SYSTÈMES LINÉAIRES
INTRODUCTION AUX SYSTÈMES LINÉAIRES

1 Équation d'une droite et d'un plan

Une équation d'une **droite** dans le plan est une équation linéaire à deux inconnues x et y de la forme

$$ax + by = c,$$

où a, b et c sont des paramètres réels.

Une équation d'un **plan** dans l'espace est une équation linéaire à trois inconnues x, y et z de la forme

$$ax + by + cz = d,$$

où a, b, c et d sont des paramètres réels.

2 Résolution d'un système par la méthode de substitution

On considère le système linéaire à deux équations, deux inconnues :

$$(S) \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta, \end{cases}$$

où a, b, c, d, α et β sont des paramètres réels.

Le principe de la méthode de substitution est le suivant :

1. à l'aide de l'une des équations, exprimer l'une des inconnues, par exemple y, en fonction de l'autre x.
2. remplacer cette inconnue par son expression dans l'autre équation et résoudre cette équation d'inconnue x, d'où la valeur de x.
3. remplacer la valeur trouvée pour x dans l'expression obtenue pour y en fonction de x.

3 Méthode de Cramer

On considère le système linéaire à deux équations, deux inconnues :

$$(S) \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta, \end{cases}$$

où a, b, c, d, α et β sont des paramètres réels.

- On note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ le **déterminant**.
- Si $ad - bc \neq 0$, alors le système (S) admet une unique solution dont les coordonnées (x, y) sont

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}$$

Remarque 1 *Pour le numérateur de la première coordonnée x, on remplace la première colonne par le second membre et pour la seconde coordonnée y, on remplace la seconde colonne par le second membre.*

4 Résolution par inversion de matrice

On considère le système linéaire à deux équations, deux inconnues :

$$(S) \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta, \end{cases}$$

où a, b, c, d, α et β sont des paramètres réels.

Le système linéaire (S) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$AX = B,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Si le déterminant de la matrice A est non nul, c'est à dire si $ad - bc \neq 0$, alors la matrice A est **inversible** et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

et l'unique solution X est donnée par $X = A^{-1}Y$.