ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$
VECTEURS DE $\mathbb{R}^n$

1 Introduction

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est souvent représenté par une droite. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

Le plan est formé des couples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de nombres réels. Il est noté $\mathbb{R}^2$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

L'espace est constitué des triplets de nombres réels $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ de nombres réels. Il est noté $\mathbb{R}^3$ et est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

Le symbole $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a deux interprétations géométriques : soit comme un point de l'espace, soit comme un vecteur.

L'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de nombres réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, noté $\mathbb{R}^n$.

Soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors :

1. $u + v = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ (somme de deux vecteurs) ;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.u = \lambda u = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ (produit d'un vecteur par un scalaire) ;
3. l'opposé de $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ est $-u = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ . \\ . \\ . \\ -x_n \end{pmatrix}$;

4. le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$.

2 Propriétés

Soient $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ, μ deux réels. Alors,

1. $u + v = v + u$,
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$,
3. $u + 0 = 0 + u = u$,
4. $u + (-u) = 0$,
5. $1.u = u$,
6. $\lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u$,
7. $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \mu.v$.

Ces propriétés font de l'espace $\mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$-**espace vectoriel**.

3 Produit scalaire

Le produit scalaire des deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ est le nombre réel défini par

$$< u, v >= x_1 y_1 + x_n y_n + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$