

Cours

# **LES FILTRES PASSIFS**

*Eric Guignard*

## TABLE DES MATIERES

|                   |   |                 |
|-------------------|---|-----------------|
| <b><u>I</u></b>   | <b><u>Représentation spectrale .....</u></b>  | <b><u>1</u></b> |
| <b><u>II</u></b>  | <b><u>Action d'un quadripôle linéaire.....</u></b>  | <b><u>3</u></b> |
| II.1              | Sur un signal sinusoïdal.....   | 3               |
| II.2              | Sur un signal périodique quelconque.....  | 4               |
| <b><u>III</u></b> | <b><u>Fonction de transfert ou transmittance d'un quadripôle : .....</u></b>                  | <b><u>4</u></b> |
| III.1             | Définition .....  | 4               |
| III.2             | Gain en décibel : dB .....  | 5               |
| III.3             | Représentation graphique de la fonction de transfert .....                                    | 5               |
| <b><u>IV</u></b>  | <b><u>Diagrammes de Bode de fonctions de transfert élémentaires du premier ordre.....</u></b> | <b><u>6</u></b> |
| IV.1              | Intégrateur .....   | 6               |
| IV.2              | Dérivateur.....   | 7               |
| IV.3              | Fonction de transfert de base .....   | 7               |
| <b><u>V</u></b>   | <b><u>Filtres passifs.....</u></b>  | <b><u>8</u></b> |
| V.1               | Les principaux filtres idéaux.....  | 8               |
| V.2               | Filtres réels .....   | 9               |
| V.3               | Exemple d'utilisation .....   | 9               |
| V.4               | Filtres passe-bas du premier ordre.....   | 10              |
| V.4.a             | Exemple d'un filtre « RC ». Fonction de transfert.....  | 11              |
| V.4.b             | Diagrammes de Bode .....  | 11              |
| V.4.c             | Exemples d'application d'un filtre passe-bas .....  | 12              |
| V.5               | Filtres passe-haut du premier ordre .....   | 12              |
| V.5.a             | Exemple d'un filtre « RC ». Fonction de transfert.....  | 13              |
| V.5.b             | Diagrammes de Bode .....  | 13              |
| V.5.c             | Exemples d'application d'un filtre passe-haut.....  | 14              |
| V.6               | Filtres passe-bande .....   | 14              |
| V.6.a             | Exemple d'un filtre « RLC ». Fonction de transfert .....                                      | 14              |
| V.6.b             | Diagrammes de Bode .....  | 15              |
| V.6.c             | Sélectivité du filtre - Bande Passante .....  | 17              |

## Tables des matières

|                  |   |                  |
|------------------|---|------------------|
| V.6.d            | Utilité d'un filtre passe-bande .....             | 17               |
| <b>V.7</b>       | <b>Filtres passe-bas du deuxième ordre .....</b>  | <b>18</b>        |
| V.7.a            | Fonction de transfert .....                       | 18               |
| V.7.b            | Diagrammes de Bode .....                          | 18               |
| <b>V.8</b>       | <b>Filtres passe-haut du deuxième ordre .....</b> | <b>21</b>        |
| <b><u>VI</u></b> | <b><u>Compléments .....</u></b>                   | <b><u>21</u></b> |
| <b>VI.1</b>      | <b>Ordre d'un système.....</b>                    | <b>21</b>        |
| <b>VI.2</b>      | <b>Tableau récapitulatif .....</b>                | <b>22</b>        |
| <b>VI.3</b>      | <b>Représentation symbolique.....</b>             | <b>22</b>        |

## Introduction

Précédemment, et par étapes successives, nous avons étudié le comportement des circuits linéaires en régime permanent continu et en régime permanent sinusoïdal à fréquence fixe en passant par le régime transitoire. A ce stade nous pouvons maintenant aborder leur comportement en fréquence variable, et ce, à travers l'étude des filtres passifs.

Un filtre permet de privilégier, ou d'éliminer certaines fréquences du spectre d'un signal.

Dans ce cours nous allons aborder uniquement aux filtres passifs constitués de résistances, d'inductances et de condensateurs. Les filtres dits actifs, qui nécessitent une alimentation externe et utilisent des éléments comme le transistor et l'ampli opérationnel, seront abordés en deuxième année.

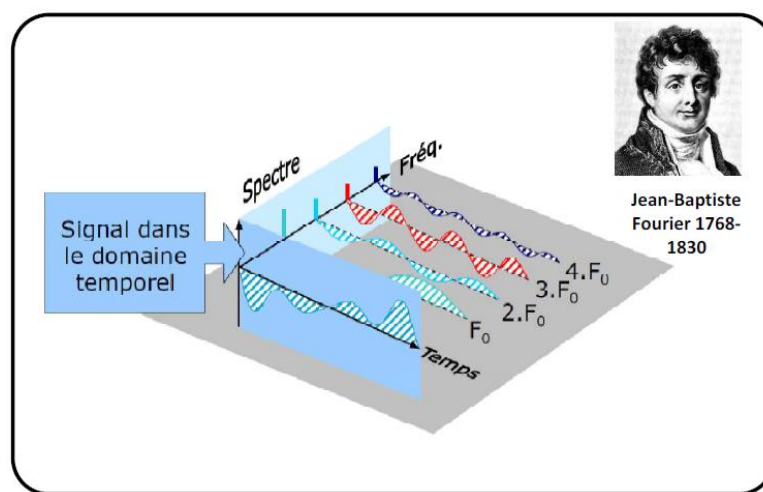
Nous allons donc nous intéresser aux amplitudes et phases relatives des signaux en fonction de la fréquence (la fréquence sera la variable de nos études).

## I Représentation spectrale

Le premier type de représentation d'un signal est la représentation en fonction du temps : représentation temporelle. Pour l'observation on utilise un oscilloscope. Cette représentation devient vite inexploitable lorsque le signal est complexe.

Le deuxième type de représentation est la représentation spectrale. Le signal est décomposé en une série de composantes sinusoïdales élémentaires définies par leurs amplitudes et leurs fréquences que l'on représente ensuite dans un graphe amplitude-fréquence appelé spectre.

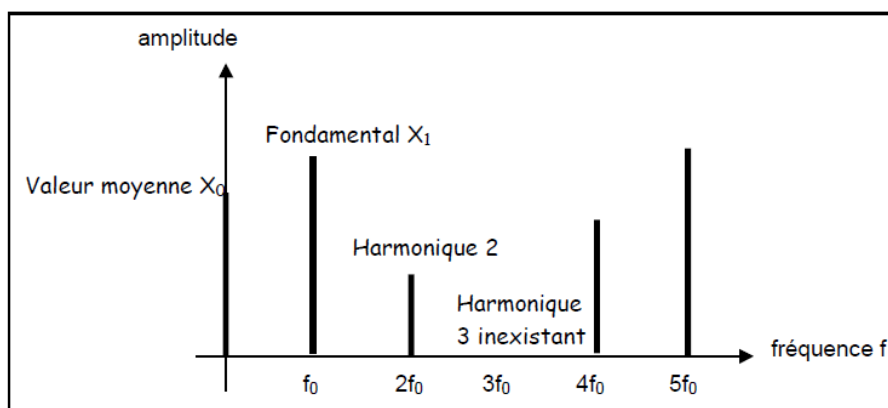
Chaque composante de ce graphe est représentée par un segment vertical appelé **raie** dont l'abscisse représente la fréquence et l'ordonnée, l'amplitude. Pour l'observation d'un spectre, on utilise un **analyseur de spectre**.



Rappel : tout signal périodique de fréquence  $F$  peut se décomposer de façon unique en la somme (série de fourier) :

- d'une composante continue égal à la valeur moyenne
- d'une composante sinusoïdale de fréquence  $F$  appelée le fondamental
- de composantes sinusoïdales de fréquences multiples de  $F$  appelées harmoniques.

Allure générale du spectre d'un signal périodique :



Cas simples :

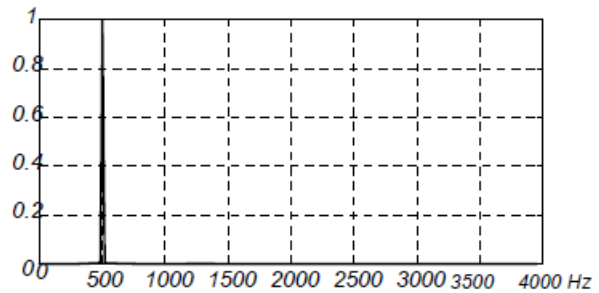
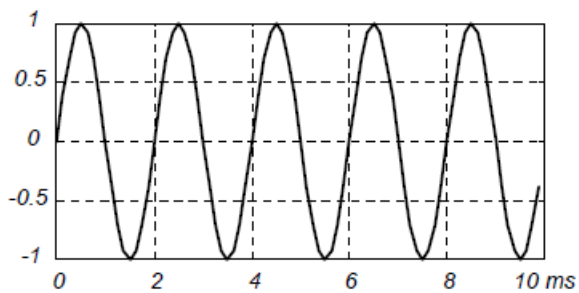
Signal continu :  
1 raie en  $f=0$

Signal sinus pur :  
1 raie en  $f=f_0$

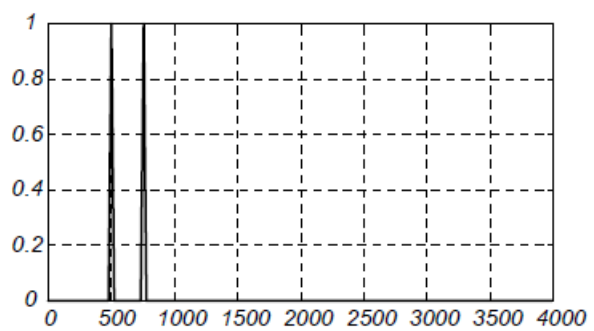
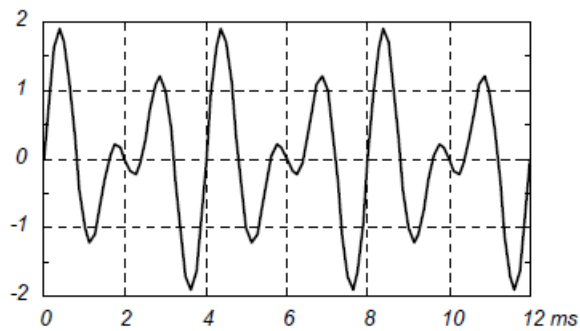
Signal sinus avec une composante continue :  
1 raie en  $f=0$   
1 raie en  $f=f_0$

**Exemples:**Représentation temporelleReprésentation spectrale

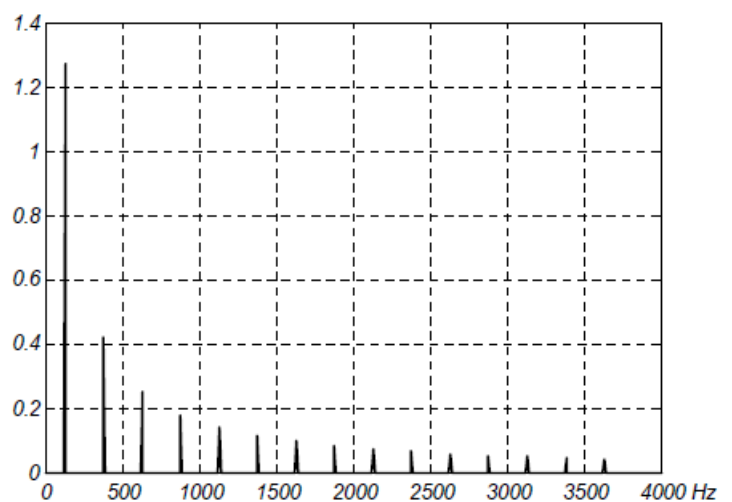
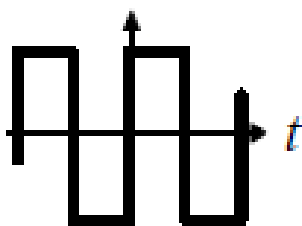
\* signal sinusoïdal pur



\* signal constitué de la somme de deux signaux sinusoïdaux

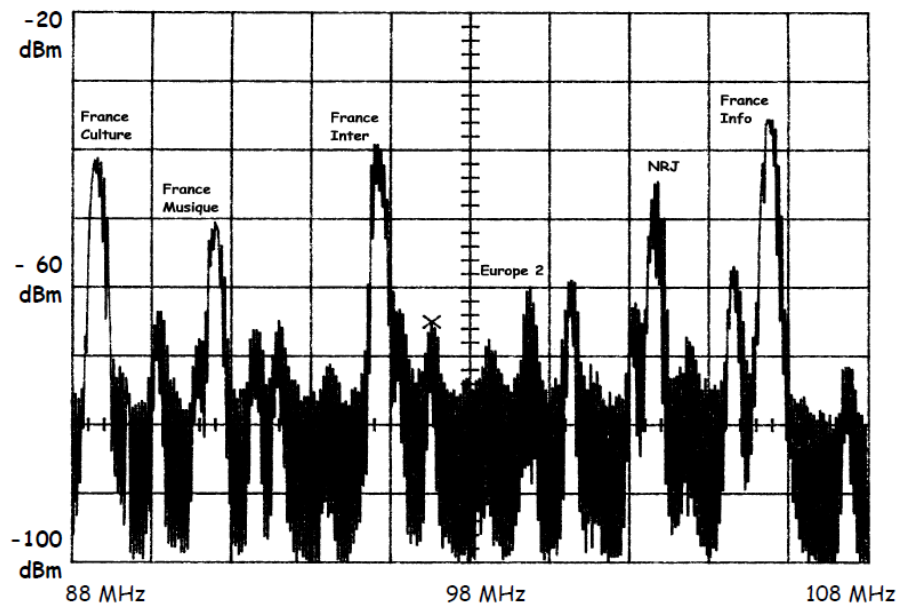


\* signal carré



Exemple : Spectre de la bande FM :

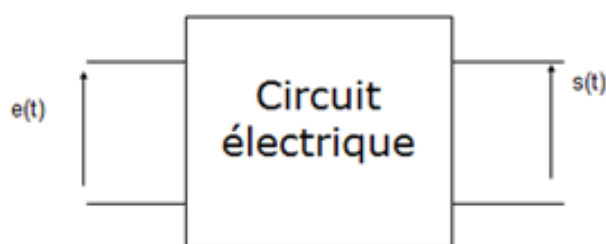
Une antenne branchée sur l'entrée d'un analyseur de spectre permet de visualiser les différentes émissions qu'on peut capter dans une bande donnée :



## II Action d'un quadripôle linéaire

### II.1 Sur un signal sinusoïdal

Rappel du cours précédent : si le quadripôle est attaqué par un signal sinusoïdal de fréquence  $f$ , le signal de sortie est lui aussi sinusoïdal de fréquence  $f$  avec, le plus souvent, une amplitude et une phase différente.



$$e(t) = E_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_e)$$

ou en notation complexe

$$\underline{e} = E_{\max} \cdot \exp[j(\omega \cdot t + \varphi_e)]$$

$$s(t) = S_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_s)$$

ou en notation complexe

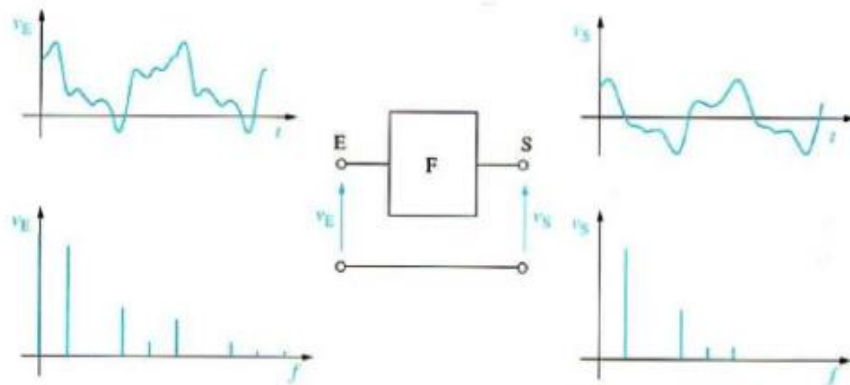
$$\underline{s} = S_{\max} \cdot \exp[j(\omega \cdot t + \varphi_s)]$$

On rappelle que la pulsation  $\omega$  est liée à la fréquence par la relation :

$$\omega = 2\pi f$$

## **II.2 Sur un signal périodique quelconque**

Un quadripôle linéaire agit séparément sur les composantes fréquentielles existantes dans un signal en les atténuant ou en les amplifiant et en leur apportant un déphasage. Pour un circuit linéaire, les composantes spectrales du signal de sortie ont les mêmes fréquences que celles du signal d'entrée.

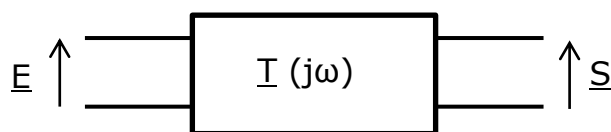


Dans cet exemple, le quadripôle agit essentiellement sur les fréquences les plus élevées ainsi que sur la composante continue.

## **III Fonction de transfert ou transmittance d'un quadripôle :**

### **III.1 Définition**

Un circuit linéaire soumis à une grandeur d'entrée pour délivrer une grandeur de sortie est décrit par sa transmittance. Elle traduit le rapport entre la grandeur de sortie et celle d'entrée. En régime sinusoïdal, c'est une fonction complexe dont l'étude permet de décrire les propriétés du circuit associé. L'étude se traduit par un ensemble de graphes, les diagrammes de Bode, décrivant l'évolution du module et la phase lorsque la pulsation de la grandeur d'entrée est variable.



Elle est définie par :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_{\max}}{E_{\max}} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$$

$$|\underline{T}(j\omega)| = G(\omega) = \frac{S_{\max}}{E_{\max}}$$

$$\text{Argument}(\underline{T}(j\omega)) = \varphi_s - \varphi_e$$

Avec G comme « Gain ».

$\underline{T}(\omega)$  est donc un nombre complexe dont le gain (module) et l'argument dépendent de la pulsation, donc de la fréquence.

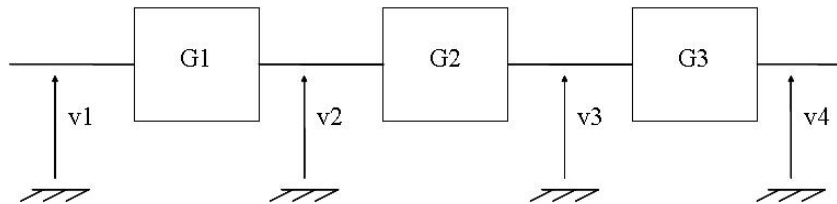


### **III.2 Gain en décibel : dB**

La valeur du gain peut évoluer sur plusieurs décades d'où une certaine difficulté de représentation graphique. On définit donc, comme pour les sons, un gain en décibel tel que :

$$G_{dB} = 20 \log(|\underline{I}|) \quad G \text{ en dB}$$

L'utilisation du gain en décibel est également plus pratique pour l'étude de structure en cascade :



Le gain total du montage :

$$G = v4 / v1 = (v4/v3) * (v3/v2) * (v2/v1) = G1 * G2 * G3$$

En décibel on obtient :

$$G_{dB} = 20 \log (v4/v1) = 20 \log ( G1 * G2 * G3 ) = 20 \log G1 + 20 \log G2 + 20 \log G3 = G1_{dB} + G2_{dB} + G3_{dB}$$

La valeur du gain en dB de cette structure est donc la somme des gains en dB de chaque étage.

Note : la valeur du déphasage entre  $v4$  et  $v1$  ( $\varphi_4 - \varphi_1$ ) sera la somme des arguments de la fonction de transfert de chaque étage.

**Remarque** : La valeur du gain en tension d'un quadripôle qui divise la tension par  $\sqrt{2}$  (ce qui correspond à une puissance divisée par 2 aux bornes d'une résistance) est égale à :

$$G = 20 \cdot \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3,0103 \text{ dB} \approx -3 \text{ dB}$$

C'est une valeur de référence que l'on retrouvera par la suite.

### **III.3 Représentation graphique de la fonction de transfert**

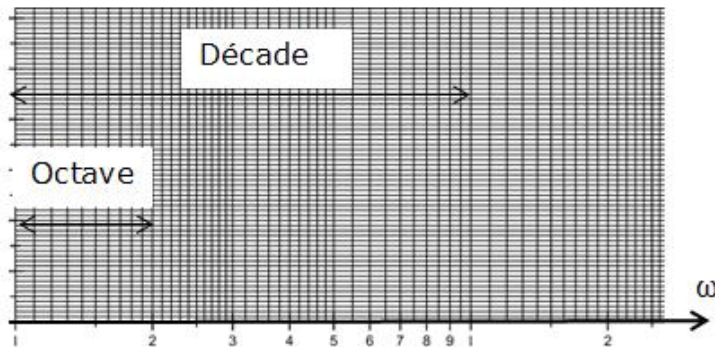
L'étude purement algébrique de la réponse fréquentielle d'un circuit ne permet pas une analyse aisée. On préfère donc une représentation graphique : les diagrammes de Bode.

Ces diagrammes vont par paires :

- La courbe de gain où l'on trace le gain (en dB) en fonction du logarithme de la pulsation (ou de la fréquence).
- La courbe de phase où l'on trace l'argument  $\varphi$  de  $\underline{I}$  (en radians) en fonction du logarithme de la pulsation.

Il ne serait pas pratique de représenter ces deux paramètres sur une large bande de fréquences à l'aide d'une échelle linéaire ; on utilise donc une échelle logarithmique pour l'axe des  $\omega$  (ou des fréquences).

Le tracé de ces deux courbes s'effectuent donc sur du papier semi-logarithmique.



Rappel :

un octave correspond à un doublement de la fréquence,  
une décade à une multiplication par 10.

## **IV Diagrammes de Bode de fonctions de transfert élémentaires du premier ordre**

On distingue :

- Les courbes réelles :

C'est la représentation graphique des fonctions :

$G_{dB} = f(\log(\omega))$  et  $\varphi = f(\log(\omega))$ .

- Les diagrammes asymptotiques :

Représentation graphique des fonctions simplifiées à l'aide d'équivalents aux bornes du domaine de définition (souvent  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$ ).

### **IV.1 Intégrateur**

En régime sinusoïdal, on obtient l'expression complexe de l'intégrale d'une grandeur en divisant le nombre complexe image de cette grandeur par  $j\omega$ :

$$\underline{T} = \frac{\omega_0}{j\omega}$$

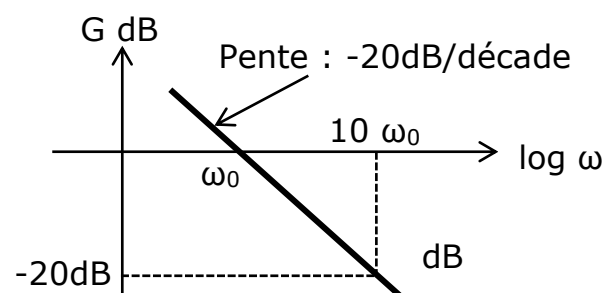
$\omega_0$ : constante

$$\begin{aligned} 20 \cdot \log |\underline{T}| &= |\underline{T}|_{dB} = G_{dB} \\ &= 20 \cdot \log(\omega_0/\omega) \\ &= 20 \cdot \log(\omega_0) - 20 \cdot \log(\omega) \end{aligned}$$

$$\omega = \omega_0 \rightarrow G_{dB} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega = 2 \cdot \omega_0 \rightarrow G_{dB} = 20 \cdot \log(1/2) \approx -6$$

$$\omega = 10 \cdot \omega_0 \rightarrow G_{dB} = -20 \text{ dB}$$



On obtient donc une droite passant par  $(\omega_0, 0)$  et de pente -20 dB/décade (ou -6 dB/octave).

**Quel que soit  $\omega$ ,  $\text{Arg}(\underline{T}) = -\pi/2$  rd**

## IV.2 Dérivateur

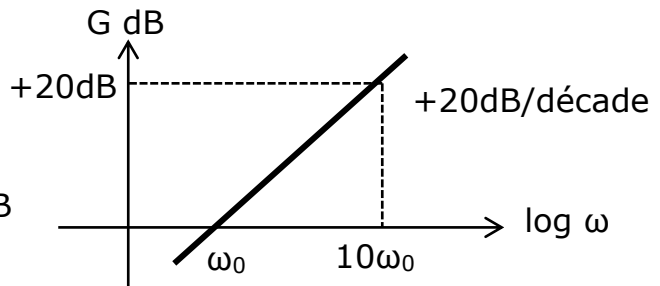
En régime sinusoïdal, on obtient l'expression complexe de la dérivée d'une grandeur en multipliant le nombre complexe image de cette grandeur par  $j\omega$ :

$$\underline{T} = \frac{j\omega}{\omega_0}$$

$\omega_0$ : constante

$$\begin{aligned} 20 \cdot \log |\underline{T}| &= |\underline{T}|_{dB} = G_{dB} \\ &= 20 \cdot \log(\omega/\omega_0) \\ &= 20 \cdot \log(\omega) - 20 \cdot \log(\omega_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega = \omega_0 &\rightarrow G_{dB} = 0 \text{ dB} \\ \omega = 2 \cdot \omega_0 &\rightarrow G_{dB} = 20 \cdot \log(2) \approx +6 \text{ dB} \\ \omega = 10 \cdot \omega_0 &\rightarrow G_{dB} = +20 \text{ dB} \end{aligned}$$



On obtient donc une droite passant par  $(\omega_0, 0)$  et de pente  $+20 \text{ dB/décade}$  (ou  $+6 \text{ dB/octave}$ ).

Quel que soit  $\omega$ ,  $\text{Arg}(\underline{T}) = \pi/2 \text{ rd}$

## IV.3 Fonction de transfert de base

Nous verrons en TD qu'à partir des fonctions de transfert précédentes, et de celle présentée dans ce paragraphe, qu'il est possible d'en déduire les diagrammes asymptotiques de Bode des principales fonctions de transfert.

$$\underline{T} = 1 + \frac{j\omega}{\omega_0}$$

$\omega_0$ : constante

$$G_{dB} = 20 \cdot \log |\underline{T}| = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{Arg}(\underline{T}) = \text{Arctan}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Diagramme asymptotique du gain:

**Pour  $\omega \ll \omega_0$**

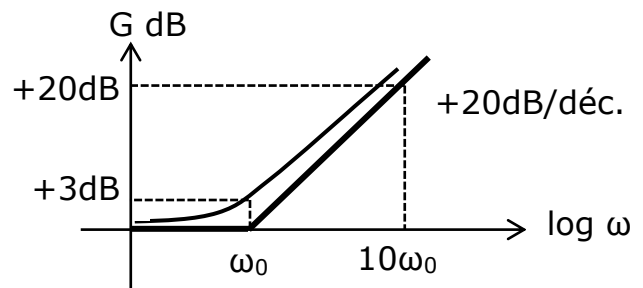
$$G_{dB} \approx 20 \log \sqrt{1^+} = 0^+ \text{ dB}$$

La courbe  $G_{dB}$  admet donc comme asymptote l'axe des abscisses.

La courbe est au-dessus de l'asymptote.

**Pour  $\omega \gg \omega_0$**

$$G_{dB} \approx 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$



La courbe  $G_{dB}$  admet donc comme asymptote la droite de pente  $20 \text{ dB/déc}$  et passant par  $(\omega_0, 0)$ . La courbe est au-dessus de l'asymptote.

**Pour  $\omega = \omega_0$**

Les deux asymptotes se coupent en  $\omega = \omega_0$  appelée pulsation de coupure.

$$G_{dB \text{ réel}} = 20 \cdot \log \sqrt{2} = +3 \text{ dB}$$

Diagramme asymptotique de la phase:

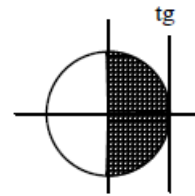
$$\text{Arg}(\underline{I}) = \text{Arctan}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

**Pour  $\omega \ll \omega_0$**

$$\text{Arg}(\underline{I}) \approx \text{Arctan } 0^+ = 0^+ \text{ rd}$$

La courbe  $\text{Arg}(\underline{I})$  admet alors l'axe des abscisses comme asymptote.

La courbe est au-dessus de l'asymptote.

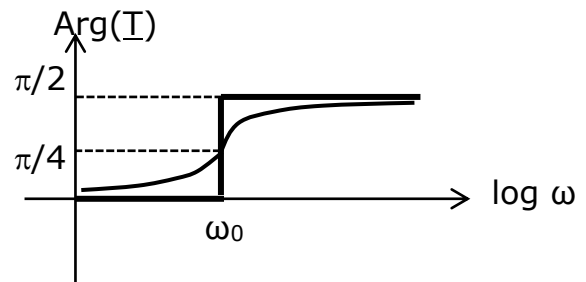


**Pour  $\omega_0 \ll \omega$**

$$\text{Arg}(\underline{I}) \approx \text{Arctan}(-\infty) = \pi/2^- \text{ rd}$$

La courbe  $\text{Arg}(\underline{I})$  admet alors la droite horizontale  $\pi/2$  rd comme asymptote.

La courbe est au-dessous de l'asymptote.



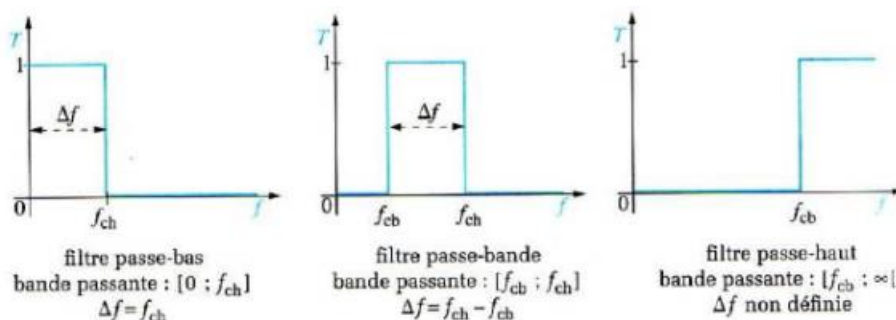
**Pour  $\omega = \omega_0$**

$$\text{Arg}(\underline{I}) = \pi/4 \text{ rd}$$

## V Filtres passifs

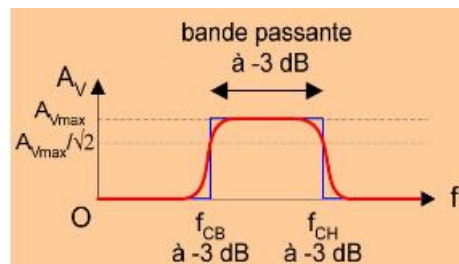
### V.1 Les principaux filtres idéaux

Le filtre idéal doit avoir une transmittance  $T = 1$  sur tout le domaine de fréquences que l'on veut transmettre, et être égale à 0 en dehors de ce domaine. La bande passante d'un filtre idéal est l'intervalle des fréquences  $[f_{cb}; f_{ch}]$  pour lesquelles  $T = 1$ .  $f_{cb}$  et  $f_{ch}$  sont les fréquences de coupure respectivement basse et haute du filtre. La largeur de bande passante  $\Delta f$  est égale à  $f_{ch} - f_{cb}$ .



## V.2 Filtres réels

Exemple d'un filtre passe-bande :



Dans le cas d'un filtre réel les fréquences de coupures sont les fréquences pour lesquelles l'amplification maximale est divisée par  $\sqrt{2}$ .

La perte de gain aux fréquences de coupure est donc :

$$20.\log A_{v\max} - 20.\log(A_{v\max}/\sqrt{2}) = 10.\log 2 = 3\text{ dB}$$

D'où l'appellation de « **fréquence de coupure à -3db** ».

**L'efficacité** d'un filtre est fonction de sa **pente**, encore appelée *rolloff* ou *slope*, exprimée en décibels par décade ou par octave.

## V.3 Exemple d'utilisation

La gamme de fréquences que peut reproduire un ampli Hi-Fi est très large, car elle part d'un minimum de 15 ou 20 hertz et peut atteindre ou même dépasser les 25000 hertz.

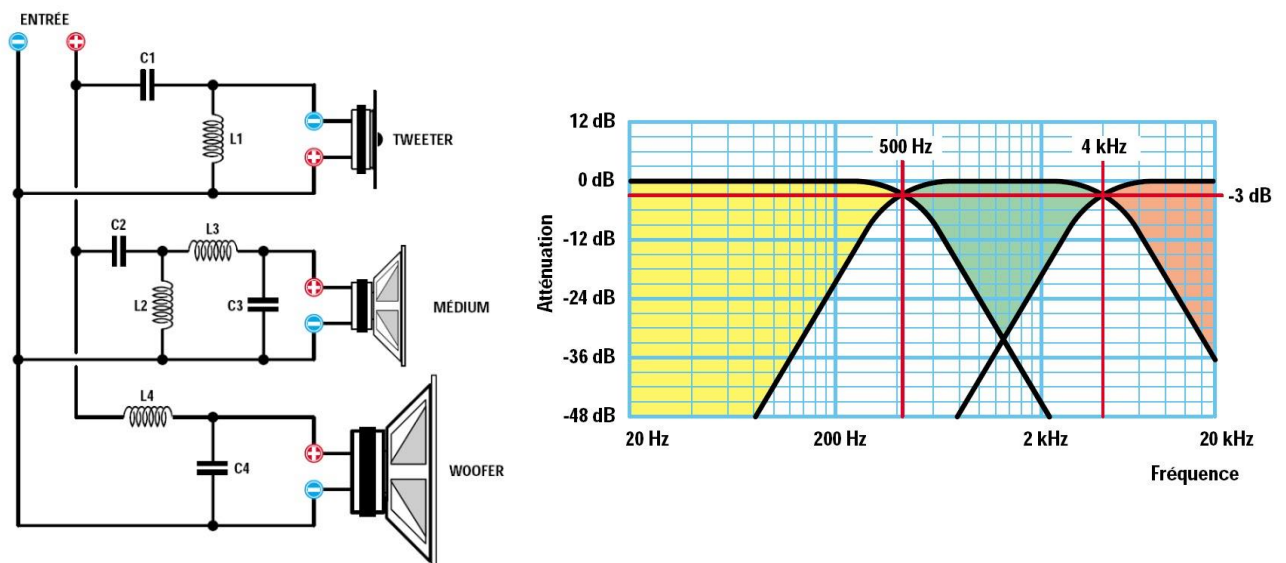
Un seul haut-parleur, même excellent, ne sera jamais capable de reproduire toute la gamme des fréquences audibles. On utilise donc plusieurs haut-parleurs :

- un haut-parleur spécialement conçu pour les graves (basses fréquences), plus généralement appelé "woofer", qui dispose d'un cône de grande dimension.
- un haut-parleur pour les aiguës (hautes fréquences), constitué d'un petit cône et communément appelé "tweeter".
- un haut-parleur "médium", qui dispose d'un cône de dimension moyenne, pour convertir fidèlement en ondes sonores les fréquences moyennes.

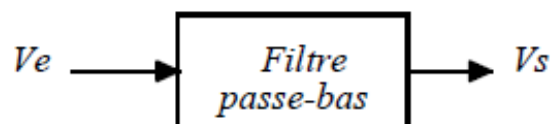


Des filtres sélectifs sont reliés entre la sortie de l'amplificateur et les haut-parleurs de l'enceinte acoustique afin d'isoler les fréquences basses, les fréquences moyennes ainsi que les fréquences hautes et de les diriger ensuite sur le haut-parleur le plus apte à leur reproduction :

Exemple d'un filtre sélectif 3 voies:

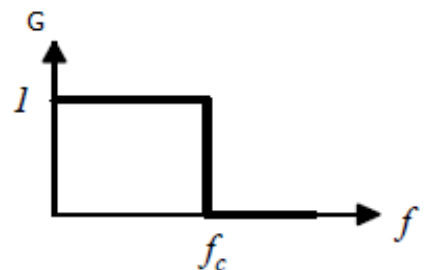


#### V.4 Filtres passe-bas du premier ordre

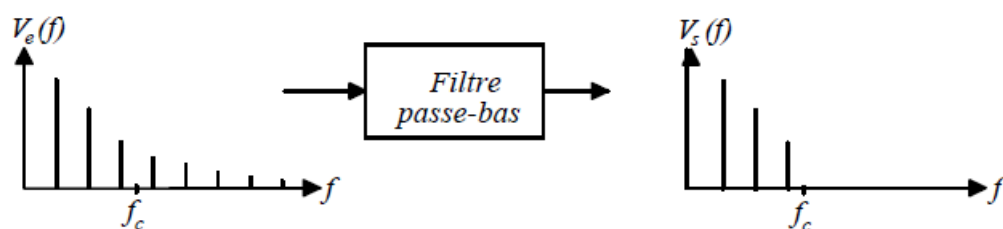


Un filtre passe-bas laisse passer les basses fréquences et arrête les fréquences élevées.

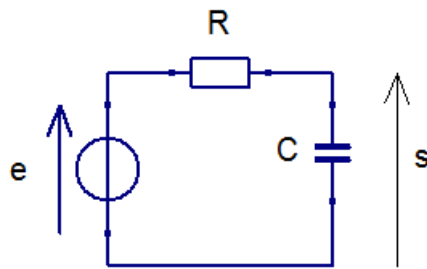
La figure ci-contre montre la réponse d'un filtre passe-bas idéal, c'est la courbe qui représente le gain en tension  $G = V_s/V_e$  en fonction de la fréquence.  $f_c$  s'appelle la fréquence de coupure. La bande passante est l'intervalle de fréquence  $[0, f_c]$ . La bande coupée est constituée de toutes les fréquences supérieures à  $f_c$ .



Toute onde sinusoïdale à l'entrée du filtre et dont la fréquence se situe dans la bande passante apparaîtra à la sortie du filtre. Mais toute onde sinusoïdale dont la fréquence est supérieure à  $f_c$  est atténuée par le filtre.



## V.4.a Exemple d'un filtre « RC ». Fonction de transfert.

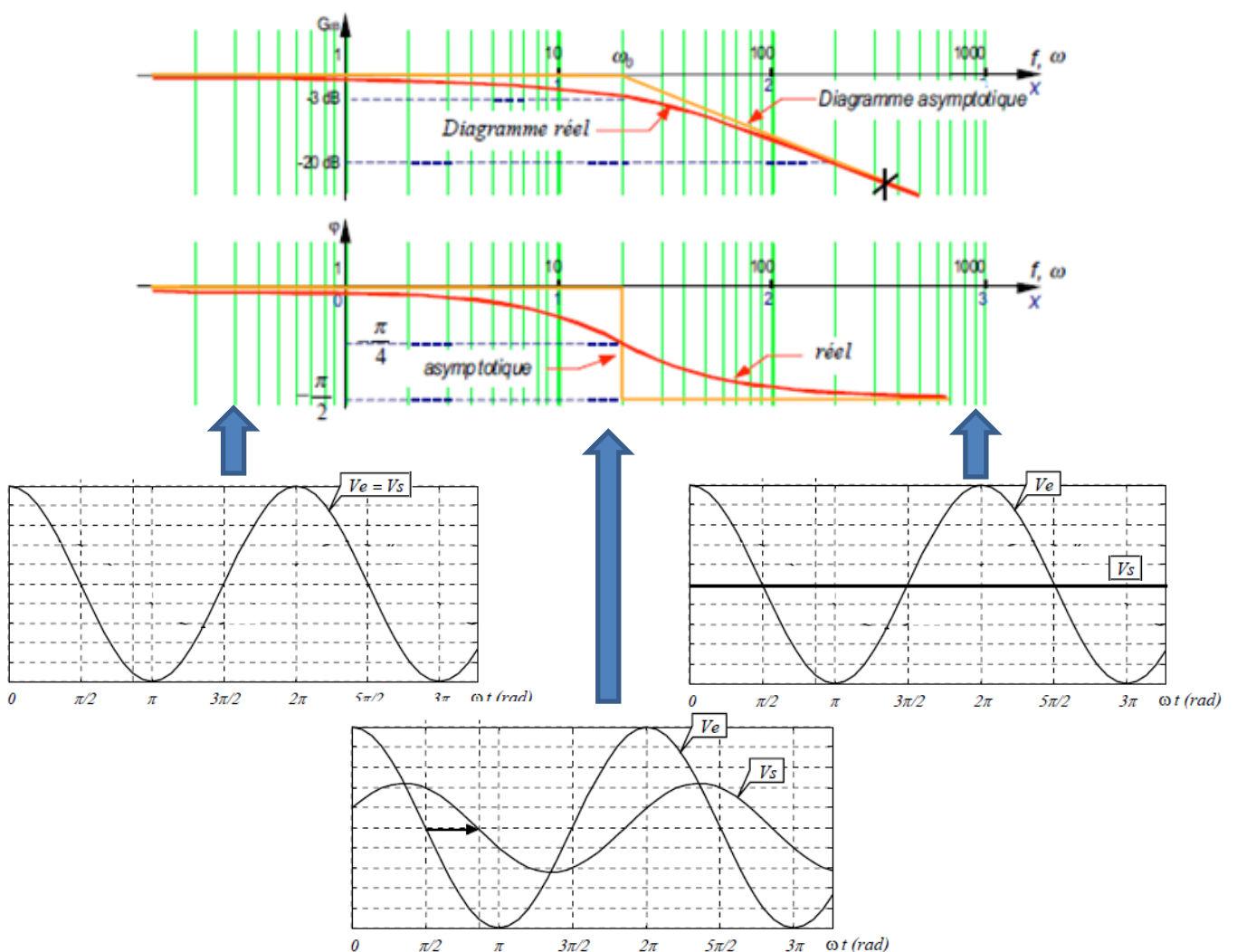


$$\underline{T(\omega)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\text{Avec : } \omega_c = \frac{1}{RC}$$

## V.4.b Diagrammes de Bode

L'étude de cette fonction de transfert en TD conduit au tracé des diagrammes de Bode ci-dessous avec  $\omega_0 = \omega_c$ :

**Remarques :**

La pente de l'asymptote en haute fréquence est de -20 décibels par décade (dB/déc). Cela s'indique parfois graphiquement par une croix.

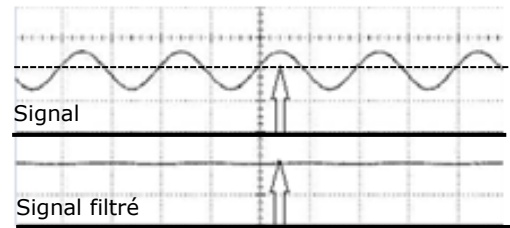
Cette valeur est typique d'un système du premier ordre.

#### V.4.c Exemples d'application d'un filtre passe-bas

##### Filtre DC (Direct current):

Un filtre dit DC sert à extraire la composante continue d'un signal. Dans le cas d'un signal périodique on récupère ainsi sa valeur moyenne.

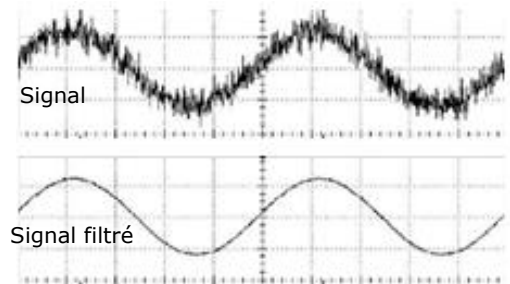
Note:  $f_c \ll f_{\text{signal}}$ .



##### Filtre antiparasite:

Un signal continu ou bien sinusoïdal parasité est filtré avec un filtre passe-bas.

Note:  $f_c \gg f_{\text{signal}}$ .



##### Exemple en musique:

Dans les haut-parleurs, il permet de sélectionner les graves (basses fréquences).

Dans les synthétiseurs utilisant le principe de la synthèse soustractive :

Une des propriétés de base d'un son est le Timbre, il représente la qualité et les caractéristiques spécifiques d'un son et d'un instrument. Ce terme décrit en fait l'apparence ou la **structure harmonique** de la forme d'onde d'un son.

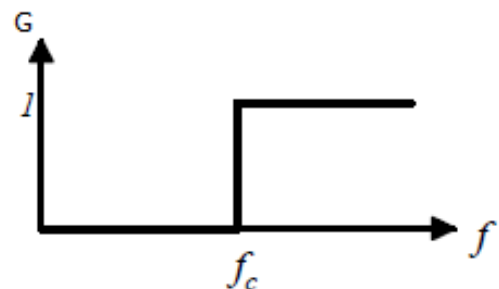
Par exemple, à hauteur (=fréquence) et intensité (=volume) égales, le son d'une **flûte à bec** ressemble à une forme d'onde **carré**, celui d'une **trompette** ressemble à une forme d'onde en **dents-de-scie**, et celui d'une **flûte traversière** à une forme d'onde **sinusoïde**.

Le principe de base de la synthèse soustractive est d'**atténuer** ou de **retirer** les harmoniques indésirables par **filtrage d'une forme d'onde initiale**. C'est pour cela qu'on l'appelle synthèse "soustractive". Le plus souvent, on utilise un filtre passe-bas mais d'autres types de filtres peuvent également être utilisés : filtre passe-haut, passe-bande, coupe-bande.

#### **V.5 Filtres passe-haut du premier ordre**

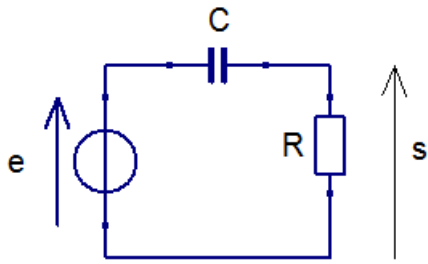
Un filtre passe-haut laisse passer les hautes fréquences et arrête les fréquences basses.

La figure ci-contre montre la réponse d'un filtre passe-haut idéal. Sa bande passante est constituée des fréquences supérieures à la fréquence de coupure  $f_c$ .





## V.5.a Exemple d'un filtre « RC ». Fonction de transfert.

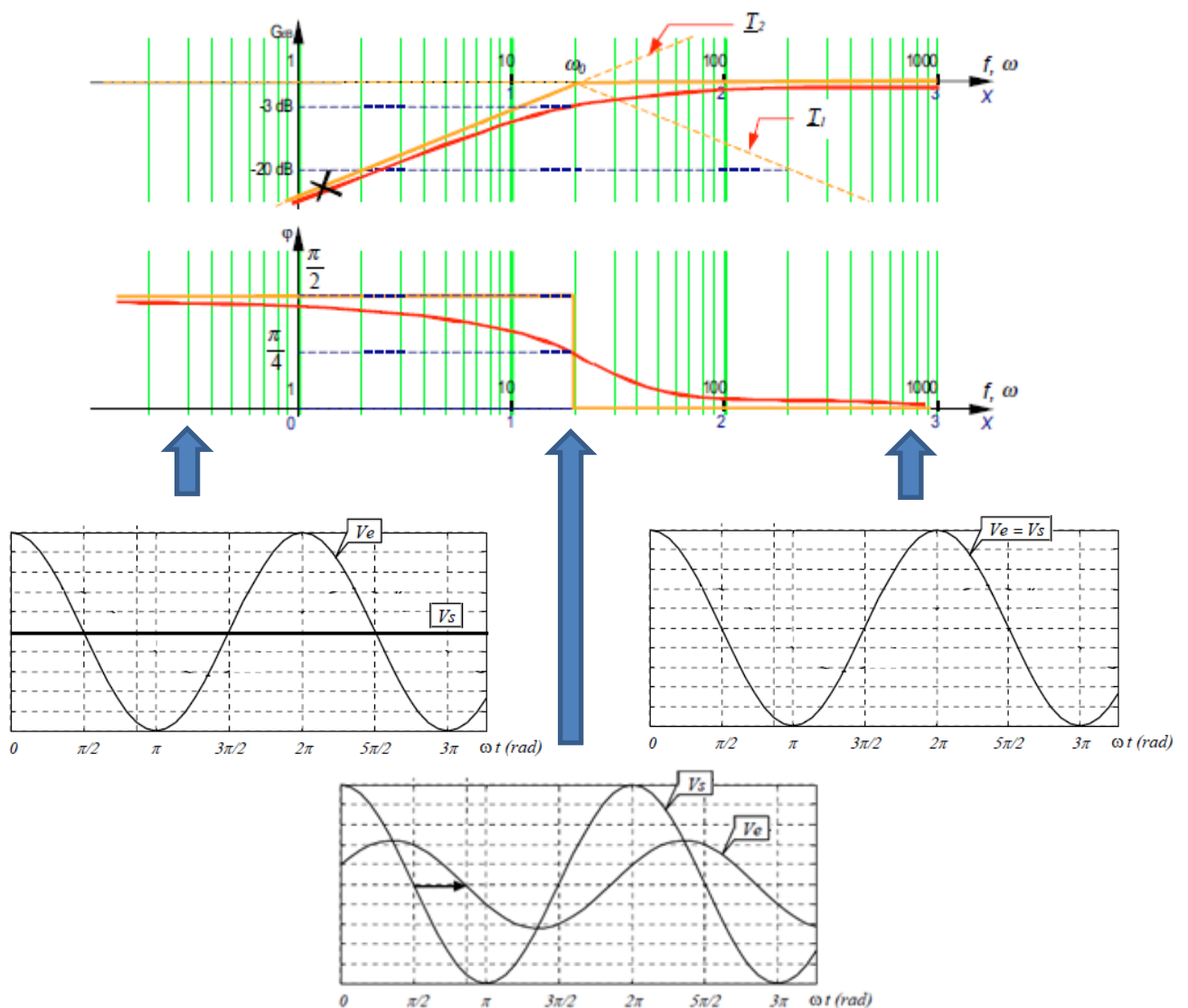


$$\underline{T(\omega)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\text{Avec : } \omega_c = \frac{1}{RC}$$

## V.5.b Diagrammes de Bode

L'étude de cette fonction de transfert en TD conduit au tracé des diagrammes de Bode ci-dessous avec  $\omega_0 = \omega_c$ :

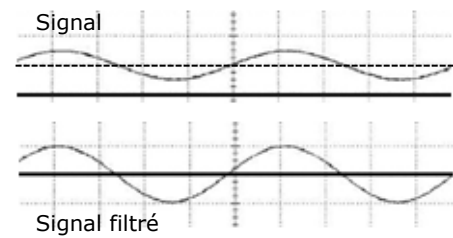


## V.5.c Exemples d'application d'un filtre passe-haut

Filtre AC (alternating current):

Contrairement au filtre passe-bas, le filtre passe-haut permet de supprimer la composante continue d'un signal, comme par exemple la position AC ou CA à l'entrée des oscilloscopes.

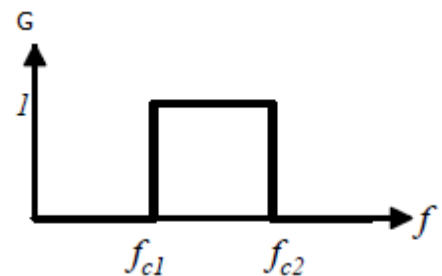
Note:  $f_c \ll f_{\text{signal}}$ .

Exemple en musique:

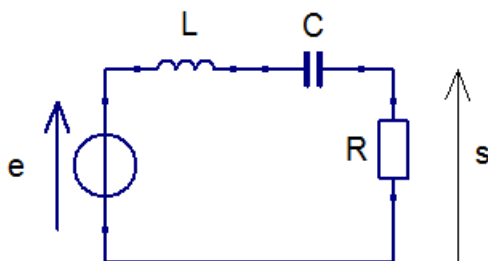
Dans les haut-parleurs, il permet de sélectionner les aigus (hautes fréquences).

**V.6 Filtres passe-bande**

La figure ci-contre montre la réponse d'un filtre passe-bande idéal. Sa bande passante est constituée des fréquences comprises entre  $f_{c1}$  et  $f_{c2}$ .



## V.6.a Exemple d'un filtre « RLC ». Fonction de transfert



$$\begin{aligned} \underline{T(\omega)} &= \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } Q &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{facteur de qualité du filtre – sans dimension}) \\ \text{et } \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

Autre expression de la fonction de transfert :

$$\underline{T(\omega)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + (j\omega)^2 LC + 1}$$

$$\underline{T(\omega)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{2mj \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad \text{avec } m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2Q} \quad (\text{coefficient d'amortissement})$$

V.6.b Diagrammes de Bode

Diagramme asymptotique du gain:

$$\underline{T(\omega)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

**Pour  $\omega \ll \omega_0$**

$$G_{dB} \approx -20 \log \sqrt{\left(\frac{Q\omega_0}{\omega}\right)^2} = -20 \log\left(\frac{Q\omega_0}{\omega}\right) = +20 \log \frac{\omega}{Q\omega_0} = +20 \log \frac{\omega}{\omega_0'}$$

La courbe  $G_{dB}$  admet donc comme asymptote la droite de pente +20 dB/déc et passant par  $(\omega_0' = Q.\omega_0, 0)$ . La courbe est au-dessous de l'asymptote.

**Pour  $\omega \gg \omega_0$**

$$G_{dB} \approx -20 \log \sqrt{\left(\frac{Q\omega}{\omega_0}\right)^2} = -20 \log\left(\frac{Q\omega}{\omega_0}\right) = +20 \log \frac{\omega}{\omega_0''}$$

La courbe  $G_{dB}$  admet donc comme asymptote la droite de pente -20 dB/déc et passant par  $(\omega_0'' = \omega_0/Q, 0)$ . La courbe est au-dessous de l'asymptote.

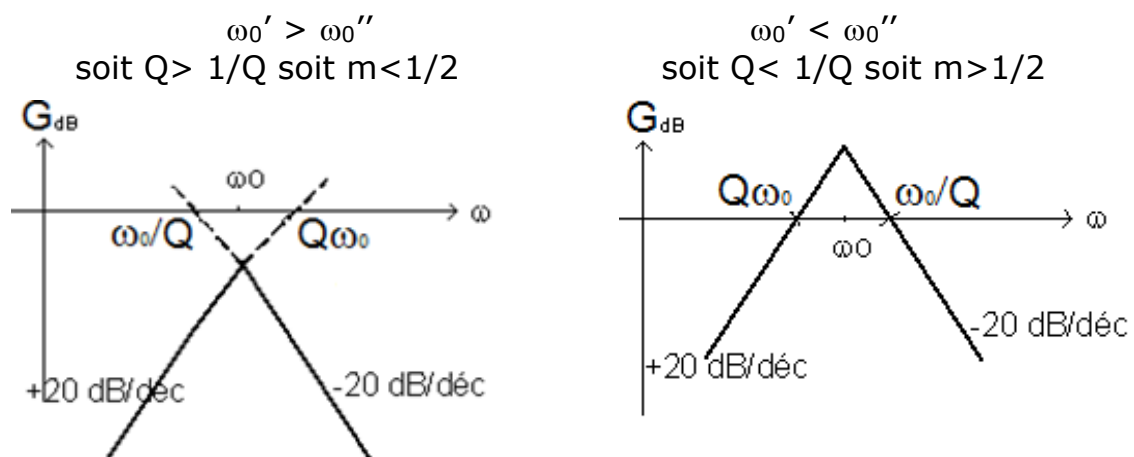
**Pour  $\omega = \omega_0$**

$$G_{dB} = 0 \rightarrow \underline{S} = \underline{E}.$$

Toutes les courbes  $G_{dB} = f(\omega)$  passent par le point 0dB pour  $\omega = \omega_0$ .

En effet, pour  $\omega = \omega_0$ , les impédances de L et de C s'annulent réciproquement ( $\underline{Z}_L = j\omega(L/C) = -\underline{Z}_C$ ), l'ensemble L et C en série se comporte comme un fil d'où  $\underline{S} = \underline{E}$ .

Nous sommes en présence de deux cas de figure pour le diagramme asymptotique suivant si  $\omega_0' > \omega_0''$  ou non:



Note : pour  $m=1/2$  ( $Q=1$ ) les 2 asymptotes se coupent en  $\omega = \omega_0$ .

Argument de T :**Pour  $\omega \ll \omega_0$** 

$$\text{Arg}(\underline{T}) \approx -\text{Arctg}\left(-\frac{Q\omega_0}{\omega}\right) = -\text{Arctan}(-\infty) = \pi/2^- \text{ rd}$$

La courbe  $\text{Arg}(\underline{T})$  admet alors la droite horizontale  $\pi/2$  rd comme asymptote.  
La courbe est au-dessous de l'asymptote

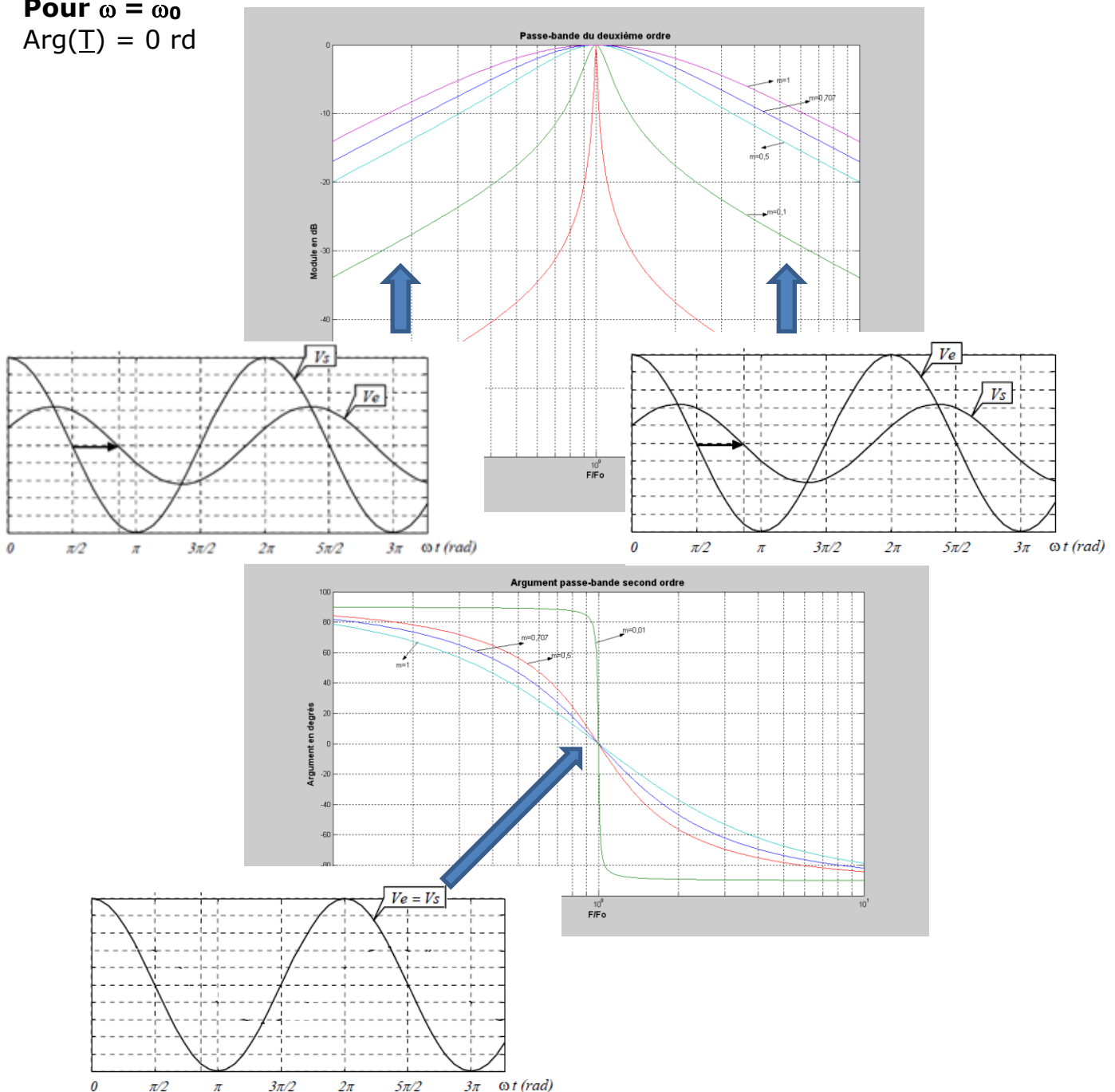
**Pour  $\omega \gg \omega_0$** 

$$\text{Arg}(\underline{T}) \approx -\text{Arctg}\left(\frac{Q\omega}{\omega_0}\right) = -\text{Arctan}(+\infty) = -\pi/2^+ \text{ rd}$$

La courbe  $\text{Arg}(\underline{T})$  admet alors la droite horizontale  $-\pi/2$  rd comme asymptote.  
La courbe est au-dessus de l'asymptote

**Pour  $\omega = \omega_0$** 

$$\text{Arg}(\underline{T}) = 0 \text{ rd}$$



### V.6.c Sélectivité du filtre - Bande Passante

Pour déterminer la bande passante à -3dB (Cf. V.2) on doit chercher les valeurs particulières de  $\omega$ , notées  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , telles que :

$$|T(\omega)| = \left| \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soit  $\omega_1$  et  $\omega_2$  telles que :

$$Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \mp \frac{1}{Q}$$

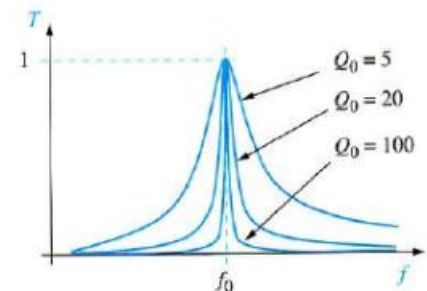
La résolution des deux équations du second degré qui en découle nous donne les deux pulsations particulières  $\omega_1$  et  $\omega_2$  :

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q} (\pm 1 + \sqrt{1 + 4Q^2})$$

D'où la bande passante BP<sub>-3dB</sub> :

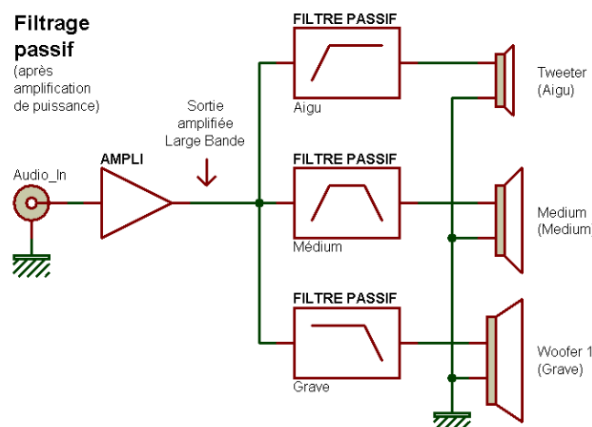
$$BP_{-3dB} = \frac{f_0}{Q} = 2mf_0 \text{ avec } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Le facteur de qualité  $Q$  caractérise bien la sélectivité du filtre. Plus il est élevé plus la bande passante autour de  $f_0$  est étroite.



### V.6.d Utilité d'un filtre passe-bande

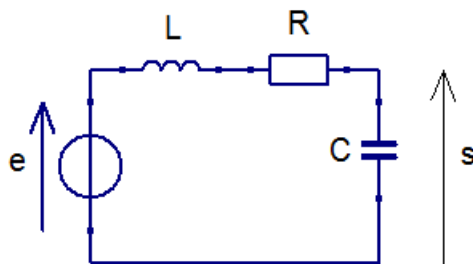
Les applications des filtres passe-bande sont nombreuses, en télécommunication on utilise la sélectivité de ces filtres pour récupérer une fréquence d'émission parmi toutes les fréquences émises. Dans ce cas, le filtre prend le nom de circuit d'accord. Dans les haut-parleurs, il permet de sélectionner les médiums (moyennes fréquences) :



## V.7 Filtres passe-bas du deuxième ordre

Exemple d'un filtre « RLC ».

### V.7.a Fonction de transfert



$$\begin{aligned} \underline{T(\omega)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} &= \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{jRC\omega + (j\omega)^2 LC + 1} \\ &= \frac{1}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \end{aligned}$$

avec  $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  (coefficient d'amortissement) et  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (pulsation propre).

### V.7.b Diagrammes de Bode

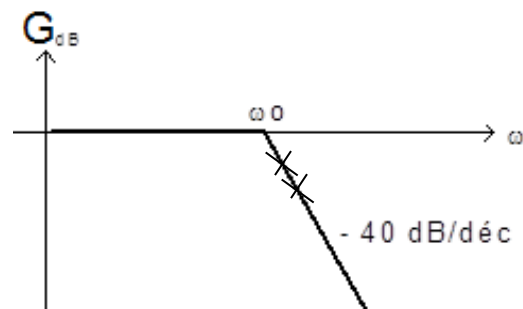
**Pour  $\omega \ll \omega_0$**

$$G_{dB} = 0 \rightarrow \underline{S} = \underline{E}.$$

**Pour  $\omega \gg \omega_0$**

$$G_{dB} \approx -20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4} = -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

La courbe  $G_{dB}$  admet donc comme asymptote la droite de pente -40 dB/déc et passant par  $(\omega_0, 0)$ . Cette valeur de -40 dB/déc est typique d'un système du deuxième ordre. Cela s'indique parfois graphiquement par 2 croix.



**Pour  $\omega = \omega_0$**

$$G_{dB} = -20 \log(2m) \quad \text{Remarque : si } m=0.5 \text{ alors } G_{dB} = 0$$

Le coefficient d'amortissement  $m$  influe sur le comportement de la courbe surtout au voisinage de  $\omega_0$ . Nous allons donc étudier plus particulièrement le comportement du module de la fonction de transfert en fonction de  $m$ .

Sachant que le dénominateur est un polynôme du second degré en  $j \frac{\omega}{\omega_0}$  on va chercher à le factoriser.

Le calcul de son discriminant nous donne  $\Delta = 4(m^2 - 1)$  ce qui nous amène à considérer les cas de figure suivants :

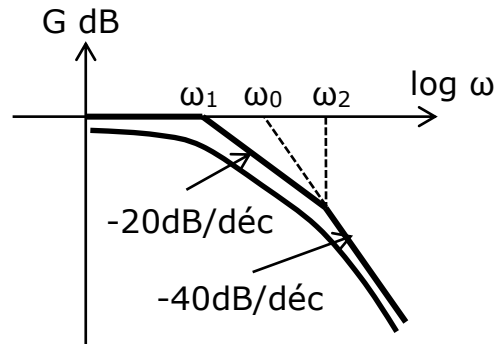
**Pour  $m \geq 1$  ( $\Delta \geq 0$ ) :** les racines du dénominateur sont réelles et il peut donc s'écrire sous la forme :  $(1 + j \frac{\omega}{\omega_1})(1 + j \frac{\omega}{\omega_2})$  avec :

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left( m \pm \sqrt{m^2 - 1} \right)$$

Dans ce cas le gain en dB sera la somme de deux gains de fonction de transfert du premier ordre :

$$G_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

Note:  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$  -> sur une échelle logarithmique,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  seront placés de part et d'autre de  $\omega_0$  et de façon symétrique.



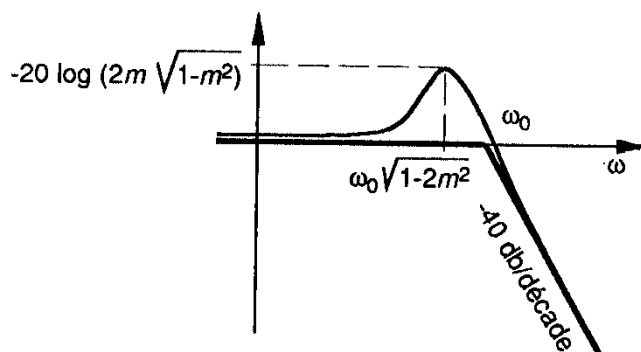
**Pour  $m=1$ ,**  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$   $G_{dB} = -20 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$

La courbe  $G_{dB}$  admet donc comme asymptote la droite de pente -40 dB/déc et passant par  $(\omega_0, 0)$ .

**Pour  $m < 1$  ( $\Delta < 0$ ) :**

La factorisation n'est pas possible. Le diagramme asymptotique reste celui avec une asymptote horizontale à 0dB suivi d'un segment de droite présentant une pente de -40dB/décade.

Toutefois on démontre, pour  $m \leq 1/\sqrt{2}$ , que la courbe présente un maximum pour  $\omega = \sqrt{1 - 2m^2}$  et que ce maximum vaut  $-20 \log (2m\sqrt{1 - m^2})$  et est au-dessus de l'axe à 0dB. Pour  $m \leq 1/\sqrt{2}$  on observe donc une surtension en sortie.



Argument de T :

**Pour  $\omega \ll \omega_0$**

$$\text{Arg}(\underline{T}) \approx \text{Arctg}(0) = 0 \text{ rd}$$

**Pour  $\omega \gg \omega_0$**

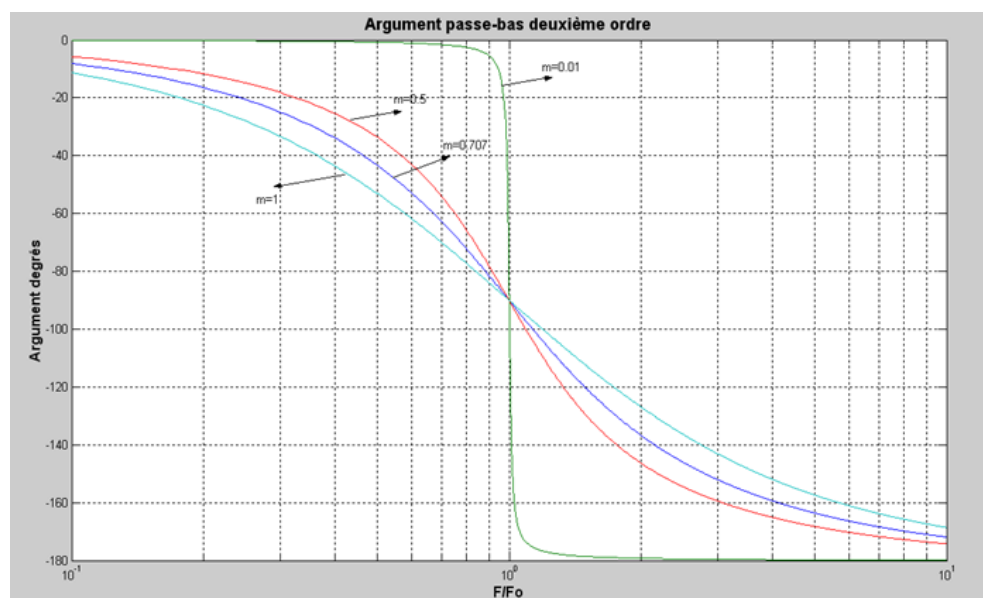
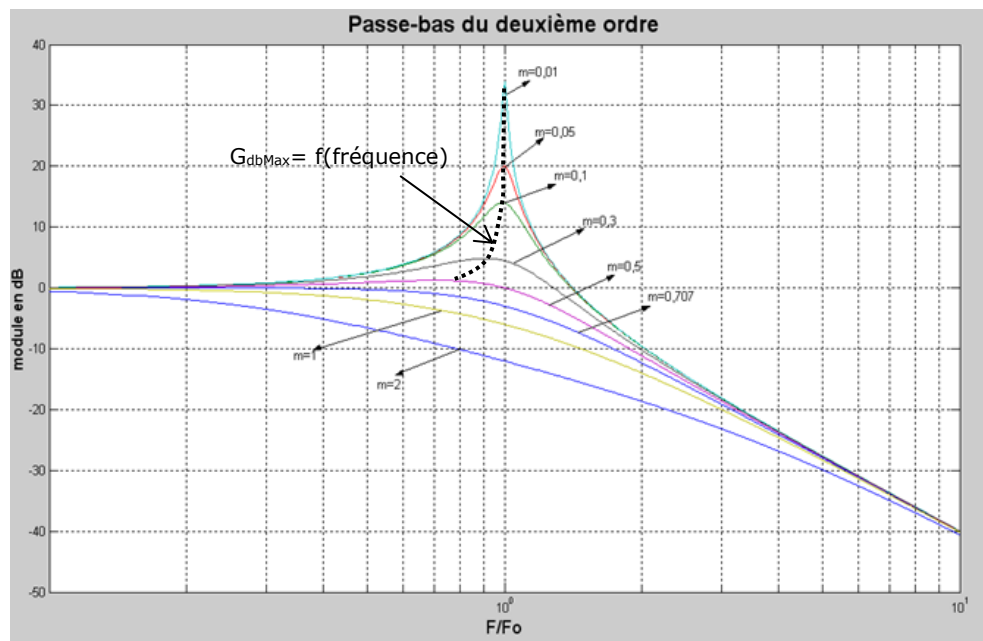
$$\text{Arg}(\underline{T}) \approx -\text{Arctg}\left(\frac{2m}{-\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = -\pi \text{ rd}$$

**Pour  $\omega = \omega_0$**

$$\text{Arg}(\underline{T}) \approx -\text{Arctg}\left(\frac{2m}{0}\right) = -\pi/2 \text{ rd}$$

## Récapitulatif :

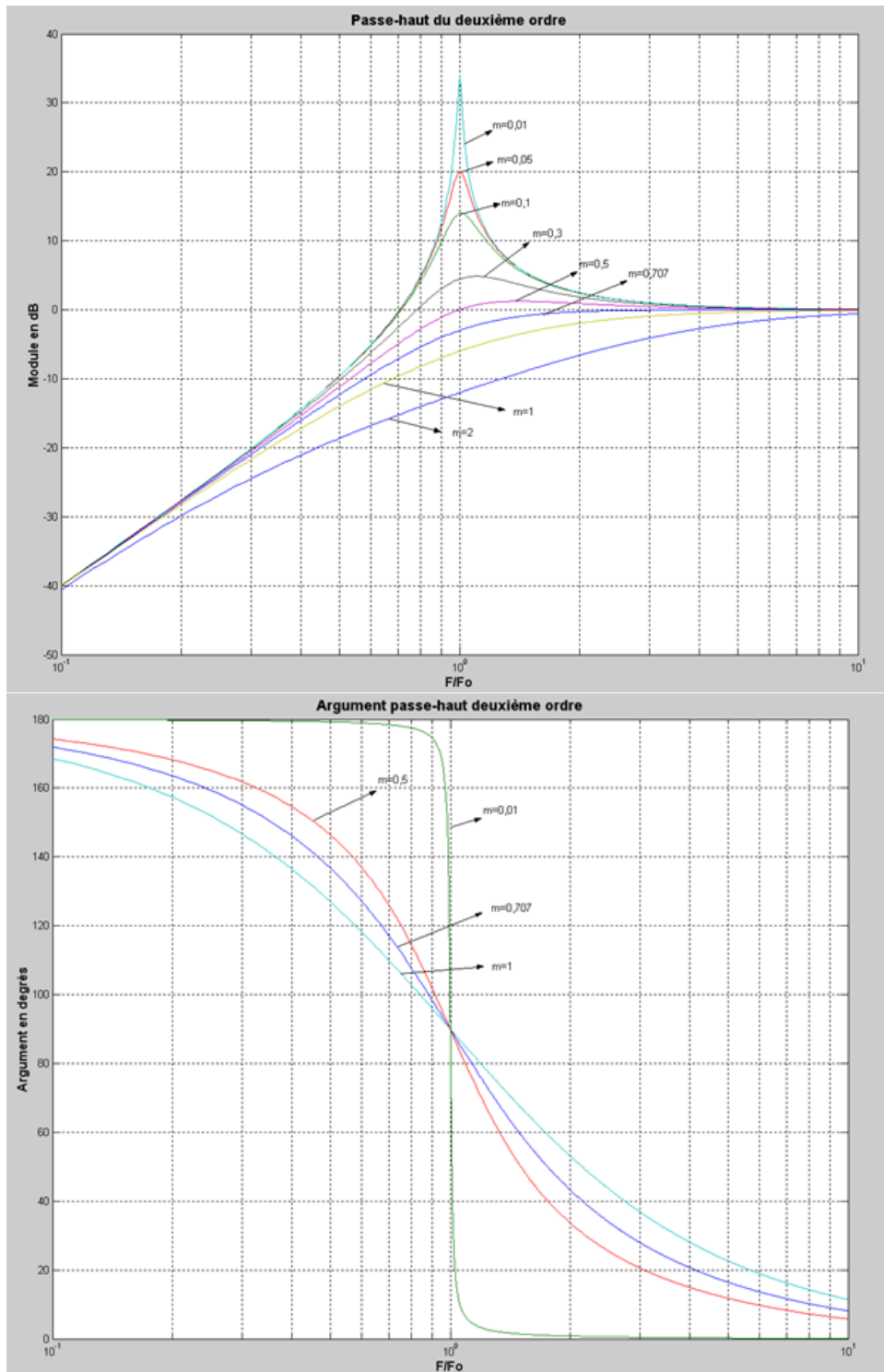
| $m$             | 0          |                            | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |     | 1          |                                | $\infty$ |
|-----------------|------------|----------------------------|----------------------|-----|------------|--------------------------------|----------|
| Décomposable    | non        | non                        | non                  | non | oui        | oui                            | oui      |
| $\omega_1$      |            |                            |                      |     | $\omega_0$ | $\omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1})$ | 0        |
| $\omega_2$      |            |                            |                      |     | $\omega_0$ | $\omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1})$ | $\infty$ |
| Surtension      | oui        | oui                        | oui                  | non | non        | non                            | non      |
| $\omega_{\max}$ | $\omega_0$ | $\omega_0\sqrt{1-2m^2}$    | 0                    |     |            |                                |          |
| Maximum         | $\infty$   | $\frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$ | 1                    |     |            |                                |          |

Remarques:

- la fréquence pour laquelle le gain est maximum est dépendant de  $m$  et elle est différente de  $F_o$ .
- pour  $f=F_o$  le déphasage est de  $-90^\circ$  quel que soit la valeur de  $m$ .
- on détermine donc expérimentalement  $F_o$  en recherchant la fréquence pour laquelle le déphasage est de  $-90^\circ$ .



## V.8 Filtres passe-haut du deuxième ordre



## VI Compléments

### VI.1 Ordre d'un système

On peut reconnaître l'ordre d'un système à la pente du gain : un système du premier ordre se comporte asymptotiquement avec un affaiblissement de 6 décibels par octave, ou 20 décibels par décade. En général,  $n$  fois 20dB/décade pour un système du nième ordre.

## VI.2 Tableau récapitulatif

Note: pour les filtres passifs :  $A=1$ .

| Type   | Forme canonique   |
|--|---|
| Passe bas du 1 <sup>er</sup> ordre   | $\frac{A}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$   |
| Passe bas du 2 <sup>nd</sup> ordre<br>m: coefficient d'amortissement                           | $\frac{A}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$  |
| Passe haut du 1 <sup>er</sup> ordre  | $\frac{A j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$   |
| Passe haut du 2 <sup>nd</sup> ordre  | $\frac{A \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$     |
| Passe bande<br>Facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\omega_{c2} - \omega_{c1}}$             | $A \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$                    |
| Coupe bande (réjecteur)<br>Facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\omega_{c2} - \omega_{c1}}$ | $A \frac{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ |
| Passe tout   | $A \frac{1 - j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$   |

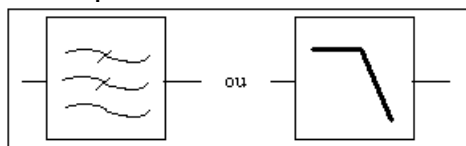
Le terme  $1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$  peut se mettre sous la forme :  $\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)$  avec  $\omega_{1,2} = \omega_0 (m \pm \sqrt{m^2 - 1})$  si  $m \geq 1$ .

De plus, si  $m \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  alors on montre que pour un passe bas ou un passe haut du 2<sup>nd</sup> ordre

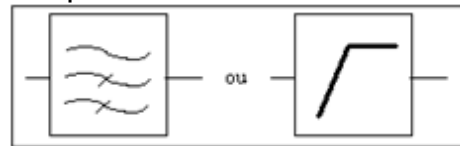
il va y avoir une surtension en sortie à  $\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$  :  $\left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{\omega=\omega_{\max}} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$ .

## VI.3 Représentation symbolique

Filtre passe-bas :



Filtre passe-haut :



Filtre passe-bande :

