

**Control
Digital
Directo**

**Benjamín Kuchen
Ricardo Carelli**

**Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de
San Juan 1996**

ÍNDICE

	Pág.
PREFACIO	1
CAPITULO 1 - Introducción	3
1.1 Síntesis Histórica	3
1.2 Control Centralizado y Control Distribuido	3
CAPITULO 2 - Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto.	5
2.1 Digitalización de señales continuas	5
2.2 Ecuación en diferencias	7
2.3 Representación de la señal muestreada mediante impulsos.	9
2.4 Transformada de Laplace de una función de tiempo discreto	11
2.5 Teorema del muestreo	12
2.6 Elemento retenedor de nivel	15
2.7 Transformada Z	17
2.7.1 Transformada Z de un tren de impulsos	17
2.7.2 Transformada Z de una función escalón	17
2.7.3 Característica y teoremas generales de transformada Z .	18
2.7.4 Relaciones entre los planos S y Z .	20
2.8 Respuesta en frecuencia y formas bilineales	23
2.9 Cuantificación de amplitud	27
2.9.1 Cuantificación de la señal de entrada continua.	27
2.9.2 Cuantificación de la Unidad Central de Procesamiento	29
2.9.3 Cuantificación de la salida	30
2.9.4 Modelación estocástica del error de cuantificación	30
2.9.5 Consideraciones determinísticas	32
2.9.6 Efectos de la cuantificación de coeficientes	33
2.9.7 Efectos de la cuantificación de resultados intermedios	35
2.9.8 Consideraciones para disminuir los efectos de errores de cuantificación	36

CAPITULO 3 - Modelos Discretos Determinísticos	37
3.1 Función de transferencia de impulsos	37
3.2 Función de transferencia de tiempo discreto	39
3.3 Características y propiedades de la función de transferencia discreta	43
3.3.1 Realizabilidad	43
3.3.2 Retardo puro	43
3.3.3 Constante de proporcionalidad	44
3.3.4 Constante de integración	44
3.4 Operaciones con funciones de transferencia discretas	45
3.5 Condiciones de estabilidad de sistemas de tiempo discreto	47
3.6 Modelos para la representación de sistemas multivariados de tiempo discreto	51
3.6.1 Estructuras canónicas para procesos multivariados	51
3.6.2 Modelo matemático para las estructuras canónicas multivariados	52
3.6.3 Ecuación característica y factor de acoplamiento	54
3.7 Representación de Sistemas en el Espacio de Estado	58
3.7.1 Introducción al concepto de variables de estado	58
3.7.2 Modelación en el espacio de estado de un sistema simple	59
3.7.3 Modelación de un sistema monovariable de orden n	61
3.7.4 Extensión para sistemas multivariados	63
3.7.5 Modelos de tiempo discreto	65
3.7.6 Carácter no único del modelo de estado	67
3.7.7 Solución de la ecuación de estado de tiempo discreto	68
3.7.8 Relación entre la representación de estado y la matriz o función de transferencia	69
3.7.9 Análisis de estabilidad	80
3.7.10 Controlabilidad	81
3.7.11 Observabilidad	82
3.7.12 Dualidad de procesos lineales	84

CAPITULO 4 - Control Digital Determinístico	86
4.1 Introducción	86
4.2 Definiciones, planteos de control y clasificación	86
4.2.1 Definiciones fundamentales relativas a los sistemas de control	86
4.2.2 Control en lazo abierto y en lazo cerrado	88
4.2.3 Clasificación de los tipos de controladores	90
4.3 Controladores de parámetros optimizados.	92
4.3.1 Controlador PID discreto	92
4.3.2 Función de transferencia discreta del controlador PID	94
4.3.3 Controlador PID modificado	96
4.3.4 Controlador PID con predictor	98
4.3.5 Controlador PID de velocidad	100
4.3.6 Definición de la estructura, tiempo de muestreo y parámetros del controlador PID	100
4.3.7 Controlador discreto de bajo orden de parámetros optimizados	109
4.4 Controladores de estructura optimizada. Controladores de cancelación	116
4.5 Controladores de tiempo finito	123
4.5.1 Determinación de la estructura del controlador	123
4.5.2 Determinación de los parámetros	127
4.5.3 Análisis de la función de transferencia de lazo cerrado	128
4.5.4 Proceso con retardo puro	129
4.5.5 Controlador de tiempo finito de orden incrementado	132
4.6 Controladores de Estado	137
4.6.1 Diseño del controlador por asignación de polos	139
4.6.2 Regulador óptimo lineal determinístico	145
4.7 Reconstrucción del vector de estado	155
4.7.1 Planteo del problema de reconstrucción del estado	155
4.7.2 Solución al problema de reconstrucción del estado	157
4.8 Controladores con Observación de Estado para referencia nula	159
4.9 Controlador de estado para referencia distinta de cero	162

CAPITULO 5 - Control Digital Estocástico.	166
5.1 Modelos matemáticos de señales estocásticas.	166
5.1.1 Procesos Estocásticos de Tiempo Discreto.	166
5.1.2 Parámetros estadísticos de procesos estocásticos.	167
5.2 Modelos para Sistemas Estocásticos de Tiempo Discreto.	173
5.2.1 Extensión del modelo determinístico para sistemas estocásticos.	173
5.2.2 Caracterización estadística de la salida del sistema.	175
5.2.3 Desarrollo de un predictor para proceso con retardo puro.	176
5.3 Diseños de Controladores para Sistemas Estocásticos Lineales.	179
5.3.1 Formulación del problema de control para sistemas estocásticos.	179
5.3.2 Obtención del controlador estocástico.	181
5.3.3 Condiciones de estabilidad.	183
5.4 Modelos de Estado para Sistemas Estocásticos de Tiempo Discreto.	184
5.4.1 Extensión del modelo de estado determinístico para sistemas estocásticos.	184
5.4.2 Solución de la ecuación en diferencias de estado para sistemas estocásticos.	189
5.5 Diseño de Controladores de Estado para Sistemas Estocásticos lineales.	195
5.5.1 Formulación del problema de control para sistemas estocásticos.	195
5.5.2 Solución al problema del Regulador Optimo Lineal Estocástico.	196
5.5.3 Controladores de Estado de Varianza Mínima.	203
5.6 Estimación de Estado.	207
5.6.1 Planteo general del problema.	207
5.6.2 Solución al problema de estimación de estado.	211
5.7 Controladores Optimos con Estimación de Estado.	213
BIBLIOGRAFIA	217

PREFACIO

El **Control Digital** constituye un aspecto particular del **Control Computarizado de Procesos**, el cual es un concepto amplio que en términos globales involucra a todas las acciones que un sistema de cómputo ejerce sobre una determinada planta y a todas las informaciones que obtiene de ésta sobre su operación, en base a las cuales se planifican las acciones. En este planteo se distinguen varios niveles o jerarquías de control que pueden implicar, en los niveles más altos, acciones de gerencia de la planta, y descendiendo acciones de coordinación, optimización, supervisión, monitoreo y finalmente lo que se denomina **Control Digital Directo**. La denominación precisa y las funciones de cada uno de los niveles está bien tratada en la bibliografía especializada, y no es objetivo de este texto. Específicamente se tratará aquí el nivel inferior de control, esto es, el Control Digital Directo, incluyendo los conceptos de **Optimización** a nivel de proceso.

Como su nombre lo indica, el Control Digital Directo está vinculado directamente a un proceso y tiene como objetivo fundamental ejercer el **Control Dinámico** del mismo en forma eficiente, tal que sus variables de salida permanezcan en un determinado estado, o evolucionen bajo determinada forma establecida por los niveles superiores de control, con la mínima influencia posible de perturbaciones externas al proceso. Cuando no existen niveles superiores de control computarizado, las referencias o perfiles de evolución son provistos por un operador.

Con la incorporación de equipos de cómputo de alta capacidad en el control directo, se ampliaron notablemente las posibilidades de ejercer controles eficientes sobre procesos cada vez más complejos. Desaparecen las limitaciones tecnológicas para la implementación de algoritmos muy elaborados y esto incentiva la creación de planteos cada vez más avanzados. En la actualidad prácticamente no se imponen límites de magnitud o complejidad al desarrollo de nuevos métodos de control directo. Esta situación conduce a que exista una gran motivación para la investigación y el desarrollo en el área.

En este texto se presentan las herramientas fundamentales del control digital directo, algoritmos de control clásicos con implementación digital que ya cuentan con amplia aplicación industrial y algoritmos más complejos que aún se encuentran en una fase de consolidación, optimización y estudio.

El primer capítulo consta de un breve resumen histórico sobre el control digital con mención de distintas filosofías de control, relacionadas al control centralizado y distribuido.

En el segundo capítulo se hace un repaso de los conceptos matemáticos fundamentales y métodos para el tratamiento de las señales digitalizadas

representadas en tiempo discreto, incluyendo los tratamientos en transformadas de Fourier, transformada Z y transformada W.

En el capítulo tercero se describen las distintas formas de representar matemáticamente los procesos determinísticos. Se analizan los modelos basados en Secuencia de Ponderación, Función de Transferencia de Impulso (plano S), Función de Transferencia Discreta (plano Z), Matriz de Transferencia Discreta y Espacio de Estado.

El capítulo cuarto representa el núcleo central del texto en el cual se desarrollan los algoritmos digitales de control más importantes en el campo determinístico. En este contexto se estudian distintas versiones del controlador PID, Controladores de Cancelación, de Tiempo Finito y Controladores de Estado.

El capítulo cinco comienza con un estudio de las herramientas básicas para el tratamiento de señales y procesos estocásticos. Este estudio se completa con el desarrollo de modelos estocásticos de entrada-salida y de estado, así como el desarrollo de controladores de los tipos de Mínima Varianza Monovariables y de Estado Estocástico. Finalmente se incluyen las referencias bibliográficas.

CAPITULO 1

1. INTRODUCCION

1.1 Síntesis Histórica.

Si bien se conocen estudios sobre control automático desde principios de siglo, recién a partir de 1930, con la formalización del concepto de **realimentación** toma importancia esta disciplina. A partir de allí, con las contribuciones de Nyquist, Hazen, Bode y Evans entre otros, se forma el corazón de lo que hoy se denomina **Teoría Clásica de Control**, cuyo objetivo más importante es el análisis de los sistemas de control.

Hacia 1940, se realizaron los primeros controladores analógicos con dispositivos hidráulicos, neumáticos y eléctricos. En 1962 se cierra un lazo de control de un proceso químico a través de un computador digital. A partir de entonces comienza el desarrollo de la teoría de control para sistemas de datos muestrados o de tiempo discreto y la aplicación de la teoría matemática de optimización al desarrollo de algoritmos de control, para ser ejecutados por computadores digitales. Desde 1970, con la generalización del uso de la tecnología del silicio y la aparición de los **microprocesadores**, se inicia una rápida evolución del control automático. En la actualidad, el **Control Digital** incluye técnicas avanzadas como el control óptimo, el control estocástico, el control adaptable, el control experto, el control borroso, etc.

El desarrollo histórico del **Control Automático** con computador, ha estado influenciado por el avance de la tecnología de los sensores y actuadores. Cada etapa está signada por una característica en particular: primeramente los computadores eran demasiado lentos, luego la teoría de control fue insuficiente y actualmente los sensores y actuadores han pasado a ser los elementos críticos, debido al incremento de las precisiones que maneja el computador. Sólo cuando se producen mejoras en los tres campos mencionados, el Control Digital crece significativamente.

1.2 Control Centralizado y Control Distribuido.

Los avances tecnológicos mencionados anteriormente produjeron una notable disminución del costo de los sistemas de cómputo y con ello un cambio fundamental en la filosofía de diseño de sistemas de control. Inicialmente, el

elevado precio de los computadores llevó a plantear sistemas de control en donde todas las operaciones se realizan en un sólo computador, ubicado en una sala de operaciones y de instrumentos de la planta. Esto se denominó **Control Centralizado**.

La aparición de los microprocesadores ha llevado a plantear esquemas de control en los cuales se realiza un control local de cada proceso de la planta, dando origen a una descentralización del mismo denominándose **Control Distribuido**. Esta nueva filosofía de descentralización requiere de nuevos niveles de control, para coordinar el funcionamiento de los diferentes controladores y realizar además tratamiento de alarmas, monitoreo, optimización y supervisión del control global de la planta. Así se establecen **niveles de jerarquía** en el control industrial. En la Fig. 1.2.1 se puede observar una posible estructura de control distribuido.

En el presente texto se tratará específicamente el control digital directo, esto es, el diseño y análisis de los controladores en el nivel 1 del esquema de la Fig. 1.2.1.

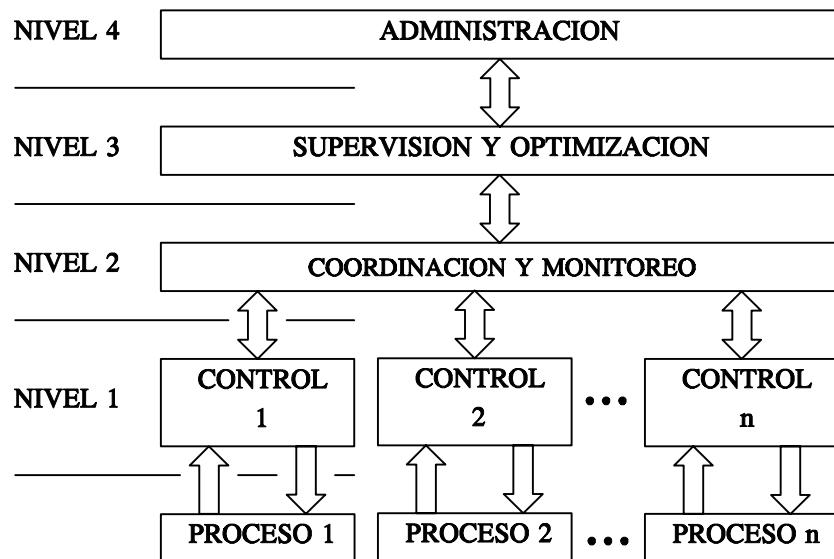


Fig. 1.2.1. Esquema de control distribuido.

CAPITULO 2

2. TRATAMIENTO DE SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO

2.1 Digitalización de señales continuas.

Para realizar el control digital directo de un proceso, las señales involucradas, tanto las de entrada como las de salida, deben ser medidas a intervalos regulares para posibilitar su procesamiento digital. De esta forma resultan señales discontinuas que están discretizadas tanto en el tiempo como en su amplitud. Cada medida se denomina muestra y la acción de obtener las muestras discretas de una señal continua se denomina **discretización o muestreo**.

En este capítulo se presentarán resumidamente las herramientas teóricas para el tratamiento de las señales discretizadas, sin tocar el aspecto tecnológico de la obtención de las muestras.

Contrariamente a las señales continuas, que pueden tener cualquier amplitud para cualquier instante, las señales discretas contienen solamente valores discretos de amplitud para instantes determinados. Normalmente las señales discretas se obtienen por discretización de señales continuas a intervalos de tiempo constantes. Si bien es posible obtener pulsos discretos modulados en distintas formas, por ejemplo, modulación de ancho, de alto o modulación de frecuencia, en el control digital se utiliza casi con exclusividad la modulación en amplitud; esto es, cuando la amplitud del pulso que representa a la muestra es proporcional al valor de la señal continua en ese instante de tiempo, como se esquematiza en la Fig. 2.1.1.

Cuando el intervalo entre muestras T_0 es constante, se denomina muestreo coherente y es el único que se considera aquí. Con este tipo de modulación es fácil encontrar relaciones lineales en el tratamiento de los sistemas dinámicos lineales y se puede aplicar el principio de superposición.

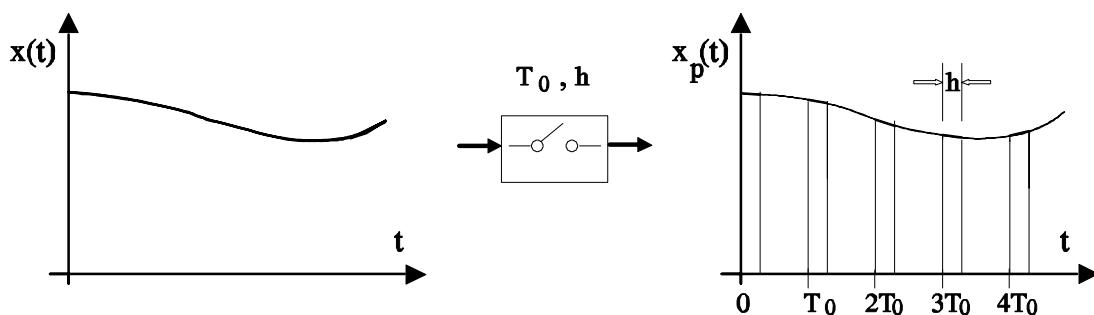


Fig 2.1.1. Discretización por modulación de amplitud.

Si el tiempo h de duración de los pulsos es pequeño en comparación con el tiempo de muestreo T_0 y si además las constantes de tiempo asociadas al proceso sobre el que va actuar la señal discretizada son grandes respecto de h , se puede considerar al tren de pulsos de ancho infinitesimal, lo cual introduce simplificaciones de importancia en el tratamiento matemático. Esto se representa en la Fig. 2.1.2.

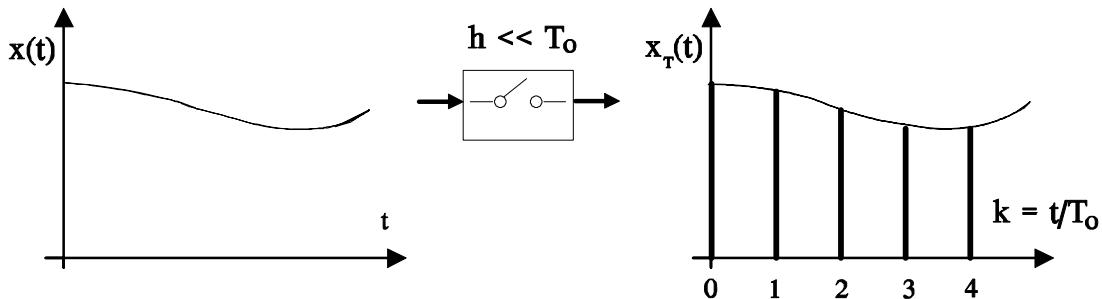


Fig. 2.1.2. Señal discretizada para $h \ll T_0$.

En este caso $x(kT_0)$ representa la amplitud de la señal para el instante de muestreo $t = kT_0$, con $k = 0, 1, 2, \dots$

La función $x(t)$ modulada en amplitud en tiempo discreto queda definida como

$$x_T(t) = \begin{cases} x(kT_0) & \text{para } t = kT_0 \\ 0 & \text{para } kT_0 < t < (k+1)T_0 \end{cases}$$

con $k = 0, 1, 2, \dots$ (2.1-1)

De esta forma las funciones continuas pueden expresarse en los instantes de muestreo como funciones discretas, por ejemplo la función continua

$$x(t) = e^{-\alpha t} \quad (2.1-2)$$

al ser discretizada, queda

$$x(kT_0) = e^{-\alpha kT_0} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1-3)$$

La integración continua,

$$x(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau \quad (2.1-4)$$

para ser procesada numéricamente puede resolverse por una aproximación denominada escalera.

De acuerdo a la Fig. 2.1.3, el área bajo la función continua $w(t)$ puede aproximarse por la sumatoria de los rectángulos de base T_o y altura $w(lT_o)$. De esta manera el área hasta el instante k queda expresada en forma aproximada por

$$x(kT_o) = \sum_{l=0}^{k-1} w(lT_o)T_o \quad (2.1-5)$$

siendo para $kT_o = t$, $x(kT_o) \approx x(t)$.

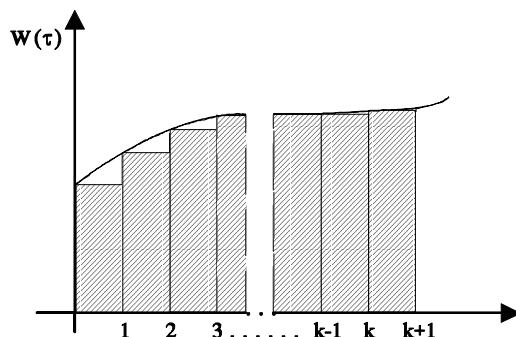


Fig. 2.1.3. Integración discreta en escalera.

2.2 Ecuación en diferencias.

La Ec. 2.1-5 se puede escribir en un intervalo posterior

$$x[(k+1)T_o] = \sum_{l=0}^k w(lT_o)T_o \quad (2.2-2)$$

Haciendo la diferencia entre los valores dados por las Ecs. 2.1-5 y 2.2-2, se obtiene

$$\begin{aligned} x[(k+1)T_o] - x(kT_o) &= \sum_{l=0}^k w(lT_o)T_o - \sum_{l=0}^{k-1} w(lT_o)T_o = \\ &= T_o w(kT_o) \end{aligned} \quad (2.2-3)$$

Tomando $a_1 = -1$, $b_1 = T_o$, $kT_o = k$, la expresión anterior puede escribirse

$$x(k+1) + a_1 x(k) = b_1 w(k) \quad (2.2-4)$$

o bien, en un intervalo anterior

$$x(k) + a_1 x(k-1) = b_1 w(k-1) \quad (2.2-5)$$

A esta ecuación se la denomina **Ecuación en Diferencias de Primer Orden** y establece una relación lineal entre instantes de la función discretizada $x(k)$ que difieren en un intervalo.

Cuando existen relaciones entre instantes de la función que difieren en más de un intervalo, se pueden plantear ecuaciones en diferencias de mayor orden. Una ecuación en diferencias de orden m tiene la forma

$$\begin{aligned} x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_m x(k-m) &= b_0 w(k) + \\ &+ b_1 w(k-1) + \dots + b_m w(k-m) \end{aligned} \quad (2.2-6)$$

Asumiendo que $w(k)$ es la entrada de un sistema y $x(k)$ su salida, si se conocen los m valores pasados de la entrada $w(k)$ y la salida $x(k)$ y además el valor presente de la entrada, resulta posible calcular el valor presente de la salida del sistema como

$$\begin{aligned} x(k) &= -a_1 x(k-1) - \dots - a_m x(k-m) + b_0 w(k) + \\ &+ b_1 w(k-1) + \dots + b_m w(k-m) \end{aligned} \quad (2.2-7)$$

Las ecuaciones en diferencias pueden obtenerse directamente discretizando las ecuaciones diferenciales en el campo continuo. Por ejemplo, la derivada de $x(t)$ está definida por

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Puede considerarse como primera aproximación de la derivada a la expresión

$$\frac{\Delta x(k)}{T_o} = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_o}$$

o también

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1) \quad (2.2-8)$$

Para la derivada segunda, se tiene

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t - \Delta t)}{dt}}{\Delta t}$$

En forma discreta puede expresarse como

$$\begin{aligned}\Delta^2x(k) &= \Delta x(k) - \Delta x(k-1) \\ &= [x(k) - x(k-1)] - [x(k-1) - x(k-2)]\end{aligned}$$

o bien,

$$\Delta^2x(k) = x(k) - 2x(k-1) + x(k-2) \quad (2.2-9)$$

Esta expresión constituye una ecuación en diferencias de segundo orden.

2.3 Representación de la señal muestreada mediante impulsos.

Es posible obtener un tratamiento matemático sencillo de las funciones de tiempo discreto si el **tren de pulsos**, producto del muestreo se aproxima por un **tren de impulsos**. Un impulso está definido por

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 0 \\ \infty & \text{para } t = 0 \end{cases} \quad (2.3-1)$$

O bien si está desplazado un tiempo T se define como

$$\delta(t-T) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq T \\ \infty & \text{para } t = T \end{cases} \quad (2.3-2)$$

También se especifica el área del impulso. Cuando el área es unitaria, se lo denomina impulso unitario.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.3-3)$$

Como normalmente el ancho h de los pulsos muestreados es pequeño con respecto al período de muestreo T_o , el tren de pulsos muestreados puede aproximarse por un

tren de impulsos donde cada impulso tiene un área igual a la del pulso respectivo. Esta aproximación se esquematiza en la Fig. 2.3.1, donde la longitud de las flechas es proporcional al área del pulso.

Cada impulso que representa a una muestra, está desplazado en el tiempo tal como se expresa en la Ec. 2.3-2. El área de cada pulso de muestreo en el instante nT_o y de ancho h estará representado por el impulso

$$x_g(nT_o) = x(t)h \delta(t - nT_o). \quad (2.3-4)$$

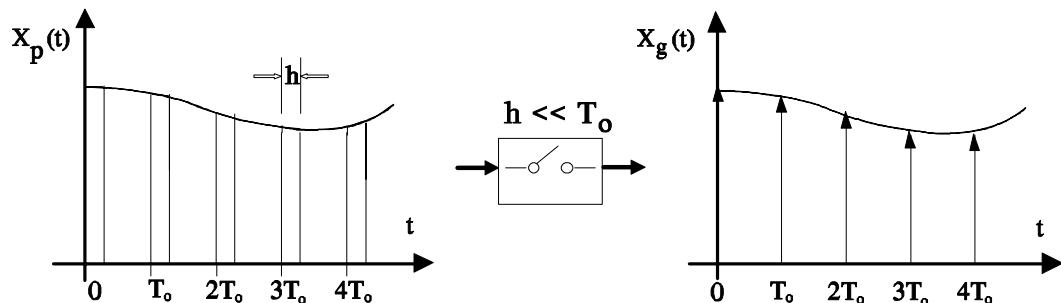


Fig. 2.3.1. Aproximación de un tren de pulsos $x(t)$ por un tren de impulsos.

El tren de pulsos muestreados podrá aproximarse como

$$x_p(t) \approx x_g(t) = x(t)h \delta(t) + x(t)h \delta(t - T_o) + \dots \quad (2.3-5)$$

Expresado en forma de sumatoria, queda

$$x_p(t) \approx x_g(t) = x(t)h \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_o) \quad (2.3-6)$$

Cuando la señal discretizada debe actuar sobre un proceso continuo, se requiere retener el nivel de la muestra hasta la aparición del próximo pulso. En ese caso, la duración h del pulso resulta irrelevante. Por esta razón es importante eliminar la duración del pulso h en la expresión de la Ec. 2.3-6. Esto se logra suponiendo una duración unitaria del pulso ($h = 1 \text{ seg}$) y asociando el área del impulso a la magnitud $x(t)$ de la muestra. Introduciendo $x(t)$ dentro de la sumatoria, la señal muestreada puede expresarse matemáticamente como

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o) \delta(t-kT_o) \quad (2.3-7)$$

Con esta aproximación y normalización la señal muestreada queda expresada como el producto de la magnitud de la muestra en el instante kT_o por el impulso unitario en ese instante.

2.4 Transformada de Laplace de una función de tiempo discreto.

La transformada de Laplace de una función continua se define como

$$x(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad (2.4-1)$$

siendo $s = \sigma + j\omega$

Aplicando esta definición a un impulso unitario, se obtiene

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1 \quad (2.4-2)$$

Cuando la transformada se realiza sobre un impulso unitario desplazado en el tiempo resulta, de acuerdo a la propiedad de desplazamiento de la transformada de Laplace

$$L\{\delta(t-kT_o)\} = L\{\delta(t)\}e^{-kT_o s} = e^{-kT_o s} \quad (2.4-3)$$

La transformada de Laplace del tren de impulsos representado por la Ec. 2.3-7, es

$$L\{x^*(t)\} = x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o)e^{-kT_o s} \quad (2.4-4)$$

Definiendo la frecuencia angular

$$\omega_o = 2\pi/T_o \quad (2.4-5)$$

y sustituyendo el argumento s por $s+jn\omega_o$ en la Ec. 2.4-4, se obtiene

$$x^*(s+jn\omega_o) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o) e^{-kT_o(s+jn\omega_o)} \quad (2.4-6)$$

$$x^*(s+jn\omega_o) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o) e^{-kT_o s} e^{-jkn2\pi} \quad (2.4-7)$$

Esto es

$$x^*[s+j(n\omega_o)] = x^*(s) \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Con $s = \sigma + j\omega$ se obtiene también

$$\begin{aligned} x^*[\sigma + j(\omega + n\omega_o)] &= x^*(\sigma + j\omega) \\ \text{para } n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2.4-8)$$

Esto significa que la transformada de Laplace de una función de tiempo discreto como la representada por la Ec. 2.3-7, es una función periódica con frecuencia angular

$$\omega_o = 2\pi/T_o. \quad (2.4-9)$$

De la Ec. 2.4-8, se concluye que $x^*(s)$ se repite, para cada $n\omega_o$. La transformada estará totalmente definida si se conoce para todo σ y para

$$-\frac{\omega_o}{2} < \omega < \frac{\omega_o}{2} \quad (2.4-10)$$

La función $x^*(s)$ tendrá iguales valores para frecuencias que difieren en $n\omega_o$.

2.5 Teorema de muestreo.

La transformada de Laplace de una señal continua definida por la Ec. 2.4.1, puede aproximarse por la Ec. 2.5.1 cuando se disponen muestras de la señal $x(t)$ tomadas en intervalos $T_o = \Delta t$ suficientemente pequeños.

$$x(s) \approx \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-k\Delta t s} \Delta t. \quad (2.5-1)$$

Comparando la Ec. 2.5-1 con la transformada de Laplace de un tren de impulsos (Ec. 2.4-4), resulta

$$T_o x^*(s) \approx x(s)$$

o también,

$$T_o x^*(\sigma + j\omega) \approx x(\sigma + j\omega) \quad (2.5-2)$$

para T_o suficientemente pequeño. Se asume que las señales continuas están limitadas en frecuencia, esto es, la transformada de Fourier $x(j\omega)$ está acotada en su frecuencia máxima,

$$x(j\omega) \neq 0 \quad -\omega_{\max} \leq \omega \leq \omega_{\max}$$

$$x(j\omega) = 0 \quad -\omega_{\max} > \omega > \omega_{\max}$$

De esta forma la Ec. 2.5-1 aproxima a $x(j\omega)$ en el rango de valores no nulos. Esta condición se representa en el espectro de amplitudes de la Fig. 2.5.1.

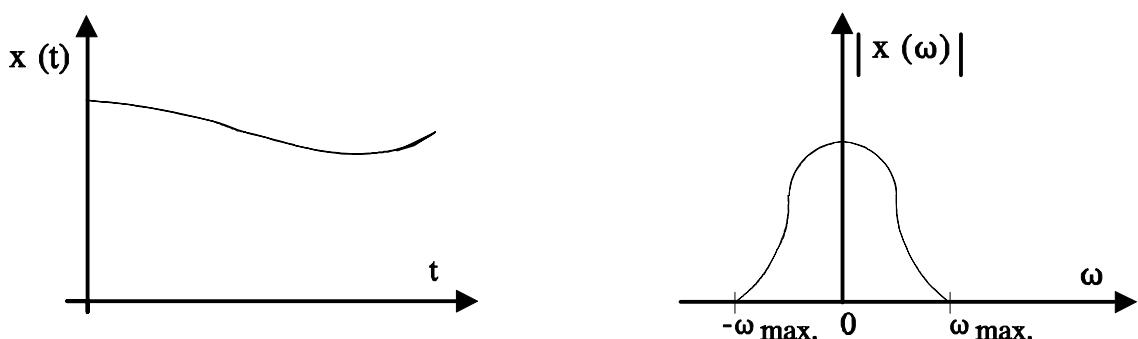


Fig. 2.5.1 Función temporal y espectro de amplitudes.

Si T_o es suficientemente pequeño la transformada de Fourier provee un espectro alrededor de $\omega = 0$, denominado espectro base. De la Ec. 2.5-2 puede escribirse para $\sigma = 0$

$$T_o x^*(j\omega) \approx x(j\omega)$$

$$\text{para } -\omega_{\max} < \omega < \omega_{\max}. \quad (2.5-3)$$

El espectro de la señal muestreada está compuesto por el espectro base y repeticiones del mismo con una periodicidad $\omega_o = 2\pi/T_o$. De la Ec. 2.4-8, con $\sigma = 0$ se obtiene

$$T_o x^*[j(\omega + n\omega_o)] \approx x(j\omega) \quad \text{para } n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.5-4)$$

La transformada de Fourier de la señal muestreada se representa en la Fig. 2.5.2.

Cuando la señal continua se debe recuperar a partir de las muestras, se deben eliminar estas bandas laterales. Una forma de hacerlo es a través de filtros pasa bajos con los cuales se puede recuperar el espectro base. Esta función también la puede cumplir un elemento retenedor de nivel como se verá en el punto 2.6.

En el caso de disponer de un filtro ideal, con el objeto de poder rescatar solamente la banda base, las bandas laterales tendrán que estar separadas y no deberá existir superposición de bandas. Esto implica que la frecuencia de muestreo ω_o debe ser:

$$\omega_o \geq 2\omega_{\max} \quad (2.5-5)$$

como surge de la Fig. 2.5.2. La Ec. 2.5-5 puede expresarse como

$$T_o \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}} = \frac{1}{2f_{\max}} \quad (2.5-6)$$

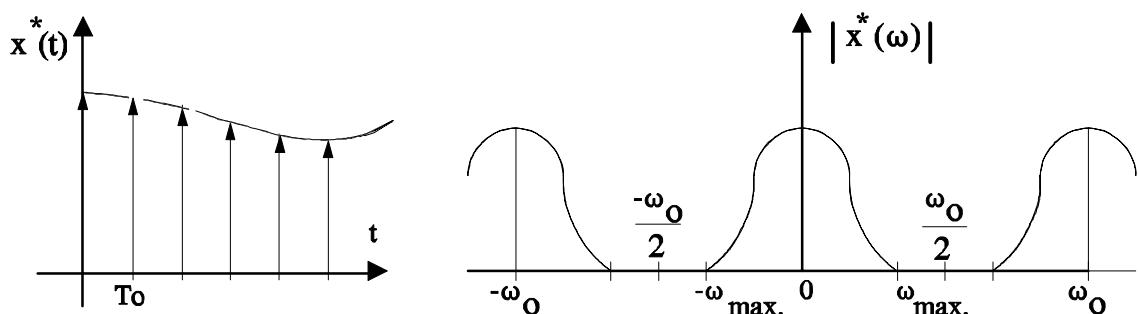


Fig. 2.5.2 Transformada de Fourier de la señal muestreada.

Esta expresión constituye el teorema de Shannon. Este teorema expresa que la frecuencia de muestreo debe ser mayor que el doble de la máxima frecuencia armónica contenida en la señal. Este valor de frecuencia de muestreo se lo denomina también frecuencia de Nyquist f_o . Frecuencias de muestreo menores conducen a distorsión del espectro base por superposición de las bandas laterales. Bajo estas condiciones, la señal temporal no es más recuperable a partir de las muestras. Por esta razón el valor de esta frecuencia es de fundamental importancia en los sistemas muestreados como valor límite inferior.

Debido a que el filtrado no es ideal, consideraciones prácticas aconsejan elevar en por lo menos un factor 2 esta frecuencia de muestreo para lograr una mejor separación de las bandas espectrales laterales. Si es posible se utilizan factores aún mayores. Es común usar un factor 5.

2.6 Elemento Retenedor de nivel

Cuando las señales digitalizadas deben actuar sobre un proceso continuo, se requiere transformar a éstas también en señales continuas o quasi continuas. Esto se denomina reconstrucción de las señales. Existen distintos procedimientos para reconstruir la señal, aunque casi con exclusividad se utiliza el denominado retenedor de orden cero. Este dispositivo retiene el valor de una muestra de la señal en forma constante (orden cero) hasta la llegada de la próxima muestra, asumiendo el valor de esta última. Cuando se utiliza una interpolación lineal entre muestras, el elemento se denomina reconstructor de primer orden. El orden del reconstructor de la señal evidencia el orden del polinomio con que se interpolan las muestras. Por simplicidad tecnológica y por los satisfactorios resultados que provee se utiliza normalmente el de orden cero, representado por R^o . La Fig. 2.6.1 representa esquemáticamente su operación.

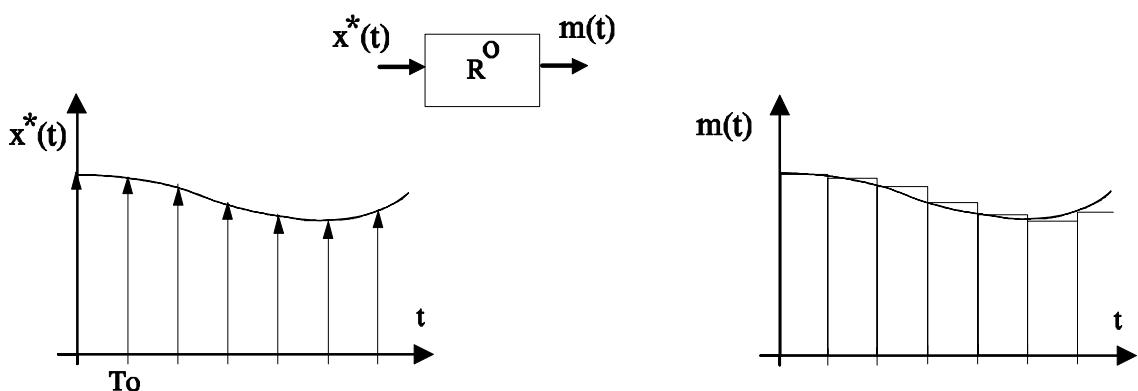


Fig. 2.6.1 Retenedor de orden cero.

La función de transferencia de un elemento R^o , se obtiene del siguiente modo. El tren de impulsos de la entrada se representa matemáticamente por

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o) \delta(t - kT_o). \quad (2.6-1)$$

La transformada de Laplace ya obtenida, es

$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o) e^{-kT_o s}. \quad (2.6-2)$$

Definiendo la función

$$F(t) = U(t - kT_o) \quad (2.6-3)$$

como un escalón unitario que toma valor 1 para $t \geq kT_o$ y 0 para $t < kT_o$, la señal de salida del retenedor R^o se puede expresar en el dominio temporal como

$$m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o) [U(t - kT_o) - U[t - (k+1)T_o]]. \quad (2.6-4)$$

Aplicando la transformada de Laplace, se obtiene

$$m(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o) e^{-kT_o s} 1.(1 - e^{-T_o s})/s. \quad (2.6-5)$$

Comparando la Ec. 2.6-5 con la Ec. 2.6-2, resulta

$$m(s) = x^*(s) \frac{1.(1 - e^{-T_o s})}{s}. \quad (2.6-6)$$

La función de transferencia del retenedor de orden cero quedará expresada como

$$R^o(s) = \frac{m(s)}{x^*(s)} = \frac{1.(1 - e^{-T_o s})}{s}. \quad (2.6-7)$$

Puede considerarse que este retenedor se comporta para bajas frecuencias como un filtro pasabajos de primer orden, como se observa haciendo el análisis frecuencial en baja frecuencia. Tomando $s = j\omega$, se obtiene

$$R^o(j\omega) = \frac{(1 - e^{-T_o j\omega})}{j\omega}. \quad (2.6-8)$$

Con el desarrollo en serie de $e^{-T_o j\omega}$ queda

$$R^o(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \left(1 - \frac{1}{1 + T_o j\omega + (T_o j\omega)^2/2 + \dots} \right).$$

Despreciando la contribución de los términos $T_o j\omega$ de orden superior, se puede escribir para bajas frecuencias .

$$R^o(j\omega) \approx \frac{T_o}{1 + T_o j\omega}. \quad (2.6-9)$$

La Ec. 2.6-9 representa la respuesta frecuencial de un filtro pasabajos de primer orden.

2.7 Transformada Z.

La transformada Z constituye una herramienta matemática de singular importancia para el tratamiento de señales de tiempo discreto. La misma está relacionada con la transformada de Laplace y se obtiene introduciendo la siguiente relación

$$z = e^{T_o s} \quad (2.7-1)$$

con $s = \sigma + j\omega$.

Su utilidad en las señales de tiempo discreto puede apreciarse a través de algunos ejemplos de aplicación cuyos resultados serán utilizados posteriormente.

2.7.1 Transformada Z de un tren de impulsos.

La transformada de Laplace de un tren de impulsos (Ec. 2.4-4), es

$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o) e^{-kT_o s}. \quad (2.7-2)$$

Introduciendo la Ec. 2.7-1, se obtiene

$$x(z) = Z \{x^*(s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_o) z^{-k} \quad (2.7-3)$$

también en forma expandida

$$x(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \quad (2.7-4)$$

Esta serie converge, si $|x(kT_o)|$ es finito y además $|z| = e^{\sigma T_o} > 1$.

2.7.2 Transformada Z de la función escalón.

La función escalón se define como

$$x(kT_o) = U(kT_o) = \begin{cases} 0 & \text{para } k < 0 \\ U & \text{para } k \geq 0 \end{cases}$$

siendo $U = \text{cte.}$, la amplitud del escalón. Si el escalón es unitario, entonces es $U = 1$. De acuerdo a la Ec. 2.7-3, la transformada Z del escalón unitario es

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \quad (2.7-5)$$

también,

$$x(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \quad (2.7-6)$$

Resulta una serie de potencias que con $|z| > 1$, puede escribirse como

$$x(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (2.7-7)$$

De forma similar pueden obtenerse las transformadas para otras funciones. En la bibliografía especializada se proveen tablas que incluyen las transformadas de Laplace y Z.

2.7.3 Características y teoremas generales de la transformada Z.

Correspondencia de denominadores.

Para expresiones de orden finito, los denominadores de una transformada en s y en z tienen el mismo orden y forma, obteniéndose por simple reemplazo de $z_i = e^{T_o s_i}$. No existe correspondencia entre los numeradores.

$$\frac{P_s(s)}{(s - s_i)^n} \rightarrow \frac{P_z(z)}{(z - z_i)^n}$$

con $z_i = e^{T_o s_i}$

(2.7-8)

Linealidad.

La linealidad de la transformada Z puede expresarse como

$$Z\{ax_1(kT_o) + bx_2(kT_o)\} = a Z\{x_1(kT_o)\} + b Z\{x_2(kT_o)\}$$

(2.7-9)

Desplazamiento temporal.

La transformada Z de una función temporal desplazada d intervalos de muestreo hacia tiempos crecientes es igual a la transformada Z de la función sin desplazar multiplicada por z^{-d} . Esto es

$$Z\{x(kT_o - dT_o)\} = z^{-d}x(z)$$

para $d \geq 0$

(2.7-10)

El desplazamiento temporal hacia tiempos decrecientes es más complejo y queda expresado de la siguiente forma

$$Z\{x(kT_o + dT_o)\} = z^{+d}[x(z) - \sum_{q=0}^{d-1} x(qT_o)z^{-q}]$$

para $d \geq 0$.

(2.7-11)

Teorema del valor inicial.

En forma similar al teorema del valor inicial en variable s se puede demostrar que

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z). \quad (2.7-12)$$

Teorema del valor final.

Se demuestra que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT_o) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} x(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) x(z). \quad (2.7-13)$$

Antitransformada.

Cuando sobre una función temporal $x(t)$ se realiza la transformada de Laplace y sobre esta $x(s)$ se realiza la transformada inversa o antitransformada, se obtiene la misma función temporal. Esta propiedad de antitransformada unívoca no se verifica con la antitransformada Z debido a la posible pérdida de información entre muestras. Con un intervalo de muestreo definido T_o , existe la antitransformada única.

$$\begin{aligned} Z\{x(kT_o)\} &= x(z) \\ Z^{-1}\{x(z)\} &= x(kT_o) \end{aligned} \quad (2.7-14)$$

2.7.4 Relaciones entre los planos S y Z.

Las expresiones en z permiten una interpretación en el plano Z del mismo tipo que se hace para las expresiones en el plano S . Las relaciones que existen entre los planos S y Z , se representan en la Fig. 2.7-1.

Cada zona del plano S de la variable $s = \sigma + j\omega$, tiene su correlato en el plano Z . Dado que el estudio de la correspondencia del eje $j\omega$ es de fundamental importancia para analizar la estabilidad de sistemas continuos controlados digitalmente, se analizará en primer lugar qué sucede en el plano Z , cuando un punto en el plano S se mueve sobre el eje $j\omega$.

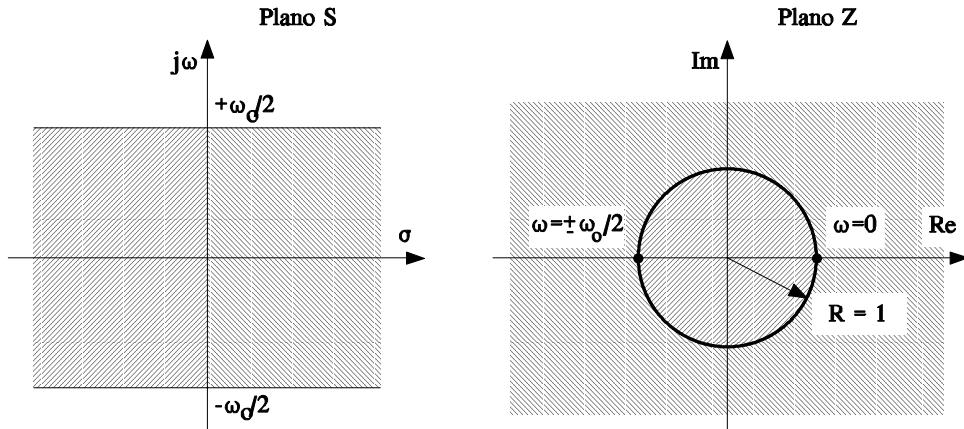


Fig. 2.7.1. Correspondencia del plano S y Z.

En este caso, $s = j\omega$ corresponde a $z = e^{j\omega T_o}$. En esta transformación T_o representa el período de muestreo y está relacionado con la frecuencia de muestreo a través de

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2.7-15)$$

Esto significa que si en el eje $j\omega$ del plano **S** un punto se mueve entre $-\omega_0/2$ y $+\omega_0/2$ en el plano **Z** estará describiendo un círculo de radio unitario. Se considera ahora la semibanda izquierda limitada por $\pm\omega_0/2$. Para dicha banda σ es siempre negativo. Cuando se hace la transformación a **Z** el módulo es

$$M = e^{\sigma T_o} < 1.$$

El argumento φ varía entre $-\pi$ y $+\pi$. Esto significa que toda la semibanda izquierda se transforma en el interior del círculo de radio unitario. En forma análoga, toda la semibanda derecha limitada por $\pm\omega_0/2$ tiene como superficie transformada el exterior del círculo de radio unitario.

Puede verificarse también que todas las bandas que están comprendidas en los intervalos $(2n+1)\omega_0/2$ y $(2n+3)\omega_0/2$ así como entre $-(2n+1)\omega_0/2$ y $-(2n+3)\omega_0/2$ con $n = 0, 1, 2, \dots$, es decir, todas las bandas de amplitud ω_0 a partir de la original, son transformadas según una superficie que coincide con todo el plano **Z**. Las semibandas izquierdas se superponen con el interior del círculo y las semibandas derechas se superponen con el exterior del círculo. Como consecuencia de esta situación, una función que presenta infinitos polos en el plano **S**, podrá tener una cantidad finita de polos en el plano **Z**.

Cuando se transforma una señal continua en una señal muestreada y se calcula la transformada de Laplace de la secuencia, se obtiene una función periódica en el plano S como muestra la Ec. 2.4-8. Esto significa, por ejemplo, que una función continua con un polo en el plano S al ser muestreada, su transformada de Laplace tiene infinitos polos, ya que el polo original aparece en su posición inicial y repetido en múltiplos de ω_o . Es decir, que la secuencia muestreada representada en el plano S , tendrá infinitos polos. Con la transformada Z , debido a que todas las bandas están superpuestas, esa cantidad infinita de polos se convierte en una cantidad finita lo cual hace más conveniente analizar una secuencia mediante esta última transformación.

A modo de ejemplo se toma una función temporal que decae exponencialmente

$$f(t) = e^{-t/T}.$$

Transformando se obtiene,

$$F(s) = 1/(s + 1/T). \quad (2.7-16)$$

$F(s)$ tiene un polo en $s = -1/T$. Si esta señal ingresa a un muestreador ideal, a su salida se tendrá

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_o/T} \delta(t-kT_o).$$

La transformada de Laplace de esta secuencia de impulsos, será

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_o/T} e^{-ksT_o}$$

o también en forma cerrada,

$$F^*(s) = 1/[1 - e^{-T_o/T} e^{-sT_o}]. \quad (2.7-17)$$

Es interesante analizar los polos de esta función. Estos se verifican para,

$$e^{-T_o/T} \cdot e^{-sT_o} = 1.$$

se obtienen las siguientes implicancias para el módulo

$$e^{-T_o/T} \cdot e^{-\sigma T_o} = 1 \quad (2.7-18)$$

y la fase

$$\varphi = -\omega T_o = \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7-19)$$

Se observa que existen infinitos polos cuyas partes reales se obtienen de Ec. 2.7-18

$$-T_o/T - \sigma T_o = 0$$

$$\sigma = -1/T$$

y resultan una constante. Las partes imaginarias se obtienen de Ec. 2.7-19

$$\omega = \pm 2k\pi / T_o = \pm k\omega_o.$$

La Ec. 2.7-17 factorizada en sus polos puede escribirse como

$$F^*(s) = \prod_{k=0}^{\infty} 1/[s + (1/T + jk\omega_o)]. \quad (2.7-20)$$

Tomando ahora en la Ec. 2.7-17, $a = e^{-T_o/T}$, $z = e^{sT_o}$, se tendrá la transformada en Z

$$F(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})} = \frac{z}{(z - a)} \quad (2.7-21)$$

$F(z)$ tiene un solo polo en $z = a$.

La Fig. 2.7.2 representa las posiciones de los polos en los planos S y Z de las funciones representadas por las ecuaciones Ec. 2.7-16, Ec. 2.7-20 y Ec. 2.7-21.

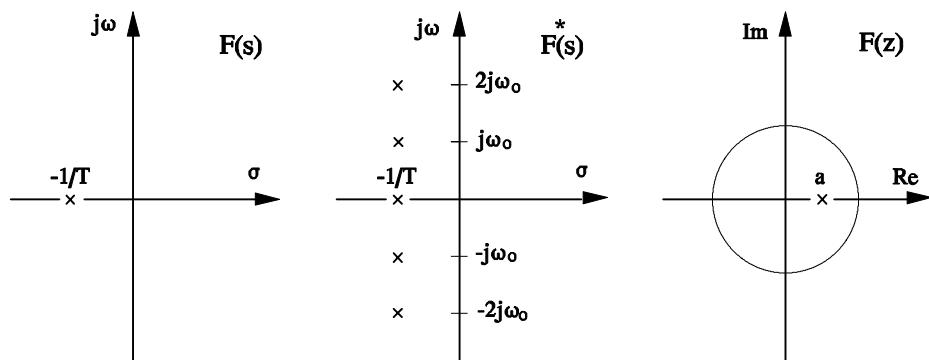


Fig. 2.7.2 Relaciones entre los planos S y Z.

2.8 Respuesta en frecuencia y formas bilineales.

Con el objeto de poder aplicar las técnicas de análisis y diseño de sistemas continuos en el dominio frecuencial a los sistemas de tiempo discreto, se ha propuesto una transformación adicional denominada Transformada W. Esta transformación, denominada también **Transformada Bilineal de Tustin**, está definida por las relaciones

$$w = \frac{2}{T_o} \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{1 + wT_o/2}{1 - wT_o/2} \quad (2.8-1)$$

Considerando la relación de la variable z con s , $z = e^{sT_o}$, y recordando la definición de tangente hiperbólica de x como

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

resulta

$$w = \frac{2}{T_o} \frac{e^{sT_o} - 1}{e^{sT_o} + 1} = \frac{2}{T_o} \operatorname{th} \frac{sT_o}{2}. \quad (2.8-2)$$

Tomando $s = j\omega$ para realizar el análisis frecuencial, teniendo en cuenta que por definición es $\operatorname{th} jx = j \operatorname{tg} x$ se obtiene

$$w = j \frac{2}{T_o} \operatorname{tg} \frac{\omega T_o}{2} = j\nu.$$

con

$$\nu = \frac{2}{T_o} \operatorname{tg} \left(\omega \frac{T_o}{2} \right) \quad (2.8-3)$$

Siendo $z = e^{j\omega T_o}$, al desplazarse z alrededor del círculo unitario en el plano Z, en el plano W, ν es real y varía entre menos infinito y más infinito.

Cuando ω varía entre $0 \leq \omega \leq \omega_o/2 = \pi/T_o$, z se mueve a lo largo de la mitad superior del círculo unitario y la nueva variable w varía entre 0 y $+\infty$ sobre el eje imaginario. Cuando $\omega = \omega_o/2 = \pi/T_o$, $\nu \rightarrow \infty$. La función $\nu = f(\omega)$ es periódica con período $\omega_o = 2\pi/T_o$. Para baja frecuencia angular cuando $\omega \ll 2/T_o$, $\nu \rightarrow \omega$.

Para considerar su aplicación se toma como ejemplo el sistema de control

esquematizado en la Fig. 2.8.1.

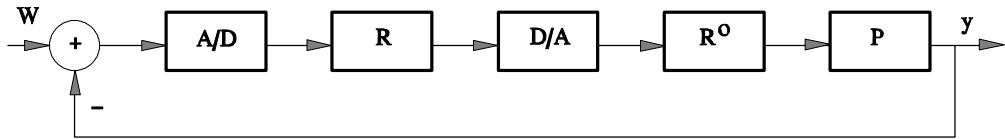


Fig. 2.8.1 Sistema de Control muestrado.

Con el objeto de analizar sólo los aspectos conceptuales se toma un caso muy simple cuando el proceso es un integrador puro y el controlador es proporcional.

$$P(s) = \frac{1}{s}$$

$$R(z) = K.$$

La función de transferencia del retenedor de orden cero R^0 es según la Ec. 2.6-7,

$$R^0 = \frac{1 - z^{-1}}{s}. \quad (2.8-4)$$

Por lo tanto la función de transferencia del proceso con retenedor es

$$P_1(z) = (1 - z^{-1}) Z(1/s^2). \quad (2.8-5)$$

Reemplazando la transformada

$$Z\{1/s^2\} = \frac{T_o z}{(z - 1)^2}$$

se obtiene

$$P_1(z) = \frac{T_o}{z - 1}.$$

Transformando con

$$z = \frac{1 + wT_o/2}{1 - wT_o/2}$$

se obtiene la Ec. 2.8-6

$$P_1(w) = T_o / \left(\frac{1 + wT_o/2}{1 - wT_o/2} - 1 \right) = \frac{1 - wT_o/2}{w}. \quad (2.8-6)$$

Siendo la transformada W del controlador $R(w) = K$ la función de transferencia de lazo abierto es

$$G(w)H(w) = P_1(w)R(w) = K \frac{1 - wT_o/2}{w}. \quad (2.8-7)$$

Considerando el rango de frecuencias $\omega \ll 2/T_o$ de acuerdo a la Ec. 2.8-3, resulta

$$w \approx j\omega \quad (2.8-8)$$

con lo cual se puede escribir

$$G(j\omega)H(j\omega) \approx K \frac{1 - \omega T_o/2}{j\omega}. \quad (2.8-9)$$

La Ec. 2.8-9 representa la respuesta frecuencial del sistema muestreado para frecuencias de análisis pequeñas respecto del doble de la frecuencia de muestreo y puede analizarse con los métodos clásicos en el dominio frecuencial. En la Fig. 2.8.2 se representa la aproximación asintótica del diagrama de Bode.

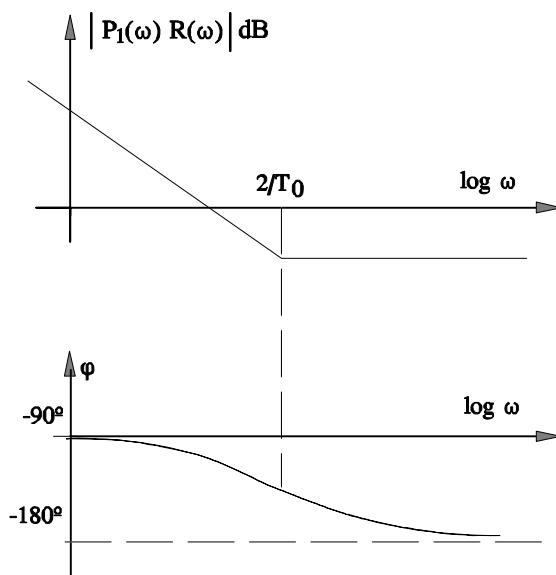


Fig. 2.8.2. Diagrama de Bode del sistema muestreado.

Comparando la respuesta frecuencial de la Fig. 2.8.2 (Ec. 2.8-9) con la que tendría el sistema equivalente en el campo continuo constituido por un integrador puro y un controlador proporcional, se observa la aparición de un cero en el semiplano derecho del plano S (sistema de fase no mínima) debido al efecto del muestreo.

Debe tenerse en cuenta que este análisis frecuencial es válido para $\omega < 2/T_o$. Cuando ω se aproxima a $2/T_o$ aparecen distorsiones de importancia y la aproximación de la Ec. 2.8-8 no es válida, debiéndose utilizar la expresión completa de la Ec. 2.8-3.

Debe notarse no obstante que en razón del teorema de muestreo de Shannon la frecuencia máxima contenida en la señal no debe ser mayor que π/T_o .

$$\omega_{\max} \leq \pi/T_o. \quad (2.8-10)$$

Por razones prácticas de recuperación de la señal muestreada, normalmente se toman valores que fluctúan entre 2 y 10 veces del dado por la Ec. 2.8-10.

$$f_o = \frac{1}{T_o} = P \frac{\omega_{\max}}{\pi}$$

con $2 < P < 10$.

En tal caso la condición restrictiva de análisis $\omega < 2/T_o$ se cumple normalmente ya que para frecuencias mayores se comenzaría a contravenir el teorema de muestreo. En este ejemplo no se presentan dificultades para la obtención de $G(w)$ a partir de $G(z)$. Normalmente esta operación puede resultar complicada por lo que existen tablas de transformadas equivalentes a las de $G(z)$ a partir de $G(s)$.

2.9 Cuantificación de amplitud.

En el tratamiento matemático de los sistemas de control discreto se desprecian los errores debido a la cuantificación de amplitud. Esta hipótesis es válida para grandes cambios de las señales y el uso de computadoras con gran longitud de palabra. De no ser así deben considerarse los efectos de la cuantificación de amplitud en el sistema de control. La cuantificación de amplitud en un sistema de control se origina en la digitalización de valores continuos que se envían al computador mismo y en la salida del computador, como queda esquematizado en la Fig. 2.9.1.

2.9.1 Cuantificación de la señal de entrada continua.

La señal continua $y(t)$ (0-10 V, 0-20 mA, 4-20 mA) es muestreada y digitalizada en el conversor A/D. El **rango numérico** R para una longitud de palabra del conversor de n bits es, para una polaridad,

$$R = 2^n - 1.$$

(2.9-1)

La **resolución** resulta

$$U = R^{-1} = 1/(2^n - 1) \approx 1/2^n.$$

(2.9-2)

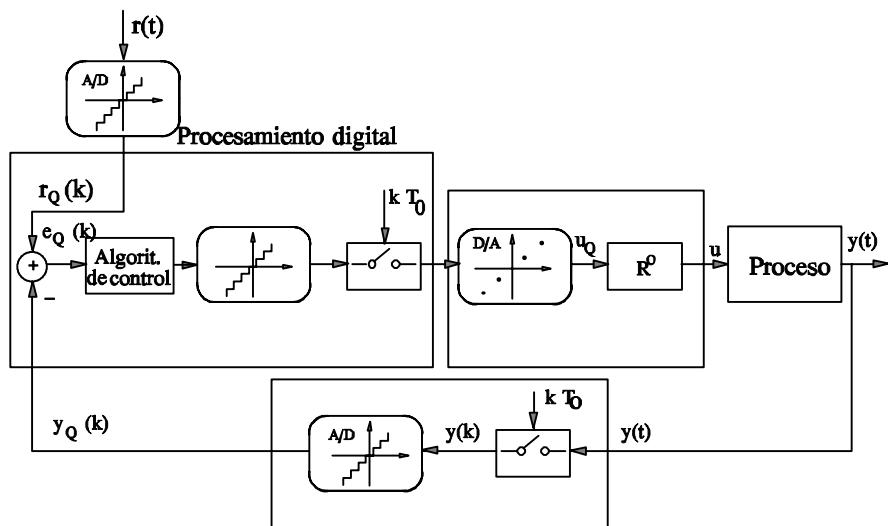


Fig. 2.9.1 Diagrama de un sistema de control con efectos de cuantificación.

Si el máximo valor numérico a representar es M , la unidad más pequeña representable o **unidad de cuantificación** resulta

$$\Delta = M/R.$$

Un valor analógico es representado por L unidades de cuantificación,

$$y(k) - y_Q(k) = L\Delta \quad L = 0, 1, 2 \dots R$$

$$y(k) = y_Q(k) + \epsilon_y \quad |\epsilon_y| < \Delta \quad (2.9-3)$$

El error de cuantificación es ϵ_y , el que resulta distinto según se trate de redondeo o truncamiento.

Rango para redondeo: $-0,5 \leq (\epsilon_y/\Delta)_R < 0,5$

Rango para truncamiento: $0 \leq (\epsilon_y/\Delta)_T < 1 \quad (2.9-4)$

La Fig. 2.9.2 muestra la no-linealidad y el error introducido por redondeo y truncamiento.

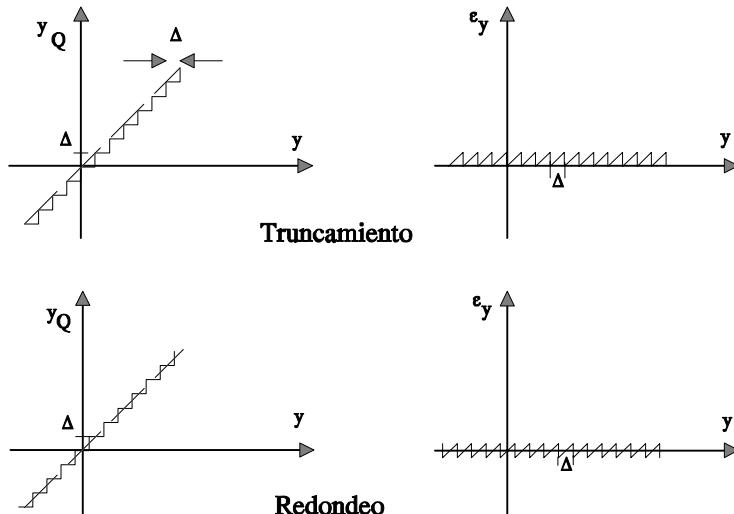


Fig. 2.9.2. Truncamiento y redondeo.

2.9.2 Cuantificación en la Unidad Central de Procesamiento.

La señal $y(t)$ discretizada en el conversor A/D es transferida a la unidad de cómputo y allí representada normalmente por una palabra de mayor longitud. Para un algoritmo de control lineal se realizan normalmente los siguientes cálculos:

- * cálculo del error de control,

$$e_Q(k) = r_Q(k) - [y_Q(k)]_{AD} \quad (2.9-5)$$

* cálculo de la variable de control,

$$\begin{aligned} u_Q(k) = & -p_{1Q}u_Q(k-1) - \dots - p_{mQ}u_Q(k-m) + \\ & + q_{0Q}e_Q(k) + q_{1Q}e_Q(k-1) + \dots + q_{mQ}e_Q(k-m) \end{aligned} \quad (2.9-6)$$

siendo

variable de referencia	$r_Q(k)$
variable manipulada	$u_Q(k-i), i=1,2,\dots,m$
parámetros	$p_{iQ}, p_{0Q}, q_{iQ} \quad i=1, 2, \dots, m$
productos	$p_{iQ}u_Q(k-i), q_{0Q}e_Q(k), q_{iQ}e_Q(k-i) \quad i=0, 1, 2, \dots, m$
suma de productos	$u_Q(k).$

En la Unidad Central de Procesamiento ocurren errores de cuantificación debidos a la representación en palabra finita. En representación en punto flotante, normalmente la menor unidad representable es despreciable para el control digital. Para el caso de representación en punto fijo los errores de cuantificación se originan en los productos, que ocasionan no-linealidades al incorporar potencias de los errores de cuantificación.

La cuantificación de la variable continua de referencia $r(t)$ y de los parámetros del controlador originan sólo desviaciones de los valores nominales sin introducir no-linealidades en el lazo de control.

2.9.3 Cuantificación en la salida.

La variable $u_Q(k)$ es transferida del computador al conversor D/A seguido del retenedor. El intervalo de cuantificación del D/A depende de su longitud de palabra. El conversor D/A introduce una no-linealidad como se muestra en la Fig. 2.9.1.

El tratamiento teórico de todas las cuantificaciones originadas en el lazo es muy difícil. Los tratamientos analíticos se basan en el estudio del máximo error posible o en la modelación estadística de los errores de cuantificación. Los efectos no lineales de la cuantificación se estudian usando funciones descriptivas o el método directo de Lyapunov. La simulación es quizás el único modo viable de analizar los casos más

complejos.

Se analizan a continuación los efectos de cuantificación de las variables que incluye la cuantificación de señales en los conversores A/D, D/A y la Unidad Central de Procesamiento. En la Fig. 2.9.2, se dan las características de cuantificación por redondeo y truncamiento, así como los correspondientes errores.

2.9.4 Modelación estocástica del error de cuantificación.

Si una variable cambia estocásticamente atravesando diferentes niveles de cuantificación, puede asumirse que los errores de cuantificación $\epsilon(k)$ son estadísticamente independientes. Además, al ser la curva de error tipo diente de sierra, no existen valores preferenciales y puede asumirse una distribución uniforme como en la Fig. 2.9.3.

La señal cuantificada puede representarse por el valor continuo con un ruido $\epsilon(k)$ aditivo de cuantificación,

$$y_Q(k) = y(k) - \epsilon(k). \quad (2.9-7)$$

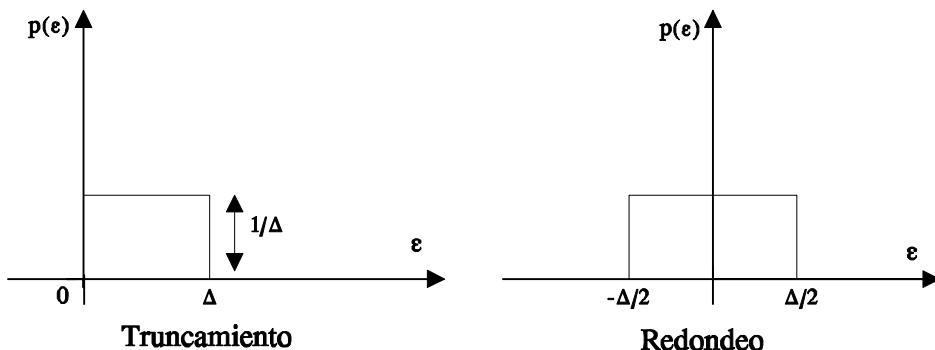


Fig. 2.9.3 Distribución de probabilidad del ruido de cuantificación.

El valor medio de $\epsilon(k)$ para errores de redondeo y truncamiento es

* redondeo:

$$E \{ \epsilon(k) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\epsilon) \epsilon d\epsilon = 0$$

* truncamiento

$$E \{ \epsilon(k) \} = \Delta/2. \quad (2.9-8)$$

La varianza σ resulta en ambos casos igual del siguiente cálculo,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon - E\{\varepsilon\}]^2 p(\varepsilon) d\varepsilon = \Delta^2/12. \quad (2.9-9)$$

Si el ruido de cuantificación es generado en el conversor A/D, éste actúa sobre la variable controlada y su varianza no puede ser reducida por ningún control pues equivale a un ruido de medición. Esto conduce a cambios indeseables en la variable de control $u(k)$ que pueden ser mayores que la unidad de cuantificación del D/A.

Ejemplo: Suponiendo un algoritmo de control,

$$u(k) = -q_0 y(k) - q_1 y(k-1)$$

$$e(k) = -y(k).$$

El ruido de cuantificación genera,

$$\varepsilon_u(k) = -q_0 \varepsilon(k) - q_1 \varepsilon(k-1).$$

Si se considera que el proceso filtra ε_u tal que $\varepsilon_y = 0$ y que ε es un ruido blanco, la varianza de ε_u es,

$$\sigma_{\varepsilon_u}^2 = [q_0^2 + q_1^2] \sigma_{\varepsilon}^2. \quad (2.9-10)$$

Según los valores de q_0 , q_1 , la varianza del ruido sobre la acción de control $\sigma_{\varepsilon_u}^2$, puede ser varias veces mayor que la del ruido de cuantificación σ_{ε}^2 .

Tomando por ejemplo: $q_0 = 3$, $q_1 = -1,5$ será

$$\sigma_{\varepsilon_u} = 3,35 \sigma_{\varepsilon}.$$

2.9.5 Consideraciones determinísticas.

Desviaciones (Offset).

Debido a la cuantificación del conversor A/D (en particular para truncamiento) se

producen desviaciones en el valor de la salida controlada y en relación al valor que alcanzaría en un sistema continuo. Esto se verifica fácilmente tomando un ejemplo y operando hasta llegar al valor de estado permanente, truncando $y(k)$ en cada paso de iteración.

Ciclos límites.

Aparecen como consecuencia de la no-linealidad introducida por la cuantificación. Se verifican particularmente con algoritmos de control de fuerte acción (gran ganancia) y se manifiestan como oscilación periódica de la variable controlada $y(k)$. También la acción de control $u(k)$ muestra esta oscilación. La oscilación de ciclo límite puede desaparecer al disminuir la ganancia del controlador. El estudio de estos efectos puede hacerse por simulación digital. También podría usarse la función descriptiva o el método directo de Lyapunov usados en sistemas no-lineales.

2.9.6 Efectos de la cuantificación de coeficientes.

La influencia de los efectos de redondeo de los parámetros del controlador puede usualmente ser despreciada, aún en el caso de representación en punto fijo. Esto resulta obvio si los errores de cuantificación de esos parámetros se comparan con los errores del modelo del proceso que influye el diseño del controlador.

Los errores en los parámetros no causan no-linealidades en el lazo sino sólo desviaciones respecto del comportamiento nominal. Es sobre todo importante estudiar la influencia que puede tener en la respuesta dinámica, particularmente en la estabilidad del sistema. Para esto se estudia cómo cambian las raíces de la ecuación característica con los cambios de los parámetros. Esto requiere de un análisis de robustez paramétrica que se remite a la bibliografía especializada.

Suponiendo la ecuación característica.

$$P(z,a) = z^n - a_1 z^{n-1} - \dots - a_n = 0 \quad (2.9-11)$$

con sus raíces l_1, l_2, \dots, l_n donde $l_i = r_i e^{j\theta_i}$. Suponiendo que un coeficiente, por ejemplo a_k , está sujeto al error ϵ_{a_k} y se quiere computar el efecto sobre la raíz l_j y especialmente sobre su módulo r_j para verificar la estabilidad.

Analizando en $z = l_j$, resulta $P(l_j, a_k) = 0$. Si se cambia a_k por $a_k + \epsilon_{a_k}$ también cambia l_j y el polinomio característico desarrollado en serie de Taylor es

$$\begin{aligned} P(l_j + \varepsilon_{l_j}, a_k + \varepsilon_{a_k}) &= P(l_j, a_k) + \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=l_j} \varepsilon_{l_j} + \\ &+ \frac{\partial P}{\partial a_k} \Big|_{z=l_j} \varepsilon_{a_k} + \dots = 0. \end{aligned}$$

El primer sumando es $P(l_j, a_k) = 0$ y los términos de orden superior son despreciables. Resulta así

$$\varepsilon_{l_j} = - \frac{\partial P / \partial a_k}{\partial P / \partial z} \Big|_{z=l_j} \varepsilon_{a_k}. \quad (2.9-12)$$

De la Ec. 2.9-11 puede evaluarse la derivada

$$\frac{\partial P}{\partial a_k} \Big|_{z=l_j} = -l_j^{n-k}.$$

Por otra parte, usando la expresión de factores se obtiene

$$P(z, l_j) = (z - l_1)(z - l_2) \dots (z - l_n)$$

la derivada toma la forma

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=l_j} = \prod_{i \neq j} (l_j - l_i).$$

Entonces la Ec. 2.9-12 queda

$$\varepsilon_{l_j} = \frac{l_j^{n-k}}{\prod_{i \neq j} (l_j - l_i)} \varepsilon_{a_k}. \quad (2.9-13)$$

Analizando la Ec. 2.9-13 pueden obtenerse algunas conclusiones sobre la sensibilidad paramétrica. Como es $|l_j| < 1$, a mayor diferencia $n - k$ la sensibilidad es menor. Por lo tanto el parámetro más sensible es a_n , el término independiente de la Ec. 2.9-11. También para valores de raíces cerca del círculo unitario, la sensibilidad es mayor.

Con respecto al denominador de la Ec. 2.9-13, se analiza cómo es el producto de los vectores de las raíces características hasta l_j . Si las raíces están muy juntas, la sensibilidad será alta. Por ejemplo en el caso de un filtro pasa-bajos digital con una

estrecha banda y corte abrupto, el sistema tendrá muchos polos juntos cerca de $z = 1$. Por tal razón, es muy importante la estructura con la que se diseñe el filtro (canónica, cascada, paralela) en lo que respecta a la sensibilidad.

2.9.7 Efectos de cuantificación de resultados intermedios.

En algoritmos de control lineal los resultados intermedios son productos de coeficientes y variables. Los factores y los productos son sometidos a redondeo. Considérese el producto $q.e$ con

$$\begin{aligned} q &= Q\Delta + \varepsilon_q; \quad e = E\Delta + \varepsilon_e \\ q.e &= QE\Delta^2 + Q\Delta\varepsilon_e + E\Delta\varepsilon_q + \varepsilon_q\varepsilon_e \end{aligned} \tag{2.9-14}$$

siendo $E\{\varepsilon_q\} = E\{\varepsilon_e\} = 0$

Si los errores de redondeo $\varepsilon_q, \varepsilon_e$ son estadísticamente independientes y con varianza $\sigma_\varepsilon^2 = \Delta^2/12$, el error del producto obtenido por redondeo de los factores tiene una varianza definida por

$$\sigma_1^2 = E\{[Q\Delta\varepsilon_e + E\Delta\varepsilon_q]^2\}.$$

Teniendo en cuenta que $\varepsilon_e, \varepsilon_q$ son independientes con igual varianza σ_ε , resulta

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= E\{(Q\Delta)^2\varepsilon_e^2 + (E\Delta)^2\varepsilon_q^2\} \\ &= (Q\Delta)^2\sigma_\varepsilon^2 + (E\Delta)^2\sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sigma_1^2 = (Q^2 + E^2)\Delta^2\sigma_\varepsilon^2. \tag{2.9-15}$$

Debe además considerarse el error de redondeo del producto QE en la Ec. 2.9-14

$$\varepsilon_{QE} = QE\Delta^2 - (QE)_Q\Delta. \tag{2.9-16}$$

Si este error tiene varianza $\sigma_2^2 = \sigma_\varepsilon^2$, para errores independientes la varianza del error total es

$$\sigma_{qe}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = [1 + \Delta^2(Q^2 + E^2)]\sigma_\varepsilon^2 \approx [1 + q^2 + e^2]\sigma_\varepsilon^2.$$

Se ve que para valores grandes respecto de la unidad de los factores q, e , el error debido al redondeo de los factores es el predominante.

El error de la suma de los productos de la Ec. 2.9-6 es

$$\begin{aligned}\varepsilon_u(k) = & -\varepsilon_{pu_1}(k-1) - \dots - \varepsilon_{pu_m}(k-m) + \varepsilon_{qe_0}(k) + \dots + \\ & + \varepsilon_{qe_m}(k-m).\end{aligned}\tag{2.9-18}$$

Si se asume independencia de los errores de cuantificación

$$\sigma_{\varepsilon_u}^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_{\varepsilon_{pu_i}}^2 + \sum_{i=0}^m \sigma_{\varepsilon_{qe_i}}^2.\tag{2.9-19}$$

2.9.8 Consideraciones para disminuir los efectos de errores de cuantificación.

Las longitudes de palabras de los conversores A/D y D/A como de la CPU deben ser suficientemente grandes y compatibles. La longitud de palabra del A/D debe elegirse tal que su error de cuantificación sea menor que los errores estático y dinámico de los sensores. Una longitud de 10 bits es usualmente suficiente (resolución 0.1%). La longitud de palabra del D/A debe ser compatible con la del A/D. Para control digital puede tomarse tal que una unidad de cuantificación de la variable de control después de pasar por el proceso corresponda a una unidad de cuantificación del A/D.

Las longitudes de palabra donde se localizan los errores de cuantificación deben usarse en el mejor modo posible, mediante un escalado apropiado de las variables.

Para evitar errores excesivos de factores y productos, la longitud de palabra de la CPU para cálculos de punto fijo debe ser significativamente mayor que la del A/D (por ejemplo el doble).

Si ocurren ciclos límites en un lazo de control, los parámetros del controlador deberán modificarse para obtener acciones de control más débiles.

La estructura de implementación de filtros y controladores tiene importancia en la sensibilidad de los polos del sistema de lazo cerrado a variaciones de los parámetros debidos a errores de cuantificación, y por lo tanto debe tenerse cuidado con el diseño.

CAPITULO 3

3. MODELOS DISCRETOS DETERMINISTICOS

3.1 Función de Transferencia de Impulsos.

La función de transferencia de un sistema monovariable continuo está definida como la relación de la transformada de Laplace de la señal de salida respecto de la transformada de la entrada, para condiciones iniciales nulas.

Es importante extender este concepto para el tratamiento de los sistemas de tiempo discreto, para los cuales se puede definir la **Función de Transferencia de Impulsos** como la relación de la transformada de Laplace de la señal discretizada de salida respecto de la transformada de la señal discretizada de entrada para condiciones iniciales nulas.

Referido a la Fig. 3.1.1, se define la función de transferencia de impulsos $G^*(s)$ como

$$G^*(s) = \frac{y^*(s)}{u^*(s)} \quad (3.1-1)$$

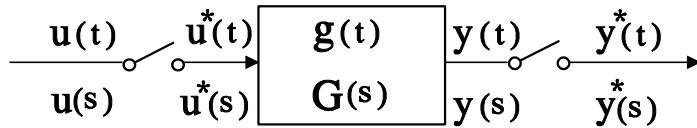


Fig. 3.1.1. Sistema muestreado.

Siendo $u(t)$ una señal continua, el tren de impulsos a la entrada del proceso es, según Ec. 2.3-7

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_o) \delta(t-kT_o). \quad (3.1-2)$$

La señal de salida continua $y(t)$ se calcula mediante la sumatoria de convolución entre la entrada y la función de peso o respuesta al impulso $g(t)$,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_o) g(t-kT_o). \quad (3.1-3)$$

Cuando la salida continua $y(t)$ se muestrea sincrónicamente con la entrada, la Ec. 3.1-3 puede escribirse en tiempo discreto

$$y(nT_o) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_o) g[(n-k)T_o]. \quad (3.1-4)$$

La transformada de Laplace de la salida muestreada es

$$y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_o) e^{-nT_o s}. \quad (3.1-5)$$

Reemplazando $y(nT_o)$

$$y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_o) g[(n-k)T_o] e^{-nT_o s}. \quad (3.1-6)$$

Haciendo un cambio de variable

$$q = n - k$$

$$y^*(s) = \sum_{q=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_o) g(qT_o) e^{-qT_o s} e^{-kT_o s}. \quad (3.1-7)$$

Reordenando

$$y^*(s) = \sum_{q=-k}^{\infty} g(qT_o) e^{-qT_o s} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_o) e^{-kT_o s}. \quad (3.1-8)$$

La función $g(qT_o)$ representa los valores de tiempo discreto de la función de peso $g(t)$ del sistema y se denomina **Secuencia de Ponderación**. La segunda sumatoria de la Ec. 3.1-8 representa la transformada de Laplace de la entrada muestreada $u^*(s)$. Considerando que por causalidad del sistema es $g(qT_o)=0$ con $q<0$, resulta,

$$y^*(s) = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_o) e^{-qT_o s} u^*(s). \quad (3.1-9)$$

De acuerdo con la definición adoptada en Ec. 3.1-1, la **Función de Transferencia de Impulsos $G^*(s)$** queda definida como

$$G^*(s) = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_o) e^{-qT_o s}. \quad (3.1-10)$$

Esto es, $G^*(s)$ está definida como la transformada de Laplace de la secuencia de ponderación $g(qT_o)$.

3.2 Función de Transferencia de Tiempo Discreto.

La función de **Transferencia de Tiempo Discreto**, también denominada **Función de Transferencia Z**, se obtiene reemplazando en la Ec. 3.1-10 de la Función de Transferencia de Impulsos, la siguiente igualdad

$$z = e^{T_o s}$$

obteniéndose

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_o) z^{-q} \quad (3.2-1)$$

$$G(z) = Z\{g(qT_o)\}. \quad (3.2-2)$$

Esto es, la función de transferencia de tiempo discreto puede obtenerse realizando la Transformada Z de la secuencia de ponderación $g(qT_0)$.

A modo de ejemplo se calcula la función de transferencia de tiempo discreto para un sistema de primer orden. Un sistema tal está definido en el dominio temporal por su ecuación diferencial de primer orden, donde $u(t)$ representa la entrada, e $y(t)$ la salida.

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K u(t). \quad (3.2-3)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial para una entrada impulsiva

$$u(t) = \delta(t)$$

se obtiene la respuesta impulsiva $g(t)$ que es una función exponencial decreciente

$$g(t) = \frac{Ke^{-t/T}}{T}. \quad (3.2-4)$$

Tratándose de un sistema muestrado, la respuesta impulsiva de tiempo discreto, o secuencia de ponderación, será

$$g(kT_o) = \frac{Ke^{-kT_o/T}}{T} \quad (3.2-5)$$

que se representa en la Fig. 3.2.1.

De acuerdo con la Ec. 3.2-2, se puede obtener la función de transferencia de tiempo discreto

$$G(z) = \frac{K}{T} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_o/T} z^{-k} = \frac{K}{T} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{T_o/T} z)^{-k}. \quad (3.2-6)$$

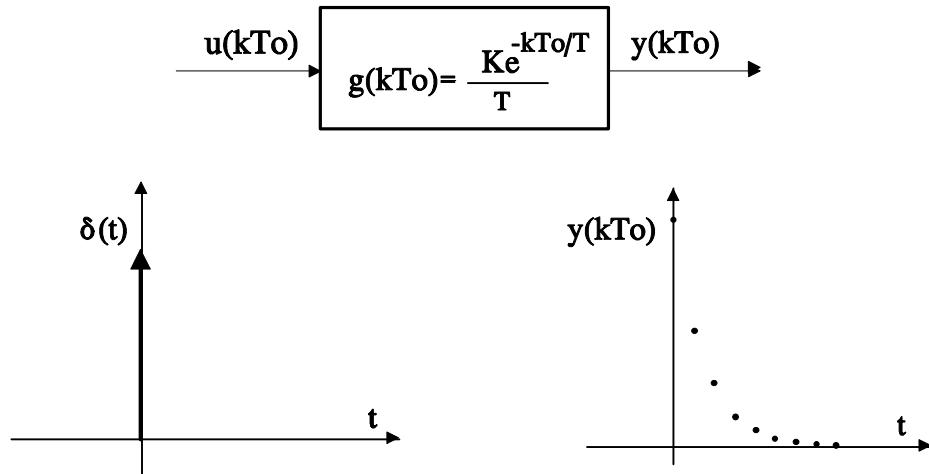


Fig. 3.2.1. Secuencia de ponderación de un sistema de primer orden.

En forma cerrada la Ec. 2.3-6 toma la siguiente forma

$$G(z) = \frac{K}{T} \frac{z}{z - e^{-T_o/T}} = \frac{K/T}{1 - e^{-T_o/T} z^{-1}}. \quad (3.2-7)$$

queda $G(z)$ para un sistema de primer orden

$$G(z) = \frac{b_o}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{y(z)}{u(z)}. \quad (3.2-8)$$

La Ec. 3.2-8, puede también expresarse como

$$y(z) - a_1 y(z)z^{-1} = b_o u(z). \quad (3.2-9)$$

Antitransformando al dominio temporal, se obtiene

$$y(kT_o) - a_1 y[(k-1)T_o] = b_o u(kT_o) \quad (3.2-10)$$

La Ec. 3.2-10, que representa una ecuación en diferencias de primer orden, podría haberse obtenido por discretización de la ecuación diferencial, Ec. 3.2-3.

Para sistemas de mayor orden se pueden generalizar estos conceptos. La ecuación diferencial de un sistema de orden m tendrá, en su caso más general, la forma representada en la Ec. 3.2-11.

$$\begin{aligned} a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) &= \\ &= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_o u(t). \end{aligned} \quad (3.2-11)$$

La función de transferencia, es

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_o + b_1 s + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_m s^m} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (3.2-12)$$

En el campo discreto se puede plantear la ecuación en diferencias de orden m que tendrá la forma

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(k-m) &= \\ &= b_o u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m). \end{aligned} \quad (3.2-13)$$

La Ec. 3.2-13 se puede transformar en Z aplicando el teorema de desplazamiento a la derecha, obteniéndose

$$\begin{aligned} y(z) + a_1 y(z)z^{-1} + \dots + a_m y(z)z^{-m} &= \\ &= b_o u(z) + b_1 u(z)z^{-1} + \dots + b_m u(z)z^{-m}. \end{aligned} \quad (3.2-14)$$

A partir de Ec. 3.2-14 se obtiene la función de transferencia discreta del sistema de orden m .

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}. \quad (3.2-15)$$

En forma compacta $G(z)$ se expresa como

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (3.2-16)$$

donde B, A representan los polinomios de numerador y denominador respectivamente y el exponente negativo de z es una notación que indica que la función de transferencia discreta esta expresada en términos de potencias negativas de z . Multiplicando numerador y denominador por z^m se puede obtener una expresión de $G(z)$ en términos de potencias positivas de z lo que resulta de utilidad en algunos casos particulares. Despejando $y(k)$ de la ecuación en diferencias Ec. 3.2-13 se obtiene

$$\begin{aligned} y(k) = & -a_1 y(k-1) - \dots - a_m y(k-m) + \\ & + b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m). \end{aligned}$$

Esta forma de expresar la ecuación en diferencias se denomina modelo ARMA del proceso. El nombre generalizado de modelo ARMA proviene de su nombre en inglés *autoregressive* (AR), *moving average* (MA). La parte autoregresiva se refiere a aquella que contiene los términos pasados (regresivos) de la propia (auto) variable de salida en un número igual al orden del proceso. El concepto de media móvil (MA) se refiere al caso en que siendo $u(k)$ una entrada estocástica, los coeficientes b realizan una media pesada de los últimos m valores de la entrada $u(k)$. Como esta media se va actualizando con k , se la denomina móvil. Este concepto de media fue extendido a los sistemas determinísticos y conserva el nombre.

Cuando son los coeficientes $a_i = 0$ se tiene un modelo de media móvil puro (modelo MA). Esto es, los valores pasados de $y(k)$ no influyen en el valor presente.

Cuando son los coeficientes $b_i = 0$ se tiene un modelo autoregresivo puro (modelo AR). Bajo esta condición, el modelo no es sensible a entradas y sólo tiene la dinámica propia.

El modelo ARMA, expresado en forma de sumatoria tiene la forma

$$y(k) = - \sum_{i=1}^m a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^n b_i u(k-i)$$

3.3 Características y propiedades de la Función de transferencia discreta.

3.3.1 Realizabilidad.

$G(z)$ representa un sistema realizable si haciendo el cociente,

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (3.3-1)$$

resulta

$$G(z^{-1}) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots \quad (3.3-2)$$

sin términos con potencias positivas de z , impuesto por condiciones de causalidad. Obsérvese que los c_i , representan en el dominio temporal los valores de la secuencia de ponderación del sistema (Ec. 3.2-5). Esto implica que el orden del denominador puede ser igual o mayor que el del numerador pero no menor, cuando $G(z)$ se expresa en potencias positivas de z .

3.3.2 Retardo puro.

La función de transferencia de un retardo puro, tiempo muerto o demora T , se representa como

$$D(s) = e^{-Ts}. \quad (3.3-4)$$

Si el tiempo de demora T se expresa en múltiplos de intervalos de muestreo T_o es

$$T = dT_o \quad (3.3-5)$$

con $d = 1, 2, 3, \dots$. La función de transferencia en z , será

$$D(z) = z^{-d}. \quad (3.3-6)$$

Un proceso como el representado en la Fig. 3.3-1 que tiene un retardo puro de d intervalos de muestreo, tendrá como función de transferencia discreta

$$G(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} \quad (3.3-7)$$

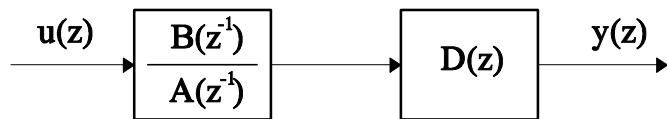


Fig. 3.3.1 Proceso con retardo puro.

3.3.3 Constante de proporcionalidad.

La constante de proporcionalidad K de un sistema se obtiene utilizando el teorema del valor final. K está dado por el valor final de $y(k)$ para una entrada escalón unitario.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} G(z)u(z)$$

siendo

$$u(z) = \frac{z}{z-1}$$

por ser un escalón unitario, resulta

$$K = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{1 + a_1 + \dots + a_m}. \quad (3.3-8)$$

3.3.4 Constante de integración.

La constante de integración de un sistema se obtiene en base a la determinación de la pendiente de la salida en estado estacionario para una entrada escalón unitario.

Si el sistema tiene comportamiento integral tendrá un polo en el origen del plano s o bien en $z = 1$ en el plano Z , el cual se puede sacar como factor común.

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{m-1} z^{-(m-1)}} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{B(z^{-1})}{D(z^{-1})} \end{aligned} \quad (3.3-9)$$

Siendo la transformada de la señal de variación de la salida,

$$\Delta y(z) = y(z)(1 - z^{-1})$$

para una entrada escalón unitario, con $u(z) = 1 \cdot z / (z - 1)$ resulta

$$\Delta y(z) = \frac{B(z^{-1})}{D(z^{-1})} \frac{z}{z - 1}.$$

Utilizando el teorema del valor final, se obtiene el gradiente de crecimiento de la salida, el cual se denomina constante de integración.

$$K_I = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{1 + d_1 + \dots + d_{m-1}} \quad (3.3-10)$$

3.4 Operaciones con funciones de transferencia discretas.

Para realizar la transformada Z del sistema en cascada representado en la Fig. 3.4.1, debe primero efectuarse el producto $G_1(s)G_2(s) = G_T(s)$, al no estar separados los bloques por un muestreador sincrónico.

$$G_T(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = Z\{G_1(s)G_2(s)\} = Z\{G_T(s)\} \quad (3.4-1)$$

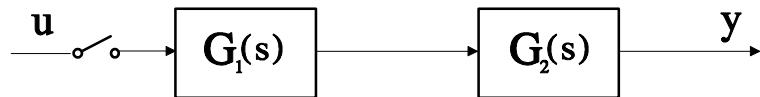


Fig. 3.4.1 Bloques en cascada.

Si ambos bloques están separados por un muestreador sincrónico como en la Fig. 3.4.2, se realizan las transformadas independientemente

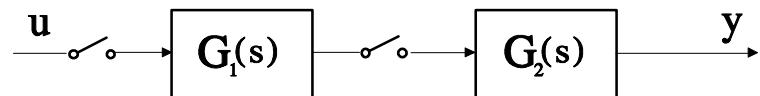


Fig. 3.4.2 Bloques separados por muestreador.

$$G_M(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = Z\{G_1(s)\} Z\{G_2(s)\} = G_1(z)G_2(z) \quad (3.4-2)$$

resultando en general

$$G_M(z) \neq G_T(z).$$

La función de transferencia discreta para el sistema de la Fig. 3.4.3, es

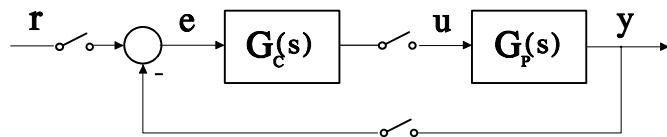


Fig. 3.4.3. Sistema realimentado.

$$G_T(z) = \frac{y(z)}{r(z)}$$

con

$$y(z) = G_p(z) G_c(z)[r(z) - y(z)]$$

resulta

$$G_T(z) = \frac{G_p(z)G_c(z)}{1 + G_p(z)G_c(z)} \quad (3.4-3)$$

3.5 Condiciones de estabilidad de sistemas de tiempo discreto.

Para analizar conceptualmente la estabilidad de los sistemas de tiempo discreto se hace primeramente el estudio en base a la ubicación de un polo real único. La función de transferencia continua de un sistema con un polo real único es

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{1 + sT} = \frac{K/T}{1/T + s}.$$

De acuerdo a la Ec. 3.2-8, resulta

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_o}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (3.5-1)$$

$G(z)$ tiene un polo en $z_1 = a_1$.

La correspondiente ecuación en diferencias de $G(z)$ es

$$y(k) - a_1 y(k-1) = b_o u(k).$$

La ecuación homogénea en diferencias que corresponde a la evolución libre resulta

$$y(k) - a_1 y(k-1) = 0.$$

Si la condición inicial es $y(0) \neq 0$, se puede analizar la evolución temporal de $y(k)$ en forma recursiva.

$$y(1) = a_1 y(0) \neq 0$$

$$y(2) = a_1 y(1) = a_1^2 y(0)$$

•

•

•

$$y(k) = a_1 y(k-1) = a_1^k y(0).$$

De esta expresión se observa que el sistema con la función de transferencia en z representada en Ec. 3.5-1, tendrá una evolución tendiendo a cero -sistema estable- si $|a_1| < 1$. Por el contrario, con $|a_1| > 1$, la salida $y(k)$ crece indefinidamente. La condición $|a_1| = 1$ representa el límite de estabilidad. El valor de a_1 fija la posición del polo en el plano Z . En la Fig. 3.5.1 se representan distintas posiciones de un polo real y su correspondiente comportamiento temporal.

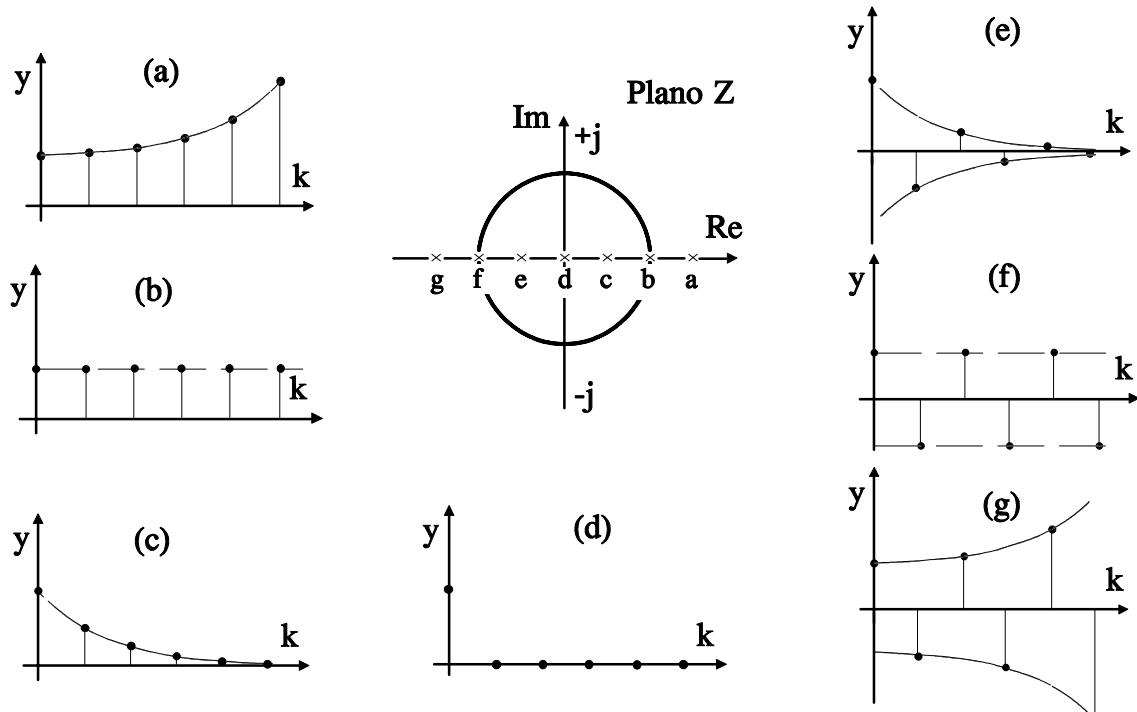


Fig. 3.5.1. Polos reales y comportamiento temporal

Los polos en los planos S y Z están relacionados por

$$z_1 = a_1 = e^{Ts_1}$$

$$s_1 = -1/T.$$

Los polos reales en el plano S , comprendidos en el rango $-\infty < s_i < +\infty$ corresponden a polos reales en el plano Z comprendidos en el rango $0 < z_i < \infty$. Esto es, solamente polos reales positivos en Z . Polos reales negativos en Z no tienen correspondencia en el plano S .

Para extender este concepto a los sistemas con polos complejos, se considera un sistema cuya ecuación característica tenga un par de polos complejos conjugados. La función de transferencia en variable s tendrá la forma

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{N_s(s)}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

$$s_{1,2} = -a \pm j\omega_1$$

Transformando al dominio Z se obtiene

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{N_z(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

Los polos complejos son

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= e^{aT_o} e^{\pm j\omega_1 T_o} \\ &= M e^{\pm j\omega_1 T_o} = M \Delta[\omega_1 T_o] \end{aligned}$$

Para valores $M > 0$ existe correspondencia entre los polos en Z y en S . En un contexto digital es posible la existencia de polos con $M < 0$. Estos polos no tienen correspondencia en el dominio S , ya que no es posible su transformación. Este tipo de polos tienen poca significación práctica ya que la discretización de un sistema continuo real generará solo polos en Z con $M > 0$.

Considerando un sistema discreto con un par de polos complejos conjugados, la solución de la ecuación en diferencias homogénea, para evolución libre a partir de una condición inicial $y(0)$, tiene la forma

$$y(k) = M^k \cos(\omega_1 k T_o) y(0)$$

La salida del sistema $y(k)$ permanecerá acotada si y solo si es $M \leq 1$. Esto es, el sistema será estable si los polos complejos se encuentran dentro del círculo de radio unitario en el plano Z .

En la Fig. 3.5.2 se representan distintas posiciones de un par de polos complejos conjugados y sus correspondientes evoluciones temporales esquemáticas.

Para ángulos $\omega_1 T_o < 90^\circ$ se obtienen las representaciones **a**, **b** y **c** en las cuales se cumple correctamente el teorema de Shannon ya que la frecuencia de muestreo es suficientemente alta en relación a la frecuencia de la armónica producida por el par de polos complejos. Cuando $\omega_1 T_o = 90^\circ$ los polos se ubican sobre el eje imaginario. En este caso la señal $y(k)$ se anula para $k = 1, 3, 5, \dots$ y su signo cambia alternativamente para $k = 0, 2, 4, \dots$ (representación **d**). El amortiguamiento está definido por el valor de M . Para ángulos $\omega_1 T_o > 90^\circ$ se obtienen las representaciones **e**, **f** y **g** en las que comienza a violarse el teorema de Shannon.

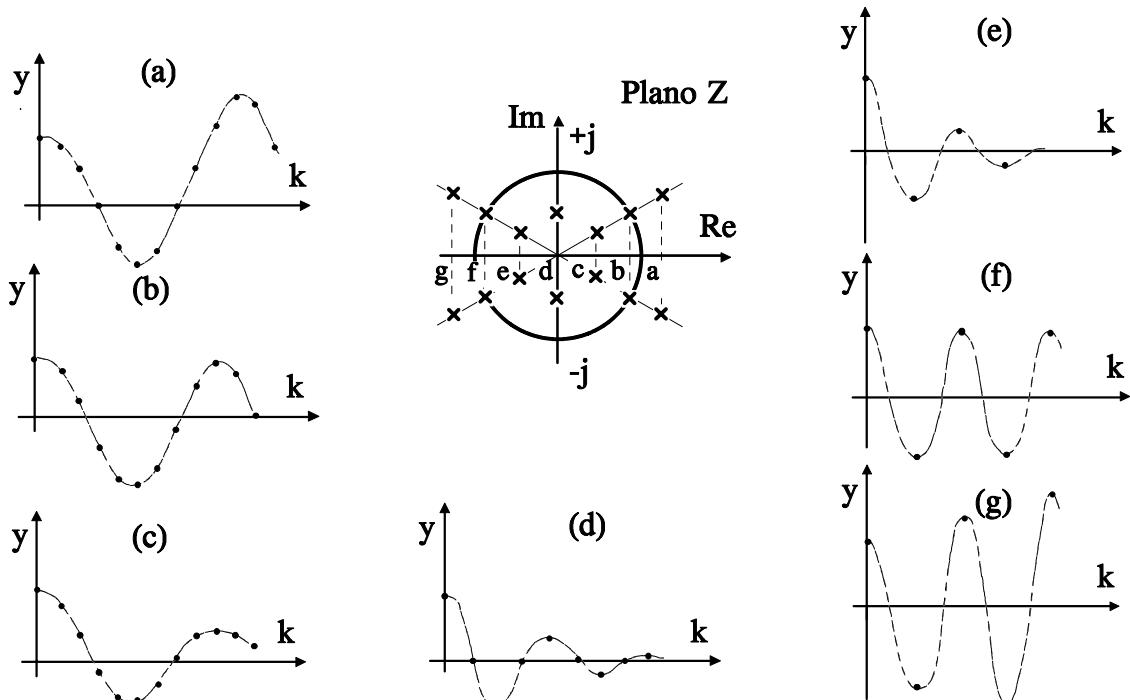


Fig. 3.5.2

Polos complejos y evoluciones temporales correspondientes

La condición de estabilidad en general se puede enunciar de la siguiente manera:

Un sistema lineal es asintóticamente estable si a partir de una condición inicial distinta de cero, la salida del mismo tiende asintóticamente a cero. Dado un modelo de función de transferencia discreta la condición de estabilidad establece que los polos estén ubicados dentro del círculo unitario del plano Z . Esto es, se debe cumplir que $|a_i| < 1$.

Generalizando este concepto para una ecuación característica de un sistema

$$(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m) = 0$$

con varios polos reales o complejos, el mismo será estable si todas las raíces cumplen con la condición que su módulo,

$$|z_i| < 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

3.6 Modelos para la representación de sistemas multivariados de tiempo discreto.

En forma general se define **proceso multivariable**, a aquel que tiene más de una entrada y más de una salida. Sin embargo, cuando cada salida esta vinculada a una y sólo una entrada, como se muestra en la Fig. 3.6.1 (a), entonces más que un proceso multivariable, se tiene un conjunto de procesos de una entrada y una salida, cuyo tratamiento se puede hacer en forma individual para cada uno de ellos, con las herramientas de control monovariable conocidas hasta ahora y se podrán controlar con lazos individuales de control. Comúnmente se los denomina **sistemas desacoplados**, y no presentan ningún problema adicional. Más específicamente un proceso es multivariable cuando además de tener múltiples entradas y múltiples salidas, cada entrada está vinculada a más de una salida, y cada salida a más de una entrada, en este caso toman el nombre de **procesos acoplados**, como se muestra en la Fig. 3.6.1 (b).

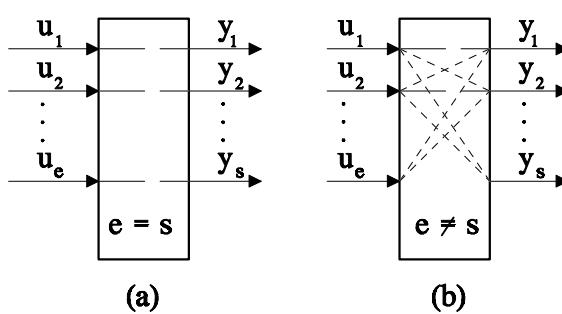


Fig. 3.6.1 Esquema de sistemas multivariados.

- (a). Entradas y salidas desacopladas.
- (b). Entradas y salidas acopladas.

La particularidad más importante de los procesos acoplados es la **interacción** entre entradas y salidas, de manera que no se puede tratar por separado cada relación entrada-salida, sino que se debe realizar un estudio en conjunto, lo que lleva a aplicar el **cálculo matricial-vectorial**.

3.6.1 Estructuras canónicas para procesos multivariados.

Los procesos multivariados se pueden representar bajo modelos denominados **estructuras canónicas**. Las más importantes son la **estructura canónica P** y la **estructura canónica V**, ilustrados en Fig. 3.6.2 (a) y (b) respectivamente. En la estructura canónica P todas las entradas actúan sobre cada salida, mientras que en la estructura canónica V todas las salidas se conectan a cada entrada. La estructura V se define para igual número de entradas y salidas.

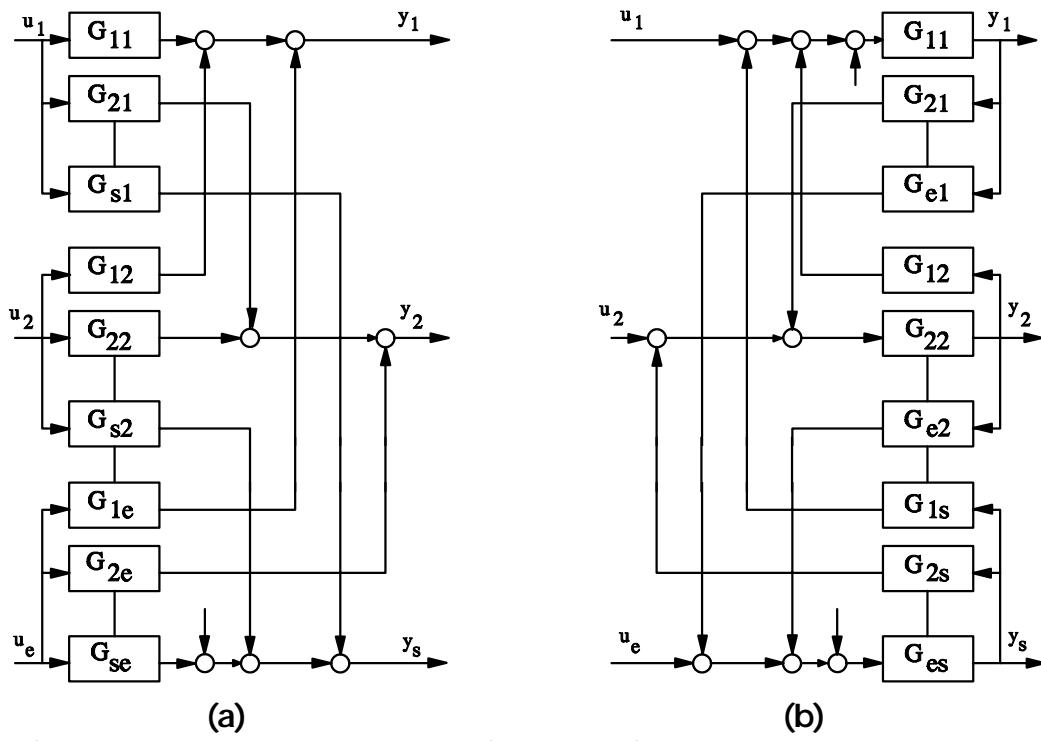


Fig. 3.6.2. Estructuras canónicas más importantes
(a) Estructura P. (b) Estructura V ($e=s$).

3.6.2 Modelo matemático para las estructuras canónicas multivariadas.

Se puede considerar que cada salida se vincula a una entrada a través de una función de transferencia de tiempo discreto de manera que para e entradas y s salidas se tiene

$$y_i(z) = \sum_{j=1}^e G_{ij}(z)u_j(z) \quad (3.6-1)$$

con $i=1, \dots, s$ para el caso de una estructura **P** y

$$y_i(z) = G_{ii}(z)[u_i(z) + \sum_{j=1}^{s-1} G_{ij}(z)y_j(z)] \quad (3.6-2)$$

con $G_{ij} = 0$ si $i=j$, para la estructura **V**.

Considerando todas las salidas y representando el sistema de ecuaciones en forma matricial, para la estructura **P** se tiene

$$\begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ \vdots \\ y_s(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) & \cdots & G_{1e}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) & \cdots & G_{2e}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{s1}(z) & G_{s2}(z) & \cdots & G_{se}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ \vdots \\ u_e(z) \end{bmatrix} \quad (3.6-3)$$

o con notación vectorial-matricial

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{u}(z). \quad (3.6-4)$$

Para la estructura **V**

$$\begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ \vdots \\ y_s(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{22}(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{ss}(z) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ \vdots \\ u_s(z) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} 0 & G_{12}(z) & \cdots & G_{1s}(z) \\ G_{21}(z) & 0 & \cdots & G_{2s}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{s1}(z) & G_{s2}(z) & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ \vdots \\ y_s(z) \end{bmatrix} \right\} \quad (3.6-5)$$

En forma compacta

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}_1(z) [\mathbf{u}(z) + \mathbf{G}_2(z) \mathbf{y}(z)]. \quad (3.6-6)$$

Operando en Ec. 3.6-6 se tiene

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}_1(z) \mathbf{u}(z) + \mathbf{G}_1(z) \mathbf{G}_2(z) \mathbf{y}(z) \quad (3.6-7)$$

$$\mathbf{y}(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{G}_1(z) \mathbf{G}_2(z)]^{-1} \mathbf{G}_1(z) \mathbf{u}(z). \quad (3.6-8)$$

Denominando:

$$\mathbf{G}^*(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{G}_1(z) \mathbf{G}_2(z)]^{-1} \mathbf{G}_1(z) \quad (3.6-9)$$

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}^*(z) \mathbf{u}(z). \quad (3.6-10)$$

Comparando Ec. 3.6-10 con Ec. 3.6-4, se deduce que se ha transformado una estructura **V** en una **P**.

Para pasar de **P** a **V** es más complejo. La Ec. 3.6-4 se estructura de la forma

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}_a(z) \mathbf{u}(z) + \mathbf{G}_b(z) \mathbf{u}(z) \quad (3.6-11)$$

o también

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}_a(z) [\mathbf{u}(z) + \mathbf{G}_a^{-1}(z) \mathbf{G}_b(z) \mathbf{u}(z)]. \quad (3.6-12)$$

con $\mathbf{G}_a(z)$ diagonal conteniendo sólo los elementos G_{ii} .

Despejando $\mathbf{u}(z)$ de Ec. 3.6-4

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{G}^{-1}(z) \mathbf{y}(z) \quad (3.6-13)$$

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}_a(z) [\mathbf{u}(z) + \mathbf{G}_a^{-1}(z) \mathbf{G}_b(z) \mathbf{G}^{-1}(z) \mathbf{y}(z)]. \quad (3.6-14)$$

Comparando Ec. 3.6-6 con Ec. 3.6-14

$$\mathbf{G}_1(z) = \mathbf{G}_a(z) \quad (3.6-15)$$

$$G_2(z) = G_a^{-1}(z)G_b(z)G^{-1}(z). \quad (3.6-16)$$

Las funciones de transferencia G_{ij} se denominan **elementos principales** si $i=j$ y **elementos de acoplamiento** si $i \neq j$, y la estructura se dice simétrica si $G_{ij} = G_{ji}$ para $i \neq j$.

3.6.3 Ecuación característica y factor de acoplamiento.

Suponiendo una realimentación desacoplada del sistema mediante una matriz de realimentación de la forma

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & H_{22}(z) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_{ee}(z) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6-17)$$

y un vector de referencia $\mathbf{r}(z)$ vinculado a través de una matriz $\mathbf{M}(z)$, se busca obtener la matriz de transferencia de lazo cerrado. Puesto que $\mathbf{r}(z)$ es la referencia deseada para $\mathbf{y}(z)$, $\mathbf{r}(z)$ e $\mathbf{y}(z)$ tienen la misma dimensión. El vector de entrada será

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{M}(z)\mathbf{r}(z) - \mathbf{H}(z)\mathbf{y}(z). \quad (3.6-18)$$

Reemplazando Ec. 3.6-18 en Ec. 3.6-4 se obtiene

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}(z) [\mathbf{M}(z)\mathbf{r}(z) - \mathbf{H}(z)\mathbf{y}(z)]. \quad (3.6-19)$$

Reordenando se encuentra

$$\mathbf{y}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]^{-1} \mathbf{G}(z)\mathbf{M}(z)\mathbf{r}(z) \quad (3.6-20)$$

de manera que la matriz de transferencia de lazo cerrado es

$$\mathbf{G}^*(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]^{-1} \mathbf{G}(z)\mathbf{M}(z). \quad (3.6-21)$$

Dado que la dimensión de \mathbf{G} es $(s \times e)$, de \mathbf{H} es $(e \times s)$, y de \mathbf{M} es $(e \times s)$, entonces \mathbf{G}^* es $(s \times s)$.

En la Fig. 3.6.3 se puede observar un diagrama en bloques del modelo multivariable de lazo cerrado.

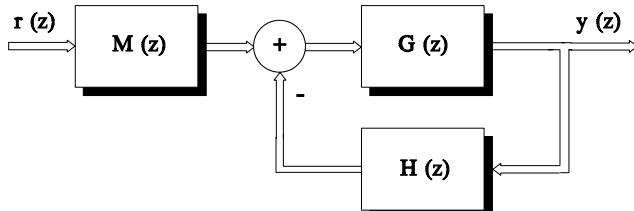


Fig. 3.6.3. Diagrama en bloques de un sistema multivariable realimentado.

Puesto que la matriz inversa se define como

$$[\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]^{-1} = \frac{\text{Adj}[\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]}{\det[\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]} \quad (3.6-22)$$

ésta se puede reemplazar en Ec. 3.6-21 obteniéndose

$$\mathbf{G}^*(z) = \frac{\text{Adj}[\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]\mathbf{G}(z)\mathbf{M}(z)}{\det[\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)]} \quad (3.6-23)$$

y por lo tanto la ecuación característica del proceso multivariable de lazo cerrado es

$$\det[\mathbf{I} + \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)] = 0 \quad (3.6-24)$$

es decir una generalización del polinomio característico estudiado para el caso de una entrada y una salida.

Un caso particular de bastante importancia se presenta cuando \mathbf{H} es una matriz identidad en el caso de procesos de dos entradas y dos salidas y además se coloca en cascada con \mathbf{G} un sistema desacoplado \mathbf{Gc} , de manera que se tiene

$$\det[\mathbf{I} + \mathbf{Gc}(z)\mathbf{G}(z)] = \det \begin{bmatrix} [1 + \mathbf{Gc}_{11}\mathbf{G}_{11}] & \mathbf{Gc}_{11}\mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{Gc}_{22}\mathbf{G}_{21} & [1 + \mathbf{Gc}_{22}\mathbf{G}_{22}] \end{bmatrix} = 0. \quad (3.6-25)$$

Desarrollando el determinante

$$[1 + \mathbf{Gc}_{11}\mathbf{G}_{11}][1 + \mathbf{Gc}_{22}\mathbf{G}_{22}] - \mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{21}\mathbf{Gc}_{11}\mathbf{Gc}_{22} = 0$$

sacando factor común el primer término y multiplicando y dividiendo en el segundo por $\mathbf{G}_{11}\mathbf{G}_{22}$ se obtiene

$$[1 + Gc_{11}G_{11}][1 + Gc_{22}G_{22}] \left[1 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}G_{22}} \frac{Gc_{11}G_{11}Gc_{22}G_{22}}{[1 + Gc_{11}G_{11}][1 + Gc_{22}G_{22}]} \right] = 0$$

Definiendo la función de transferencia de lazo cerrado desacoplada

$$Gr_i(z) = \frac{Gc_{ii}(z)G_{ii}(z)}{1 + Gc_{ii}(z)G_{ii}(z)} \quad (3.6-26)$$

y el **factor de acoplamiento dinámico**

$$f_{ad}(z) = \frac{G_{12}(z)G_{21}(z)}{G_{11}(z)G_{22}(z)} \quad (3.6-27)$$

el polinomio característico queda

$$(1 + Gc_{11}G_{11})(1 + Gc_{22}G_{22})(1 - f_{ad}Gr_1Gr_2) = 0.$$

En esta última ecuación los dos primeros factores son los polinomios característicos de los lazos simples desacoplados y sólo el tercer término depende de las funciones de transferencia cruzadas, agregando raíces al polinomio característico debidas al acoplamiento. De acuerdo con la ecuación del factor de acoplamiento dinámico, ya sea G_{12} o G_{21} o ambas igual a cero, no se modificará el conjunto de autovalores del sistema desacoplado.

Los resultados anteriores son difíciles de generalizar para procesos de más de dos entradas y dos salidas, sin embargo se puede demostrar que sólo se necesita que una de las dos funciones de transferencia cruzada G_{ij} , G_{ji} para todo i y todo j sean cero para que se conserven los autovalores del sistema desacoplado.

También se puede definir un **factor de acoplamiento estático** como

$$f_{ae} = \frac{G_{12}(1)G_{21}(1)}{G_{11}(1)G_{22}(1)} \quad (3.6-28)$$

La matriz \mathbf{Gc} constituye el **controlador del proceso**, y se puede elegir de manera que el efecto de acoplamiento sea mínimo.

3.7 Representación de Sistemas en el Espacio de Estado.

3.7.1 Introducción al concepto de variables de estado.

La representación de sistemas en el espacio de estado constituye una herramienta de gran utilidad para el análisis y diseño de sistemas de control en el dominio temporal. En particular resulta de gran significación para el tratamiento de los sistemas multivariados. Esta forma de representación fue desarrollada para el tratamiento de modelos continuos y fue extendida posteriormente a los modelos discretos en razón de los requerimientos impuestos por el control digital.

Se puede dar informalmente para un sistema la siguiente definición de **estado dinámico del sistema**.

El estado de un sistema causal, es la información mínima que es necesario conocer en un instante $t=t_o$ para que conjuntamente con el valor de las entradas definidas en todo tiempo a partir de $t \geq t_o$; se pueda determinar el comportamiento del sistema para cualquier $t \geq t_o$.

El estado dinámico de un sistema constituye una información instantánea que se va modificando con la evolución temporal del sistema. Las variables que son necesarias para definir el estado se denominan **variables de estado**. Se puede dar la siguiente definición.

Las variables de estado constituyen el conjunto más pequeño de variables, tales que el conocimiento de las mismas en $t=t_o$, conjuntamente con las entradas para $t \geq t_o$, determinan el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_o$.

De igual modo se puede definir el **vector de estado** como:

Un vector de estado de dimensión n es aquél cuyas componentes están constituidas por las n variables de estado.

Finalmente se define al **espacio de estado** de la siguiente manera:

Espacio de estado es el espacio geométrico n -dimensional donde se puede representar cualquier estado por un punto.

3.7.2. Modelación en el espacio de estado de un sistema simple.

Con el objeto de asociar estas definiciones a la modelación de un sistema físico, se toma como ejemplo un circuito elemental RLC; representado en la Fig. 3.7.1.

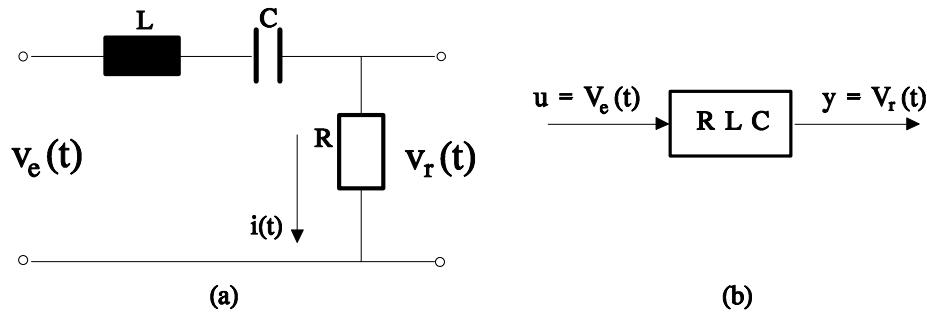


Fig. 3.7.1 (a) Circuito RLC; (b) Entrada-Salida del circuito RLC

Se toma $u=v_e(t)$ como señal de entrada al sistema y la tensión $v_r(t)$ sobre el resistor **R** como salida.

Por relaciones físicas es conocido que la evolución de las distintas variables físicas en este circuito, tales como tensiones y corrientes, quedará definida en un futuro si se conoce para un instante de tiempo $t=t_o$, la corriente que fluye en el inductor **L**, la tensión que existe sobre el capacitor **C** y la tensión de entrada desde t_o en adelante.

En base a la definición que se ha dado de variables de estado es posible elegir a la corriente en el circuito y a la tensión sobre el capacitor como variables de estado, ya que éstas definen el estado dinámico del circuito. La evolución futura del estado dinámico para $t \geq t_o$ se podrá determinar si se conoce para $t=t_o$ las variables de estado $i(t)$, $v_c(t)$ y además la tensión de entrada $v_e(t)$ para $t \geq t_o$.

Para analizar la evolución del circuito se pueden plantear las ecuaciones diferenciales del mismo.

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L} i - \frac{1}{L} v_c + \frac{1}{L} v_e \\ \frac{dv_c}{dt} &= \frac{1}{C} i \end{aligned} \tag{3.7-1}$$

Las Ec. 3.7-1 se pueden expresar en una ecuación matricial-vectorial.

$$\begin{bmatrix} di/dt \\ dv_c/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} [v_e]. \quad (3.7-2)$$

Definiendo a i , v_c como variables de estado y a \mathbf{x} como vector de estado, la Ec. 3.7-2 se puede reescribir

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t)$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7-3)$$

La matriz \mathbf{A} se denomina matriz del sistema y \mathbf{b} vector de entrada.

La variable de salida $y = v_R$ puede obtenerse también a partir del vector de estado mediante la Ec. 3.7-4.

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad (3.7-4)$$

con $\mathbf{c}^T = [R \ 0]$. El vector \mathbf{c} se denomina vector de salida.

De esta forma el circuito RLC de la Fig. 3.7.1 queda modelado en el espacio de estado por las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (3.7-5)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t) &= [i \ v_c] \\ u(t) &= v_e(t) \\ y(t) &= v_r(t). \end{aligned}$$

estando \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} definidas en las Ec. 3.7-3 y Ec. 3.7-4.

3.7.3. Modelación de un sistema monovariable de orden n .

El sistema monovariable representado en la Fig. 3.7.2. de orden n se puede representar por la Ec. 3.7-6.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u(t). \quad (3.7-6)$$



Fig. 3.7.2 Sistema monovariable de orden n .

Conociendo los parámetros a_i del sistema, los valores de la variable de salida y y sus derivadas hasta la de orden $n-1$ en $t=t_o$

$$y(t_o), \dot{y}(t_o), \dots, y^{(n-1)}(t_o)$$

y la entrada $u(t)$ para $t \geq t_o$, puede determinarse el comportamiento futuro de la salida del sistema $y(t)$ para $t \geq t_o$. Para hacer la modelación en el espacio de estado se pueden tomar las siguientes variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (3.7-7)$$

De esta forma la ecuación diferencial de orden n , Ec. 3.7-6, se puede transformar en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u(t). \end{aligned} \quad (3.7-8)$$

El sistema Ec. 3.7-8 se puede expresar matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ -a_n & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [u] \quad (3.7-9)$$

La Ec. 3.7-9 se puede escribir en forma compacta como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t).$$

De igual modo la salida del sistema queda expresada de el siguiente modo:

$$y = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.7-11)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t). \quad (3.7-12)$$

El sistema monovariable de orden n representado por la ecuación diferencial Ec. 3.7-6 queda modelado en el espacio de estado por la siguientes ecuaciones diferenciales vectoriales-matriciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (3.7-13)$$

Siendo:

- \mathbf{u} : entrada al sistema
- \mathbf{y} : salida del sistema
- \mathbf{x} : vector de estado
- \mathbf{A} : Matriz del sistema
- \mathbf{b} : vector de entrada
- \mathbf{c} : vector de salida

3.7.4 Extensión para sistemas multivariados.

Un sistema multivariable como el representado en la Fig. 3.7.3, en el cual existen interacciones múltiples de las e entradas con las s salidas, si se desea modelar con ecuaciones diferenciales, conduce a un complejo sistema de $s \times e$ ecuaciones diferenciales, de distinto orden que contemplan las relaciones dinámicas de todas las entradas con las distintas salidas. La de mayor orden define el orden n del sistema multivariable. O también el orden del sistema está dado por el número mínimo de variables de estado necesarias.

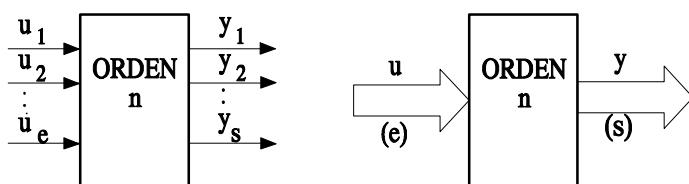


Fig. 3.7.3. Sistemas Multivariados.

El sistema de las $s \times e$ ecuaciones diferenciales transformadas al dominio frecuencial en variable compleja s permiten modelar el sistema multivariable a través de la matriz de transferencia $G(s)$ tal que:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{u}(s) \quad (3.7-14)$$

siendo:

- $\mathbf{y}(s)$: vector de salida de dimensión s
- $\mathbf{u}(s)$: vector de entrada de dimensión e
- $\mathbf{G}(s)$: matriz de transferencia de dimensión $s \times e$.

Cada elemento de la matriz $\mathbf{G}(s)$ representa la Función de Transferencia $G_{ij}(s)$ de la entrada $u_j(s)$ respecto de la salida $y_i(s)$.

De la misma forma que para el caso monovariante, aunque con un mayor grado de complejidad resulta posible a través de una adecuada elección de las variables de estado, transformar todas las ecuaciones diferenciales en conjuntos de ecuaciones diferenciales de primer orden. Finalmente es posible compactar la notación de tal forma de obtener una ecuación diferencial matricial-vectorial de primer orden de la misma forma que las Ec. 3.7-13,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{3.7-15}$$

siendo

- A** : Matriz del sistema
- B** : Matriz de entrada
- C** : Matriz de salida.

Cuando existe una respuesta inmediata de la salida de un sistema respecto de una entrada, se dice que el sistema tiene un acoplamiento directo entre entrada y salida. En este caso se modifica la ecuación de salida del modelo de estado tomando la forma de la Ec. 3.7-16.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t).\end{aligned}\tag{3.7-16}$$

La matriz **D** se denomina matriz de transferencia directa.

Para determinar rápidamente la dimensión de las distintas componentes de la Ec. 3.7-16, resulta útil representar los vectores y matrices de la Ec. 3.7-16 por rectángulos cuyas longitudes de lados representan la dimensión considerada.

Las Ec. 3.7-16 pueden representarse esquemáticamente para un sistema multivariable con **e** entradas y **s** salidas como en la Fig. 3.7-4.

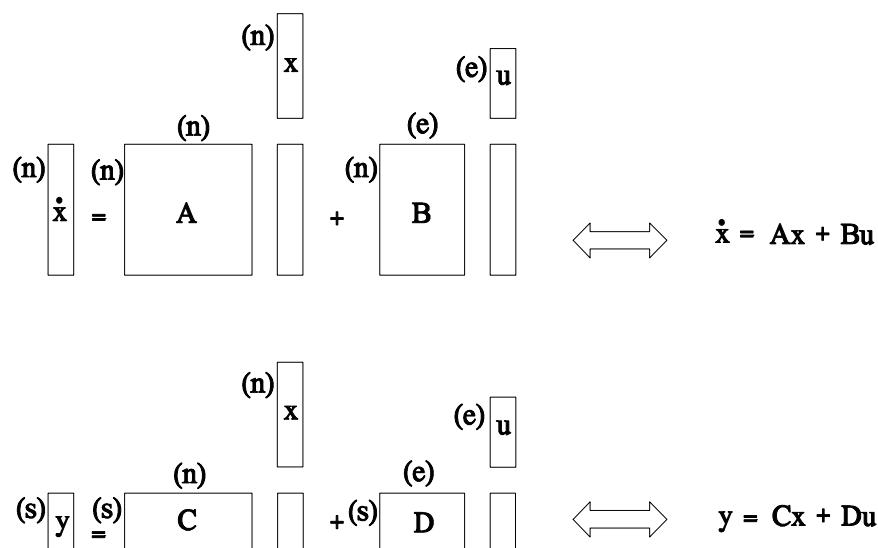


Fig. 3.7.4. Representación esquemática de las ecuaciones de estado.

Se observa que para un sistema multivariable la matriz de entrada \mathbf{B} toma la dimensión $n \times e$, la matriz de salida \mathbf{C} la dimensión $s \times n$, la matriz de transferencia directa \mathbf{D} la dimensión $s \times e$ y la matriz de entrada \mathbf{A} , la dimensión $n \times n$, igual que para el caso monovariable.

Cuando el sistema a modelar es variante, las distintas matrices que lo representan serán función del tiempo. En este caso las Ec. 3.7-16 toman la forma de las Ec. 3.7-17.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t).\end{aligned}\tag{3.7-17}$$

3.7.5 Modelos de tiempo discreto.

Se ha considerado que la variable tiempo t puede tomar cualquier valor real positivo y por ello el modelo se denomina de tiempo continuo. Hay casos en que el proceso varía en forma discontinua con el tiempo o también procesos de tiempo continuo que admiten un modelo discretizado en el tiempo. En estos casos los modelos se denominan **modelos de tiempo discreto**.

Cuando se hace una modelación en el dominio temporal en tiempo discreto, las funciones temporales continuas pueden expresarse como funciones discretas, donde éstas toman el valor de la función continua en cada instante de tiempo discreto, como fue expresado en el capítulo 2.

Si el intervalo de discretización es constante, denominado comúnmente **intervalo de muestreo T_o** , la función temporal discretizada tomará el valor de la función continua en:

$$t = k T_o \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots\tag{3.7-18}$$

Por simplicidad de notación los instantes de muestreo kT_o se representan simplemente por el valor de k .

Un sistema monovariable de orden n representado en tiempo discreto con entrada $\mathbf{u}(k)$ y salida $\mathbf{y}(k)$ podrá ser modelado por una ecuación en diferencias de orden n , cuya forma general esta dada por la Ec. 3.7-22

$$\begin{aligned}
 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) &= \\
 = b_o u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m). &
 \end{aligned} \tag{3.7-22}$$

A partir de las ecuaciones en diferencias que representan un modelo de tiempo discreto, es posible realizar una modelación en el espacio de estado de tiempo discreto. El procedimiento es equivalente conceptualmente al realizado a partir de la ecuación diferencial Ec. 3.7-6, que condujo, con las distintas generalizaciones, a las ecuaciones vectorial-matricial de estado Ec. 3.7-17.

Las ecuaciones de estado de tiempo discreto que modelan un sistema discreto multivariable resultan de la forma:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\
 y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k).
 \end{aligned} \tag{3.7-23}$$

Para sistemas invariantes serán:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
 y(k) &= Cx(k) + Du(k).
 \end{aligned} \tag{3.7-24}$$

En la Fig. 3.7.5 se representa el diagrama en bloques del modelo de la Ec. 3.7-23.

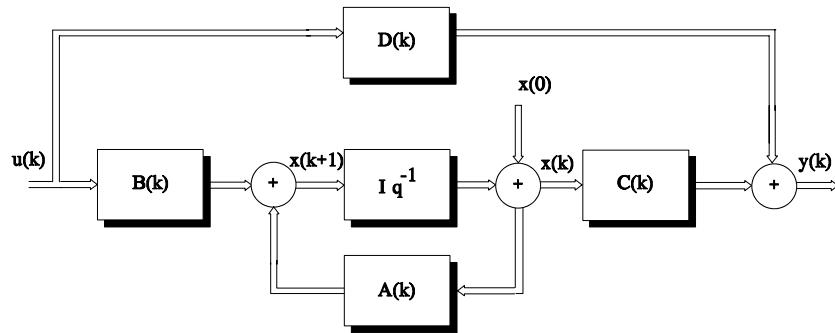


Fig. 3.7.5 Diagrama en bloques de un modelo dado por la Ec. 3.7-23.

El teorema de muestreo de Shannon asegura que si el intervalo T_o de discretización entre las muestras de una señal continua es:

$$T_o \leq \frac{1}{2f_{\max}}$$

siendo f_{\max} la frecuencia máxima del espectro de la señal, como quedó establecido en el punto 2.5, entonces no se pierde la información contenida en las señales continuas. Esto implica que respetando el teorema de Shannon se puede construir un modelo de estado de tiempo discreto que representa fielmente al proceso de tiempo continuo.

Es importante destacar que si bien las ecuaciones para modelos de estado de tiempo continuo son similares a las de tiempo discreto, las matrices de coeficientes serán distintas. Sin embargo, se puede establecer una equivalencia entre las matrices de ambos modelos.

Los diseños de control moderno digital de estado, hacen uso de este último modelo, por ello de ahora en más se trabajará exclusivamente con éste.

Las Ec. 3.7-23 y Ec. 3.7-24 solo modelan sistemas lineales. Esto es, el estado en $\mathbf{x}(k+1)$ se obtiene de una relación lineal entre $\mathbf{x}(k)$ y $\mathbf{u}(k)$. Para sistemas no lineales el estado en $\mathbf{x}(k+1)$ será una función no lineal de $\mathbf{x}(k)$ y $\mathbf{u}(k)$. En general las ecuaciones de estado que modelan a un sistema no lineal variante tendrán la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]\end{aligned}\tag{3.7-25}$$

Siendo \mathbf{f}, \mathbf{g} en general funciones vectoriales no lineales de $\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k$.

En el presente texto se tratan solamente sistemas que puedan modelarse en forma precisa o aproximada con las relaciones lineales dadas por las Ec. 3.7-23 y Ec. 3.7-24.

3.7.6 Carácter no único del modelo de estado.

Supóngase una transformación lineal

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

donde \mathbf{z}, \mathbf{x} son vectores y \mathbf{T} una matriz de transformación.

Entonces despejando \mathbf{x} y reemplazando en la Ec. 3.7-23 se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \\
 \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{T}\mathbf{A}(k)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(k) + \mathbf{T}\mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \\
 \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k).
 \end{aligned} \tag{3.7-26}$$

Definiendo ahora

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^*(k) &= \mathbf{T}\mathbf{A}(k)\mathbf{T}^{-1} & \mathbf{B}^*(k) &= \mathbf{T}\mathbf{B}(k) \\
 \mathbf{C}^*(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{T}^{-1} & \mathbf{D}^*(k) &= \mathbf{D}(k)
 \end{aligned}$$

y reemplazando en la Ec. 3.7-26 se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{A}^*(k)\mathbf{z}(k) + \mathbf{B}^*(k)\mathbf{u}(k) \\
 \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}^*(k)\mathbf{z}(k) + \mathbf{D}^*(k)\mathbf{u}(k).
 \end{aligned}$$

Estas dos últimas ecuaciones son una representación de estado para el mismo proceso, obtenidas por transformación lineal del modelo anterior con la misma entrada y salida. Puesto que la única restricción para la matriz \mathbf{T} es que sea no singular, se pueden obtener infinitos modelos en el espacio de estado para el mismo proceso.

3.7.7 Solución de la ecuación de estado de tiempo discreto.

Con el objeto de hacer un planteo conceptual se analiza la solución de la ecuación de estado de tiempo discreto para un proceso invariante

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \tag{3.7-27}$$

Resolviendo la Ec. 3.7-27 para los distintos valores de k a partir de $k=0$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0) \\
 \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \\
 &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{AB}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \\
 \mathbf{x}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) \\
 &= \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{AB}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2).
 \end{aligned}$$

Generalizando se tiene para cualquier k

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(j) \quad 68$$

$k = 1, 2, 3, \dots$

(3.7-28)

La Ec. 3.7-28 tiene dos partes: el primer sumando representa la contribución al estado inicial y la sumatoria la contribución al estado actual de la secuencia de valores de la entrada.

La matriz

$$\phi(k) = \mathbf{A}^k \quad (3.7-29)$$

se denomina **Matriz de Transición de Estado** y relaciona, en un sistema invariante, el estado final con el inicial para entrada nula. Reemplazando la Ec. 3.7-28 en la ecuación de salida Ec. 3.7-24, se obtiene el valor de la salida $y(k)$ en función del estado inicial $x(0)$ y todos los valores de la entrada $u(k)$ desde el instante inicial hasta el valor k

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k x(0) + \mathbf{D}u(k) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{B}u(j). \quad (3.7-30)$$

3.7.8 Relación entre la representación de estado y la matriz o función de transferencia.

- a) Transformación de la representación de estado a la matriz de transferencia discreta.

Aplicando transformada Z a las Ec. 3.7-24 para condiciones iniciales nulas, se tiene

$$z\mathbf{x}(z) = \mathbf{A}\mathbf{x}(z) + \mathbf{B}u(z) \quad (3.7-31)$$

$$y(z) = \mathbf{C}\mathbf{x}(z) + \mathbf{D}u(z). \quad (3.7-32)$$

Operando en Ec. 3.7-31

$$\mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}u(z)$$

y reemplazando en Ec. 3.7-32 se obtiene

$$y(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}]u(z). \quad (3.7-33)$$

La matriz de transferencia discreta se define como

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}(z) \mathbf{u}(z). \quad (3.7-34)$$

Comparando la Ec. 3.7-33 con la Ec. 3.7-34 se encuentra que

$$\mathbf{G}(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}]. \quad (3.7-35)$$

La Ec. 3.7-35 permite la trasformación del modelo de estado al modelo representado en matriz de transferencia. Si el sistema es de una entrada y una salida la **matriz de transferencia** $\mathbf{G}(z)$ se transforma en una **función de transferencia** $G(z)$. Con la Ec. 3.7-35 la matriz de transferencia se puede escribir también como

$$G(z) = \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D} \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}.$$

De esta manera la ecuación característica del modelo del proceso será

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \quad (3.7-36)$$

Por lo tanto los polos del modelo del proceso son los **valores característicos o autovalores** de la matriz \mathbf{A} .

b) Transformación de función de transferencia a espacio de estado.

Dada una función de transferencia discreta de un sistema monovariable.

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n} \quad (3.7-37)$$

multiplicando y dividiendo por $x(z)$ e igualando numeradores y denominadores de ambos miembros se tiene el sistema

$$y(z) = [b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m] x(z) \quad (3.7-38)$$

$$u(z) = [z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n] x(z). \quad (3.7-39)$$

Las ecuaciones en diferencias correspondientes a las Ec. 3.7-38 y Ec. 3.7-39, se obtienen transformando éstas al dominio temporal,

$$y(k) = b_0x(k+m) + b_1x(k+m-1) + \dots + b_nx(k) \quad (3.7-40)$$

$$u(k) = x(k+n) + a_1x(k+n-1) + \dots + a_nx(k). \quad (3.7-41)$$

Despejando $x(k+n)$ de la Ec. 3.7-41

$$x(k+n) = u(k) - a_1x(k+n-1) - \dots - a_nx(k) \quad (3.7-42)$$

se hace la siguiente asignación de variables

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x(k) \\ x_1(k+1) &= x_2(k) = x(k+1) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) = x(k+2) \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_m(k+1) &= x_{m+1}(k) = x(k+m) \\ x_{m+1}(k+1) &= x_{m+2}(k) = x(k+m+1) \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) = x(k+n-1) \\ x_n(k+1) &= x(k+n) = u(k) - a_nx(k) - \dots - a_1x(k+n-1). \end{aligned} \quad (3.7-43)$$

Reemplazando el sistema Ec. 3.7-43 en la Ec. 3.7-40 y en la Ec. 3.7-42

$$y(k) = b_0x_{m+1}(k) + b_1x_m(k) + \dots + b_nx_1(k) \quad (3.7-44)$$

$$x_n(k+1) = u(k) - a_1x_n(k) - \dots - a_nx_1(k). \quad (3.7-45)$$

Luego poniendo el sistema 3.7-43 en forma matricial y observando la ecuación 3.7-45 se tiene

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_n & \ddots & \ddots & \ddots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.7-46)$$

y para 3.7-44

$$y(k) = [b_m \ b_{m-1} \ \dots \ b_0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{m+1}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}. \quad (3.7-47)$$

Comparando las Ec. 3.7-46 y Ec. 3.7-47 con la Ec. 3.7-23 es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_n & \ddots & \ddots & \ddots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [b_m \ b_{m-1} \ \dots \ b_0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad \mathbf{d} = [0].$$

El modelo de estado representado por las matrices \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T , \mathbf{d} se denomina **forma canónica controlable**.

Debido al carácter no único del juego de variables de estado, aplicando transformaciones lineales del tipo vistas en el punto 3.7.6, se obtienen otras formas canónicas en las cuales los autovalores de la matriz de coeficientes serán iguales a los del modelo anterior pues los polos asociados al proceso son invariantes cualquiera que sea el modelo matemático con el cual se lo

representa. Así pueden obtenerse estas formas estructuradas especialmente denominadas formas canónicas. A continuación se dan algunas de las más importantes.

Dado como dato $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T$, entonces \mathbf{d} no se modifica por las transformaciones.

Se definen las siguientes formas canónicas:

Forma canónica diagonal.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z_n \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$$

donde z_1, z_2, \dots, z_n son los autovalores de la matriz \mathbf{A} original.

Forma canónica columna.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = [\mathbf{c}^T \mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}]$$

Forma canónica controlable.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_n & \ddots & \ddots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}^T = [b_m \ \cdots \ b_o \ 0 \ \cdots \ 0]$$

Forma canónica fila.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_n & \ddots & \ddots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} c^T b \\ c^T A b \\ \vdots \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} b \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}^T = [1 \ 0 \ \cdots \ 0].$$

Forma canónica observable.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} b_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}^T = [0 \ 0 \ \cdots \ 1].$$

Estas formas canónicas son muy útiles puesto que permiten pasar de funciones de transferencia a modelos de estado en forma inmediata ya que los coeficientes de \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T son los mismos que los de la función de transferencia.

Un caso importante de representación se produce cuando el modelo de un proceso presenta un retardo puro del modelo de tiempo continuo. En estas condiciones se puede demostrar que la matriz \mathbf{A} de la forma canónica controlable se convierte en

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots \\ -a_n & \ddots & \ddots & \cdots & -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

Es decir se incrementa la dimensión de la matriz \mathbf{A} siendo ahora de $(n+d) \times (n+d)$.

c) De matriz de transferencia a espacio de estado.

En general esta transformación no es directa, sino que se debe llevar a variables de estado cada una de las funciones de transferencia que componen la matriz para recién entonces armar el modelo de estado. Para esto son importantes las estructuras canónicas mencionadas en el punto 3.6.2 y su equivalente en el espacio de estado. Para la forma canónica \mathbf{P} se tiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{12} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_{se} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11}^T & \cdots & \mathbf{c}_{1s}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{c}_{21}^T & \cdots & \mathbf{c}_{2s}^T \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{c}_{e1}^T & \cdots & \mathbf{c}_{es}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{b}_{1e} \\ \hline \mathbf{b}_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{b}_{2e} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \hline \mathbf{b}_{s1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_{s2} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{b}_{se} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{12} & d_{22} & \cdots & d_{2e} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ d_{s1} & d_{s2} & \cdots & d_{se} \end{bmatrix}$$

Para la estructura canónica \mathbf{V} se supone que $d_{ij} = 0 \quad \forall i, j$ puesto que si no su tratamiento se hace muy complejo. Se obtiene para la matriz \mathbf{A}

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} A_{11} & b_{11}c_{12}^T & \dots & b_{11}c_1^T & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{12} & \dots & 0 & 0 & b_{12}c_{22}^T & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{1s} & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & 0 & 0 & \dots & b_{1e}c_{es}^T \\ \hline b_{21}c_{11}^T & 0 & \dots & 0 & A_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{22}c_{21} & A_{22} & \dots & b_{22}c_{2s}^T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{2s} & 0 & 0 & \dots & b_{2e}c_{es}^T \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline b_{el}c_{11}^T & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{el} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{el}c_{22} & \dots & 0 & 0 & A_{el} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{es} & c_{el}^T & \dots & A_{es}^T \end{array} \right]$$

Las matrices A_{ij} y los vectores b_{ij}, c_{ij}^T corresponden a los modelos de estado de cada una de las funciones de transferencia G_{ij} , transformadas al espacio de estado según una forma canónica dada.

Como se puede observar el modelo de estado de un proceso multivariable obtenido a partir de una estructura canónica de ninguna manera será mínimo y por lo tanto se deberá aplicar algún algoritmo de **reducción de modelo** para obtener un modelo sin estados redundantes.

El estudio de reducción de modelo constituye un aspecto muy específico del control moderno y supera los objetivos de este texto.

Ejemplo: **Modelo discreto de un proceso continuo, transformación de función de transferencia a modelo de estado**

Para realizar el control digital de un proceso continuo, se desea obtener el modelo de estado discreto del mismo. Como paso intermedio se obtiene el modelo discreto en el dominio \mathbb{Z} . Al estar el proceso en un entorno discreto,

las señales de entrada y salida deben ser de naturaleza discreta tal que puedan ser generadas o interpretadas por un computador. Para que el proceso opere normalmente, la señal de entrada discreta $u(z)$ debe ser convertida en una señal de tipo quasi-continua, utilizándose en este caso un retenedor de orden cero. El conjunto proceso-retenedor, incluyendo los muestreadores se representa en la Fig. 3.7.6.

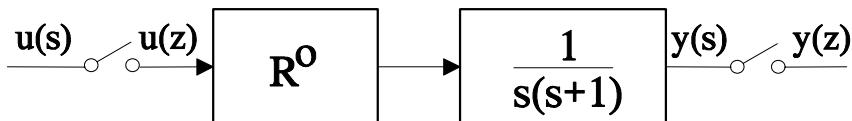


Fig. 3.7.6 Proceso continuo en un entorno discreto

La función de transferencia del conjunto proceso-retenedor es

$$G(s) = \frac{1 - z^{-1}}{s} \frac{1}{s(s+1)} = (1 - z^{-1}) \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right].$$

La transformada Z de la parte continua se realiza descomponiendo la función en fracciones parciales y utilizando una tabla de transformadas Z

$$\begin{aligned} Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] &= Z\left[\frac{1}{s^2}\right] - Z\left[\frac{1}{s}\right] + Z\left[\frac{1}{s+1}\right] = \\ &= \frac{T_0 z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{T_0} z^{-1}}. \end{aligned}$$

Tomando $e^{T_0} = a$, la función de transferencia discreta del conjunto proceso-retenedor resulta

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{T_0 z^{-1}}{1-z^{-1}} - 1 + \frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}} = \\ &= \frac{(T_0 + a - 1)z^{-1} + (1 - aT_0 - a)z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})} \end{aligned}$$

suponiendo que es $T_0 = 1$ seg, se obtiene el modelo para exponente negativo de la variable z

$$G(z^{-1}) = \frac{0,368 z^{-1} + 0,264 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,368 z^{-1})}$$

expresado en términos de potencias positivas es

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{0,368z + 0,264}{(z - 1)(z - 0,368)} = \frac{b_1z + b_2}{z^2 + a_1z + a_2}.$$

Para obtener el modelo de estado se utiliza el procedimiento definido como **transformación de función de transferencia a espacio de estado**. Introduciendo la función auxiliar $x(z)$, la función de transferencia $G(z)$ puede representarse como un sistema de dos ecuaciones en variable discreta z .

$$\begin{aligned} y(z) &= (b_1z + b_2)x(z) \\ u(z) &= (z^2 + a_1z + a_2)x(z) \end{aligned}$$

la ecuación que involucra a $y(z)$ representa la relación dinámica de la salida del sistema en relación a $x(z)$, mientras que aquella que incluye a $u(z)$, contempla la relación dinámica de la entrada del sistema en relación a $x(z)$. Estas ecuaciones pueden transformarse al dominio temporal obteniéndose las ecuaciones en diferencias que representan al sistema

$$\begin{aligned} y(k) &= b_1x(k+1) + b_2x(k) \\ u(k) &= x(k+2) + a_1x(k+1) + a_2x(k) \end{aligned}$$

se hace la siguiente asignación de variables

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x(k) \\ x_1(k+1) &= x_2(k) = x(k+1) \\ x_2(k+1) &= x(k+2) = u(k) - a_1x(k+1) - a_2x(k) \end{aligned}$$

reemplazando la asignación de variables en las ecuaciones de entrada y salida se obtiene

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= u(k) - a_1x_2(k) - a_2x_1(k) \\ y(k) &= b_1x_2(k) + b_2x_1(k). \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones puede representarse matricialmente para la entrada como

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.7-48)$$

y para la salida

$$y(k) = [b_2 \ b_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \quad (3.7-49)$$

Las Ec. 3.7-48 y Ec. 3.7-49 modelan el sistema en el espacio de estado. En forma compacta resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (3.7-50)$$

siendo $\mathbf{x}(k)$ el vector de estado, \mathbf{A} la matriz del sistema y \mathbf{b} , \mathbf{c} los vectores de entrada y salida respectivamente. Estos se definen como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} & \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \mathbf{c}^T &= [b_2 \ b_1] . \end{aligned}$$

Las formas de las matrices del modelo de estado pertenecen al tipo **canónica controlable**.

3.7.9 Análisis de estabilidad.

Para hacer un análisis simplificado de la estabilidad de un sistema invariante modelado en el espacio de estado, se supone sin perder generalidad la entrada $u(k) = \mathbf{0}$. Bajo esta condición, el estado final $\mathbf{x}(k)$ está relacionado al estado inicial $\mathbf{x}(0)$, según la Ec. 3.7-28 por

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)$$

Dado que la salida del sistema es según la Ec. 3.7-24 para entrada nula,

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k)$$

siendo \mathbf{C} invariante, es posible hacer el análisis de estabilidad directamente sobre la evolución del vector de estado $\mathbf{x}(k)$.

Un sistema lineal invariante será estable si, teniendo una acción de entrada nula $\mathbf{u}(k)=\mathbf{0}$ y partiendo de un estado inicial cualquiera del espacio de estado distinto de cero $\mathbf{x}(0)$, evoluciona hacia un estado $\mathbf{x}(k)=\mathbf{0}$.

A partir de la Ec. 3.7-28 se concluye que siendo para entrada nula el sistema estable, la matriz de transición \mathbf{A}^k debe ser tal que evolucionando k , conduzca el sistema al estado

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}.$$

Con el objeto de hacer un análisis conceptual simplificado de la estabilidad, se supone un sistema con polos reales y distintos. En este caso y en virtud del carácter no único del modelo de estado (Punto 3.7.6), si \mathbf{A} no tiene autovalores múltiples, siempre es posible transformar el modelo de estado tal que la matriz \mathbf{A} del sistema tome la forma diagonal. Siendo \mathbf{A} diagonal la Ec. 3.7-28 para entrada nula puede escribirse en forma explícita como

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

Los elementos de la diagonal de la matriz \mathbf{A} son por definición los autovalores de la misma.

De la ecuación característica del sistema Ec. 3.7-36 los valores z_i son los polos del sistema. Por lo tanto para que el vector $\mathbf{x}(k)$ tienda a cero, los valores de z deben ser menores que uno. Esto implica que todos los polos del sistema deben estar ubicados dentro del círculo unitario en el plano Z . Este concepto puede extenderse también para sistemas cuya matriz \mathbf{A} tenga autovalores múltiples, aunque su análisis resulta más complicado.

3.7.10. Controlabilidad.

Un sistema definido por las ecuaciones de estado Ec. 3.7-23 se dice que es **completamente controlable**, si existe una secuencia realizable de control $\mathbf{u}(k)$ que pueda transferir el estado del sistema desde un valor inicial $\mathbf{x}(0)$ hasta un estado final $\mathbf{x}(N)$ en un número finito de pasos N .

Por razones de simplicidad algebraica se hace el análisis de controlabilidad para un sistema monovariable, los resultados obtenidos son fácilmente extensibles a un sistema multivariable. Para el sistema monovariable la Ec. 3.7-28 toma la forma

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b} \mathbf{u}(j).$$

para $k=N$ se tiene

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0) + [\mathbf{b} \ \mathbf{Ab} \ \dots \ \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{b}] \mathbf{u}_N \quad (3.7-51)$$

donde \mathbf{u}_N es el vector cuyos componentes representan la secuencia de entrada

$$\mathbf{u}_N^T = [u(N-1) \ u(N-2) \ \dots \ u(0)]. \quad (3.7-52)$$

Si el orden del sistema es m , esto es la dimensión de \mathbf{A} es $m \times m$, de las Ec. 3.7-51 y 3.7-52 se puede determinar de manera única la entrada para $N = m$ ya que se obtiene un sistema de m ecuaciones con m incógnitas,

$$\mathbf{u}_m = [\mathbf{b} \ \mathbf{Ab} \ \dots \ \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{b}]^{-1} [\mathbf{x}(m) - \mathbf{A}^m \mathbf{x}(0)]. \quad (3.7-53)$$

La matriz

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{b} \ \mathbf{Ab} \ \dots \ \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{b}] \quad (3.7-54)$$

se denomina matriz de controlabilidad. Para que \mathbf{u}_m pueda ser determinado, esta matriz no debe tener columnas o filas linealmente dependientes. Para que el sistema sea controlable se debe cumplir entonces

$$\text{Rango } \mathbf{Q}_c = m.$$

Para $N < m$ no existe una solución para \mathbf{u}_N . Si $N > m$ existen soluciones no únicas.

Para procesos multivariables se hacen los mismos razonamientos y la matriz

de controlabilidad queda definida por

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{B}] . \quad (3.7-56)$$

3.7.11. Observabilidad

Un sistema lineal con salida $\mathbf{y}(k)$ se denomina **observable** si cualquier estado $\mathbf{x}(k)$ del mismo, puede ser determinado a partir de un número finito de valores de la salida $\mathbf{y}(k)$.

Se hace aquí un análisis del concepto de observabilidad para un sistema monovariable. Las ecuaciones que modelan el sistema en el espacio de estado son:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} u(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) . \end{aligned} \quad (3.7-57)$$

A partir de las Ec. 3.7-57, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{c}^T \mathbf{b} u(k) \\ \mathbf{y}(k+2) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(k) + \mathbf{c}^T \mathbf{Ab} u(k) + \mathbf{c}^T \mathbf{b} u(k+1) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(k+N-1) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{x}(k) + [\mathbf{0} \ \mathbf{c}^T \mathbf{b} \ \mathbf{c}^T \mathbf{Ab} \ \dots \ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{b}] \mathbf{u}_N \end{aligned} \quad (3.7-58)$$

donde

$$\mathbf{u}_N^T = [u(k+N-1) \ \dots \ u(k+1) \ u(k)] . \quad (3.7-59)$$

Si se conocen todas las componentes del vector \mathbf{u}_N , para determinar en forma única las componentes del vector $\mathbf{x}(k)$ de orden m , se requieren m ecuaciones. Esto implica que debe ser $N = m$ y el sistema de Ec. 3.7-58 toma la forma:

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{Q}_o \mathbf{x}(k) + \mathbf{S} \mathbf{u}_m \quad (3.7-60)$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_m^T &= [y(k) \ y(k+1) \ \dots \ y(k+m-1)] \\ \mathbf{u}_m^T &= [u(k+m-1) \ \dots \ u(k+1) \ u(k)] \\ \mathbf{Q}_o &= [\mathbf{c}^T \ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \ \dots \ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{m-1}]^T\end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{b} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}^T \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{m-2} \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

El vector de estado observado se puede calcular como:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}_o^{-1} [\mathbf{y}_m - \mathbf{S} \mathbf{u}_m]. \quad (3.7-61)$$

Esto supone que debe ser:

$$\det \mathbf{Q}_o \neq 0.$$

Por lo tanto el sistema es observable si la matriz de observabilidad \mathbf{Q}_o cumple con la condición:

$$\text{Rango } \mathbf{Q}_o = m$$

o bien que \mathbf{Q}_o no tenga filas linealmente dependientes.

Este planteo puede extenderse para sistemas multivariables conduciendo a la siguiente matriz de observabilidad.

$$\mathbf{Q}_o = [\mathbf{C} \ \mathbf{CA} \ \dots \ \mathbf{CA}^{m-1}]. \quad (3.7-62)$$

3.7.12. Dualidad de los procesos lineales.

Dado un proceso lineal

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k)\end{aligned} \quad (3.7-63)$$

se define el proceso dual con respecto a k^* al proceso definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k+1) &= \mathbf{A}^T(k^*-k) \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{C}^T(k^*-k) \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}^*(k) &= \mathbf{B}^T(k^*-k) \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{D}(k^*-k) \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (3.7-64)$$

donde k^* es un tiempo fijo arbitrario.

Dada esta definición se puede demostrar que:

El proceso representado por la Ec. 3.7-63 es completamente controlable si y sólo si su dual representado por la Ec. 3.7-64 es completamente observable.

El proceso representado por la Ec. 3.7-63 es completamente observable si y sólo si su dual modelado por la Ec. 3.7-64 es completamente controlable.

El proceso representado por la Ec. 3.7-63 es estable si y sólo si su dual dado por la Ec. 3.7-64 es estable.

Esto explica la simetría que se encuentra en los resultados obtenibles para controlabilidad y observabilidad. La correspondiente demostración se encuentra en la bibliografía especializada. Estas propiedades son de utilidad para el tratamiento de los sistemas de control con observador presentado en el capítulo 4.

Para procesos invariantes modelados por la Ec. 3.7-65

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k) \end{aligned} \quad (3.7-65)$$

el modelo del proceso dual es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}^T \mathbf{x}(k) + \mathbf{C}^T \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{B}^T \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (3.7-66)$$

CAPITULO 4

4. CONTROL DIGITAL DETERMINISTICO

4.1 Introducción.

Se define el control como **determinístico** cuando el diseño del sistema de control se realiza considerando que el mismo va a operar en un entorno determinístico. Esto es, cuando las señales o variables consideradas, sean estas de referencia, de entrada o de perturbación, son de carácter determinístico.

Variables determinísticas son aquellas cuya evolución puede ser descripta en forma analítica con precisión y por tal razón, en contraposición a las variables estocásticas, puede predecirse exactamente su evolución futura.

Esta condición de diseño difiere en gran medida de la realidad, dado que normalmente los sistemas de control están sometidos a señales de referencia o perturbación de carácter estocástico, esto es, no predecibles, y por ende no expresables analíticamente. Cuando se realiza el diseño bajo consideraciones determinísticas, se asume que si bien el sistema podrá estar perturbado estocásticamente, estas señales de perturbación no intervienen en el diseño. Se considera que el sistema de control eliminará u operará adecuadamente procesando las señales determinísticas y estocásticas de igual modo. Esta consideración será más o menos válida dependiendo de la magnitud y tipo de perturbación. El diseño bajo consideraciones estocásticas se tratará en el capítulo 5.

En este capítulo, luego de definir y clasificar los sistemas de control, se estudian primeramente los controladores digitales con realimentación de salida de parámetros optimizados del tipo PID, diseñados a partir del PID continuo y también directamente en el dominio digital. Luego se presentan los controladores de estructura óptima de cancelación y de tiempo finito. Finalmente se estudian los controladores de estado en sus distintas versiones.

4.2 Definiciones, planteos de control y clasificación.

4.2.1 Definiciones fundamentales relativas a los sistemas de control.

Un **Sistema de Control de Procesos** involucra en sus aspectos fundamentales la existencia de un **Proceso** a controlar y de un **Controlador** que actúa sobre el proceso.

Para definir un **Sistema de Control de Procesos** es importante dar las siguientes definiciones parciales:

- Sistema:

Sistema es todo ordenamiento de elementos interrelacionados entre sí con un objetivo común.

- Proceso:

Proceso es el conjunto de las fases sucesivas de un fenómeno. Esto es, un proceso constituye una situación evolutiva temporal.

- Proceso Técnico:

Proceso técnico es aquel que involucra a las situaciones evolutivas normalmente encontradas en el campo de la técnica, esto es: transporte de materia, transformaciones físicas de energía o información.

- Control:

El control implica el gobierno o dominio de algo. Desde el punto de vista técnico implica el procedimiento o acciones por las cuales se fijan o modifican las condiciones de evolución de un proceso. Esto constituye el **Control de Procesos**.

- Controlador - Control Digital:

El control es ejercido por un **Controlador**. En el **Control Digital** el controlador está normalmente materializado en un computador y las acciones de control están generadas por un **Algoritmo de Control**. Estas acciones gobiernan la evolución del proceso, hacia un estado determinado, constituyendo esto el fin u objetivo del sistema de control.

En la Fig. 4.2.1. se representan esquemáticamente los elementos constituyentes del sistema con la denominación clásica de las variables involucradas. Para lograr el control del proceso, el controlador genera, a partir de una **Señal de Entrada** $e(k)$ que es procesada por un algoritmo de control, una **Señal de Control** $u(k)$ o **Acción de Control**.

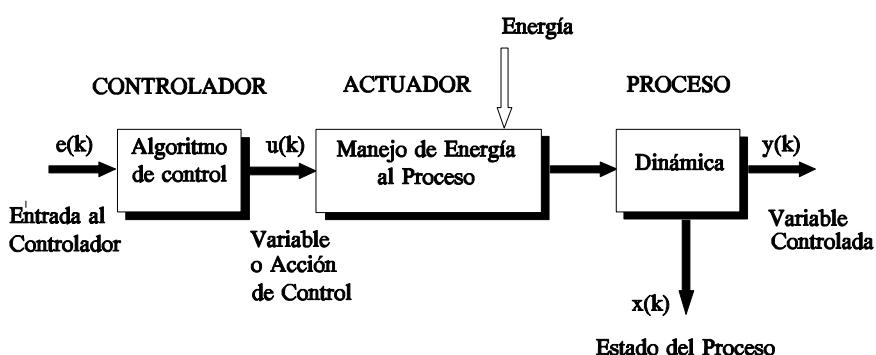


Fig. 4.2.1 Sistema de control.

La acción de control se aplica a través de un **Actuador** al proceso. El actuador es

sensible a la señal (información digital) proveniente del controlador y realiza el manejo de las variables físicas de entrada al proceso, lo que normalmente involucra manejo de energía (eléctrica, mecánica, hidráulica, etc.)

El proceso responde a esta entrada con una determinada **Característica Dinámica** propia del proceso, evolucionando la **Variable de Salida** o **Variable Controlada** $y(k)$ en determinado sentido o permaneciendo en determinada situación. La evolución o situación del proceso también puede estar definida por el **Estado del Proceso** $x(k)$ o bien por las **Variables de Estado**.

Cuando las señales involucradas en el sistema de control están constituidas por múltiples variables, o bien tienen más de una componente, el sistema se denomina de **Control Multivariable**. Normalmente las señales se representan en este caso por **Señales Vectoriales**.

La información necesaria para la operación del controlador constituye la **Entrada del Controlador** $e(k)$. La forma de generar esta información determina la primera y más general clasificación de los sistemas de control; que se describe a continuación.

4.2.2 Control en lazo abierto y en lazo cerrado.

Cuando la entrada al controlador está definida exclusivamente por un valor instantáneo deseado, sea éste determinado por una referencia, un operador humano o una consigna elaborada por otro nivel de control, se denomina de **Lazo Abierto**. Este tipo de control se esquematiza en la Fig. 4.2.2.

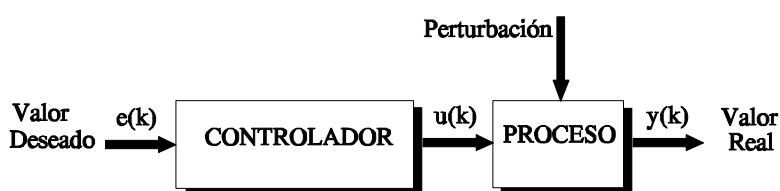


Fig. 4.2.2. Control en lazo abierto.

En este planteo de control, a la entrada del controlador no se tiene información directa de lo que sucede a la salida del proceso.

Cuando la entrada al controlador $e(k)$ está definida a través de una comparación entre el valor deseado y la situación real del proceso, se tiene el control en **Lazo Cerrado** o **Control Realimentado**.

Cuando la comparación se realiza entre el valor de referencia deseado $r(k)$ y la salida $y(k)$ estableciéndose la diferencia entre ambos, se tiene un **Control con Realimentación de la Salida**, el cual se representa en la Fig. 4.2.3.

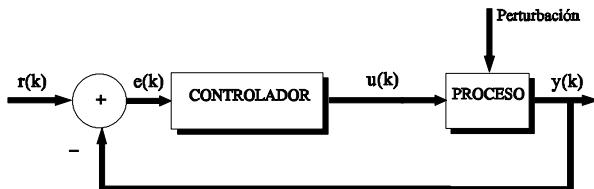


Fig. 4.2.3 Realimentación de la salida

Cuando la información de entrada al controlador está constituida por las variables de estado del proceso $x(k)$ y no de su salida, se tiene el **Control con Realimentación de Estados**, cuyo esquema se representa en la Fig. 4.2.4.

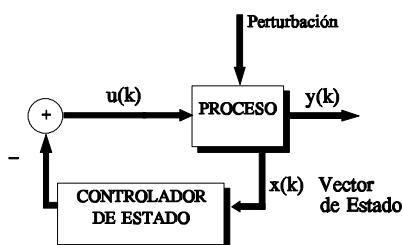


Fig. 4.2.4 Control de Estado.

El control de lazo abierto tiene el grave inconveniente que si el sistema está perturbado, o bien las características del proceso no se conocen con precisión o cambian por distintas razones, al no tenerse información de lo que sucede con la salida, el desempeño del control está severamente cuestionado.

Cuando se presupone que el sistema es perfectamente conocido, que también se conocen las perturbaciones y se pueden medir, es posible plantear un **Control por Preálimentación o Avanacción**. Este tipo de control se esquematiza en la Fig. 4.2.5.

Al poder medirse la perturbación, ésta puede incorporarse al controlador para que actúe consecuentemente y tienda a eliminarla de la salida. Dado que raramente se da esta circunstancia, el control por preálimentación tiene poca significación real y no se tratará en los próximos capítulos. En determinados casos particulares el control por preálimentación tiene sentido cuando está combinado con el control realimentado mejorando sus características. En todos los puntos siguientes se trata exclusivamente el control realimentado.

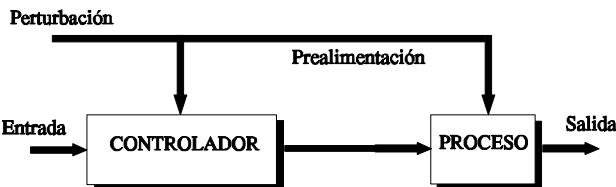


Fig. 4.2.5 Control por prealimentación.

4.2.3 Clasificación de los tipos de controladores.

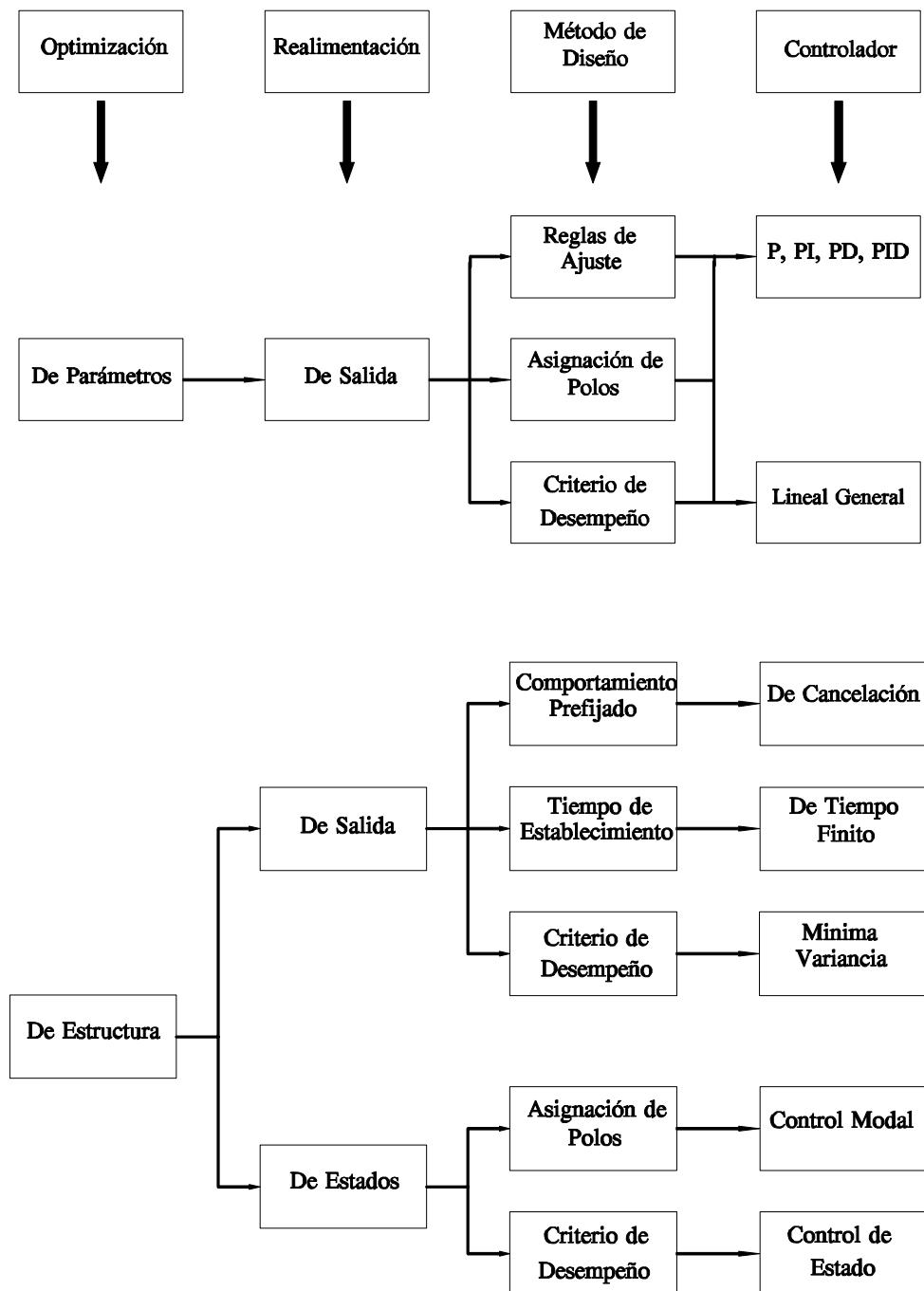
El diseño del controlador en sistemas lineales constituye el objetivo fundamental planteado en este texto, por lo que resulta importante clasificar y especificar los tipos de controladores que se tratarán en lo sucesivo. Las definiciones y categorías dadas están referidos a la Fig. 4.2.6, donde se mencionan los controladores lineales más generalizados.

La primera gran división se realiza entre controladores de parámetros optimizados y de estructura optimizada. En los de parámetros optimizados, se deja fija la estructura y se optimizan los parámetros de acuerdo a las condiciones dinámicas del proceso. El tratamiento de este tipo de controladores se centrará en los distintos tipos de controladores PID y en los controladores de bajo orden de estructura fija, presentados en el punto 4.3.

Partiendo del PID continuo se realiza la discretización y se presentan distintas variantes para características especiales del proceso. También se introducen en el punto 4.3.6 los controladores lineales de bajo orden y de estructura fija diseñados directamente en el campo discreto.

En relación a los controladores de estructura optimizada, en función de las características dinámicas del proceso, se optimiza tanto la estructura como los parámetros. En los puntos 4.4 y 4.5 se analizan los controladores determinísticos de estructura óptima, con realimentación de la salida. Se presenta el controlador de cancelación, de tiempo finito y el de tiempo incrementado. Los controladores de estado determinísticos se presentan en el punto 4.6.

Los controladores de estructura óptima diseñados bajo condicionamientos estocásticos se tratan en el capítulo quinto, analizándose el controlador monovariable de mínima variancia y finalmente en forma extensa el controlador de estado con estimador. Con los controladores presentados se cubre una amplia gama de aplicaciones en el control digital, haciendo referencia a sus propiedades específicas para facilitar su elección.

**Fig. 4.2.6 Clasificación de controladores digitales.**

4.3 Controladores de parámetros optimizados.

4.3.1 Controlador PID discreto.

Los controladores de parámetros optimizados son aquellos en los cuales partiendo de una estructura definida se optimizan sus parámetros adecuándolos a la dinámica del proceso a controlar.

El más clásico y difundido controlador de parámetros optimizados es el denominado **controlador PID**, ampliamente tratado en la bibliografía de control clásico y moderno. Su nombre proviene de su comportamiento como controlador de tipo **Proporcional, Integral, y Derivativo**, en el caso más general. Cuando falta alguna de estas acciones se denomina consecuentemente, controlador P, PI o PD. En la Fig. 4.3.1 se representa esquemáticamente un lazo de control con controlador PID.

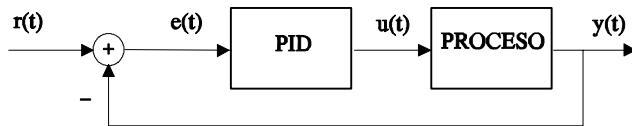


Fig. 4.3.1 Sistema de control con controlador PID.

La ecuación diferencial que rige el comportamiento dinámico entrada-salida de un PID continuo, es

$$u(t) = K[e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt}] \quad (4.3-1)$$

siendo K una constante de proporcionalidad, K_I de integración y T_D de derivación.

Para un control digital, las señales continuas deben discretizarse. Si el tiempo de muestreo es suficientemente pequeño, se puede hacer una discretización directa de la ecuación diferencial para obtener la ecuación en diferencias. De este modo la derivada primera se transforma en diferencia de primer orden y la integral en sumatoria. Aproximando la integral por aproximación rectangular, se obtiene

$$\begin{aligned} u(k) = & K \{ e(k) + K_I T_o \sum_{i=1}^k e(i-1) + \\ & +(T_D/T_o)[e(k) - e(k-1)] \} \end{aligned} \quad (4.3-2)$$

con

$$e(k) = r(k) - y(k).$$

En este algoritmo, para calcular el valor presente de $u(k)$ se requiere resolver la sumatoria de los valores pasados de $e(i)$ hasta $k-1$. Mayor eficiencia para el cálculo en computador se puede lograr utilizando algoritmos recursivos que posibilitan la determinación del nuevo valor basado en el cálculo anterior.

Para obtener la ecuación recursiva se calcula la Ec. 4.3-2 en el instante $(k-1)$

$$\begin{aligned} u(k-1) &= K \{ e(k-1) + K_I T_o \sum_{i=1}^{k-1} e(i-1) + \\ &+ (T_D/T_o)[e(k-1) - e(k-2)] \}. \end{aligned} \quad (4.3-3)$$

Haciendo la diferencia entre las Ec. 4.3-2 y Ec. 4.3-3, se obtiene

$$\begin{aligned} u(k) - u(k-1) &= K \{ [e(k) - e(k-1)] + K_I T_o e(k-1) + \\ &+ (T_D/T_o)[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \}. \end{aligned} \quad (4.3-4)$$

o bien,

$$\begin{aligned} u(k) &= u(k-1) + K(1 + T_D/T_o)e(k) - \\ &- K(1 + 2T_D/T_o - T_o K_I)e(k-1) + K(T_D/T_o)e(k-2). \end{aligned} \quad (4.3-5)$$

La Ec. 4.3-5 permite calcular la salida $u(k)$ a partir del valor anterior $u(k-1)$ del valor $e(k)$ y sus dos valores pasados. Precalculando

$$A = K(1 + T_D/T_o)$$

$$B = -K(1 + 2T_D/T_o - K_I T_o)$$

$$C = K(T_D/T_o)$$

la Ec. 4.3-5 se expresa

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2). \quad (4.3-6)$$

Utilizando una aproximación trapezoidal para la integral, en lugar de la Ec. 4.3-2 se obtiene

$$\begin{aligned}
 u(k) = & K \left\{ e(k) + K_I T_o \left[\frac{e(0) + e(k)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \right] + \right. \\
 & \left. + T_D/T_o [e(k) - e(k-1)] \right\}. \tag{4.3-7}
 \end{aligned}$$

Como ecuación en diferencias recursiva se obtiene

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2) \tag{4.3-8}$$

con

$$A = K(1 + K_I T_o / 2 + T_D / T_o)$$

$$B = -K(1 + 2T_D/T_o - K_I T_o / 2)$$

$$C = K(T_D / T_o)$$

La Ec. 4.3-8 difiere con la Ec. 4.3-6 en el cálculo de los coeficientes, incorporando el término $K_I T_o / 2$ como consecuencia de una mejor aproximación de la integral y por ende es, en general, preferible al anterior.

4.3.2. Función de Transferencia discreta del controlador PID.

Para representar el controlador PID en variable z y obtener su función de transferencia discreta, se modifican primero las ecuaciones en diferencias incorporando el operador q^{-d} , el cual tiene como resultado retardar la señal temporal d intervalos de muestreo. Este operador facilita luego la transformación del dominio temporal al dominio en variable z por simple reemplazo de q^{-d} por z^{-d} . La operación del operador q^{-d} se esquematiza para $d=1$ en la Fig. 4.3.2.

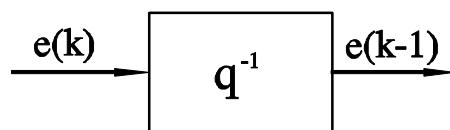


Fig. 4.3.2. Operador retardo

Tomando la ecuación en diferencias, Ec. 4.3-2, se opera con cada uno de los

sumandos.

La parte proporcional es

$$u_p(k) = K e(k) \quad (4.3-9)$$

La función de transferencia discreta de la parte proporcional se obtiene directamente transformando a variable z como

$$C_p(z) = \frac{u_p(z)}{e(z)} = K. \quad (4.3-10)$$

La parte derivativa, es

$$u_D(k) = K T_D / T_o [e(k) - e(k-1)]. \quad (4.3-11)$$

Utilizando el operador retardo, queda

$$u_D(k) = (K T_D / T_o) e(k) (1 - q^{-1}). \quad (4.3-12)$$

La función de transferencia discreta de la parte derivativa se obtiene ahora, como

$$C_D(z) = \frac{u_D(z)}{e(z)} = (K T_D / T_o) (1 - z^{-1}). \quad (4.3-13)$$

La parte integral, con aproximación rectangular, Ec. 4.3-2, es

$$u_I(k) = K K_I T_o \sum_{i=1}^k e(i-1).$$

Expresado con el operador retardo queda

$$u_I(k) = K K_I T_o \sum_{i=1}^k e(i) q^{-i}$$

Expandiendo la sumatoria

$$u_I(k) = K K_I T_o q^{-1} [e(1) + e(2) + \dots + e(k)]$$

que puede reescribirse, como

$$u_I(k) = K K_I T_o q^{-1} e(k) [1 + q^{-1} + \dots + q^{-(k-1)}]. \quad (4.3-14)$$

La serie $(1 + q^{-1} + \dots)$ representa una función escalón unitario discretizada cuya

transformada es $1/(1 - z^{-1})$. Entonces de la Ec. 4.3-14 se obtiene

$$C_1(z) = \frac{u_I(z)}{e(z)} = K_I K T_o \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}. \quad (4.3-15)$$

El controlador PID puede representarse como en la Fig. 4.3.3 en sus tres bloques de transferencia P, I y D.

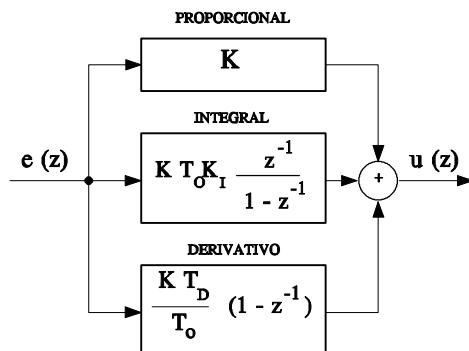


Fig. 4.3.3 Función de Transferencia discreta del PID.

4.3.3 Controlador PID modificado.

En un controlador PID obtenido por discretización directa de la ecuación diferencial, las partes P y D aparecen multiplicadas por $e(k)$; o sea, por el instante presente del error. Esto tiene como implicancia directa, que al producirse variaciones bruscas de la referencia $r(k)$, también el error $e(k)$ varía instantáneamente, como se observa en la Ec. 4.3-16.

$$e(k) = r(k) - y(k). \quad (4.3-16)$$

Con este error los términos P y D generan acciones de control $u(k)$ que pueden ser excesivas y llegar a comprometer la operación del actuador que gobierna al proceso; en particular el término D que es el que responde a la derivada.

Se propone una modificación del algoritmo tal que la variable que afecta a dichos términos no incluya la referencia $r(k)$. De este modo se definen las entradas:

Para el término I

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

para los términos P y D

$$e(k) = -y(k). \quad (4.3-17)$$

Introduciendo en la ecuación recursiva Ec. 4.3-4 la Ec. 4.3-17 se obtiene

$$\begin{aligned} u(k) = & u(k-1) + K \{ -y(k) + y(k-1) + K_I T_o e(k-1) + \\ & + (T_D/T_o)[-y(k) + 2y(k-1) - y(k-2)] \} \end{aligned}$$

o bien

$$u(k) = u(k-1) + A y(k) + B y(k-1) + C y(k-2) + D e(k-1) \quad (4.3-18)$$

con

$$A = -K(1 + T_D/T_o)$$

$$B = K(1 + 2T_D/T_o)$$

$$C = -K(T_D/T_o)$$

$$D = K K_I T_o.$$

La ecuación en diferencias Ec. 4.3-18 puede llevarse como en los casos anteriores al dominio Z y plantearse la función de transferencia discreta. En este caso no existirá una sola entrada al controlador, ver Fig. 4.3.3, sino que el mismo tiene como entradas el error $e(k)$ y la salida del proceso $y(k)$ como se representa en la Fig. 4.3.4.

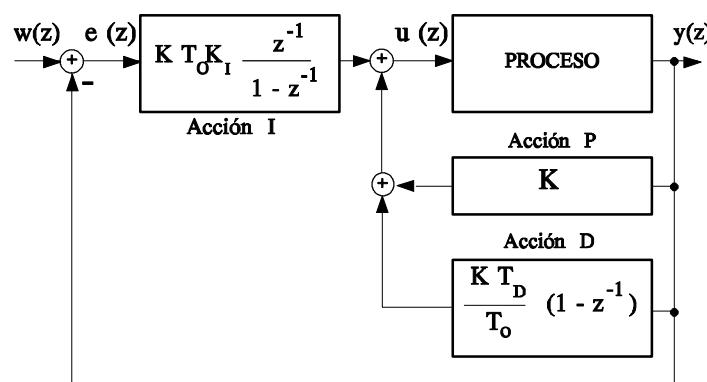


Fig. 4.3.4. Controlador PID modificado.

Si bien se pierde algo en la velocidad de respuesta, el beneficio logrado en cuanto a

la reducción de la acción de control es muy significativo.

Si solamente se quiere atenuar el efecto del cambio brusco en la parte D que es el más crítico, se consideran como entradas:

Para las partes I y P

$$e(k) = r(k) - y(k),$$

para la parte D

$$e(k) = -y(k).$$

En tal caso se obtendrá

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1) + C[y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)]$$

siendo

$$A = K$$

$$B = -K(1 + K_I T_o)$$

$$C = -K(T_D/T_o).$$

En tal caso la Fig. 4.3.4. se modifica, teniendo el bloque de acción P y acción I como entrada $e(z)$.

4.3.4 Controlador PID con predictor.

Para tiempos de muestreo reducidos, el tiempo de cómputo que requiere la unidad de procesamiento para calcular el próximo valor de salida, puede ser comparable al de muestreo. En ese caso el tiempo transcurrido entre la toma de la muestra del error y la aplicación de la acción de control correspondiente es significativo, siendo que la teoría presupone el sincronismo de ambas señales. Para obviar esto es posible anticipar la acción de control utilizando una predicción de la muestra. Por simplicidad de cálculo, el cual es ya crítico, se realiza una predicción lineal del error.

En base a la Fig. 4.3.5, se calcula el valor de la predicción de $e(k)$ en el instante $k-1$, $\hat{e}(k)|_{k-1}$.

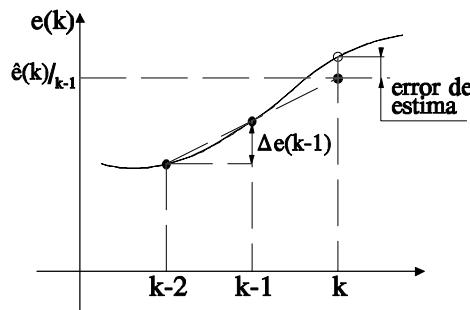


Fig. 4.3.5. Predicción lineal del error.

$$\hat{e}(k)|_{k-1} = e(k-1) + [e(k-1) - e(k-2)]. \quad (4.3-19)$$

Reemplazando en la Ec. 4.3-2, $e(k)$ por $\hat{e}(k)|_{k-1}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{u}(k)|_{k-1} &= K \{ \hat{e}(k)|_{k-1} + K_I T_o \sum_{i=1}^k e(i-1) + \\ &+ T_D / T_o [\hat{e}(k)|_{k-1} - e(k-1)] \}. \end{aligned} \quad (4.3-20)$$

Incorporando la Ec. 4.3-19 en la Ec. 4.3-20, operando y reordenando, del mismo modo que en la obtención de la Ec. 4.3-6 y considerando que en el instante k la acción de control que se aplica efectivamente es

$$u(k) = \hat{u}(k)|_{k-1}$$

se obtiene la ecuación recursiva Ec. 4.3-21.

$$\begin{aligned} \hat{u}(k)|_{k-1} &= \hat{u}(k-1)|_{k-2} + A e(k-1) + \\ &+ B e(k-2) + C e(k-3) \end{aligned} \quad (4.3-21)$$

con

$$A = K(2 + K_I T_o + T_D / T_o)$$

$$B = K(-3 - 2T_D/T_o)$$

$$C = K(1 + T_D/T_o).$$

Normalmente, la predicción lineal es suficientemente buena y este controlador PID se adecua para los casos en que el tiempo de cálculo es comparable al período de muestreo.

4.3.5 Controlador PID de velocidad

Para determinados tipos de procesos no resulta conveniente aplicar directamente la acción de control $u(k)$ sino su valor incremental, esto es, se aplica al proceso la diferencia entre $u(k)$ y su valor anterior $u(k-1)$. El controlador que así se obtiene se denomina PID de velocidad y su acción de control es $u_v(k)$. La estructura del controlador se obtiene en forma inmediata a partir de cualquiera de los algoritmos recursivos de control del tipo PID mostrados en los puntos anteriores, pasando el término $u(k-1)$ al primer miembro. Tomando por ejemplo la Ec. 4.3-8, tiene la forma

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2)$$

$$u_v(k) = Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2)$$

La estructura de este controlador es de segundo orden no recursiva y desde el punto de vista dinámico no incluye un efecto integrador. Por esta razón su campo de aplicación se restringe fundamentalmente al control de procesos que incluyen el efecto integrador en su estructura, esto es que su función de transferencia tiene un polo en $z=1$.

4.3.6 Definición de la estructura, tiempo de muestreo y parámetros del controlador PID.

Estructura del controlador.

En primera instancia debe determinarse la estructura del controlador. Esta se fija en función de las características globales del proceso a controlar. En algunos casos particulares podrán ser eliminadas algunas de las acciones integrativa o derivativa. Como norma general, si resulta muy importante la eliminación del error de estado estacionario, deberá estar presente la acción integral. Debe tenerse en cuenta que esta acción reduce el margen de fase. De igual modo cuando es fundamental obtener respuestas rápidas frente a cambios bruscos de la referencia, con buen amortiguamiento, se pone énfasis en la parte derivativa. Esta acción aumenta el margen de fase. En general dependiendo del tipo de perturbaciones y dinámica del proceso, para decidir la eliminación de alguna de las acciones será conveniente realizar ensayos de simulación. Un cambio de estructura de PID a PI o PD puede también interpretarse como una optimización de parámetros donde alguno de ellos tiende a cero.

Tiempo de muestreo.

La selección del tiempo de muestreo es el resultado de varios compromisos. Como norma general si sólo interesa el desempeño del control, el tiempo de muestreo T_o debe ser lo menor posible, para aproximarse al caso continuo. Desde el punto de vista de la cantidad de cálculo involucrado, el tiempo de muestreo debe ser lo mayor posible. Dentro de estos límites existe una gran variedad de casos de compromiso. Aparte de otros elementos del sistema de control como los sensores y actuadores que pueden influir en la determinación del tiempo de muestreo, el aspecto fundamental está constituido por las características dinámicas del proceso. En general cuanto mayores sean los valores de las constantes de tiempo, mayor es T_o .

El límite superior de T_o está dado por el teorema de Shannon (Ec. 2.5-6). Esto es, si se conocen las armónicas máximas de las señales involucradas, o se pueden estimar, la frecuencia de muestreo debe duplicar por lo menos a la frecuencia de estas armónicas. Ante la posible presencia de armónicas de mayor orden a las autorizadas por el teorema de Shannon, se deben incluir filtros para eliminarlas. Para procesos con retardo puro dominante T_t , el tiempo de muestreo debe elegirse entre 1/4 y 1/8 de T_t .

El tiempo de crecimiento T_c , o sea el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el 95% del valor final en respuesta a un escalón de entrada, puede también ser un indicador para seleccionar T_o . Valores adecuados son: $T_c/5 > T_o > T_c/15$.

Las constantes de tiempo menores del proceso T_{\min} , sobre las que se quiere tener control, imponen condiciones a los valores máximos de T_o . En general debe ser $T_o < T_{\min}/2$. Este valor surge como valor aproximado a partir del teorema de Shannon. En la práctica se aconseja utilizar un período de muestreo T_o por lo menos un factor 1/5 menor que T_{\min} . Si las dinámicas rápidas no son consideradas, deben filtrarse las señales antes del muestreo tal como lo especifica el teorema del muestreo de Shannon.

Finalmente, la selección de T_o modifica la posición de los ceros y los polos de la función de transferencia discreta pudiendo incluso transformarse el modelo en sistema de fase no mínima, esto es incluir ceros fuera del círculo unitario. En muchos casos el aumento de T_o mejora las características de la respuesta temporal, o bien reduce la energía de la acción de control. La selección de T_o en base a este aspecto implica analizar el desplazamiento de los ceros y los polos de la función de transferencia discreta en el plano Z, o también analizar las respuestas temporales obtenidas por simulación.

Para sistemas de dinámica muy rápida, como ser el control de las variables eléctricas de un circuito, el orden de magnitud de T_o se aproxima a 1 **mseg**. Para el control de sistemas electromecánicos rápidos, como por ejemplo motores eléctricos que mueven estructuras mecánicas ligeras, se suele elegir $T_o = 10 \text{ mseg}$ o menor. Para procesos químicos o térmicos es normalmente mucho mayor, por ejemplo: $1 \text{ seg} < T_o < 20 \text{ seg}$.

Optimización de Parámetros.

La adaptación o calibración de los parámetros del controlador a la dinámica del proceso se puede realizar por distintas vías:

- Optimización de los parámetros mediante un criterio de desempeño.
- Prueba y error.
- Aplicación de reglas de ajuste o sintonía.

a) Criterio de desempeño.

La optimización de los parámetros aplicando un criterio de desempeño definido, se utiliza en aquellos casos de requerimientos muy rigurosos. En general, se plantea un índice en el que se evalúa, por ejemplo, la magnitud del error $e(k)$ que tiene la salida respecto de la referencia y también la magnitud de las variaciones de las acciones de control $u(k)$, respecto a su valor medio $\Delta u(k)$. Un índice muy utilizado es el propuesto por Fletcher-Powell que se expresa como

$$J = \sum_{k=0}^M [e^2(k) + r(\Delta u)^2(k)]. \quad (4.3-22)$$

Este tipo de índices será analizado para los casos de control óptimo de estado y control estocástico. La solución analítica, esto es la obtención de los parámetros como función de J , es sólo posible para controladores de muy bajo orden. La Ec. 4.3-22 es no obstante muy útil para la evaluación del desempeño del controlador en un planteo experimental de prueba y error.

b) Prueba y error

Se trata de una metodología puramente experimental que consiste en variar en forma sistemática los distintos parámetros y observar el resultado obtenido, ya sea directamente sobre el proceso real, si las condiciones de experimentación así lo permitan, o mejor en un esquema de simulación. La entrada usualmente utilizada es un escalón cuya amplitud sea compatible con el rango de trabajo del sistema.

En general primeramente se eliminan los efectos integrativos y derivativos y se trata de obtener una ganancia proporcional lo mayor posible que provea una adecuada respuesta temporal. Si esto no se puede lograr por el solo ajuste de la ganancia, se comienza a introducir con cautela el efecto derivativo. Eventualmente se puede ajustar nuevamente el término proporcional para mejorar aún más la respuesta. Es necesario repetir este proceso hasta lograr una buena respuesta temporal con el mínimo error de estado estacionario posible. Es importante tener en cuenta que el amortiguamiento de la respuesta del sistema se logra mediante el carácter predictivo de la acción derivativa. En general la acción derivativa reduce las sobrelongaciones, aumentando el margen de fase del sistema.

Si el error de estado estacionario es un aspecto fundamental, se hace necesario la incorporación del efecto integrativo. Se comienza con el mínimo valor posible y se corrige analizando la respuesta temporal de forma de obtener la eliminación del error de estado estacionario en un tiempo prudencial. Se debe tener en cuenta que la acción integral reduce el margen de fase lo que puede llevar a la generación de sobrelongaciones significativas. Estas deberán minimizarse reduciendo el efecto integrativo, si el tiempo de eliminación del error de estado estacionario resultante es aceptable. En caso contrario es necesario reajustar los términos proporcional y derivativo. En particular es conveniente aumentar el efecto derivativo primero y verificar la respuesta. Esto puede estar complementado con una modificación en la ganancia proporcional.

Esta metodología normalmente se aplica luego de obtener valores indicativos provistos por otros métodos, como el de las **reglas de ajuste** y constituyen un paso de gran importancia para la obtención de resultados satisfactorios en un sistema de control.

c) Reglas de ajuste o sintonía.

Las reglas de ajuste de parámetros para un controlador PID continuo son muy difundidas en la literatura de control clásico e incluso bastante conocidas por los operadores de plantas industriales. Estas reglas tienen una fuerte componente empírica y las más conocidas son las denominadas de Ziegler-Nichols. Se aplican para procesos del tipo pasa-bajos, los que constituyen la mayoría de los procesos industriales. Reglas del mismo tipo se han presentado para los modelos discretos, los que pueden diferir en mayor o menor grado dependiendo del tiempo de muestreo. Por ejemplo las reglas de Takahashi se deducen de las de Ziegler-Nichols. Ambos tipos de reglas se presentan a continuación.

Metodología para la obtención de los parámetros.

Cuando se conoce el modelo del proceso, resulta en general más adecuado hacer el análisis en diagramas de Bode, Nyquist o diagrama de raíces para encontrar los parámetros del controlador más adecuado. Cuando no se conoce el modelo del proceso se puede realizar un análisis experimental del mismo para determinar sus características dinámicas más relevantes y a partir de estas obtener los parámetros del controlador. A continuación se resume la secuencia de pasos a dar para obtener los parámetros según las reglas de Ziegler-Nichols y Takahashi. Este análisis se basa primeramente en llevar el sistema de lazo cerrado al límite de estabilidad. En estas circunstancias se determinan la frecuencia de oscilación y la ganancia del lazo que ha llevado al sistema a dicho límite.

Procedimiento experimental.

- * Se fijan los valores de las partes I y D igual a cero y se hace crecer la ganancia P hasta el límite de la estabilidad con lo cual el sistema comenzará a oscilar generando una respuesta como la presentada en la Fig. 4.3.6.
- * Se determina el valor de ganancia K_L que lleva el sistema a la oscilación.
- * Se determina el período de oscilación T_L .
- * Conociendo K_L , T_L se ajustan los parámetros de acuerdo a las reglas de la Fig. 4.3.7. en el dominio continuo

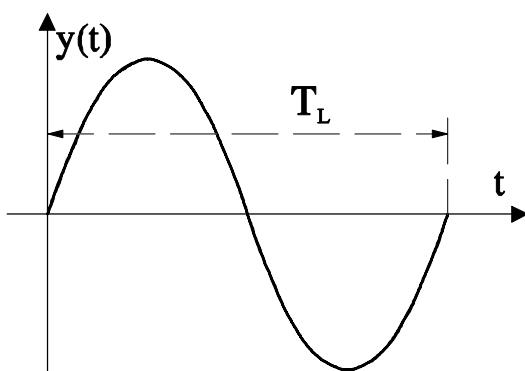


Fig. 4.3.6. Sistema en el límite de estabilidad.

	Controlador	K	K_I	T_D
P	K	$0,5K_L$		
PI	$K(1 + K_I/s)$	$0,45K_L$	$1,2/T_L$	
PID	$K[1 + (K_I/s) + T_D s]$	$0,6K_L$	$2/T_L$	$T_L/8$

Fig. 4.3.7. Reglas de ajuste según Ziegler-Nichols basadas en el criterio del límite de estabilidad.

Para el mismo procedimiento según Takahashi para sistemas de tiempo discreto con período de muestreo T_o , se utiliza el cuadro de la Fig. 4.3.8. Estos valores son sólo válidos para el controlador PID modificado representado por la Ec. 4.3-18.

	K	$K_I T_o$	T_D/T_o
P	$0,5 K_L$		
PI	$K_1 K_L T_o / T_L$ *	$0,54(K_L/K)(T_o/T_L)$	
PID	$0,6 K_L T_o / T_L$ **	$1,2(K_L/K)(T_o/T_L)$	$(3/40)(K_L/K)(T_L/T_o)$

* $K_1 = [0,45 \dots 0,2]$. Valores más pequeños para $T_o \approx 4T_U$ (ver Fig. 4.3-10)

** Válido para $T_o \leq 2T_U$

Fig. 4.3.8. Reglas de ajuste según Takahashi.

Cuando no se dispone aún del controlador o bien no es posible llevar el sistema al límite de estabilidad, el análisis se realiza a lazo abierto en base a la respuesta del proceso a una entrada escalón según se esquematiza en la Fig. 4.3.9.

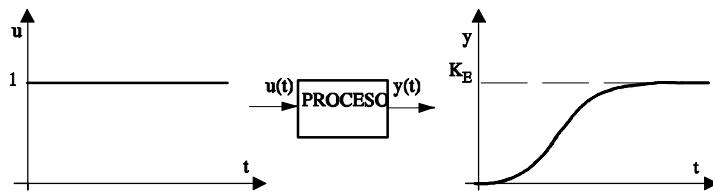


Fig. 4.3.9. Respuesta al escalón.

Se supone que no hay oscilación en la respuesta. Se distinguen los siguientes casos:

El proceso no tiene comportamiento integral.

El proceso tiene comportamiento integral.

Cuando el proceso no tiene carácter integral se sigue el siguiente procedimiento:

- * Se obtiene la respuesta al escalón unitario y se realiza la construcción de la Fig. 4.3.10.

De esta forma se aproxima el proceso con un modelo continuo basado en un sistema de primer orden y un retardo puro de la forma representada por la Ec. 4.3-23.

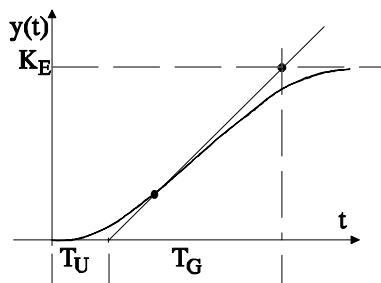
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K_E}{1 + T_G s} e^{-T_U s} \quad (4.3-23)$$

- * Se determinan los valores de K_E , T_U , T_G según la Fig. 4.3.10.
- * Con estos valores se determinan los parámetros del controlador de acuerdo a las reglas de la Fig. 4.3.12.

Este método no es aplicable para procesos cuyo modelo sea de primer orden sin retardo puro. Para sistemas de tiempo discreto con período de muestreo T_o se aplican las reglas según Takahashi de la Fig. 4.3.13

Si el sistema tiene comportamiento integral se aplica el siguiente procedimiento:

- * Se obtiene la respuesta al escalón unitario y se determinan los valores de T_U y K_E/T_G como la pendiente de crecimiento según la Fig. 4.3.11; aproximando el proceso con un modelo que incluye un retardo puro y un integrador puro, según la Ec. 4.3-24.

Fig. 4.3.10. Determinación de K_E , T_G y T_U

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K_E}{T_G s} e^{-T_U s} \quad (4.3-24)$$

Con los valores de T_U , K_E/T_G se determinan los parámetros de acuerdo a las reglas de la Fig. 4.3.12.

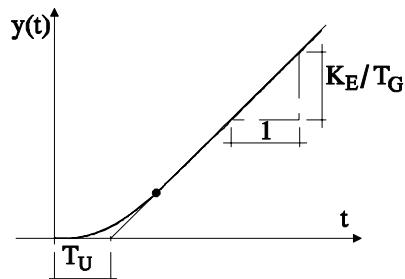


Fig. 4.3.11. Respuesta a un escalón unitario para sistema con carácter integral.

	Controlador	K	K_I	T_D
P	K	$\frac{1}{(K_E/T_G)T_U}$		
PI	$K(1+K_I/s)$	$\frac{0,9}{(K_E/T_G)T_U}$	$\frac{1}{3,3 T_U}$	
PID	$K(1+K_I/s + T_D s)$	$\frac{1,2}{(K_E/T_G)T_U}$	$\frac{1}{2 T_U}$	$0,5 T_U$

Fig. 4.3.12. Reglas de ajuste según Ziegler-Nichols basado en la respuesta al escalón.

Según Takahashi para controladores PID de tiempo discreto con período de muestreo T_o , se utiliza el cuadro de la Fig. 4.3.13. Los valores dados aquí sólo se aplican al controlador PID modificado según la ley de control dada por la Ec. 4.3-18.

	K	$K_I T_o$	T_D / T_o
P	$\frac{T_G / K_E}{T_U + T_o}$		
PI	$\frac{0,9 T_G / K_E}{T_U + T_o / 2} - \frac{0,13 T_o T_G / K_E}{(T_U + T_o / 2)^2}$	$\frac{0,27 T_G T_o / K_E}{K(T_U + T_o / 2)^2}$	
PID	$\frac{1,2 T_G / K_E}{T_U + T_o / 2} - \frac{0,3 T_o T_G / K_E}{(T_U + T_o / 2)^2}$	$\frac{0,6 T_G T_o / K_E}{K(T_U + T_o / 2)^2}$	$\frac{0,5 T_G / K_E}{K T_o}$

Fig. 4.3.13. Reglas de ajuste según Takahashi basado en la respuesta al escalón.

Los valores obtenidos por estas reglas de ajuste en general requieren de modificaciones posteriores de los parámetros mediante el procedimiento de prueba y error. De todos modos los valores si bien son indicativos, proporciona una buena base sobre la cual se puede continuar con el ajuste basado en la respuesta temporal del sistema.

4.3.7 Controlador discreto de bajo orden de parámetros optimizados.

La obtención del controlador PID discreto a partir del clásico controlador PID continuo constituye un planteo válido cuando el tiempo de muestreo es suficientemente pequeño en relación a las características dinámicas del proceso a controlar y de este modo el diseño se aproxima al caso continuo. No siempre se verifica esta situación; debido a condicionamientos tecnológicos, por ejemplo cuando el período de muestreo debe seleccionarse de forma tal que el diseño no puede considerarse como aproximación al caso continuo, o bien por razones de optimización dinámica. Por estos motivos es de utilidad hacer el diseño del controlador directamente en el dominio discreto. En esta sección se hace un planteo de controlador discreto general de

estructura fija.

En la Fig. 4.3.14 se representa un sistema de control realimentado que incluye esquemáticamente un proceso $G_p(z)$ y un controlador $G_c(z)$.

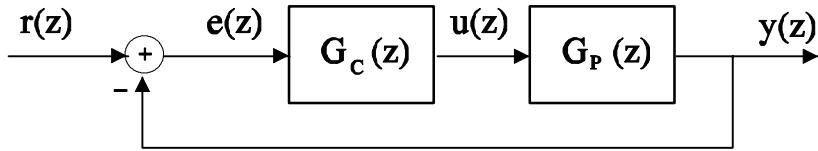


Fig. 4.3.14 Sistema de control realimentado

Representados en el dominio \mathbf{Z} los modelos del proceso y del controlador tendrán en general la forma

$$G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} \quad (4.3-26)$$

$$G_c(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_n z^{-n}}{p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_r z^{-r}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}. \quad (4.3-27)$$

Como se plantea una optimización de los parámetros del controlador, los órdenes de los polinomios de éste pueden ser elegidos en principio en forma independiente al proceso. En términos generales se proponen estructuras relativamente simples con el objeto de mantener reducido el cálculo del controlador en tiempo real.

A parte de otros condicionamientos de realizabilidad, estabilidad y de características dinámicas específicos, se impone como norma al controlador la condición de eliminar el error de estado estacionario,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$$

o bien en el dominio \mathbf{Z}

$$\lim_{z \rightarrow 1} e(z)(1 - z^{-1}) = 0.$$

Esta condición se suele denominar efecto integrador. Si este efecto no está incorporado en el proceso, deberá ser asumido por el controlador.

Basado en el teorema del valor final en el campo discreto, el controlador deberá incorporar un polo en $z=1$. El controlador más simple que cumpla con esta condición tendrá una estructura del tipo

$$G_c(z) = \frac{Q(z^{-1})}{1 - z^{-1}}. \quad (4.3-28)$$

El orden de $Q(z^{-1})$ definirá el orden y tipo del controlador. Tratándose de controladores simples normalmente no se proponen órdenes mayores que el segundo. Un controlador discreto de segundo orden estará representado por

$$G_c(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{A + Bz^{-1} + Cz^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (4.3-29)$$

transformando al dominio temporal resulta

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2) \quad (4.3-30)$$

La Ec. 4.3-30 tiene la misma forma que la ecuación del controlador PID discreto representado en la Ec. 4.3-6. No obstante los valores de A , B , C no se obtienen en principio a través de la fijación de constantes de ganancia estática, constante de integración o derivación como en el caso del controlador PID.

Suponiendo una entrada escalón unitario al controlador, se puede calcular la respuesta temporal discreta del mismo a partir de la Ec. 4.3-30.

$$e(k) = \begin{cases} 1 & \text{para } k \geq 0 \\ 0 & \text{para } k < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(0) &= A \\ u(1) &= 2A + B \\ u(2) &= 3A + 2B + C \\ &\vdots \\ u(k) &= (k+1)A + kB + (k-1)C. \end{aligned} \quad (4.3-31)$$

También

$$u(k) = (A - C) + k(A + B + C) \quad (4.3-32)$$

La Ec. 4.3-32 representa una recta con ordenada al origen $(A - C)$ y pendiente $(A + B + C)$.

La respuesta temporal de un controlador PID a un escalón, muestra un elevado valor de salida para $t=0$ (parte D) para luego disminuir a un valor mínimo y finalmente crecer a velocidad constante (parte I). Si se desea que este controlador discreto tenga un comportamiento similar deberá ser

$$u(1) < u(0); \quad u(1) < u(2).$$

Para un controlador con comportamiento PID con ganancia positiva se observa de la Ec. 4.3-32 que deberá ser (ver Fig. 4.3.15)

$$\begin{aligned} A &> 0 \\ (A - C) &> 0 \\ (A + B + C) &> 0 \\ (2A + B) &< A. \end{aligned}$$

De tal forma resultan las siguientes condiciones para comportamiento tipo PID

$$\begin{aligned} A &> 0 \\ B &< -A \\ -(A + B) &< C < A. \end{aligned} \tag{4.3-33}$$

Una respuesta típica se muestra en la Fig. 4.3.15. Asociando esta respuesta a la de un controlador PID continuo se pueden definir

$$\begin{aligned} G &= A - C \\ C_D &= [A - (A - C)]/G = C/G \\ C_I &= (A + B + C)/G \end{aligned} \tag{4.3-34}$$

como ganancia estática, constante de derivación y constante de integración respectivamente.

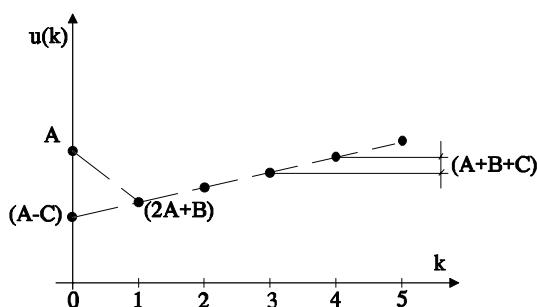


Fig. 4.3.15 Respuesta al escalón del controlador discreto con comportamiento tipo PID.

La determinación de los parámetros A , B , C del controlador general discreto de la Ec. 4.3-17 requiere de un proceso de optimización o calibración. Si se le quiere dar comportamiento tipo PID se puede en primera aproximación utilizar las reglas de Takahashi teniendo en cuenta que se pueden establecer las siguientes equivalencias.

$$\begin{aligned} K &\rightarrow G \\ T_D / T_o &\rightarrow C_D \\ K_I T_o &\rightarrow C_I \end{aligned} \quad (4.3-35)$$

Si en la Ec. 4.3-29 alguno de los coeficientes A , B , C se anula se tiene un controlador discreto de primer orden. Cuando es $C = 0$, toma la forma

$$G_c(z) = \frac{A + Bz^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (4.3-36)$$

La ecuación en diferencias resulta

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1). \quad (4.3-37)$$

En la Fig. 4.3.16 se representa la respuesta temporal discreta para una entrada escalón unitario. Su evolución puede ser comparada con un controlador continuo de tipo PI, con las siguientes condiciones

$$A > 0$$

$$A + B > 0.$$

(4.3-38)

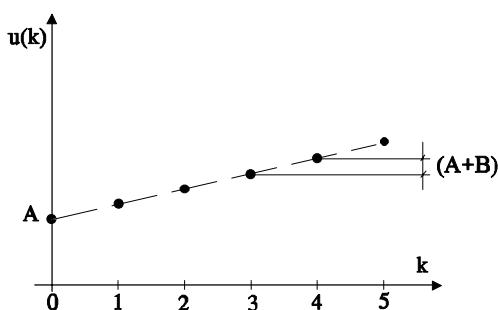


Fig. 4.3.16 Respuesta al escalón del controlador de 1^{er} Orden.

La ganancia estática y la constante de integración equivalen respectivamente

$$\begin{aligned} G &= A \\ C_I &= 1 + B/A. \end{aligned}$$

Si además es $B = 0$ se obtiene un controlador del mismo tipo PI cuya constante de integración es la unidad. Cuando se hace $A = 0$ con $B \neq 0$ se obtiene un controlador de tipo integral puro

$$u(k) = u(k-1) + B e(k-1). \quad (4.3-39)$$

La respuesta discreta al escalón unitario se representa en la Fig. 4.3.17.

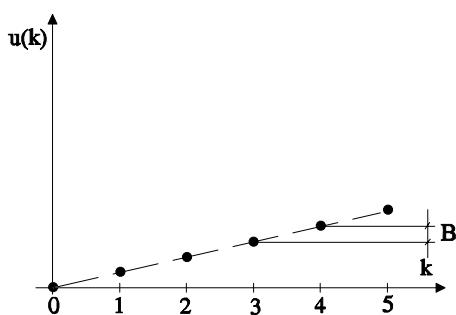


Fig. 4.3.17. Respuesta tipo I.

Cuando el error de estado estacionario no es importante o bien el efecto integrador no es deseable, éste se puede eliminar. En tal caso la estructura del controlador toma la forma

$$G_c(z) = A + Bz^{-1} \quad (4.3-40)$$

$$u(k) = Ae(k) + B e(k-1). \quad (4.3-41)$$

Esta ecuación es no recursiva y la respuesta discreta al escalón unitario se muestra en la Fig. 4.3.18 para la condición

$$A > 0$$

$$B < 0$$

$$A + B > 0.$$

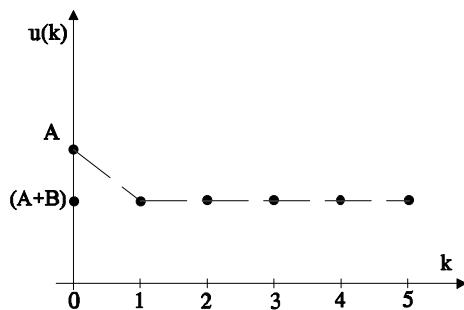


Fig. 4.3.18 Respuesta tipo PD.

La respuesta al escalón tiene un comportamiento equivalente a un controlador continuo del tipo PD, en el cual la constante de proporcionalidad y la derivativa se corresponden a

$$G = A + B$$

$$C_D = -\frac{B}{G}.$$

Cuando es $B = 0$ el controlador se reduce a un proporcional puro con ganancia

$$G = A.$$

Si se impone la condición $A = -B$ se obtiene un controlador que puede asociarse a uno continuo de tipo D. Su respuesta discreta se representa en la Fig. 4.3.19.

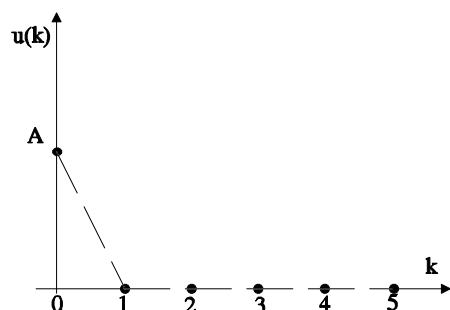


Fig. 4.3.19 Respuesta tipo D

El análisis realizado se hizo relacionando los controladores obtenidos con los clásicos

continuos de tipo PID. Los controladores lineales discretos resultantes en tal caso pueden asociarse a acciones del tipo PID. No obstante otras relaciones de los coeficientes A , B , C son posibles conduciendo a controladores que no responden a un comportamiento específico. El diseñador podrá utilizar para ciertas aplicaciones, los controladores generales con una selección de los coeficientes adecuada a la aplicación, o bien con coeficientes que son resultado de la optimización de acuerdo a un objetivo de control a través de un funcional de desempeño.

4.4 Controladores de estructura optimizada. Controladores de cancelación.

El controlador de cancelación se basa en la obtención de una respuesta dinámica optimizada a través de la cancelación de determinados ceros y polos de la función de transferencia de la planta. Contrariamente a los controladores de parámetros optimizados, en éstos se optimiza tanto la estructura como los parámetros del controlador.

El concepto básico se fundamenta en que en un sistema de control de seguimiento de una variable de referencia $r(k)$, la salida $y(k)$ debe coincidir lo mejor posible con la entrada $r(k)$ en todo instante. Esto no es alcanzable en general. En particular las mayores desviaciones se producen durante el transitorio, pero en principio puede plantearse como objetivo ideal que $y(k)$ siga exactamente a $r(k)$.

Si la función de transferencia del proceso $G_p(z)$ se conoce exactamente y no existen perturbaciones, es posible plantear un control en lazo abierto, como el representado en la Fig. 4.4.1.

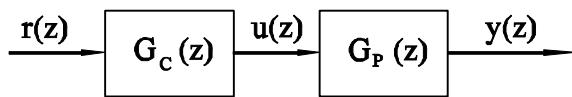


Fig. 4.4.1. Control por prealimentación.

Si se toma

$$G_c(z) = \frac{1}{G_p(z)} \quad (4.4-1)$$

la función de transferencia completa $G_T(z)$ será

$$G_T(z) = \frac{1}{G_p(z)} G_p(z) \equiv 1. \quad (4.4-2)$$

Esto es, todos los ceros y polos de $G_p(z)$ son cancelados por el controlador. En esta forma la salida seguiría con precisión a la referencia. Esta situación ideal conduce normalmente a que $G_c(z)$ no sea realizable. En tal caso es necesario incorporar un factor de realizabilidad como se expresa en la Ec. 4.4-3.

$$G_c(z) = \frac{1}{G_p(z)} G_{CR}(z). \quad (4.4-3)$$

De esta forma será

$$G_T(z) = G_c(z) G_p(z) = G_{CR}(z) \quad (4.4-4)$$

Esto es, si bien se cancelan polos y ceros del proceso $G_p(z)$, aparecen otros que definen la dinámica del sistema de control y están determinados por el factor de realizabilidad.

Cuando el proceso no se conoce con precisión o existen perturbaciones, el control en lazo abierto no es aplicable y debe recurrirse a una estructura de control con realimentación, como se representa en la Fig. 4.4.2.

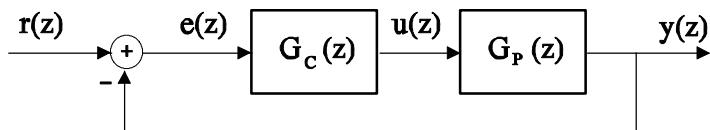


Fig. 4.4.2. Control realimentado.

Por principio aquí no podrá existir un seguimiento perfecto entre $r(k)$ e $y(k)$, dado que por lo menos en el transitorio debe existir un valor finito de $e(k)$, de lo contrario siendo

$$e(k) = r(k) - y(k) \quad (4.4-5)$$

no habría excitación para el proceso.

La función de transferencia de lazo cerrado, es

$$G_T(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)} \quad (4.4-6)$$

donde, $G_T(z) \neq 1$

Despejando $G_C(z)$ de la Ec. 4.4-6, se obtiene

$$G_C(z) = \frac{1}{G_P(z)} \frac{G_T(z)}{1 - G_T(z)}. \quad (4.4-7)$$

La Ec. 4.4-7 muestra que una parte del controlador cancela los polos y ceros del proceso. La función de transferencia $G_T(z)$ se especifica en el diseño como la función de transferencia deseada del lazo cerrado. Para preestablecer sus características se debe tener en cuenta su realizabilidad, aspecto que se analiza a continuación.

Las funciones de transferencia $G_P(z)$, $G_C(z)$ pueden expresarse con exponentes de z positivos como

$$G_P(z) = \frac{B_n(z)}{A_m(z)}. \quad (4.4-8)$$

con $B_n(z)$ polinomio de orden n

$A_m(z)$ polinomio de orden m

$$G_C(z) = \frac{Q_r(z)}{P_q(z)} \quad (4.4-9)$$

con $Q_r(z)$ polinomio de orden r

$P_q(z)$ polinomio de orden q .

La función de transferencia de lazo cerrado, Ec. 4.4-6, resulta

$$G_T(z) = \frac{B_n(z)Q_r(z)}{A_m(z)P_q(z) + Q_r(z)B_n(z)} \quad (4.4-10)$$

Siendo $n \leq m$ y $r \leq q$ el número de ceros y polos de $G_T(z)$ es

Número de ceros $N_c = n + r$

Número de polos $N_p = q + m$.

Para que $G_T(z)$ sea realizable, el número de polos debe ser mayor o igual al número de ceros. La realizabilidad implica entonces que el sobrante de polos respecto de ceros u orden relativo de la función S_T , sea mayor o igual a cero.

Para $G_T(z)$ el orden relativo, será

$$\begin{aligned} S_T &= (q + m) - (n + r) \\ &= (q - r) + (m - n) = S_C + S_P \end{aligned} \quad (4.4-11)$$

El orden relativo S_T es igual a la suma de los órdenes relativos del controlador S_C y del proceso S_P .

Para que S_T sea lo menor posible tendiendo a una dinámica simple, se puede tomar $q = r$. Entonces, será

$$S_T = S_P = m - n. \quad (4.4-12)$$

La condición de realizabilidad expresa por lo tanto que el orden relativo de $G_T(z)$ tiene que ser igual o mayor que el orden relativo $S_P(z)$ del proceso.

Como norma general, en un modelo real el orden del denominador supera por lo menos en uno al del numerador, esto es $S_P \geq 1$. Suponiendo la condición de igualdad a uno, para el diseño del controlador se puede tomar: $S_T = S_P = 1$. La función de transferencia de lazo cerrado más simple que se puede plantear es un polo en el origen, la cual tiene una excelente respuesta dinámica,

$$G_T(z) = z^{-1}. \quad (4.4-13)$$

Con esta función $G_T(z)$, deseada para el sistema de lazo cerrado y el conocimiento de $G_P(z)$ se determina el controlador de cancelación $G_C(z)$ mediante la Ec. 4.4-7.

Para el planteo del controlador de cancelación se supone que los ceros y polos serán correctamente cancelados. Esto implica un conocimiento preciso del proceso y la obtención de un modelo absolutamente fiel. Normalmente el modelo representa en forma aproximada al proceso real y también debe considerarse que pueden existir variaciones con el tiempo en la dinámica del proceso. Por estas razones normalmente los ceros y polos del proceso no son correctamente cancelados.

Para polos y ceros de $G_P(z)$ ubicados muy en el interior del círculo unitario en el plano Z , la cancelación imprecisa no introduce dificultades, pero cuando los polos y ceros están cerca del círculo unitario o eventualmente existen ceros fuera de éste, la cancelación imprecisa puede causar inestabilidad, como se observa en la Fig. 4.4.3.

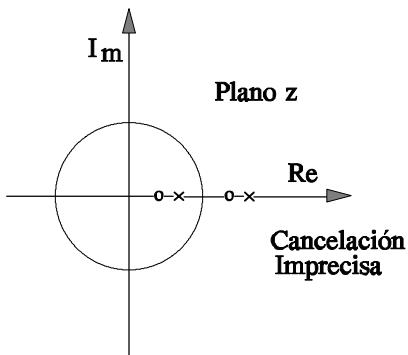


Fig.4.4.3 Cancelación imprecisa de un cero.

La cancelación imprecisa de un cero en un sistema de fase no mínima (ceros fuera del círculo unitario) genera un polo inestable.

Para analizar este aspecto se considera hipotéticamente un modelo exacto $G_P^*(z)$ ideal que representaría exactamente el proceso real. En este modelo se discriminan los ceros y polos que se encuentran bien en el interior y los que se aproximan por fuera y por dentro al círculo unitario.

$$G_P^*(z) = \frac{B_i^*(z)B_c^*(z)}{A_i^*(z)A_c^*(z)} \quad (4.4-14)$$

En la Ec. 4.4-14 los polinomios representan,

$B_i^*(z)$ a los ceros interiores

$B_c^*(z)$ a los ceros cerca del contorno

$A_i^*(z)$ a los polos interiores

$A_c^*(z)$ a los polos cerca del contorno.

La función de transferencia del modelo disponible y que no representa exactamente al proceso tendrá la forma de la Ec. 4.4-15 donde los ceros y polos interiores y del contorno difieren parcialmente respecto del modelo ideal del proceso.

$$G_P(z) = \frac{B_i(z)B_c(z)}{A_i(z)A_c(z)} \quad (4.4-15)$$

Los ceros y polos ubicados bien en el interior del círculo unitario, por ser los que no

presentarán problemas de estabilidad se suponen totalmente conocidos, y por lo tanto coincidentes en los modelos disponible e ideal,

$$\begin{aligned} B_i^*(z) &= B_i(z) \\ A_i^*(z) &= A_i(z). \end{aligned} \quad (4.4-16)$$

Se puede aplicar ahora la ecuación de diseño del controlador, Ec. 4.4-7, obteniéndose el controlador real $G_{Cr}(z)$.

$$G_{Cr}(z) = \frac{A_i^*(z)A_c(z)}{B_i^*(z)B_c(z)} \frac{G_T(z)}{1 - G_T(z)}. \quad (4.4-17)$$

En la Ec. 4.4-17, $G_T(z)$ es la respuesta de lazo cerrado que se pretende obtener. La respuesta de lazo cerrado real $G_{Tr}(z)$ que resulta de aplicar el controlador $G_{Cr}(z)$ dado por la Ec. 4.4-17 al proceso real $G_P^*(z)$, es

$$G_{Tr}(z) = \frac{G_{Cr}(z)G_P^*(z)}{1 + G_{Cr}(z)G_P^*(z)}. \quad (4.4-18)$$

Reemplazando en $G_{Tr}(z)$ los valores de $G_{Cr}(z)$, Ec. 4.4-17, y $G_P^*(z)$, Ec. 4.4-14, y operando, se obtiene.

$$G_{Tr}(z) = \frac{A_c(z)B_c^*(z)G_T}{A_c^*(z)B_c(z)(1-G_T) + A_c(z)B_c^*(z)G_T}. \quad (4.4-20)$$

En $G_{Tr}(z)$ no aparecen $A_i^*(z)$, $B_i^*(z)$ puesto que se suponen cancelados. Se puede también tomar

$$\begin{aligned} A_c(z) &= A_c^*(z) + \Delta A_c(z) \\ B_c(z) &= B_c^*(z) + \Delta B_c(z). \end{aligned} \quad (4.4-21)$$

Representando $\Delta A_c(z)$, $\Delta B_c(z)$ las diferencias entre ceros o polos del modelo ideal y real. La Ec. 4.4-20, se puede reescribir

$$G_{Tr}(z) = \frac{G_T(z)[A_c^*(z) + \Delta A_c(z)]B_c^*(z)}{[1 - G_T(z)][B_c^*(z) + \Delta B_c(z)]A_c^*(z) + G_T(z)[A_c^*(z) + \Delta A_c(z)]B_c^*(z)}. \quad (4.4-22)$$

Para $\Delta A_c(z) = \Delta B_c(z) = 0$ resulta $G_{Tr}(z) = G_T(z)$

Para $\Delta A_c(z) \neq 0$, $\Delta B_c(z) \neq 0$ no se cancelan los polos y puede resultar un sistema mal amortiguado o inestable.

No deben diseñarse controladores de cancelación para procesos con polos o ceros cercanos al círculo unitario y en ningún caso para sistemas inestables o de fase no mínima. Los controladores de cancelación se pueden aplicar a procesos suficientemente amortiguados y asintóticamente estables.

Este tipo de controladores de cancelación tienen en general una tendencia a producir oscilaciones de frecuencia relativamente altas y poco amortiguadas. En el intervalo entre las muestras, el proceso (que es continuo) esta operando con el valor retenido a su entrada. En ese intervalo no hay realimentación y el sistema opera a lazo abierto. La nueva acción de control aparece recién en el próximo instante de muestreo para pasar nuevamente a un período con entrada retenida. Esto puede generar oscilaciones si $G_T(z)$ no está correctamente elegida. Por todas estas razones, si bien el controlador de cancelación presenta un diseño muy simple fijándose a priori una determinada $G_T(z)$, no se recomienda en general, con excepción de aplicaciones a procesos muy amortiguados.

4.5 Controladores de Tiempo Finito.

Otro tipo de controlador de cancelación pero que presenta considerables ventajas respecto del anteriormente visto, manteniendo la simplicidad de diseño, es el denominado de Tiempo Finito. En este controlador la función de transferencia de lazo cerrado $G_T(z)$ no es impuesta por el diseñador, sino que surge a través de un criterio de diseño planteado en el dominio temporal, eliminando así en particular, las oscilaciones que se producen con el controlador de cancelación visto anteriormente. El criterio básico de diseño consiste en imponer la condición a la variable de salida $y(k)$ que alcance el valor de estado estacionario en un tiempo finito, tomando de esto su nombre. Las respuestas temporales que produce son muy rápidas y amortiguadas.

4.5.1 Determinación de la estructura del controlador.

Se trata de un controlador de estructura optimizada, ya que la misma surge del criterio de diseño.

La función de transferencia del proceso representado en el lazo de control de la Fig. 4.5.1, es

$$G_p(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}. \quad (4.5-1)$$

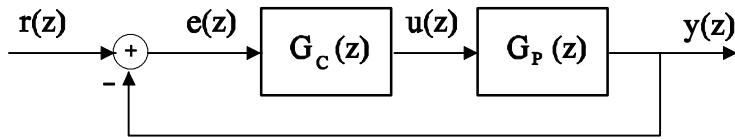


Fig. 4.5.1. Lazo de control.

Se considera que es $b_0 = 0$, ya que se supone que el sistema no tiene respuesta instantánea. El diseño se realiza considerando que se aplica un escalón unitario a la entrada $r(k)$.

$$r(k) = 1 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

$$r(k) = 0 \quad \forall k < 0$$

y fijando la condición que $y(k)$ iguale a $r(k)$ en un tiempo dado T_e .

En el controlador de tiempo finito simple, este tiempo T_e se fija igual al de muestreo T_o multiplicado por el orden m del proceso,

$$T_e = m T_o. \quad (4.5-2)$$

En principio es posible elegir tiempos de establecimiento mayores que T_e . No obstante resulta coherente considerar que es posible encontrar una solución analítica para llevar un sistema de orden m a un estado dado en m pasos, ya que m es el número de valores temporales dependientes entre sí en la ecuación en diferencias y por lo tanto es posible plantear un sistema de m ecuaciones con m incógnitas. Este sistema tendrá como solución única la secuencia de acciones de control $u(k)$ para que $y(k)$ alcance $r(k)$ en el tiempo T_e . Tiempos T_e mayores generará soluciones indeterminadas y será necesario fijar a priori una o varias acciones de control $u(k)$, o bien generar alguna otra condición para obtener una solución determinada. Este hecho es en algunos casos deseable y se analiza en el punto 4.5.5. Tiempos de

establecimiento $T_e < mT_o$ imposibilitan la solución analíticas para $u(k)$.

Aplicando este criterio resulta para una entrada escalón

$$\begin{aligned} y(k) &= r(k) = 1 \quad \forall k \geq m \\ u(k) &= u(m) \quad \forall k \geq m. \end{aligned} \tag{4.5-3}$$

Expresando en variable z el escalón de entrada, es

$$r(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \tag{4.5-4}$$

La salida será, con la condición de diseño impuesta por la Ec. 4.5-3

$$\begin{aligned} y(z) &= y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + y(m-1)z^{-(m-1)} + \\ &+ 1[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots] \end{aligned} \tag{4.5-5}$$

siendo $y(0) = 0$ por ser $b_0 = 0$.

La acción de control se expresa

$$\begin{aligned} u(z) &= u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + u(m-1)z^{-(m-1)} + \\ &+ u(m)[z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots] \end{aligned} \tag{4.5-6}$$

La función de transferencia de lazo cerrado, es

$$\begin{aligned} G_T(z) &= \frac{y(z)}{r(z)} = y(z)(1 - z^{-1}) = \\ &= y(z) - y(z)z^{-1}. \end{aligned} \tag{4.5-7}$$

La función de transferencia $G_T(z)$ puede expresarse como un polinomio en z

$$\begin{aligned} G_T(z) &= p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots + p_{(m-1)}z^{-(m-1)} + \\ &+ p_mz^{-m} = P(z). \end{aligned} \tag{4.5-8}$$

Teniendo en cuenta la Ec. 4.5-7, resulta

$$\begin{aligned}
 p_1 &= y(1) \\
 p_2 &= y(2) - y(1) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 p_m &= y(m) - y(m-1) = 1 - y(m-1) \\
 p_{m+1} &= y(m+1) - y(m) = 0 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 p_{m+i} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.5-9}$$

De igual modo se puede expresar:

$$\frac{u(z)}{r(z)} = u(z) (1 - z^{-1}) = u(z) - u(z)z^{-1} \tag{4.5-10}$$

$$\frac{u(z)}{r(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m} = Q(z) \tag{4.5-11}$$

con

$$\begin{aligned}
 q_0 &= u(0) \\
 q_1 &= u(1) - u(0) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 q_m &= u(m) - u(m-1) \\
 q_{m+1} &= u(m+1) - u(m) = 0 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 q_{m+i} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.5-12}$$

Observando los coeficientes p_i , q_i se verifica:

$$\sum_{i=1}^m p_i = y(m) = 1 \tag{4.5-13}$$

$$\sum_{i=0}^m q_i = u(m) = 1/K_p .$$

Siendo K_p la ganancia estática del proceso.

Para el controlador de cancelación, (Ec. 4.4-7), se ha obtenido

$$G_C(z) = \frac{1}{G_p(z)} \frac{G_T(z)}{1 - G_T(z)}. \quad (4.5-14)$$

En el controlador de tiempo finito $G_T(z)$ no queda librado a la elección del diseñador, sino que $G_T(z)$ surge del criterio de diseño y se expresa por la Ec. 4.5-8.

$$G_T(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = P(z) \quad (4.5-15)$$

La función de transferencia del proceso puede expresarse también mediante las Ec. 4.5-8 y Ec. 4.5-11

$$G_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{y(z)}{r(z)} \frac{r(z)}{u(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (4.5-16)$$

Reemplazando las Ec. 4.5-15 y Ec. 4.5-16 en Ec. 4.5-14, se obtiene

$$G_C(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}. \quad (4.5-17)$$

También en forma expandida

$$G_C(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - \dots - p_n z^{-n}}. \quad (4.5-18)$$

La Ec. 4.5-18 provee la estructura óptima del controlador de acuerdo con el criterio de diseño planteado. Se observa que el orden del controlador es igual al del modelo del proceso.

4.5.2 Determinación de los parámetros.

Comparando las Ec. 4.5-1 y Ec. 4.5-16, se tiene

$$G_P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$G_P(z) = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}$$

$$G_P(z) = \frac{[p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m}] / q_0}{[q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}] / q_0}. \quad (4.5-19)$$

En la Ec. 4.5-19 se divide numerador y denominador por q_0 con el objeto de normalizar la expresión y poder hacer una comparación directa de los coeficientes. Así resulta

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 q_0 & p_1 &= b_1 q_0 \\ q_2 &= a_2 q_0 & p_2 &= b_2 q_0 \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ q_m &= a_m q_0 & p_m &= b_m q_0 \end{aligned} \quad (4.5-20)$$

Los parámetros del controlador quedan todos en función de q_0 . Para calcular q_0 se resuelve la Ec. 4.5-19 para un valor determinado de z , por ejemplo $z = 1$.

Para $z = 1$, resulta comparando numeradores

$$\sum_{i=1}^m b_i = (1/q_0) \sum_{i=1}^m p_i.$$

Considerando que $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ (Ec. 4.5-13) resulta

$$q_0 = 1 / [\sum_{i=1}^m b_i]. \quad (4.5-21)$$

De esta forma queda totalmente definido el controlador en su estructura y parámetros optimizados. Es importante resaltar la simplicidad para el cálculo del controlador, lo que lo hace atractivo para el cálculo en línea del controlador óptimo en el control adaptable. Conocido el proceso a controlar $G_p(z)$, la estructura se define con la Ec. 4.5-18 y los parámetros q_i , p_i son funciones simples y directas de los parámetros del modelo del proceso a_i , b_i , definidas por las Ec. 4.5-20 y Ec. 4.5-21.

Uno de los inconvenientes de este controlador se centra en la magnitud de la acción

de control que puede resultar muy violenta y crear dificultades en un actuador real. Esto se debe a que la misma no interviene en el proceso de diseño y los requerimientos impuestos al controlador son muy exigentes.

La acción de control más grande, para una entrada escalón, es la primera

$$u(0) = q_0 = 1/\sum_{i=1}^m b_i \quad (4.5-22)$$

El valor de la $\sum_{i=1}^m b_i$ depende del tiempo de muestreo T_0 . Cuando disminuye T_0 , en el modelo discreto del proceso continuo la sumatoria de los b_i también disminuye con lo que la primer acción de control aumenta.

Esta consideración es consecuente con el sentido físico, ya que será necesario aumentar la energía por unidad de tiempo de la variable de control $u(k)$, porque al disminuir T_0 se está disminuyendo el tiempo para llevar el sistema de una situación a otra. Para este controlador no se puede elegir más o menos arbitrariamente el tiempo de muestreo, por el contrario interviene directamente en las magnitudes máximas de la acción de control y por lo tanto debe considerarse en el diseño.

4.5.3 Análisis de la función de transferencia de lazo cerrado.

Con el objeto de explicitar los polos de lazo cerrado, la Ec. 4.5-8 puede multiplicarse y dividirse por z^m , quedando $G_T(z)$ expresado en términos de potencias positivas de la variable z .

$$G_T(z) = P(z) = [p_1 z^{-1} + \dots + p_m z^{-m}] \frac{z^m}{z^m}$$

Operando, se obtiene

$$G_T(z) = \frac{p_1 z^{m-1} + \dots + p_m}{z^m} = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{m-1})}{z^m}. \quad (4.5-23)$$

La ecuación característica de lazo cerrado es por lo tanto

$$1 + G_C(z) G_P(z) = z^m = 0. \quad (4.5-24)$$

Esto es, la utilización de un controlador de tiempo finito conduce a que la ecuación característica del sistema tenga m polos en el origen del plano Z , como se presenta en la Fig. 4.5.2.

La ubicación de todos los polos en el origen supone la obtención de una respuesta temporal muy rápida y totalmente amortiguada.

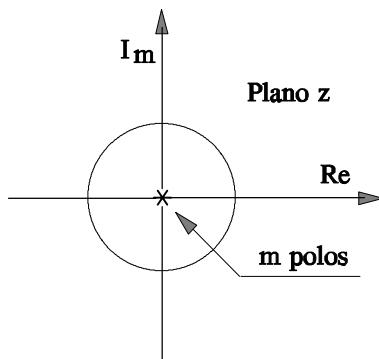


Fig. 4.5.2. Polos de la ecuación característica para sistema con controlador de tiempo finito.

4.5.4 Procesos con retardo puro.

La función de transferencia de un proceso con retardo puro $T_t = dT_o$ se representa por

$$G_p(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-d}. \quad (4.5-25)$$

También como

$$G_p(z) = \frac{b_1 z^{-(d+1)} + \dots + b_m z^{-(d+m)}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}. \quad (4.5-26)$$

La Ec. 4.5-26 puede escribirse tal que tome la misma forma que la expresión de la función de transferencia $G_p(z)$ sin retardo puro (Ec. 4.5-1),

$$G_P(z) = \frac{c_1 z^{-1} + \dots + c_{d+1} z^{-(d+1)} + \dots + c_{d+m} z^{-(d+m)}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m} + \dots + a_{d+m} z^{-(d+m)}}. \quad (4.5-27)$$

con

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 & a_{1+m} &= 0 \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ c_d &= 0 & a_{d+m} &= 0 \\ c_{d+1} &= b_1 \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ c_{d+m} &= b_m \end{aligned}$$

De esta forma se puede hacer el mismo tratamiento para obtener $G_C(z)$ que para el caso anterior sin retardo puro.

La condición de diseño en este caso consiste en imponer que el sistema alcance el estado de régimen para un tiempo T_e definido como

$$T_e = (m+d)T_o. \quad (4.5-29)$$

De esta forma será

$$y(k) = r(k) = 1 \quad \forall k \geq m+d$$

Siguiendo todos los pasos dados desde la Ec. 4.5-3 hasta la Ec. 4.5-18 se obtiene la ecuación del controlador de tiempo finito para proceso con retardo puro.

$$G_C(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{d+m} z^{-(d+m)}}{1 - p_1 z^{-1} - \dots - p_{d+m} z^{-(d+m)}} \quad (4.5-30)$$

con

$$\begin{array}{ll}
 p_1 = c_1 q_0 = 0 & q_1 = a_1 q_0 \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 p_d = c_d q_0 = 0 & q_m = a_m q_0 \\
 p_{d+1} = c_{d+1} q_0 = b_1 q_0 & q_{m+1} = a_{m+1} q_0 = 0 \\
 \cdot & \cdot \\
 p_{d+m} = c_{d+m} q_0 = b_m q_0 & q_{m+d} = a_{m+d} q_0 = 0
 \end{array}$$

siendo

$$q_0 = 1/\sum_{i=1}^m b_i = u(0).$$

Eliminando los coeficientes nulos, se obtiene

$$G_C(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_{d+1} z^{-(d+1)} - \dots - p_{d+m} z^{-(d+m)}}.$$

La función de transferencia de lazo cerrado queda

$$G_T(z) = P(z) = p_{d+1} z^{-(d+1)} + \dots + p_{d+m} z^{-(d+m)}$$

o también con exponentes positivos de la variable z

$$G_T(z) = \frac{p_{d+1} z^{(m-1)} + \dots + p_{d+m}}{z^{(d+m)}}. \quad (4.5-31)$$

La ecuación característica, es

$$1 + G_C(z)G_P(z) = z^{(d+m)} = 0.$$

Se concluye que la utilización de un controlador de tiempo finito sobre un proceso de orden m con retardo puro $T_t = dT_o$ conduce a un sistema de lazo cerrado con $(m+d)$ polos en el origen del plano Z . Esta disposición de polos supone la respuesta temporal amortiguada más rápida obtenible analíticamente para un sistema con un orden y un retardo puro definidos.

4.5.5 Controlador de tiempo finito de orden incrementado.

El excelente planteo de diseño, ya sea por su simplicidad como por los resultados en la respuesta temporal que se obtiene, se ve opacado por la dificultad que genera en relación a la magnitud de la acción de control que puede ser excesiva para un actuador real. La acción de control más comprometida es normalmente la primera la que puede duplicar en amplitud a la que le sigue. Si en lugar de definir el tiempo de establecimiento T_e igual al número de intervalos de muestreo, coincidente con el orden del sistema, $T_e = mT_o$, se toma $T_e = (m+1)T_o$, se tendrá un grado de libertad para seleccionar a conveniencia un parámetro y por ende, la magnitud de una acción de control.

Si se admite un paso más en la acción de control los polinomios $P(z)$, $Q(z)$ dados por las Ec. 4.5-8 y Ec. 4.5-11, aumentarán un orden

$$\begin{aligned} P(z) &= p_1 z^{-1} + \dots + p_{m+1} z^{-(m+1)} \\ Q(z) &= q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)} \end{aligned} \quad (4.5-32)$$

con

$$G_P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

resultará para sistema sin retardo puro

$$\begin{aligned} G_P(z) &= \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \\ &= \frac{p_1 z^{-1} + \dots + p_{m+1} z^{-(m+1)}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)}}. \end{aligned} \quad (4.5-33)$$

Debido al orden incrementado del segundo miembro esta ecuación sólo podrá ser satisfecha en forma general si existe una raíz única en numerador y denominador del segundo miembro, tal que pueda ser factoreada y simplificada.

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{(p'_1 z^{-1} + \dots + p'_m z^{-m})(r - z^{-1})}{(q'_0 + q'_1 z^{-1} + \dots + q'_m z^{-m})(r - z^{-1})}. \quad (4.5-34)$$

Dividiendo por q'_0 y comparando coeficientes, resulta

$$\begin{aligned}
 q'_1 &= a_1 q'_0 & p'_1 &= b_1 q'_0 \\
 \cdot & & \cdot & \\
 \cdot & & \cdot & \\
 q'_m &= a_m q'_0 & p'_m &= b_m q'_0. \\
 \end{aligned} \tag{4.5-35}$$

Explicitando los productos del numerador y el denominador en la Ec. 4.5-34 y comparando los coeficientes de igual potencia de z de la Ec. 4.5-33, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 q_0 &= r q'_0 & p_1 &= r p'_1 \\
 q_1 &= r q'_1 - q'_0 & p_2 &= r p'_2 - p'_1 \\
 \cdot & & \cdot & \\
 \cdot & & \cdot & \\
 q_m &= r q'_m - q'_{m-1} & p_m &= r p'_m - p'_{m-1} \\
 q_{m+1} &= -q'_m & p_{m+1} &= -p'_m. \\
 \end{aligned} \tag{4.5-36}$$

Como en el caso anterior expresado en la Ec. 4.5-22, es

$$u(0) = q_0 = r q'_0. \tag{4.5-37}$$

Del mismo modo como se obtuvo la Ec. 4.5-13, se tiene para $m+1$ pasos, planteando el conjunto de ecuaciones, Ec. 4.5-9, bajo la condición de régimen en que a partir de $y(m+1)$, la salida $y(k)$ es igual a la unidad, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1. \tag{4.5-38}$$

Resolviendo las Ec. 4.5-33 y Ec. 4.5-34 para $z=1$ e igualando numeradores, se tiene

$$\sum_{i=1}^{m+1} p_i = \sum_{i=1}^m p'_i (r-1).$$

Entonces con la Ec. 4.5-38 resulta

$$\sum_{i=1}^m p'_i = \frac{1}{r-1}. \tag{4.5-39}$$

De la Ec. 4.5-35 se observa que es

$$\sum_{i=1}^m p_i' = q_0' \sum_{i=1}^m b_i \quad (4.5-40)$$

Combinando las Ec. 4.5-39 y Ec. 4.5-40 resulta con $r=q_0/q_0'$ (Ec. 4.5-37)

$$q_0' = q_0 - \frac{1}{\sum_{i=1}^m b_i}. \quad (4.5-41)$$

Reemplazando las Ec. 4.5-35 y Ec. 4.5-41 en las Ec. 4.5-36 se calculan los parámetros del controlador

$$\begin{aligned} q_0 &= u(0) \\ q_1 &= q_0(a_1 - 1) + 1/\sum b_i \\ q_2 &= q_0(a_2 - a_1) + a_1/\sum b_i \\ &\vdots \\ &\vdots \\ q_m &= q_0(a_m - a_{m-1}) + a_{m-1}/\sum b_i \\ q_{m+1} &= -q_0 a_m + a_m/\sum b_i \end{aligned} \quad (4.5-42)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= q_0 b_1 \\ p_2 &= q_0(b_2 - b_1) + b_1/\sum b_i \\ &\vdots \\ &\vdots \\ p_m &= q_0(b_m - b_{m-1}) + b_{m-1}/\sum b_i \\ p_{m+1} &= -q_0 b_m + b_m/\sum b_i. \end{aligned} \quad (4.5-43)$$

La ecuación que define la estructura del controlador es según las Ec. 4.5-17 y Ec. 4.5-32

$$G_C(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{m+1} z^{-(m+1)}}{1 - p_1 z^{-1} - \dots - p_{m+1} z^{-(m+1)}}. \quad (4.5-44)$$

En este controlador de tiempo finito de orden incrementado, la primera acción de control $u(0) = q_0$ puede ser fijada en forma independiente mientras que el resto queda determinada. Por ejemplo de las Ec. 4.5-12 y Ec. 4.5-42 se tiene

$$u(1) = q_1 + u(0) = q_1 + q_0 = a_1 u(0) + 1/\sum b_i \quad (4.5-45)$$

Para la elección de $u(0)$ se tiene en cuenta que $u(1)$ tienda a no superarla. Tomando p.ej. $u(0) = u(1)$ resulta de la Ec. 4.5-45

$$u(0) = 1/[(1 - a_1) \sum b_i]. \quad (4.5-46)$$

El valor de $u(0)$ se toma mayor o igual pero nunca menor que el dado por la Ec. 4.5-46. La evolución temporal de la acción de control se representa cualitativamente en la Fig. 4.5.3, para un controlador de tiempo finito mínimo y uno de orden incrementado.

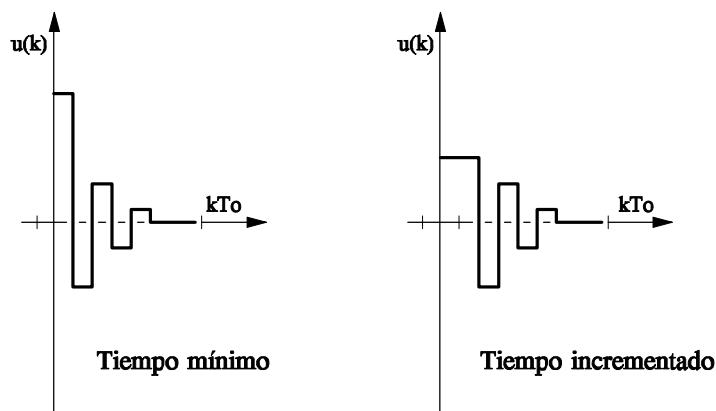


Fig.4.5.3. Acción de control para un controlador de tiempo finito mínimo y de orden incrementado.

En el controlador de orden incrementado se observa cualitativamente una mejor distribución de la energía de la acción de control en el tiempo. En virtud de la simplicidad de cálculo es posible calcular por ejemplo los $m+1$ valores de $u(k)$ para distintas opciones de $u(0)$ con el objeto de obtener la secuencia más lógica posible. En general tomando $u(0) = u(1)$ se obtienen buenos resultados.

Un análisis equivalente al realizado en el punto 4.5.3 demuestra que el controlador de tiempo incrementado genera $(m+1)$ polos en el origen del sistema de lazo cerrado.

Para procesos que incluyen retardo puro $T_t = dT_o$ se efectúa el mismo procedimiento empleado a partir de la Ec. 4.5-27. La función de transferencia del controlador de

orden incrementado con retardo puro, será a partir de las Ec. 4.5-42, Ec. 4.5-43 y Ec. 4.5-44,

$$G_C(z) = \frac{q_0 A(z^{-1})(1 - z^{-1}/r)}{1 - q_0 B(z^{-1})(1 - z^{-1}/r)z^{-d}} \quad (4.5-46)$$

$$\text{con } 1/r = 1 - \frac{1}{q_0} \sum b_i$$

Estando los polinomios $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ y el retardo puro dT_o definidos por el modelo del proceso

$$G_P(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d}.$$

La ecuación característica del sistema con controlador de tiempo incrementado y retardo puro en el proceso es

$$1 + G_P(z) G_C(z) = z^{(m+d+1)} = 0.$$

Esto es, tiene $(m+d+1)$ polos en el origen.

Todos los controladores de tiempo finito se caracterizan por su sencillez de cálculo y por generar una respuesta temporal amortiguada aunque no son aplicables a procesos inestables. Las grandes acciones de control suelen constituir una limitación aunque no en aquellos casos en que se puede elegir un tiempo de muestreo suficientemente grande. El orden de controlador puede extenderse a valores que superen en más de uno el orden del proceso. En tal caso, habrá que definir más de una condición para determinar, en forma similar a la presentada, los parámetros del controlador.

En un controlador de orden incrementado, la desventaja que implica el incremento del tiempo de establecimiento, se ve ampliamente compensada por la disminución de la magnitud de las acciones de control.

4.6 Controladores de Estado

Los controladores de estado se diferencian substancialmente de los analizados hasta aquí, por el hecho que la información que se realimenta con el objetivo del control, no es la señal de salida $y(k)$ sino el estado $x(k)$ del proceso. El diseño de controladores de estado constituye una herramienta de gran importancia para el control de procesos multivariados. En general los desarrollos presentados tienen validez para el control

de sistemas mono o multivariados, teniendo en cuenta la incorporación del modelo de estado correspondiente.

Por razones de simplicidad conceptual y del tratamiento matemático, se toma en primera instancia el caso en que la salida $y(k)$ debe ser llevada a cero. En este caso la referencia $r(k)$ es nula y se denomina regulador a cero. Los resultados obtenidos, se extienden luego en la sección 4.9 a casos en que la referencia es distinta de cero. El esquema de control se representa en la Fig. 4.6.1

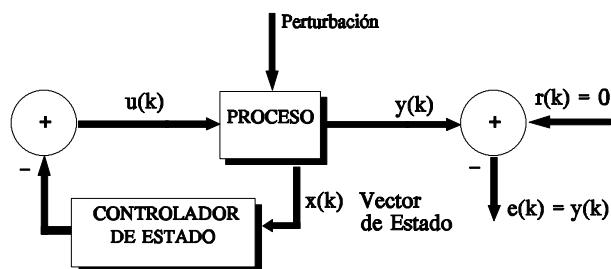


Fig. 4.6.1 Control de estado con referencia cero.

Una de las características más importantes que presenta el diseño de sistemas de control basado en modelos de estado es que si el proceso es completamente controlable y si las variables de estado se pueden medir, entonces con una adecuada ley de realimentación de las mismas, se pueden localizar arbitrariamente en el plano complejo Z los valores característicos del sistema de lazo cerrado, con la restricción que los valores característicos complejos, aparecen como pares conjugados.

Si el proceso es lineal, variante o invariante, estable o inestable, mono o multivariable entonces se puede estabilizar y hacer que el estado converja a cero (regulador a cero) mediante la aplicación de una ley lineal de realimentación del vector de estado del tipo

$$u(k) = -\mathbf{K}(k) \mathbf{x}(k). \quad (4.6-1)$$

La matriz de realimentación de estado \mathbf{K} con la que se instrumenta el algoritmo de control se denomina **Controlador de Estado**. Existen variados criterios para su obtención, dándole cada uno de ellos diferentes características al sistema realimentado. En la Fig. 4.6.2 se muestra una clasificación general de los métodos más utilizados para determinar la matriz de realimentación de estados \mathbf{K} .

Controladores de Estado

Asignación de polos	Funcional de costo
Ecuación característica dada	Regulador óptimo lineal determinístico

Fig. 4.6.2 Controladores de estado más utilizados.

La estructura del controlador depende del método utilizado para hacer la optimización y del modelo de proceso a controlar; por ello se dice que el controlador tiene **estructura optimizada** en el sentido del criterio utilizado para el diseño.

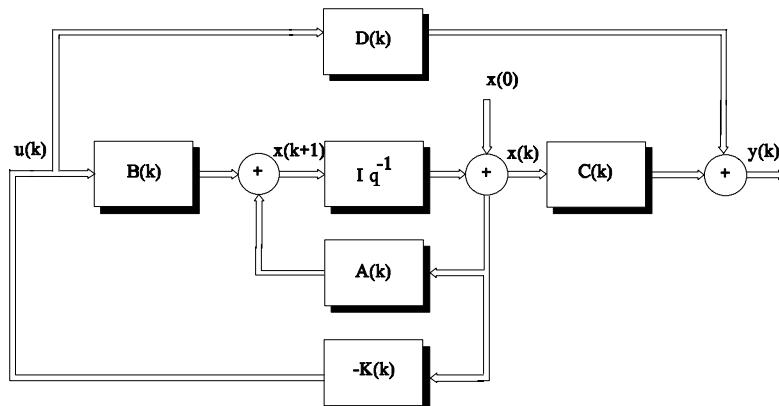


Fig. 4.6.3. Proceso lineal modelado en el espacio de estado y realimentación lineal del mismo.

El sistema con controlador de estado como el representado en la Fig. 4.6.3, tendrá un nuevo modelo de lazo cerrado. Combinando el modelo lineal variante de estado del proceso

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (4.6-3)$$

con el controlador para referencia nula $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)$ resulta el modelo de estado de lazo cerrado en el caso más general

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k)] \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= [\mathbf{C}(k) - \mathbf{D}(k)\mathbf{K}(k)] \mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (4.6-4)$$

Se presentan a continuación distintos métodos para determinar \mathbf{K} .

4.6.1 Diseño del controlador por asignación de polos.

Este es un método aplicado a procesos invariantes y se puede plantear de la siguiente manera: Dado un proceso lineal invariante con modelo de estado

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \quad (4.6-5)$$

y una ley lineal invariante de realimentación

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(k) \quad (4.6-6)$$

se deben encontrar los elementos K_{ij} tal que el sistema de lazo cerrado

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}] \mathbf{x}(k) \quad (4.6-7)$$

tenga los polos en lugares del plano Z, definidos con antelación. De manera que, hecha una **asignación de polos** de lazo cerrado, se debe encontrar a partir de ellos la matriz de realimentación correspondiente, que traslade los polos del proceso en lazo abierto, dados por la ecuación característica

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (4.6-8)$$

al lugar deseado, dado por la ecuación característica de lazo cerrado

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = 0. \quad (4.6-9)$$

Utilizando el método de asignación de polos, se considerarán los controladores de estado diseñados para tener una ecuación característica dada y el controlador de estado de tiempo finito.

a) Controlador para ecuación característica dada.

Por simplicidad se analiza primeramente el caso monovariable. En tal caso las Ecs. 4.6-5 y 4.6-7 toman la forma

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} u(k) \quad (4.6-10)$$

$$u(k) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(k). \quad (4.6-11)$$

La Ec. 4.6-10 puede escribirse explicitando la matriz \mathbf{A} en su forma canónica (ver Ec. 3.7.46) de la siguiente forma

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & \cdot & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u(k). \quad (4.6-12)$$

De igual modo la Ec. 4.6-11 puede escribirse explicitando las componentes de \mathbf{k}

$$u(k) = -[k_n \dots k_1] \mathbf{x}(k). \quad (4.6-13)$$

La Ec. 4.6-7 para el caso monovariable es

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T] \mathbf{x}(k). \quad (4.6-14)$$

La Ec. 4.6-14 también puede expresarse, con las Ecs. 4.6-12 y 4.6-13, como en la Ec. 4.6-15

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ (-a_n - k_n) & \cdot & \cdots & (-a_1 - k_1) \end{bmatrix} \mathbf{x}(k). \quad (4.6-15)$$

La ecuación característica del sistema de lazo cerrado

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T] = 0 \quad (4.6-16)$$

puede escribirse entonces como

$$(a_n + k_n) + (a_{n-1} + k_{n-1})z + \dots + (a_1 + k_1)z^{n-1} + z^n = 0 \quad (4.6-17)$$

Las raíces de esta ecuación característica determinan los polos p_i del sistema de lazo cerrado

$$(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n) = 0. \quad (4.6-18)$$

El diseño del controlador se inicia con la fijación de los polos de lazo cerrado p_i en el plano Z, de acuerdo a criterios fijados a priori por el diseñador.

Reemplazando estos polos en la Ec. 4.6-18, se pueden obtener por multiplicación los coeficientes $(a_i + k_i)$ del polinomio en z representado en la Ec. 4.6-17. Dado que los a_i son conocidos se pueden determinar las componentes k_i que definen al controlador de estado monovariable \mathbf{k} .

$$\mathbf{k}^T = [k_n \dots k_1]. \quad (4.6-19)$$

Este controlador llevará los polos del sistema de lazo cerrado a los fijados a priori en el diseño.

Este planteo presenta como desventaja que aparte de requerir un conocimiento preciso del modelo del proceso no se tiene en cuenta el efecto conjunto que tienen todos los polos en el comportamiento dinámico del sistema. Por el contrario, sí se tiene una clara interpretación de los cambios en la ecuación característica causados por cada elemento del controlador de estado \mathbf{k} .

Si el proceso es multivariable con ecuación

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \quad (4.6-32)$$

se debe obtener una ley de realimentación de estados

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(k). \quad (4.6-33)$$

Para ello se define

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{B} \mathbf{h}. \quad (4.6-34)$$

La matriz de entrada \mathbf{B} tiene dimensión $n \times e$ y \mathbf{h} es un vector de dimensión $e \times 1$.

Se lo elige de manera que el par $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{b}}$ sea completamente controlable. Se construye ahora un sistema monovariable con entrada $u(k)$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{b}} u(k) \quad (4.6-35)$$

y se busca el vector \mathbf{k}^T de realimentación

$$u(k) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}(k) \quad (4.6-36)$$

de manera que los autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ sean los mismos que los de $\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{b}}\mathbf{k}^T$. Haciendo

$$[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}] = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{h}\mathbf{k}^T]$$

se obtiene por comparación

$$\mathbf{K} = \mathbf{h} \mathbf{k}^T. \quad (4.6-37)$$

Se ha convertido el problema multivariable en un problema de una simple entrada, y por lo tanto se puede resolver con las ecuaciones del caso monovariable para la obtención de \mathbf{k}^T .

Es obvio que el vector \mathbf{h} no es único, es decir, habrá más de una matriz de realimentación que cumpla con la asignación de polos requerida, la única restricción para \mathbf{h} es que el par $\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{h}$ sea completamente controlable.

b) Controlador de estado de tiempo finito.

Un caso particular de asignación de polos se tiene cuando se seleccionan todos los polos de lazo cerrado en el origen. En tal caso se denomina controlador de estado de tiempo finito, asociando dicho nombre al controlador de tiempo finito con realimentación de salida tratado en la sección 4.5. Su diseño está basado en la obtención de una respuesta temporal rápida y los polos de lazo cerrado que genera están todos ubicados en el origen.

En este caso el diseño se realiza en el dominio temporal. Se trata aquí por simplicidad el caso monovariable con referencia nula. El sistema estará modelado por

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} u(k). \quad (4.6-38)$$

Siendo el sistema controlable se impone como objetivo de diseño que a partir de un estado inicial $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ se puede llevar al sistema al estado $\mathbf{x}(N) = \mathbf{0}$ en $N = n$ pasos, donde n es el orden del sistema o bien, el número de variables de estado. Para ello se realimentarán los estados con una ley

$$u(k) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(k). \quad (4.6-39)$$

Reemplazando la Ec. 4.6-39 en la Ec. 4.6-38 se tiene el sistema de lazo cerrado

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T] \mathbf{x}(k) = \mathbf{M} \mathbf{x}(k). \quad (4.6-40)$$

Partiendo de un estado inicial $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ en N pasos el sistema deberá alcanzar el estado nulo. Se podrá escribir por lo tanto la secuencia

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{M} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{M}^2 \mathbf{x}(0) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(N) &= \mathbf{M}^N \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.6-41)$$

Siendo $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ debe ser

$$\mathbf{M}^N = \mathbf{0}. \quad (4.6-42)$$

Esto es, la matriz de lazo cerrado \mathbf{M} debe ser nilpotente de orden N , o sea siendo $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$ debe ser una matriz nula cuando se la eleva a la potencia N o mayor.

La ecuación característica del sistema de lazo cerrado es

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T] = \det [z\mathbf{I} - \mathbf{M}] = 0 \quad (4.6-43)$$

Explicitando la matriz \mathbf{A} y al vector \mathbf{k} como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & \cdot & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^T = [k_n \dots k_1], \quad (4.6-44)$$

la Ec. 4.6-43 puede escribirse al igual que la Ec. 4.6-17

$$(a_n + k_n) + (a_{n-1} + k_{n-1})z + \dots + (a_1 + k_1)z^{n-1} + z^n = 0.$$

El teorema de Cayley-Hamilton establece que una matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica, por lo tanto puede escribirse

$$(a_n + k_n)\mathbf{I} + (a_{n-1} + k_{n-1})\mathbf{M} + \dots + (a_1 + k_1)\mathbf{M}^{n-1} + \mathbf{M}^n = \mathbf{0} \quad (4.6-45)$$

para $N = n$ y considerando la Ec. 4.6-42 deberá ser,

$$\begin{aligned} a_n + k_n &= 0 \\ a_{n-1} + k_{n-1} &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_1 + k_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.6-46)$$

O sea

$$k_i = -a_i. \quad (4.6-47)$$

De esta forma el controlador de estado de tiempo finito queda definido como

$$u(k) = [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1] \mathbf{x}(k) \quad (4.6-48)$$

o bien

$$u(k) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}(k) \quad (4.6-49)$$

con a^T obtenido directamente de la forma canónica del modelo del proceso representado por la Ec. 4.6-44.

Este controlador tendrá un comportamiento equivalente al controlador de tiempo finito con realimentación de salida. Al igual que éste, las magnitudes de las acciones de control pueden ser muy grandes al no intervenir en el proceso de diseño. Esta consideración se tiene en cuenta en el diseño del controlador óptimo de estado en el punto 4.6.2

4.6.2 Regulador Óptimo Lineal determinístico.

En 4.6.1 se vio que mediante una ley de realimentación del vector de estado, los polos de lazo cerrado se pueden ubicar arbitrariamente en cualquier parte del plano complejo. En el controlador de tiempo finito se estudió como utilizar la realimentación de estado para aumentar la velocidad de respuesta, sin embargo esto puede implicar amplitudes de la señal de control demasiado grandes. Esto impone un límite al movimiento de los polos de lazo cerrado y por lo tanto se plantea una situación de compromiso entre la máxima velocidad de respuesta y la máxima amplitud aceptable para las variables de entrada.

Esta situación conduce a un problema de optimización que permita obtener la matriz de realimentación del vector de estado acelerando todo lo posible la respuesta del proceso, sin sobrepasar el límite impuesto a las variables de entrada al proceso, por el actuador o la fuente de energía.

Una adecuada solución a este problema es plantear un índice de desempeño que incluya estos elementos y obtener su minimización. Un índice muy utilizado en los sistemas de control monovariable con realimentación de la salida es el comentado en el punto 4.3.6 y representado nuevamente en la Ec. 4.6-50

$$J = J(e, u) = \sum_{k=0}^{M-1} [e^2(k) + r u^2(k)]. \quad (4.6-50)$$

Aquí $e(k)$ es el error entre el valor deseado de la salida del sistema y su valor real, $u(k)$ representa la acción de control generada por el controlador o bien su desviación respecto del valor esperado en estado estacionario y r un factor de penalización a esta acción. Los valores cuadráticos se toman con el objeto de independizar a J del signo que puedan tener instantáneamente $e(k), u(k)$. Un valor bajo del índice J es un indicador de la calidad del control ya que implicará un error pequeño con acciones de control también reducidas.

La forma de influir sobre el proceso es a través de la acción de control, por lo que el índice deberá ser minimizado respecto de $u(k)$. El controlador que se obtenga mediante esta minimización, será óptimo sólo en el sentido del índice.

Este índice de desempeño puede ser extendido al control de estado. Tomando el caso más general de un sistema multivariable de orden n , se puede definir un vector error de estado como la diferencia entre el estado actual y el estado deseado o final.

$$e(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(N). \quad (4.6-51)$$

La forma cuadrática de este error vectorial proveerá una función escalar de k

$$e^2(k) = [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(N)]^T [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(N)]. \quad (4.6-52)$$

De igual modo la forma cuadrática del vector $u(k)$ será una función escalar de k .

$$u^2(k) = u^T(k) u(k). \quad (4.6-53)$$

Las formas cuadráticas de las Ecs. 4.6-52 y 4.6-53 se pueden combinar para formar un índice de desempeño apto para diseñar un controlador de estado

$$J = J(e, u) = \sum_{k=0}^M e^2(k) + r u^2(k). \quad (4.6-54)$$

Reemplazando las Ecs. 4.6-52 y 4.6-53 se obtiene

$$J = J(\mathbf{x}, u) = \sum_{k=0}^M [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(N)]^T [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(N)] + r u^T(k) u(k). \quad (4.6-55)$$

Suele ser importante poder modificar la contribución que sobre el índice J hace cada uno de las componentes de \mathbf{x} y de u . Esto se logra incluyendo matrices de peso en las formas cuadráticas del índice de desempeño. En este caso la Ec. 4.6-55 queda

$$J = J(\mathbf{x}, u) = \sum_{k=0}^M [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(N)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(N)] + u^T(k) \mathbf{R} u(k) \quad (4.6-56)$$

donde el factor r ha sido incluido en la matriz de peso \mathbf{R} .

Las matrices \mathbf{R}, \mathbf{Q} deben ser simétricas y definidas positivas, con el objeto de asegurar la existencia de un óptimo para J , ya que soluciones lógicas desde el punto de vista del control, solamente se obtendrán si todos los términos tienen el mismo signo.

Por simplicidad se considera que el estado final es $\mathbf{x}(N) = \mathbf{0}$, entonces la Ec. 4.6-56 queda

$$J = J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k). \quad (4.6-57)$$

El controlador que se obtiene con este índice se denomina **Regulador a cero** y conduce la salida del sistema a cero. Si se necesita que el estado final se acerque a cero tanto como sea posible entonces conviene considerar otra matriz \mathbf{S} simétrica y definida positiva para pesar en forma particular el estado final, obteniéndose una ecuación del índice con la forma

$$J = J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \quad (4.6-58)$$

Una de las matrices \mathbf{S} o bien \mathbf{Q} podrá ser semidefinida positiva y por lo menos una debe ser definida positiva. \mathbf{R} debe ser definida positiva, porque su inversa interviene en el cálculo de la acción de control. Finalmente se puede formular el problema del regulador lineal óptimo determinístico de la siguiente manera:

Dado un proceso lineal determinístico de tiempo discreto modelado en el espacio de estado por las Ec. 4.6-3 se debe encontrar una ley de control $\mathbf{u}(k)$, que modifique al estado llevándolo desde un valor inicial $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ a uno final $\mathbf{x}(N) = \mathbf{0}$ y que simultáneamente haga mínimo el índice de desempeño dado por la Ec. 4.6-58.

Existen varios métodos para resolver este problema; en este caso se aplicará uno que utiliza la **programación dinámica**. La programación dinámica fue desarrollada por Bellman, Dreyfus y Kalaba a partir de la década del 60 y se puede utilizar para resolver problemas de optimización no lineal, en particular los de control óptimo, ya sean procesos lineales o no, variantes o invariantes.

Se supone que se debe determinar la trayectoria óptima del vector de estado en un intervalo $[0, N]$. Partiendo de la base que, habiendo alcanzado el instante k , se ha obtenido una secuencia óptima $\mathbf{u}[0, k-1]$ y por lo tanto la trayectoria $\mathbf{x}[0, k-1]$ también se conoce. Entonces se puede proponer un índice de desempeño genérico

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = F[N, \mathbf{x}(N)] + \sum_{i=k}^{N-1} F[i, \mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i)] + \sum_{i=0}^{k-1} F[i, \mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i)] \quad (4.6-59)$$

El último término es conocido bajo la suposición que se conoce la evolución del proceso hasta $k-1$. Luego para completar la optimización de J se debe determinar la

secuencia $u[k, N-1]$, que optimice los dos primeros términos. Esto fue descrito por Bellman como el **principio de optimalidad** cuyo enunciado es:

Una secuencia óptima de valores del vector de entrada tiene la propiedad, que cualquiera que sea el valor inicial de los vectores de estado y de entrada, los valores restantes del vector de entrada deberán constituir una secuencia óptima para el problema que queda, considerando como condiciones iniciales el último valor del estado resultante de aplicar los valores del vector de control obtenidos previamente.

Dicho de otra manera, cualquier subtrayectoria, entre dos puntos de una trayectoria óptima, debe ser óptima. Representando genéricamente en Fig. 4.6.4 una trayectoria de estados en el intervalo $x[0, N]$, si esta es óptima cualquier tramo de la misma será óptimo. Como lo único que se conoce con precisión es el estado final $x(N)$, se debe partir de N en forma regresiva hasta llegar a k para el cálculo de la acción de control óptimo $u(k)$, optimizando sucesivamente a J para las acciones de control $u(N-1), u(N-2), \dots, u(k)$.

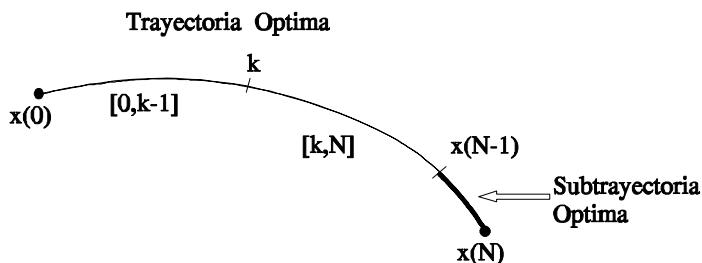


Fig. 4.6.4 Trayectoria genérica del estado.

Es decir que dada una sucesión de valores del vector de entrada que lleven al proceso desde un estado inicial a uno final, optimizando un índice de desempeño, el principio de optimalidad de Bellman establece, que cualquier secuencia de valores del vector de entrada que lleva al proceso entre dos estados intermedios, también debe ser óptima. Esto permite escribir

$$\min_u J(x, u) = \min_{u(k)} [\min_{u(k+1)} [\dots \min_{u(N-1)} [J(x, u)] \dots]] \quad (4.6-60)$$

Se optimizará un índice dado por la Ec. 4.6-58 para un proceso lineal variante dado por el modelo estado

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) \quad (4.6-61)$$

El índice dado por la Ec. 4.6-58 se puede descomponer de acuerdo a la Ec. 4.6-59 en dos partes de la siguiente manera

$$\begin{aligned} J = J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \sum_{i=k}^{N-1} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i) + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i) \end{aligned} \quad (4.6-62)$$

donde no es necesario minimizar el tercer término puesto que estando en el instante k es una trayectoria ya efectuada y no depende de $\mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k+1), \dots, \mathbf{u}(N-1)$. Entonces al eliminarse se obtiene

$$\begin{aligned} \min_u [J] &= \min_u [J(\mathbf{x}, \mathbf{u})] = \min_u [\mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \\ &+ \sum_{i=k}^{N-1} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i)] \end{aligned} \quad (4.6-63)$$

Minimizar $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ es un problema típico de optimización dinámica multivariable no lineal, se aplicará a continuación el método dado por Bellman.

En la Ec. 4.6-63 se pueden explicitar los términos dependientes de $(N-1)$ quedando

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N-1) + \mathbf{u}^T(N-1) \mathbf{R} \mathbf{u}(N-1) + \\ &+ \sum_{i=k}^{N-2} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i). \end{aligned} \quad (4.6-64)$$

Para $k+1 = N$ la Ec. 4.6-61 toma la forma

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{A}(N-1) \mathbf{x}(N-1) + \mathbf{B}(N-1) \mathbf{u}(N-1) \quad (4.6-65)$$

La información dinámica del modelo del proceso dada por esta ecuación en diferencias puede incorporarse al índice J reemplazando la Ec. 4.6-65 en la Ec. 4.6-64. El índice J deja de ser función de N y puede optimizarse J respecto de $\mathbf{u}(N-1)$

$$\min_{\mathbf{u}(N-1)} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = J[\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(N-1)]$$

donde $\mathbf{u}^*(N-1)$ es la acción de control óptima, en el instante $N-1$ que se obtiene de hacer

$$\frac{\partial J(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}(N-1)} = \mathbf{0},$$

teniendo en cuenta que, dada una matriz \mathbf{X} y dos vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} se verifica

$$\frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{X} \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{X} \mathbf{y}; \quad \frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{X} \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{X}^T \mathbf{x}; \quad \frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{X} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{X} \mathbf{x}. \quad (4.6-66)$$

(la tercera propiedad sólo es válida si \mathbf{X} es simétrica)

Haciendo la derivada parcial se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}(N-1)} &= 2\mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{A}(N-1) \mathbf{x}(N-1) + 2\mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1) \mathbf{u}(N-1) \\ &\quad + 2\mathbf{R} \mathbf{u}(N-1) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.6-67)$$

Despejando \mathbf{u} queda

$$\mathbf{u}^*(N-1) = -[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1)]^{-1} \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{A}(N-1) \mathbf{x}(N-1). \quad (4.6-68)$$

Reemplazando las Ecs. 4.6-65 y 4.6-68 en la Ec. 4.6-64 y reordenando

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(N-1)} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= [\mathbf{A}(N-1) \mathbf{x}(N-1)]^T \mathbf{H}(N-1) [\mathbf{A}(N-1) \mathbf{x}(N-1)] + \\ &\quad + \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N-1) + \\ &\quad + \sum_{i=k}^{N-2} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i) \end{aligned} \quad (4.6-69)$$

donde

$$\mathbf{H}(N-1) = \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1) [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1)]^{-1} \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S}. \quad (4.6-70)$$

Agrupando los términos en $\mathbf{x}(N-1)$, y definiendo

$$\mathbf{P}(N-1) = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T(N-1) \mathbf{H}(N-1) \mathbf{A}(N-1) \quad (4.6-71)$$

se obtiene

$$\min_{\mathbf{u}(N-1)} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{x}(N-1) + \sum_{i=k}^{N-2} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i) \quad (4.6-72)$$

reemplazando la Ec. 4.6-70 en la Ec. 4.6-71 se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N-1) &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{A}(N-1) - \\ &\quad - \mathbf{A}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1) [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1)]^{-1} \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{A}(N-1). \end{aligned} \quad (4.6-73)$$

Se procede a continuación a minimizar J para $\mathbf{u}(N-2)$.

$$\min_{\mathbf{u}(N-2)} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) [\min_{\mathbf{u}(N-1)} J(\mathbf{x}, \mathbf{u})] = \min_{\mathbf{u}(N-2)} J_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

donde

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{x}(N-1) + \mathbf{x}^T(N-2) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N-2) + \\ &\quad + \mathbf{u}^T(N-2) \mathbf{R} \mathbf{u}(N-2) + \sum_{i=k}^{N-3} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i). \end{aligned} \quad (4.6-74)$$

Para $k+1 = N-1$ la Ec. 4.6-61 toma la forma

$$\mathbf{x}(N-1) = \mathbf{A}(N-2) \mathbf{x}(N-2) + \mathbf{B}(N-2) \mathbf{u}(N-2). \quad (4.6-75)$$

Como las Ecs. 4.6-74 y 4.6-75 son análogas a las Ecs. 4.6-64 y 4.6-65, se opera repitiendo los pasos desde la Ec. 4.6-67 hasta la Ec. 4.6-73 obteniéndose para $\mathbf{u}^\circ(N-2)$, $\mathbf{H}(N-2)$, $\mathbf{P}(N-2)$ las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\circ(N-2) &= -[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{B}(N-2)]^{-1} \mathbf{B}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \\ &\quad \mathbf{A}(N-2) \mathbf{x}(N-2) \end{aligned} \quad (4.6-76)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(N-2) &= \mathbf{P}(N-1) - \\ &\quad - \mathbf{P}(N-1) \mathbf{B}(N-2) [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{B}(N-2)]^{-1} \mathbf{B}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \end{aligned} \quad (4.6-77)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(N-2) &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T(N-2) \mathbf{H}(N-2) \mathbf{A}(N-2) \\
 \mathbf{P}(N-2) &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{A}(N-2) - \mathbf{A}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{B}(N-2) \\
 &\quad [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{B}(N-2)]^{-1} \mathbf{B}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{A}(N-2).
 \end{aligned} \tag{4.6-78}$$

Haciendo los reemplazos equivalentes a los efectuados para (N-1) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{u}(N-2)} J_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{x}^T(N-2) \mathbf{P}(N-2) \mathbf{x}(N-2) + \\
 &\quad + \sum_{i=k}^{N-3} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i).
 \end{aligned} \tag{4.6-79}$$

Continuando con la inducción para $\mathbf{u}(N-3), \mathbf{u}(N-4), \dots, \mathbf{u}(k+1), \mathbf{u}(k)$ se tiene para el instante genérico k

$$\mathbf{u}^\circ(k) = [-[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k)]^{-1} \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A}(k)] \mathbf{x}(k) \tag{4.6-80}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(k) &= \mathbf{P}(k+1) - \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k) [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k)]^{-1} \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \\
 \mathbf{P}(k+1) &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T(k) \mathbf{H}(k+1) \mathbf{A}(k)
 \end{aligned} \tag{4.6-81}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(k) &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A}(k) - \mathbf{A}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k) \\
 &\quad [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k)]^{-1} \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A}(k)
 \end{aligned} \tag{4.6-82}$$

De esta forma se obtienen las acciones de control óptimas

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} &= \min_{\mathbf{u}(k)} [\min_{\mathbf{u}(k-1)} [\dots [\min_{\mathbf{u}(N-1)} J(\mathbf{x}, \mathbf{u})] \dots]] \\
 &= \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{x}(k).
 \end{aligned} \tag{4.6-83}$$

La Ec. 4.6-82 se denomina **Ecuación Matricial en Diferencias de Riccati** y se debe resolver para obtener el vector de control. Comparando las Ecs. 4.6-73, 4.6-78 y 4.6-82 se deduce que la condición inicial para \mathbf{P} es:

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{S} \tag{4.6-84}$$

De la Ec. 4.6-80 se concluye que la ley para obtener el vector de entrada óptimo, está formado por una realimentación lineal del vector de estado. La Ec. 4.6-80 se puede escribir

$$\mathbf{u}^*(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k) \quad (4.6-85)$$

con

$$\mathbf{K}(k) = -[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}(k)]^{-1}\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A}(k) \quad (4.6-86)$$

Obteniéndose así una ley lineal de realimentación del estado. La Ec. 4.6-86 se denomina en general **Controlador de Estado** y en este caso particular **Regulador Óptimo Lineal Determinístico**. Este controlador es válido en general para cualquier proceso lineal, multivariable y variante, lo que le infiere una gran versatilidad. Se impone como condición que el proceso sea controlable. Para el caso de sistemas invariantes, toma la forma

$$\mathbf{u}^*(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)$$

con

$$\mathbf{K}(k) = -[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A}. \quad (4.6-87)$$

En la Ec. 4.6-87 se observa que aún para el caso invariante la matriz del controlador \mathbf{K} se debe calcular para cada intervalo de muestreo. Esto implica la solución de la Ecuación Matricial de Riccati en cada instante k , lo que se traduce en un gran volumen de cálculo. Esto crea dificultades en procesos de dinámica rápida en los cuales el período de muestreo debe ser pequeño. Existe no obstante la posibilidad, si el proceso es invariante, de obtener la Ecuación Matricial de Riccati de estado estacionario, tomando

$$\mathbf{P} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}(k+1). \quad (4.6-88)$$

De esta forma la Ecuación Matricial de Riccati en estado estacionario queda

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{B}[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A}. \quad (4.6-89)$$

El controlador en estado estacionario será

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad (4.6-90)$$

con

$$\mathbf{K} = -[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A}. \quad (4.6-91)$$

El controlador de la Ec. 4.6-91 será subóptimo en las transiciones, pero será óptimo al momento de alcanzar las referencias.

Desde el punto de vista práctico, para el diseño del controlador de estado en estado estacionario, se obtiene primeramente el valor de \mathbf{P} en convergencia. Para ello se puede resolver en un computador la ecuación recursiva Ec. 4.6-82 en forma regresiva hasta obtener que $\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k+1) + \Delta\mathbf{P}(k)$ presente un $\Delta\mathbf{P}(k)$ suficientemente pequeño. Este valor de \mathbf{P} reemplazado en la Ec. 4.6-91 permite obtener el controlador \mathbf{K} .

Es importante resaltar que, si bien la obtención de \mathbf{K} implica un desarrollo teórico complejo y un volumen de cálculo significativo, la implementación física de un controlador de este tipo presupone el cálculo de la matriz \mathbf{K} fuera de línea y solo la multiplicación en línea de \mathbf{K} con el vector $\mathbf{x}(k)$, que puede efectuarse con un procesador modesto.

Se ha supuesto aquí que los estados pueden medirse directamente y que la referencia es nula, lo que limita grandemente este controlador. En los próximos puntos se amplía el controlador para considerar estos casos.

4.7 Reconstrucción del Vector de Estado.

Para poder realizar una realimentación del vector de estado, se parte del supuesto que éste se puede medir. Sin embargo, esto no es cierto en la mayoría de los casos y la situación más frecuente es que sólo el vector de salida es accesible. No obstante esto, si el proceso es observable, entonces se puede calcular el estado a partir de la información que sobre el mismo se encuentra contenida en la entrada y en la salida del sistema. El subsistema que cumple la función anterior se denomina **observador de estado**. La única limitación que presenta este planteo es que, para calcular las variables de estado, el proceso debe ser completamente observable, según se estudió en la sección 3.9.6.

De manera que, dado un proceso dinámico determinístico lineal de tiempo discreto y observable con ecuaciones

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) \quad (4.7-1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) \quad (4.7-2)$$

del cual solo se pueden medir las variables \mathbf{u}, \mathbf{y} , se formula el subsistema que se encarga de obtener el estado.

4.7.1 Planteo del problema de reconstrucción del estado.

Se coloca en paralelo con el proceso un modelo idéntico a éste. El vector de entrada afecta tanto al proceso como al modelo, obteniéndose como salida y para el proceso e \hat{y} para el modelo. Se comparan las dos salidas y la diferencia $\Delta y = y - \hat{y}$, ponderada por una matriz T se realimenta hacia el vector de estado $\hat{x}(k+1)$ del modelo. De esta manera cuando la salida $\hat{y}(k)$ converge a $y(k)$, el vector de estado del modelo sigue al del proceso. La matriz T se debe elegir de manera tal que $\hat{x}(k+1)$ se aproxima a $x(k+1)$ lo más rápidamente posible.

En la Fig. 4.7.1 se muestra un diagrama de bloques del esquema propuesto. Cuando se trata de un proceso determinístico, el mismo se denomina **Observador de Luenberger**.

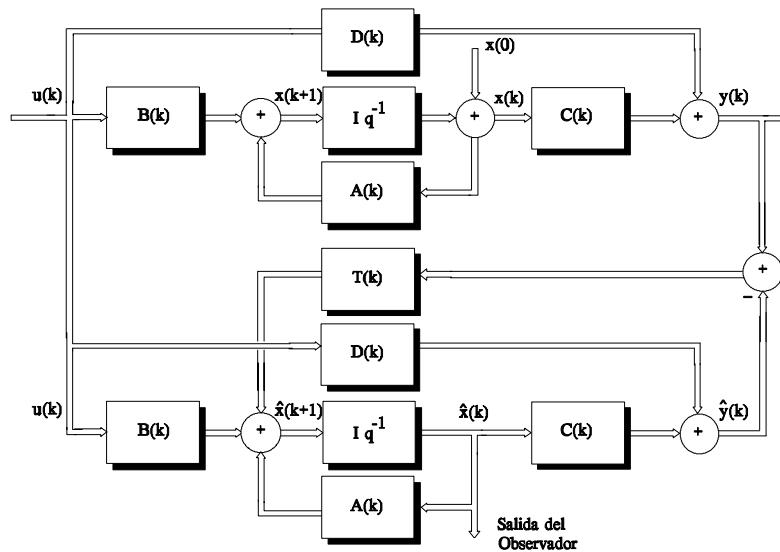


Fig. 4.7.1 Diagrama de bloques de un proceso modelado en el espacio de estado, con observador de Luenberger.

Observando la Fig. 4.7.1 se deduce que las ecuaciones que rigen al observador son

$$\hat{x}(k+1) = A(k) \hat{x}(k) + B(k) u(k) + T(k) [y(k) - \hat{y}(k)] \quad (4.7-3)$$

$$\hat{y}(k) = C(k) \hat{x}(k) + D(k) u(k) \quad (4.7-4)$$

reemplazando las Ecs. 4.7-2 y 4.7-4 en la Ec. 4.7-3 se tiene

$$\hat{x}(k+1) = A(k) \hat{x}(k) + B(k) u(k) + T(k) C(k) x(k) + \\ + T(k) D(k) u(k) - T(k) C(k) \hat{x}(k) - T(k) D(k) u(k)$$

agrupando

$$\hat{x}(k+1) = [A(k) - T(k) C(k)] \hat{x}(k) + B(k) u(k) + \\ + T(k) C(k) x(k) \quad (4.7-5)$$

si se restan las Ecs. 4.7-1 y 4.7-5 se obtiene

$$x(k+1) - \hat{x}(k+1) = [A(k) - T(k) C(k)] [x(k) - \hat{x}(k)]. \quad (4.7-6)$$

Se define el error de observación como

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (4.7-7)$$

y para $k+1$

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (4.7-8)$$

reemplazando las Ecs. 4.7-7 y 4.4-8 en la Ec 4.7-6 se obtiene

$$\tilde{x}(k+1) = [A(k) - T(k) C(k)] \tilde{x}(k) \quad (4.7-9)$$

Esto es, la ecuación del error de reconstrucción del vector de estado. Como se puede observar las ecuaciones resultantes son independientes de la entrada u y por lo tanto también lo son de las matrices B, D . La Ec. 4.7-9 tiene la misma estructura matemática que la Ec. 4.6-4 del control de estado de lazo cerrado.

Se debe cumplir que $\tilde{x} \rightarrow 0$ conforme $k \rightarrow \infty$, esto significa que la Ec. 4.7-9 debe representar un sistema estable y por lo tanto los polos del observador definidos a partir de

$$\det [zI - A(k) + T(k) C(k)] = \det [zI - A^T(k) + C^T(k) T^T(k)] = 0 \quad (4.7-10)$$

deberán tener $|z_i(k)| < 1$.

Se puede formular ahora el **problema de reconstrucción de estado**.

Dado un proceso dinámico determinístico lineal de tiempo discreto representado por las Ecs. 4.7-1 y 4.7-2 y un modelo de referencia representado por las Ecs. 4.7-3 y 4.7-4; se debe encontrar una secuencia de matrices $\mathbf{T}(k)$ que haga mínimo el error de reconstrucción del estado.

4.7.2 Solución al problema de reconstrucción de estado.

Resolver el problema de reconstrucción de estado significa encontrar la matriz \mathbf{T} adecuada. De la Ec. 4.7-10 se deduce que modificando la matriz \mathbf{T} se pueden ubicar arbitrariamente los polos del observador en el plano complejo. Aplicando el principio de dualidad presentado en el punto 3.7.12 al proceso completamente observable, representado por las Ecs. 4.7-1 y 4.7-2, se tiene que su dual, para procesos variantes referido a k^*

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \mathbf{A}^T(k^*-k) \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{C}^T(k^*-k) \mathbf{u}(k) \quad (4.7-11)$$

$$\mathbf{y}^*(k) = \mathbf{B}^T(k^*-k) \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{D}(k^*-k) \mathbf{u}(k) \quad (4.7-12)$$

es completamente controlable, para cualquier instante de referencia k^* fijo, y por lo tanto, su ley de control será

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k) \mathbf{x}(k) \quad (4.7-13)$$

con una ecuación característica

$$\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(k) + \mathbf{C}^T(k)\mathbf{K}(k)] = 0. \quad (4.7-14)$$

Comparando la Ec. 4.7-10 con la Ec. 4.7-14 se deduce que la matriz \mathbf{T}^T y por lo tanto \mathbf{T} se puede calcular con los mismos métodos utilizados para la matriz de realimentación de estado \mathbf{K} , salvo que hay que cambiar \mathbf{A}^T por \mathbf{A} , \mathbf{C}^T por \mathbf{B} y \mathbf{B}^T por \mathbf{C} , para obtener \mathbf{T}^T en lugar de \mathbf{K} .

La matriz \mathbf{T} del observador obtenida con las mismas ecuaciones que para el controlador \mathbf{K} , será también óptima. Esto es, hará converger el error de observación dado por la Ec. 4.7-9 a cero con la máxima velocidad posible al igual que el error de estado, ya que se utiliza el mismo índice de desempeño J .

Los algoritmos computacionales para obtener el controlador óptimo \mathbf{K} pueden también

utilizarse para obtener el observador óptimo \mathbf{T} efectuando los reemplazos mencionados. Para procesos invariantes se pueden utilizar los algoritmos de estado estacionario equivalentes a los obtenidos para el controlador de estado estacionario. La Ec. 4.7-9 toma la forma

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{T}\mathbf{C}] \tilde{\mathbf{x}}(k)$$

En tal caso la matriz \mathbf{T} se precalcula del mismo modo que el controlador \mathbf{K} .

Los estados observados pueden ser utilizados para realizar el control de los mismos, lo que se trata en el punto siguiente.

4.8 Controladores con Observación de Estado, para referencia nula.

En la sección 4.6 se obtuvo la ley de control óptimo para realimentación del vector de estado suponiendo que éste se podía medir en forma exacta. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones prácticas, el estado debe ser reconstruido a partir del vector de salida, como se vio en la sección 4.7; de esta manera dado un proceso dinámico

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) \quad (4.8-1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) \quad (4.8-2)$$

que cumple con la condición de observabilidad; un observador de estado con ecuaciones

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{T}(k)[\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)] \quad (4.8-3)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) \quad (4.8-4)$$

y un controlador de ecuación

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (4.8-5)$$

se debe obtener la ecuación del sistema de lazo cerrado.

Reemplazando la Ec. 4.8-5 en las Ecs. 4.8-1, 4.8-2, 4.8-3 y 4.8-4 se tiene

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{K}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (4.8-6)$$

$$y(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) - \mathbf{D}(k) \mathbf{K}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (4.8-7)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{K}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{T}(k) [y(k) - \hat{y}(k)] \quad (4.8-8)$$

$$\hat{y}(k) = \mathbf{C}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{D}(k) \mathbf{K}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (4.8-9)$$

reemplazando las Ecs. 4.8-7 y 4.8-9 en la Ec. 4.8-8

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{K}(k) - \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k)] \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k). \quad (4.8-10)$$

Las Ecs. 4.8-10 y 4.8-6 se pueden agrupar en una ecuación

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) & -\mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k) \\ \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k) & \mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} \quad (4.8-11)$$

aplicando una transformación lineal

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{H}^{-1}$$

se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) & -\mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k) \\ \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k) & \mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}$$

o también

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k)] & \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} \quad (4.8-12)$$

Esta es la ecuación del sistema de control con observador. Los polos del mismo están dados por

$$\det [zI - \mathbf{A}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k)] \cdot \det [zI - \mathbf{A}(k) + \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k)] = 0$$

es decir incluye los polos del sistema de lazo cerrado más los polos del observador. Como el proceso y el observador tienen orden n el sistema completo tendrá orden $2n$.

Por otra parte los polos del proceso son independientes de los del observador, y por lo tanto se pueden determinar por separado; este resultado se denomina **Teorema de separación**.

En la Fig. 4.8.1 se muestra un esquema del sistema de control con observador de estado.

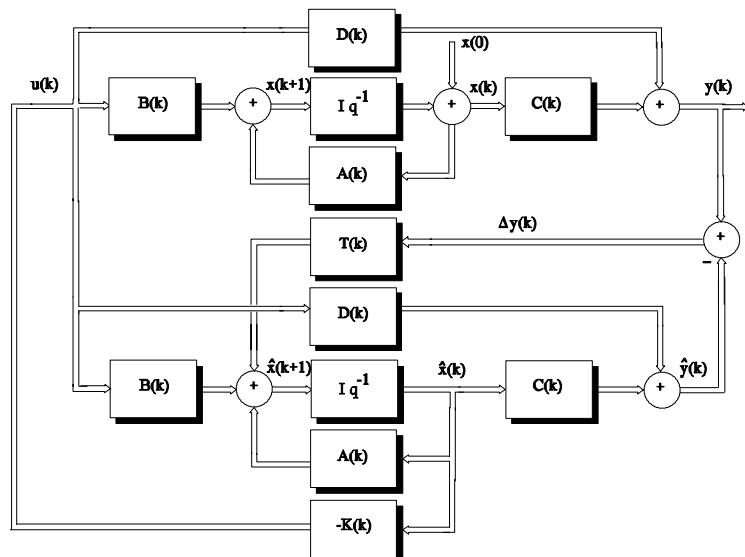


Fig. 4.8.1. Diagrama de bloques del sistema de control con observador de estado y controlador.

El controlador de estado, es el mismo tanto para procesos con vector de estado medido como calculado con un observador, esto se denomina **Principio de Certeza**

Equivalente y permite calcular la matriz de realimentación de estado, como si el vector de estado fuese completamente medible, para luego reemplazar este por la observación dada por el observador de Luenberger.

4.9 Controlador de estado para referencia distinta de cero.

Cuando la entrada al proceso es distinta de cero, lo que constituye la generalidad de los casos, se deben extender los conceptos analizados para el controlador de estado con referencia nula. En tal caso si la salida no tiende a cero tampoco lo hará el estado. Para poder utilizar la metodología desarrollada para referencia nula, se propone un sistema ficticio cuya salida tienda a cero cuando la salida alcance la referencia. Esto se representa en la Fig. 4.9.1

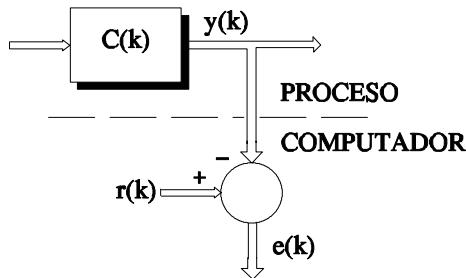


Fig. 4.9.1 Sistema ficticio con salida $e(k)$ tendiendo a cero.

Con una referencia $r(k)$ el valor de

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

tenderá a cero cuando $y(k)$ tienda a $r(k)$. En tal caso considerando el sistema de entrada $u(k)$ y salida $e(k)$ se podrá aplicar el controlador de estado ya desarrollado, que lleva la salida de este nuevo sistema a cero y por ende al estado también.

En la Fig. 4.9.2 se representa el modelo de estado del sistema con salida $y(k)$ y el modelo de la referencia $r(k)$ generada a partir de una entrada ficticia $q(k)$, partiendo de un estado inicial $p(0)$, actuando sobre el mismo modelo del proceso. El modelo de la Fig. 4.9.2 puede considerarse también como un modelo de estado que tiene como entrada

$$m(k) = q(k) - u(k)$$

(4.9-1)

como salida

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{r}(k) - \mathbf{y}(k) \quad (4.9-2)$$

como estado

$$\mathbf{n}(k) = \mathbf{p}(k) - \mathbf{x}(k). \quad (4.9-3)$$

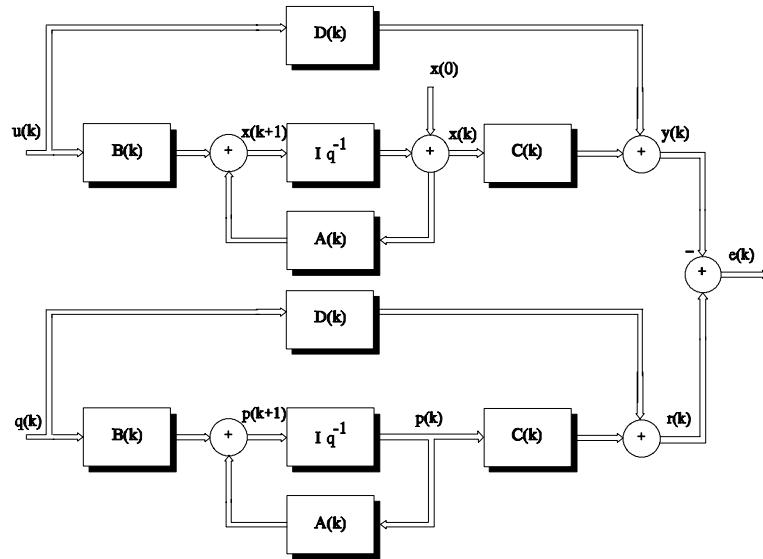


Fig. 4.9.2 Modelos del proceso y de la referencia.

Las ecuaciones de este modelo de estado serán

$$\mathbf{n}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{n}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{m}(k) \quad (4.9-4)$$

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{n}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{m}(k) \quad (4.9-5)$$

Si se considera a la entrada \mathbf{q} que genera la referencia un escalón, lo que puede lograrse con una adecuada elección de $\mathbf{p}(0)$, se puede escribir

$$\mathbf{q}(k+1) = \mathbf{q}(k) \quad \text{para } k > 0 \quad (4.9-6)$$

Agrupando matricialmente las Ecs. 4.9-4 y 4.9-6 se tiene la siguiente ecuación de estado

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}(k+1) \\ \mathbf{q}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) & \mathbf{B}(k) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}(k) \\ \mathbf{q}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B}(k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{u}(k)] \quad (4.9-7)$$

La ecuación de salida es

$$\mathbf{e}(k) = [\mathbf{C}(k) \mathbf{D}(k)] \begin{bmatrix} \mathbf{n}(k) \\ \mathbf{q}(k) \end{bmatrix} + [-\mathbf{D}(k)] [\mathbf{u}(k)] \quad (4.9-8)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^*(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) & \mathbf{B}(k) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}; & \mathbf{B}^* &= \begin{bmatrix} -\mathbf{B}(k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C}^*(k) &= [\mathbf{C}(k) \mathbf{D}(k)]; & \mathbf{D}^* &= [-\mathbf{D}(k)]; \\ \mathbf{x}^*(k) &= [\mathbf{n}(k) \mathbf{q}(k)]. \end{aligned}$$

las Ecs. 4.9-7 y 4.9-8 se pueden escribir como

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \mathbf{A}^*(k) \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{B}^*(k) \mathbf{u}(k) \quad (4.9-9)$$

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{C}^*(k) \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{D}^*(k) \mathbf{u}(k) \quad (4.9-10)$$

Este modelo extendido, tiene un vector de estado extendido, que incorpora a la referencia y su dimensión es $n + e$.

La señal de control de este sistema con referencia distinta de cero, pero en el cual el estado extendido tiende a cero, se obtiene realimentando dicho vector de estado.

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}^*(k) \mathbf{x}^*(k). \quad (4.9-11)$$

En forma explícita es

$$\mathbf{u}(k) = [\mathbf{K}(k) \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{n}(k) \\ \mathbf{q}(k) \end{bmatrix} \quad (4.9-12)$$

Como se observa en la Ec. 4.9-12, la señal de control esta compuesta de dos partes

$$u(k) = u_1(k) + u_2(k), \quad (4.9-13)$$

$$u_1(k) = q(k) \quad (4.9-14)$$

representa un control por prealimentación de la referencia y

$$u_1(k) = K(k) n(k) \quad (4.9-15)$$

representa un control por realimentación de los estados. La matriz K tiene dimensión $[e * (n+e)]$, siendo e el número de entradas y n el número de variables de estado del sistema multivariable. El K óptimo se obtiene con los métodos vistos anteriormente. El diagrama en bloques del sistema de control con referencia distinta de cero se presenta en la Fig. 4.9.3

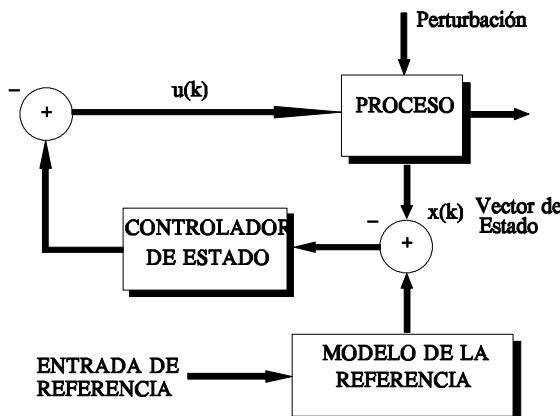


Fig. 4.9.3 Sistema de Control de estado con referencia distinta de cero.

En lo recientemente expuesto se supuso que el estado extendido

$$n(k) = p(k) - x(k)$$

se puede obtener por medición de $x(k)$ y evaluación de $p(k)$. Si no es posible realizar esto, se deberá implementar un observador extendido. Este tendrá la misma estructura que el observador simple, pero se deberán utilizar las matrices extendidas A^*, B^*, C^* . Como se muestra en la Fig. 4.9.4 en la cual se ha incorporado también un ruido de perturbación de salida $n(k)$.

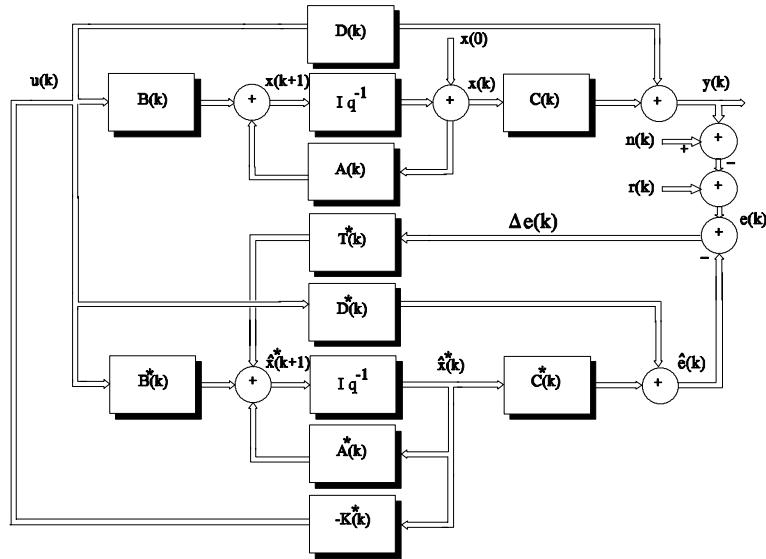


Fig. 4.9.4 Sistema de Control con observador de estado y prealimentación de referencias y perturbaciones.

CAPITULO 5

5. CONTROL DIGITAL ESTOCASTICO

En el tratamiento convencional de los sistemas de control se considera que las señales actuantes sobre los mismos y las perturbaciones a las que están sometidos son de carácter determinístico, esto es, que su evolución temporal se puede describir matemáticamente con precisión y por lo tanto se pueden predecir. En la mayoría de los casos reales estas señales son de carácter estocástico y por lo tanto sólo se podrán expresar datos estadísticos de las mismas pero no definir su evolución.

Cuando se aplican criterios de optimización, los resultados que se obtienen dependen de las señales utilizadas. Eventualmente un sistema de control diseñado en forma óptima para señales determinísticas, podrá ser subóptimo cuando el mismo está sometido a perturbaciones estocásticas.

En la mayoría de los casos los resultados obtenidos del diseño determinístico, son aplicables a sistemas afectados por señales estocásticas. No obstante esto, con el aumento de las exigencias de control, los controladores deben diseñarse no sólo en base a la dinámica del sistema a controlar, sino también teniendo en cuenta las características estocásticas de las señales actuantes.

5.1 Modelos matemáticos de señales estocásticas.

5.1.1 Procesos Estocásticos de Tiempo Discreto.

Dado un experimento aleatorio cualquiera, cuyos elementos θ pertenecen a un espacio muestral Ω ; se puede definir una función ξ que asocia a cada elemento de dicho espacio una función de tiempo discreto $x_i(k)$, donde k es la notación simplificada de kT , siendo T el período de muestreo. Al conjunto imagen χ que contiene todas las funciones vinculadas al experimento aleatorio se lo define como **Proceso Aleatorio o Estocástico**. Cada función se dice que es una realización del proceso. Esto se puede representar como

$$\xi : \Omega \rightarrow \chi \quad (5.1-1)$$

con

$$\chi = \{ x_i(k, \theta), i = 1, 2, \dots \}. \quad (5.1-2)$$

De esta manera para un instante determinado n , queda definida una variable aleatoria x_n . Si en lugar del tiempo se fija un elemento cualquiera θ_j del experimento aleatorio queda definida una función.

Las propiedades estadísticas del proceso estocástico se pueden describir por su función de densidad de probabilidad y por las funciones de probabilidad conjunta de todas las variables aleatorias que se pueden definir en el proceso. Cuando estas caracterizaciones estadísticas son funciones del tiempo, entonces se dice que el proceso es variante. Por el contrario si son independientes del instante de observación se dice que es invariante. Esto implica que los parámetros estadísticos son iguales para todas las variables aleatorias que se puedan definir en el proceso.

Cuando en un conjunto de señales aleatorias, que conforman un proceso estocástico estacionario, cualquiera de las realizaciones del proceso se puede obtener por desplazamiento temporal de alguna de ellas, el mismo se denomina **Ergódico**.

En este caso los parámetros estadísticos obtenidos para una variable aleatoria, en un instante definido, sobre todas las funciones o realizaciones, son iguales a los que se obtienen a lo largo del tiempo de evolución de una de las señales.(ver Ec. 5.1-3)

5.1.2 Parámetros estadísticos de procesos estocásticos.

La caracterización estadística de un proceso estocástico se realiza teniendo en cuenta las variables aleatorias que se pueden definir en el proceso. Si el proceso es ergódico se cumple

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M M_i x_i(k) \quad (5.1-3)$$

donde N es el número total de muestras de una realización, M_i es la cantidad de veces que tiene lugar el suceso $x_i(k)$ y M el número total de funciones o realizaciones.

El primer miembro de la Ec. 5.1-3 se denomina valor medio temporal. El segundo representa el valor medio de las muestras para un tiempo dado k . El poder establecer esta igualdad es de gran importancia ya que permite aplicar todas las herramientas matemáticas de la estadística a las señales temporales. El valor medio, expectativa o esperanza matemática se expresa entonces

$$m_x = E\{x(k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) . \quad (5.1-4)$$

Los parámetros estadísticos como valor medio, varianza, dispersión y momentos de distinto orden, son valores que dan información sobre las señales estocásticas, pero que son independientes de la variable tiempo. Esto es, no tiene información sobre

cuan rápido cambia la señal o cual es su contenido armónico. Una función que provee información sobre la coherencia interna de una señal o sobre su velocidad de cambio es la **Función de Autocorrelación**, definida como la esperanza matemática del producto de la señal consigo misma desplazada en el tiempo, m intervalos de muestreo.

$$\Phi_{xx}(m) = E\{x(k)x(k+m)\}. \quad (5.1-5)$$

En el dominio discreto se tiene:

$$\Phi_{xx}(m) = E\{x(k)x(k+m)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)x(k+m). \quad (5.1-6)$$

Se observa de la definición que el valor medio de la señal influye en la correlación. Si se desea obtener una función que solamente tenga en cuenta las fluctuaciones respecto del valor medio, se pueden substraer éstos de la señal. En este caso se obtiene la **Función de Autocovarianza** o simplemente **Covarianza**, definida como:

$$R_{xx}(m) = \text{cov}\{x,m\} = E\{[x(k) - m_x][x(k+m) - m_x]\} = \Phi_{xx}(m) - m, \quad (5.1-7)$$

Para $m = 0$, se obtiene la **varianza** de la señal

$$\sigma_x^2 = R_{xx}(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x(k) - m_x]^2. \quad (5.1-8)$$

Si la señal tiene distribución gaussiana, las características estadísticas estáticas y dinámicas quedan totalmente definidas por la esperanza y la función de autocovarianza. Si estos valores son independientes del tiempo, la señal es estacionaria en sentido amplio.

La dependencia estadística entre dos señales estocásticas estacionarias $x(k)$ e $y(k)$ está definida por la **Función de Intercorrelación**. En tiempo discreto está definida por

$$\Phi_{xy}(m) = E\{x(k)y(k+m)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)y(k+m). \quad (5.1-9)$$

De igual modo, cuando se eliminan los valores medios de las señales se obtiene la denominada **Función de Intercovarianza**.

$$R_{xy}(m) = \text{cov}\{x,y,m\} = E\{[x(k) - m_x][y(k+m) - m_y]\} = \Phi_{xy}(m) - m_x, \quad (5.1-10)$$

Dos variables aleatorias x e y se denominan incorreladas si

$$R_{xy}(m) = 0. \quad (5.1-11)$$

Si además es

$$m_x m_y = 0$$

se dicen ortogonales y son independientes si

$$p(x,y) = p(x) p(y) \quad (5.1-12)$$

donde $p(x)$, $p(y)$ son las funciones de densidad de probabilidad de x , y respectivamente, mientras que $p(x,y)$ es la función de densidad de probabilidad conjunta.

Un ruido blanco es una señal para la cual cualquier valor es independiente de todos los valores pasados. Esto implica que la función de covarianza será idénticamente nula para cualquier m , excepto para $m = 0$ donde tomará un valor definido. Si el ruido blanco tiene una distribución gaussiana, el mismo quedará totalmente definido por su valor medio m_x y la función de covarianza

$$R_{xx}(m) = \sigma_x^2(m) \quad (5.1-13)$$

siendo

$$\sigma_x^2(m) = \begin{cases} 1 & \text{para } m = 0 \\ 0 & \text{para } m \neq 0. \end{cases}$$

Cuando una señal está definida por un conjunto de n valores en cada instante, se tiene una **señal estocástica vectorial o vector señal** de orden n definida como

$$\mathbf{x}^T(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_n(k)]. \quad (5.1-14)$$

Este vector siempre se podrá descomponer en sus n señales escalares. Si cada señal es estacionaria su valor medio estará definido por

$$\mathbf{m}_x^T = E\{\mathbf{x}^T(k)\} = [m_{x1} \ m_{x2} \ \dots \ m_{xn}]. \quad (5.1-15)$$

La coherencia interna del vector señal se define mediante el valor esperado del producto del vector de la señal, sin su valor medio, con su traspuesto desplazado en

el tiempo. Esto queda expresado por la **Función Matricial de Covarianza**.

$$\mathbf{R}_{xx}(m) = E\{[\mathbf{x}(k) - \mathbf{m}_x][\mathbf{x}(k+m) - \mathbf{m}_x]^T\}$$

o bien

$$\mathbf{R}_{xx}(m) = \begin{bmatrix} R_{x_1x_1}(m) & R_{x_1x_2}(m) & \dots & R_{x_1x_n}(m) \\ R_{x_2x_1}(m) & R_{x_2x_2}(m) & \dots & R_{x_2x_n}(m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{x_nx_1}(m) & R_{x_nx_2}(m) & \dots & R_{x_nx_n}(m) \end{bmatrix} \quad (5.1-16)$$

Esta función matricial queda formada por todas las funciones de covarianza de los distintos componentes del vector señal de orden n . Sobre la diagonal se encuentran las n funciones de autocovarianza de las n componentes de la señal vectorial y todos los otros elementos son las funciones de intercovarianza entre los componentes de la señal. Cuando las componentes del vector señal son señales escalares incorreladas, su intercovarianza será cero y la función matricial será una matriz diagonal.

$$\mathbf{R}_{xx}(m) = \begin{bmatrix} R_{x_1x_1}(m) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{x_2x_2}(m) & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & R_{x_nx_n}(m) \end{bmatrix} \quad (5.1-17)$$

Procesos Gaussianos.

Una variable aleatoria x se dice que es gaussiana cuando está caracterizada por la función de densidad de probabilidad

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_x} e^{-1/2[(x-\mathbf{m}_x)/\sigma_x]^2} \quad (5.1-18)$$

propuesta por Gauss y de allí su nombre. Se puede hacer una extensión para n variables aleatorias, organizadas en forma vectorial, obteniéndose

$$p[x(k)] = 2\pi^{-n/2} [\det R_{xx}(k)]^{-1/2} e^{-1/2[x(k)-m_x(k)]^T R_{xx}(k)^{-1}[x(k)-m_x(k)]} \quad (5.1-19)$$

donde

$$m_x(k) = E\{x(k)\} \quad (5.1-20)$$

$$R_{xx}(k) = \begin{bmatrix} R_{x_1x_1}(k) & R_{x_1x_2}(k) & \dots & R_{x_1x_n}(k) \\ R_{x_2x_1}(k) & R_{x_2x_2}(k) & \dots & R_{x_2x_n}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{x_nx_1}(k) & R_{x_nx_2}(k) & \dots & R_{x_nx_n}(k) \end{bmatrix} \quad (5.1-21)$$

$$R_{x_jx_j}(k) = E\{[x_j(k)-m_{x_j}(k)][x_j(k)-m_{x_j}(k)]^T\}. \quad (5.1-22)$$

De esta manera, un proceso aleatorio estacionario caracterizado por la Ec. 5.1-19, se dice que es gaussiano.

Proceso de Markov.

Cuando la probabilidad condicional de un evento de valor $x(k)$ en un proceso estocástico depende solamente de su último valor $x(k-1)$ y de ninguno anterior, se denomina **Proceso de Markov** de primer orden. Esto se expresa mediante la función de densidad de probabilidad condicionada tal que

$$p\{x(k)/[x(k-1), x(k-2), \dots, x(0)]\} = p\{x(k)/x(k-1)\}. \quad (5.1-23)$$

Se puede decir entonces que en un proceso de Markov, el próximo valor de la señal $x(k+1)$ estará influenciado solamente por el valor presente $x(k)$. En una ecuación escalar en diferencias de primer orden:

$$x(k+1) = a x(k) + b v(k) \quad (5.1-24)$$

el valor futuro depende de los valores presente de $x(k)$ y $v(k)$. En el caso que $v(k)$ sea

una señal estadísticamente independiente, como un ruido no correlacionado, la función de densidad de probabilidad de $x(k+1)$ dependerá sólo de $x(k)$ y será por lo tanto un proceso de Markov. Si la ecuación en diferencias es de mayor orden como

$$x(k+1) = a_n x(k) + a_{n-1} x(k-1) + \dots + a_1 x(k-n+1) + b v(k) \quad (5.1-25)$$

siempre se puede transformar la ecuación que describe el proceso, en varias ecuaciones de primer orden mediante una apropiada elección de variables auxiliares, tal que

$$\begin{aligned} x(k) &= x_1(k) \\ x(k+1) &= x_1(k+1) = x_2(k) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k). \end{aligned} \quad (5.1-26)$$

El proceso podrá expresarse como una ecuación matricial en diferencias de primer orden

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} v(k). \quad (5.1-27)$$

En forma sintética

$$x(k+1) = A x(k) + b v(k). \quad (5.1-28)$$

Si la matriz A y el vector b son constantes, cada elemento de $x(k+1)$ depende sólo del valor presente de $x(k)$ y es por lo tanto un proceso de Markov. En la Fig. 5.1-1 se representa la Ec. 5.1-28.

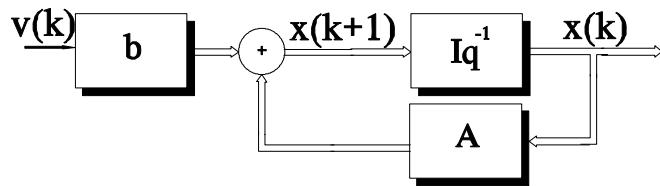


Fig. 5.1.1. Modelo de Markov para $x(k)$

5.2 Modelos para Sistemas Estocásticos de Tiempo Discreto.

5.2.1 Extensión del modelo determinístico para sistemas estocásticos.

Para extender el concepto de modelo determinístico, visto en el capítulo 3, se considera un proceso estocástico monovariable definido en el dominio Z por

$$e(z) = G_e(z^{-1}) v(z), \quad (5.2-1)$$

donde $v(z)$ es la transformada Z de un ruido blanco $v(k)$ con valor medio nulo y $G_e(z^{-1})$ la transformada Z de la densidad espectral de $e(k)$ considerada racional. Seleccionando adecuadamente $G_e(z^{-1})$ se puede modelar en variable z el ruido $e(z)$ a partir del ruido blanco $v(z)$. A $G_e(z^{-1})$ se la denomina modelo del ruido.

Una extensión natural de los modelos determinísticos vistos en el capítulo 3 consiste en incorporar el ruido a la salida de forma que la transformada Z de la salida del modelo estocástico resulta

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(z) + G_e(z^{-1}) v(z) \quad (5.2-2)$$

con

$$\begin{aligned} B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m} \\ A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}. \end{aligned}$$

Asumiendo por ser racional que

$$G_e(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})}{M(z^{-1})} \quad (5.2-3)$$

se puede hacer

$$G_e(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})}{M(z^{-1})} \frac{A(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{N(z^{-1}) A(z^{-1})}{M(z^{-1})} \frac{1}{A(z^{-1})} = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}.$$

Por lo tanto es

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(z) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(z). \quad (5.2-4)$$

con

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}.$$

Transformando al dominio temporal a través del operador retardo unitario q se obtiene

$$A(q) y(k) = B(q) u(k-d) + C(q) v(k) \quad (5.2-5)$$

siendo

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_m q^{-m} \\ B(q) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m} \\ C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n} \end{aligned}$$

o también

$$y(k) = - \sum_{i=1}^m a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^m b_i u(k-d-i) + \sum_{i=0}^n c_i v(k-i). \quad (5.2-6)$$

El primer término del segundo miembro contiene los valores pasados de la señal de salida denominándose término autoregresivo (**AR**) y el segundo término es el valor medio móvil de la señal de entrada (**MA**, moving average), del mismo modo como se definieron para el modelo ARMA determinístico del punto 3.2.. El último término también es un valor medio móvil pero del vector de ruido, también denominado exógeno (**X**). El modelo dado por la Ec. 5.2-6 se denomina **ARMAX**. Como se puede observar la salida también es un proceso aleatorio.

5.2.2 Caracterización estadística de la salida del sistema.

Dado un sistema estocástico de ecuación

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)} u(k-d) + \frac{C(q)}{A(q)} v(k), \quad (5.2-7)$$

se puede caracterizar estadísticamente mediante su valor medio y su covarianza.

$$m_y(k) = E\{y(k)\} \quad (5.2-8)$$

$$m_y(k) = \frac{B(q)}{A(q)} m_u(k-d) + \frac{C(q)}{A(q)} m_v(k), \quad (5.2-9)$$

como $m_v(k) = 0$ para todo k se tiene

$$m_y(k) = \frac{B(q)}{A(q)} m_u(k-d). \quad (5.2-10)$$

La función de covarianza, siendo un proceso de Markov, se define por

$$R_{yy}(k, k+1) = E\{[y(k) - m_y(k)][y(k+1) - m_y(k+1)]\} \quad (5.2-11)$$

$$R_{yy}(k, k+1) = E\{y(k)y(k+1)\} - m_y(k)m_y(k+1)$$

$$\begin{aligned} &= E\left\{\left[\frac{B(q)}{A(q)} u(k-d) + \frac{C(q)}{A(q)} v(k)\right] \left[\frac{B(q)}{A(q)} u(k+1-d) + \frac{C(q)}{A(q)} v(k+1)\right]\right\} - \\ &\quad - \frac{B^2(q)}{A^2(q)} m_u(k-d) m_u(k-d+1) \end{aligned}$$

Operando

$$\begin{aligned}
R_{yy}(k, k+1) &= E \left[\frac{B^2(q)}{A^2(q)} u(k-d) u(k+1-d) \right] + E \left[\frac{B(q) C(q)}{A^2(q)} u(k-d) v(k+1) \right. \\
&\quad \left. + E \left[\frac{B(q) C(q)}{A^2(q)} u(k+1-d) v(k) \right] + E \left[\frac{C^2(q)}{A^2(q)} v(k) v(k+1) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{B^2(q)}{A^2(q)} m_u(k-d) m_u(k-d+1). \right]
\end{aligned}$$

Considerando que $E[e(k)] = 0$ y operando queda

$$R_{yy}(k, k+1) = \frac{B^2(q)}{A^2(q)} R_{uu}(k, k+1, d) + \frac{C^2(q)}{A^2(q)} R_{vv}(k, k+1) \quad (5.2-12)$$

Se obtiene así la función de covarianza de la salida en función de la covarianza de entrada y de ruido, considerando que u y v son estadísticamente independientes.

5.2.3 Desarrollo de un predictor para proceso con retardo puro.

En la determinación de controladores óptimos estocásticos suele ser necesario el uso de un predictor. A continuación se desarrolla un predictor para sistemas con retardo puro. La Ec. 5.2-5 puede desplazarse en el tiempo de manera que se obtiene

$$A(q) y(k+d) = B(q) u(k) + C(q) v(k+d) \quad (5.2-13)$$

resultando

$$y(k+d) = \frac{B(q)}{A(q)} u(k) + \frac{C(q)}{A(q)} v(k+d) \quad (5.2-14)$$

En la Ec. 5.2-14 la señal de perturbación $v(k)$ se desconoce en el intervalo futuro desde $k+1$. Los valores de ruido en ese intervalo pueden separarse a partir de la Ec. 5.2-4 haciendo el cociente de polinomios

$$\frac{C(q)}{A(q)} = D(q) + q^{-d} \frac{F(q)}{A(q)} \quad (5.2-15)$$

donde

$$\begin{aligned} D(q) &= 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{d-1} q^{-(d-1)} \\ F(q) &= f_0 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n-1} q^{-(n-1)} \end{aligned} \quad (5.2-16)$$

Reemplazando el cociente representado en la Ec. 5.2-15 en la Ec. 5.2-14 se obtiene

$$y(k+d) = \frac{B(q)}{A(q)} u(k) + D(q)v(k+d) + \frac{F(q)}{A(q)} v(k) \quad (5.2-17)$$

El término $D(q)v(k+d)$ contiene los valores futuros e impredecibles del ruido $v(k)$ en el intervalo $[(k+1), \dots, (k+d)]$. El término

$$\frac{F(q)}{A(q)} v(k) \quad (5.2-18)$$

contiene los valores presente y pasados de $v(k)$ y puede calcularse a partir de valores medidos usando la Ec. 5.2-5, obteniéndose

$$v(k) = \frac{A(q)}{C(q)} y(k) - \frac{B(q)}{C(q)} u(k-d) \quad (5.2-19)$$

Reemplazando $v(k)$ en la Ec. 5.2-17 queda

$$\begin{aligned} y(k+d) &= \frac{B(q)}{A(q)} u(k) + \frac{F(q)}{A(q)} \frac{A(q)}{C(q)} y(k) - \frac{F(q)}{A(q)} \frac{B(q)}{C(q)} u(k-d) + \\ &+ D(q) v(k+d) \end{aligned} \quad (5.2-20)$$

Operando y reordenando

$$\begin{aligned} y(k+d) &= \frac{F(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q)}{C(q)} \left[\frac{C(q)}{A(q)} - \frac{F(q)}{A(q)} q^{-d} \right] u(k) + \\ &+ D(q) v(k+d) \end{aligned} \quad (5.2-21)$$

Comparando el segundo término del segundo miembro de Ec. 5.2-21 con Ec. 5.2-15

$$D(q) = \frac{C(q)}{A(q)} - \frac{F(q)}{A(q)} q^{-d} \quad (5.2-22)$$

se obtiene,

$$y(k+d) = \frac{F(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q) D(q)}{C(q)} u(k) + D(q) v(k+d) \quad (5.2-23)$$

La Ec. 5.2-23 entregaría un valor preciso de $y(k)$ hasta $y(k+d)$ si se conocieran los valores futuros de $v(k)$ hasta $v(k+d)$ lo cual no se cumple. No obstante, se puede plantear una estimación eliminando los términos de ruido en ese intervalo. Una estimación de $y(k+d)$ basada en el presente $y(k)$ se puede expresar a partir de Ec. 5.2-23

$$\hat{y}(k+d)|_k = \frac{F(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q) D(q)}{C(q)} u(k) \quad (5.2-24)$$

La Ec. 5.2-24, constituye la ecuación de un predictor que posibilita la estimación de $y(k+d)$ a partir de $y(k)$ y $u(k)$, incorporándose el conocimiento del modelo del ruido (Ec. 5.2-15). Este predictor será estable si las raíces de $C(q)$ transformada en Z están dentro del círculo unitario del plano Z . La Ec. 5.2-23 se puede expresar como

$$y(k+d) = \hat{y}(k+d)|_k + \varepsilon(k+d) \quad (5.2-25)$$

donde $\varepsilon(k+d)$ es el error de predicción.

$$\varepsilon(k+d) = D(q) v(k+d) \quad (5.2-26)$$

5.3 Diseños de Controladores para Sistemas Estocásticos Lineales.

5.3.1 Formulación del problema de control para sistemas estocásticos.

Cuando un sistema estocástico, monovariante, lineal e invariante, representado por

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(z) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(z) \quad (5.3-1)$$

se ve afectado por perturbaciones estocásticas, las mismas son transmitidas a través de la dinámica del sistema, afectando la variable de salida, cuyo comportamiento también será aleatorio. El objetivo de un controlador para este tipo de sistemas, es minimizar los efectos que aparecen sobre la salida cuando se ve afectada por perturbaciones estocásticas. El hecho de hablar de minimizar implica un proceso de optimización y por lo tanto se necesita formular un índice de desempeño adecuado, cuya optimización asegure un correcto funcionamiento del sistema.

Un controlador que se adapta muy bien para el control de sistemas teniendo en

cuenta las perturbaciones estocásticas es el denominado **Controlador de Varianza Mínima**. El principio básico en el que se sustenta este controlador, consiste precisamente en obtener los parámetros y la estructura óptima del mismo tal que minimicen la varianza V de la señal de salida $y(k)$.

$$J = V \{ y(k) \} = E \{ y^2(k) \} \quad (5.3-2)$$

Con este planteo se asegura que la fluctuación aleatoria de la señal de salida debido a perturbaciones se reduce al mínimo posible.

Esta propuesta produce buenos resultados, pero presenta como inconveniente que al no incluirse la acción de control en el índice de desempeño, ésta última puede tomar valores excesivos. Un índice de desempeño que tiene en cuenta este aspecto es el siguiente

$$J = E \{ y^2(k) + p u^2(k) \} \quad (5.3-3)$$

donde $y^2(k)$ representa la varianza de la salida, $u^2(k)$ la varianza de la acción de control y p un factor de peso de la misma. Al minimizar este índice se obtendrá un controlador que con una acción de control $u(k)$ de varianza reducida, logra también una varianza baja en la salida $y(k)$. Lo que se minimiza en este caso, es una combinación de ambas variables. El controlador resultante de minimizar este índice de desempeño, se lo denomina **Controlador de Varianza Mínima Generalizado**.

El factor de peso p permite variar la penalización que se hace sobre la acción de control. En general, pesar la acción de control $u(k)$ implica que la varianza de $y(k)$ deje de ser la mínima obtenible. Esta disminución en el desempeño del control de la salida es el resultado del compromiso de pretender reducir simultáneamente la varianza de la acción de control $u(k)$.

Cuando se toma en cuenta en el control, la señal de referencia $r(k)$, el índice de desempeño se expresa como

$$J = E \{ [y(k) - r(k)]^2 + p u^2(k) \} \quad (5.3-4)$$

Si el proceso incluye elementos con retardo puro dT_o , deberá hacerse una predicción de la salida para los d pasos de retardo. En tal caso la Ec. 5.3-4 toma la forma

$$J = E \{ [y(k+d) - r(k)]^2 + p u^2(k) \} \quad (5.3-5)$$

Podrían usarse aún índices de desempeño más complejos que incluyan por ejemplo el pesado de las variables mediante polinomios o predicciones de las variables para

determinados pasos en el futuro. El que se ha planteado en la Ec. 5.3-5 tiene suficiente generalidad y provee muy buenos resultados.

En la Fig. 5.3.1 se muestra un sistema de control para sistemas con perturbaciones estocásticas.

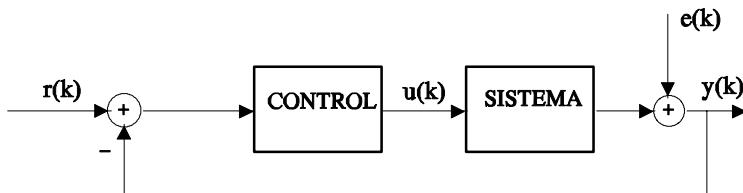


Fig. 5.3.1. Sistema de Control con perturbaciones estocásticas.

Se puede formular a continuación el problema del **regulador estocástico lineal invariante de varianza mínima**

Dado un sistema estocástico lineal invariante de tiempo discreto de Ec. 5.3-1, se debe encontrar una ley de control u , que lleve la salida y al valor de referencia r haciendo mínimo el índice de desempeño con Ec. 5.3-5. En estas circunstancias la varianza de la diferencia entre la señal de salida y la referencia, será tan pequeña como sea posible, bajo la condición de obtener una varianza de la acción de control suficientemente pequeña.

5.3.2 Obtención del controlador estocástico.

La ecuación de predicción Ec. 5.2-25 puede incluirse ahora en el índice de desempeño Ec. 5.3-5.

$$J = E \{ [\hat{y}(k+d)|_k + \varepsilon(k+d) - r(k)]^2 + p u^2(k) \}. \quad (5.3-6)$$

operando y reordenando

$$\begin{aligned} J = & E \{ [\hat{y}(k+d)|_k - r(k)]^2 + p u^2(k) \} + E \{ \varepsilon^2(k+d) \} + \\ & + 2 E \{ \hat{y}(k+d)|_k \varepsilon(k+d) \} - 2 E \{ r(k) \varepsilon(k+d) \}. \end{aligned} \quad (5.3-7)$$

Reemplazando la Ec. 5.2-24 en el tercer término del segundo miembro de la Ec. 5.3-7 se puede observar que $2E\{\hat{y}(k+d)|_k \varepsilon(k+d)\} = 0$ puesto que tanto $\hat{y}(k)$ como $u(k)$, no dependen de los valores futuros de $\varepsilon(k+d)$ y por lo tanto no están correlacionados. El quinto término de la Ec. 5.3-7, $E\{r(k)\varepsilon(k+d)\} = 0$ también es nulo dado que r no está correlacionado con ε . Resulta entonces

$$J = E \{ [\hat{y}(k+d)|_k - r(k)]^2 + p u^2(k) \} + E \{ \varepsilon^2(k+d) \}. \quad (5.3-8)$$

Para minimizar el índice respecto de la acción de control $u(k)$ se hace

$$\frac{\partial J}{\partial u(k)} = 2 E \{ [\hat{y}(k+d)|_k - r(k)] \frac{\partial \hat{y}(k+d)|_k}{\partial u(k)} + 2 p u(k) \} = 0. \quad (5.3-9)$$

Es necesario calcular la derivada parcial del predictor (Ec. 5.2-24) respecto de la acción de control. Para obtener esta derivada deben incluirse las expresiones explícitas de los polinomios $B(q), C(q), D(q), F(q)$ definidos por la Ec. 5.2-5 y la Ec. 5.2-16 y tenerse en cuenta que se deriva solo con respecto al instante k . Así es

$$\frac{\partial \hat{y}(k+d)|_k}{\partial u(k)} = b_0. \quad (5.3-10)$$

Por lo tanto se obtendrá un mínimo para J cuando

$$E \{ [\hat{y}(k+d)|_k - r(k)] b_0 + p u(k) \} = 0 \quad (5.3-11)$$

sustituyendo $\hat{y}(k+d)|_k$ según Ec. 5.2-24 y considerando que no hay ruido, resulta

$$b_0 \frac{F(q)}{C(q)} y(k) + b_0 \frac{B(q) D(q)}{C(q)} u(k) - r(k) b_0 + p u(k) = 0 \quad (5.3-12)$$

o bien

$$F(q) y(k) - C(q) r(k) + [B(q) D(q) + C(q) p/b_0] u(k) = 0. \quad (5.3-13)$$

Tomando

$$G(q) = B(q) D(q) + C(q) \frac{p}{b_0} \quad (5.3-14)$$

queda

$$F(q) y(k) - C(q) r(k) + G(q) u(k) = 0. \quad (5.3-15)$$

De esta expresión se puede despejar $u(k)$ para obtener la acción de control óptima

$$u(k) = \frac{C(q)}{G(q)} r(k) - \frac{F(q)}{G(q)} y(k). \quad (5.3-16)$$

La Ec. 5.3-16 representa al controlador de varianza mínima generalizada. La acción de control $u(k)$ es una función de los valores (medidos) presentes $r(k)$ e $y(k)$. Transformando en variable z se puede representar al controlador y al proceso en un diagrama en bloques como en la Fig. 5.3.2.

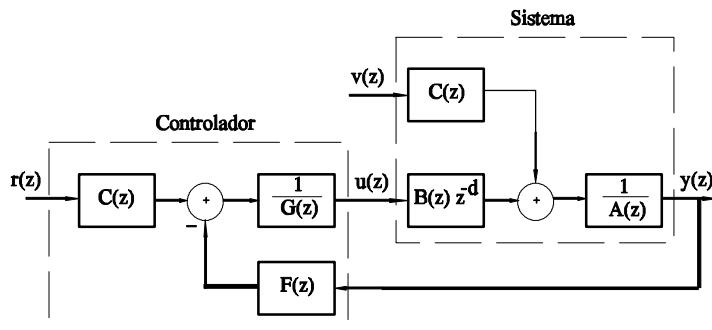


Fig. 5.3.2. Estructura del Sistema de Control Estocástico con Controlador de Varianza Mínima.

Si en el índice de desempeño dado por la Ec. 5.3-5 no se pesa la acción de control $u(k)$; esto es $p = 0$, la Ec. 5.3-14 se transforma en

$$G(q) = B(q) D(q) \quad (5.3-17)$$

Con esta expresión para $G(q)$ la Ec. 5.3-16 del controlador de varianza mínima se transforma en el Controlador Estocástico de Varianza Mínima Simple.

5.3.3 Condiciones de estabilidad.

La función de transferencia de lazo cerrado a partir de la Fig. 5.3.2 resulta

$$\frac{y(z)}{r(z)} = \frac{C(z) B(z) z^{-d}}{G(z) A(z) + B(z) F(z) z^{-d}}. \quad (5.3-18)$$

La ecuación característica del sistema de lazo cerrado es

$$G(z) A(z) + B(z) F(z) z^{-d} = 0 \quad (5.3-19)$$

Obteniendo $G(z)$ a partir de su expresión en variable z de la Ec. 5.3-14 queda

$$G(z) = B(z) D(z) + C(z) \frac{p}{b_0}. \quad (5.3-20)$$

Despejando $F(z)$ y aplicando la transformada Z a la Ec. 5.2-15 se obtiene

$$F(z) = [C(z) - D(z) A(z)] z^d \quad (5.3-21)$$

y reemplazando $G(z)$ y $F(z)$ en la Ec. 5.3-19 se llega

$$C(z) [A(z) \frac{p}{b_0} + B(z)] = 0. \quad (5.3-22)$$

Las raíces de $C(z)$ constituyen los polos fijos del sistema de lazo cerrado, mientras que los polos de $A(z)p/b_0 + B(z) = 0$ son los polos móviles que pueden modificarse con el controlador. Se observa que para obtener un sistema de control estable, las raíces de $C(z)$ deben encontrarse necesariamente en el interior del círculo unitario.

Para el controlador de varianza mínima simple, donde $p = 0$, la ecuación característica Ec. 5.3-22 se reduce a

$$C(z) B(z) = 0. \quad (5.3-23)$$

Esta ecuación impone además la condición que las raíces de $B(z)$ estén dentro del círculo unitario. Esto implica que el sistema a controlar debe ser de fase mínima, condición que no exige el controlador de varianza mínima generalizado cuando $p \neq 0$.

5.4 Modelos de Estado para Sistemas Estocásticos de Tiempo Discreto.

5.4.1 Extensión del modelo de estado determinístico para sistemas estocásticos.

Frecuentemente los sistemas se ven expuestos a perturbaciones que no se pueden describir analíticamente y por lo tanto no es posible conocer su evolución futura como en el caso de los sistemas determinísticos estudiados. En esta circunstancia, las señales aleatorias de perturbación deberán ser tratadas estadísticamente. Por otra parte, el estado también se verá afectado aleatoriamente y por lo tanto tendrá una función de distribución de probabilidad.

Una extensión natural del concepto de estado para sistemas determinísticos a los sistemas estocásticos, es exigir que la función de distribución de probabilidad del vector de estado, en el futuro, sólo dependa del valor actual del estado. Una forma de transformar la ecuación de estado determinística Ec. 3.7-25 en una ecuación estocástica, es suponer que $x(k+1)$ es una variable aleatoria que depende de $x(k)$ y de k . Es decir

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] + \mathbf{e}[\mathbf{x}(k), k] \quad (5.4-1)$$

donde \mathbf{f} es el valor medio de la función de distribución de probabilidad condicional de \mathbf{x} y \mathbf{e} es una secuencia de vectores aleatorios con distribución gaussiana con valor medio

$$\mathbf{m}_e[\mathbf{x}(k), k] = E\{\mathbf{e}[\mathbf{x}(k), k]\} = \mathbf{0} \quad (5.4-2)$$

y matriz de covarianza

$$\mathbf{R}_{ee}[\mathbf{x}(k-m), k-m] = E\{\mathbf{e}[\mathbf{x}(k), k] \mathbf{e}^T[\mathbf{x}(m), m]\}. \quad (5.4-3)$$

Si las componentes de \mathbf{e} son estadísticamente independientes, entonces la matriz de covarianza \mathbf{R}_{ee} , para $m = 0$, toma la forma

$$\mathbf{R}_{ee}[\mathbf{x}(k), k] = \text{diag}\left\{\sigma_{e1}^2[\mathbf{x}(k), k], \dots, \sigma_{en}^2[\mathbf{x}(k), k]\right\} \quad (5.4-4)$$

donde σ_{ei}^2 es la varianza de la componente i-ésima del vector aleatorio \mathbf{e} y proporciona una medida de la potencia de la señal aleatoria o de ruido que afecta el sistema.

El vector \mathbf{e} se puede modelar de manera que provenga de otro vector de ruido que tenga valor medio nulo y matriz de covarianza unitaria, esto es

$$\mathbf{e}[\mathbf{x}(k), k] = \mathbf{F}[\mathbf{x}(k), k] \mathbf{v}[\mathbf{x}(k), k] \quad (5.4-5)$$

se cumple con

$$\mathbf{m}_v[\mathbf{x}(k), k] = E\{\mathbf{v}[\mathbf{x}(k), k]\} = \mathbf{0} \quad (5.4-6)$$

$$\mathbf{R}_{vv}[\mathbf{x}(k), k] = E\{\mathbf{v}[\mathbf{x}(k), k] \mathbf{v}^T[\mathbf{x}(k), k]\} = \mathbf{I} \quad (5.4-7)$$

reemplazando la Ec. 5.4-5 en la Ec. 5.4-2 y la Ec. 5.4-3

$$\mathbf{m}_e[\mathbf{x}(k), k] = \mathbf{F}[\mathbf{x}(k), k] E\{\mathbf{v}[\mathbf{x}(k), k]\} \quad (5.4-8)$$

$$\mathbf{R}_{ee}[\mathbf{x}(k), k] = \mathbf{F}[\mathbf{x}(k), k] E\{\mathbf{v}[\mathbf{x}(k), k] \mathbf{v}^T[\mathbf{x}(k), k]\} \mathbf{F}^T[\mathbf{x}(k), k]. \quad (5.4-9)$$

Comparando las Ecs. 5.4-8 y 5.4-9 con las Ecs. 5.4-6 y 5.4-7 se deduce que

$$\mathbf{m}_e[\mathbf{x}(k), k] = \mathbf{F}[\mathbf{x}(k), k] \mathbf{m}_v[\mathbf{x}(k), k] \quad (5.4-10)$$

$$\mathbf{R}_{ee}[\mathbf{x}(k), k] = \mathbf{F}[\mathbf{x}(k), k] \mathbf{R}_{vv}[\mathbf{x}(k), k] \mathbf{F}^T[\mathbf{x}(k), k]. \quad (5.4-11)$$

De esta forma se obtienen los parámetros estadísticos del vector e en función de los del vector v . Reemplazando los valores definidos para éstos, las ecuaciones quedan

$$\mathbf{m}_e[\mathbf{x}(k), k] = \mathbf{0} \quad (5.4-12)$$

$$\mathbf{R}_{ee}[\mathbf{x}(k), k] = \mathbf{F}[\mathbf{x}(k), k] \mathbf{F}^T[\mathbf{x}(k), k]. \quad (5.4-13)$$

Por lo tanto conocida la matriz de covarianza del vector aleatorio que afecta al sistema, éste se puede modelar de manera que el vector aleatorio de entrada tenga componentes estadísticas con distribución gaussiana normal $(0, 1)$.

La matriz \mathbf{F} se obtiene descomponiendo \mathbf{R}_{ee} , para el caso particular dado por Ec. 5.4-4 tomando la forma

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}(k), k] = \text{diag}\{\sigma_{e1}[\mathbf{x}(k), k], \sigma_{e2}[\mathbf{x}(k), k], \dots, \sigma_{en}[\mathbf{x}(k), k]\}. \quad (5.4-14)$$

Para que la función de distribución de probabilidad condicional $\mathbf{x}(k+1)$ dado $\mathbf{x}(k)$, sea estadísticamente independiente de los valores pasados de \mathbf{x} , la función de distribución condicional de $e[\mathbf{x}(k), k]$ dado $\mathbf{x}(k)$, tampoco debe depender del pasado de \mathbf{x} . Sólo cumpliendo estas condiciones la Ec. 5.4-1 recibe el nombre de **ecuación matricial-vectorial estocástica en diferencia** y es un **proceso aleatorio de Markov**.

Si la función vectorial f en la Ec. 5.4-1 es lineal en \mathbf{x} y en \mathbf{u} , y el vector de ruido e no depende de \mathbf{x} , la Ec. 5.4-1 se puede escribir como

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{F}(k) \mathbf{v}(k) \quad (5.4-15)$$

con parámetros estadísticos

$$\mathbf{m}_v = \mathbf{E}\{\mathbf{v}(k)\} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{vv} = \mathbf{E}\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(k)\} = \mathbf{I}$$

para el vector e será

$$\mathbf{m}_e(k) = \mathbf{F}(k) \mathbf{m}_v(k) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{ee}(k) = \mathbf{F}(k) \mathbf{R}_{vv}(k) \mathbf{F}^T(k) = \mathbf{F}(k) \mathbf{F}^T(k).$$

De igual modo que para el vector de estado, la ecuación determinística para la salida (Ec. 3.7-25), se puede transformar en una ecuación estocástica. El vector de salida estocástico estará dado por la Ec. 5.4-16

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] + \mathbf{z}[\mathbf{y}(k), k] \quad (5.4-16)$$

donde \mathbf{z} es un vector aleatorio independiente de e , que afecta a la salida y cuyos parámetros estadísticos son

$$\mathbf{m}_z[\mathbf{y}(k), k] = E\{\mathbf{z}[\mathbf{y}(k), k]\} = \mathbf{0} \quad (5.4-17)$$

$$\mathbf{R}_{zz}[\mathbf{y}(k), k] = E\{\mathbf{z}[\mathbf{y}(k), k] \mathbf{z}^T[\mathbf{y}(k), k]\}. \quad (5.4-18)$$

De igual manera, como se trató al vector aleatorio de estado e , el vector aleatorio de salida \mathbf{z} se puede modelar dando como resultado.

$$\mathbf{z}[\mathbf{y}(k), k] = \mathbf{G}[\mathbf{y}(k), k] \mathbf{w}[\mathbf{y}(k), k] \quad (5.4-19)$$

donde \mathbf{w} es un vector aleatorio con

$$\mathbf{m}_w[\mathbf{y}(k), k] = E\{\mathbf{w}[\mathbf{y}(k), k]\} = \mathbf{0} \quad (5.4-20)$$

$$\mathbf{R}_{ww}[\mathbf{y}(k), k] = E\{\mathbf{w}[\mathbf{y}(k), k] \mathbf{w}^T[\mathbf{y}(k), k]\} = \mathbf{I} \quad (5.4-21)$$

de manera que para \mathbf{z} se obtiene

$$\mathbf{m}_z[\mathbf{z}(k), k] = \mathbf{G}[\mathbf{y}(k), k] \mathbf{m}_w[\mathbf{y}(k), k] \quad (5.4-22)$$

$$\mathbf{R}_{zz}[\mathbf{y}(k), k] = \mathbf{G}[\mathbf{y}(k), k] \mathbf{R}_{ww}[\mathbf{y}(k), k] \mathbf{G}^T[\mathbf{y}(k), k] \quad (5.4-23)$$

y reemplazando los valores dados en las Ecs. 5.4-20 y 5.4-21 en las Ecs. 5.4-22 y 5.4-23

$$\mathbf{m}_z[\mathbf{y}(k), k] = \mathbf{0} \quad (5.4-24)$$

$$\mathbf{R}_{zz}[\mathbf{y}(k), k] = \mathbf{G}[\mathbf{y}(k), k] \mathbf{G}^T[\mathbf{y}(k), k]. \quad (5.4-25)$$

Si las componentes de \mathbf{z} son estadísticamente independientes, la matriz \mathbf{R}_{zz} tiene la forma

$$\mathbf{R}_{zz}[\mathbf{y}(k), k] = \text{diag} [\sigma_{z1}^2[\mathbf{y}(k), k], \dots, \sigma_{zn}^2[\mathbf{y}(k), k]] \quad (5.4-26)$$

y por lo tanto \mathbf{G}

$$\mathbf{G}[\mathbf{y}(k), k] = \text{diag} [\sigma_{z1}[\mathbf{y}(k), k], \dots, \sigma_{zn}[\mathbf{y}(k), k]] \quad (5.4-27)$$

si \mathbf{G} es lineal en \mathbf{x} y en \mathbf{u} , y \mathbf{z} es independiente de \mathbf{y} , la Ec. 5.4-16 se puede escribir

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{w}(k). \quad (5.4-28)$$

Con parámetros estadísticos

$$\mathbf{m}_w(k) = \mathbf{E}\{\mathbf{w}(k)\} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{ww}(k) = \mathbf{E}\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(k)\} = \mathbf{I}$$

para el vector \mathbf{z}

$$\mathbf{m}_z(k) = \mathbf{G}(k) \mathbf{m}_w(k) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{zz}(k) = \mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww}(k) \mathbf{G}^T(k) = \mathbf{G}(k) \mathbf{G}^T(k)$$

En la Fig. 5.4.1 se muestra una representación en diagrama de bloques de las Ecs. 5.4-15 y 5.4-28

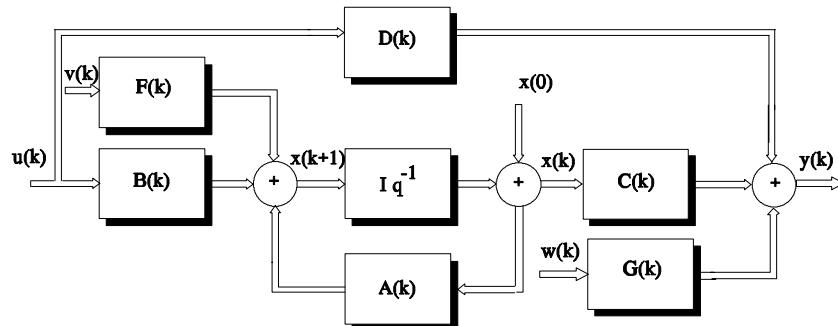


Fig. 5.4.1. Diagrama de bloques del sistema lineal estocástico de tiempo discreto.

Si el sistema es invariante y los vectores aleatorios son estacionarios, las Ecs. 5.4-15 y 5.4-28 se transforman en

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{F}v(k) \quad (5.4-29)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) + \mathbf{G}w(k) \quad (5.4-30)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_v &= \mathbf{0}; \mathbf{R}_{vv} = I \\ \mathbf{m}_w &= \mathbf{0}; \mathbf{R}_{ww} = I. \end{aligned}$$

5.4.2 Solución de la ecuación en diferencias de estado para sistemas estocásticos.

La solución de una ecuación en diferencias para sistemas determinísticos, consiste en obtener el valor de estado \mathbf{x} en todo instante. En forma semejante resolver la ecuación en diferencias para sistemas estocásticos significa conocer la distribución de probabilidad conjunta de las variables de estado, en todo instante.

Suponiendo conocida la distribución de probabilidad conjunta de $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)$ (condiciones iniciales); se puede calcular la distribución condicional de $\mathbf{x}(1)$ dado $\mathbf{x}(0)$; puesto que $\mathbf{x}(1)$ está dado como una función de $\mathbf{x}(0)$ y $v(0)$. Si la función de distribución de $\mathbf{x}(0)$ es conocida, la distribución conjunta se puede encontrar aplicando el teorema de Bayes.

$$p[x(k), x(k-1), \dots, x(0)] = p[x(k)/x_{(k-1)}] \dots p[x(1)/x_{(0)}] p[x(0)] \quad (5.4-31)$$

Admitiendo que el vector de estado inicial $x(0)$ tiene una distribución gaussiana, entonces x es un proceso gaussiano, puesto que se forma por combinación lineal de variables aleatorias que tienen esa distribución; lo mismo sucede con el vector de salida y formado por la combinación lineal de variables aleatorias con la misma distribución. Entonces los procesos estocásticos x, y quedan completamente caracterizados por su función de valor medio y su función de covarianza.

Para la función de valor medio se tiene

$$m_x(k+1) = E\{x(k+1)\} \quad (5.4.32)$$

reemplazando la Ec. 5.4-15 en la Ec. 5.4-32

$$\begin{aligned} m_x(k+1) &= E\{A(k)x(k) + B(k)u(k) + F(k)v(k)\} = \\ &= A(k)E\{x(k)\} + B(k)E\{u(k)\} + F(k)E\{v(k)\} \\ m_x(k+1) &= A(k)m_x(k) + B(k)m_u(k) + F(k)m_v(k) \end{aligned} \quad (5.4-33)$$

Si el sistema es invariante y el vector v es estacionario

$$m_x(k+1) = A m_x(k) + B m_u(k) + F m_v(k) \quad (5.4-34)$$

cuya solución es

$$m_x(k) = A^k m_x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B m_u(i) + F m_v(k) \quad (5.4-35)$$

con valor inicial

$$m_x(0) = E\{x(0)\} = m_0 \quad (5.4-36)$$

y para el vector de salida

$$m_y(k) = E\{y(k)\} \quad (5.4-37)$$

Reemplazando la Ec. 5.4-28 en la Ec. 5.4-37

$$m_y(k) = C(k)E\{x(k)\} + D(k)E\{u(k)\} + G(k)E\{w(k)\}$$

y por lo tanto queda

$$\mathbf{m}_y(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{m}_x(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{m}_u(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{m}_w(k) \quad (5.4-38)$$

Si el sistema es invariante y el proceso estacionario

$$\mathbf{m}_y(k) = \mathbf{C} \mathbf{m}_x(k) + \mathbf{D} \mathbf{m}_u(k) + \mathbf{G} \mathbf{m}_w(k) \quad (5.4-39)$$

reemplazando la Ec. 5.4-35 en la Ec. 5.4-39

$$\mathbf{m}_y(k) = \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{m}_x(0) + \mathbf{D} \mathbf{m}_u(k) + \mathbf{G} \mathbf{m}_w(k) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B} \mathbf{m}_u(i) + \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{I} \quad (5.4-40)$$

Las Ecs. 5.4-33, 5.4-34, 5.4-35, 5.4-38, 5.4-39, y 5.4-40 son análogas a las Ecs. 3.7-23, 3.7-24, 3.7-28 y 3.7-30 respectivamente, correspondientes a sistemas determinísticos.

Cuando el valor medio de los vectores aleatorios \mathbf{v} y \mathbf{w} son nulos quedan

$$\mathbf{m}_x(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{m}_x(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{m}_u(k). \quad (5.4-41)$$

Si el sistema es invariante

$$\mathbf{m}_x(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{m}_x(k) + \mathbf{B} \mathbf{m}_u(k) \quad (5.4-42)$$

$$\mathbf{m}_x(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{m}_x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B} \mathbf{m}_u(i). \quad (5.4-43)$$

De igual modo

$$\mathbf{m}_y(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{m}_x(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{m}_u(k). \quad (5.4-44)$$

Si el sistema es invariante

$$\mathbf{m}_y(k) = \mathbf{C} \mathbf{m}_x(k) + \mathbf{D} \mathbf{m}_u(k) \quad (5.4-45)$$

$$\mathbf{m}_y(k) = \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{m}_x(0) + \mathbf{D} \mathbf{m}_u(k) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B} \mathbf{m}_u(i).$$

En la Fig. 5.4.2 se muestra una representación del modelo, en diagrama de bloques de las Ecs. 5.4-33 y 5.4-38, referidas a los valores medios, el cual es análogo al mostrado en la Fig. 5.4.1, referido al modelo de estado estocástico.

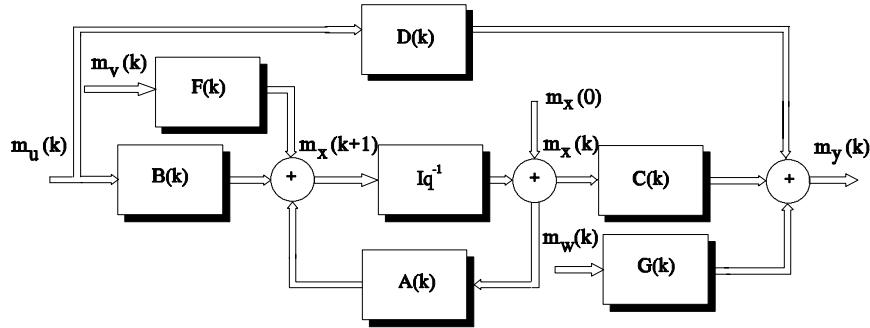


Fig. 5.4.2. Diagrama de bloques que representa a las Ecs. 5.4-33 y 5.4-38.

Para la función de covarianza del vector de estado se tiene

$$\mathbf{R}_{xx}(k+1) = \mathbf{E}\{[\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{m}_x(k+1)][\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{m}_x(k+1)]^T\}. \quad (5.4-47)$$

Reordenando la Ec. 5.4-47

$$\mathbf{R}_{xx}(k+1) = \mathbf{E}\{ \mathbf{x}(k+1) \mathbf{x}^T(k+1) \} - \mathbf{m}_x(k+1) \mathbf{m}_x^T(k+1). \quad (5.4-48)$$

reemplazando la Ec. 5.4-15 en la Ec. 5.4-48 y considerando además que ν es estadísticamente independiente de u y x ; y que $\mathbf{m}_v(k) = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx}(k+1) &= \mathbf{A}(k) \mathbf{R}_{xx}(k) \mathbf{A}^T(k) + \mathbf{A}(k) \mathbf{R}_{xu}(k) \mathbf{B}^T(k) + \\ &+ \mathbf{B}(k) \mathbf{R}_{ux}(k) \mathbf{A}^T(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{R}_{uu}(k) \mathbf{B}^T(k) + \\ &+ \mathbf{F}(k) \mathbf{R}_{vv}(k) \mathbf{F}^T(k) - \mathbf{m}_x(k+1) \mathbf{m}_x^T(k+1) \end{aligned} \quad (5.4-49)$$

para sistemas invariantes y vector aleatorio ν estacionario se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx}(k+1) &= \mathbf{A} \mathbf{R}_{xx}(k) \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{R}_{xu}(k) \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \mathbf{R}_{ux}(k) \mathbf{A}^T + \\ &+ \mathbf{B} \mathbf{R}_{uu}(k) \mathbf{B}^T + \mathbf{F} \mathbf{R}_{vv} \mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (5.4-50)$$

con valor inicial

$$\mathbf{R}_{xx}(0) = E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{x}^T(0)\} - \mathbf{m}_0\mathbf{m}_0^T = \mathbf{R}_0.$$

Suponiendo que el valor de las entradas es cero, lo que implica

$$\mathbf{R}_{xu}(k) = \mathbf{R}_{ux}(k) = \mathbf{R}_{uu}(k) = \mathbf{0}$$

y utilizando la Ec. 5.4-13, la Ec. 5.4-49 se reduce a

$$\mathbf{R}_{xx}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{R}_{xx}(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{R}_{ee}(k). \quad (5.4-51)$$

con el valor inicial

$$\mathbf{R}_{xx}(0) = E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{x}^T(0)\} = \mathbf{R}_0$$

Si el sistema es invariante y el vector aleatorio \mathbf{e} es estacionario, la Ec. 5.4-51 se transforma en

$$\mathbf{R}_{xx}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{R}_{xx}(k)\mathbf{A}^T + \mathbf{R}_{ee}. \quad (5.4-52)$$

Desarrollando la Ec. 5.4-52 para $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} k=0 \quad \mathbf{R}_{xx}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{xx}(0)\mathbf{A}^T + \mathbf{R}_{ee} = \mathbf{A}\mathbf{R}_0\mathbf{A}^T + \mathbf{R}_{ee} \\ k=1 \quad \mathbf{R}_{xx}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{xx}(1)\mathbf{A}^T + \mathbf{R}_{ee} = \mathbf{AA}\mathbf{R}_{xx}(0)\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{R}_{ee}\mathbf{A} \\ k=2 \quad \mathbf{R}_{xx}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{xx}(2)\mathbf{A}^T + \mathbf{R}_{ee} = \mathbf{AAA}\mathbf{R}_{xx}(0)\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T + \\ &\quad + \mathbf{AA}\mathbf{R}_{ee}\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{R}_{ee}\mathbf{A}^T + \mathbf{R}_{ee} \\ &\quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

para k genérico

$$\mathbf{R}_{xx}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{R}_{xx}(0)(\mathbf{A}^T)^k + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1}\mathbf{R}_{ee}(\mathbf{A}^T)^{k-i-1}. \quad (5.4-53)$$

Si todos los autovalores de la matriz \mathbf{A} tienen módulo estrictamente menor que 1 entonces la serie Ec. 5.4-52 converge a un valor finito

$$\mathbf{R}_{xx} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{R}_{xx}(k)$$

por lo tanto la Ec. 5.4-52 toma la forma

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{A} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A}^T + \mathbf{R}_{ee}. \quad (5.4-54)$$

La Ec. 5.4-52 se denomina **ecuación matricial en diferencias de Liapunov** y la Ec. 5.4-54 **ecuación matricial de Liapunov en estado estacionario o ecuación algebraica de Liapunov**.

De esta manera se observa que conociendo la matriz \mathbf{A} del sistema y la matriz de covarianza del vector aleatorio que afecta al sistema, se puede determinar el valor medio y la matriz de covarianza del estado, en cualquier instante. Con ello queda completamente definida la caracterización estadística del mismo.

Para el vector de salida se define

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}(k) &= E\{[\mathbf{y}(k) - \mathbf{m}_y(k)][\mathbf{y}(k) - \mathbf{m}_y(k)]^T\} \\ &= E\{\mathbf{y}(k) \mathbf{y}^T(k)\} - \mathbf{m}_y(k) \mathbf{m}_y^T(k) \end{aligned} \quad (5.4-55)$$

reemplazando las Ecs. 5.4-28 y 5.4-38 en la Ec. 5.4-55

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}(k+1) &= \mathbf{C}(k) \mathbf{R}_{xx}(k) \mathbf{C}^T(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{R}_{xu}(k) \mathbf{D}^T(k) + \\ &+ \mathbf{D}(k) \mathbf{R}_{ux}(k) \mathbf{C}^T(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{R}_{uu}(k) \mathbf{D}^T(k) + \\ &+ \mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww}(k) \mathbf{G}^T(k) - \mathbf{m}_y(k) - \mathbf{m}_y^T(k) \end{aligned} \quad (5.4-56)$$

con valor inicial

$$\mathbf{R}_{xx}(0) = E\{\mathbf{x}(0) \mathbf{x}^T(0)\} - \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0^T = \mathbf{R}_0.$$

Para sistemas invariantes y vector aleatorio w estacionario se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}(k+1) &= \mathbf{C} \mathbf{R}_{xx}(k) \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \mathbf{R}_{xu}(k) \mathbf{D}^T + \mathbf{D} \mathbf{R}_{ux}(k) \mathbf{C}^T + \\ &+ \mathbf{D} \mathbf{R}_{uu}(k) \mathbf{D}^T + \mathbf{G} \mathbf{R}_{ww} \mathbf{G}^T. \end{aligned} \quad (5.4-57)$$

Suponiendo que el valor de las entradas es cero, lo que implica

$$\mathbf{R}_{xu}(k) = \mathbf{R}_{ux}(k) = \mathbf{R}_{uu}(k) = \mathbf{0}$$

y utilizando la Ec. 5.4-25, la Ec. 5.4-57 queda

$$\mathbf{R}_{yy}(k) = \mathbf{C} \mathbf{R}_{xx}(k) \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{zz} \quad (5.4-58)$$

reemplazando la Ec. 5.4-53 en la Ec. 5.4-58

$$\mathbf{R}_{yy}(k) = \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{R}_{xx}(0) (\mathbf{A}^T)^k \mathbf{C}^T + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^i \mathbf{R}_{ee} (\mathbf{A}^T)^i \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{zz} \quad (5.4-59)$$

si los valores de \mathbf{A} tienen módulo estrictamente menor que 1 entonces la Ec. 5.4-58 converge a un valor finito

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \mathbf{R}_{ee} \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{zz}. \quad (5.4-60)$$

La Ec. 5.4-60 constituye la matriz de covarianza de la salida, en estado estacionario. Las Ecs. 5.4-49, 5.4-50, 5.4-53, 5.4-56, 5.4-57 y 5.4-59 son análogas en estructura a las Ecs. 3.7-23, 3.7-24, 3.7-28, 3.7-30 obtenidas para los sistemas determinísticos.

5.5 Diseño de Controladores de Estado para Sistemas Estocásticos Lineales.

5.5.1 Formulación del problema de control para sistemas estocásticos

Si se toma el índice de desempeño de la Ec. 4.6-58 definido en el capítulo anterior, para obtener una ley de control óptimo, cuando se trata de un sistema estocástico lineal de tiempo discreto, modelado por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{F}(k) \mathbf{v}(k) \quad (5.5-1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{w}(k) \quad (5.5-2)$$

donde $\mathbf{v}(k), \mathbf{w}(k)$ son vectores aleatorios con

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(k)\} &= E\{\mathbf{w}(k)\} = \mathbf{0} \\ E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(k)\} &= E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(k)\} = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(n)\} &= E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(n)\} = \mathbf{0} \quad \forall n \neq k \\ E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{w}^T(k)\} &= E\{\mathbf{x}(k) \mathbf{v}^T(k)\} = E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{w}^T(k)\} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

para todo valor de k ; y con parámetro estadístico para el estado inicial,

$$\begin{aligned} E\{[\mathbf{x}(0)]\} &= \mathbf{m}_0 \\ E\{[\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0][\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0]^T\} &= \mathbf{R}_0 \end{aligned}$$

se presentará el inconveniente, que como el vector de estado es aleatorio, entonces el índice también lo es, y por lo tanto no hay forma de establecer el valor mínimo del mismo. Por este motivo se define un nuevo índice de desempeño como algún parámetro estadístico de la Ec. 4.6-58, por ejemplo el valor medio,

$$J = E\{J_m(\mathbf{x}, \mathbf{u})\} = E\{\mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)\} \quad (5.5-3)$$

con \mathbf{S} y \mathbf{Q} simétricas y semidefinidas positivas y \mathbf{R} simétrica y definida positiva.

De esta manera el problema del **Regulador Óptimo Lineal Estocástico (LQGR)** se puede formular como:

Dado un sistema estocástico lineal de tiempo discreto modelado en el espacio de estado con Ecs. 5.5-1 y 5.5-2; se debe encontrar una ley de control \mathbf{u} , que modifique el estado llevándolo desde un valor inicial $\mathbf{x}(0)$ a uno final $\mathbf{x}(N) = \mathbf{0}$ y que simultáneamente haga mínimo el índice de desempeño de Ec. 5.5-3.

5.5-2 Solución al problema del regulador óptimo lineal estocástico.

Suponiendo que se ha medido el vector de estado y se tiene $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(k)$ se debe determinar el vector de entrada $\mathbf{u}(k)$.

Puesto que la Ec. 5.5-1 es una ecuación estocástica matricial-vectorial en diferencias, la función de distribución de probabilidad condicional de los valores futuros del estado, dado los valores pasados del mismo, sólo dependen del valor actual $\mathbf{x}(k)$. Por lo tanto es suficiente obtener $\mathbf{u}(k)$, como función de $\mathbf{x}(k)$ y no de los valores pasados $\mathbf{x}(k-1), \dots, \mathbf{x}(0)$.

Siguiendo la misma metodología que para el índice de Ec. 5.5-3 se puede descomponer en dos partes de la siguiente manera

$$\begin{aligned} J_m &= E\{J(\mathbf{x}, \mathbf{u})\} = E\{\mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \sum_{i=k}^{N-1} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i)\} \\ &\quad + E\{\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i)\} \end{aligned} \quad (5.5-4)$$

donde el segundo término no es necesario minimizar puesto que no depende de $u(k), u(k+1), \dots, u(N-1)$. Entonces se obtiene

$$\begin{aligned} \min_u J_m &= \min_u E\{J(x, u)\} = \min_u E\{x^T(N) S x(N) + \\ &\quad + \sum_{i=k}^{N-1} x^T(i) Q x(i) + u^T(i) R u(i)\} \end{aligned} \quad (5.5-5)$$

Si se indica con u° la función vectorial que hace mínimo el índice de desempeño; y se considera que esta tiene un mínimo único se puede escribir

$$E\{J(x, u)\} \geq E\{J(x, u^\circ)\} = \min_u [E\{J(x, u)\}]. \quad (5.5-6)$$

Por otra parte también se cumple

$$J(x, u) \geq J(x, u^\circ) = \min_u J(x, u). \quad (5.5-7)$$

Tomando esperanza matemática en todos los miembros

$$E\{J(x, u)\} \geq E\{J(x, u^\circ)\} = E\{\min_u [J(x, u)]\}. \quad (5.5-8)$$

Minimizando la expresión dada por la Ec. 5.5-8 respecto de u y teniendo en cuenta que el segundo y tercer término son constantes se tiene

$$\min_u [E\{J(x, u)\}] \geq E\{J(x, u^\circ)\} = E\{\min_u [J(x, u)]\}.$$

Comparando las Ecs. 5.5-6 y 5.5-9 se tiene

$$\min_u [E\{J(x, u)\}] = E\{\min_u [J(x, u)]\}. \quad (5.5-10)$$

Esta última expresión indica que cuando el índice de desempeño tiene un mínimo único, las operaciones de **minimización** y de **cálculo de esperanza matemática** son comutables. Entonces la Ec. 5.5-5 toma la forma

$$\min_{\mathbf{u}} J_m = E \left\{ \min_{\mathbf{u}} [J(\mathbf{x}, \mathbf{u})] \right\} = E \left\{ \min_{\mathbf{u}} \left[\mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i) \right] \right\}. \quad (5.5-11)$$

Es decir que, minimizar el índice de desempeño estocástico dado por Ec. 5.5-4 es equivalente a minimizar el índice determinístico y luego calcular la esperanza matemática. De esta manera se ha trasladado el problema de minimización de un índice estocástico al caso de minimización de un índice determinístico. Por lo tanto se utiliza el mismo procedimiento visto en el punto 4.6.2 aplicando el principio de optimización de Bellman. Tomando como punto de partida la ecuación

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \sum_{i=k}^{N-1} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i) \quad (5.5-12)$$

ésta se puede descomponer en

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N-1) + \mathbf{u}^T(N-1) \mathbf{R} \mathbf{u}(N-1) + \\ &+ \sum_{i=k}^{N-2} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i). \end{aligned} \quad (5.5-13)$$

Para $k+1 = N$ se tiene

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{A}(N-1) \mathbf{x}(N-1) + \mathbf{B}(N-1) \mathbf{u}(N-1) + \mathbf{F}(N-1) \mathbf{v}(N-1) \quad (5.5-14)$$

Reemplazando la Ec. 5.5-14 en la Ec. 5.5-13 y haciendo

$$\min J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = J(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)$$

Teniendo en cuenta que, dada una matriz \mathbf{X} y dos vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} se verifica

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{X} \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{X} \mathbf{y}; \quad \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{X} \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{X}^T \mathbf{x}; \quad \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{X} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{X} \mathbf{x} \quad (5.5-15)$$

(la tercera propiedad sólo es válida si \mathbf{X} es simétrica)
se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}(N-1)} &= 2 \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} [\mathbf{A}(N-1) \mathbf{x}(N-1) + \mathbf{F}(N-1) \mathbf{v}(N-1)] + \\ &+ 2 \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1) \mathbf{u}(N-1) + 2 \mathbf{R} \mathbf{u}(N-1) = 0 \end{aligned} \quad (5.5-16)$$

Despejando \mathbf{u} se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(N-1) &= -[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1)]^{-1} \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} [\mathbf{A}(N-1) \mathbf{x}(N-1) \\ &+ \mathbf{F}(N-1) \mathbf{v}(N-1)]. \end{aligned} \quad (5.5-17)$$

reemplazando las Ecs. 5.5-14 y 5.5-17 en la Ec. 5.5-13 y reordenando

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(N-1)} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= [\mathbf{A}(N-1) \mathbf{x}(N-1) + \mathbf{F}(N-1) \mathbf{v}(N-1)]^T \mathbf{H}(N-1) \cdot \\ &\cdot [\mathbf{A}(N-1) \mathbf{x}(N-1) + \mathbf{F}(N-1) \mathbf{v}(N-1)] + \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{x}(N-1) \\ &+ \sum_{i=k}^{N-2} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i) \end{aligned} \quad (5.5-18)$$

$$\mathbf{H}(N-1) = \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1) [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1)]^{-1} \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \quad (5.5-19)$$

agrupando los términos en $\mathbf{x}(N-1)$ y $\mathbf{v}(N-1)$, definiendo

$$\mathbf{P}(N-1) = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T(N-1) \mathbf{H}(N-1) \mathbf{A}(N-1) \quad (5.5-20)$$

y aplicando esperanza matemática en la Ec. 5.5-18 se obtiene

$$\begin{aligned} E\left\{ \min_{\mathbf{u}(N-1)} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right\} &= E\left\{ \mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \sum_{i=k}^{N-2} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i) \right\} + \\ &+ E\left\{ \mathbf{v}^T(N-1) \mathbf{F}^T(N-1) \mathbf{H}(N-1) \mathbf{F}(N-1) \mathbf{v}(N-1) \right\} + \\ &+ 2 E\left\{ \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{A}^T(N-1) \mathbf{H}(N-1) \mathbf{F}(N-1) \mathbf{v}(N-1) \right\} \end{aligned} \quad (5.5-21)$$

Reemplazando la Ec. 4.5-19 en la Ec. 5.5-20 se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N-1) &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{A}(N-1) - \mathbf{A}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1) \\ &[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1)]^{-1} \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{A}(N-1). \end{aligned} \quad (5.5-22)$$

Por otra parte, se puede demostrar que dada las formas bilineal y cuadrática ($\mathbf{z}^T \mathbf{X} \mathbf{y}$) y ($\mathbf{z}^T \mathbf{X} \mathbf{z}$) respectivamente, con matriz \mathbf{X} simétrica; la esperanza matemática es

$$E\{\mathbf{z}^T \mathbf{X} \mathbf{y}\} = \mathbf{m}_z^T \mathbf{X} \mathbf{m}_y + \text{tr}[\mathbf{X} \mathbf{R}_{zy}] \quad (5.5-23)$$

$$E\{\mathbf{z}^T \mathbf{X} \mathbf{z}\} = \mathbf{m}_z^T \mathbf{X} \mathbf{m}_z + \text{tr}[\mathbf{X} \mathbf{R}_{zz}] \quad (5.5-24)$$

Aplicando las propiedades de las Ecs. 5.5-23 y 5.5-24 al segundo y tercer término de la Ec. 5.5-21 y teniendo en cuenta que $\mathbf{R}_{yy}(k) = \mathbf{I}$ y $\mathbf{m}_y(k) = \mathbf{0}$ se obtiene

$$\begin{aligned} E\left\{\min_{\mathbf{u}(N-1)} J(\mathbf{x}, \mathbf{u})\right\} &= E\{\mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{P}(n-1) \mathbf{x}(N-1)\} + \\ &+ E\left\{\sum_{i=k}^{N-2} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i)\right\} + \\ &+ \text{tr}[\mathbf{F}^T(N-1) \mathbf{H}(N-1) \mathbf{F}(N-1)] \end{aligned} \quad (5.5-25)$$

Se procede a continuación a minimizar para $\mathbf{u}(N-2)$, se aplica entonces la propiedad expresada en Ec. 5.5-10 a la Ec. 5.5-25

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(N-2)} [E\{\min_{\mathbf{u}(N-1)} J(\mathbf{x}, \mathbf{u})\}] &= E\left\{\min_{\mathbf{u}(N-2)} [\min_{\mathbf{u}(N-1)} J(\mathbf{x}, \mathbf{u})]\right\} = \\ &= E\{\min[J_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})]\} + \text{tr}[\mathbf{F}^T(N-1) \mathbf{H}(N-1) \mathbf{F}(N-1)] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{x}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{x}(N-2) + \mathbf{x}^T(N-2) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N-2) + \\ &+ \mathbf{u}^T(N-2) \mathbf{R} \mathbf{u}(N-2) + \sum_{i=k}^{N-3} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R} \mathbf{u}(i) \end{aligned} \quad (5.5-26)$$

con

$$\mathbf{x}(N-1) = \mathbf{A}(N-2) \mathbf{x}(N-2) + \mathbf{B}(N-2) \mathbf{u}(N-2) + \mathbf{F}(N-2) \mathbf{v}(N-2) \quad (5.5-27)$$

como las Ecs. 5.5-26 y 5.5-27 son análogas a las Ecs. 5.5-13 y 5.5-14, se opera repitiendo los pasos desde Ec. 5.5-16 hasta Ec. 5.5-25 obteniéndose

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(N-2) &= -[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{B}(N-2)]^{-1} \mathbf{B}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \cdot \\ &\cdot [\mathbf{A}(N-2) \mathbf{x}(N-2) + \mathbf{F}(N-2) \mathbf{v}(N-2)] \end{aligned} \quad (5.5-28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(N-2) &= \mathbf{P}(N-1) - \mathbf{P}(N-1) \mathbf{B}(N-2) \cdot \\ &\quad \cdot [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{B}(N-2)]^{-1} \mathbf{B}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \end{aligned} \quad (5.5-29)$$

$$\mathbf{P}(N-2) = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T(N-2) \mathbf{H}(N-2) \mathbf{A}(N-2) \quad (5.5-30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N-2) &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T(N-2) \mathbf{P}(N-2) \mathbf{A}(N-2) - \mathbf{A}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{B}(N-2) \cdot \\ &\quad \cdot [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{B}(N-2)]^{-1} \mathbf{B}^T(N-2) \mathbf{P}(N-1) \mathbf{A}(N-2) \end{aligned} \quad (5.5-31)$$

$$\begin{aligned} E\left\{\min_{\substack{\mathbf{u}(N-2) \\ N-3}} J_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})\right\} &= E\{\mathbf{x}^T(N-2) \mathbf{P}(N-2) \mathbf{x}(N-2)\} + \\ &+ E\left\{\sum_{l=k}^{N-3} \mathbf{x}^T(l) \mathbf{Q} \mathbf{x}(l) + \mathbf{u}^T(l) \mathbf{R} \mathbf{u}(l)\right\} + \text{tr}[\mathbf{F}^T(N-2) \mathbf{H}(N-2) \mathbf{F}(N-2)] + \\ &+ \text{tr}[\mathbf{F}^T(N-1) \mathbf{H}(N-1) \mathbf{F}(N-1)] \end{aligned} \quad (5.5-32)$$

Continuando con la inducción para $\mathbf{u}(N-3), \mathbf{u}(N-4), \dots, \mathbf{u}(k+1), \mathbf{u}(k)$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(k) &= -[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k)]^{-1} \\ &\quad \mathbf{B}(k) \mathbf{P}(k+1) [\mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{F}(k) \mathbf{v}(k)] \end{aligned} \quad (5.5-33)$$

$$\mathbf{H}(k) = \mathbf{P}(k+1) - \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k) [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k)]^{-1} \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \quad (5.5-34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1) &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T(k) \mathbf{H}(k+1) \mathbf{A}(k) \\ \mathbf{P}(k) &= \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A}(k) - \mathbf{A}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k) \\ &\quad [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k)]^{-1} \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A}(k) \end{aligned} \quad (5.5-35)$$

$$J_m = E\left\{\min_{\mathbf{u}(k)} \left[\min_{\mathbf{u}(K-1)} \left[\dots \left[\min_{\mathbf{u}(N-1)} [J(\mathbf{x}, \mathbf{u})] \right] \dots \right] \right]\right\}$$

$$J_m = E\{\mathbf{x}^T(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{x}(k) + \sum_{l=k}^{N-1} \text{tr}[\mathbf{F}^T(l) \mathbf{H}(l) \mathbf{F}(l)]\} \quad (5.5-36)$$

$$\begin{aligned} \min J = & \mathbf{m}_x^T(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{m}_x(k) + \text{tr } \mathbf{P}(k) \mathbf{R}_{xx}(k) + \\ & + \sum_{l=k}^{N-1} \text{tr } \mathbf{F}^T(l) \mathbf{H}(l) \mathbf{F}(l). \end{aligned} \quad (5.5-37)$$

la Ec. 5.5-35 es la **ecuación matricial de Riccati** y se debe resolver para obtener el vector de control. Comparando las Ecs. 5.5-22, 5.5-31 y 5.5-35 se deduce que la condición inicial para \mathbf{P} es

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{S}. \quad (5.5-38)$$

De la Ec. 5.5-33 se concluye que la ley para obtener el vector de entrada óptimo, está formado por dos partes; la primera es una realimentación lineal del vector de estado tal como se obtiene para el regulador óptimo lineal determinístico y además una ley de prealimentación del vector aleatorio de perturbación. En la figura 5.5.1 se observa un diagrama de bloques del sistema con controlador.

Es importante destacar que se necesita conocer el vector de perturbación aleatorio; en caso que esto no sea posible, se debe hacer una predicción del mismo. Cuando la predicción no es factible se obtiene una ley incompleta con un incremento del índice J_m .

La Ec. 5.5-33 se puede escribir

$$\mathbf{u}^*(k) = -\mathbf{K}_x(k) \mathbf{x}(k) - \mathbf{K}_v(k) \mathbf{v}(k) \quad (5.5-39)$$

$$\mathbf{K}_x(k) = [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k)]^{-1} \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A}(k) \quad (5.5-40)$$

$$\mathbf{K}_v(k) = [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k)]^{-1} \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{F}(k) \quad (5.5-41)$$

la Ec. 5.5-40 es la misma que para el problema determinístico.

Si el sistema es invariante, entonces se puede obtener \mathbf{P} en estado estacionario, esto se cumple haciendo

$$\mathbf{P} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(k) \quad (5.5-42)$$

y por lo tanto se obtiene

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (5.5-43)$$

que es la ecuación matricial de Riccati en estado estacionario. Entonces la ecuación del controlador será

$$\mathbf{u}^*(k) = -[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} [\mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{F} \mathbf{v}(k)]. \quad (5.5-44)$$

Si \mathbf{F} no se conoce y se elimina de la Ec. 5.5-44, se obtiene el controlador determinístico dado por las Ecs. 4.6-90 y 4.6-91. Esto significa que dicho controlador determinístico es también la solución óptima obtenible para el caso estocástico cuando no se puede modelar el ruido.

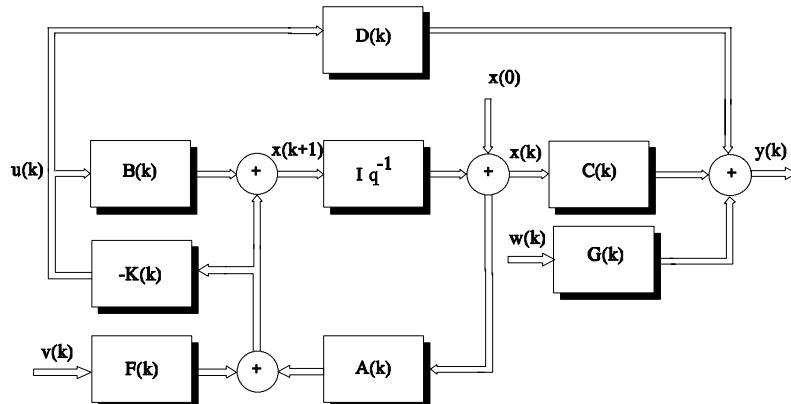


Fig.5.5.1. Sistema con ley óptima de realimentación y prealimentación del vector de perturbación.

Para la Fig. 5.5.1 se ha tomado

$$\mathbf{u}^*(k) = -\mathbf{K}(k) [\mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{F}(k) \mathbf{v}(k)] \quad (5.5-45)$$

donde

$$\mathbf{K}(k) = [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k)]^{-1} \mathbf{B}^T(k) \mathbf{P}(k+1). \quad (5.5-46)$$

Por último si se calcula la derivada segunda en la Ec. 5.5-16 se tiene

$$\frac{\partial^2 J(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}^2(N-1)} = 2[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(N-1) \mathbf{S} \mathbf{B}(N-1)] \quad (5.5-47)$$

de manera que para que el índice sea mínimo, se debe asegurar que \mathbf{S} o \mathbf{R} sean definidas positivas. Si se asegura a \mathbf{R} como definida positiva, \mathbf{S} puede ser semidefinida positiva, pero tanto \mathbf{S} como \mathbf{Q} nunca pueden ser definidas negativas porque entonces el índice J_m puede resultar negativo, lo que contradice la definición de cualquier índice de desempeño.

5.5.3 Controladores de Estado de Varianza Mínima.

En la sección anterior se estudió el problema del regulador óptimo estocástico, como una extensión del regulador óptimo lineal determinístico. Se presenta a continuación otro criterio de diseño basado en el concepto de **varianza mínima**.

Dado un sistema dinámico estocástico lineal de tiempo discreto con ecuaciones

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{F}(k) \mathbf{v}(k) \quad (5.5-48)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{w}(k) \quad (5.5-49)$$

donde $\mathbf{v}(k), \mathbf{w}(k), \mathbf{x}(k)$ son vectores aleatorios con distribución gaussiana con parámetros estadísticos

$$E\{\mathbf{v}(k)\} = E\{\mathbf{w}(k)\} = \mathbf{0} \quad (5.5-50)$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{w}^T(k)\} = E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{x}^T(k)\} = \mathbf{0} \quad (5.5-51)$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(k)\} = E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(k)\} = \mathbf{I} \quad (5.5-52)$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(n)\} = E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(n)\} = \mathbf{0} \quad \forall n \neq k \quad (5.5-53)$$

Se define entonces el índice de desempeño como la varianza del estado

$$J_m(k+1) = E\{ J(x, u) \} = E\{ x^2(k+1) \}. \quad (5.5-54)$$

Para que el vector de control no resulte con amplitudes demasiado grandes conviene incorporarlo en el índice de manera que

$$J_m(k+1) = E\{ J(x, u) \} = E\{ x^2(k+1) + r u^2(k) \} \quad (5.5-55)$$

puesto que x, u son vectores

$$J_m(k+1) = E\{ J(x, u) \} = E\{ x^T(k+1) x(k+1) + r u^T(k) u(k) \}. \quad (5.5-56)$$

Por último es importante disponer de la posibilidad de modificar cuanto influye cada componente de x y de u sobre el índice, por ello se incluyen dos matrices de peso R, Q , donde Q es simétrica y semidefinida positiva y R es simétrica y definida positiva.

$$J_m(k+1) = E\{ J(x, u) \} = E\{ x^T(k+1) Q x(k+1) + u^T(k) R u(k) \} \quad (5.5-57)$$

donde el factor r se ha incluido en la matriz R .

Se puede hacer entonces la formulación del problema como

Dado un sistema dinámico estocástico lineal de tiempo discreto modelado en el espacio de estado con Ecs. 5.5-48 y 5.5-49 se debe encontrar una ley de control u que minimice el índice de desempeño dado por la Ec. 5.5-57; o lo que es lo mismo se minimiza la varianza del vector de estado.

Para resolver el problema planteado se reemplaza la Ec. 5.5-48 en la Ec. 5.5-57; obteniéndose

$$\begin{aligned} J_m(k+1) &= E\{ [A(k) x(k) + B(k) u(k) + F(k) v(k)]^T Q [A(k) x(k) + B(k) u(k) \\ &\quad + F(k) v(k)] + u^T(k) R u(k) \} \\ J_m(x, u) &= [A(k) x(k) + B(k) u(k) + F(k) v(k)]^T Q [A(k) x(k) + B(k) u(k) \\ &\quad + F(k) v(k)] + u^T(k) R u(k) \end{aligned} \quad (5.5-58)$$

operando en la Ec. 5.5-57 y minimizando con respecto a u se tiene

$$\min_u J_m(k+1) = E\{ \min_u J(x, u) \} = E\{ J_m(x, u^*) \}$$

donde u^* se obtiene de

$$\frac{\partial J_m(x, u)}{\partial u(k)} = 0$$

teniendo en cuenta que, dada una matriz A y dos vectores x, y es

$$\frac{\partial (x^T A y)}{\partial x} = Ay; \quad \frac{\partial (x^T A y)}{\partial y} = A^T x; \quad \frac{\partial (x^T A x)}{\partial x} = 2Ax$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_m(u, x)}{\partial u(k)} &= 2B^T(k) Q [A(k)x(k) + F(k)v(k)] + \\ &+ 2B^T(k) Q B(k) u(k) + 2R u(k) = 0 \end{aligned} \quad (5.5-60)$$

despejando u se tiene

$$u^*(k) = -[R + 2B^T(k) Q B(k)]^{-1} B^T(k) Q [A(k)x(k) + F(k)v(k)] \quad (5.5-61)$$

Llamando

$$u^*(k) = -K_x(k)x(k) - K_v(k)v(k) \quad (5.5-62)$$

$$K_x(k) = [R + 2B^T(k) Q B(k)]^{-1} B^T(k) Q A(k) \quad (5.5-63)$$

$$K_v(k) = [R + 2B^T(k) Q B(k)]^{-1} B^T(k) Q F(k). \quad (5.5-64)$$

Las Ecs. 5.5-62, 5.5-63 y 5.5-64 son equivalentes en estructura que las Ecs. 5.5-39, 5.5-40 y 5.5-41 obtenidas para el controlador óptimo lineal estocástico. En este caso la matriz P que satisface la ecuación matricial de Riccati es sustituida por la matriz de peso Q .

Para el caso que el sistema sea lineal e invariante y el vector aleatorio v estacionario, la ecuación del controlador será

$$u^*(k) = -[R + 2B^T Q B]^{-1} B^T Q [A x(k) + F v(k)]. \quad (5.5-65)$$

Para la Fig. 5.5.2 se ha tomado

$$u^*(k) = K(k) [A(k)x(k) + F(k)v(k)] \quad (5.5-66)$$

donde

$$K(k) = [R + 2B^T(k)Q B(k)]^{-1} B^T(k) Q \quad (5.5-67)$$

De esta manera la ley de control óptima, en el sentido de la obtención de una varianza mínima, posee dos partes, una ley de realimentación de estado similar al caso determinístico y una ley por prealimentación del vector aleatorio de ruido que afecta al sistema.

Es importante destacar que se necesita conocer el vector de perturbación aleatorio; en caso que esto no sea posible, el mismo se debe predecir. Cuando la predicción no es factible se obtiene una ley incompleta con un incremento del índice J .

La Ec. 5.5-65 se puede obtener de la Ec. 5.5-33 si se reemplaza $P(k+1)$ por Q . Por este motivo la estructura de los controladores son iguales como se puede observar comparando la Fig. 5.5.1 y la Fig. 5.5.2.

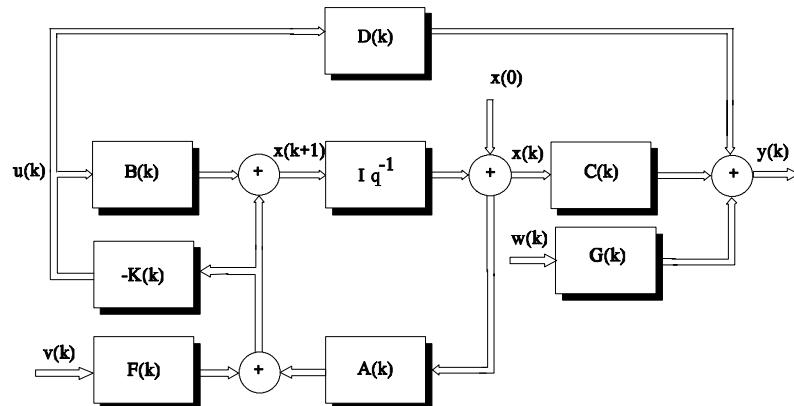


Fig.5.5.2. Sistema de control con ley óptima de realimentación de estado y ley de prealimentación del vector de perturbación para índice de mínima varianza.

5.6 Estimación de Estado.

5.6.1 Planteo general del problema.

El diseño de controladores basados en la realimentación del vector de estado supone

que las variables de estado son completamente medibles. Sin embargo, esto no sucede en la práctica, donde en general la información que se dispone del estado es incompleta o nula. Una solución a este problema es calcularlo a partir de las variables disponibles.

Este cálculo permite encontrar el vector de estado en forma exacta cuando el sistema es determinístico, pero si es estocástico sólo se podrá obtener una estimación, puesto que las variables de estado son aleatorias. La única limitación que presenta este planteo es que, para que se puedan estimar las variables de estado el sistema debe ser completamente observable.

Entonces, dado un sistema dinámico estocástico lineal de tiempo discreto con ecuaciones

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{F}(k) \mathbf{v}(k) \quad (5.6-1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{w}(k) \quad (5.6-2)$$

donde $\mathbf{v}(k), \mathbf{x}(k)$ son vectores aleatorios con distribución gaussiana con parámetros estadísticos

$$E\{\mathbf{v}(k)\} = E\{\mathbf{w}(k)\} = \mathbf{0}$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{w}^T(k)\} = E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{x}^T(k)\} = \mathbf{0}$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(k)\} = E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(k)\} = \mathbf{I}$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(n)\} = E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(n)\} = \mathbf{0} \quad \forall n \neq k$$

y con parámetros estadísticos de estado inicial

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}(0)\} &= \mathbf{m}_0 \\ E\{[\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0][\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0]^T\} &= \mathbf{R}_0 \end{aligned}$$

que además cumple con la condición de observabilidad y del cual sólo se pueden medir la variables \mathbf{u} e \mathbf{y} ; se formula un estimador de estado estocástico con un procedimiento igual al utilizado para el observador de Luenberger (sección 4.7.1), obteniéndose las ecuaciones

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{T}(k) [\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)] \quad (5.6-3)$$

$$\hat{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k). \quad (5.6-4)$$

Reemplazando las Ecs. 5.6-2 y 5.6-4 en la Ec. 5.6-3 se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \\ &+ \mathbf{T}(k) \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{T}(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{w}(k) - \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k) \hat{\mathbf{x}}(k) - \\ &- \mathbf{T}(k) \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

agrupando

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= [\mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k)] \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \\ &+ \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{T}(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{w}(k) \end{aligned} \quad (5.6-5)$$

si se restan las Ecs. 5.6-1 y 5.6-5 se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= [\mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k)] [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] + \\ &+ \mathbf{F}(k) \mathbf{v}(k) - \mathbf{T}(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{w}(k). \end{aligned} \quad (5.6-6)$$

Se define el error de estima como

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (5.6-7)$$

o también

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) \quad (5.6-8)$$

reemplazando las Ecs. 5.6-7 y 5.6-8 en la Ec. 5.6-6 se tiene

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k)] \tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{F}(k) \mathbf{v}(k) - \mathbf{T}(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{w}(k). \quad (5.6-9)$$

La Ec. 4.6-9 constituye la ecuación del error de estima del vector de estado. Como se puede observar, también posee características aleatorias y por lo tanto se debe definir su valor medio y su covarianza.

En la Fig. 5.6.1 se muestra un diagrama de bloques del esquema propuesto. Cuando se trata de un sistema estocástico, el modelo recibe el nombre de **Filtro Estimador de Kalman**.

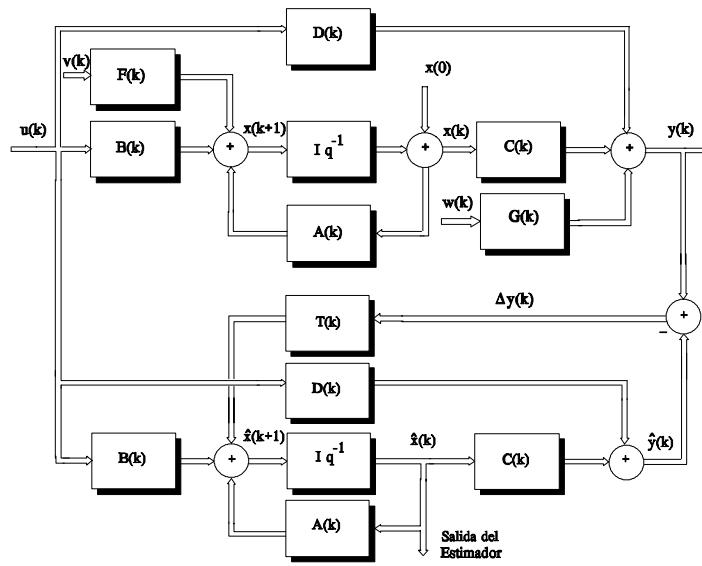


Fig.5.6.1 Diagrama de bloques de un sistema modelado en el espacio de estado, con Estimador de Kalman.

Para el valor medio se tiene

$$\begin{aligned} E\{\tilde{x}(k+1)\} = & [A(k) - T(k)C(k)]E\{\tilde{x}(k)\} + F(k)E\{v(k)\} + \\ & + T(k)G(k)E\{w(k)\} \end{aligned} \quad (5.6-10)$$

como $E\{v(k)\} = 0$ y $E\{w(k)\} = 0$ la Ec. 5.6-10 queda

$$E\{\tilde{x}(k+1)\} = [A(k) - T(k)C(k)]E\{\tilde{x}(k)\}. \quad (5.6-11)$$

El valor medio del vector de estado inicial se definió como

$$E\{x(0)\} = m_0$$

si ahora se define

$$E\{\tilde{x}(0)\} = m_{\tilde{x}(0)}$$

entonces

$$E\{\tilde{x}(k)\} = m_{\tilde{x}(k)} = 0$$

para la covarianza del error de estima del vector de estado

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1) &= E\{\tilde{\mathbf{x}}(k+1) - \mathbf{m}_{\tilde{\mathbf{x}}(k+1)}\} [\tilde{\mathbf{x}}(k+1) - \mathbf{m}_{\tilde{\mathbf{x}}(k+1)}]^T\} \\ \mathbf{P}(k+1) &= E\{\tilde{\mathbf{x}}(k+1) \tilde{\mathbf{x}}^T(k+1)\}\end{aligned}\quad (5.6-12)$$

con la condición inicial

$$\mathbf{P}(0) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(0) \tilde{\mathbf{x}}^T(0)\} = \mathbf{R}_0$$

reemplazando la Ec. 5.6-9 en la Ec. 5.6-12

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1) &= E\{[[\mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k)]\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{F}(k)\mathbf{v}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{G}(k)\mathbf{w}(k)] \\ &\quad [[\mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k)]\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{F}(k)\mathbf{v}(k) + \mathbf{T}(k)\mathbf{G}(k)\mathbf{w}(k)]^T\}.\end{aligned}$$

Considerando a \mathbf{x} estadísticamente independiente de \mathbf{v} y de \mathbf{w} , y que \mathbf{v} también lo es de \mathbf{w} resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1) &= [\mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k)] E\{\tilde{\mathbf{x}}(k) \tilde{\mathbf{x}}^T(k)\} [\mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k)]^T + \\ &\quad + \mathbf{F}(k) E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(k)\} \mathbf{F}^T(k) + \mathbf{T}(k)\mathbf{G}(k) E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(k)\} \mathbf{G}^T(k)\end{aligned}$$

Siendo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1) &= [\mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k)] E\{\tilde{\mathbf{x}}(k) \tilde{\mathbf{x}}^T(k)\} [\mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k)]^T + \\ &\quad + \mathbf{F}(k) E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(k)\} \mathbf{F}^T(k) + \mathbf{T}(k)\mathbf{G}(k) E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(k)\} \mathbf{G}^T(k)\end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1) &= [\mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k)] \mathbf{P}(k) [\mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k)]^T + \\ &\quad + \mathbf{F}(k) \mathbf{R}_{vv}(k) \mathbf{F}^T(k) + \mathbf{T}(k)\mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww} \mathbf{G}^T(k) \mathbf{T}^T(k).\end{aligned}\quad (5.6-13)$$

Como se puede observar, las ecuaciones resultantes son independientes de la entrada \mathbf{u} y por lo tanto también lo son de las matrices \mathbf{B} y \mathbf{D} .

Se puede formular ahora el problema de **estimación óptima de estado**.

Dado un sistema dinámico representado por las Ecs. 5.6-1 y 5.6-2 y un modelo de referencia representado por las Ecs. 5.6-3 y 5.6-4, se debe encontrar una secuencia de matrices $\mathbf{T}(k)$ que haga mínima la covarianza del error de estimación del vector de estado dada por la Ecs. 5.6-13, de manera de obtener una estimación del estado lo más apropiada posible.

5.6.2 Solución al problema de estimación de estado.

Resolver el problema de estimación óptima de estado significa encontrar la matriz \mathbf{T} que haga mínima la Ec. 5.6-13. Para ello se opera en la misma obteniéndose

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1) = & \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T(k) - \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T(k) + \\ & + \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k) \mathbf{T}^T(k) + \mathbf{F}(k) \mathbf{R}_{ww}(k) \mathbf{F}(k) + \\ & + \mathbf{T}(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww}(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{T}(k) - \\ & - \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k) \mathbf{T}(k).\end{aligned}$$

reordenando

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1) = & \mathbf{F}(k) \mathbf{R}_{ww}(k) \mathbf{F}^T(k) + \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T(k) + \\ & + \mathbf{T}(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww}(k) \mathbf{G}^T(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k) \mathbf{T}^T(k) - \\ & - \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T(k) - \mathbf{A}^T(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k) \mathbf{T}^T(k).\end{aligned}\quad (5.6-15)$$

A continuación se debe agrupar en una sola expresión todos los términos que contienen \mathbf{T} y \mathbf{T}^T , para ello se suma y se resta

$$\mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k) [\mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww} \mathbf{G}^T(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k)]^{-1} \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T(k)$$

a la Ec. 5.6-15. Operando se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k+1) = & \mathbf{F}(k) \mathbf{R}_{ww}(k) \mathbf{F}^T(k) + \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T(k) - \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k) . \\ & . [\mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww}(k) \mathbf{G}^T(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k)]^{-1} \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T(k) + \\ & + \mathbf{T}(k) - \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k) [\mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww}(k) \mathbf{G}^T(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k)]^{-1} \\ & . [\mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww}(k) \mathbf{G}^T(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k)] . \\ & . [\mathbf{T}(k) - \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k) [\mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww}(k) \mathbf{G}^T(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k)]] \quad (5.6-16)\end{aligned}$$

Puesto que todos los términos son positivos, se deduce que $\mathbf{P}(k+1)$ será mínimo cuando

$$\mathbf{T}(k) - \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k) [\mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww} \mathbf{G}^T(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k)]^{-1} = 0$$

y por lo tanto

$$\mathbf{T}(k) - \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k) [\mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww} \mathbf{G}^T(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k)]^{-1}$$

finalmente se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1) &= \mathbf{F}(k) \mathbf{R}_{vv} \mathbf{F}^T(k) + \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T(k) - \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k) \mathbf{G}(k) \\ &\quad [\mathbf{R}_{ww} \mathbf{G}^T(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k)]^{-1} \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T(k) \end{aligned} \quad (5.6-17)$$

$$\mathbf{T}(k) = \mathbf{A}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k) [\mathbf{G}(k) \mathbf{R}_{ww}(k) \mathbf{G}^T(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T(k)]^{-1}. \quad (5.6-18)$$

Para sistemas invariantes con perturbaciones estocásticas estacionarias resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1) &= \mathbf{F} \mathbf{R}_{vv} \mathbf{F}^T + \mathbf{A} \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T - \\ &\quad - \mathbf{A} \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T [\mathbf{G} \mathbf{R}_{ww} \mathbf{G}^T + \mathbf{C} \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T]^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T \end{aligned} \quad (5.6-19)$$

$$\mathbf{T}(k) = \mathbf{A} \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T [\mathbf{G} \mathbf{R}_{ww} \mathbf{G}^T + \mathbf{C} \mathbf{P}(k) \mathbf{C}^T]^{-1}. \quad (5.6-20)$$

Estas son las ecuaciones de la matriz de covarianza del vector de error de estima del estado y de la matriz de realimentación \mathbf{T} que hace mínima dicha matriz de covarianza.

El primer término del segundo miembro de las Ecs. 5.6-17 y 5.6-19 representa el aporte a la covarianza del error de estima que hace el vector aleatorio \mathbf{v} que actúa sobre el sistema. El segundo término muestra como se propaga el error de estima del estado desde el instante k hasta $k+1$ a través de la dinámica del sistema. El último término produce una reducción de la covarianza del error de estima del estado, utilizando la información obtenida en la medición de la salida.

Un aumento de la potencia del vector de perturbación de salida produce una disminución de la ganancia del estimador para evitar que la salida, que se encuentra muy perturbada, influya en forma errónea en la estimación del estado. En cambio un aumento en la potencia del vector de perturbación que afecta al estado, origina un aumento de la ganancia del estimador, de manera de compensar esta perturbación con una mayor ponderación de los valores del vector de salida. Estas características hacen que el estimador de estado de Kalman reciba también el nombre de **Filtro de Kalman**.

Considerando en la Ec. 5.6-18 o la Ec. 5.6-20, \mathbf{A}^T en lugar de \mathbf{A} , \mathbf{B} en lugar de \mathbf{C}^T , \mathbf{Q} en lugar de $\mathbf{F} \mathbf{R}_{vv} \mathbf{F}^T$, \mathbf{R} en lugar de $\mathbf{G} \mathbf{R}_{ww} \mathbf{G}^T$ y \mathbf{K}^T en lugar de \mathbf{T} , se obtiene la Ec. 5.5-40, deducida para el cálculo óptimo de la matriz de realimentación de estado. Para la Ec. 5.6-17, luego de hacer los cambios mencionados, se puede ver que mientras en esta se realiza un cálculo evolutivo $k = 0, 1, 2, \dots, N$; para la Ec. 5.5.41 el cálculo es regresivo $k = N, N-1, \dots, 0$. Sin embargo esto no es importante, pudiendo resolverse

ambos problemas (encontrar \mathbf{K}, \mathbf{T}) con el mismo programa de cálculo.

5.7 Controladores Optimos con Estimación de Estado.

En la sección 5.5 se obtuvo la ley de control óptimo para realimentación del vector de estado suponiendo que éste se podía medir en forma exacta. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones prácticas, el estado debe ser estimado a partir del vector de salida, como se vio en la sección 5.6.

Sea un sistema dinámico

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{F}(k) \mathbf{v}(k) \quad (5.7-1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{w}(k) \quad (5.7-2)$$

donde $\mathbf{v}(k), \mathbf{x}(k)$ son vectores aleatorios con distribución gaussiana y parámetros estadísticos

$$E\{\mathbf{v}(k)\} = E\{\mathbf{w}(k)\} = \mathbf{0}$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{w}^T(k)\} = E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{x}^T(k)\} = \mathbf{0}$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(k)\} = E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(k)\} = \mathbf{I}$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(n)\} = E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(n)\} = \mathbf{0} \quad \forall n \neq k,$$

y con parámetros estadísticos de estado inicial,

$$E\{\mathbf{x}(0)\} = \mathbf{m}_0$$

$$E\{[\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0][\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0]^T\} = \mathbf{R}_0$$

y que además cumple con la condición de observabilidad.

Dado un estimador de estado con ecuaciones

$$\hat{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \hat{x}(k) + \mathbf{B}(k) u(k) + \mathbf{T}(k) [y(k) - \hat{y}(k)] \quad (5.7-3)$$

$$\hat{y}(k) = \mathbf{C}(k) \hat{x}(k) + \mathbf{D}(k) u(k) \quad (5.7-4)$$

y un controlador de estado con ecuación

$$u(k) = -\mathbf{K}(k) \hat{x}(k), \quad (5.7-5)$$

donde se ha despreciado el control por prealimentación, se desea obtener la ecuación del sistema de lazo cerrado.

Reemplazando la Ec. 5.7-5 en las Ecs. 5.7-1, 5.7-2, 5.7-3 y 5.7-4 se tiene

$$x(k+1) = \mathbf{A}(k) x(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{K}(k) \hat{x}(k) + \mathbf{F}(k) v(k) \quad (5.7-6)$$

$$y(k) = \mathbf{C}(k) x(k) - \mathbf{D}(k) \mathbf{K}(k) \hat{x}(k) + \mathbf{G}(k) w(k) \quad (5.7-7)$$

$$\hat{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \hat{x}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{K}(k) \hat{x}(k) + \mathbf{T}(k) [y(k) - \hat{y}(k)] \quad (5.7-8)$$

$$\hat{y}(k) = \mathbf{C}(k) \hat{x}(k) - \mathbf{D}(k) \mathbf{K}(k) \hat{x}(k). \quad (5.7-9)$$

Reemplazando las Ecs. 5.7-7 y 5.7-9 en la Ec. 5.7-8

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{K}(k) - \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k)] \hat{x}(k) + \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k) x(k) \\ &\quad + \mathbf{T}(k) \mathbf{G}(k) w(k) \end{aligned} \quad (5.7-10)$$

Las Ecs. 5.7-10 y 5.7-6 se pueden agrupar en una ecuación

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) & -\mathbf{B}(k) \mathbf{K}(k) \\ \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k) & [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{K}(k) - \mathbf{T}(k) \mathbf{C}(k)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{F}(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(k) \mathbf{G}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) \\ w(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.7-11)$$

Aplicando una transformación lineal

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{H}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) & -\mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k) \\ \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k) & [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(k)\mathbf{G}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{w}(k) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k)] & \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k) \\ \mathbf{0} & [\mathbf{A}(k) - \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{F}(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}(k) & \mathbf{T}(k)\mathbf{G}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{w}(k) \end{bmatrix}.$$

(5.7-12)

Esta es la ecuación del sistema de control con estimador. Los polos del mismo están dados por

$$\det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k)] \det [z\mathbf{I} - \mathbf{A}(k) + \mathbf{T}(k)\mathbf{C}(k)] = 0.$$

La cantidad total de polos está constituida por la suma de los polos del sistema de lazo cerrado más los polos del estimador. Como el sistema y el estimador tiene orden n , el sistema completo tendrá orden $2n$.

Por otra parte los polos del sistema son independientes de los del estimador, y por lo tanto se pueden determinar por separado. Este es el resultado del **teorema de separación**. Además el diseño del estimador es independiente de las matrices de peso \mathbf{S} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} del índice de desempeño utilizado para el diseño del controlador; y el diseño de este último también lo es de las matrices de covarianza de las perturbaciones estocásticas que afectan al sistema.

El controlador de estado es el mismo tanto para sistemas con vector de estado completamente medible como para los sistemas con vector de estado calculado con un estimador. Esto se denomina **Principio de certeza equivalente** y permite calcular la matriz de realimentación de estado como si el vector de estado fuese completamente medible, reemplazando luego éste por la estima del vector de estado dada por el estimador de Kalman.

En la Fig. 5.7.1 se muestra un esquema del sistema de control con estimador de estado y con referencia nula.

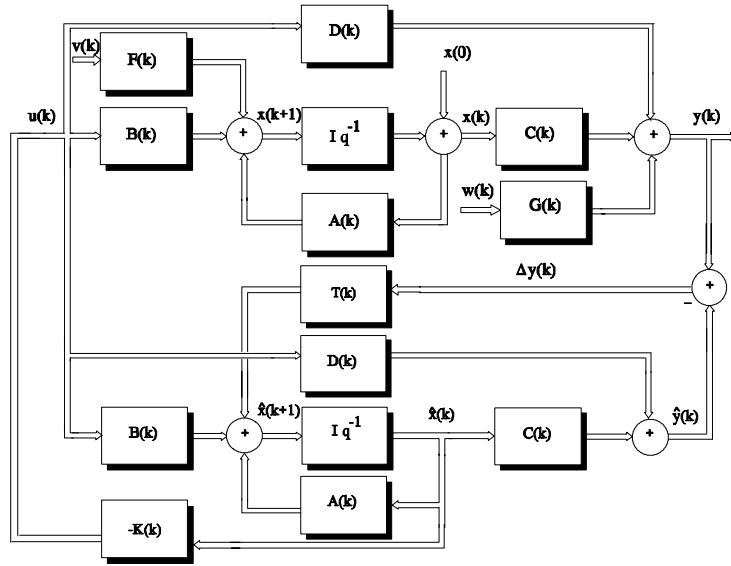


Fig.5.7.1 Diagrama de bloque del sistema de control con estimador de estado y controlador.

Este sistema de control pudo ser ampliado para contemplar el caso en que la referencia es distinta de cero. La forma de resolverlo se basa en el concepto presentado para los controladores de estado determinísticos con referencia distinta de cero en la sección 4.9, el cual se puede extender para el caso estocástico.

B I B L I O G R A F I A

Aström K., Wittenmark B. Sistemas controlados por computador. Paraninfo. 1988

Bellman R. Dynamic Programming. Princeton Univ. Press. 1957

Bellman R., Kalaba R. Dynamic Programming and Modern Control Theory. Academic Press. 1965

De Russo R., Roy R., Cose C. State Variables for Engineers. John Wiley., 1965

Dreyfus S. Dynamic Programming and the Calculus of Variations. Academic Press 1965

Franklin G., Powell J. Digital Control of Dynamic Systems. Addison-Wesley 1980

Isermann R. Digital Control Systems. Springer-Verlag. 1990

Kuo B. Sistemas Automáticos de Control. Academic Press 1971

Kuo B. Digital Control Systems. Englewood Cliff. Prentice Hall. 1980

Ogata K. Discrete-Time Control Systems. Prentice Hall 1987

Ogata K. State Space Analysis of Control System. Prentice Hall 1967

Pontryagin L. Basic Problems of Automatic Regulations and Control. Izdvo. Akad. Nauk. URSS. 1957