MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES
RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Rang d'une famille de vecteurs

1.1 Définition

Définition 1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs de E. On appelle* ***rang*** *de la famille $(x_1, x_2, ...x_n)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille. On note*

$$rg(x_1, x_2, ..., x_n) = \dim\left(Vect(\{x_1, x_2, ..., x_n\})\right).$$

1.2 Propriétés

Proposition 1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille de vecteurs de E.*

1. $rg(x_1, x_2, ..., x_p) \leq p$.
2. $rg(x_1, x_2, ..., x_p) \leq n$.
3. $rg(x_1, x_2, ..., x_p) = p \Leftrightarrow (x_1, x_2, ..., x_p)$ *est libre.*
4. $rg(x_1, x_2, ..., x_p) = n \Leftrightarrow (x_1, x_2, ..., x_p)$ *est génératrice de E.*

2 Rang d'une matrice

2.1 Définition

Définition 2 *Le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes.*

2.2 Propriétés

Proposition 2 *Le rang d'une matrice échelonnée par colonnes est égal au nombre de colonnes non nulles.*

Proposition 3 *Le rang d'une matrice n'est pas modifié si*

- *on multiplie une colonne par un scalaire.*
- *on ajoute à une colonne un multiple d'une autre colonne.*
- *on échange deux colonnes.*

Proposition 4 *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors, A est inversible si et seulement si $rg(A) = n$.*

Proposition 5 *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors, $rg(A) = rg(A^T)$.*