Cours & Travaux dirigés

Circuits linéaires en régime variable

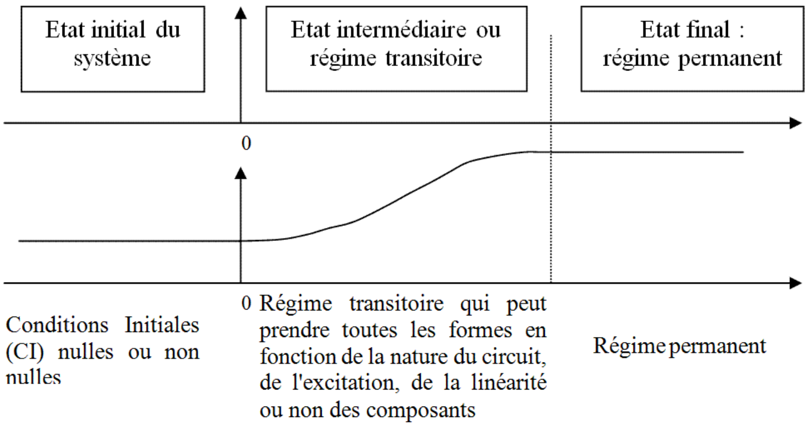
Les régimes transitoires du premier et du second ordre.

Eric Guignard

TABLE DES MATIERES

Introduction

Un régime transitoire est un régime électrique qui apparait pendant une durée limitée lorsqu'un circuit électrique passe d'un régime permanent à un autre. En effet lorsqu'on perturbe temporairement un circuit électrique (mise sous tension ou hors tension, changement de régime, modification d'un paramètre, ...), il s'écoule toujours une durée variable avant que le système retrouve un régime permanent stable.
La dépendance au cours du temps du nouveau régime permanent est souvent analogue à celle des sources d'alimentation (continu si échelon, linéaire si rampe, etc …).



La recherche de l'évolution des courants et des tensions pendant un régime transitoire conduit à la démarche systématique suivante :

(1) Etablissement de l'équation différentielle associée à la variable étudiée en utilisant les lois de Kirchhoff et les équations caractéristiques des dipôles présents dans le circuit étudié.

(2) Résolution de l'équation différentielle.

(3) Détermination des constantes d'intégration de la solution trouvée en utilisant les Conditions Initiales (C.I.)

Après avoir introduit deux nouveaux dipôles (le condensateur et l'inductance) ce support vous présentera deux exemples typiques de circuit alimentés par un échelon de tension et régit respectivement par une équation différentielle du premier ordre et par une équation différentielle du deuxième ordre.

Notations utilisées dans ce cours :
Sauf précisions, on utilise les notations conventionnelles suivantes :

"minuscules" : u, i, p, … : grandeurs fonctions du temps, en remplacement de u(t), i(t), p(t), …

"MAJUSCULES" : U, I, Umoy, … : grandeurs indépendantes du temps.

Analyse des circuits linéaires en régime transitoire

I Rappel sur la définition du courant électrique

Le courant électrique est un phénomène de déplacement de charges dû à l'action d'un champ électrique.
La charge élémentaire exprimée en Coulomb est : e = $1,6.10^{-19}$ C.
Dans un conducteur ces charges sont des électrons et chacun transporte la charge : - e donc $-1,6.10^{-19}$ C.

L'intensité du courant électrique dans un conducteur est la grandeur algébrique à un instant donné qui quantifie le débit de la quantité de charges q qui traverse une section droite de ce conducteur :

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$$

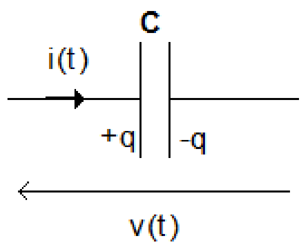
i en Ampère (A)
dq en Coulomb (C)
dt en Secondes (s)

Pour des raisons historiques, le sens conventionnel d'un courant positif est celui du déplacement des charges positives. Il est donc opposé à la direction de déplacement des électrons et q=Ne.

II Dipôles réactifs

II.1 Dipôle condensateur

Un condensateur est un composant électronique élémentaire, constitué de deux armatures conductrices (appelées « électrodes ») en influence totale et séparées par un isolant polarisable (ou « diélectrique »). Sa propriété principale est de pouvoir stocker des charges électriques opposées sur ses armatures lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel.



Toutefois cette accumulation ne peut-être infinie en raison des répulsions mutuelles sur chacune des armatures.
Le condensateur a donc une « capacité » de stockage de charges caractérisé par le paramètre C appelé capacité électrique, exprimée en farads (F) et indépendante du temps (ordres de grandeur usuels: µF, nF, pF).

La charge instantanée q accumulée par un condensateur dépend donc de la différence de potentiel à laquelle il est soumis et est proportionnelle à sa capacité électrique C :

$$\boxed{q = C.v}$$

Sachant que la circulation des charges engendre un courant défini par la relation i= dq/dt, nous obtenons l'équation caractéristique du condensateur:

$$\boxed{i = C.\frac{dv}{dt}}$$

C'est cette relation, équation différentielle linéaire à coefficient constant, que nous utiliserons pour l'analyse des circuits avec condensateurs.

Remarques essentielles :

- Si le condensateur était déchargé, il va se produire initialement une circulation importante des charges donc un courant élevé.
- En régime permanent, lorsque que le condensateur sera chargé, il n'y aura plus de circulation de charges donc le courant sera nul (=circuit ouvert).
- On n'observe jamais de discontinuité de tension aux bornes d'un condensateur.
  Démonstration :
  En inversant la relation précédente on obtient :

$$v = \mathrm{Cte} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$$

Avec cette expression on peut conclure que la tension v est une fonction continue du temps :

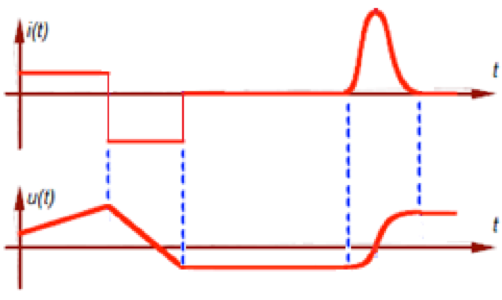


illustration de la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.

On constate qu'il est difficile de faire varier rapidement la tension aux bornes d'un condensateur et ceci d'autant plus que la valeur de sa capacité sera élevée. Cette propriété est souvent utilisée pour supprimer des variations de tension non désirées (filtrage).

Énergie stockée:

La puissance électrique instantanée reçue par le condensateur est de par définition :

$$p = u.i = u.C\frac{du}{dt} = \frac{d(C.\frac{u^2}{2})}{dt} \quad \text{(watt)}$$

Note : il est préférable de parler de puissance reçue (ou cédée) plutôt que de puissance consommée. Ce dernier qualificatif laisse à penser que la puissance reçue est « perdue » ou du moins dissipée.

Un condensateur stocke de l'énergie sous forme électrique. Sachant que la puissance électrique p reçue par le condensateur est la dérivée par rapport au temps (p= dw/dt) de cette énergie on a :

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\,C\,u^2 \quad \text{(joules)}}$$

Remarque : on ne peut stocker que de l'énergie. Le terme *puissance emmagasinée* que l'on trouve parfois dans la littérature est donc un abus de langage qui correspond en réalité à la puissance que l'on fournit au condensateur et qui vient augmenter l'énergie emmagasinée dans ce dernier. Cette remarque s'applique également au dipôle inductance. Cette énergie sera ensuite restituée de façon plus ou moins rapide.

Association de condensateur :

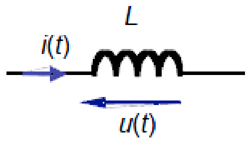
- En parallèle : $C_{eq} = C_1 + C_2$
- En série: $C_{eq} = \frac{C_1.C_2}{C_1+C_2}$

Condensateur réel :
L'isolant n'étant pas parfait, on considère parfois que le condensateur «réel» est constitué d'un condensateur « parfait » monté en parallèle avec une résistance très grande appelée résistance de fuite R_f.

Condensateurs physiques :

Plusieurs types de condensateurs. De gauche à droite : céramique multicouche, céramique disque, film polyester multicouche, céramique tubulaire, polystyrène, film polyester métallisé, électrolytique aluminium. Unité de mesure en centimètres.

II.2 Dipôle inductance



Ces dipôles sont généralement des bobines, souvent appelées aussi self.

Il s'agit d'un enroulement de conducteur sous forme de spires. Traversée par un **courant variable**, elle est le siège de phénomènes d'auto-induction créant une tension entre ses bornes :

$$\boxed{u = L.\frac{di}{dt}}$$

Note: régime continu -> u=0

Le coefficient L est appelé inductance propre de la bobine, se mesure en Henrys (H) et est indépendante du temps. Ordre de grandeur usuel : mH.

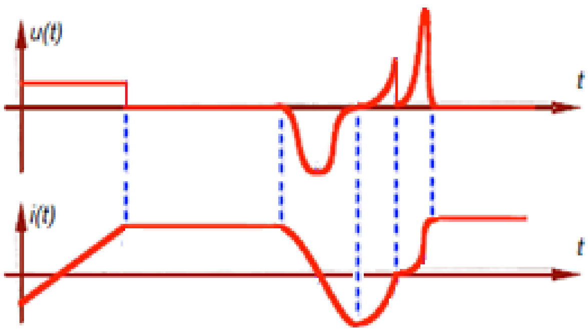
C’est cette relation, équation différentielle linéaire à coefficient constant, que nous utiliserons pour l’analyse des circuits avec selfs.

Remarques essentielles :

- On n’observe jamais de discontinuité du courant traversant une inductance.
  Démonstration :
  En inversant la relation précédente on obtient :

$$i = Cte + \frac{1}{L}\int_0^t u(t)dt$$

Avec cette expression on peut conclure que la tension i est une fonction continue du temps :



Il en résulte qu’il est difficile de faire varier rapidement le courant qui circule dans une bobine et ceci d’autant plus que la valeur de son inductance sera grande. Cette propriété est souvent utilisée pour supprimer de petites variations de courant non désirées.

- l'ouverture d'un circuit inductif parcouru par un courant peut amener des surtensions.

- Dans un circuit fermé de résistance R le courant induit par v dans l'inductance s'oppose à la variation du courant qui la traverse.

- En régime permanent, lorsque que le courant sera établi, la tension v sera nulle (=circuit fermé).

Énergie stockée:
La puissance électrique instantanée reçue par l'inductance est, de par définition :

$$p = u.i = L\frac{di}{dt}.i = \frac{d(L.\frac{i^2}{2})}{dt} \quad \text{(watt)}$$

Une inductance stocke de l'énergie sous forme électrique. Sachant que la puissance électrique p reçue par l'inductance est la dérivée par rapport au temps de cette énergie on a :

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\, L\, i^2 \quad \text{(joules)}}$$

Association d'inductances:
- En série: $L_{eq} = L_1 + L_2$
- En parallèle $L_{eq} = \frac{L_1.L_2}{L_1+L_2}$

Inductance réelle :
Les bobines utilisées comme inductances sont réalisées à l'aide de bobinage de fil de cuivre. La résistance de ces bobines n'est pas toujours négligeable ce qui conduit à modéliser une bobine réelle par l'association en série d'une inductance idéale L et d'une résistance r.
Ce bobinage engendre également des capacités parasites. Ce sont ces capacités qui récupèrent l'énergie emmagasinée dans l'inductance lors d'une coupure brusque du courant.

Inductances physiques (exemples):

Bobine simple

III Analyse des circuits en régime transitoire (Ordre 1 et 2)

Un régime transitoire est un régime électrique qui s'instaure lorsqu'un circuit électrique passe d'un régime permanent à un autre: tension et courant évoluent dans le temps à partir de valeurs initiales adoptées à la fin du premier régime (instant initial le plus souvent pris égal à 0), jusqu'à retrouver des valeurs correspondant au second régime.

Les lois des nœuds et des mailles sont applicables aux valeurs instantanées des courants et tensions et permettent de définir des équations différentielles dont la résolution conduit aux expressions des charges, tensions ou courants sous forme de fonctions du temps correspondant à la réponse d'un circuit au changement de régime.

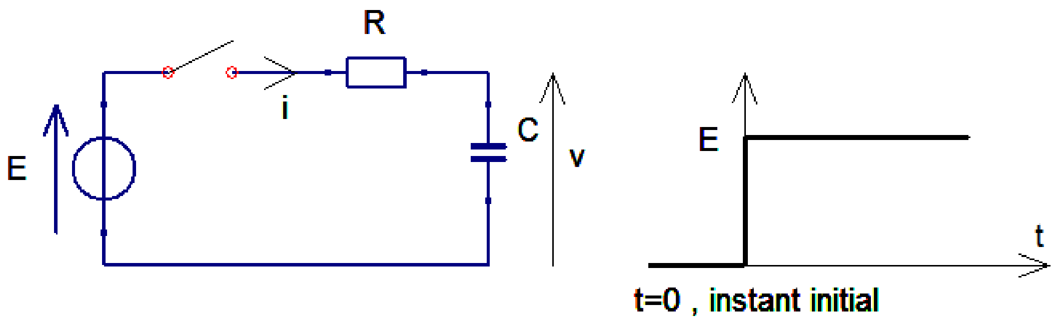
L'étude ayant trait à des circuits linéaires, les cas abordés aboutiront à des équations différentielles à coefficients constants du premier et du deuxième ordre.

Lorsque le circuit ne contient que des dipôles ohmiques et des condensateurs, ou bien que des dipôles ohmiques et des inductances, on obtient une équation différentielle du premier ordre.

Lorsque le circuit contient à la fois des dipôles ohmiques, des condensateurs et des selfs, on obtient une équation différentielle du second ordre sinon plus.

III.1 Etude d'un circuit du premier ordre – cas du circuit RC

Analyse du comportement d'un circuit RC soumis à un échelon de tension.



Le condensateur n'est initialement pas chargé. A l'instant t=0, on ferme l'interrupteur. Le générateur délivre une tension constante E qui va permettre de charger le condensateur.

Note : E et R peuvent représenter le modèle de Thévenin d'un circuit plus complet qui tient compte de la résistance interne de la source, de la résistance de fuite R_f du condensateur et éventuellement d'une résistance de charge R_L.

La loi des mailles permet d'écrire :

$$E = Ri + v \text{ où } i = C\frac{dv}{dt}$$

Ce qui nous donne :

$$v + RC\frac{dv}{dt} = E$$

Equation différentielle du premier ordre à coefficients constants d’où l’appellation « régimes transitoires du premier ordre ».

On montre en analyse que la solution de cette équation est la superposition de la solution générale sans second membre (SGESSM) et de la solution particulière avec second membre (SPEASM).

Physiquement, la SGESSM correspond à la réaction du circuit à la modification de l’entrée, c’est le régime libre.
La SPEASM est issue de l’entrée qui finit par s’imposer, c’est le régime forcé.

III.1.a <u>Recherche de la solution générale sans second membre v_1:</u>

$$v_1 + RC\frac{dv_1}{dt} = 0$$

Soit :

$$\frac{dv_1}{v_1} = -\frac{1}{RC}\,dt \quad (*)$$

Il s’agit de la dérivée d’une fonction logarithme.
La solution de cette équation du premier ordre est donc :

$$v_1 = K.e^{-t/RC} \qquad (*)$$

La constante K sera déterminée à partir des conditions initiales.
Le produit RC, qui a la dimension d’un temps, est appelé « constante de temps » τ du circuit.

$$v_1 = K.e^{-t/\tau}$$

<u>(*) détails:</u>

$$Ln(v_1) = -\frac{1}{RC}t + Cte$$

$$v_1 = e^{-t/RC+Cte} = e^{+Cte}.e^{-t/RC} = K.e^{-t/RC}$$

III.1.b Recherche de la solution particulière avec second membre v_2:

Cette solution correspond au régime forcé qui finira par s'imposer et correspondra à un régime permanent où dv/dt=0. La charge du condensateur est terminée.
On a alors :

$$v_2 + RC\cancel{\frac{dv_2}{dt}} = E$$

$$v_2 = E$$

III.1.c Solution générale :

$$v = E + K.e^{-t/\tau}$$

La constante K est déterminée à partir des conditions initiales.
A $t=0^-$ et à $t=0^+$, v = 0v (rappel : on n'observe jamais de discontinuité de tension aux bornes d'un condensateur). D'où :

$$K = -E$$

La solution représentant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur, initialement non chargé, lorsque l'on applique un échelon un échelon de tension d'amplitude E est donc :

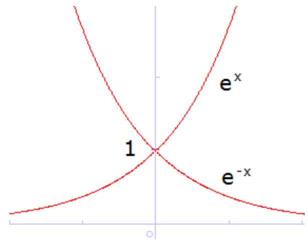
$$\boxed{v = E\,(1 - e^{-t/\tau})}$$

Remarque importante:
Cette solution dépend d'une constante K fonction **des conditions initiales et de la constante de temps** τ caractéristique du circuit.

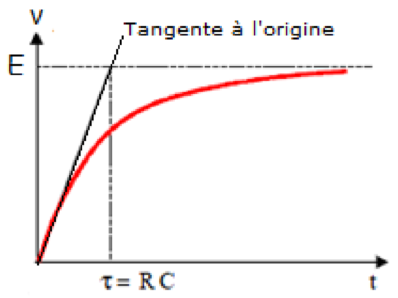
Expression du courant qui traverse le circuit :

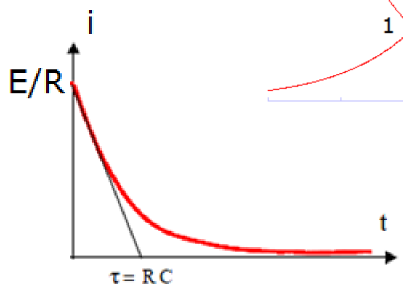
$$\boxed{i = \frac{E - v}{R} = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}}$$

rappel :



Graphes des grandeurs :

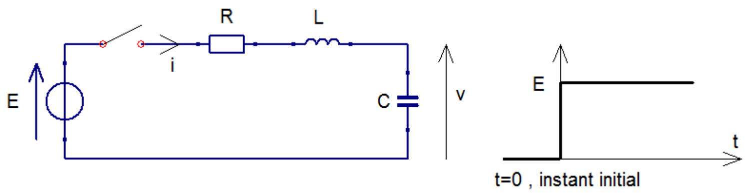




Remarques essentielles :
- la tangente à l'origine coupe les asymptotes en t= τ.
- l'allure de la tension aux bornes du condensateur traduit un retard à l'établissement de l'échelon.
Retarder l'établissement ou la disparition d'une grandeur est la première propriété d'un circuit du premier ordre.
Ce retard est d'autant plus grand que τ est grand.
- un condensateur déchargé se comporte au début de la charge comme un court-circuit pour l'alimentation. Seule la résistance R limite alors la valeur du courant.
- en régime établi le condensateur se comporte comme un circuit ouvert.

III.2 Etude d'un circuit du second ordre – cas du circuit RLC série

Analyse du comportement d'un circuit RLC soumis à un échelon de tension.



Le condensateur et la self ne sont pas initialement chargés. A l'instant t=0, on ferme l'interrupteur.

La loi des mailles permet d'écrire :

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} + v$$

Sachant que :

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

on a :

$$E = RC\frac{dv}{dt} + LC\frac{d^2v}{dt^2} + v$$

Equation différentielle du second ordre à coefficients constants d'où l'appellation « régimes transitoires du second ordre ».

En divisant par le produit LC on obtient :

$$\frac{E}{LC} = \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC}$$

On pose $\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}$ et $m = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

où ω_0 représente la pulsation propre du circuit en rad/s et
m le coefficient d'amortissement du circuit sans unité.

Ce qui donne :

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 E}$$

III.2.a Recherche de la solution générale sans second membre v_1:

Préambule : on cherche une solution de la forme $v=K.t.e^{rt}$. Cf. Annexe 1 (à la fin du cours): « Rappel sur la résolution d'une équation différentielle du 2°ordre à coefficient constant ».

L'équation caractéristique de cette équation différentielle sans second membre est la suivante :

$$r^2 + 2m\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

Dont le discriminant est :

$$\Delta = 4m^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$$

D'où :

$$\sqrt{\Delta} = 2\omega_0\sqrt{m^2 - 1}$$

1er cas : $\Delta > 0$, $m > 1$ (note : m, de par son expression, est ≥ 0)

$$v_1 = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} \quad K_1 \text{ et } K_2 \text{ constantes}$$

avec :

$$r_{1,2} = -m\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$$

2ième cas : $\Delta = 0$, $m = 1$

$$v_1 = e^{rt}(K_1 + K_2 t) \quad K_1 \text{ et } K_2 \text{ constantes}$$

avec :

$$r = -\omega_0$$

3ième cas : $\Delta < 0$, $0<m<1$

$$r_{1,2} = -m\omega_0 \pm j.\omega_0\sqrt{m^2 - 1} = -m\omega_0 \pm j.\omega_1$$

$$v_1 = e^{-m\omega_0 t}(K_1\cos\omega_1 t + K_2\sin\omega_1 t)$$

III.2.b Recherche de la solution particulière avec second membre v_2:

Cette solution correspond au régime forcé qui finira par s'imposer et correspondra à un régime permanent où v' et v''= 0. La charge du condensateur est terminée.
On a alors :

$$\cancel{\frac{d^2v}{dt^2}} + \cancel{2m\omega_0\frac{dv}{dt}} + \omega_0^2 v_2 = \omega_0^2 E$$

$$v_2 = E$$

III.2.c La solution complète :

La solution complète est la somme des deux solutions partielles précédente v_1 et v_2.

Pour déterminer les constantes, on utilise les conditions initiales :

- Continuité de la tension aux bornes du condensateur à $t=0^+$, soit $v(0^+)=0$
- Continuité du courant dans l'inductance à $t= 0^+$, soit $i(0^+)=0$

Remarque importante:
Cette solution dépend de deux constantes fonctions **des conditions initiales** et **des paramètres m et ω_0** caractéristiques du circuit.

1^er^ cas : $\Delta > 0$, $m > 1$, régime dit apériodique

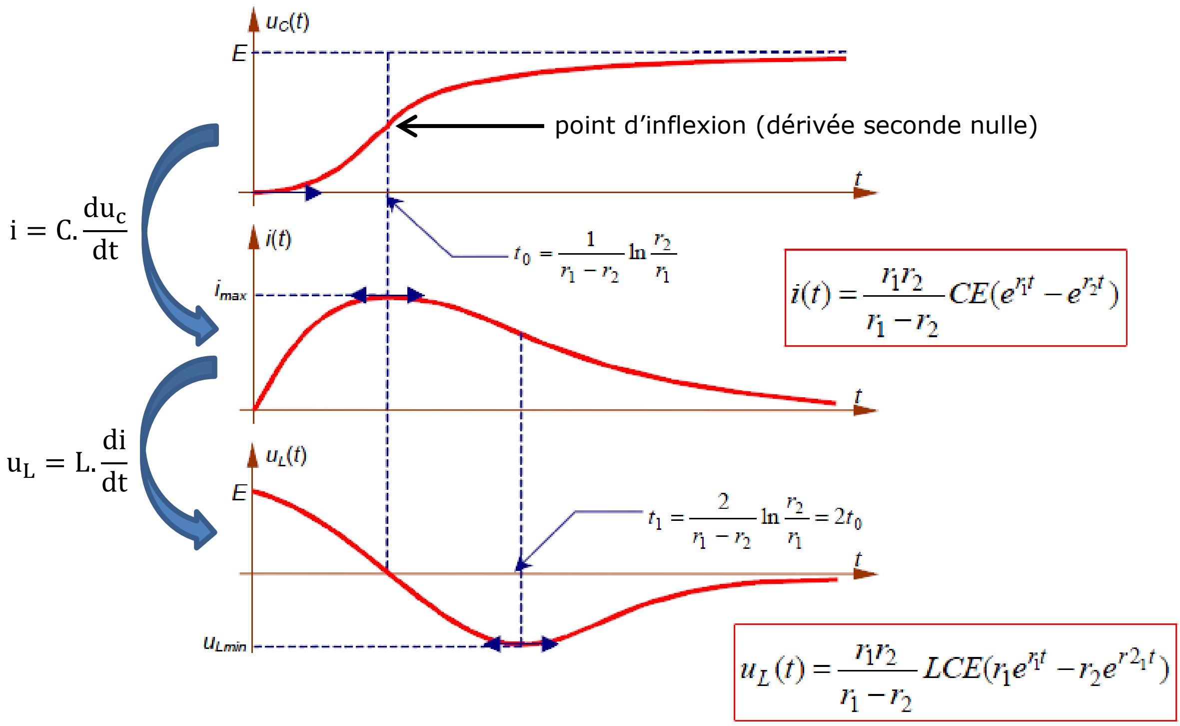
$$v = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} + E$$

$$\left.\begin{aligned} v(0) &= K_1 + K_2 + E = 0 \\ i(0) &= C\frac{dv(0)}{dt} = C(K_1 r_1 + K_2 r_2) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} K_1 &= \frac{r_2}{r_1 - r_2}E \\ K_2 &= \frac{-r_1}{r_1 - r_2}E \end{aligned}\right.$$

D'où la solution générale:

$$\boxed{v = E\left(1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_1 - r_2}e^{r_2 t}\right)}$$

Graphes des grandeurs:



Remarque :

- puisque le courant (image de la dérivée de la tension aux bornes du condensateur) est nul à l'origine, le graphe de la tension commence à t=0 avec une tangente horizontale.

2$^{\text{ième}}$ cas : $\Delta = 0$, m = 1, régime dit apériodique critique

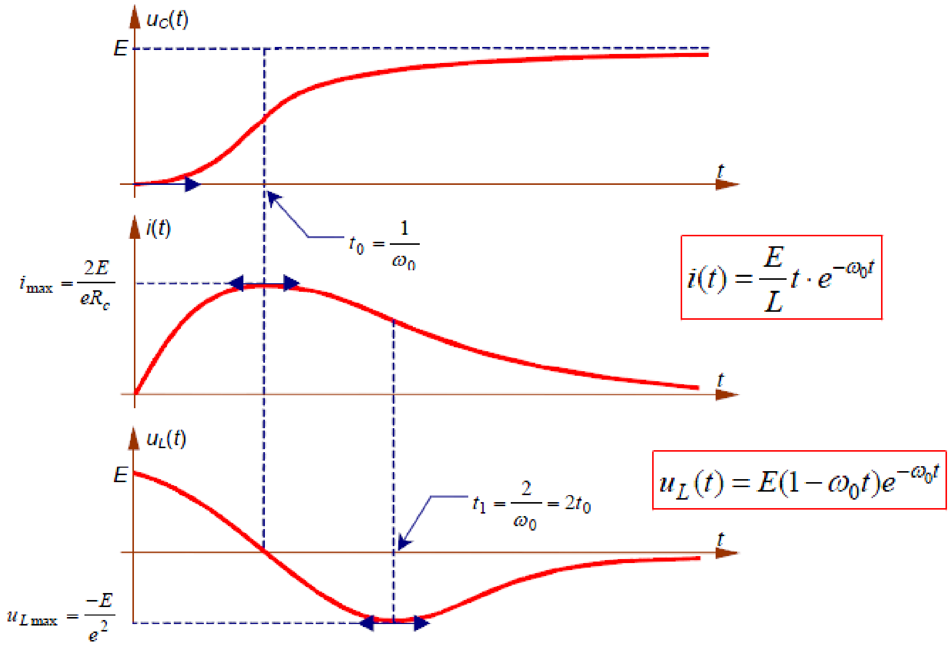
$$v = e^{-\omega_0 t}(K_1 + K_2 t) + E$$

$$\left.\begin{array}{l} v(0) = K_1 + E = 0 \\ i(0) = C\frac{dv(0)}{dt} = C(K_2 - \omega_0 K_1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K_1 = -E \\ K_2 = -\omega_0 E \end{array}\right.$$

D'où la solution générale:

$$\boxed{v = E - E(\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}}$$

Graphes des grandeurs:



Remarque :
- ces réponses, similaires à celles du régime apériodique, correspondent au temps minimum d'établissement (la valeur la plus faible de t_0)

3ième cas : $\Delta < 0$, $0<m<1$, régime dit oscillatoire amorti ou « pseudo-périodique »

$$v = e^{-m\omega_0 t}\left(K_1\cos\omega_1 t + K_2\sin\omega_1 t\right) + E \qquad \omega_1 = \omega_0\sqrt{1-m^2}$$

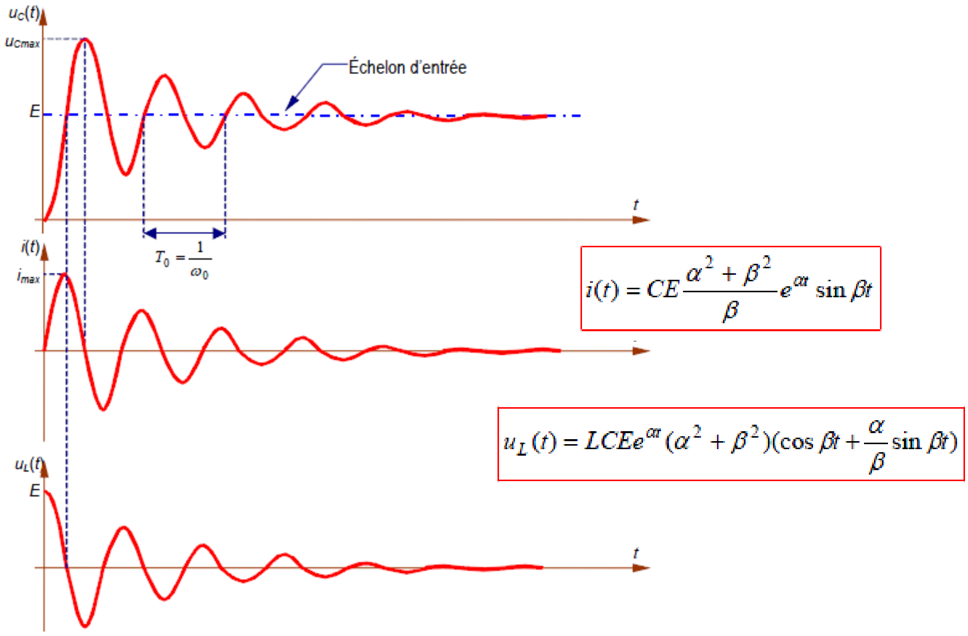
$$\lim_{t\to\infty} e^{-m\omega_0 t} = 0 \quad => v = E \qquad (m \,\&\, \omega_0 > 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} v(0) = K_1 + E = 0 \\ i(0) = C\frac{dv(0)}{dt} = C(-m\omega_0 K_1 + \omega_1 K_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K_1 = -E \\ K_2 = -m\frac{\omega_0}{\omega_1}E \end{array}\right.$$

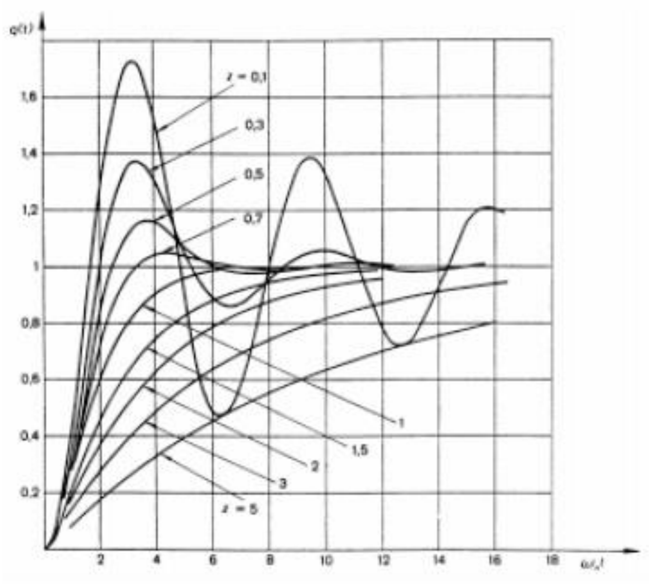
D'où la solution générale:

$$\boxed{v = Ee^{-m\omega_0 t}\left(-\cos\omega_1 t - m\frac{\omega_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) + E}$$

Graphes des grandeurs:



Graphe de la réponse à un échelon unité en fonction de m :



Cas particulier du régime non-amorti :
Si R = 0 (circuit non-dissipatif), le coefficient d'amortissement m est alors nul.

On obtient alors :

$$v = E - E\cos\omega_0 t$$

qui représente une oscillation sans atténuation. C'est le cas de figure recherché lorsque l'on souhaite réaliser un oscillateur sinusoïdal. On cherchera donc un moyen pour annuler la résistance équivalente du circuit.

ANNEXE 1

« Rappel sur la résolution d'une équation différentielle du 2°ordre à coefficient constant »

Soit d'une équation différentielle du 2°ordre à coefficient constant a, b et c du type :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1) \quad \text{avec } y= f(x)$$

On cherche une solution de la forme :

$$y = g(x)e^{rx}$$

d'où :

$$y' = g'.e^{rx} + r.g.e^{rx} = g'.e^{rx} + r.y \ (2)$$

et :

$$y'' = g''.e^{rx} + r.g'.e^{rx} + r.y'$$
$$y'' = g''.e^{rx} + r.g'.e^{rx} + r(g'.e^{rx} + r.y)$$
$$y'' = g''.e^{rx} + 2\ r.g'.e^{rx} + r^2.y \ (3)$$

En substituant dans (1) y' et y'' par leur expression respective (2) et (3), on obtient :

$$a(g''.e^{rx} + 2\ r.g'.e^{rx} + r^2.y) + b(g'.e^{rx} + r.y) + cy = 0$$

Soit :

$$y\underbrace{(ar^2 + br + c)}_{\text{Terme 1}} + \underbrace{(a.g''.e^{rx} + 2.a.r.g'.e^{rx} + b.g'.e^{rx})}_{\text{Terme 2}} = 0$$

* Si g(x) = Cte, on cherche donc une solution de la forme $y= C.e^{rx}$. Le deuxième terme étant nul, elle sera donnée par la résolution de l'équation :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Equation du second degré, appelée équation caractéristique de l'équation différentielle.

* Si g(x) = Cte.x, on cherche donc une solution de la forme $y=C.x.e^{rx}$.
Ici, le deuxième terme s'annule pour (2.a.r + b)=0 soit r= -b/2a.
Cette solution existe donc si, et seulement si, la solution de l'équation caractéristique est la racine double r=-b/2a (discriminant nul).

<u>Résolution de l'équation caractéristique:</u>

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

<u>1er cas :</u> $\Delta > 0$ => 2 racines réelles r_1 et r_2.
y(x) est une combinaison linéaire des deux solutions :

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ constantes}$$

<u>2ième cas :</u> Δ = 0 => 1 racine double.
y(x) est une combinaison linéaire des deux solutions :

$$y(x) = e^{rx}\,(C_1 + C_2x) \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ constantes}$$

<u>3 ième cas :</u> Δ < 0 => 2 racines complexes conjuguées.
y(x) est une combinaison linéaire des deux solutions :

$$y(x) = C_1e^{(\alpha+j\beta)x} + C_2e^{(\alpha-j\beta)x} \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ constantes}$$

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1e^{+j\beta x} + C_2e^{-j\beta x})$$

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + jC_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x - jC_2\sin\beta x)$$

On peut trouver deux constantes telles que y(x) soit réelle ; c'est-à-dire satisfaisant les conditions ($C_3 = C_1+C_2$) réel et ($C_4 = C_1-C_2$) imaginaire. On obtient alors :

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_3\cos\beta x + C_4\sin\beta x)$$

ou :

$$y(x) = C.\,e^{\alpha x}\cos(\beta x - \varphi) \quad \text{ou bien sin}$$

<u>Note :</u> si b=0 alors α =0 et y(x) fonction purement sinusoïdale.

<u>Rappel :</u>
Les constantes sont déterminées à partir des conditions initiales.