ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$
EXEMPLES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Applications linéaires

Soit application

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n). \end{array}$$

On dit que l'application f est une **application linéaire** si

$$\begin{cases} y_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p \\ y_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_p \\ ... \\ ... \\ ... \\ y_1 = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_p, \end{cases}$$

où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,p} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,p} \end{pmatrix}$, alors l'application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ peut s'écrire $X \to AX$.

La matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée la **matrice de l'application linéaire asoociée** f de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1
1. $f(0,...,0) = (0,...,0)$.
2. *Une translation de vecteur non nul n'est pas une application linéaire.*

2 Exemples d'applications linéaires

Transformation	Application linéaire	Forme matricielle
Identité	$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1,...,x_n) & \mapsto & (x_1,...,x_n) \end{array}$	I_n (matrcie identité)
Application nulle	$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1,...,x_n) & \mapsto & (0,...,0) \end{array}$	0_n (matrice nulle)

ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$

EXEMPLES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

Transformation	Application linéaire	Matrice associé
Réflexion par rapport à $(0y)$	$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Réflexion par rapport à $(0x)$	$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Réflexion par rapport à $y = x$	$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Homothétie $H(0, \lambda)$	$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \end{array}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
Projection orthogonale sur $(0x)$	$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Projection orthogonale sur $(0y)$	$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \end{array}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Rotation $R(0, \theta)$	$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
Réflexion par rapport au plan $(0xy)$	$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Réflexion par rapport au plan $(0xz)$	$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$