MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES
MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices associées aux applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, de dimension n et p respective, et f une application linéaire de E dans F. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_p)$ une base de F. Les images par f des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ se décomposent sur la base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{array}{l}
f(e_1) = a_{1,1}f_1 + a_{2,1}f_2 + ... + a_{p,1}f_p, \\
f(e_2) = a_{1,2}f_1 + a_{2,2}f_2 + ... + a_{p,2}f_p, \\
... \\
... \\
... \\
f(e_n) = a_{1,n}f_1 + a_{2,n}f_2 + ... + a_{p,n}f_p.
\end{array}$$

Définition 1 *On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice notée $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$:*

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & ... & f(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_p \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ a_{p,1} & a_{p,2} & ... & a_{p,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 1 *Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on note $Mat_{\mathcal{B}}(f)$.*

2 Opérations sur les applications linéaires et les matrices

Proposition 1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Alors*

1. $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f + g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Proposition 2 *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Considérons $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G. Alors*

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(gof) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES
MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Corollaire 1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit f une application linéaire de E dans E. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Mat_{\mathcal{B}}(f^n) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^n.$$

Théorème 1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F. Une application linéaire $f : E \to F$ est bijective (c'est-à-dire est un isomorphisme) si et seulement si $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible. Dans ce cas là*

$$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\right)^{-1}.$$