MÉCANIQUE DU POINT
PH121

Cours et Exercices

2021-2022

Enseignants :

— Grégory Huber (gregory.huber@ipsa.fr)
— Roxana Perrier (ioana-roxana.perrier@ipsa.fr)
— Elisa Fabiani (elisa.fabiani@ipsa.fr)

Grégory Huber - Fabrice Lamareille - Mélanie Le Gac

Organisation du module

- Tout ce qui a été vu dans le module PH111 est considéré comme étant acquis.

- Comme pour PH111, le module est organisé en différentes séances :
  1. **Appropriations de cours** : exercice de cours (démonstration ou application directe du cours) + travail en groupe que l'enseignant vous distribuera au moment de la séance et qui sera noté.
  2. **Travaux Dirigés** : exercices plus concrets utilisant les notions du cours.

- Vous devez **préparer chaque chapitre avant les séances** qui lui sont consacrées. Pour cela il vous est demandé de :
  — étudier (lire, comprendre et apprendre) le cours donné dans le fascicule (voir planning)
  — regarder les Mimos (sur Moodle ou IonisX)
  — vous auto-évaluer à l'aide des tests (sur Moodle)

  Vous devez vous présenter aux séances de TD en ayant revu le cours et l'exercice de cours vu précédemment.

- Vous serez évalués par un **DS de 2 heures** (en milieu de semestre), un **partiel de 2 heures** portant sur l'ensemble du programme (à la fin du semestre), un **mini-projet**, des **TP,** des **activités de groupes** et **des interrogations surprises**.

- Si besoin vous pouvez nous contacter sur Teams ou par mail.

Planning des séances

Les séances d'appropriation du cours sont désignées par le titre du chapitre correspondant.

Semaine	1er créneau	2ème créneau
PARTIE I : Mécanique du point en référentiel non galiléen		
6	Loi de composition des vitesses	Loi de composition des accélérations
7	TD n°1	TD n°1
8		
9		
10	Dynamique du point	
11	TD n°2	TD n°2
PARTIE II : Dynamique du point en rotation		
12	Repère de Frenet	Théorème du moment cinétique
13	**DS**	TD n°3
14	Mouvements à force centrale	TD n°4
15	Lois de Kepler	TD n°5
16	Mini-Projet	Mini-Projet
17		
18		
PARTIE III : Travail et Énergie		
19	Travail et Énergie cinétique	TD n°6
20	Énergie potentielle et Énergie mécanique	TD n°7
21	TD n°7	

Table des matières

Première partie

Cours

Chapitre 1

Mécanique du point en référentiel non galiléen

I Loi de composition des vitesses

Mimos : « Composition des vitesses et des accélérations »

1 Définitions

Soient deux référentiels $R(O; \vec{I}; \vec{J}; \vec{K})$ et $R'(O'; \vec{i}; \vec{j}, \vec{k})$ en mouvement l'un par rapport à l'autre. Ce mouvement peut être décomposé comme suit :

— Le mouvement de **translation** du centre d'un **repère** par rapport à l'autre.

— Le mouvement de **rotation** d'une **base** par rapport à l'autre.

Soit un point M. Le **mouvement « absolu »** de ce point dans l'un des deux référentiels (par exemple R) est défini comme la composition :

— du **mouvement relatif** de ce point par rapport à l'autre référentiel (ici R') et

— du **mouvement d'entraînement** de ce second référentiel par rapport au premier (R' par rapport à R).

NB Selon le principe de relativité, il n'existe pas de référentiel absolu au sens propre du terme. Il est tout à fait possible d'inverser les rôles de R et de R' sans changer aucun des calculs qui vont suivre.

2 Calcul d'une vitesse absolue

On voudrait calculer la vitesse du point M dans R en fonction de sa vitesse, supposée connue, dans R'.

$$\vec{v}(M)_{/R} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{|R}$$

On utilise dans un premier temps la relation de Chasles :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}_{|R} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{|R} = \vec{v}(O')_{/R} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{|R}$$

On reconnaît la vitesse du point O' dans R, mais le second vecteur doit être développé. *Il ne s'agit **pas** de la vitesse du point M, car le référentiel de dérivation et le centre du repère ne correspondent pas.*

Soient $(x; y; z)$ les coordonnées cartésiennes du point M dans le référentiel R', alors :

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{|R} = \frac{d\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)}{dt}_{|R} = \dot{x}\vec{i} + x\frac{d\vec{i}}{dt}_{|R} + \dot{y}\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt}_{|R} + \dot{z}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}_{|R}$$

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{|R} = \left[\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right] + \left[x\frac{d\vec{i}}{dt}_{|R} + y\frac{d\vec{j}}{dt}_{|R} + z\frac{d\vec{k}}{dt}_{|R}\right] = \vec{v}(M)_{/R'} + \left[x\frac{d\vec{i}}{dt}_{|R} + y\frac{d\vec{j}}{dt}_{|R} + z\frac{d\vec{k}}{dt}_{|R}\right]$$

Au final :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left[\vec{v}(M)_{/R'}\right] + \left[\vec{v}(O')_{/R} + x\frac{d\vec{i}}{dt}_{|R} + y\frac{d\vec{j}}{dt}_{|R} + z\frac{d\vec{k}}{dt}_{|R}\right]$$

Le premier terme entre crochets est la **vitesse relative**. Le second terme est la **vitesse d'entraînement**. Le résultat de leur somme est la **vitesse absolue**.

$$\boxed{\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)}$$

3 Utilisation du vecteur rotation

On définit le **vecteur rotation** comme suit :

— Sa direction indique l'axe de rotation.

— Son sens est tel que la rotation a lieu dans le sens trigonométrique.

— Sa norme indique la vitesse angulaire de la rotation.

Soit $\vec{\Omega}_{R'/R}$ le vecteur représentant la rotation du référentiel R' par rapport à R. On peut démontrer que la dérivée par rapport à R d'un vecteur **unitaire fixe** de R' est égale au produit vectoriel du vecteur rotation par ce même vecteur :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}}{dt}_{|R} & = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{i} \\ \frac{d\vec{j}}{dt}_{|R} & = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{j} \\ \frac{d\vec{k}}{dt}_{|R} & = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{k} \end{cases}$$

On en déduit une expression simplifiée de la vitesse d'entraînement :

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O')_{/R} + x\frac{d\vec{i}}{dt}_{|R} + y\frac{d\vec{j}}{dt}_{|R} + z\frac{d\vec{k}}{dt}_{|R} = \vec{v}(O')_{/R} + x\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{i} + y\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{j} + z\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O')_{/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

Dans cette expression, le premier terme représente le mouvement de **translation** et le second terme le mouvement de **rotation** de R' par rapport à R.

Exercice de cours

On considère le référentiel R associé au repère cartésien $\left(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ et le référentiel R' associé au repère cartésien $\left(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Le référentiel R' est en mouvement par rapport au référentiel R (translation et/ou rotation). On considère aussi en point M en mouvement dans les deux référentiels.

1. Faire un schéma du problème
2. A l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur position du point M dans le référentiel R par rapport au vecteur position dans le référentiel R'.
3. En déduire une expression du vecteur vitesse $\vec{v}_R(M)$.
4. Dans l'expression trouvée précédemment, identifier la vitesse absolue, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement.
5. On veut simplifier l'expression de la vitesse d'entraînement en utilisant le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R'/R}$. On se place dans le cas particulier où seuls les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont en rotation par rapport au référentiel R ($\vec{k}$ est fixe.)
   (a) Exprimer les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ puis leurs dérivées temporelles par rapport au référentiel R.
   (b) Montrer qu'on retrouve les mêmes expressions en posant $\vec{\Omega}_{R'/R} = \dot{\theta}\vec{k}$, tel que $\frac{d\vec{i}}{dt}|_R = \vec{\Omega}_{R'} \wedge \vec{i}$ et $\frac{d\vec{j}}{dt}|_R = \vec{\Omega}_{R'}/R \wedge \vec{j}$
   (c) Exprimer la vitesse d'entraînement en fonction du vecteur rotation.
   (d) Rappeler ce que représente le vecteur rotation.

II Loi de composition des accélérations

Mimos : « Composition des vitesses et des accélérations »

1 Dérivée de la vitesse relative

On voudrait calculer l'accélération du point M dans R en fonction de son accélération, supposée connue, dans R'.

$$\vec{a}(M)_{/R} = \left.\frac{d\overrightarrow{v}(M)_{/R}}{dt}\right|_R$$

On fait appel à la loi de composition des vitesses :

$$\vec{a}(M)_{/R} = \left.\frac{d\vec{v}_a(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\left(\vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)\right)}{dt}\right|_R$$

On va dériver chacun des termes indépendamment. Tout d'abord, la vitesse relative :

$$\left.\frac{d\vec{v}_r(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{v}(M)_{/R'}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right)}{dt}\right|_R = \ddot{x}\vec{i} + \dot{x}\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_R + \ddot{y}\vec{j} + \dot{y}\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_R + \ddot{z}\vec{k} + \dot{z}\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R$$

On réutilise la définition du vecteur rotation :

$$\left.\frac{d\vec{v}_r(M)}{dt}\right|_R = \left[\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\right] + \left[\dot{x}\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{i} + \dot{y}\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{j} + \dot{z}\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{k}\right]$$

$$\left.\frac{d\vec{v}_r(M)}{dt}\right|_R = \vec{a}(M)_{/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}$$

2 Dérivée de la vitesse d'entraînement

On dérive maintenant la vitesse d'entraînement :

$$\left.\frac{d\vec{v}_e(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\left(\vec{v}(O')_{/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{dt}\right|_R$$

Or :

$$\left.\frac{d\vec{v}(O')_{/R}}{dt}\right|_R = \vec{a}(O')_{/R}$$

Par ailleurs :

$$\left.\frac{d\left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R$$

On réutilise la dérivée du vecteur $\overrightarrow{O'M}$ déjà calculée plus haut :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R = \vec{v}(M)_{/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

D'où :

$$\left.\frac{d\left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{v}(M)_{/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

Soit la dérivée de la vitesse d'entraînement :

$$\left.\frac{d\vec{v}_e(M)}{dt}\right|_R = \vec{a}(O')_{/R} + \left.\frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

3 Calcul d'une accélération absolue

On regroupe et réorganise les différents termes obtenus ci-dessus dans une seule expression :

$$\vec{a}(M)_{/R} = \vec{a}(M)_{/R'} + \vec{a}(O')_{/R} + \left.\frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt}\right|_{R} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}$$

L'accélération ainsi obtenue est l'**accélération absolue** $\vec{a}_a(M)$. On identifie par ailleurs trois termes dans la somme :

— L'**accélération relative**

$$\boxed{\vec{a}_r(M) = \vec{a}(M)_{/R'}}$$

— L'**accélération d'entraînement**, qui ne dépend que du mouvement de R' par rapport à R et *de la position* du point M dans R' :

$$\boxed{\vec{a}_e(M) = \vec{a}(O')_{/R} + \left.\frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt}\right|_{R} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}$$

— L'**accélération de Coriolis** qui dépend du mouvement de rotation de R' par rapport à R et de *la vitesse* du point M dans R' :

$$\boxed{\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}}$$

Exercice de cours

On considère le référentiel R associé au repère cartésien $\left(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ et le référentiel R' associé au repère cartésien $\left(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Le référentiel R' est en mouvement par rapport au référentiel R (translation et/ou rotation). On considère aussi un point M en mouvement dans les deux référentiels.

1. Rappeler la loi de composition des vitesses en détaillant l'expression de chacun des termes.
2. En déduire une expression (sans détailler pour l'instant le calcul des dérivées) de l'accélération du point M dans le référentiel R.
3. Calculer la dérivée temporelle de la vitesse relative dans R.
4. Calculer la dérivée temporelle de la vitesse d'entraînement dans R.
5. En déduire l'expression de l'accélération absolue et identifier l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis.

III Dynamique du point en référentiel non galiléen

Mimos : « Dynamique dans un référentiel non galiléen », « Champ de gravitation et champ de pesanteur »

1 Principe fondamental de la dynamique

Soient R un référentiel supposé galiléen et R' un autre référentiel **non galiléen**, car en mouvement non rectiligne, non uniforme ou en rotation par rapport à R. On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) à R :

$$m\vec{a}(M)_{/R} = \sum \vec{F}_{ext}$$

On peut également appliquer la loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}(M)_{/R} = \vec{a}(M)_{/R'} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_C(M)$$

On obtient ainsi l'expression du PFD dans R' :

$$m\left(\vec{a}(M)_{/R'} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_C(M)\right) = \sum \vec{F}_{ext}$$

soit :

$$m\vec{a}(M)_{/R'} = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e(M) - m\vec{a}_C(M)$$

2 Forces d'inertie

On pose :

— $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M) = -m\left[\vec{a}(O')_{/R} + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt}_{|R} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right]$ la **force d'inertie d'entraînement**.

— $\vec{F}_{iC} = -m\vec{a}_C(M) = -2m\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}$ la **force d'inertie de Coriolis**.

On obtient le principe fondamental de la dynamique en référentiel non galiléen :

$$\boxed{m\vec{a}(M)_{/R'} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}}$$

NB En vertu du principe d'équivalence de la relativité générale d'Einstein, les forces d'inertie ne sont pas seulement des artefacts de calcul, mais ont une existence **bien réelle**. En effet, selon ce principe, rien ne permet de distinguer une force d'une accélération. En relativité générale, la force gravitationnelle elle-même est due à une déformation de l'espace-temps, donc à une accélération au même titre que les forces d'inertie. *Les forces d'inertie sont bien entendu relatives au référentiel d'espace-temps galiléen choisi comme référence « absolue ».*

3 Champ de pesanteur

La **pesanteur** est la force naturellement exercée sur un point matériel **au repos** à la **surface** d'une planète.

Plaçons nous dans le **référentiel terrestre**. On suppose comme **galiléen le référentiel géocentrique**. La pesanteur prend donc en compte :

— La **force gravitationnelle** exercée par la planète :

$$\boxed{\vec{F}_{grav} = -G\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{e_r}}$$

avec $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} la constante gravitationnelle, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg la masse de la Terre (ou de la planète considérée), r la distance du point M au centre de la Terre et $\overrightarrow{e_r}$ le vecteur unitaire de la **base sphérique**.

— La **force d'inertie d'entraînement** due à la rotation de la planète :

$$\vec{F}_{ie} = -m\left[\vec{a}(O')_{/R} + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt}_{|R} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right]$$

cette expression se simplifie si on considère que le référentiel terrestre n'est pas en translation par rapport au référentiel géocentrique ($O' = O$) et que la vitesse angulaire est une constante :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = -mr\Omega^2\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \overrightarrow{e_r}\right)$$

où $\Omega = \frac{2\pi}{86164} = 7,29 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad.s^{-1}}$ est la vitesse angulaire de la Terre (ou de la planète considérée) qui tourne sur elle-même en 86164 secondes et $\vec{k}$ est le vecteur unitaire de la **base cartésienne**.

— Enfin, on remarque que la force d'inertie de Coriolis n'intervient pas dans la pesanteur, car le point matériel doit être supposé au repos.

$$\vec{F}_{iC} = -2m\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'} = \vec{0}$$

On obtient donc la force de pesanteur, autrement dit le **poids**, en ajoutant les deux termes :

$$\vec{P} = -G\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{e_r} - mr\Omega^2\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \overrightarrow{e_r}\right)$$

On remarque qu'on peut factoriser cette expression par la masse m et donc définir la pesanteur sous la forme d'une **accélération** $\vec{g}$ telle que $\vec{P} = m\vec{g}$. On a donc :

$$\vec{g} = -G\frac{M_T}{r^2}\overrightarrow{e_r} - r\Omega^2\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \overrightarrow{e_r}\right)$$

Pour pouvoir calculer le produit vectoriel, on projette le vecteur $\vec{k}$ dans la base sphérique en fonction de la **latitude** λ :

$$\vec{k} = \sin\lambda\overrightarrow{e_r} - \cos\lambda\overrightarrow{e_\theta}$$

d'où :

$$\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \overrightarrow{e_r}\right) = \vec{k} \wedge [(\sin\lambda\overrightarrow{e_r} - \cos\lambda\overrightarrow{e_\theta}) \wedge \overrightarrow{e_r}] = [\sin\lambda\overrightarrow{e_r} - \cos\lambda\overrightarrow{e_\theta}] \wedge [\cos\lambda\overrightarrow{e_\varphi}] = -\cos^2\lambda\overrightarrow{e_r} - \sin\lambda\cos\lambda\overrightarrow{e_\theta}$$

Finalement, en remplaçant :

$$\boxed{\vec{g} = \left(-G\frac{M_T}{r^2} + r\Omega^2\cos^2\lambda\right)\overrightarrow{e_r} + r\Omega^2\sin\lambda\cos\lambda\overrightarrow{e_\theta}}$$

Pour conclure la pesanteur dépend de la **distance r entre la surface et le centre de la Terre** et de la **latitude λ du lieu**. Elle possède une composante **colinéaire à la direction du centre la Terre** (selon $\overrightarrow{e_r}$) et une composante **colinéaire au méridien** (selon $\overrightarrow{e_\theta}$). Comme vu précédemment, c'est la somme de ces deux composantes qui définit la verticale du lieu dans le repère local (et non la seule direction du centre de la Terre).

NB Si on néglige l'aplatissement aux pôles et que l'on considère la Terre comme parfaitement sphérique, on prendra souvent l'approximation $r = R_T + h$ où $R_T = 6371\,\mathrm{km}$ est le rayon moyen de la Terre et h l'altitude du lieu.

Exercice de cours

Soient R un référentiel galiléen associé au repère cartésien $\left(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ et R' un référentiel, en mouvement dans le référentiel R, associé au repère $\left(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Pour simplifier l'exercice, on pourra se placer dans le cas $\vec{k} = \vec{K}$. On considère un point M de masse m.

1. A partir du principe fondamental de la dynamique sur le point M dans le référentiel galiléen R et de la loi de composition des accélérations, écrire le principe fondamental de la dynamique sur le point M dans le référentiel non-galiléen R'. Nommer et donner l'expression des forces d'inertie.
2. Calculer les forces d'inertie dans les situations suivantes :
   (a) Le référentiel R' est en translation rectiligne uniforme dans le référentiel R.
   (b) Le référentiel R' est en translation rectiligne non uniforme dans le référentiel R : $\vec{a}(O')_R = A\vec{I}$.
   (c) Le référentiel R' est en rotation (vitesse angulaire constante $\vec{\Omega}_{R'/R} = \omega\vec{K}$) dans le référentiel R. Le point M est immobile dans le référentiel R' et son vecteur position s'écrit $\overrightarrow{O'M} = \rho\vec{i}$. On pourra considérer que les points O et O' sont confondus.
   (d) Le référentiel R' est en translation circulaire uniforme dans le référentiel R. Le vecteur position du point O' est $\overrightarrow{OO'} = \rho\vec{u_\rho}$. Le point M est confondu avec O'.
   (e) Le référentiel R' est en rotation (vitesse angulaire constante $\vec{\Omega}_{R'/R} = \omega\vec{K}$) dans le référentiel R. Le point M a pour vecteur position $\overrightarrow{O'M} = \rho\vec{i}$ et son vecteur vitesse est constant (dans le référentiel R') : $\vec{v}(M)_{R'} = v_0\vec{i}$. On pourra considérer que les points O et O' sont confondus.

Chapitre 2

Dynamique du point en rotation

I Repère de Frenet

Mimos : « Base de Frenet »

1 Abscisse curviligne

L'**abscisse curviligne** est un moyen de repérer un point en fonction d'une seule coordonnée, notée s, représentant **la longueur parcourue par le point le long de sa trajectoire**.

Par définition de la vitesse, la longueur infinitésimale ds parcourue pendant une durée dt tendant vers zéro vaut :

$$ds = \|\vec{v}\|\, dt$$

On peut donc calculer la longueur totale de la trajectoire entre deux points A et B quelconques :

$$L_{AB} = s(B) - s(A) = \int_{s(A)}^{s(B)} ds = \int_{t_A}^{t_B} \|\vec{v}\|\, dt$$

Par ailleurs, il est possible d'exprimer ds en fonction des autres coordonnées (cartésiennes, cylindriques, etc.) :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

donc :

$$ds = \|\vec{v}\|\, dt = \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \times dt^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Ici dx, dy et dz représentent des variations infinitésimales des coordonnées x, y et z respectivement.

En coordonnées cylindriques on a :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \left(\rho\dot{\theta}\right)^2 + \dot{z}^2}$$

d'où :

$$ds = \|\vec{v}\|\, dt = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2}$$

2 Base de Frenet

La base de Frenet est matérialisée en deux dimensions par deux vecteurs unitaires $\vec{T}$ et $\vec{N}$ dépendant tous les deux du point étudié, tels que :

— $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire

— $\vec{N}$ est orthogonal à $\vec{T}$ et orienté vers **l'intérieur de la trajectoire** (autrement dit vers le centre du cercle tangent à la trajectoire, aussi appelé *centre de courbure*).

Contrairement aux bases vues précédemment, **la base de Frenet ne donne pas de formule pour retrouver directement le vecteur position d'un point**. Par contre, on retrouve facilement une relation entre $\vec{T}$ (unitaire) et $\vec{v}$ qui sont colinéaires (le vecteur vitesse étant par définition tangent à la trajectoire) :

$$\boxed{\vec{T} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}$$

On en déduit que le vecteur $\vec{T}$ est la dérivée du vecteur position par rapport à l'abscisse curviligne, en effet :

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \times \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$$

On admet également par ailleurs :

$$\vec{N} = \rho \frac{d\vec{T}}{ds}$$

où ρ est le **rayon de courbure** de la trajectoire, c'est-à-dire le rayon du cercle tangent à la trajectoire au point considéré. On peut démontrer que :

$$\rho = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}$$

3 Vitesse et accélération

Par définition de la base de Frenet, la vitesse s'exprime dans cette base :

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \vec{T} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$$

On en déduit l'expression de l'accélération en dérivant par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\vec{T} + \|\vec{v}\| \frac{d\vec{T}}{dt}$$

or

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \times \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{N}}{\rho} \times \|\vec{v}\|$$

d'où :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\vec{T} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{\rho}\vec{N}}$$

Les deux composantes de l'accélération dans la base de Frenet sont donc :

— L'**accélération tangentielle**

$$a_T = \vec{a} \cdot \vec{T} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$$

— et l'**accélération normale**

$$a_N = \vec{a} \cdot \vec{N} = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\rho}$$

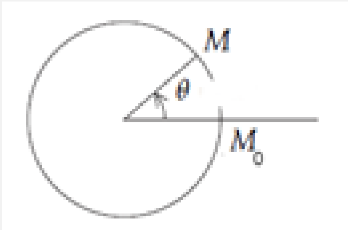
telles que :

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$

NB Le référentiel par rapport auquel sont définies la vitesse et l'accélération et dans lequel sont calculées les dérivées est sous-entendu. Il ne peut s'agir que du référentiel dans lequel est défini la trajectoire à partir de laquelle on obtient la base de Frenet. Dans tout autre référentiel, la trajectoire et donc la base de Frenet seraient différentes, ce qui rendrait caduque la définition ci-dessus de la vitesse et de l'accélération.

Exercice de cours

On considère le mouvement d'un point M se déplaçant le long d'un cercle de rayon R dans le sens trigonométrique. A l'instant initial, le point M se situe en M_0.



1. Exprimer le vecteur position du point M en utilisant la base cylindrique.
2. En déduire le vecteur vitesse du point M et la norme de la vitesse.
3. A partir de sa définition, exprimer la longueur infinitésimale parcourue ds en fonction de la variation d'angle infinitésimale $d\theta$
4. Calculer la longueur de la trajectoire parcourue par le point M en fonction de l'angle θ.
5. Quelle est la longueur parcourue quand le point M a fait un tour complet ?
6. Déterminer les vecteurs de la base de Frenet et représenter les sur le schéma
7. Calculer le vecteur accélération et montrer que $\vec{a} = \frac{d\,||\vec{v}||}{dt}\vec{T} + \frac{||\vec{v}||^2}{R}\vec{N}$
8. Définir les accélérations tangentielle et normale et expliquer leur influence sur le mouvement. Que valent-elles si la vitesse angulaire de M est constante ?

II Théorème du moment cinétique

Mimos : « Moment cinétique - moment d'une force »

1 Définition, démonstration

On définit le **moment cinétique** au point O d'un point matériel M de masse m dans un référentiel Galiléen :

$$\boxed{\vec{L}_{\mathrm{O}}(M) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\vec{v}(M)}$$

On définit le **moment d'une force** au point O :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}}$$

Le **théorème du moment cinétique** au point O énonce :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{\mathrm{O}}(M)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})}$$

NB Ce théorème n'est valable que si *le point O est fixe*. Il faut aussi bien entendu que la vitesse et la dérivée du moment cinétique soient calculées par rapport au même référentiel.

Pour démontrer ce théorème, on calcule la dérivée formelle du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_{\mathrm{O}}(M)}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\vec{v}(M)\right)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Or $\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \vec{v}$ et $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum \vec{F}$ d'après le PFD, donc :

$$\frac{d\vec{L}_{\mathrm{O}}(M)}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \sum \vec{F} = \vec{0} + \sum \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$$

<u>NB</u> : Cette démonstration reste valable que le point O soit ou non le centre du repère. En effet, si le centre du repère est noté C≠O, alors, *étant donné que le point O est fixe* :

$$\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{dt} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

2 Propriétés des moments

On peut faire ci-dessous l'analyse dimensionnelle :

$$\left[\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})\right] = \mathrm{L} \times \left[\vec{F}\right] = \mathrm{ML^2T^{-2}}$$
$$\left[\vec{L}_{\mathrm{O}}(M)\right] = \left[\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})\right] \times \mathrm{T} = \mathrm{ML^2T^{-1}}$$

Le moment d'une force est de la dimension d'une énergie, mais il s'agit d'une grandeur vectorielle et non scalaire. Pour éviter la confusion, on l'exprime par convention en N.m plutôt qu'en J. On pourra néanmoins exprimer le moment cinétique en J.s.

On peut par ailleurs facilement changer le point d'application du moment d'une force :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{P}}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{PM}} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{PO}} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{PO}} \wedge \vec{F} + \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$$

On obtient la **loi de transport** que l'on écrira de façon mnémotechnique (P-O, PO) :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{P}}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) + \overrightarrow{\mathrm{PO}} \wedge \vec{F}}$$

La même relation s'applique au moment cinétique :

$$\boxed{\vec{L}_{\mathrm{P}}(M) = \vec{L}_{\mathrm{O}}(M) + \overrightarrow{\mathrm{PO}} \wedge m\vec{v}}$$

En faisant le produit scalaire de la loi de transport ci-dessus par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, on démontre facilement :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{P}}(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$\vec{L}_{\mathrm{P}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{L}_{\mathrm{O}}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

Autrement dit : *la projection d'un moment sur une droite est indépendant du choix du point d'application sur cette droite.* Cette propriété est appelée l'**équiprojectivité.**

3 Moment d'inertie

Soit un point M de masse m en rotation autour d'un axe de vecteur directeur unitaire $\vec{k}$. Soit O un point *quelconque* de cet axe :

$$\vec{L}_{\mathrm{O}}(M) \cdot \vec{k} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\vec{v}\right) \cdot \vec{k}$$

En utilisant la base cylindrique $(\vec{u}_\rho; \vec{u}_\theta; \vec{k})$, et les coordonnées polaires $(\rho; \theta)$ on obtient :

$$\vec{L}_{\mathrm{O}}(M) \cdot \vec{k} = \left(\rho\vec{u}_\rho \wedge m(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)\right) \cdot \vec{k} = \left(m\rho^2\dot{\theta}\vec{k}\right) \cdot \vec{k} = m\rho^2\dot{\theta}$$

On définit la **vitesse angulaire** $\omega = \dot{\theta}$ et le **moment d'inertie** $I = m\rho^2$, alors :

$$\boxed{\vec{L}_{\mathrm{O}}(M) \cdot \vec{k} = I\omega}$$

Exercice de cours

On considère un point M en mouvement dans un référentiel galiléen lié au repère cartésien $R\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère que le point M est en mouvement dans le plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Faire un schéma du problème en rajoutant la base cylindrique.
2. A partir du principe fondamental de la dynamique, démontrer le théorème du moment cinétique. On ne considèrera qu'une seule force $\vec{F}$.
3. Exprimer le moment cinétique du point M calculé en O en utilisant la base cylindrique. Représenter le sur un schéma.
4. Que représente $\dot{\theta}\vec{k}$? Réécrire le théorème du moment cinétique en faisant apparaître le vecteur rotation et le moment d'inertie. Quelle analogie peut-on faire entre le théorème du moment cinétique et le principe fondamental de la dynamique ?
5. D'après le théorème du moment cinétique quelle est l'influence des trois forces suivantes sur le vecteur rotation ? (considérez le cas particulier ρ constant).
   (a) $\vec{F_1} = F\ \vec{u_\theta}$
   (b) $\vec{F_2} = -F\ \vec{u_\theta}$
   (c) $\vec{F_3} = \pm F\vec{u_\rho}$

III Mouvements à force centrale

Mimos : « Mouvements à force centrale »

1 Définition

Un mouvement à **force centrale** est le mouvement d'un point matériel M soumis à une force $\vec{F}$ dont la direction passe toujours par un même **point fixe** O, quelle que soit la position du point M. Le vecteur représentant la force est donc toujours **colinéaire** au vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \forall M}$$

NB Il n'est pas nécessaire que le point O soit le centre du repère pour que cette définition soit vraie. Cependant, les calculs sont plus simples si c'est le cas, car le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est alors confondu avec le vecteur position du point M.

En **coordonnées cylindriques**, si le centre de force O est aussi le centre du repère, alors on peut exprimer simplement la force $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \pm \left\| \vec{F} \right\| \overrightarrow{u_\rho}$$

2 Conservation du moment cinétique

Le **moment cinétique** d'un point M soumis à une force centrale est **constant**. En effet :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

On en déduit que la **direction et la norme du moment cinétique** d'un mouvement à force centrale sont **constantes**.
La direction du produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)$, est donc **constante**. Or par propriété du produit vectoriel, cette direction est normale au plan formé par les deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}(M)$. Ce plan est donc constant car il contient également le point O qui est fixe. Le vecteurs position et vitesse du point M sont toujours dans un même plan : on dit que le **mouvement est plan**.
En coordonnées cylindriques, le moment cinétique se calcule (en prenant $z = 0$, étant donné que le mouvement est plan) :

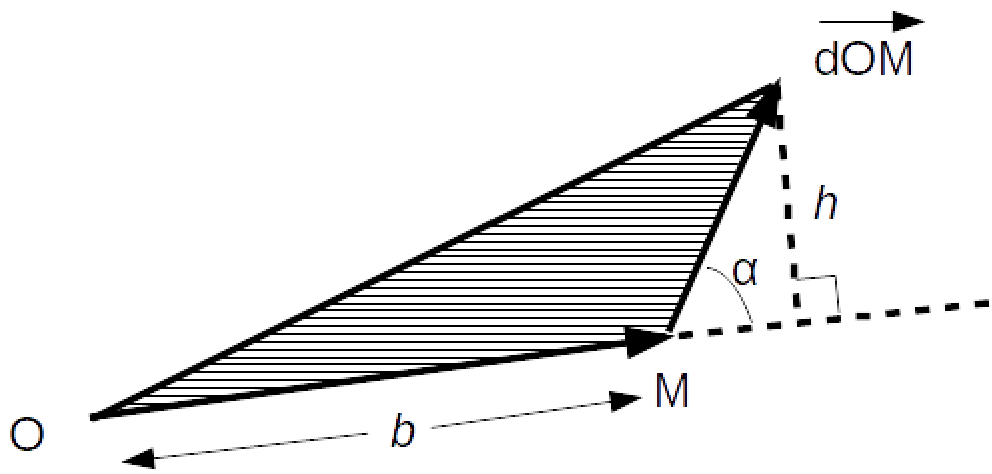
$$\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M) = \rho\overrightarrow{u_\rho} \wedge m\left(\dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) = m\rho^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

Donc dans le cas présent $m\rho^2\dot{\theta}$ est une constante. On notera donc $\boxed{C = \rho^2\dot{\theta}}$ la **constante des aires**.

3 Loi des aires

Soit un point M dont on étudie le mouvement par rapport au point O supposé fixe. Calculons **l'aire** $d\mathcal{A}$ **balayée par le vecteur** $\overrightarrow{OM}$ pendant un intervalle de temps dt **infiniment petit**. Par définition du vecteur vitesse, la **variation du vecteur position** pendant cet intervalle de temps s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{v}(M) \cdot dt$$



L'aire $d\mathcal{A}$ recherchée est l'aire du triangle hachuré sur la figure. Elle est donc égale à la moitié du produit de la base par la hauteur :

$$d\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$$

Or la base est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$, et la hauteur peut s'exprimer en fonction de l'angle α entre les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $d\overrightarrow{OM}$:

$$h = \left\| d\overrightarrow{OM} \right\| \sin\alpha$$

Donc :

$$d\mathcal{A} = \frac{\left\|\overrightarrow{OM}\right\| \times \left\| d\overrightarrow{OM} \right\| \sin\alpha}{2}$$

On reconnaît la définition de la norme d'un produit vectoriel :

$$d\mathcal{A} = \frac{\left\|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\right\|}{2} = \frac{\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) \cdot dt\right\|}{2} = \frac{\left\|\overrightarrow{L_O}(M)\right\| dt}{2m}$$

D'où la dérivée de l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$, que l'on appelle la **vitesse aréolaire** :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\left\|\overrightarrow{L_O}(M)\right\|}{2m}}$$

Lorsque le point M est soumis **à une force centrale**, son moment cinétique est constant, donc sa vitesse aréolaire l'est aussi. Autrement dit <u>le vecteur position balaie des aires égales en des intervalles de temps égaux.</u>

Sachant que le moment cinétique a alors pour norme $m\rho^2\dot{\theta} = mC$, on peut également exprimer la vitesse aréolaire en fonction de la **constante des aires** :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\rho^2\dot{\theta}}{2} = \frac{C}{2}}$$

Exercice de cours

1. Montrer que le moment d'une force centrale est nul (on se placera en coordonnées cylindriques)
2. Si un point M de masse m est uniquement soumis à une force centrale, que peut-on dire sur son moment cinétique ?
3. Qu'est ce que cela implique sur la trajectoire ?
4. Quelle relation peut-on écrire entre ρ et $\dot{\theta}$?
5. Démontrer que l'air balayée par le vecteur $\vec{OM}$ pendant une durée déterminée est toujours la même.
6. Comment appelle-t-on cette loi ?
7. Exprimer la vitesse aréolaire en fonction de la constante des aires. Que peut-on dire sur cette vitesse ?

IV Lois de Kepler

Mimos : « Mouvement des planètes, lois de Kepler »

NB : Les formules de Binet présentées dans ce cours constituent un **complément de cours**. Il n'est donc pas nécessaire d'apprendre par cœur la démonstration, cependant il vous sera bénéfique **d'étudier et de refaire** celle-ci pour mieux comprendre l'origine des lois de Kepler.

1 *Formules de Binet : Vitesse*

Soit le changement de variable :

$$u = \frac{1}{\rho}$$

On peut alors exprimer le vecteur position en fonction de u :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{u}\overrightarrow{u_\rho}$$

On calcule alors la vitesse en décomposant la dérivée en fonction de θ :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\left(\frac{d1/u}{d\theta}\overrightarrow{u_\rho} + \frac{1}{u}\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta}\right)$$

$$\vec{v}(M) = \dot{\theta}\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\overrightarrow{u_\rho} + \frac{1}{u}\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

On peut alors introduire la constante des aires :

$$C = \rho^2\dot{\theta} = \frac{\dot{\theta}}{u^2}$$

$$\boxed{\vec{v}(M) = C\left(-\frac{du}{d\theta}\overrightarrow{u_\rho} + u \cdot \overrightarrow{u_\theta}\right)}$$

2 *Formules de Binet : Accélération*

On calcule maintenant l'accélération selon la même méthode :

$$\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = C\dot{\theta}\frac{d\left(-\frac{du}{d\theta}\overrightarrow{u_\rho} + u \cdot \overrightarrow{u_\theta}\right)}{d\theta} = C\dot{\theta}\left[-\frac{d^2u}{d\theta^2}\overrightarrow{u_\rho} - \frac{du}{d\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta} + \frac{du}{d\theta}\overrightarrow{u_\theta} + u\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta}\right]$$

$$\vec{a}(M) = C\dot{\theta}\left[-\frac{d^2u}{d\theta^2}\overrightarrow{u_\rho} - \frac{du}{d\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{du}{d\theta}\overrightarrow{u_\theta} - u \cdot \overrightarrow{u_\rho}\right]$$

Or on peut écrire :

$$C\dot{\theta} = \frac{\dot{\theta}^2}{u^2} = C^2u^2$$

$$\boxed{\vec{a}(M) = -C^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\overrightarrow{u_\rho}}$$

3 *Formules de Binet : Application aux planètes*

Dans le cas du **mouvement des planètes**, la force centrale est la **force gravitationnelle** qui s'exprime :

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -G\frac{Mm}{\rho^2}\overrightarrow{u_\rho} = -GMm \cdot u^2 \cdot \overrightarrow{u_\rho}$$

où G est la constante de la gravitation, M la masse du Soleil et m la masse de la planète.

En appliquant le PFD et les formules de Binet, on obtient donc :

$$m\vec{a}(M) = \vec{F}_{\text{grav}} = -GMm \cdot u^2 \cdot \overrightarrow{u_\rho}$$

$$-mC^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\overrightarrow{u_\rho} = -GMm \cdot u^2 \cdot \overrightarrow{u_\rho}$$

Cette expression se simplifie par m, u^2 et $\overrightarrow{u_\rho}$:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}}$$

On reconnaît la même équation différentielle que celle d'un oscillateur, à la différence que la variable est θ et non le temps. On sait donc résoudre cette équation en deux étapes :

— La solution homogène de l'équation sans second membre est sinusoïdale et on la notera :

$$u_h(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0)$$

— La solution particulière est de même nature que le second membre, donc constante. On lui applique l'équation différentielle pour retrouver facilement :

$$u_p(\theta) = \frac{GM}{C^2}$$

car $\frac{d^2u_p}{d\theta^2} = 0$.

La solution générale de l'équation est donc :

$$u(\theta) = u_h(\theta) + u_p(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{C^2}$$

4 Première loi

À partir de la solution des formules de Binet, on retrouve facilement l'équation polaire à laquelle obéissent les planètes :

$$\rho(\theta) = \frac{1}{u(\theta)} = \frac{1}{\frac{GM}{C^2} + A\cos(\theta - \theta_0)}$$

$$\boxed{\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

On reconnaît ici **l'équation polaire d'une ellipse** dont le point O représente l'un des foyers, avec $p = C^2/GM$ le **paramètre de l'ellipse** et $e = Ap$ son **excentricité.** On peut également démontrer que θ_0 représente la position du **périhélie**, c'est-à-dire le point de l'ellipse le plus proche du Soleil :

$$\rho(\theta_0) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta_0 - \theta_0)} = \frac{p}{1 + e}$$

Pour simplifier l'équation, on prendra courramment $\theta_0 = 0$ en plaçant l'origine des angles le long du grand-axe de l'ellipse.

On a donc démontré la **première loi de Kepler** : « *Les planètes se déplacent autour du Soleil sur des trajectoires elliptiques dont le Soleil est l'un des foyers* ».

En coordonnées cartésiennes, l'équation d'une ellipse s'écrit sous la forme :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

où a est le **demi grand-axe**, b le **demi petit-axe** de l'ellipse tels que $p = b^2/a$, et $(x_0; y_0)$ les coordonnées du **centre** de l'ellipse (à ne pas confondre avec ses foyers).

On pourra aussi démontrer l'équation :

$$\boxed{p = a(1 - e^2)}$$

5 Deuxième loi

La deuxième loi de Kepler dit : « *Le vecteur joignant le Soleil à la planète balaye des aires égales en des temps égaux.* ».

Elle découle directement de la loi des aires vue précédemment.

Par ailleurs, l'aire balayée par ce vecteur durant une **révolution complète de période T** vaut :

$$\mathcal{A} = \int_0^T \frac{d\mathcal{A}}{dt} dt = \int_0^T \frac{C}{2} dt = \frac{C}{2} T$$

Par définition, l'aire d'une ellipse vaut :

$$\mathcal{A} = \pi a b$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{\pi a b = \frac{C}{2} T}$$

6 Troisième loi

On met au carré la reation ci-dessus :

$$\pi^2 a^2 b^2 = \frac{C^2}{4} T^2$$

Or d'après la première loi, on a aussi :

$$p = \frac{C^2}{GM} = \frac{b^2}{a}$$

ce qui permet d'isoler C^2 et de remplacer de la relation précédente :

$$C^2 = \frac{b^2}{a} GM$$

$$\pi^2 a^2 b^2 = \frac{b^2}{4a} GMT^2$$

$$4\pi^2 a^3 = GMT^2$$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

Il en découle la **troisième loi de Kepler** : « *Le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube du demi grand-axe de son ellipse.* »

NB La masse du Soleil vaut $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg et $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}, d'où

$$\frac{T^2}{a^3} = 2.95 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2.\text{m}^{-3}$$

Cependant il est plus commode d'exprimer les périodes en **années** et les demi grand-axe en **unités astronomiques** (1 UA = distance moyenne Soleil-Terre = 150 millions de km). Dans ce cas, en l'appliquant à l'orbite de la Terre, on retrouve que ce rapport vaut :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = 1 \text{ an}^2.\text{UA}^{-3}}$$

Il devient alors beaucoup plus simple d'appliquer la troisième loi de Kepler en utilisant ces unités pour toutes les autres planètes.

Exercice de cours

Le but de cette exercice est de démontrer la première loi de Kepler. Pour cela on cherche quelle est la trajectoire d'un point matériel M de masse m (une planète) soumis à la force d'attraction gravitationnelle exercée par un autre point matériel O fixe de masse M (le soleil). Le mouvement du point M sera étudié dans le référentiel galiléen associé au repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Il s'agit d'un mouvement à force centrale, on sait donc qu'il est plan.

1. Faire un schéma du problème en faisant apparaître la base polaire.
2. A partir du principe fondamental de la dynamique, écrire une équation différentielle sur le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
3. En déduire un système d'équations sur les coordonnées cartésiennes de M.
4. Même question avec les coordonnées polaires.
5. On ne sait pas résoudre ces systèmes d'équations. On utilise alors le changement de variable de Binet : $u = 1/\rho$. Exprimer le vecteur position avec la variable u.
6. En déduire le vecteur vitesse en fonction de u et de ses dérivées par rapport à θ. Faire apparaître la constante des aires.
7. En déduire le vecteur accélération.
8. Réécrire le PFD en utilisant les formules de Binet et en déduire une équation différentielle sur u.
9. Résoudre cette équation différentielle.
10. Montrer que l'équation de la trajectoire peut s'écrire sous la forme :

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

    en donnant les noms et les expressions de p et e.
11. Exprimer e en fonction des conditions initiales du problème.
12. Tracer l'allure de la trajectoire du point pour les valeurs de e suivantes : 0, 0.5, 1 et 2. On pourra calculer les coordonnées de 4 points particuliers. Pour simplifier on prendra $p = 1$ (dans les unités S.I) et $\theta_0 = 0$. Quelle est la forme géométrique de chacune de ces trajectoires ?

Chapitre 3

Travail et Énergie

I Énergie cinétique

Mimos : « Énergie cinétique, puissance, travail », « Théorème de l'énergie cinétique »

1 Définition

On définit l'**énergie cinétique** d'un point matériel de masse m et de vitesse v :

$$\boxed{Ec = \frac{1}{2}mv^2}$$

Le **théorème de l'énergie cinétique** dit : « La dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la **puissance** des forces appliquées ». Soit :

$$\boxed{\frac{dEc}{dt} = \mathcal{P}(\sum \vec{F}) = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Ce théorème se démontre facilement en faisant le produit scalaire du PFD avec le vecteur $\vec{v}$:

$$\sum \vec{F} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2}\frac{d\left(\vec{v}^2\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = \frac{dEc}{dt}$$

Par ailleurs :

— La valeur de l'énergie cinétique *dépend du référentiel dans lequel est définie la vitesse*.

— Si le référentiel est non-galiléen, il faut prendre en compte les **forces d'inerties**, donc *la dérivée de l'énergie cinétique dépend elle aussi du référentiel d'étude* :

$$\frac{dEc}{dt} = \mathcal{P}(\sum \vec{F}_{\text{ext}}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ie}}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ic}}) = \mathcal{P}(\sum \vec{F}_{\text{ext}}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ie}})$$

NB Par définition la puissance de la force d'intertie de Coriolis est nulle :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ic}}) = \vec{F}_{\text{ic}} \cdot \vec{v} = (-2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

En effet le produit vectoriel de deux vecteurs est forcément orthogonal à ces deux vecteurs. Donc ici $\vec{F}_{\text{ic}}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et donc leur produit scalaire est nul.

2 Formulation locale du théorème

La vitesse est la dérivée du vecteur position (que l'on notera ci-dessous $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$) :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}_{|R}$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$$dEc = \sum \vec{F} \cdot \vec{v} \times dt = \sum \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}_{|R} \times dt = \sum \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

On définit le **travail élémentaire d'une force** $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ d'où la **formulation locale** du théorème de l'énergie cinétique :

$$\boxed{dEc = \sum \delta W(\vec{F})}$$

Le vecteur $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ est le vecteur **déplacement élémentaire**. Il représente le mouvement intinitésimal du point M entre deux instants t et $t + dt$. *Il est donc tangent à la trajectoire.*

Dans le repère de Frenet, on peut l'écrire, avec l'abscisse curviligne ds :

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt = \|\vec{v}\|\,\vec{T}\,dt = \frac{ds}{dt}\vec{T}\,dt = ds\vec{T}$$

Dans le repère cartésien :

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt = \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) dt = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Dans le repère cylindrique ou polaire :

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt = \left(\frac{d\rho}{dt}\vec{u_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta} + \frac{dz}{dt}\vec{u_z}\right) dt = d\rho\vec{u_\rho} + \rho \cdot d\theta\vec{u_\theta} + dz\vec{u_z}$$

Dans le repère sphérique :

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt = \left(\frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi}\right) dt = dr\vec{e_r} + r \cdot d\theta\vec{e_\theta} + r\sin\theta \cdot d\varphi\vec{e_\varphi}$$

3 Travail moteur, résistant ou nul

Si la force est orthogonale à la trajectoire (force d'inertie de Coriolis, réaction normale du support, tension d'un fil, etc.), le **travail élémentaire est nul** :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Si la force est orientée dans le sens du mouvement, le **travail élémentaire est moteur** :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$$

Si la force est orientée dans le sens opposé au mouvement, le **travail élémentaire est résistant** :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$$

Exercice de cours

On considère un point M de masse m constante soumis à une force F dans le référentiel supposé galiléen associé au repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1. Écrire le principe fondamental de la dynamique en faisant apparaître la vitesse.
2. On s'intéresse uniquement aux variations de la norme de la vitesse et pas aux variations de sa direction. Rappeler l'expression de l'accélération dans la base de Frenet. Quelle composante de l'accélération fait varier la norme de la vitesse ?
3. A l'aide d'un produit scalaire, projeter le PFD suivant le vecteur $\vec{T}$. Simplifier cette expression de manière à faire apparaître l'énergie cinétique.
4. En nommant les termes obtenus, en déduire le théorème de l'énergie cinétique.
5. En déduire la formulation locale du théorème de l'énergie cinétique. Nommer le nouveau terme obtenu.
6. Interpréter l'expression obtenue en fonction du signe de $\vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$.
7. Application : On lâche un objet M de masse m sans vitesse initiale à la hauteur H du sol. L'origine du repère sera prise au sol.
   (a) Calculer la vitesse au moment de l'impact avec le sol On négligera les frottements.
   (b) Aurait-on pu trouver ce résultat avec une autre méthode ?
   (c) Quelle est la nature du travail du poids ?
   (d) Quelle aurait été la nature des frottements si on les avait pris en compte ?

II Énergie potentielle et énergie mécanique

Mimos : « Énergie potentielle, exemples »

Mimos : « Énergie mécanique »

1 Énergie Potentielle

Définition

On cherche à calculer la variation d'énergie cinétique entre deux points A et B. Pour cela on intègre la formulation locale du théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta_{AB}Ec = Ec(B) - Ec(A) = [Ec]_A^B = \int_A^B dEc = \int_A^B \sum \delta W(\vec{F})$$

On définit le **travail d'une force** entre les points A et B comme l'intégrale de ses travaux élémentaires :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

D'où la **formulation intégrale** du théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta_{AB}Ec = \sum W_{AB}(\vec{F})$$

Le travail dépend du déplacement élémentaire $d\vec{r}$, donc a priori de la trajectoire suivie par le point M.

On aimerait cependant définir le travail comme l'intégrale d'une fonction *qui ne dépendrait pas du chemin parcouru* pour aller du point A au point B. On appelle cette fonction, **si elle existe**, l'**énergie potentielle** Ep dérivant de la force $\vec{F}$ telle que :

$$\boxed{dEp = -\delta W(\vec{F}) = -\vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

On obtient alors, pour un point matériel soumis à cette seule force :

$$\Delta_{AB}Ec = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = -\int_A^B dEp = -[Ep]_A^B = Ep(A) - Ep(B)$$

que l'on peut résumer par :

$$\boxed{\Delta_{AB}Ec = -\Delta_{AB}Ep}$$

ou encore :

$$\boxed{\Delta_{AB}Ep = -\sum W_{AB}(\vec{F})}$$

Cette formulation du théorème de l'énergie cinétique est la plus simple et la plus couramment utilisée. Cependant elle n'est vraie que si le travail ne dépend pas du chemin parcouru et si la fonction énergie potentielle existe. *Or cette condition n'est pas toujous vérifiée* (voir ci-dessous).

NB Le signe $-$ dans la définition de l'énergie potentionelle a été choisi sémentiquement afin que l'énergie potentielle diminue lorsque la force travaille positivement : « Le potentiel d'action diminue après un travail ».

Forces conservatives

Les forces dérivant d'une énergie potentielle, *c'est-à-dire pour lesquelles il est possible de définir la fonction énergie potentielle*, sont dites **forces conservatives**, car elles conservent l'énergie mécanique (voir plus loin).

On peut démontrer mathématiquement que les forces conservatives sont celles qui vérifient, en base cartésienne $\vec{F}(F_x; F_y; F_z)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \end{cases}$$

soit $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$ avec

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}(= \vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \vec{F}$$

Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin parcouru pour aller du point A au point B, et donc *le travail le long d'une boucle fermée est forcément nul :*

$$W_{AA}(\vec{F}_{\text{cons}}) = W_{AB}(\vec{F}_{\text{cons}}) + W_{BA}(\vec{F}_{\text{cons}}) = W_{AB}(\vec{F}_{\text{cons}}) - W_{AB}(\vec{F}_{\text{cons}}) = 0$$

En reprenant la définition $dEp = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$, soit $\vec{F} = -\frac{dEp}{d\vec{r}}$ on peut en déduire qu'une force conservative est la dérivée vectorielle de l'énergie potentielle par rapport au déplacement élémentaire, ce qui s'écrit convenablement de la façon suivante :

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}Ep}$$

avec, selon la base utilisée :

$$\overrightarrow{grad}Ep(= \vec{\nabla}Ep) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Ep}{\partial x} \\ \frac{\partial Ep}{\partial y} \\ \frac{\partial Ep}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Ep}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial Ep}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Ep}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Ep}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial Ep}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial Ep}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

NB Dans le cadre de ce cours, on étudiera uniquement des forces s'exprimant sur une seule des trois dimensions de sa base. Dans ce cas l'énergie potentielle ne dépend que de cette dimension et non pas des deux autres. Il n'y a donc qu'une seule intégrale simple à effectuer. Par exemple si la force n'exprime que sur l'axe x, alors on peut en conclure que l'énergie potentielle ne dépend ni de y ($\frac{\partial Ep}{\partial y} = 0$) ni de z ($\frac{\partial Ep}{\partial z} = 0$) et il ne reste qu'à intégrer l'expression de $\frac{dEp}{dx}$.

Équilibre

Lorsqu'un point est un équilibre, son accélération est nulle, donc d'après le PFD :

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{ie}} + \vec{F}_{\text{ic}} = \vec{0}$$

Dans le cas où les forces en présences *sont toutes conservatives*, alors on peut écrire :

$$\overrightarrow{grad}Ep = -\sum \vec{F} = \vec{0}$$

où Ep représente l'énergie potentielle globale de la résultante des forces au point M.
Le point M_0 est donc un point d'équilibre si :

$$\frac{\partial Ep}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial Ep}{\partial y}(M_0) = \frac{\partial Ep}{\partial z}(M_0) = 0$$

Si le mouvement est à une seule dimension (par exemple sur l'axe Ox), la condition d'équilibre s'écrit :

$$\boxed{\frac{dEp}{dx}(x_0) = 0}$$

Dans ce cas, on peut aussi démontrer que l'**équilibre est stable** si :

$$\boxed{\frac{d^2Ep}{dx^2}(x_0) > 0}$$

Les forces en présences tendent à ramener le point matériel vers son point d'équilibre stable lorsqu'il s'en écarte. À contrario, si le point d'équilibre est instable les forces en présence tendent à l'en écarter davantage.

NB La condition d'équilibre et la condition de stabilité ci-dessus peuvent s'écrire par rapport à n'importe quelle variable dès lors que le problème est mono-dimensionnel (x, y, z, r, θ, etc.)

2 Énergie mécanique

Loi de conservation

On peut réécrire le théorème de l'énergie cinétique en y distinguant les forces conservatives (dérivant d'une énergie potentielle) et les forces non conservatives, sous la forme :

$$\Delta_{AB}Ec = \sum W_{AB}(\vec{F}_{\text{cons}}) + \sum W_{AB}(\vec{F}_{\text{non cons}}) = -\sum \Delta_{AB}Ep + \sum W_{AB}(\vec{F}_{\text{non cons}})$$

En passant le terme en énergie potentielle de l'autre côté de l'équation, on obtient le **théorème de l'énergie mécanique** :

$$\boxed{\Delta_{AB}(Ec + Ep) = \sum W_{AB}(\vec{F}_{\text{non cons}})}$$

On définit l'**énergie mécanique** $E = Ec + Ep$. Sa variation est donc égale **aux travaux des forces non conservatives**. *Autrement dit, si toutes les forces sont conservatives, alors l'énergie mécanique se conserve.*

NB Dans cette équation, il n'est nécessaire de ne prendre en compte que les forces qui travaillent. Les forces orthogonales au déplacement élémentaire, dont le travail est par définition nul (Coriolis, réaction normale, tension d'un fil, etc.) peuvent donc être purement et simplement **ignorées** dans la résolution du problème.

L'équation $E = Ec + Ep = cte$ est dite **intégrale première du mouvement**, car elle ne dépend que des coordonnées et de leurs dérivées premières.

Exemples

On considère un point de masse m soumis à la seule force de pesanteur, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit (en prenant l'axe Oz vertical ascendant) :

$$E = Ec + Ep = \frac{1}{2}mv^2 + mgz + Ep(0) = cte$$

Si le point est lancé de l'altitude z_0 avec une vitesse initiale avec un vitesse initiale v_0, alors (en simplifiant par $Ep(0)$) :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0$$

Cette équation permet de calculer la vitesse en fonction de l'altitude ou réciproquement.

On considère maintenant un point soumis à une force de rappel de constante de raideur k le long de l'axe Ox horizontal :

$$E = Ec + Ep = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + Ep(0) = cte$$

Si on dérive cette équation par rapport au temps on obtient :

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

soit en simplifiant par $\dot{x}$:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Cette équation différentielle permet en la résolvant d'en déduire le mouvement du point matériel en fonction du temps.

Exercice de cours

1. **Énergie Potentielle**

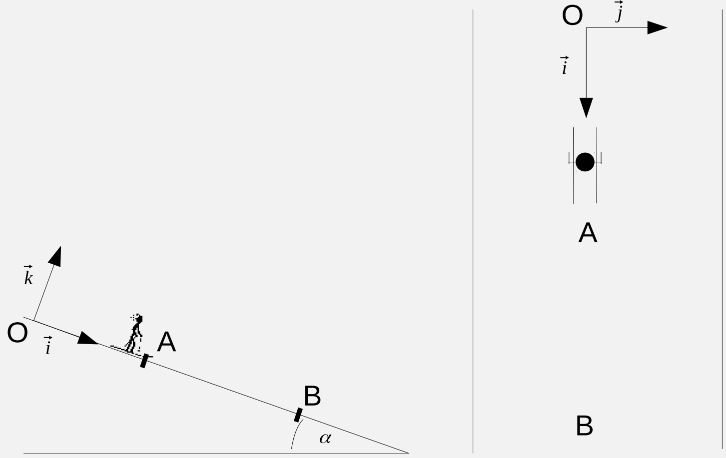
   Le but de cet exercice est de comprendre le concept d'énergie potentielle. Dans un premier temps on considère un skieur (assimilé à un point matériel M de masse m) qui descend une piste. On connait sa position de départ et sa position d'arrivée mais pas la trajectoire qu'il a suivi. On prendra en compte les frottements solides mais pas les frottements fluides. Pour tourner le skieur exerce une force $\vec{F}$ toujours orthogonale à la trajectoire.
   Les forces qui agissent sur le skieur sont donc :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\sin\alpha\vec{i} - mg\cos\alpha\vec{k}$$

$$\overrightarrow{R_N} = mg\cos\alpha\vec{k}$$

$$\overrightarrow{R_T} = -\mu mg\cos\alpha\vec{T}$$

$$\vec{F} = F\vec{N}$$



   (a) Exprimer le déplacement élémentaire dans la base cartésienne et dans la base de Frenet.

   (b) Calculer le travail des forces qui agissent sur le skieur.

   (c) Calculer la variation d'énergie cinétique sur le skieur entre le point B et le point A. Quels termes dépendent de la trajectoire suivie par le skieur ?

   (d) Écrire quand c'est possible chacun des termes comme l'intégrale d'une fonction énergie entre la position de départ A et la position d'arrivée B.

   (e) Quel est le lien entre le travail élémentaire d'une force conservative et l'énergie potentielle ? Exprimer alors cette force en fonction de l'énergie potentielle qui lui est associée. Quelle relation y a t-il entre la direction et le sens de la force et le sens de variation de l'énergie potentielle ?

   (f) Dans le cas où il n'y a qu'une force conservative $\overrightarrow{F_c}$, comment peut-on écrire le théorème de l'énergie cinétique ?

2. **Énergie Mécanique**

   On considère maintenant un point matériel M de masse m. Celui-ci est soumis à une force conservative $\vec{F_c}$ et une force non-conservative $\vec{F_{nc}}$.

   (a) A l'aide du théorème de l'énergie cinétique, exprimer la variation infinitésimal d'énergie cinétique en fonction du travail infinitésimal des forces.

   (b) Quand c'est possible exprimer ces travaux en fonction de l'énergie potentielle.

   (c) Réécrire le théorème de l'énergie cinétique en y faisant apparaître l'énergie potentielle puis l'énergie mécanique.

   (d) Que devient ce théorème dans le cas où il n'y a qu'une force conservative. Expliquer alors le terme conservatif.

Deuxième partie

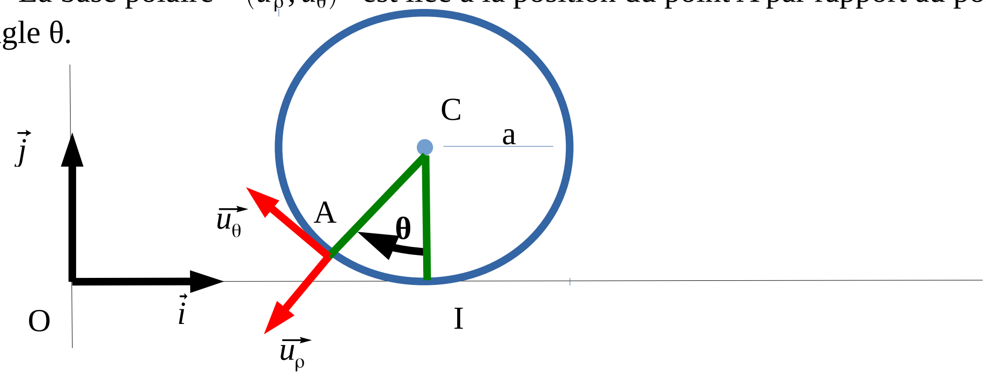
Travaux dirigés

TD n°1

Lois de composition des vitesses et des accélérations

Exercice 1 : **Mouvement d'un point sur une roue**

Dans le repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, une roue de rayon *a*, de centre C, roule sans glisser sur une route matérialisée par l'axe Ox, tout en restant dans le plan (O,x,y). Le point I représente à chaque instant le point de contact entre la roue et la route. Le point A représente un point quelconque appartenant au périmètre de la roue et suivant son mouvement.
À l'instant initial *t*=0, les points A et I sont tous deux confondus avec l'origine du repère. On note *θ* l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CA}$ et on prendra la convention des angles positifs dans le sens horaire. La base polaire $(\vec{u}_\rho;\vec{u}_\theta)$ est liée à la position du point A par rapport au point d'origine C et à l'angle θ.



1) Soit R' le référentiel lié au repère cylindrique $(C,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$. Le référentiel relatif R' est donc lié au mouvement de la roue. Décrire les caractéristiques de ce mouvement par rapport au référentiel absolu R (lié au repère cartésien).

2) Si la base $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ est directe, dans quel sens est le vecteur $\vec{u}_z$? De quel signe est la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ lorsque la roue avance vers la droite ?
Définir le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R'/R}$ dans la base cartésienne.

3) Que vaut la vitesse relative $\vec{v}(A)_{R'}$ d'un point A appartenant à la roue dans le référentiel R' lui-même lié à la roue ?

4) Exprimer la vitesse d'entraînement du point A dans le référentiel R' par rapport au référentiel R.
On donne $\overrightarrow{OC}=a\,\theta\,\vec{i}+a\,\vec{j}$.

5) En déduire la vitesse absolue $\vec{v}(A)_R$ du point A dans le référentiel R.

6) Reprendre la question 2 lorsque la roue recule vers la gauche.

7) Si on avait choisi la convention standard des angles positifs dans le sens trigonométrique plutôt que le sens horaire, quelle(s) différence(s) cela aurait-il fait ?

Exercice 2 : **Mouche sur une horloge**

1) Une mouche représentée par le point M se déplace le long de l'aiguille des secondes d'une horloge. À l'instant t=0 (à midi) la mouche est au centre de l'horloge matérialisé par le point O. On donne les coordonnées sphériques du point M par rapport au point O :

$$\begin{cases} r = \dfrac{a t^2}{2} \\ \theta = \omega t \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

où a et ω sont des constantes. Donner les dimensions de ces deux constantes. Quelles grandeurs physiques représentent-elles ?

2) Calculer a et ω sachant que la mouche atteint l'extrémité de l'aiguille des secondes de 20cm pendant qu'elle-même fait un tour complet du cadran.

3) On note $R(O;\vec{u_x};\vec{u_y};\vec{u_z})$ le référentiel absolu lié au repère cartésien fixe et $R'(O;\vec{e_r};\vec{e_\theta};\vec{e_\varphi})$ le référentiel relatif lié au repère sphérique mobile suivant le point M. Exprimer les composantes du vecteur position du point M dans le repère sphérique.

4) Exprimer le vecteur vitesse relatif $\vec{v}(M)_{R'}$ du point M dans le référentiel R'. Application numérique à t=0 et t=1min.

5) Exprimer le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R'/R}$.

6) En appliquant la loi de composition des vitesses, exprimer les composantes dans la base sphérique de la vitesse absolue $\vec{v}(M)_R$ du point M par rapport au référentiel R. Exprimer sa norme $\|\vec{v}(M)_R\|$.

7) Exprimer le vecteur accélération relative $\vec{a}(M)_{R'}$ du point M dans le référentiel R'.

8) Exprimer l'accélération d'entraînement du point M dans le référentiel R' par rapport à R.

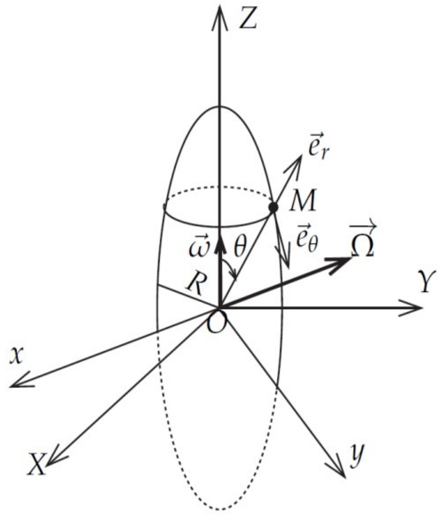
9) Exprimer l'accélération de Coriolis du point M dans le référentiel R' par rapport à R.

10) En déduire à l'aide de la loi de composition des accélérations les composantes dans la base sphérique de l'accélération absolue $\vec{a}(M)_R$ du point M par rapport au référentiel R. Exprimer sa norme $\|\vec{a}(M)_R\|$.

11) À l'aide des composantes des vecteurs de la base de Frenet déterminées précédemment, exprimer par un produit scalaire l'accélération normale du point M le long de sa trajectoire.

12) En déduire l'expression du rayon de courbure de la trajectoire de la mouche. Application numérique à t=1min et t=30s.

Exercice 3 : **Déplacement d'un point sur un cercle en rotation**



1) Soit le repère cartésien $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$, fixe dans le référentiel absolu R. On considère un cercle de centre O et de rayon *R* animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire *ω* autour de l'axe vertical $(O\vec{K})$.
On définit le référentiel relatif R' lié au repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{K})$ suivant le mouvement du cercle (le vecteur $\vec{i}$ étant perpendiculaire au plan du cercle).
Définir le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R'/R}$.

2) On étudie un point M animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire *Ω* le long du cercle, autrement dit autour de l'axe $(O\vec{i})$.
On définit le repère sphérique $(O;\vec{e_r};\vec{e_\theta};\vec{e_\varphi})$ associé à la position du point M et tournant avec le référentiel relatif R'.
Définir les coordonnées sphériques du point M en faisant intervenir la vitesse angulaire *Ω*.

3) Exprimer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base sphérique $(\vec{e_r};\vec{e_\theta};\vec{e_\varphi})$.

4) En déduire les composantes dans la base sphérique de la vitesse relative $\vec{v}(M)_{R'}$ du point M par rapport au référentiel R'.

5) Exprimer par projection les composantes du vecteur $\vec{\Omega}_{R'/R}$ dans la base sphérique $(\vec{e_r};\vec{e_\theta};\vec{e_\varphi})$.

6) À l'aide de la loi de composition des vitesses, exprimer les composantes dans la base sphérique de la vitesse absolue $\vec{v}(M)_R$ du point M par rapport au référentiel R.

7) Projeter les vecteurs de la base sphérique $(\vec{e_r};\vec{e_\theta};\vec{e_\varphi})$ dans la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{K})$.

8) En déduire les composantes dans la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{K})$ de la vitesse absolue du point M.

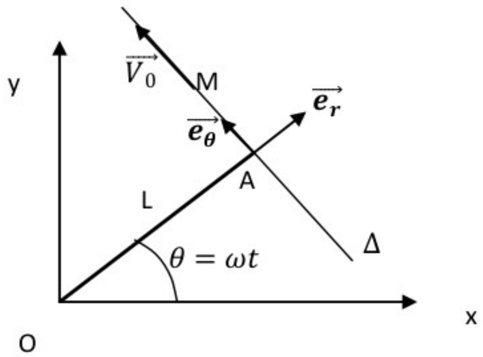
9) Exprimer les composantes dans la base sphérique de l'accélération relative $\vec{a}(M)_{R'}$ du point M par rapport au référentiel R'.

10) Exprimer dans la base sphérique les composantes de l'accélération d'entraînement et de Coriolis du point M dans le référentiel R' par rapport au référentiel R. Commenter qualitativement l'orientation de ces deux vecteurs.

11) À l'aide de la loi de composition des accélérations, exprimer les composantes dans la base sphérique de l'accélération absolue $\vec{a}(M)_R$ du point M par rapport au référentiel R.

12) En déduire les composantes dans la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{K})$ de l'accélération absolue du point M.

Exercice 4 : **Mouvement sur une tige en rotation**



1) Une tige rigide OA de longueur L tourne avec une vitesse angulaire uniforme $\omega = \dot{\theta}$ autour de l'axe Oz. À l'extrémité A de cette tige est fixée une autre tige perpendiculaire à OA sur laquelle se déplace un point M avec une vitesse constante V_0.
On définit la base cylindrique $(\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})$ associée à la position du point A par rapport à O.
Soit R' le référentiel relatif lié au repère cylindrique $(A;\overrightarrow{e_r};\overrightarrow{e_\theta};\overrightarrow{e_z})$. Exprimer dans la base cylindrique la vitesse relative $\vec{v}(M)_{R'}$ du point M par rapport au référentiel R' et montrer que $\overrightarrow{AM} = V_0\, t\, \overrightarrow{e_\theta}$ (le point M est confondu avec le point A à l'instant t=0)

2) Soit R le référentiel absolu lié au repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Exprimer dans la base cylindrique les composantes du vecteur position du point A.

3) Exprimer dans la base cylindrique les composantes de la vitesse absolue du point A par rapport au référentiel R.

4) Définir le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R'/R}$.

5) En déduire la vitesse absolue $\vec{v}(M)_R$ du point M par rapport au référentiel R.

6) Exprimer dans la base cylindrique l'accélération relative $\vec{a}(M)_{R'}$ du point M par rapport au référentiel R'.

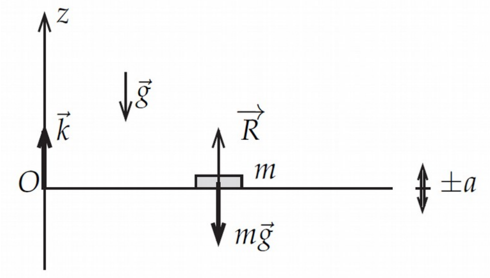
7) Exprimer dans la base cylindrique les composantes de l'accélération absolue du point A par rapport au référentiel R.

8) En déduire l'accélération absolue $\vec{a}(M)_R$ du point M par rapport au référentiel R.

TD n°2

Référentiels non galiléens

Exercice 1 : **Équilibre relatif sur un plateau vibrant**



1) Un point matériel M de masse *m* est posé sur un plateau horizontal. Ce plateau est animé par rapport au sol d'un mouvement sinusoïdal selon l'axe (Oz) vertical ascendant décrit par l'équation horaire de la position du point O appartenant au plateau : $z_O(t)=a\cos(\omega t)$ où *a*=5cm et ω sont des constantes.
On note R' le référentiel lié au plateau et au repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Le référentiel terrestre R_T est considéré comme galiléen. Pourquoi R' ne peut pas être considéré comme galiléen ?

2) Exprimer le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R'/R_T}$ dans la base cartésienne.

3) Faire le bilan des forces extérieures et des forces d'inertie auxquelles est soumis le point M dans le référentiel R', en les exprimant dans la base cartésienne. On notera C le point d'origine du repère auquel est lié le référentiel terrestre.
4) Appliquer le principe fondamental de la dynamique au mouvement du point M par rapport au référentiel R' du plateau vibrant.

5) En déduire l'expression de la composante de la réaction du support selon le vecteur $\vec{k}$.

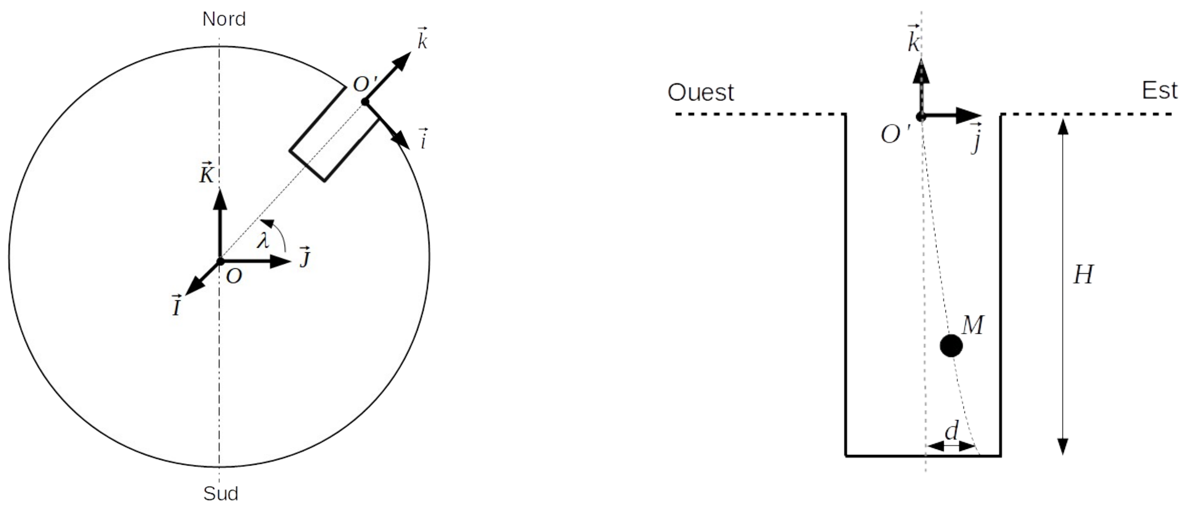
6) Quelle condition doit satisfaire la pulsation ω pour que le point ne quitte pas le plateau ? Donner une valeur numérique.

Exercice 2 : **Déviation vers l'Est**

En 1833, Ferdinand Reich a voulu mettre en évidence les effets de la force de Coriolis due à la rotation de la Terre sur un objet en chute libre. A Freiberg en Allemagne (latitude $\lambda=50°$), on lance un boulet de canon de masse m , assimilé à un point M , dans un puits de hauteur $H=158\,m$. On observe une déviation de la trajectoire vers l'Est $d=28\,mm$ au moment de l'impact au fond du puits.

Le référentiel géocentrique noté R supposé galiléen est associé au repère $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ avec $\vec{K}$ orienté vers le pôle Nord. Le référentiel local noté R' est associé au repère $(O',\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ avec O' en haut du puits, $\vec{k}$ dans la direction $\overrightarrow{OO'}$ et $\vec{j}$ vers l'Est. Le vecteur rotation du référentiel terrestre dans le référentiel géocentrique est $\overrightarrow{\Omega_{R'/R}}=\omega\,\vec{K}$.

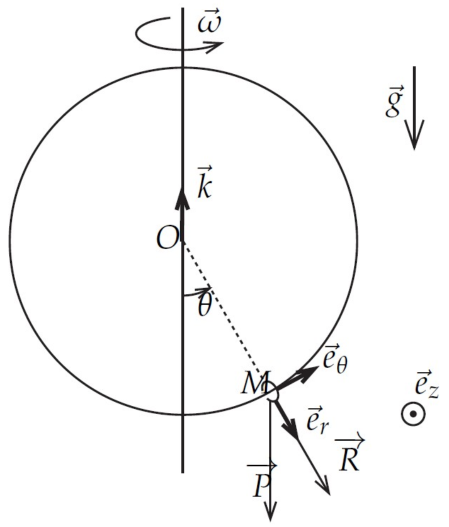
A l'instant initial, le point M est confondu avec O' et sa vitesse (dans le référentiel R') est nulle.



1. Quelle est la nature du mouvement du référentiel R' par rapport au référentiel R . Le référentiel R' est-il galiléen ? Pourquoi ?
2. Exprimer le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{R'/R}}=\omega\,\vec{K}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en fonction de λ .
3. Lorsque le référentiel terrestre est considéré non-galiléen, le poids est la somme de deux forces. Lesquelles ? Dans la suite de l'exercice on négligera la force inertielle qui intervient dans le poids.
4. Établir le bilan des forces qui s'appliquent sur le point M dans le référentiel R' et les exprimer dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On négligera tous les frottements.
5. Pour simplifier le problème, on négligera les termes faisant apparaître les composantes de la vitesse suivant $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Que devient la force d'inertie de Coriolis ?
6. Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel R' . Projeter l'équation obtenue dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
7. Exprimer l'équation horaire z(t).
8. Exprimer $\ddot{y}$ en fonction du temps et en déduire l'équation horaire du mouvement y(t) .
9. Exprimer le temps t_0 auquel M atteint le fond du puits. En déduire une expression pour le décalage d .
10. En déduire la vitesse angulaire ω puis la période de rotation de la Terre sur elle-même (en heures). Commenter.

Exercice 3 : **Anneau se déplaçant sur un cercle en rotation**

1) Un anneau de masse m=1kg glisse sans frottement sur un cercle de rayon R positionné verticalement. La position de l'anneau sur le cercle est repérée par l'angle θ tel que θ=0 correspond à la position la plus basse. Définir le vecteur position du point M dans le repère cylindrique $(O;\vec{e_r};\vec{e_\theta};\vec{e_z})$.



2) Exprimer dans le repère cylindrique sa vitesse $\vec{v}(M)_{R'}$ et son accélération $\vec{a}(M)_{R'}$ par rapport au référentiel R' lié au cercle.

3) Faire le bilan des forces extérieures s'appliquant au point M en négligeant l'action de l'air. Exprimer leurs composantes dans la base cylindrique.

4) Le cercle (et donc le référentiel R') tourne également sur lui-même à la vitesse angulaire constante ω, autour de l'axe vertical, par rapport au référentiel terrestre R_T considéré comme galiléen. Exprimer le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R'/R_T}$ dans la base cylindrique.

5) Exprimer dans la base cylindrique les forces d'inerties auxquelles est soumis le point M dans le référentiel R'.

6) Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel R' en le projetant dans la base cylindrique.

7) Montrer que l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme $\ddot{\theta}=\sin\theta\left(\omega^2\cos\theta-\frac{g}{R}\right)$.

8) Exprimer l'accélération du point M lorsque celui-ci est à l'équilibre dans le référentiel R'.

9) Déduire des deux questions précédentes l'expression de l'angle θ pour la ou les position(s) d'équilibre du point M.

10) Calculer la valeur de l'angle θ pour la ou les position(s) d'équilibre du point M en prenant R=10cm et ω=12 rad.s^{-1}.

11) Exprimer dans la base cylindrique la réaction du support (le cercle) au point M.

12) Exprimer sa norme dans le cas général, puis pour la ou les positions(s) d'équilibre du point M. On donne : $\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$

13) Calculer la norme de la réaction du support pour la ou les positions(s) d'équilibre du point M en reprenant les valeurs ci-dessus.

14) On considère maintenant que la vitesse angulaire du cercle varie. On notera $\dot{\omega}$ sa dérivée temporelle. Réécrire le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel R' en prenant en compte cette nouvelle donnée.

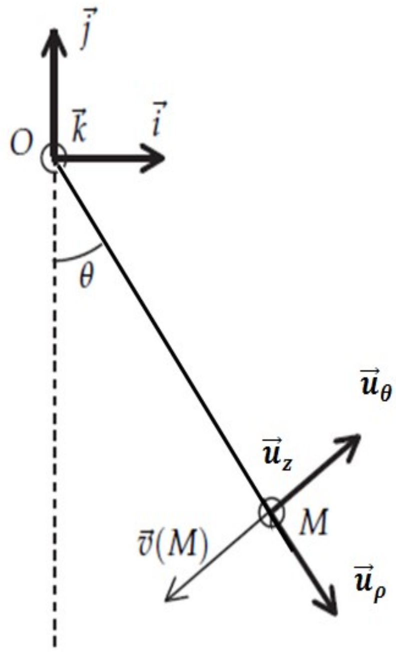
15) Peut-on encore parler d'équilibre ? La ou les position(s) correspondantes sont-elles modifiées ? Si oui les recalculer.

16) Recalculer la norme de la réaction du support pour ces positions du point M en prenant $\dot{\omega}=0{,}5\,\mathrm{rad.s^{-2}}$.

TD n°3
Théorème du moment cinétique

Exercice 1 : **Pendule simple**

Soit M un point matériel de masse *m* attaché à une tige de longueur *l*. On note θ l'angle entre la verticale et la tige (voir figure). À l'instant initial, le point M est lâché sans vitesse de la position $\theta=\theta_0$. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $R(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ galiléen, et on projettera les différentes vecteurs dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.



1) Exprimer les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$ et vitesse $\vec{v}(M)_R$.

2) Exprimer le moment cinétique de M, évalué par rapport au point O, $\overrightarrow{L_O}(M)$.

3) Effectuer le bilan des forces.

4) Calculer le moment en O de chacune de ces forces.

5) Appliquer le théorème du moment cinétique au point M.

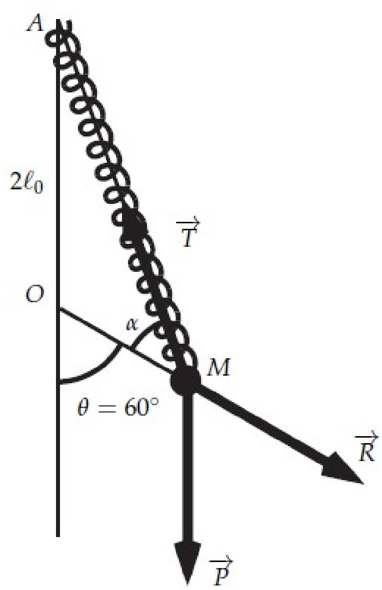
6) En déduire l'équation différentielle du mouvement dans l'hypothèse des petites oscillations.

7) Exprimer les vecteurs de la base de Frenet dans la base cylindrique et le rayon de courbure de la trajectoire.

8) Exprimer l'accélération tangentielle et l'accélération normale.

Exercice 2 : **Détermination du coefficient de raideur d'un ressort**

Un point M de masse *m*=1kg est suspendue à un ressort de raideur *k* inconnue, l'autre extrémité du ressort étant fixé en A comme l'indique la figure. La tige OM rigide de masse négligeable, est articulée en O et en M, et agit sans frottements sur la masse M. Le ressort a une longueur à vide $2l_0$ lorsqu'il n'est soumis à aucune force.
D'autre part on a $OA=2l_0$ et $OM=l_0=1\,m$.
On vérifie que le système est en équilibre pour un angle θ=60° et on cherche à déterminer la raideur *k* du ressort.
On note α l'angle entre MA et MO et Δl l'allongement du ressort ($AM=2l_0+\Delta l$).



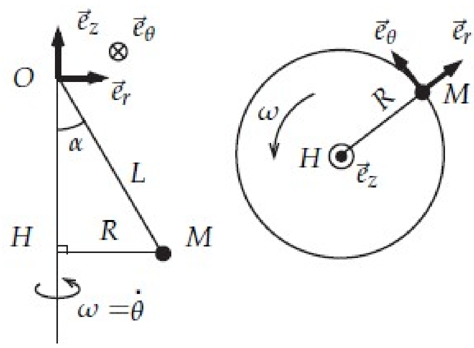
1) Faire le bilan des forces au point M. Projeter ces forces dans la base polaire déterminée à partir de la position du point M par rapport à l'origine O du repère.

2) Calculer les moments en O des différentes forces.

3) Appliquer le théorème du moment cinétique au point O lorsque le point M est à l'équilibre.

4) Exprimer *k* en fonction de m, g, sin θ, sin α et Δl.

Exercice 3 : **Étude d'un pendule conique**



Un pendule conique est constitué d’une tige de longueur *L*, de masse négligeable, attaché en un point fixe O par une de ses extrémités. À l’autre extrémité de la tige est fixé un corps M de masse *m*. L’ensemble tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega=\dot{\theta}$ autour de l’axe vertical Oz. La tige est repérée par un angle constant α avec la verticale Oz. Le corps M a un mouvement circulaire dans le plan horizontal $(H, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ (dessin de droite). On se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen R pour étudier le mouvement du point M.
Le but de l’exercice est de déterminer l’angle α, représentant l’équilibre relatif du pendule.

1) Exprimer les coordonnées cylindriques $R=HM$ et $z=-OH$ du point M en fonction de L et α. Que représente la coordonnée cylindrique θ dans ce problème ?

2) Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et la vitesse du point M dans R en fonction de L, ω et α dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

3) Exprimer le moment cinétique du point M par rapport à O dans R.

4) Exprimer le moment d'inertie du point M par rapport à l'axe Oz.

5) Effectuer le bilan des forces extérieures au point M et calculer leur moment par rapport à O.

6) En appliquant le théorème du moment cinétique en O, trouver une relation permettant de déterminer l’angle α.

7) Déterminer les différentes expressions possibles de l’angle α.

8) Quelle autre méthode aurait-on pu adopter pour résoudre cet exercice ?

TD n°4

Mouvements à force centrale

Exercice 1 : **Force de rappel centrale**

Dans le plan (xOy) du référentiel galiléen $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un point matériel P de masse *m* est soumis à la seule action d'une force de rappel dont l'expression est : $\vec{F}(P)=-k\,\overrightarrow{OP}$.
À l'instant t=0, P se trouve au point de coordonnées cartésiennes $A(d,0)$ et est lancé avec le vecteur vitesse de composantes $\vec{V_0}(0,V_0)$.

1) Montrer que le mouvement de P est plan.

2) A l'aide du PFD, trouver les équations horaires du mouvement x(t) et y(t). Montrer que la trajectoire est une ellipse. On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes l'équation d'une ellipse s'écrit $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ où a et b sont les demi-grand et demi-petit axes de l'ellipse. Représenter la trajectoire de l'ellipse en faisant apparaître les vecteur de la base cylindriques et de la base de Frenet (sans les calculer).

3) Exprimer le moment cinétique en O du point P à l'instant t=0.

4) Exprimer le moment cinétique en O du point P à un instant t quelconque en utilisant les lois x(t) et y(t). Le résultat est-il cohérent ?

5) À l'aide de la constante des aires, exprimer la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction du temps et des données du problème.

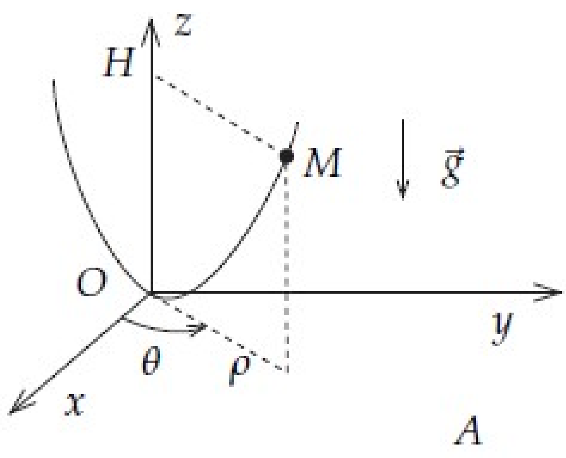
6) Exprimer la vitesse aréolaire du point P en fonction des données du problème. Le résultat est-il en accord avec la loi des aires d'un mouvement à force centrale ?

7) Calculer l'aire $A=\pi a b$ de cette ellipse en fonction des données du problème.

8) Vérifiez la cohérence de ce résultat avec la vitesse aréolaire et la période T du mouvement.

Exercice 2 : **Mouvement à l'intérieur d'un paraboloïde**

Un point $M(x,y,z)$ de masse *m* se déplace à l'intérieur d'une cavité fixe dans le repère galiléen $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. La surface interne de cette cavité est une paraboloïde de révolution d'axe Oz et d'équation en coordonnées cylindriques : $\rho^2-az=0$ avec $a>0$.
Cette surface est parfaitement lisse, le point matériel M glisse donc sans frottements.
On utilisera les coordonnées cylindriques $M(\rho,\theta,z)$ pour traiter ce problème.



1) Exprimer la vitesse de M par rapport à R dans la base cylindrique $(\vec{u_\rho},\vec{u_\theta},\vec{u_z})$.

2) Calculer le moment cinétique en O du point M dans R. En déduire sa projection sur l'axe Oz que l'on notera L_z.

3) La réaction $\vec{R}$ de la cavité sur M est contenue dans le plan OHM (H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe Oz). Justifier cette affirmation et exprimer $\vec{R}$ dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

4) Faire le bilan des forces et calculer leurs moments en O.

5) Donner l'expression vectorielle du théorème du moment cinétique en O.

6) Montrer que L_z est une constante. Comparer à la constante des aires d'un mouvement à force centrale. Quelle différence y a-t-il entre ce mouvement et un mouvement à force centrale ?

7) Exprimer la vitesse aréolaire du point M dans le cas général en fonction de L_z ,de z et des ses dérivées temporelles (il ne doit y avoir ni ρ ni θ dans l'expression finale).
On simplifiera l'expression en utilisant l'équation de la paraboloïde $\rho^2 - az = 0$ et la définition de la constante L_z.

8) Exprimer la vitesse aréolaire du point M lorsque z est maintenu constant. Conclure.

9) Appliquer la loi de transport pour calculer le moment cinétique au point H.

10) Exprimer la vitesse aréolaire du point M par rapport au point H en fonction de L_z, de z et de ses dérivées temporelles.

11) En déduire la vitesse aréolaire du point M par rapport au point H lorsque z est maintenu constant. Comparer au résultat de la question 8.

TD n°5
Lois de Kepler

Exercice 1 : **Deuxième loi de Kepler – Ralentissement zodiacal**

1) Donner l'expression de la vitesse des planètes en coordonnées polaires.

2) Faire un schéma d'une ellipse et représenter les vecteurs vitesse à l'aphélie et au périhélie. Démontrer que la vitesse prend une forme particulière en ces deux points.

3) Donner l'expression de la vitesse aréolaire $\frac{dA}{dt}$ en fonction de ρ et $\dot{\theta}$.

4) En déduire que le produit ρv a la même valeur à l'aphélie et au périhélie.

5) Déterminer le rapport entre la vitesse v_a à l'aphélie et la vitesse v_p au périhélie en fonction de l'excentricité *e* de l'orbite.

6) Laquelle est la plus grande ?

7) La comète de Halley se déplace à $56\,\mathrm{km.s^{-1}}$ au périhélie se trouvant à $0{,}53\,\mathrm{UA}$ du Soleil. Calculer sa vitesse à l'aphélie située à $35{,}1\,\mathrm{UA}$.

8) En déduire l'excentricité de l'orbite de cette comète.

Exercice 2 : **Troisième loi de Kepler - Trajectoire elliptique**

On considère une planète assimilée à un point M de masse m gravitant autour du soleil de masse M_S

1) Exprimer la vitesse aréolaire à partir de l'aire d'une ellipse.

2) Exprimer la vitesse aréolaire à partir de la constante des aires. Faire apparaître le paramètre p.

3) A partir des deux questions précédentes, en déduire une égalité.

4) L'expression obtenue dépend du paramètre p. On cherche à l'exprimer en fonction des caractéristiques géométriques de la trajectoire de M. Rappeler l'expression des coordonnées cartésiennes x et y d'un point en fonction de ses coordonnées polaires ρ et θ. Que vaut x^2+y^2 ?

5) Partant de l'équation polaire d'une ellipse, exprimer ρ en fonction de x, du paramètre p et de l'excentricité e de l'ellipse.

6) Mettre cette expression au carré et en déduire l'équation cartésienne d'une ellipse en fonction de p et e.

7) Par identification, exprimer le demi-grand axe a et le demi-petit axe b en fonction de p et e, ainsi que les coordonnées $(x_0 ; y_0)$ du centre de l'ellipse. Par rapport à quel point ses coordonnées sont-elles définies ?

8) En déduire une expression de p en fonction de a et b.

9) En utilisant l'aire de l'ellipse, démontrer la troisième loi de Kepler reliant la période T du mouvement et le demi-grand axe a de l'orbite.

10) Connaissant la période et le demi-grand axe de l'orbite de la Terre autour du Soleil (voir tableau ci-dessous), calculer la masse du Soleil.

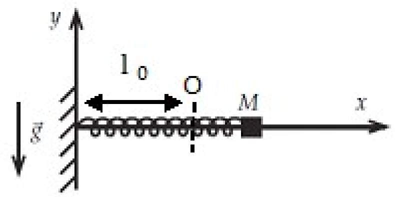
11) Calculer le demi-grand axe a des orbites de Pluton, Jupiter et Mercure. On utilisera directement les unités astronomiques et les années sans les convertir dans le système international !

Planète	Terre	Mercure	Jupiter	Pluton
Période T	365,25 jours	88 jours	11,8 ans	248,4 ans
Demi-grand axe a (UA)	1,00 UA			

TD n°6
Théorème de l'énergie cinétique

Exercice 1 : **Puissances de forces**

On considère un point matériel M de masse *m* attaché à l’extrémité d’un ressort. Il glisse sans frottement sur une tige horizontale (voir figure). La constante de raideur du ressort est *k*. On positionne l’origine O du repère à l’extrémité du ressort lorsqu’il est à vide. Le référentiel est considéré comme galiléen.



1) Faire le bilan des des forces appliquées au point M.

2) Exprimer la vitesse du point M en coordonnées cartésiennes. En déduire l'expression de son énergie cinétique.

3) Exprimer les puissances des différentes forces.

4) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique. À quoi correspond l'équation différentielle obtenue ?

5) On considère maintenant que le référentiel d'étude est animé d'un mouvement de rotation par rapport au référentiel terrestre autour de l'axe (Ay), A étant le point d’attache du ressort, à la vitesse angulaire (variable) ω. Exprimer les puissances des forces d'inerties.

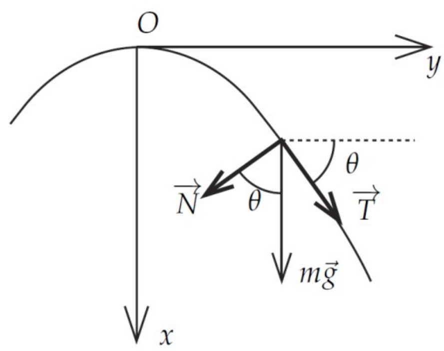
6) Faire l'analyse dimensionnelle du résultat obtenu.

7) Appliquer à nouveau le théorème de l'énergie cinétique.

8) Le point est lâché d’une position x_0 à l’instant t=0 avec une vitesse V_0 . Résoudre l'équation différentielle en x.

Exercice 2 : **Calcul d'une réaction**

On étudie le mouvement d’un point matériel M de masse *m* qui glisse sans frottement sur la parabole d’équation $y^2=2px$ avec p une constante. Le mouvement a lieu dans le plan vertical Oxy avec Ox verticale descendante. On désigne par θ l’angle entre la tangente à la trajectoire en M et la direction Oy . On définit la base de Frenet $(\vec{T},\vec{N})$ pour étudier le problème. On note v la vitesse du point M dans le plan et ρ le rayon de courbure de la trajectoire.



1) Faire le bilan de forces dans la base de Frenet.

2) Écrire le principe fondamental de la dynamique dans la base de Frenet.

3) En déduire l’expression de la force de réaction $\vec{R}$ s’exerçant sur M.

4) Exprimer le travail élémentaire du poids et de la réaction normale du support (on exprimera le déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes).

5) Ces travaux sont-ils résistants, moteurs ou nuls ?

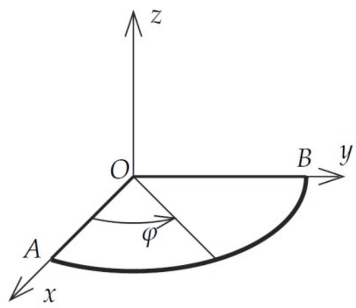
6) Appliquer la formulation locale du théorème de l'énergie cinétique.

7) Le point M est initialement lancé en O avec une vitesse v_0 . Intégrer l'équation ci-dessus entre les points O et M afin d'en déduire une relation entre v et x.

8) Exprimer la réaction du support en fonction de x, v_0 et θ.
On donne $\rho=\frac{p}{\cos^3\theta}$ le rayon de courbure de la parabole.

Exercice 3 : **Travail d'une force de frottement**

1) On considère un point M de masse *m* se déplaçant sur un support horizontal. Le point M subit une force de frottement solide proportionnelle à la réaction normale du support : $R_T=\mu R_N$.
Faire le bilan des forces et exprimer R_T la norme de la force de frottement en fonction des données du problème.
Exprimer la force de frottement solide dans la base de Frenet sachant qu'elle s'oppose toujours au mouvement.
NB : On admettra l'existence d'une force motrice inconnue.



2) Exprimer le travail élémentaire de la force de frottement solide (en utilisant toujours la base de Frenet). Comment peut-on le caractériser ?

3) En appliquant puis en intégrant la formulation locale du théorème de l'énergie cinétique, calculer la variation d'énergie cinétique entre les points A(a;0;0) et B(0;a;0) en suivant l'arc de cercle AB (voir figure ci-dessus). Données : a=3m ; m=2 kg ; μ=0,4 ; g=9,81 m.s^{-2}.

4) Refaire le calcul en passant cette fois par O (segment AO puis segment OB).

TD n°7
Énergie potentielle et énergie mécanique

Exercice 1 : **Exemples simples**

1) Après avoir vérifié qu'elle existait, exprimer l'énergie potentielle de pesanteur pour le poids $\vec{P}=m\vec{g}$ avec $\vec{g}=-g\vec{k}$.

2) Exprimer le travail de la pesanteur entre deux points A et B. Comment est ce travail si A est plus haut que B ?

3) Répondre à nouveau aux deux premières questions en prenant $\vec{g}=g\vec{k}$ ($\vec{k}$ verticale descendante).

4) Exprimer l'énergie potentielle élastique pour la force $\vec{F}=-k(x-l_0)\vec{i}$.

Exercice 2 : **Vitesse de libération**

1) Un boulet de canon, assimilé à un point matériel P de masse m, est lancé depuis la surface de la Terre avec une vitesse V_0 par rapport au référentiel géocentrique $R(T,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ supposé Galiléen dont l'origine est le centre de la Terre T. La Terre est assimilée à une sphère de masse M_T homogène et de rayon $R_T=6380\,\text{km}$. Exprimer la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le boulet dans la base sphérique.

2) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de gravité en fonction de r=TP sachant qu'elle est nulle lorsque r tend vers l'infini.

3) Appliquer aux forces en présence (on négligera l'action de l'air sur le boulet) la formulation intégrale du théorème de l'énergie cinétique entre le point de lancement O du boulet et un point P quelconque situé à une altitude *h*.

4) Quelle est la trajectoire du boulet de canon ? Exprimer à l'aide du résultat de la question précédente l'altitude maximale h_m atteinte par le boulet de canon en fonction de V_0, R_T, M_T et G, la constante gravitationnelle.

5) Considérant que le poids est la force résultant de la gravité lorsque h=0 (on néglige la rotation de la Terre), exprimer g en fonction de G, M_T et R_T.

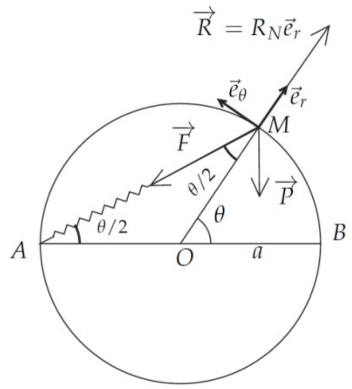
6) Simplifier l'expression de l'altitude maximale h_m et faire l'application numérique pour V_0=60 km/h (on prendra g=9,81 m.s^{-2}).

7) Donner l'expression de la vitesse de libération V_l du boulet (c'est-à-dire la vitesse nécessaire pour qu'il puisse quitter le champ gravitationnel terrestre). Il s'agit de la valeur limite de V_0 pour laquelle h_m tend vers l'infini.

8) Exprimer V_l en fonction de g , puis calculer numériquement sa valeur.

Exercice 3 : **Équilibre d'un point sur un cercle avec force de rappel**

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m se déplaçant sans frottement sur un cercle de centre O et de rayon a dans le plan vertical. On note Oz la verticale ascendante.
Outre son poids $\vec{P}$, ce point est soumis à une force de rappel $\vec{F}$ de la part d'un ressort fixé en A. Le ressort a une constante de raideur *k* et une longueur à vide l_0.



1) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ dans la base polaire $(\vec{e_r};\vec{e_\theta})$ en fonction des coordonnées polaires r et θ de point M. On utilisera pour cela la relation de Chasles.

2) M_0 est la position qu'occuperait le point M si le ressort était à vide. Exprimer $\overrightarrow{AM_O}$ dans la base polaire $(\vec{e_r};\vec{e_\theta})$ en fonction de l_0 et θ.

3) Faire le bilan des forces dans la base polaire $(\vec{e_r};\vec{e_\theta})$. Pour la tension du ressort, on utilisera les réponses aux deux premières questions.

4) On admet sans calculer le rotationnel que la tension du ressort est bien une force conservative. Appliquer le gradient pour obtenir un système d'équations aux dérivées partielles de l'énergie potentielle totale. Par soucis de simplification, on prendra l_0=0 et r=a=cte.

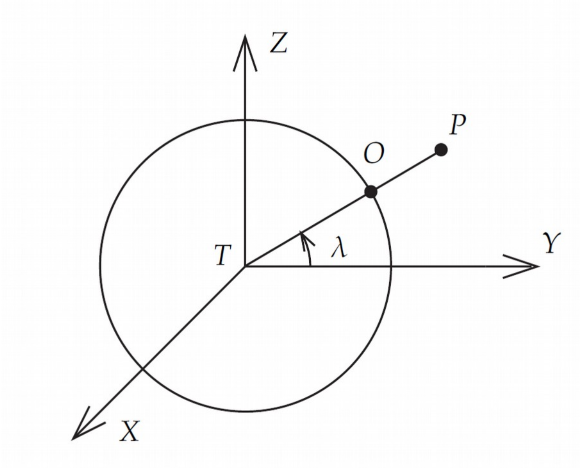
5) En déduire les deux positions d'équilibre relatif en θ pour le point M ?

6) Étudier le critère de stabilité pour chacune des deux positions.

7) Démonter que l'équilibre relatif en θ n'implique pas d'équlibre relatif en r.
On pourra utiliser $\cos(\arctan(X))=\frac{1}{\sqrt{1+X^2}}$ et $\sin(\arctan(X))=\frac{X}{\sqrt{1+X^2}}$.

Exercice 4 : **Satellite géostationnaire**

On étudie le mouvement d'un satellite terrestre, assimilé à un point matériel P de masse m par rapport au référentiel géocentrique $R(T, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ supposé Galiléen. Ce référentiel a pour origine T le centre de la Terre et TZ est l'axe Sud-Nord des pôles. Le plan (YTZ) est le plan méridien contenant le point O de latitude λ représentant la base de lancement du satellite. La Terre est assimilée à une sphère de masse M_T et de rayon R_T . On note ω_T la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe TZ .



1) Exprimer le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique. Projeter l'expression dans la base sphérique.

2) Calculer ω_T sachant que la Terre tourne sur elle-même en 23h56min4s.

3) Appliquer la loi de composition des vitesses pour exprimer la vitesse du point O dans le référentiel géocentrique. On fera le calcul dans la base sphérique.

4) En déduire l'énergie cinétique E_c du satellite lorsqu'il est situé sur sa base de lancement.

5) Exprimer l'énergie potentielle de la force gravitationnelle terrestre lorsque le satellite est situé sur sa base de lancement.

6) Calculer l'énergie mécanique lorsque le satellite se trouve au point de lancement O.
On prendra $R_T = 6380\,\text{km}$, $M_T = 6 \times 10^{24}\,\text{kg}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$, $m = 500\,\text{kg}$ et λ=5°.

7) Le satellite est maintenant en orbite géostationnaire où il est fixe par rapport au référentiel terrestre. Définir la trajectoire de P et son mouvement par rapport à R .

8) Exprimer la vitesse $\vec{v}(P)$ en réutilisant la formule de composition des vitesses trouvée plus haut. On notera *h* l'altitude du satellite.

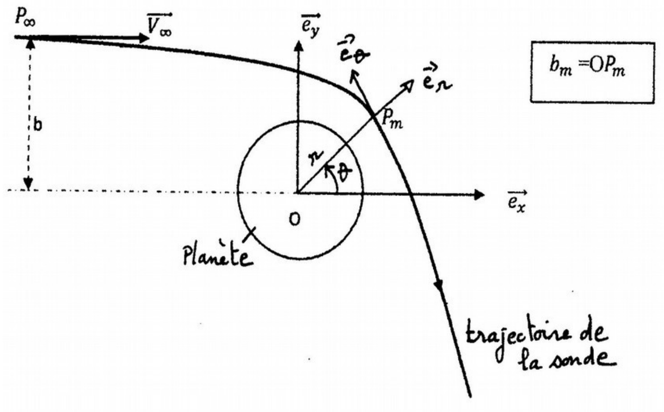
9) Exprimer l'accélération $\vec{a}(P)$ en appliquant la loi de composition des accélérations.

10) En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans R , calculer l'altitude h du satellite géostationnaire.

11) Calculer l'énergie mécanique du satellite en orbite géostationnaire après avoir d'abord simplifié l'expression.

12) En déduire le travail propulsif nécessaire pour assurer le lancement du satellite.

Exercice 5 : **Distance d'approche d'une sonde spatiale**



Une sonde interplanétaire est assimilée à un point P de masse m. Elle vient de l'infini et passe à proximité d'une planète de masse M. Le repère $R(O;\vec{e_x};\vec{e_y};\vec{e_z})$ est lié au centre O de la planète et sera le référentiel d'étude, supposé galiléen, du mouvement de P. On utilisera également la base cylindrique $(\vec{e_r};\vec{e_\theta};\vec{e_z})$ liée aux coordonnées polaires $r=\|\overrightarrow{OP}\|$ et θ du point P.

À très grande distance de la planète, l'énergie potentielle gravitationnelle est considérée comme nulle et la sonde se déplace à la vitesse V_∞ parallèle à l'axe Ox, à la distance b de cet axe.

Pour un point P_∞ sur la trajectoire loin en amont de la planète on peut écrire :
$\overrightarrow{OP_\infty}=-x\vec{e_x}+b\vec{e_y}$ et $\vec{v}(P_\infty)=V_\infty\vec{e_x}$.

On cherche à calculer la position d'approche minimale de la sonde notée P_m.

En ce point, on notera $b_m=\|\overrightarrow{OP_m}\|$ et $V_m=\|\vec{v}(P_m)\|$.

On considérera ici la planète Vénus, dont les caractéristiques sont : rayon R=6190 km, masse M=4,9·10^{24} kg.

1) Exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle en fonction de r.

2) Montrer que dans ce problème le moment cinétique et l'énergie mécanique se conservent.

3) Déterminer l'expression $\vec{L_O}(P_\infty)$ du moment cinétique par rapport à O de la sonde en P_∞.

4) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique de la sonde en P_∞.

5) Donner l'expression générale du vecteur vitesse $\vec{v}(P)_R$ dans la base polaire.

6) En déduire que lorsque la distance d'approche est minimale, $\vec{v}(P_m)=-V_m\vec{e_\theta}$.

7) Déterminer l'expression $\vec{L_O}(P_m)$ du moment cinétique par rapport à O de la sonde en P_m.

8) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique de la sonde en P_m.

9) Établir, à partir des questions 3 et 7, une relation entre b_m, V_m, b et V_∞.

10) Établir à partir des questions 4 et 8, une autre relation entre b_m, V_m et V_∞.

11) On considère une sonde arrivant à la vitesse V_∞=11 km/s et de paramètre $b=\frac{3R}{2}$.

Qu'est-ce qu'un trou noir ?

12) Calculer à l'aide de l'équation de la question 10 l'altitude du point d'approche minimale de la sonde.

13) Calculer à l'aide de la question 9 la vitesse de la sonde lors de son approche minimale.