
IDENTIFICACIÓN Y CONTROL ADAPTABLE

PRÁCTICO 5 - CURSO 2005

CONTROLADOR DE GANANCIA TABULADA O DE AJUSTE POR TABLA

Dr. Ing. Fernando di Sciascio

Problema 1 – Actuador no lineal: Considerar el problema del **actuador no lineal**, en la Fig.1 se observa el esquema de control mediante un PI fijo de parámetros $K = 0,5$ y $T_i = 1$. En la Fig.2 , se observa la respuesta al escalón para distintos niveles de operación. controlador para un proceso cuyas características son: $f(u) = u^4$ (transferencia estática del actuador (válvula)) y $G_o(s) = 1/(s+1)^3$.

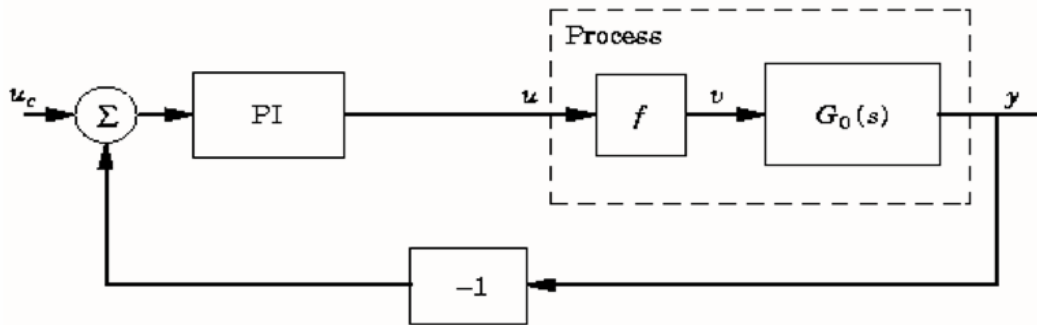


Fig.1 Control mediante PI de parámetros fijos $K = 0,15$ y $T_i = 1$ sin compensación de la no linealidad del actuador

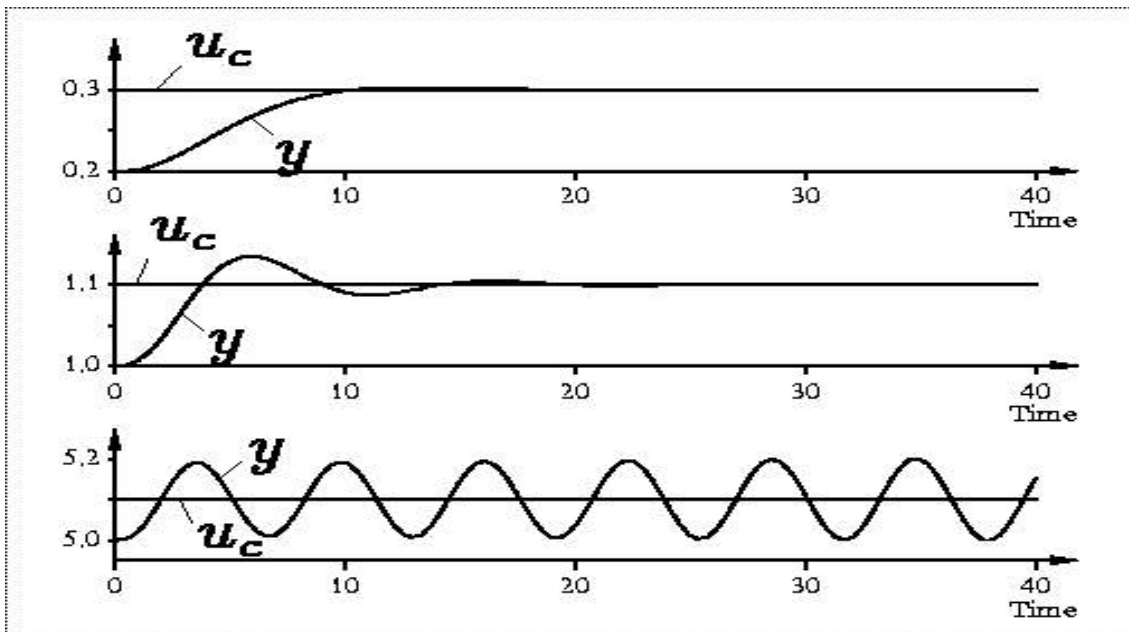


Fig.2 Respuestas al escalón para el sistema a lazo cerrado para distintos niveles de operación y controlado por un PI fijo de parámetros $K = 0,15$ y $T_i = 1$. Las características del proceso son: $f(u) = u^4$ y $G_o(s) = 1/(s+1)^3$

Para mejorar el comportamiento del sistema a lazo cerrado, se compensa la alinealidad de la válvula mediante una aproximación lineal a tramos de la característica estática inversa de la misma \hat{f}^{-1} que se obtiene a partir de la Fig.3.

$$\hat{f}^{-1}(c) = \begin{cases} 0,433c & , 3 \leq c \leq 16 \\ 0,0538c + 1,139, & 3 \leq c \leq 16 \end{cases}$$

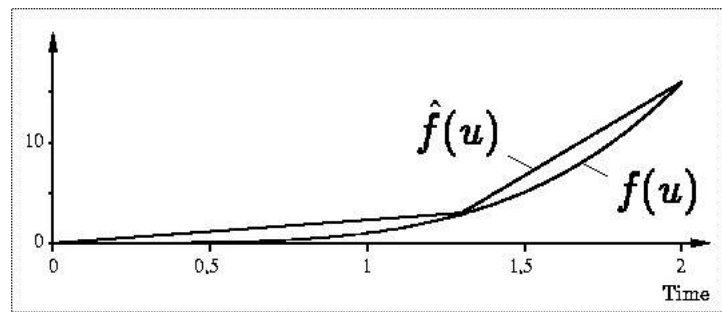


Fig.3 Característica de la válvula y una aproximación lineal a tramos

En la Fig.4 se observa el sistema de control (PI fijo + precompensación) y en la Fig.5 las simulaciones similares a las de la Fig.2 del sistema compensado. Se observa claramente la mejora en el comportamiento a lazo cerrado del sistema.

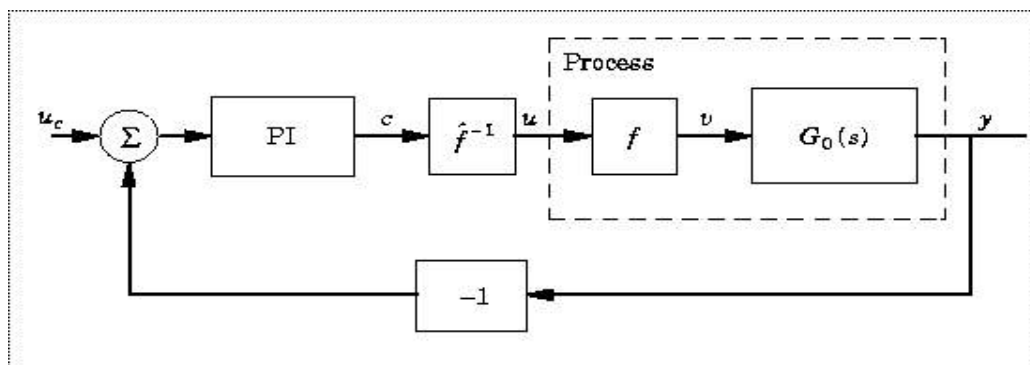


Fig.4 Compensación del actuador no lineal empleando la aproximación inversa de la Fig.3

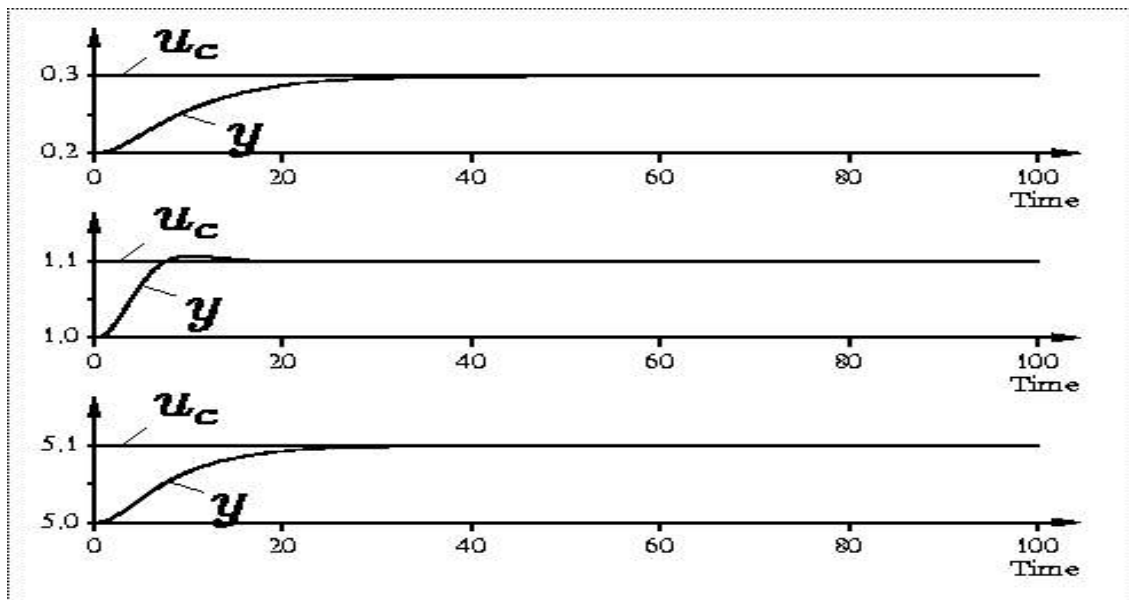


Fig.5 Simulaciones similares a las anteriores pero con la precompensación de la no linealidad de las figuras 3 y 4

Se pide en el ejercicio realizar las simulaciones de las figuras 2 y 5.

▽▽▽

Problema 2 – Sistema no lineal: Considerar un tanque de sección variable como el de la derecha de la figura (la sección del tanque A es función de la altura h , esto es, $A(h)$).

i) Por la ley de conservación de la masa se verifica que:

$$\frac{dV(h)}{dt} = q_i - q_o \quad (1)$$

donde $V(h)$ es el volumen del tanque, q_i el caudal de entrada y q_o el caudal de salida.

$$V(h) = \int_0^h A(x) dx \rightarrow dV(h) = A(h) dh \rightarrow \frac{dV(h)}{dt} = A(h) \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV(h)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\int_0^h A(x) dx \right] = A(h) \frac{dh}{dt} \quad (2)$$

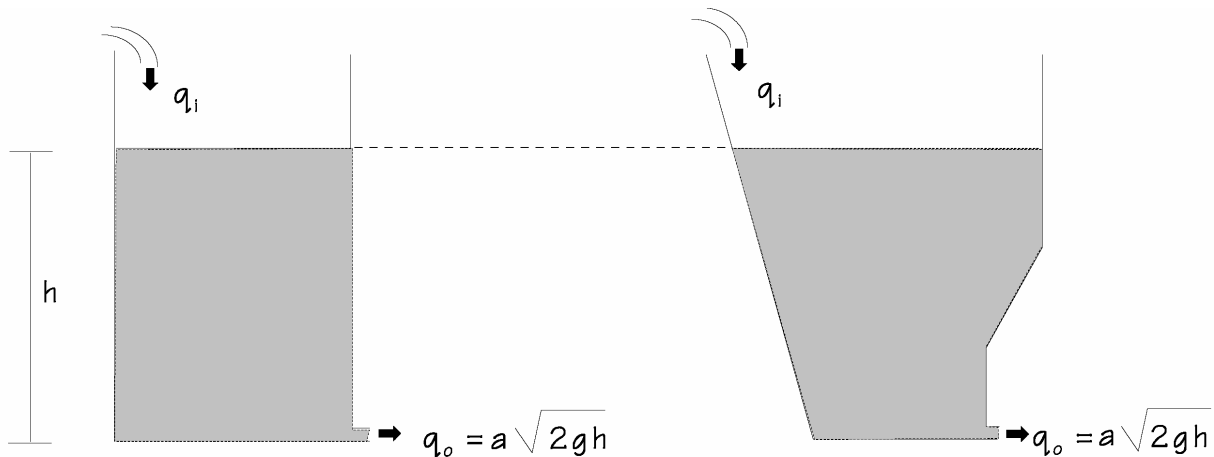
igualando (1) y (2)

$$A(h) \frac{dh}{dt} = q_i - q_o \quad (3)$$

ii) Por la ley de Bernoulli, se tiene que independientemente de la forma del tanque, el caudal de salida es:

$$q_o = a \sqrt{2gh} \quad (4)$$

donde a es la sección del orificio de salida, g es la aceleración de la gravedad.



Reemplazando (4) en (3) se tiene el modelo del tanque

$$A(h) \frac{dh}{dt} = q_i - a\sqrt{2gh} \quad (5)$$

En este modelo q_i es la entrada del sistema (acción de control) y h es la salida del sistema o variable a controlar. Linealizando el modelo en el punto de operación q_i^0 y h^0 se obtiene la función de transferencia

$$G(s) = \frac{\beta}{s + \alpha}, \text{ donde } \beta = \frac{1}{A(h^0)}, \quad \alpha = \frac{q_o^0}{2A(h^0)h^0} = \frac{a\sqrt{2gh^0}}{2A(h^0)h^0} \quad (6)$$

Un buen controlador PI para el tanque es:

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right) \quad (7)$$

con los parámetros del controlador

$$K = \frac{2\zeta\omega - \alpha}{\beta}, \quad T_i = \frac{2\zeta\omega - \alpha}{\omega^2} \quad (8)$$

Esto lleva a un sistema a lazo cerrado con una frecuencia natural ω y un amortiguamiento relativo ζ . Introduciendo las expresiones de α y β en los parámetros del controlador

$$\begin{cases} K = 2\zeta\omega A(h^0) - \frac{q_{in}^0}{2h^0} \\ T_i = \frac{2\zeta}{\omega} - \frac{q_{in}^0}{2A(h^0)h^0\omega^2} \end{cases} \quad (9)$$

Normalmente los valores numéricos son tales que $\alpha \ll 2\zeta\omega$ y las (9) se simplifican a:

$$\begin{cases} K = 2\zeta\omega A(h^0) \\ T_i = \frac{2\zeta}{\omega} \end{cases} \quad (10)$$

En este caso es suficiente hacer la ganancia proporcional del controlador proporcional a la sección. Obsérvese que se tiene un verdadero esquema de ganancia tabulada, pues la ganancia del PI no es fija sino que depende de la zona de trabajo.

Observación: La linealización (6) se a realizado para obtener las ecuaciones de los parámetros del controlador (Ecs.(9) y (10)) en todas las simulaciones que se realicen se debe emplear para la planta el modelo no lineal (5).

Se pide en el ejercicio:

Simular el tanque cuando el área varía como:

$$A(h) = A_0 + h^2, \text{ asumiendo que } a = 0,1 A_0.$$

- a) Estudie el comportamiento del sistema a lazo cerrado cuando se emplean las ecuaciones completas de los parámetros del controlador (Ec.(9)) y cuando se emplean las ecuaciones simplificadas (Ecs.(10)).
- b) Estudie la sensibilidad del sistema a cambios de los parámetros del proceso.
- c) Estudie la sensibilidad al ruido en el sensado de nivel del sistema a lazo cerrado.

▽▽▽

Problema 3 - Control de concentración

En la Fig.1 se observa el diagrama esquemático de un proceso de concentración de un líquido que no se mezcla y fluye por una cañería hacia un tanque en el cual se mezcla en forma perfecta mediante un agitador. La concentración a la entrada de la cañería es c_{in} , el volumen de la cañería es V_d , el volumen del tanque es V_m , el flujo o caudal de líquido es q y la concentración en el tanque y a la salida del mismo es c .

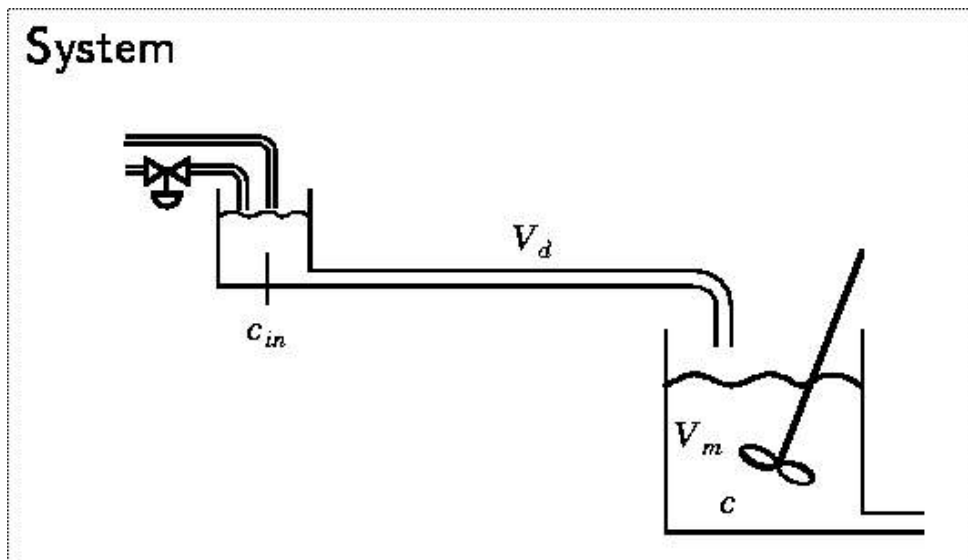


Fig.1- Diagrama esquemático del sistema de control de concentración

Planteando la ecuación para el balance de masas se tiene:

$$T \frac{dc(t)}{dt} = -c(t) + c_{in}(t - \tau) \quad (1)$$

donde $T = \frac{V_m}{q}$ y $\tau = \frac{V_d}{q}$

Para un caudal fijo, esto es, para $q(t) = q$ constante, el proceso tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_o(s) = \frac{C(s)}{C_{in}(s)} = \frac{e^{-s\tau}}{sT + 1} \quad (2)$$

La dinámica del proceso está caracterizada por un retardo y por una dinámica de primer orden (polo en $s = -1/T$). La constante de tiempo T y el retardo τ son inversamente proporcionales al flujo q .

Por simplicidad en todas las simulaciones que se muestran se adopta $V_m = V_d = 1$, por lo tanto:

$$T = \frac{1}{q} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{1}{q}$$

En la Fig.2, se observa el diagrama en bloques del sistema de control de concentración, el controlador PI se ha sintonizado para el caso nominal correspondiente a $q = 1$, $T = 1$ y $\tau = 1$, ajustándose la ganancia proporcional en $K = 0,5$ y el tiempo de integración en $T_i = 1,1$ para obtener un buen desempeño a lazo cerrado (para $q = 1$).

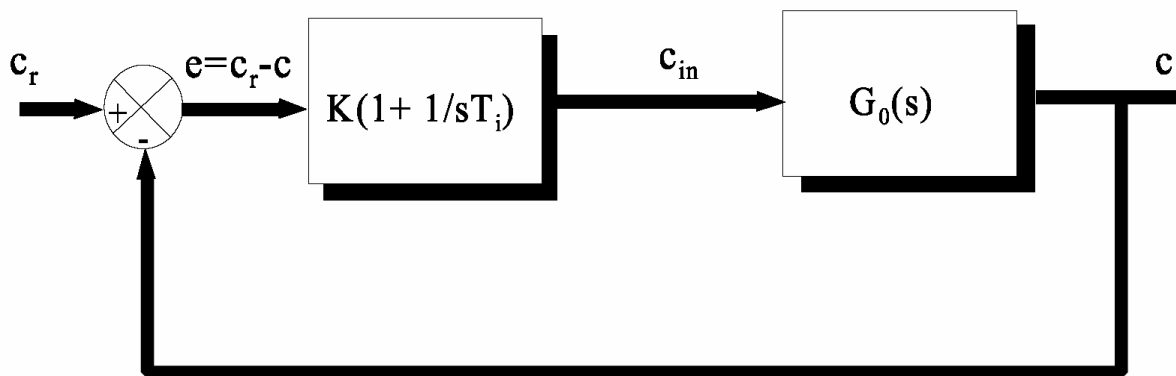


Fig.2- Diagrama en bloques del sistema de control de concentración

En la Fig.3 se observa la respuesta al escalón de la concentración del sistema a lazo cerrado para diferentes caudales manteniendo fijo el controlador PI anterior (ajustado para $q = 1$). Se observa que el sobrepico aumenta al disminuir el caudal de entrada, esto se debe a que si el caudal decrece, se incrementa el retardo por lo que el sistema se aproxima a la inestabilidad. Cuando el caudal aumenta el sistema se torna más lento en alcanzar la referencia pese a que el retardo disminuye. Si el caudal permanece constante y $\tau < T$, es directo y sencillo sintonizar el controlador PI para que el sistema tenga un buen desempeño. No obstante no es posible encontrar un conjunto de parámetros del controlador que permita que el sistema trabaje bien en un rango amplio de valores de caudal.

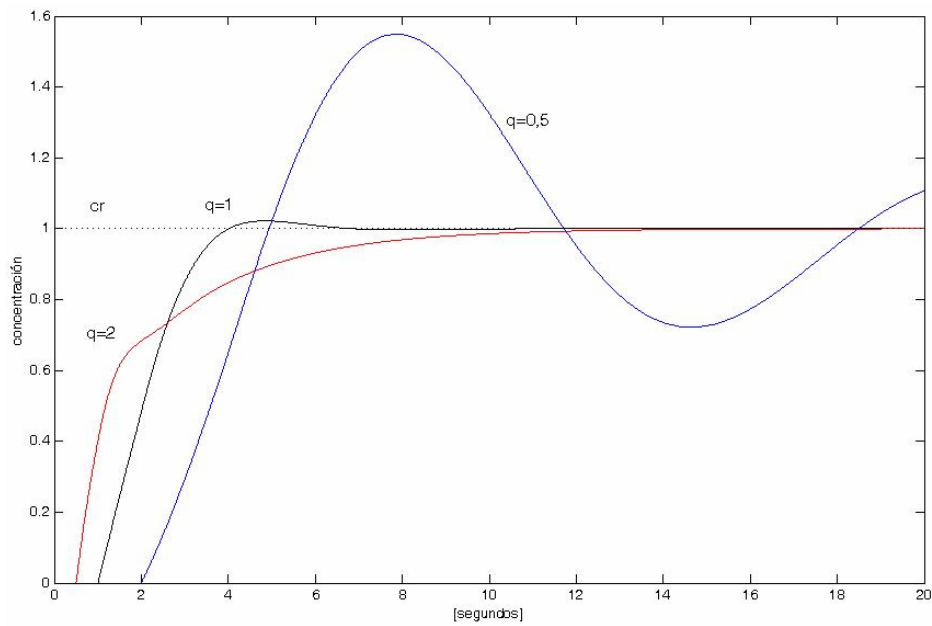


Fig.3 Gráfico de la concentración de referencia c_r y de la concentración de salida c para distintos caudales con el PI ajustado para $q = 1$ ($K = 0,5$ $T_i = 1,1$).

Para operar en forma segura, lo mejor que se puede hacer con un controlador PI de parámetros fijos, es sintonizar el PI para el menor caudal de operación. Esta situación se muestra en la Fig.4, donde se observa la respuesta al escalón de la concentración del sistema a lazo cerrado para diferentes caudales manteniendo fijo el controlador PI que se ha sintonizado para el menor caudal $q = .5$, ajustándose la ganancia proporcional en $K = 0,2$ y el tiempo de integración en $T_i = 1,54$. Se observa que si bien no existen sobrepicos, la respuesta del sistema es muy lenta.

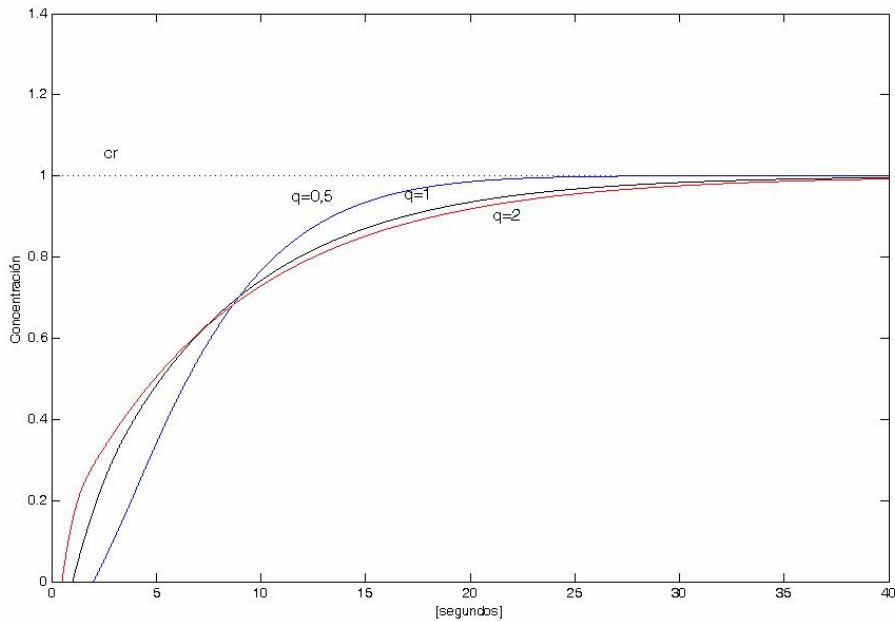


Fig.4 Gráfico de la concentración de referencia c_r y de la concentración de salida c para distintos caudales con el PI ajustado para $q = 0,5$ ($K = 0,2$ $T_i = 1,54$).

Control Digital con Periodo de Muestro Variable

En esta sección se desarrolla detalladamente un tipo de control por Ganancia Tabulada muy eficiente e interesante para plantas con retardo de transporte, el cual consiste en diseñar controladores digitales de parámetros fijos con periodo de muestro variable y dependiente de una variable auxiliar (en este caso el caudal q)

Consideremos el modelo continuo del proceso de la (1), discretizándolo con un período de muestreo

$$ts = \frac{V_d}{d q} = \frac{1}{d q} \quad (3)$$

donde d es un número entero, resulta el siguiente modelo discretizado:

$$c((k+1)ts) = a c(kts) + (1-a) c_{in}((k-d)ts) \quad (4)$$

donde

$$a = e^{-\frac{qts}{V_m}} = e^{-\frac{V_d}{V_m d}} = e^{-\frac{1}{d}} = \frac{1}{\sqrt[d]{e}} \quad (5)$$

La función de transferencia discreta del proceso es:

$$G_o(z) = \frac{C(z)}{C_{in}(z)} = \frac{(1-a)z^{-d}}{z-a}, \quad ts = \frac{V_d}{d q} = \frac{1}{d q} \quad (6)$$

Se observa en estas ecuaciones que el parámetro a es el único del modelo discreto del proceso y el mismo no depende del caudal q . Por lo tanto el modelo discreto solo depende indirectamente de q a través del período de muestreo $ts = V_d / d q$.

En las simulaciones que siguen se adopta como antes $V_m = V_d = 1$, $T = \frac{1}{q}$, $\tau = \frac{1}{q}$

y $d = 5$ se tiene entonces: $ts = \frac{1}{5q}$ y $a = \frac{1}{\sqrt[5]{e}} = 0,8187$

El modelo del proceso con estos valores es:

$$G_o(z) = \frac{C(z)}{C_{in}(z)} = \frac{0,1813 z^{-5}}{z - 0,8187}, \quad ts = \frac{1}{5q} \quad (7)$$

Es importante en este punto darse cuenta que al ser la función de transferencia $G_o(z)$ de parámetros constantes “la forma” de la respuesta al escalón es la misma para cualquier caudal, lo único que cambia es la escala de tiempo ya que cambia el periodo de muestreo. Esto se observa en la Fig.5, donde se grafica la respuesta al escalón del modelo continuo de la (1) y el discreto de la (4) para distintos caudales de entrada. Se observa que el modelo discreto sigue fielmente al continuo y que el período de muestreo varía inversamente con el caudal.

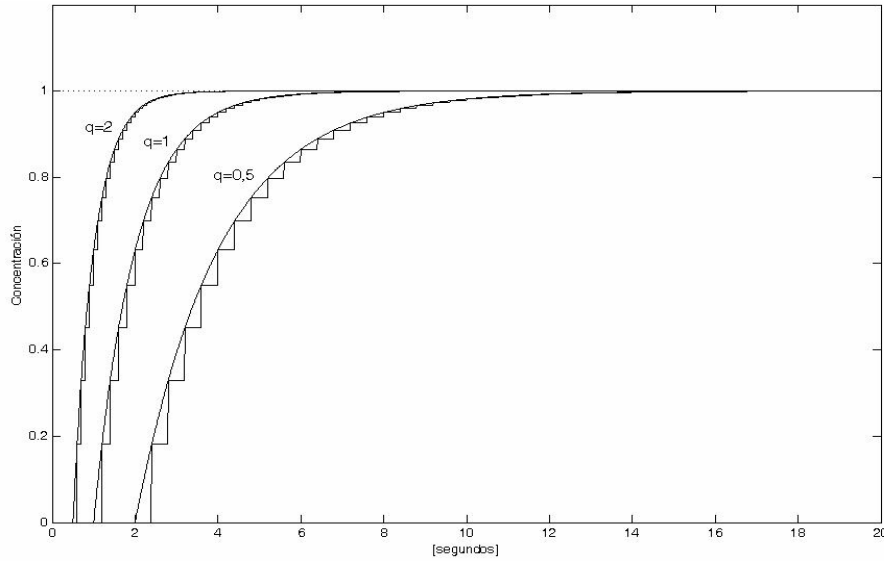


Fig.5 Gráfico de la respuesta al escalón (a lazo abierto) de los modelos continuo y discreto para distintos caudales.

Del hecho que el modelo discreto $G_0(z)$ es de parámetros constantes (no depende directamente del caudal) surge la idea natural de implementar un controlador digital de parámetros fijos cuyo período de muestreo coincida con el del modelo discretizado. Por simplicidad se adopta el siguiente controlador PI digital

$$\frac{C_{in}(z)}{C(z) - C_r(z)} = k_1 + k_2 \frac{z}{z-1} = \frac{(k_1 + k_2)z - k_1}{z-1} \quad (8)$$

el cual se ajusta para un buen funcionamiento a lazo cerrado del modelo (7) con $k_1 = 0,1$, $k_2 = 0,05$

$$\frac{C_{in}(z)}{C(z) - C_r(z)} = 0,1 + 0,05 \frac{z}{z-1} = \frac{0,15(z - \frac{2}{3})}{z-1} \quad (9)$$

En la Fig.6 se observa la respuesta al escalón del modelo discreto (7) controlado por el PI (9) como antes, se mantiene constante “la forma” de la respuesta al escalón para cualquier caudal, lo único que cambia es la escala de tiempo ya que cambia el periodo de muestreo.

Finalmente para cerrar el círculo de ideas, se controla la planta original (modelo continuo (1) y, (2)) con el PI (9). Esto es verdaderamente ganancia tabulada que se realiza simplemente mediante un controlador con parámetros constantes, cuyo período de muestreo es inversamente proporcional al caudal de entrada al sistema. Esto produce que el sistema produzca la misma respuesta independientemente del caudal debido al escalado del tiempo. En la Fig.7, se observa la concentración de referencia y de salida para tres caudales diferentes y en la Fig.8 se observa la señal de control c_{in} para este caso y para tres caudales diferentes.

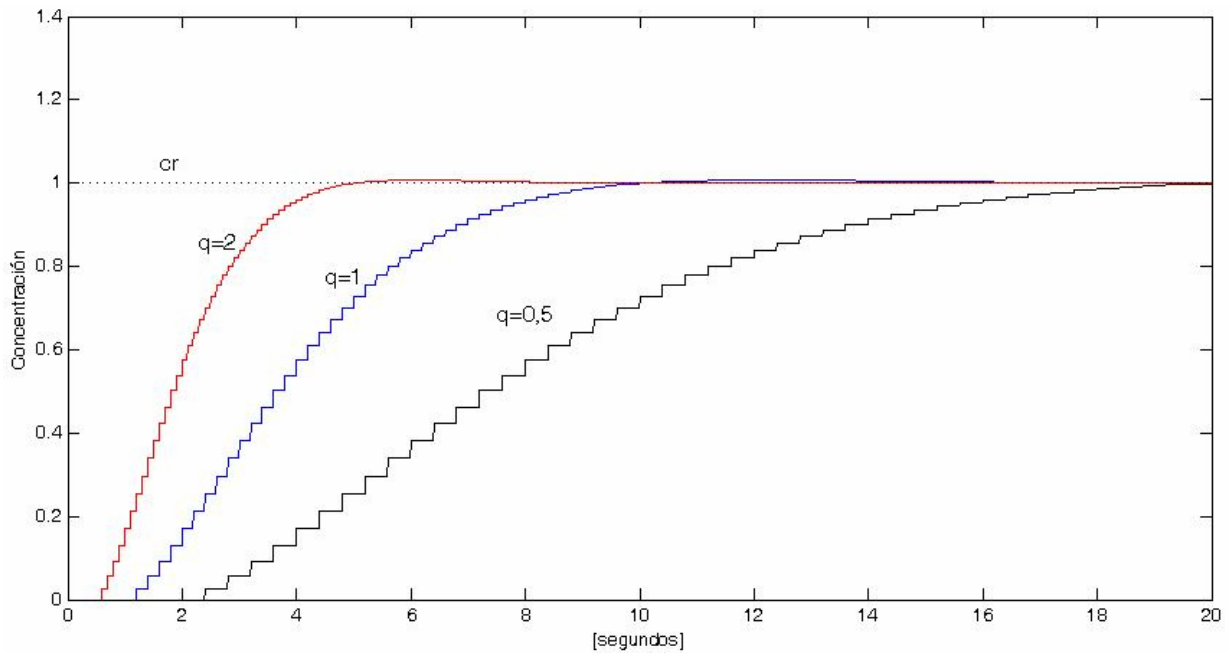


Fig.6 Gráfico de la concentración de referencia c_r y de la concentración de salida c del modelo discreto (7) para distintos caudales con el controlador digital PI de parámetros fijos (9) ($k_1 = 0,1$, $k_2 = 0,05$) pero de período de muestreo variable.

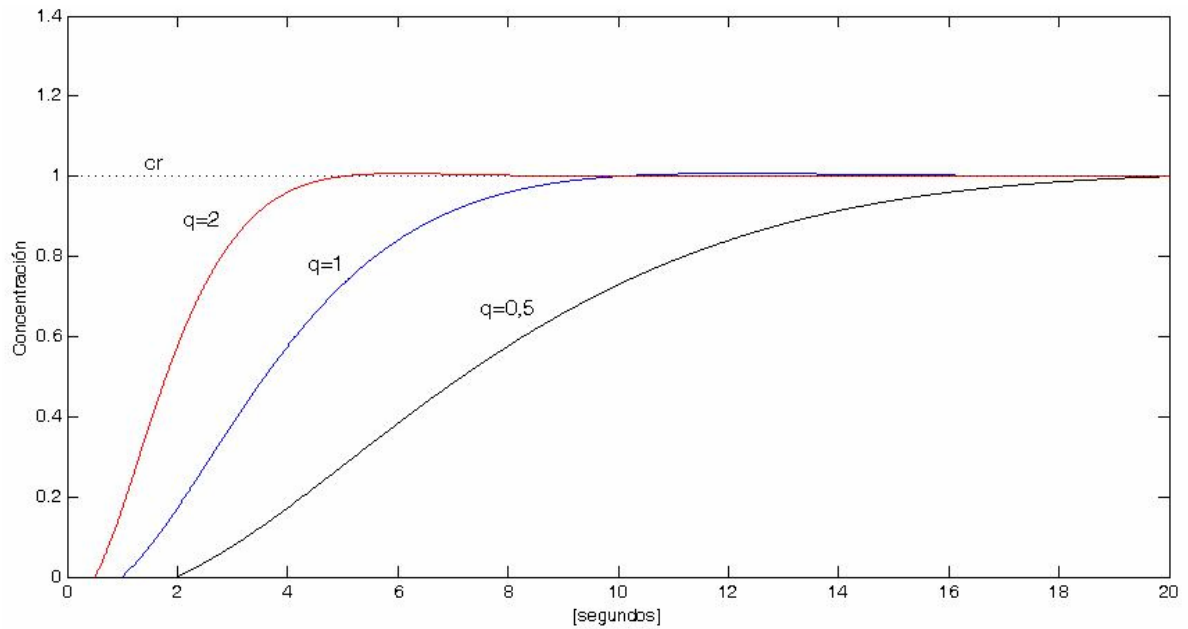


Fig.7 Gráfico de la concentración de referencia c_r y de la concentración de salida c del modelo discreto (7) para distintos caudales con el controlador digital PI de parámetros fijos (9) ($k_1 = 0,1$, $k_2 = 0,05$) pero de período de muestreo variable.

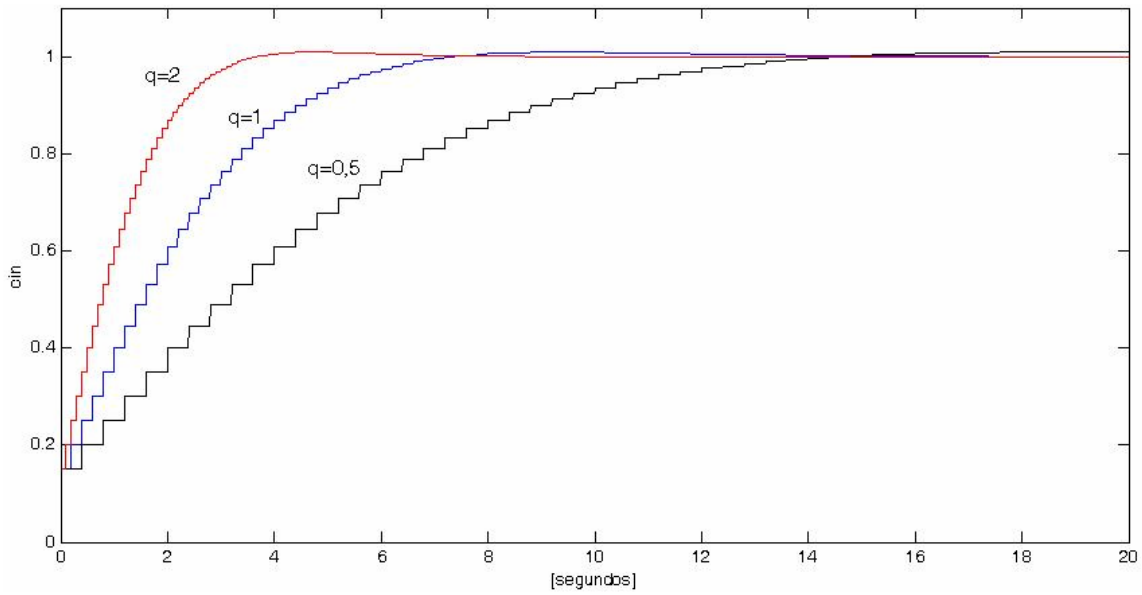


Fig.8 Gráfico de la señal de control c_{in} cuando el proceso es controlado por un controlador digital PI de parámetros fijos ($k_1 = 0,1$, $k_2 = 0,05$) pero de período de muestreo variable.

Para implementar el controlador de ganancia tabulada, es necesario medir no solamente la concentración, sino también el caudal. Errores en la medición del caudal puede resultar en que el período de muestreo posea un jitter importante (considerar que si el caudal permanece constante el período de muestreo no debería cambiar, sin embargo el ruido en la medición del caudal produce variaciones aleatorias en el periodo de muestreo). Para evitar esta situación, es necesario filtrar adecuadamente la medición del caudal.

Controlador con parámetros dependientes de la variable auxiliar q

En este caso se realiza el control es mediante un PI cuyos parámetros sean función continua del caudal, si la (2) es la función de transferencia del sistema (fija para q fijo) que corresponde a un sistema de primer orden con retardo, entonces se puede sintonizar el controlador PI mediante las reglas de Ziegler-Nichols, esto es,

$$\begin{cases} K = \frac{0,9 \tau}{T} = \frac{0,9 V_d}{V_m} \\ T_i = 3\tau = \frac{3V_d}{q} \end{cases} \quad (10)$$

Obsérvese que la ganancia del controlador permanece constante y que el tiempo integral resulta inversamente proporcional al caudal q . Este es el mismo efecto que en el controlador digital anterior, donde el parámetro a permanecía constante y el período de muestreo $h = V / d q$ es inversamente proporcional al caudal q .

Otra posibilidad de consiste en construir un controlador de ganancia tabulada clásico mediante el diseño de un banco de controladores en paralelo, los cuales se conmutan mediante una lógica que depende de las condiciones de operación del sistema, en el presente caso de la medición del caudal q . Por ejemplo, se divide el rango de q en tres zonas I, II y III como se indica en la Fig.9, se ajustan

tres controladores PI fijos para el centro de cada zona, esto es, PI(I) ajustado en $q = 0,75$, PI(II) ajustado en $q = 1,25$ y PI(III) ajustado en $q = 1,75$.

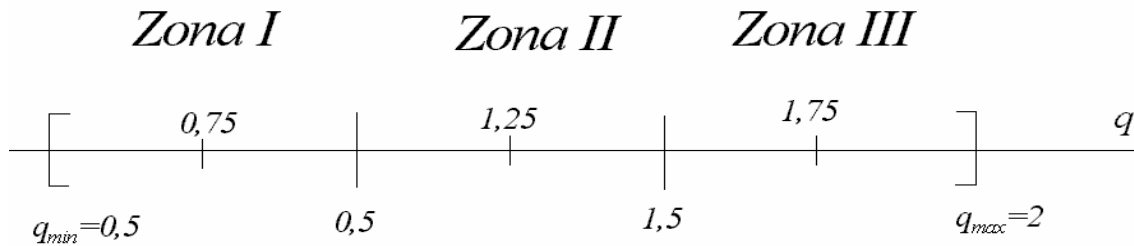


Fig.9- Partición del rango del caudal en tres zonas

Se pide en el ejercicio:

Considerando el problema de **control de concentración** desarrollado anteriormente, donde $V_m = 1$, $V_d = 1$ y el caudal de entrada puede variar entre los valores $q_{min} = 0,5 \leq q \leq q_{max} = 2$.

Se pide:

- Para un Controlador PI de parámetros fijos simular la figura 3 (sintonizado para el caudal nominal para $q = q_{nom} = 1$) y la figura 4 (sintonizado para el caudal mínimo $q = q_{min} = 0,5$)
- Ganancia Tabulada I:** Para el Controlador Digital con Periodo de Muestro Variable, realizar las simulaciones de las figuras 5 a 8.
- Ganancia Tabulada II:** Realizar simulaciones similares a las anteriores para el controlador PI de la Ec.10 (ganancia fija y tiempo integral inversamente proporcional al caudal).
- Ganancia Tabulada III:** 1) Dividiendo el rango de q en tres zonas I, II y III como se indica en la Fig.9, sintonizar tres controladores PI fijos para el centro de cada zona, esto es, PI(I) ajustado en $q = 0,75$, PI(II) ajustado en $q = 1,25$ y PI(III) ajustado en $q = 1,75$. 2) Diseñar la lógica de conmutación entre controladores en función de la medición del caudal q . 3) Realizar simulaciones similares a las anteriores.
- Para los distintos controladores, estudie la sensibilidad al ruido en el sensado de caudal del sistema a lazo cerrado.
- Comparar los distintos controladores y realizar conclusiones.

▽▽▽

Problema 4 - Control del curso de un barco (ship steering)

Los autopilotos de los buques normalmente están basados en la realimentación de la medición del curso mediante un girocompás y actuando sobre los engranajes del timón (steering machine). Es una práctica común emplear un controlador tipo PID con parámetros fijos. Pese a que se puede ajustar el controlador para que el autopiloto funcione razonablemente bien en general el desempeño es pobre cuando las condiciones del mar o la velocidad del buque cambian. La razón es que la dinámica del barco cambia con la velocidad y que las perturbaciones cambian con el clima. Se verá como el desempeño del autopiloto puede mejorarse notablemente implementando un control adaptable y en particular empleando la técnica de ganancia tabulada.

La dinámica del barco se obtiene a partir de las leyes de Newton de la dinámica. Para buques largos el movimiento en el plano vertical puede separarse de los otros movimientos. Es una práctica habitual describir los movimientos en el plano horizontal mediante un sistema de coordenadas fijo al barco (ver figura). Sea r la velocidad angular del barco y V la velocidad total y u y v las componentes de la velocidad según x e y .

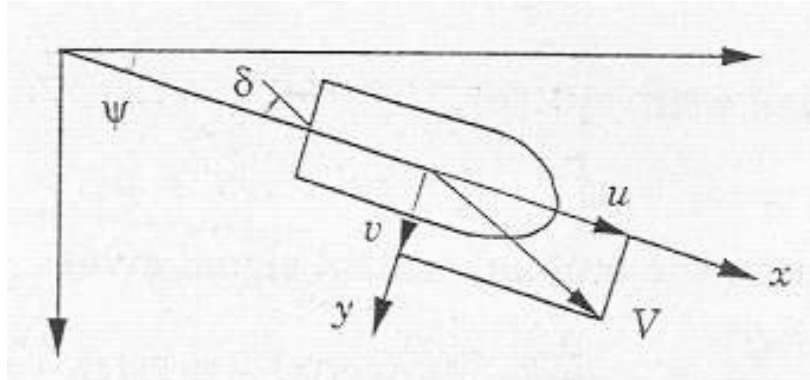


Fig.1 - Coordenadas y notación empleada para describir la dinámica del barco

En el guiado normal de un barco se realizan pequeñas correcciones para mantener el curso en una recta. Es entonces normal linealizar las ecuaciones de la dinámica del barco alrededor de su punto de operación $u = u_0$, $v = 0$, $r = 0$ y $\delta = 0$. Resultando el siguiente modelo de estados.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \left(\frac{u}{l}\right) a_{11}v + ua_{12}r + \left(\frac{u^2}{l}\right) b_1\delta \\ \frac{dr}{dt} = \left(\frac{u}{l^2}\right) a_{21}v + \left(\frac{u}{l}\right) a_{22}r + \left(\frac{u}{l}\right)^2 b_2\delta \\ \frac{d\psi}{dt} = r \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\psi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{u}{l}\right) a_{11} & ua_{12} & 0 \\ \left(\frac{u}{l^2}\right) a_{21} & \left(\frac{u}{l}\right) a_{22} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{u^2}{l}\right) b_1 \\ \left(\frac{u}{l}\right)^2 b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \delta \quad (1)$$

Donde l es la longitud del barco y u es la velocidad hacia delante. Los parámetros a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 y b_2 sorprendentemente se mantienen constantes para cada tipo de barco y para diferentes condiciones de operación, en la Tabla I se indican valores típicos de los parámetros.

Barco	Barremina	Carguero	Tanque	
			Cargado	Lastrado
Longitud (m)	55	161	350	
a_{11}	-0,86	-0,77	-0,45	-0,43
a_{12}	-0,48	-0,34	-0,43	-0,45
a_{21}	-5,2	-3,39	-4,1	-1,98
a_{22}	-2,4	-1,63	-0,81	-1,15
b_1	0,18	0,17	0,1	0,14
b_2	-1,4	-1,63	-0,81	-1,15

Tabla I

Del modelo de estados (1) se obtiene fácilmente la función de transferencia entre el ángulo del timón δ (acción de control) y el ángulo del curso del barco ψ (salida del sistema).

$$G(s) = \frac{\Psi(s)}{\Delta(s)} = \frac{K(s\tau_3 + 1)}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$$

donde $\Psi(s) = \mathcal{L}(\psi(t))$, $\Delta(s) = \mathcal{L}(\delta(t))$, o empleando el operador lo expresamos en el dominio temporal $p = \frac{d}{dt}$

$$G(p) = \frac{\psi(t)}{\delta(t)} = \frac{K(p\tau_3 + 1)}{p(p\tau_1 + 1)(p\tau_2 + 1)} \quad (2)$$

La (2) corresponde a la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \tau_1 \tau_2 \ddot{\psi} + (\tau_1 + \tau_2) \dot{\psi} + \psi &= K(\tau_3 \dot{\delta} + \delta) \\ \ddot{\psi} + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) \dot{\psi} + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \psi &= \frac{K}{\tau_1 \tau_2} (\tau_3 \dot{\delta} + \delta) \end{aligned} \quad (3)$$

donde $K = K_0 \left(\frac{u}{l} \right)$, $\tau_i = \tau_{i0} \left(\frac{l}{u} \right)$, $i = 1, 2, 3$

Los coeficientes $1/\tau_1 + 1/\tau_2$ y $K/\tau_1 \tau_2$ puede calcularse de un experimento denominado zig-zag. En la Tabla II se muestran valores típicos de los parámetros K_0 , τ_{i0} , $i = 1, 2, 3$

Barco	Barremina	Carguero	Tanque	
			Cargado	Lastrado
Longitud (m)	55	161	350	
K_0	2,11	-3,86	0,83	5,88
τ_{10}	-8,25	5,66	-2,88	-16,91
τ_{20}	0,29	0,38	0,38	0,45
τ_{30}	0,65	0,89	1,07	1,43

Tabla II

El modelo (3) se denomina Modelo de Nomoto de tercer orden. En muchos casos puede ser simplificado al modelo de Nomoto de segundo orden siguiente:

$$G(p) = \frac{\psi(t)}{\delta(t)} = \frac{k}{p(p\tau + 1)} \quad (4)$$

La (4) corresponde a la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\psi} + \frac{1}{\tau} \dot{\psi} = \frac{k}{\tau} \delta \quad (5)$$

donde $k = k_0 \left(\frac{u}{l} \right)^2 = b_2 \left(\frac{u}{l} \right)^2$, $\tau = \tau_0 \left(\frac{u}{l} \right)$

En la Tabla III se muestran valores típicos de los parámetros k_0 y τ_0 .

Barco	Barremina	Carguero	Tanque	
			Cargado	Lastrado
Longitud (m)	55	161	350	
τ_0	-0,14	0,19	-0,28	-0,06
k_0	-1,4	-1,63	-0,81	-1,15

Tabla III

La ganancia k puede aproximarse por la siguiente expresión empírica

$$k = c \left(\frac{u}{l} \right)^2 \frac{Al}{V_D} \quad (6)$$

Donde V_D es el volumen desplazado (en metros cúbicos), A es el área del timón (en metros cuadrados) y c es un parámetros cuyo valor aproximado es 0,5. El parámetro τ (ubicación del polo) depende de varios factores entre ellos la velocidad, la distribución de la carga y en el caso de los veleros del ajuste y posición de las velas.

Ejemplo: Considérese el modelo de Nomoto de segundo orden (4)

$$\psi(t) = \frac{k}{p(p\tau + 1)} \delta(t) \quad (7)$$

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 \left(\frac{u}{l} \right) = \frac{\tau_0 u_{nom}}{l} \left(\frac{u}{u_{nom}} \right) = \tau_{nom} \left(\frac{u}{u_{nom}} \right) \\ k = k_0 \left(\frac{u}{l} \right)^2 = \frac{k_0 u_{nom}^2}{l} \left(\frac{u}{u_{nom}} \right)^2 = k_{nom} \left(\frac{u}{u_{nom}} \right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau = \tau_{nom} u_r \\ k = k_{nom} u_r^2 \end{cases}$$

donde u_r es la velocidad relativa

$$u_r = \frac{u}{u_{nom}} \quad (8)$$

para este ejemplo se adoptan los siguientes parámetros: $\tau_{nom} = -0,3$ y $k_{nom} = 0,8$, entonces se tiene:

$$\begin{cases} \tau = -0,3 u_r \\ k = 0,8 u_r^2 \end{cases} \quad (9)$$

supongamos que el curso se controla con un PD fijo

$$\delta(t) = K_p (1 + pT_d) \underbrace{(\psi_r(t) - \psi(t))}_{\text{error de curso}} \quad (10)$$

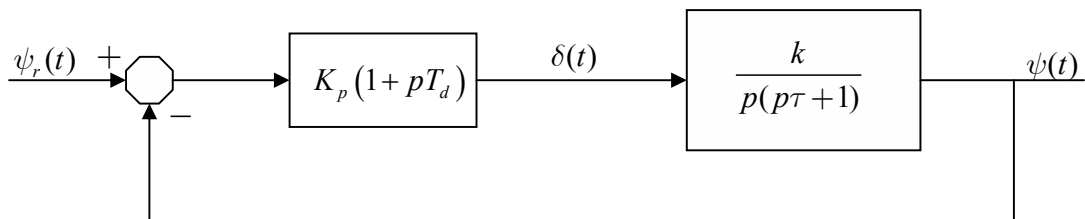


Fig.2 Control PD fijo de un buque

El operador de transferencia a lazo cerrado es:

$$\frac{\psi(t)}{\psi_r(t)} = \frac{K_p k (1 + pT_d)}{p^2 + (\tau + K_p k T_d)p + K_p k} \quad (11)$$

cuya ecuación característica es:

$$p^2 + (\tau + K_p k T_d)p + K_p k \quad (12)$$

en general, la ecuación característica de un sistema de segundo orden es:

$$p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2 \quad (13)$$

Las especificaciones de comportamiento en un sistema de segundo orden se dan definiendo el amortiguamiento ζ y la frecuencia natural de oscilación ω_0 . Para el caso del curso de un barco es deseable que no haya oscilaciones ni sobrepico por lo que un amortiguamiento de $\zeta=1$ y una frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{2} \approx 1,41$ son adecuadas.

Igualando (12) y (13)

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_0 = \tau + K_p k T_d = \tau + \omega_0^2 T_d \\ \omega_0^2 = K_p k \end{cases} \quad \text{despejando } K_p, T_d \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} T_d = \frac{2\zeta\omega_0 - \tau}{\omega_0^2} \\ K_p = \frac{\omega_0^2}{k} \end{cases}$$

reemplazando valores

$$\begin{cases} T_d = \frac{2\zeta\omega_0 - \tau}{\omega_0^2} = \sqrt{2} + 0,15u_r = 1,41 + 0,15u_r \\ K_p = \frac{\omega_0^2}{k} = \frac{2}{0,8u_r^2} = \frac{2,5}{u_r^2} \end{cases} \quad (14)$$

El PD fijo se diseña para la velocidad nominal luego de la (14) para $u_r = 1$ los parámetros del controlador son:

$$\begin{cases} T_d = \sqrt{2} + 0,15 \approx 1,56 \\ K_p = \frac{2,5}{u_r^2} = 2,5 \end{cases}$$

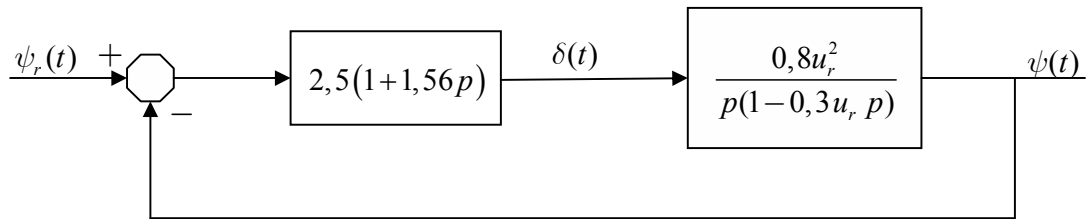


Fig.3 Control PD fijo de un buque para este ejemplo

En la Fig.4 se observa las simulaciones el esquema de la Fig.3 (PD fijo) para tres valores de u_r . Se observa un buen desempeño para el valor u_r de diseño ($u_r = 1$), aceptable para valores de velocidad mayores a la nominal y pobre para valores de velocidad inferior a la nominal.

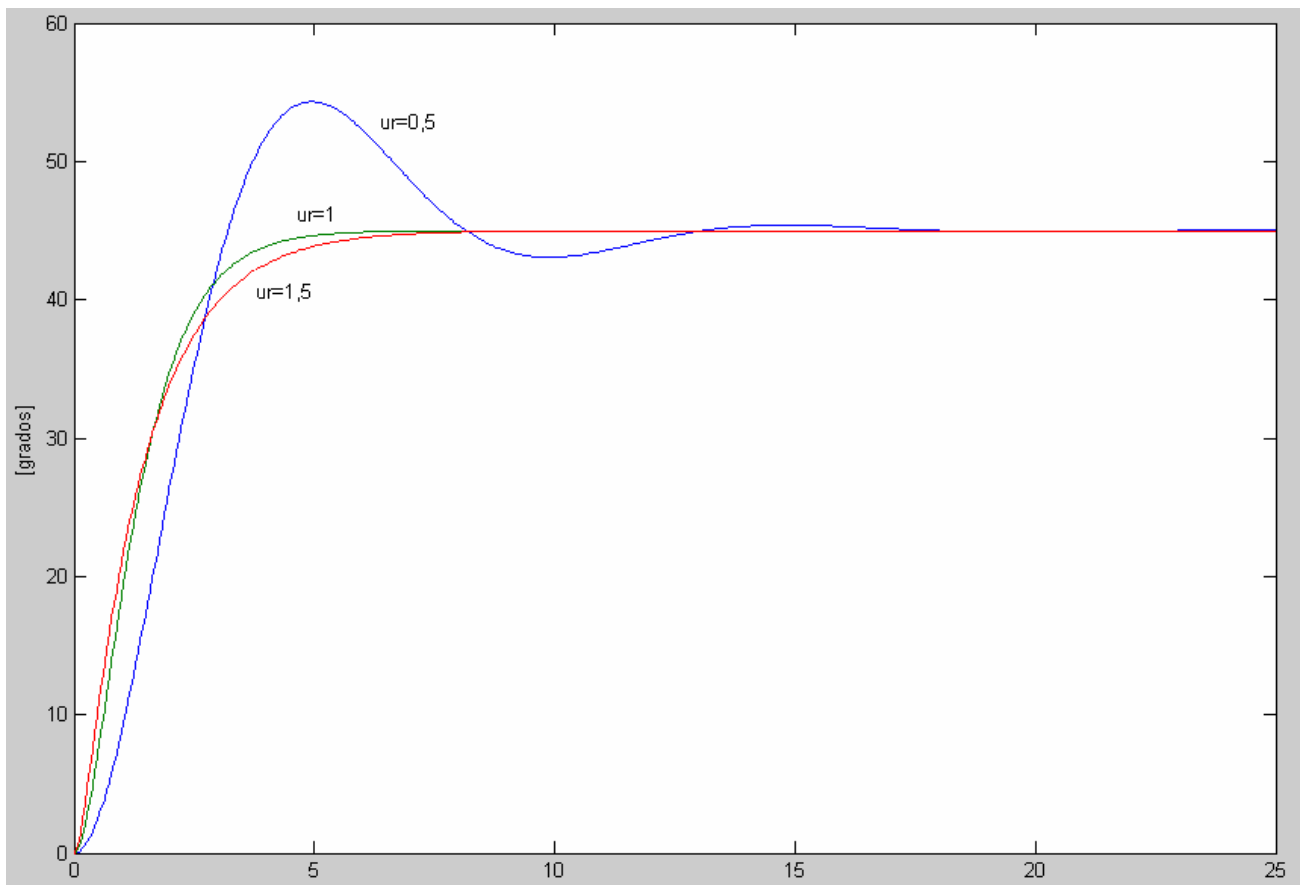


Fig.4 Comportamiento del sistema para PD fijo, $\psi_r = 45^\circ$ y $u_r = 1$, $u_r = 0,5$ y $u_r = 1,5$

Para un PD con ganancia tabulada los parámetros del PD deben ajustarse según la (14)

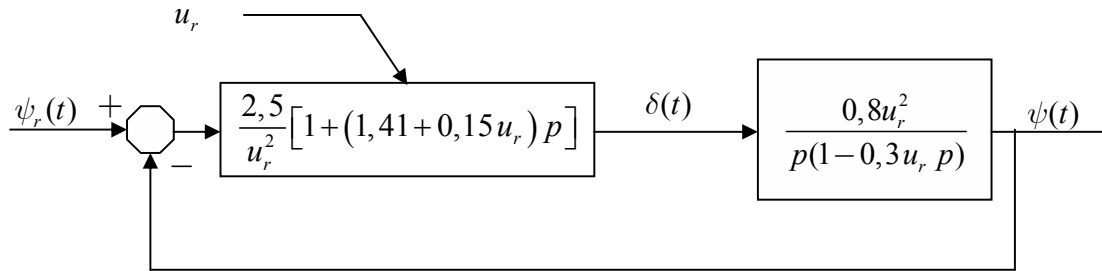


Fig.5 Control PD con ganancia tabulada, los parámetros del controlador K_p y T_d dependen de u_r

En la Fig.6 se observa las simulaciones el esquema de la Fig.5 (PD con ganancia tabulada) para tres valores de u_r . Se observa como es de esperar el mismo comportamiento óptimo para todos los valores de u_r (de hecho son indistinguibles en la figura las distintas curvas).

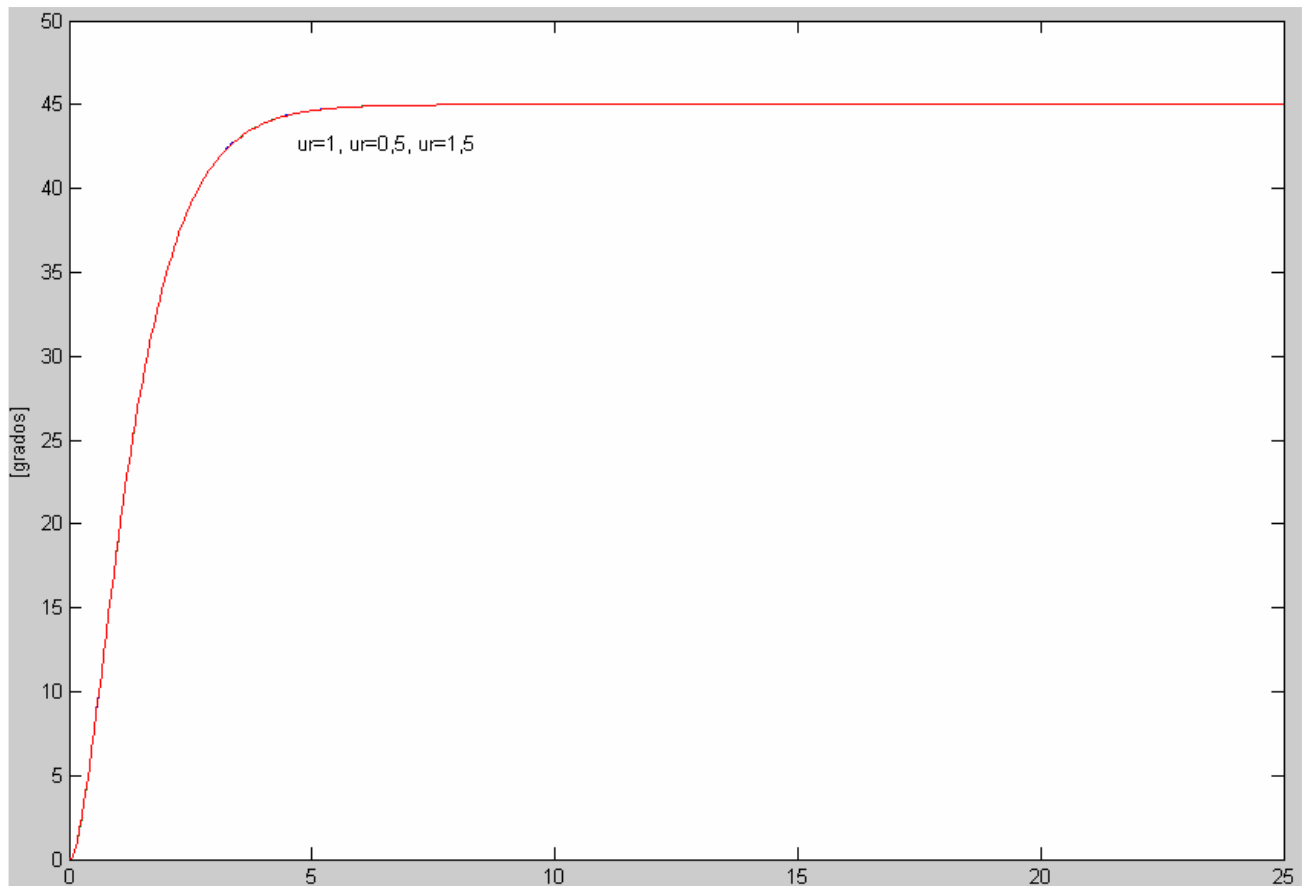


Fig.6 Comportamiento del sistema para PD con ganancia tabulada, $\psi_r = 45^0$ y $u_r = 1$, $u_r = 0,5$ y $u_r = 1,5$

Se pide en el ejercicio:

a) Generar las simulaciones de las figuras 4 y 6 para las velocidades relativas indicadas y agregar $u_r = 0,75$ y $u_r = 0,25$.

b) De la figura 4 se infiere que el problema está en el control a velocidades menores que la nominal, se pide diseñar un PD de ganancia tabulada mediante un banco de cuatro controladores fijos PD ajustados en $u_r = 1$ para la zona $0,9 \leq u_r \leq u_r(\max) = 1,5$, $u_r = 0,75$ para la zona $0,6 \leq u_r < 0,9$, $u_r = 0,45$ para la zona $0,3 \leq u_r < 0,6$ y $u_r = 0,15$ para la zona $0 < u_r < 0,3$.

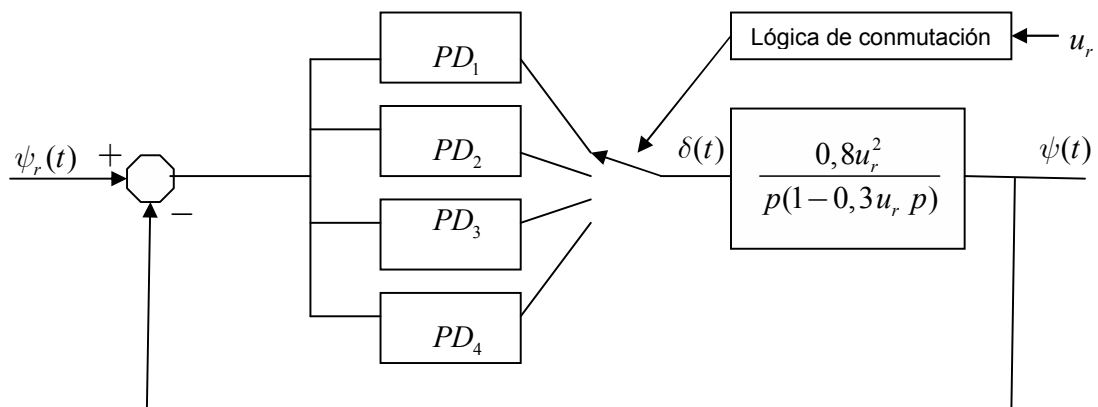


Fig.7 Banco de controladores PD fijos

▽▽▽

APÉNDICE: Controlador PID generalizado

La expresión académica de un controlador PID es:

$$u(t) = k_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) = \underbrace{k_p e(t)}_{u_p(t)} + \underbrace{\frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau}_{u_i(t)} + \underbrace{k_p T_d \frac{de(t)}{dt}}_{u_d(t)} \quad (1)$$

$$u(t) = P e(t) + I \int_0^t e(\tau) d\tau + D \frac{de(t)}{dt} \quad (2)$$

Donde $e(t) = y_r(t) - y(t)$ es el error de posición, $P = k_p$ es la ganancia proporcional, $I = k_p / T_i$ es la ganancia integral y $D = k_p T_d$ es la ganancia derivativa.

Una expresión más realista del PID es la siguiente:

$$u(t) = P e_p(t) + I \int_0^t e(\tau) d\tau + D \left(\frac{de_d(t)}{dt} \right)_f = P (\beta y_r(t) - y(t)) + I \int_0^t e(\tau) d\tau + D \left(\frac{d(\alpha y_r(t) - y(t))}{dt} \right)_f \quad (3)$$

la (3) en el dominio s es:

$$U(s) = E_p(s) + I \frac{E(s)}{s} + D \left(\frac{s}{1 + \frac{s}{N}} \right) E_d(s) \quad (4)$$

Donde $e_p(t) = \beta y_r(t) - y(t)$, $e_d(t) = \alpha y_r(t) - y(t)$ son errores con la referencia ponderada y $\left(\frac{de_d(t)}{dt} \right)_f = \frac{p}{1 + \frac{p}{N}} e_d(t)$ es la derivada filtrada de $e_d(t)$ ¹.

Los parámetros α y β ($0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$) ponderan la señal de referencia (setpoint weighting) modificando la expresión del error de la parte proporcional $e_p(t) = \beta y_r(t) - y(t)$ y de la parte derivativa $e_d(t) = \alpha y_r(t) - y(t)$ manteniéndose el verdadero error en la parte integral para llevar el error en estado estacionario a cero. La respuesta a cambios en la referencia depende de los valores de α y β . En la Fig.1 se observa claramente el efecto de β para un controlador PID fijo, el sobrepico para

¹ Equivalentemente en el dominio s : $\mathcal{L} \left(\frac{de_d(t)}{dt} \right)_f = \frac{s}{1 + \frac{s}{N}} E_d(s)$

cambios en la referencia es menor para $\beta = 0,5$ (el mínimo se obtiene para $\beta = 0$). El parámetro α se elige normalmente cero para evitar transitorios largos ante cambios bruscos en la referencia.

En la práctica la derivación ideal de la (1) no puede llevarse a cabo, por lo que en las (2) y (3) se indica con el subíndice f que la señal de la derivada se obtiene filtrando con un filtro pasabajos la señal $e_d(t) = \alpha y_r(t) - y(t)$ como se indica en la (3). La obtención de la derivada del error mediante un filtro pasabajos, limita efectivamente el ruido de alta frecuencia que puede perturbar significativamente la señal de control. Considérese por ejemplo una señal de ruido sinusoidal y que no se filtra la acción derivativa del controlador,

$$n(t) = a \operatorname{sen}(\omega t) \quad (5)$$

la contribución del término derivativo a la señal de control será:

$$u_d(t) = D \frac{dn(t)}{dt} = D a \omega \cos(\omega t) \quad (6)$$

La amplitud de esta señal es proporcional a ω se hace arbitrariamente grande si el ruido es de alta frecuencia. El filtro pasabajos determina la función de transferencia de la parte derivativa del PID.

$$G_d(s) = \frac{U_d(s)}{E_d(s)} = \frac{D s}{1 + \frac{s}{N}} \quad (6)$$

Donde N es un entero comprendido entre 8 y 20 (normalmente $N = 10$), para frecuencia bajas el filtro se comporta como un derivador, $G_d(s) \approx D s$ y para frecuencias altas la ganancia se limita a $G_d(s) \approx D N$.

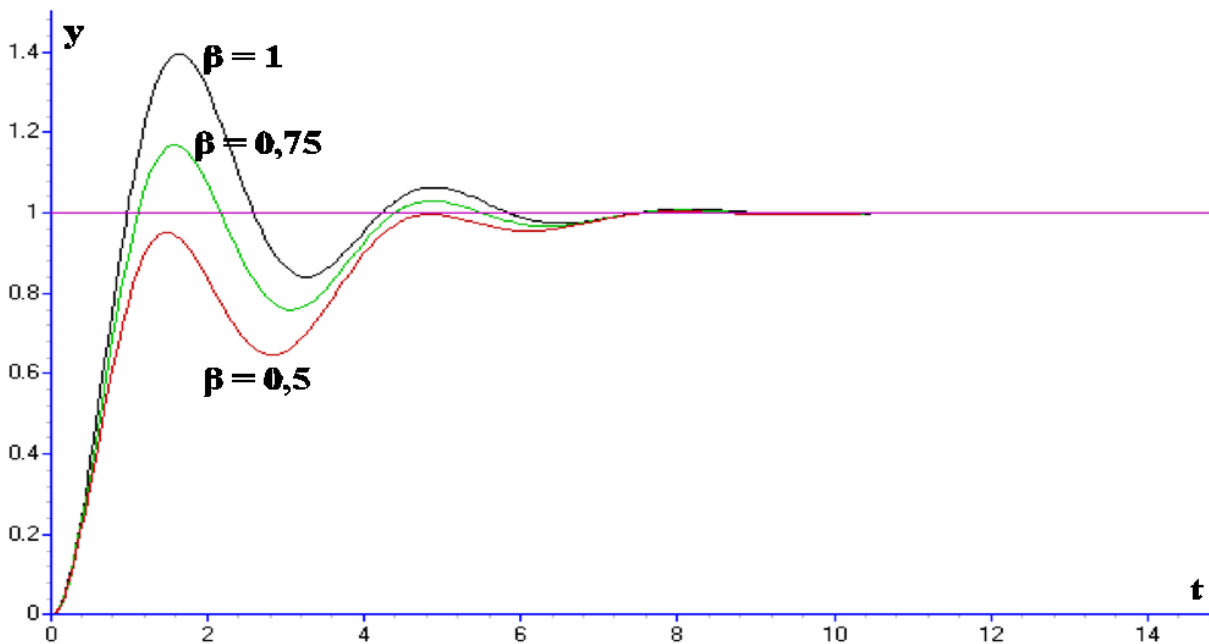


Fig1. Efecto del parámetro β en el control del proceso

En la biblioteca de Simulink Extras – Additional Linear se dispone de los bloques PID Controller y PID Controller (with Approximate Derivative), el primero es el PID académico de la (2) y el segundo es el PID aproximado (4) para el caso especial $\alpha = \beta = 1$ ($e_d(t) = e_p(t) = e(t)$).

