Identificación de Sistemas

Transparencias

Estructuras de Modelos para Sistemas Lineales Estacionarios

Autor: Dr. Juan Carlos Gómez

- Como los datos de entrada/salida a usar en la Identificación se obtienen por **muestreo**, es más natural asumir que los datos provienen de **un modelo en Tiempo Discreto (TD)**, aunque las variables del sistema sean inherentemente de naturaleza continua.

- Un sistema es **estacionario** si la respuesta del sistema a una misma entrada es la misma independientemente del instante en que se aplica la entrada.

- Un sistema es **lineal** si verifica el ***Principio de Superposición***, es decir si su respuesta a una combinación lineal de entradas es la misma combinación lineal de las respuestas a las entradas individuales.

- Un sistema es **causal** si la salida en un instante depende de las entradas pasadas hasta ese instante (no depende de valores futuros). Para un sistema en TD una **condición necesaria y suficiente** para causalidad es:

Causalidad $\Leftrightarrow$ $h(n) = 0$ para $n < 0$

donde $\{h(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es la **respuesta al impulso** del sistema.

- Un **Sistema Lineal y Estacionario** puede ser completamente descripto por su **respuesta al impulso**, ya que la respuesta del sistema a una entrada arbitraria puede calcularse como la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso del sistema:
  - Sistemas en Tiempo Continuo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau \qquad (1)$$

  - Sistemas en Tiempo Discreto

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) u(n-k)} \qquad (2)$$

Modelos Entrada-Salida

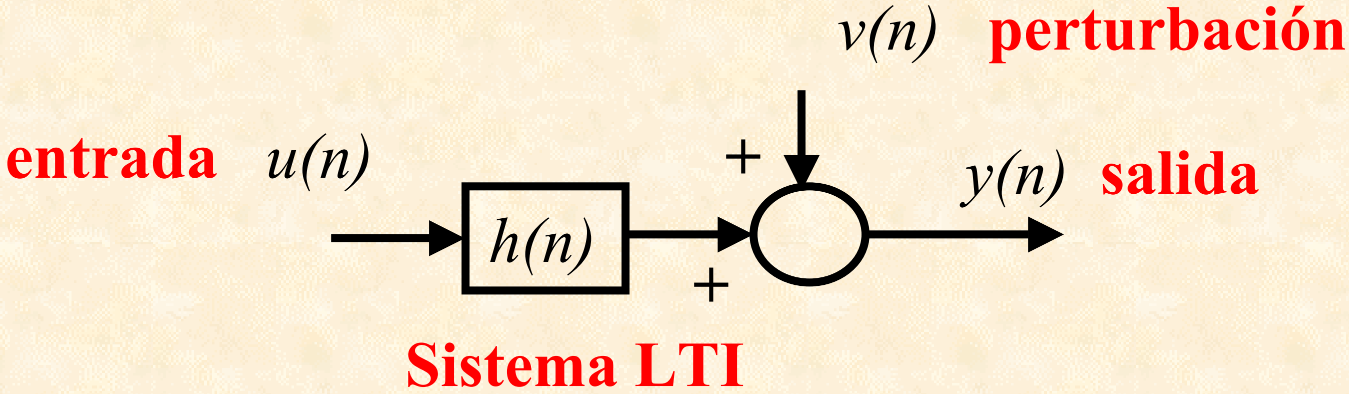
- La relación (2) permite computar la respuesta del SLE a una entrada arbitraria. En la práctica, existen **señales de perturbación** que también afectan la respuesta del sistema. El efecto de estas perturbaciones se suele concentrar en un término $v(n)$ aditivo a la salida, *i.e.*

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) u(n-k) + v(n)$$

Perturbación

$$y(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h(k) q^{-k}}_{G(q)} u(n) + v(n) \qquad (3)$$

Función Transferencia



Modelo Lineal General

- La perturbación $v(n)$ es la parte de la salida que no puede ser explicada por las entradas pasadas. Puede atribuirse a distintas causas:

  Ruido de medición: los sensores que miden las señales están afectados por ruido.

  Entradas no controlables: señales que ingresan al sistema pero que no son controlables por el usuario, y generalmente tampoco son medibles.

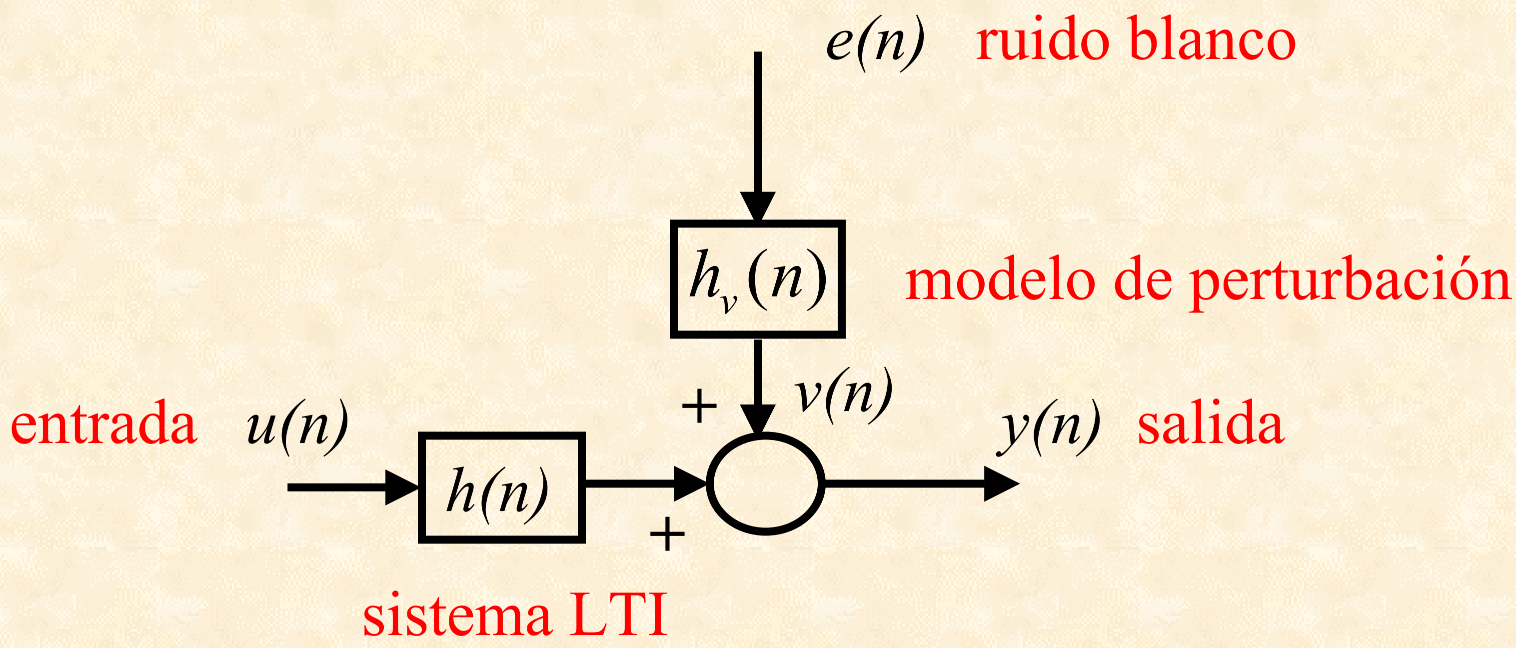
Caracterizacion de las perturbaciones

- Una característica importante de las perturbaciones es que su valor **no se conoce de antemano.** Existen básicamente dos enfoques respecto a la caracterización de las pertubaciones:
  - **Enfoque Probabilistico:** Se asignan probabilidades a las diferentes secuencias $\{v(n)\}$. Es decir $\{v(n)\}$ es un proceso aleatorio con una distribución de probabilidad conocida (por ejemplo a través de la función de densidad de probabilidad (pdf) $p_v(\bullet,\theta)$). Esta caracterización da lugar a modelos estocásticos y los correspondientes métodos de identifica-cion resultan métodos estocásticos.
  - **Enfoque Deterministico:** Se restringe el conjunto de posibles señales de alguna manera, por ejemplo asumiendo que son desconocidas pero que están acotadas, *i.e.*

$$|v(n)| \leq C \qquad \forall n$$

Este enfoque da lugar a los Métodos de Identificación Determinísticos, *e.g.* Bounded Error Estimation, o Set Membership Identification.

- **Enfoque Probabilistico:** Se asume que $\{v(n)\}$ es un proceso aleatorio. Una completa caracterización implicaría conocer la función de densidad de probabilidad condicional conjunta para $\{v(n+\ell), \ell \geq 1\}$ dado $\{v(s), s \leq n\}$, lo que no es realístico. Se adopta en general un enfoque más simple asumiendo que $\{v(n)\}$ es la salida de un SLE cuando su entrada es **ruido blanco**, i.e.



$$v(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h_v(k) q^{-k}}_{H(q)} e(n) = H(q) e(n) \qquad (4)$$

Modelo de perturbación (ruido blanco filtrado)

$$\boxed{y(n) = G(q)u(n) + H(q)e(n)} \qquad (5)$$

$\{e(n)\}$ es **ruido blanco**, *i.e.,* es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) con una cierta función de densidad de probabilidad. Esta descripción, si bien bastante general, no puede caracterizar completamente todas las perturbaciones aleatorias. Usualmente sólo se especifican las estadísticas de segundo orden de $\{e(n)\}$, es decir la **media** y la **varianza**.

- **Valor Medio y Covarianza de $\{\nu(n)\}$**

Asumiremos que $\{e(k)\}$ es ruido blanco con media cero y varianza λ. A partir de la descripcion (5) calcularemos la media y la varianza de $\{\nu(n)\}$.

La media resulta

$$\mathrm{E}\{\nu(n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h_\nu(k)\mathrm{E}\{e(n-k)\} = 0 \qquad (6)$$

La covarianza resulta

$$\mathrm{E}\{\nu(n)\nu(n-\ell)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} h_\nu(k)h_\nu(s)\mathrm{E}\{e(n-k)e(n-\ell-s)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} h_\nu(k)h_\nu(s)\delta(k-\ell-s)\lambda$$

$$= \lambda\sum_{k=0}^{\infty} h_\nu(k)h_\nu(k-\ell) \qquad (7)$$

donde $h_\nu(r)=0$ para $r<0$. Podemos notar que la covarianza es independiente de n. La denotaremos

$$R_\nu(\ell) = \mathrm{E}\{\nu(n)\nu(n-\ell)\}$$

y la designaremos como **funcion covarianza** del proceso $\{\nu(n)\}$.

Como la media en (6) y la covarianza en (7) no dependen de n , se dice que el proceso es **estacionario** (hasta momentos de segundo orden).

Parametrizacion de Modelos Entrada/Salida Estocasticos

$$y(n) = G(q,\theta)u(n) + H(q,\theta)e(n) \qquad (8)$$

$\{e(n)\}$ ruido blanco con media cero y varianza λ

f_e : función de densidad de probabilidad de $\{e(n)\}$

θ vector de parámetros

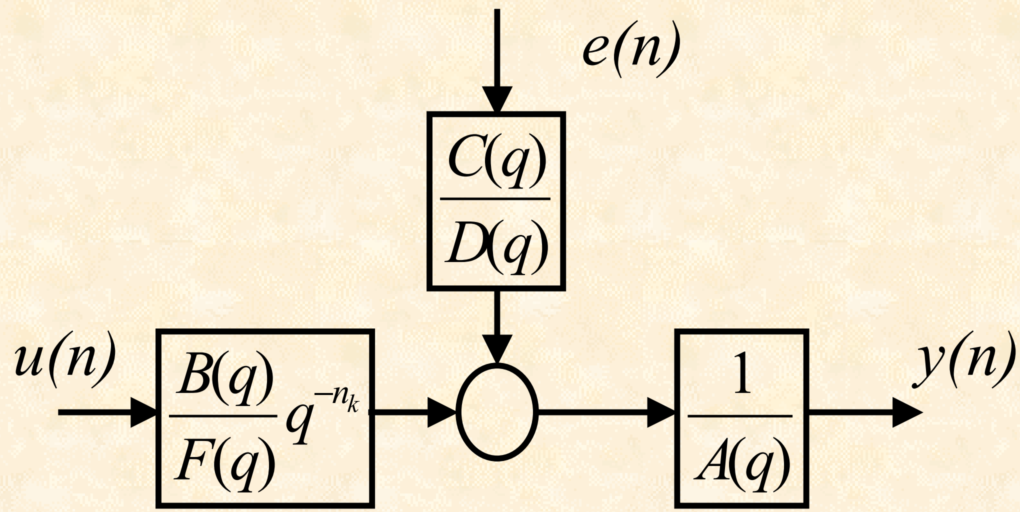
$v(n) = H(q,\theta)e(n)$ modelo de la perturbación

Modelos Polinomiales Generalizados

$$A(q,\theta)\,y(n)=\frac{B(q,\theta)}{F(q,\theta)}u(n-n_k)+\frac{C(q,\theta)}{D(q,\theta)}e(n) \qquad (9)$$

$A(q,\theta), B(q,\theta), C(q,\theta), D(q,\theta), F(q,\theta)$ polinomios en q^{-1} parametrizados por θ

$$A(q)=1+a_1 q^{-1}+\cdots+a_{n_a} q^{-n_a}$$
$$B(q)=b_0+b_1 q^{-1}+\cdots+b_{n_b} q^{-n_b}$$
$$C(q)=1+c_1 q^{-1}+\cdots+c_{n_c} q^{-n_c}$$
$$D(q)=1+d_1 q^{-1}+\cdots+d_{n_d} q^{-n_d}$$
$$F(q)=1+f_1 q^{-1}+\cdots+f_{n_f} q^{-n_f}$$



- **Moldelo ARX** (AutoRegressive with eXogeneous input)

$$F(q,\theta) = C(q,\theta) = D(q,\theta) = 1$$

- **Modelo ARMAX** (AutoRegressive Moving Average with eXogeneous input)

$$F(q,\theta) = D(q,\theta) = 1$$

- **Modelo ARMA** (AutoRegressive Moving Average)

$$D(q,\theta) = F(q,\theta) = 1$$

$$B(q,\theta) = 0$$

- **Modelo BJ (**Box-Jenkins**)**

$$A(q,\theta) = 1$$

- **Modelo OE (Ouput Error)**

$$A(q,\theta) = C(q,\theta) = D(q,\theta) = 1$$

❑ Modelos en Espacio de Estados

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n) + \omega(n)$$
$$y(n) = Cx(n) + Du(n) + \nu(n)$$

Ecuación de Estado

Ecuación de Salida

x(n): vector de estados

u(n): vector de entradas

y(n): vector de salidas

A: matriz de evolución

B: matriz de entrada

ω(n): ruido de proceso o de planta

ν(n): ruido de medición o de salida

C: matriz de salida

D: matriz de transmisión directa

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n) + Ke(n)$$
$$y(n) = Cx(n) + Du(n) + e(n)$$

Forma de Innovación

K: matriz de Kalman

e(n): ruido blanco