ESPACES VECTORIELS

IMAGE, NOYAU, ESPACE $\mathcal{L}(E, F)$, COMPOSITION ET RÉCIPROQUE D'APPLICATIONS LINÉAIRES

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1 Image et noyau d'une application linéaire

Proposition 1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire et E' un sous-espace vectoriel de E. ALors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F. En particulier $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F appelé **image** de f et noté $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi*

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{f(x);\ x \in E\}, \\ &= \{y \in F,\ \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}. \end{aligned}$$

Remarque 1 *$f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.*

Définition 1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Le **noyau** de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$ est défini par*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}.$$

C'est l'image réciproque du vecteur nul de F : $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\})$.

Proposition 2 *$\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 3 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est **injective** si et seulement si*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 4 *$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 5 *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors gof est une application linéaire de E dans G.*

Proposition 6 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.*