DIMENSION FINIE
FAMILLE LIBRE

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Combinaisons linéaires

Définition 1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** de cette famille, tout vecteur $x \in E$ pouvant s'écrire sous la forme :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

où $\forall i \in \{1, ..., n\},\ \alpha_i \in \mathbb{K}$.

2 Famille libre, liée

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ une famille finie de vecteurs de E.

Définition 2 *On dit que la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est **libre** ou **linéairement indépendante** si*

$$\forall(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0 \right).$$

*Dans le cas contraire, on dit que la famille est **liée** ou **linéairement dépendante**. C'est-à-dire $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée si $\exists(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n - \{(0, ..., 0)\}$ tel que*

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0_E.$$

Remarque 1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *La famille à un seul vecteur $\{x\}$ est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.*
2. *Dans le cas particulier de deux vecteurs v_1 et v_2, la famille $\{v_1, v_2\}$ est liée si et seulement si v_1 s'exprime en fonction de v_2.*
3. *Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires.*
4. *Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont coplanaires.*

Théorème 1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $F = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de $n \geq 2$ vecteurs de E est une famille liée si et seulement si au moins un des vecteurs de F est combinaison linéaire des autres vecteurs de F.*