TEMA XVII.- FILTRO DE KALMAN

La importancia del filtro de Kalman, aparecido a principios de la década de los sesenta, es comparable a los trabajos realizados por Nyquist y Bode, en la década de los veinte, y a los de Wiener en los años treinta.

El filtro de Wiener está limitado a sistemas lineales, monovariable, y estacionarios (las propiedades estadísticas de la señal y el ruido se mantienen constantes), mientras que el filtro de Kalman posibilita la estimación de sistemas multivariables y no estacionarios. Además, aunque el filtro de Wiener puede ser discretizado, con la introducción de errores que ello comporta, el filtro de Kalman fue desarrollado directamente para sistemas muestreados, lo que permite de forma natural su implementación en ordenador. Posteriormente el filtro de Kalman se amplió a sistemas continuos.

17.1.- ESTIMADORES ÓPTIMOS

En el capítulo de "Estimación determinística de sistemas" la matriz de ganancia **K** de los observadores se calculaba situando los autovalores del observador en un lugar determinado, que no cambiaba con el tiempo. Es decir, la matriz de ganancia **K** del observador era constante. En este capítulo veremos la forma de calcular la matriz **K** de un estimador óptimo para un sistema con ruido y veremos que en general es variable con el tiempo, por lo que toma la forma $\mathbf{K}(k)$.

Consideremos la ecuación de estado y de salida de un sistema no estacionario, con ruido de la forma:

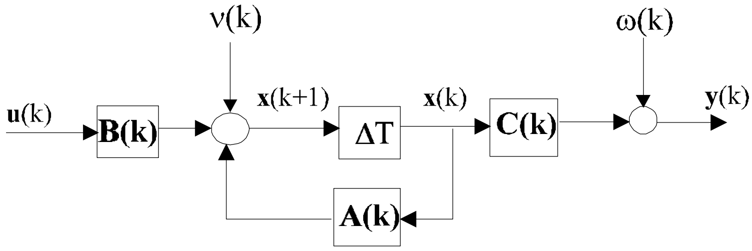
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\nu}(k) \\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\omega}(k)
\end{aligned}$$

donde las matrices $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$ y $\mathbf{C}(k)$ son determinísticas y en general serán variables en los sistemas lineales variantes con el tiempo, y $\boldsymbol{\upsilon}(k)$ y $\boldsymbol{\omega}(k)$ son los procesos estocásticos de los ruidos del sistema y de medida respectivamente, que se consideran ruidos blancos de media cero e independientes y que por lo tanto cumplen:

$$\begin{aligned}
&E\{\boldsymbol{\nu}(k)\} = E\{\boldsymbol{\omega}(k)\} = \mathbf{0} \\
&E\left\{\boldsymbol{\nu}(k)\boldsymbol{\omega}^T(k)\right\} = E\left\{\boldsymbol{\omega}(k)\boldsymbol{\nu}^T(k)\right\} = \mathbf{0} \\
&E\left\{\boldsymbol{\nu}(k)\boldsymbol{\nu}^T(k)\right\} = \mathbf{Q}(k) \\
&E\left\{\boldsymbol{\nu}(k)\boldsymbol{\nu}^T(j)\right\} = \mathbf{0} \qquad\qquad \forall k \neq j \\
&E\left\{\boldsymbol{\omega}(k)\boldsymbol{\omega}^T(k)\right\} = \mathbf{R}(k) \\
&E\left\{\boldsymbol{\omega}(k)\boldsymbol{\omega}^T(j)\right\} = \mathbf{0} \qquad\qquad \forall k \neq j
\end{aligned}$$

Las matrices de covarianza, diagonales y por lo tanto simétricas, de los ruidos del sistema $\mathbf{Q}(k)$ (positiva semidefinida) y de medida $\mathbf{R}(k)$ (positiva definida) son conocidas.

El ruido del sistema puede considerarse que se genera en su interior o bien que se introduce a la entrada del sistema, y el ruido de medida es el error que se comete al medir la salida, es decir, será el error que cometen los sensores al medir. La figura siguiente aclara estos dos conceptos:

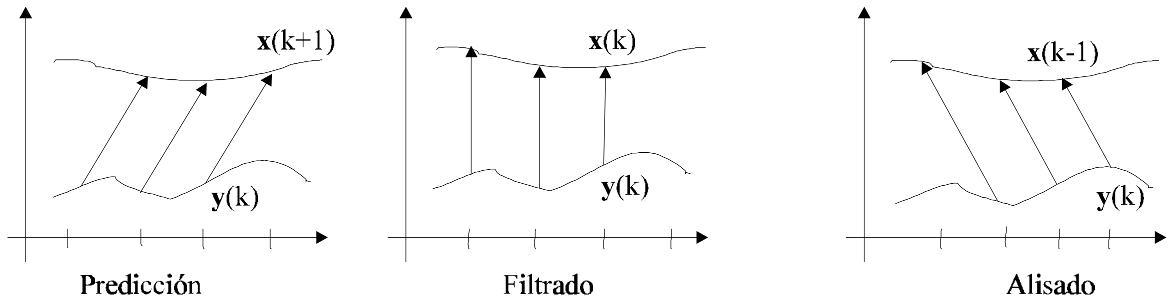


El problema consiste en estimar el valor óptimo del vector de estado $\mathbf{x}(k)$, basándose en las medidas ruidosas $\mathbf{y}(0)$, $\mathbf{y}(1)$, $\mathbf{y}(2)$,..., $\mathbf{y}(k)$ que serán conocidas, además de tener en cuenta que el vector de estado estará contaminado con el ruido del sistema. Esta problemática puede abordarse de tres formas diferentes:

Predicción: Se obtiene la estimación $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$ conociendo las medidas: $\mathbf{y}(0)$, $\mathbf{y}(1)$, $\mathbf{y}(2)$,..., $\mathbf{y}(k)$

Filtrado: Se obtiene la estimación $\hat{\mathbf{x}}(k)$ conociendo las medidas: $\mathbf{y}(0)$, $\mathbf{y}(1)$, $\mathbf{y}(2)$,..., $\mathbf{y}(k)$

Alisado: Se obtiene la estimación $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$ conociendo las medidas: $\mathbf{y}(0)$, $\mathbf{y}(1)$, $\mathbf{y}(2)$,..., $\mathbf{y}(k)$



El criterio para obtener el óptimo es minimizar el índice de comportamiento:

$$\mathbf{P}(n) = E\left\{\mathbf{e}(n)\mathbf{e}^T(n)\right\}$$

con n = k+1, n = k o n = k-1 según sea con predicción, filtrado o alisado. Es decir la matriz de covarianza del error e(k) ha de ser mínima, estando el error definido como:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$$

Si la matriz de covarianza $\mathbf{P}(k)$ ha de ser mínima, cualquier forma cuadrática del tipo:

$$\alpha^T \mathbf{P}(k)\alpha$$

también es mínima, siendo α un vector arbitrario de orden n x 1.

Se asume que del estado inicial $\mathbf{x}(0)$ se conoce su esperanza matemática o valor medio:

$$E\left\{\mathbf{x}(0)\right\} = \bar{\mathbf{x}}(0)$$

que será un valor determinístico, y además también se conoce la matriz de covarianza del estado inicial (no del error):

$$E\left\{[\mathbf{x}(0)-\bar{\mathbf{x}}(0)][\mathbf{x}(0)-\bar{\mathbf{x}}(0)]^T\right\} = \mathbf{P}_0$$

El estado inicial y el ruido cumplen:

$$E\left\{[\mathbf{x}(0)-\bar{\mathbf{x}}(0)]\boldsymbol{\nu}^T(k)\right\} = E\left\{[\mathbf{x}(0)-\bar{\mathbf{x}}(0)]\boldsymbol{\omega}^T(k)\right\} = \mathbf{0}$$

al ser independientes y ser la media de los ruidos blancos cero.

17.2.- FILTRO DE KALMAN CON PREDICCIÓN

Asumidas todas las condiciones anteriores, se trata aquí de determinar la estimación $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$, conociendo las medidas contaminadas de ruido y(0), y(1), y(2),..., y(k), para que la matriz P(k+1) de covarianza del error, en el instante k+1, sea mínima.

La solución encontrada por Kalman y Bucy, fue que el estimador óptimo del estado es un observador que, como ya se indicó en su momento, tiene por ecuación:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}(k)\left[\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)\right] = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}(k)\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k)\right]$$

El diagrama de bloques sería:

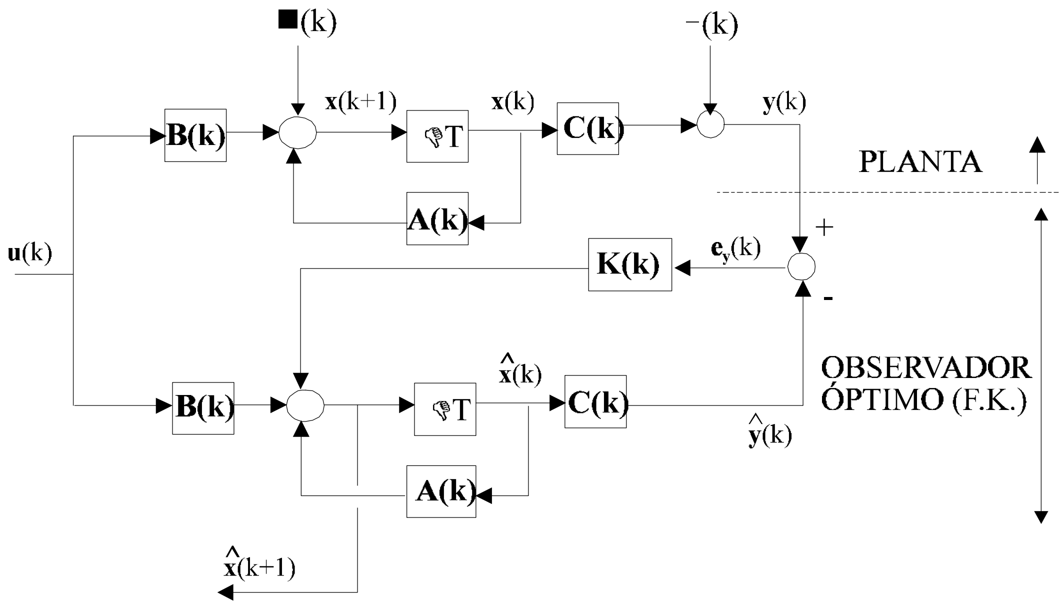


Fig. 17.1.- Filtro de Kalman con predicción

El error en el instante k+1 será:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \\
&= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \nu(k) - \left\{\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k)\left[\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\omega}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k)\right]\right\} = \\
&= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \nu(k) - \left[\mathbf{A}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\right]\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}(k)\left[\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\omega}(k)\right] = \\
&= \left[\mathbf{A}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\right]\mathbf{e}(k) - \mathbf{K}(k)\boldsymbol{\omega}(k) + \nu(k)
\end{aligned}$$

que puede ponerse como:

$$\mathbf{e}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}(k)\mathbf{e}(k) - \mathbf{K}(k)\boldsymbol{\omega}(k) + \nu(k)$$

donde la matriz $\hat{\mathbf{A}}(k)$ es determinística.

El objetivo aquí es minimizar la matriz de covarianza del error $\mathbf{P}$(k+1)=E{$\mathbf{e}$(k+1)$\mathbf{e}^T$(k+1)} y no el índice escalar $J = \frac{1}{2}\mathbf{e}^T(k+1)\mathbf{e}(k+1)$ aunque posteriormente veremos que ambos están relacionados mediante la elipse de incertidumbre.

La matriz de covarianza será:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(k+1) = \mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(k+1)\mathbf{e}^T(k+1)\right\} = \\
&= \mathrm{E}\left\{\left[\hat{\mathbf{A}}(k)\mathbf{e}(k) - \mathbf{K}(k)\boldsymbol{\omega}(k) + \boldsymbol{\nu}(k)\right]\left[\mathbf{e}^T(k)\hat{\mathbf{A}}^T(k) - \boldsymbol{\omega}^T(k)\mathbf{K}^T(k) + \boldsymbol{\nu}^T(k)\right]\right\} = \\
&= \hat{\mathbf{A}}(k)\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)\right\}\hat{\mathbf{A}}^T(k) + \mathrm{E}\left\{\hat{\mathbf{A}}(k)\mathbf{e}(k)\left[-\boldsymbol{\omega}^T(k)\mathbf{K}^T(k) + \boldsymbol{\nu}^T(k)\right]\right\} + \\
&+ \mathrm{E}\left\{\left[-\mathbf{K}(k)\boldsymbol{\omega}(k) + \boldsymbol{\nu}(k)\right]\mathbf{e}^T(k)\hat{\mathbf{A}}^T(k)\right\} + \mathbf{K}(k)\mathrm{E}\left\{\boldsymbol{\omega}(k)\boldsymbol{\omega}^T(k)\right\}\mathbf{K}^T(k) + \mathrm{E}\left\{\boldsymbol{\nu}(k)\boldsymbol{\nu}^T(k)\right\} = \\
&= \hat{\mathbf{A}}(k)\mathbf{P}(k)\hat{\mathbf{A}}^T(k) - \hat{\mathbf{A}}(k)\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(k)\boldsymbol{\omega}^T(k)\right\}\mathbf{K}^T(k) + \hat{\mathbf{A}}(k)\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(k)\boldsymbol{\nu}^T(k)\right\} - \\
&- \mathbf{K}(k)\mathrm{E}\left\{\boldsymbol{\omega}(k)\mathbf{e}^T(k)\right\}\hat{\mathbf{A}}^T(k) + \mathrm{E}\left\{\boldsymbol{\nu}(k)\mathbf{e}^T(k)\right\}\hat{\mathbf{A}}^T(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{K}^T(k) + \mathbf{Q}(k)
\end{aligned}
$$

y como:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(k)\omega^T(k)\right\} = \mathrm{E}\left\{\left[\hat{\mathbf{A}}(k-1)\mathbf{e}(k-1) - \mathbf{K}(k-1)\omega(k-1) + \nu(k-1)\right]\omega^T(k)\right\} = \\
&= \hat{\mathbf{A}}(k-1)\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(k-1)\omega^T(k)\right\} - \mathbf{K}(k-1)\mathrm{E}\left\{\omega(k-1)\omega^T(k)\right\} + \mathrm{E}\left\{\nu(k-1)\omega^T(k)\right\} = \\
&= \hat{\mathbf{A}}(k-1)\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(k-1)\omega^T(k)\right\}
\end{aligned}
$$

puede ponerse:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(k)\boldsymbol{\omega}^T(k)\right\} = \hat{\mathbf{A}}(k-1)\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(k-1)\boldsymbol{\omega}^T(k)\right\} = \hat{\mathbf{A}}(k-1)\hat{\mathbf{A}}(k-2)\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(k-2)\boldsymbol{\omega}^T(k)\right\} = \\
&= \hat{\mathbf{A}}(k-1)\hat{\mathbf{A}}(k-2)\cdots\hat{\mathbf{A}}(0)\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(0)\boldsymbol{\omega}^T(k)\right\} = \hat{\mathbf{A}}(k-1)\hat{\mathbf{A}}(k-2)\cdots\hat{\mathbf{A}}(0)\mathrm{E}\left\{\left[\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)\right]\boldsymbol{\omega}^T(k)\right\}
\end{aligned}
$$

Escogiendo para la estimación inicial, el valor medio, es decir:

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \overline{\mathbf{x}}(0)$$

resulta:

$$\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(k)\omega^T(k)\right\} = \hat{\mathbf{A}}(k-1)\hat{\mathbf{A}}(k-2)\cdots\hat{\mathbf{A}}(0)\mathrm{E}\left\{\left[\mathbf{x}(0) - \overline{\mathbf{x}}(0)\right]\omega^T(k)\right\} = \mathbf{0}$$

ya que en las condiciones iniciales de partida habíamos supuesto:

$$\mathrm{E}\left\{\left[\mathbf{x}(0) - \overline{\mathbf{x}}(0)\right]\omega^T(k)\right\} = \mathbf{0}$$

Lo mismo ocurre para los términos:

$$\mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(k)\nu^T(k)\right\} = \mathrm{E}\left\{\omega(k)\mathbf{e}^T(k)\right\} = \mathbf{0}$$

por lo que puede ponerse:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}(k)\mathbf{P}(k)\hat{\mathbf{A}}^T(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{K}^T(k) + \mathbf{Q}(k) = \\
&= \left[\mathbf{A}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\right]\mathbf{P}(k)\left[\mathbf{A}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\right]^T + \mathbf{Q}(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{K}^T(k)
\end{aligned}
$$

Encontrada esta expresión pueden seguirse las técnicas de minimización explicadas en el capítulo de Control óptimo.

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) - \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{K}^T(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) +$$
$$+\mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{K}^T(k) + \mathbf{Q}(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{K}^T(k)$$

Para minimizar **P**(k+1) su derivada con respecto a **K**(k) se iguala a cero:

$$\frac{d\mathbf{P}(k+1)}{d\mathbf{K}(k)} = 0 = -2\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k) + 2\mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k) + 2\mathbf{K}(k)\mathbf{R}(k)$$

habiéndose tenido en cuenta que **P**(k) y **R**(k) son simétricas.

Despejando:

$$\mathbf{K}(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right] = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)$$
$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}$$

Por medio del Hessiano puede comprobarse que este valor corresponde a un mínimo.

Sustituyendo este valor en **P**(k+1) se calcula el valor mínimo de la matriz de covarianza del error, que ha de ser positiva semidefinida:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) - \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) -$$
$$-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) +$$
$$+\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) +$$
$$+\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{R}(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)$$

Continuando con las operaciones:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) - 2\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) +$$
$$+\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) =$$
$$= \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) - 2\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) +$$
$$+\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) -$$
$$-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)$$

Es decir:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{Q}(k) + \left[\mathbf{A}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\right]\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)$$

que es una ecuación del tipo Riccati.

También se podrían haber seguido técnicas de poner **P**(k+1) en forma cuadrática para obtener los mismos resultados, como se indica a continuación:

$$\mathbf{P}(k+1)=[\mathbf{A}(k)-\mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)]\mathbf{P}(k)\left[\mathbf{A}^T(k)-\mathbf{C}^T(k)\mathbf{K}^T(k)\right]+\mathbf{Q}(k)+\mathbf{K}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{K}^T(k)=$$
$$=\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{K}^T(k)-\mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)+$$
$$+\mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{K}^T(k)+\mathbf{Q}(k)+\mathbf{K}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{K}^T(k)=$$
$$=\mathbf{Q}(k)+\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)+\mathbf{K}(k)\left[\mathbf{R}(k)+\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]\mathbf{K}^T(k)-$$
$$-\mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{K}^T(k)$$

y definiendo:

$$\mathbf{D}(k)=\left[\mathbf{R}(k)+\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]$$

teniendo en cuenta que las matrices **R**(k) y **P**(k) son simétricas, la matriz **D**(k) también lo es, ya que:

$$\mathbf{D}^T(k)=\left[\mathbf{R}(k)+\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^T=\mathbf{R}^T(k)+\mathbf{C}(k)\mathbf{P}^T(k)\mathbf{C}^T(k)=$$
$$=\mathbf{R}(k)+\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)=\mathbf{D}(k)$$

y sustituyendo:

$$\mathbf{P}(k+1)=\mathbf{Q}(k)+\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)+\mathbf{K}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{K}^T(k)-$$
$$-\mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{K}^T(k)$$

Esta expresión puede ponerse en forma cuadrática como:

$$\mathbf{P}(k+1)=\mathbf{Q}(k)+\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)+$$
$$+\left[\mathbf{K}(k)-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{D}^{-1}(k)\right]\mathbf{D}(k)\left[\mathbf{K}(k)-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{D}^{-1}(k)\right]^T-$$
$$-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{D}^{-1}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)$$

lo que se comprueba desarrollando la expresión anterior:

$$\mathbf{P}(k+1)=\mathbf{Q}(k)+\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)+\left[\mathbf{K}(k)\mathbf{D}(k)-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]\left[\mathbf{K}^T(k)-\mathbf{D}^{-1}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)\right]-$$
$$-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{D}^{-1}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)=\mathbf{Q}(k)+\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)+\mathbf{K}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{K}^T(k)-$$
$$-\mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{K}^T(k)+\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{D}^{-1}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)-$$
$$-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{D}^{-1}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)=\mathbf{Q}(k)+\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)+\mathbf{K}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{K}^T(k)-$$
$$-\mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{K}^T(k)$$

El valor **K**(k) que hace mínima la forma cuadrática $\alpha^T\mathbf{P}(k+1)\alpha$ cumplirá:

$$\mathbf{K}(k)-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{D}^{-1}(k)=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}(k)=\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k)+\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}$$

Es importante notar que como:

$$\mathbf{e}(0)=\mathbf{x}(0)-\hat{\mathbf{x}}(0)=\mathbf{x}(0)-\bar{\mathbf{x}}(0)$$

la matriz de covarianza del error en el instante inicial, coincide con la matriz de covarianza del vector de estado en el instante inicial, que habíamos denominado $\mathbf{P}_0$ ya que:

$$\mathbf{P}(0) = \mathrm{E}\left\{\mathbf{e}(0)\mathbf{e}^{\mathrm{T}}(0)\right\} = \mathrm{E}\left\{\left[\mathbf{x}(0) - \overline{\mathbf{x}}(0)\right]\left[\mathbf{x}(0) - \overline{\mathbf{x}}(0)\right]^{\mathrm{T}}\right\} = \mathbf{P}_0$$

Resumiendo, el procedimiento para implementar este filtro se indica en la figura:

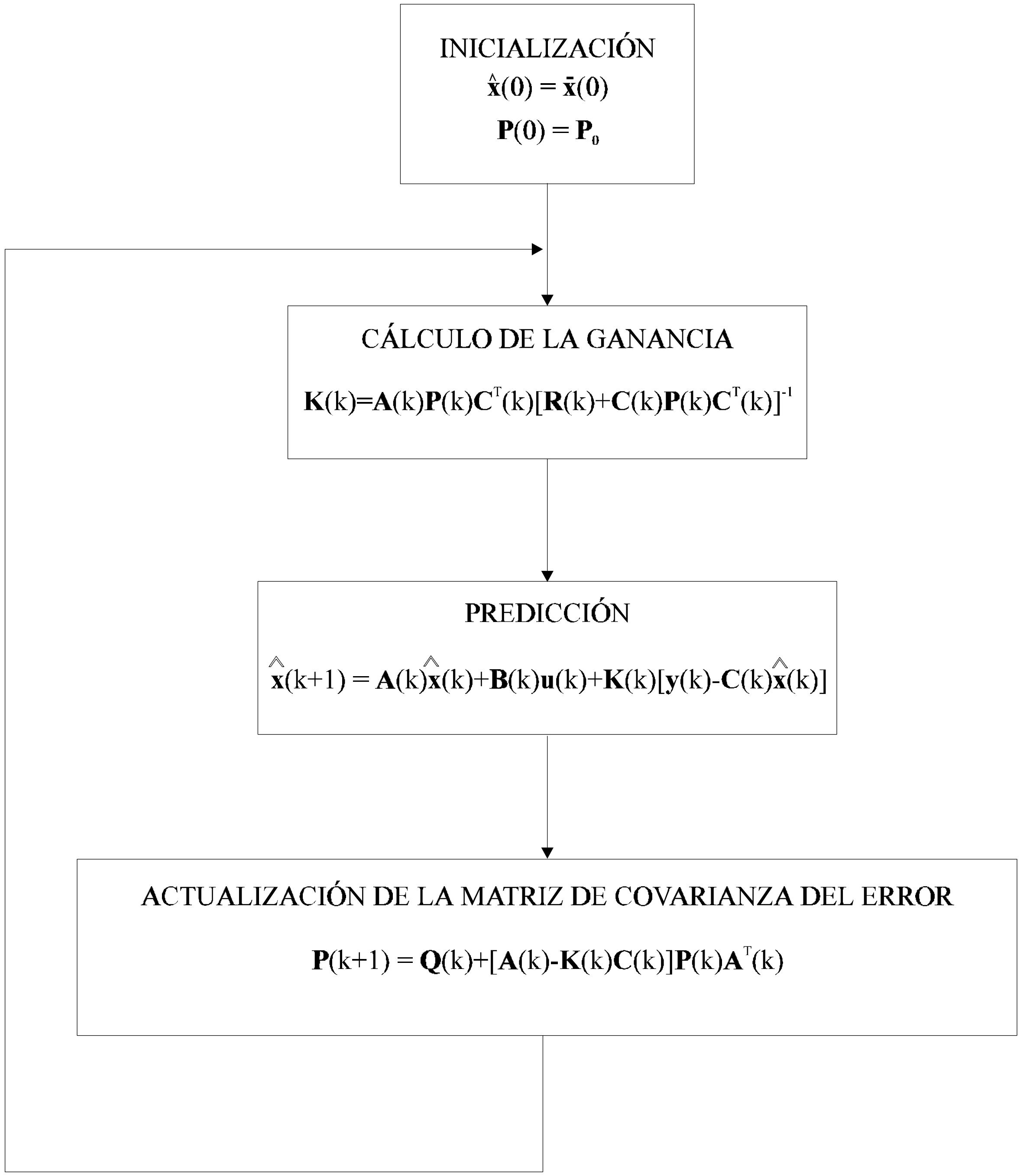


Fig. 17.2.- Implementación del filtro de Kalman con predicción

17.3.- FILTRO DE KALMAN CON FILTRADO

Se siguen asumiendo las condiciones iniciales del planteamiento del problema, que en este caso trata de determinar la estimación $\hat{\mathbf{x}}(k)$, conociendo las medidas con ruido **y**(0), **y**(1), **y**(2),..., **y**(k), para que la matriz **P**(k) de covarianza del error en el instante k, sea mínima. O bien, determinar la estimación $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$, conociendo las medidas **y**(0), **y**(1), **y**(2),..., **y**(k), **y**(k+1) para que la matriz **P**(k+1) de covarianza del error en el instante k+1, sea mínima.

Partiendo de la base de que el filtro de Kalman es un observador, en este caso con filtrado, la estimación óptima del vector de estado, que minimiza **P**(k+1), está dada por las ecuaciones:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{z}}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)\left[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{z}}(k+1)\right]$$

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{z}}(k)$$

que corresponden a las ecuaciones de un observador del vector de estado con filtrado, es decir se estima el vector de estado en el instante k+1, utilizando la medida que se ha efectuado en el propio instante k+1. Esto se realiza en dos etapas. En la primera de ellas se estima $\hat{\mathbf{z}}(k+1)$, que es una aproximación de **x**(k+1), basándose en $\hat{\mathbf{x}}(k)$ y **u**(k). En la segunda etapa se utiliza la medida **y**(k+1) para mejorar $\hat{\mathbf{z}}(k+1)$ y obtener así la estimación final $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$.

El diagrama de bloques correspondiente sería:

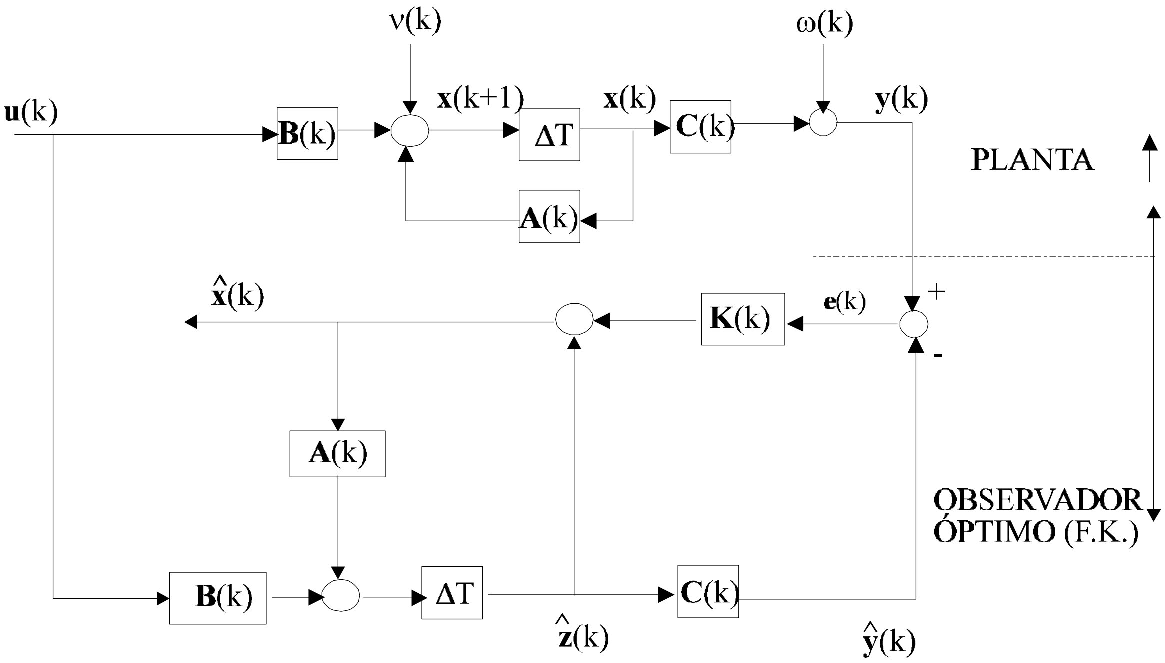


Fig. 17.3.- Filtro de Kalman con filtrado

En el instante inicial:

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{z}}(0) + \mathbf{K}(0)\big[\mathbf{y}(0) - \mathbf{C}(0)\hat{\mathbf{z}}(0)\big]$$

y si escogemos:

$$\hat{\mathbf{z}}(0) = \overline{\mathbf{x}}(0)$$

que es un valor determinístico, entonces:

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \overline{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{K}(0)\big[\mathbf{y}(0) - \mathbf{C}(0)\overline{\mathbf{x}}(0)\big]$$

El vector de error sería:

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{z}}(k+1) - \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{z}}(k+1)]$$

y sustituyendo **y**(k+1) por su valor y reagrupando:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(k+1) &= \big[\mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1) - \mathbf{I}\big]\hat{\mathbf{z}}(k+1) - \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{C}(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \boldsymbol{\omega}(k+1)] + \mathbf{x}(k+1) = \\ &= \big[\mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1) - \mathbf{I}\big]\big[\hat{\mathbf{z}}(k+1) - \mathbf{x}(k+1)\big] - \mathbf{K}(k+1)\boldsymbol{\omega}(k+1)\end{aligned} \qquad (1)$$

Esta expresión es útil para calcular el error en el instante inicial, como se indicará posteriormente. Sustituyendo las ecuaciones correspondientes puede escribirse:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(k+1) &= \big[\mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1) - \mathbf{I}\big]\big[\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) - \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) - \boldsymbol{\nu}(k)\big] - \\ &- \mathbf{K}(k+1)\boldsymbol{\omega}(k+1) = \big[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\big]\mathbf{A}(k)\mathbf{e}(k) + \big[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\big]\boldsymbol{\nu}(k) - \\ &- \mathbf{K}(k+1)\boldsymbol{\omega}(k+1)\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\nu}$(k) y $\boldsymbol{\omega}$(k) son ruidos blancos, una combinación lineal de ellos también lo es y se podría poner:

$$\mathbf{e}(k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)]\mathbf{A}(k)\mathbf{e}(k) + \boldsymbol{\xi}(k)$$

siendo:

$$\boldsymbol{\xi}(k) = \big[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\big]\boldsymbol{\nu}(k) - \mathbf{K}(k+1)\boldsymbol{\omega}(k+1)$$

un ruido blanco de media nula y estadísticamente independiente de **e**(k), por lo que:

$$E\{\mathbf{e}(k+1)\} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)]\mathbf{A}(k)E\{\mathbf{e}(k)\}$$

El error en el instante inicial, teniendo en cuenta la ecuación (1) sería:

$$\mathbf{e}(0) = \big[\mathbf{K}(0)\mathbf{C}(0) - \mathbf{I}\big]\big[\hat{\mathbf{z}}(0) - \mathbf{x}(0)\big] - \mathbf{K}(0)\boldsymbol{\omega}(0)$$

y la esperanza matemática sería:

$$E\{\mathbf{e}(0)\} = \overline{\mathbf{e}}(0) = \big[\mathbf{K}(0)\mathbf{C}(0) - \mathbf{I}\big]\big[\overline{\mathbf{x}}(0) - E\{\mathbf{x}(0)\}\big] = \mathbf{0}$$

Sustituyendo en la expresión:

$$E\{\mathbf{e}(k+1)\} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)]\mathbf{A}(k)E\{\mathbf{e}(k)\}$$

se va obteniendo:

$$\bar{\mathbf{e}}(1) = \bar{\mathbf{e}}(2) = \cdots = \bar{\mathbf{e}}(k) = \mathbf{0}$$

Se desea minimizar $\mathbf{P}(k+1) = E\{\mathbf{e}(k+1)\mathbf{e}^T(k+1)\}$, por lo que teniendo en cuenta el valor de $\mathbf{e}(k+1)$ resulta:

$$\mathbf{P}(k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)]\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)]^T + E\left\{\xi(k)\xi^T(k)\right\}$$

ya que $\xi(k)$ y $\mathbf{e}(k)$ son estadísticamente independientes y por lo tanto:

$$E[\mathbf{e}(k)\xi^T(k)] = E[\xi(k)\mathbf{e}^T(k)] = \mathbf{0}$$

y además:

$$E[\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)] = \mathbf{P}(k)$$

Por otra parte:

$$E\left\{\xi(k)\xi^T(k)\right\} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)]\mathbf{Q}(k)[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)]^T + \mathbf{K}(k+1)\mathbf{R}(k+1)\mathbf{K}^T(k+1)$$

por lo que sustituyendo en la expresión de $\mathbf{P}(k+1)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)]\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)] + \\
&+[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)]\mathbf{Q}(k)[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)] + \mathbf{K}(k+1)\mathbf{R}(k+1)\mathbf{K}^T(k+1) = \\
&= [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)]\left[\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q}(k)\right][\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)] + \mathbf{K}(k+1)\mathbf{R}(k+1)\mathbf{K}^T(k+1)
\end{aligned}$$

Llamando:

$$\mathbf{N}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q}(k)$$

se llega a:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)]\mathbf{N}(k+1)[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)] + \mathbf{K}(k+1)\mathbf{R}(k+1)\mathbf{K}^T(k+1) = \\
&= [\mathbf{N}(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)][\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)] + \mathbf{K}(k+1)\mathbf{R}(k+1)\mathbf{K}^T(k+1) = \\
&= \mathbf{N}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)\left[\mathbf{R}(k+1) + \mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\right]\mathbf{K}^T(k+1) - \\
&-\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{K}^T(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)
\end{aligned}$$

Encontrada la ecuación de la matriz de covarianza se van a seguir dos técnicas para minimizarla, las de control óptimo y la de ponerla en forma cuadrática.

a) Por el criterio de la derivada.

En la expresión de la matriz de covarianza del error en el instante k+1 hay que tener en cuenta que $\mathbf{R}+\mathbf{CNC}^T$ es una matriz simétrica.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{N}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)\left[\mathbf{R}(k+1) + \mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\right]\mathbf{K}^T(k+1) - \\
&-\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{K}^T(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)
\end{aligned}$$

derivando:

$$\frac{d\mathbf{P}(k+1)}{d\mathbf{K}(k+1)} = 2\mathbf{K}(k+1)\left[\mathbf{R}(k+1) + \mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\right] - 2\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1) = 0$$

y despejando el valor de K(k+1) que hace mínima la forma cuadrática $\alpha^T\mathbf{P}(k+1)\alpha$ es:

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\left[\mathbf{R}(k+1) + \mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\right]^{-1}$$

con lo que la matriz de covarianza $\mathbf{P}(k+1)$ mínima resulta:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{N}(k+1) - \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\left[\mathbf{R}(k+1) + \mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\right]^{-1}\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1) =$$
$$= \mathbf{N}(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\right]\mathbf{N}(k+1)$$

b) Poniendo K(k+1) en forma cuadrática

Se define:

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{R}(k+1) + \mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)$$

puede ponerse:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{N}(k+1) + \left[\mathbf{K}(k+1) - \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{D}^{-1}(k+1)\right]\mathbf{D}(k+1)\mathbf{K}^T(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1) =$$
$$= \mathbf{N}(k+1) + \left[\mathbf{K}(k+1) - \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{D}^{-1}(k+1)\right]\mathbf{D}(k+1)\left[\mathbf{K}(k+1) - \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{D}^{-1}(k+1)\right]^T -$$
$$-\mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1) + \left[\mathbf{K}(k+1) - \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{D}^{-1}(k+1)\right]\mathbf{D}(k+1)\left[\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{D}^{-1}(k+1)\right]^T$$

Las matrices $\mathbf{D}(k+1)$ y $\mathbf{N}(k+1)$ son simétricas ya que $\mathbf{P}(k)$, $\mathbf{Q}(k)$ y $\mathbf{R}(k)$ lo son y por tanto:

$$\mathbf{N}^T(k+1) = \left[\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q}(k)\right]^T = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}^T(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q}^T(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q}(k) = \mathbf{N}(k+1)$$

y análogamente $\mathbf{D}(k+1)$.

Sabiendo ésto:

$$\left[\mathbf{K}(k+1) - \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{D}^{-1}(k+1)\right]\mathbf{D}(k+1)\left[\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{D}^{-1}(k+1)\right]^T =$$
$$= \left[\mathbf{K}(k+1)\mathbf{D}(k+1) - \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\right]\left[\mathbf{D}^{-1}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\right] =$$
$$= \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1) - \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{D}^{-1}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)$$

y sustituyendo:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{N}(k+1) + \left[\mathbf{K}(k+1) - \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{D}^{-1}(k+1)\right]\mathbf{D}(k+1)\left[\mathbf{K}(k+1) - \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{D}^{-1}(k+1)\right]^T -$$
$$-\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\mathbf{D}^{-1}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)$$

Restaurando la expresión de $\mathbf{D}(k+1)$:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{N}(k+1) +$$

$$+\left\{\mathbf{K}(k+1) - \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\left[\mathbf{R}(k+1)+\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\right]^{-1}\right\}\left[\mathbf{R}(k+1)+\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\right.$$

$$\cdot\left\{\mathbf{K}(k+1) - \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\left[\mathbf{R}(k+1)+\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\right]^{-1}\right\}^T -$$

$$-\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\left[\mathbf{R}(k+1)+\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\right]^{-1}\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)$$

Resumiendo puede decirse que la estimación del vector de estado en el momento actual viene dada por las ecuaciones:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{z}}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)\left[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{z}}(k+1)\right]$$

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$$

donde:

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\left[\mathbf{R}(k+1)+\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)\right]^{-1}$$

$$\mathbf{P}(k+1) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\right]\mathbf{N}(k+1)$$

y:

$$\mathbf{N}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q}(k)$$

El proceso de implementación se remonta a iniciar en t=0 los valores del filtro:

$$\hat{\mathbf{z}}(0) = \bar{\mathbf{x}}(0)$$
$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{K}(0)\left[\mathbf{y}(0) - \mathbf{C}(0)\bar{\mathbf{x}}(0)\right]$$
$$\mathbf{K}(0) = \mathbf{N}(0)\mathbf{C}^T(0)\left[\mathbf{R}(0)+\mathbf{C}(0)\mathbf{N}(0)\mathbf{C}^T(0)\right]^{-1}$$
$$\mathbf{P}(0) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}(0)\mathbf{C}(0)\right]\mathbf{N}(0)$$

Para hallar el valor de **N**(0) hay que tener en cuenta que sustituyendo en **N**(k+1) la expresión de **P**(k) resulta:

$$\mathbf{N}(k+1) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}(k)\mathbf{N}(k)\mathbf{A}^T(k) - \mathbf{A}(k)\mathbf{N}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k)+\mathbf{C}(k)\mathbf{N}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{N}(k)\mathbf{A}^T(k)$$

que tiene la misma forma que la ecuación que se obtenía en el filtro de Kalman con predicción, que era:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) - \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k)+\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)$$

Por analogía:

$$\mathbf{N}(0) = \mathbf{P}_0$$

La implementación se realizaría de la siguiente forma:

INICIALIZACIÓN

$$\hat{\mathbf{z}}(0)=\bar{\mathbf{x}}(0)$$

$$\mathbf{N}(0) = \mathbf{P}_0$$

$$\mathbf{K}(0)=\mathbf{N}(0)\mathbf{C}^T(0)[\mathbf{R}(0)+\mathbf{C}(0)\mathbf{N}(0)\mathbf{C}^T(0)]^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(0)=\bar{\mathbf{x}}(0)+\mathbf{K}(0)[\mathbf{y}(0)-\mathbf{C}(0)\bar{\mathbf{x}}(0)]$$

$$\mathbf{P}(0)=[\mathbf{I}-\mathbf{K}(0)\mathbf{C}(0)]\mathbf{N}(0)$$

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1)=\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k)+\mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{N}(k+1)=\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)+\mathbf{Q}(k)$$

CÁLCULO DE LA GANANCIA

$$\mathbf{K}(k+1)=\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)[\mathbf{R}(k+1)+\mathbf{C}(k+1)\mathbf{N}(k+1)\mathbf{C}^T(k+1)]^{-1}$$

$$\mathbf{P}(k+1)=[\mathbf{I}-\mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)]\mathbf{N}(k+1)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1)=\hat{\mathbf{z}}(k+1)+\mathbf{K}(k+1)[\mathbf{y}(k+1)-\mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{z}}(k+1)]$$

Fig. 17. 4.- Implementación del filtro de Kalman con filtrado

Los dos tipos de filtro de Kalman que se han presentado, pueden aplicarse también a sistemas que no tengan ruidos o perturbaciones pero se carezca de sensores adecuados.

17.4.- FILTRO DE KALMAN EN RÉGIMEN PERMANENTE

En general las ecuaciones de un sistema con ruido eran:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\nu}(k)\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\omega}(k)\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Riccati que dan los valores de **P**(k+1) o **N**(k+1) en los casos de filtros con predicción o filtrado respectivamente, son válidas para cualquier intervalo de tiempo finito. Si el tiempo tiende a infinito, las matrices anteriores pueden permanecer finitas o bien tender a infinito. En este último caso la incertidumbre del error sería infinita y la estimación no valdría para nada.

En el caso de que todas las matrices del sistema sean constantes, es decir:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\nu}(k)\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)\end{aligned}$$

en donde se pone de manifiesto que las matrices **A**, **B** y **C** son constantes y además los ruidos blancos de medida y del sistema sean estacionarios, es decir con matrices de covarianza constantes:

$$\mathbf{R}(k) = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{Q}(k) = \mathbf{Q}$$

entonces puede existir una solución constante en régimen permanente. La ecuación de Riccati es análoga a la del caso de control óptimo, por lo que las consideraciones que allí se hicieron son válidas en este caso.

a) Régimen permanente del filtro con predicción

Las ecuaciones que daban la solución del filtro con predicción en régimen general son:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}(k)\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k)\right]$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) -\\ &-\mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\left[\mathbf{R}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T(k)\right]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k) =\\ &= \mathbf{Q}(k) + \left[\mathbf{A}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\right]\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T(k)\end{aligned}$$

En el caso de encontrarnos en el régimen permanente, las ecuaciones serían:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}(k)\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)\right]$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\left[\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\right]^{-1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1) &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\left[\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\right]^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T = \\ &= \mathbf{Q} + \left[\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\right]\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^T\end{aligned}$$

La matriz de covarianza, que indica la incertidumbre del error, podría escribirse:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1) &= \mathbf{Q} + \left[\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\right]\mathbf{P}(k)\left[\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\right]^T + \left[\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\right]\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\mathbf{K}^T(k) = \\ &= \mathbf{Q} + \left[\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\right]\mathbf{P}(k)\left[\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\right]^T + \mathbf{A}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\mathbf{K}^T(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\mathbf{K}^T(k) = \\ &= \mathbf{Q} + \left[\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\right]\mathbf{P}(k)\left[\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\right]^T + \mathbf{K}(k)\left[\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\right]\mathbf{K}^T(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T\mathbf{K}^T(k) = \\ &= \mathbf{Q} + \left[\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\right]\mathbf{P}(k)\left[\mathbf{A} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}\right]^T + \mathbf{K}(k)\mathbf{R}\mathbf{K}^T(k)\end{aligned}$$

Se puede demostrar que cuando k tiende a infinito:

a) Si el sistema es observable entonces la matriz **P**(k+1) tiende a una matriz semidefinida positiva constante $\mathbf{P}_e$.

b) Si el sistema es controlable la matriz **P**(k+1) converge hacia una única matriz positiva definida $\mathbf{P}_e$. En este caso la matriz **K**(k) también tiende a una matriz constante $\mathbf{K}_e$ y sus valores serían:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{A}\mathbf{P}_e\mathbf{C}^T\left[\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}_e\mathbf{C}^T\right]^{-1}$$

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q} + \mathbf{A}\mathbf{P}_e\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{P}_e\mathbf{C}^T\left[\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}_e\mathbf{C}^T\right]^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}_e\mathbf{A}^T$$

o bien:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q} + \left[\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\right]\mathbf{P}_e\left[\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}\right]^T + \mathbf{K}_e\mathbf{R}\mathbf{K}_e^T$$

Esta última ecuación es una ecuación de Riccati. Como $\mathbf{Q} + \mathbf{K}_e\mathbf{R}\mathbf{K}_e^T$ no tiene por que ser necesariamente positiva definida, no es posible decir que la matriz $\mathbf{A}$-$\mathbf{K}_e\mathbf{C}$ sea una matriz estable, es decir que tenga sus autovalores en el interior del círculo unidad, pero si el sistema es controlable y observable, entonces sí que es una matriz estable.

Según todo lo anterior, las ecuaciones que definen el régimen permanente del filtro de Kalman con predicción son:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}(k)\left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)\right]$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{A}\mathbf{P}_e\mathbf{C}^T\left[\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}_e\mathbf{C}^T\right]^{-1}$$

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q} + \mathbf{A}\mathbf{P}_e\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{P}_e\mathbf{C}^T\left[\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}_e\mathbf{C}^T\right]^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}_e\mathbf{A}^T$$

b) Régimen permanente del filtro de Kalman con filtrado

Las ecuaciones de este filtro pueden ser obtenidas de la misma forma que las del apartado anterior. Las ecuaciones en régimen permanente, haciendo las mismas consideraciones que en el caso del filtro con predicción, están dadas por:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{z}}(k+1) + \mathbf{K}_e\left[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}(k+1)\right]$$

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

donde:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{N}_e\mathbf{C}^T\left[\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{N}_e\mathbf{C}^T\right]^{-1}$$

y:

$$\mathbf{N}_e = \mathbf{Q} + \mathbf{A}\mathbf{N}_e\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{N}_e\mathbf{C}^T\left[\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{N}_e\mathbf{C}^T\right]^{-1}\mathbf{C}\mathbf{N}_e\mathbf{A}^T$$

que tiene la misma forma que la ecuación de $\mathbf{P}_e$ en el caso anterior.

Con el estimador óptimo del filtro de Kalman, la estrategia de control óptimo puede ser dividida en dos etapas:

1.- Se estima el vector de estado basándose en secuencias de medidas de las salidas observables. Para este fin pueden utilizarse observadores o si se desea una estimación óptima alguno de los filtros de Kalman.

2.- Se determina la ley óptima de control y se realimenta el vector de estado estimado en la etapa anterior.

Es importante notar que el filtro de Kalman puede ser utilizado, incluso en el caso de que no existan ruidos ni perturbaciones en el sistema.

17.5.- RUIDOS CON MATRICES DE COVARIANZA SINGULARES

En muchas aplicaciones, algunos sensores pueden ser de tan alta calidad que el ruido de observación sea extremadamente pequeño. Si junto a estos sensores existen otros de calidad muy inferior, la matriz de covarianza del ruido de observación puede tener la forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-12} \end{bmatrix}$$

lo que daría problemas a la hora de computar los algoritmos numéricos del filtro de Kalman.

En estos casos es preferible tomar como cero los términos tan pequeños y desarrollar técnicas con matrices de covarianza del ruido de observación singulares.

Los métodos desarrollados están basados en transformar el vector de observación de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(k) \\ \hdashline \mathbf{y}_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \hdashline \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hdashline \boldsymbol{\omega}_2(k) \end{bmatrix}$$

en donde se han agrupado en $\mathbf{y}_1(k)$ las medidas que no tienen ruido de observación, y en $\mathbf{y}_2(k)$ las medidas con ruido de observación, que tendrán una matriz de covarianza $\mathbf{R}_2(k)$ no singular. La dimensión de $\mathbf{y}_2(k)$ será el rango de la matriz de covarianza inicial $\mathbf{R}(k)$. Esta partición dará lugar a un filtro de orden r-l siendo l el orden del vector $\mathbf{y}_1(k)$ y r el orden del vector de salida $\mathbf{y}(k)$.

Un caso muy especial es aquel en el que la matriz de covarianza del ruido de observación es cero, es decir no hay ruido en la observación y por tanto $\mathbf{R}(k) = \mathbf{0}$. En este caso la ecuación de observación sería:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

y puede demostrarse que si el subestado $\mathbf{C}\mathbf{x}(k)$ de $\mathbf{x}(k)$ puede ser observado sin ruido, entonces, como es obvio, la estimación óptima del subestado es la observación misma, es decir:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

Si $\mathbf{C}$ es una matriz cuadrada no singular:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}(k)$$

donde queda de manifiesto que la estimación óptima del vector de estado se deduce de la propia medida.

Si embargo, el caso más importante es cuando $\mathbf{C}$ no es cuadrada, por lo que el número de salidas observadas r es menor que el número de variables de estado n. La última ecuación, aplicada sólamente a las r componentes observadas, nos daría la r componentes correspondientes del vector de estado estimado. Las restantes n-r componentes se deducirían de un filtro de orden reducido.

Las ecuaciones del sistema serían:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\nu}(k) \\ &\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

El vector de observación en el instante k+1 sería:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{C}\boldsymbol{\nu}(k)$$

y considerando el nuevo vector de salida:

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{CBu}(k) = \mathbf{CAx}(k) + \mathbf{C}\nu(k)$$

podría aplicarse la teoría del filtro de Kalman a las ecuaciones:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) + \nu(k)$$
$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{CAx}(k) + \mathbf{C}\nu(k)$$

ya que el ruido de observación $\mathbf{C}\nu(k)$ es blanco. El gran inconveniente es que ahora el ruido del sistema y el ruido de medida están correlados.

El valor de las matrices de covarianza sería:

$$E\left\{\nu(k)\nu^T(k)\right\} = \mathbf{Q}(k)$$
$$E\left\{\nu(k)\boldsymbol{\omega}^T(k)\right\} = \mathbf{Q}(k)\mathbf{C}^T$$
$$E\left\{\omega(k)\boldsymbol{\omega}^T(j)\right\} = \mathbf{CQ}(k)\mathbf{C}^T$$

La teoría del filtro de Kalman habría que extenderla para el caso de que los ruidos de medida y del sistema fuesen correlados. Existen numerosas publicaciones donde se trata esta problemática, que no va a ser tratada en estas notas.

17.6.- PROCESOS CON RUIDOS COLOREADOS

Cualquier ruido coloreado (no blanco) puede ser modelado como la respuesta de un sistema lineal a un ruido blanco. Por lo tanto se puede representar el ruido coloreado como un subsistema excitado por un ruido blanco. La representación de este subsistema podrá hacerse en variables de estado, e incluirlas en el vector de estado del sistema con la consiguiente ampliación del orden del sistema.

Supongamos que la ecuación de observación se ve afectada por un ruido de medida $\mu(k)$ no blanco, representado por sus ecuaciones en variables de estado. Las ecuaciones serían:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) + \nu(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k) + \mu(k)$$
$$\mu(k+1) = \mathbf{F}\mu(k) + \omega(k)$$

donde $\omega(k)$ es un ruido blanco de matriz de covarianza $\mathbf{R}(k)$.

Combinando la ecuación del ruido con la ecuación del sistema se forma el metasistema:

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \hdashline \mu(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hdashline \mu(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \hdashline \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) + \begin{bmatrix} \nu(k) \\ \hdashline \omega(k) \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \vdots & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hdashline \mu(k) \end{bmatrix}
$$

o bien:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(k+1) &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(k) + \nu_1(k) \\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1(k)
\end{aligned}
$$

ecuaciones a las que se puede aplicar la solución del filtro de Kalman, ya que el ruido ν_1 (k) es blanco.

Si el ruido coloreado fuese el ruido del sistema, las ecuaciones serían:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mu(k) \\
\mu(k+1) &= \mathbf{F}\mu(k) + \nu(k) \\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \omega(k)
\end{aligned}
$$

y combinando la ecuación del ruido con la ecuación del sistema se forma el metasistema:

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \hdashline \mu(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{I} \\ \hdashline \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hdashline \mu(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \hdashline \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hdashline \nu(k) \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hdashline \mu(k) \end{bmatrix} + \omega(k)
$$

o bien:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(k+1) &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(k) + \nu_1(k) \\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1(k) + \omega(k)
\end{aligned}
$$

Como los ruidos ν_1 (k) y ω(k) son blancos ya puede ser aplicada la solución del filtro de Kalman.

17.7.- ELIPSE DE DISTRIBUCIÓN DEL ERROR. ASPECTOS PRÁCTICOS DEL FILTRO DE KALMAN.

La divergencia del filtro de Kalman se detecta por el crecimiento ilimitado de la matriz **P**(k), que expresa el valor de la incertidumbre del error. Un error con incertidumbre muy elevada puede ser muy alto, y la diferencia entre el valor real y el estimado sería inaceptable.

La matriz de covarianza del error de estimación está definida por:

$$
\mathbf{P}(k) = E\left\{ [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]^T \right\}
$$

El lugar geométrico de los puntos, en los que la incertidumbre del error coincide con el error cuadrático (el doble del índice de comportamiento J) sería:

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]^T$$

Transformando esta expresión adecuadamente, resulta:

$$\mathbf{P}(k)\left\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]^T\right\}^{-1} = [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]$$

$$\left\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]^T\right\}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}(k)[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]$$

o bien:

$$[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]^T \mathbf{P}^{-1}(k)[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] = 1$$

que es la expresión general de una superficie cuádrica. El estudio de los coeficientes de $\mathbf{P}^{-1}(k)$ conduce, en este caso, a un elipsoide real con centro en $\hat{\mathbf{x}}(k)$.

En el caso de un vector de estado de tres dimensiones, el elipsoide sería:

$$\begin{bmatrix} x_1(k) - \hat{x}_1(k) & x_2(k) - \hat{x}_2(k) & x_3(k) - \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2(k) & \sigma_{12}(k) & \sigma_{13}(k) \\ \sigma_{12}(k) & \sigma_2^2(k) & \sigma_{23}(k) \\ \sigma_{13}(k) & \sigma_{23}(k) & \sigma_3^2(k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(k) - \hat{x}_1(k) \\ x_2(k) - \hat{x}_2(k) \\ x_3(k) - \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} = 1$$

y su representación se indica en la figura 15.5:

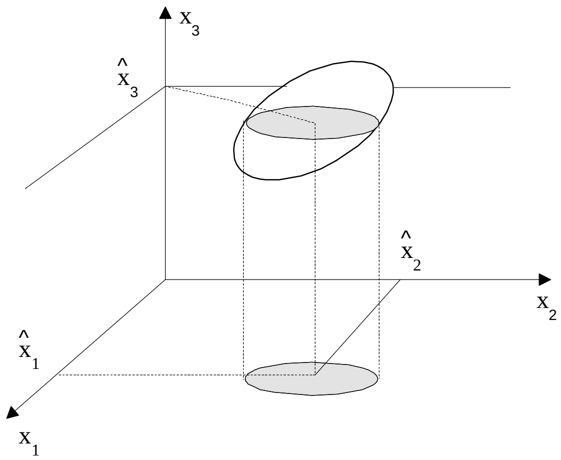


Fig.17.5 Elipsoide de incertidumbre

El corte del elipsoide con el plano $x_3(k) = \hat{x}_3(k)$ es una elipse cuya proyección sobre el plano x_1 - x_2 tiene por ecuación:

$$\begin{bmatrix} x_1(k)-\hat{x}_1(k) & x_2(k)-\hat{x}_2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2(k) & \sigma_{12}(k) \\ \sigma_{12}(k) & \sigma_2^2(k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(k)-\hat{x}_1(k) \\ x_2(k)-\hat{x}_2(k) \end{bmatrix} = 1$$

como puede comprobarse fácilmente haciendo $x_3(k)-\hat{x}_3(k)=0$ en la expresión del elipsoide.

Esta última elipse, centrada en $\left[\hat{x}_1(k), \hat{x}_2(k)\right]$ representa la elipse de incertidumbre de la estimación. Se ha demostrado que la probabilidad de que el vector de estado real se encuentre en el interior de esta elipse es aproximadamente del 50%.

El hecho de que $\sigma_{12} \neq 0$ indica que existe una dependencia entre las coordenadas x_1 y x_2, por lo que cualquier mejora en la estimación de una de ellas, mejorará también la estimación de la otra.

Para representar la forma reducida (centrada en el origen y con los ejes coincidentes con los ejes de coordenadas) de la elipse que genera la matriz **P**(k) se partiría de la ecuación general de la cónica:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix}^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \quad 0 \end{matrix} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{bmatrix} = 0$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & t \end{bmatrix} \mathbf{D} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{bmatrix} = 0$$

Como el determinante de la matriz **D** es distinto de cero, la cónica no es degenerada. Además el adjunto D_{33} de la matriz **D** es positivo por lo que la curva es una elipse, y como el producto del elemento d_{11} por el valor del determinante de la matriz **D** es negativo la elipse es real.

La ecuación reducida de la cónica es:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \frac{D_{33}}{|\mathbf{D}|} = 0$$

siendo λ_1 y λ_2 las raices de la ecuación característica:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}| = 0$$

Operando para poner la ecuación de la forma:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

el valor de los semiejes resulta:

$$a = \sqrt{-\frac{D_{33}}{\lambda_1 |\mathbf{D}|}}$$

$$b = \sqrt{-\frac{D_{33}}{\lambda_2 |\mathbf{D}|}}$$

Cuanto menores sean los ejes de la elipse, mayor será la seguridad en la estimación. Cuando el filtro diverge el tamaño de la elipse de incertidumbre crece con el tiempo.

Tres posibles fuentes de divergencia del filtro de Kalman serían:

a) Que el sistema no sea observable

b) Errores de modelado

c) Errores numéricos debidos al formato del procesador digital

Si no se cumple la condición de observabilidad es que un subconjunto de estados del sistema no es recuperable u observable por el filtro de Kalman, lo que redunda en un error creciente en la estimación de dicho subconjunto de variables de estado; es decir los correspondientes elementos de la matriz de covarianza **P**(k) crecen indefinidamente, llegando a desestabilizar el filtro. La única forma de evitar esta divergencia es ampliando el número de sensores, hasta conseguir que la nueva matriz de medida u observación **C** haga al sistema observable.

Cuando no se modela correctamente la dinámica del sistema y el ruido, la matriz de covarianza **Q**(k) de las perturbaciones del sistema, o la matriz de covarianza **R**(k) del ruido de medida, aparecerán inevitablemente errores en la estimación del filtro. Sin duda, los errores más graves son debidos a la dinámica del sistema, ya sea porque el conjunto de ecuaciones no refleja el comportamiento real del sistema o porque los coeficientes del modelo, es decir la matriz **A**, no sean los correctos. Podría realizarse un estudio del filtro de Kalman en el dominio de la frecuencia, y se vería que la respuesta en frecuencia del filtro de Kalman depende intimamente del modelo de la planta y del modelo del ruido y lo hace de una forma compleja. A pesar de ello, fácilmente se observaría que el filtro de Kalman tiene ceros de transmisión, en los polos del modelo de ruido. Es decir, elimina el ruido de forma óptima.

Los errores numéricos provienen de la implementación del filtro de Kalman en un procesador digital. Son especialmente peligrosos en una aplicación on-line, dado el carácter recursivo del algoritmo y al formato de los datos que no pueden ser de alta precisión para economizar tiempo de cómputo. La principal fuente de errores proviene de la matriz de covarianza **P**(k), cuando por motivos del formato y de la aritmética del computador pierde la naturaleza de matriz definida positiva. Para evitar los posibles errores numéricos interesa:

- Emplear el formato de datos más potente. No utilizar nunca formatos de coma fija.

- Tener cuidado con la propagación de la matriz **P**(k), que puede llegar a rozar la condición de semidifinida positiva al hacerse algunos elementos de la diagonal principal muy próximos a cero. En estos casos conviene sumar unos términos ficticios a la diagonal pricipal, o al menos a los términos que tienden a cero.

- Mantener siempre la propiedad de simetría de la matriz **P**(k). Lo más aconsejable es calcular únicamente los términos de la parte triangular superior y rellenar el triángulo simétrico sin calcularlo.

17.8.- CONTROL ESTOCÁSTICO: TEOREMA DE SEPARACIÓN

El teorema de separación permite unir la teoría de control determinístico con la problemática de la estimación de sistemas estocásticos.

Las ecuaciones dinámicas y de medida de un sistema son:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\nu}(k)\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\omega}(k)\end{aligned}$$

El índice de comportamiento cuadrático, para control óptimo, se define como:

$$J = E\left[\sum_{k=0}^{N}\mathbf{x}^T(k)\mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \sum_{k=0}^{N}\mathbf{u}^T(k)\mathbf{H}\mathbf{u}(k)\right]$$

en donde se ha aplicado el operador de esperanza matemática al ser variables estocásticas.

En control óptimo determinístico se obtenía una ley de control que dependía del vector de estado auténtico:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k)$$

El teorema de separación demuestra que el control óptimo para sistemas estocásticos es:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{G}(k)\hat{\mathbf{x}}(k)$$

siendo **G**(k) la misma matriz que la calculada en el caso de sistemas determinísticos y $\hat{\mathbf{x}}(k)$ el vector de estado estimado.

El diagrama de bloques sería:

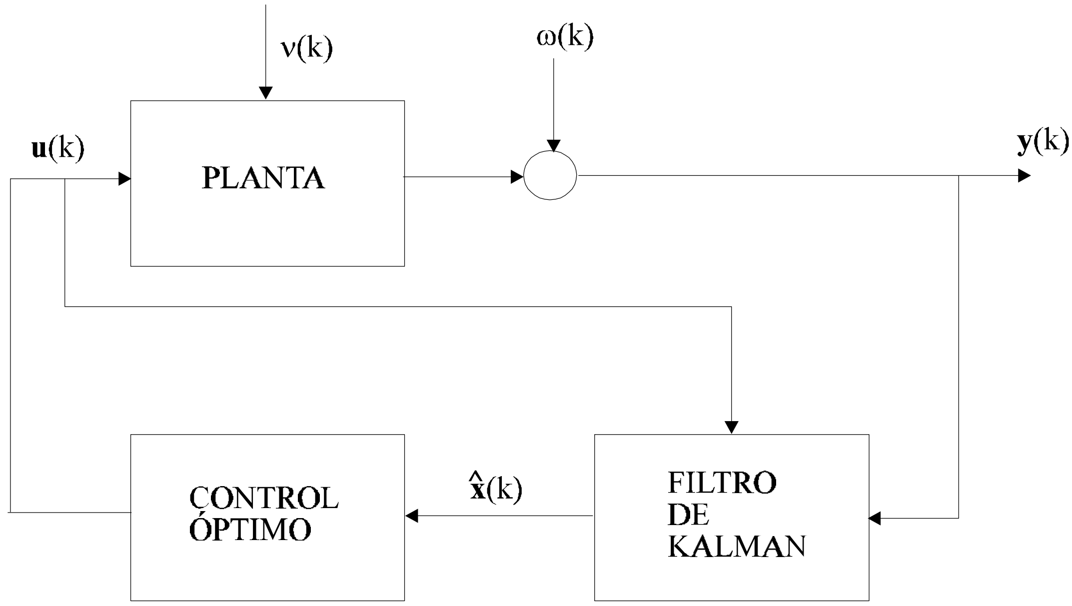


Fig. 17.6.- Control óptimo y estimación estocástica

La importancia del teorema de separación radica en que descompone el problema en dos partes independientes: el cálculo de las matrices de control como si fuera un sistema determinístico y la estimación del vector de estado que es el que finalmente se realimenta.

Es importante notar que existe una dualidad entre el control óptimo y la estimación óptima del vector de estado. Se puede demostrar que el problema de estimación del estado es equivalente a un problema de control óptimo LQ. La equivalencia se indica en la tabla siguiente:

Control óptimo	Estimación de estado
$\mathbf{G}$	$\mathbf{K}^T$
$\mathbf{B}$	$\mathbf{C}^T$
$\mathbf{M}$	$\mathbf{P}$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^T$
N-k	k