SYSTÈMES LINÉAIRES
RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DE GAUSS

1 Système échelonné

On dit qu'un système est **echelonné** si le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne. Il a donc la forme suivante :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & = & \dots \\ \\ & + & & + & & + & \dots & + & a_{p,n}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

Il est dit **échelonné réduit** si en plus le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1 et si c'est le seul élément non nul de sa colonne.

2 Opérations sur les équations d'un système

On note de haut en bas L_1, L_2,...., L_n les n équations ou lignes du système. On définit sur ces lignes les opérations suivantes, dites **élémentaires** :

- Échanger deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplication d'une ligne par un réel non nul : $L_i \leftarrow \alpha L_i, \alpha \in \mathbb{R}^\star$.
- Additionner à une ligne un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{R},\ i \neq j$).

3 Méthode du pivot de Gauss

La méthode de pivot de Gauss consiste à déterminer l'inconnue x_1 de $(p-1)$ équations du système à p lignes n colonnes, puis l'inconnue x_2 de $(p-2)$ équations restantes, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'un système équivalent dont la résolution ou l'analyse est plus simple.

Les règles de calcul algébrique élémentaire permettent de vérifier directement que les opérations suivantes préservent la (ou les) solution (s) du système à p lignes et n colonnes.

Remarque 1 *Notez que pour appliquer la méthode du pivot de Gauss, il faut absolument que le premier coefficient de la première ligne soit non nul.*

4 Système homogène

Un système est dit homogène si le second membre est nul.

Théorème 1 *Tout système homogène d'équations linéaires dont le nombre d'inconnues est strictement plus grand que le nombre d'équations a une infinité de solutions.*