MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES
APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Rang d'une application linéaire et théorème du rang

Définition 1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. On appelle rang de f et on note rg(f), l'entier naturel défini par*

$$rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Proposition 1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E, alors*

$$rg(f) = \dim\left(\mathit{Vect}(\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\})\right).$$

Proposition 2 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. Alors*

$$rg(f) \leq \min\left(\dim(E), \dim(F)\right).$$

Théorème 1 *(**Théorème du rang**) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une application linéaire de E dans F. ALors*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + rg(f).$$

2 Applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension

Proposition 3 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f un isomorphisme de E dans F. Si E (resp. F) est de dimension finie, alors F (resp. E) est de dimension finie et on a $\dim(E) = \dim(F)$.*

Proposition 4 *(**Injectivité, sujectivité, bijectivité en dimension finie**) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension et f une application linéaire de E dans F. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application f est injective.*
2. *L'application f est surjective.*
3. *L'application f est bijective.*