Cours

Circuits linéaires en régime variable

Le régime permanent sinusoïdal

Eric Guignard

TABLE DES MATIERES

Notations générales

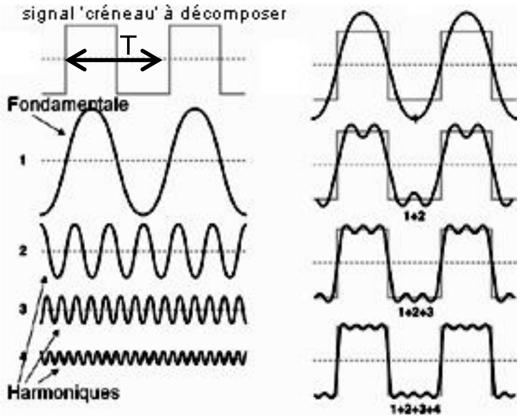
- g ou g(t) = grandeur variable au cours du temps
- <g> = Gmoy = valeur moyenne de la grandeur
- $\hat{G} = G_m$ = valeur de crête
- G_{eff} = G (sans indice) = valeur efficace
- $\underline{G}$ = nombre complexe pouvant être associé à une grandeur g(t) fonction sinusoïdale du temps
- $\underline{G}^*$ = nombre complexe conjugué
- Le symbole des imaginaires sera noté j afin d'éviter toute confusion avec l'intensité noté i

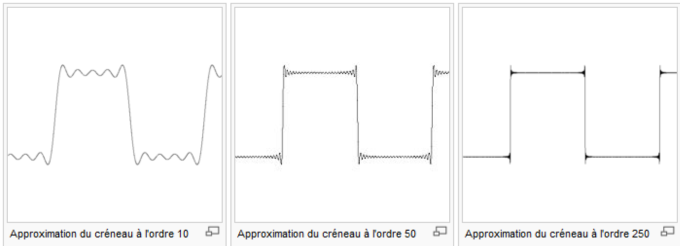
Introduction

Dans ce cours nous allons étudier la réponse d’un circuit linéaire à une excitation purement sinusoïdale.

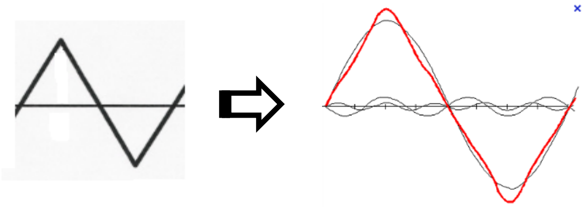
Le régime sinusoïdal est un cas particulier des régimes variables particulièrement intéressant car on démontre qu’un signal périodique quelconque f(t), de période T et satisfaisant à certaines conditions de continuité et de dérivabilité, peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales dite « série de Fourrier » :

<u>Exemple 1 :</u> décomposition d’une fonction créneau :





<u>Exemple 2 :</u> décomposition d’une fonction triangle (les trois premiers termes) :



On observe que la convergence pour une fonction créneau et beaucoup plus lente que pour une fonction triangle.

Ainsi l’étude de la réponse d’un circuit linéaire à un signal périodique f(t) sera décomposée par l’étude de la contribution des principaux termes de sa décomposition (Théorème de superposition). Cette décomposition s’écrit :

$$f(t) = a_0 +$$

a_0 représentant <u>la composante continue</u> du signal (en fait, sa valeur moyenne)

$$a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) +$$

Composante dite « <u>fondamentale</u> » car elle a la même période que le signal f(t)

$$a_2 \cos\left(\frac{2\pi 2t}{T}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi 2t}{T}\right) + \\ + \ldots. + \\ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

Composantes dite « <u>harmoniques</u> » de rang 2, 3, …n car elles ont une période dont la valeur est une fraction entière de celle de f(t) (T/2, T/3, ….T/n).

La détermination des coefficients de Fourrier an et bn, amplitudes respectives des fonctions cos et sin, sera vue ultérieurement en cours de mathématiques.

Dans ce cours nous allons nous intéresser uniquement au régime permanent, c'est-à-dire que nous considèrerons que le régime transitoire, vu dans le cours précédent, est terminé et a laissé place au régime permanent.

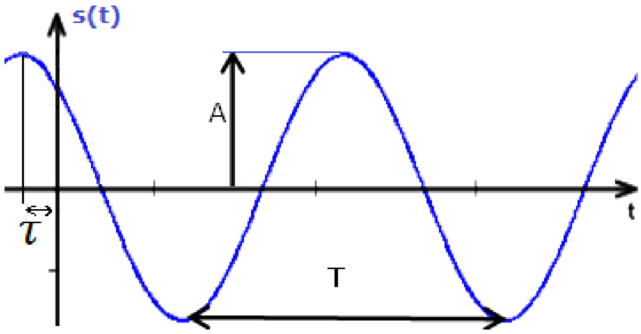
I Définitions et caractéristiques d'un signal sinusoïdal

La valeur instantanée d'un signal sinusoïdal s(t) (courant ou tension) s'exprime de la manière suivante :

Les deux paramètres de s : A et φ

$$s(t) = A.\cos(\phi(t)) = A.\cos(\omega.t+\varphi) = A.\cos(2\pi.f.t+\varphi) = A.\cos(\frac{2\pi}{T}.t+\varphi)$$

A = amplitude du signal ou valeur crête. Toujours positive. Dimension du signal (A, V, …).



ω : pulsation du signal (rad/s).

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.\pi.f$: vitesse angulaire

f : fréquence du signal (Hz).
Nombre de cycle par seconde

T = 1/f : période du signal (s)
La période d'un signal périodique est égale à la plus petite durée au bout de laquelle le signal se reproduit à lui-même. Ex : f= 50Hz =>T= 20ms.

φ : phase à l'origine (à t=0) (rad).

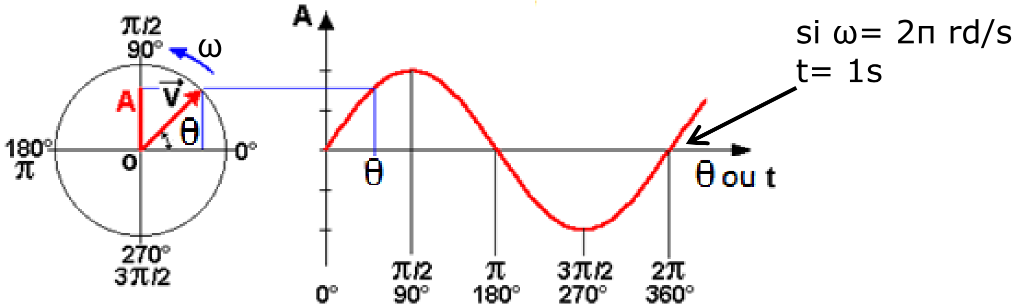
Le déphasage se déduit par une simple règle de 3 : $\varphi = \frac{2\pi\tau}{T}$

(ω.t+φ) représente la phase instantanée ϕ(t) du signal (rad).

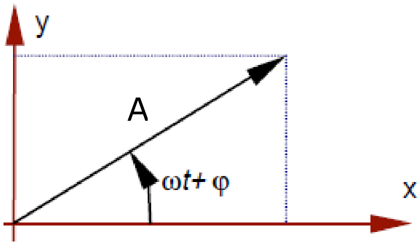
II Représentations des grandeurs sinusoïdales

II.1 Représentation de Fresnel

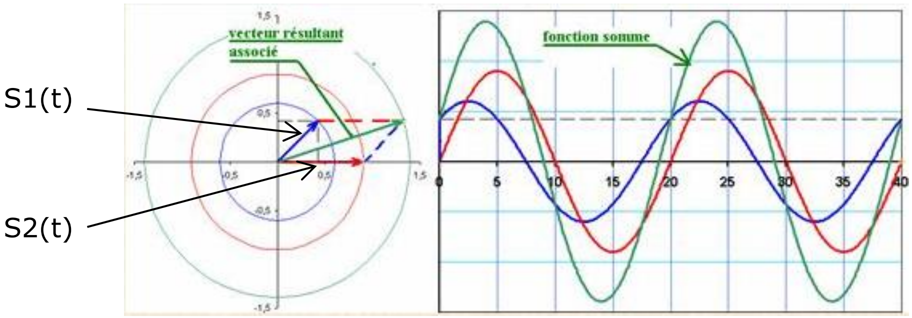
La figure ci-dessous représente un vecteur tournant à vitesse angulaire constante ω autour de son origine O dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. La projection de sa longueur sur l'axe vertical en fonction du temps (ou de l'angle θ, ce qui revient au même) nous permet de construire la fonction sinus :



De cette construction on observe que l'on peut représenter un signal sinusoïdal s(t) = A.cos(ω.t+φ) par un vecteur de module A qui tourne autour de 0 avec une vitesse ω. Cette représentation graphique est appelée représentation de Fresnel.



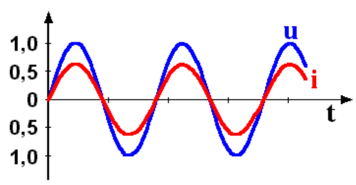
Elle bénéficie des propriétés attachée aux vecteurs. Par exemple, pour effectuer la somme de deux tensions de même pulsation ω, on fait la somme vectorielle de leurs vecteurs représentatifs :



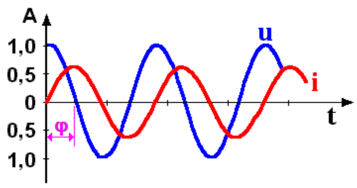
Toutefois en électronique les constructions graphiques vectorielles deviennent rapidement fastidieuses. Nous allons donc contourner ce problème en utilisant les nombres complexes.

<u>Note sur le déphasage entre deux signaux de même fréquence:</u>
Sur la figure précédente le signal s1(t) est dit en avance de phase par rapport à s2(t).

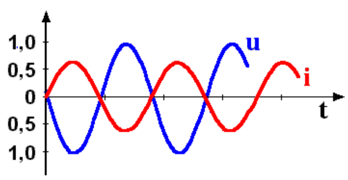
Déphasages particuliers :



Signaux dits en phase (φ=0)



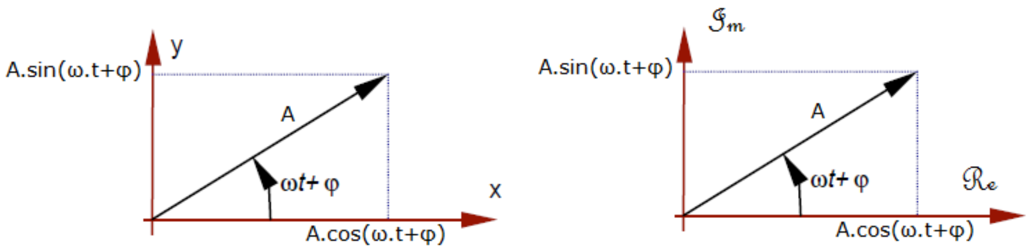
Signaux dits en quadrature ($\varphi=\frac{\pi}{2}$)



Signaux dits en opposition (φ=π)

II.2 Représentation complexe

Soit le signal s(t) = A.cos(ω.t+φ) et sa représentation vectorielle (Fresnel) :



Comme l'illustre la figure ci-dessus, l'analogie entre le plan de Fresnel et le plan complexe conduit naturellement à représenter les vecteurs tournants associés aux grandeurs électriques sinusoïdales par des grandeurs complexes.

On utilise le fait que **la grandeur physique s(t) est la partie réelle de la grandeur complexe associée** :

$$\underline{S} = A.e^{j(\omega.t+\varphi)} = A.[\cos(\omega.t+\varphi) + j.\sin(\omega.t+\varphi)] = [A;\omega.t+\varphi]$$

où : *(formule d'Euler)*

L'amplitude de s(t) = module de $\underline{S} = |\underline{S}| = A$ *(note : $|\underline{S}|^2=\underline{S}.\underline{S}^*$)*
La phase instantanée de s(t) = argument de $\underline{S} = \mathrm{Arg}(\underline{S}) = \omega.t+\varphi$

Pour étudier un circuit linéaire en régime permanent sinusoïdal on associera donc à chaque grandeur sinusoïdale du circuit une grandeur complexe.

Nous verrons que cette représentation nous permettra d'utiliser des équations algébriques au lieu des équations différentielles.

Remarque :

Toutes les grandeurs étudiées ayant la même composante temporelle $e^{j\omega.t}$ (le temps s'écoule de la même façon pour toutes les grandeurs), ce terme s'éliminera dans toutes les équations qui seront écrites en utilisation complexe. On se contentera donc souvent d'utiliser dans les calculs et les représentations les amplitudes complexes. C'est-à-dire :

$$\underline{S} = A.e^{j(\omega.t+\varphi)} = A.e^{j\varphi}\,e^{j.\omega.t} = \underline{A}\,e^{j.\omega.t} \quad \text{avec } \underline{A} = A.e^{j\varphi}$$

Le module de $\underline{A}$ représente toujours le module du signal s(t).
L'argument de $\underline{A}$ représente la phase φ à l'origine (t=0) de s(t).

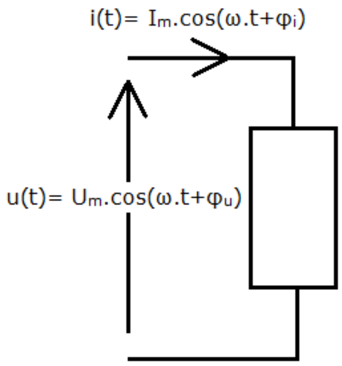
Le signal s(t) peut donc s'écrire :

$$\mathbf{s(t) = |\underline{A}|.\cos(\omega.t+Arg(\underline{A}))}$$

Note:
Le signal s(t) peut également s'écrire : $s(t)=\frac{1}{2}(\underline{S}+\underline{S}^*)$

III Dipôles linéaires en régime sinusoïdal

III.1 Impédance complexe



Elle caractérise l'opposition d'un circuit au passage d'un courant alternatif sinusoïdal (de l'anglais : impede – ralentir)

Soit un dipôle linéaire soumis à une tension $u(t)= U_m.\cos(\omega.t+\varphi_u)$ et traversé par un courant $i(t) = I_m.\cos(\omega.t+\varphi_i)$.

On définit l'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle comme étant le quotient de $\underline{U}$ par $\underline{I}$:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = Z.e^{j\theta} = R + jX \qquad \theta = \varphi_u - \varphi_i$$

avec :

$R = \mathfrak{R}\{\underline{Z}\}= Z.\cos\theta$: résistance du dipôle (Ω) , valeur toujours positive

$X= \mathfrak{I}\{\underline{Z}\}= Z.\sin\theta$: réactance du dipôle (Ω), peut-être positive ou négative

$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{U_m}{I_m}$: impédance du dipôle (Ω)

θ tel que $\tan(\theta) = \frac{X}{R} = \mathrm{Arg}(\underline{u}) - \mathrm{Arg}(\underline{i}) = \varphi_u - \varphi_i$

L'argument de $\underline{Z}$ représente donc le déphasage de la tension u(t) par rapport au courant i(t).

On définit également l'admittance complexe (utilisée en priorité pour les dipôles en parallèles) :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + j.B$$

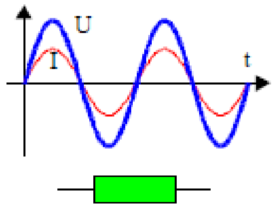
où G est la conductance et B est la susceptance. Toutes ces grandeurs sont exprimées en Siemens (S).

III.2 Dipôle Résistance

Loi d'Ohm :

$$u = Ri \Rightarrow \underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \quad \text{donc } \underline{Z} = R = Z$$

L'impédance d'une résistance pure est égale à sa résistance.
Le courant est en phase avec la tension :



III.3 Dipôle Condensateur

Equation caractéristique du condensateur :

$$i = C.\frac{du}{dt} \Rightarrow \underline{I} = C.\frac{d\underline{U}}{dt}$$

Avec u= U_m.cos(ω.t) on a:

$$\frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{d}{dt}U_m e^{j\omega t} = j\omega\underline{U}$$

D'où :

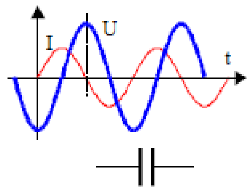
$$\underline{I} = jC\omega\underline{U} = C\omega\underline{U}e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Par identification, l'impédance complexe d'un condensateur est donc :

$$\boxed{\underline{Z}_c = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{jC\omega}} = \frac{-j}{C\omega} = \frac{1}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$\Re\{\underline{Z}_c\} = 0$ et $\Im\{\underline{Z}_c\} = \frac{-1}{C\omega}$

$|\underline{Z}_c| = \frac{1}{C\omega}$ (Ω) et $Arg(\underline{Z}_c) = -\frac{\pi}{2}$ rd



Dans un condensateur idéal le courant qui le traverse est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension à ses bornes.

<u>Remarques importantes :</u>
- pour les très hautes fréquences (f>> donc ω >>) le module $|\underline{Z}_c|$ tend vers 0 Ω (court-circuit). C n'a pas le temps de se charger.
- de par les calculs précédents on a pu observer que dériver dans le temps une grandeur sinusoïdale de pulsation ω revient à multiplier sa grandeur complexe associée par jω.
- on démontre de même qu'intégrer dans le temps une grandeur sinusoïdale de pulsation ω revient à diviser sa grandeur complexe associée par jω.

III.4 Dipôle inductance

Equation caractéristique de l'inductance :

$$u = L.\frac{di}{dt} \;=>\; \underline{U} = L.\frac{d\underline{I}}{dt}$$

Avec i= I_m.cos(ω.t) on a:

$$\frac{d\underline{I}}{dt} = \frac{d}{dt} I_m e^{j\omega t} = j\omega\underline{I}$$

D'où :

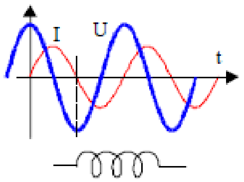
$$\underline{U} = \; jL\omega\underline{I} = L\omega\underline{I}e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Par identification, l'impédance complexe d'une inductance est donc :

$$\boxed{\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \mathbf{jL\omega} = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}}$$

$\Re\{\underline{Z}_L\} = 0$ et $\Im\{\underline{Z}_L\} = L\omega$

$|\underline{Z}_L| = L\omega\ (\Omega)$ et Arg($\underline{Z}_L$) = $\frac{\pi}{2}$ rd



Dans une inductance idéale la tension à ses bornes est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant qui la traverse.

Remarques importantes :
- pour les très basses fréquences (f donc ω -> 0) le module |$\underline{Z}_L$| tend vers 0 Ω (court-circuit).

III.5 Conclusion

L'étude d'un circuit linéaire en régime permanent sinusoïdal est facilitée par la représentation complexe. En effet, on se ramènera à résoudre des équations algébriques au lieu d'équations différentielles.

Par exemple, pour le circuit RLC série du chapitre précédent alimenté par une tension sinusoïdale, on aura :

$$\boxed{U_m \cos\omega t = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt \;<=>\; \underline{U} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + \frac{1}{jC\omega}\underline{I}}$$

Aspects pratiques :
Lorsque nous avons besoin de faire la somme ou la différence de deux grandeurs sinusoïdales $s_1(t)$ et $s_2(t)$, les coordonnées rectangulaires (forme algébrique) sont privilégiées:

$$(a+jb) + (c+jd) = a+c + j(b+d)$$

Lorsque nous avons besoin de faire le produit ou la division de deux grandeurs sinusoïdales $s_1(t)$ et $s_2(t)$, les coordonnées polaires (forme trigométrique) sont privilégiées :

$$[S_{m1}\angle\varphi_1]\cdot[S_{m2}\angle\varphi_2] = [(S_{m1}\cdot S_{m2})\angle(\varphi_1+\varphi_2)]$$

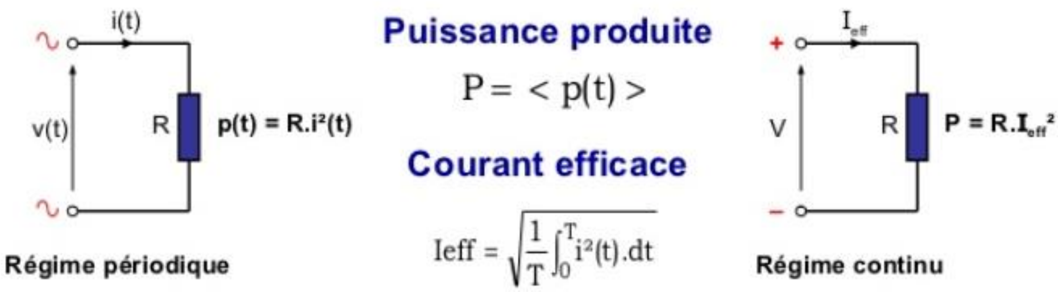
Note: usuellement on note qu'un seul déphasage, celui entre deux grandeurs (ex : tension/courant) et non le déphasage de chaque grandeur par rapport à $\omega t= 0$.

Résolution de circuit :
La procédure à suivre pour la résolution d'un circuit en régime permanent sinusoïdal est la suivante :
- on associe aux grandeurs temporelles du circuit des grandeurs complexes
- on détermine l'expression littérale complexe de la grandeur recherchée en utilisant les impédances complexes et les méthodes vues au chapitre I
- on en déduit l'expression littérale réelle de la grandeur recherchée à partir de l'amplitude et du déphasage de la grandeur complexe associée.

IV Aspect énergétique

IV.1 Valeurs efficaces

La valeur efficace d'un courant ou d'une tension périodique correspond à la valeur d'un courant continu ou d'une tension continue qui produirait un échauffement identique (par effet Joule) dans une résistance pendant une période T.



	Intensité efficace	Tension efficace
Notation	I ou I_{eff}	U ou U_{eff}
Puissance dissipée par effet joule sur une période :	$RI^2 = R.\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt$	$\frac{U^2}{R} = \frac{1}{R}.\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2 dt$
Expression de la valeur efficace :	$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt}$	$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2 dt}$
Valeur efficace dans le cas d'un signal sinusoïdal :	$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$	$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

La valeur efficace représente l'efficacité "en terme de puissance" de la grandeur.

La tension sinusoïdale délivrée par le secteur a pour valeur efficace 220V. Elle évolue donc entre +310V et -310V et elle a la même efficacité qu'une tension continue de 220V.

Note : la valeur efficace d'un signal périodique est mathématiquement la racine carrée de la moyenne du carré de ce signal sur une période T d'où la dénomination anglaise : R.M.S qui signifie Root Mean Square.

IV.2 Puissance instantanée et puissance moyenne

A chaque instant, la puissance instantanée reçue par un dipôle est :

$p = ui = U_m.\cos(\omega.t+\varphi).I_m.\cos(\omega.t)$ avec φ : déphasage entre u et i

$$= \frac{U_m.I_m}{2}.[\cos(\varphi) + \cos(2\omega.t + \varphi)]$$

$$= U.I.[\cos(\varphi) + \cos(2\omega.t + \varphi)]$$

La puissance instantanée se compose donc d'un terme variable de fréquence double de celle du fondamental et d'un autre constant.

Le terme constant n'est autre que la puissance moyenne :

$$P = \langle p \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T p.dt = U.I.\cos(\varphi)$$

$$\boxed{P = U.I.\cos\varphi}$$

Contrairement à la tension moyenne ainsi qu'au courant moyen, la puissance moyenne dissipée en régime sinusoïdal n'est pas nulle (sauf pour certaines valeurs de φ ...).

IV.3 Puissance active et puissance réactive

A chaque instant, la puissance instantanée reçue par un dipôle est donc:

$$p = ui = U.I.[\cos(\varphi) + \cos(2\omega.t + \varphi)]$$

$$= U.I.[\cos(\varphi) + \cos(2\omega.t + \varphi)]$$

$$= U.I.[\cos(\varphi) + \cos(2\omega.t)\cos(\varphi) - \sin(2\omega.t)\sin(\varphi)]$$

$$= UI.\cos\varphi[1 + \cos 2\omega t] - UI.\sin\varphi.\sin 2\omega t$$

Pour un dipôle d'impédance :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Z.e^{j\varphi} = Z\cos\varphi + j.Z\sin\varphi = R + jX \quad \text{avec } Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$$

on a :

$$p = RI^2.[1 + \cos 2\omega t] - XI^2.\sin 2\omega t$$

$$p = pa + pr$$

d'où on définit:

- la puissance active:

$$pa = RI^2[1 + \cos 2\omega t] = P.[1 + \cos 2\omega t]$$

avec $P = RI^2 = UI\cos\varphi$ = Puissance moyenne

Cette puissance moyenne est donc aussi appelée puissance active. Elle se mesure en watt.
C'est cette puissance qui exprime la consommation ou non de puissance dans un dipôle.
S= U.I est appelée puissance apparente. Elle se donne en V.A. plutôt qu'en watt.

On définit le facteur de puissance comme le rapport entre la puissance active consommée et la puissance apparente consommée. Dans le des régimes sinusoïdaux, ce **facteur de puissance** est **cosφ**. Avec φ le déphasage de la tension par rapport à l'intensité.
Si u et i sont en phase, alors P=UI.
Si u et i sont en quadrature, alors P=0.

- la puissance réactive:

$$pr = -XI^2 \sin 2\omega t = -Q.\sin 2\omega t$$

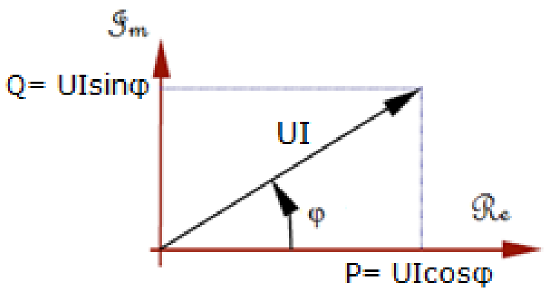
avec $Q = XI^2 = UI\sin\varphi$

Q est appelée puissance réactive et elle s'exprime en VAR (VoltAmpère Réactif).

Si u et i sont en phase, alors Q=0.
Si u et i sont en quadrature, alors Q=+/- UI.
En régime sinusoïdal, même si la puissance réactive moyenne est nulle, l'intensité du courant efficace I ne l'est pas, il y a donc des pertes en lignes induites. Les distributeurs pénalisent alors les consommateurs (industriels) d'électricité dont le facteur de puissance est inférieur à une certaine norme (en France : pour cosφ <0.93 soit tgφ>0.4.

IV.4 Puissance complexe

Sachant qu'une grandeur physique s(t) est la partie réelle de la grandeur complexe associée (chapitre II.2), on définit la puissance complexe à partir de la moyenne de la puissance instantanée, soit à partir de la puissance active :



D'où :

$$\underline{P} = P + jQ = UIe^{j\varphi}$$

Sachant que :

$$\underline{UI}^* = U\sqrt{2}e^{j(\omega t+\varphi)}.I\sqrt{2}e^{-j(\omega t)} = 2UIe^{j\varphi}$$

On a :

$$\boxed{\underline{P} = P + jQ = \frac{1}{2}\underline{UI}^*}$$

P= UIcosφ, puissance active en watts

$= ZI^2\cos\varphi = RI^2 = \mathcal{R}_e(\underline{Z}).I^2 = \mathcal{R}_e(\underline{Y}).U^2 \quad (Z= \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I})$

Q= UIsinφ , puissance réactive en VAR (VoltAmpères Réactifs)

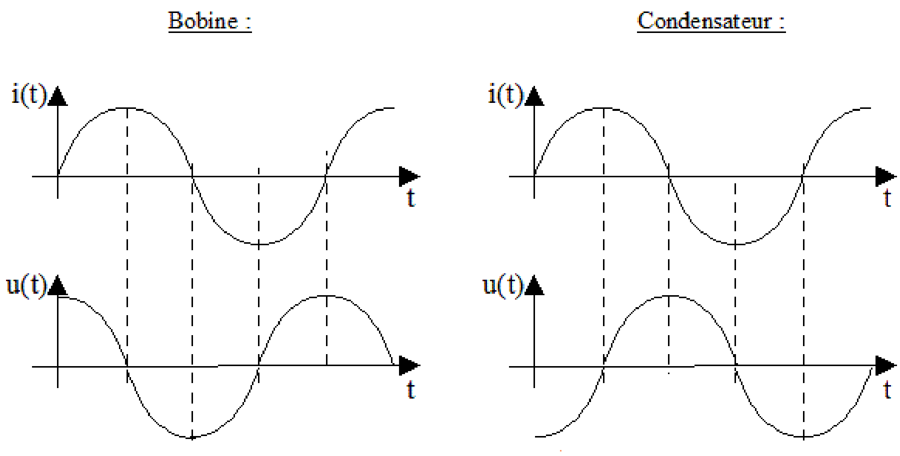
$= ZI^2\sin\varphi = XI^2 = \mathcal{I}_m(\underline{Z}).I^2 = \mathcal{I}_m(\underline{Y}).U^2 \quad (Y= \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U})$

S= UI, puissance apparente en VA (VoltAmpères)

IV.5 ***<u>Puissance consommée par les dipôles élémentaires</u>***

	$\underline{Z}$	φ (rd)	P (W)	Q (VAR)
Résistance	R	0	RI^2	0
Inductance	$jL\omega$	$\frac{\pi}{2}$	0	$L\omega I^2$
Condensateur	$\frac{1}{jC\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$C\omega U^2$

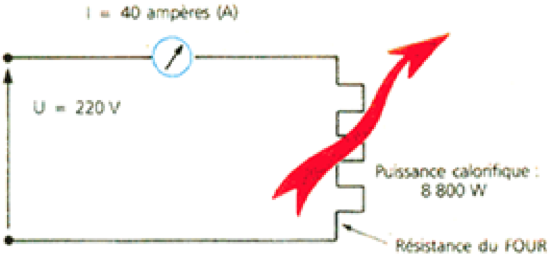
Remarque sur le comportement de l'inductance et du condensateur :

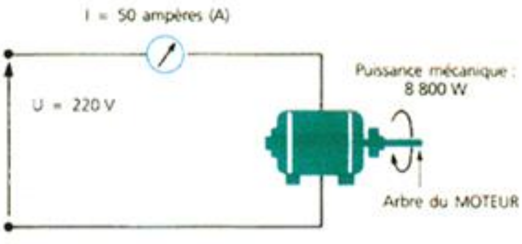


Pendant deux quarts de période, l'inductance et le condensateur se comportent comme des générateurs et fournissent de l'énergie au circuit. Pendant les deux autres quarts, ils se comportent comme des récepteurs et emmagasinent de l'énergie. Leur puissance moyenne sur une période est donc bien nulle.

IV.6 ***<u>Exemple</u>***

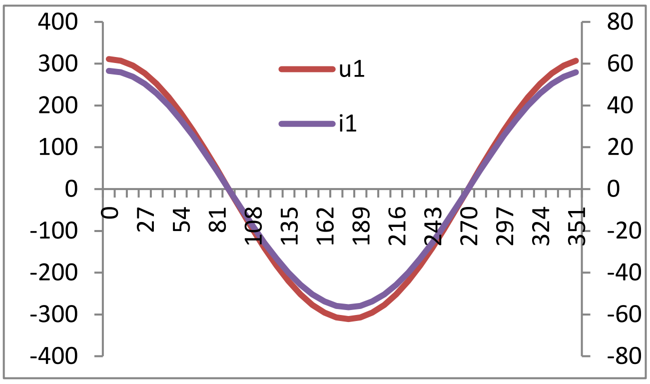
Soient les deux dipôles suivants pour une puissance active identique de P=8.8 KW :

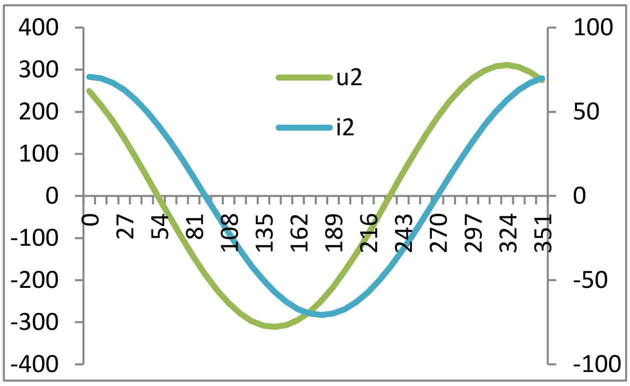




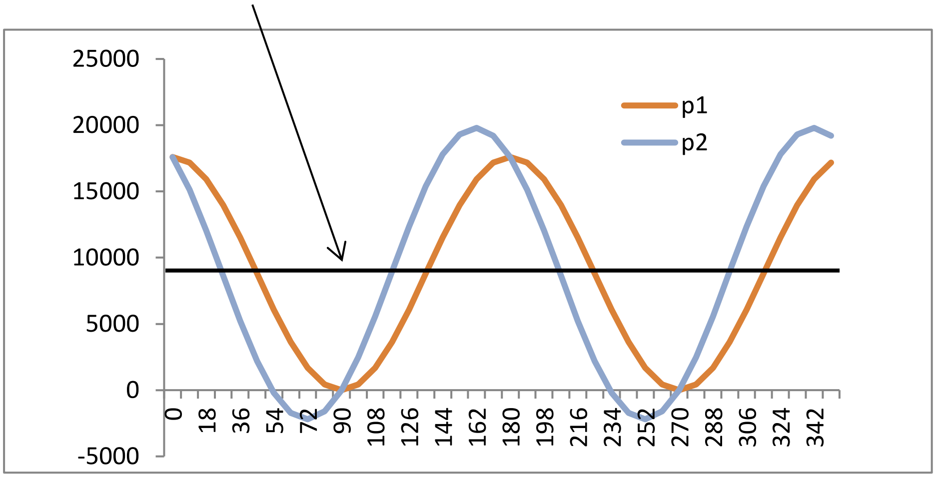
Four : $\cos\varphi = 1$
$P = UI\cos\varphi = 220*40 = 8.8$ KW
$Z = R = U/I = 5.5\Omega$

Moteur : $\cos\varphi = 0.8$
$P = UI\cos\varphi = 220*50*0.8 = 8.8$ KW
$Z = U/I(\cos\varphi + j\sin\varphi) = 3.52\Omega + j.2.64\ \Omega$





<p>= <p1>= <p2>= P= 8.8 kW



four: S= 8,8 kVA
Moteur: S= 11 kVA