6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

6.1 Conceptos de estabilidad

- El aspecto más importante en el estudio de un sistema de control es determinar si el mismo es estable. En términos muy generales se dice que un sistema es estable si, estando inicialmente cerca del punto de operación deseado, permanece allí.
- Un método muy general para estudiar la estabilidad de sistemas no lineales es la teoría introducida por el matemático ruso A. Lyapunov en 1892. Este método recién fue difundido en los años 60 y se han desarrollado numerosos refinamientos del mismo. Los criterios de estabilidad de Lyapunov están referidos a las trayectorias de un sistema cuando el estado inicial está próximo al punto de equilibrio.

- **Punto de equilibrio**

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = f\left[t, x(t)\right] \qquad t \geq 0 \\ x(t) \in \Re^n \\ f : \Re^+ \times \Re^n \to \Re^n \ continua \end{gathered} \qquad (1)$$

Se supone que existe solución única $s(t, t_0, x_0)$ correspondiente a cada condición inicial $x(t_0) = x_0$.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- El estado x* es **punto de equilibrio** de (1) si

$$f(t, x^*) \equiv \mathbf{0} \qquad \forall t \geq 0$$

Entonces,

$$s(t, t_0, x^*) = x^* \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Se asumirá que ***0*** es un equilibrio de (1). Tomando $z = x - x^*$,
$\dot{z} = f_1(t, z) = f(t, z + x^*)$ y no se pierde generalidad.

Entonces, se tiene el equilibrio:

$$f(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \qquad \forall t \geq 0$$

$$\textbf{Si } x(t_0) = \mathbf{0}, \quad s(t, t_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \;\; \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

- Supóngase ahora que $x(t_0) \neq \mathbf{0}$ pero cerca de él.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Equilibrio estable:** El punto de equilibrio ***0*** es *estable* si, para cada $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$, $\exists \ \delta(t_0,\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x_0\| < \delta(t_0,\varepsilon) \Rightarrow \|s(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon \qquad \forall t \geq t_0$$

- Es *uniformemente estable* si, para cada $\varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0$ tal que,

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon), \quad t_0 \geq 0 \Rightarrow \|s(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon \qquad \forall t \geq t_0$$

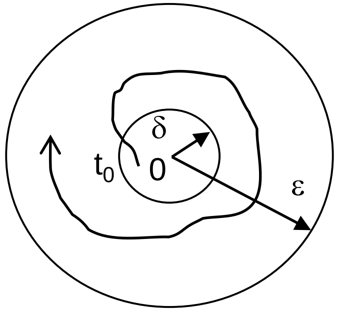


Figura 6.1

- Es **inestable** si no es estable.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Interpretación:**

Dados los siguientes espacios y normas

$$C^n[t_0,\infty) \ \textbf{continuas}$$

$$BC^n[t_0,\infty) \ \textbf{acotadascontinuas,subespaciode}\, C^n$$

$$\|x(.)\|_s = \sup_{t\in[t_0,\infty)} \|x(t)\| \quad \forall x(.) \in BC^n$$

BC^n es Banach.

Ahora se define el operador $$T_{t0} : \Re^n \to C^n[t_0,\infty)$$
$$x(t_0) \to s(.,t_0,x_0)$$

0 es un equilibrio estable sii:

1) Para cada $t_0 \geq 0$ $\quad \exists\, c(t_0) > 0 / T_{to}B \subset BC^n[t_0,\infty)$

$$B = \{v : \|v\| < c(t_0)\}$$

2) $T_{t0} : B \to BC^n[t_0,\infty)$ es continuo en $\mathbf{0} \in \Re^n$, para cada $t_0 \geq 0$.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:** Van der Pol

$$\dot{x}_1 = +x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2$$

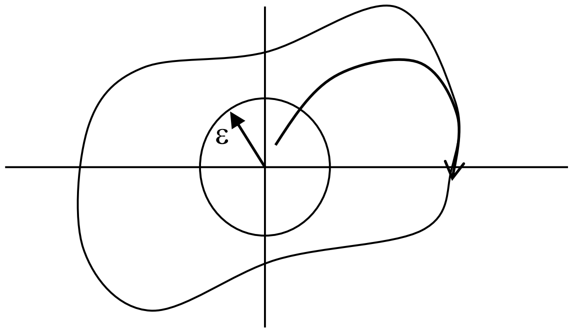


Figura 6.2

El equilibrio $x_1 = x_2 = 0$ es **inestable** (aunque las trayectorias son acotadas, pues tienden al ciclo límite. No se verifica la condición 2) de la interpretación anterior).

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:** Péndulo

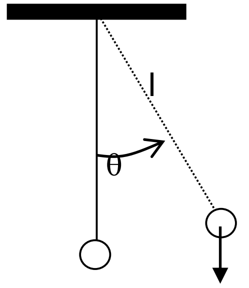


Figura 6.3

$$g\ell \,\mathrm{sen}\,\theta + \ell^2\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,x_1 \end{cases}$$

Solución:

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{g}{\ell}\cos x_1 = \frac{x_{20}^2}{2} - \frac{g}{\ell}\cos x_{10} =: a_0$$

Dado el entorno B_ε es posible encontrar a_0 tal que la solución esté dentro de B_ε.
Ahora se elige una δ tal que B_δ esté dentro de esta curva. Entonces se satisface la definición de estabilidad.
B_δ es independiente de t_0 (el sistema es autónomo).

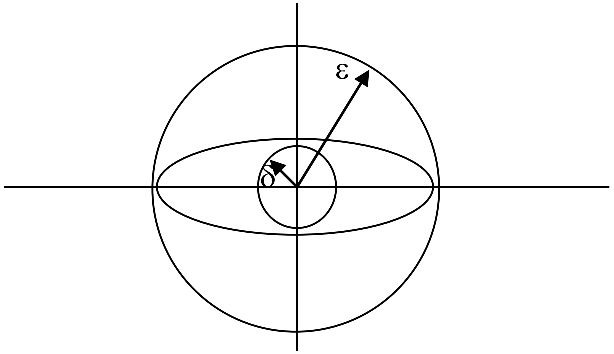
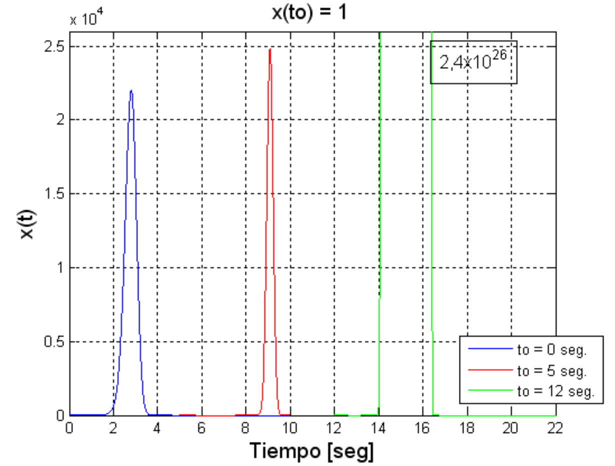


Figura 6.4

6. ESTABILIDAD DE LYAPU



- **Ejemplo:** (Massera, 1949) sistema no autónomo

$$\dot{x}(t) = (6t\,\mathrm{sen}\,t - 2t)x(t)$$

La solución es

$$x(t) = x(t_0)\exp\{6\,\mathrm{sen}\,t - 6t\cos t - t^2 - 6\,\mathrm{sen}\,t_0 + 6t_0\cos t_0 + t_0^2\}$$

Para $t_0 \geq 0$

$$\left|\frac{x(t)}{x(t_0)}\right| = \exp\left(6\,\mathrm{sen}\,t - 6t\cos t - t^2 - 6\,\mathrm{sen}\,t_0 + 6t_0\cos t_0 + t_0^2\right)$$

Si se define $c(t_0) = \sup_{t \geq t_0} \exp\left(6\,\mathrm{sen}\,t - 6t\cos t - t^2 - 6\,\mathrm{sen}\,t_0 + 6t_0\cos t_0 + t_0{}^2\right)$

entonces $c(t_0)$ es finito para cada t_0 fijo, y se tiene $|x(t)| \leq c(t_0)|x(t_0)|$

Entonces, dado un $\varepsilon > 0$, la condición de estabilidad se satisface si se elige $\delta = \varepsilon / c(t_0)$. Esto muestra que ***0*** es un equilibrio estable. Por otra parte, se observa que $c(t_0)$ no está acotada con t_0. Esto implica que $\delta \to 0$ con $t_0 \to \infty$. O sea, dado $\varepsilon > 0$ no es posible encontrar un $\delta(\varepsilon)$ independiente de t_0.

$\Rightarrow$ ***0*** **no** es un equilibrio **uniformemente** estable.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Equilibrio asintóticamente estable:** El equilibrio ***0*** es asintóticamente estable si:

  1) es **estable**
  2) es **atractivo**:

$$\exists \delta_1(t_0) > 0 \,/\, \|x_0\| < \delta_1(t_0) \Rightarrow \| s(t+t_0, t_0, x_0)\| \to 0 \quad t \to \infty.$$

- El equilibrio ***0*** es **uniformemente** asintóticamente estable si

  1) es **uniformemente estable**
  2) es **uniformemente atractivo**: $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que

$$\|x_0\| < \delta_1,\ t_0 \geq 0 \Rightarrow \|s(t+t_0, t_0, x_0)\| \to 0 \text{ unif. (en } \mathrm{x}_0 \text{ y } t_0\text{)} \quad \text{con } t \to \infty$$

$$\text{o bien } \forall \varepsilon > 0\ \exists T(\varepsilon) \text{ tal que } \|x_0\| < \delta_1,\ t_0 \geq 0 \Rightarrow \|s(t+t_0, t_0, x_0)\| < \varepsilon \ \ \forall t \geq T(\varepsilon)$$

- **Observaciones:**

a) $B_{\delta_1(t_0)} = \left\{ x \in \Re^n : \|x\| < \delta_1(t_0) \right\}$ es la **región de atracción** del equilibrio ***0***.

b) La condición 1) no es superflua, puede existir un sistema que cumple 2) y no cumple 1):

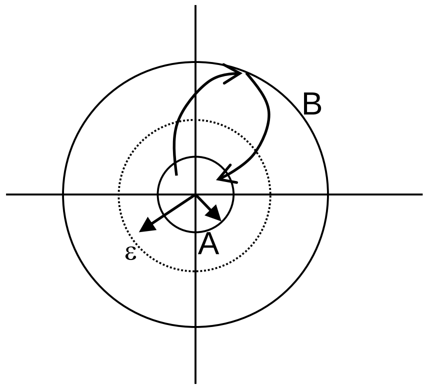


Figura 6.5

c) Si el origen es estable y atractivo entonces es uniformemente asintóticamente estable para un sistema autónomo.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Equilibrio globalmente asintóticamente estable:** El equilibrio ***0*** es globalmente asintóticamente estable si

  1) Es **estable**.
  2) Es atractivo $\forall\ x_0$, o sea $s(t+t_0,t_0,x_0)\rightarrow 0$ con $t\rightarrow\infty$ para cualquier condición inicial x_0.

  En este caso la región de atracción es $\Re^n$ (**globalmente atractivo**)

- El equilibrio ***0*** es **globalmente uniformemente asintóticamente estable** si:

  1) Es **uniformemente estable**.
  2) Es **uniformemente globalmente atractivo:**

$$\forall\ M,\varepsilon > 0, \exists\, T = T(M,\varepsilon)$$

$$\textbf{tal que}\quad \|x_0\| < M,\ t_0 \geq 0 \Rightarrow \|s(t+t_0,t_0,x_0)\| < \varepsilon\ ,\forall t \geq T(M,\varepsilon)$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Equilibrio exponencialmente estable:** El equilibrio ***0*** es exponencialmente estable si

$$\exists\, \alpha, \beta, \delta > 0 \text{ tal que}$$
$$\|s(t,t_0,x_0)\| < \alpha \|x_0\| e^{-\beta(t-t_0)} \qquad \forall t \geq t_0, \quad \forall x_0 \in B_\delta$$

- El equilibrio es **globalmente exponencialmente estable** si lo anterior vale para todo $x_0 \in \Re^n$

- **Región de atracción**

Sistemas variantes en *t* $\quad t_0 : \quad S(t_0) = \{x_0 : x(t) \to 0, t \to \infty\}$

Sistemas invariantes en *t* $\quad S = \{x_0 : x(t) \to 0, t \to \infty\}$

- **Región *S*:**

a) conjunto invariante de la ecuación diferencial (toda solución que comienza en *S* permanece en *S*) $\quad S = \{x_0 : x(t) \to 0, t \to \infty\}$
b) es abierta
c) es conectada.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:**

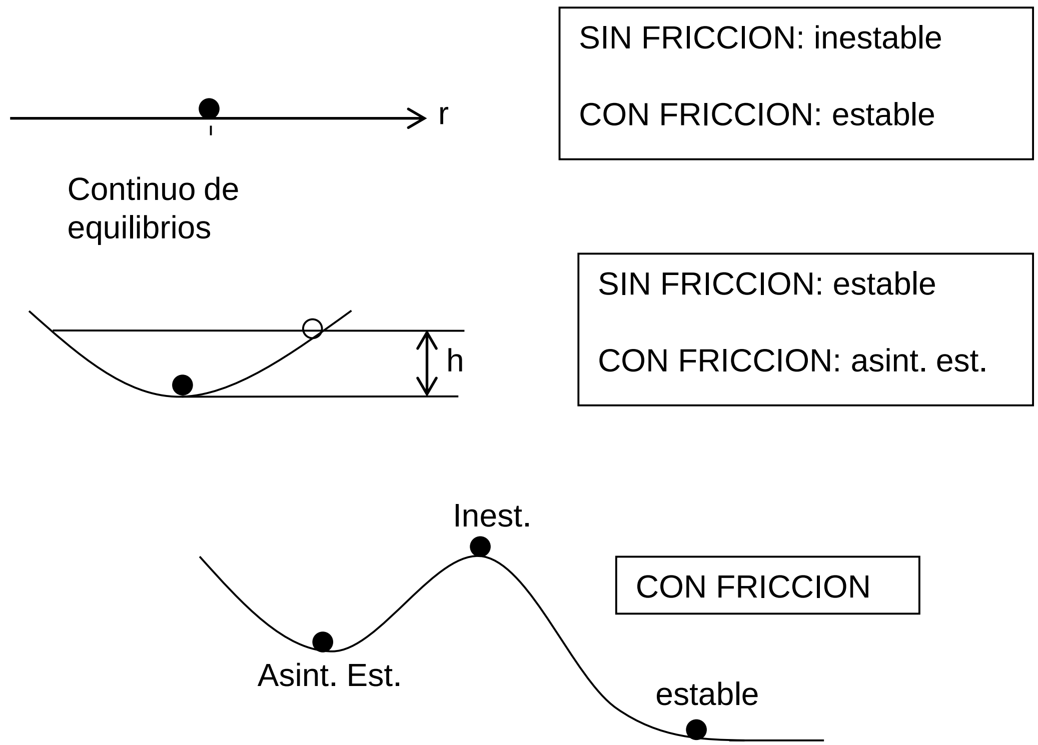


Figura 6.6

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Caso especial de sistemas periódicos y autónomos**

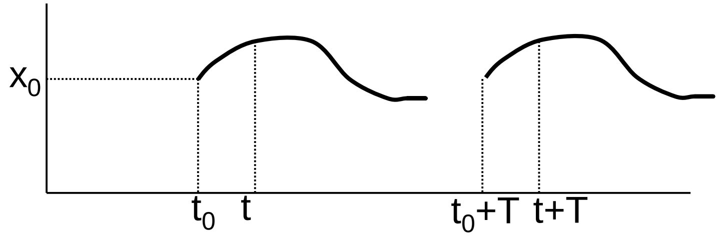
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \text{ es periódico con período } T \text{ si}$$

$$f(t+T, x) = f(t, x) \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \Re^n$$

Ej.: $\dot{x} = x \operatorname{sen} t$

Para un sistema periódico,

$$s(t+T, t_0+T, x_0) = s(t, t_0, x_0) \quad \forall \mathrm{t} \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x \in \Re^n$$



Si el sistema es autónomo (*f* no depende explícitamente de *t*) se puede pensar que el sistema es periódico con *T* cualquiera.

Por lo tanto los resultados para sistemas periódicos valen también para sistemas autónomos.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema:** Supóngase que el sistema $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ es periódico. Entonces el equilibrio ***0*** es uniformemente estable si y solo si es estable.

- *Demostración:*
  a) Estabilidad uniforme $\Rightarrow$ estabilidad.
  b) Estabilidad $\Rightarrow$ estabilidad uniforme. Supóngase $t_0 \in [0,T]$ y defínase
$$\mu(x_0, t_0) = \sup_{t\geq 0} \left\| s(t_0 + t, t_0, x_0) \right\|$$
  Como ***0*** es equilibrio estable, $\exists$ $d(t_0)$ tal que $\mu(x_0,t_0)$ es finito para todo $x_0 \in B_{d(t0)}$. Podría ocurrir que al variar t_0 en $[0,\infty)$, $d(t_0)$ no esté acotado fuera de *0*. Sin embargo, como $d(t_0)=d(t_0+T)$, sólo es necesario estudiar $d(t_0)$ con t_0 en [0,T]. Entonces $\exists$ d (independiente de t_0) tal que
$$\mu(x_0, t_0) < \infty \quad \forall x_0 \in B_d \quad \mathbf{y} \quad \forall t_0 \in [0, T]$$
  Defínase $\eta(x_0) = \sup_{t_0 \in [0,T]} \mu(x_0, t_0)$
  que es continua en $x_0 = \mathbf{0} \Rightarrow \left\| x_0 \right\| < \delta \Rightarrow \eta(x_0) < \varepsilon$.

- **Teorema**: Supóngase que el sistema $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ es periódico. Entonces el equilibrio ***0*** es uniformemente asintóticamente estable si y solo si es asintóticamente estable.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Definición (Funciones clase *K* y clase *L*)**:
  Una función $\phi : \Re_+ \rightarrow \Re_+$ es de *clase K* si es continua, estrictamente creciente y $\phi(0)=0$.

- Es de *clase L* si es continua sobre $[0,\infty)$, estrictamente decreciente,
  $\phi(0) < \infty \text{ y } \phi(r) \rightarrow 0 \text{ con } r \rightarrow \infty$.

- **Teorema:** El equilibrio ***0*** de $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ es **estable** sii para cada $t_0 \in \Re^+$, existe un número $d(t_0)$ y una función ϕ_{t0} de clase *K* tal que

$$\|s(t, t_0, x_0)\| \le \phi_{t_0}(\|x_0\|) \quad \forall t \ge t_0, \ \forall x_0 \in B_{d(t_0)}$$

- El equilibrio es **uniformemente estable** sii existe $d>0$ y una ϕ de clase *K* tal que:

$$\|s(t, t_0, x_0)\| \le \phi(\|x_0\|) \quad \forall t \ge t_0 \ge 0, \forall x_0 \in B_d$$

- *Prueba:*

  a) $\Rightarrow$ **0** es estable:

  Para ε dado, tomar $\delta(\varepsilon, t_0) = mín\left[\phi_{t_0}^{-1}(\varepsilon), d(t_0)\right]$

  y se verifica la condición de estabilidad.

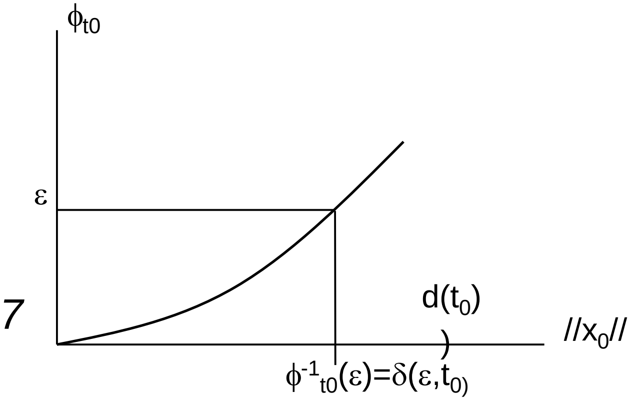


Figura 6.7

- b) ***0*** estable $\Rightarrow \exists\ d(t_0),\ \phi_{t0}$...

  Tomar t_0. Tomar $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\ \delta>0$. Tomar $\delta_m(\varepsilon, t_0)$ como supremo de los posibles δ.

  Ahora se define la función:

  $\psi_{t0} : \varepsilon \rightarrow \delta_m(\varepsilon, t_0)$ que es no decreciente y positiva, además $\psi_{t0}(0) = 0$. Si se toma la función continua $\theta_{to} \leq \psi_{t0}$, entonces queda definida $\phi_{t0} = \theta_{t0}^{-1}$.

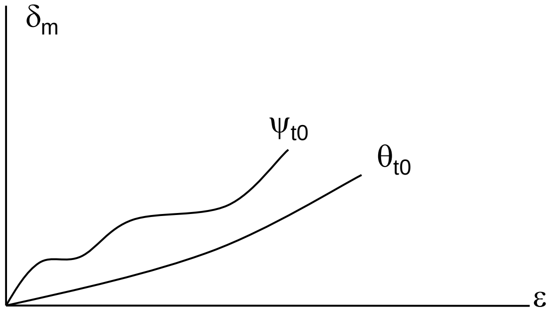


Figura 6.8

Para estabilidad uniforme la demostración es similar.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Lema:** El equilibrio ***0*** es **atractivo** sii para cada $t_0 \geq 0$ existe $r(t_0)$ y para cada $x_0 \in B_{r(t0)}$ existe $\sigma_{t0,x0}$ de clase *L* tal que $\left\| s(t_0+t, t_0, x_0) \right\| \leq \sigma_{t0,x0} \quad \forall t \geq 0$

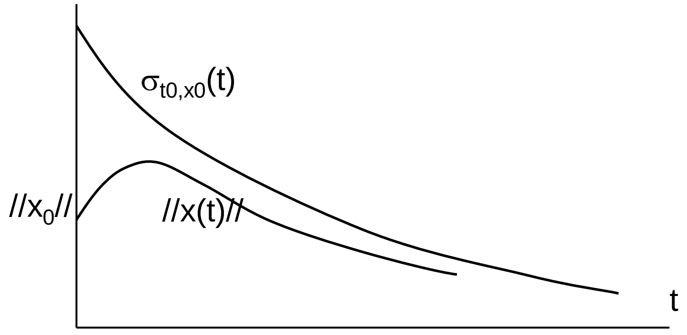


Figura 6.9

- El equilibrio es **uniformemente atractivo** sii existe $r>0$ y σ de clase *L* tal que

$$\left\| s(t_0+t, t_0, x_0) \right\| \leq \sigma(t) \qquad \forall t, t_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in B_r$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- *Prueba:*

a) $\Rightarrow$ ***0*** es atractivo.
$\sigma_{t0,x0}(t) \to 0$ con $t \to \infty$ $\Rightarrow s(t_0+t,t_0,x_0) \to 0$

b) ***0*** atractivo $\Rightarrow$ $\exists\, r\,(t_0)$, $\sigma_{t0,x0}$...
Para cada $\varepsilon > 0$, sea $T(\varepsilon)$ el más pequeño número tal que

$$\left\| s(t_0+t, t_0, x_0) \right\| < \varepsilon \quad \forall t \geq T(\varepsilon),\ \textbf{con}\ x_0 \in B_{r(t0)}$$

Sea $\psi_{t0,x0} : \varepsilon \to T(\varepsilon)$, se verifica que $\psi(\varepsilon) = 0$ para ε suficientemente grande y $\psi(\varepsilon) \to \infty$ con $\varepsilon \to 0$. Entonces, tomar $\sigma^{-1}_{t0,x0} \geq \psi_{t0,x0}$.

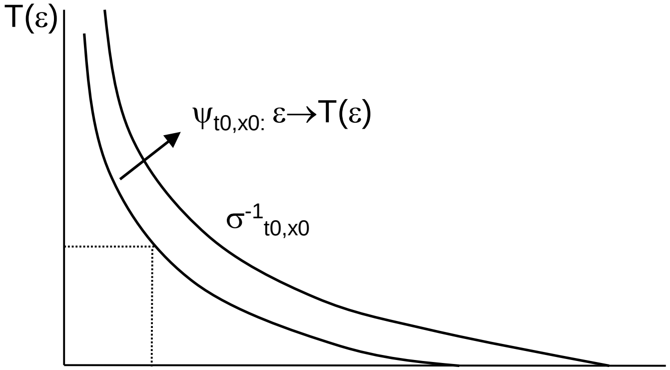


Figura 6.10

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema:** El equilibrio ***0*** de $\dot{x}(t) = f\,(t, x(t))$ es uniformemente asintóticamente estable si existe *r > 0* , ϕ de clase *K* y σ de clase *L* tal que:

$$\left\| s(t_0 + t, t_0, x_0) \right\| \leq \phi\,(\left\| x_0 \right\|)\,\sigma\,(t) \qquad \forall t, t_0 \geq 0,\ \forall x_0 \in B_r$$

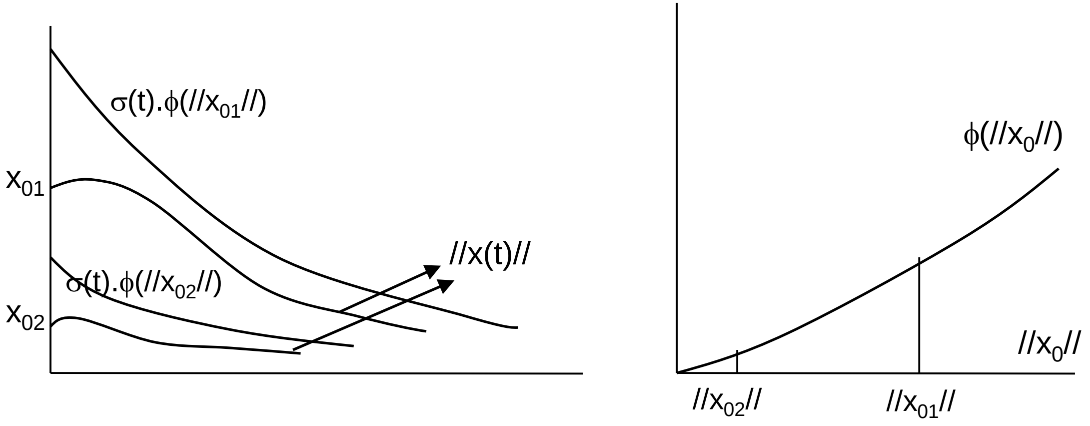


Figura 6.11

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Lema:** Suponga $\phi: \Re_+ \rightarrow \Re_+$ es continua, $\phi(0) = 0$, ϕ es no decreciente y $\phi(r)>0 \;\; \forall\, r>0$. Entonces existe una función α de clase *K* tal que $\alpha(r) \leq \phi(r) \;\; \forall r$. Más aún, si $\phi(r) \rightarrow \infty$ con $r \rightarrow \infty$, α puede elegirse con la misma propiedad.

- *Prueba:* Tomar una secuencia estrictamente creciente $\{q_i\}$ de números positivos $\rightarrow\infty$ y una secuencia estrictamente creciente de números positivos $\{k_i\} \rightarrow 1$. Definir:

$$\alpha(r) = \frac{r}{q_1} k_1 \phi(r) \qquad \textbf{si } 0 \leq r \leq q_1$$

$$= k_i \phi(q_i) + \frac{r - q_i}{q_{i+1} - q_i}\left[k_{i+1}\phi(r) - k_i \phi(q_i)\right] si \;\; q_i < r \leq q_{i+1}$$

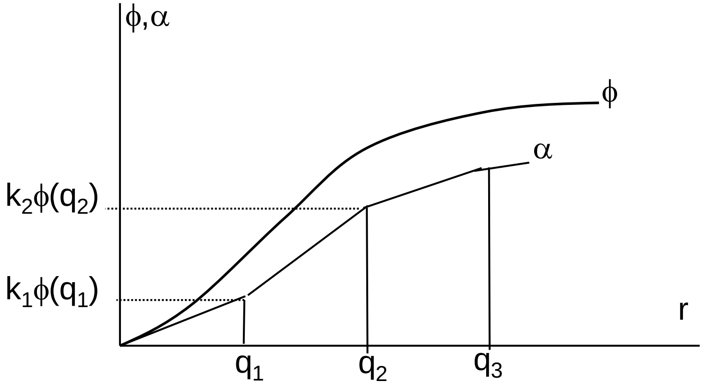


Figura 6.12

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Funciones Definidas**

  Una función *V*: $\mathcal{R}_+ \, x \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ se dice **localmente definida positiva** si:

  1) Es continua

  2) $V(t,0) = 0 \quad \forall t \geq 0$

  3) Existe α de clase *K* tal que: $V(t,x) \geq \alpha(\|x\|) \;\; \forall t \geq 0, \;\; \forall x \in B_r = \{x : \|x\| \leq r\}, r > 0.$

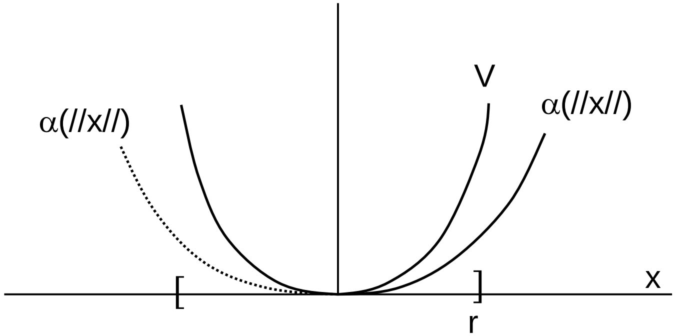
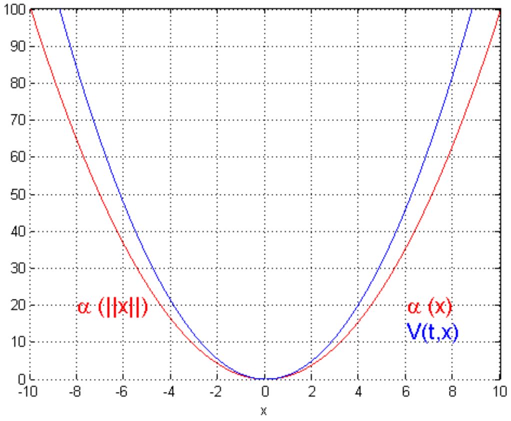


Figura 6.13



- Una función *V* es **definida positiva** si lo anterior vale para todo $x \in \Re^n$ ($r = \infty$).

- Una función *V* es **radialmente no acotada** si: $V(t,x) \geq \alpha(\|x\|) \quad \forall t \geq 0 \;\; \forall x \in \Re^n$ y $\alpha(.)$ continua (no necesariamente clase K) tal que $\alpha(r) \rightarrow \infty$ con $r \rightarrow \infty$.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Otra caracterización de funciones** más fácil de verificar:

- **Lema:** Una función continua (que no depende del tiempo) *W:* $\Re^n \to \Re$ es **localmente definida positiva** si y sólo si:

  1) $W(0) = 0$
  2) $W(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \in B = \{x : \|x\| \leq r\}$

- *W* es **definida positiva** si y sólo si:

  1) $W(0) = 0$
  2) $W(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
  3) $\exists r > 0 \text{ tal que } \inf_{\|x\| \geq r} W(x) > 0$ (esta condición evita que una función pueda tender asintóticamente a cero, ej.: $x^2/(1+x^4)$). O bien $W(x) > \alpha(\|x\|)$ de clase *K*.

- *W* es **radialmente no acotada** si y solo si

$$W(x) \to \infty \quad con \quad \|x\| \to \infty$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Demostración:

- a) Si *W* es loc. def. pos. $\Rightarrow$1), 2)

- b) Si 1), 2), definir $\phi(p) = \inf\limits_{p \le //x// \le r} W(x)$

$\phi(p)$ es no decreciente, pues al aumentar *p*, el ínfimo no decrece pues se toma sobre una región menor. Por un lema antes visto, $\exists\ \alpha$ de clase *K* tal que $\alpha(p) \le \phi(p) \quad \forall p \in [0, r]$. Entonces

$$\alpha(\|x\|) \le \phi(\|x\|) \le W(x) \quad \forall p \in [0, r]$$

o sea *W*(*x*) es localmente definida positiva.

- **Lema:** Una función continua *V*: $\Re_+ \times \Re^n \rightarrow \Re$ es **localmente definida positiva** si y sólo si $\exists$ *W*: $\Re^n \rightarrow \Re$ localmente definida positiva tal que

$$V(t,0) = 0 \qquad \forall t \ge 0$$

$$V(t,x) \ge W(x) \qquad \forall t \ge 0, \forall x \in B_r,\ r > 0$$

O sea *V* domina a *W* en todo instante en B_r.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- Una función continua $V: \mathfrak{R}_+ x\ \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$ es **definida positiva** si y sólo si $\exists\ W: \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$ definida positiva tal que

$$V(t,0) = 0 \qquad \forall t \geq 0$$

$$V(t,x) \geq W(x) \qquad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathfrak{R}^n$$

- Una función V es **radialmente no acotada** si y solo si existe una función $W: \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$ radialmente no acotada tal que

$$V(t,x) \geq W(x) \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathfrak{R}^n$$

- **Función decreciente:** Una función continua $V: \mathfrak{R}_+ x\ \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$ se dice **decreciente** si $\exists$ una función $\beta(.)$ de clase K tal que $V(t,x) \leq \beta(//x//)$ $\forall t \geq 0$, $\forall x \in B_r = \{x: //x// \leq r\}$.

- **Ejemplo:** $W_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$
es *definida positiva* pues
$$\begin{cases} W_1(0) = 0 \\ W_1(x) > 0 \end{cases}$$

es *radialmente no acotada*: $W_1(x) = \|x\|^2 \to \infty, \quad \|x\| \to \infty$.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:** $V_1(t,x_1,x_2)=(t+1)(x_1^2+x_2^2)$

  es definida positiva pues domina a W_1.
  No es decreciente pues $\forall$ x $\neq$ 0, V_1 crece con *t*.

- **Ejemplo:** $V_2(t,x_1,x_2)=e^{-t}(x_1^2+x_2^2)$

  no es definida positiva pues no domina ninguna *W* definida positiva.
  Es decreciente.

- **Ejemplo:** $W_2(x_1,x_2)=x_1^2+\mathrm{sen}^2\,x_2$
  es *localmente definida positiva*

$$\begin{cases} W_2(0)=0 \\ W_2(x_1,x_2)>0, \quad si(x_1,x_2)\neq 0 \ y \ |x_2|<\pi \end{cases}$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Derivada de *V(t,x)*** en las trayectorias de $\dot{x} = f\left[t, x\right]$.

Supóngase que *V(t,x)* tiene derivadas continuas en sus argumentos. Sea ∇V el *gradiente* de *V* con respecto a *x*.

Entonces,

$$\frac{dV}{dt}\left[t, x(t)\right] = \frac{\partial V}{\partial t}\left[t, x(t)\right] + \frac{\partial V}{\partial x_1}\left[t, x(t)\right]\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\left[t, x(t)\right]\dot{x}_n$$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = f\left[t, x(t)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt}\left[t, x(t)\right] = \frac{\partial V}{\partial t}\left[t, x(t)\right] + \nabla V\left[t, x(t)\right] . f\left[t, x(t)\right]$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Se denomina,

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V}(t,x)$$

derivada de V a lo largo de las trayectorias de la ecuación diferencial.

$$V[t,x(t)] = V[t_o,x(t_0)] + \int_{to}^{t} \dot{V}[\tau,x(\tau)]d\tau$$

para *x(.)* solución de la ecuación diferencial.

Interpretación: Si la trayectoria del sistema pasa por x_o en t_o, la velocidad de cambio de *V(t,x(t))* en t_o es $\dot{V}(t_o,x_o)$. Si *V* es independiente de *t* y el sistema es autónomo, $\dot{V}$ es independiente de *t*.

- **Conjunto invariante:** Un conjunto $M \subseteq \Re^n$ es un *conjunto invariante* de la ecuación diferencial $\{\dot{x}(t) = f[t,x(t)], \forall t \geq 0\}$ si para cada $x_0 \in M$ existe un $t_o \in \Re_+$ tal que $\mathbf{s}(t,t_o,x_o) \in M, \forall t \geq t_o$. O sea, para cada estado en *M*, puede encontrarse un tiempo inicial tal que la trayectoria resultante permanece en *M* en todo tiempo futuro.

- **Ejemplos:**

  - Para $x_o \in \Re^n,\ t_o \in \Re_+,\ s(\cdot, t_o, x_o)$ trayectoria resultante como subconjunto de $\Re^n$, es un conjunto invariante.
  - Un equilibrio.
  - Una solución periódica.

- **Punto límite:** Supóngase $x_o \in \Re^n$, $t_o \in \Re_+$. Un punto $p \in \Re^n$ se denomina punto límite de la trayectoria $s(.,t_o, x_o)$ si existe una secuencia $\{t_i\}$ de números reales en $[t_o, \infty)$ tal que $t_i \rightarrow \infty$ *y* .

$$\lim_{i \to \infty} \left\| p - s(t_i, t_o, x_o) \right\| = 0$$

  O equivalentemente, p es punto límite de $s(.,t_0,x_0)$ si dados $\varepsilon > 0$, $T < \infty$, existe $t \geq T$ tal que $\left\| p - s(t, t_0, x_0) \right\| < \varepsilon$.

- **Conjunto límite:** El conjunto de todos los puntos límites de $s(.,t_o,x_o)$ se denomina conjunto límite de $s(.,t_o, x_o)$ y se denota $\Omega(t_o,x_o)$

- **Lema:** Sea $x_o \in \Re^n, t_o \in \Re_+$ y supóngase que $s(., t_o, x_o)$ sea acotada. Entonces $\Omega(t_o,x_o)$ es no vacío, cerrado y acotado.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Lema:** Sea $x_o \in \Re^n, t_o \in \Re_+$ y supóngase *s(.,*t_o*,*x_o*)* acotada. Entonces *dist.[s(t,*t_o*,*x_o*),* Ω*(*t_o*,*x_o*)]*$\rightarrow$ *0* con *t*$\rightarrow \infty$.

- Para sistemas **periódicos** y **autónomos:**

- **Lema:** Supóngase que el sistema $\left\{ \dot{x}(t) = f\left[t, x(t)\right] \right\}$ es periódico y tómese $x_o \in \Re^n, t_o \in \Re_+$. Si *s(.,*$t_o$*,*$x_o$*)* es acotada, luego Ω(*t_o,x_o*) es un conjunto invariante del sistema.

- Para sistemas **autónomos:**

$$\dot{x}(t) = f\left[x(t)\right]$$
$$s(t,0,x_o) = s(t+\tau, \tau, x_o)$$
$$\forall t \geq \tau \geq 0,\ \forall x_o \in \Re^n$$

- **Dominio de atracción:** Supóngase que **0** sea un equilibrio atractivo del sistema autónomo. El dominio de atracción *D(**0**)* se define como:

$$D(\mathbf{0}) = \left\{ x_0 \in \Re^n : s(t,0,x_0) \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty \right\}$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Puntos conectados:** Sea $\boldsymbol{S} \subseteq \Re^n$. Dos puntos *x* e *y* se dicen conectados en ***S*** si existe un camino entre *x* e *y* totalmente incluido en ***S***. Esta propiedad es simétrica y transitiva. Todo el conjunto ***S*** se dice conectado si todo par de puntos de ***S*** son conectados en ***S***.

- **Lema:** Supóngase que **0** es un equilibrio atractivo de $\left\{\dot{x}(t) = f\left[x(t)\right]\right\}$. Entonces *D(**0**)* es abierto, conectado e invariante.

6.2 Método Directo de Lyapunov

- **Motivación 1:**

Considérese el sistema masa-resorte-amortiguador no lineal:

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0 x + k_1 x^3 = 0$$

Supóngase que se desplaza la masa del equilibrio y se la suelta. ¿Resultará un comportamiento estable?
Examinando la **energía del sistema**:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0 x + k_1 x^3)dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0 x^2 + \frac{1}{4}k_1 x^4$$

Se observa que:
- Energía cero corresponde al punto de equilibrio en el origen.
- Estabilidad asintótica implica la convergencia de la energía a cero.
- Inestabilidad está relacionada con el crecimiento de la energía.
Entonces, las propiedades de estabilidad pueden caracterizarse por la *variación de la energía con el tiempo*. Esta variación temporal en las trayectorias se calcula como:

$$\dot{V}(x) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0 x + k_1 x^3)\dot{x} = \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3 \leq 0$$

O sea que la energía del sistema no podrá crecer, garantizando que el equilibrio no es inestable. Estos conceptos se generalizan en el método directo de Lyapunov.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Motivación 2:**

Sea el sistema péndulo *sin fricción*, con *l* su longitud, *m* su masa en el extremo, θ su posición angular y *g* la aceleración de la gravedad:

$$l^2 m\ddot{\theta} + mgl \operatorname{sen}\theta = 0$$

Definiendo los estados $x_1 = \theta,\ x_2 = \dot{\theta}$, resulta la ecuación de estados:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x_1$$

La energía del sistema es:

$$V = K + P$$

$$V = \frac{1}{2} m(lx_2)^2 + mgl(1 - \cos x_1)$$

La derivada temporal de la energía es:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \nabla V\ \dot{x} = (mgl \operatorname{sen} x_1, ml^2 x_2)\begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x_1 \end{pmatrix} = 0$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Esto significa que los vectores gradiente de *V* y de campo (tangente a la trayectoria) son normales. Entonces *V=constante*,

$$\frac{1}{2} l x_2^2 + g(1-\cos x_1) = const.$$

lo que define las trayectorias del sistema, que son trayectorias cerradas que permanecen en un entorno del punto de equilibrio ***0*** (estabilidad).
Para el péndulo *con fricción*:

$$l^2 m\ddot{\theta} + mglsen\theta + b\dot{\theta} = 0 \qquad \dot{V} = \ldots = -bx_2^2 \leq 0$$

Ahora el vector gradiente y de campo forman un ángulo obtuso, lo que implica trayectorias que convergen hacia el equilibrio en ***0*** (estabilidad asintótica).

- **Idea:** Considérese un sistema sin fuerzas externas y tal que el origen es un equilibrio. Supóngase que se puede definir la energía total del sistema como nula en el origen y positiva en el resto del espacio de estados. Si ahora el sistema, que originalmente está en ***0*** se perturba a un estado inicial $\neq$***0***, puede ocurrir lo siguiente: a) La dinámica del sistema es tal que la energía no crecerá de ese valor inicial positivo, lo que permitirá inferir estabilidad. b) La energía decrece monotónicamente con el tiempo $\Rightarrow$ estabilidad asintótica. Estas ideas se ponen en forma precisa en los teoremas de estabilidad de Lyapunov.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema de estabilidad.** El equilibrio ***0*** es estable si existe una función continuamente diferenciable, localmente definida positiva *V* y *r >0* tal que

$$\dot{V}(t,x) \le 0 \quad \forall t \ge t_0, \quad \forall x \in B_r$$

- ***Prueba:*** Como *V* es *l.d.p.*, $V(t,x) \ge \alpha(\|x\|) \quad \forall t \ge 0, \forall x \in B_s,\ \alpha : \Re_+ \to \Re_+$ (Clase K)
Para probar que ***0*** es equilibrio estable, para cada $\varepsilon > 0$, $t_0 \ge 0$ hallar $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$.
Dado $\varepsilon > 0$, $t_0 \ge 0$, *sea* $\varepsilon_1 = \text{mín}\{\varepsilon, r, s\}$ y tomar $\delta > 0$ tal que

$$\beta(t_0, \delta) = \sup_{\|x\| \le \delta} V(t_0, x) < \alpha(\varepsilon_1)$$

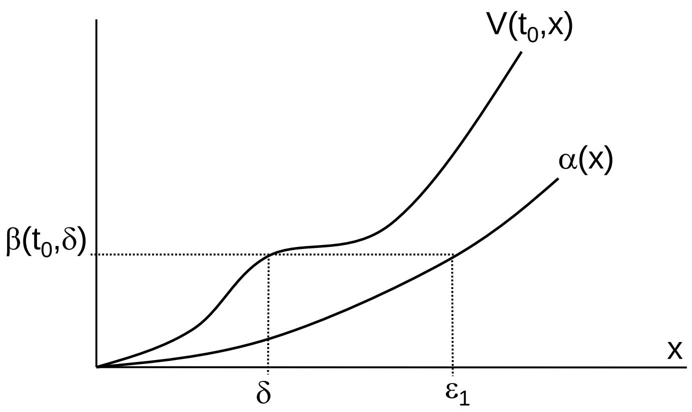


Figura 6.14

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Este δ siempre existe, pues $\alpha(\varepsilon_1) > 0$ y $\beta(t_0, \delta) \to 0$ **con** $\delta \to 0$. Ahora puede verse que este δ es bueno para la definición de estabilidad. Asúmase que $\|x(t_0)\| < \delta$. Luego $V\left[t_o, x(t_0)\right] \leq \beta(t_0, \delta) < \alpha(\varepsilon_1)$. Pero como $\dot{V}(t, x) \leq 0, \forall t \geq t_0$ si $\|x\| < \delta,\ (\delta \leq \varepsilon_1 \leq r, \textbf{entorno de } B_r)$, se tiene

$$V\left[t, x(t)\right] \leq V\left[t_0, x(t_0)\right] < \alpha(\varepsilon_1) \quad \forall t \geq t_0$$

Ahora, como $\alpha\,(\|x(t)\|) \leq V\left[t, x(t)\right]$, entonces $\alpha\left(\|x(t)\|\right) < \alpha(\varepsilon_1)$.

Como α es una función creciente, $\|x(t)\| < \varepsilon_1 \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0$ lo que implica que ***0*** es un equilibrio estable.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema de estabilidad uniforme.** El equilibrio ***0*** es uniformemente estable si existe una función continuamente diferenciable, localmente definida positiva y ***decreciente*** *V* y un *r>0* tal que

$$\dot{V}(t,x) \leq 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in B_r$$

- ***Prueba:*** Como *V* es decreciente, existe $\beta(\delta) = \sup_{\|x\|<\delta} \sup_{t\geq 0} V(t,x)$

que es una función que no decrece con δ. Además, como V(t,x) es localmente definida positiva, $V(t,x) \geq \alpha(\|x\|), \forall t \geq 0, \forall x \in B_s$, α de clase *K*. Para un ε dado, y tomando $\varepsilon_1 = min\{\varepsilon, r, s\}$ siempre puede hallarse un δ>0 tal que $\beta(\delta) < \alpha(\varepsilon_1)$. Ahora se procede igual que en el teorema anterior para probar que la condición de estabilidad se verifica para este δ.

Nota. Un ejemplo de función que no es decreciente: $(t+1)(x_1^2 + x_2^2)$

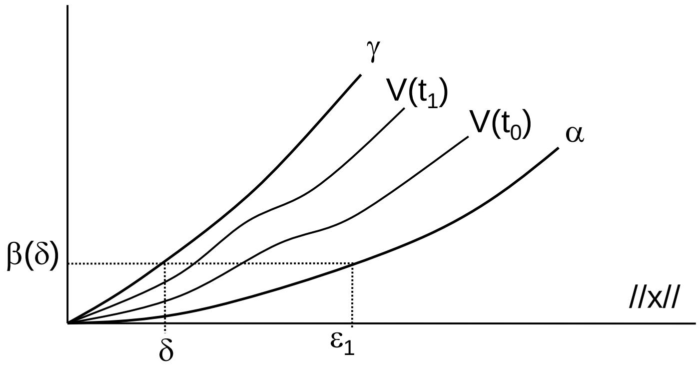


Figura 6.15

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Observaciones:**

a) Estos teoremas dan condiciones *suficientes* de estabilidad.
b) *Función candidata de Lyapunov:* si *V* es continuamente diferenciable y es localmente definida positiva. Si además *V* cumple con el teorema ⇒ es **Función de Lyapunov**.

- **Ejemplo:** (Péndulo, g=1, l=1): $\ddot{\theta} + sen\theta = 0$

En variables de estado: $x_1 = \theta \qquad \dot{x}_1 = x_2$

$$x_2 = \dot{\theta} \qquad \dot{x}_2 = -\operatorname{sen} x_1$$

Estabilidad del equilibrio en ***0***:
Energía total:

$$V(x_1, x_2) = \underbrace{(1 - \cos x_1)}_{P} + \underbrace{\frac{x_2^2}{2}}_{K}$$

V es l.d.p. y cont. diferenciable ⇒ Función candidata de Lyapunov.

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \operatorname{sen} x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = \operatorname{sen} x_1 x_2 - x_2 \operatorname{sen} x_1 = 0$$

⇒ ***0*** es equilibrio estable (como el sistema es autónomo, el equilibrio es también uniformemente estable).

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:** (Sistema masa-resorte-fricción no lineal)

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = 0$$

En ecuaciones de estado: $x_1 = x \qquad \dot{x}_1 = x_2$

$$x_2 = \dot{x} \qquad \dot{x}_2 = -f(x_2) - g(x_1)$$

Se asume que:

1) f y *g* son continuas

2) $\sigma\ f(\sigma) \geq 0 \qquad \forall \sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]$

$\sigma\ g(\sigma) > 0 \qquad \forall \sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0], \sigma \neq 0$

Se tiene un equilibrio en ***0*.** Considérese:

$$V(x_1, x_2) = K + P = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} g(\sigma)d\sigma$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_2\dot{x}_2 + g(x_1)\dot{x}_1$$

$$= x_2[-f(x_2) - g(x_1)] + g(x_1)x_2$$

$$= -x_2 f(x_2) \leq 0 \quad \text{si } |x_2| \leq \sigma_0$$

$\Rightarrow$ **0** es equilibrio estable (uniforme pues el sistema es invariante).

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:** (Ecuación amortiguada de Mathieu): $\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+(2+\operatorname{sen} t)y(t)=0$

$$x_1 = y \qquad \dot{x}_1 = x_2$$
$$x_2 = \dot{y} \qquad \dot{x}_2 = -x_2 - (2+\operatorname{sen} t)x_1$$

Se propone
$$V(t,x_1,x_2) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{2+\operatorname{sen} t}$$

V es continuamente diferenciable, *V* domina la función definida positiva:

$$W_1(x_1,x_2) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{3}$$

y es dominada por la función definida positiva: $W_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

⇒ *V* es f.d.p. "decreciente", candidata Lyapunov para estabilidad uniforme.

$$\dot{V}(t,x_1,x_2) = -x_2^2\frac{\cos t}{(2+\operatorname{sen} t)^2} + 2x_1\dot{x}_1 + \frac{2x_2}{2+\operatorname{sen} t}\dot{x}_2 = \ldots$$
$$= -x_2^2\frac{4+2\operatorname{sen} t+\cos t}{(2+\operatorname{sen} t)^2} \le 0 \qquad \forall t \ge 0,\ \forall x_1, x_2$$

V es función de Lyapunov ⇒ ***0*** es equilibrio uniformemente estable

- **Nota:** el sistema es periódico ⇒ estabilidad ≡ estabilidad uniforme.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema de estabilidad asintótica:** El equilibrio ***0*** es *uniformemente asintóticamente* estable si existe una función localmente definida positiva y continuamente diferenciable y ***decreciente*** *V* tal que $-\dot{V}$ es localmente definida positiva.

- ***Prueba:***
  a) Si $-\dot{V}$ es l.d.p. satisface el teorema de estabilidad uniforme $\Rightarrow$ el equilibrio es uniformemente estable.
  b) 0 es uniformemente atractivo. Es necesario mostrar que existe δ_1>0 tal que para cada ε>0 existe T(ε)<∞ tal que $\|x_0\| < \delta_1, t_0 \geq 0 \Rightarrow \|s(t+t_0, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq T(\varepsilon)$
  Las hipótesis sobre V y $\dot{V}$ implican que existen funciones α(.), β(.) y γ(.) de clase *K* y una constante *r >0* tal que:

$$\alpha(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \beta(\|x\|) \quad \forall t \geq t_0, \forall x \in B_r$$
$$\dot{V}(t,x) \leq -\gamma(\|x\|), \quad \forall t \geq t_0, \forall x \in B_r \qquad (*)$$

Dado ε>0, defina δ_1, δ_2, T positivas del siguiente modo:

$$\delta_1 < \beta^{-1}[\alpha(r)]$$
$$\delta_2 < \text{mín}\{\beta^{-1}[\alpha(\varepsilon)], \delta_1\} \qquad (**)$$
$$T = \frac{\beta(\delta_1)}{\gamma(\delta_2)}$$

Ahora se verá que $\|x_0\| < \delta_1,\ t_0 \geq 0 \Rightarrow \ \|s(t_1, t_0, x_0)\| < \delta_2$ para algún $t_1 \in [t_0, t_0+T]$. Se prueba por contradicción, asumiendo que $\|s(t, t_0, x_0)\| \geq \delta_2 \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]$.
Entonces, de la suposición anterior y de aplicar (*) y (**) resulta que,

$$\begin{aligned} 0 < \alpha(\delta_2) &\leq V(t_0 + T, s(t_0 + T, t_0, x_0)) \\ &= V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{V}\left[\tau, s(\tau, t_0, x_0)\right] d\tau \\ &\leq \beta(\delta_1) - T\gamma(\delta_2) = 0 \end{aligned}$$

Lo que constituye una contradicción.
Para completar la prueba, se supone que $t \geq t_0+T$. Entonces con t_1 definida antes,

$$\alpha\left[\|s(t, t_0, x_0)\|\right] \leq V\left[t, s(t, t_0, x_0)\right] \leq V\left[t_1, s(t_1, t_0, x_0)\right] \quad \text{porque } \dot{V} < 0 \quad .$$

Finalmente, $V\left[t_1, s(t_1, t_0, x_0)\right] \leq \beta\left[\|s(t_1, t_0, x_0\|\right] \leq \beta(\delta_2)$

Entonces, $\alpha\left[\|s(t, t_0, x_0)\|\right] \leq \beta(\delta_2) < \alpha(\varepsilon)$

$$\|s(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$$

lo que prueba el teorema.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema de estabilidad asintótica global:** El equilibrio ***0*** es *globalmente uniformemente asintóticamente* estable si existe una función definida positiva, continuamente diferenciable, decreciente y ***radialmente no acotada*** *V* tal que $-\dot{V}$ sea definida positiva.

Nota: si no se pide que sea radialmente no acotada, podría ocurrir que x(t) derive fuera del equilibrio. Por ejemplo:

$$V(x) = \left[x_1^2 / (1 + x_1^2)\right] + x_2^2$$

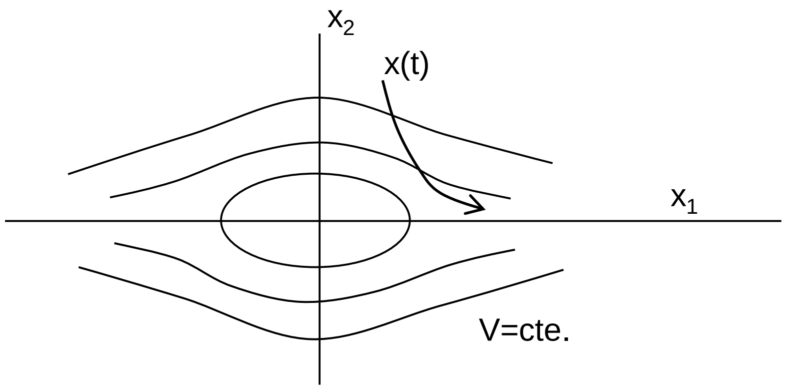


Figura 6.16

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:**

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 =$$
$$= 2x_1^2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - 2x_1x_2 + 2x_2x_1$$
$$+ 2x_2^2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$\dot{V}$ es localmente definida negativa en $B = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ $\Rightarrow$ ***0*** es un equilibrio *asintóticamente estable* (uniformemente).

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:** $\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + e^{-2t} x_2(t)$

  $\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t)$

Candidata de Lyapunov:

$$V(t, x_1, x_2) = x_1^2 + (1 + e^{-2t}) x_2^2$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2(1+e^{-2t})x_2\dot{x}_2 - 2x_2^2 e^{-2t} \\ &= 2x_1(-x_1 + e^{-2t}x_2) + 2(1+e^{-2t})x_2(-x_1 - x_2) - 2x_2^2 e^{-2t} \\ &= -2x_1^2 + 2x_1x_2e^{-2t} - 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2e^{-2t} - 2x_2^2e^{-2t} \\ &\quad - 2x_2^2 e^{-2t}\end{aligned}$$

$$\dot{V}(t, x_1, x_2) = -2\left[x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2(1 + 2e^{-2t})\right]$$

$$\dot{V}(t, x) \le -W(x), \quad W(x) = 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) > 0$$

$\Rightarrow$ ***0*** es equilibrio *globalmente uniformemente asintóticamente estable*.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema de estabilidad exponencial:** Supóngase que existen constantes *a, b, c, r >0, p≥1* y una función continuamente diferenciable V: $\Re_+ \times \Re^n \to \Re$ tal que:

$$a\|x\|^p \leq V(t,x) \leq b\|x\|^p, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in B_r$$

$$\dot{V}(t,x) \leq -c\|x\|^p, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in B_r$$

Entonces el equilibrio **0** es *exponencialmente estable*.

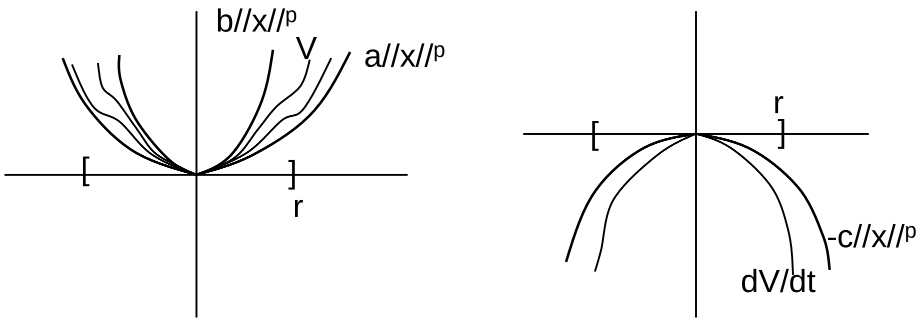


Figura 6.17

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema de estabilidad exponencial global:** El equilibrio **0** es *globalmente exponencialmente estable* si existen constantes *a, b, c>0, p* $\geq$ *1* y una función continuamente derivable $V: \Re_+ x\ \Re^n \rightarrow \Re$ tal que,

$$a\|x\|^p \leq V(t,x) \leq b\|x\|^p$$

$$\dot{V}(t,x) \leq -c\|x\|^p \qquad , \forall t \geq 0, \forall x \in \Re^n$$

- **Conjunto invariante:** Un conjunto G es un conjunto invariante para un sistema dinámico si toda trayectoria que comienza en G, permanece en G. Esto es una generalización del concepto de punto de equilibrio.

- **Ejemplos:**
  - Puntos de equilibrio
  - Dominio de atracción de un punto de equilibrio
  - Todo el espacio de estados (trivial)
  - Cualquier trayectoria, en particular los ciclos límites.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema de conjunto invariante local (Krasovskii, 1959; LaSalle, 1960):**

Considérese el sistema ***autónomo*** $\dot{x} = f(x)$ con *f* continua y sea *V(x)* una función escalar con derivadas parciales continuas. Asúmase que para algún *l>0*, Ω_l={x/ V(x)<l} es acotado y $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \Omega_l$. Sea R el conjunto de todos los puntos en Ω_l donde $\dot{V}(x) = 0$ y *M* el más grande conjunto invariante en *R*. Entonces toda solución *x(t)* que se origina en Ω_l tiende a *M* con $t \to \infty$.

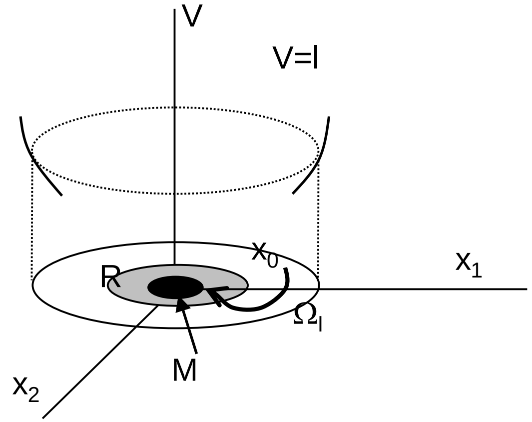


Figura 6.17

- **Nota:** Si *M* es el equilibrio en estudio, puede usarse este teorema para probar estabilidad asintótica.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo: (sistema masa-resorte-amortiguador)**

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0 x + k_1 x^3 = 0$$

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0 x + k_1 x^3)dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0 x^2 + \frac{1}{4}k_1 x^4$$

$$\dot{V}(x) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0 x + k_1 x^3)\dot{x} = \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3 \leq 0$$

$\Rightarrow$ Estabilidad. La aplicación del teorema de conjunto invariante permite obtener estabilidad asintótica:

- Para *l>0*, Ω_l acotado, $\dot{V} \leq 0$

- Conjunto *R*: $\dot{V} = 0, \quad \dot{x} = 0$

- Conjunto *M*: para $R\ (\dot{x} = 0)$ se observa que la aceleración $\ddot{x} = -\frac{k_0}{m}x - \frac{k_1}{m}x^3 - b\dot{x}|\dot{x}|$ es cero sólo si $\dot{x} = 0,\ x = 0$
  $\Rightarrow$ el único conjunto invariante en *R* es *(0,0)*. Aplicando el teorema de conjunto invariante resulta que $x(t) \to 0\ con\ t \to \infty$ (*estabilidad asintótica*).

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo: (dominio de atracción).**

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$
$$\dot{V} = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

es localmente definida negativa en $B_2 = \{x_1^2 + x_2^2 < 2\}$.

$\Rightarrow$ ***0*** es localmente asintóticamente estable.

Si se toma *l=1*, $\Omega_1 = \{V(x) = x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Se observa que $R = \{\dot{V}(x) = 0\} = 0$ es un conjunto invariante pues ***0*** es un equilibrio. Por lo tanto toda trayectoria que comienza en Ω_1 tiende asintóticamente a ***0*** $\Rightarrow$ Ω_1 es un dominio de atracción del equilibrio ***0***.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema de conjunto invariante global:** Considérese el sistema *autónomo* $\dot{x} = f(x)$ con *f* continua y sea *V(x)* una función escalar con primeras derivadas parciales continuas. Asúmase que $\dot{V}(x) \le 0 \text{ en } \Re^n$ y $V(x) \to \infty$ **con** $\|x\| \to \infty$. Sea *R* el conjunto de estados donde $\dot{V}(x) = 0$ y *M* el mayor conjunto invariante en *R*. Entonces todas las soluciones convergen asintóticamente a *M* con $t \to \infty$.

- **Ejemplo:** $\ddot{x} + b(\dot{x}) + c(x) = 0$ Con: $\dot{x}b(\dot{x}) > 0 \quad \forall \dot{x} \ne 0$

  $$xc(x) > 0 \quad \forall x \ne 0$$

  $$b(\dot{x}), c(x) \text{ fc. continuas}$$

  que dan las condiciones de efectos de resorte y amortiguador.

  $$V = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x c(y)dy \qquad \dot{V} = \dot{x}\ddot{x} + c(x)\dot{x} = -\dot{x}b(\dot{x}) \le 0$$

  Además, $\dot{V} = 0 \text{ en } \dot{x} = 0$. En $\dot{x} = 0, \quad \ddot{x} = -c(x)$, la aceleración es *0* sólo en *x=0*. O sea, en $R\,(\dot{x} = 0)$ el más grande conjunto invariante es simplemente el equilibrio *M=0*. Por lo tanto se concluye estabilidad asintótica local.

- Si además , $\int_0^x c(r)dr \to \infty$ **con** $|x| \to \infty$ entonces el equilibrio **0** es globalmente asintóticamente estable.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema de inestabilidad:** El equilibrio ***0*** es inestable si existe una función *decreciente* continuamente diferenciable $V:\Re_+ \times \Re^n \to \Re$ y un $t_0 \geq 0$ tal que:

1) $\dot{V}$ es localmente definida positiva
2) $V(t,0) = 0 \quad \forall t \geq t_0$
3) Existen puntos x_0 arbitrariamente próximos a ***0*** tal que $V(t_0, x_0) \geq 0$.

Prueba: Para demostrar que **0** es un equilibrio inestable debe mostrarse que, para algún $\varepsilon>0$, no existe $\delta>0$ tal que $\|x(t)\| < \varepsilon$. Supóngase que $\dot{V}$ es localmente definida positiva en B_r. Como *V* es decreciente, existe β de clase *K* tal que $V(t,x) \leq \beta(\|x\|), \forall t \geq 0, \forall x \in B_s$. Ahora se verá que, si ε=mín{r,s}, no importa cuán pequeño se tome δ, siempre puede encontrarse un x_0 en B_δ tal que $s(t,t_0,x_0)$ sale de o iguala el límite de $B\varepsilon$. Dado $\delta>0$, tomar $x_0 \in B_\delta$ con $V(t_0,x_0) \geq 0$. Mientras *x(t)* esté en Bε, $\dot{V}(t,x(t)) > 0 \;\; \Rightarrow V(t,x(t)) > V(t_0,x_0) \geq 0$. Como $V(t,x) \leq \beta(\|x\|)$, en el peor de los casos, en tiempo finito (pues $\dot{V} \geq \gamma(\|x\|)$ por ser l.d.p.) la función *V(t,x)* igualará β(ε) por lo que $\|x\| \geq \varepsilon$.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:** $$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 + x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_2^2$$

Candidata de Lyapunov para inestabilidad:

$$V(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2)^2 - x_2^2$$

que verifica que es continuamente diferenciable, *V(0)=0* y asume valores positivos arbitrariamente cerca del origen sobre el eje $x_2=0$.

$$\dot{V}(x_1, x_2) =$$
$$2(2x_1 - x_2)(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - 2x_2\dot{x}_2 = \left[(2x_1 - x_2)^2 + x_2^2\right](1 + x_2)$$

$\dot{V}$ es localmente definida positiva en $B_1 \Rightarrow$ ***0*** es un equilibrio inestable.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Observaciones generales:**

- Ventajas del uso de los teoremas de Lyapunov: se puede concluir sobre la estabilidad de los equilibrios sin resolver el sistema.

- Desventajas: la búsqueda de una función de Lyapunov.

- Debe recordarse que se trata de *condiciones suficientes*.

- La condición de función candidata de Lyapunov "*decreciente*" se corresponde con la estabilidad uniforme. Si el sistema es autónomo, dicha función candidata será obviamente decreciente y las condiciones de estabilidad serán siempre uniformes.

- Algunas funciones de Lyapunov pueden dar más información que otras. Ejemplo: en el caso del péndulo con fricción $\ddot{\theta} + \dot{\theta} + sen\theta = 0$

$$V(x) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\theta} + \theta)^2 + 2(1 - \cos\theta)$$

$$\dot{V}(x) = -(\dot{\theta}^2 + \theta \operatorname{sen}\theta) < 0 \quad (\text{localmente})$$

Con esta función de Lyapunov (que no tiene significado físico) se concluye estabilidad asintótica local. Si se toma $V(x) = K + P$ (energías), $\dot{V}(x) = -\dot{\theta}^2 \leq 0$ y sólo se concluye estabilidad.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Sistemas lineales invariantes:**

  Dado un sistema lineal invariante $\dot{x} = Ax$, considérese la candidata de Lyapunov

$$V = x^T P x, \quad P = P^T > 0$$

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x =$$

$$= x^T (A^T P + PA) x = -x^T Q x, \qquad Q = Q^T$$

Para cualquier *P* simétrica y definida positiva, *Q* puede o no ser simétrica y definida positiva, aún para sistemas estables. Esto puede verificarse por ejemplo con el sistema

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores están en
$$\lambda_{1,2} = -\frac{12}{2} \pm \frac{\sqrt{12^2 - 128}}{2}$$

por lo que el sistema es estable. Tomando *P=I* resulta $Q = -(PA + A^T P) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$

que no es una matriz definida positiva.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Más útil es derivar *P* de $Q>0$:

1) Elegir $Q=Q^T > 0$
2) Resolver la ecuación de Lyapunov $-Q=PA+A^TP$ para *P*
3) Verificar si P es >0.

Este procedimiento siempre es conclusivo sobre la estabilidad del sistema en base al siguiente teorema.

- **Teorema (condición de estabilidad de sistemas lineales):** Una condición *necesaria y suficiente* para que un sistema lineal autónomo sea estrictamente estable es que, para cualquier *Q* simétrica y definida positiva, la única solución *P* de la ecuación de Lyapunov sea simétrica y definida positiva.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:**

  Para el caso antes analizado

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$$

Tomando $Q=I$ por simplicidad, resulta al resolver la ecuación de Lyapunov $PA+A^TP=-I$,

$$P = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > 0$$

lo que implica que el sistema es estrictamente estable (globalmente asintóticamente estable).

- **Sistemas lineales variantes**

$$\dot{x} = A(t)\,x$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema (Estabilidad de sistemas lineales variantes):** El sistema lineal variante es asintóticamente estable si los autovalores de la matriz simétrica $A(t)+A^T(t)$ permanecen estrictamente en el semiplano izquierdo, o sea

$$\exists\, \lambda > 0 \ \textbf{tal que}\ \lambda_i\left(A(t) + A^T(t)\right) \le -\lambda,\ \forall i = 1,\ldots n\ \forall t \ge 0$$

- ***Prueba:***

$$V = x^T x$$

$$\dot{V} = x^T \dot{x} + \dot{x}^T x = x^T\left(A(t) + A^T(t)\right)x \le -\lambda x^T x = -\lambda V$$

Además,

$$x^T x = V(t) \le V(\mathbf{0}) e^{-\lambda t} \qquad \forall t \ge 0$$

por lo que $x(t)$ tiende exponencialmente a cero.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Observaciones:**

- No es suficiente garantizar que *A(t)* sea Hurwitz para todo tiempo *t* para asegurar que el sistema lineal variante sea asintóticamente estable. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

tiene sus autovalores ambos en -1. Sin embargo, $x_2(t) = x_2(0)e^{-t}$ y reemplazando en la ecuación para $\dot{x}_1$:

$$\dot{x}_1 + x_1 = x_2 e^{2t} = x_2(0)e^{t}$$

lo cual muestra que el sistema es inestable, pues la ecuación en x_1 es un sistema de primer orden cuya entrada tiende a infinito.

- Este teorema provee *condiciones suficientes*. Existen sistemas lineales variantes asintóticamente estables que no verifican las condiciones del teorema.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema (condiciones sobre la matriz A(t)):** Considere el sistema $\dot{x} = A(t)x$ y supóngase que para todo tiempo *t*, los autovalores de *A(t)* tienen parte real negativa:

$$\exists \alpha > 0, \textbf{tal que } \lambda_i \left[A(t) \right] \leq -\alpha, \quad i = 1, \ldots n, \quad \forall t \geq 0$$

Además supóngase que *A(t)* es *acotada* y que $\int_0^\infty A^T(t) A(t) dt < \infty$

Entonces el sistema es *globalmente exponencialmente estable*.

- **Teorema (sistema lineal perturbado):**

Sea el sistema lineal variante

$$\dot{x} = (A_1 + A_2(t))x$$

con A_1 constante y Hurwitz y $A_2(t)$ –perturbación- tal que

$$A_2(t) \to 0 \ \textbf{con} \ t \to \infty$$

$$\int_0^\infty \left\| A_2(t) \right\| dt < \infty$$

Entonces, el sistema es *globalmente exponencialmente estable*.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Análisis de desempeño**

- **Lema:** Si $\dot{w}(t) + \alpha w(t) \leq 0$ con $w(t):\ fc.\ real,\ \alpha \in \Re$, entonces

$$w(t) \leq w(0)e^{-\alpha t}$$

Prueba: Dado $z(t) = \dot{w} + \alpha w, \quad z(t) \leq 0$ la solución es

$$w(t) = w(0)e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-r)} z(r)dr$$

donde el segundo sumando es menor o igual a cero. Por lo tanto se verifica la desigualdad del lema.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Velocidad de convergencia para sistemas no lineales:**

Sea el sistema: $\dot{x} + c(x) = 0, \quad xc(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

Tomando $V(x) = x^2$ resulta $\dot{V} = 2x\dot{x} = -2xc(x) < 0$.

Ahora supóngase que $xc(x) \geq x\alpha x = \alpha x^2$, entonces $\dot{V} \leq -2\alpha x^2$

$$\dot{V} \leq -2\alpha V$$

$$\dot{V} + \gamma V \leq 0$$

Aplicando el lema anterior: $V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t}$

$$\|x(t)\|^2 \leq \|x(0)\|^2 e^{-\gamma t}$$

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

lo que significa que las trayectorias convergen exponencialmente al equilibrio en ***0*** con una tasa superior a γ*/2*.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

6.3 Método indirecto de Lyapunov

- **Linealización y estabilidad local**

Dado el sistema **autónomo** no forzado $\dot{x} = f(x)$, puede escribirse

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} x + f_{os}(x)$$

con $\boldsymbol{f_{os}(x)}$ un término de orden superior, ***f(0)=0*** y $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0}$ la matriz de linealización.

El sistema *linealizado* en el entorno del equilibrio ***0*** resulta: $\dot{x} = Ax$

Para un sistema **autónomo forzado** con entrada *u* y tal que ***f(0,0)=0*** se puede escribir:

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0,u=0} x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{x=0,u=0} u + f_{os}(x,u)$$

Denominando $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0,u=0}$, $B = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{x=0,u=0}$, la linealización en ***x=0, u=0***,

resulta: $\dot{x} = Ax + Bu$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema (Método indirecto o de linealización de Lyapunov):** Valen las siguientes afirmaciones:

  - Si el sistema linealizado es estrictamente estable (autovalores de *A* estrictamente en el semiplano izquierdo), entonces el punto de equilibrio es *asintóticamente estable* para el sistema no lineal.

  - Si el sistema linealizado es inestable (por lo menos un autovalor de *A* estrictamente en el semiplano derecho), entonces el punto de equilibrio es *inestable* para el sistema no lineal.

  - Si el sistema linealizado es marginalmente estable (los autovalores en el semiplano izquierdo con al menos uno en el eje imaginario), entonces no se puede concluir nada respecto del punto de equilibrio del sistema no lineal. Los términos de alto orden despreciados definen la estabilidad del equilibrio.

- **Nota:** El problema con este método es que da resultados locales sin definir cuán extenso es el rango lineal donde puede moverse el sistema siendo válida la aproximación y las conclusiones.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema (sistema autónomo forzado):** Considérese el sistema autónomo forzado:

$$\dot{x}(t) = f\left[x(t), u(t)\right]$$

donde $f : \Re^n \times \Re^m \to \Re^n$. Supóngase que ***f*** es continuamente diferenciable y que ***f*(0,0)=0**. Defínanse:

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0,u=0}, \; B = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{x=0,u=0}$$

Supóngase que existe una matriz $K \in \Re^{n\times m}$ tal que los autovalores de *(A-BK)* tienen parte real negativa. Bajo esas condiciones, si se elige

$$u(t) = -Kx(t)$$

entonces ***0*** es un equilibrio *asintóticamente (exponencialmente) estable* del sistema realimentado

$$\dot{x}(t) = f\left[x(t), -Kx(t)\right]$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Técnica para estabilizar localmente un sistema no lineal:**

  Del teorema anterior surge la siguiente técnica:

  1. Linealizar el sistema no lineal.
  2. Hallar la ley de control estabilizante para el sistema linealizado.
  3. Implementar la misma ley de control para el sistema no lineal original.

- **Sistemas no autónomos**

  Para el sistema $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ supóngase que ***f****(t,***0***)=***0*** para todo $t \geq 0$ y ***f****(t,.)* es continuamente diferenciable. Defínase,

$$A(t) = \left[\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \right]_{x=0}$$

$$f_1(t,x) = f(t,x) - A(t)x$$

Para cada t $\geq$ 0 fijo, $\lim\limits_{\|x\| \to 0} \frac{\|f_1(t,x)\|}{\|x\|} = 0$. Sin embargo, $\lim\limits_{\|x\| \to 0} \sup\limits_{t \geq 0} \frac{\|f_1(t,x)\|}{\|x\|}$

no es necesariamente nulo. O sea, la convergencia puede o no ser uniforme en *t*. Supuesto que este límite es nulo (convergencia uniforme), entonces $\dot{z}(t) = A(t)z(t)$ es la linealización de $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ alrededor del origen.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo** $$\dot{x}_1 = -x_1 + t x_2^2$$ $$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

donde ***f*** es continuamente diferenciable.

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \forall t \geq 0 \qquad f_1(t,x) = f - Ax = \begin{pmatrix} t x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

No se cumple la condición de uniformidad y entonces $\dot{z} = A(t)z$ no es la linealización del sistema.

- **Teorema (estabilidad exponencial):** Considérese el sistema $\dot{x}(t) = f[t, x(t)]$. Supóngase que $f(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0$, y que ***f****(t,.)* es continuamente diferenciable.

Defínase $$A(t) = \left[\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \right]_{x=0}$$ tal que $$\lim_{\|x\|\to 0} \sup_{t\geq 0} \frac{\|f_1(t,x)\|}{\|x\|} = 0$$

$$f_1(t,x) = f(t,x) - A(t)x \qquad A(t)\ \textbf{acotado}: \sup_{t\geq 0} \|A(t)\|_i < \infty$$

Bajo estas condiciones, si el equilibrio ***0*** del sistema $\dot{z}(t) = A(t)z(t)$ es exponencialmente estable, el equilibrio ***0*** del sistema no lineal es también *exponencialmente estable*.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Teorema (inestabilidad):** Considérese el sistema $\dot{x}(t) = f\left[t, x(t)\right]$. Supóngase que *f(t,**0**)=**0*** y *f(t,.)* es continuamente diferenciable. Supóngase que,

$$A(t) = \left[\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right]_{x=0} \equiv A_0 \quad \forall t \geq 0$$

A_0 es una matriz constante. Además supóngase que

$$\lim_{\|x\|\to 0} \sup_{t\geq 0} \frac{\|f_1(t,x)\|}{\|x\|} = 0$$

Entonces, el equilibrio ***0*** es inestable si por lo menos un autovalor de A_0 tiene parte real positiva.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Perturbaciones singulares**
  A continuación se enuncia un teorema de perturbaciones singulares para sistemas no lineales. Esto completa el tema del análisis por perturbaciones singulares que se trató en el capítulo 5.

- **Teorema (perturbaciones singulares):** Considérese el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f\left[x(t), y(t)\right] \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) &= g\left[x(t), y(t)\right]\end{aligned} \qquad (*)$$

con $f:\Re^n x \Re^m \rightarrow \Re^n, \quad g:\Re^n x \Re^m \rightarrow \Re^m$ funciones continuamente diferenciables que satisfacen, ***f(0,0)=0**, **g(0,0)=0***.

Defínanse las matrices

$$A_{11} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} \qquad A_{12} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} \qquad A_{21} = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(0,0)} \qquad A_{22} = \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$

y supóngase que A_{22} es no singular. Bajo estas condiciones, existe una función continuamente diferenciable $h:\Re^n \rightarrow \Re^m$ tal que en alguna vecindad de ***(0,0)***, *y=h(x)* es una solución de *g(x,y)=0*.

Más aún, se tiene que

1) Si todos los autovalores de A_{22} y de A_{11}-$A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$=A_0 tienen parte real negativa, entonces existe un ε_0 tal que ***(0,0)*** es un equilibrio exponencialmente estable del sistema completo (*) con $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

2) Si por lo menos un autovalor de A_{22} o de A_0 tiene parte real positiva, entonces hay un ε_0 tal que ***(0,0)*** es un punto de equilibrio inestable del sistema completo (*) con $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

- **Ejemplo**

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1 + y - 1) + x_2^2 + y$$

$$\dot{x}_2 = x_1(x_1^2 - 5) + x_2(x_1 - 3) + y(x_2 + 1)$$

$$\varepsilon\dot{y} = -x_1(x_1 - 2) - x_2(x_1 - 1) - y(y + 1)$$

Se calculan,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = A_0$$

Como todos los autovalores de A_{22} y de A_0 tienen parte real negativa, entonces existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que el origen $(0,0,0)^T$ es un equilibrio exponencialmente estable del sistema no lineal cuando $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$.

6.4 Estabilidad de sistemas perturbados

- **Sistemas perturbados**

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)$$
$$f : [0,\infty) xD \to \Re^n$$
$$g : [0,\infty) xD \to \Re^n$$

y ambas funciones son continuas a tramos en *t* y localmente Lipschitz en *x* sobre $[0,\infty)xD,\ D \subset \Re^n$ contiene al origen.
Se interpreta como un **sistema perturbado** con $\dot{x} = f(t,x)$ el **sistema nominal**, *g(t,x)* el término de **perturbación** resultado de errores de modelado, desgaste o incertidumbre y perturbaciones en un problema real.
En una situación típica no se conoce *g(t,x)* pero se tiene alguna información, por ejemplo una cota superior de $\|g(t,x)\|$.

- Se representa la perturbación como un **término aditivo** en la ecuación de estados. Las incertidumbres que no cambian el orden del sistema pueden siempre representarse así.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Perturbación que se anula en el equilibrio**

Analícese el caso en que *g(t,0)=0*. Supóngase que *x=0* es un equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal y *V(t,x)* una función de Lyapunov que satisface:

$$c_1\|x\|^2 \le V(t,x) \le c_2\|x\|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -c_3\|x\|^2$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \le c_4\|x\|$$

$$\forall (t,x) \in [0,\infty) x D \ \text{ y con } \ c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$$

Supóngase que *g(t,x)* satisface

$$\|g(t,x)\| \le \gamma\|x\| \qquad \forall t \ge 0, \forall x \in D, \textbf{ y con } \gamma \ge 0.$$

Se utilizará *V* como una función candidata para investigar la estabilidad del origen como un punto de equilibrio del sistema perturbado.

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t,x)$$

El tercer término es el efecto de la perturbación.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Analizando la peor situación:

$$\dot{V}(t,x) \leq -c_3\|x\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \|g(t,x)\| \leq -c_3\|x\|^2 + c_4\gamma\|x\|^2$$

Si γ es suficientemente pequeño para satisfacer: $\gamma < \dfrac{c_3}{c_4}$

entonces: $\dot{V}(t,x) \leq -(c_3 - \gamma\, c_4)\|x\|^2; \quad (c_3 - \gamma\, c_4) > 0$

y el equilibrio es *exponencialmente estable* para el sistema perturbado.

- **Nota:**

- Si las suposiciones se verifican globalmente, el origen es globalmente exponencialmente estable.

- Este estudio (que puede enunciarse como un lema) muestra una propiedad de **robustez** del equilibrio exponencialmente estable frente a perturbaciones con las condiciones descriptas.

- **Ejemplo (sistema lineal invariante perturbado):**

$$\dot{x} = Ax + g(t,x) \qquad A \text{ Hurwitz}$$

$$\left\| g(t,x) \right\|_2 \leq \gamma \left\| x \right\|_2 \qquad \forall t \geq 0 \ \text{ y } \forall x \in \Re^n$$

Sea $Q=Q^T>0$ y resuélvase la ecuación de Lyapunov $PA+A^TP=-Q$. Existe una única solución $P=P^T>0$. Tomando $V(x)=x^TPx$:

$$\lambda_{min}(P) \left\| x \right\|_2^2 \leq V(x) \leq \lambda_{max}(P) \left\| x \right\|_2^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} Ax = -x^T Q x \leq -\lambda_{min}(Q) \left\| x \right\|_2^2$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|_2 = \left\| 2x^T P \right\|_2 \leq 2 \left\| P \right\|_{2i} \left\| x \right\|_2 = 2\,\lambda_{max}(P) \left\| x \right\|_2$$

La derivada de V en las trayectorias del sistema perturbado es:

$$\dot{V}(x) \leq -\lambda_{min}(Q) \left\| x \right\|_2^2 + 2\lambda_{max}(P)\gamma \left\| x \right\|_2^2$$

El origen es equilibrio globalmente exponencialmente estable del sistema perturbado si $\gamma < \dfrac{\lambda_{min}(Q)}{2\lambda_{max}(P)}$. La relación se maximiza eligiendo $Q=I$. Esta relación depende de Q, e interesa que sea máxima para tener una cota más amplia de $g(t,x)$.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:** $$\dot{x}_1 = x_2$$ $$\dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 + \beta\, x_2^3$$

con $\beta \geq 0$ desconocida.
Se tiene:

$$f(x) = Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\; g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta\, x_2^3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2}(A) = -1 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow A \text{ Hurwitz.}$$

Con $Q=I$, $PA+A^TP=-I$ resulta

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$$

$V(x)=x^TPx$. Se verifican las desigualdades con $c_3= \lambda_{min}(Q)=1;$
$c_4 =2\lambda_{max}(P)=2x1,513=3,026.$

El término de perturbación satisface:

$$\|g(x)\|_2 = \beta\, |x_2|^3 \leq \beta\, k_2^2\, |x_2| \leq \beta\, k_2^2 \|x\|_2, \quad \forall |x_2| \leq k_2$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Para el sistema perturbado: $\dot{V}(x) \le -\|x\|_2^2 + 3{,}026\beta\, k_2^2 \|x\|_2^2$

$\dot{V}(x)$ es definido negativo si $\beta < \dfrac{1}{3{,}026\, k_2^2}$

Estima de la <u>cota k_2</u> :

Sea $\Omega_c = \{x \in \Re^2 \,/\, V(x) \le c\}$. Para cualquier *c>0,* Ω_c es cerrado y acotado con el contorno dado por:

$$V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1 x_2 + \frac{5}{16}x_2^2 = c$$

El máximo valor de $|x_2|$ en *V(x)=c* puede determinarse a partir de la expresión anterior, derivando respecto de x_1:

$$x_2^2 = \frac{16}{5}\left(c - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}x_1 x_2\right); \quad \frac{\partial x_2^2}{\partial x_1} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{12}x_2 \ \textbf{(para máximo de } \mathbf{x_2^2}\textbf{)}$$

La intersección de esta función con la curva *V(x)=c* resulta en

$$x_2^2 = \frac{96\,c}{29}; \ x_2^2 \ \textbf{máximo}$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Entonces todos los puntos dentro de Ω_c satisfacen

$$|x_2| \le k_2 \;\; \textbf{con} \;\; k_2^2 = \frac{96c}{29}$$

Se concluye que si

$$\beta < \frac{29}{3{,}026 \times 96c} \cong \frac{0{,}1}{c}$$

$\dot{V}$ será definida negativa en Ω_c y el equilibrio ***0*** es exponencialmente estable con Ω_c una estima de la región de atracción.

La desigualdad $\beta < \dfrac{0{,}1}{c}$ muestra un compromiso entre la estima de la región de atracción y la cota superior de β.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Equilibrio uniformemente asintóticamente estable.**

En este caso el análisis de estabilidad del sistema perturbado es más complejo. Supóngase que el sistema nominal tiene una función de Lyapunov definida positiva y decreciente tal que:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -W_3(x)$$

$$\forall (t,x) \in [0,\infty) \times D, \quad W_3(x) \textbf{ def. positiva y continua.}$$

Para el sistema perturbado:

$$\dot{V}(t,x)=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x} f(t,x)+\frac{\partial V}{\partial x} g(t,x) \le$$

$$\le -W_3(x)+\left\|\frac{\partial V}{\partial x} g(t,x)\right\|$$

Debe verificarse que

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x} g(t,x)\right\| < W_3(x) \quad \forall (t,x) \in [0,\infty) \times D$$

Las cotas de crecimiento que puedan fijarse sobre *g(t,x)* dependen de la función de Lyapunov. Un caso simple es el de las funciones de Lyapunov de tipo cuadrático, en que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -c_3 \phi^2(x)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \phi(x)$$

con $\phi(x)$: $\Re^n \rightarrow \Re$ continua y definida positiva.

Entonces

$$\dot{V}(t,x) \leq -c_3 \phi^2(x) + c_4 \phi(x) \| g(t,x) \|$$

Supóngase que el término de perturbación satisface

$$\| g(t,x) \| \leq \gamma \phi(x) \qquad \gamma < \frac{c_3}{c_4}$$

entonces

$$\dot{V}(t,x) \leq -(c_3 - c_4 \gamma) \phi^2(x)$$

$\Rightarrow$ estabilidad asintótica uniforme del equilibrio ***0*** del sistema perturbado.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:** $\dot{x} = -x^3 + g(t,x)$

El sistema nominal tiene el equilibrio ***0*** globalmente asintóticamente estable, pero no exponencialmente estable:

$$V(x) = x^4$$

$$\dot{V}(x) = 4x^3\dot{x} = -4x^6$$

Con $\phi(x)=|x|^{\beta}$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) = -4x^6 \leq -4\phi^2(x) \qquad c_3 = 4$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| = 4\|x\|^3 \leq 4\phi(x) \qquad c_4 = 4$$

Para el sistema perturbado:

$$\dot{V}(x) \leq -4(1-\gamma)\phi^2(x)$$

Si *g(x,g)* satisface $|g(t,x)| \leq \gamma |x|^3 \quad \forall x \quad \text{con } \gamma < 1$ entonces el equilibrio ***0*** es globalmente asintóticamente estable.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Ejemplo:** $\dot{x} = -x^3 + \gamma\ x$

el origen es inestable cualquiera sea γ>0 (se ve por linealización).
Esto muestra que, a diferencia de un sistema con ***0*** exponencialmente estable, el equilibrio ***0*** asintóticamente uniformemente estable no es robusto a una perturbación lineal de los estados.

- **Perturbaciones que no se anulan en el equilibrio**

Considérese un sistema $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$
con $V(t,x) > 0 \qquad \dot{V}(t,x) = -\alpha\ V(t,x)$ (estab. asintótica)

Para el sistema perturbado: $\dot{V}(t,x) = -\alpha V(t,x) + \rho(t)$

Si $\mathbf{sup}|\rho(t)| = \rho < \infty$: $\dot{V}(t,x) \leq -\alpha V(t,x) + \rho$

Integrando entre *0* y *t*:

$$V(t) \leq e^{-\alpha t}\left[V(0) - \frac{\rho}{\alpha}\right] + \frac{\rho}{\alpha}$$

$$x(t) \to B\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) \textbf{ con } t \to \infty; \qquad B\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) = \left\{V(t) \leq \frac{\rho}{\alpha}\right\}$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Una cota superior de *V* es $V \leq \dfrac{\rho}{\alpha}$

Por ejemplo si
$$V = x^T P x,$$
$$V \geq \lambda_{min}(P)\,\|x\|_2^2$$
$$\Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{\frac{\rho}{\alpha\ \lambda_{min}(P)}}$$

que es la cota donde estará *x* para $t \to \infty$.

- **Soluciones uniformemente finalmente acotadas:** Las soluciones de $\dot{x} = f(t,x)$ se dicen *uniformemente finalmente acotadas* si existen *b,c >0* tal que para cada $\alpha \in (0,c)$ hay una constante positiva *T* **=** *T(*α*)* tal que:

$$\|x(t_0)\| < \alpha \ \Rightarrow \|x(t)\| \leq b \quad \forall t \geq t_0 + T(\alpha)$$

Se dicen *globalmente* uniformemente finalmente acotadas si lo anterior vale para α arbitrariamente grande. *b* se denomina la ***cota final***.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

- **Lema**: Sea *x=0* un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal $\dot{x} = f(t,x)$. Sea *V(t,x)* la función de Lyapunov que satisface para el sistema nominal:

$$c_1\|x\|^2 \le V(t,x) \le c_2\|x\|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -c_3\|x\|^2$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \le c_4\|x\| \qquad en\left[0,\infty\right)\times D$$

$$D = \left\{x \in \Re^n / \|x\| < r\right\}$$

Supóngase la perturbación *g(t,x)* que satisface:

$$\|g(t,x)\| \le \delta < \frac{c_3}{c_4}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\,\theta r \qquad \forall t \ge 0, \forall x \in D \ \mathbf{y} \ \theta < 1$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Entonces $\forall \left\| x(t_0) \right\| < \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\, r$ la solución del sistema perturbado satisface

$$\begin{array}{ll} \left\| x(t) \right\| \le k \left\| x(t_0) \right\| e^{-\gamma (t - t_0)} & \forall t_0 \le t \le t_1 \\ \left\| x(t) \right\| \le b, & \forall t \ge t_1 \end{array}$$

para algún t_1 finito, con

$$k = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \qquad \gamma = \frac{(1-\theta) c_3}{2 c_2} \qquad b = \frac{c_4}{c_3} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\, \frac{\delta}{\theta}$$

Justificación:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x) &\le -c_3 \left\| x \right\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \left\| g(t,x) \right\| \le -c_3 \left\| x \right\|^2 + c_4 \delta \left\| x \right\| \\ &= -(1-\theta) c_3 \left\| x \right\|^2 - \theta\, c_3 \left\| x \right\|^2 + c_4 \delta \left\| x \right\| \qquad 0 < \theta < 1 \\ &\le -(1-\theta) c_3 \left\| x \right\|^2 \qquad \forall \left\| x \right\| \ge \frac{\delta\, c_4}{\theta\, c_3} \end{aligned}$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

$$\dot{V} \le -(1-\theta)\frac{c_3}{c_2}V \qquad c_1\|x\|^2 \le V \le c_2\|x(t_0)\|^2 e^{-(1-\theta)\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)}$$

$$V \le V(t_0)e^{-(1-\theta)\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)} \qquad \|x(t)\| \le \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\; e^{-\frac{(1-\theta)c_3}{2c_2}(t-t_0)}\|x(t_0)\|$$

- **Ejemplo:**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 + d(t) \end{cases}$$

$$V(x) = x^T P x$$

$$\lambda_{min}(P)\|x\|^2 \le V(x) \le \lambda_{max}(P)\|x\|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) = -x^T Q x \le -\lambda_{min}(Q)\|x\|^2$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| = \|2x^T P\| \le 2\,\lambda_{max}(P)\|x\|$$

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Si Q=I:

$$\dot{V}(x) = -\|x\|^2 + 2d(t)\left(\frac{1}{8}x_1 + \frac{5}{16}x_2\right)$$

$$\leq -(1-\theta)\|x\|^2 - \theta\ \|x\|^2 + 2\lambda_{max}(P)\,\delta\ \|x\|$$

$$\dot{V}(x) \leq -(1-\theta)\|x\|^2 \quad \textbf{si} \quad \|x\| \geq 2\lambda_{max}(P)\frac{\delta}{\theta}$$

Para un *0<*θ*<1* y un δ, las soluciones están *uniformemente finalmente acotadas* con una cota final

$$b = 2\,\lambda_{\max}(P)\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\ \frac{\delta}{\theta}$$

6.5 Ejercicios

6.1 Mostrar que exponencialmente estable implica: a) estable, b) asintóticamente estable.

6.2 Dibujar un diagrama de Venn que represente las relaciones entre los tipos de estabilidad. Idem para el caso de sistemas autónomos y para sistemas lineales.

6.3 Dado el sistema $\dot{x}(t) = a(t)x(t) \quad t \geq 0$ con *a(t)* función continua. La solución es $x(t) = x(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$.

a) Mostar que el equilibrio es estable sii $\sup_{t \geq t_0} e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = m(t_0) < \infty$

b) Mostrar que es uniformemente estable sii *m*(t_0) está acotado.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

6.4 Determinar si las siguientes funciones son localmente definidas positivas, definidas positivas o decrecientes:

$$W(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$$

$$W(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$$

$$W(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2)^2$$

$$V(x_1, x_2) = t(x_1^2 + x_2^2)$$

$$V(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)/(t+1)$$

6.5 Analizar por Lyapunov la estabilidad del equilibrio del sistema $\dot{x} + c(x) = 0$ donde se cumple la condición c(x) es función continua y $xc(x) > 0, \quad \forall x \neq 0$.

6.6 Para el sistema $\ddot{y}(t) + f\left[y(t)\right]\dot{y}(t) + g\left[y(t)\right] = 0$ escribir la ecuación de estados tomando $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}$. Suponga que en el intervalo $[-\sigma_0, \sigma_0]$ se verifica que $\sigma g(\sigma) > 0$ para $\sigma \neq 0$ y $g(0) = 0$. Concluya sobre la estabilidad del equilibrio para los casos en que se verifique $f(\sigma) \geq 0$ y $f(\sigma) > 0$ en el intervalo $[-\sigma_0, \sigma_0]$. *Nota:* tomar una candidata de Lyapunov que sume las energías cinética y potencial del sistema.

6.7 Aplicar el teorema del conjunto invariante al péndulo con fricción para probar estabilidad asintótica local del equilibrio en el origen.

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Revisión:

- Equilibrio estable (uniformemente estable)
- Equilibrio (uniformemente) asintóticamente estable (estable y atractivo)
- Equilibrio globalmente asintóticamente estable (globalmente unif. asint. estable)
- Equilibrio exponencialmente estable
- Equilibrio globalmente exponencialmente estable
- Funciones definidas positivas (local y globalmente)
- Función candidata de Lyapunov. Función de Lyapunov
- Teorema de estabilidad y estabilidad uniforme
- Teorema de estabilidad asintótica y asintótica global
- Teorema de estabilidad exponencial
- Teorema del conjunto invariante
- Método indirecto de Lyapunov (linealización)
- Estabilidad de sistemas perturbados