ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$
PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS LINÉAIRES

Soit $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^\star)^3$.

1 Composition des applications linéaires et produit de matrices

Soient $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ leur matrices associées relativement aux bases canoniques. L'application composée $fog : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire et son matrice associée est définie par $C := A \times B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Remarque 1 *Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $(fog)(X) = (AB)X$.*

2 Application linéaire bijective et matrice inversible

Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est bijective si et seulement si sa matrice associée dans la base canonique $A = Mat(f) \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible et

$$Mat(f^{-1}) = (Mat(f))^{-1}.$$

Théorème 1 *La matrice A est inversible si et seulement si le système linéaire $AX = B$ admet une solution unique pour tout second membre B.*

3 Caractérisation des applications linéaires

Une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est linéaire si et seulement si pour tous les vecteurs u, v dans $\mathbb{R}^p$ et pour tout réel λ, on a :

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$,
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Remarque 2 *Pour démontrer la linéarité d'une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, on pourra regrouper les deux propriétés : $\forall (u,\ v) \in (\mathbb{R}^p)^2$ et $\forall (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{R}^2$,*

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont définis par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, ...,\ e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$
PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS LINÉAIRES

Soit $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire, et soit $(e_1,\ e_2, ..., e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Alors la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ est donnée par

$$A = \mathrm{Mat}(f) = (f(e_1)\ f(e_2)\ ...f(e_p))\,,$$

autrement dit les vecteurs colonnes de A sont les images par f des vecteurs de la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_p)$.