

ESPACES VECTORIELS

SOMME ET SOMME DIRECTE, SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLÉMENTAIRES

1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1 Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , F et G deux sous-espaces vectoriels de E . L'ensemble de tous les éléments $x + y$, où x est un élément de F et y est un élément de G , est appelé **somme** des sous-espaces vectoriels F et G . Cette somme est notée $F + G$ et on a :

$$F + G = \{x + y, x \in F, y \in G\}.$$

Proposition 1 Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

- $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .
- $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G .

2 Somme directe et sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 2 On dit que la somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est **directe** si :

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

La somme **directe** de F et G dans E est alors notée $F \oplus G$. De plus, on dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans E si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire si et seulement si

- $F \cap G = \{0_E\}$.
- $F + G = E$.

Proposition 2 Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur de E peut se décomposer de manière **unique** en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

3 Sous-espace vectoriel engendré

Théorème 1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . L'ensemble des combinaisons linéaires de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E et c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant x_1, x_2, \dots, x_n . Ce sous-espace vectoriel est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par x_1, x_2, \dots, x_n et est noté $\text{Vect}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$. On a donc

$$x \in \text{Vect}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$