SOBRE LA CONJETURA DE COLLATZ

Universidad Nacional de Crdoba, Argentina
Lucas Nicolas Depetris, 2022

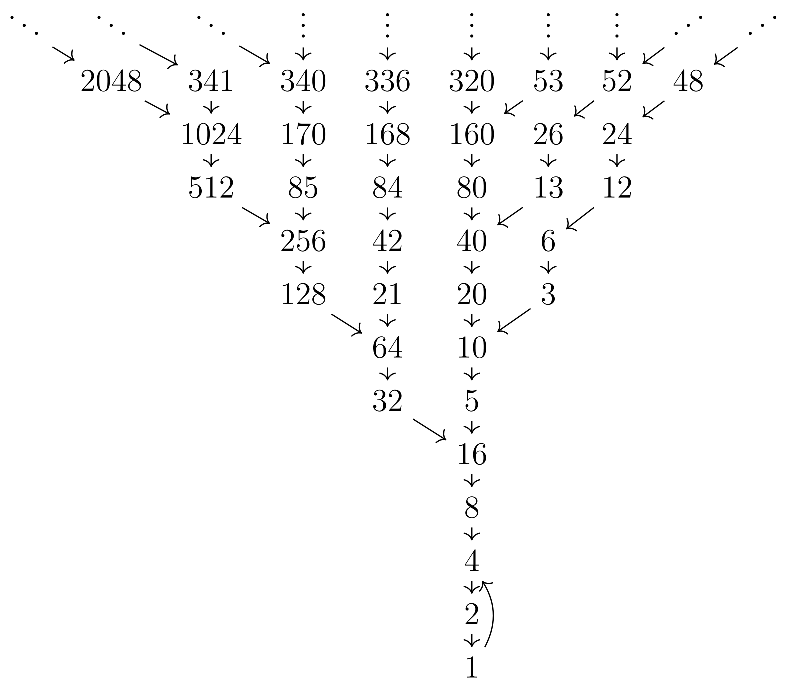
Introduccin.

En el campo de las matemticas se podra decir que los problemas se dividen en cuatro categoras: aquellos fciles de enunciar y resolver, difciles de enunciar pero fciles de resolver, difciles de enunciar y resolver, y fciles de enunciar pero difciles de resolver. "La matemtica es la reina de las ciencias, y la teora de nmeros es la reina de la matemtica" (Gauss). Esta (teora de nmeros) es la madre creadora de problemas del ltimo tipo, rea en la que yace nuestro tema de inters (incluso no resuelto).

El problema $3x+1$, la conjetura de Collatz, el problema de Syracusa o la conjetura de Ulam concierne al comportamiento de las iteraciones de la funcin $\mathrm{col}:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ que asigna a cada nmero par n el valor $n/2$ y cada impar $3n+1$. Veamos que ocurre si probamos esto con algunos nmeros, empezando digamos por 5, 6, y 11.

$$\begin{tikzcd}
5 \arrow[r] & 16 \arrow[r] & 8 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 1 \arrow[ll, bend left] & & \\
6 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 10 \arrow[ull] & & & & & \\
11 \arrow[r] & 34 \arrow[r] & 17 \arrow[r] & 52 \arrow[r] & 26 \arrow[r] & 13 \arrow[r] & 40 \arrow[r] & 20 \arrow[uulllll, bend right]
\end{tikzcd}$$

Como se ve, los tres y todos otros los nmeros involucrados llegan a 1. Ms an, se ha verificado computacionalmente que todo $n \leq 2{,}95 \times 10^{20}$ converge eventualmente al ciclo (1, 4, 2) [3]. Para una mejor visualizacin podemos construir el siguiente diagrama: Partimos con 1 en la base y vamos ascendiendo. Dado un n en el dibujo, si $n = \mathrm{col}_1(m)$ (m es un predecesor impar de n) o $n = \mathrm{col}_2(\tilde{m})$ ($\tilde{m}$ es un predecesor par de n), entonces escribimos m o $\tilde{m}$ arriba. Notar que estas dos condiciones pueden darse a la vez, por ejemplo $\mathrm{col}_1(3) = 10$ y $\mathrm{col}_2(20) = 10$. En tal caso situamos m a la derecha y $\tilde{m}$ a la izquierda. Luego se une el diagrama con flechas de arriba hacia abajo y da como resultado



Por esto se tiene:

Conjetura de Collatz: Todo natural bajo la iteracin de la funcin col termina en el ciclo (1, 4, 2).

Como el nombre lo indica (y mencionado anteriormente), este es un problema sin resolver. No se sabe a ciencia cierta cundo fue descubierto por primera vez, aunque el planteo formal del mismo se hizo en 1937 por Lothar Collatz [11]. Extensa investigacin se ha realizado al respecto (en [7] se encuentra una recopilacin de la bibliografa de esto ltimo) y toda forma sensata de abordaje a este problema hasta la fecha no ha dado resultados con lo que respecta a su solucin. En lo computacional se tiene [2], que estudia ciertas cotas en el comportamiento de la funcin col, y a [6, 8], en donde se desarrollan mtodos de “verificacin exhaustiva” para la bsqueda de un posible contraejemplo. En lo teorico [1] aborda a la conjetura desde el lgebra lineal, [10] desde el lgebra, [14] desde la topologa y [15, 9] lo aproximan como un sistema dinmico. En este documento se mirar al problema desde la aritmtica modular y desde la topologa, adems de mostrar un resultado considerado como el ms significativo hasta el momento logrado por Terence Tao.

“Las matemticas an no estn preparadas para tales problemas” (Paul Erds), “Es un problema extremadamente difcil, completamente fuera del alcance de las matemticas actuales” (Jeffrey Lagarias). Estas son algunas citas de matemticos conocedores del tema. Incluso versiones ms dbiles de la conjetura estn an sin resolver:

Conjetura de los ciclos finitos: Hay una cantidad finita de nmeros cclicos. Esto es, la cantidad de naturales x tal que $\operatorname{col}^n(x) = x$ para cierto $n \in \mathbb{N}$ es finita.

Conjetura de la no existencia de una trayectoria divergente: No existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{col}^n(x) = \infty$.

Por otra parte cabe mencionar que se tiene la siguiente conjetura sobre una de las generalizaciones de Collatz:

Conjetura de extensin a los enteros: Si se considera a la funcin de Collatz como $\operatorname{col} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, entonces para todo $x \in \mathbb{Z}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{col}^k(x)$ pertenece a uno de los ciclos

i. $(1, 4, 2)$, ii. (-1), iii. (0), iv. $(-5, -14, -7, -20, -10)$,

v. $(-17, -50, -25, -74, -37, -110, -55, -164, -82, -41, -122, -61, -182, -91, -272, -136, -68, -34)$.

1. Abordaje con el uso de Aritmtica Modular.

Denotamos $\mathrm{col}_1(q) = 3q + 1$ y $\mathrm{col}_2(q) = q/2$. Notar que cuando $n \in \mathbb{N}$ es impar, $\mathrm{col}(n) = 3n + 1$ es par. Esto motiva definir

$$\begin{aligned}
&G_r : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, && G_r(q) = (\mathrm{col}_2^r \circ \mathrm{col}_1)(q) = \frac{3}{2^r}q + \frac{1}{2^r},\\
&L : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{Q}, && L(n_1, \cdots, n_k) = (G_{n_k}^{-1} \circ G_{n_{k-1}}^{-1} \circ \cdots \circ G_{n_1}^{-1})(1),\\
&\tilde{L} : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}, && \tilde{L}(n_1, \cdots, n_k) = 3^k L(n_1, \cdots, n_k).
\end{aligned}$$

El hecho de que $\tilde{L}$ llega a $\mathbb{N}$ lo vamos a mostrar a continuacin. Ahora veremos la importancia de estas funciones. Vamos a usar la notacin $N_l = (n_1, \cdots, n_l)$ para $l \in [\![1, k]\!]$ y $N = N_k$. Empecemos calculando L y $\tilde{L}$. Planteamos

$$q = \frac{3}{2^r}G_r^{-1}(q) + \frac{1}{2^r} \implies G_r^{-1}(q) = \frac{q \cdot 2^r - 1}{3},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
&G_{n_1}^{-1}(1) = \frac{2^{n_1} - 1}{3}, \quad (G_{n_2}^{-1} \circ G_{n_1}^{-1})(1) = \frac{\frac{2^{n_1}-1}{3} \cdot 2^{n_2} - 1}{3} = \frac{(2^{n_1} - 1)2^{n_2} - 3}{9},\\
&(G_{n_3}^{-1} \circ G_{n_2}^{-1} \circ G_{n_1}^{-1})(1) = \frac{((2^{n_1} - 1)2^{n_2} - 3)2^{n_3} - 9}{27}, \quad \cdots\\
&\qquad \cdots, \quad L(n_1, \cdots, n_k) = \frac{(\cdots((2^{n_1} - 1)2^{n_2} - 3)\cdots)2^{n_k} - 3^{k-1}}{3^k},
\end{aligned}$$

de donde tambin obtenemos $\tilde{L}$. Por comodidad de escritura, para $k = 0$ tomamos $\tilde{L}(N_0) = 1$ (extensin natural al 0, como en $n!$) y por lo tanto $L(N_0) = 1$. Luego L y $\tilde{L}$ cumplen la siguiente recursividad:

$$\left.\begin{aligned}
&L(N_0) = 1, \quad L(N_l) = \frac{L(N_{l-1}) \cdot 2^{n_l} - 1}{3}\\
&\tilde{L}(N_0) = 1, \quad \tilde{L}(N_l) = \tilde{L}(N_{l-1}) \cdot 2^{n_l} - 3^{l-1}
\end{aligned}\right. \qquad \forall\, l \in [\![1, k]\!].$$

Con esto se tiene la siguiente proposicin.

Lema 1.1: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. Se cumple Collatz, ii. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\ \{n_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathbb{N} : 1 = (G_{n_1} \circ \cdots \circ G_{n_k})(n)$,

iii. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\ \{n_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathbb{N} : n = L(n_1, \cdots, n_k)$.

Demostracin. (i.) $\Rightarrow$ (ii.) $\mathrm{col}(n) = \mathrm{col}_1(n)$ que es par. Luego

$$\mathrm{col}^{\ell_2(\mathrm{col}_1(n))+1}(n) = (\mathrm{col}_2^{\ell_2(\mathrm{col}_1(n))} \circ \mathrm{col}_1)(n),$$

que es un nmero impar. Se repite el proceso y como vale Collatz, eventualmente se llega a 1. Adems (ii.) $\Rightarrow$ (i.) es claro por la definicin de G_r y (ii.) $\Leftrightarrow$ (iii.) tambin por la definicin de L.

$\blacksquare$

Notar que no cualquier eleccin de $N \in \mathbb{N}^k$ cumple $L(N) \in \mathbb{N}$. Por esto definimos el conjunto $S_k = \{N \in \mathbb{N}^k \mid \tilde{L}(N) \equiv 0\,(3^k)\}$, lo que da lugar a la siguiente equivalencia de la conjetura de Collatz (reformulacin del inciso iii. del lema anterior):

Lema 1.2: Collatz $\iff 2\mathbb{N} - 1 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{L(N)\}_{N\in S_k}$.

Observar que tambin se podra escribir $\mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{L(N)\cdot 2^j\}_{\substack{N\in S_k\\ j\in\mathbb{N}_0}}$ y es equivalente.

Contrario a la intuicin, es posible hallar S_k en su totalidad para un k arbitrario. Ms an, cada uno de estos queda completamente descripto por un subconjunto de cardinalidad finita, algo esperable en ecuaciones modulares. Ahora procederemos a dar unos preliminares matemticos que nos harn posible estudiar S_k.

Prerrequisitos Matemticos.

Nuestro objetivo en este apartado es ahondar ms profundo en el tema de la aritmtica mdular, desarrollar herramientas que permitan resolver "ecuacines exponenciales en congruencia". Sean a, b, $n \in \mathbb{N}$. Denotamos la congruencia: si a es congruente a b mdulo n, $a \equiv b\,(n)$. Ms an, si $b \in [\![0,\, n-1]\!]$, $\mathrm{mod}(a,\, n) = b$. Se denota a la clase de equivalencia de a mdulo n por $[a]_n = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a\,(n)\}$. El mximo comn divisor de a y b: $(a,\, b)$; y el mnimo comn mltiplo de a y b: $[a,\, b]$. Dos nmeros se dicen coprimos si su mximo comn divisor es 1.

Lema 1.3: Dados a, $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $a^m \equiv 1(n) \iff a$ y n son coprimos.

Definicin 1.1: Sean a, $n \in \mathbb{N}$ coprimos. Se define el "orden de a mdulo n" como

$$\mathrm{ord}_n(a) = \mathrm{mn}\{m \in \mathbb{N} \mid a^m \equiv 1(n)\}.$$

Observar que por el lema anterior $\mathrm{ord}_n(a)$ est bien definido.

Lema 1.4: Sean a, n coprimos. $a^k \equiv 1(n) \iff \mathrm{ord}_n(a) \mid k$.

Definicin 1.2: Dado $n \in \mathbb{N}$ se define

$$\mathcal{U}_n := \{m \in [\![1,\, n]\!] \mid (a,\, n) = 1\}, \qquad \varphi(n) = |\mathcal{U}_n|,$$

esta ltima llamada "Funcin φ de Euler".

Lema 1.5: *Propiedades de la funcin φ de Euler.* Sean $m,\, n,\, k \in \mathbb{N}$, p primo. Se cumplen

$$\text{i.}\quad \varphi(p^k) = p^k(1-1/p), \qquad \text{ii.}\quad \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{(m,\, n)}{\varphi((m,\, n))},$$

$$\text{iii.}\quad \varphi(n^m) = n^{m-1}\varphi(n), \qquad \text{iv.}\quad \varphi(n) = n\prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ primo}}}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

$$\text{v.}\quad \sum_{d \mid n}\varphi(d) = n, \qquad \text{vi.}\quad \varphi(n) \text{ es par } \forall\, n \geq 3.$$

Teorema 1.1: *(Euler, generalizacin del Pequeo Teorema de Fermat).* Sean $a,\, n \in \mathbb{N}$ coprimos. Se cumple $a^{\varphi(n)} \equiv 1(n)$.

Corolario 1.1: Sean $a,\, n \in \mathbb{N}$ coprimos. Entonces $\mathrm{ord}_n(a) \mid \varphi(n)$.

Definicin 1.3: i. Dados $r,\, n \in \mathbb{N}$ coprimos, se dice que r es una "raz primitiva mdulo n" si $\mathrm{ord}_n(r) = \varphi(n)$.

ii. Denotamos al conjunto de las races primitivas mdulo n como $\mathrm{PR}(n)$.

Observacin 1.1: i. Si $r \in \mathrm{PR}(n)$, entonces $\{1,\, r,\, \cdots,\, r^{\varphi(n)-1}\} \equiv \mathcal{U}_n\,(n)$. Esto es, cada elemento del conjunto de la izquierda es congruente mdulo n a algn elemento del conjunto de la derecha.

En efecto, como r y n son coprimos se tiene que $(r^k,\, n) = 1$ para $k \in [\![0,\, \varphi(n)-1]\!]$, $|\{r^k\}_{k=0}^{\varphi(n)-1}| = \varphi(n)$ y para $i,\, j \in [\![0,\, \varphi(n)-1]\!]$, $i \neq j$ se tiene $r^i \not\equiv r^j(n)$. De esta forma $\{\mathrm{mod}(r^k,\, n)\}_{k=0}^{\varphi(n)-1} \subseteq [\![1,\, n]\!]$ es un conjunto de cardinal $\varphi(n)$ y sus elementos son coprimos con n, luego es igual a $\mathcal{U}_n$.

ii. $r \equiv \tilde{r}(n) \implies \mathrm{ord}_n(r) = \mathrm{ord}_n(\tilde{r})$.

Ejemplo 1.1: i. $n = 13$, $\varphi(13) = 12$. Por el corolario anterior los posibles rdenes mdulo 13 son 1, 2, 3, 4, 6, y 12. 1 no puede ser raz primitiva pues $\mathrm{ord}_{13}(1) = 1$. Veamos si 2 lo es.

$$2^1 \equiv 2\,(13), \quad 2^2 \equiv 4\,(13), \quad 2^3 \equiv 8\,(13), \quad 2^4 \equiv 3\,(13),$$
$$2^6 = 2^4 \cdot 2^2 \equiv 12\,(13), \quad \text{y} \quad 2^{12} = 2^{\varphi(13)} \equiv 1\,(13),$$

con lo que $\mathrm{ord}_{13}(2) = 12 = \varphi(13)$. Se sigue que 2 es una raz primitiva mdulo 13.

ii. $n = 8$, $\varphi(8) = 4$. Los posibles rdenes mdulo 8 son 1, 2, 4 y los candidatos a races primitivas son 1, 3, 5, y 7 (ya que tienen que ser coprimos con 8). Claramente 1 no es, adems,

$$3^2 \equiv 1\,(8), \qquad 5^2 \equiv 1\,(8), \qquad \text{y} \qquad 7^2 \equiv 1\,(8),$$

con lo cual $\mathrm{ord}_8(3) = \mathrm{ord}_8(5) = \mathrm{ord}_8(7) = 2 \neq 4$. Se concluye que no hay races primitivas mdulo 8.

Lema 1.6: Sean a, $n \in \mathbb{N}$ coprimos. $a^k \equiv a^l\,(n) \iff k \equiv l\,(\mathrm{ord}_n(a))$.

Lema 1.7: Sean a, $n \in \mathbb{N}$ coprimos. Entonces $\mathrm{ord}_n(a^k) = \dfrac{\mathrm{ord}_n(a)}{(k,\, \mathrm{ord}_n(a))}$.

Corolario 1.2: Si $\mathrm{PR}(n) \neq \emptyset$ entonces $|\mathrm{PR}(n)| = \varphi(\varphi(n))$.

Teorema 1.2: $\mathrm{PR}(n) \neq \emptyset \iff n \in \{1,\, 2,\, 4\} \cup \{p^m\}_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ p \text{ primo impar}}} \cup \{2p^m\}_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ p \text{ primo impar}}}$.

Lema 1.8: Si $a \in \mathrm{PR}(p)$, entonces $a \in \mathrm{PR}(p^k)$ $\forall\, p \geq 3$ primo, $k \in \mathbb{N}$.

Definicin 1.4: Sea $r \in \mathrm{PR}(n)$ y $a \in \mathbb{N}$ coprimo con n. Se define al "logaritmo discreto de a respecto a r (o de base r) mdulo n" como $I_r^n(a) = \mathrm{mn}\{m \in \mathbb{N} \mid r^m \equiv a\,(n)\}$. Se escribir $I_r(a)$ cuando el mdulo se entienda del contexto.

Observacin 1.2: Por el inciso i. de la observacin anterior, el logaritmo discreto, bajo las hiptesis de la definicin, siempre est definido.

Ejemplo 1.2: 3 es una raz primitiva mdulo 7 y

$$3^1 \equiv 3\,(7), \quad 3^2 \equiv 2\,(7), \quad 3^3 \equiv 6\,(7), \quad 3^4 \equiv 4\,(7), \quad 3^5 \equiv 5\,(7), \quad \text{y} \quad 3^6 \equiv 1\,(7).$$

As,

$$I_3(3) = 1, \quad I_3(2) = 2, \quad I_3(6) = 3, \quad I_3(4) = 4, \quad I_3(5) = 5, \quad \text{y} \quad I_3(3) = 1.$$

Lema 1.9: Sea p primo, a coprimo con p y $r \in \mathrm{PR}(p)$. Se cumple $I_r^p(a) \equiv I_r^{p^k}(a)\,(p-1)$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Con esto damos por terminado los preliminares. Continuamos con el estudio de S_k. Recordar que si $N = (n_1, \cdots, n_k)$, denotamos $N_l = (n_1, \cdots, n_l)$ para $l \in [\![1,\, k]\!]$.

Teorema 1.3: Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple

$$S_k = \left\{ N \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; \begin{array}{l} n_i \equiv -I_2^9(L(N_{i-1})) + 2r_i \,(6) \text{ con } r_i \in \{1,\, 2\} \text{ para } i \in [\![1,\, k-1]\!] \\ n_k \equiv -I_2^3(L(N_{k-1}))\,(2) \end{array} \right\}.$$

Demostracin. Usaremos induccin. Para $k = 1$, notar que 2 es una raz primitiva mdulo 3 y $\varphi(3) = 2$. Se sigue que

$$\tilde{L}(n_1) \equiv 0\,(3) \iff 2^{n_1} \equiv 1 \equiv 2^0\,(3) \iff n_1 \equiv 0 \equiv -I_2^3(L(N_0))\,(2).$$

Ahora supongamos que la afirmacin vale para un $l \in \mathbb{N}$. Veamos que tambin lo hace para $l+1$. Por hiptesis sabemos que las soluciones de $\tilde{L}(N_l) \equiv 0\,(3^l)$ estn dadas por

$$\begin{array}{l} n_i \equiv -I_2^9(L(N_{i-1})) + 2r_i\,(6) \text{ con } r_i \in \{1,\, 2\} \text{ para } i \in [\![1,\, l-1]\!] \\ n_l \equiv -I_2^3(L(N_{l-1}))\,(2) \end{array}.$$

As,

$$\tilde{L}(N_{l+1}) \equiv 0\,(3^{l+1}) \iff \underbrace{\tilde{L}(N_l)\cdot 2^{n_{l+1}} \equiv 3^l\,(3^{l+1})}_{\sharp} \implies \begin{cases} \text{i.} & \tilde{L}(N_i) \not\equiv 0\,(3^{i+1}) \\ \text{ii.} & \tilde{L}(N_i) \equiv 0\,(3^i) \end{cases}$$

para todo $i \in [\![1,\, l]\!]$. Esto ltimo se deduce de: Es inmediato de ($\sharp$) que $\tilde{L}(N_l)\cdot 2^{n_{l+1}} \equiv 0\,(3^l)$ y como $(2^{n_{l+1}},\, 3^l) = 1$, se obtiene $\tilde{L}(N_l) \equiv 0\,(3^l)$. Repitiendo este razonamiento se obtiene ii. Adems,

$$\tilde{L}(N_{i+1}) \equiv 0\,(3^{i+1}) \implies \tilde{L}(N_i)\cdot 2^{n_{i+1}} \equiv 3^i\,(3^{i+1}) \implies \tilde{L}(N_i) \not\equiv 0\,(3^{i+1})$$

para $i \in [\![1,\, l]\!]$ y se tiene i. Se sigue que

$$(\text{i.},\, i = l) + (\text{ii.},\, i = l) \implies \left(\frac{\tilde{L}(N_l)}{3^l},\, 3\right) = 1$$

y por lo tanto

$$(\sharp) \iff \underbrace{\frac{\tilde{L}(N_l)}{3^l}}_{=L(N_l)} \cdot 2^{n_{l+1}} \equiv 1\,(3) \iff n_{l+1} \equiv -I_2^3(L(N_l))\,(2).$$

Ms an,

$$(\text{i.},\, i = l-1) + (\text{ii.},\, i = l-1) \implies (L(N_{l-1}),\, 9) = 1$$

y entonces

$$\begin{aligned} \tilde{L}(N_l) \not\equiv 0\,(3^{l+1}) \iff \tilde{L}(N_{l-1})\cdot 2^{n_l} \not\equiv 3^{l-1}\,(3^{l+1}) &\iff L(N_{l-1})\cdot 2^{n_l} \not\equiv 1\,(9) \\ &\iff n_l \not\equiv -I_2^9(L(N_{l-1}))\,(6) \end{aligned}$$

($\varphi(9) = 6$ y 2 es una raz primitiva mdulo 9). De esta forma se tiene

$$\begin{cases} n_l \equiv -I_2^3(L(N_{l-1}))\,(2) \\ n_l \not\equiv -I_2^9(L(N_{l-1}))\,(6) \end{cases} \overset{\natural}{\iff} n_l \equiv -I_2^9(L(N_{l-1})) + 2r_l\,(6)$$

($\natural$) Lema anterior.

en donde $r_l \in \{1,\, 2\}$. Finalmente

$$\begin{aligned} n_i &\equiv -I_2^9(L(N_{i-1})) + 2r_i\,(6) \text{ con } r_i \in \{1,\, 2\} \text{ para } i \in [\![1,\, l]\!] \\ n_{l+1} &\equiv -I_2^3(L(N_l))\,(2) \end{aligned}$$

y conclumos que vale para $l+1$.

■

Observacin 1.3: De la ltima demostracin podemos resaltar lo siguiente: Dado $N \in S_k$, entonces $N_i \in S_i$ y $(L(N_i),\, 3) = 1$ para $i \in [\![1,\, k-1]\!]$.

A continuacin mostramos un algoritmo en Python para calcular los elementos de S_k (lo llamaremos **sol**). Este tiene tres entradas: k: natural que indica la dimensin, A: tupla de longitud $k-1$ con cada coordenada teniendo valor 1 o 2, pues esta indica la eleccin de los r_i's, y por ltimo B: tupla de longitud k cuyas coordenadas indican la traslacin de los valores (de 6 en 6 para los primeros $k-1$ y de 2 en 2 para el ltimo) involucrados en el clculo del elemento de S_k. Tiene como salida un $N \in S_k$. La funcin $\tilde{L}$ la implementaremos con el nombre **Ltil** y a L con **L**. La funcin **modstar** es simplemente auxiliar.

```python
import numpy as np
from sympy import discrete_log


def Ltil(h):
    a = 1
    for k in range(len(h)):
        a = a * 2 ** h[k] - 3 ** k
    return a


def L(h):
    return Ltil(h) // 3 ** len(h)


def modstar(a, n):
    b = np.mod(a, n)
    if b != 0:
        return b
    else:
        return n


def sol(k, A, B):
    if k == 1:
        return [2 + B[0] * 2]
    N = [2 * A[0] + 6 * B[0]]
    for i in range(1, k - 1):
        c = -discrete_log(9, L(N), 2) + 2 * A[i]
        c = modstar(c, 6) + 6 * B[i]
        N.append(c)
        N = [int(float(a)) for a in N]
    c = -discrete_log(3, L(N), 2)
```

```python
    c = modstar(c, 2) + 2 * B[k - 1]
    N.append(c)
    return [int(float(a)) for a in N]
```

Click aqu para acceder al archivo con los algoritmos. Veamos algunos ejemplos:

```python
>>> sol(1, [], [3])
[8]
>>> sol(3, [1, 2], [0, 2, 5])
[2, 16, 11]
>>> sol(4, [2, 2, 1], [7, 4, 0, 1])
[46, 25, 5, 4]
>>> sol(7, [1, 2, 1, 2, 2, 1], [32, 14, 6, 0, 23, 7, 5])
[194, 90, 39, 2, 143, 43, 12]
```

y podemos verificar que efectivamente estn en S_1, S_3, S_4, y S_7 respectivamente:

```python
>>> Ltil([8]) % 3
0
>>> Ltil([2, 16, 11]) % 3 ** 3
0
>>> Ltil([46, 25, 5, 4]) % 3 ** 4
0
>>> Ltil([194, 90, 39, 2, 143, 43, 12]) % 3 ** 7
0
```

As, ahora conocemos qu forma tienen las soluciones de $\tilde{L}(N) \equiv 0\,(3^k)$. Sin embargo, dado un elemento de S_k, no est claro que modificaciones le podemos hacer a esa tupla (adems de trasladar la ltima coordenada en mltiplos de 2) para conseguir otro elemento tambin en S_k, pues al realizar un cambio todos los valores siguientes deben ser recalculados. Por esto, daremos una herramienta para, dado $N \in S_k$, hallar toda una familia de elementos tambin en S_k en base a este ltimo.

Lema 1.10: Dado $N \in S_k$, todo $\tilde{N} \in \mathbb{N}^k$ con $\tilde{n}_i \equiv n_i\,(\varphi(3^{k-i+1}))$ para $i \in [\![1, k]\!]$ cumple $\tilde{N} \in S_k$.

Demostracin. En primer lugar, sea $\tilde{N} \in \mathbb{N}^k$ con

$$\begin{aligned} \tilde{n}_i &= n_i \text{ para } i \in [\![1, k]\!] \setminus \{m\} \\ \tilde{n}_m &\equiv n_m\,(\varphi(3^{k-m+1})) \end{aligned},$$

esto es, $\tilde{N} = (n_1, \cdots, n_{m-1}, n_m + \tilde{k} \cdot \varphi(3^{k-m+1}), n_{m+1}, \cdots, n_k)$. Luego

$$\begin{aligned}
&\tilde{L}(N) \equiv \tilde{L}(\tilde{N})\,(3^k) \iff \frac{\tilde{L}(N_{k-1}) \cdot 2^{n_k} - 1}{3} \equiv \frac{\tilde{L}(\tilde{N}_{k-1}) \cdot 2^{n_k} - 1}{3}\,(3^k) \iff \\
&\iff \tilde{L}(N_{k-1}) \equiv \tilde{L}(\tilde{N}_{k-1})\,(3^k) \iff \cdots \iff \tilde{L}(N_m) \equiv \tilde{L}(\tilde{N}_m)\,(3^k) \iff \\
&\iff \frac{\tilde{L}(N_{m-1}) \cdot 2^{n_m} - 1}{3} \equiv \frac{\tilde{L}(\tilde{N}_{m-1}) \cdot 2^{n_m + \tilde{k} \cdot \varphi(3^{k-m+1})} - 1}{3}\,(3^k) \iff \\
&\iff \tilde{L}(N_{m-1}) \cdot 2^{n_m} \equiv \tilde{L}(\underbrace{\tilde{N}_{m-1}}_{=N_{m-1}}) 2^{n_m + \tilde{k} \cdot \varphi(3^{k-m+1})}\,(3^k) \iff \\
&\iff \tilde{L}(N_{m-1}) \equiv \tilde{L}(N_{m-1}) \cdot 2^{\tilde{k} \cdot \varphi(3^{k-m+1})}\,(3^k) \iff \\
&\qquad\qquad \iff L(N_{m-1}) \equiv L(N_{m-1}) \cdot \underbrace{2^{\tilde{k} \cdot \varphi(3^{k-m+1})}}_{\equiv 1\,(3^{k-m+1})}\,(3^{k-m+1}),
\end{aligned}$$

y como lo ltimo se cumple trivialmente, vale que $\tilde{L}(\tilde{N}) \equiv 0\,(3^k)$, o sea $\tilde{N} \in S_k$. Notar que $\tilde{L}(N) \equiv \tilde{L}(\tilde{N})\,(3^k)$ no es vlido en general, pues en el ltimo paso ocupamos que $N \in S_k$ para poder dividir a $\tilde{L}(N_{m-1})$ por 3^{m-1} (observacin anterior). Aplicando lo recin mostrado para cada coordenada se tiene el lema.

■

Con esto ltimo surge una pregunta natural: Es posible quedarnos con un subconjunto finito $S_k^* \subseteq S_k$, de forma tal que variando las coordenadas de sus elementos segn el lema anterior, genere a todo S_k? Esto es, en concreto,

$$\exists\ S_k^* \subseteq S_k \text{ con } |S_k^*| < \infty : \{N \in \mathbb{N}^k \mid n_i \equiv n_i^*\,(\varphi(3^{k-i+1}))\ \forall\ i \in [\![1,\, k]\!]\}_{N^* \in S_k^*} = S_k?$$

La respuesta es s y lo veremos a continuacin. Notar que

$$\{N \in \mathbb{N}^k \mid n_i \equiv n_i^*\,(\varphi(3^{k-i+1}))\ \forall\ i \in [\![1,\, k]\!]\}_{N^* \in S_k^*} = \bigcup_{N^* \in S_k^*} \prod_{i=1}^{k} \left([n_i^*]_{\varphi(3^{k-i+1})} \cap \mathbb{N}\right).$$

Denotamos a tal conjunto como $\langle S_k^* \rangle$ y lo llamamos "el generado de S_k^*". Si $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mod}^* : \mathbb{Z} \times \{n\} \longrightarrow [\![1,\, n]\!] \qquad \text{dada por} \\
&\mathrm{mod}^*(a,\, n) = \begin{cases} \mathrm{mod}(a,\, n) & \text{si} \quad \mathrm{mod}(a,\, n) \neq 0 \\ n & \text{si} \quad \mathrm{mod}(a,\, n) = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

As, el conjunto que va a cumplir lo que buscamos es

$$\begin{aligned}
S_k^* = \Bigg\{ N^* \in \mathbb{N}^k \;\Bigg|\; &\begin{matrix} n_i^* = \mathrm{mod}^*(-I_2^9(L(N_{i-1}^*)) + 2r_i,\, 6) + m_i \\ n_k^* = \mathrm{mod}^*(-I_2^3(L(N_{k-1}^*)),\, 2) \end{matrix}, \text{ con} \\
&r_i \in \{1,\, 2\},\ \begin{matrix} m_i \in [\![0,\, \varphi(3^{k-i+1}) - 1]\!] \\ m_i \equiv 0\,(6) \end{matrix}\ \forall\ i \in [\![1,\, k-1]\!] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Empecemos calculando su cardinal. Veamos primero la siguiente proposicin correspondiente a conteo.

Lema 1.11: Dados $m,\, n \in \mathbb{N}$, se cumple $\big|[\![1,\, m]\!] \cap n\mathbb{N}\big| = \dfrac{m - \operatorname{mod}(m,\, n)}{n}$.

Demostracin. Recordar que la funcin "piso " $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ asigna a cada nmero real r el nico entero a tal que $a \le r < a + 1$. Ahora, $n\mathbb{N} = \{n,\, 2n,\, 3n,\, \cdots\}$ y

$$kn \le m \iff k \le \frac{m}{n} \iff k \le \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor .$$

Luego es claro que $\big|[\![1,\, m]\!] \cap n\mathbb{N}\big| = \left\lfloor \dfrac{m}{n} \right\rfloor$. Ahora,

$$\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor \le \frac{m}{n} < \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1 \iff n \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor \le m < n \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + n \iff 0 \le m - n \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor < n$$

y $m - \left(m - n \left\lfloor \dfrac{m}{n} \right\rfloor\right) = n \left\lfloor \dfrac{m}{n} \right\rfloor$ por lo que $m \equiv \underbrace{m - n \left\lfloor \dfrac{m}{n} \right\rfloor}_{\in [\![0,\, n-1]\!]} (n)$. Se sigue que $\operatorname{mod}(m,\, n) = m - n \left\lfloor \dfrac{m}{n} \right\rfloor$ y entonces $\left\lfloor \dfrac{m}{n} \right\rfloor = \dfrac{m - \operatorname{mod}(m,\, n)}{n}$.

■

Observar que de esto ltimo es inmediato que $\big|[\![0,\, m]\!] \cap n\mathbb{N}_0\big| = \dfrac{m - \operatorname{mod}(m,\, n)}{n} + 1$. Calculemos $|S_k^*|$.

Notar que en cada coordenada $i \in [\![1,\, k-1]\!]$ se tienen 2 opciones para r_i y

$$\begin{aligned}
\big|[\![0,\, \varphi(3^{k-i+1}) - 1]\!] \cap 6\mathbb{N}_0\big| &= \frac{\varphi(3^{k-i+1}) - 1 - \operatorname{mod}(\varphi(3^{k-i+1}) - 1,\, 6)}{6} + 1 \\
&= \frac{6 \cdot 3^{k-i-1} - 1 - \operatorname{mod}(6 \cdot 3^{k-i-1} - 1,\, 6)}{6} + 1 \\
&= \frac{6 \cdot 3^{k-i-1} - 1 - \operatorname{mod}(-1,\, 6)}{6} + 1 \\
&= \frac{6 \cdot 3^{k-i-1} - 1 - 5}{6} + 1 \\
&= \frac{6 \cdot 3^{k-i-1} - 6}{6} + 1 \\
&= 3^{k-i-1} - 1 + 1 \\
&= 3^{k-i-1}
\end{aligned}$$

para m_i, por lo que en cada una de estas se tienen $2 \cdot 3^{k-i-1}$ opciones. As,

$$|S_k^*| = \prod_{i=1}^{k-1} 2 \cdot 3^{k-i-1} = 2^{k-1} \cdot 3^{(k-2)+(k-3)+\cdots+1} = 2^{k-1} \cdot 3^{\frac{(k-2)(k-1)}{2}}.$$

Ahora,

Teorema 1.4: $\langle S_k^* \rangle = S_k$.

Demostracin. ($\subseteq$) Dado $N^* \in S_k^*$, cumple $\begin{cases} n_i^* \equiv -I_2^9(L(N_{i-1}^*)) + 2r_i \, (6) \\ n_k^* \equiv -I_2^3(L(N_{k-1}^*)) \, (2) \end{cases}$ con $r_i \in \{1, 2\}$ para $i \in [\![1, k-1]\!]$, por lo que claramente $N^* \in S_k$ y entonces $S_k^* \subseteq S_k$. Ms an, por el lema 1.10 se tiene $\langle S_k^* \rangle \subseteq S_k$.

($\supseteq$) Sea $N \in S_k$, cumple $\begin{cases} n_i \equiv -I_2^9(L(N_{i-1})) + 2r_i \, (6) \\ n_k \equiv -I_2^3(L(N_{k-1})) \, (2) \end{cases}$ con $r_i \in \{1, 2\}$ para $i \in [\![1, k-1]\!]$. Veamos que $N \in \langle S_k^* \rangle$.

Si $i = 1$, $n_1 = \underbrace{-I_2^9(\underbrace{L(N_0)}_{=1})}_{=0} + 2r_1 + 6h_1$ con $h_1 \in \mathbb{N}_0$. Usando el algoritmo de la divisin con $6h_1$ siendo el dividendo y $\varphi(3^{k-i+1}) = \varphi(3^k)$ el divisor, se obtiene $6h_1 = m_1 + q_1 \cdot \varphi(3^k)$ con $m_1 \in [\![0, \varphi(3^k) - 1]\!]$. Adems, como $\varphi(3^k) = 6 \cdot 3^{k-2}$ se tiene $m_1 \equiv 0 \, (6)$. Se sigue que $n_1 = 2r_1 + m_1 + q_1 \cdot \varphi(3^k) = \text{mod}^*(-I_2^9(L(N_0^*)) + 2r_1, 6) + m_1 + q_1 \cdot \varphi(3^k)$ y por lo tanto $n_1 = n_1^* + q_1 \cdot \varphi(3^k)$ con $n_1^* := \text{mod}^*(-I_2^9(L(N_0^*)) + 2r_1, 6) + m_1$. Notar que

$$L(N_1) \equiv L(N_1^*) \, (3^{k-1}) \iff \frac{2^{n_1} - 1}{3} \equiv \frac{2^{n_1^*} - 1}{3} \, (3^{k-1}) \iff 2^{n_1} \equiv 2^{n_1^*} \, (3^k) \iff$$
$$\iff n_1 \equiv n_1^* \, (\varphi(3^k)),$$

y por lo recin visto lo ltimo es cierto.

Ahora supongamos que para un $i \in [\![1, k-2]\!]$ se tiene mostrado que

$$\begin{matrix} n_i = n_i^* + q_i \cdot \varphi(3^{k-i+1}) \\ L(N_i) \equiv L(N_i^*) \, (3^{k-i}) \end{matrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} n_i^* = \text{mod}^*(-I_2^9(L(N_{i-1}^*)) + 2r_i, 6) + m_i \\ m_i \in [\![0, \varphi(3^{k-i+1}) - 1]\!], \, m_i \equiv 0 \, (6) \end{matrix}.$$

Veamos que tambin se cumple para $i + 1$. Sabemos que $n_{i+1} \equiv -I_2^9(L(N_i)) + 2r_{i+1} \, (6)$ y

$$I_2^9(L(N_i)) \equiv I_2^9(L(N_i^*)) \, (6) \iff L(N_i) \equiv L(N_i^*) \, (9).$$

Por hiptesis se tiene $L(N_i) \equiv L(N_i^*) \, (3^{k-i})$, e $i \leq k-2$ implica $k - i \geq 2$. Por esto se cumple $L(N_i) \equiv L(N_i^*) \, (9)$ y luego $n_{i+1} \equiv -I_2^9(L(N_i^*)) + 2r_{i+1} \, (6)$. Se sigue que $n_{i+1} = \text{mod}^*(-I_2^9(L(N_i^*)) + 2r_{i+1}, 6) + 6h_{i+1}$ con $h_{i+1} \in \mathbb{N}_0$. Ahora aplicamos el algoritmo de la divisin siendo $6h_{i+1}$ el dividendo y $\varphi(3^{k-(i+1)+1}) = \varphi(3^{k-i})$ el divisor y se obtiene $6h_{i+1} = m_{i+1} + q_{i+1} \cdot \varphi(3^{k-i})$ con $m_{i+1} \in [\![0, \varphi(3^{k-i}) - 1]\!]$. Adems, $\varphi(3^{k-i}) = 6 \cdot 3^{k-i-2}$ y $k - i - 2 \geq 0$, por lo que resulta $m_{i+1} \equiv 0 \, (6)$. Se sigue que $n_{i+1} = n_{i+1}^* + q_{i+1} \cdot \varphi(3^{k-(i+1)+1})$ con $n_{i+1}^* := \text{mod}^*(-I_2^9(L(N_i^*)) + 2r_{i+1}, 6) + m_{i+1}$. Por ltimo,

$$L(N_{i+1}) \equiv L(N_{i+1}^*) \, (3^{k-(i+1)}) \iff \frac{L(N_i) \cdot 2^{n_{i+1}} - 1}{3} \equiv \frac{L(N_i^*) \cdot 2^{n_{i+1}^*} - 1}{3} \, (3^{k-i-1}) \iff$$
$$\iff L(N_i) \cdot 2^{n_{i+1}} \equiv \underbrace{L(N_i^*)}_{\equiv L(N_i) \, (3^{k-i})} \cdot 2^{n_{i+1}^*} \, (3^{k-i}) \overset{\sharp}{\iff} 2^{n_{i+1}} \equiv 2^{n_{i+1}^*} \, (3^{k-i}) \iff$$
$$\iff n_{i+1} \equiv n_{i+1}^* \, (\varphi(3^{k-i})),$$

($\sharp$) $(L(N_i), 3) = 1$ por la observacin 1.3.

y por lo recin visto, lo ltimo es cierto.

Si $i = k$ se tiene $n_k = -I_2^3(L(N_{k-1}))\,(2)$ y

$$I_2^3(L(N_{k-1})) \equiv I_2^3(L(N_{k-1}^*))\,(2) \iff L(N_{k-1}) \equiv L(N_{k-1}^*)\,(3),$$

y esto se cumple pues ya vimos que $L(N_{k-1}) \equiv L(N_{k-1}^*)\,(3^{k-(k-1)})$. Se sigue que $n_k \equiv -I_2^3(L(N_{k-1}^*))\,(2)$ y por lo tanto $n_k = \mathrm{mod}^*(-I_2^3(L(N_{k-1}^*)), 2) + q_k \cdot \varphi(3) = n_k^* + q_k \cdot \varphi(3)$ con $n_k^* := \mathrm{mod}^*(-I_2^3(L(N_{k-1}^*)), 2)$.

Finalmente, es claro que $N^* \in S_k^*$ y $N \in \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left([n_i^*]_{\varphi(3^{k-i+1})} \cap \mathbb{N}\right) \subseteq \langle S_k^* \rangle$.

$\blacksquare$

A continuacin damos un algoritmo que como entrada tiene un k natural que indica la dimensin y como salida una lista con todos los elementos de S_k^*. A este lo llamaremos **solstar**. Es necesario que **discrete_log**, las funciones definidas anteriormente (**Ltil**, **L**, **modstar** y **sol**), y el mdulo **numpy** estn importados. Las funciones **prodcart** y **cart** son simplemente auxiliares.

```
def prodcart(A, B):
    result = []
    for i in range(0, len(A)):
        for j in range(0, len(B)):
            if type(A[i]) != list:
                A[i] = [A[i]]
            temp = [num for num in A[i]]
            temp.append(B[j])
            result.append(temp)
    return result

def cart(A):
    temp = A[0]
    for i in range(1, len(A)):
        temp = prodcart(temp, A[i])
    return temp

def solstar(k):
    if k == 1:
        return [[2]]
    if k == 2:
        return [[2, 2], [4, 1]]
    A = cart([[1, 2] for i in range(k-1)])
    B = [[i for i in range(0, 3 ** (k-j-1))] for j in range(1, k)]
    C = cart(B)
    for c in C:
        c.append(0)
    h = [sol(k, a, c) for a in A for c in C]
    return h


def param(A):
    k = len(A)
```

```
    if k == 1:
        return [], []
    R = []
    M = []
    if A[0] % 6 == 2:
        R.append(1)
        M.append(A[0] - 2)
    else:
        R.append(2)
        M.append(A[0] - 4)
    for i in range(1, k-1):
        x = -dilog9(L(A[:i])) + 2
        if A[i] % 6 == x % 6:
            R.append(1)
            M.append(A[i] - modstar(x, 6))
        else:
            R.append(2)
            M.append(A[i] - modstar(x + 2, 6))
    del M[k - 2]
    X = []
    X.append(R)
    X.append(M)
    return X


def suma(A, B):
    k = len(A)
    if k == 1:
        return [2]
    ra, ma = param(A)
    rb, mb = param(B)
    ma.append(0)
    mb.append(0)
    rsum = [modstar(ra[i] + rb[i], 2) for i in range(k-1)]
    msum = [np.mod(ma[i] + mb[i], phi(3 ** (k-(i+1)+1))) for i in
   range(k-1)]
    N = [int(float(2 * rsum[0] + msum[0]))]
    for i in range(1, k-1):
        c = modstar(-dilog9(L(N)) + 2 * rsum[i], 6) + msum[i]
        N.append(c)
        N = [int(float(a)) for a in N]
    c = modstar(-dilog3(L(N)), 2)
    N.append(c)
    N = [int(float(a)) for a in N]
    return N


def gen(A):
    k = len(A)
    e = id(k)
    G = []
    G.append(e)
    if A == e:
        return G
    G.append(A)
    B = suma(A, A)
    while B != e:
        G.append(B)
```

```python
        B = suma(B, A)
    return G

def ord(A):
    return len(gen(A))

def inver(A):
    H = gen(A)
    k = len(H)
    return H[k-1]

def id(k):
    return sol(k, [2 for i in range(k-1)], [0 for i in range(k)])

def elemord(k, m): #da una lista con los elementos de orden m en S*_k
    A = solstar(k)
    B = []
    for i in range(len(A)):
        x = A[i]
        if ord(x) == m:
            B.append(x)
    return B

def contord(k, m): #cuenta la cantidad de elementos de orden m en S*_k
    A = [ord(a) for a in solstar(k)]
    j = 0
    for i in range(len(A)):
        if A[i] == m:
            j += 1
    return j

def contord2(A, m): #cuenta la cantidad de elementos de orden m en Z_A[0]x...xZ_A[k-1], k = len(A)
    k = len(A)
    if k == 1:
        G = Group("add", A[0])
    else:
        G = Group(["add" for i in range(k)], A)
    B = G.go()
    j = 0
    for i in range(len(B)):
        if B[i] == m:
            j += 1
    return j

def xi(A, B):
    if not len(A) == len(B) + 1:
        print("dimension error")
        return
    B.append(0)
    B.append(0)
    return sol(len(A) + 1, A, [b // 6 for b in B])

def retrac(N): #tiene como entrada un N en S*_k y como salida la retracci n de N, en S*_(k-1)
    k = len(N)
    if k == 2:
        return [2]
```

```
    if k == 1:
        return []
    x = param(N)
    rho = x[0]
    mu = x[1]
    del rho[k - 2]
    del mu[k - 3]
    mu = [np.mod(mu[i], phi(3 ** (k - (i + 1)))) for i in range(len(mu))]
    rho = [int(float(a)) for a in rho]
    mu = [int(float(a)) for a in mu]
    return xi(rho, mu)

def atrac(N, t): #tiene como entrada un N en S*_k y como salida la atracci n de N (can nica, de orden o natural seg n el tipo)
    k = len(N)
    if t == 'can':
        return [2] + N
    x = param(N)
    rho = x[0]
    mu = x[1]
    if t == 'ord':
        return xi([2] + rho, [0] + mu)
    if t == 'nat':
        return xi(rho + [2], mu + [0])

def setisize(A):
    a = []
    for x in A:
        if not x in a:
            a.append(x)
    return a

def atrac2(A, j): #tiene como entrada un N en S*_k y como salida N^(j), j >= k
    while len(A) != j:
        A = atrac(A, 'nat')
    return A

def atrac3(A, j): #tiene como entrada un N en S*_k y como salida N^(j), j >= k
    while len(A) != j:
        A = atrac(A, 'ord')
    return A


def retrac2(A, j): #tiene como entrada un N en S*_k y como salida N^(j), j <= k
    while len(A) != j:
        A = retrac(A)
    return A

def suma1(A, B, t = '+'): #tiene como entradas dos elementos en S*_inf y como salida su suma (mayor o menor dependiendo del tipo t)
    k = len(A)
    l = len(B)
    if t == '+':
        m = max(k, l)
```

```
        A = atrac2(A, m)
        B = atrac2(B, m)
        return suma(A, B)
    if t == '-':
        n = min(k, l)
        A = retrac2(A, n)
        B = retrac2(B, n)
        return suma(A, B)

def suma2(A, B, t = '+'): #tiene como entradas dos elementos en S*_inf
    y como salida su suma (mayor o menor dependiendo del tipo t)
    k = len(A)
    l = len(B)
    if t == '+':
        m = max(k, l)
        A = atrac3(A, m)
        B = atrac3(B, m)
        return suma(A, B)
    if t == '-':
        n = min(k, l)
        A = retrac2(A, n)
        B = retrac2(B, n)
        return suma(A, B)


def mover(A, j): #tiene como entrada un N en S*_k y como salida N^(j)
    k = len(A)
    if j >= k:
        return atrac2(A, j)
    else:
        return retrac2(A, j)

def retracalt(N):
    k = len(N)
    if k == 2:
        return [2]
    if k == 1:
        return []
    x = param(N)
    rho = x[0]
    mu = x[1]
    rho = rho[1:]
    mu = mu[1:]
    rho = [int(float(a)) for a in rho]
    mu = [int(float(a)) for a in mu]
    return xi(rho, mu)

def retracalt2(N, j):
    while len(N) != j:
        N = retracalt(N)
    return N

def mover2(A, j):
    k = len(A)
    if j >= k:
        return atrac3(A, j)
    else:
        return retracalt2(A, j)
```

```
def inf(A):
    return [L(A), fact(L(A)), aux(L(A))]

def parte_basica(N): #tiene como entrada N en S_k y como salida la parte basica de N
    k = len(N)
    A = [modstar(N[i], phi(3 ** (k - (i + 1) + 1))) for i in range(k-1)] + [modstar(N[k-1], 2)]
    return [int(float(A[i])) for i in range(k)]

def traslacion(N): #tiene como entrada N en S_k y como salida la traslacion de N
    k = len(N)
    A = parte_basica(N)
    B = [N[i] - parte_basica(N)[i] for i in range(k)]
    return[B[i] // phi(3 ** (k - (i + 1) + 1)) for i in range(k)]

def invW(l):
    k = (l + 1) // 2
    factor = fact(3 * k - 1)
    if 2 in list(factor):
        n = factor[2] + 1
    else:
        n = 1
    A = list(filter(lambda x: x != 2, factor))
    B = [i ** factor[i] for i in A]
    return [int(np.prod(A)), n]
```

Click aqu para acceder al archivo con los algoritmos. Veamos algunos ejemplos:

```
>>> solstar(1)
[[2]]
>>> solstar(2)
[[2, 2], [4, 1]]
>>> solstar(3)
[[2, 2, 2], [8, 6, 2], [14, 4, 2], [2, 4, 1], [8, 2, 1], [14, 6, 1], [4, 3, 2], [10, 5, 2], [16, 1, 2], [4, 5, 1], [10, 1, 1], [16, 3, 1]]
```

Cabe aclarar que a fines prcticos se puede usar **solstar** hasta $k = 5$, pues para $k = 6$ se tiene $|S_6^*| = 2^{6-1} \cdot 3^{(6-2)(6-1)/2} = 32 \cdot 3^{10} > 1,000,000$.

Ahora, recordar que por la propiedad recursiva de L se tiene que los elementos que formaran parte de los conjuntos involucrados en la descomposicin de $2\mathbb{N} - 1$ (lema 1.2) son de la forma

$$\frac{1 \cdot 2^{n_1} - 1}{3}, \qquad \frac{\frac{2^{n_1} - 1}{3} \cdot 2^{n_2} - 1}{3}, \qquad \frac{\frac{\frac{2^{n_1} - 1}{3} \cdot 2^{n_2} - 1}{3} \cdot 2^{n_3} - 1}{3}, \qquad \ldots$$

Por esto, se podra decir que a medida en que aumentamos k en S_k, estamos "refinando" el conjunto en donde buscamos naturales impares. Ms an, se puede ver que los nmeros generados en S_k no se pierden en S_{k+1}. En concreto,

Lema 1.12: Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple $\{L(N)\}_{N\in S_k} \subseteq \{L(N)\}_{N\in S_{k+1}}$.

Demostracin. Sea $N = (n_1,\, \cdots,\, n_k)$.

$$L(N) = L(2, N) \iff (G_{n_k}^{-1} \circ \cdots \circ G_{n_1}^{-1})(1) = (G_{n_k}^{-1} \circ \cdots \circ G_{n_1}^{-1} \circ G_2^{-1})(1) \iff$$
$$\iff 1 = G_2^{-1}(1)$$

y $G_2^{-1}(1) = \dfrac{3}{2^2} \cdot 1 + \dfrac{1}{2^2} = 1.$

■

Observacin 1.4: Cabe resaltar de la demostracin anterior que si $N \in S_k$, entonces $(2,\, N) \in S_{k+1}$ y $L(2,\, N) = L(N)$.

Veamos ahora dos propiedades muy importantes de L.

Lema 1.13: i. $L(N)$ es impar para $N \in S_k$ y ii. $L_{|_{\mathbb{N}^k}}$ es inyectiva. Ms an, dados $N \in S_k$, $M \in S_l$ con $l > k$, entonces $L(N) = L(M)$ si y solo si $M = (\underbrace{2,\, \cdots,\, 2}_{l-k},\, N)$.

Demostracin. i. Como $(2,\, 3) = 1$ se tiene

$$\operatorname{mod}(L(N),\, 2) = \operatorname{mod}\left(\frac{L(N_{k-1}) \cdot 2^{n_k} - 1}{3},\, 2\right) = \operatorname{mod}(L(N_{k-1}) \cdot 2^{n_k} - 1,\, 2) =$$
$$= \operatorname{mod}(-1,\, 2) = 1.$$

ii. Primero veamos que $L_{|_{\mathbb{N}^k}}$ es inyectiva. Por comodidad de escritura vamos a usar L, pero recordar que est restringida a $\mathbb{N}^k$. Usaremos induccin. Si $k = 1$,

$$L(n_1) = L(\tilde{n}_1) \iff \frac{2^{n_1} - 1}{3} = \frac{2^{\tilde{n}_1} - 1}{3} \iff 2^{n_1} = 2^{\tilde{n}_1} \iff n_1 = \tilde{n}_1.$$

Ahora supongamos que L es inyectiva en $\mathbb{N}^l$. Vamos a ver que tambin lo es en $\mathbb{N}^{l+1}$.

$$L(N_{l+1}) = L(\tilde{N}_{l+1}) \iff \frac{L(N_l) \cdot 2^{n_{l+1}} - 1}{3} = \frac{L(\tilde{N}_l) \cdot 2^{\tilde{n}_{l+1}} - 1}{3} \iff$$
$$\iff \underbrace{L(N_l)}_{\equiv 1\,(2)} \cdot 2^{n_{l+1}} = \underbrace{L(\tilde{N}_l)}_{\equiv 1\,(2)} \cdot 2^{\tilde{n}_{l+1}} \iff L(N_l) = L(\tilde{N}_l) \quad \text{y} \quad 2^{n_{l+1}} = 2^{\tilde{n}_{l+1}}.$$

Luego es claro que $N_{l+1} = \tilde{N}_{l+1}$.

Ahora sea $N \in S_k$ y $M = (2,\, \cdots,\, 2,\, N) \in \mathbb{N}^l$. Por la observacin anterior es claro que $M \in S_l$ y $L(N) = L(M)$. Por otra parte, si $N \in S_k$, $M \in S_l$ con $l > k$ y $L(N) = L(M)$, se tiene que $L(\underbrace{2,\, \cdots,\, 2,\, N}_{\in S_l}) = L(M)$, y ya mostramos que $L_{|_{\mathbb{N}^l}}$ es inyectiva. Luego $M = (2,\, \cdots,\, 2,\, N)$.

$\blacksquare$

Corolario 1.3: Los incisos i. y ii. del lema anterior tambin se cumplen para $\tilde{L}$.

Despus de todo lo visto, naturalmente surgen las siguientes preguntas: Cul es la distribucin de los naturales impares sobre L bajo los S_k's? (o la de $\mathbb{N}$ sobre $2^j L$ bajo los S_k's y j's, que es equivalente a lo anterior como ya vimos) y por otra parte, Dado un $n_0 \in \mathbb{N}$, Qu tanto hay que refinar en el conjunto de bsqueda (aumentar k) para encontrar a todos los impares menores que n_0 en tal conjunto? (o para encontrar a todo natural menor que n_0 en el conjunto anterior mencionado). Todo esto, en concreto, es estudiar el comportamiento de

$$f(n) = \text{mn}\left\{\tilde{k} \mid L^{-1}(n) \cap \mathbb{N}^{\tilde{k}} \neq \emptyset\right\} \qquad \text{y}$$
$$g(n_0) = \text{mn}\left\{\tilde{k} \mid 2\mathbb{N}-1 \cap [\![1, n_0]\!] \subseteq \{L(N)\}_{N \in S_{\tilde{k}}}\right\}.$$

Notar que $g(n_0) = \underset{n' \in [\![1, n_0]\!]}{\text{mx}} f(n')$. Si bien no vamos a ahondar de forma profunda en estas cuestiones, podemos hacer un grfico para tener una idea visual de como son f y g. Vamos a implementar a la funcin **graf**, que tiene como entradas n_0, que indica la tolerancia en el eje x para los nmeros impares graficados, y m, que indica la tolerancia en el refinamiento k. Como salida tiene un esbozo del conjunto $\{(n, f(n)) \in 2\mathbb{N}-1 \times \mathbb{N} \mid n \leq n_0 \text{ y } f(n) \leq m\}$. Las funciones **collatz** y **cont** son auxiliares.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def collatz(n):
    q = np.array([])
    while n != 1:
        if n % 2 == 1:
            n = (3 * n + 1) // 2
            q = np.append(q, 1)
        else:
            n = n / 2
            q = np.append(q, 2)
    a = len(q)
    q0 = np.zeros(a)
    for i in range(a):
        q0[i] = q[a - i - 1]
    return q0.astype('int')


def cont(n):
    j = 0
    a = collatz(n)
    for i in range(len(a)):
        if a[i] == 1:
            j = j + 1
    return j


```

```
def graf(n_0, m):
    A = [cont(n) for n in range(1, n_0 + 1)]
    X = []
    for n in range(1, n_0 + 1):
        if A[n - 1] <= m and n % 2 == 1:
            X.append(n)
    B = [A[n - 1] for n in X]
    C = []
    for i in range(len(B)):
        l = 0
        q = B[i]
        for j in range(len(C)):
            if C[j] == q:
                l = 1
        if l == 0:
            C.append(q)
    C.sort()
    Y = []
    for i in range(len(X)):
        Y.append(A[X[i] - 1])
    plt.scatter(X, Y, s=5, c='r')
    x = np.linspace(0, n_0, 2)
    for i in range(len(C)):
        h = C[i]
        y = [h, h]
        if i % 2 == 0:
            plt.plot(x, y, 'k--', linewidth=0.5)
            plt.text(n_0 + 0.5, h, f"${h}$", fontsize='x-small', color
='k')
        else:
            plt.plot(x, y, 'b--', linewidth=0.5)
            plt.text(n_0 + 0.5, h, f"${h}$", fontsize='x-small', color
='b')
    plt.yticks([])
    plt.xticks([0, n_0])
    plt.show()

def graff(n_0, m):
    A = [cont(n) for n in range(1, n_0 + 1)]
    X = []
    for n in range(1, n_0 + 1):
        if A[n - 1] <= m:
            X.append(n)
    B = [A[n - 1] for n in X]
    C = []
    for i in range(len(B)):
        l = 0
        q = B[i]
        for j in range(len(C)):
            if C[j] == q:
                l = 1
        if l == 0:
            C.append(q)
    C.sort()
    Y = []
    for i in range(len(X)):
        Y.append(A[X[i] - 1])
    plt.scatter(X, Y, s=5, c='r')
```

```python
    plt.yticks([])
    plt.xticks([0, n_0])
    plt.show()


def xi(k):
    return (2**totient(3**k)-1)//3**k


def numberToBase(n, b):
    if n == 0:
        return [0]
    digits = []
    while n:
        digits.append(int(n % b))
        n //= b
    return digits[::-1]
```

Click aqu para acceder al archivo con los algoritmos. Veamos un ejemplo:

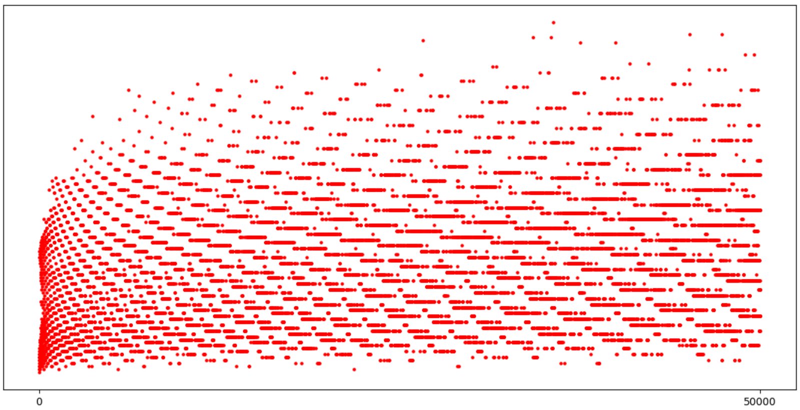


Figura 1: Grfico de $f(n)$ sobre los primeros impares hasta 50,000

Notar que en cada corte vertical, el punto de ms arriba representa un valor de g. Vale la pena destacar algunas regiones interesantes de la imgen anterior:

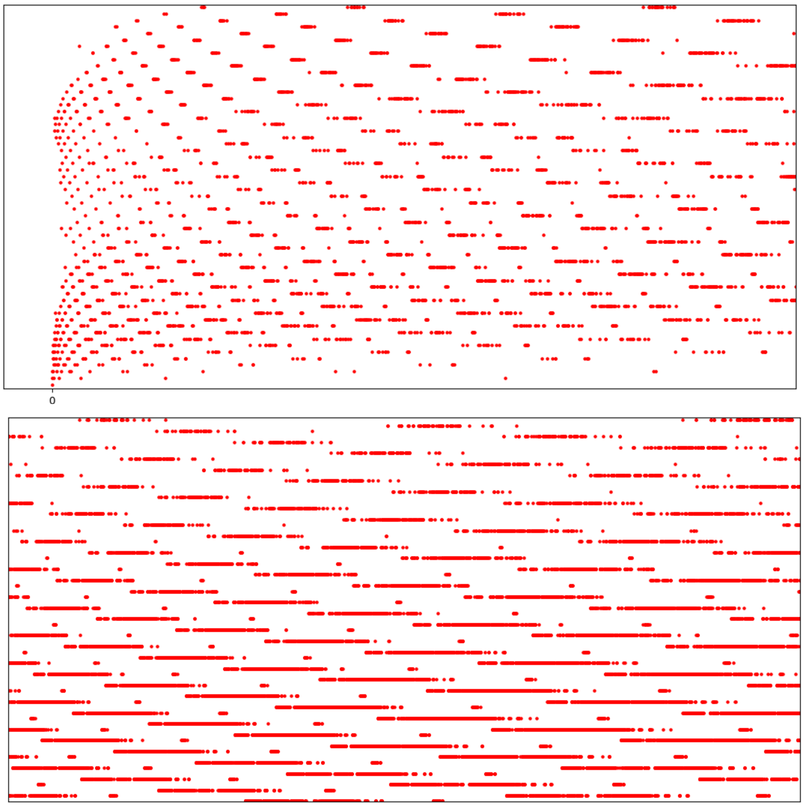


Figura 2: Secciones notables de la Figura 1

2. Abordaje Topolgico.

Para esta seccin nos basamos en [14, 12].

Definicin 2.1: Un espacio topolgico se dice "de Alexandroff" si es cerrado bajo intersección arbitraria de abiertos. Esto es, dados $\{U_i\}_{i\in I}$ abiertos, entonces $\bigcap_{i\in I} U_i$ es abierto.

Observacin 2.1: Dado X un espacio topolgico de Alexandroff y $a \in X$, $V(a) := \bigcap_{\substack{U \text{ abierto} \\ a \in U}} U$ es el entorno abierto de a ms chico. Es decir, si V es entorno abierto de a, entonces $V(a) \subseteq V$.

Lema 2.1: Un espacio topolgico X es de Alexandroff si y solo si para todo $a \in X$ existe un entorno ms chico de a.

Demostracin. ($\Rightarrow$) es la observacin anterior. ($\Leftarrow$) Supongo que $\forall\ a \in X\ \exists\ V(a)$ entorno abierto de a con la propiedad de que si U es un entorno abierto de a, entonces $V(a) \subseteq U$. Luego $V(a) \subseteq \bigcap_{\substack{U \text{ abierto} \\ a \in U}} U$, pero $\bigcap_{\substack{U \text{ abierto} \\ a \in U}} U \subseteq V(a)$ trivialmente y por lo tanto son iguales. As, sean $\{U_i\}_{i\in I}$ abiertos y $V = \bigcap_{i\in I} U_i$. Si $V = \emptyset$ listo, de lo contrario para

$x \in V$ se tiene que para cada $i \in I$, $x \in U_i$ y entonces $V(x) \subseteq U_i$. Se sigue que $V(x) \subseteq V$ para todo $x \in V$ y en consecuencia $\bigcup_{x \in V} V(x) \subseteq V$, pero claramente $V \subseteq \bigcup_{x \in V} V(x)$ y entonces son iguales. Luego V es abierto.

$\blacksquare$

Definicin 2.2: Sea $X \neq \emptyset$, $f : X \longrightarrow X$ funcin. Se define la “topologa primal generada por f” a $\tau_f = \{A \subseteq X \mid f^{-1}(A) \subseteq A\}$. En tal caso a X lo llamamos espacio topolgico primal.

Observacin 2.2: τ_f es una topologa de Alexandroff, pues es claro que $\emptyset$, $X \in \tau_f$, y si $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_f$, $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ y $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$.

Recordar que si $Y \subseteq X$, la clausura de Y, $\overline{Y}$ (o $\mathrm{cl}(Y)$), es el cerrado ms chico que contiene a Y. Esto es, si $A \subseteq X$ es cerrado y cumple $Y \subseteq A$, entonces $\overline{Y} \subseteq A$.

Lema 2.2: Sea X un espacio topolgico primal y $Y \subseteq X$. Se cumplen

i. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(Y)$ es el subconjunto de X f-invariante que contiene a Y ms chico,

ii. Y es cerrado si y solo si es f-invariante, iii. $\displaystyle\overline{Y} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(Y)$.

Demostracin. Denotamos $f^{\mathbb{N}_0}(Y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(Y)$. i. Es claro que $Y \subseteq f^{\mathbb{N}_0}(Y)$ y que es f-invariante. Veamos que es el ms chico. Sea $A \subseteq X$ f-invariante con $Y \subseteq A$. Veamos que $f^{\mathbb{N}_0}(Y) \subseteq A$. En primer lugar, $f(A) \subseteq A$, con lo que $f^n(A) \subseteq A$ para todo $n \geq 0$. Adems, $Y \subseteq A$ implica $f^n(Y) \subseteq f^n(A) \subseteq A$. Se sigue que $f^{\mathbb{N}_0}(Y) \subseteq A$.

ii. $(\Rightarrow)$ Y^c es abierto y entonces $f^{-1}(Y^c) \subseteq Y^c \iff Y \subseteq (f^{-1}(Y^c))^c = f^{-1}(Y) \iff f(Y) \subseteq f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ y por lo tanto es f-invariante.

$(\Leftarrow)$ $f(Y) \subseteq Y \iff Y \subseteq f^{-1}(f(Y)) \subseteq f^{-1}(Y) \implies (f^{-1}(Y))^c = f^{-1}(Y^c) \subseteq Y^c$. Se sigue que Y es cerrado.

iii. En primer lugar $\overline{Y}$ es f-invariante pues es cerrado (inciso anterior) y $Y \subseteq \overline{Y}$, con lo que $f^{\mathbb{N}_0}(Y) \subseteq \overline{Y}$ (inciso i.). Ms an, $f^{\mathbb{N}_0}(Y)$ es cerrado pues claramente es f-invariante, pero $\overline{Y}$ es el cerrado ms chico que contiene a Y. Se sigue que $\overline{Y} \subseteq f^{\mathbb{N}_0}(Y)$ y entonces son iguales.

$\blacksquare$

Definicin 2.3: La rbita de $x \in X$ se define como $O_f(x) := \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y su ncleo $\ker_f(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^{-n}(x)$ (para buena definicin notar que $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$). Cuando la funcin f se entienda del contexto se escribir $O(x)$ y $\ker(x)$.

Recordar que dado un conjunto no vaco, una relacin en este se dice cuasi-orden si es reflexiva y transitiva. El conjunto se dice parcialmente ordenado si la relacin es reflexiva, antisimtrica y transitiva. Dado un orden parcial $(A, \leq)$, $x \in A$ se dice elemento minimal si $y \leq x$ implica $y = x$.

Definicin 2.4: i. Dado (X, τ_f), se define el cuasi-orden $\leq_f$ en X dado por $x \leq_f y \iff y \in O_f(x)$ (fcilmente se verifica que efectivamente es un cuasi-orden).

ii. Se definen los conjuntos $\uparrow x := \{y \in X \mid x \leq_f y\}$ y $\downarrow x := \{y \in X \mid y \leq_f x\}$.

Observacin 2.3: i. $\uparrow x = \mathrm{cl}(x)$ y $\downarrow x = \ker(x)$.

ii. Dada una familia de conjuntos, la relacin definida por $A \leq B \iff A \subseteq B$ define un orden parcial en tal familia.

Definicin 2.5: Dado (X, τ_f), $W \subseteq X$ se dice un conjunto minimal de f si es un elemento minimal del orden parcial $(\{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset \text{ cerrado}\}, \subseteq)$

Lema 2.3: Los conjuntos minimales de un espacio topolgico primal (X, τ_f) son exactamente la rbita de los puntos peridicos.

Demostracin. Sea $A \subseteq X$ un conjunto minimal. Es claro que para todo $x \in X$, $O(x)$ es cerrado (pues es la clausura de x). As, si $x \in A$, como A es cerrado se tiene $f^n(A) \subseteq A$ (inciso ii. del lema anterior) y entonces $f^n(x) \in A$ para $n \geq 0$. Luego $O(x) \subseteq A$ y como A es minimal se sigue que $O(x) = A$, adems, con el mismo argumento se obtiene $O(f(x)) = A$, de donde se obtiene $x \in O(f(x))$ por lo que x es peridico.

Por otra parte, Sea x peridico y $A \neq \emptyset$ cerrado (por lo tanto f-invariante) con $A \subseteq O(x) = \{x, f(x), \cdots, f^k(x)\}$ para algn $k \geq 0$. Si $a \in A$ entonces $f^n(a) \in A$ para todo $n \geq 0$. Luego es claro que $A = O(x)$.

■

Definicin 2.6: Un espacio topolgico X se dice w-R_0 si $\bigcap_{x \in X} \mathrm{cl}(x) = \emptyset$

Teorema 2.1: Un espacio topolgico primal (X, τ_f) no es w-R_0 si y solo si hay una nica rbita peridica O y $\forall\, x \in X \setminus O\ \exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in O$.

Demostracin. ($\Leftarrow$) Para todo $x \in X \setminus O$ se tiene $O \subseteq \mathrm{cl}(x)$ (lema anterior). Luego

$$\bigcap_{x\in X} \mathrm{cl}(x) = \left(\bigcap_{x\in X\setminus O} \mathrm{cl}(x)\right) \cap \left(\bigcap_{x\in O} \mathrm{cl}(x)\right) \overset{\natural}{=} \left(\bigcap_{x\in X\setminus O} \mathrm{cl}(x)\right) \cap O = O \neq \emptyset$$

y se sigue que X no es w-R_0.

($\Rightarrow$) Definimos $O := \bigcap_{x\in O} \mathrm{cl}(x)$. Claramente es cerrado por X ser de Alexandroff, veamos que es un minimal de f. Si $A \neq \emptyset$ es cerrado, se tiene $\mathrm{cl}(A) = \bigcup_{a\in A} \mathrm{cl}(A) = A$ (recordar que la clausura de la unin es la unin de las clausuras). As, dado $o \in O$, $o \in \mathrm{cl}(x)$ para todo $x \in X$ y por lo tanto $o \in A$. Por el lema anterior O es una rbita peridica. Si $O' \neq O$ es otra rbita peridica, $O' \cap O = \emptyset$ y X sera w-R_0, contradiciendo la hiptesis.

Si $x \in X \setminus O$, $O \subseteq \mathrm{cl}(x)$ (obvio de la definicin de O) y luego para todo $a \in O$ se tiene $a \in \mathrm{cl}(x)$, con lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = f^n(x) \in O$.

■

Corolario 2.1: $(X,\, \tau_f)$ es w-R_0 si y solo si se cumple alguna de las siguientes:

i. X no tiene rbitas peridicas, ii. X tiene 2 o ms rbitas peridicas,

iii. X tiene solo una rbita peridica y $\exists\, a \in X$ tal que $O \cap \mathrm{cl}(a) = \emptyset$.

Definicin 2.7: $\mathrm{Per}(f) :=$ {puntos peridicos de f}.

Lema 2.4: i. $\downarrow x \subseteq \downarrow y$, $\downarrow y \subseteq \downarrow x$ o $\downarrow x \cap \downarrow y = \emptyset$ y ii. $\downarrow x$ es compacto para todo $x \in X$.

Demostracin. Si $\downarrow x \cap \downarrow y \neq \emptyset$ existe $w \in X$ tal que $x \in O(w)$ y $y \in O(w)$, esto es, $x = f^k(w)$ y $y = f^{\tilde{k}}(w)$ para ciertos $k,\, \tilde{k} \geq 0$. Si $k = \tilde{k}$ listo, de lo contrario, sin prdida de generalidad asumimos $k > \tilde{k}$. Luego es claro que $x \in O(y)$ y entonces $y \in \downarrow x$. Ahora sea $v \in \downarrow y$, se tiene $v \leq y$, $y \leq x$ y por transitividad se sigue que $v \leq x$, con lo cual $v \in \downarrow x$, de donde se obtiene $\downarrow y \subseteq \downarrow x$.

ii. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de $\downarrow x$, es decir, $\downarrow x \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$, y como $f^{-1}(U_{i_0}) \subseteq U_{i_0}$ se tiene que $f^{-1}(x) \subseteq U_{i_0}$. Luego $f^{-n}(x) \subseteq U_{i_0}$ para todo $n \geq 0$ y se concluye $\downarrow x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^{-n}(x) \subseteq U_{i_0}$. Finalmente $\downarrow x$ es compacto.

■

Teorema 2.2: Sea $(X,\, \tau_f)$ un espacio primal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. X es compacto, ii. $|\mathrm{Per}(f)| < \infty$ y $\forall\, x \in X\ \exists\, n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in \mathrm{Per}(f)$.

($\natural$) $x \in O \implies \mathrm{cl}(x) = O$.

Demostracin. (i.) $\Rightarrow$ (ii.) Claramente $\{\downarrow x\}_{x \in X}$ es un cubrimiento por abiertos de X, que como es compacto $\exists\ a_1, \cdots, a_n \in X$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow a_i$. Por el inciso i. del lema anterior, sin prdida de generalidad asumimos que $\downarrow a_i \cap \downarrow a_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Ahora veamos que los a_i's son puntos peridicos y $\mathrm{Per}(f) = \bigcup_{i=1}^{n} \{f^k(a_i)\}_{k \geq 0}$. Para cada i, trivialmente $f(a_i) \in \bigcup_{k=1}^{n} \downarrow a_k$, con lo que $f(a_i) \in \downarrow a_j$ para algn $j \in [\![1,\, n]\!]$ y entonces $f(a_i) \leq a_j$. Ms an, es claro que $a_i \leq f(a_i)$ por lo tanto $a_i \leq a_j$ y luego $i = j$. As, $f(a_i) \leq a_i$, de donde se obtiene $a_i \in \mathrm{Per}(f)$.

Ahora sea $\alpha \in \mathrm{Per}(f)$. Trivialmente $\alpha \in \bigcup_{k=1}^{n} \downarrow a_k$ por lo que $\alpha \leq a_i$ para algn $i \in [\![1,\, n]\!]$. Si $\pi = \underset{\substack{r \in \mathbb{N} \\ f^r(\alpha) = \alpha}}{\mathrm{mn}}\ r$ es el perodo de α, $a_i = f^k(\alpha)$ para cierto $k \in [\![0,\, \pi - 1]\!]$ y luego $f^{\pi - k}(a_i) = \alpha$. Se sigue que $\mathrm{Per}(f) = \bigcup_{i=1}^{n} \{f^k(a_i)\}_{k \geq 0}$, que claramente tiene cardinal finito.

Por ltimo, si $x \in X\ \exists\ i \in [\![1,\, n]\!]$ tal que $x \leq a_i$, con lo que $a_i = f^m(x) \in \mathrm{Per}(f)$ para cierto $m \in \mathbb{N}$.

(ii.) $\Rightarrow$ (i.) Es fcil ver que $X = \bigcup_{a \in \mathrm{Per}(f)} \downarrow a$, y es compacto pues es unin finita de compactos.

$\blacksquare$

Teorema 2.3: Un espacio primal no es w-R_0 si y solo si es compacto y tiene una nica rbita peridica.

Demostracin. Se deduce de los ltimos dos teoremas.

$\blacksquare$

Observacin 2.4: Todo espacio primal no compacto es w-R_0.

En [5] se muestra:

Teorema 2.4: Sean X, Y dos espacios topolgicos y $f : X \longrightarrow Y$ cerrada e inyectiva. Si X es w-R_0 entonces Y lo es tambin.

Definicin 2.8: Un espacio topolgico X se dice "supercompacto" si todo cubrimiento por abiertos contiene a X. Esto es, si $\{U_i\}_{i \in I}$ son abiertos que cumplen $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, entonces $X = U_i$ para algn $i \in I$.

Lema 2.5: Sea (X, τ_f) un espacio primal y $x \in X$. Si $\downarrow x = X$ entonces x es un punto peridico.

Demostracin. $X = \downarrow x$ si y solo si para todo $y \in X$ se tiene $x \in \mathrm{cl}(y)$, por lo que $\mathrm{cl}(x) \subseteq \mathrm{cl}(y)$ para todo $y \in X$ (pues $\mathrm{cl}(x)$ es el cerrado ms chico que contiene a x). Ahora, si $A \neq \emptyset$ es cerrado, $A = \mathrm{cl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}(a)$ y queda claro que $\mathrm{cl}(x) \subseteq A$. Luego $\mathrm{cl}(x)$ es un conjunto minimal de f y por lema 2.3 se sigue que x es un punto peridico.

■

Teorema 2.5: Un espacio primal es supercompacto si y solo si es compacto y tiene una nica rbita peridica.

Demostracin. ($\Rightarrow$) Si (X, τ_f) es supercompacto, trivialmente es compacto, ms an, como $\{\downarrow x\}_{x\in X}$ es un cubrimiento por abiertos de X se tiene que existe $q \in X$ tal que $\downarrow q = X$. Por el lema anterior q es un punto peridico. Ahora, si $O = O(o)$ es una rbita peridica, $x \in \downarrow q$ implica $q \in O(x)$ para todo $x \in X$ y por lo tanto $q \in O(o)$, de donde se obtiene $O = O(q)$ y luego solo hay una nica rbita peridica.

($\Leftarrow$) Sea $O = O(p)$ la nica rbita peridica de X. Como es compacto, para todo $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in \mathrm{Per}(f)$ por el teorema 2.2, en cuya demostracin vimos que $\mathrm{Per}(f)$ es la unin de todas las rbitas peridicas, en este caso, $\mathrm{Per}(f) = O$, con lo cual existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) = p$ y entonces $x \in f^{-m}(p) \subseteq \downarrow p$. Se sigue que $X = \downarrow p$. As, sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de X. Existe $i_0 \in I$ tal que $p \in U_{i_0}$ y como $f^{-1}(U_{i_0}) \subseteq U_{i_0}$, $f^{-1}(p) \subseteq U_{i_0}$. Se sigue que $\downarrow p \subseteq U_{i_0}$ con lo cual $X = U_{i_0}$ concluyendo que es supercompacto.

■

Definicin 2.9: Dado un espacio topolgico X, $x \in X$ se dice un “punto aislado” si el singulete $\{x\}$ es abierto.

Recordar que en un espacio topolgico X un subconjunto A se dice denso si $\overline{A} = X$.

Definicin 2.10: Un espacio topolgico se dice “resoluble” si es la unin de dos subconjuntos densos disjuntos.

La demostracin del siguiente teorema se puede encontrar en [4].

Teorema 2.6: Un espacio topolgico de Alexandroff es resoluble si y solo si no tiene puntos aislados.

Teorema 2.7: Sea el espacio primal (X, τ_f) con f suryectiva. Si $\{x\}$ es abierto, entonces es cerrado.

Demostracin: Como $\{x\}$ es abierto, $X \setminus \{x\}$ es cerrado y por el inciso ii. del lema 2.2 se tiene $f(X \setminus \{x\}) \subseteq X \setminus \{x\}$. Como f es suryectiva se sigue que $f(x) = x$ y por lo tanto $\{x\}$ es cerrado.

■

Corolario 2.2: Sea (X, τ_f) con f suryectiva. Si no tiene puntos cerrados entonces es resoluble.

Demostracin. Si ningn singulete es cerrado, ninguno es abierto por el teorema anterior y entonces no hay ningn punto aislado. Se sigue que X es resoluble.

Observacin 2.5: Sea col la funcin de Collatz (que claramente es suryectiva). El espacio primal $(\mathbb{N}, \tau_{\text{col}})$ es resoluble.

En efecto, $\nexists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{col}(n) = n$, con lo que ningn punto es cerrado.

En [14] se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 2.8: Sea $(\mathbb{N}, \tau_{col})$ el espacio primal generado por col. La conjetura de Collatz es cierta si y solo si $\mathbb{N} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ con $\Omega_1 \subseteq \downarrow 1$ y Ω_1, Ω_2 son subconjuntos densos disjuntos.

Finalmente, los siguientes teoremas muestran equivalencias de la conjetura de Collatz desde la topologa.

Teorema 2.9: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. Se cumple la conjetura de Collatz, ii. $(\mathbb{N}, \tau_{col})$ no es w-R_0,
iii. $(\mathbb{N}, \tau_{col})$ es compacto y tiene una nica rbita peridica,
iv. $(\mathbb{N}, \tau_{col})$ es supercompacto,
v. Cualquier cerrado F en τ_{col} cumple $1 \in F$.

Demostracin. (i.) $\Rightarrow$ (ii.) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{col}^k(n) = 1$ y hay una nica rbita peridica $O(1)$. Luego por el teorema 2.1 $(\mathbb{N}, \tau_{col})$ no es w-R_0.

(ii.) $\Leftrightarrow$ (iii.) Directo del teorema 2.3.

(iii.) $\Leftrightarrow$ (iv.) Directo del teorema 2.5.

(iv.) $\Rightarrow$ (v.) Si vale iv. entonces se cumple iii. y por lo tanto hay una nica rbita peridica, que es $O(1)$. Ms an, como es compacto, por teorema 2.2 se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(n) = 1$. Ahora, si F es cerrado, por iii. del lema 2.2 se tiene $F = \overline{F} = \bigcup_{n \geq 0}\{f^n(x) \mid x \in F\}$ y claramente $1 \in F$.

(v.) $\Rightarrow$ (i.) $1 \in \uparrow n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pues $\uparrow x = \text{cl}(x)$ que es cerrado), con lo que $1 \in O(n)$ y luego se cumple la conjetura de Collatz.

∎

Recordar que dado $X \neq \emptyset$ y $p \in X$, se define la topologa de “punto excluido” como $\tau_{E(p)} = \{S \subseteq X \mid p \notin S\} \cup X$.

Teorema 2.10: La conjetura de Collatz es cierta si y solo si existe $h : (\mathbb{N}, \tau_{col}) \longrightarrow (\mathbb{N}, \tau_{E(1)})$ cerrada e inyectiva.

Demostracin. ($\Rightarrow$) Por el inciso v. del teorema anterior, para todo conjunto cerrado F, $1 \in F$. Luego definiendo $h(x) = x$ se tiene $1 \in h(F)$ y por lo tanto h es cerrada e inyectiva.

($\Leftarrow$) Sea $h : (\mathbb{N}, \tau_{col}) \longrightarrow (\mathbb{N}, \tau_{E(1)})$ cerrada e inyectiva. Notar que $(\mathbb{N}, \tau_{E(1)})$ no es w-R_0 (pues $1 \in \mathrm{cl}(x)$ para todo $x \in \mathbb{N}$ y por lo tanto la interseccin es no vaca). Por el teorema 2.4 se sigue que $(\mathbb{N}, \tau_{col})$ no es w-R_0 y entonces vale la conjetura de Collatz.

$\blacksquare$

Con esto se da por terminada la seccin del abordaje a Collatz usando topologa.

3. Resultado de Terence Tao.

Definicin 3.1: Sea col : $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la funcin de Collatz. Dado $n \in \mathbb{N}$ se define $\mathrm{col}_{\mathrm{mn}}(n) = \underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{nf}}\, \mathrm{col}^k(n)$, que es el mnimo elemento de la rbita de n.

Observar que si la conjetura de Collatz es cierta clarmaente $\mathrm{col}_{\mathrm{mn}}(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.1: *Casi todas las rbitas de Collatz alcanzan valores casi acotados.* Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ cualquier funcin con $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$. Luego $\mathrm{col}_{\mathrm{mn}}(n) < f(n)$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$ (en el sentido de densidad logartmica).

La demostracin de este ltimo se puede encontrar en [13]. “Esto es lo mximo posible que se puede avanzar en el problema de Collatz sin realmente resolverlo” (Terence Tao).

Referencias

[1] JF Alves, MM Graca, ME Sousa Dias, and J Sousa Ramos. A linear algebra approach to the conjecture of collatz. *Linear algebra and its applications*, 394:277–289, 2005.

[2] David Applegate and Jeffrey C Lagarias. Density bounds for the 3x+ 1 problem. ii. krasikov inequalities. *Mathematics of computation*, 64(209):427–438, 1995.

[3] David Barina. Convergence verification of the collatz problem. *The Journal of Supercomputing*, 77(3):2681–2688, 2021.

[4] Intissar Dahane, Sami Lazaar, Tom Richmond, and Tarek Turki. On resolvable primal spaces. *Quaestiones Mathematicae*, 42(1):15–35, 2019.

[5] Giuseppe DIMAIO. A separation axiom weaker than r0. *INDIAN JOURNAL OF PURE & APPLIED MATHEMATICS*, 16(4):373–375, 1985.

[6] Yasuaki Ito and Koji Nakano. Efficient exhaustive verification of the collatz conjecture using dsp blocks of xilinx fpgas. *International Journal of Networking and Computing*, 1(1):49–62, 2011.

[7] Jeffrey C Lagarias. The 3x+ 1 problem: An annotated bibliography. *preprint*, 2004.

[8] Gary T Leavens and Mike Vermeulen. 3x+ 1 search programs. *Computers & Mathematics with Applications*, 24(11):79–99, 1992.

[9] Simon Letherman, Dierk Schleicher, and Reg Wood. The 3n+ l-problem and holomorphic dynamics. *Experimental Mathematics*, 8(3):241–251, 1999.

[10] Daniel Nichols. Analogues of the 3 x+ 1 problem in polynomial rings of characteristic 2. *Experimental Mathematics*, 27(1):100–110, 2018.

[11] Robertson E.F O'Connor, J.J. Lothar collatz. *St Andrews University School of Mathematics and Statistics, Scotland*, 2006.

[12] Fatemah Ayatollah Zadeh Shirazi and Nasser Golestani. Functional alexandroff spaces. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40(4):515–522, 2011.

[13] Terence Tao. Almost all orbits of the collatz map attain almost bounded values. In *Forum of Mathematics, Pi*, volume 10. Cambridge University Press, 2022.

[14] Jorge Vielma and Angel Guale. A topological approach to the ulam–kakutani–collatz conjecture. *Topology and its Applications*, 256:1–6, 2019.

[15] Günther J Wirsching. *The dynamical system generated by the 3n+ 1 function*. Springer, 2006.