

# **PRÁCTICA 2**

## **CONTROLADOR ADAPTABLE AUTOSINTONIZADO**

### **COMPLEMENTO TEÓRICO**

**Dr. Ing. Fernando di Sciascio**

## Modelo ARMAX del sistema y de las perturbaciones

Suponer que el sistema puede ser modelado como un proceso estable, invariante en el tiempo y linealizable, con una sola entrada y una sola salida (SISO), por lo que puede ser descrito por una ecuación lineal en diferencias de la forma:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \dots + b_n u(k-d-n) + e(k) + c_1 e(k-1) + c_2 e(k-2) + \dots + c_n e(k-n) \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} u(k) &= U(k) - \bar{U} \\ y(k) &= Y(k) - \bar{Y} \end{aligned} \quad (2)$$

$U(k)$  e  $Y(k)$  son los valores de entrada y salida del sistema en el instante  $k$ ,  $\bar{U}$  es el valor medio de la señal de entrada,  $\bar{Y}$  es el valor medio de la variable de salida y  $e(k)$  es una señal de ruido estadísticamente independiente y estacionaria con distribución normal y de media nula.

Obsérvese en la (1) que una acción de control aplicada en el instante  $k_1 T$  ( $u(k_1)$ ), actúa sobre la salida  $d$  periodos de muestreo posteriores  $(k_1 + d) T$ . Luego, la salida  $y(k)$  depende de las acciones de control  $u(k-d)$ ,  $u(k-d-1)$ ,  $\dots$ ,  $u(k-n-1)$ , esto es, en los instantes  $k-d$  y anteriores. El parámetro  $d$  representa entonces el retardo del sistema<sup>1</sup> y matemáticamente es el exceso de polos en el origen del sistema<sup>2</sup>.

Asumiendo que las perturbaciones pueden ser modeladas por un proceso ARMA, con el mismo polinomio que el sistema. El operador de transferencia en  $q$  de este sistema puede escribirse como:

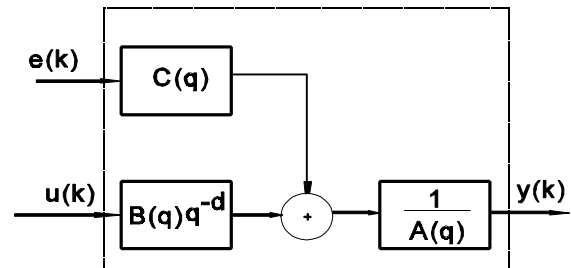
$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)} q^{-d} u(k) + \frac{C(q)}{A(q)} e(k) \quad (4)$$

donde:

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_n q^{-na} \\ B(q) &= b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_n q^{-nb} \\ C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_n q^{-nc} \end{aligned} \quad (5)$$

para que la planta sea realizable debe ser:

$$\begin{aligned} na &\geq nb \\ na &\geq nc \end{aligned}$$



**Fig.1. Modelo ARMAX del sistema y de las perturbaciones estocásticas.**

<sup>1</sup> A veces se lo designa como tiempo muerto, retardo de transporte (en los procesos con transferencias de masas). En inglés se emplean los términos: delay time, dead time, lag time, transport delay.

<sup>2</sup> Para la parte determinística del sistema la función de transferencia es:  $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{z^d A(z)}$

El primer cociente  $B(q)/A(q)$  representa el modelo de la planta y el segundo  $C(q)/A(q)$  representa el modelo de las perturbaciones. El conjunto planta más perturbaciones se denomina modelo ARMAX.

Los tres polinomios  $A$ ,  $B$  y  $C$  no tienen factores comunes (polinomios primos entre si). Los polinomios se normalizan para que  $A$  y  $C$  sean mónicos, esto es, los coeficientes de mayor orden son la unidad. Se asume en lo que sigue que los ceros de  $A$  y  $B$  también están en el interior del círculo unidad, esto es el sistema es estable y de dinámica inversa estable<sup>3</sup> (el caso de dinámica inversa inestable también puede ser analizada en otro contexto).

Se asume que los ceros del polinomio  $C$  están dentro del círculo unidad, de no ser así por factorización espectral siempre se pueden llevar los ceros de  $C$  al interior del círculo unidad. El polinomio  $C$  puede ser multiplicado por una potencia arbitraria de  $q^{-1}$  (o  $q$ ) sin que cambie la estructura de correlación de  $C(q)e(k)$ <sup>4</sup>. Este hecho se utiliza para normalizar  $C$  tal que el grado de  $C$  sea el mismo que  $A$ :

$$\text{grad } A = \text{grad } C = n \quad (6)$$

### Predicción óptima

El problema de control estocástico está íntimamente ligado con el de predicción. Por ello se va a desarrollar el predictor óptimo de  $d$  pasos de la salida de un sistema.

Dado el proceso

$$A(q)y(k+d) = B(q)u(k) + C(q)e(k+d) \quad (7)$$

donde los polinomios  $A(q)$ ,  $B(q)$  y  $C(q)$  son los definidos previamente por la (5).

El problema consiste en encontrar la predicción de la salida en el instante  $k+d$  con la información disponible en el instante  $k$ , tal que la esperanza matemática del error de predicción al cuadrado  $\tilde{y}(k+d|k)^2 = [y(k+d) - \hat{y}(k+d|k)]^2$  sea mínima. La ecuación del sistema puede escribirse como:

$$y(k+d) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}e(k+d) \quad (8)$$

Definición (polinomio recíproco): Dado el polinomio  $P$  en potencias negativas de  $q$ , se le denomina polinomio recíproco  $P^*$  (en potencia positivas de  $q$ ) al que verifica la relación  $P = q^{-\text{grad } P^*} P^*$ , por ejemplo, para los polinomios  $A$  y  $C$  se tiene:  $A^* = q^n A$  y  $C^* = q^n C$ .

$$A^*(q) = q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \dots + a_n$$

---

<sup>3</sup> Para sistemas discretos cuando todos los ceros están en el interior del círculo unidad se dice que es dinámica inversa estable y no que es de fase mínima y cuando algún cero está en el exterior del círculo se dice que es de dinámica inversa inestable y no que es de no mínima fase.

<sup>4</sup>  $e(k)$  Es ruido blanco por lo que no esta correlacionado con ningún otro término excepto con el mismo, por lo que el tiempo absoluto carece de importancia.

$$C^*(q) = q^n + c_1 q^{n-1} + c_2 q^{n-2} + \dots + c_n$$

El último término de la (8) es:

$$\frac{C(q)}{A(q)} e(k+d) = \frac{C(q) q^{d-1}}{A(q)} e(k+1) = \frac{C^*(q) q^{d-1}}{A^*(q)} e(k+1)$$

Obsérvese que:  $\text{grad } C^*(q) q^{d-1} = n + d - 1$  y  $\text{grad } A^* = n$ , por lo que el cociente entre polinomios  $C^*(q) q^{d-1} / A^*(q)$  resulta en un polinomio cociente  $F^*$  de grado  $d-1$  ( $\text{grad } F^* = d-1$ ) y en un polinomio resto  $G^*$  de grado  $n-1$  ( $\text{grad } G^* = n-1$ ), esto es,

$$\frac{C^*(q) q^{d-1}}{A^*(q)} = F^*(q) + \frac{G^*(q)}{A^*(q)}$$

operando

$$\begin{aligned} C^*(q) q^{d-1} &= F^*(q) A^*(q) + G^*(q) \rightarrow C^*(q) q^{d-1} q^{-n} = F^*(q) A^*(q) q^{-n} + G^*(q) q^{-n} \\ C(q) q^{d-1} &= F^*(q) A(q) + G(q) q^{-1} \rightarrow C(q) = F^*(q) q^{-(d-1)} A(q) + q^{-d} G(q) \end{aligned}$$

$$\boxed{C(q) = A(q) F(q) + q^{-d} G(q)}$$

(9)

con,

$$\begin{aligned} F(q) &= 1 + f_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + f_{d-1} q^{-(d-1)} \\ G(q) &= g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{n-1} q^{-(n-1)} \end{aligned} \quad (10)$$

empleando la igualdad (9), el último término de la (8) queda:

$$\frac{C(q)}{A(q)} e(k+d) = F(q) e(k+d) + \frac{G(q)}{A(q)} e(k)$$

Evidentemente es una función de  $e(k+d)$ ,  $e(k+d-1)$ , ...,  $e(k+1)$ ,  $e(k)$ ,  $e(k-1)$ , ..., donde  $e(k+d)$ ,  $e(k+d-1)$ , ...,  $e(k+1)$  no están disponibles en el instante  $k$ . La (8) queda:

$$y(k+d) = \frac{B(q)}{A(q)} u(k) + F(q) e(k+d) + \frac{G(q)}{A(q)} e(k) \quad (11)$$

despejando de la (4)  $e(k)$ , se tiene:

$$e(k) = \frac{A(q)}{C(q)} y(k) - \frac{B(q)}{C(q)} q^{-d} u(k) \quad (12)$$

sustituyendo la (12) en la (11)

$$y(k+d) = \frac{B(q)}{A(q)} u(k) + F(q) e(k+d) + \frac{G(q)}{C(q)} y(k) - \frac{B(q) G(q)}{C(q) A(q)} q^{-d} u(k)$$

operando con la ayuda de la identidad (9)

$$y(k+d) = \frac{G(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q) F(q)}{C(q)} u(k) + F(q) e(k+d) \quad (13)$$

desarrollando los términos del lado derecho de la (13) se tiene que:

$$\frac{G(q)}{C(q)} y(k) = \alpha_0 y(k) + \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + \dots \quad (14)$$

$$\frac{B(q) F(q)}{C(q)} u(k) = \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \beta_2 u(k-2) + \dots \quad (15)$$

$$F(q) e(k+d) = f_{d-1} e(k+1) + \dots + f_1 e(k+d-1) + e(k+d) \quad (16)$$

Sea  $\hat{y}(k+d|k)$  la mejor predicción de la salida en el instante  $k+d$  que puede realizarse con la información disponible en el instante  $k$ , esto es,  $y(k)$ ,  $y(k-1)$ ,  $y(k-2)$ ,  $\dots$   $u(k)$ ,  $u(k-1)$ ,  $u(k-2)$ ,  $\dots$ . Por lo tanto  $\hat{y}(k+d|k)$  no dependerá del primer término del lado derecho de la (13) (ecuación (16) donde aparecen  $e(k+1)$ ,  $\dots$ ,  $e(k+d)$  y sí dependerá del segundo y tercer término de la (13) (ecs.(14) y (15)).

$$\boxed{\hat{y}(k+d|k) = \frac{G(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q) F(q)}{C(q)} u(k)} \quad (17)$$

que es de la forma

$$\hat{y}(k+d|k) = \alpha_0 y(k) + \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + \dots + \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \beta_2 u(k-2) + \dots \quad (18)$$

## Observaciones

- ☞ Para el caso  $d = 1$  se tiene que  $F(q) = 1$  y  $q^{-1}G(q) = C(q) - A(q)$ , entonces las (13) y (17) quedan:

$$y(k+1) = \left( 1 - \frac{A(q)}{C(q)} \right) y(k+1) + \frac{B(q)}{C(q)} u(k) + e(k+1)$$

$$\hat{y}(k+1 | k) = \left( 1 - \frac{A(q)}{C(q)} \right) y(k+1) + \frac{B(q)}{C(q)} u(k)$$

equivalentemente

$$y(k) = \left( 1 - \frac{A(q)}{C(q)} \right) y(k) + \frac{B(q)q^{-1}}{C(q)} u(k) + e(k)$$

$$\hat{y}(k | k-1) = \left( 1 - \frac{A(q)}{C(q)} \right) y(k) + \frac{B(q)q^{-1}}{C(q)} u(k)$$

Las cuales coinciden con las ecuaciones vistas en el apunte anterior (Teniendo en cuenta que en esta sección el polinomio  $B(q)$  es  $B(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots$  y en el apunte anterior es  $B(q) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots$ ).

- ☞ El predictor (17) se obtuvo a partir de argumentos heurísticos, también puede obtenerse minimizando la esperanza matemática del error de predicción (por esta razón se afirma que el predictor (17) es óptimo).

$$\begin{aligned} E(y(k) - \hat{y}(k+d | k))^2 &= E \left( F(q)e(k+d) + \frac{G(q)}{C(q)}y(k) + \frac{B(q)F(q)}{C(q)}u(k) - \hat{y}(y+d | k) \right)^2 = \\ &= E(F(q)e(k+d))^2 + E \left( \frac{G(q)}{C(q)}y(k) + \frac{B(q)F(q)}{C(q)}u(k) - \hat{y}(y+d | k) \right)^2 + \\ &+ 2E \left( (F(q)e(k+d)) \left( \frac{G(q)}{C(q)}y(k) + \frac{B(q)F(q)}{C(q)}u(k) - \hat{y}(y+d | k) \right) \right)^2 \end{aligned}$$

El último término es cero puesto que  $e(k+d)$  es independiente y el primer termino no puede ser influenciado, luego la mejor predicción de la salida se obtiene igualando a cero el segundo término que resulta idéntico a la (17).

- ☞ Suponer que la acción de control actual y las anteriores  $u(k)$ ,  $u(k-1)$ ,  $u(k-2)$ ,  $\dots$  fueron las adecuadas para que en el instante  $k+d$  la salida sea igual a una referencia deseada  $\hat{y}(k+d | k) = r(k)$ , entonces, es razonable despejar de la (17) la acción de control adecuada para que en  $d$  períodos de muestreos hacia adelante la salida sea igual a la referencia deseada.

$$u(k) = \frac{C(q)}{B(q)F(q)} r(k) - \frac{G(q)}{B(q)F(q)} y(k) \quad (19)$$

La ley de control (19) que se obtiene a partir del predictor óptimo (17) coincide con el denominado controlador de **mínima varianza**.

### Cálculo de los polinomios $F(q)$ y $G(q)$

Conociendo los polinomios  $A, C$  y para  $n$  y  $d$  pequeños, los polinomios  $F$  y  $G$  pueden evaluarse a partir de la igualdad (9) manualmente. Para valores superiores de  $n$  y  $d$  pueden calcularse mediante software ya sea en forma numérica o simbólica, por ejemplo, con MATLAB puede emplearse el comando **deconv**.

**[f,g]=deconv(pn,pd)**: Retorna como resultado del cociente entre los polinomios pn y pd el polinomio f y el polinomio r. Donde pn es el polinomio numerador (o polinomio dividendo) y pd es el polinomio denominador (o polinomio divisor), f es el polinomio resultado de la división y r es el polinomio resto.

Para interpretar correctamente el resultado de aplicar el comando deconv, los polinomios deben ser en potencias positivas de la variable  $q$ , por lo que es necesario emplear los polinomios recíprocos de  $A, C, F$  y  $G$ , para el presente caso se tiene:

$$A^* = q^n A, \quad C^* = q^n C, \quad F^* = q^{d-1} F \quad \text{y} \quad G^* = q^{n-1} G.$$

$$A^*(q) = q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \dots + a_n$$

$$C^*(q) = q^n + c_1 q^{n-1} + c_2 q^{n-2} + \dots + c_n$$

$$G^*(q) = g_0 q^{n-1} + g_1 q^{n-2} + \dots + g_{n-1}$$

$$F^*(q) = q^{d-1} + f_1 q^{d-2} + f_2 q^{d-3} + \dots + f_{d-1}$$

$$\frac{C^* q^{d-1}}{A^*} = F^* + \frac{G^*}{A^*}$$

Particularizando para el ejemplo de los polinomios  $A(q) = 1 + 0.9 q^{-1} + 0.26 q^{-2} + 0.024 q^{-3}$  y  $C(q) = 1 - 0.6 q^{-1} + 0.1 q^{-2} - 0.006 q^{-3}$ , se calculan los polinomios  $F(q)$  y  $G(q)$  de la ecuación

$$\frac{C^* q^{d-1}}{A^*} = F^* + \frac{G^*}{A^*}$$

$$A(q) = 1 + 0.9 q^{-1} + 0.26 q^{-2} + 0.024 q^{-3} \Rightarrow A^*(q) = q^3 + 0.9 q^2 + 0.26 q + 0.024$$

$$C(q) = 1 - 0.6 q^{-1} + 0.1 q^{-2} - 0.006 q^{-3} \Rightarrow C^*(q) = q^3 - 0.6 q^2 + 0.1 q - 0.006$$

$$C^* q^{d-1} = q^4 - 0.6 q^3 + 0.1 q^2 - 0.006 q$$

Se definen los polinomios  $pn$  y  $pd$  para trabajar con MATLAB

$$pn = C^* q^{d-1} = [1 \quad -0.6 \quad 0.1 \quad -0.006 \quad 0]$$

$$pd = A^*(q) = [1 \quad 0.9 \quad 0.26 \quad 0.024]$$

» [f,g]=deconv(pn,pd)

$$f = [1 \quad -1.5]$$

$$g = [0 \ 0 \ 1.19 \ 0.36 \ 0.036]$$

$$F^*(q) = q - 1.5 \Rightarrow F(q) = 1 - 1.5 q^{-1}$$

$$G^*(q) = 1.2 q^2 + 0.36 q - 0.036 \Rightarrow G(q) = 1.2 + 0.36 q^{-1} - 0.036 q^{-2}$$

$$A(q) = 1 + 0.9 q^{-1} + 0.26 q^{-2} + 0.024 q^{-3}$$

$$C(q) = 1 - 0.6 q^{-1} + 0.1 q^{-2} - 0.006 q^{-3}$$

$$F(q) = 1 - 1.5 q^{-1}$$

$$G(q) = 1.19 + 0.36 q^{-1} + 0.036 q^{-2}$$

**Resumen:** Dada una planta cuyo comportamiento esta dado por el modelo ARMAX

$$\begin{aligned} y(k+d) &= \frac{B(q)}{A(q)} u(k) + \frac{C(q)}{A(q)} e(k+d) \\ &= \frac{G(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q)F(q)}{C(q)} u(k) + F(q) e(k+d) \end{aligned}$$

la mejor predicción posible de la salida del sistema estará dada por:

$$\hat{y}(k+d | k) = \frac{G(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q)F(q)}{C(q)} u(k)$$



## Diseño de controladores por asignación de polos

Considérese la siguiente planta

$$A(q)y(t) = B(q)q^{-d}u(t) - C(q)e(t) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} A &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{na} q^{-na} \\ B &= b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \\ C &= 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{nc} q^{-nc} \end{aligned} \quad (2)$$

$A$  y  $C$  polinomios mónicos,  $d$  es el número de retardos entre la entrada y la salida o el exceso de polos en el origen.

Recordando que dado el polinomio  $P$  en potencias negativas de  $q$ , se le denomina polinomio recíproco  $P^*$  (en potencia positivas de  $q$ ) al que verifica la relación  $P = q^{-\text{grad } P^*} P^*$ , para los polinomios  $A$  y  $C$  se tiene:  $A^* = q^{na} A$ ,  $B^* = q^{nb} B$  y  $C^* = q^{nc} C$ .

$$\begin{aligned} A^* &= q^{na} + a_1 q^{na-1} + a_2 q^{na-2} + \dots + a_n \Rightarrow \text{grad } A^* = na \\ B^* &= b_0 q^{nb} + b_1 q^{nb-1} + b_2 q^{nb-2} + \dots + b_{nb} \Rightarrow \text{grad } B^* = nb \\ C^* &= q^{nc} + c_1 q^{nc-1} + c_2 q^{nc-2} + \dots + c_n \Rightarrow \text{grad } C^* = nc \end{aligned} \quad (3)$$

En lo que sigue por simplicidad se designa con  $\text{grad } P$  al grado para cualquier polinomio  $P$ . Si  $P$  está expresado en potencias positivas de  $q$  entonces como es usual  $\text{grad } P$  coincide con el orden del polinomio, si  $P$  está expresado en potencias negativas de  $q$  entonces  $\text{grad } P$  es el orden del polinomio recíproco  $P^*$ .

Para que la planta sea realizable debe ser:

$$\begin{aligned} \text{grad } A^* &\geq \text{grad } B^* \Rightarrow na \geq nb \\ \text{grad } A^* &\geq \text{grad } C^* \Rightarrow na \geq nc \end{aligned} \quad (4)$$

Se propone un controlador de dos grados de libertad, esto es, con una salida  $u(t)$  y dos entradas, la señal de referencia  $r(t)$  y la salida de la planta  $y(t)$  (ver la figura 1).

$$R(q)u(t) = T(q)r(t) - S(q)y(t) \quad (5)$$

o

$$u(t) = \frac{T(q)}{R(q)}r(t) - \frac{S(q)}{R(q)}y(t)$$

con

$$\begin{aligned} R &= 1 + r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2} + \dots + r_{nr} q^{-nr} \Rightarrow \text{grad } R^* = nr \\ S &= s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2} + \dots + s_{ns} q^{-ns} \Rightarrow \text{grad } S^* = ns \\ T &= t_0 + t_1 q^{-1} + t_2 q^{-2} + \dots + t_{nt} q^{-nt} \Rightarrow \text{grad } T^* = nt \end{aligned}$$

La ley de control (5) representa la combinación de una prealimentación de la señal de referencia  $r(t)$  y con la función de transferencia discreta

$$H_{ff}(z) = \frac{T(z)}{R(z)}$$

y una realimentación de la salida de la planta  $y(t)$  con la función de transferencia

$$H_{fb}(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$$

Para obtener un controlador propio o realizable se deben verificar las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \text{grad } R \geq \text{grad } T \\ \text{grad } R \geq \text{grad } S \end{cases} \quad (6)$$

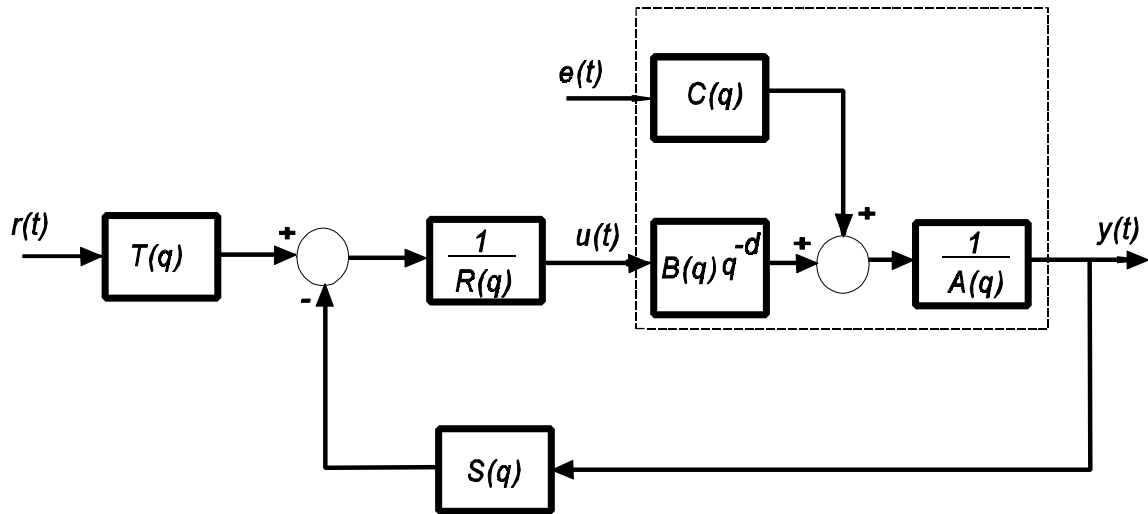
Si el tiempo de cálculo de la señal de control en el computador es solamente una fracción del período de muestreo, entonces es normal exigir que

$$\text{grad } R = \text{grad } S = \text{grad } T$$

Esto significa que no hay retardo de tiempo en el regulador. Si el tiempo de cálculo se aproxima al período de muestreo, la restricción correspondiente es

$$\text{grad } R = 1 + \text{grad } S = 1 + \text{grad } T$$

Esto significa que hay un retardo en la ley de control de un período de muestreo.



**Figura 1: Estructura del sistema completo planta mas controlador de dos grados de libertad**

La salida del sistema será:

$$y(t) = \frac{Bq^{-d}T}{AR + Bq^{-d}S} r(t) + \frac{CR}{AR + Bq^{-d}S} e(t) \quad (7)$$

Considerese el problema determinístico ( $e(t) = 0$ ) y que se desea que el comportamiento a lazo cerrado del

sistema coincide con la de un modelo estable

$$y(t) = \frac{B_m}{A_m} r(t)$$

con  $A_m$  mónico y  $\text{grad } A_m \geq \text{grad } B_m$

$$y(t) = \frac{B q^{-d} T}{A R + B q^{-d} S} r(t) = \frac{B_m}{A_m} r(t) \quad (8)$$

luego se debe verificar la siguiente igualdad

$$\frac{B q^{-d} T}{A R + B q^{-d} S} = \frac{B_m A_0}{A_m A_0} \quad (9)$$

Donde se a multiplicado y dividido el segundo miembro por el polinomio mónico  $A_0$  que otorga flexibilidad al diseño (se lo denomina polinomio del observador debido a que en el planteo de asignación de polos en el espacio de estados coincide con el polinomio del observador).

A partir de los datos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y las especificaciones de diseño  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $A_0$ ; se deben calcular los polinomios  $R$ ,  $S$ ,  $T$  mediante las identidades

$$\begin{cases} B q^{-d} T = B_m A_0 \\ A R + B q^{-d} S = A_m A_0 \end{cases} \quad (10)$$

Como estamos considerando el caso donde no hay cancelación de ceros del sistema se tiene de la primera igualdad que  $B q^{-d}$  Debe ser múltiplo de  $B_m$

$$B_m = B q^{-d} B_0 \quad (11)$$

$$T = B_0 A_0 \quad (12)$$

para una solución de grado mínimo  $B_0 = t_0$  y se tiene que

$$\begin{aligned} B_m &= t_0 B q^{-d} \\ T &= t_0 A_0 \end{aligned} \quad (13)$$

El valor de la constante  $t_0$  se obtiene del estado estacionario, si deseo que  $y \rightarrow r$  para  $t \rightarrow \infty$  debe ser:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{t_0 B(z) z^{-d}}{A_m(z)} = \frac{t_0 B(1)}{A_m(1)} = 1$$

$$t_0 = \frac{A_m(1)}{B(1)} \quad (14)$$

$$T = \frac{A_m(1)}{B(1)} A_0 \quad (15)$$

Resta determinar  $R$  y  $S$  a partir de  $A$ ,  $B$ ,  $A_m$ ,  $A_0$  se debe emplear la segunda igualdad (10)

$$A R + B q^{-d} S = A_m A_0 = A_c \quad (16)$$

Esta ecuación polinómica se conoce como ecuación diofántica (o diofantina) o igualdad de Bezout. Esta ecuación tendrá solución solo si  $A$  y  $B$  son polinomios primos o lo que es equivalente si el máximo común divisor de  $A$  y  $B$  divide a  $A_c$ .

Si  $R_0$  y  $S_0$  es una solución de la ecuación diofántica, entonces

$$\begin{aligned} R &= R_0 + Q B q^{-d} \\ S &= S_0 - Q A \end{aligned}$$

es también una solución, donde  $Q$  es un polinomio arbitrario. Si existe una solución pueden encontrarse infinitas soluciones añadiendo o sustrayendo un múltiplo apropiado de  $A$  y  $B q^{-d}$ .

Se verifica que de las infinitas soluciones, existe una solución única de la ecuación diofántica tal que:

$$\text{grad } S < \text{grad } A$$

en lo que sigue se adopta

$$\text{grad } S = \text{grad } A - 1 \quad (n_s = n_a - 1) \quad (17)$$

### Análisis de las condiciones de causalidad del controlador

Para obtener un controlador causal (en el caso continuo o propio en el caso discreto) se deben verificar las condiciones (6):

$$\begin{cases} \text{grad } R \geq \text{grad } T \\ \text{grad } R \geq \text{grad } S \end{cases}$$

Considere la primera condición  $\text{grad } R \geq \text{grad } T$ , la misma es equivalente a

$$\text{grad } A_m - \text{grad } B_m \geq \text{grad } A - \text{grad } B q^{-d} \quad (18)$$

La (18) implica que el retardo del modelo debe ser al menos tan grande como el retardo del proceso, normalmente  $A_0 = t_0 \rightarrow \text{grad } A_0 = 0$ , luego la (18) queda

$$\text{grad } A_m \geq \text{grad } A$$

lo que implica que el orden del modelo debe ser igual o mayor que el orden de la planta

Considere ahora la segunda condición  $\text{grad } R \geq \text{grad } S$ , la misma es equivalente a

$$\text{grad } A_c = \text{grad } A_m + \text{grad } A_0 \geq 2 \text{ grad } A - 1 \quad (19)$$

Teniendo en cuenta que normalmente  $\text{grad } B = \text{grad } A - 1$ , la (19) queda

$$\text{grad } A_c \geq \text{grad } A + \text{grad } B \quad (20)$$

Demostración de la (18)

$$\text{grad } (A R + B q^{-d} S) = \text{grad } A_c = \text{grad } (A_m A_0) = \text{grad } A_m + \text{grad } A_0$$

como  $\text{grad } A \geq \text{grad } B$  y  $\text{grad } R \geq \text{grad } S$

$$\text{grad } (A R + B q^{-d} S) = \text{grad } (A R) = \text{grad } A + \text{grad } R$$

luego

$$\text{grad } R = \text{grad } A_m + \text{grad } A_0 - \text{grad } A \quad (21)$$

Por otra parte mediante la (14)

$$\text{grad } T = \text{grad } A_0 + \text{grad } B_0 \quad (22)$$

$$B_m = B q^{-d} B_0, \quad \text{grad } B_m = \text{grad } B q^{-d} + \text{grad } B_0$$

$$\text{grad } T = \text{grad } A_0 + \text{grad } B_m - \text{grad } B q^{-d}$$

reemplazando la (21) y (22) en  $\text{grad } R \geq \text{grad } T$

$$\text{grad } A_m + \text{grad } A_0 - \text{grad } A \geq \text{grad } A_0 + \text{grad } B_m - \text{grad } B q^{-d}$$

$$\text{grad } A_m - \text{grad } B_m \geq \text{grad } A - \text{grad } B q^{-d}$$

Demostración de la (19)

por la (17)

$$\text{grad } S = \text{grad } A - 1$$

luego  $\text{grad } R \geq \text{grad } A - 1$

reemplazando la (21) en la anterior

$$\text{grad } A_m + \text{grad } A_0 - \text{grad } A \geq \text{grad } A - 1$$

$$\text{grad } A_c = \text{grad } A_m + \text{grad } A_0 \geq 2 \text{ grad } A - 1$$

## Solución de la ecuación diofántica

Para resolver la ecuación diofántica  $A R + B q^{-d} S = A_c$ , se desarrollan los productos y sumas de polinomios, luego se igualan los coeficientes de igual orden de ambos miembros resultando un sistema de ecuaciones lineales

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_{na} & \vdots & \ddots & a_1 & b_{nb} & \vdots & & b_1 \\ 0 & a_{na} & & \vdots & 0 & b_{nb} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{na} & 0 & \cdots & 0 & b_{nb} \end{bmatrix}}_{M_s} \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{nr} \\ s_{ns} \\ \vdots \\ s_{ns} \end{bmatrix}}_{\theta_c} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{c1} - a_1 \\ \vdots \\ a_{cna} - a_{na} \\ a_{cna+1} \\ \vdots \\ a_{cnr+ns+1} \end{bmatrix}}_b$$

La matriz  $M_s$  se denomina matriz de Sylvester y se presenta frecuentemente en las aplicaciones matemáticas. Esta posee la propiedad de ser no singular (por lo tanto invertible) si y solo si los polinomios  $A$  y  $B$  no tienen factores comunes (son polinomios primos). En ese caso la ecuación anterior tiene solución única.

$$\theta_c = M_s^{-1} b$$

Observar no obstante la no unicidad con respecto a los ordenes de  $R$  y  $S$  como se discutió anteriormente.

## Diseños de Controladores para Sistemas Estocásticos Lineales.

### Formulación del problema de control para sistemas estocásticos.

Cuando un sistema estocástico, monovariable, lineal e invariante, representado por el modelo ARMAX

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)} q^{-d} u(k) + \frac{C(k)}{A(k)} e(k) \quad (21)$$

se ve afectado por perturbaciones estocásticas, las mismas son transmitidas a través de la dinámica del sistema, afectando la variable de salida, cuyo comportamiento también será aleatorio. El objetivo de un controlador para este tipo de sistemas, es minimizar los efectos que aparecen sobre la salida cuando se ve afectada por perturbaciones estocásticas. El hecho de hablar de minimizar implica un proceso de optimización y por lo tanto se necesita formular un índice de desempeño adecuado, cuya optimización asegure un correcto funcionamiento del sistema.

Un controlador que se adecua muy bien para el control de sistemas teniendo en cuenta las perturbaciones estocásticas es el denominado **Controlador de Mínima Varianza**. El principio básico en el que se sustenta este controlador, consiste precisamente en obtener los parámetros y la estructura óptima del mismo tal que minimicen la varianza  $V$  de la señal de salida  $y(k)$ .

$$J = V \{ y(k) \} = E \{ y^2(k) \} \quad (22)$$

Con este planteo se asegura que la fluctuación aleatoria de la señal de salida debido a perturbaciones se reduce al mínimo posible.

Esta propuesta produce buenos resultados, pero presenta como inconveniente que al no incluirse la acción de control en el índice de desempeño, ésta última puede tomar valores excesivos. Un índice de desempeño que tiene en cuenta este aspecto es el siguiente

$$J = E \{ y^2(k) + p u^2(k) \} \quad (23)$$

donde  $y^2(k)$  representa la varianza de la salida,  $u^2(k)$  la varianza de la acción de control y  $p$  un factor de peso de la misma. Al minimizar este índice se obtendrá un controlador que con una acción de control  $u(k)$  de varianza reducida, logra también una varianza baja en la salida  $y(k)$ . Lo que se minimiza en este caso, es una combinación de ambas variables. El controlador resultante de minimizar este índice de desempeño, se lo denomina **Controlador de Mínima Varianza Generalizado**.

El factor de peso  $p$  permite variar la penalización que se hace sobre la acción de control. En general, pesar la acción de control  $u(k)$  implica que la varianza de  $y(k)$  deje de ser la mínima obtenible. Esta disminución en el desempeño del control de la salida es el resultado del compromiso de pretender reducir simultáneamente la varianza de la acción de control  $u(k)$ .

Cuando se toma en cuenta en el control, la señal de referencia  $r(k)$ , el índice de desempeño se expresa como

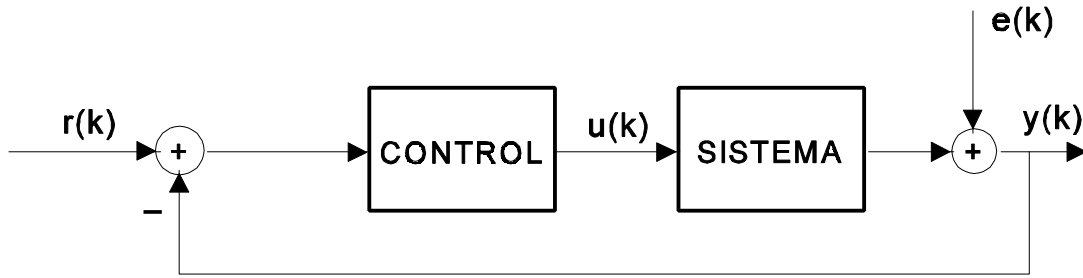
$$J = E \{ [ y(k) - r(k) ]^2 + p u^2(k) \} \quad (24)$$

Si el proceso incluye elementos con retardo puro  $dT_o$ , deberá hacerse una predicción de la salida para los  $d$  pasos de retardo. En tal caso la (24) toma la forma

$$J = E \{ [y(k+d) - r(k)]^2 + p u^2(k) \} \quad (25)$$

Podrían usarse aún índices de desempeño más complejos que incluyan por ejemplo el pesado de las variables mediante polinomios o predicciones de las variables para determinados pasos en el futuro. El que se ha planteado en la (25) tiene suficiente generalidad y provee muy buenos resultados.

En la Fig.2 se muestra un sistema de control para sistemas con perturbaciones estocásticas.



**Fig.2. Sistema de Control con perturbaciones estocásticas.**

Se puede formular a continuación el problema del **regulador estocástico lineal invariante de varianza mínima**

Dado un sistema estocástico lineal invariante de tiempo discreto dado por la (21), se debe encontrar una ley de control  $u$ , que lleve la salida  $y$  al valor de referencia  $r$  haciendo mínimo el índice de desempeño de la (25). En estas circunstancias la varianza de la diferencia entre la señal de salida y la referencia, será tan pequeña como sea posible, bajo la condición de obtener una varianza de la acción de control suficientemente pequeña.

### **Obtención del controlador estocástico.**

La ecuación de predicción (17) puede incluirse ahora en el índice de desempeño (25).

$$J = E \{ [\hat{y}(k+d|k) + \varepsilon(k+d) - r(k)]^2 + p u^2(k) \} \quad (26)$$

operando y reordenando

$$J = E \{ [\hat{y}(k+d|k) - r(k)]^2 + p u^2(k) \} + E \{ \varepsilon^2(k+d) \} + 2E \{ \hat{y}(k+d|k) \varepsilon(k+d) \} - 2E \{ r(k) \varepsilon(k+d) \} \quad (27)$$

Reemplazando la (17) en el tercer término del segundo miembro de la (27) se puede observar que  $2E \{ \hat{y}(k+d|k) \varepsilon(k+d) \} = 0$  puesto que tanto  $y(k)$  como  $u(k)$ , no dependen de los valores futuros de  $\varepsilon(k+d)$  y por lo tanto no están correlacionados. El quinto término de la (27),  $E \{ r(k) \varepsilon(k+d) \} = 0$  también es nulo dado que  $r$  no está correlacionado con  $\varepsilon$ . Resulta entonces



$$J = E \{ [\hat{y}(k+d|k) - r(k)]^2 + p u^2(k) \} + E \{ \varepsilon^2(k+d) \} \quad (28)$$

Para minimizar el índice respecto de la acción de control  $u(k)$  se hace

$$\frac{\partial J}{\partial u(k)} = E \{ [\hat{y}(k+d|k) - r(k)] \frac{\partial \hat{y}(k+d|k)}{\partial u(k)} + p u(k) \} = 0 \quad (29)$$

Es necesario calcular la derivada parcial del predictor (Ec. 5.2-24) respecto de la acción de control. Para obtener esta derivada deben incluirse las expresiones explícitas de los polinomios  $B(q)$ ,  $C(q)$ ,  $F(q)$  y  $G(q)$  definidos por las (5) y (10) y tenerse en cuenta que se deriva solo con respecto al instante  $k$ . Así es

$$\frac{\partial \hat{y}(k+d|k)}{\partial u(k)} = b_0 \quad (30)$$

Por lo tanto se obtendrá un mínimo para  $J$  cuando

$$E \{ [\hat{y}(k+d|k) - r(k)] b_0 + p u(k) \} = 0 \quad (31)$$

sustituyendo  $\hat{y}(k+d|k)$  según (17), resulta

$$b_0 \frac{G(q)}{C(q)} y(k) + b_0 \frac{B(q)F(q)}{C(q)} u(k) - r(k) b_0 + p u(k) = 0 \quad (32)$$

o bien

$$G(q) y(k) - C(q) r(k) + [B(q)F(q) + C(q) \frac{p}{b_0}] u(k) = 0 \quad (33)$$

renombrando

$$M(q) = B(q)F(q) + C(q) \frac{p}{b_0} \quad (34)$$

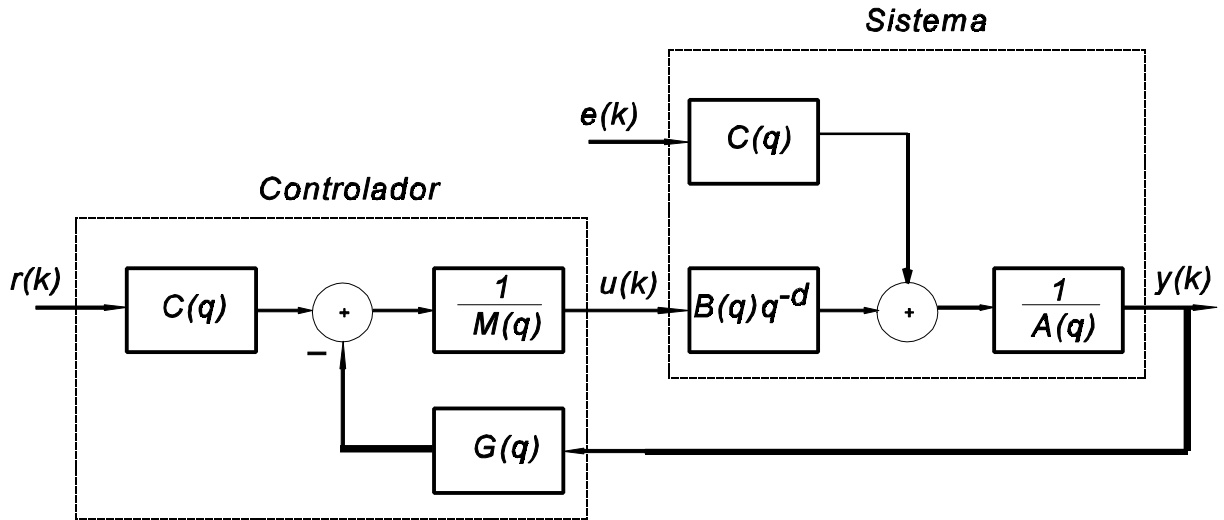
queda

$$G(q) y(k) - C(q) r(k) + M(q) u(k) = 0 \quad (35)$$

De esta expresión se puede despejar  $u(k)$  para obtener la acción de control óptima

$$u(k) = \frac{C(q)}{M(q)} r(k) - \frac{G(q)}{M(q)} y(k) \quad (36)$$

La Ec.16 representa al controlador de varianza mínima generalizada. La acción de control  $u(k)$  es una función de los valores (medidos) presentes  $r(k)$  e  $y(k)$ . Transformando en variable  $z$  se puede representar al controlador y al proceso en un diagrama en bloques como en la Fig.3.



**Fig.3. Estructura del Sistema de Control Estocástico con Controlador de Varianza Mínima.**

Si en el índice de desempeño dado por la (25) no se pesa la acción de control  $u(k)$ ; esto es  $p = 0$ , la (34) se transforma en

$$M(q) = B(q) F(q) \quad (37)$$

Con esta expresión para  $M(q)$  la (26) del controlador de varianza mínima se transforma en el Controlador Estocástico de Varianza Mínima Simple.

#### Condiciones de estabilidad.

La salida del sistema a lazo cerrado a partir de la Fig.3 resulta

$$y(k) = \frac{C(q) B(q) q^{-d}}{M(q) A(q) + B(q) G(q) q^{-d}} r(k)$$

la función de transferencia a lazo cerrado es:

$$\frac{y(z)}{r(z)} = \frac{C(z) B(z) z^{-d}}{M(z) A(z) + B(z) G(z) z^{-d}} \quad (38)$$

La ecuación característica del sistema de lazo cerrado es

$$M(z) A(z) + B(z) G(z) z^{-d} = 0 \quad (39)$$

Obteniendo  $M(z)$  a partir de su expresión en variable  $z$  de la (34) queda

$$M(z) = B(z) F(z) + C(z) \frac{p}{b_0} \quad (40)$$

Despejando  $G(z)$  y aplicando la transformada  $z$  a la (35) se obtiene

$$G(z) = [C(z) - F(z) A(z)] z^d \quad (41)$$

y reemplazando  $M(z)$  y  $G(z)$  en la (39) se llega

$$C(z) \left[ A(z) \frac{p}{b_o} + B(z) \right] = 0 \quad (42)$$

Las raíces de  $C(z)$  constituyen los polos fijos del sistema de lazo cerrado, mientras que los polos de  $A(z)p/b_o + B(z) = 0$  son los polos móviles que pueden modificarse con el controlador. Se observa que para obtener un sistema de control estable, las raíces de  $C(z)$  deben encontrarse necesariamente en el interior del círculo unitario. Para el controlador de varianza mínima simple, donde  $p = 0$ , la ecuación característica (42) se reduce a

$$C(z) B(z) = 0 \quad (43)$$

Esta ecuación impone además la condición que las raíces de  $B(z)$  estén dentro del círculo unitario. Esto implica que el sistema a controlar debe ser de dinámica inversa estable, condición que no exige el controlador de varianza mínima generalizado cuando  $p \neq 0$ .