ESPACES VECTORIELS
INTRODUCTION AUX ESPACES VECTORIELS

1 Définition d'un espace vectoriel

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et un ensemble E muni d'une loi interne $+$ et d'une loi externe . définies par

$$+ \;:\; \begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (u_1, u_2) & \mapsto & u_1 + u_2 \end{array} \quad \text{et} \quad . \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda.u \end{array}$$

L'espace $(E, +, .)$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}-$espace vectoriel ssi les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\forall (u_1, u_2) \in E^2, u_1 + u_2 = u_2 + u_1$.
2. $\forall (u_1, u_2, u_3) \in E^3, u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3$ (**associativité**).
3. E admet un **élément neutre** $0_E \in E$, c'est-à-dire $\forall u \in E, u + 0_E = u$.
4. Tout élément $u \in E$ admet un symétrique u' tel que $u + u' = 0_E$. On note $u' = -u$.
5. $\forall u \in E,\ 1.\ u = u$.
6. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall u \in E, \lambda.(\mu.\ u) = (\lambda\mu).u$.
7. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall (u_1, u_2) \in E^2, \lambda.(u_1 + u_2) = \lambda.u_1 + \lambda.u_2$.
8. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall u \in E, (\lambda + \mu).\ u = \lambda.u + \mu.u$.

2 Vocabulaire

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.
2. L'**élément neutre** s'appelle aussi le **vecteur nul**.
3. Le **symétrique** d'un élément de E s'appelle aussi **opposé**.
4. La loi de composition interne sur E est appelée souvent **addition**.
5. La loi de composition externe sur E est appelée souvent **multiplication** par un scalaire.
6. Nous pouvons définir par récurrence, l'addition de n vecteurs u_1, u_2, ..., u_n d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et on notera

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$