement

$$\forall x \in J, \quad \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{M}{\ell}|f(x) - \ell|.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. En notant $\varepsilon_2 = \ell\varepsilon/M > 0$, l'assertion $\mathcal{P}(\varepsilon_2)$ garantit qu'il existe un réel $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in J$,

$$|x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon_2.$$

Mais alors pour tout $x \in J$ tel que $|x - x_0| < \delta_1$, on a

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{M}{\ell}|f(x) - \ell| < \frac{M}{\ell}\varepsilon_2 = \varepsilon.$$

On vient donc bien de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_1 > 0, \quad \forall x \in J, \quad |x - x_0| < \delta \implies \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire que $\frac{1}{f}$ a pour limite $\frac{1}{\ell}$ en x_0.

Pour conclure : ces dernières sections vous ont permis de découvrir comment était définie rigoureusement la notion de limite, qui ne vous avait probablement été présentée que de façon intuitive dans le secondaire. S'il est bien de comprendre les quelques démonstrations techniques présentées ici, soyez toutefois rassuré sur le fait que ce ne sont pas le genre de démonstrations qui seront attendues en TD. En revanche, vous devez absolument être au point sur les propositions 4, 5, 6 et 7 qui vous permettront justement de manipuler les limites sans avoir à manipuler des epsilon, ainsi que sur les méthodes pour lever les éventuelles formes indéterminées rencontrées en lycée.

VII.3. Fonctions continues

▷ *MAI2, module 9 — Continuité en un point*

VII.3.1. Définition et opérations sur les fonctions continues

Définition 11. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On dit que f est **continue** en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad \underline{\hspace{4em}} \implies \underline{\hspace{6em}}.$$

Remarque. Autrement dit, f est continue en x_0 si f a pour limite $f(x_0)$ en x_0. On utilisera plus souvent cette formulation que celle reposant sur les quantificateurs logiques.

Définition 12. Une fonction f est **continue** sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout point $x_0 \in I$.

Exemple.

- Exemples de fonctions continues :
  - une fonction constante sur I est continue sur I,
  - $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$,
  - $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$,
  - $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$,
  - $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction E n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, car elle n'est pas continue aux points $x_0 \in$ __. En revanche, elle est continue en n'importe quel point $x_0 \in$ _____.

Lemme 1. Soit f une fonction continue en un point x_0. Si $f(x) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \quad f(x) \neq 0.$$

Remarque. La continuité permet donc de passer d'une propriété *ponctuelle* (ne pas s'annuler en un point) à une propriété *locale* (ne pas s'annuler sur tout un voisinage de ce point).

Démonstration. La continuité de f en x_0 garantit que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Si $f(x_0) > 0$, alors en particulier on peut prendre $\varepsilon = f(x_0)/2$ et on trouve donc un intervalle $]x - x_0, x + x_0[$ sur lequel on a

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

Proposition 9. Soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $\lambda \cdot f$, $f + g$ et $f \times g$ sont continues en x_0. Si de plus g ne s'annule pas en x_0, alors f/g est continue en x_0.

Remarque.

- Cette proposition se généralise à la continuité sur tout un intervalle ouvert I.
- Cette proposition permet en pratique de justifier la continuité de la plupart des fonctions construites à partir de fonctions usuelles continues.

Exemple.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est le produit de n fois la fonction $x \mapsto x$ qui est continue).
- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$ (on les obtient à partir des fonctions $x \mapsto x^n$ par somme et multiplications par des scalaires).
- Les *fonctions rationnelles*, c'est-à-dire les quotients de fonctions polynomiales, sont continues sur leurs ensembles de définition.

Proposition 10. (Continuité d'une composition de fonctions) Soient f et g deux fonctions et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Remarque. Attention à bien étudier la continuité de g en $f(x_0)$ et non pas en x_0.

VII.3.2. Prolongements par continuité

Définition 13. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et $f : I \to \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 si ________________________________.
- Dans ce cas, le **prolongement par continuité** de f en x_0 est la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \_\_\_\_ & \text{si } x \neq x_0, \\ \_ & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Si f est continue sur $I \setminus \{x_0\}$, alors $\tilde{f}$ est continue sur I.

Exemple. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x-1)}.$$

- Déterminons si cette fonction est prolongeable par continuité en $x_0 = 2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\}$, on a

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x-1)} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

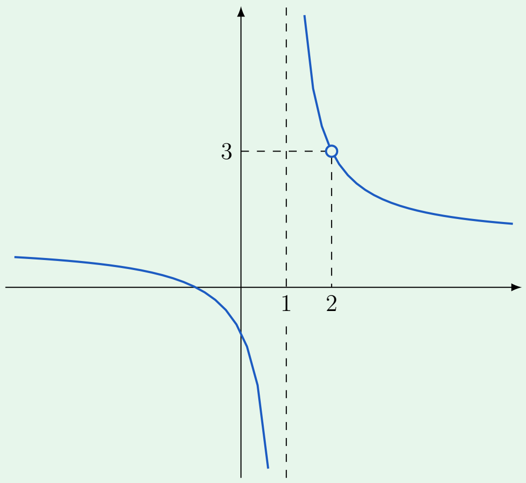
d'ou $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$. Ainsi f est bien prolongeable par continuité en 2, et son prolongement par continuité (en $x_0 = 2$) est la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{(x-2)(x-1)} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}, \\ 3 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

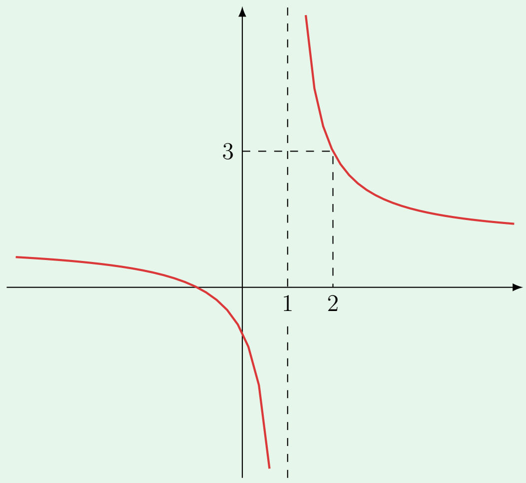
- Déterminons si cette fonction est prolongeable par continuité en $x_0 = 1$. Sachant que $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - x - 2 = 1$ et que

$$\lim_{x\to 1^-} (x-2)(x-1) = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} (x-2)(x-1) = 0^-$$

(faire éventuellement un tableau de signe pour s'en convaincre), on peut affirmer que f n'admet pas de limite finie en 1, donc la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en $x_0 = 1$.



Graphe de f



Graphe de $\tilde{f}$

Exemple. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme la fonction $\sin$ donne des images dans l'intervalle $[-1, 1]$, on peut montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |f(x)| \leqslant |x|.$$

Par encadrement, cela permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$, et son prolongement par continuité est la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

VII.3.3. Lien avec les suites

Proposition 11. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (u_n) qui tend vers ___, la suite $(f(u_n))$ tend vers ______.

Remarque. Dans cette équivalence, on utilisera :

- principalement l'implication directe (si f est continue en x_0, alors pour toute suite (u_n) qui tend vers x_0, la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(x_0)$), notamment lors de l'étude des suites récurrentes,

- plus rarement, sa contraposée : pour montrer qu'une fonction f n'est pas continue en x_0, il suffit de construire une suite (u_n) qui tend vers x_0 mais telle que $(f(u_n))$ ne tend pas vers $f(x_0)$.

Démonstration. Admise.

VII.4. Applications de la continuité

▷ *MA12, module 10 — Continuité sur un intervalle*

VII.4.1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1. (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe __________ tel que __________.

f est continue : le théorème s'applique

f n'est pas continue : le théorème ne s'applique pas

Démonstration. Supposons $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, et montrons qu'il existe un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$ (on admet que la preuve serait similaire dans le cas où $f(b) \leqslant f(a)$).

1. Commençons par poser l'ensemble
$$A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leqslant y\}.$$
Cet ensemble est non vide (il contient a puisque $f(a) \leqslant y$) et il est majoré par b (puisque c'est un sous-ensemble de $[a,b]$). Il admet donc une borne supérieure $c = \sup A$. Le but est maintenant de montrer que $f(c) = y$.

2. Montrons d'abord que $f(c) \leqslant y$. Comme c est la borne supérieure de A, il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.
   - D'une part, puisque (u_n) est à valeurs dans A on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \leqslant y$.
   - D'autre part, comme f est continue, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(c)$.

   Par comparaison de limites (entre la suite $(f(u_n))$ et le suite constante à y), on en déduit que $f(c) \leqslant y$.

3. Montrons maintenant que $f(c) \geqslant y$. Comme A est majoré par b, par définition de la borne supérieure on a $c \leqslant b$. Procédons par disjonction de cas :
   - Si $c = b$, il n'y a rien à démontrer puisque par hypothèse on a $y \leqslant f(b)$.
   - Supposons maintenant $c < b$. Par définition de la borne supérieure, tout élément strictement plus grand que c n'appartient pas à A, autrement dit
$$\forall x \in \,]c,b]\,, \quad f(x) > y.$$

Or, comme f est continue en c, on a

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

et l'inégalité précédente permet alors d'affirmer que $f(c) \geqslant y$.

Par double inégalité, on vient donc de montrer que l'élément $c \in [a, b]$ ainsi construit vérifie bien la condition $f(c) = y$.

Corollaire 1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que ________.

Remarque. La condition $f(a)f(b) < 0$ est simplement une façon concise d'exprimer la condition « $f(a)$ et $f(b)$ sont tous deux non-nuls et de signes opposés ».

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires en prenant $y = 0$.

Remarque. Attention, dans le théorème des valeurs intermédiaires comme dans son corollaire, le réel c n'est pas nécessairement unique.

Exemple. Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

En effet, notons

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ impair et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a alors

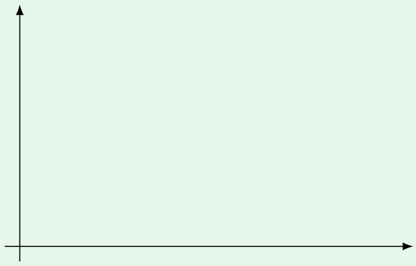
$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \_\_\_\_ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} P(x) = \_\_\_\_ .$$

D'après la définition de limite en $\pm\infty$, cela implique notamment l'existence de deux réels a, b tels que $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$. En appliquant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on obtient l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que $P(c) = 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires peut également être reformulé en termes d'*intervalles* (voir section IV.2 pour se rafraîchir la mémoire sur la notion d'intervalle).

Corollaire 2. (Une autre formulation du théorème des valeurs intermédiaires)
Si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est __________.

Remarque. Attention toutefois, l'image par une fonction continue f de l'intervalle $[a, b]$ n'est pas nécessairement l'intervalle $[f(a), f(b)]$.



Démonstration. Supposons que I est un intervalle, et montrons qu'alors $f(I)$ aussi. Pour cela, fixons deux éléments $(y_1, y_2) \in f(I)^2$ avec $y_1 \leqslant y_2$, et montrons que $[y_1, y_2] \subset f(I)$.

Par définition de l'image directe $f(I)$, il existe $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
Soit $y \in [y_1, y_2]$.

- En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue f sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, on peut affirmer qu'il existe $c \in [x_1, x_2]$ tel que $y = f(c)$.
- Par ailleurs, comme I est supposé être un intervalle, on sait que $[x_1, x_2] \subset I$.

Finalement, y est donc l'image d'un élément $c \in [x_1, x_2] \subset I$, donc par définition on a bien $y \in f(I)$.

VII.4.2. Fonctions continues sur un segment

On appelle **segment** un intervalle de la forme $[a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leqslant b$.

Théorème 2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que

________________ .

Remarque. Ce théorème admet aussi les reformulations courantes suivantes :

- « l'image d'un segment par une fonction continue est un segment »,
- « si f est continue sur $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes ».

VII.5. Fonctions monotones et bijections

▷ *MA12, module 11 — Fonctions monotones et bijections*

VII.5.1. Rappels

On rappelle ici des définitions déjà vues dans la section III.3.

Définition 14. Soit $f : E \to F$ une fonction avec E, F deux sous ensembles de $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **injective** si $\forall (x, x') \in E^2$, (____________ $\Longrightarrow$ ______),
- f est **surjective** si $\forall\, y \in F$, ________________ ,

- f est **bijective** si f est injective et surjective, c'est-à-dire

$$\underline{\hspace{4cm}}.$$

Remarque. Avec le vocabulaire des antécédents, on peut dire que :

- f est injective si tout élément $y \in F$ admet ______ un antécédent $x \in E$ par f,
- f est surjective si tout élément $y \in F$ admet ______ un antécédent $x \in E$ par f,
- f est surjective si tout élément $y \in F$ admet ______ un antécédent $x \in E$ par f.

Proposition 12. Si une fonction $f : E \to F$ est bijective, alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \text{et} \quad \underline{\hspace{2cm}}.$$

On dit alors que g est la **bijection réciproque** de f et on la note f^{-1}.

Remarque.

- $\mathrm{id}_E : E \to E$ est définie pour tout $x \in E$ par $\mathrm{id}_E(x) = x$.
- $g \circ f = \mathrm{id}_E$ signifie que $\forall\, x \in E$, ______ $= x$,
- $f \circ g = \mathrm{id}_F$ signifie que $\forall\, y \in F$, ______ $= x$,
- dans un repère orthonormé, les graphes de f et f^{-1} sont ______ par rapport à la droite d'équation $y = x$ (aussi appelée **première bissectrice**).

VII.5.2. Théorème de la bijection

Théorème 3. (Théorème de la bijection) Soit f une fonction définie sur un intervalle de I de $\mathbb{R}$. Si f est ______ et ______ sur I, alors

- f réalise une bijection de I dans l'intervalle image $J = f(I)$,
- $f^{-1} : J \to I$ est ______ et ______, de même sens de variation que f.

Exemple. la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ n'est pas bijective. En revanche, on peut considérer les deux restrictions :

$$f_1 : \left|\begin{array}{ccc}]-\infty, 0] & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad f_2 : \left|\begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$$

- La fonction f_2 est continue et strictement ______ sur $[0, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, elle est donc bijective et sa réciproque $f_2^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est continue et strictement ______.

  En réalité on connaît la fonction f_2^{-1}, il s'agit par définition de la fonction racine carrée $f_2^{-1} : y \mapsto \sqrt{y}$.
- La fonction f_1 est continue et strictement ______ sur $]-\infty, 0]$. D'après le théorème de la bijection, elle est donc bijective et sa réciproque $f_1^{-1} : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$ est continue et strictement ______.

En réalité on connaît aussi la fonction f_1^{-1}, il s'agit de $f_1^{-1} : y \mapsto -\sqrt{y}$.

Exemple. (Généralisation de l'exemple précédent) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

est continue et strictement ________ sur $[0, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, f est donc bijective. Sa réciproque est la fonction « racine n-ième » $f^{-1} : y \mapsto \sqrt[n]{y}$ qui est donc elle aussi continue et strictement ________ sur $[0, +\infty[$.

Le théorème de la bijection se démontre à l'aide des résultats intermédiaires suivants.

Lemme 2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est strictement monotone sur I, alors f est ________ sur I.

Remarque.

- Dans ce résultat, il n'est pas utile que f soit continue.
- Il n'est pas utile non plus que I soit un intervalle, toutefois soyez toujours très vigilant lorsque vous parlez de monotonie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle. Par exemple, la fonction inverse $f : x \mapsto 1/x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$. En effet, pour $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$, on a $x_1 < x_2$ et pourtant $f(x_1) = -1 < 1 = f(x_2)$.

Démonstration. Soit $(x, x') \in I^2$ tel que $f(x) = f(x')$.

- Si par l'absurde on avait $x < x'$, alors la stricte monotonie de f impliquerait $f(x) > f(x')$ ou $f(x) < f(x')$ (suivant si f est croissante ou décroissante), ce qui dans les deux cas contredit l'hypothèse de départ selon laquelle $f(x) = f(x')$.
- On peut montrer de la même manière que le cas $x > x'$ est impossible.

Finalement, le seul cas possible est donc que $x = x'$. Ceci montre que la fonction f est injective.

Lemme 3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f établit une bijection de I dans l'intervalle $J =$ ____ .

Démonstration.

- D'après le lemme précédent, f est injective. Or, comme on étudie de plus la restriction $f : I \to f(I)$, celle-ci est surjective par définition même de l'image directe $f(I)$. Finalement, f est bien bijective.
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue et I est un intervalle, alors l'ensemble $J = f(I)$ est bien un intervalle.

On admet le reste de la démonstration du théorème de la bijection, dans laquelle il reste encore à démontrer que f^{-1} est continue et strictement monotone, de même sens de variation que f.

VII.6. Fonctions dérivables

▷ *MA12, module 12 — Dérivée d'une fonction en un point et sur un intervalle*

VII.6.1. Définitions

Définition 15. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et soit $x_0 \in I$. On dit que f est **dérivable** en x_0 si le *taux d'accroissement*

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.

Dans ce cas, la valeur de cette limite s'appelle le **nombre dérivé** de f en x_0 et est noté ______.

Définition 16. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.

Dans ce cas, on appelle *fonction dérivée*, notée f', la fonction qui a tout réel $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x.

Exemple. (Fonction carrée) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \neq x_0$ on a

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{\qquad}{x-x_0} = \qquad \xrightarrow[x\to x_0]{} \qquad .$$

Ainsi f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = $ ___ .

Le résultat étant vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto$ ___ .

Exemple. (Fonction sinus) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f' : x \mapsto$ _____ .

- Commençons par étudier la dérivabilité en $x_0 = 0$. On a

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \;\_$$

  donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = $ _ .

- Pour la dérivabilité en un point x_0 quelconque, on va utiliser la formule

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}, \quad \sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

  (en exercice, essayez de démontrer cette formule à l'aide des nombres complexes). On a alors, pour le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{2}{x-x_0}\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right).$$

Par continuité de la fonction $\cos$, on peut affirmer que

$$\lim_{x \to x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \underline{\qquad\qquad}.$$

Par ailleurs, par composition de limites avec la fonction $u : x \mapsto \frac{x - x_0}{2}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers x_0, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(u(x))}{u(x)} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \underline{\ }.$$

Par produit, on trouve donc que le taux d'accroissement tend vers $\underline{\qquad\quad}$ lorsque x tend vers x_0, ce qui prouve que f est dérivable en tout point x_0 et que $f'(x_0) = \underline{\qquad\quad}$.

Définition 17. Soit f une fonction dérivable en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. La **tangente** au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est la droite d'équation

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Proposition 13. (Reformulations de la dérivabilité) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et soit $x_0 \in I$.

1. f est dérivable en x_0 si et seulement si la limite
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
existe et est finie.
2. f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que
$$\forall\, x \in I,\ f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$
(le réel ℓ jouant ici le rôle de $f'(x_0)$).

Idée de la preuve.

1. Il s'agit simplement d'un changement de variable $h = x - x_0$.
2. Remarquez que l'égalité $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x)$ équivaut à
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell = \varepsilon(x).$$
Demander que ε tende vers 0 lorsque x tend vers x_0 revient précisément à demander que le taux d'accroissement de f en x_0 tende vers le réel ℓ.

VII.6.2. Propriétés des fonctions dérivables

Proposition 14. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et soit $x_0 \in I$.

- Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.
- Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Démonstration. Cela se démontre facilement en utilisant la deuxième reformulation donnée dans la proposition 13. En effet, si f est dérivable en x_0, alors il existe un réel ℓ et une fonction ε ayant pour limite 0 en x_0 tels que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Or, par opérations usuelles sur les limites, on a

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\ell = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} (x - x_0)\varepsilon(x) = 0$$

donc $f(x) - f(x_0)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0, ce qui revient exactement à dire que $f(x)$ tend vers $f(x_0)$, autrement dit que f est continue en x_0.

Remarque. Attention, la réciproque est fausse en général ! Par exemple, la fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0, et pourtant son taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \underline{\qquad} & \text{si } x > 0, \\ \underline{\qquad} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

n'admet pas de limite quand x tend vers 0, ce qui signifie que f n'est pas dérivable en 0.

▷ *MAI2, module 13 — Calcul de dérivées*

VII.6.3. Opérations usuelles

Proposition 15. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = \underline{\qquad\quad}$,
- $\lambda \cdot f$ est dérivable sur I et $(\lambda \cdot f)' = \underline{\qquad}$,
- $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = \underline{\qquad\qquad\qquad}$.

Si de plus la fonction g ne s'annule pas sur I, alors

- $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \underline{\qquad}$,
- $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \underline{\qquad\qquad\qquad}$.

Démonstration. (Dérivée de $f \times g$) Soit $x_0 \in I$. Le taux d'accroissement de $f \times g$ en x_0 s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

En supposant f et g dérivables en x_0 et par opérations usuelles sur les limites, on trouve donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

ce qui est bien la formule annoncée.

Pour être parfaitement rigoureux, notez que dans le passage à la limite ci-dessus, on a utilisé que $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. *Cela veut dire qu'on a implicitement supposé que g était continue en x_0, ce qui est heureusement vrai d'après la proposition 14.*

Proposition 16. (Dérivées usuelles) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions suivantes sont dérivables sur leurs ensembles de définition :

- $f : x \mapsto x^\alpha$, et on a $f'(x) =$ ______,
- $f : x \mapsto e^x$, et on a $f'(x) =$ __,
- $f : x \mapsto \ln x$, et on a $f'(x) =$ __,
- $f : x \mapsto \cos x$, et on a $f'(x) =$ ______,
- $f : x \mapsto \sin x$, et on a $f'(x) =$ ____,
- $f : x \mapsto \tan x$, et on a $f'(x) =$ _________ $=$ ______.

Remarque.

- Le cas de $x \mapsto x^\alpha$ permet de retrouver d'autre dérivées usuelles. Par exemple :
  — pour $\alpha = -1$, on trouve $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$,
  — pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- Les différentes expressions pour la dérivée de $x \to \tan(x)$ se retrouvent en dérivant le quotient

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Proposition 17. (Composition de fonctions) Si f est dérivable en un point $x_0 \in I$ et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0. Dans ce cas, on a

$$(g \circ f)'(x_0) = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

Exemple. Calculons la dérivée de $x \mapsto \ln(1+x^2)$. On reconnait une composition entre les fonctions :

- $f : x \mapsto 1 + x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 2x$,
- $g : y \mapsto \ln(y)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $g'(y) = \frac{1}{y}$.

Ainsi, en tout point $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x, et comme $f(x) = 1 + x^2 \in \mathbb{R}_+^*$, g est dérivable en $f(x)$. La proposition précédente permet d'affirmer que

$$g \circ f : x \mapsto \ln(1+x^2)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est donnée par l'expression

$$(g \circ f)'(x) = \underline{\hspace{4cm}} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Remarque. La formule $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ n'est valable que lorsque l'exposant α est **constant**. Pour dériver une expression avec un exposant dépendant de x, il faut repasser par la forme exponentielle.

Par exemple, pour dériver la fonction $f : x \mapsto 2^x$, on commencera par revenir à la forme

$$f(x) = 2^x = e^{x \ln 2},$$

ce qui permettra par composition de trouver

$$f'(x) = \ln(2) e^{x \ln 2} = \ln(2) 2^x.$$

Proposition 18. (Dérivée de la bijection réciproque) Soit I un intervalle ouvert, et soit $f : I \to J$ une fonction dérivable et bijective. Si f' ne s'annule pas sur I, alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable et pour tout $y \in J$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Remarque.

1. La condition $f'(x) \neq 0$ peut s'interpréter graphiquement. En se rappelant que les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice, on remarque que l'existence d'une tangente horizontale sur le graphe de f implique l'existence d'une tangente verticale sur le graphe de f^{-1}.
2. Plutôt que d'apprendre par cœur l'expression de $(f^{-1})'$, il vaut mieux savoir la retrouver en dérivant la relation
$$(f \circ f^{-1})(x) = x.$$
En effet, en utilisant la formule donnant la dérivée d'une fonction composée on trouve alors
$$(f^{-1})'(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1$$
et il suffit d'isoler $(f^{-1})'(x)$ pour retrouver l'expression voulue.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \exp(x)$.

- Remarquons tout d'abord que :
  — f est continue sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}$),
  — f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions strictement croissantes),
  — $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, d'où $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

  D'après le théorème de la bijection, on peut affirmer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$), et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f'(x) = 1 + \exp(x) > 1$$
  ce qui garantit en particulier que f' ne s'annule jamais.
- On peut donc affirmer que la fonction $g = f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \exp(g(x))}.$$
  On ne connait pas l'expression de $g(x)$, toutefois on peut tout de même parvenir à simplifier un peu l'expression de $g'(x)$. En effet, par définition de la bijection réciproque, on a
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(g(x)) = g(x) + \exp(g(x)) = x$$
  d'où $\exp(g(x)) = x - g(x)$. On peut alors finalement écrire :
$$g'(x) = \frac{1}{1 + x - g(x)}.$$

Ceci permet de donner $g'(x)$ en quelques points particuliers. Par exemple, sachant que $f(0) = 1$, on peut affirmer que $g(1) = 0$ et donc que
$$g'(1) = \frac{1}{1+1-0} = \frac{1}{2}.$$
On en déduit notamment que la tangente au graphe de f^{-1} en $x_0 = 1$ a pour équation
$$y = \frac{1}{2}(x-1).$$

VII.6.4. Dérivées successives

Définition 18. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **dérivée d'ordre** n (ou **dérivée** n**-ième**), notée $f^{(n)}$, la fonction définie (lorsqu'elle existe) comme suit :

- si $n = 0$, on pose $f^{(0)} = f$,
- si $n = 1$, on pose $f^{(1)} = f'$,
- plus généralement pour tout $n \geqslant 1$, on pose $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Cela requiert qu'à chaque étape intermédiaire on obtienne bien une fonction à nouveau dérivable. Si c'est le cas et que $f^{(n)}$ existe bien, on dit que f est n fois dérivable.

Théorème 4. (Formule de Leibniz) Soit f et g deux fonctions n fois dérivables. Alors le produit $f \times g$ est n fois dérivable, et on a

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \times g^{(k)}.$$

Exemple.

- Pour $n = 1$, $(f \times g)' =$ ________ .
- Pour $n = 2$, $(f \times f)'' =$ ______________ .

Exemple. Déterminons les dérivées successives de la fonction

$$\phi : x \mapsto e^x(x^2 + 1).$$

- On reconnaît d'une part la fonction $f : x \mapsto e^x$ dérivable autant de fois que l'on veut sur $\mathbb{R}$, et telle que
$$f(x) = e^x, \qquad f'(x) = e^x, \qquad f''(x) = e^x,$$
et plus généralement pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = e^x$.
- D'autre part la fonction $g : x \mapsto x^2 + 1$ est polynomiale, donc dérivable autant de fois que l'on veut et on a
$$g(x) = x^2 + 1, \qquad g'(x) = 2x, \qquad g''(x) = 2,$$
puis pour tout $k \geqslant 3$, $g^{(k)}(x) = 0$.

D'après la formule de Leibniz on a donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\phi^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \\
&= 1 \times e^x \times (x^2+1) + n \times e^x \times 2x + \frac{n(n-1)}{2} \times e^x \times 2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} e^x \times 0}_{=0} \\
&= e^x \left(x^2 + 2nx + n^2 - n + 1\right)
\end{aligned}$$

VII.7. Extrema d'une fonction et théorèmes fondamentaux

▷ *MAI2, module 14 — Extremum local et théorème de Rolle*

VII.7.1. Extrema locaux et globaux

Définition 19. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in I$. On dit que :

- x_0 est un **point critique** de f si __________ ,
- on dit que f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que
$$\forall x \in I \cap J, \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ ,$$

- on dit que f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\forall x \in I \cap J, \quad \underline{\hspace{3cm}},$$

- on dit que f admet un **maximum global** en x_0 si

$$\forall x \in I, \quad \underline{\hspace{3cm}},$$

- on dit que f admet un **minimum global** en x_0 si

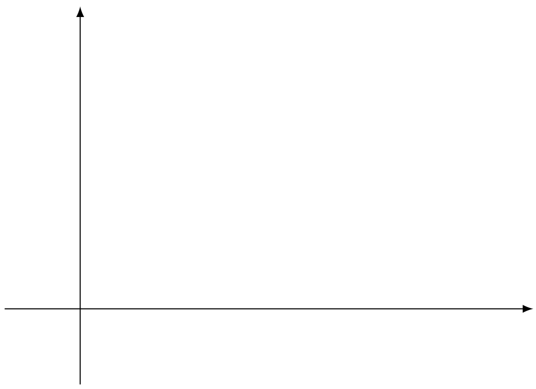
$$\forall x \in I, \quad \underline{\hspace{3cm}},$$

De manière générale, on appelle **extremum** (local ou global) un minimum (local ou global) ou un maximum (local ou global).

Remarque. Un extremum global est un extremum local (mais l'inverse n'est pas toujours vrai).

Théorème 5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si f admet un extremum local en x_0, alors

$$\underline{\hspace{2.5cm}}.$$



Remarque. Autrement dit, les extrema d'une fonction dérivable sont des points critiques (mais, encore une fois, l'inverse n'est pas forcément vrai).

Exemple. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminons les extrema de $f_\lambda : x \mapsto x^2 + \lambda x$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$. Pour les points critiques de f, on distingue plusieurs cas.

- Si $\lambda > 0$, alors $f_\lambda' > 0$. Ainsi f n'admet pas de point critique, et donc pas d'extremum sur $\mathbb{R}$. (En fait, f_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.)
- Si $\lambda = 0$, alors le seul point critique est $x_0 = 0$, mais ce n'est pas un extremum local : en effet, on a $f_0(x) > 0$ lorsque $x > 0$ et $f_0(x) < 0$ lorsque $x < 0$.

- Si $\lambda > 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'_\lambda(x) = 3x^2 - |\lambda| = 3\left(\underline{\qquad\qquad}\right)\left(\underline{\qquad\qquad}\right).$$

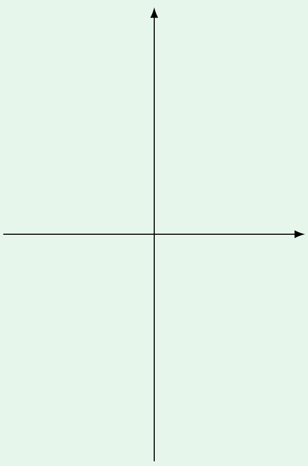
On trouve donc deux points critiques

$$x_1 = \underline{\qquad\qquad} \quad \text{et} \quad x_2 = \underline{\qquad},$$

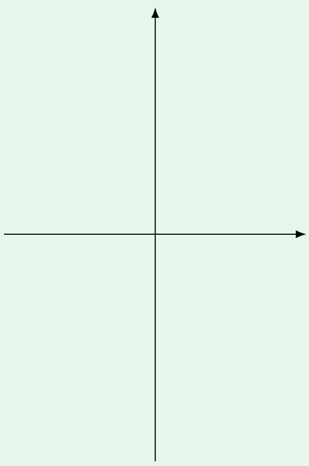
et on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
f				

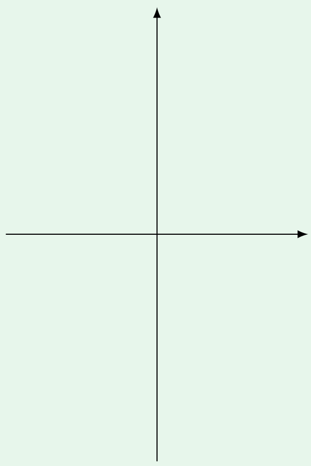
Ainsi, x_1 est un maximum local et x_2 est un minimum local.



Cas $\lambda > 0$



Cas $\lambda = 0$



Cas $\lambda < 0$

Remarque. Attention, de manière générale, les extrema d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ peuvent se trouver sur les points critiques de f (d'après le théorème 5), mais aussi :

- aux extrémités de I lorsqu'elles appartiennent à I (dans le cas où I n'est pas un intervalle ouvert),
- aux éventuels points où f n'est pas dérivable (par exemple, $x_0 = 0$ est un minimum global de la fonction valeur absolue).

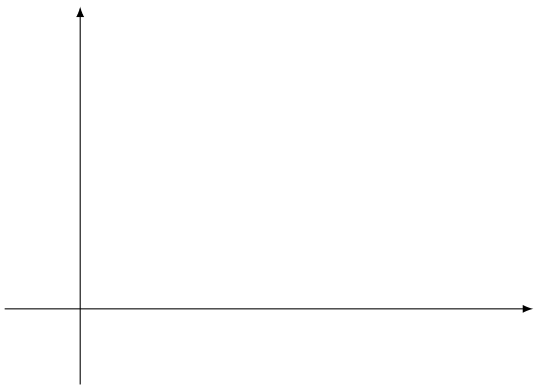
VII.7.2. Applications de la dérivabilité

Théorème de Rolle

Théorème 6. (Théorème de Rolle) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- f est ______ sur $[a, b]$,
- f est ______ sur $]a, b[$,
- ______ ,

alors il existe un $c \in$ ____ tel que ______ .



Remarque.

- C'est seulement un théorème d'*existence*, c'est-à-dire qu'il ne permet pas à lui seul de donner une valeur exacte ou une expression pour c.
- Il n'y a aucune raison que c soit unique en général.

Exemple. Étudions le polynôme

$$P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$$

avec $n \geqslant 2$ un entiers et les α_i des réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.

- **Montrons que P' a $n-1$ racines distinctes.**
  Vu comme une fonction réelle, P est continue et dérivable (car polynomiale).
  - Comme $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = 0$, alors d'après le théorème de Rolle il existe $c_1 \in$ ______ tel que $P'(c_1) = 0$.
  - Plus généralement, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $P(\alpha_k) = P(\alpha_{k+1}) = 0$, alors d'après le théorème de Rolle il existe $c_k \in$ ______ tel que ______ .

  Les $n-1$ racines de P' ainsi trouvées sont bien distinctes, puisqu'on a

  $$\alpha_1 < c_1 < \alpha_2 < c_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_{n-1} < c_{n-1} < \alpha_n,$$

  et comme de plus P' est de degré $n-1$ on sait qu'il n'existe pas d'autre racine.

- **Montrons que $P + P'$ a au moins $n - 1$ racines distinctes.**
  L'astuce est d'étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)\exp(x)$. En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$), et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

  $$f'(x) = P'(x)\exp(x) + P(x)\exp(x) = (P(x) + P'(x))\exp(x).$$

  Or, la fonction f s'annule là où P s'annule, c'est-à-dire en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Avec le même raisonnement que précédemment, on peut montrer à l'aide du théorème de Rolle qu'il existe des réels

  $$\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{n-1}$$

  tels que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$ on a $f'(\gamma_k) = 0$. Or, la fonction exponentielle ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, c'est donc nécessairement que $P + P'$ s'annule en γ_k.

  Par ailleurs la théorie des polynômes garantit que, comme $P + P'$ est de degré n, il admet n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec leurs multiplicité). Autrement dit, $P + P'$ possède nécessairement une n-ième racine $\gamma_n \in \mathbb{C}$. Or comme $P + P'$ est à coefficients réels, cette racine γ_n est nécessairement réelle, sinon on aurait une $(n+1)$-ième racine $\bar{\gamma}_n$. Il resterait encore à étudier les variations de f pour se convaincre que cette n-ième racine γ_n est distinctes des $n - 1$ autres racines trouvées précédemment …

Démonstration. (Théorème de Rolle) Remarquons tout d'abord que si f est constante sur $[a, b]$, alors f' est identiquement nulle et donc n'importe quel $c \in \,]a, b[$ convient. Supposons donc maintenant que f n'est pas constante.

- Cela signifie qu'il existe $x_0 \in \,]a, b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Plus précisément, supposons que $f(x_0) > f(a)$ (la preuve dans le cas $f(x_0) < f(a)$ serait similaire).
- Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, on sait qu'elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier elle admet donc un maximum en $c \in [a, b]$. Comme

  $$f(c) \geqslant f(x_0) > f(a) = f(b),$$

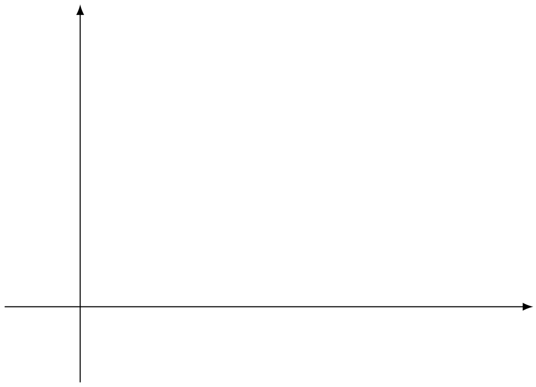
  on peut affirmer que c n'est égal ni à a, ni à b.
- Ainsi, c est un maximum de f sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ où f est dérivable, donc le théorème 5 garantit que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis

▷ *Ma12, module 15 — Théorème des accroissements finis*

Théorème 7. (Théorème des accroissements finis) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in$ ____ tel que

____________________.



Démonstration. On va démontrer le théorème des accroissements finis à partir du théorème de ROLLE. Pour cela, considérons la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - \ell(x-a) \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ainsi :

- $g(b) = f(b) - \ell(b-a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) = g(a)$,
- g est la somme de la fonction f et d'une fonction polynomiale, donc g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

D'après le théorème de ROLLE, il existe $c \in\ ]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or, comme $g' : x \mapsto f'(x) - \ell$, cela revient à

$$f'(c) = \ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Corollaire 3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors :

1. $\forall x \in\ ]a,b[\ ,\ f'(x) \geqslant 0 \iff f$ est ________ sur $[a,b]$,
2. $\forall x \in\ ]a,b[\ ,\ f'(x) \leqslant 0 \iff f$ est ________ sur $[a,b]$,
3. $\forall x \in\ ]a,b[\ ,\ f'(x) = 0 \iff f$ est ________ sur $[a,b]$.

On a également les résultats suivants :

4. si $\forall x \in\ ]a,b[\ ,\ f'(x) > 0$ alors f est ________________ sur $[a,b]$,
5. si $\forall x \in\ ]a,b[\ ,\ f'(x) < 0$ alors f est ________________ sur $[a,b]$.

Remarque. Attention, les réciproques des assertions 4 et 5 sont fausses. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $[-1,1]$, et pourtant $f'(0) = 0$.

Démonstration.

1. On raisonne par double implication :

   ($\Leftarrow$) Supposons $f' \geqslant 0$ sur $]a,b[$. Soient $x, y \in\ ]a,b[$ avec $x \leqslant y$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in\ ]a,b[$ tel que

   $$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x).$$

   Or, comme $x - y \geqslant 0$ et $f'(c) \geqslant 0$, on en déduit que $f(y) - f(y) \geqslant 0$, c'est-à-dire $f(y) \geqslant f(x)$.

On vient donc de démontrer que

$$\forall\, x, y \in]a, b[\,, \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$$

ce qui est la définition d'une fonction croissante.

($\Rightarrow$) Supposons maintenant f croissante. Soit $x \in]a, b[$. Pour tout $y > x$ on a donc $y - x > 0$ et $f(y) - f(x) \geqslant 0$. Ainsi, le taux d'accroissement

$$\frac{f(y) - f(x)}{x - y}$$

est positif, donc à la limite quand y tend vers x, sa limite $f'(x)$ est également positive.

2. Analogue à 1.
3. Se démontre à partir des deux résultats précédents, en remarquant que

$$f' = 0 \iff (f' \geqslant 0 \text{ et } f' \leqslant 0) \qquad \text{et} \qquad f \text{ constante} \iff (f \text{ croissante et } f \text{ décroissante}).$$

4, 5. Admises.

Remarque. Attention à bien se rappeler que ces résultats ne sont valables que sur des *intervalles*. Par exemple, la fonction inverse $f : x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $f'(x) < 0$. On peut en déduire que f est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_-$ et sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, mais elle n'est **pas** strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est pas un intervalle).

Corollaire 4. (Inégalité des accroissements finis) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in I, \quad \underline{\hspace{3cm}}\,,$$

alors on peut en déduire que

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \underline{\hspace{6cm}}\,.$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in I$, tels que $x < y$ (sinon il suffit d'échanger les rôles de x et y). Comme I est un intervalle, on a bien $[x, y] \subset I$, donc f est dérivable (et donc continue) sur $[a, b]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

Or par hypothèse on a $|f'(c)| \leqslant M$, donc en multipliant par $|x - y|$ qui est positif on trouve bien

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \times |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Exemple. Intéressons-nous à la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}$ (qui est un intervalle ouvert) et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|f'(x)| = |\cos(x)| \leqslant 1.$$

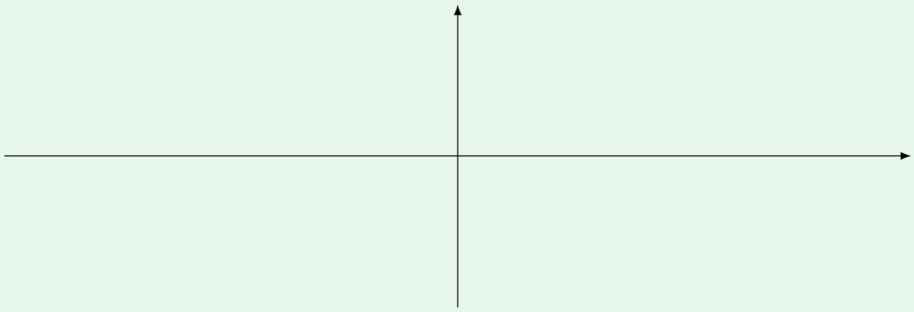
L'inégalité des accroissements finis permet d'affirmer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

En particulier en posant $y = 0$, on trouve

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leqslant |x|$$

ce qui se traduit géométriquement par le fait que le graphe de la fonction sinus est compris entre les graphes des fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto -|x|$, ou de manière équivalente, entre les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ (et on peut dire de même du graphe de $x \mapsto -\sin x$).



L'encadrement obtenu est d'autant plus précis que x est proche de zéro.

VII.8. Trigonométrie circulaire et hyperbolique

Les fonctions trigonométriques circulaires sont toutes les fonctions en lien avec le cercle trigonométrique, notamment *cosinus*, *sinus* et *tangente* qui ont été revues dans la section I.3. Dans cette nouvelle section, nous allons introduire :

- d'une part, des réciproques « partielles » de ces fonctions circulaires usuelles,
- d'autre part, de nouvelles fonctions trigonométriques dites « hyperboliques » (et leurs réciproques), qui sont des analogues des fonctions circulaires.

VII.8.1. Fonctions circulaires inverses

▷ *MA12, module 17 — Fonctions circulaires inverses*

Les fonctions circulaires inverses se construisent grâce aux résultats de la section VII.5.

- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective. En revanche, sa restriction sur ____ est strictement décroissante, donc réalise une bijection de ____ vers $\cos($ ____ $) = [-1, 1]$.
- La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective. En revanche, sa restriction sur ______ est strictement croissante, donc réalise une bijection de ______ vers $\sin($ ______ $) = [-1, 1]$.

Définition 20.

- La fonction **arccosinus**, notée $\arccos$, est la bijection réciproque de la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \underline{\qquad} & \longrightarrow & [-1,1] \\ \theta & \longmapsto & \cos(\theta). \end{array}\right.$$

  Autrement dit, c'est l'unique fonction $\arccos : [-1,1] \to \underline{\qquad}$ telle que

$$\forall\,\theta \in \underline{\qquad}, \quad \arccos(\cos(\theta)) = \theta \qquad \text{et} \qquad \forall\,x \in \underline{\qquad}, \quad \cos(\arccos(x)) = x.$$

- La fonction **arcsinus**, notée $\arcsin$, est la bijection réciproque de la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \underline{\qquad} & \longrightarrow & [-1,1] \\ \theta & \longmapsto & \sin(\theta). \end{array}\right.$$

  Autrement dit, c'est l'unique fonction $\arcsin : [-1,1] \to \underline{\qquad}$ telle que

$$\forall\,\theta \in \underline{\qquad}, \quad \arcsin(\sin(\theta)) = \theta \qquad \text{et} \qquad \forall\,x \in \underline{\qquad}, \quad \sin(\arcsin(x)) = x.$$

Proposition 19. Pour tout $x \in [-1,1]$ on a :

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{et} \qquad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Démonstration. Rappelons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a l'identité fondamentale : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

1. Soit $x \in [-1,1]$. En prenant $\theta = \arccos(x)$ dans l'identité ci-dessus, on trouve

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2.$$

   C'est donc que $\sin(\arccos(x))$ vaut $\sqrt{1-x^2}$ ou $-\sqrt{1-x^2}$. Or, par définition $\arccos(x)$ appartient à l'intervalle $[0,\pi]$ sur lequel la fonction $\sin$ est positive, on retient donc la solution :

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

2. Soit $x \in [-1,1]$. En prenant $\theta = \arcsin(x)$ dans l'identité ci-dessus, on trouve

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2.$$

   C'est donc que $\cos(\arcsin(x))$ vaut $\sqrt{1-x^2}$ ou $-\sqrt{1-x^2}$. Or, par définition $\arcsin(x)$ appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur lequel la fonction $\cos$ est positive, on retient donc la solution :

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Proposition 20. Les fonction arccos et arcsin sont dérivables sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\arccos'(x) = \_\_\_\_\_\_ \qquad \text{et} \qquad \arcsin'(x) = \_\_\_\_\_\_ .$$

Démonstration. C'est une application de la proposition 18. En effet :

- sur $]0,\pi[$ la fonction cos est dérivable et sa dérivée $x \mapsto -\sin(x)$ ne s'annule pas, donc arccos est dérivable sur $\cos(]0,\pi[) =]-1,1[$,
- sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ la fonction sin est dérivable et sa dérivée $x \mapsto \cos(x)$ ne s'annule pas, donc arcsin est dérivable sur $\sin(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[) =]-1,1[$.

L'expression de leurs dérivées est aussi donnée par cette même proposition, mais le mieux est encore de savoir les retrouver en dérivant l'expression $f(f^{-1}(x))$.

1. Pour tout $x \in]-1,1[$ on a
$$\cos(\arccos(x)) = x$$
donc en dérivant les deux termes de l'égalité on trouve pour tout $x \in]-1,1[$
$$\arccos'(x) \times (-\sin(\arccos(x)) = 1$$
autrement dit
$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \_\_\_\_\_\_ .$$
2. Pour tout $x \in]-1,1[$ on a
$$\sin(\arcsin(x)) = x$$
donc en dérivant les deux termes de l'égalité on trouve pour tout $x \in]-1,1[$
$$\arcsin'(x) \times \cos(\arcsin(x) = 1$$
autrement dit
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \_\_\_\_\_\_ .$$

On peut réaliser exactement le même travail avec la fonction tangente. Celle-ci ne réalise pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en revanche sa restriction sur ______ est strictement croissante.

Définition 21. La fonction **arctangente**, notée arctan, est la bijection réciproque de la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \_\_\_\_\_\_ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \tan(\theta). \end{array}\right.$$

Autrement dit, c'est l'unique fonction $\arctan : \mathbb{R} \to$ ______ telle que

$$\forall\, \theta \in \_\_\_\_\_\_, \quad \arctan(\tan(\theta)) = \theta \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \_, \quad \tan(\arctan(x)) = x.$$

Proposition 21. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\arctan'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Démonstration. À savoir retrouver en s'inspirant de la démonstration de la proposition 20.

VII.8.2. Fonctions hyperboliques

▷ *MA12, module 18 — Fonctions hyperboliques*

Fonctions hyperboliques directes

Définition 22.

- On appelle fonction **cosinus hyperbolique**, notée cosh ou parfois simplement ch, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\cosh(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- On appelle fonction **sinus hyperbolique**, notée sinh ou parfois simplement sh, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\sinh(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Remarque. On notera évidemment une forte ressemblance avec les formules d'EULER pour cos et sin.

Proposition 22.

- La fonction cosh est paire et la fonction sinh.
- Les fonctions cosh et sinh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh'(x) = \underline{\hspace{1.5cm}}, \qquad \sinh'(x) = \underline{\hspace{1.5cm}}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'identité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
- Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\cosh(a+b) &= \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b), & \cosh(2a) &= \cosh^2(a) + \sinh^2(a)\\
\sinh(a+b) &= \sinh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\cosh(b), & \sinh(2a) &= 2\sinh(a)\cosh(a),\\
\cosh(a-b) &= \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b), & &\\
\sinh(a-b) &= \sinh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\cosh(b). & &
\end{aligned}$$

● **Démonstration.** Ces identités se démontrent par le calcul en remplaçant à chaque fois $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ par leurs expressions en fonction de e^x et e^{-x}.

Par analogie avec les fonctions circulaires, on définit la tangente hyperbolique à partir du sinus hyperbolique et du cosinus hyperbolique.

Définition 23. On appelle fonction **tangente hyperbolique**, notée $\tanh$ ou parfois simplement th, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Proposition 23. La fonction $\tanh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser que $\tanh$ est le quotient des fonctions dérivables $\sinh$ et $\cosh$.

Fonctions hyperboliques réciproques

Comme dans la section précédente, on va pouvoir définir des réciproques aux fonctions hyperboliques en remarquant que :

- $\cosh$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\cosh(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$,
- $\sinh$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
- $\tanh$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\tanh(\mathbb{R}) =]-1, 1[$,

Définition 24.

- La fonction **argcosinus hyperbolique**, notée $\operatorname{argcosh}$ ou parfois simplement argch, est la bijection réciproque de la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \cosh(x). \end{array} \right.$$

  Autrement dit, c'est l'unique fonction $\operatorname{argcosh} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que

$$\forall\, x \in [0, +\infty[\,, \quad \operatorname{argcosh}(\cosh(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in [1, +\infty[\,, \quad \cosh(\operatorname{argcosh}(x)) = x.$$

- La fonction **argsinus hyperbolique**, notée $\operatorname{argsinh}$ ou parfois simplement argsh, est la bijection réciproque de la fonction $\sinh$. Autrement dit, c'est l'unique fonction $\operatorname{argsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsinh}(\sinh(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sinh(\operatorname{argsinh}(x)) = x.$$

  On peut donc aussi la noter $\sinh^{-1}$.

- La fonction **argtangente hyperbolique**, notée $\operatorname{argtanh}$ ou parfois simplement argth, est la bijection réciproque de la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1, 1[\\ x & \longmapsto & \tanh(x). \end{array} \right.$$

  Autrement dit, c'est l'unique fonction $\operatorname{argtanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argtanh}(\tanh(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in]-1, 1[\,, \quad \tanh(\operatorname{argtanh}(x)) = x.$$

Contrairement aux fonctions circulaires réciproques qui ne possèdent pas d'expressions « simples », les fonctions hyperboliques réciproques peuvent s'exprimer à l'aide de la fonction logarithme népérien.

Proposition 24.

1. Pour tout $y \in [1, +\infty[$, $\operatorname{argcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.
2. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.
3. Pour tour $y \in]-1, 1[$,
$$\operatorname{argtanh}(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Démonstration.

1. Soit $(x, y) \in [0, +\infty[\times [1, +\infty[$. On a :
$$y = \cosh(x) \iff y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \iff e^x - 2y + e^{-x} = 0 \iff (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$
Or, le polynôme $P(X) = X^2 - 2yX + 1$ a pour discriminant $\Delta = (2y)^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$ qui est positif car $y \geqslant 1$. P admet donc les deux racines
$$\alpha_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$
Lorsque $y = 1$, on a en fait une seule même racine double $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. En revanche lorsque $y > 1$, on peut montrer (c'est un bon exercice) que $0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2$ et on a alors :
$$y = \cosh(x) \iff (e^x = \alpha_1 \text{ ou } e^x = \alpha_2) \iff (x = \ln(\alpha_1) \text{ ou } x = \ln(\alpha_2)).$$
Comme on a fixé $x \geqslant 0$, il faut retenir seulement la solution $x = \ln(\alpha_2)$ qui est la seule positive. On a donc finalement l'équivalence
$$y = \cosh(x) \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On a :
$$y = \sinh(x) \iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff e^x - 2y - e^{-x} = 0 \iff (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$
Or, le polynôme $P(X) = X^2 - 2yX + 1$ a pour discriminant $\Delta = (2y)^2 + 4 = 4(y^2 + 1) > 0$. P admet donc deux racines distinctes
$$\alpha_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1} \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$
On peut montrer que $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$. En effet :
   - si $y \geqslant 0$, alors $\alpha_1 = \sqrt{y^2} - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ car la fonction racine carrée est strictement croissante, et par ailleurs on a clairement $\alpha_2 > 0$ comme somme de deux termes positifs (l'un strictement),
   - si $y < 0$, alors $\alpha_2 = -\sqrt{y^2} + \sqrt{y^2 + 1} > 0$ car la fonction racine carrée est strictement croissante, et par ailleurs on a clairement $\alpha_1 < 0$ comme somme de deux termes strictement négatifs.

   Ainsi on a :
$$y = \sinh(x) \iff (e^x = \alpha_1 \text{ ou } e^x = \alpha_2) \iff x = \ln(\alpha_2),$$
le cas $e^x = \alpha_1$ étant impossible car $\exp$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$. On a :

$$y = \tanh(x) \iff y(e^x + e^{-x}) = e^x - e^{-x} \iff (1-y)e^x = (1+y)e^{-x} \iff (e^x)^2 = \frac{1+y}{1-y}.$$

Comme $y \in]-1, 1[$, les termes $1 + y$ et $1 - y$ sont tous deux strictement positifs, il en va donc de même de leur quotient. On a alors :

$$y = \tanh(x) \iff e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \iff x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) \iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Chapitre VIII.

Suites numériques

VIII.1. Définitions générales

▷ *MA12, module 3 — Introduction aux suites numériques*

Définition 1. Une **suite** à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Toutefois, on se permet habituellement quelques différence de notations avec les applications :

- la suite u peut également être notée $(u_n)_{n \geqslant 0}$, ou plus simplement $(u_n)_n$, voire (u_n),
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n plutôt que $f(n)$ l'image de n, et on l'appelle le **terme** d'indice n de la suite (u_n).

Remarque.

- L'idée derrière ces notations est qu'une suite est souvent pensée comme une succession infinie de termes $u_0, u_1, u_2, \ldots$ plutôt que comme une application classique.
- On peut aussi définir une suite seulement à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire comme une application de $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$). On note alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

Exemple.

- La suite $(\sqrt{n})_{n \geqslant 0}$ correspond à l'application $n \mapsto \sqrt{n}$. Ses termes successifs sont :

$$0,\ 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \ldots$$

- La suite $((-1)^n)_{n \geqslant 0}$ dont les termes sont $1, -1, 1, -1, \ldots$.
- La suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geqslant 0}$ est la suite définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

(on dit que la suite est définie par une *relation de récurrence*). Ses premiers termes sont $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

- La suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geqslant 1}$ a pour premiers termes : $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$.

Définition 2. Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que :

- $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **majorée** si $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant n_0,$ ________ ,
- $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **minorée** si $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant n_0,$ ________ ,
- $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée ou, de manière équivalente, si

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ \_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

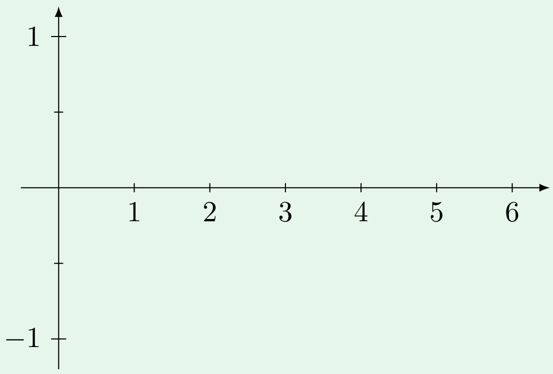
Définition 3. Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que :

- $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **croissante** si $\forall\, n \geqslant n_0$, ________ ,
- $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **strictement croissante** si $\forall\, n \geqslant n_0$ ________ ,
- $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **décroissante** si $\forall\, n \geqslant n_0$, ________ ,
- $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **strictement décroissante** si $\forall\, n \geqslant n_0$, ________ ,
- $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Exemple.

- Considérons la suite $(S_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $S_n = S \times (1{,}1)^n$.
  - Si $S = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 0$. La suite (S_n) est **constante**.
  - Si $S > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = S \times (1{,}1)^n > 0$. De plus,
  $$\frac{S_{n+1}}{S_n} = (1{,}1)^n > 1$$
  donc en multipliant par $S_n > 0$ on trouve $S_{n+1} > S_n$. La suite est strictement croissante.
  - Si $S < 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = S \times (1{,}1)^n < 0$. De plus,
  $$\frac{S_{n+1}}{S_n} = (1{,}1)^n > 1$$
  donc en multipliant par $S_n < 0$ on trouve $S_{n+1} < S_n$. La suite est strictement décroissante.

  Soyez donc très prudents quand vous passez par le quotient u_{n+1}/u_n pour étudier la monotonie d'une suite. Pour pouvoir conclure, il faut que (u_n) reste de signe constant, et attention au cas où (u_n) est négative !
- La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = (-1)^n/n$ n'est ni croissante, ni décroissante.



  Elle est majorée par $1/2$ (et cette borne est atteinte en $n = 2$) et minorée par -1 (et cette borne est atteinte en $n = 1$). Elle est donc bornée.
- La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ est strictement décroissante, majorée par 1 (borne atteinte en $n = 1$), minorée par 0 (mais cette borne n'est jamais atteinte).

VIII.2. Limite d'une suite numérique

▷ *MA12, module 4 — Limite d'une suite numérique*

Cette section sera naturellement très analogue à la section VII.2, à la différence près que pour les suites, seule la limite lorsque n tend vers $+\infty$ a du sens. Comme pour les fonctions réelles, en pratique on s'attardera peu sur les raisonnements à base de quantificateurs qui ne sont là que pour vous montrer comment se définit rigoureusement le concept de limite.

VIII.2.1. Définition de la limite

Définition 4. (Limite finie) Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) a pour limite ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \implies \underline{\qquad\qquad\qquad}).$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Définition 5. (Limite infinie) Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que :

- (u_n) a pour limite $+\infty$ si $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \implies u_n \geqslant A)$,
- (u_n) a pour limite $-\infty$ si $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \implies u_n \leqslant -A)$.

Définition 6. On dit qu'une suite réelle (u_n) est **convergente** si elle admet une limite finie. On dit qu'elle est **divergente** dans le cas contraire, c'est-à-dire :

- si elle a pour limite $-\infty$ ou $+\infty$, ou bien
- si elle n'admet pas de limite.

Proposition 1. Si une suite réelle est convergente, alors sa limite est unique.

VIII.2.2. Opérations sur les limites

Proposition 2. (Limites finies) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si u_n converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et si (v_n) converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$, alors :

1. la suite (λu_n) converge vers $\underline{\qquad}$,
2. la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\underline{\qquad\qquad}$,
3. la suite $(u_n \times v_n)$ converge vers $\underline{\qquad\qquad}$.

Si de plus on a $\ell' \neq 0$, alors :

4. la suite $(1/v_n)$ converge vers $1/\ell'$,
5. la suite (u_n/v_n) converge vers $\underline{\qquad}$.

Proposition 3. (Limites infinies) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \underline{\qquad}$

2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} =$ ______
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$ et (v_n) est minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$ ______
4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) est minorée par un nombre $\lambda > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$ ______

Proposition 4. Toute suite réelle convergente est bornée.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition, cela signifie que l'assertion

$$\mathcal{P}(\varepsilon) : \quad \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

est vraie pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier (en prenant $\varepsilon = 1$), on peut affirmer qu'il existe un entier N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$ on a $|u_n - \ell| \leqslant 1$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a alors pour tout $n \geqslant N_1$,

$$|u_n| = |\ell + u_n - \ell| \leqslant |\ell| + |u_n - \ell| \leqslant |\ell| + 1.$$

Ainsi, à partir du rang N, la suite est bornée par la constante $M_1 = |\ell| + 1$.

Mais par ailleurs, les N_1 premiers termes de la suite (u_n) sont bornés par la constante

$$M_2 = \max(u_0, u_1, \dots, u_{N_1-1}),$$

donc finalement la suite (u_n) est bornée par $M = \max(M_1, M_2)$.

Proposition 5. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si (u_n) est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors

______

Exemple. La suite $\left(\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers zéro, car c'est le produit de la suite $(u_n) = (\cos n)$ qui est bornée et de la suite $(v_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ qui tend vers zéro.

Démonstration. Comme (u_n) est bornée, par définition il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n v_n| \leqslant M$. Montrons que $(u_n v_n)$ tend vers zéro, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme (v_n) tend vers zéro, il existe un rang N à partir duquel $|u_n|$ est inférieur à $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M} > 0$. Mais alors pour tout $n \geqslant N$ on a

$$|u_n v_n| = |u_n||v_n| \leqslant M \times \varepsilon' = \varepsilon.$$

Pour la culture, montrons comment ces deux dernières propositions permettent de démontrer que le produit de deux suites convergentes converge vers le produit de leurs limites (Proposition 2).

Démonstration. (Proposition 2, point 3.) On suppose que (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Rappelons que par définition, c'est équivalent à affirmer que les suites $(u_n - \ell)$ et $(v_n - \ell')$ convergent toutes les deux vers zéro. Réécrivons astucieusement l'expression étudiée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n v_n - \ell\ell' = u_n v_n - \ell v_n + \ell v_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell').$$

Or, d'après les propositions précédentes :

- comme la suite constante (ℓ) est bornée et la suite $(v_n - \ell')$ tend vers zéro, alors la suite $(\ell(v_n - \ell))$ tend vers zéro,
- comme la suite $(u_n - \ell)$ converge, alors en particulier elle est bornée, et donc quand on la multiplie à la suite (v_n) qui tend vers zéro, le résultat $((u_n - \ell)v_n)$ converge aussi vers zéro.

Supposant le point 2 déjà démontré, la somme de ces deux suites, c'est-à-dire $(u_n v_n - \ell\ell')$, tend vers zéro, ce qui revient exactement à dire que $(u_n v_n)$ tend vers $\ell\ell'$.

VIII.2.3. Formes indéterminées

Les opérations sur les limites de la section précédente ne balaient pas toutes les situations possibles. Il existe des cas où, connaissant les limites de (u_n) et (v_n), on ne peut pas conclure en général sur la limite de leur somme, ou produit, ou différence, etc. Ces cas là sont appelés des **formes indéterminées**.

Exemple.

- **Forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».** Lorsque $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on ne peut rien dire en général sur la limite de la suite $(u_n - v_n)$.
  1. Si $u_n = e^n$ et $v_n = \ln(n)$, on peut montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n =$ ____
  2. Si $u_n = n$ et $v_n = n^2$, on peut montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n =$ ____
  3. Si $u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)$ et $v_n = n$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n =$ ___
- **Forme indéterminée « $0 \times \infty$ ».** Lorsque $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on ne peut rien dire en général sur la limite de la suite $(u_n \times v_n)$. Par exemple :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \times e^n = \_\_\_\_, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \ln(n) = \_, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times (n+1) = \_.$$

On voit que dans chacune de ces situations, pour de mêmes hypothèses au départ les conclusions ne sont pas les mêmes. Il serait donc impossible de dégager une règle générale et il faudra toujours traiter ces limites au cas par cas. Parmi ces formes indéterminées, on trouve également

$$\frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad 1^\infty, \qquad \ldots$$

VIII.2.4. Limites et comparaisons

Proposition 6. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Si (u_n) et (v_n) sont convergentes et si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, alors

____

2. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, alors

Théorème 1. (Théorème dit « des gendarmes ») Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$,
- (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$,

alors (v_n) est convergente et sa limite est ℓ.

Exemple. Déterminons la limite de la suite (u_n) de terme général

$$u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{1+n+n^2}.$$

L'astuce est d'utiliser l'encadrement $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$. En divisant par $1+n+n^2$ qui est alors strictement positif, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{-1}{1+n+n^2} \leqslant \frac{(-1)^n}{1+n+n^2} \leqslant \frac{1}{1+n+n^2}.$$

On pourrait alors utiliser le théorème des gendarmes pour montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n+n^2} = 0$$

et donc que (u_n) converge vers 2.

VIII.3. Exemples remarquables

▷ *MAI2, module 5 — Exemples remarquables*

VIII.3.1. Suites géométriques

Définition 7. Soit (u_n) une suite réelle et soit $a \in \mathbb{R}$. On rappelle que (u_n) est **géométrique** de **raison** a si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n,$$

ce qui équivaut encore à demander que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times a^n$.

Proposition 7. Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit (u_n) la suite réelle de terme général $u_n = a^n$.

- Si $a = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 1$,
- Si $a > 1$, alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$,
- Si $-1 < a < 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0,
- Si $a \leqslant -1$, alors la suite (u_n) n'admet pas de limite.

Remarque. Attention à bien adapter ces résultats lorsque vous étudiez la suite de terme général $u_n = u_0 \times a^n$ avec $u_0 < 0$.

Démonstration. (Cas $a > 1$) Si $a > 1$, alors a s'écrit $a = 1 + b$ avec $b > 0$. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} b^k \geqslant 1 + nb$$

car les coefficients binomiaux dans la somme et b sont tous positifs. Or, si $b > 0$ alors la suite $(1 + nb)$ diverge vers $+\infty$, donc par comparaison on a de même $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 8. (Série géométrique) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors :

.

Démonstration. Remarquons que pour tout $a \neq 1$, on obtient en développant :

$$(1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k = \left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) - a\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} a^{k+1}\right).$$

Il suffit maintenant de reconnaître qu'on est dans le cas d'une somme télescopique. En effet, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = a_0 + \left(\sum_{k=1}^{n} a^k\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a^k = \left(\sum_{k=1}^{n} a^k\right) + a^{n+1}.$$

On trouve donc

$$(1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k = a^0 - a^{n+1} = 1 - a^{n+1}$$

et il suffit de diviser par $1 - a$ (qui est bien non-nul lorsque $a \neq 1$) pour retrouver la formule annoncée.

Remarque.

1. En réalité, la formule reste valable pour $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
2. Si $a = 1$, on est simplement en train d'étudier la somme

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = \underline{\qquad}.$$

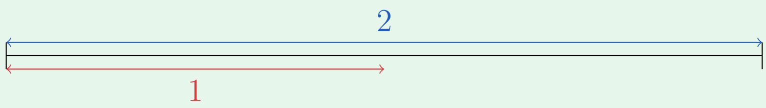
Remarque. (Un pas vers la deuxième année ...) Notons (S_n) la **série** de terme général a^n, c'est-à-dire la suite définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^n.$$

La proposition précédente permet d'affirmer que, lorsque $a \in \,]-1, 1[$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \underline{\qquad}.$$

Intuitivement, on est en train de dire que la somme $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots$ formée d'une infinité de termes donne une valeur finie. Ci-dessous, un interprétation géométrique de ce phénomène lorsque $a = \frac{1}{2}$.



VIII.3.2. Comparaison à une suite géométrique

Théorème 2. Soit (u_n) une suite de réels non-nuls. S'il existe une constante $\ell \in \,]0, 1[$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \ell,$$

alors la suite (u_n) converge vers $\underline{\quad}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors (par télescopage) :

$$\frac{u_n}{u_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}.$$

En utilisant la majoration donnée dans les hypothèses, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{u_n}{u_0} \right| = \prod_{k=0}^{n-1} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leqslant \prod_{k=0}^{n-1} \ell = \ell^n.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $|u_0|$ (qui est strictement positif), on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < |u_n| < |u_0| \ell^n.$$

Or, puisque $\ell \in \,]0, 1[$, on peut affirmer que la suite (ℓ^n) converge vers zéro. D'après le théorème des gendarmes, la suite $|u_n|$ converge donc elle aussi vers zéro, ce qui est équivalent à affirmer que (u_n) tend vers zéro.

Corollaire 1. Soit (u_n) une suite de réels non-nuls. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 \implies \underline{\qquad\qquad}.$$

Exemple. Ceci permet de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Si $a = 0$, le résultat est évident. Supposons donc $a \neq 0$ et notons $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \underline{\hspace{2cm}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et le corollaire permet de conclure immédiatement.

VIII.4. Théorèmes de convergence

▷ *MA12, module 6 — Théorèmes de convergence*

VIII.4.1. Convergence des suites monotones

Théorème 3. Soit (u_n) une suite à valeurs réelles.

1. Si (u_n) est croissante et majorée, alors ____________ .
2. Si (u_n) est croissante et n'est pas majorée, alors ________________ .

Remarque. De manière analogue,

1. si (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge,
2. si (u_n) est décroissante et n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite à valeurs réelles croissante..

1. Supposons que (u_n) soit majorée par un réel M. Alors l'ensemble

$$A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

   formé par les termes de la suite (u_n) est lui-aussi majoré par M, et est clairement non-vide. Il admet donc une borne supérieure $\ell = \sup A$. Montrons que (u_n) converge vers cette valeur ℓ.
   Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe un élément $x \in A$ à une distance inférieure à ε de ℓ, c'est-à-dire tel que $\ell - \varepsilon < x \leqslant \ell$. Par définition de A, x est l'un des termes de la suite, c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_N$. Pour tout $n \geqslant N$,
   - comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geqslant u_N > \ell - \varepsilon$,
   - comme $u_n \in A$, on a $u_n \leqslant \ell = \sup A$.

   On a donc pour tout $n \geqslant N$, $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell$, d'où en particulier $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
2. Supposons maintenant que (u_n) ne soit pas majorée, et montrons qu'alors elle tend vers $+\infty$.
   Soit $M > 0$. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > M$. Or, comme la suite (u_n) est croissante, on peut affirmer que pour tout $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant u_N > M$. On retrouve la définition d'une limite infinie.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^n} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

On montre facilement que (u_n) est ______, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \underline{\qquad\qquad} > 0.$$

Il est un peu plus délicat de montrer que (u_n) est majorée. L'astuce est de démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

- **Initialisation.** Pour $n = 1$, on a d'une part $u_n = 1$ et d'autre part $2 - \frac{1}{n} = 1$ donc l'assertion $\mathcal{P}(1)$ est vraie (puisqu'il s'agit d'une inégalité large).
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'assertion $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

  $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

  L'astuce est ensuite de remarquer que

  $$\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

  On trouve finalement

  $$u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}$$

  ce qui prouve que l'assertion $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

La propriété ainsi démontrée par récurrence implique en particulier que la suite (u_n) est majorée par 2. On a donc une suite croissante et majorée par 2, on en déduit qu'elle converge vers une valeur $\ell \geqslant 2$ (mais pas forcément égale à 2 ! On pourrait en fait montrer par des moyens plus techniques que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.)

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On montre facilement que (u_n) est ______, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \underline{\qquad\qquad} > 0.$$

Toutefois, cette suite n'est pas majorée. L'astuce, proposée par Nicole Oresme au XIVe siècle, est de regrouper astucieusement les termes de la somme comme illustré ci-dessous.

$$1 + \underset{\geqslant \frac{1}{2}}{\boxed{\frac{1}{2}}} + \underset{\geqslant \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}{\overset{2\text{ termes}}{\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}}} + \underset{\geqslant \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}{\overset{4\text{ termes}}{\boxed{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}}} + \underset{\geqslant \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}{\overset{8\text{ termes}}{\boxed{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}}} + \boxed{\frac{1}{17} + \cdots}$$

Plus rigoureusement, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_{2^p} - u_{2^{p-1}} = \sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} \frac{1}{k} = \frac{1}{2^{p-1}+1} + \frac{1}{2^{p-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^p}.$$

Chacun des termes de cette somme est plus grand que $\frac{1}{2^p}$, et le nombre de termes est égal à $2^p - 2^{p-1} = 2^{p-1}$, donc finalement

$$u_{2^p} - u_{2^{p-1}} \geqslant 2^{p-1} \times \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2}.$$

Finalement, on a donc :

$$u_{2^p} = u_1 + \sum_{k=1}^{p} (u_{2^p} - u_{2^{p-1}}) \geqslant u_1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2} = 1 + \frac{p}{2}.$$

Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} 1 + \frac{p}{2} = +\infty$, cela signifie qu'on peut trouver des termes u_{2p} arbitrairement grands. La suite (u_n) n'est ainsi pas majorée, et tend donc vers $+\infty$.

VIII.4.2. Suites adjacentes

Définition 8. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si :

1. (u_n) est croissante et (v_n) est ____________,
2. pour tout $n \geqslant 0$ on a ________,
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) =$ ____

L'intérêt du concept de *suites adjacentes* réside dans le théorème suivant.

Théorème 4. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles. Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent toutes les deux et ont la même limite.

Démonstration. Supposons (u_n) et (v_n) adjacentes.

- Utilisant l'hypothèse 2 et le fait que (v_n) est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Ainsi, (u_n) est croissante et majorée par v_0, elle converge donc vers une limite ℓ_1.
- De même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge vers une limite ℓ_2.
- Par opération sur les limites, la suite $(v_n - u_n)$ converge alors vers $\ell_2 - \ell_1$. Mais par hypothèse on sait aussi que cette suite converge vers 0. Par unicité de la limite, on en déduit que $\ell_2 - \ell_1 = 0$, c'est-à-dire $\ell_1 = \ell_2$.

Exemple. Voici une façon alternative de montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^n} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

que nous avons déjà traitée dans un exemple précédent. Considérons la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ définie par

$$v_n = u_n - \frac{2}{n+1}.$$

- La suite (u_n) est __________ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$.
- La suite (v_n) est __________ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{2}{n+2}\right) - \left(u_n + \frac{2}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1}$$

  d'où

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1) + 2(n+1)^2 - 2(n+1)(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{-n}{(n+1)^2(n+2)} < 0.$$

- On a clairement

$$v_n - u_n = \frac{2}{n+1}$$

  ce qui garantit à la fois que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et donc convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Notons de plus que, grâce aux suites adjacentes, il est possible de donner un encadrement de ℓ en théorie aussi précis que possible, puisque

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

En pratique, cela dépendra toutefois de la vitesse de convergence de la suite $(v_n - u_n)$. Dans ce cas par exemple, pour obtenir un intervalle $[u_n, v_n]$ de largeur inférieure à 10^{-p}, il faut prendre $n \geqslant 2 \times 10^p - 1$. Cela signifie que pour obtenir un chiffre significatif de plus sur ℓ, il faut calculer environ 10 fois plus de termes.

VIII.4.3. Suites extraites

Définition 9. Soit (u_n) une suite. On appelle **suite extraite** (ou **sous-suite**) de (u_n) toute suite de la forme $(u_{\phi(n)})$ avec $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application __________________.

Exemple. Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

- Si on prend $\phi : n \mapsto 2n$, alors la sous-suite $(u_{\phi(n)})$ a pour terme général

$$u_{\phi(n)} = u_{2n} = (-1)^2 = 1,$$

  autrement dit elle est constante à 1.
- Si on prend $\phi : n \mapsto 3n$, alors cette fois

$$u_{\phi(n)} = (-1)^{3n} = ((-1)^3)^n = (-1)^n = u_n.$$

  On retombe sur la même suite qu'au départ.

Proposition 9. Soit (u_n) une suite. Si (u_n) converge vers ℓ, alors toute suite extraite de (u_n) ________________.

Remarque. Cette proposition est très utile sous sa forme contraposée pour montrer qu'une suite diverge. Par exemple, on utilise fréquemment les résultats suivants :

- si (u_n) admet une sous-suite divergente, alors (u_n) diverge,
- si (u_n) admet deux sous-suites convergeant vers des limites différentes, alors (u_n) diverge.

Exemple. Considérons la suite (u_n) de terme général $u_n = (-1)^n$. Alors :

- la sous-suite (u_{2n}) est constante à 1, donc converge vers 1,
- la sous-suite (u_{2n+1}) est constante à -1, donc converge vers -1.

Comme (u_n) admet deux sous-suites convergeant vers des limites différentes, on peut affirmer que (u_n) diverge.

Théorème 5. (Théorème de Bolzano–Weierstrass) Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

Exemple.

1. La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée, elle admet donc au moins une suite convergente. En fait, on en a déjà trouvée quelques unes, par exemple (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
2. La suite (v_n) définie par $v_n = \cos n$ est bornée, elle admet donc au moins une suite convergente. Dans ce cas là toutefois, il est moins facile de l'expliciter.

VIII.5. Étude des suites récurrentes

▷ *MA12, module 19 — Suites récurrentes*

VIII.5.1. Généralités

Définition 10. On appelle **suite récurrente** une suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Remarque. Plus généralement, on peut aussi s'autoriser à utiliser une fonction f définie seulement sur un sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$. Dans ce cas, il faut vérifier que $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$ pour s'assurer que l'on pourra bien appliquer la relation de récurrence indéfiniment.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f(x) = 1 + \sqrt{x}.$$

Les premiers termes de cette suite sont :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad u_2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \quad u_3 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}, \quad \dots$$

Proposition 10. Soit (u_n) une suite récurrente, définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la fonction f est continue et si (u_n) converge vers ℓ, alors

____

(autrement dit, ℓ est un *point fixe* de f).

Démonstration. Sachant que (u_n) tend vers ℓ, on peut affirmer que :

- d'une part, la suite extraite (u_{n+1}) converge également vers ℓ,
- d'autre part, comme f est continue, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Comme on a pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, par passage à la limite on obtient bien $\ell = f(\ell)$.

VIII.5.2. Cas d'une fonction croissante

Proposition 11. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ et soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est continue et croissante, alors la suite (u_n) est ________ et converge vers un réel $\ell \in [a, b]$ tel que ________ .

Démonstration.

- Remarquons déjà que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a, b]$. En effet, cela se démontre par récurrence :
  - $u_0 \in [a, b]$, on peut donc calculer $u_1 = f(u_0)$ qui appartient alors à $f([a, b]) \subset [a, b]$,
  - si, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, u_n est bien défini et appartient à $[a, b]$, alors on peut calculer $u_{n+1} = f(u_n)$ qui appartient alors à $f([a, b]) \subset [a, b]$.
- La monotonie se démontre elle-aussi par récurrence, avec une disjonction de cas sur l'ordre des deux premiers termes u_0 et u_1.
  - Si $u_1 \geqslant u_0$, on peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$. En effet, l'initialisation est immédiate, et si pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} \geqslant u_n$, alors on en appliquant la fonction f qui est croissante on obtient $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) = u_{n+1}$.
  - Si $u_1 \leqslant u_0$, on montre de même que (u_n) est décroissante.
- Les deux résultats précédents montrent que la suite (u_n) est minorée par a, majorée par b, et est soit croissante soit décroissante. On peut donc affirmer qu'elle converge vers une limite $\ell \in [a, b]$. L'affirmation $f(\ell) = \ell$ n'est ensuite qu'une application de la proposition 10.

Exemple. (Étude complète d'une suite récurrente) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)(x - 2) + x.$$

Étudions la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0, 2]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudions la fonction f. Il s'agit d'une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale), et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(2x(x-2) + (x^2 - 1)\right) + 1 = \frac{1}{4}\left(3x^2 - 4x + 3\right) > 0$$

(car on reconnaît un polynôme de degré 2 irréductible, donc de signe constant sur $\mathbb{R}$). On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et donc que

$$f([0,2]) = [f(0), f(2)] = \left[\tfrac{1}{2}, 2\right] \subset [0,2].$$

En résolvant l'équation $f(x) = x$, on trouve que les points fixes de f sont -1, 1 et 2.

2. De l'étude de f, on peut déjà déduire les informations suivantes sur (u_n) :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0,2]$ (on peut le démontrer par récurrence),
   - comme f est croissante, la suite (u_n) est monotone,
   - comme f est continue, si (u_n) converge, c'est nécessairement vers 1 ou 2 (car -1 n'appartient pas à $[0,2]$).
3. Étudions plus en détail la suite (u_n). Remarquons tout d'abord que si $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$, alors comme $f(u_0) = u_0$, on peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est constante (et donc sa limite est u_0). Distinguons maintenant les deux cas suivants.
   a) **Cas $0 \leqslant u_0 < 1$.** Comme f est croissante, on a $f([0,1]) = [f(0), f(1)] \subset [0,1]$. On peut donc considérer la restriction $f : [0,1] \to [0,1]$ et affiner les résultats précédents :
      - pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0,1]$ (on peut le démontrer par récurrence),
      - la suite (u_n) est monotone,
      - si (u_n) converge, c'est nécessairement vers 1.

      En remarquant que

      $$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = \frac{1}{4}(u_0^2 - 1)(u_0 - 2) \geqslant 0,$$

      on peut affirmer que (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par 1, elle converge vers une limite ℓ. Il n'y a qu'une seule solution possible : c'est $\ell = 1$.
   b) **Cas $1 < u_0 < 2$.** Comme f est croissante, on a $f([1,2]) = [f(1), f(2)] \subset [1,2]$. On peut donc considérer la restriction $f : [1,2] \to [1,2]$ et affiner les résultats précédents :
      - pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [1,2]$ (on peut le démontrer par récurrence),
      - la suite (u_n) est monotone.

      En remarquant que

      $$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = \frac{1}{4}(u_0^2 - 1)(u_0 - 2) \leqslant 0,$$

      on peut affirmer que (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 1, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 1$. Cette fois, on peut hésiter entre $\ell = 1$ et $\ell = 2$, mais comme en réalité (u_n) est décroissante, on a

      $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 \geqslant u_n \geqslant 1.$$

      Par passage à la limite, on en déduit que $2 > u_0 \geqslant \ell \geqslant 1$. La seule possibilité est donc à nouveau $\ell = 1$.

Pour résumer, on a les quatre cas suivants :
- si $0 \leqslant u_0 < 1$, alors (u_n) est croissante et converge vers 1,
- si $u_0 = 1$, alors (u_n) est constante à la valeur 1,
- si $1 < u_0 < 2$, alors (u_n) est décroissante et converge vers 1,
- si $u_0 = 2$, alors (u_n) est constante à la valeur 2.

VIII.5.3. Cas d'une fonction décroissante

Proposition 12. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ et soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est continue et décroissante, alors :

- la sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite $\ell \in [a,b]$ telle que ____________,
- la sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite $\ell' \in [a,b]$ telle que ____________.

Remarque. Il arrive parfois que $\ell = \ell'$, mais ce n'est pas systématique.

Idée de la preuve. L'idée est de remarquer que si f est décroissante, alors $g = f \circ f : [a,b] \to [a,b]$ est croissante. On applique alors les résultats de la section précédente à :

- la sous-suite (u_{2n}), définie par la relation de récurrence

$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = g(u_{2n}),$$

- la sous-suite (u_{2n+1}), définie par la relation de récurrence

$$u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = g(u_{2n+1}).$$

Exemple. (Étude complète d'une suite récurrente) Soit $f :]0,+\infty[\to [1,+\infty[$ la fonction définie par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Étudions la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudions la fonction f. Elle est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Pour étudier les points fixes de $f \circ f$, on résout :

$$f(f(x)) = x \iff 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = x \iff 1 + \frac{x}{x+1} - x = 0 \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

   On trouve donc deux points fixes

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2. De l'étude de f, on ne peut pour le moment tirer que les informations suivantes :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,+\infty[$ (se démontre par récurrence),
   - les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones,
   - si (u_{2n}) ou (u_{2n+1}) converge, c'est vers un point fixe de $f \circ f$ (nécessairement x_2 car (u_n) est à valeurs positives et $x_1 < 0$).

   On ne peut toutefois pas appliquer directement la proposition 12 car $]0,+\infty[$ n'est pas de la forme $[a,b]$.
3. Étudions donc plus en détail (u_n). Pour cela on va distinguer deux cas.
   a) **Cas** $0 < u_0 \leqslant x_2$. Comme f est décroissante, on en déduit que $f(u_0) \geqslant f(x_2)$, c'est-à-dire $u_1 \geqslant x_2$.

- D'une part, comme $u_0 \leqslant x_2$, on a

$$u_2 - u_0 = f(f(u_0)) - u_0 = \frac{-u_0^2 + u_0 + 1}{u_0 + 1} \geqslant 0$$

  donc la suite (u_{2n}) est finalement croissante.

- D'autre part, comme $u_1 \geqslant x_2$, on a

$$u_3 - u_1 = f(f(u_1)) - u_1 = \frac{-u_1^2 + u_1 + 1}{u_1 + 1} \leqslant 0$$

  donc la suite (u_{2n+1}) est finalement décroissante.

Par ailleurs, on peut démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} \leqslant u_{2n+1}$ (l'initialisation se justifie par $u_0 \leqslant \ell \leqslant u_1$, et l'hérédité se montre en appliquant la fonction $f \circ f$ qui est décroissante). Ainsi :

- (u_{2n}) est croissante et majorée par u_1, donc elle converge vers une limite ℓ,
- (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge vers une limite ℓ'.

Or, on a déjà vu plus haut que le seul point fixe de $f \circ f$ dans $[0, x_2]$ est x_2, donc $\ell = \ell' = x_2$.

b) **Cas $u_0 \geqslant x_2$.** Dans ce cas, on démontre de manière analogue que (u_{2n}) est décroissante, (u_{2n+1}) est croissante, et toutes deux convergent vers x_2.

Chapitre IX.

Méthodes numériques pour la résolution de $f(x) = 0$

▷ *Pas de mimo associé sur IonisX.*

IX.1. Introduction

IX.1.1. Contexte

La question de résoudre une équation se pose pour les « mathématiciens » depuis des millénaires. Tout commence probablement par de simples considérations géométriques liées aux problématiques des architectes ; par exemple à partir d'un carré d'une aire donnée, de quelle longueur est son côté ? On peut formuler ce problème d'un point de vue analytique en posant l'équation

$$x^2 - a = 0,$$

où $a \in \mathbb{R}_+$. La solution retenue (positive) est bien entendu $x = \sqrt{a}$ qui est une valeur exacte, mais comment en déterminer une valeur approchée suffisamment précise ? Un autre problème concret consiste, par exemple, à déterminer une valeur approchée de l'inverse d'un nombre donné...

La question se pose également pour des équations plus générales (polynomiales ou non) ou encore pour des équations dites différentielles dans lesquelles les inconnues ne sont plus des nombres mais des fonctions. Dans ce chapitre, on cherche à résoudre, pour une fonction f donnée, une équation du type

$$f(x) = 0,$$

où x est un réel.

Remarque.

1. La plupart des théorèmes mathématiques sont des résultats dits **d'existence** ; ils indiquent sous certaines hypothèses, l'existence d'une solution sans pour autant en donner la valeur. Par exemple, le théorème de la bijection (**VII.5.2**) assure l'existence d'une unique solution d'une équation mais ne donne pas sa valeur. Dans un autre contexte, citons le théorème des suites adjacentes (**VIII.4.2**) qui assure la convergence des suites étudiées sans donner la valeur de la limite de ces dernières.
2. L'équation
$$x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5 = 0$$
admet au moins une solution réelle mais il n'existe aucune formule permettant de l'écrire explicitement ! Pour résoudre cette équation, il faut mettre en place d'autres techniques ; on fait appel à des méthodes numériques.

On va pour cela construire une suite (x_n) qui converge (du moins c'est ce que l'on souhaite) vers la solution recherchée. On met donc en place un procédé itératif. Plus généralement, étant donnée une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on cherche une suite (x_n) telle que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha,$$

où α est solution de l'équation $f(x) = 0$. Les questions principales à se poser sont les suivantes :

1. Existe-t-il des solutions ?
2. Si oui, combien ?
3. Pour une solution donnée, quelle est sa valeur approchée ?
4. À quelle vitesse la méthode numérique va-t-elle converger ?

IX.1.2. Sur l'existence des solutions

Le théorème des valeurs intermédiaires est l'outil central assurant l'existence de solutions pour une équation donnée ; seul, il ne donne pas nécessairement le nombre de solutions, sauf dans le cadre particulier où la fonction f intervenant dans l'équation à résoudre $f(x) = 0$ est une bijection. En plus de son énoncé et de ses corollaires vus en **VII.4.1**, un résultat supplémentaire peut être utile :

Corollaire 1. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = x$.

IX.1.3. Ordre de convergence

Pour comparer les diverses méthodes numériques mises en œuvre, il est notamment utile d'évaluer la *vitesse* à laquelle la suite construite (x_n) tend vers sa limite. On se donne donc les définitions suivantes :

Définition 1.

1. On dit que la convergence de (x_n) est **linéaire** de facteur $K \in]0, 1[$ s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant K|x_n - \alpha|.$$
2. On dit que la convergence de (x_n) est **super-linéaire** d'ordre $p > 1$ s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $K > 0$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant K|x_n - \alpha|^p.$$
Pour $p = 2$, on parle de convergence **quadratique**.

Remarque. Le K n'est pas unique et en pratique, il est difficile de déterminer l'ordre de convergence d'une suite. On passe alors par une définition plus souple.

Définition 2. On dit que la convergence de (x_n) est **linéaire** de facteur $K \in]0, 1[$ (respectivement **super-linéaire** d'ordre p) s'il existe (y_n) convergeant vers 0 linéaire de facteur K (respectivement super-linéaire d'ordre p) telle que
$$|x_n - \alpha| \leqslant y_n.$$

Par extension, on associera l'ordre de convergence de la suite à la méthode numérique étudiée.

Dans ce cours, on présente trois méthodes classiques de résolution de l'équation $f(x) = 0$.

IX.2. Méthode de la dichotomie

IX.2.1. Principe

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, s'annulant une seule fois sur l'intervalle $[a, b]$ en changeant de signe. On suppose que $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$ de sorte que la solution $\alpha \in]a, b[$. Ainsi, on a les deux cas suivants :

- soit pour tout $x \in [a, \alpha[$, $f(x) < 0$ et pour tout $x \in]\alpha, b]$, $f(x) > 0$;
- soit pour tout $x \in [a, \alpha[$, $f(x) > 0$ et pour tout $x \in]\alpha, b]$, $f(x) < 0$.

La méthode de dichotomie propose de construire trois suites (a_n), (b_n) et (x_n) avec $a_n < b_n$ et

$$x_n = \frac{1}{2}\left(a_n + b_n\right).$$

On a trois cas à distinguer :

- Si $f(x_n) = 0$, alors la méthode est achevée car $\alpha = x_n$.
- Si $f(a_n)f(x_n) < 0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in]a_n, x_n[$ et on pose

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = x_n.$$

- Si $f(x_n)f(b_n) < 0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in]x_n, b_n[$ et on pose

$$a_{n+1} = x_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n.$$

Remarque. On initialise ce procédé avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

Théorème 1. Dans le contexte de la méthode précédente, on a

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [a_n, b_n]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a).$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\alpha - a_n \leqslant \frac{1}{2^n}(b-a), \quad b_n - \alpha \leqslant \frac{1}{2^n}(b-a) \quad \text{et} \quad |x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}(b-a).$$
4. $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha.$$

Démonstration.

1. Ce résultat est évident par construction.
2. Utilisons un raisonnement par récurrence.
   - **Initialisation.** Elle est évidente ; en effet,
   $$b_0 - a_0 = b - a \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^0}(b-a) = b - a.$$
   - **Hérédité.** Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ donnée et montrons qu'elle se transmet au rang suivant.
     a) Si $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - x_n$, alors
     $$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - x_n = b_n - \frac{1}{2}\left(a_n + b_n\right) = \frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right) = \frac{1}{2^{n+1}}(b-a).$$
     b) Si $b_{n+1} - a_{n+1} = x_n - a_n$, alors
     $$b_{n+1} - a_{n+1} = x_n - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + b_n\right) - a_n = \frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right) = \frac{1}{2^{n+1}}(b-a).$$

- Il ne reste plus qu'à conclure en vertu du principe de récurrence.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remarque que

$$\alpha - a_n \leqslant b_n - \alpha + \alpha - a_n = b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a).$$

On obtient la deuxième inégalité de la même façon. Quant à la troisième, il convient de distinguer deux cas.

- Si $\alpha \in]a_n, x_n[$, on a

$$x_n - \alpha \leqslant x_n - \alpha + \alpha - a_n = x_n - a_n = \frac{1}{2^{n+1}}(b - a).$$

- Si $\alpha \in]x_n, b_n[$, on a

$$\alpha - x_n \leqslant \alpha - x_n + b_n - \alpha = b_n - x_n = \frac{1}{2^{n+1}}(b - a).$$

Dans les deux cas, on obtient bien

$$|x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}(b - a).$$

4. (a_n) est par construction croissante, (b_n) décroissante et de plus

$$\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}(b - a) = 0.$$

Les deux suites sont donc adjacentes ; elles convergent vers la même limite α. Quant à (x_n), puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, le théorème des gendarmes nous permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha.$$

IX.2.2. Convergence

Utilisons l'inégalité précédemment démontrée

$$|x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}(b - a).$$

Il s'agit d'une convergence linéaire (donc assez lente) car la suite (y_n) définie par

$$y_n = \frac{1}{2^{n+1}}(b - a)$$

a une convergence linéaire de facteur $0{,}5$. L'avantage de la méthode de la dichotomie est de n'exiger que la continuité de la fonction et pas davantage. On peut quantifier l'erreur en fonction du nombre d'itérations N comme suit ; si on cherche une précision à 10^{-m} près, alors

$$\frac{1}{2^{n+1}}(b - a) = 10^{-m} \Leftrightarrow n = E\left(\frac{\ln(b - a) + m \ln 10}{\ln 2}\right) \Leftrightarrow N = E\left(\frac{\ln(b - a) + m \ln 10}{\ln 2}\right) + 1.$$

Remarque. On a $N = n + 1$ car $n \in \mathbb{N}$.

On peut donc déterminer à l'avance le nombre d'itérations N pour une précision donnée car on vient d'obtenir un lien entre m et n (et donc N). Plus précisément, on a

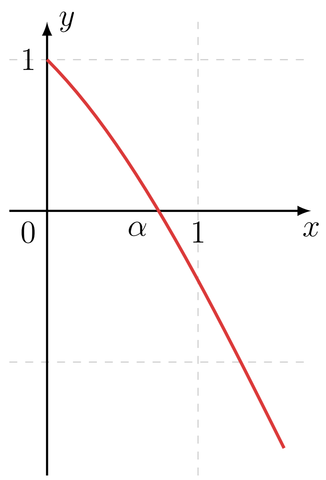
m	1	2	3	4	5	6	7	8
N	4	8	11	14	18	21	24	28

IX.2.3. Exemple

Considérons l'exemple suivant : on cherche à résoudre l'équation

$$\cos x - x = 0, \quad \text{avec } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Cette équation possède une unique solution sur l'intervalle considéré d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Le graphe de la fonction $x \mapsto \cos x - x$ est donné par :



Inutile de tenter la résolution de cette équation à la main ! On applique la méthode de la dichotomie ; on a, pour les 14 premières itérations de (x_n) :

```
[[0.78539816]
[0.39269908]
[0.58904862]
[0.68722339]
[0.73631078]
[0.76085447]
[0.74858262]
[0.7424467 ]
[0.73937874]
[0.73784476]
[0.73861175]
[0.73899524]
[0.73918699]
[0.73909112]]
```

On sait d'après notre étude que pour la dernière valeur, au moins les 3 premières décimales sont exactes, avec une marge d'erreur possible de ± 1 sur la quatrième (le 0) pour une précision à 10^{-4} près.

IX.3. Méthode du point fixe

IX.3.1. Principe

La méthode itérative du point fixe que nous allons décrire est aussi appelée méthode des approximations successives. Le principe de la méthode du point fixe consiste à transformer l'équation $f(x) = 0$ en $g(x) = x$ c'est-à-dire de déterminer une fonction g satisfaisante. On notera que le choix de g n'est pas nécessairement unique aussi on s'attachera à trouver une fonction g ayant les meilleures propriétés pour l'étude de la convergence de (x_n).

Remarque. La notion de point fixe a déjà été abordée notamment dans la classification des transformations complexes usuelles (**V.4.3**) et l'étude des suites récurrentes (**VIII.5.1**).

Proposition 1. Soit (x_n) définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = g(x_n)$. Si (x_n) est convergente et g continue, alors la limite de (x_n) est un point fixe de g.

Démonstration. Puisque (x_n) est convergente, posons l sa limite. On a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \alpha.$$

Comme g est continue, on

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(\alpha).$$

Ainsi, on obtient à la limite

$$\alpha = g(\alpha)$$

ce qui indique que α est un point fixe de g.

Définition 3. Soient $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que g est λ-**lipschitzienne** si pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, on a

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \lambda |x - y|.$$

Remarque.

1. En pratique, une fonction est λ-lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée.
2. Quand $\lambda < 1$, on dit que g est λ-**contractante** (ou une λ-contraction).

Théorème 2. Une application λ-contractante est continue.

Démonstration. On rappelle que g est continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (x,y) \in I^2, \quad |x - y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Il suffit de poser

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Théorème 3. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une λ-contraction. On a :

1. Pour tout $x_0 \in [a, b]$, (x_n) définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers un point fixe α de g.
2. Ce point fixe est unique.
3. Pour tout $q \geqslant 0$, on a
$$|\alpha - x_q| \leqslant \frac{\lambda^q}{1-\lambda}|x_1 - x_0|.$$

Démonstration. On commence par montrer par récurrence que pour tout k, on a

$$|x_{k+1} - x_k| \leqslant \lambda^k |x_1 - x_0|.$$

- **Initialisation**. Pour $k = 0$, on a
$$|x_{0+1} - x_0| = \lambda^0 |x_1 - x_0|.$$
- **Hérédité**. Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ donnée et montrons qu'elle se transmet au rang suivant. On a
$$|x_{k+2} - x_{k+1}| = |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leqslant \lambda |x_{k+1} - x_k| \leqslant \lambda^{k+1}|x_1 - x_0|.$$
- Il ne reste plus qu'à conclure en vertu du principe de récurrence.

Ainsi, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \geqslant q$, on obtient

$$\begin{aligned}
|x_p - x_q| &= \left|\sum_{k=q}^{p-1}(x_{k+1} - x_k)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=q}^{p-1} |x_{k+1} - x_k| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \sum_{k=q}^{p-1} \lambda^k |x_1 - x_0| \quad \text{d'après l'inégalité précédente} \\
&\leqslant |x_1 - x_0| \lambda^q \frac{1-\lambda^{p-q}}{1-\lambda} \quad \text{somme géométrique} \\
&\leqslant |x_1 - x_0| \frac{\lambda^q - \lambda^p}{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

À la limite sur p, on obtient
$$|\alpha - x_q| \leqslant \frac{\lambda^q}{1-\lambda}|x_1 - x_0|.$$

À partir d'un certain rang n_0, tous les termes de la suite sont aussi proches que souhaité ; on en déduit que la suite est convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{n+1} = g(x_n)$. La suite étant convergente et la fonction g continue, on en déduit que
$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(\alpha).$$

Il s'agit de la notion de continuité séquentielle vue en **VII.3.3**. Supposons enfin qu'il y ait un autre point fixe de g différent de α et notons le β ; alors

$$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| \leqslant \lambda |\alpha - \beta|,$$

ce qui conduit à $1 \leqslant \lambda$. Ce résultat est absurde car g est une λ-contraction donc $\lambda < 1$.

La proposition suivante met en avant un critère permettant de vérifier le caractère de λ-contraction d'une fonction g donnée.

Proposition 2. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a, b[$. Si

$$\sup_{x \in]a,b[} |g'(x)| = \lambda < 1,$$

alors g est une λ-contraction.

Remarque.

1. On se rapportera à **IV.3.3** pour la notion de borne supérieure.
2. La démonstration de ce résultat repose sur l'inégalité des accroissements finis, étudiée en **VII.7.2**.

IX.3.2. Convergence

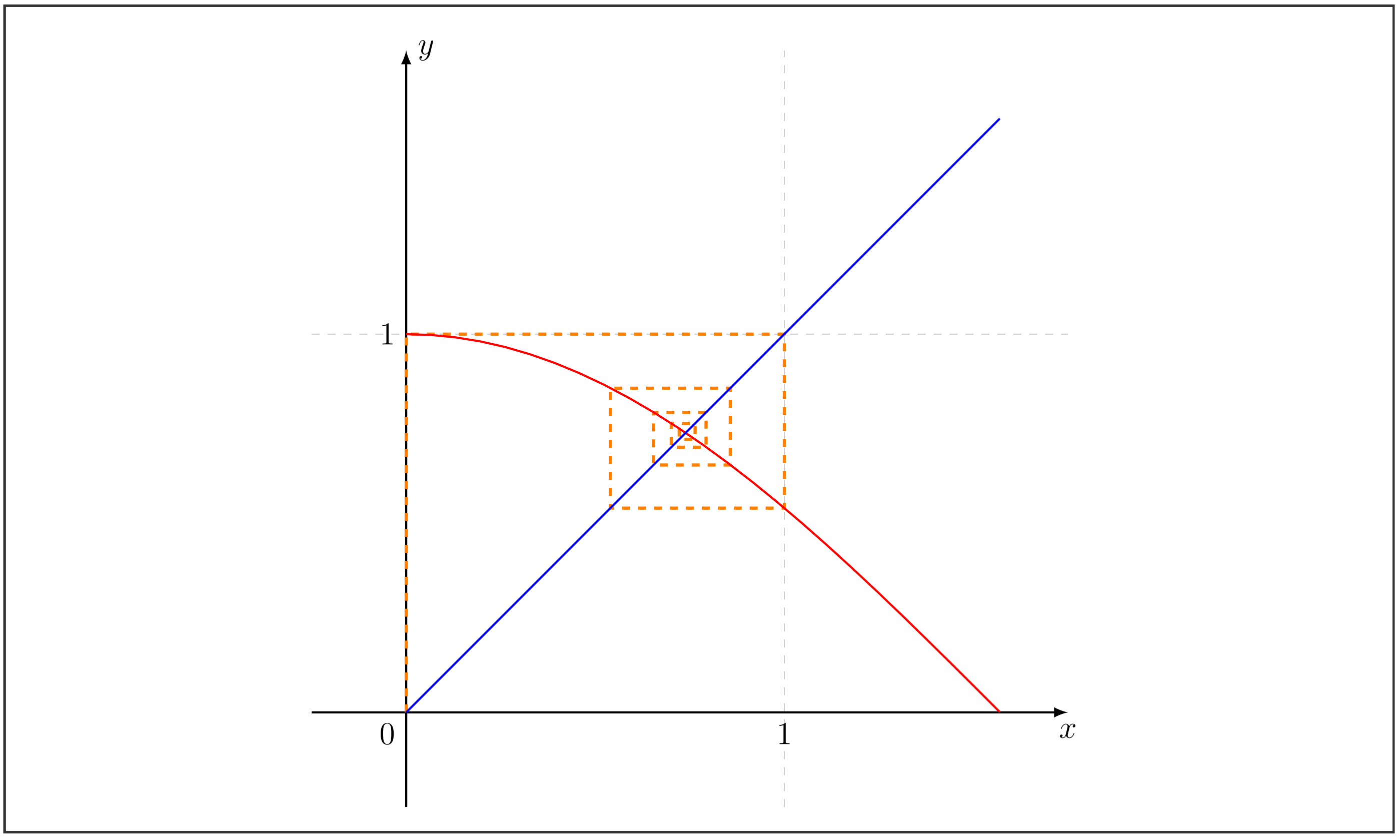
On a

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \leqslant \lambda |x_n - \alpha|.$$

Ceci démontre que la convergence de (x_n) est linéaire de facteur λ. Cette convergence peut être par ailleurs améliorée si la fonction g est plus régulière mais nous ne donnerons pas plus de détails dans ce cours.

IX.3.3. Exemple

On peut reprendre l'exemple précédent en posant $g(x) = \cos x$. Le problème $f(x) = 0$ devient donc $g(x) = x$.



Les suites des 10 premières approximations successives partant de x_0 sont les suivantes :

```
Pour x0 = 0

[[0.        ]
[1.        ]
[0.54030231]
[0.85755322]
[0.65428979]
[0.79348036]
[0.70136877]
[0.76395968]
[0.72210243]
[0.75041776]]
```

```
Pour x0 = (1/2)*np.pi

[[1.57079633e+00]
[6.12323400e-17]
[1.00000000e+00]
[5.40302306e-01]
[8.57553216e-01]
[6.54289790e-01]
[7.93480359e-01]
[7.01368774e-01]
[7.63959683e-01]
[7.22102425e-01]]
```

Remarque. On observe qu'en changeant de valeur initiale, les résultats diffèrent. La convergence quant à elle, reste linéaire. De nombreuses questions pourraient ici être soulevées : a-t-on un meilleur choix possible pour x_0 ? Est-on certain de converger vers le bon point fixe ? Un point fixe est-il nécessairement attracteur ?

IX.4. Méthode de Newton

IX.4.1. Principe

Cette méthode repose sur le principe de **linéarisation** d'une équation au voisinage d'un point. Supposons que nous connaissions une approximation x_0 d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$. Son *développement limité* au premier ordre est

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Remarque. La notion de développement limitée sera étudiée au second semestre, et on donnera un sens précis à la notation $o(x - x_0)$. En attendant, vous pouvez considérer cet terme comme l'« erreur commise » lorsqu'on remplace $f(x)$ par $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Intuitivement, on s'attend à ce que cette erreur soit d'autant plus petite que x est proche de x_0.

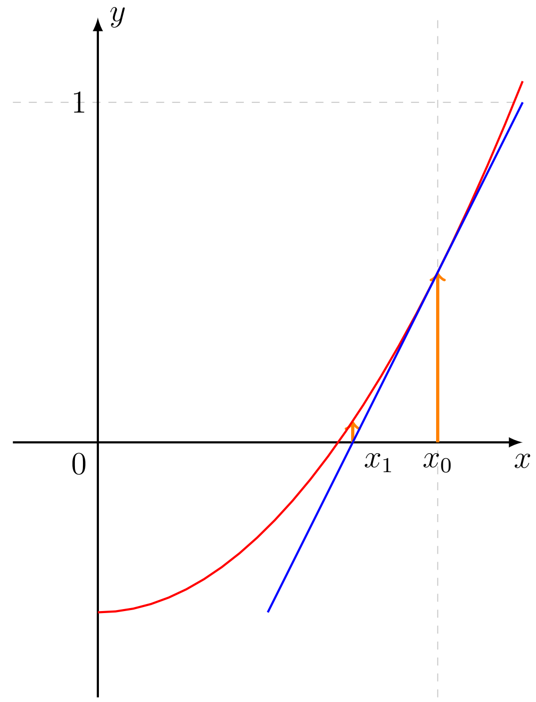
En remplaçant $f(x)$ par son développement limité ci-dessus et en ignorant le reste, on obtient l'*équation linéarisée*

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

La solution de cette équation linéarisée, que nous notons x_1, s'écrit

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

pourvu que la dérivée $f'(x_0)$ ne soit pas nulle. Géométriquement, x_1 est le point d'intersection de la tangente à la courbe au point x_0 avec l'axe des abscisses.



Proposition 3. Soient $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et $x_0 \in [a, b]$ donné. Supposons que (x_n) définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

de premier terme x_0 soit définie et converge vers $\alpha \in [a, b]$ tel que $f'(x) \neq 0$. Alors $f(\alpha) = 0$.

Démonstration. Immédiate.

Théorème 4. Supposons que $f \in \mathcal{C}^2(I)$ avec $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, où $h > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Posons

$$M = \sup_{(x,y)\in I^2} \left| \frac{f''(x)}{f'(y)} \right| \quad \text{et} \quad N = \frac{2}{M}.$$

Pour tout $x_0 \in J =]\alpha - N, \alpha + N[$:

1. (x_n) définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

de premier terme x_0 est bien définie et reste dans J et de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - \alpha| \leqslant N \left(\frac{|x_0 - \alpha|}{N} \right)^{2^n}.$$

2. Cette suite converge vers α.

Démonstration.

1. Démontrons ce premier point par récurrence.

   a) **Initialisation**. Pour $n = 1$, soit $x_0 \in J$. Notre objectif est de prouver d'une part que $x_1 \in J$ c'est-à-dire $|x_1 - \alpha| \leqslant N$ et d'autre part que
   $$|x_1 - \alpha| \leqslant N\left(\frac{|x_0 - \alpha|}{N}\right)^{2^1} = \frac{|x_0 - \alpha|^2}{N}.$$
   On a par définition
   $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$
   Comme $f(\alpha) = 0$, on obtient en retranchant α
   $$x_1 - \alpha = x_0 - \alpha + \frac{f(\alpha) - f(x_0)}{f'(x_0)}.$$
   D'après la formule de Taylor-Lagrange [a] appliquée à l'ordre 2, on a
   $$f(\alpha) = f(x_0) + (\alpha - x_0)f'(x_0) + \frac{(\alpha - x_0)^2}{2}f''(y),$$
   avec y compris entre α et x_0. On trouve alors en remplaçant
   $$x_1 - \alpha = \frac{(\alpha - x_0)^2}{2}\frac{f''(y)}{f'(x_0)}.$$
   On parvient ainsi en majorant à
   $$|x_1 - \alpha| = \frac{|\alpha - x_0|^2}{2}\left|\frac{f''(y)}{f'(x_0)}\right| \leqslant M\frac{|\alpha - x_0|^2}{2} = \frac{|x_0 - \alpha|^2}{N}.$$
   Enfin, puisque $x_0 \in J$, on a
   $$|x_1 - \alpha| \leqslant \frac{|x_0 - \alpha|^2}{N} < N$$
   ce qui assure que $x_1 \in J$ et l'initialisation est achevée.

   b) **Hérédité**. Supposons que la propriété est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle se transmet au rang suivant. De la même manière que précédemment, on a
   $$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{|x_n - \alpha|^2}{N}.$$
   Ainsi, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on a
   $$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{N}\left(N\left(\frac{|x_0 - \alpha|}{N}\right)^{2^n}\right)^2 = N\left(\frac{|x_0 - \alpha|}{N}\right)^{2^{n+1}}.$$
   De plus, on retrouve bien
   $$|x_{n+1} - \alpha| < N\left(\frac{N}{N}\right)^{2^{n+1}} = N$$
   ce qui assure $x_{n+1} \in J$. L'hérédité est démontrée.

   c) Il suffit à présent de conclure.

2. Quant à la convergence de la suite, elle est assurée car, puisque $|x_0 - \alpha| < N$, on a
$$\frac{|x_0 - \alpha|}{N} < 1$$
et donc
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{|x_0 - \alpha|}{N} \right)^{2^n} = 0.$$

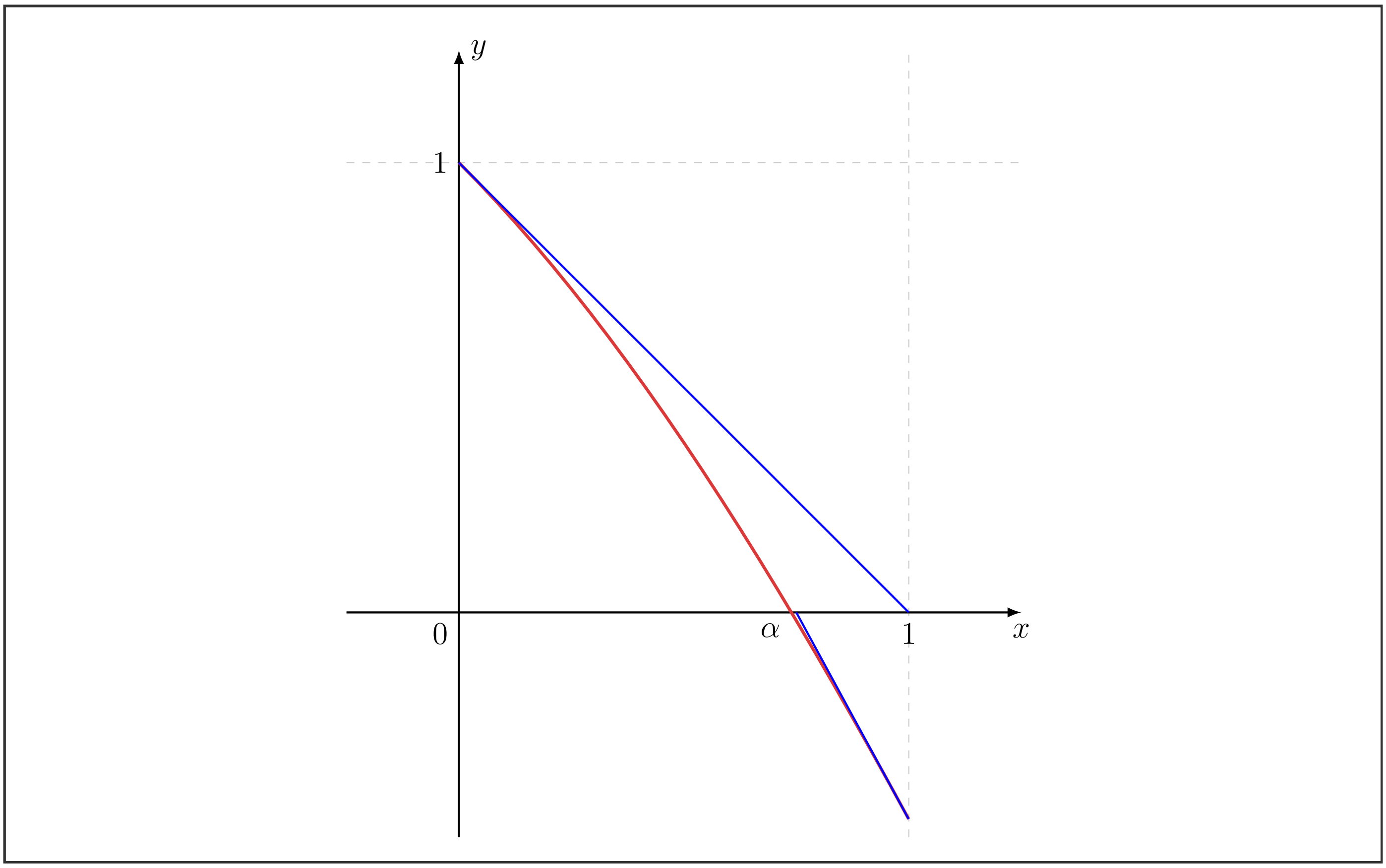
a. Il s'agit là aussi d'une formule qui sera vue au second semestre. Vous pouvez la voir comme une généralisation du théorème des accroissements finis.

IX.4.2. Convergence

Nous avons montré précédemment que
$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{N} |x_n - \alpha|^2.$$
Ceci démontre que la convergence de (x_n) est super-linéaire d'ordre 2 autrement dit nous sommes en présence d'une convergence quadratique. C'est une convergence très rapide !

IX.4.3. Exemple

On poursuit avec notre exemple où $f(x) = \cos x - x$. L'illustration suivante donne simplement les deux premières itérations (en partant de $x_0 = 0$) de la méthode de Newton (et le résultat est déjà très satisfaisant) :



Avec 5 itérations en partant de $x_0 = 0$, on a :

```
[[0.         ]
```

```
[1.        ]
[0.75036387]
[0.73911289]
[0.73908513]]
```

La dernière valeur fournit déjà 8 décimales correctes ce qui illustre bien la rapidité de convergence de la méthode de NEWTON.