DIMENSION FINIE
BASE

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Bases d'un espace vectoriel

Définition 1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est une* ***base*** *de E si c'est une famille libre et génératrice de E.*

Théorème 1 *(**Caractérisation d'une base**) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une famille de vecteurs de E. $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est une* ***base*** *de E si et seulement si*

$$\forall\, x \in E,\ \exists!\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Les scalaires $\lambda_i,\ i \in \{1, 2, ..., n\}$ s'appellent ***coordonnées*** *du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.*

2 Existence d'une base

Théorème 2 *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$ admet au moins une base.*

Théorème 3 *(**Théorème de la base incomplète**) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Alors :*

1. *De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.*
2. *Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.*

3 Exemples

Définition 2 *Dans $\mathbb{R}^n$, la famille $(e_1, ..., e_n)$ où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{\text{ième coordonnée}}, 0, ..., 0)$ est une base. On l'appelle base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 3 *Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $(1, X, ..., X^n)$ est une base. On l'appelle base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.*