PSF 12 – Mathématiques

Notes de cours

Table des matières

Ma121

Chapitre I.

Intégration

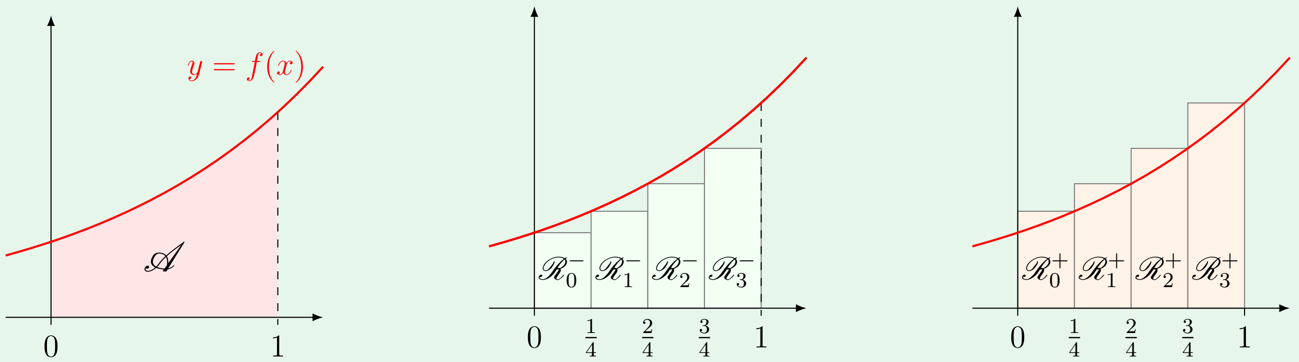
I.1. Construction théorique de l'intégrale de Riemann

▷ *MA13, module 1 — Intégrale de Riemann*

Dans cette section, on définit rigoureusement le concept d'*intégrale* au sens de Riemann [1].

I.1.1. Motivation

Exemple. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. Essayons de calculer l'aire $\mathscr{A}$ sous la courbe $y = f(x)$ délimitée par les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$ (figure de gauche).



On va approximer la surface étudiée par l'union de n rectangles *inférieurs* $\mathscr{R}_0^-, \mathscr{R}_1^-, \dots, \mathscr{R}_{n-1}^-$ construits ainsi : pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$, le rectangle $\mathscr{R}_{i-1}^-$ a pour base le segment $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ sur l'axe des abscisses, et son sommet supérieur gauche touche la courbe $y = f(x)$. La figure ci-dessus (au centre) illustre la situation dans le cas où $n = 4$. L'aire du rectangle $\mathscr{R}_{i-1}^-$ est donc égale à $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{i-1}{n}\right)$. Par suite, l'aire totale recouverte par l'union des n rectangles est égale à :

$$\mathscr{A}_n^- = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1}.$$

En reconnaissant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{n}}$ et de premier terme 1, on obtient :

$$\mathscr{A}_n^- = \frac{1}{n} \times \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \times \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \times (e - 1).$$

La dernière réécriture fait apparaître le taux d'accroissement

$$\frac{\exp(t) - 1}{t} = \frac{\exp(t) - \exp(0)}{t - 0} \xrightarrow[t \to 0]{} \exp'(0) = \exp(0) = 1,$$

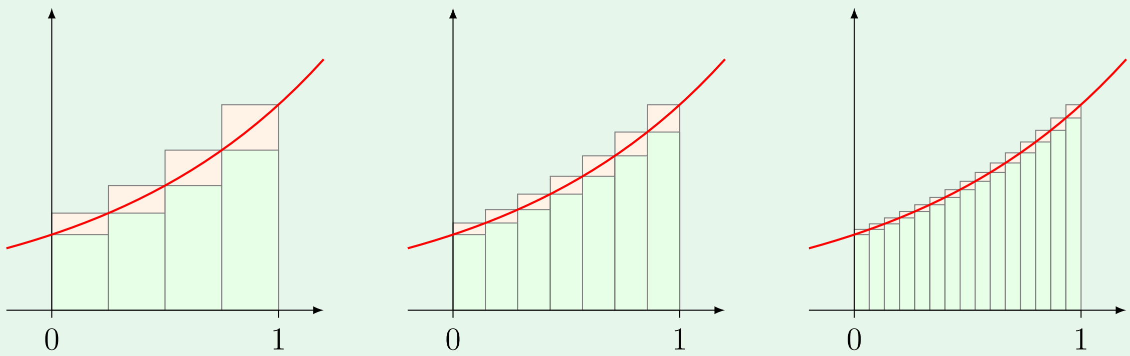
1. Cette précision provient du fait qu'il existe d'autres façons de définir la notion d'intégrale, par exemple au sens de Lebesgue.

ce qui permet de conclure que $\mathscr{A}_n^-$ tend vers $e-1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On pourrait effectuer le même raisonnement avec les rectangles *supérieurs* $\mathscr{R}_0^+, \mathscr{R}_1^+, \dots, \mathscr{R}_{n-1}^+$ (figure de droite), et on trouverait que leur aire totale

$$\mathscr{A}_n^+ = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times f\left(\frac{i}{n}\right)$$

tend elle-aussi vers $e-1$ lorsque n tend vers $+\infty$.



$n=4$ $n=7$ $n=15$

Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'encadrement

$$\mathscr{A}_n^- \leqslant \mathscr{A} \leqslant \mathscr{A}_n^+.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n^- = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n^+ = e-1$, on en déduit que l'aire $\mathscr{A}$ est égale à $e-1$.

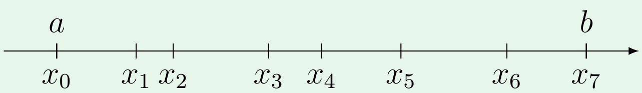
On cherche maintenant à généraliser cette façon d'interpréter l'intégrale de sorte à pouvoir l'appliquer à des fonctions moins simples, notamment des fonctions qui ne seraient pas monotones et/ou qui changeraient de signe.

I.1.2. Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1. Soit $[a,b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, avec $a<b$. On appelle **subdivision** de $[a,b]$ tout $(n+1)$-uplet $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

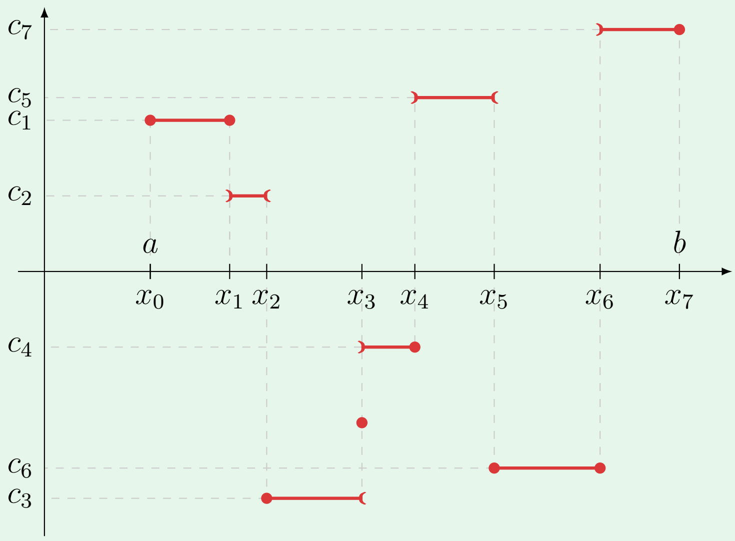
Exemple. Ci-dessous, $(x_0, x_1, \dots, x_7)$ est une subdivision de l'intervalle $[a,b]$.



Définition 2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On dit que f est une **fonction en escalier** s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ et des réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad f(x) = c_i.$$

Exemple. Ci-dessous le graphe d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier.



Notez qu'on impose seulement que f soit constante sur chaque intervalle **ouvert** $]x_{i-1}, x_i[$. En particulier dans certains cas la valeur c_i peut très bien ne correspondre ni à $f(x_{i-1})$ ni à $f(x_i)$ (c'est le cas par exemple de c_5 ci dessus qui n'est égal ni à $f(x_4)$ ni à $f(x_5)$).

Définition 3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. En reprenant les notations de la définition 2, on définit l'**intégrale** de f sur $[a, b]$ comme le nombre

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}).$$

On note ce nombre

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque. Avec cette définition, l'intégrale d'une fonction en escalier f correspond bien à la somme des aires des rectangles délimités par le graphe de f, en faisant attention à compter négativement l'aire des rectangles situés sous l'axe des abscisses.

I.1.3. Intégrale d'une fonction bornée

Commençons par les rappels ci-dessous.

Définition 4.

1. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est **bornée** s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que
$$\forall x \in [a, b], \quad \underline{-M \leqslant f(x) \leqslant M}.$$

2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $f \leqslant g$ lorsque
$$\forall x \in [a, b], \quad \underline{f(x) \leqslant g(x)}.$$

Introduisons maintenant les notations qui permettront de définir l'intégrale d'une fonction bornée.

Définition 5. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On note :

- $I^-(f)$ le nombre défini par
$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x \mid \phi : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ en escalier et } \underline{\phi \leqslant f} \right\},$$

- $I^+(f)$ le nombre défini par
$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x \mid \phi : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ en escalier et } \underline{\phi \geqslant f} \right\}.$$

Proposition 1. Pour tout fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée, on a
$$I^-(f) \leqslant I^+(f).$$

Définition 6. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f est **intégrable (au sens de Riemann)** si les nombres $I^-(f)$ et $I^+(f)$ sont égaux. Dans ce cas ce nombre s'appelle l'**intégrale de Riemann** de f sur $[a, b]$ et on le note
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple. *Attention, les affirmations ci-dessous ne sont pas évidentes, chacune d'elle mériterait une démonstration à part entière.*

- Toute fonction en escalier sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.
- Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.
- Il existe des fonctions qui ne sont pas intégrables.
  C'est le cas par exemple de la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple. Étudions l'intégrabilité de la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Notons $\mathcal{S}_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ la subdivision de l'intervalle $[0,1]$ définie par

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad x_i = \frac{i}{n}.$$

On dit qu'il s'agit d'une subdivision *régulière*, car son *pas* $x_i - x_{i-1}$ ne dépend pas de i. Comme la fonction f est croissante, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ on a

$$\forall\, x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \quad \left(\frac{i}{n}\right)^2 \leqslant x^2 \leqslant \left(\frac{i}{n}\right)^2.$$

On définit alors des fonctions ϕ_n^- et ϕ_n^+ sur $[0,1]$ en posant

$$\phi_n^-(x) = \begin{cases} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 & \text{si } x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[, \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \phi_n^+(x) = \begin{cases} \left(\frac{i}{n}\right)^2 & \text{si } x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

On vérifie alors aisément que :

- ϕ_n^- et ϕ_n^+ sont des fonctions en escalier (adaptées à la subdivision $\mathcal{S}_n$),
- $\phi_n^- \leqslant f$ et $\phi_n^+ \geqslant f$.

D'une part, en appliquant la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, on trouve

$$\int_0^1 \phi_n^-(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

et de même

$$\int_0^1 \phi_n^+(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Or, les méthodes vues en MA111 permettent d'établir l'égalité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=0}^{N} i^2 = \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

qui par suite donne finalement les intégrales

$$\int_0^1 \phi_n^-(x)\mathrm{d}x = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \phi_n^+(x)\mathrm{d}x = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

D'autre part :

- ϕ_n^- est une fonction en escalier inférieure à f, donc la définition de $I^-(f)$ permet d'affirmer que
$$\int_0^1 \phi_n^-(x)\mathrm{d}x \leqslant I^-(f),$$
- ϕ_n^+ est une fonction en escalier supérieure à f, donc la définition de $I^+(f)$ permet d'affirmer que
$$I^-(f) \leqslant \int_0^1 \phi_n^+(x)\mathrm{d}x.$$

En recoupant toutes ces informations et en utilisant la proposition 1, on vient finalement de montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a les inégalités :

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \leqslant I^-(f) \leqslant I^+(f) \leqslant \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

pour conclure que $I^-(f) = I^+(f) = \frac{1}{3}$. Autrement dit, la fonction f est intégrable au sens de RIEMANN sur l'intervalle $[0,1]$, et son intégrale vaut

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Remarque. Bien sûr en pratique, on ne passera pas par des raisonnements comme celui de l'exemple précédent. On invoquera des résultats plus avancés, comme par exemple celui que vous connaissez déjà qui fait le lien entre intégrale et primitive d'une fonction continue.

Proposition 2.

1. Si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors la nouvelle fonction obtenue en changeant les valeurs de f en un nombre fini de points de $[a,b]$ est elle-aussi intégrable, et son intégrale a la même valeur.
2. Si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors sa restriction $\tilde{f} : [a',b'] \to \mathbb{R}$ à un intervalle $[a',b'] \subset [a,b]$ est encore intégrable.

I.1.4. Intégrale d'une fonction continue ou continue par morceaux

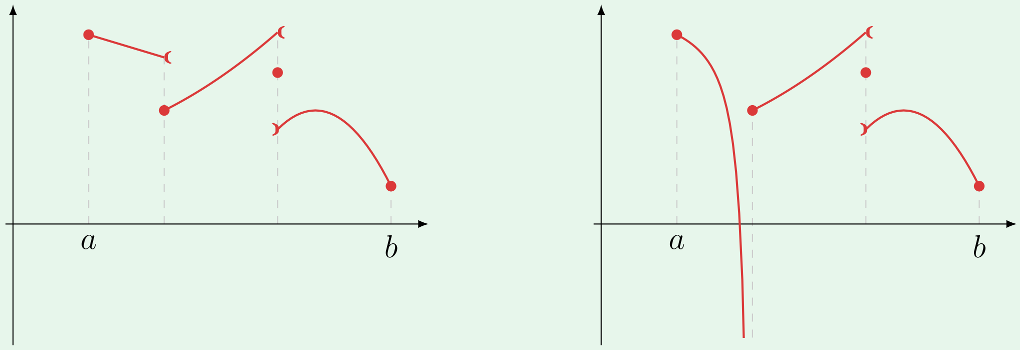
Théorème 1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$.

Ce résultat reste valable plus généralement pour une fonction *continue par morceaux*.

Définition 7. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, la restriction $f|_{]x_{i-1},x_i[}$ de f sur $]x_{i-1}, x_i[$ est :

1. continue sur $]x_{i-1}, x_i[$,
2. prolongeable par continuité (à droite) en x_{i-1} et (à gauche) en x_i.

Remarque. Attention à la deuxième condition qui a été oubliée dans la vidéo. En effet, parmi les deux fonctions illustrées ci-dessous, celle de gauche est continue par morceaux mais **pas** celle de droite !



Corollaire 1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

La démonstration du théorème 1 est assez complexe en tout généralité. Nous allons donc donner sa démonstration seulement dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, dont on rappelle ci-dessous la définition.

Définition 8. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ si :

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $[a, b]$,
- f' est continue sur $[a, b]$.

Théorème 2. (Version faible du théorème 1) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Comme f' est continue sur l'intervalle fermée $[a, b]$, alors elle est bornée sur $[a, b]$. Autrement dit il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leqslant M$. D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[a, b]$, on a alors

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Fixons une subdivision $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de pas inférieur à ε, c'est-à-dire telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_i - x_{i-1} \leqslant \varepsilon.$$

Définissons deux fonctions ϕ^- et ϕ^+ sur $[a, b]$ de la façon suivante : pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on pose

- ϕ^- constante à la valeur $c_i = \inf\{f(t) \mid t \in [x_{i-1}, x_i[\}$ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i[$,
- ϕ^+ constante à la valeur $d_i = \sup\{f(t) \mid t \in [x_{i-1}, x_i[\}$ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i[$,

et en x_n on pose par exemple $\phi^-(x_n) = \phi^+(x_n) = f(x_n)$. Ainsi, ϕ^- et ϕ^+ sont clairement deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ vérifiant $\phi^- \leqslant f \leqslant \phi^+$.

Comme la fonction f est continue sur $[a, b]$, donc sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

- il existe $a_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que $f(a_i) = c_i$,

- il existe $b \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que $f(b_i) = d_i$.

En réutilisant l'inégalité précédente, on a alors pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$d_i - c_i \leqslant f(b_i) - f(a_i) \leqslant M|b_i - a_i| \leqslant M(x_i - x_{i-1}) \leqslant M \times \varepsilon.$$

Ceci permet de majorer la différence Δ entre les intégrales de ϕ^- et de ϕ^+. En effet, par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier on a :

$$\Delta = \int_a^b \phi^+(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \phi^-(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n d_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (d_i - c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ceci permet de prouver que Δ est positif d'une part, mais surtout qu'il est inférieur ou égal à

$$\sum_{i=1}^n M \times \varepsilon \times (x_i - x_{i-1}) = M\varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = M\varepsilon(x_n - x_0) = M\varepsilon(b - a).$$

Or, en reprenant la définition et les propriétés de $I^-(f)$ et $I^+(f)$, rappelons que

$$\int_a^b \phi^-(x)\mathrm{d}x \leqslant I^-(f) \leqslant I^+(f) \leqslant \int_a^b \phi^+(x)\mathrm{d}x.$$

On en déduit alors que

$$0 \leqslant I^+(f) - I^-(f) \leqslant \int_a^b \phi^+(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \phi^-(x)\mathrm{d}x \leqslant M\varepsilon(b - a).$$

Or comme on a démontré cette égalité pour n'importe quel réel $\varepsilon > 0$, on obtient par passage à la limite (quand ε tend vers 0) que $I^+(f) - I^-(f) = 0$, c'est-à-dire que $I^-(f) = I^+(f)$ et donc que f est intégrable.

I.2. Propriétés de l'intégrale de Riemann

I.2.1. Relation de Chasles

▷ *MA13, module 2 — Propriétés de l'intégrale*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$) et soit $c \in]a, b[$. À partir des définitions précédentes, on peut se convaincre que si f est intégrable sur $[a, c]$ et intégrable sur $[c, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

De plus, en complément des définitions précédentes on pose par convention :

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Ces conventions ne sont pas choisies au hasard : elle permettent de faire en sorte que la relation ci-dessus reste valable peu importe l'ordre des réels a, b, c. Autrement dit on obtient plus généralement la proposition ci-dessous.

Proposition 3. (Relation de Chasles) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $(a, b, c) \in I^3$. On a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

I.2.2. Comparaison d'intégrales

Proposition 4. (Positivité de l'intégrale) Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, avec $a \leqslant b$.

1. Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
2. Si $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Remarque. Attention à ne surtout pas oublier ici la condition $a \leqslant b$, sans quoi le résultat final serait faux !

I.2.3. Linéarité de l'intégrale

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut montrer que :

- si f et g sont intégrables sur $[a, b]$, alors $f + g$ est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

- si f est intégrable sur $[a, b]$, alors λf est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

On combine souvent ces deux résultats sous la forme générale ci-dessous.

Proposition 5. (Linéarité de l'intégrale) Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Démontrons uniquement la relation

$$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

et seulement dans le cas où λ est positif (la preuve serait similaire pour λ négatif).

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Supposons f intégrable. Cela signifie que $I^-(f) = I^+(f)$ et

c'est ce nombre que l'on note
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$
Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

- par définition de $I^-(f)$, il existe une fonction en escalier $\phi^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\phi^- \leqslant f$ et
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon \leqslant \int_a^b \phi^-(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$
- par définition de $I^+(f)$, il existe une fonction en escalier $\phi^+ : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\phi^+ \geqslant f$ et
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \phi^+(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Soit $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à la fois à ϕ^- et à ϕ^+, c'est-à-dire telle que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

- ϕ^- est constante à une certaine valeur $c_i^- \in \mathbb{R}$ sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$,
- ϕ^+ est constante à une certaine valeur $c_i^+ \in \mathbb{R}$ sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$.

Remarquons que $\lambda\phi^-$ et $\lambda\phi^+$ sont encore des fonctions en escaliers toutes deux adaptées à cette même subdivision $\mathcal{S}$, puisqu'elles sont constantes respectivement à λc_i^- et à λc_i^+ sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. Par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, on a
$$\int_a^b \lambda\phi^-(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \lambda c_i^-(x_i - x_{i-1}) = \lambda \sum_{i=1}^n c_i^-(x_i - x_{i-1}) = \lambda \int_a^b \phi^-(x)\mathrm{d}x$$
et de même pour ϕ^+. Intéressons-nous maintenant à $I^-(\lambda f)$ et $I^+(\lambda f)$. Comme $\lambda\phi^-$ et $\lambda\phi^+$ sont deux fonctions en escalier telles que $\lambda\phi^- \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\phi^+$, on peut affirmer que :
$$\int_a^b \lambda\phi^-(x)\mathrm{d}x \leqslant I^-(\lambda f) \leqslant I^+(\lambda f) \leqslant \int_a^b \lambda\phi^+(x)\mathrm{d}x.$$
En utilisant les divers résultats ci-dessus, on arrive alors à l'encadrement
$$\lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \lambda\varepsilon \leqslant I^-(\lambda f) \leqslant I^+(\lambda f) \leqslant \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \lambda\varepsilon.$$
Comme cette inégalité vient d'être démontrée pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient à la limite (quand $\varepsilon \to 0$) :
$$I^-(\lambda f) = I^+(\lambda f) = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$
Ceci prouve que λf est intégrable et que son intégrale est égale à $\lambda \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Exemple. Sachant qu'on a calculé dans les sections précédentes les intégrales sur $[0,1]$ des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$, on peut affirmer que
$$\int_0^1 (7x^2 - e^x)\mathrm{d}x = 7\int_0^1 x^2\mathrm{d}x - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x = 7 \times \frac{1}{3} - (e-1) = \frac{10}{3} - e.$$

Remarque. Attention, en revanche il n'existe pas de relation aussi simple pour le produit! En général,

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \neq \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right).$$

I.2.4. Quelques inégalités

Proposition 6. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors $|f|$ aussi et on a

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Remarque. L'inégalité ci-dessus peut-être mise en parallèle avec l'inégalité triangulaire sur les réels :

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

Exemple. Cette inégalité permet par exemple de montrer que l'intégrale

$$I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\mathrm{d}x$$

tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$ sans avoir besoin de calculer explicitement I_n (ce qui ne serait pas évident!). En effet, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_1^n \left|\frac{\sin(nx)}{1+x^n}\right|\mathrm{d}x = \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $x \in [1,n]$ on a $|\sin(nx)| \leqslant 1$ et $1 + x^n \geqslant x^n$, d'où par quotient :

$$\frac{|\sin(nx)|}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^n}.$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que :

$$\int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\mathrm{d}x \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^n}\mathrm{d}x.$$

Or, par un calcul d'intégrable usuel via les primitives, on a (si $n \geqslant 2$) :

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^n = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n^{n-1}} - 1\right).$$

Ce terme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (si besoin, rappelez-vous que $n^{n-1} = e^{(n-1)\ln(n)}$), donc en appliquant le théorème des gendarmes à l'encadrement

$$\forall n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant |I_n| \leqslant -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n^{n-1}} - 1\right)$$

on obtient que $|I_n|$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (et donc I_n aussi).

Proposition 7. (Inégalité de Cauchy–Schwarz) Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si f et g sont toutes les deux intégrables sur $[a, b]$, alors $f \times g$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x} \times \sqrt{\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x}.$$

I.3. Intégrale et primitives

▷ *MA13, module 3 — Primitive d'une fonction*

I.3.1. Notion de primitive

Définition 9. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors :
   - $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f,
   - $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ est aussi une primitive de f,
2. Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Alors :
   - $G : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g,
   - plus généralement, pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $G + c$ est aussi une primitive de g.

Proposition 8. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors pour toute fonction $G : I \to \mathbb{R}$ on a l'équivalence :

$$G \text{ est une primitive de } f \iff G = F + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit $G : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

($\Rightarrow$) Supposons que G est une primitive de f. Cela signifie que G est dérivable et $G' = f$. Mais alors la fonction $G - F$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Ainsi, la fonction $G - F$ est constante sur l'intervalle I, autrement dit il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G - F = c$.

($\Leftarrow$) Supposons que G soit de la forme $G = F + c$ avec c une constante réelle. Alors G est dérivable sur I (puisque F l'est) et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = F'(x) + 0 = f(x).$$

Ainsi G est bien une primitive de f.

Remarque. On note parfois
$$\int f(t)\mathrm{d}t$$
une primitive de f. Nous déconseillons cette écriture qui comporte de nombreux pièges :

- elle est ambigüe car elle ne permet pas de savoir à *quelle* primitive exactement elle fait référence :
$$\int 6t^2\mathrm{d}t$$
peut désigner indifféremment la fonction $t \mapsto 2t^3$, $t \mapsto 2t^3 + 1$ ou encore $t \mapsto 2t^3 - 5$,
- elle peut prêter à confusion avec la notation $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ qui, elle, représente un nombre fixé,
- elle peut être source d'erreurs lors de méthodes à venir, notamment le *changement de variable*.

Proposition 9. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si F est une primitive de f et G est une primitive de g, alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- λF est une primitive de λf.

Idée de la preuve. Cela découle directement des propriétés de la dérivation qui indiquent que si F et G sont dérivables sur I, alors $F + G$ et λF le sont aussi et
$$(F+G)' = F' + G' \qquad \text{et} \qquad (\lambda F)' = \lambda F'.$$

Proposition 10. (Primitives usuelles) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Alors :

1. les primitives de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x + c$,
2. les primitives de $x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \sin(x) + c$,
3. les primitives de $x \mapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\cos(x) + c$,
4. les primitives de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$,
5. les primitives de $x \mapsto x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$,
6. les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(|x|) + c$,
7. les primitives de $x \mapsto \cosh(x)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \sinh(x) + c$,
8. les primitives de $x \mapsto \sinh(x)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \cosh(x) + c$,
9. les primitives de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \arctan(x) + c$,
10. les primitives de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 1[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \arcsin(x) + c$,
11. les primitives de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \operatorname{argsinh}(x) + c$,
12. les primitives de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \operatorname{argcosh}(x) + c$,

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante réelle.

Remarque.

1. La fonction $x \mapsto -\arccos(x)$ est aussi une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$, mais cela ne contredit pas la proposition précédente car
$$\forall\, x \in\,]-1,1[\,, \quad -\arccos(x) = \arcsin(x) - \frac{\pi}{2}.$$
2. Rappelons que argcosh et argsinh ont aussi les expressions suivantes :
$$\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \qquad \operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Remarque. Attention, la constante c qui apparaît lorsqu'on étudie les primitives d'une fonction f est propre à chaque **intervalle** sur lequel f est définie. Lorsque f est définie sur une union de plusieurs intervalles disjoints, alors on peut prendre une constante différente sur chacun de ces intervalles.

Par exemple, la fonction $F : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par
$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + 4 & \text{si } x > 0, \\ \ln(-x) + 7 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
est une primitive tout à fait valide de la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$.

I.3.2. Lien entre primitive et intégrale

Théorème 3. (Théorème fondamental de l'analyse) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$. Alors la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par
$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
est une primitive de f. Plus précisément, c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire 2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et F une primitive quelconque de f. Alors :
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par
$$F_1(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
est une primitive de f. Cette fonction vérifie :
$$F_1(b) - F_1(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \underbrace{\int_a^a f(t)\mathrm{d}t}_{=0} = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
Si maintenant $F_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive quelconque de f, alors on sait qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$

telle que $F_2 = F_1 + c$. Par suite,

$$F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + c) - (F_1(a) + c) = F_1(b) - F_1(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Corollaire 3. Si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b F'(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Si F est de classe $\mathcal{C}^1$, alors F est dérivable sur $[a, b]$ et, par définition, F est une primitive de F'. Il suffit alors d'appliquer le théorème précédent à la fonction $f = F'$ qui est continue.

Définition 10. Pour tout fonction F définie sur $[a, b]$, on notera $[F(x)]_a^b$ le nombre $F(b) - F(a)$.

Exemple.

1. La fonction $f : x \mapsto e^x$ admet pour primitive la fonction $F : x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2. La fonction $g : x \mapsto x^2$ admet pour primitive la fonction $G : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^x \cos(t)\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)\Big]_a^x = \sin(x) - \sin(a).$$

Proposition 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Alors toute primitive de f est paire, et pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f. Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = F(x) - F(-x)$. Comme F est dérivable, la fonction g est également dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$g'(x) = F'(x) - (-F'(-x)) = f(x) + f(-x).$$

Or, la fonction f est impaire donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(-x) = -f(x)$ et donc $g'(x) = 0$. On en déduit que la fonction g est constante à une valeur c sur $\mathbb{R}$. Pour connaître la valeur de c, il suffit de calculer

$$g(0) = F(0) - F(0) = 0.$$

On vient donc de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(x) - F(-x) = 0$, c'est-à-dire que $F(x) = F(-x)$. Ainsi la fonction F est paire.

La deuxième partie de l'énoncé découle immédiatement de ce fait. Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme F est paire, on a $F(-a) = F(a)$ et donc

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = F(a) - F(-a) = F(a) - F(a) = 0.$$

I.3.3. Sommes de Riemann

Définition 11. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$. On appelle **somme de Riemann** de f sur $[a,b]$ liée à σ toute expression de la forme

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$

avec $t_1, t_2, \ldots, t_n$ des réels tels que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

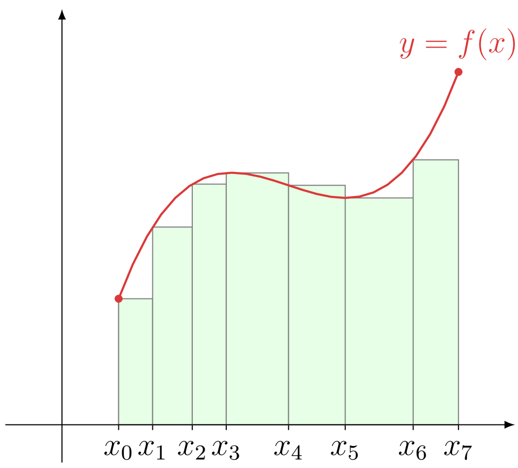
En particulier, on parlera de :

- **méthode des rectangles à gauche** lorsque pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on choisit $t_i = x_{i-1}$,
- **méthode des rectangles à droite** lorsque pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on choisit $t_i = x_i$.

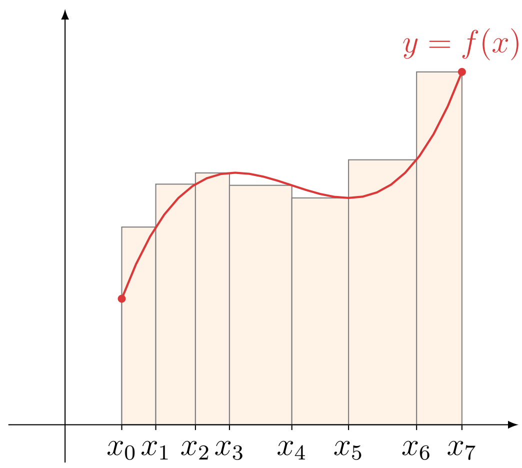
Remarque. En pratique, on travaillera souvent avec une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *régulière* de $[a,b]$, c'est-à-dire dont le pas $x_i - x_{i-1}$ est constant. Comme l'intervalle $[a,b]$ est de longueur $b-a$, on vérifie aisément que ce pas doit être égal à $h = (b-a)/n$. En reconnaissant une suite arithmétique, on en déduit alors que

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_i = x_0 + i \times h = a + i \times \frac{b-a}{n}.$$

Une somme de Riemann $S(f,\sigma)$ s'interprète géométriquement comme l'aire algébrique d'une union de rectangles construits au-dessus de la subdivision σ. La façon dont les rectangles viennent toucher la courbe dépendent ensuite de la méthode utilisée.



Méthodes des rectangles à gauche



Méthode des rectangles à droite

Exemple. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$ et soit $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ la subdivision régulière du segment $[0,1]$ formée de n intervalles. On a

$$\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_k = 0 + k \times \frac{1-0}{n} = \frac{k}{n}.$$

Ainsi, pour cette subdivision régulière :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

est la somme de RIEMANN de f sur $[0,1]$ donnée par la méthode des *rectangles à gauche*, et

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

est la somme de RIEMANN de f sur $[0,1]$ donnée par la méthode des *rectangles à droite*.

L'intérêt des sommes de RIEMANN est que, si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors intuitivement la somme $S(f, \sigma)$ sera d'autant plus proche de la valeur de l'intégrale de f sur $[a,b]$ que le pas de de la subdivision σ sera proche de zéro. Pour la méthode des rectangles à droite appliquée à une subdivision régulière, cela donne rigoureusement l'énoncé suivant.

Théorème 4. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est intégrable, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Corollaire 4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est intégrable, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. (Corollaire 4) Il suffit d'appliquer le théorème 4 en prenant $a = 0$ et $b = 1$.

Exemple. Déterminons la limite quand n tend vers $+\infty$ de la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

En réécrivant cette somme, on peut faire apparaître une somme de RIEMANN sur l'intervalle $[0,1]$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(1+\frac{k}{n})} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Comme la fonction f est intégrable sur $[0,1]$ (puisqu'elle y est continue), le corollaire 4 permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \Big[\ln(|1+x|)\Big]_0^1 = \ln(2).$$

I.4. Méthodes avancées de calcul d'intégrales

MA13, module 4 — Intégration par parties et changement de variable

I.4.1. Intégration par parties

Théorème 5. (Formule d'intégration par parties) Soient u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Rappelons que $(uv)' = u'v + uv'$. On a donc :

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\mathrm{d}x = \int_a^b (u(x)v(x))'\mathrm{d}x.$$

Si dans le premier membre on utilise la linéarité de l'intégrale, et dans le second membre on utilise le fait que uv est une primitive de $(uv)'$, cette égalité devient :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]_a^b.$$

En isolant le second terme de la somme, on retrouve l'égalité voulue.

Exemple. Utilisons la formule d'intégration par parties pour calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 xe^x\mathrm{d}x.$$

En posant $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$ et donc

$$I = \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

La formule d'intégration par parties donne alors

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1\times e^x\mathrm{d}x = (1\times e^1 - 0\times e^0) - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x = e - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x.$$

On s'est ainsi ramené à une intégrale beaucoup plus simple à calculer, puisqu'on sait qu'une primitive de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$. On en déduit que

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

et donc par suite

$$I = e - (e - 1) = 1.$$

Exemple. Essayons maintenant de calculer l'intégrale

$$I = \int_1^e x \ln(x) \mathrm{d}x.$$

On va alors poser $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$, car ainsi la formule d'intégration par parties donne

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}e^2 \ln(e) - \frac{1}{2}\ln(1)\right) - \int_1^e \frac{1}{2}x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\int_1^e x \mathrm{d}x.$$

En calculant l'intégrale de $x \mapsto x$ via sa primitive $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$, il vient :

$$I = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

La méthode d'intégration par parties aide aussi au calcul de primitives, puisque le théorème fondamental de l'analyse garantit que les primitives de $f : I \to \mathbb{R}$ sont exactement les fonctions F de la forme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \mathrm{cte}, \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ fixé.}$$

Par exemple, les primitives de $f : x \mapsto xe^x$ sont les fonctions F de la forme

$$F(x) = \int_a^x te^t \mathrm{d}t + \mathrm{cte}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un réel fixé dont la valeur n'a pas d'importance (nous allons voir dans un instant pourquoi). En utilisant la formule d'intégration par parties comme dans l'exemple précédent, on trouve :

$$F(x) = \left[te^t\right]_a^x - \int_a^x e^t \mathrm{d}t + \mathrm{cte} = \left[te^t\right]_a^x - \left[e^t\right]_a^x + \mathrm{cte} = xe^x - ae^a - e^x + e^a + \mathrm{cte}$$

Notez que les termes en rouge étant constants (ils ne dépendent pas de la variable x), on peut les grouper dans la notation « $+\mathrm{cte}$ », ce qui donne l'expression plus simple :

$$F(x) = xe^x - e^x + \mathrm{cte}.$$

Remarque.

1. Il arrive parfois que la méthode d'intégration par parties s'avère utile pour gérer une expression que ne fait pas apparaître clairement un produit : il suffit pour cela de faire apparaître un facteur « 1 ». Cette astuce permet par exemple d'intégrer (ou trouver des primitives) des fonctions $\ln$, $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, ...
2. Dans certains cas, on peut être amené à devoir utiliser plusieurs fois l'intégration par parties pour venir à bout d'un calcul d'intégrale.

Exemple. Déterminons les primitives de la fonction $\arcsin$. Ce sont toutes les fonctions de la forme :

$$F(x) = \int_a^x \arcsin(t)\mathrm{d}t + \mathrm{cte}$$

avec $a \in]-1, 1[$ un réel fixé. En posant $u(t) = \arcsin(t)$ et $v(t) = t$, la formule d'intégration par parties donne

$$F(x) = [t \arcsin(t)]_a^x - \int_a^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \mathrm{cte}.$$

Or, on a

$$\int_a^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}x = -\int_a^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}x = -\left[\sqrt{1-t^2}\right]_a^x.$$

Ainsi, on trouve

$$F(x) = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + \mathrm{cte}.$$

Exemple. Déterminons les primitives de la fonction $f : x \mapsto x^2e^x$. Ce sont les fonctions de la forme

$$F : x \mapsto \int_a^x t^2e^t\mathrm{d}t + \mathrm{cte}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un réel fixé. Une première intégration par parties donne

$$F(x) = \left[t^2e^t\right]_a^x - \int_a^x 2te^t\mathrm{d}t + \mathrm{cte} = x^2e^x - 2\int_a^x te^t\mathrm{d}t + \mathrm{cte}.$$

Une seconde intégration par parties donne ensuite

$$\int_a^x te^t\mathrm{d}t = \left[te^t\right]_a^x - \int_a^x e^t = (xe^x + \mathrm{cte}) - \left[e^t\right]_a^x = xe^x - e^x + \mathrm{cte}.$$

En injectant ce résultat dans l'expression de $F(x)$ précédente, on trouve finalement

$$F(x) = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + \mathrm{cte} = (x^2 - 2x + 2)e^x + \mathrm{cte}.$$

I.4.2. Changement de variable

Théorème 6. (Formule de changement de variable) Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $(a, b) \in J^2$,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque. Ce théorème doit être interprété de la façon suivante. Si dans une intégrale on veut interchanger la variable x et l'expression $\varphi(t)$, c'est possible à condition d'aussi :

- interchanger les éléments infinitésimaux $\mathrm{d}x$ et $\varphi'(t)\mathrm{d}t$,
- ajuster les bornes en conséquences : lorsque t varie entre a et b, x varie alors entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

Attention, tous ces éléments doivent être échangés simultanément, il ne doit pas y avoir d'étape de calcul faisant apparaître en même temps les variables x et t.

Exemple. Calculons l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\mathrm{d}t.$$

Si on veut effectuer le changement de variable $x = \cos(t)$, alors on aura la « relation » :

$$\mathrm{d}x = \cos'(t)\mathrm{d}t = -\sin(t)\mathrm{d}t$$

et de plus lorsque t varie entre 0 et $\frac{\pi}{3}$, alors x varie entre $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi/3) = 1/2$. Ainsi, on a finalement :

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(t)\mathrm{d}t}{\cos(t)} = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

On s'est maintenant ramenés à un intégrale que l'on sait calculer directement via une primitive :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln(|x|)\Big]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2).$$

En toute rigueur, il convient de mentionner que le changement de variable est ici possible car la fonction $\cos$ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{3}]$ vers $[\frac{1}{2}, 1]$ et est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque. Comme l'intégration par parties, le changement de variable se prête aussi sans problème au calcul de primitive via le théorème fondamental de l'analyse. Par exemple, les primitives de la fonction $f : x \mapsto \tan(x)$ sont les fonctions F de la forme

$$F(x) = \int_a^x \tan(t)\mathrm{d}t + \mathrm{cte}.$$

avec $a \in \mathbb{R}$ fixé. Le changement de variable $u = \cos(t)$ donne $\mathrm{d}u = -\sin(t)\mathrm{d}t$ et donc

$$F(x) = \int_a^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\mathrm{d}t + \text{cte} = \int_{\cos(a)}^{\cos(x)} \frac{-\mathrm{d}u}{u} + \text{cte} = -\Big[\ln(|u|)\Big]_{\cos(a)}^{\cos(x)} + \text{cte} = -\ln(|\cos(x)|) + \text{cte}$$

(notez que la lettre x était déjà utilisée ici c'est pourquoi on a choisi la lettre u pour la nouvelle variable)

Exemple. Calculons l'intégrale

$$I = \int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x.$$

On utilise pour cela le changement de variable

$$\begin{cases} u = 1 - x^2, \\ \mathrm{d}u = -2x\mathrm{d}x. \end{cases}$$

Celui-ci donne l'égalité :

$$I = -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^{3/4} \frac{1}{u^{3/2}}\mathrm{d}u.$$

On trouve finalement

$$I = \frac{1}{2}\int_{3/4}^{1} u^{-3/2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[-2u^{-1/2}\right]_{3/4}^{1} = -\left[u^{-1/2}\right]_{3/4}^{1} = -\left(1^{-1/2} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-1/2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$$

Exemple. Calculons l'intégrale

$$I = \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x.$$

On utilise pour cela le changement de variable

$$\begin{cases} x = \sin(t) \\ \mathrm{d}x = \cos(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

car celui-ci a l'avantage de donner la relation

$$(1-x^2)^{3/2} = (1-\sin^2(t))^{3/2} = (\cos^2(t))^{3/2} = \cos^3(t).$$

La fonction $\sin$ réalisant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \frac{\pi}{6}]$ vers $[0, \frac{1}{2}]$, la formule de changement de variable donne

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^3(x)} \times \cos(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \Big[\tan(x)\Big]_0^{\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chapitre II.

Fractions rationnelles

II.1. Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples

▷ *MA11, module 14 — Fractions rationnelles*

II.1.1. Définition

Dans ce qui suit, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Définition 1. Une **fraction rationnelle** (à coefficients dans $\mathbb{K}$) est une expression de la forme

$$F = \frac{P}{Q}$$

avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes et $Q \neq 0$.

On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ (à ne pas confondre avec l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$).

Exemple. Les expressions ci-dessous sont des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{X^2+1}, \qquad \frac{X^2+3}{X^2-2X+1}, \qquad \frac{X^4-8X^2+9X-7}{(X-2)^2(X+3)}.$$

Définition 2. Soient P, Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle **plus grand diviseur commun** de P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ le polynôme unitaire de plus grand degré possible qui divise à la fois P et Q. On le note $\operatorname{pgcd}(P, Q)$.

Exemple.

1. $\operatorname{pgcd}(X^3+2X^2-X-2,\ X^3-3X+2) = X^2+X-2$ car

$$X^3+2X^2-X-2 = (X-1)(X+1)(X+2) \quad \text{et} \quad X^3-3X+2 = (X-1)^2(X+2).$$

   Ainsi les polynômes unitaires qui divisent ces deux polynômes à la fois sont : 1, $X-1$, $X+2$ et $(X-1)(X+2) = X^2+X-2$.
2. $\operatorname{pgcd}(5X+15,\ 2X^2-8X+8) = 1$ car

$$5X+15 = 5(X+3) \quad \text{et} \quad 2X^2-8X+8 = 2(X-2)^2.$$

L'intérêt de la notion de plus grand commun diviseur dans le cadre des fractions rationnelles est le suivant : si jamais dans une fraction rationnelle $F = P/Q$ on a $\operatorname{pgcd}(P,Q) \neq 1$, alors on peut factoriser P et Q par leur plus grand facteur commun puis simplifier de sorte à obtenir une nouvelle écriture *irréductible* $F = P_2/Q_2$

avec $\mathrm{pgcd}(P_2, Q_2) = 1$. Par exemple, la fraction

$$F(X) = \frac{X^3 + 2X^2 - X - 2}{X^3 - 3X + 2}$$

n'est pas écrite sous forme irréductible car $\mathrm{pgcd}(X^3 + 2X^2 - X - 2,\ X^3 - 3X + 2) = X^2 + X - 2$ (voir exemple ci-dessus). On peut alors effectuer la simplification suivante :

$$F(X) = \frac{(X^2 + X - 2)(X + 1)}{(X^2 + X - 2)(X - 1)} = \frac{X + 1}{X - 1}$$

et cette dernière écriture obtenue est maintenant irréductible car $\mathrm{pgcd}(X + 1, X - 1) = 1$.

II.1.2. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Théorème 1. Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle avec $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$. On sait que Q admet la décomposition en polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$:

$$Q(X) = (X - \alpha_1)^{k_1}(X - \alpha_2)^{k_2} \cdots (X - \alpha_r)^{k_r}$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ les racines de Q et $k_1, \ldots, k_r$ leurs multiplicités respectives.

Alors F s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} F(X) = E(X) \quad & + \frac{a_{1,1}}{X - \alpha_1} + \frac{a_{1,2}}{(X - \alpha_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1,k_1}}{(X - \alpha_1)^{k_1}} \\ & + \frac{a_{2,1}}{X - \alpha_2} + \frac{a_{2,2}}{(X - \alpha_2)^2} + \cdots + \frac{a_{2,k_2}}{(X - \alpha_2)^{k_2}} \\ & + \cdots \\ & + \frac{a_{r,1}}{X - \alpha_r} + \frac{a_{r,2}}{(X - \alpha_r)^2} + \cdots + \frac{a_{1,k_r}}{(X - \alpha_r)^{k_r}}. \end{aligned}$$

avec $E \in \mathbb{C}[X]$ et $a_{i,j} \in \mathbb{C}$. De plus, cette écriture est unique à l'ordre près des termes.

Définition 3. L'écriture donnée dans le théorème ci-dessus s'appelle la **décomposition en éléments simples** de F sur $\mathbb{C}$. On dit que le polynôme E est la **partie polynomiale** (ou parfois *partie entière*) de F et les éléments de la forme

$$\frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j}$$

sont appelés des **éléments simples** sur $\mathbb{C}$.

Remarque. Il ne faut pas être effrayé par l'écriture très générale donnée dans le théorème 1. Retenez simplement que F peut se décomposer comme un somme de plusieurs termes obtenus ainsi :

- il y a toujours une partie polynomiale (éventuellement nulle),
- chaque racine α_i du dénominateur fait apparaître autant d'éléments simples que sa multiplicité, de dénominateurs respectifs $(X - \alpha_i), (X - \alpha_i)^2, (X - \alpha_i)^3, \ldots$

En pratique, on fait donc apparaître autant d'éléments simples que le degré du dénominateur.

Exemple.

$$F_1(X) = \frac{1}{X^2+1} = \frac{1}{(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})} = \frac{a}{X+\mathrm{i}} + \frac{b}{X-\mathrm{i}} \quad \text{avec } a = \frac{1}{2}\mathrm{i} \text{ et } b = -\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

La partie polynomiale de F_1 est le polynôme nul et on a fait apparaître deux éléments simples.

$$F_2(X) = \frac{X^4 - 8X^2 + 9X - 7}{(X-2)^2(X+3)} = X + 1 + \frac{2}{X-2} + \frac{-1}{(X-2)^2} + \frac{-1}{X+3}.$$

La partie polynomiale de F_2 est le polynôme $X+1$ et on a fait apparaître trois éléments simples : un provient de la racine simple -3 du dénominateur, et deux proviennent de la racine double 2.

Méthode. Voyons comment décomposer en éléments simples une fraction rationnelle en prenant l'exemple de

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11}{X^3 - 3X + 2}.$$

1. **On détermine la partie polynomiale à l'aide d'une division euclidienne.**
Il suffit d'effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$. Ici on a :

$$\begin{array}{r|l} X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11 & X^3 - 3X + 2 \\ \cline{2-2} -X^5 + 3X^3 - 2X^2 \phantom{{}- 8X + 11} & X^2 + 1 \\ \cline{1-1} X^3 + 2X^2 - 8X + 11 & \\ -X^3 \phantom{{}+ 2X^2} + 3X - 2 & \\ \cline{1-1} 2X^2 - 5X + 9 & \end{array}$$

d'où la relation $P(X) = (X^2+1)Q(X) + 2X^2 - 5X + 9$. En divisant les deux termes par $Q(X)$, cela donne :

$$F(X) = X^2 + 1 + \frac{2X^2 - 5X + 9}{X^3 - 3X + 2}.$$

Ainsi, la partie polynomiale de F est X^2+1, et le problème se ramène maintenant à déterminer la décomposition en éléments simples de

$$G(X) = \frac{2X^2 - 5X + 9}{X^3 - 3X + 2}.$$

2. **On donne la décomposition en facteurs irréductibles du dénominateur.**
Ici, le polynôme Q vérifie $Q(1) = 0$ mais aussi $Q'(1) = 0$ donc il est divisible par $(X-1)^2$. Une division euclidienne donne comme décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$:

$$Q(X) = (X-1)^2(X+2).$$

3. **On donne la décomposition en éléments simples « théorique ».**
La décomposition en facteurs irréductibles de $Q(X)$ implique que la décomposition en éléments simples de $G(X)$ est de la forme

$$G(X) = \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{b_1}{X+2}$$

avec $(a_1, a_2, b_1) \in \mathbb{C}^3$. (Pour la décomposition en éléments simples de F, il suffira de rajouter la partie polynomiale trouvée précédemment.)

4. **On détermine la valeur des coefficients de la décomposition.**
Dans notre cas, il faut trouver les valeurs des coefficients a_1, a_2, b_1. Pour cela il existe plusieurs méthodes.
   a) **Par mise sous un même dénominateur et identification.**
   On met toutes les fractions sur le même dénominateur $Q(X)$ dans la décomposition en éléments simples théorique, puis on développe complètement le numérateur. Dans notre cas, cela donne :
$$\begin{aligned} G(X) &= \frac{a_1(X-1)(X+2)+a_2(X+2)+b_1(X-1)^2}{(X-1)^2(X+2)} \\ &= \frac{(a_1+b_1)X^2+(a_1+a_2-2b_1)X+(-2a_1+2a_2+b_1)}{Q(X)} \end{aligned}$$
   En identifiant ensuite le numérateur avec celui de l'expression initiale de $G(X)$, on obtient le système
$$\begin{cases} a_1+b_1=2 \\ a_1+a_2-2b_1=-5 \\ -2a_1+2a_2+b_1=9 \end{cases}$$
   qu'il faudrait ensuite résoudre ... Cette méthode est longue et calculatoire et la moindre erreur de calcul fausse en général les valeurs de *tous* les coefficients calculés. On privilégiera donc plutôt les méthodes qui suivent.
   b) **Par multiplication par $(X-\alpha)^k$ puis évaluation en $X=\alpha$.**
   Cette méthode permet de trouver, dans les éléments simples issus d'une racine α de multiplicité k, la valeur du coefficient situé au-dessus du dénominateur $(X-\alpha)^k$. Par exemple, dans le cas de notre décomposition en éléments simples théorique de $G(X)$:
$$\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{b_1}{X+2},$$
   cela permettra de trouver les valeurs des coefficients a_2 et b_1.
   - Comme $\alpha=1$ est racine de Q de multiplicité $k=2$, on multiplie de part et d'autre par $(X-1)^2$. On obtient :
$$\frac{2X^2-5X+9}{X+2} = a_1(X-1)+a_2+\frac{b_1(X-1)^2}{X+2}.$$
     En évaluant ensuite en $X=1$, on trouve $\frac{6}{3}=0+a_2+0$, c'est-à-dire $a_2=2$.
   - Comme $\alpha=-2$ est racine de Q de multiplicité $k=1$, on multiplie de part et d'autre par $(X+2)$. On obtient :
$$\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2} = \frac{a_1(X+2)}{X-1} + \frac{a_2(X+2)}{(X-1)^2} + b_1.$$
     En évaluant ensuite en $X=-2$, on trouve $\frac{27}{9}=0+0+b_1$, c'est-à-dire $b_1=3$.

   Cette méthode permet ici de trouver beaucoup plus facilement a_2 et b_1 que la méthode précédente, malheureusement on ne peut pas appliquer la même stratégie pour le coefficient a_1 au risque de se retrouver à diviser par zéro (essayez).

c) **Évaluation en une valeur quelconque.**
Cette méthode s'avère utile lorsqu'il ne reste qu'un ou deux coefficients à trouver. C'est notre cas ici car, à l'issue de la méthode précédente, on est arrivé à l'expression :

$$\frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{a_1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{3}{X+2}.$$

Pour trouver a_1, on peut alors évaluer cette égalité en une valeur quelconque qui n'annule pas le dénominateur $Q(X)$ (car on veut éviter de diviser par zéro ...). En prenant par exemple $X = 0$, on obtient l'équation

$$\frac{9}{2} = -a_1 + 2 + \frac{3}{2}$$

qu'on résout aisément pour obtenir $a_1 = 2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -1$.

Notez que s'il était resté deux coefficients à trouver, il aurait fallu évaluer l'égalité en *deux* valeurs distinctes de sorte à obtenir deux équations à deux inconnues formant un petit système à résoudre. Pour trois coefficients à trouver, il faut évaluer trois fois pour avoir trois équations, et ainsi de suite. L'efficacité de cette méthode diminue donc rapidement au fur et à mesure que le nombre de coefficients restant à trouver augmente.

5. **On conclut en donnant la décomposition en éléments simples de la fraction de départ.**
Il ne reste plus qu'à donner la décomposition trouvée en n'oubliant pas de rajouter la partie polynomiale pour revenir à la fraction F de départ. Dans notre exemple, on a obtenu :

$$F(X) = X^2 + 1 + \frac{-1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{3}{X+2}.$$

II.1.3. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}$ la décomposition fait apparaître une deuxième sorte d'éléments simples, due à l'existence dans $\mathbb{R}[X]$ de polynômes irréductibles de degré 2.

Théorème 2. Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle avec $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $\operatorname{pgcd}(P, Q) = 1$. On sait que Q admet la décomposition en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$

$$Q(X) = (X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r}(X^2+\beta_1 X+\gamma_1)^{\ell_1}\cdots(X^2+\beta_s X+\gamma_s)^{\ell_s}$$

avec :

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ les racines réelles de Q et $k_1, \ldots, k_r$ leurs multiplicités respectives,
- $X^2+\beta_1 X+\gamma_1, \ldots, X^2+\beta_s X+\gamma_s$ des polynômes de degré 2 irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Alors F s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
F(X)=E(X) \quad &+ \frac{a_{1,1}}{X-\alpha_1}+\frac{a_{1,2}}{(X-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{a_{1,k_1}}{(X-\alpha_1)^{k_1}}\\
&+ \frac{a_{2,1}}{X-\alpha_2}+\frac{a_{2,2}}{(X-\alpha_2)^2}+\cdots+\frac{a_{2,k_2}}{(X-\alpha_2)^{k_2}}\\
&+ \cdots\\
&+ \frac{a_{r,1}}{X-\alpha_r}+\frac{a_{r,2}}{(X-\alpha_r)^2}+\cdots+\frac{a_{1,k_r}}{(X-\alpha_r)^{k_r}}\\
&+ \frac{b_{1,1}X+c_{1,1}}{X^2-\beta_1X+\gamma_1}+\frac{b_{1,2}X+c_{1,2}}{(X^2-\beta_1X+\gamma_1)^2}+\cdots+\frac{b_{1,\ell_1}X+c_{1,\ell_1}}{(X^2-\beta_1X+\gamma_1)^{\ell_1}}\\
&+ \cdots\\
&+ \frac{b_{s,1}X+c_{s,1}}{X^2-\beta_sX+\gamma_s}+\frac{b_{s,2}X+c_{s,2}}{(X^2-\beta_sX+\gamma_s)^2}+\cdots+\frac{b_{s,\ell_s}X+c_{s,\ell_s}}{(X^2-\beta_sX+\gamma_s)^{\ell_s}}.
\end{aligned}$$

avec $E\in\mathbb{R}[X]$ et $a_{i,j},b_{i,j},c_{i,j}\in\mathbb{R}$. De plus, cette écriture est unique à l'ordre près des termes.

Remarque. Comme précédemment, ne vous laissez pas impressionner par l'écriture générale donnée dans le théorème 2. L'idée est simplement que :

- il y a toujours une partie polynomiale (éventuellement nulle),
- chaque facteur $(X-\alpha_i)$ irréductible de degré 1 du dénominateur fait apparaître autant d'éléments simples que sa multiplicité, dont
  - — les numérateurs sont des constantes,
  - — les dénominateurs sont respectivement $(X-\alpha_i)$, $(X-\alpha_i)^2$, $(X-\alpha_i)^3,\ldots$
- chaque facteur $(X^2+\beta_iX+\gamma_i)$ irréductible de degré 2 du dénominateur fait apparaître autant d'éléments simples que sa multiplicité, dont
  - — les numérateurs sont des polynômes de la forme $bX+c$,
  - — les dénominateurs sont respectivement $(X^2+\beta_iX+\gamma_i)$, $(X^2+\beta_iX+\gamma_i)^2,\ldots$

Exemple. Considérons le polynôme

$$Q(X)=(X^2+1)^2(X-1)^3(X+2).$$

Celui-ci est déjà décomposé en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ car le polynôme X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, la fraction rationnelle

$$F(X)=\frac{P(X)}{(X^2+1)^2(X-1)^3(X+2)}$$

admet une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$F(X)=E(X)+\frac{a_1X+b_1}{X^2+1}+\frac{a_2X+b_2}{(X^2+1)^2}+\frac{c_1}{X-1}+\frac{c_2}{(X-1)^2}+\frac{c_3}{(X-1)^3}+\frac{d_1}{X+2}$$

avec $(a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2,c_3,d_1)\in\mathbb{R}^8$.

En revanche, la décomposition facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$Q(X) = (X + \mathrm{i})^2(X - \mathrm{i})^2(X - 1)^3(X + 2)$$

donc la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$ est de la forme

$$F(X) = E(X) + \frac{a_1'}{X+\mathrm{i}} + \frac{a_2'}{(X+\mathrm{i})^2} + \frac{b_1'}{X-\mathrm{i}} + \frac{b_2'}{(X-\mathrm{i})^2} + \frac{c_1'}{X-1} + \frac{c_2'}{(X-1)^2} + \frac{c_3'}{(X-1)^3} + \frac{d_1'}{X+2}$$

avec $(a_1', a_2', b_1', b_2', c_1', c_2', c_3', d_1') \in \mathbb{C}^8$.

En fait, de la même manière que la décomposition en facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$ peut se retrouver à partir de celle dans $\mathbb{C}[X]$ en regroupant les facteurs conjuguées $(X + \mathrm{i})^2$ et $(X - \mathrm{i})^2$, on peut retrouver la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$ à partir de celle sur $\mathbb{C}$ en mettant sous un même dénominateur les deux sommes

$$\frac{a_1'}{X+\mathrm{i}} + \frac{b_1'}{X-\mathrm{i}} \qquad \text{et} \qquad \frac{a_2'}{(X+\mathrm{i})^2} + \frac{b_2'}{(X-\mathrm{i})^2}.$$

Par identification, on trouverait en fait $c_1 = c_1'$, $c_2 = c_2'$, $c_3 = c_3'$ et $d_1 = d_1'$ (mais il n'y a aucune raison en revanche que les coefficients a_1, b_1 soient égaux aux coefficients a_1', b_1').

Exemple. Décomposons en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{3X^4 + 5X^3 + 11X^2 + 5X + 3}{(X^2 + X + 1)^2(X - 1)}.$$

On peut employer globalement la même méthode que pour la décomposition sur $\mathbb{C}$.

1. **Déterminons la partie polynomiale.**
   Ici, le degré de P vaut 4, il est strictement inférieur au degré de Q qui vaut 5. Ainsi, la division euclidienne de P par Q donnera un quotient nul et un reste égal à P. On en déduit que la partie polynomiale de F est nulle.
2. **Décomposons le dénominateur de F en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.**
   Ici le dénominateur $Q(X)$ est déjà décomposé en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ car le facteur $X - 1$ est de degré 1, tandis que le facteur $X^2 + X + 1$ est de degré 2 et de discriminant
   $$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3.$$
   Notons pour la suite que $X^2 + X + 1$ admet donc deux racines complexes conjuguées
   $$z_1 = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$
3. **Donnons la décomposition en éléments simples théorique de F sur $\mathbb{R}$.**
   En vertu du théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, il existe donc $(a_1, a_2, b_1, b_2, c) \in \mathbb{R}^5$ tel que
   $$\frac{3X^4 + 5X^3 + 11X^2 + 5X + 3}{(X^2 + X + 1)^2(X - 1)} = \frac{a_1X + b_1}{X^2 + X + 1} + \frac{a_2X + b_2}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{c}{X - 1}.$$
4. **Déterminons les valeurs des coefficients de la décomposition.**

- Pour la valeur de c, il suffit d'appliquer la méthode habituelle. En multipliant de part et d'autre par $X-1$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\frac{3X^4+5X^3+11X^2+5X+3}{(X^2+X+1)^2} = \frac{(a_1X+b_1)(X-1)}{X^2+X+1} + \frac{(a_2X+b_2)(X-1)}{(X^2+X+1)^2} + c.$$

En évaluant en $X=1$, il vient alors $\frac{27}{9} = 0+0+c$ c'est-à-dire $c=3$.

- Pour les valeurs a_2 et b_2, on peut également appliquer cette même méthode, mais c'est un peu plus calculatoire car il faut calculer avec des complexes. En multipliant de part et d'autre par $(X^2+X+1)^2$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\frac{3X^4+5X^3+11X^2+5X+3}{X-1} = (a_1X+b_1)(X^2+X+1) + a_2X + b_2 + \frac{c(X^2+X+1)}{X-1}.$$

Évaluons maintenant cette égalité en $X=z_1$.

— Comme z_1 est racine de X^2+X+1, le second membre donne simplement

$$0 + a_2z_1 + b_2 + 0 = a_2\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} + b_2 = \left(-\frac{a_2}{2}+b_2\right) + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}a_2.$$

— Pour le premier membre, on va utiliser astucieusement la forme exponentielle. Tout d'abord, remarquons que

$$z_1^4 = e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{8}} = z_1, \qquad z_1^3 = e^{\mathrm{i}2\pi} = 1, \qquad z_1^2 = e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = z_2 = \bar{z}_1.$$

Ainsi, le premier membre est égal à

$$\frac{3z_1+5+11\bar{z}_1+5z_1+3}{z_1-1} = \frac{8(z_1+\bar{z}_1)+3\bar{z}_1+8}{z_1-1} = \frac{8\times(-1)+3\bar{z}_1+8}{z_1-1} = \frac{3\bar{z}_1}{z_1-1}.$$

Or, $z_1 - 1 = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$, d'où

$$\frac{3\bar{z}_1}{z_1-1} = \frac{3e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}}{\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Ainsi, on a l'égalité

$$\mathrm{i}\sqrt{3} = \left(-\frac{a_2}{2}+b_2\right) + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}a_2$$

qui par identification des parties réelles et imaginaires donne $a_2 = 2$ et $b_2 = 1$.

À ce stade des calculs, on vient d'arriver à l'expression

$$\frac{3X^4+5X^3+11X^2+5X+3}{(X^2+X+1)^2(X-1)} = \frac{a_1X+b_1}{X^2+X+1} + \frac{2X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{3}{X-1}.$$

Il n'y a plus qu'à évaluer en quelques valeurs bien choisies pour trouver les coefficients manquants.

- Évaluons en $X=0$. On obtient $-3 = b_1 + 1 - 3$ d'où $b_1 = -1$.

- Évaluons en $X = -1$. On obtient

$$\frac{3-5+11-5+3}{-2} = \frac{-a_1-1}{1} + \frac{-2+1}{1} + \frac{3}{-2}$$

c'est-à-dire $-\frac{7}{2} = -a_1 - 2 - \frac{3}{2}$. On en déduit que $a_1 = 0$.

5. **Conclusion.** La décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$ est :

$$F(X) = 0 + \frac{-1}{X^2+X+1} + \frac{2X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{3}{X-1}.$$

II.2. Intégration des fractions rationnelles

MA13, module 5 — Intégration des fractions rationnelles

Dans la section précédente, nous avons vu que toute fraction rationnelle peut s'écrire comme somme d'une partie polynomiale et d'une combinaison linéaire d'*éléments simples* dans $\mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, pour intégrer une fraction rationnelle, il suffit donc de savoir intégrer n'importe lequel de ces termes.

II.2.1. Partie polynomiale et éléments simples de première espèce

Ces éléments sont les plus simples à intégrer, car on connaît déjà leurs primitives.

Proposition 1.

1. Les primitives de la partie polynomiale $E(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ sont de la forme

$$x \mapsto a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{cte}.$$

2. Les primitives de $f(x) = \dfrac{a_1}{x-\alpha}$ sont de la forme

$$F : x \mapsto a_1 \ln(|x-\alpha|) + \text{cte}.$$

3. Les primitives de $f(x) = \dfrac{a_2}{(x-\alpha)^2}$ sont de la forme

$$F : x \mapsto -\frac{a_2}{x-\alpha} + \text{cte}.$$

4. Plus généralement, pour tout $n \geqslant 2$, les primitives de $f(x) = \dfrac{a_n}{(x-\alpha)^n}$ sont de la forme

$$F : x \mapsto -\frac{1}{n-1} \times \frac{a_n}{(x-\alpha)^{n-1}} + \text{cte}.$$

Les éléments listés dans les points 2, 3 et 4 dans la proposition ci-dessus sont appelés éléments simples **de première espèce**. Il ne reste plus qu'à étudier les éléments dits **de seconde espèce**, c'est-à-dire de la forme

$$\frac{ax+b}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$$

avec $x^2 + \beta x + \gamma$ irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

II.2.2. Éléments simples de seconde espèce

Malheureusement les éléments simples de seconde espèce ne sont pas aussi rapides à intégrer, mais il existe une méthode type qu'il suffit de connaître et appliquer pour s'en sortir.

Méthode. Décrivons cette méthode en prenant pour exemple l'intégration de la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}.$$

1. **On décompose le numérateur de sorte à faire apparaître la forme u'/u.**
   On cherche deux constantes λ et μ telles que

$$\frac{x+1}{2x^2+x+1} = \frac{\lambda(2x^2+x+1)' + \mu}{2x^2+x+1} = \frac{\lambda(4x+1)+\mu}{2x^2+x+1}.$$

   On peut procéder soit à tâtons, soit par identification. Dans les deux cas on doit aboutir à

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1} = \frac{\frac{1}{4}(4x+1)+\frac{3}{4}}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \times \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2x^2+x+1}.$$

   Par linéarité de l'intégrale, on peut alors affirmer que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_a^b \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int_a^b \frac{1}{2x^2+x+1}\mathrm{d}x.$$

   La première intégrale se calcule directement puisqu'on a fait en sorte de faire apparaître la forme $\frac{u'}{u}$. On a

$$\int_a^b \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\mathrm{d}x = \left[\ln(|2x^2+x+1|)\right]_a^b.$$

   La suite de la méthode consiste maintenant à étudier la deuxième intégrale.

2. **On met le dénominateur sous forme canonique.**
   Dans notre exemple, on a :

$$2x^2+x+1 = 2\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)+1 = 2\left(x^2+2\times\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{8}+1 = 2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}.$$

3. **On fait apparaître la forme $1/(u^2+1)$ (car on en connaît une primitive : $\arctan(u)$).**
   En partant de la forme canonique trouvée à l'étape précédente, on trouve :

$$\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}} = \frac{1}{\frac{7}{8}} \times \frac{1}{\frac{16}{7}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+1} = \frac{8}{7} \times \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)^2+1}.$$

   Ainsi, on a

$$\int_a^b \frac{1}{2x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{8}{7}\int_a^b \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)^2+1}\mathrm{d}x.$$

Il n'y a plus qu'à poser le changement de variable $u = \dfrac{4}{\sqrt{7}}\left(x + \dfrac{1}{4}\right)$, pour lequel on a

$$\mathrm{d}u = \frac{4}{\sqrt{7}}\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{7}}{4}\mathrm{d}u.$$

Il vient

$$\int_a^b \frac{1}{2x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{8}{7}\int_{a'}^{b'} \frac{1}{u^2+1} \times \frac{\sqrt{7}}{4}\mathrm{d}u = \frac{2\sqrt{7}}{7}\int_{a'}^{b'} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{2\sqrt{7}}{7}\left[\arctan(u)\right]_{a'}^{b'}$$

avec $a' = \dfrac{4}{\sqrt{7}}\left(a + \frac{1}{4}\right)$ et $b' = \dfrac{4}{\sqrt{7}}\left(b + \frac{1}{4}\right)$.

4. **On regroupe tous les calculs effectués de sorte à répondre à la question posée.** On arrive donc à la conclusion que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{4} \times \left[\ln(|2x^2+x+1|)\right]_a^b + \frac{3}{4} \times \frac{2\sqrt{7}}{7}\left[\arctan(u)\right]_{a'}^{b'} \\ &= \frac{1}{4} \times \left[\ln(|2x^2+x+1|)\right]_a^b + \frac{3\sqrt{7}}{14}\left[\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)\right]_a^b\end{aligned}$$

Remarque. Cette méthode se généralise assez simplement au calcul de l'intégrale de

$$f(x) = \frac{x+1}{(2x^2+x+1)^k}$$

pour $k \geqslant 2$ quelconque. On découperait l'intégrale de f en une combinaison linéaire de deux intégrales plus simples :

- une première intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)^k}\mathrm{d}x$, ici :

$$\int_a^b \frac{4x+1}{(2x^2+x+1)^k}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{k-1} \times \frac{1}{(2x^2+x+1)^{k-1}}\right]_a^b,$$

- une deuxième intégrale qui, après changement de variable, serait de la forme

$$I_k = \int_{a'}^{b'} \frac{1}{(u^2+1)^k}\mathrm{d}u.$$

C'est cette deuxième intégrale qui est plus pénible à traiter. Une intégration par parties bien choisie permet de passer de I_k à I_{k-1}. En répétant le procédé, on pourrait arriver finalement jusqu'à I_1 qu'on sait calculer, mais le résultat n'est pas à connaître par cœur.

Ce chapitre se termine sur IonisX par une présentation des *règles de* Bioche. Ces dernières ne sont pas à connaître, mais le lecteur curieux ne doit pas hésiter à regarder la vidéo en question pour voir de quoi il s'agit.

Chapitre III.

Équations différentielles

III.1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

▷ *MA13, module 6 — Équations différentielles linéaires du premier ordre*

III.1.1. Définitions et stratégie générales

Définition 1. On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** une équation de la forme

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

avec a, b, c trois fonctions définies sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$, et dans laquelle l'inconnue est elle-même une fonction y.

On dit qu'une telle équation différentielle est :

- **homogène** lorsque c est la fonction nulle,
- **à coefficients constants** lorsque les fonctions a et b sont constantes.

Résoudre une telle équation sur un intervalle $I \subset J$, c'est trouver l'ensemble des toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ dérivables sur I telles que

$$\forall t \in I, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

Exemple. L'équation

$$(E) : \quad y'(t) + y(t) = 1$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre (non-homogène, à coefficients constants).

La fonction

$$y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $y'(t) = 0$ et donc

$$y'(t) + y(t) = 1.$$

Ce n'est en revanche pas la seule solution, comme on le verra par la suite.

Exemple. L'équation

$$(E) : \quad ty'(t) + y(t) = 1$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre (non-homogène).

La fonction

$$y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t}{2} \end{array} \right.$$

est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $y'(t) = \frac{1}{2}$ et donc

$$ty'(t) + y(t) = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t.$$

Encore une fois, ce n'est pas la seule solution de (E), il en existe d'autres.

Définition 2. Soit

$$(E) : \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

une équation différentielle linéaire du premier ordre. On appelle **équation homogène associée** à (E) l'équation différentielle homogène

$$(E_0) : \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

Remarque. Une équation différentielle linéaire homogène admet toujours au moins une solution : la fonction nulle.

Exemple. Reprenons l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'(t) + y(t) = 1.$$

Son équation homogène associée est l'équation

$$(E_0) : \quad y'(t) + y(t) = 0.$$

- On remarque que la fonction

  $$y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{-t} \end{array} \right.$$

  est une solution de (E_0). En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $y'(t) = -e^{-t}$ et donc

  $$y'(t) + y(t) = -e^{-t} + e^{t} = 0.$$

- Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction

  $$y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-t} \end{array} \right.$$

  est une solution de (E_0). En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $y'(t) = -ke^{-t}$ et donc

  $$y'(t) + y(t) = -ke^{-t} + ke^{t} = 0.$$

Ainsi, l'ensemble

$$\left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & ke^{-t} \end{array} \right. \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

est inclus dans l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0). En particulier, cela signifie que (E_0) admet déjà une infinité de solutions.

Exemple. Reprenons l'équation différentielle

$$(E) : \quad ty'(t) + y(t) = 1.$$

Son équation homogène associée est l'équation

$$(E_0) : \quad ty'(t) + y(t) = 0.$$

- On remarque que la fonction

$$y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t} \end{array} \right.$$

  est une solution de (E_0). En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $y'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ et donc

$$ty'(t) + y(t) = -\frac{t}{t^2} + \frac{1}{t} = 0.$$

- Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction

$$y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{k}{t} \end{array} \right.$$

  est une solution de (E_0). En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $y'(t) = -\dfrac{k}{t^2}$ et donc

$$ty'(t) + y(t) = -\frac{kt}{t^2} + \frac{k}{t} = 0.$$

Ainsi, l'ensemble

$$\left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{k}{t} \end{array} \right. \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

est inclus dans l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$. Là encore, (E_0) admet une infinité de solutions.

Théorème 1. Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et (E_0) son équation homogène associée. Si $y_p : I \to \mathbb{R}$ est une solution de (E) sur I, alors pour toute fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable :

$$y \text{ est solution de } (E) \iff y - y_p \text{ est solution de } (E_0)$$

Démonstration. Notons $(E) : a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$. On a alors $(E_0) : a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$.

Soit $y_p : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E) et $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable quelconque. Notons $y_0 = y - y_p$. On a alors $y_0' = y' - y_p'$.

(⇒) Supposons que y est solution de (E). Cela signifie que pour tout $t \in I$, on a

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

Par ailleurs, comme y_p est solution de (E), on a également pour tout $t \in I$,

$$a(t)y_p'(t) + b(t)y_p(t) = c(t).$$

En soustrayant ces deux égalités et en factorisant, on trouve pour tout $t \in I$

$$a(t)(y'(t) - y_p'(t)) + b(t)(y(t) - y_p(t)) = 0$$

c'est-à-dire $a(t)y_0'(t) + b(t)y_0(t) = 0$. Ainsi, $y_0 = y - y_p$ est solution de (E_0).

(⇐) Réciproquement, supposons que $y_0 = y - y_p$ est solution de (E_0). Cela signifie que pour tout $t \in I$ on a

$$a(t)y_0'(t) + b(t)y_0(t) = 0.$$

Par ailleurs, comme y_p est solution de (E), on a également pour tout $t \in I$,

$$a(t)y_p'(t) + b(t)y_p(t) = c(t).$$

En ajoutant ces deux égalités et en factorisant, on trouve pour tout $t \in I$,

$$a(t)(y_0'(t) + y_p'(t)) + b(t)(y_0(t) + y_p(t)) = c(t)$$

c'es-à-dire $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$. Ainsi, y est solution de (E).

Corollaire 1. Soit (E) une équation différentielle linéaire et (E_0) son équation homogène associée. Si :

- on connaît l'ensemble S_0 contenant *toutes* les solutions de (E_0),
- on connaît *une* solution y_p de (E),

alors l'ensemble de *toutes* les solutions de (E) est

$$S = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in S_0\}.$$

Exemple. Reprenons encore une fois l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'(t) + y(t) = 1.$$

- On a vu que la fonction
$$y_p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$
est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- On a vu que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction
$$y_0 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-t} \end{array} \right.$$
est une solution de l'équation homogène associée (E_0) sur $\mathbb{R}$.

On peut alors en déduire que, pour tout $k \in I$, la fonction

$$y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 1 + ke^{-t} \end{array} \right.$$

est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exemple. Reprenons encore une fois l'équation différentielle

$$(E) : \quad ty'(t) + y(t) = 1.$$

- On a vu que la fonction

$$y_p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t}{2} \end{array} \right.$$

  est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a vu que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction

$$y_0 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{k}{t} \end{array} \right.$$

  est une solution de l'équation homogène associée (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut alors en déduire que, pour tout $k \in I$, la fonction

$$y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t}{2} + \frac{k}{t} \end{array} \right.$$

est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, pour résoudre une équation différentielle (E) linéaire du premier ordre, il suffira d'appliquer la méthode qui suit.

Méthode.

1. On détermine l'ensemble S_0 de *toutes* les solutions de l'équation homogène associée (E_0).
2. On trouve *une* solution y_p de (E) (en général appelée *solution particulière*).
3. On conclut en affirmant simplement que les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $y = y_p + y_0$ avec $y_0 \in S_0$.

Les sections suivantes donnent des méthodes permettant de réaliser de manière systématique les deux premières étapes.

Remarque. Bien sûr cette méthodologie n'est pertinente que si l'équation (E) de départ est *non-homogène*. Si (E) est homogène, l'étape 1 se suffit à elle-même puisque dans ce cas (E_0) n'est rien d'autre que l'équation (E).

III.1.2. Résolution d'une équation homogène

Théorème 2. Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène

$$(E_0): \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

avec a, b deux fonctions définies sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$.

S'il existe un intervalle $I \subset J$ sur lequel :

- les fonctions a et b sont continues,
- la fonction a ne s'annule pas,

alors les solutions de (E_0) sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto ke^{-F(t)}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

où F est une primitive quelconque de la fonction $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$.

Démonstration. Sous les hypothèses données, la fonction $\frac{b}{a}$ est continue sur I. Elle admet donc une primitive $F : I \to \mathbb{R}$. Il y a deux choses à montrer.

1. **Montrons que toutes les fonctions de la forme $t \mapsto ke^{-F(t)}$ sont des solutions de (E_0).**
   Soit $k \in \mathbb{R}$, et soit $y : I \to \mathbb{R}$ définie par $y(t) = ke^{-F(t)}$. Alors y est définie et dérivable sur I, et pour tout $t \in I$ on a
   $$y'(t) = -kF'(t)e^{-F(t)} = -k\frac{b(t)}{a(t)}e^{-F(t)}.$$
   On en déduit que pour tout $t \in I$,
   $$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = -kb(t)e^{-F(t)} + kb(t)e^{-F(t)} = 0$$
   autrement dit y est bien solution de (E_0).
2. **Montrons que toutes les solutions de (E_0) sont des fonctions de la forme $t \mapsto ke^{-F(t)}$.**
   Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E_0). Définissons une nouvelle fonction $z : I \to \mathbb{R}$ en posant $z(t) = y(t)e^{F(t)}$. La fonction z est dérivable sur I et pour tout $t \in I$ on a
   $$z'(t) = y'(t)e^{F(t)} + y(t)F'(t)e^{F(t)} = y'(t)e^{F(t)} + y(t)\frac{b(t)}{a(t)}e^{F(t)} = \big(a(t)y'(t) + b(t)y(t)\big)\,\frac{e^{F(t)}}{a(t)}.$$
   Or, puisque y est une solution de (E_0) sur I, on en déduit que pour tout $t \in I$,
   $$z'(t) = 0 \times \frac{e^{F(t)}}{a(t)} = 0.$$
   La fonction z est donc constante sur I, c'est-à-dire qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$ on a
   $$z(t) = y(t)e^{F(t)} = k$$
   autrement dit $y(t) = ke^{-F(t)}$.

Ainsi une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ est solution de (E_0) si et seulement si y est de la forme $y : t \mapsto ke^{-F(t)}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple. Considérons l'équation homogène

$$(E_0): \quad y'(t) + y(t) = 0.$$

Cette équation est de la forme $a(t)y'(t)+b(t)y(t) = 0$ où a et b sont toutes les deux la fonction constante à la valeur 1. Ainsi, a et b sont continues sur $\mathbb{R}$ et a ne s'annule pas.

Une primitive de $\frac{b}{a} : t \mapsto 1$ est, par exemple, la fonction $F : t \mapsto t$. Le théorème permet alors d'affirmer que les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto ke^{-t}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple. Considérons l'équation homogène

$$(E_0): \quad ty'(t) + y(t) = 0.$$

Cette équation est de la forme $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ avec $a : t \mapsto t$ et $b : t \mapsto 1$. Ainsi, a et b sont continues sur $\mathbb{R}$ mais a s'annule en $t = 0$. Le théorème permet donc de résoudre l'équation (E_0) seulement sur $\mathbb{R}_-^*$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou un de leurs sous-intervalles).

Sur $\mathbb{R}_+^*$, une primitive de $\frac{b}{a} : t \mapsto \frac{1}{t}$ est, par exemple, la fonction $F : t \mapsto \ln(t)$. Les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de la forme

$$F(t) = ke^{-\ln(t)} = \frac{k}{t}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

III.1.3. Recherche d'une solution particulière

Méthode. (Méthode de la variation de la constante) Soit l'équation différentielle

$$(E): \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

avec a, b, c des fonctions définies sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$. On se place dans le cas où on a déjà résolu l'équation homogène associée (E_0) sur un intervalle $I \subset J$. On a obtenu des solutions de la forme

$$y_0 : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-F(t)} \end{array} \right.$$

avec $k \in \mathbb{R}$ une constante et $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de $\frac{b}{a}$ sur I.

1. **On pose une fonction $y_p : I \to \mathbb{R}$ de la forme :**

   $$y_p(t) = k(t)e^{-F(t)}$$

   où $k : I \to \mathbb{R}$ est maintenant une *fonction* que l'on va essayer de déterminer.
2. **On injecte y_p dans l'équation (E) de sorte à en déduire une expression de $k'(t)$.**

   En effet, en notant $y_0(t) = e^{-F(t)}$ on a :

   $$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) &\iff a(t)y_p'(t) + b(t)y_p(t) = c(t) \\ &\iff a(t)(k'(t)y_0(t) + k(t)y_0'(t)) + b(t)k(t)y_0(t) = c(t) \\ &\iff k'(t)a(t)y_0(t) + k(t)\underbrace{(a(t)y_0'(t) + b(t)y_0(t))}_{=0 \text{ car } y_0 \text{ solution de } (E_0)} = c(t) \end{aligned}$$

donc le terme en $k(t)$ devra toujours disparaître et on pourra isoler $k'(t)$. On aura :

$$k'(t) = \frac{c(t)}{a(t)y_0(t)} = \frac{c(t)}{a(t)}e^{F(t)}.$$

3. **On retrouve $k(t)$ en prenant une primitive de l'expression trouvée pour $k'(t)$.**
   On utilise la relation
   $$k(t) = \int k'(t)\mathrm{d}t = \int \frac{c(t)}{a(t)}e^{F(t)}\mathrm{d}t.$$
   C'est cette partie qui peut être plus ou moins calculatoire. Parfois on pourra directement trouver une primitive, d'autre fois il faudra avoir recours à du calcul intégral plus poussé (intégration par parties, changement de variable, ...).
4. **On n'oublie pas de réinjecter $k(t)$ dans l'expression de $y_p(t)$.**
   Une solution de (E) est $y_p(t) = k(t)e^{-F(t)}$ où $k(t)$ est l'expression trouvée à l'étape précédente.

Il ne faut surtout pas apprendre ces formules générales par cœur, mais simplement savoir appliquer cette méthode dans des cas concrets (voir exemple suivant).

Exemple. Reprenons l'équation différentielle

$$(E): \quad y'(t) + y(t) = 1.$$

On a vu que l'équation homogène associée a pour solutions toutes les fonctions de la forme

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-t} \end{array}\right.$$

avec $k \in \mathbb{R}$. Recherchons maintenant une solution de (E) à l'aide de la méthode de la variation de la constante. Pour cela, définissons une fonction $y_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$y_p(t) = k(t)e^{-t}$$

avec $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$y'(t) = k'(t)e^{-t} - k(t)e^{-t}.$$

Ainsi, on a par équivalence :

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) &\iff y_p'(t) + y_p(t) = 1 \\ &\iff (k'(t)e^{-t} - k(t)e^{-t}) + k(t)e^{-t} = 1 \\ &\iff k'(t)e^{-t} = 1 \\ &\iff k'(t) = e^{t}. \end{aligned}$$

Ici, on trouve sans mal que c'est équivalent à avoir $k(t) = e^t + \text{cte}$. Prenons donc $k(t) = e^t$, ce qui donne comme solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ la fonction y_p définie par :

$$y_p(t) = e^t \times e^{-t} = 1.$$

On peut alors en déduire toutes les solutions de l'équation (E) : ce sont les fonctions de la forme

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 1 + ke^{-t} \end{array}\right. \quad \textit{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Exemple. Reprenons l'équation différentielle

$$(E) : \quad ty'(t) + y(t) = t.$$

On a vu que l'équation homogène associée a pour solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ toutes les fonctions de la forme

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{k}{t} \end{array} \right.$$

avec $k \in \mathbb{R}$. Recherchons maintenant une solution de (E) à l'aide de la méthode de la variation de la constante. Pour cela, définissons une fonction $y_p : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ en posant

$$y_p(t) = \frac{k(t)}{t}$$

avec $k : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors

$$y'(t) = \frac{k'(t)t - k(t)}{t^2} = \frac{k'(t)}{t} - \frac{k(t)}{t^2}.$$

Ainsi, on a par équivalence :

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) &\iff ty_p'(t) + y_p(t) = t \\ &\iff t\left(\frac{k'(t)}{t} - \frac{k(t)}{t^2}\right) + \frac{k(t)}{t} = t \\ &\iff k'(t) = t \\ &\iff k(t) = \frac{t^2}{2} + \text{cte} \end{aligned}$$

Prenons par exemple $k(t) = \frac{t^2}{2}$, ce qui donne comme solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction y_p définie par :

$$y_p(t) = \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} = \frac{t}{2}.$$

On peut alors en déduire toutes les solutions de l'équation (E) : ce sont les fonctions de la forme

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t}{2} + \dfrac{k}{t} \end{array} \right. \quad \textit{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Remarque. La méthode de la variation de la constante vous permettra toujours (en théorie) de trouver une solution particulière de votre équation, mais ce n'est pas un passage obligatoire. Si un jour vous remarquez déjà qu'une certaine fonction y_p est solution de votre équation différentielle (E), alors vous pouvez la donner immédiatement (en montrant simplement par un calcul qu'elle satisfait bien l'équation donnée).

III.2. Équations différentielles linéaires du second ordre

▷ *MA13, module 7 — Équations différentielles linéaires du second ordre*

III.2.1. Définitions et stratégie générales

Les définitions et résultats de cette section sont similaires à ceux de la section précédente.

Définition 3. On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre** une équation de la forme

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t)$$

avec a, b, c, d quatre fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et dans laquelle l'inconnue est elle-même une fonction y.

On dit qu'une telle équation différentielle est :

- **homogène** lorsque d est la fonction nulle,
- **à coefficients constants** lorsque les fonctions a, b et c sont constantes.

Toutefois, la résolution d'une telle équation en toute généralité est un problème complexe. Aussi dans ce chapitre nous nous intéresserons uniquement à la résolution d'équation différentielles linéaires du second ordre **à coefficients constants**, c'est-à-dire de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

avec a, b, c des constantes réelles (et $a \neq 0$) et d une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exemple. L'équation différentielle

$$(E) : \quad y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 6te^t$$

est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
On peut montrer que la fonction

$$y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^3e^t \end{array} \right.$$

est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$y'(t) = \underline{3t^2e^t + t^3e^t = (3t^2 + t^3)e^t}$$

et par suite

$$y''(t) = \underline{(6t + 3t^2)e^t + (3t^2 + t^3)e^t = (6t + 6t^2 + t^3)e^t}.$$

Ainsi, on trouve bien que

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \underline{(6t + 6t^2 + t^3)e^t} - \underline{2(3t^2 + t^3)e^t} + \underline{t^3e^t} = 6te^t.$$

Comme pour le premier ordre, on va s'intéresser à l'équation *homogène* (E_0) associée à une équation différentielle (E) linéaire du second ordre, car encore une fois les solutions de (E_0) et celles de (E) seront liées entre elles.

Définition 4. Soit

$$(E): \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. On appelle **équation homogène associée** à (E) l'équation différentielle homogène

$$(E_0): \quad \underline{ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0}.$$

Exemple. Revenons sur l'équation différentielle

$$(E): \quad y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 6te^t.$$

Son équation homogène associée est l'équation

$$(E_0): \quad \underline{y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0}.$$

- On peut montrer que la fonction
$$y_0 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^t \end{array} \right.$$
est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a
$$y_0'(t) = \underline{e^t} \qquad \text{et donc} \qquad y_0''(t) = \underline{e^t}.$$
Ainsi, on trouve bien que
$$y_0''(t) - 2y_0'(t) + y_0(t) = \underline{e^t - 2e^t + e^t} = \underline{0}.$$

- De plus, la fonction
$$y_0 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & te^t \end{array} \right.$$
est elle-aussi une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a
$$y_0'(t) = \underline{e^t + te^t = (1+t)e^t} \quad \text{et} \quad y_0''(t) = \underline{e^t + (1+t)e^t = (2+t)e^t}.$$
Ainsi, on trouve bien que
$$y_0''(t) - 2y_0'(t) + y_0(t) = \underline{(2+t)e^t} - 2\underline{(1+t)e^t} + \underline{te^t} = 0.$$

Plus généralement, on pourrait montrer que toute combinaison linéaire de ces deux fonctions est encore solution de (E_0). Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E_0) contient l'ensemble

$$\left\{ y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & k_1e^t + k_2te^t \end{array} \right. \mid (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On retrouve ensuite un théorème analogue au théorème 1 (le lecteur attentif comprendra facilement que ce théorème est en fait valable pour une équation *linéaire* d'ordre quelconque, bien que nous n'ayons pas explicitement défini ce concept dans ce chapitre).

Théorème 3. Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et (E_0) son équation homogène associée. Si $y_p : I \to \mathbb{R}$ est une solution de (E) sur I, alors pour toute fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable :

$$y \text{ est solution de } (E) \iff y - y_p \text{ est solution de } (E_0)$$

Démonstration. Notons $(E) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$. On a alors $(E_0) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$.

Soit $y_p : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E) et $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable quelconque. Notons $y_0 = y - y_p$. On a alors $y_0' = y' - y_p'$ et $y_0'' = y'' - y_p''$.

$(\Rightarrow)$ Supposons que y est solution de (E). Cela signifie que pour tout $t \in I$, on a

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t).$$

Par ailleurs, comme y_p est solution de (E), on a également pour tout $t \in I$,

$$ay_p''(t) + by_p'(t) + cy_p(t) = d(t).$$

En soustrayant ces deux égalités et en factorisant, on trouve pour tout $t \in I$

$$a(y''(t) - y_p''(t)) + b(y'(t) - y_p'(t)) + c(y(t) - y_p(t)) = 0$$

c'est-à-dire $ay_0''(t) + by_0'(t) + cy_0(t) = 0$. Ainsi, $y_0 = y - y_p$ est solution de (E_0).

$(\Leftarrow)$ Réciproquement, supposons que $y_0 = y - y_p$ est solution de (E_0). Cela signifie que pour tout $t \in I$ on a

$$ay_0''(t) + by_0'(t) + cy_0(t) = 0.$$

Par ailleurs, comme y_p est solution de (E), on a également pour tout $t \in I$,

$$ay_p''(t) + by_p'(t) + cy_p(t) = d(t).$$

En ajoutant ces deux égalités et en factorisant, on trouve pour tout $t \in I$,

$$a(y_0''(t) + y_p''(t)) + b(y_0'(t) + y_p'(t)) + c(y_0(t) + y_p(t)) = d(t)$$

c'es-à-dire $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$. Ainsi, y est solution de (E).

Exemple. Reprenons l'équation différentielle

$$(E) : \quad y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 6te^t.$$

et notons à nouveau (E_0) son équation homogène associée.

- On a vu que la fonction
$$y_p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^3e^t \end{array} \right.$$
est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- On a également vu que pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ la fonction
$$y_0 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (k_1 + k_2t)e^t \end{array} \right.$$
est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

Le théorème précédent permet alors d'en déduire que pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ la fonction

$$y_0 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^3 e^t + (k_1 + k_2 t) e^t \end{array} \right.$$

est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Ce théorème conduit exactement à la même méthode que pour les équations d'ordre 1.

Méthode. Pour résoudre une équation différentielle (E) linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

1. on détermine l'ensemble S_0 de *toutes* les solutions de l'équation homogène associée (E_0),
2. on trouve *une* solution y_p de (E) (en général appelée *solution particulière*),
3. on conclut en affirmant simplement que les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $y = y_p + y_0$ avec $y_0 \in S_0$.

III.2.2. Résolution de l'équation homogène

Définition 5. Considérons l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre homogène

$$(E_0) : \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

avec a, b, c trois constantes réelles, $a \neq 0$.

On appelle **équation caractéristique** associée à (E_0) l'équation du second degré

$$(E_c) : \quad ar^2 + br + c = 0$$

d'inconnue r réelle.

L'idée derrière cette définition et le théorème ci-dessous est la suivante : on cherche des solutions de (E_0) sous la forme

$$y(t) = ke^{rt}$$

avec $(k, r) \in \mathbb{R}^2$. En injectant cette expression dans l'équation (E_0), on remarque que

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_0) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ a \times (kr^2 e^{rt}) + b \times (kre^{rt}) + c \times (ke^{rt}) = 0 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ ke^{rt} \times (ar^2 + br + c) = 0 \\ &\iff k = 0 \ \text{ ou } \ ar^2 + br + c = 0. \end{aligned}$$

Théorème 4. On reprend les notations de la définition précédente.

- Si l'équation caractéristique (E_c) admet deux racines réelles r_1 et r_2, alors les solution de (E_0) sont toutes les fonctions de la forme

$$t \mapsto k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$$

avec $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$.

- Si l'équation caractéristique (E_c) admet une unique racine réelle double r_0, alors les solutions de (E_0) sont toutes les fonctions de la forme
$$t \mapsto (k_1 + k_2 t)e^{r_0 t}$$
avec $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$.
- Si l'équation caractéristique (E_c) admet deux racines complexes conjuguées
$$z_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta \quad \text{et} \quad z_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta,$$
alors les solutions de (E_0) sont toutes les fonctions de la forme
$$t \mapsto e^{\alpha t}(k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t))$$
avec $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple.

1. Considérons l'équation différentielle homogène
$$(E_0) : \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0.$$
C'est une équation différentielle du second ordre linéaire, homogène, à coefficients constants. Son équation caractéristique est :
$$(E_c) : \quad r^2 - 3r + 2 = 0.$$
Celle-ci admet deux racines réelles
$$r_1 = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = 1.$$
On peut donc affirmer directement que les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont toutes les fonctions de la forme
$$t \mapsto k_1 e^{2t} + k_2 e^{t} \quad \text{avec } (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Considérons l'équation différentielle homogène
$$(E_0) : \quad y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0.$$
C'est une équation différentielle du second ordre linéaire, homogène, à coefficients constants. Son équation caractéristique est :
$$(E_c) : \quad r^2 - 2r + 2 = 0.$$
Celle-ci admet deux racines complexes conjuguées
$$r_1 = 1 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad r_2 = 1 - \mathrm{i}.$$
On peut donc affirmer directement que les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont toutes les fonctions de la forme
$$t \mapsto e^{t}(k_1 \cos(t) + k_2 \sin(t)) \quad \text{avec } (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Considérons l'équation différentielle homogène

$$(E_0) : \quad y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0.$$

C'est une équation différentielle du second ordre linéaire, homogène, à coefficients constants. Son équation caractéristique est :

$$(E_c) : \quad \underline{r^2 - 2r + 1 = 0}.$$

Celle-ci admet deux une solution réelle double

$$r_1 = \underline{1}.$$

On peut donc affirmer directement que les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont toutes les fonctions de la forme

$$t \mapsto \underline{(k_1 + k_2 t)e^t} \quad \text{avec } (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

III.2.3. Recherche d'une solution particulière

Méthode. On se place dans le cas d'une équation différentielle de la forme

$$(E) : \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ (dont $a \neq 0$) et d une fonction.

On peut trouver une solution particulière y_P de (E) dans les cas suivants.

1. **Si $d(t) = P(t)$ avec P un polynôme.**
Dans ce cas, on cherche y_P sous une forme elle-même polynômiale :

$$y_P(t) = Q(t)$$

avec Q un polynôme.

a) On commence par injecter y_P dans l'équation (E). On obtient :

$$aQ''(t) + bQ'(t) + cQ(t) = P(t).$$

Plusieurs cas pourront se produire :

- si $c \neq 0$, alors on a

$$\deg(P) = \deg(aQ''(t) + bQ'(t) + cQ(t)) = \deg(Q)$$

donc on cherchera un polynôme Q de même degré que P,

- si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors on a

$$\deg(P) = \deg(aQ''(t) + bQ'(t)) = \deg(Q') = \deg(Q) - 1$$

donc on cherchera un polynôme Q de degré $\deg(P) + 1$,

- si $b = c = 0$ et $a \neq 0$, alors on a

$$\deg(P) = \deg(aQ''(t)) = \deg(Q'') = \deg(Q) - 2$$

donc on cherchera un polynôme Q de degré $\deg(P) + 2$.

b) Une fois qu'on a déterminé le degré n de Q, on pose

$$Q(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n.$$

En injectant à nouveau dans l'équation (E) puis par identification, on trouve un système d'équations vérifié par les coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ qu'il suffit alors de résoudre.

2. **Si** $d(t) = P(t)e^{mt}$ **avec** P **un polynôme et** $m \in \mathbb{R}$**.**
Dans ce cas, on cherche y_P sous la forme :

$$y_P(t) = Q(t)e^{mt}$$

avec Q un polynôme.

a) On va à nouveau injecter y_P dans l'équation (E). Par le calcul, on obtient :

$$y_P'(t) = (Q'(t) + mQ(t))e^{mt} \quad \text{et} \quad y_P''(t) = (Q''(t) + 2mQ'(t) + m^2Q(t))e^{mt}.$$

Ainsi y_P est solution de (E) si et seulement si

$$a(Q''(t) + 2mQ'(t) + m^2Q(t))e^{mt} + b(Q'(t) + mQ(t))e^{mt} + cQ(t)e^{mt} = P(t)e^{mt}$$

soit de manière équivalente

$$aQ''(t) + (2am + b)Q'(t) + (am^2 + bm + c)Q(t) = P(t).$$

Plusieurs cas pourront se produire :

- si $am^2 + bm + c \neq 0$, alors on a

$$\deg(P) = \deg(aQ''(t) + (2am + b)Q'(t) + (am^2 + bm + c)Q(t)) = \deg(Q)$$

donc on cherchera un polynôme Q de même degré que P,

- si $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b \neq 0$, alors on a

$$\deg(P) = \deg(aQ''(t) + (2am + b)Q'(t)) = \deg(Q') = \deg(Q) - 1$$

donc on cherchera un polynôme Q de degré $\deg(P) + 1$,

- si $am^2 + bm + c = 2am + b = 0$ et $a \neq 0$, alors on a

$$\deg(P) = \deg(aQ''(t)) = \deg(Q'') = \deg(Q) - 2$$

donc on cherchera un polynôme Q de degré $\deg(P) + 2$.

On peut noter que ces cas correspondent respectivement à demander que m soit non-solution, solution simple, et solution double de l'équation caractéristique

$$(E_c) : \quad ar^2 + br + c = 0.$$

b) Une fois qu'on a déterminé le degré n de Q, on pose

$$Q(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n.$$

En injectant à nouveau dans l'équation (E) puis par identification, on trouve un système d'équations vérifié par les coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ qu'il suffit alors de résoudre.

Exemple. Considérons l'équation différentielle

$$(E): \quad y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = t.$$

- **Solutions de l'équation homogène.** L'équation homogène associée à (E) est

  $$(E_0): \quad y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0.$$

  On a déjà résolu cette équation homogène dans la section précédente et on a trouvé comme solutions de (E_0) les fonctions de la forme

  $$t \mapsto e^t(k_1 \cos(t) + k_2 \sin(t)), \qquad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- **Recherche d'une solution particulière.**
  Notons $y_P(t) = Q(t)$ avec Q un polynôme. On a alors :

  $$y_P \text{ solution de } (E) \iff Q''(t) - 2Q'(t) + 2Q(t) = t.$$

  En identifiant les degrés, on voit que Q doit être de degré 1 et on pose donc

  $$Q(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X$$

  avec $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$. On obtient maintenant :

  $$\begin{aligned} y_P \text{ solution de } (E_0) &\iff 0 - 2 \times \alpha_1 + 2 \times (\alpha_0 + \alpha_1 t) = t \\ &\iff 2\alpha_1 t + 2(\alpha_0 - \alpha_1) = t \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha_1 = 1 \\ 2(\alpha_0 - \alpha_1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

  Ainsi une solution particulière de (E) est la fonction $y_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

  $$y_P(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}.$$

- **Solution générale de l'équation.** Les deux étapes précédentes nous permettent d'affirmer que les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme

  $$t \mapsto \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} + e^t(k_1 \cos(t) + k_2 \sin(t)), \qquad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple. Considérons l'équation différentielle

$$(E): \quad y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 6te^{-t}.$$

- **Solutions de l'équation homogène.** Dans la section précédente, on a vu que l'équation homogène associée à (E) a pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$t \mapsto e^t(k_1 + k_2 t), \qquad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- **Recherche d'une solution particulière.**
Notons $y_P(t) = Q(t)e^{-t}$ avec Q un polynôme. On a alors :

$$y_P'(t) = (Q'(t) - Q(t))e^{-t} \quad \text{et} \quad y_P''(t) = (Q''(t) - 2Q'(t) + Q(t))e^{-t}.$$

Ainsi on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} & y_P \text{ solution de } (E_0) \\ \iff & (Q''(t) - 2Q'(t) + Q(t))e^{-t} - 2(Q'(t) - Q(t))e^{-t} + Q(t)e^{-t} = 6te^{-t} \\ \iff & Q''(t) - 4Q'(t) + 4Q(t) = 6t \end{aligned}$$

En identifiant les degrés, on voit que Q doit être de degré 1 et on pose donc

$$Q(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X$$

avec $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$. On obtient maintenant :

$$\begin{aligned} y_P \text{ solution de } (E_0) & \iff 0 - 4 \times \alpha_1 + 4 \times (\alpha_0 + \alpha_1 t) = 6t \\ & \iff 4(\alpha_0 - \alpha_1) + 4\alpha_1 t = 6t \\ & \iff \begin{cases} 4\alpha_1 = 6 \\ 4(\alpha_0 - \alpha_1) = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \alpha_1 = \frac{3}{2} \\ \alpha_0 = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi une solution particulière de (E) est la fonction $y_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y_P(t) = \frac{3}{2}(t+1)e^{-t}.$$

- **Solution générale de l'équation.** Les deux étapes précédentes nous permettent d'affirmer que les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{3}{2}(t+1)e^{-t} + e^t(k_1 + k_2 t), \qquad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple. Considérons l'équation différentielle

$$(E): \quad y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 6te^t.$$

- **Solutions de l'équation homogène.** Comme précédemment, l'équation homogène associée à (E) a pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$t \mapsto e^t(k_1 + k_2 t), \qquad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- **Recherche d'une solution particulière.**
Notons $y_P(t) = Q(t)e^t$ avec Q un polynôme. On a alors :

$$y_P'(t) = (Q'(t) + Q(t))e^t \quad \text{et} \quad y_P''(t) = (Q''(t) + 2Q'(t) + Q(t))e^t.$$

Ainsi on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} & y_P \text{ solution de } (E_0) \\ \iff & (Q''(t) + 2Q'(t) + Q(t))e^t - 2(Q'(t) + Q(t))e^t + Q(t)e^t = 6te^t \\ \iff & Q''(t) = 6t \end{aligned}$$

Ici on peut directement trouver *un* polynôme Q qui convient (c'est suffisant). On cherche un polynôme Q tel que, par exemple, $Q'(t) = 3t^2$. On peut donc prendre par exemple

$$Q(t) = t^3.$$

Ainsi une solution particulière de (E) est la fonction $y_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y_P(t) = t^3 e^t.$$

- **Solution générale de l'équation.** Les deux étapes précédentes nous permettent d'affirmer que les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto t^3 e^t + e^t(k_1 + k_2 t), \qquad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

De plus, on saura parfois trouver des solutions particulières à des équations dont le second membre est plus élaboré en utilisant le résultat suivant.

Théorème 5. (Principe de superposition) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et d_1, d_2 deux fonctions. Si :

- y_1 est une solution de l'équation différentielle $(E_1): \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d_1(t)$,
- y_2 est une solution de l'équation différentielle $(E_2): \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d_2(t)$,

alors la fonction $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$(E): \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d_1(t) + d_2(t).$$

Démonstration. Notons $y = y_1 + y_2$, et supposons que y_1 et y_2 soient solutions respectives de (E_1) et (E_2). On a alors :

$$\begin{aligned} & ay''(t) + by'(t) + cy(t) \\ = \; & a(y_1''(t) + y_2''(t)) + b(y_1'(t) + y_2'(t)) + c(y_1(t) + y_2(t)) \\ = \; & (ay_1''(t) + by_1'(t) + cy(t)) + (ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t)) \\ = \; & d_1(t) + d_2(t) \end{aligned}$$

ce qui revient à dire que y est solution de l'équation (E).

Remarque. Plus généralement, le principe de superposition s'applique à des *combinaisons linéaires* quelconques. C'est-à-dire qu'avec les même notations et hypothèses que dans le théorème précédent, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de l'équation différentielle

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \alpha d_1(t) + \beta d_2(t).$$

Exemple. Résolvons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(E) : \quad y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 10te^{3t} - 3t^2e^t.$$

- **Résolution de l'équation homogène.** L'équation homogène associée à (E) est

  $$(E_0) : \quad y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0.$$

  C'est une équation différentielle du second ordre linéaire, homogène et à coefficients constants. Son équation caractéristique est

  $$r^2 - r - 6 = 0.$$

  Cette dernière admet deux solutions réelles

  $$r_1 = 3 \quad \text{et} \quad r_2 = -2.$$

  Ainsi, l'équation homogène (E_0) a pour solutions toutes les fonctions de la forme

  $$t \mapsto k_1e^{3t} + k_2e^{-2t}, \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- **Recherche d'une solution particulière de (E).** C'est ici qu'on peut appliquer astucieusement le théorème du superposition, en cherchant indépendamment des solutions particulières des équations différentielles

  $$(E_1) : \; y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 10te^{3t} \quad \text{et} \quad (E_2) : \; y''(t) - y'(t) - 6y(t) = -3t^2e^t.$$

  — **Recherche d'une solution particulière de (E_1).**
  Notons $y_P(t) = Q(t)e^{3t}$ avec Q un polynôme. On a alors :

  $$y_P'(t) = (Q'(t) + 3Q(t))e^{3t} \quad \text{et} \quad y_P'()(t) = (Q''(t) + 6Q'(t) + 9Q(t))e^{3t}.$$

  On en déduit que

  $$\begin{aligned} & y_P \text{ est solution de } (E_1) \\ \iff \; & (Q''(t) + 6Q'(t) + 9Q(t))e^{3t} - (Q'(t) + 3Q(t))e^{3t} - 6Q(t)e^{3t} = 10te^{3t} \\ \iff \; & Q''(t) + 5Q'(t) = 10t. \end{aligned}$$

Par identification des degrés, on voit qu'on doit chercher Q' de degré 1, donc Q de degré 2. Notons alors

$$Q(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$

avec $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^3$. On a maintenant :

$$\begin{aligned}
y_P \text{ est solution de } (E_1) &\iff 2\alpha_2 + 5(\alpha_1 + 2\alpha_2 t) = 10t \\
&\iff (2\alpha_2 + 5\alpha_1) + 10\alpha_2 t = 10t \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha_2 + 5\alpha_1 = 0 \\ 10\alpha_2 = 10 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{2}{5} \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il n'y a pas de contrainte sur α_0 que l'on peut donc choisir arbitrairement. On trouve qu'une solution de (E_1) est, par exemple, la fonction

$$y_1 : t \mapsto \left(-\frac{2}{5}t + t^2\right) e^{3t}.$$

— **Recherche d'une solution particulière de (E_2).**
Notons $y_P(t) = Q(t)e^t$ avec Q un polynôme. On a alors :

$$y_P'(t) = (Q'(t) + Q(t))e^t \quad \text{et} \quad y_P'()(t) = (Q''(t) + 2Q'(t) + Q(t))e^t.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
& y_P \text{ est solution de } (E_2) \\
\iff & (Q''(t) + 2Q'(t) + Q(t))e^t - (Q'(t) + Q(t))e^t - 6Q(t)e^t = -3t^2 e^t \\
\iff & Q''(t) + Q'(t) - 6Q(t) = -3t^2.
\end{aligned}$$

Par identification, on cherche un polynôme Q de degré 2, c'est-à-dire de la forme

$$Q(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$

avec $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^3$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
y_P \text{ est solution de } (E_2) &\iff 2\alpha_2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 t) - 6(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2) = -3t^2. \\
&\iff (2\alpha_2 + \alpha_1 - 6\alpha_0) + (2\alpha_2 - 6\alpha_1)t - 6\alpha_2 t^2 = -3t^2 \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha_2 + \alpha_1 - 6\alpha_0 = 0 \\ 2\alpha_2 - 6\alpha_1 = 0 \\ -6\alpha_2 = -3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha_0 = \frac{7}{36} \\ \alpha_1 = \frac{1}{6} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière de (E_2) est, par exemple, la fonction

$$y_2 : t \mapsto \left(\frac{7}{36} + \frac{1}{6}t + \frac{1}{2}t^2\right) e^t.$$

En appliquant le principe de superposition, on peut directement affirmer que la fonction

$$y : t \mapsto \left(-\frac{2}{5}t + t^2\right) e^{3t} + \left(\frac{7}{36} + \frac{1}{6}t + \frac{1}{2}t^2\right) e^t$$

est une solution particulière de l'équation (E).

- **Résolution complète de l'équation** (E)**.**
Finalement, les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$t \mapsto \left(-\frac{2}{5}t + t^2\right) e^{3t} + \left(\frac{7}{36} + \frac{1}{6}t + \frac{1}{2}t^2\right) e^t + k_1 e^{3t} + k_2 e^{-2t}$$

avec $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$.

Terminons avec une remarque sur un troisième cas que cette section permet de traiter : lorsque le second membre de l'équation différentielle (E) est de la forme

$$d(t) = A(t)\cos(\alpha t) + B(t)\sin(\alpha t).$$

Si on s'autorise à faire un pas dans le monde des nombres complexes, les formules d'Euler nous donnent :

$$d(t) = A(t)\frac{e^{\mathrm{i}\alpha t} + e^{-\mathrm{i}\alpha t}}{2} + B(t)\frac{e^{\mathrm{i}\alpha t} - e^{-\mathrm{i}\alpha t}}{2\mathrm{i}} = \underbrace{\frac{A(t) - \mathrm{i}B(t)}{2}}_{P_1(t)} e^{\mathrm{i}\alpha t} + \underbrace{\frac{A(t) + \mathrm{i}B(t)}{2}}_{P_2(t)} e^{-\mathrm{i}\alpha t}.$$

Le principe du superposition nous indique alors qu'il suffit de trouver :

- une solution particulière y_1 de l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P_1(t)e^{\mathrm{i}\alpha t},$$

qu'on cherchera naturellement sous la forme $y_1(t) = Q_1(t)e^{\mathrm{i}\alpha t}$,

- une solution particulière y_2 de l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P_2(t)e^{-\mathrm{i}\alpha t},$$

qu'on cherchera naturellement sous la forme $y_2(t) = Q_2(t)e^{-\mathrm{i}\alpha t}$.

La fonction y définie par

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = Q_1(t)e^{\mathrm{i}\alpha t} + Q_2(t)e^{-\mathrm{i}\alpha t}$$

sera alors une solution de (E), qu'il faudra toutefois remettre sous forme réelle

$$y(t) = C_1(t)\cos(\alpha t) + C_2(t)\sin(\alpha t).$$

Mais si on voulait éviter de passer par les complexes, on aurait pu aussi chercher directement une solution particulière de (E) sous cette dernière forme.

Exemple. Cherchons une solution particulière de l'équation

$$(E) : \quad y''(t) - y(t) = 5t\cos(2t).$$

- **Première méthode : par identification directe.**

Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_P(t) = Q_1(t)\cos(2t) + Q_2(t)\sin(2t)$$

avec Q_1 et Q_2 deux polynômes. On a alors

$$\begin{cases} y_P'(t) = (Q_1'(t) + 2Q_2(t))\cos(2t) + (Q_2'(t) - 2Q_1(t))\sin(2t), \\ y_P''(t) = (Q_1''(t) + 4Q_2'(t) - 4Q_1(t))\cos(2t) + (Q_2''(t) - 4Q_1'(t) - 4Q_2(t))\sin(2t) \end{cases}$$

et par suite

$$y''(t) - y(t) = (Q_1''(t) + 4Q_2'(t) - 5Q_1(t))\cos(2t) + (Q_2''(t) - 4Q_1'(t) - 5Q_2(t))\sin(2t).$$

Ainsi par identification, y_P est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{cases} Q_1''(t) + 4Q_2'(t) - 5Q_1(t) = 5t, \\ Q_2''(t) - 4Q_1'(t) - 5Q_2(t) = 0. \end{cases}$$

On peut tenter de considérer des polynômes Q_1 et Q_2 tous les deux de degré 1, en posant :

$$Q_1(t) = \alpha t + \beta \quad \text{et} \quad Q_2(t) = \gamma t + \delta$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. Avec ces nouvelles variables, on a :

$$y_P \text{ solution de } (E) \iff \begin{cases} 4\gamma - 5(\alpha t + \beta) = 5t \\ -4\alpha - 5(\gamma t + \delta) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -5\alpha t + (-5\beta + 4\gamma) = 5t \\ -5\gamma t + (-4\alpha - 5\delta) = 0 \end{cases}$$

Par identification, on arrive finalement à :

$$y_P \text{ solution de } (E) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -5\alpha & = & 5 \\ -5\beta + 4\gamma & = & 0 \\ -5\gamma & = & 0 \\ -4\alpha - 5\delta & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & -1 \\ \beta & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \\ \delta & = & \frac{4}{5} \end{array} \right.$$

Ainsi, on trouve comme solution particulière de (E) la fonction

$$t \mapsto -t\cos(2t) + \frac{4}{5}\sin(2t).$$

- **Seconde méthode : à l'aide des formules d'Euler.**
  D'après les formules d'Euler,

$$5t\cos(2t) = 5t\frac{e^{i2t} + e^{-i2t}}{2} = \frac{5}{2}te^{i2t} + \frac{5}{2}te^{-i2t}.$$

Ainsi, pour trouver une solution particulière de (E), on cherchera indépendamment des solutions particulières des équations

$$(E_1) : \ y''(t) - y(t) = \frac{5}{2}te^{i2t} \qquad \text{et} \qquad (E_2) : \ y''(t) - y(t) = \frac{5}{2}te^{-i2t}$$

puis on appliquera le principe de superposition.

— Cherchons une solution particulière y_1 de (E_1) sous la forme

$$y_1(t) = Q(t)e^{\mathrm{i}2t}$$

avec Q un polynôme (à coefficients éventuellement complexes !). On a alors :

$$y_1'(t) = Q'(t)e^{\mathrm{i}2t} + Q(t) \times 2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}2t} = (Q'(t) + 2\mathrm{i}Q(t))e^{\mathrm{i}2t}$$

et

$$y_1''(t) = (Q''(t) + 2\mathrm{i}Q'(t))e^{\mathrm{i}2t} + (Q'(t) + 2\mathrm{i}Q(t)) \times 2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}2t} = (Q''(t) + 4\mathrm{i}Q'(t) - 4Q(t))e^{\mathrm{i}2t}.$$

Ainsi, on arrive à l'équivalence :

$$y_1''(t) - y_1(t) = \frac{5}{2}te^{\mathrm{i}2t} \iff Q''(t) + 4\mathrm{i}Q'(t) - 5Q(t) = \frac{5}{2}t.$$

En raisonnant sur les degrés, on en vient à chercher Q sous la forme

$$Q(t) = \alpha t + \beta$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Cela donne

$$y_1''(t) - y_1(t) = \frac{5}{2}te^{\mathrm{i}2t} = 4\mathrm{i}\alpha - 5(\alpha t + \beta) = \frac{5}{2}t = -5\alpha t + (4\mathrm{i}\alpha - 5\beta) = \frac{5}{2}t.$$

Par identification, on arrive finalement à

$$y_1''(t) - y_1(t) = \frac{5}{2}te^{\mathrm{i}2t} \iff \begin{cases} -5\alpha = \frac{5}{2} \\ 4\mathrm{i}\alpha - 5\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{2}{5}\mathrm{i} \end{cases}$$

Ainsi, on trouve comme solution particulière de (E_1) la fonction

$$y_1 : t \mapsto \left(-\frac{1}{2}t - \frac{2}{5}\mathrm{i}\right) e^{\mathrm{i}2t}.$$

— On raisonnerait de manière similaire pour trouver une solution particulière de (E_2). On passe ici sur les calculs, et on donne directement la solution particulière de (E_2) suivante :

$$y_2 : t \mapsto \left(-\frac{1}{2}t + \frac{2}{5}\mathrm{i}\right) e^{-\mathrm{i}2t}.$$

D'après le principe de superposition, la fonction $y = y_1 + y_2$ est alors une solution particulière de (E). Il faut toutefois la donner sous forme réelle. Pour cela, remarquons que

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2}t - \frac{2}{5}\mathrm{i}\right) e^{\mathrm{i}2t} + \left(-\frac{1}{2}t + \frac{2}{5}\mathrm{i}\right) e^{-\mathrm{i}2t} = -\frac{1}{2}t(e^{\mathrm{i}2t} + e^{-\mathrm{i}2t}) - \frac{2}{5}\mathrm{i}(e^{\mathrm{i}2t} - e^{-\mathrm{i}2t}),$$

ce qui en utilisant à nouveau les formules d'EULER donne finalement

$$y(t) = -\frac{1}{2}t \times 2\cos(2t) - \frac{2}{5}\mathrm{i} \times 2\mathrm{i}\sin(2t) = -t\cos(2t) + \frac{4}{5}\sin(2t).$$

III.3. Méthodes numériques pour la résolution d'équations différentielles

▷ *Pas de mimo associé sur IonisX.*

En construction …

Chapitre IV.

Développements limités

IV.1. Formules de Taylor

▷ *MA13, module 8 — Formules de Taylor*

Dans cette section, nous allons définir trois formules appelées *formules de Taylor*. Étant donnée une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage autour de $a \in I$, chacune des ces formules donne (sous des conditions à préciser) une expression de la forme

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + f^{(n)}(a)(x-a)^n}_{T_n(x)} + R_n(x).$$

Ces trois formules possèdent la même *partie polynomiale* $T_n(x)$, mais se distinguent entre elles par l'expression du *reste* $R_n(x)$ qu'elles proposent et par les hypothèses qu'elles nécessitent sur la fonction f. À ce titre, rappelons la définition suivante.

Définition 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^n$ sur I si la fonction f est n fois dérivable sur I et sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I.

IV.1.1. Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition 1. (Formule de Taylor avec reste intégral) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + f^{(n)}(a)(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

Exemple. La fonction $f : x \mapsto e^x$ est dérivable une infinité de fois sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$f^{(k)}(x) = \exp(x).$$

Ainsi, pour tout $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ fixé, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et la formule de Taylor avec reste intégral garantit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x = e^a + e^a(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

En particulier pour $a = 0$ on trouve :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

IV.1.2. Formule de Taylor–Lagrange

Cette formule est plus rarement appelée *formule de* Taylor *avec reste* $f^{(n+1)}(c)$.

Proposition 2. (Formule de Taylor–Lagrange) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, et soit $(a,x) \in I^2$. Il existe un réel c compris strictement entre a et x tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si on reprend l'exemple de la fonction exponentielle, alors pour tout couple $(a,x) \in \mathbb{R}^2$ il existe un réel c compris strictement entre a et x tel que

$$e^x = e^a + e^a(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n + \frac{e^c}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Remarque. La formule de Taylor–Lagrange est une généralisation du théorème des accroissement finis, ce dernier correspondant au cas où $n = 0$. Le corollaire qui suit correspond alors à une généralisation de l'inégalité des accroissements finis.

Corollaire 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et soit $a \in I$. S'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall x \in I, \quad |f^{(n+1)}(x)| \leqslant M,$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemple. (Approximation de $\sin(0{,}01)$.) Notons $f : x \mapsto \sin(x)$. On a alors :

k	0	1	2	3	4
$f^{(k)}(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$f^{(k)}(0)$	0	1	0	-1	

Soit $x > 0$. D'après la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre $n = 3$ en $a = 0$, il existe $c \in \,]0, x[$ tel que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \sin(c)\frac{x^4}{24}.$$

En particulier pour $x = 0{,}01$ on obtient l'approximation

$$\sin(0{,}01) \approx T_3(0{,}01) = 0{,}01 - \frac{(0{,}01)^3}{6} = 0{,}00999983333\ldots$$

On peut majorer l'erreur commise en notant que $|\sin(c)| \leqslant 1$. On a ainsi (toujours pour $x = 0{,}01$) :

$$|\sin(x) - T_3(x)| \leqslant \frac{x^4}{24} = \frac{(0{,}01)^4}{24} \approx 4 \times 10^{-10}$$

ce qui garantit au moins 8 décimales correctes dans l'approximation précédente.

IV.1.3. Formule de Taylor–Young

Proposition 3. (Formule de Taylor–Young) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et soit $a \in I^2$. Pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + f^{(n)}(a)(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

avec ε une fonction qui tend vers zéro lorsque x tend vers a.

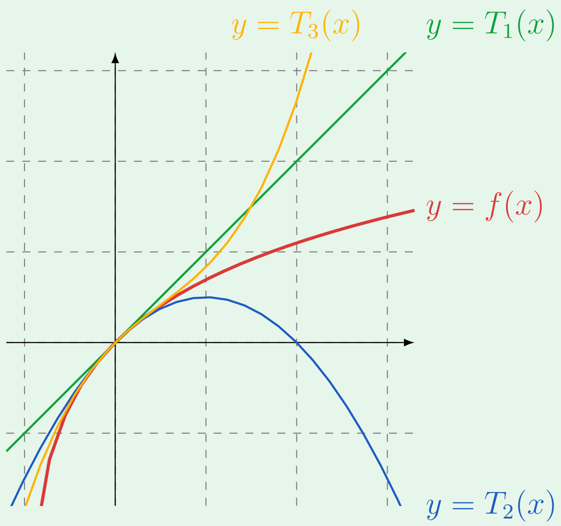
Remarque. En anticipant le vocabulaire et les notations des sections à venir, la formule de Taylor–Young donne un *développement limité* de f à l'ordre n au voisinage de a.

Exemple. Notons $I =]-1, +\infty[$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \ln(1+x).$$

La fonction $x \mapsto 1 + x$ est infiniment dérivable sur I (car polynomiale), et renvoie des valeurs dans $]0, +\infty[$ où la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est infiniment dérivable. Par composée, la fonction f est donc infiniment dérivable sur I. Calculons ses dérivée successives, et ses *polynômes de Taylor* $T_n(x)$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$T_n(x)$
0	$f(x) = \ln(1+x)$	$f(0) = 0$	$T_0(x) = 1$
1	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$	$f'(0) = 1$	$T_1(x) = x$
2	$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$	$f''(0) = -1$	$T_2(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$
3	$f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$	$f^{(3)}(x) = 2$	$T_3(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$



On peut généraliser ces formules à un ordre n quelconque. D'abord, on pourrait démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

et donc $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. Par suite, le monôme de degré k donné par les formules de Taylor est

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k = (-1)^k\frac{x^k}{k}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de Taylor d'ordre n de f est

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

IV.1.4. Pour résumer

Les formules de Taylor s'écrivent toujours sous la forme $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ avec

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

et $R_n(x)$ qui dépend de la formule utilisée.

Formule	Expression de $R_n(x)$	Commentaire
Taylor avec reste intégral	$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t$	
Taylor–Lagrange	$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$	avec c strictement compris entre a et x
Taylor–Young	$R_n(x) = (x-a)^n\varepsilon(x)$	avec ε une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$

Remarque. Lorsque a est non-nul, il est assez fréquent de se ramener en zéro avec le changement de variable $h = x - a$, ce qui donne par exemple pour la formule de Taylor–Young :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n\varepsilon(h)$$

avec ε une fonction telle que $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

De plus, nous introduirons dans les prochaines section la notation « petit o » qui permettra de noter $o(h^n)$ au lieu de « $h^n\varepsilon(h)$ avec ε une fonction telle que $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ ».

IV.2. Développements limités au voisinage d'un point

▷ *Ma13, module 9 — Développements limités au voisinage d'un point*

IV.2.1. Définition, existence et unicité

Définition 2. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n en a s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Dans ce cas :

- $c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$ est appelée la **partie polynomiale**,
- $(x-a)^n\varepsilon(x)$ est appelé le **reste** du développement limité.

Remarque. On retrouve la même terminologie que dans les formules de Taylor et ce n'est pas sans raison : comme déjà évoqué dans la section précédente, la formule de Taylor–Young donne précisément un développement limité de f à l'ordre n au voisinage de a.

Proposition 4. (Existence du DL) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors elle admet un développement limité d'ordre n en tout point $a \in I$. Ce développement limité est de la forme :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + f^{(n)}(a)(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor–Young.

Proposition 5. (Unicité du DL) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f admet un développement limité à l'ordre n en $a \in I$, alors ce développement limité est unique.

Démonstration. Supposons que f admette deux développement limités à l'ordre n en a

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x)$$

et

$$f(x) = d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + \cdots + d_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_2(x)$$

avec $c_0, c_1, \ldots, c_n, d_0, d_1, \ldots, d_n$ des réels et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux fonctions qui ont pour limite zéro en a. En soustrayant ces deux inégalités terme à terme, on trouve l'égalité (E_0) :

$$0 = (d_0 - c_0) + (d_1 - c_1)(x-a) + (d_2 - c_2)(x-a)^2 + \cdots + (d_n - c_n)(x-a)^n + (x-a)^n(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)).$$

- En évaluant en $x = a$ dans (E_0), on trouve tout d'abord $0 = d_0 - c_0$ c'est-à-dire $c_0 = d_0$.
- En divisant ensuite par $(x-a)$ dans (E_0), on trouve
$$0 = (d_1 - c_1) + (d_2 - c_2)(x-a) + \cdots + (d_n - c_n)(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)),$$
puis en évaluant en $x = a$ dans cette nouvelle égalité, il vient $0 = d_1 - c_1$ c'est-à-dire $c_1 = d_1$.
- En divisant maintenant par $(x-a)^2$ dans (E_0), on trouve maintenant
$$0 = (d_2 - c_2) + \cdots + (d_n - c_n)(x-a)^{n-2} + (x-a)^{n-2}(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))$$
puis évaluant en $x = a$ dans cette nouvelle égalité, il vient $0 = d_2 - c_2$ c'est-à-dire $c_2 = d_2$.

En répétant ce procédé de division par $(x-a)^k$ puis évaluation en $x=a$, on trouve finalement

$$\forall\, k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad c_k = d_k.$$

De plus, après avoir divisé (E_0) par $(x-a)^n$ on arrive finalement à

$$\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x).$$

Ainsi, les deux développements limités ci-dessus sont égaux.

L'unicité du développement limité engendre quelques résultats pratiques tels que celui ci-dessous.

Proposition 6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en $a = 0$:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

- Si f est paire, alors ce développement limité ne contient que des monômes de degrés pairs (c'est-à-dire que les coefficients $c_1, c_3, c_5, \dots$ sont nuls).
- Si f est impaire, alors ce développement limité ne contient que des monômes de degrés impairs (c'est-à-dire que les coefficients $c_0, c_2, c_3, \dots$ sont nuls).

Démonstration. La démonstration repose sur le fait que si pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

alors on peut affirmer que pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= c_0 + c_1 \cdot (-x) + c_2 \cdot (-x)^2 + c_3 \cdot (-x)^3 + \dots + c_n \cdot (-x)^n + (-x)^n \varepsilon(-x) \\ &= c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \dots + (-1)^n c_n x^n + x^n \times (-1)^n \varepsilon(-x). \end{aligned}$$

(en supposant que $-x \in I$ lorsque $x \in I$, ce qui est bien le cas lorsque f est paire ou impaire).

- Supposons f paire. On alors pour tout $x \in I$, $f(x) = f(-x)$. Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\begin{cases} c_0 = c_0 \\ c_1 = -c_1 \\ c_2 = c_2 \\ c_3 = -c_3 \\ \dots \end{cases}$$

  On en déduit que les coefficients d'indice impairs sont nuls (on ne peut rien dire en revanche des coefficients d'indices pairs).
- Supposons f impaire. De même, on a pour tout $x \in I$

$$f(x) = -f(-x) = -c_0 + c_1 x - c_2 x^2 + c_3 x^3 - \dots + (-1)^{n+1} x^n + x^n \times (-1)^{n+1} \varepsilon(-x).$$

  Par unicité du développement limité, on en déduit cette fois que

$$\begin{cases} c_0 = -c_0 \\ c_1 = c_1 \\ c_2 = -c_2 \\ c_3 = c_3 \\ \dots \end{cases}$$

On en déduit que les coefficients d'indice pairs sont nuls (on ne peut rien dire en revanche des coefficients d'indices impairs).

Exemple. La fonction cosinus est paire, et le début de son développement limité est de la forme

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

IV.2.2. Développements limités en zéro des fonctions usuelles

Proposition 7. Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. On a les développements limités en zéro suivants :

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$

$$\sinh(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}\varepsilon(x)$$

Remarque. Il faut aussi savoir écrire les deux premiers développements limités ci-dessus à l'aide du symbole de sommation :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + x^n\varepsilon(x), \qquad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + x^n\varepsilon(x)$$

Proposition 8. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a le développement limité en zéro suivant :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

Exemple. Le développement ci-dessus cache plusieurs développements limités classiques à connaître.

- Pour $\alpha = -1$, on trouve

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x).$$

En substituant x par $-x$, on trouve par suite

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x).$$

Notez la similarité avec la somme des termes d'une suite géométrique de raison x.

- Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1 \times 1 \times 3 \times 5 \times (2n-3)}{2^n n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

(soyez rassurés : la forme du n-ième terme n'est pas à connaître).

IV.2.3. Développements limités de fonctions usuelles ailleurs qu'en zéro

En général, pour obtenir le développement limité d'une fonction f en un point $a \neq 0$, on se ramène d'abord en zéro en posant $h = x - a$, puis on essaye de se ramener à une ou plusieurs formes données dans la proposition 7. Certaines fonctions usuelles s'y prêtent particulièrement bien, par exemple :

- la fonction exponentielle grâce à sa propriété $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$,
- la fonction logarithme népérien grâce à sa propriété $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,
- les fonctions trigonométriques circulaires ($\cos$, $\sin$) et hyperboliques ($\cosh$, $\sinh$) grâce à leurs formules d'addition,
- …

Exemple.

1. **Déterminons un développement limité à l'ordre n en 1 de $f : x \mapsto \exp(x)$.**
Posons $h = x - 1$, de sorte que lorsque x est au voisinage de $x_0 = 1$, h est au voisinage de $h_0 = 0$. On a alors $h = 1 + x$ et donc :

$$\exp(x) = \exp(1+h) = \exp(1)\exp(h) = e \times e^h.$$

Or, pour tout h au voisinage de $h_0 = 0$, on sait que

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + h^n\varepsilon(h).$$

On en déduit que pour tout x au voisinage de $x_0 = 1$ on a

$$\exp(x) = e \times \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + (x-1)^n\varepsilon(x-1)\right)$$

avec $\lim_{x \to 1} \varepsilon(x-1) = \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

2. **Déterminons un développement limité à l'ordre 3 en 1 de $f : x \mapsto \ln(1+3x)$.**
Posons $h = x-1$, de sorte que lorsque x est au voisinage de $x_0 = 1$, h est au voisinage de $h_0 = 0$. On a alors $x = 1+h$ et donc :

$$\ln(1+3x) = \ln(1+3(1+h)) = \ln(4+h).$$

Pour se ramener à l'une des formes de la proposition 7, on factorise par 4 et on applique les propriétés du logarithme :

$$\ln(1+3x) = \ln\left(4\left(1+\frac{3h}{4}\right)\right) = \ln(4) + \ln\left(1+\frac{3h}{4}\right).$$

Or, quand h est au voisinage de $h_0 = 0$, $\frac{3h}{4}$ est au voisinage de $\frac{3h_0}{4} = 0$ et on peut donc affirmer que

$$\ln\left(1+\frac{3h}{4}\right) = \left(\frac{3h}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3h}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3h}{4}\right)^3 + h^3\varepsilon(h) = \frac{3h}{4} - \frac{9h^2}{32} + \frac{9h}{64}h^3 + h^3\varepsilon(h).$$

Par suite, pour tout x au voisinage de $x_0 = 0$ on a

$$\ln(1+3x) = \ln(4) + \frac{3}{4}(x-1) - \frac{9}{32}(x-1)^2 + \frac{9}{64}(x-1)^3 + (x-1)^3\varepsilon(x-1)$$

avec $\lim\limits_{x\to 1} \varepsilon(x-1) = \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

IV.3. Opérations sur les développements limités

▷ *MA13, module 10 — Opérations sur les développements limités*

IV.3.1. Pré-requis : la notation « petit o »

Définition 3. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, et soit $a \in I$ (ou, éventuellement, $a = \pm\infty$). On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a, et on note

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$$

s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemple.

- La fonction $x \mapsto x^5$ est négligeable devant $x \mapsto x^2$ au voisinage de 0. En effet, on a :

$$x^5 = x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) = x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

On note donc $x^5 \underset{0}{=} o(x^2)$.

- En revanche, au voisinage de $+\infty$, c'est la fonction $x \mapsto x^2$ qui est négligeable devant $x \mapsto x^5$. En effet,

$$x^2 = x^5\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) = \frac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

  On note donc $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^5)$.

- Pour $f(x) = x^2 + x^4$ et $g(x) = x^2 + x^5$:
  - f n'est pas négligeable devant g au voisinage de 0, car

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) \iff x^2 + x^4 = (x^2 + x^5)\varepsilon(x) \iff 1 + x^2 = (1 + x^3)\varepsilon(x)$$

    et $\varepsilon(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^3}$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0,
  - g n'est pas négligeable devant f au voisinage de 0, car de même

$$g(x) = f(x)\varepsilon(x) \iff x^2 + x^5 = (x^2 + x^4)\varepsilon(x) \iff 1 + x^3 = (1 + x^2)\varepsilon(x)$$

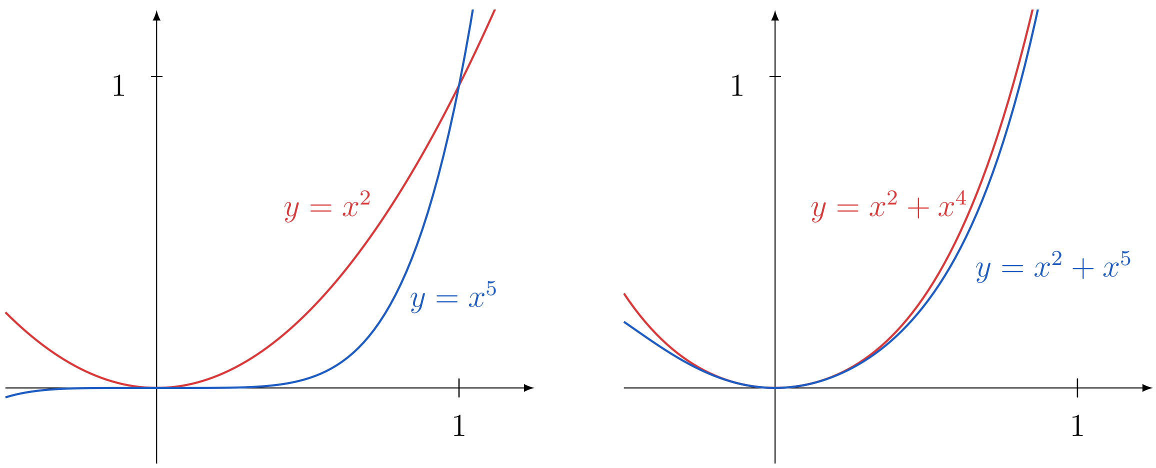
    et $\varepsilon(x) = \dfrac{1 + x^3}{1 + x^2}$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.

Illustration. Quand x tend vers 0, on a à la fois

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x^5 = 0.$$

Toutefois, la fonction $x \mapsto x^5$ semble tendre « plus rapidement » vers zéro, ce qui peut s'expliquer par le fait que $x^5 = x^3\varepsilon(x)$ avec ε qui tend elle-même vers zéro lorsque x tend vers 0.

En revanche, on n'observe pas de différence flagrante entre $x^2 + x^4$ et $x^2 + x^5$ au voisinage de 0.



L'intérêt de la notation « petit o » est que, une fois comprise, elle simplifie les définitions et allège rapidement les calculs. Par exemple, on peut reformuler la définition d'un développement limité comme suit.

Définition 4. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n en a s'il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ tels que

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + \cdots + c_n(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

Proposition 9. (Opérations sur les « petits o ») Soient f_1, f_2, g, h des fonctions définies sur intervalle ouvert I, et soit $a \in I$.

1. Si $f_1(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ et $f_2(x) \underset{a}{=} o(g(x))$, alors
$$f_1(x) + f_2(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \quad \text{et} \quad f_1(x) - f_2(x) \underset{a}{=} o(g(x)).$$
2. Si $f_1(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ et $f_2(x) \underset{a}{=} o(h(x))$, alors
$$f_1(x)f_2(x) \underset{a}{=} o(g(x)h(x)).$$

Démonstration. Il suffit à chaque fois de revenir à la définition de la négligeabilité.

1. Par définition, on a $f_1(x) = g(x)\varepsilon_1(x)$ et $f_2(x) = g(x)\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux fonctions qui tendent vers 0 lorsque x tend vers a. Par suite, on trouve d'une part
$$f_1(x) + f_2(x) = g(x)\varepsilon_1(x) + g(x)\varepsilon_2(x) = g(x)(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) = g(x)\varepsilon(x)$$
avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, et d'autre part
$$f_1(x) - f_2(x) = g(x)\varepsilon_1(x) - g(x)\varepsilon_2(x) = g(x)(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = g(x)\varepsilon(x)$$
avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
2. Par définition, on a $f_1(x) = g(x)\varepsilon_1(x)$ et $f_2(x) = h(x)\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux fonctions qui tendent vers 0 lorsque x tend vers a. Par suite,
$$f_1(x)f_2(x) = (g(x)\varepsilon_1(x)) \times (h(x)\varepsilon_2(x)) = g(x)h(x)\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) = g(x)h(x)\varepsilon(x)$$
avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Remarque. Les propriétés ci-dessus peuvent se résumer de la façon suivante :

- « $o(g(x)) + o(g(x)) \underset{a}{=} o(g(x))$ »
- « $o(g(x)) - o(g(x)) \underset{a}{=} o(g(x))$ »
- « $o(g(x)) \times o(h(x)) \underset{a}{=} o(g(x)h(x))$ »

En pratique, on travaillera principalement avec des monômes et au voisinage de zéro. Il faudra donc retenir plus particulièrement les règles de calculs suivantes :

- $c_n x^n \underset{0}{=} o(x^p)$ dès que $n > p$,
- $c_n x^n \times o(x^p) \underset{0}{=} o(x^{n+p})$,
- $o(x^n) + o(x^p) \underset{0}{=} o(x^m)$ avec $m = \min(n, p)$,
- $o(x^n) \times o(x^p) \underset{0}{=} o(x^{n+p})$.

IV.3.2. Somme et produits de développements limités

Proposition 10. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant 0, telles que :

- f admet un développement limité à l'ordre n en 0 :
$$f(x) \underset{0}{=} c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + o(x_n),$$
- g admet un développement limité à l'ordre n en 0 :
$$g(x) \underset{0}{=} d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_nx^n + o(x_n).$$

Alors :

1. $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, il s'agit de
$$f(x) + g(x) \underset{0}{=} \underline{(c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + (c_2 + d_2)x^2 + \cdots + (c_n + d_n)x^n} + o(x^n),$$
2. $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, il s'agit de
$$f(x) \times g(x) \underset{0}{=} T_n(x) + o(x^n)$$
où $T_n(x)$ est égal au polynôme
$$\underline{(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \times (d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n)}$$
auquel on a retiré ses monômes de degrés strictement plus grands que n (on dit que l'on a **tronqué** le polynôme à l'ordre n).

Exemple. Déterminons un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de
$$f(x) = \cos(x) \times \sqrt{1+x}.$$
À l'aide des développements limités usuels, on sait que
$$\cos(x) \underset{0}{=} \underline{1 - \frac{1}{2}x^2} + o(x^2) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+x} \underset{0}{=} \underline{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2} + o(x^2).$$
Il faut donc maintenant développer le produit
$$f(x) \underset{0}{=} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right).$$
Pour ce premier calcul, procédons méticuleusement et appliquons pas à pas les propriétés des « petits o » vues dans la section précédente (on se permettra ensuite de passer plus rapidement sur les calculs avec l'expérience).
$$\begin{aligned} & f(x) \\ \underset{0}{=} \; & 1 \times \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) - \frac{1}{2}x^2\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) + o(x^2)\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\ \underset{0}{=} \; & \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + o(x^4)\right) + \left(o(x^2) + o(x^3) + o(x^4) + o(x^4)\right). \end{aligned}$$

On obtient finalement une somme de « petits o » qui d'après les propriétés précédentes peut se réduire à $o(x^2)$. Cela signifie que l'on va pouvoir ignorer les termes de degré strictement plus grands que 2, puisqu'ils seront eux aussi négligeables devant x^2 au voisinage de 0. Ainsi on trouve :

$$f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 \underbrace{-\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{16}x^4}_{\underset{0}{=} o(x^2)} + o(x^2)$$

soit plus simplement

$$f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2).$$

Remarque. Si les calculs de l'exemple précédent semblent laborieux, c'est parce que l'on a pris soin de détailler toutes les étapes. Une fois que vous serez à l'aise avec la notation « petit o », vous pourrez anticiper directement le reste final et vous abstenir d'écrire les termes pouvant être immédiatement identifiés comme négligeables devant ce reste. Dans le cas de la fonction f précédente, cela donnerait :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\ &\underset{0}{=} \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2\right) + o(x^2) \\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

IV.3.3. Composition de développements limités

Soient f et g deux fonctions admettant chacune un développement limité en 0. La composition de développements limités est plus délicate : si l'on veut obtenir un développement limité de $f(g(x))$, il faut bien s'assurer que lorsque x est au voisinage de $x_0 = 0$, $g(x)$ est également au voisinage de 0 sans quoi on ne pourra appliquer à $g(x)$ le développement limité de f au voisinage de zéro.

Proposition 11. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant 0, admettant chacune un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = C(x) + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) = D(x) + o(x^n).$$

Si $g(0) = 0$, alors la fonction $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, dont la partie polynomiale est le polynôme $C(D(x))$ tronqué à l'ordre n.

Remarque. Plus généralement, on pourra déterminer un développement limité de $f \circ g$ en a si :

- on connaît un développement limité de g au voisinage de a

$$g(x) \underset{a}{=} d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + \cdots + d_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

- on connaît un développement limité de f au voisinage de $b = g(a)$

$$f(t) = \underset{b}{=} c_0 + c_1(t-b) + c_2(t-b)^2 + \cdots + c_n(t-b)^n + o((t-b)^n).$$

Dans ce cas, il suffira de remplacer t par le développement limité de $g(x)$ au voisinage de a et d'appliquer les opérations habituelles sur les « petits o ». Attention, la condition $b = g(a)$ est impérative pour que la composition soit valide !

Exemple. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$\sin(\ln(1+x)).$$

Pour cela, posons $f(u) = \sin(u)$ et $g(x) = \ln(1+x)$ de sorte que $f \circ g(x) = \ln(1+x)$. On sait que pour tout x au voisinage de $x_0 = 0$ on a

$$g(x) \underset{x_0}{=} \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

et pour tout u au voisinage de $u_0 = g(x_0) = 0$ on a

$$f(u) \underset{u_0}{=} u - \frac{1}{3!}u^3 + o(u^3).$$

On s'apprête maintenant à poser

$$u = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

dans le développement limité de f ci-dessus. On calcule donc au préalable les produits suivants :

$$u^2 = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) = x^2 - x^3 + o(x^3)$$

et

$$u^3 = u \times u^2 = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)\left(x^2 - x^3 + o(x^3)\right) = x^3 + o(x^3).$$

La composition donne finalement :

$$f(g(x)) \underset{0}{=} \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - \frac{1}{3!}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3)$$

c'est-à-dire après simplification :

$$\sin(\ln(1+x)) \underset{0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Exemple. Déterminons le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$\sqrt{\cos(x)}.$$

Remarquons d'abord qu'on connaît un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $x_0 = 0$ de $\cos(x)$:

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

On cherche à en déduire un développement limité de

$$\sqrt{\cos(x)} \underset{0}{=} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}$$

Cela tombe bien : cette expression est de la forme $\sqrt{1+u}$ avec

$$u \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

qui est proche de $u_0 = 0$ lorsque x est proche de $x_0 = 0$, et on connaît justement le développement limité de $\sqrt{1+u}$ au voisinage de $u_0 = 0$.

De plus, par produit de développements limités on trouve

$$u^2 \underset{0}{=} \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \underset{0}{=} \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Il est alors inutile de calculer les puissances suivantes de u qui donneront des monômes en x de degré strictement plus grand que 4. D'ailleurs, on se contentera d'un développement limité de $\sqrt{1+u}$ jusqu'à l'ordre 2 seulement en u, puisque si l'on revient aux définitions, on peut essayer de se convaincre que :

$$o(u^2) = u^2\varepsilon(u) = \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 \varepsilon\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \underset{0}{=} o(x^4).$$

Autrement dit, on part seulement du développement limité au voisinage de $u_0 = 0$ ci-dessous

$$\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2),$$

puis en substituant u par le développement limité précédent en x, on trouve comme développement limité au voisinage de $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)} &\underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\\ &\underset{0}{=} 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

En toute rigueur, cette substitution correspond au calcul d'un développement limité de $f \circ g$ avec

$$f(u) = \sqrt{1+u} \quad \textit{et} \quad g(x) = \cos(x) - 1 \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

La condition $g(0) = 0$ est bien vérifiée (on l'a vérifiée plus haut lorsqu'on s'est assurée que u était bien au voisinage de $u_0 = 0$ lorsque x était au voisinage de $x_0 = 0$).

Remarque. L'exemple précédent a fait intervenir une subtilité avec laquelle vous ne gagnerez en aise qu'en vous exerçant : comme u commençait par un terme d'ordre 2 en x, un développement limité d'ordre 2 en u a donné un développement limité d'ordre 4 en x, un développement limité d'ordre 3 en u aurait donné un développement d'ordre 6 en x, et ainsi de suite ...

Autrement dit, lorsque $u = c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$, on a

$$o(u) \underset{0}{=} o(x^2), \quad o(u^2) \underset{0}{=} o(x^4), \quad o(u^3) \underset{0}{=} o(x^6), \quad \dots$$

Cela se généralise sans problème : si $u = c_px^p + c_{p+1}x^{p+1} + \dots$, on a

$$o(u) \underset{0}{=} o(x^p), \quad o(u^2) \underset{0}{=} o(x^{2p}), \quad o(u^3) \underset{0}{=} o(x^{3p}), \quad \dots$$

IV.3.4. Division de développements limités

Pour calculer un développement limité de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, on va en fait se ramener au produit

$$f(x) \times \frac{1}{g(x)}$$

puis appliquer la méthode ci-dessous.

Méthode. (Inverse d'un développement limité) Soit g une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de $x_0 = 0$:

$$g(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n + o(x^n).$$

Tâchons de déterminer un développement limité au voisinage de $x_0 = 0$ de

$$\frac{1}{g(x)}.$$

Plusieurs cas se présentent, mais dans chacun on se ramène par composition au développement limité usuel

$$\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + \dots + (-1)^{n-1}u^n + o(u^n)$$

en faisant attention de poser un u qui est au voisinage de 0 lorsque x est au voisinage de 0.

1. Si $d_0 = 1$, alors
$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{1 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n + o(x^n)}$$
et on peut donc immédiatement poser
$$u = g(x) - 1 = d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n + o(x^n).$$

2. Si $d_0 \neq 0$, alors on remarque que
$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \times \frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0}x + \frac{d_2}{d_0}x^2 + \dots + \frac{d_n}{d_0}x^n + o(x^n)}$$
et on pose alors
$$u = \frac{d_1}{d_0}x + \frac{d_2}{d_0}x^2 + \dots + \frac{d_n}{d_0}x^n + o(x^n)$$

3. Plus généralement, si $d_0 = 0$, on factorise par le plus petit monôme d_px^p tel que $d_p \neq 0$. C'est-à-dire qu'en toute généralité, si
$$g(x) = d_px^p + d_{p+1}x^{p+1} + d_{p+2}x^{p+2} + \dots + d_nx^n + o(x^n)$$

avec $d_p \neq 0$, alors on a

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_p x^p} \times \frac{1}{1 + \frac{d_{p+1}}{d_p}x + \frac{d_{p+2}}{d_p}x^2 + \cdots + \frac{d_n}{d_p}x^{n-p} + o(x^{n-p})}$$

et on pose donc

$$u = \frac{d_{p+1}}{d_p}x + \frac{d_{p+2}}{d_p}x^2 + \cdots + \frac{d_n}{d_p}x^{n-p} + o(x^{n-p}).$$

Attention : dans ce cas la factorisation par x^p réduit l'ordre du développement limité finalement obtenu.

Exemple. Déterminons un développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de $x_0 = 0$.
On sait que

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

et on a les développements limités usuels

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

On va donc devoir à terme calculer le développement limité

$$\tan(x) \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).}$$

Posons donc

$$u = \underline{-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24}} + o(x^5).$$

On a alors

$$u^2 = \left(\underline{-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24}} + o(x^5)\right)\left(\underline{-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24}} + o(x^5)\right) = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$$

et par suite $u^p = o(x^5)$ pour tout $p \geqslant 3$. En injectant ces expressions dans le développement limité usuel

$$\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} \underline{1 - u + u^2 - u^3} + o(u^3)$$

on trouve donc

$$\frac{1}{\cos(x)} \underset{0}{=} 1 - \left(\underline{-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24}}\right) + \left(\underline{\frac{x^4}{4}}\right) + o(x^5) \underset{0}{=} \underline{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{24}} + o(x^5).$$

Par suite, on a

$$\tan(x) \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right)$$

ce qui après développement et simplifications donne

$$\tan(x) \underset{0}{=} \underline{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}} + o(x^5).$$

Notez que comme la fonction $\tan$ est impaire, on s'attendait à trouver un résultat ne faisant intervenir que des monômes de degrés impairs (et on peut par suite affirmer que le développement limité de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 6 aurait exactement la même partie polynomiale).

Cet exemple est suffisamment courant pour venir s'ajouter à la liste des développements limités usuels à connaître :

Proposition 12. La fonction tangente admet pour développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$

Les termes suivants ne sont pas à connaître.

Exemple. Déterminons un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $x_0 = 0$ de

$$f(x) = \frac{1+x}{2+x}.$$

Il faut commencer par mettre cette expression sous la forme

$$f(x) = (1+x) \times \frac{1}{2+x} = (1+x) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\frac{x}{2}}.$$

On utilise à nouveau le développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ au voisinage de 0 en posant $u = \dfrac{x}{2}$:

$$f(x) \underset{0}{=} (1+x) \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4)\right)$$

Il n'y a plus qu'à développer et simplifier le produit pour obtenir finalement

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{32} + o(x^4).$$

Exemple. Déterminons un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $x_0 = 0$ de

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sinh(x)}.$$

En appliquant les développements limités usuels on trouve

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} \underset{0}{=} \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)}{x\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)}.$$

Attention dans la factorisation ci-dessus,il ne faut surtout pas oublier que $o(x^5)/x = o(x^4)$. C'est pour cela qu'on a commencé en prenant les développements limités usuels de $\sin(x)$ et $\sinh(x)$ jusqu'à l'ordre 5 : après cette simplification par x on retombera sur un développement limité d'ordre 4 comme demandé. La suite des calculs est similaire aux exemples précédents. On a

$$f(x) \underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right) \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)},$$

on pose donc $u = \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)$. Par composition on trouve

$$f(x) \underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)\left(1 - \left(\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^4}{36}\right) + o(x^4)\right)$$

ce qui après simplifications donne $f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{18} + o(x^4)$.

IV.3.5. Intégration de développements limités

Terminons par une opération beaucoup plus simple à réaliser sur les développements limités.

Théorème 1. (Intégration d'un développement limité) Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{0}{=} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + o(x^n).$$

et soit F une primitive de f. Alors F admet un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de 0, à savoir

$$F(x) \underset{0}{=} \underline{F(0) + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}} + o(x^{n+1}).$$

Remarque. Autrement dit, pour intégrer un développement limité, il suffit d'intégrer sa partie polynomiale et de ne pas oublier la constante d'intégration, qui d'après la formule de Taylor–Young et par unicité du DL est égale à $F(0)$.

Exemple. Déterminons un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de $\arctan(x)$. On sait que sa dérivée est

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

dont on trouve facilement un développement limité à partir des formules usuelles. Pour simplifier, supposons n impair et posons $n = 2p+1$ (les formules seraient similaires pour n pair). On a :

$$\arctan'(x) \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^p x^{2p} + o(x^{2p}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2p}).$$

Il n'y a plus qu'a intégrer ce développement limité en n'oubliant pas la constante $\arctan(0) = 0$ pour obtenir

$$\arctan(x) \underset{0}{=} 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^n).$$

Exemple. Déterminons un développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de $\arcsin(x)$. On sait que sa dérivée est

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1 - \sqrt{x^2})^{-\frac{1}{2}}.$$

On applique alors le développement limité

$$(1+u)^{\alpha} = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + o(u^2)$$

avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -x^2$. On obtient :

$$\arcsin'(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{-\frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right)}{2}(-x^2)^2 + o(x^4) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

ce qui après intégration donne

$$\arcsin(x) = 0 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

IV.4. Application des développements limités

▷ *MA13, module 11 — Développements limités : Applications*

IV.4.1. Calcul de limites

Le calcul de limites à l'aide des développements limités repose simplement sur l'observation ci-dessous.

Proposition 13. Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre $n \geqslant 0$ au voisinage de a

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Alors $\lim_{x \to a} f(x) = c_0$.

Ainsi, si on connaît le développement limité d'une fonction f au voisinage de a, alors on connaît en particulier sa limite en a. Une façon de lever des formes indéterminée est donc de passer par un calcul de développements limités.

Exemple. Déterminons la limite quand x tend vers 0 de l'expression

$$A(x) = \frac{\ln(1+x) - \tan(x) + \frac{1}{2}\sin(x)}{3x^2\sin^2(x)}.$$

On est en présence d'une forme indéterminée car les expressions

$$f(x) = \ln(1+x) - \tan(x) + \frac{1}{2}\sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 3x^2\sin^2(x)$$

tendent toutes les deux vers 0 lorsque x tend vers 0. Pour lever l'indétermination, on va calculer un développement limité de $A(x)$ au voisinage de 0.

1. **Déterminons un développement limité de $f(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.**
   À l'aide des développements limités usuels, on obtient

$$f(x) \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$$

Notez qu'il suffit de prendre le développement limité de $\sin(x)$ jusqu'à l'ordre 3 seulement car, lorsqu'on développera le carré, le produit de x et de $o(x^3)$ donnera un $o(x^4)$. En poursuivant les calculs, on trouve ainsi :

$$f(x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + o(x^4) \underset{0}{=} -\frac{5}{12}x^4 + o(x^4).$$

2. **Déterminons un développement limité de $g(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.**
De même ici, il suffit de partir d'un développement limité de $\sin(x)$ à l'ordre 1. En effet, on aura alors :
$$\sin^2(x) \underset{0}{=} (x + o(x))(x + o(x)) \underset{0}{=} x^2 + o(x^2)$$
et par suite
$$g(x) = 3x^2 \sin^2(x) \underset{0}{=} 3x^2(x^2 + o(x^2)) \underset{0}{=} 3x^4 + o(x^4).$$

3. **Déduisons-en un développement limité de $A(x)$.**
En injectant les développements limités de $f(x)$ et de $g(x)$ calculés précédemment, on trouve :
$$A(x) = \frac{-\frac{5x^4}{12} + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)} \underset{0}{=} \frac{x^4\left(-\frac{5}{12} + o(1)\right)}{x^4\,(3 + o(1))} \underset{0}{=} \frac{-\frac{5}{12} + o(1)}{3 + o(1)}.$$
Cette dernière forme n'est plus indéterminée : en effet, on a
$$\lim_{x\to 0} -\frac{5}{12} + o(1) = -\frac{5}{12} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} 3 + o(1) = 3$$
(car $o(1) = 1 \times \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$) d'où par quotient
$$\lim_{x\to 0} A(x) = -\frac{5}{36}.$$

Notez qu'il était bien nécessaire de calculer les développements limités de $f(x)$ et de $g(x)$ jusqu'à l'ordre 4 au moins pour lever l'indétermination. Avec la pratique, vous apprendrez à anticiper cela.

Ici, on pouvait remarquer que comme le développement limité de $\sin(x)$ au voisinage de 0 commence par le monôme x, celui de $\sin^2(x)$ commencera par x^2 et donc celui de $3x^2\sin^2(x)$ commencera par $3x^4$. Pour lever l'indétermination on s'attendait donc à devoir factoriser le numérateur et le dénominateur de $A(x)$ par x^4, et donc pour cela avoir calculé les développements limités de $f(x)$ et de $g(x)$ jusqu'à l'ordre 4 au moins.

IV.4.2. Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 14. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité au voisinage de a de la forme

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$$

avec $k \geqslant 2$ et $c_k \neq 0$. Alors :

- La tangente à la courbe représentative de f au point a a pour équation

$$y = c_0 + c_1(x-a).$$

- La position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente T_a lorsque x est proche de a est donnée par le signe de

$$f(x) - (c_0 + c_1(x-a))$$

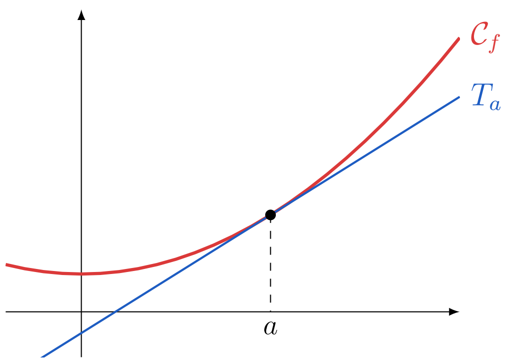
au voisinage de a, donc par le signe de $c_k(x-a)^k$.

Concrètement, il y a donc trois cas possibles.

1. Si k est pair et c_k est positif, alors $c_k(x-a)^k$ reste de signe positif au voisinage de a, et donc la courbe $\mathcal{C}_f$ reste localement au-dessus de sa tangente T_a.
2. Si k est pair et c_k est négatif, alors $c_k(x-a)^k$ reste de signe négatif au voisinage de a, et donc la courbe $\mathcal{C}_f$ reste localement au-dessous de sa tangente T_a.
3. Si k est impair, alors $c_k(x-a)^k$ change de signe au voisinage de a et donc la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse la tangente T_a en a. Dans ce dernier cas on dit que a est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

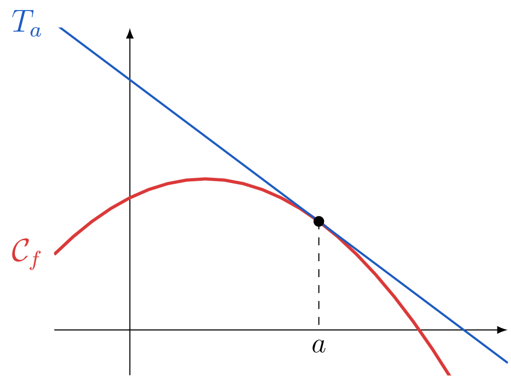
   Notez que pour que k soit impair, il faut au moins que $c_2 = 0$, c'est-à-dire que $f''(a) = 0$. (En revanche la réciproque est fausse, on peut avoir par exemple $c_2 = c_3 = 0$ et $c_4 \neq 0$, soit $k = 4$.)

k pair et $c_k > 0$



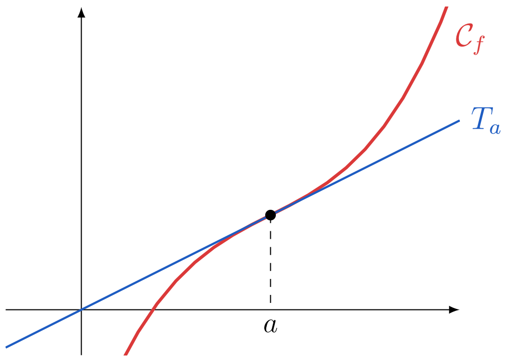
x		a	
$c_k(x-a)^k$	$+$	0	$+$

k pair et $c_k < 0$



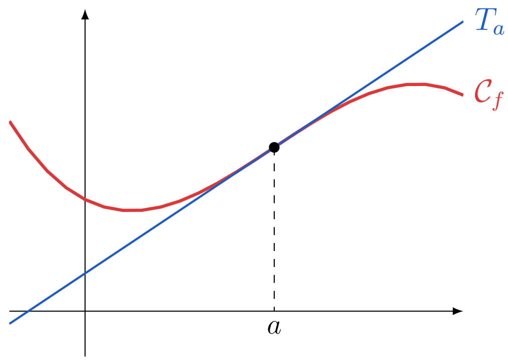
x		a	
$c_k(x-a)^k$	$-$	0	$-$

k impair et $c_k > 0$



x		a	
$c_k(x-a)^k$	$-$	0	$+$

k impair et $c_k < 0$



x		a	
$c_k(x-a)^k$	$+$	0	$-$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1.$$

Étudions la position relative de son graphe $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente T au point d'abscisse $x_0 = \frac{1}{2}$. Comme ici f est polynomiale, ses dérivées successives restent simples à calculer et on va pouvoir utiliser la formule de Taylor–Young. On a :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1, \quad f'(x) = 4x^3 - 6x^2, \quad f''(x) = 12x^2 - 12x.$$

Pour appliquer la proposition précédente, il faut pousser l'ordre du développement limité jusqu'au premier monôme non-nul de degré supérieur ou égal à 2. Ici, on a :

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \neq 0$$

donc on peut s'arrêter à l'ordre 2. On a alors :

$$f(x) \underset{\frac{1}{2}}{=} f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

soit après simplification :

$$f(x) = \frac{13}{16} - \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

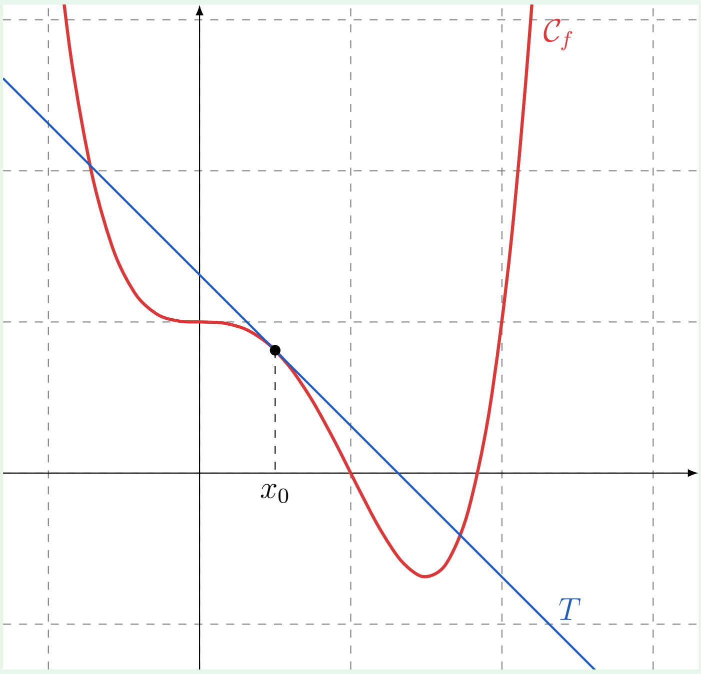
Ainsi, on peut déjà affirmer que la tangente T au point d'abscisse $x_0 = \frac{1}{2}$ a pour équation

$$y = \frac{13}{16} - \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

De plus, on a

$$\Delta(x) = f(x) - \left(\frac{13}{16} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = \underbrace{-\frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}_{<0} + o\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

Ainsi au voisinage de $x_0 = \frac{1}{2}$, la différence $\Delta(x)$ reste négative et donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T.



Notez l'aspect seulement local du résultat : on peut affirmer que la courbe $\mathcal{C}_f$ reste sous sa tangente T *au voisinage de* x_0, mais ce n'est pas forcément le cas sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exemple. Cherchons les points d'inflexion de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ précédente, définie par

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1.$$

On rappelle que si a est un point d'inflexion de f, alors $f''(a) = 0$, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie. On va donc chercher d'abord les points où f'' s'annule, puis on vérifiera pour chacun d'entre eux s'il est point d'inflexion ou non.

1. **Déterminons les points en lesquels f'' s'annule.**
   On rappelle que
   $$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$$
   ainsi f'' s'annule en 0 et en 1.
2. **Déterminons s'il s'agit de points d'inflexion.**
   a) Déterminons si 0 est un point d'inflexion. Pour cela, déterminons le développement limité de f en 0. Comme f est une fonction polynomiale, la partie polynomiale de son développement limité à un ordre quelconque est égale à elle-même (éventuellement tronqué). Autrement dit, on peut directement affirmer que
   $$f(x) \underset{0}{=} 1 - 2x^3 + x^4 + o(x^4).$$
   On en déduit que la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation
   $$y = 1.$$
   De plus, on a
   $$\Delta_0(x) = f(x) - 1 \underset{0}{=} -2x^3 + o(x^3).$$
   donc $\Delta_0(x)$ change de signe en 0 donc 0 est bien un point d'inflexion. Plus précisément :

- pour $x < 0$ assez proche de 0, on a $\Delta_0(x) > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_0,
- pour $x > 0$ assez proche de 0, on a $\Delta_0(x) < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T_0.

b) Déterminons si 1 est un point d'inflexion. Pour cela, déterminons le développement limité de f en 1. On peut passer par la formule de Taylor–Young, ou bien on peut aussi effectuer le changement de variable $h = x - 1$ de sorte que lorsque x est au voisinage de $x_0 = 1$, h soit au voisinage de $h_0 = 0$. Dans ce cas on a

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1 = (1+h)^4 - 2(1+h)^3 + 1$$

et donc en développant (à l'aide de la formule de binôme de Newton) on trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4) - 2(1 + 3h + 3h^2 + h^3) + 1 \\ &= -2h + 2h^3 + h^4 \\ &= -2(x-1) + 2(x-1)^3 + (x-1)^4 \end{aligned}$$

d'où en particulier

$$f(x) \underset{1}{=} -2(x-1) + 2(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

On en déduit que la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation

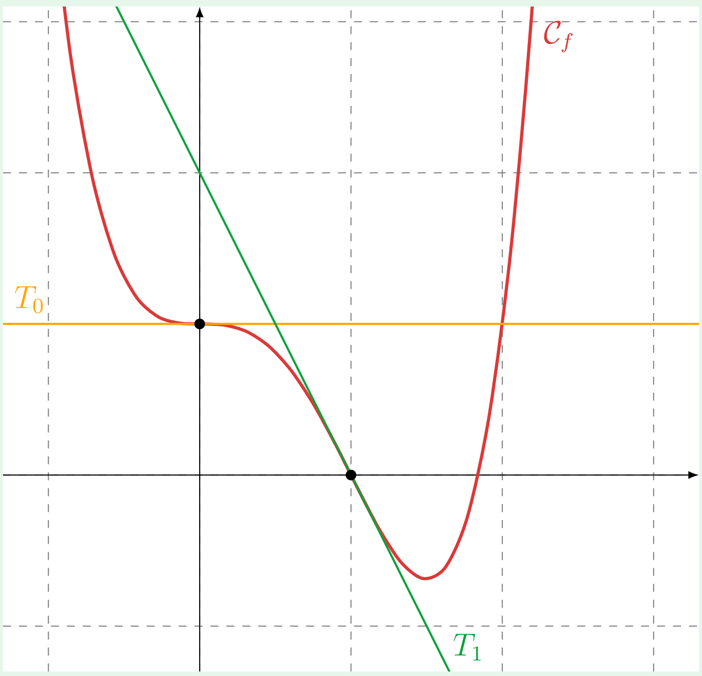
$$y = -2(x-1),$$

et comme la différence

$$\Delta_1(x) = f(x) - (-2(x-1)) \underset{1}{=} 2(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

change de signe en 1, on en déduit que 1 est également un point d'inflexion de f. Plus précisément :

- pour $x < 1$ assez proche de 1, on a $\Delta_1(x) < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T_1,
- pour $x > 1$ assez proche de 1, on a $\Delta_1(x) > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_1.



IV.4.3. Développement limité à l'infini

Pour terminer ce chapitre, introduisons la notion de développement limité en $a = +\infty$.

Définition 5. Soit $f :]A, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet un **développement limité en** $+\infty$ (ou **développement asymptotique**) d'ordre n s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que

$$f(x) \underset{+\infty}{=} c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

En pratique, on se ramènera à calculer un développement limité en 0 en posant $h = \frac{1}{x}$. En effet :

$$f(x) \text{ admet un développement limité en } +\infty \iff f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ admet un développement limité en } 0^+.$$

Exemple. Déterminons un développement asymptotique de

$$f(x) = \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right).$$

En posant $h = \frac{1}{x}$, cela revient à déterminer un développement limité au voisinage de 0 de

$$\ln(2+h).$$

On a déjà vu la méthode à employer dans les sections précédentes. On a :

$$\ln(2+h) = \ln\left(2\left(1 + \frac{h}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)$$

d'où

$$\ln(2+h) \underset{0}{=} \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{h}{2}\right)^n + o(h^n).$$

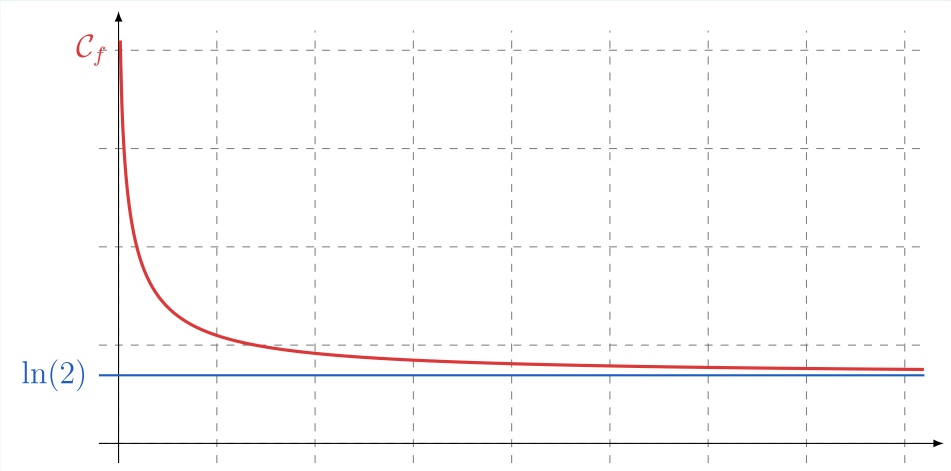
En revenant à la variable x et en simplifiant, on trouve alors

$$f(x) \underset{+\infty}{=} \ln(2) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2 \times 4x^2} + \frac{1}{3 \times 8x^3} - \frac{1}{4 \times 16x^4} + \cdots + \frac{1}{n \times 2^n x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

En particulier, pour x au voisinage de $+\infty$ on a

$$f(x) \underset{+\infty}{=} \ln(2) + \underbrace{\frac{1}{2x}}_{>0} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On en déduit que $f(x)$ tend vers $\ln(2)$ lorsque x tend vers $+\infty$, tout en restant supérieur à $\ln(2)$ lorsque x est assez grand. Géométriquement, cela veut dire que la courbe représentative de f admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = \ln(2)$ et reste au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.



Poussons plus loin l'étude des asymptotes en $+\infty$.

Proposition 15. Soit $f :]A, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que $f(x)/x$ admet pour développement asymptotique

$$\frac{f(x)}{x} \underset{+\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

avec $k \geqslant 2$ tel que $a_k \neq 0$.

1. On a alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (a_0 x + a_1) = 0.$$

   On dit que la droite d'équation

$$y = a_0 x + a_1$$

   est une **asymptote** à la courbe représentative de f en $+\infty$.

2. La position relative de la courbe par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$ est donnée par le signe de

$$\frac{a_k}{x^{k-1}}.$$

Démonstration. Sous ces hypothèses, pour tout x au voisinage de $+\infty$ on a (en multipliant par x)

$$f(x) \underset{+\infty}{=} a_0 x + a_1 + \frac{a_k}{x^{k-1}} + o\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right).$$

Ainsi, on obtient que

$$f(x) - (a_0 x + a_1) \underset{+\infty}{=} \frac{a_k}{x^{k-1}} + o\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

et le signe de $f(x) - (a_0 x + a_1)$ (donc la position relative de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote en $+\infty$) au voisinage de $+\infty$ est uniquement déterminé par le signe de

$$\frac{a_k}{x^{k-1}}.$$

Exemple. Étudions l'éventuelle asymptote en $+\infty$ de la fonction $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+1}.$$

On cherche donc un développement asymptotique de

$$\frac{f(x)}{x} = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.$$

On pose $h = \frac{1}{x}$, ainsi quand x est au voisinage de $+\infty$, h est au voisinage de 0. On se ramène donc au calcul d'un développement limité au voisinage de 0 de

$$\exp(h)\sqrt{1-h^2}.$$

Les développements limités usuels donnent

$$\exp(h)\sqrt{1-h^2} \underset{0}{=} \left(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)\left(1-\frac{h^2}{2}+o(h^3)\right) \underset{0}{=} 1+h-\frac{h^3}{3}+o(h^3).$$

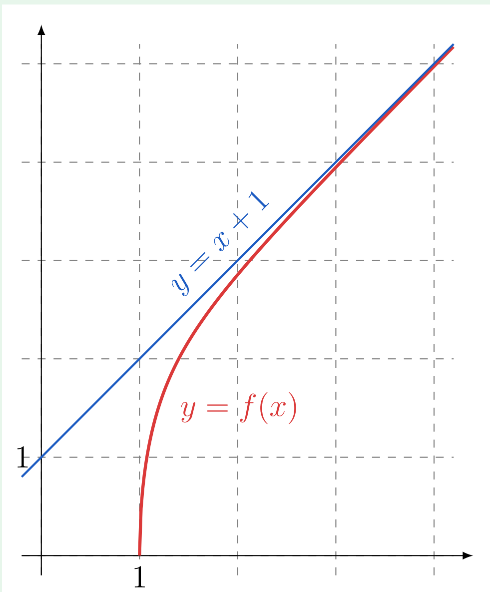
En revenant à la variable de départ, on arrive au développement asymptotique

$$\frac{f(x)}{x} \underset{+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

ou encore, après multiplication par x,

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x+1\underbrace{-\frac{1}{3x^2}}_{<0}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On en déduit que f admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x+1$, et que la courbe représentative de f se situe sous cette asymptote au voisinage de $+\infty$.



Chapitre V.

Probabilités

V.1. Outils pour le dénombrement

▷ *Pas de mimo associé sur IonisX.*

En première année, on s'intéressera seulement à l'étude de probabilités sur des ensembles finis. **On renvoie donc d'abord le lecteur à la section III.4. du cours de Ma111**, puis on propose ici quelques compléments sur le *dénombrement*, c'est-à-dire les techniques utiles à la détermination du cardinal d'un sous-ensemble donné.

V.1.1. Tirages dans un ensemble fini

Définition 1. Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. On appelle p-**liste** de E le résultat d'un tirage ordonné et avec remise de p éléments de E.
   Autrement dit, une p-liste est un élément E^p.
2. On appelle **arrangement** de p éléments de E le résultat d'un tirage ordonné et sans remise de p éléments de E.
   Autrement dit, un arrangement de p éléments de E est un élément de E^p dont les composantes sont deux à deux distinctes.
3. On appelle **combinaison** de p éléments de E le résultat d'un tirage non-ordonné et sans remise de p éléments de E.
   Autrement dit, une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble $A \subset E$ de cardinal p.

Exemple. Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

1. Les 2-listes possibles de E sont les couples $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$ et $(3, 3)$. Il y a donc 9 2-listes de E distinctes.
2. Les arrangements de 2 éléments de E possibles sont $(1, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$ et $(2, 3)$. Il y a donc 6 arrangements de 2 éléments de E distincts.
3. Les combinaisons de 2 éléments de E possibles sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$.

Proposition 1. Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Le nombre de p-listes de E est égal à n^p.
2. Soit $0 \leqslant p \leqslant n$. Le nombre d'arrangements de p éléments de E, noté A_n^p, est égal à
$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$
3. Soit $0 \leqslant p \leqslant n$. Le nombre d'arrangements de p éléments de E, noté C_n^p, est égal à
$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Idée de la preuve.

1. Pour un tirage $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ ordonné et avec remise de p éléments de E, on a le choix parmi n éléments pour x_1, puis à nouveau n éléments pour x_2, et ainsi de suite jusqu'à x_p. Au total, cela donne

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ termes}} = n^p = \mathrm{card}(E^p)$$

   p-listes possibles.

2. Pour un tirage $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ ordonné et sans remise de p éléments de E, on a :
   - le choix parmi n éléments de E pour x_1,
   - le choix parmi $n-1$ éléments de E seulement pour x_2, car on ne peut pas reprendre x_1,
   - le choix parmi $n-2$ éléments de E seulement pour x_3, car on ne peut reprendre ni x_1, ni x_2,
   - ...
   - et ainsi de suite jusqu'à x_p pour lequel on a $n-p+1$ choix possibles.

   Au total, le nombre de combinaisons de p éléments de E possibles est égal à

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

3. Supposons que l'on ait un tirage $A = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ non-ordonné et sans remise de p-éléments de E. Il y a exactement $p!$ façons de créer un tirage ordonné $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ formé des mêmes éléments. En effet, une façon de procéder est la suivante :
   - on choisit le premier élément $y_1 = x_{i_1}$: il y a p choix possibles,
   - on choisit ensuite le deuxième élément $y_2 = x_{i_2}$: il n'y a plus que $p-1$ choix possibles,
   - on choisit ensuite le troisième élément $y_3 = x_{i_3}$: il n'y a plus que $p-2$ choix possibles,
   - ...
   - ainsi de suite jusqu'à choisir le dernier élément $y_p = x_{i_p}$ pour lequel il n'y a plus qu'un seul choix possible.

   Ainsi, à chaque combinaison de p-éléments de E possible correspondent exactement $p!$ arrangements distincts formés de ces mêmes p éléments. On en déduit que $A_n^p = p! \times C_n^p$, autrement dit que

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Remarque.

- Pour $p = 0$, on considère par convention qu'il existe une unique liste/arrangement/combinaison de 0 éléments de E : c'est le tirage « vide ». Dans la proposition ci-dessus, on trouve bien

$$n^0 = A_n^0 = C_n^0 = 1.$$

- Pour $p = 1$, le caractère ordonné ou non et avec ou sans répétition du tirage n'a pas d'importance. Une 1-liste, un arrangement et une combinaison de 1 éléments de E sont simplement la donnée d'un seul élément de E. Dans la proposition ci-dessus on trouve bien :

$$n^1 = A_n^1 = C_n^1 = n.$$

- Enfin, si $p > n$, il est impossible d'obtenir un tirage de p éléments de E sans répétition. Par convention on pose $A_n^p = C_n^p = 0$.

Exemple. Reprenons l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ de cardinal $n = 3$. On trouve les résultats suivants :

p	Arrangements de p éléments	A_n^p	Combinaisons de p éléments	C_n^p
0	$()$	1	$\{\}$	1
1	$(1), (2), (3)$	3	$\{1\}, \{2\}, \{3\}$	3
2	$(1, 2), (1, 3), (2, 3),$ $(2, 1), (3, 1), (3, 2)$	6	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$	3
3	$(1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 1, 2),$ $(1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 2, 1)$	6	$\{1, 2, 3\}$	1

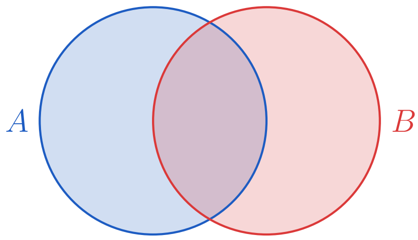
V.1.2. Formule du crible de Poincaré

Étant donnés deux ensembles finis A et B, on réalise assez vite que l'on a (en général) :

$$\mathrm{card}(A \cup B) \neq \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B).$$

En effet, si par exemple $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$, alors l'expression $\mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$ va « compter » deux fois les éléments 2 et 3, c'est-à-dire les éléments de l'ensemble $A \cap B$. C'est ainsi que l'on arrive à la formule bien connue

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B).$$

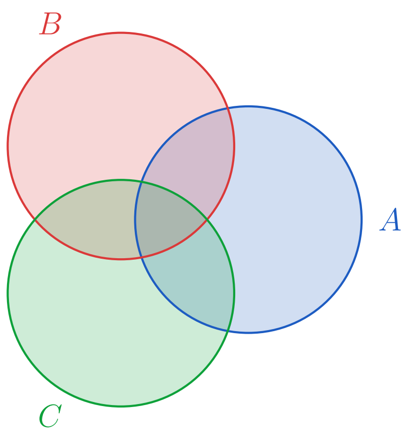


Pour trois ensembles A, B, C, on peut essayer de déterminer $\mathrm{card}(A \cup B \cup C)$ de manière analogue.

1. On compte d'abord « naïvement » la somme $\mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C)$.
2. On réalise que tous les éléments à l'intersection de deux de ces trois ensembles ont été comptés deux fois. Pour prendre en compte cette erreur, on retranche donc $\mathrm{card}(A \cup B)$, $\mathrm{card}(A \cup C)$ et $\mathrm{card}(B \cup C)$.
3. Mais en faisant cela, un problème se pose toujours pour les éléments qui étaient dans les trois ensembles à la fois : leur nombre a été compté trois fois dans l'étape 1, puis retranché trois fois dans l'étape 2. Il convient donc d'ajouter maintenant $\mathrm{card}(A \cup B \cup C)$.

On arrive ainsi à la formule :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A \cup B \cup C) = {} & \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) \\ & - \mathrm{card}(A \cap B) - \mathrm{card}(A \cap C) - \mathrm{card}(B \cap C) \\ & + \mathrm{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$



Si on essaye maintenant de généraliser ce procédé à n ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$, on peut se convaincre que le procédé sera le suivant :

1. on somme d'abord tous les $\mathrm{card}(A_i)$ possibles,
2. on soustrait ensuite tous les $\mathrm{card}(A_i \cap A_j)$ possibles,
3. on ajoute ensuite tous les $\mathrm{card}(A_i \cap A_j \cap A_k)$ possibles,
4. on soustrait ensuite tous les $\mathrm{card}(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell)$ possibles,
5. ...
6. ainsi de suite jusqu'à ajouter ou soustraire $\mathrm{card}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$.

C'est ce qu'on appelle le *principe d'inclusion-exclusion*, qui mène à la formule suivante :

Théorème 1. (Formule du crible de Poincaré) Soient n ensembles finis $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$$\mathrm{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{card}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \mathrm{card}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \mathrm{card}(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$- \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} \mathrm{card}(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathrm{card}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Remarque. Cette formule n'est pas à connaître sous sa forme générale, mais seulement à savoir appliquer pour une valeur de n fixée.

V.2. Espaces probabilisés finis

▷ *Pas de mimo associé sur IonisX.*

V.2.1. Introduction

Définition 2. (Axiomes de la théorie des probabilités)

1. Pour tout événement A, $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.
2. L'univers Ω vérifie $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Pour toute famille $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque.

1. Deux événements sont incompatibles si et seulement si
$$A \cap B = \varnothing.$$
2. Si la famille est finie, il suffit de considérer deux événements et ainsi
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Définition 3. (Univers) À une expérience **aléatoire** donnée, on associe l'ensemble des résultats possibles. Cet ensemble est appelé **univers** ; on le note Ω.

Remarque.

1. **Univers fini**, c'est-à-dire $\operatorname{Card}\Omega = n \in \mathbb{N}^*$, avec $n < +\infty$. Dans ce contexte, on pourra noter
$$\Omega = \{\omega_i, i \in [\![1, n]\!]\}.$$
2. **Univers dénombrable**, c'est-à-dire que Ω contient un nombre infini d'éléments qui peuvent néanmoins être comptés. Il est donc possible de les lister ; il existe alors $I \subset \mathbb{N}$ (où I contient un nombre infini d'éléments) tel que
$$\Omega = \{\omega_i, i \in I\}.$$
3. **Univers non dénombrable**, Ω est un ensemble beaucoup trop gros pour être compté. Les exemples les plus simples d'univers non dénombrables sont les intervalles.

Remarque. Les deux premiers types d'univers font intervenir des sommes et peuvent être regroupés sous le terme d'univers **discret** ; nous retrouverons ce qualificatif pour les variables aléatoires réelles. Si les sommes sont finies dans le premier cas, elles seront infinies dans le deuxième.

Exemple.

- **Univers fini** - Lors d'un lancer d'un dé à six faces, on observe le résultat. Dans ce contexte, on a
$$\Omega = [\![1, 6]\!].$$
- **Univers dénombrable** - On lance un dé à six faces, on note le résultat et on recommence. Dans ce contexte, on a
$$\Omega = [\![1, 6]\!]^{\mathbb{N}}.$$
- **Univers non dénombrable** - On considère la durée de vie d'un appareil électrique. Dans ce contexte, on a
$$\Omega = \mathbb{R}_+.$$

V.2.2. Événement

Définition 4. (Événement) Soit Ω un univers. On appelle **événement** tout sous-ensemble A de Ω. Autrement dit, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 5. (Terminologie) Soient Ω un univers **fini** et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que A est un événement :

1. **élémentaire** s'il s'agit d'un singleton ;
2. **certain** si $A = \Omega$;
3. **impossible** si $A = \varnothing$.

Exemple.

1. Lors d'un lancer d'un dé à six faces, on observe le résultat. Comme $\Omega = [\![1, 6]\!]$, les événements élémentaires sont les singletons
$$\{1\}, \quad \{2\}, \quad \{3\}, \quad \{4\}, \quad \{5\} \quad \text{et} \quad \{6\}.$$
Par exemple, notons A l'événement consistant à obtenir un chiffre pair. Ainsi
$$A = \{2, 4, 6\}.$$
2. Lors d'un lancer d'un dé à six faces, on observe la parité du chiffre obtenu. Comme $\Omega = \{\text{pair}, \text{impair}\}$, l'ensemble de tous les événements possibles est
$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{\text{pair}\}, \{\text{impair}\}, \Omega\}.$$

Définition 6. (Terminologie) Soient Ω un univers, A et B deux événements. On dit que :

1. A^c est l'événement **contraire** de A ;
2. les événements A et B sont **incompatibles** s'ils sont d'intersection vide.

Point de vue ensembliste	**Point de vue probabiliste**
L'ensemble A	L'événement A
L'ensemble complémentaire A^c	L'événement contraire A^c
L'intersection de A et B	A et B sont réalisés
L'union de A et B	A ou B est réalisé
Les ensembles A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles

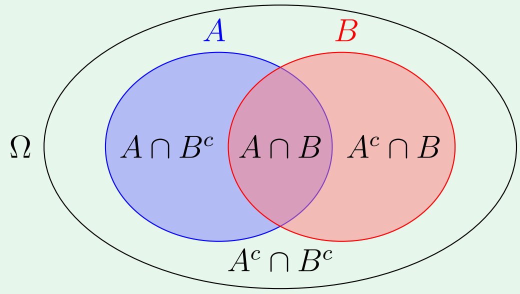
Définition 7. (Système complet d'événements) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un univers et $\{A_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$. On dit que la famille $\{A_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un **système complet d'événements** si :

1. les événements sont deux à deux incompatibles c'est-à-dire que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$;
2. la réunion des événements est l'événement certain c'est-à-dire
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Remarque. Un système complet d'événements correspond à une partition de Ω.

Exemple.

- Soient $\Omega = [\![1,6]\!]$, $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{4,5,6\}$. On remarque que :
  - — $A^c = B$,
  - — $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$.
- Si A est un événement, $\{A, A^c\}$ est un système complet d'événements.
- Si A et B sont deux événements, alors $\{A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, A^c \cap B^c\}$ est un système complet d'événements.



V.2.3. Probabilités

Définition 8. (Probabilité) Soit Ω un univers. Une **probabilité** est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. pour tout $(A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ vérifiant $A \cap B = \varnothing$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Dans ce contexte, on dit que

1. $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de l'événement A ;
2. le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé fini**.

Exemple. Lors d'un lancer d'un dé équilibré à six faces, on observe le résultat. Comme $\Omega = [\![1,6]\!]$, on a

$$\forall k \in [\![1,6]\!], \quad \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{6}.$$

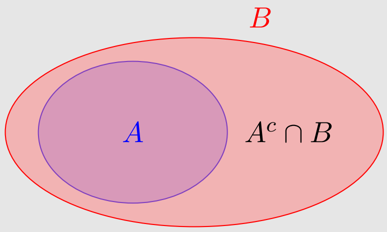
Si l'événement $A = \{1,2\}$ est considéré, on détermine

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\{1,2\}\right) = \mathbb{P}(\{1\} \cup \{2\}) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Proposition 2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On a :

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
2. pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(A^c\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
3. pour tout $(A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $(A \subset B) \Rightarrow (\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B))$.

Démonstration.

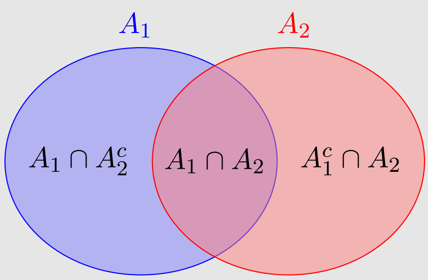
- Puisque $\{\varnothing, \Omega\}$ est un système complet d'événements, on a
$$\mathbb{P}(\varnothing)+\mathbb{P}(\Omega)=\mathbb{P}(\Omega) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\varnothing)=\mathbb{P}(\Omega)-\mathbb{P}(\Omega) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\varnothing)=0.$$
- Puisque $\{A, A^c\}$ est un système complet d'événements, on a
$$\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}\left(A^c\right)=\mathbb{P}(\Omega) \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(A^c\right)=\mathbb{P}(\Omega)-\mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(A^c\right)=1-\mathbb{P}(A).$$
- 

  La famille $\{A, A^c \cap B\}$ forme dans ce contexte une partition de B ; en effet
$$A \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap (A \cup B) = \Omega \cap B = B$$
  et
$$A \cap (A^c \cap B) = (A \cap A^c) \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing.$$
  Ainsi, on a
$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}\left(A^c \cap B\right)=\mathbb{P}\left(A \cup (A^c \cap B)\right)=\mathbb{P}(B).$$

Proposition 3. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Pour tout $(A_1, A_2) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, on a
$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2\right)=\mathbb{P}\left(A_1\right)+\mathbb{P}\left(A_2\right)-\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right).$$

Remarque. Il s'agit de la formule du crible de Poincaré (pour $n=2$).

Démonstration.



On a
$$A_1 \cup A_2 = \left(A_1 \cap A_2^c\right) \cup \left(A_1 \cap A_2\right) \cup \left(A_1^c \cap A_2\right),$$
où les événements $A_1 \cap A_2^c$, $A_1 \cap A_2$ et $A_1^c \cap A_2$ sont deux à deux incompatibles. Ainsi
$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2\right)=\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2^c\right)+\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right)+\mathbb{P}\left(A_1^c \cap A_2\right).$$
D'autre part, on a
$$A_1 = \left(A_1 \cap A_2^c\right) \cup \left(A_1 \cap A_2\right) \quad \text{et} \quad A_2 = \left(A_1 \cap A_2\right) \cup \left(A_1^c \cap A_2\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\
&\quad = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\
&\quad = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2).
\end{aligned}$$

Remarque.

- Dans le cas général, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \leqslant \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

  qui s'écrit aussi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(A_i).$$

- Pour des événements incompatibles, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

  qui s'écrit aussi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(A_i).$$

Proposition 4. (Formule du crible de POINCARÉ) Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Pour toute famille $\{A_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k} A_{i_p}\right)\right).$$

Ainsi, on a :

1. dans le cas général

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i),$$

2. pour des événements deux à deux incompatibles

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Simplifions la formule pour $n = 2$. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right) = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant 2} \mathbb{P}(A_{i_1}) - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 2} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}).$$

1. Dans la somme rouge, i_1 peut valoir 1 ou 2. Ainsi

$$\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant 2} \mathbb{P}(A_{i_1}) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2).$$

2. Dans la somme bleue, le couple (i_1, i_2) ne peut valoir que $(1, 2)$. Ainsi

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 2} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right) = \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right).$$

On retrouve alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right) + \mathbb{P}\left(A_2\right) - \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right).$$

Démonstration. Nous raisonnerons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ où $n \geqslant 2$.

1. La proposition précédente fournit l'initialisation.
2. Fixons à présent un $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ pour lequel la propriété étudiée est supposée vraie. Montrons alors que la propriété se transmet au rang supérieur. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\right) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\right) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \cap A_{n+1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Appliquons à présent l'hypothèse de récurrence sur les premier et dernier termes. Observons pour commencer le dernier. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \cap A_{n+1}\right)\right) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k} \left(A_{i_p} \cap A_{n+1}\right)\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{p=1}^{k} A_{i_p}\right) \cap A_{n+1}\right)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-2} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{k-1} \leqslant n} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{p=1}^{k-1} A_{i_p}\right) \cap A_{n+1}\right)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-2} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k = n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k} A_{i_p}\right)\right).
\end{aligned}$$

On obtient alors, en simplifiant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k} A_{i_p}\right)\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\right) \\
+ \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k = n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k} A_{i_p}\right)\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k=n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k}A_{i_p}\right)\right)
&=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k=n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k}A_{i_p}\right)\right)-\sum_{1\leqslant i_1=n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{1}A_{i_p}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k=n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k}A_{i_p}\right)\right)-\sum_{i_1=n+1}^{n+1}\mathbb{P}\left(A_{i_1}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k=n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k}A_{i_p}\right)\right)-\mathbb{P}\left(A_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}&\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k}A_{i_p}\right)\right)\\
&+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k=n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k}A_{i_p}\right)\right).
\end{aligned}$$

La somme rouge contient toutes les intersections sans l'événement A_{n+1} (observer les indices), la bleue contient quant à elle toutes les intersections avec l'événement A_{n+1} (idem). En définitive, on peut réorganiser les termes pour rassembler les deux sommes et obtenir

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{k}A_{i_p}\right)\right).$$

3. Il ne reste plus qu'à conclure en appliquant le principe de récurrence.

Deux points restent encore à démontrer. Raisonnons une nouvelle fois par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ où $n\geqslant 2$.

1. a) La proposition 2 fournit l'initialisation.
   b) Fixons à présent un $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$ pour lequel la propriété étudiée est supposée vraie. Montrons alors que la propriété se transmet au rang supérieur. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right)&=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)+\mathbb{P}\left(A_{n+1}\right)-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i\cap A_{n+1}\right)\right)\\
&\leqslant\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)+\mathbb{P}\left(A_{n+1}\right)\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\right)+\mathbb{P}\left(A_{n+1}\right)\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(A_i\right).
\end{aligned}$$

   c) Il ne reste plus qu'à conclure en appliquant le principe de récurrence.
2. a) La proposition 2 fournit l'initialisation.

b) Fixons à présent un $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ pour lequel la propriété étudiée est supposée vraie. Montrons alors que la propriété se transmet au rang supérieur. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\right) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}\left(A_i\right).\end{aligned}$$

c) Il ne reste plus qu'à conclure en appliquant le principe de récurrence.

Définition 9. (Équiprobabilité) Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. Lorsque tous les événements élémentaires $\{\omega\}$ ont la même probabilité, à savoir

$$\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) = \frac{1}{\operatorname{Card}\Omega},$$

   on est alors dans une situation d'**équiprobabilité**.
2. Dans un tel contexte, $\mathbb{P}$ est appelée **probabilité uniforme** sur Ω.

Remarque. Dans une situation d'équiprobabilité, les calculs se réduisent à des **dénombrements** ; il convient ainsi de faire appel au calcul du nombre de permutations, d'arrangements ou encore de combinaisons.

Théorème 2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On suppose que $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card}\Omega}.$$

Démonstration. Étant donné que $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme, il suffit de décomposer A en événements élémentaires. On a

$$A = \bigcup_{i=1}^{\operatorname{Card} A} \{\omega_i\}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\operatorname{Card} A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\operatorname{Card} A} \mathbb{P}\left(\{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\operatorname{Card} A} \frac{1}{\operatorname{Card}\Omega} = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card}\Omega}.$$

V.2.4. Probabilités conditionnelles

Définition 10. (Probabilité conditionnelle) Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle** l'application $\mathbb{P}_B : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ telle que pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

$\mathbb{P}_B(A)$ se lit la **probabilité de** A **sachant** B et se note aussi $\mathbb{P}(A \mid B)$.

Exemple. On lance un dé à six faces. Déterminons la probabilité d'avoir : un 4; un 4 sachant que le nombre est pair ; un 4 sachant que le nombre est impair. Commençons par définir les événements qui nous concernent :

- A : obtenir un 4 ;
- B : obtenir un résultat pair ;
- C : obtenir un résultat impair.

Dans le contexte de l'équiprobabilité, la probabilité uniforme est à considérer. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}.$$

Puis,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}.$$

Enfin

$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(C)} = 0.$$

Proposition 5. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. L'application $\mathbb{P}_B : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ est une probabilité sur l'univers Ω.

Démonstration. Il faut montrer que l'application $\mathbb{P}_B$ satisfait les deux axiomes d'une probabilité sur Ω.

1. Tout d'abord, on a :
$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

2. Soit $(A_1, A_2) \in \mathbb{P}(\Omega)^2$ un couple d'événements incompatibles. On a :
$$\mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) = \frac{\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{\mathbb{P}(B)}.$$
Comme $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = A_1 \cap A_2 \cap B = \varnothing$, on en déduit que :
$$\mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2).$$

Proposition 6. (Formule des probabilités totales) Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{A_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements non impossibles. Pour tout événement A, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(A)\mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration. Puisque les A_i forment une partition de Ω, on a

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i).$$

Aussi

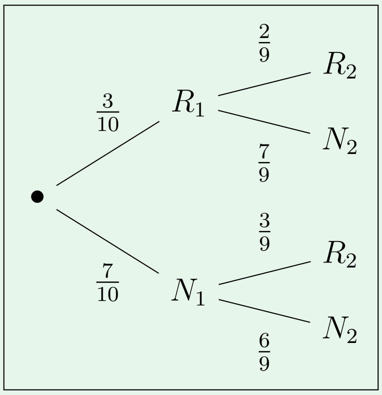
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(A)\mathbb{P}(A_i).$$

Remarque. En considérant $\{A_1, A_1^c\}$ comme système complet d'événements, on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_{A_1}(A)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{A_1^c}(A)\mathbb{P}(A_1^c).$$

Exemple. Une urne contient trois boules rouges et sept boules noires. On effectue deux tirages successifs sans remise. Déterminons la probabilité d'obtenir une boule noire à la fin de l'expérience. Pour cela, posons

1. R_1 (respectivement R_2) les événements consistant à obtenir une boule rouge au premier (respectivement second) tirage ;
2. N_1 (respectivement N_2) les événements consistant à obtenir une boule noire au premier (respectivement second) tirage.



Alors d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\mathbb{P}(N_2) = \mathbb{P}_{R_1}(N_2)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}_{N_1}(N_2)\mathbb{P}(N_1) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{10}.$$

Proposition 7. (formule de Bayes) Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et B un événement non impossible. On a

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{A^c}(B)\mathbb{P}(A^c)}.$$

Démonstration. On a par définition des probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Or, puisque $\{A, A^c\}$ est un système complet d'événements, on applique la formule des probabilités totales et on obtient

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{A^c}(B)\mathbb{P}(A^c)}.$$

Exemple. (Dépistage d'une maladie rare) Un laboratoire propose un test permettant de dépister une maladie donnée. Les caractéristiques du test sont les suivantes :

- si le test est pratiqué sur une personne affectée, la probabilité qu'il soit positif vaut $0,998$;
- si le test est pratiqué sur une personne saine, la probabilité qu'il soit négatif vaut $0,996$.

On sait par ailleurs que la probabilité d'être atteint par cette maladie vaut 10^{-5}. On cherche à étudier la fiabilité du test ; pour cela, nous allons répondre à la question suivante : quelle est la probabilité d'être atteint par la maladie sachant que le test est positif ? Posons pour cela :

- M l'événement consistant à obtenir une personne affectée par la maladie ;
- T l'événement consistant à obtenir un test positif.

Alors la probabilité recherchée est

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{M^c}(T)\mathbb{P}(M^c)} \simeq 0,0025$$

soit seulement $0,25\%$. Contrairement à l'intuition, le test proposé n'est donc absolument pas fiable.

V.2.5. Indépendance

Définition 11. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{A_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille d'événements.

1. Les événements A_i sont **deux à deux indépendants** si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$,
$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j).$$
2. Les événements A_i sont **mutuellement indépendants** si et seulement si pour tout $I \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ un couple d'événements. Dans le cas où $\mathbb{P}(B) \neq 0$, l'indépendance se reformule ainsi :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).$$

V.3. Variables aléatoires réelles finies

V.3.1. Variable aléatoire réelle

Définitions générales et terminologie

Lors d'un lancer de deux dés, on peut s'intéresser uniquement à la somme des résultats des deux dés. À chaque couple $(m, n) \in [\![1, 6]\!]^2$, on associe la valeur $m + n$; ainsi, toutes les valeurs possibles forment l'ensemble

$$[\![2, 12]\!].$$

On vient de construire une application X définie sur $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$X : (m, n) \mapsto m + n.$$

Remarque. Dans toute la suite de ce cours, on désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des événements associés à l'univers Ω. Ainsi, on travaille avec l'espace probabilisé

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}).$$

Dans le cas d'un univers Ω fini, vous pouvez continuer à considérer que $\mathcal{A}$ est égal à $\mathcal{P}(\Omega)$, mais sachez que ce ne sera plus aussi simple lorsque vous passerez à des univers infinis.

Définition 12. (Variable aléatoire réelle) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une **variable aléatoire réelle** (notée par la suite **v.a.r.**) X est une application définie de Ω dans $\mathbb{R}$; autrement dit

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Remarque.

1. X est bien une application et non une variable, au sens strict du terme, qui pourrait jouer le rôle d'une indéterminée. Le vocabulaire peut porter à confusion.
2. X n'est pas aléatoire à proprement parler ; c'est l'expérience sur laquelle elle s'appuie qui relève de ce caractère. Là encore, la terminologie usuelle requiert de la prudence...

Définition 13. (Support) Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. L'image de Ω par X est appelée le **support** de X ; on le note naturellement

$$X(\Omega).$$

Lorsque le support $X(\Omega)$ est :

1. **fini** (c'est-à-dire lorsque Card $\Omega < +\infty$), on dit que X est une **v.a.r. finie** ;
2. **discret** (c'est-à-dire lorsque Ω est fini ou dénombrable), on dit que X est une **v.a.r. discrète**.

Dans l'exemple introductif, le support était

$$X(\Omega) = [\![2, 12]\!].$$

Événements

Définition 14. (Événement) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in [\![1, n]\!]\}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$[X = x_i] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\}.$$

Remarque.

1. On définit de la même manière $[X \leqslant x]$, $[X < x]$, $[X \geqslant x]$ et $[X > x]$.
2. Du point de vue de l'application, l'ensemble $[X = x_i]$ est une image réciproque ; ainsi

$$[X = x_i] = X^{-1}(\{x_i\}).$$

Exemple. On tire au hasard une carte dans un jeu qui en contient 32. On définit les règles suivantes :

- si on obtient $7, 8, 9$ ou 10, on perd 5 euros ;
- si on obtient une figure, on gagne 5 euros ;
- si on obtient un as, on gagne 10 euros.

Commençons par déterminer l'univers Ω. Il s'agit simplement de l'ensemble constitué des 32 cartes. En termes de variable aléatoire, on a :

- $X(\omega) = -5$ pour tout $\omega \in \{7, 8, 9, 10\}$;
- $X(\omega) = 5$ si ω est une figure ;
- $X(\omega) = 10$ si ω est un as.

Ainsi,

$$X(\Omega) = \{-5, 5, 10\}.$$

Quelques éléments liés à la v.a.r. X :

- $$[X \leqslant 0] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant 0\} = \{7, 8, 9, 10\} = [X = -5] ;$$
- $$\begin{aligned} [X \geqslant 1] &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant 1\} \\ &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) = 5 \text{ ou } X(\omega) = 10\} \\ &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) = 5\} \cup \{\omega \in \Omega, X(\omega) = 10\} \\ &= [X = 5] \cup [X = 10] ; \end{aligned}$$
- $$[X \leqslant -5] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant -5\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = -5\} = [X = -5] ;$$
- $$[X < -5] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < -5\} = \varnothing.$$

Théorème 3. (Système complet d'événements) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in [\![1, n]\!]\}$. La famille

$$\{[X = x_i]\}_{i \in [\![1,n]\!]}$$

est un système complet d'événements dit associé à la v.a.r. X.

Démonstration. Pour être un système complet d'événements, il convient de satisfaire deux propriétés.

1. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Montrons que

$$[X = x_i] \cap [X = x_j] = \varnothing.$$

On a :

$$\begin{aligned}[X = x_i] \cap [X = x_j] &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\} \cap \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_j\} \\ &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i \text{ et } X(\omega) = x_j\} \\ &= \varnothing.\end{aligned}$$

2. Montrons que

$$\bigcup_{i=1}^{n} [X = x_i] = \Omega.$$

On a

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n} [X = x_i] &= \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in \{x_i\}\} \\ &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in \{x_i, i \in [\![1, n]\!]\}\} \\ &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in X(\Omega)\} \\ &= \Omega\end{aligned}$$

qui est l'événement certain.

V.3.2. Loi d'une variable aléatoire réelle finie

Loi de probabilité

Définition 15. (Loi de probabilité) Soient $I \subset \mathbb{N}$ et X une v.a.r. discrète définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$. On appelle loi de probabilité de X l'ensemble des couples

$$\{(x_i, p_i), i \in I\} \quad \text{avec} \quad p_i = \mathbb{P}(X = x_i).$$

Remarque. Pour ne pas alourdir les notations, on confond généralement $\mathbb{P}(X = x_i)$ avec $\mathbb{P}([X = x_i])$.

Exemple. En reprenant l'exemple précédent, on montre aisément que

$$\mathbb{P}\left(X=-5\right)=\frac{1}{2},\quad \mathbb{P}\left(X=5\right)=\frac{3}{8}\quad \text{et}\quad \mathbb{P}\left(X=10\right)=\frac{1}{8}.$$

Ainsi, la loi de probabilité de X est

$$\left\{\left(-5,\frac{1}{2}\right),\left(5,\frac{3}{8}\right),\left(10,\frac{1}{8}\right)\right\}.$$

Transformée d'une variable aléatoire réelle

Définition 16. (Transformée d'une v.a.r.) Soient X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et f une fonction réelle d'une variable réelle. On note $f(X)$ l'application définie par

$$f(X):\left|\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \omega & \longmapsto & f(X(\omega)).\end{array}\right.$$

Proposition 8. (Transformée d'une v.a.r.) Soient X une v.a.r. discrète définie sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et f une fonction réelle d'une variable réelle. Posons $Y=f(X)$. Alors Y est une v.a.r. discrète définie sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et elle vérifie :

1. $$Y(\Omega)=f(X(\Omega))=\left\{f\left(x_i\right),i\in I\right\};$$
2. pour tout $y\in Y(\Omega)$,
$$\mathbb{P}(Y=y)=\sum_{i,f(x_i)=y}\mathbb{P}\left(X=x_i\right).$$

Remarque. L'expression « $i,f\left(x_i\right)=y$ » ne doit en aucun cas provoquer de trouble. Il est possible que plusieurs x_i aient la même image par la fonction f (rien n'indique que la fonction doit être injective). Aussi, il convient de ne garder qu'une seule occurrence des indices i. L'exemple suivant illustre simplement ce fait.

Exemple. On définit une v.a.r. X dont la loi est donnée par

x_i	-1	0	1
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

Déterminons la loi de $Y = X^2$. On a clairement $Y(\Omega) = \{0, 1\}$. De plus :

- $$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2};$$
- $$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la loi de probabilité de Y est

$$\left\{\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

V.3.3. Moments d'une variable aléatoire réelle

Espérance

Définition 17. (Espérance pour un univers fini) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une v.a.r. finie définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in [\![1, n]\!]\}$. On définit l'espérance de X par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}\left(X = x_i\right).$$

Exemple. On place trois boules numérotées de 1 à 3 dans une urne et on procède à deux tirages successifs avec remise. On note X la v.a.r. représentant la somme des résultats. La loi de X est présentée dans le tableau suivant :

x_i	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

L'espérance de X est alors donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i \mathbb{P}\left(X = x_i\right) = 4.$$

Proposition 9. (Propriétés de l'espérance) Soient X et Y deux v.a.r. définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. **Linéarité** - On a
$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$
2. **Positivité** - Si $X \geqslant 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le caractère linéaire de la somme pour démontrer ces propositions.

Définition 18. (Variable aléatoire réelle centrée) Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. La v.a.r. X est dite **centrée** si $\mathbb{E}(X) = 0$.
2. La v.a.r.
$$Y = X - \mathbb{E}(X)$$
est centrée.

Proposition 10. (Cas fini) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X une v.a.r. finie définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in [\![1, n]\!]\}$ et f une fonction réelle. On a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i)\,.$$

Exemple. On définit une v.a.r. X dont la loi est donnée par

x_i	-1	0	1
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

On pose $Y = |X|$. Commençons par décrire la loi de Y et donnons ensuite son espérance. On a clairement $Y(\Omega) = \{0, 1\}$. De plus :

- $$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4};$$
- $$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi, la loi de probabilité de Y est
$$\left\{\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{3}{4}\right)\right\}.$$
Quant à l'espérance, on a
$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$
Nous pouvons retrouver directement le résultat précédent grâce à la propriété de transport. En effet, on a
$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(|X|) = |-1| \times \frac{1}{4} + |0| \times \frac{1}{4} + |1| \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Variance

Définition 19. (Variance et écart-type) Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle variance de X le nombre positif noté $\mathbb{V}(X)$ et défini par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

On définit ensuite l'écart-type par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Proposition 11. Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. **Formule de Koenig-Huygens** - On a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

2. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X).$$

Remarque. La variance n'est pas linéaire ; en général, on a

$$\mathbb{V}(X + Y) \neq \mathbb{V}(X) + V(Y).$$

Démonstration. (cas fini) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

1.
$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathbb{E}\left(-2X\mathbb{E}(X)\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X)^2\right) && \text{par linéarité} \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(X\right) + \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}\left(1\right) && \text{par linéarité} \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}\left(X\right)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right)^2.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX + b) &= \mathbb{E}\left((aX + b)^2\right) - \mathbb{E}\left(aX + b\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(a^2X^2 + 2abX + b^2\right) - \left(a\mathbb{E}\left(X\right) + b\right)^2 \\
&= a^2\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2ab\mathbb{E}\left(X\right) + b^2 - \left(a^2\mathbb{E}\left(X\right)^2 + 2ab\mathbb{E}\left(X\right) + b^2\right) \\
&= a^2\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2ab\mathbb{E}\left(X\right) + b^2 - a^2\mathbb{E}\left(X\right)^2 - 2ab\mathbb{E}\left(X\right) - b^2 \\
&= a^2\left(\mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right)^2\right) \\
&= a^2\mathbb{V}(X).
\end{aligned}$$

Définition 20. (Variable aléatoire réelle centrée réduite) Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. La v.a.r. X est dite **centrée réduite** si $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma(X) = 1$.
2. Si $\sigma(X) \neq 0$, la v.a.r.
$$Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$
est centrée réduite.

V.3.4. Couples de variables aléatoires réelles

Lois marginales et loi conjointe

Exemple. On définit une v.a.r. X dont la loi est donnée par

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

avec $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

On pose $Y = X^2$; la loi de Y est donnée par

y_j	0	1	4
p_j	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

avec $p_j = \mathbb{P}(Y = y_j)$.

La loi du couple (X, Y) est donnée par

$y_j \diagdown x_i$	-2	-1	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
4	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$

avec $p_{ij} = \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.

Définition 21. (Lois marginales et loi conjointe) Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, X et Y deux v.a.r. définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X(\Omega) = \{x_i, i \in [\![1, m]\!]\}$ et $Y(\Omega) = \{y_i, i \in [\![1, n]\!]\}$.

1. On appelle loi conjointe du couple (X, Y) l'ensemble des couples définis pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$ par
$$((x_i, y_j), p_{ij} = \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])) .$$
2. On appelle lois marginales du couple (X, Y) l'ensemble des couples définis pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$ par
$$(x_i, \mathbb{P}(X = x_i)) \quad \text{et} \quad (y_j, \mathbb{P}(Y = y_j))$$
et tels que pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$,
$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}.$$

Exemple. On définit, à partir d'un jeu de 32 cartes, deux variables aléatoires X et Y telles que

1. $X = -5$ pour les $7, 8, 9$ et 10 ;
2. $X = 5$ pour les figures ;
3. $X = 10$ pour les as ;
4. $Y = -5$ pour les piques ;
5. $Y = 0$ pour les trèfles ;
6. $Y = 5$ pour les piques.

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par

(x_i, y_j)	$(-5,5)$	$(-5,0)$	$(-5,-5)$	$(5,5)$	$(5,0)$	$(5,-5)$	$(10,5)$	$(10,0)$	$(10,-5)$
p_{ij}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

Il ne reste plus qu'à déterminer les lois marginales. On a

x_i	-5	5	10
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

et

y_j	-5	0	5
p_j	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Indépendance

Définition 22. (Indépendance) Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, X et Y deux v.a.r. définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X(\Omega) = \{x_i, i \in [\![1, m]\!]\}$ et $Y(\Omega) = \{y_i, i \in [\![1, n]\!]\}$. On dit que X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right) = \mathbb{P}\left([X = x_i]\right) \mathbb{P}\left([Y = y_j]\right).$$

Remarque. Dans le contexte de l'indépendance, on a

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + V(Y).$$

Covariance

Définition 23. (Covariance) Soient X et Y deux v.a.r. définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle **covariance** le réel

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right].$$

Remarque. La covariance mesure les variations simultanées de X et Y ; on a également

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Si X et Y sont indépendantes, alors $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse !

Exemple. On reprend X et Y précédemment étudiées. On a

$$\mathbb{P}\left([X=-2]\cap[Y=4]\right)=\frac{1}{6}\quad\text{et}\quad \mathbb{P}\left(X=-2\right)\mathbb{P}\left(Y=4\right)=\frac{1}{18}.$$

Pourtant

$$\operatorname{cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=0-0\times\frac{11}{6}=0.$$

V.3.5. Fonction de répartition

Définition 24. (Fonction de répartition) Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. La fonction de répartition de X est définie par

$$F_X:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X\leqslant x).\end{array}\right.$$

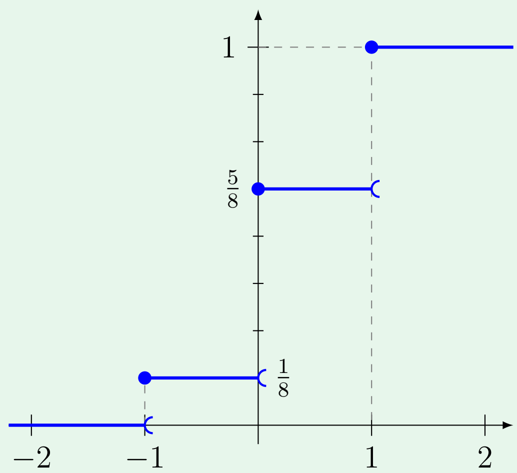
Proposition 12. (Cas fini) Soient $n\in\mathbb{N}^*$, X une v.a.r. finie définie sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ telle que $X(\Omega)=\{x_i, i\in[\![1,n]\!]\}$ avec pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$, $x_i<x_{i+1}$ et F_X la fonction de répartition de X.

1. Pour tout $x<x_1$, $F_X(x)=0$.
2. Pour tout $x\in[x_k,x_{k+1}[$, $F_X(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X=x_i)$.
3. Pour tout $x>x_n$, $F_X(x)=1$.

Exemple. Reprenons la v.a.r. X dont la loi est donnée par

x_i	-1	0	1
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

La fonction de répartition est donnée par le graphe suivant :



V.3.6. Lois finies usuelles

Loi	Notation	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}(X=k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$
Certaine		$\{a\}$	1	a	0
Uniforme	$\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$	$\llbracket 1,n\rrbracket$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
	$\mathcal{U}(\llbracket a,b\rrbracket)$ $n=b-a+1$	$\llbracket a,b\rrbracket$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Bernoulli	$\mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	p ou q	p	pq
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$\llbracket 0,n\rrbracket$	$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$	np	npq

avec $q=1-p$.