# Chapitre II.

# Déterminants

Dans tout ce chapitre, on s'intéressera à des matrices à coefficients réels ou complexes. On utilisera donc la lettre $\mathbb{K}$ pour désigner indifféremment l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

## II.1. Déterminant en dimension 2

### II.1.1. Déterminant d'une famille de deux vecteurs

**Définition 1.** Considérons les deux vecteurs du plan

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

On appelle **déterminant** de la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ (dans la base canonique) le nombre réel

$$u_x v_y - v_x u_y.$$

On le note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ ou encore $\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}$.

L'origine de cette définition se trouve dans la géométrie. En effet, on a le résultat ci-dessous.

**Proposition 1.** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Le déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v})$ est égal à l'aire algébrique du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

*Le signe du résultat est déterminé par le sens dans lequel on « tourne » de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ pour dessiner le parallélogramme.*

**Exemple.**

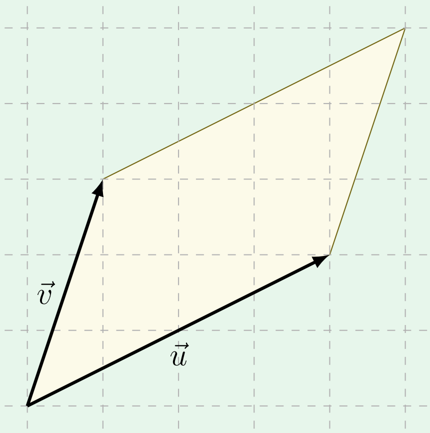
1. Considérons les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 2 \times 1 = 10.$$

Le parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a une aire de $10$ unités.



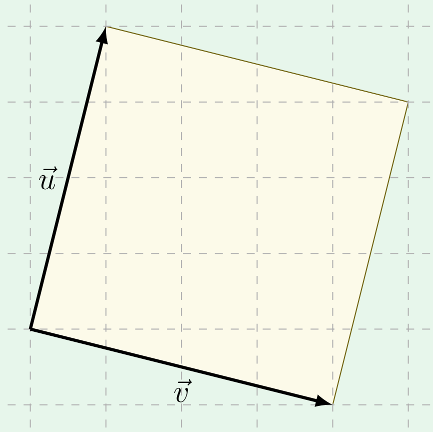
2. Considérons les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 4 \times 4 = -17.$$

Le parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a une aire de 17 unités.




Le déterminant d'une famille de vecteurs vérifie les propriétés suivantes.

**Proposition 2.** Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu$ des réels. On a les propriétés suivantes.

1. *(Antisymétrie)*
$$\det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v}),$$
2. *(Alternance)*
$$\det(\vec{u}, \vec{u}) = 0,$$
3. *(Linéarité par rapport à la première variable)*
$$\det(\lambda\vec{u} + \mu\vec{w}, \vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}) + \mu \det(\vec{w}, \vec{v}),$$
4. *(Linéarité par rapport à la seconde variable)*
$$\det(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}) + \mu \det(\vec{u}, \vec{w}).$$

**Démonstration.** Ces propriétés se démontrent directement par le calcul. Pour cela, posons

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}.$$

1. Par définition,
$$\det(\vec{v}, \vec{u}) = v_x u_y - u_x v_y = -(u_x v_y - v_x u_y) = -\det(\vec{u}, \vec{v}).$$
2. Par définition,
$$\det(\vec{u}, \vec{u}) = u_x u_y - u_x u_y = 0.$$
3. On a
$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{w} = \lambda \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_x + \mu w_x \\ \lambda u_y + \mu w_y \end{pmatrix}.$$

   Par suite, on a
$$\begin{array}{rcl} \det(\lambda\vec{u} + \mu\vec{w}) & = & (\lambda u_x + \mu w_x) v_y - v_x(\lambda u_y + \mu w_y) \\ & = & \lambda u_x v_y + \mu w_x v_y - \lambda v_x u_y - \mu v_x w_y \\ & = & \lambda(u_x v_y - v_x u_y) + \mu(w_x v_y - v_x w_y) \\ & = & \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}) + \mu \det(\vec{w}, \vec{v}). \end{array}$$

4. Pour cette dernière propriété, on peut réinvestir astucieusement les propriétés précédentes. En effet :

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) &= -\det(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}, \vec{u}) && \text{d'après 1,}\\
&= -(\lambda \det(\vec{v}, \vec{u}) + \mu \det(\vec{w}, \vec{u})) && \text{d'après 2,}\\
&= \lambda \times (-\det(\vec{v}, \vec{u})) + \mu \times (-\det(\vec{w}, \vec{u})) && \\
&= \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}) + \mu \det(\vec{u}, \vec{w}) && \text{d'après 1.}
\end{aligned}$$

### II.1.2. Déterminant d'une matrice

On peut maintenant donner du sens à la notion de déterminant pour une matrice, en considérant que c'est simplement le déterminant des vecteurs qui forment ses colonnes.

**Définition 2.** Étant donnée une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

de taille $2 \times 2$, on appelle **déterminant** de $A$ le nombre

$$ad - bc.$$

On le note $\det(A)$ ou encore $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

**Exemple.**

$$\det\left(\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 2 \times 5 = 2.$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 6 - (-3) \times (-2) = 0.$$

Le premier intérêt de la notion de déterminant pour une matrice est son lien avec l'inversibilité.

**Proposition 3.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice de taille $2 \times 2$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On a l'équivalence :

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0.$$

De plus, dans le cas où $A$ est inversible, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Démonstration.** Par le calcul, on trouve

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \det(A) I_2.$$

On distingue donc deux cas :

- Si $\det(A) \neq 0$, alors on peut diviser de part et d'autre par le scalaire $\det(A)$ et on trouve
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2.$$
Ainsi $A$ est inversible et son inverse est $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Si $\det(A) = 0$, alors on a
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Supposons par l'absurde que $A$ inversible. En multipliant les deux membres de l'égalité par $A^{-1}$ à gauche, on obtient (après simplifications)
$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ceci implique que les coefficients $a, b, c, d$ sont tous nuls. Ainsi la matrice $A$ est égale à la matrice nulle et inversible à la fois, ce qui est contradictoire puisque cela implique $0 = AA^{-1} = I_2$.

**Exemple.** Reprenons les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Comme $\det(A) = 2$, on peut affirmer que $A$ est inversible, et son inverse est la matrice
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
- Comme $\det(B) = 0$, on peut affirmer que $B$ n'est pas inversible.

### II.1.3. Propriétés

**Proposition 4.** Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ deux matrices et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Le déterminant pour les matrices $2 \times 2$ vérifie les propriétés suivantes.

1. $\det(I_2) = 1$,
2. $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$,
3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
4. $\det({}^t A) = \det(A)$,
5. Si $A$ est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

**Démonstration.** Les quatre premières propriétés se vérifient par un calcul direct. Pour cela, posons
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

1. On a
$$\det(I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1.$$
2. On a
$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$
Par suite, on en déduit que
$$\det(\lambda A) = (\lambda a) \times (\lambda d) - (\lambda b) \times (\lambda c) = \lambda^2 ad - \lambda^2 bc = \lambda^2(ad - bc) = \lambda^2 \det(A).$$
3. On a
$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$
Ainsi on trouve
$$\begin{aligned} \det(AB) &= (aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') \\ &= (aca'b' + ada'd' + bcb'c' + bdc'd') - (aca'b' + adb'c' + bca'd' + bdc'd') \\ &= ada'd' + bcb'c' - adb'c' - bca'd' \\ &= ad(a'd' - b'c') - bc(a'd' - b'c') \\ &= (ad - bc)(a'd' - b'c') \\ &= \det(A)\det(B). \end{aligned}$$
4. On a
$${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
d'où $\det({}^tA) = ad - cb = ad - bc = \det(A)$.
5. Supposons $A$ inversible. On a alors la relation $AA^{-1} = I_2$, d'où en particulier
$$\det(AA^{-1}) = \det(I_2).$$
En appliquant les propriétés 1 et 3, cela donne
$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1$$
d'où la relation $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

**Remarque.**

- La seconde propriété se retrouve aussi en se rappelant que le déterminant de $A$ est égal au déterminant de la famille de vecteurs formée par ses colonnes $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. En remarquant que les colonnes de la matrice $\lambda A$ sont les vecteurs $\lambda\vec{u}_1$ et $\lambda\vec{u}_2$, on trouve
$$\det(\lambda A) = \det(\lambda\vec{u}_1, \lambda\vec{u}_2) = \lambda\det(\vec{u}_1, \lambda\vec{u}_2) = \lambda^2\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \lambda^2\det(A).$$
- La propriété 4 indique que le déterminant de $A$ peut aussi être vu comme le déterminant de la famille de vecteurs formée par ses *lignes* $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. En effet, comme les lignes de $A$ sont les colonnes de sa transposée ${}^tA$, on a
$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \det({}^tA) = \det(A).$$

## II.2. Déterminant en dimension quelconque

### II.2.1. Définitions et propriétés de calcul

**Définition 3.** (Développement par rapport à la première ligne) Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

une matrice carrée de taille $n \times n$. On définit le **déterminant** de $A$ par récurrence en posant

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \times \det(M_j)$$

où $M_j \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la $j$-ième colonne de $A$. Comme dans le cas dans le dimension $2$, le déterminant $\det(A)$ se note également

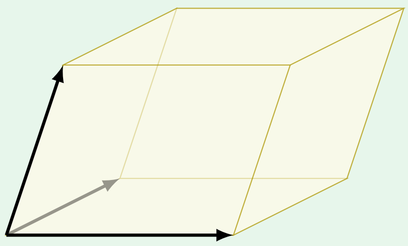
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

et c'est aussi le déterminant $\det(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

$$u_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad u_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

**Remarque.**

- Attention, la notion de déterminant n'a de sens que pour une matrice **carrée** (c'est-à-dire contenant autant de lignes que de colonnes).
- En dimension $n = 3$, le déterminant d'une famille de $3$ vecteurs correspond au volume (algébrique) du parallélépipède engendré par ces trois vecteurs.



**Exemple.**

1. Considérons la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$
Son déterminant est égal à :
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}.$$
On peut ensuite calculer chacun des déterminants $2 \times 2$ à partir de la définition donnée dans la section précédente. On trouve
$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5 \times 9 - 6 \times 8 = -3, \qquad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 4 \times 9 - 6 \times 7 = -6, \qquad \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -4$$
d'où
$$\det(A) = 1 \times (-3) - 2 \times (-6) + 3 \times (-4) = -3.$$

2. Considérons la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
On a
$$\det(B) = 1 \times \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$
Il reste donc à calculer les déterminants
$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \times (-12) + 2 \times (-12) = 0$$
et
$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times 12 + 2 \times (-12) = 0.$$
En réinjectant ces résultats dans l'équation ci-dessous, on obtient finalement simplement $\det(B) = 0$.

L'exemple ci-dessus montre que les calculs peuvent vite devenir laborieux. Toutefois, en pratique, on pourra souvent gagner du temps en utilisant astucieusement les propriétés suivantes du déterminant (qui généralisent le cas de la dimension 2).

**Proposition 5.** Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n, v$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu$ des réels. On a les propriétés suivantes.

1. *(Antisymétrie)* Pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$,
$$\det(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ = -\det(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n).$$
Autrement dit, échanger deux colonnes dans un déterminant revient à changer son signe.
2. *(Alternance)* Pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$,
$$u_i = u_j \implies \det(u_1, \ldots, u_n) = 0.$$
Autrement dit, un déterminant qui contient deux colonnes identiques est nul.
3. *(Linéarité par rapport à chacune des variables)* Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,
$$\det(u_1, \ldots, u_{i-1}, \lambda u_i + \mu w, u_{i+1}, \ldots, u_n) = \lambda \det(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) \\ + \mu \det(u_1, \ldots, u_{i-1}, w, u_{i+1}, \ldots, u_n).$$

**Exemple.** En reprenant la matrice $B$ de l'exemple précédent, on peut maintenant affirmer directement que
$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$
En effet, pour la première égalité on utilise la linéarité par rapport à la troisième colonne, et pour la seconde égalité on utilise le fait que la troisième colonne est égale à la première.

D'un point de vue matriciel, on retrouve également les propriétés établies dans la section précédente.

**Proposition 6.** Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ deux matrices et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Le déterminant pour les matrices $n \times n$ vérifie les propriétés suivantes.

1. $\det(I_n) = 1$,
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
4. $\det({}^tA) = \det(A)$,
5. Si $A$ est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

La propriété 4 ci-dessus implique notamment que, quitte à passer par la transposée, tous les résultats énoncés sur les colonnes d'un déterminant s'appliquent aussi à ses lignes (et vice-versa). Par exemple :

**Proposition 7.** (Développement par rapport à la première colonne) Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

une matrice carrée de taille $n \times n$. On a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \times \det(M_i)$$

où $M_i \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue en supprimant la $i$-ème ligne et la première colonne de $A$.

**Exemple.** Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on trouve

$$\det(A) = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Or, en utilisant la linéarité (sur les lignes) et en reconnaissant des lignes identiques, on trouve

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui permet finalement d'arriver en très peu de calculs à $\det(A) = 0$.

### II.2.2. Algorithme du pivot de Gauss

En termes d'opérations élémentaires, la proposition 5 s'interprète de la manière suivante.

**Corollaire 1.** Si on applique aux lignes (ou aux colonnes) de $A$ les opérations élémentaires qui interviennent dans l'algorithme du pivot de Gauss, cela revient à changer la valeur de son déterminant de la manière suivant :

- une permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ change le signe du déterminant,
- une dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplie le déterminant par $\lambda$,
- une transvection $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ ne change pas la valeur du déterminant.

On peut donc appliquer l'algorithme du pivot de Gauss au calcul de déterminants. En effet, une fois une matrice échelonnée, le calcul de son déterminant devient élémentaire.

**Proposition 8.** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure (ou triangle supérieure). Alors son déterminant est égal à :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

**Idée de la preuve.** Prenons l'exemple d'une matrice triangulaire inférieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne à chaque étape, on trouve :

$$\det(A) = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & 0 & & 0 \\ a_{3,2} & a_{3,3} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}\, a_{2,2} \begin{vmatrix} a_{3,3} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \cdots = a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \cdots a_{n,n}.$$

Bien sûr, pour une démonstration rigoureuse il faudrait raisonner par récurrence. Une fois le résultat établi pour les matrices triangulaires inférieures, on peut étendre le résultats aux matrices triangulaires supérieures en utilisant le fait que le déterminant est invariant par l'opération de transposition.

**Exemple.** Utilisons l'algorithme du pivot de Gauss pour calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \end{matrix} \\ &= 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ {\scriptstyle L_3 \to L_3 + 2L_2} \end{matrix} \end{aligned}$$

En appliquant la proposition précédente, on trouve finalement $\det(A) = 3 \times 1 \times 1 \times (-3) = -9$.

### II.2.3. Lien avec l'inversibilité et les systèmes

Le lien avec l'inversibilité énoncé en dimension 2 reste valide en dimension quelconque.

**Proposition 9.** Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a a l'équivalence :

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0.$$

**Remarque.** Dans le cas où $A$ est inversible, il existe également une formule donnant l'expression de $A^{-1}$ qui prend la forme suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{com}(A).$$

Toutefois nous ne détaillerons pas cette formule en première année, car chacun des $n^2$ coefficients de la *comatrice* $\mathrm{com}(A)$ qui intervient dans cette formule se fait en calculant un déterminant de taille $n-1$, ce qui limite énormément l'utilité de cette formule en dimension autre que $2$. En effet :

- si $A$ est de taille $3 \times 3$, le calcul de $\mathrm{com}(A)$ demande de calculer $9$ déterminants de taille $2$,
- si $A$ est de taille $4 \times 4$, le calcul de $\mathrm{com}(A)$ demande de calculer $16$ déterminants de taille $3$,
- si $A$ est de taille $5 \times 5$, le calcul de $\mathrm{com}(A)$ demande de calculer $25$ déterminants de taille $4$ ...

Pour inverser une matrice de taille $n \geqslant 3$, on s'en tiendra donc aux méthodes plus efficaces que l'on connaît déjà, comme par exemple l'algorithme du pivot de Gauss.

La proposition ci-dessus s'avère donc utile si l'on s'intéresse seulement à l'inversibilité d'une matrice, sans chercher à calculer son inverse.

**Exemple.** Déterminons toutes les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

En opérant sur les lignes, on trouve :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a & a \\ 0 & a^2-1 & a^2+a \\ 0 & a^2+a & a^2-1 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, il vient ensuite

$$\det(A) = (-1) \times \begin{vmatrix} (a-1)(a+1) & a(a+1) \\ a(a+1) & (a-1)(a+1) \end{vmatrix} = -(a+1)^2 \begin{vmatrix} a-1 & a \\ a & a-1 \end{vmatrix}$$

ce qui après développement du déterminant $2 \times 2$ donne

$$\det(A) = -(a+1)^2((a-1)^2 - a^2) = -(a+1)^2(-2a+1) = (a+1)^2(2a-1).$$

Ainsi, on a l'équivalence

$$A \text{ n'est pas inversible} \iff \det(A) = 0 \iff a = -1 \text{ ou } a = \frac{1}{2}.$$

Autrement dit $A$ est inversible pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$.

En reprenant le lien entre matrices et systèmes linéaires, on peut étendre ces résultats aux nombre de solutions d'un système donnée.

**Proposition 10.** Soit un système linéaire

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = c_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = c_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = c_n \end{cases}$$

de $n$ équations à $n$ inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice associée.

- Si $\det(A) \neq 0$, alors le système $(S)$ admet une unique solution $X = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Si $\det(A) = 0$, alors le système $(S)$ admet soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

**Remarque.**

- Dans le cas d'un système *homogène* (c'est-à-dire de second membre nul), on sait que le vecteur nul est solution. On peut donc préciser un peu le résultat : soit $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas le vecteur nul est l'unique solution du système, soit $\det(A) = 0$ et dans ce cas le système admet une infinité de solutions (dont le vecteur nul).
- Dans la cas d'une infinité de solutions, le déterminant ne suffit pas à savoir de combien de degrés de liberté dépend l'ensemble de solutions. Il faut pour cela une notion plus subtile, qui est la notion de *rang* d'une matrice que vous découvrirez dans quelques chapitres.