MATRICES
SYSTÈMES LINÉAIRES ET MATRICES ÉLÉMENTAIRES

1 Matrices et systèmes linéaires

Soit le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = b_2 \\ ... \\ ... \\ ... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n = b_n \end{array}\right.$$

d'inconnues x_1, x_2,..., x_n.
Il peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & . & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & . & . & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Remarque 1 *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

Proposition 1 *Si la matrice A est inversible, alors le système linéaire $AX = B$ admet une solution unique $X = A^{-1}B$.*

2 Équivalence à une matrice échelonnée

Définition 1
1. *Deux matrices A et B sont dites équivalentes par lignes si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$.*
2. *Une matrice est dite **échelonnée** si le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.*
3. *Une matrice est dite **échelonnée réduite** si elle est échelonnée et si le premier coefficient non nul d'une ligne (non nulle) vaut 1 et si c'est le seul élément non nul de sa colonne.*

Proposition 2 *La matrice échelonnée réduite $\widetilde{A}$ obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes est $unique$.*

3 Matrices élémentaires et inverse d'une matrice

Proposition 3 *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si sa forme échelonnée réduite est la matrice identité I_n.*

Théorème 1 *Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. On note (S) le système linéaire $AX = B$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La matrice A est inversible.*
2. *Le système homogène associé à $AX = 0$ n'admet que la solution nulle comme solution.*
3. *Pour tout second membre B, le système linéaire $AX = B$ a une unique solution. Dans ce ca là, $X = A^{-1}B$.*