MATRICES
MULTIPLICATION DE MATRICES

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^\star)^3$.

1 Produit de deux matrices

Définition 1 *Soient $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors, le produit $C = AB$ est une matrice de taille $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque 1
1. *Le produit matriciel n'est pas commutatif en général.*
2. *$AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.*

Proposition 1 *Soient A, B et C des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pourvu que les produits et sommes ci-dessous soient bien définis, on a*

1. *$A(BC) = (AB)C$ (Associativité).*
2. *$A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)A = BA + CA$ (Distributivité).*
3. *$A.0 = 0$ et $0.A = 0$.*
4. *$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.*

2 Matrice identité, puissances d'une matrice et formule du binôme de Newton

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & . & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est la **matrice identité** d'ordre n.

Proposition 2 *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $I_n.A = A$ et $A.I_p = A$.*

Définition 2 *(**puissances d'une matrice**) Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Autrement dit,*

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p\ facteurs}.$$

Proposition 3 *(**Formule du binôme de Newton**) Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $A \times B = B \times A$. Alors, $\forall p \in \mathbb{N}$*

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} A^k B^{p-k}.$$