DIMENSION FINIE
DIMENSION

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie** si E admet une famille génératrice finie de E.*

Théorème 1 *Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Alors*

1. *E admet au moins une base.*
2. *Toutes les bases de E ont le même cardinal.*

Définition 2 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Si $E \neq \{0_E\}$, on appelle dimension de E, notée $\dim(E)$, le cardinal d'une base de E.*
2. *Si $E = \{0_E\}$, on pose $\dim(E) = 0$.*

Exemples : $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

Lemme 1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille génératrice de E et $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille libre. Alors $n \leq p$.*

Proposition 1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base ayant n vecteurs. Alors,*

1. *Toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.*
2. *Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.*
3. *Toute base de E possède n vecteurs.*
4. *Toute famille de E d'au moins $n + 1$ vecteurs est liée.*

Proposition 2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $F = (u_1, ..., u_n)$ une famille d'éléments de E. On a l'équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *F est une base de E.*
2. *F est une famille libre de E.*
3. *F est une famille génératrice de E.*