ESPACES VECTORIELS
PROPRIÉTÉS DES ESPACES VECTORIELS

1 Axiomes d'un espace vectoriel

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et un ensemble E muni d'une loi interne « $+$ » et d'une loi externe « . » définies par

$$+ \; : \; \begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & E \\ (u_1, u_2) & \mapsto & u_1 + u_2 \end{array} \quad \text{et} \quad . \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda.u \end{array}$$

1.1 Axiomes relatifs à la loi interne

L'espace vectoriel $(E, +)$ est commutatif, associatif et admet un **unique** élément neutre 0_E et un **unique** symétrique pour tout élément de E.

1.2 Axiomes relatifs à la loi externe

1. 1 est l'élément neutre de la multiplication de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire
$$\forall\, u \in E,\ 1.\, u = u.$$
2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall\, u \in E$, $\lambda.(\mu.\, u) = (\lambda\mu).\, u$.

1.3 Axiomes liant les deux lois

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall (u_1, u_2) \in E^2$, $\lambda.(u_1 + u_2) = \lambda.u_1 + \lambda.u_2$.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall u \in E$, $(\lambda + \mu).\, u = \lambda.u + \mu.u$.

2 Règles de calcul

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Alors, pour tous $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
- $0.\, u = 0_E$.
- $\lambda.\, 0_E = 0_E$.
- $(-1).\, u = -u$.
- $\lambda.\, u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E$.

Remarque 1 *1. On définit la **soustraction** de u et de v comme étant la somme de u et de l'opposé de v, c'est-à-dire*
$$u - v = u + (-v).$$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall\, (u, v) \in E^2$, $\lambda.(u - v) = \lambda.u - \lambda.v$.

3. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall\, u \in E$, $(\lambda - \mu).u = \lambda.u - \mu.u$.