MATRICES

MATRICES TRIANGULAIRES, TRANSPOSÉE, TRACE, MATRICES SYMÉTRIQUES

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.

1 Matrices triangulaires, matrices diagonales

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors

1. Si $\forall i > j,\ a_{i,j} = 0$, alors A est **triangulaire supérieure**.
2. Si $\forall i < j,\ a_{i,j} = 0$, alors A est **triangulaire inférieure**.
3. Si $\forall i \neq j,\ a_{i,j} = 0$, alors A est **diagonale**.

Théorème 1 *Une matrice triangulaire $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.*

2 Matrice transposée

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & . & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & . & a_{2,p} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & . & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Définition 1 *On appelle matrice transposée de A la matrice $A^T \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. Elle est définie par :*

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & . & . & . & a_{n,p} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & . & . & . & a_{n,2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{1,p} & a_{2,p} & . & . & . & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Proposition 1 ***(propriétés de la transposée)*** *Soient $(A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors,*

1. $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.
2. $(AB)^T = B^T A^T$.
3. $(A^T)^T = A$.
4. *Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

3 Trace

Définition 2 *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On définit la **trace** de la matrice A, notée $tr(A)$ comme étant la somme des éléments diagonaux de A, c'est-à-dire*

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}.$$

Théorème 2 *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors*

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.
2. $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$.
3. $tr(A^T) = tr(A)$.
4. $tr(AB) = tr(BA)$.

4 Matrices symétriques et matrices antisymétriques

Définition 3 *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

1. *Si $A^T = A$, alors A est une matrice symétrique.*
2. *Si $A^T = -A$, alors A est une matrice antisymétrique.*

Remarque 1 *Si A est antisymétrique, alors les coefficients de la diagonale de A sont nuls.*