

Sistemas Adaptables con Modelo de Referencia

(Model Reference Adaptive Systems: MRAS)

Miguel E. Peña

2005

Índice

4. Sistemas Adaptables con Modelo de Referencia (Model Reference Adaptive Systems: MRAS)	2
4.1 Introducción.....	2
4.2. Esquema indirecto de control con modelo de referencia.....	2
4.3. Esquema directo de control adaptable con modelo de referencia	5
4.4. La regla del M.I.T.....	5
4.4.1. Ejemplos ilustrativos	6
4.4.2. Error en la convergencia de los parámetros.....	13
4.4.3. Determinación de la ganancia de adaptación	14
4.4.4. Algoritmos Normalizados.....	15
4.4.5. Aplicación a sistemas lineales en general.....	18
4.4.6. Conclusión de la aplicación de la regla del M.I.T.	19
4.5. Método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov	19
4.5.1. Ejemplos ilustrativos	20
4.5.2. Conclusión del método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov	25
4.6. Robustez de los sistemas adaptables con modelo de referencia.....	25
4.6.1. Incertidumbres, perturbaciones y robustez.....	25
4.6.2. El ejemplo de Rohrs de robustez de sistemas adaptable.	26
4.6.3. Métodos para mejorar la robustez.	30
4.6.4. Robustez a través de la modificación de las leyes de adaptación.....	33
4.7. Conclusión.....	35
Bibliografía.....	36

4. Sistemas Adaptables con Modelo de Referencia (Model Reference Adaptive Systems: MRAS)

4.1 Introducción

Las técnicas de control por modelo de referencia (MRAC) fueron introducidas por Whitacker en 1958. Los sistemas adaptable con modelo de referencia se originaron para resolver el problema en los cual las especificaciones de desempeño se daban en termino de un modelo de referencia. Este modelo indica como el proceso se debe comportar idealmente a la directiva de control.

Los sistemas adaptables con modelo de referencia históricamente se desarrollaron en un esquema de control adaptable directo, es decir que los parámetros del controlador se ajustaban directamente sin obtener primero un modelo del proceso. Sin embargo se puede plantear un esquema indirecto. Este da como resultado un problema de control similar al problema de asignación de polos.

La Figura 1 muestra un diagrama en bloques de un sistema adaptable directo con modelo de referencia. Se puede pensar que el controlador consiste de dos lazos. El lazo interno es un lazo de realimentación común compuesto del proceso y el controlador. El lazo externo ajusta los parámetros del controlador en forma tal que el error entre la salida del sistema y la salida del modelo sea lo mas pequeña posible. El problema fundamental de los sistemas adaptables con modelo de referencia es determinar el mecanismo de ajuste para llevar el error a cero.

Un ejemplo típico de este tipo de controladores es el problema originalmente resuelto para el control de vuelo de aviones. En este caso el modelo de referencia describía la respuesta deseada de la aeronave a los movimientos de la palanca de mando.

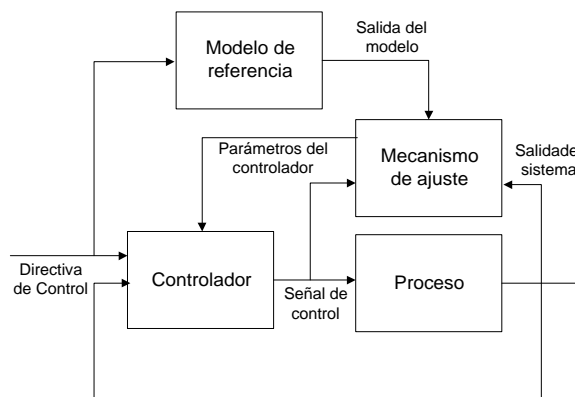


Figura 1. Diagrama en bloques de un sistema adaptable con modelo de referencia.

En el esquema de la Figura 1 el modelo de referencia está colocado en paralelo con el proceso. Este esquema es bastante usual, aunque existen diversas posibilidades como colocarlo en serie o bien una combinación de serie y paralelo.

4.2. Esquema indirecto de control con modelo de referencia

En el esquema indirecto de control con modelo de referencia se utiliza un método de identificación independiente del controlador. El esquema del controlador se puede resolver usando un diseño de asignación de polos.

Considerando un sistema de entrada simple y salida simple (SISO), el cual se puede modelar como

$$y = \frac{B}{A}u \quad (4.1)$$

donde u es la señal de entrada y y la señal de salida. Los símbolos A y B son polinomios en el operador diferencial p (o el operador retardo q para sistemas discretos). Se asume que:

- $\deg(A) \geq \deg(B)$, es decir el sistema es propio (para el caso de sistemas en tiempo continuo) o causal (para el caso de sistemas de tiempo discreto);
- el polinomio A es mónico, esto es que su primer coeficiente es unitario.

Se quiere encontrar un regulador tal que la relación entre la señal de control u_c y la salida deseada y_m , esta dada por

$$y_m = \frac{B_m}{A_m}u_c \quad (4.2)$$

Donde A_m y B_m son polinomios en el operador en diferencial p (o el operador retardo q).

La acción de control se supone de la forma lineal como

$$Ru = Tu_c - Sy \quad (4.3)$$

donde T , S y R son polinomios. Esta ley de control representa un realimentación negativa con una función de transferencia $-S/R$ y una prealimentación con una función de transferencia T/R . La Figura 2 se muestra el esquema usado. Al eliminar u de las ecuaciones (4.2) y (4.3) da la ecuación a lazo cerrado

$$(AR + BS)y = BTu_c \quad (4.4)$$

La condición de seguimiento perfecto es

$$\frac{y}{u_c} = \frac{BT}{(AR + BS)} = \frac{B_m}{A_m}$$

Para obtener el comportamiento a lazo cerrado deseado, A_m debe dividir a $(AR + BS)$ (esto es las raíces o ceros de A_m , donde $A_m = 0$, también deben ser raíces de $(AR + BS)$). Por otro lado, los ceros del proceso, donde $B = 0$, serán también los ceros de lazo cerrado del sistema controlado a menos que se cancelen con polos de lazo cerrado correspondientes. Debido a que los ceros inestables y pobremente amortiguados no pueden ser cancelados (porque cuando hay una cancelación imperfecta aparecen polos inestables en el sistema de lazo cerrado), el polinomio B se factoriza como

$$B = B^+ B^-$$

donde B^+ contiene los factores que se pueden cancelar, y B^- los restantes factores de B . Los ceros de B^+ deben ser estables y bien amortiguados. Para hacer la factorización única, se asume que B^+ es mónico.

Se deduce de la ecuación (4.4) que el polinomio característico en lazo cerrado del sistema es $(AR + BS)$. Este polinomio debe tener a $A_m B^+$ como un factor y será generalmente de orden mayor que $A_m B^+$. El resto de los factores se pueden interpretar como una dinámica observada. De esta manera hay tres tipos de factores del polinomio característico: cancelación de ceros del proceso dados por B^+ , polos deseados dado por A_m y polos observados dado por el polinomio observador A_0 . Por lo tanto

$$AR + BS = B^+ A_0 A_m \quad (4.5)$$

la que se la llama la *ecuación Diophantina*. Esta ecuación se puede poner como

$$AR + B^+ B^- S = B^+ A_0 A_m$$

Como A es dato, de esta ecuación se deduce que B^+ debe dividir a R . Por lo tanto se puede escribir

$$R = B^+ R_1 \quad (4.6)$$

Dividiendo la ecuación (4.5) por B^+ resulta

$$AR_1 + B^- S = A_0 A_m \quad (4.7)$$

Ahora requiere que la relación en la ecuación (4.4) entre la señal de control u_c y la señal de salida del proceso y debe ser igual a la respuesta de lazo cerrado deseada dada por la ecuación (4.2).

Las especificaciones deben también ser tal que B^- divida a B_m (que el modelo de referencia tenga los ceros del sistema que no se pueden cancelar); de otra manera no habría solución para el diseño de control. Por lo tanto

$$B_m = B^- B'_m \quad (4.8)$$

y como T debe contener a A_0 para que se anule y no aparezca en la ecuación de lazo cerrado, resulta

$$T = A_0 B'_m$$

Para completar la solución del problema se deben dar condiciones para garantizar que la existan soluciones de la ecuación (4.7) que da una ley de control propia (para los sistemas continuos) o causal (para los sistemas discretos). Estas condiciones de causalidad dan como resultado (Astrom and Wittenmark, 1995, pp. 95)

$$\deg(A_0) \geq 2\deg(A) - \deg(A_m) - \deg(B^+) - 1 \quad (4.9)$$

$$\deg(A_m) - \deg(B_m) \geq \deg(A) - \deg(B) \quad (4.10)$$

La ley de control (4.3) con los polinomios del controlador (4.6), (4.7) y (4.8) da un seguimiento perfecto del modelo si se cumplen las condiciones de compatibilidad de las ecuaciones (4.9) y (4.10). Se debe notar que el diseño propuesto contiene la solución de la ecuación Diophantina (4.7) y no es apropiada para un control adaptable directo (ya que implicaría resolver la ecuación Diophantina en cada instante de muestreo).

Sin embargo se asume que todos los ceros son cancelados, entonces

$$A_0 A_m = AR_1 + b_0 S$$

Multiplicando por y y usando la ecuación del modelo (4.1), resulta

$$\begin{aligned} A_0 A_m y &= BR_1 u + b_0 S y \\ &= b_0 (Ru + Sy) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Los polinomios en el lado izquierdo se conocen y los del lado derecho son los parámetros desconocidos del controlador. El Polinomio T se obtiene directamente de la ecuación (4.8). El modelo reparametrizado de la ecuación (4.11) se lo puede utilizar para estimar los parámetros desconocidos del controlador usando un método de estimación de parámetros como los ya vistos.

Para ejemplos de utilización ver (Astrom and Wittenmark, 1995, pp. 95).

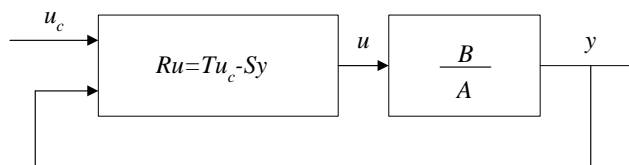


Figura 2. Un sistema a lazo cerrado con un controlador general

4.3. Esquema directo de control adaptable con modelo de referencia

Un sistema de control adaptable directo con modelo de referencia básicamente está formado por tres partes: un controlador primario, un modelo de referencia y una ley de adaptación. Por lo tanto para el diseño de un sistema de control adaptable con modelo de referencia directo, será necesario definir las tres partes. Dado que la parte que caracteriza al control adaptable es la ley de adaptación, el lo que sigue nos concentraremos fundamentalmente en esa parte.

Controlador Primario

El controlador primario puede tener en un principio cualquiera de las configuraciones conocidas para el diseño de los controladores lineales. Sin embargo debe cumplir la condición de que sea posible que el conjunto de proceso y el controlador puedan reproducir el modelo de referencia. Este requisito supone restricciones sobre el orden y la estructura del controlador. Por otro lado, para que pueda aplicarse una adaptación directa la señal de control debe de ser una función lineal de los parámetros.

Modelo de referencia

El modelo de referencia que especifica el comportamiento deseado en bucle cerrado, se da usualmente en forma paramétrica. La condición mencionada anteriormente para el seguimiento del modelo de referencia, también condiciona en ciertos aspectos el modelo de referencia posible, en cuanto al orden relativo del proceso (exceso de polos). Por otro lado el modelo elegido debe ser sensible a la dinámica del proceso, ya que si por ejemplo se eligen un modelo con una dinámica muy rápida, la señal de control será muy grande causando saturaciones en los actuadores y el sistema no responderá a dicha dinámica. Por ello la elección del modelo de referencia no es fácil, eligiéndose normalmente un modelo conservador.

Ley de adaptación

La ley de adaptación es la parte más sensible en los sistemas adaptables y merece la mayor parte de los estudios en este tema. Los primeros estudios se presentaron en sistemas de tiempo continuo minimizando un índice de discrepancia entre la salida del modelo de referencia y la del sistema formulado como la integral del error al cuadrado. Este criterio de diseño conduce a la técnica de ajuste de parámetros denominada “regla del M.I.T.” (Massachusetts Institute of Technology). Si bien esta técnica es simple, no se garantiza estabilidad. Para obtener un buen desempeño es necesario un laborioso estudio por simulación. Otra técnica de diseño se fundamenta en la utilización del segundo método de estabilidad de Lyapunov, el cual tiene la ventaja de que asegura la estabilidad global para cualquier valor de la ganancia de adaptación y cualquier tipo de entrada. La principal desventaja de este método es que se requiere el conocimiento del vector de estado que no siempre es accesible. Otra desventaja es que no es aplicable a casos donde los parámetros del conjunto planta más controlador no pueden ser modificados directamente. A partir de los años 80 se proponen una técnica de diseño basado en el concepto de estabilidad entrada-salida. Estas propuestas aumentan la cantidad de problemas en los que se puede demostrar estabilidad y extiende las aplicaciones a muchos sistemas no lineales (tales como los robot manipuladores).

4.4. La regla del M.I.T.

Los primeros estudios se presentaron en sistemas de tiempo continuo minimizando un índice de discrepancia entre la salida del modelo de referencia y la del sistema formulado como la integral del error al cuadrado. Este criterio de diseño conduce a la técnica de ajuste de parámetros denominada “regla del M.I.T.” (Massachusetts Institute of Technology).

Actualmente a la regla del MIT se la puede considerar como un sistema a lazo cerrado en el cual el controlador tiene un parámetro de ajuste θ . La respuesta a lazo cerrado deseada se especifica por un modelo cuya salida es y_m . Sea e el error entre la salida y del sistema a lazo cerrado y la salida del modelo y_m . Una posibilidad es ajustar los parámetros en tal sentido que la función de pérdida

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \quad (4.12)$$

es minimizada. Para que J disminuya, es razonable cambiar los parámetros en la dirección del gradiente negativo de J , esto es

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} \quad (4.13)$$

La derivada parcial $\partial e / \partial \theta$, la que se le llama *derivada de sensibilidad* del sistema, indica como el error es influenciado por el ajuste de los parámetros. Si se asume que los parámetros que cambian lo hacen en forma más lenta que las otras variables del sistema, entonces la derivada $\partial e / \partial \theta$ se puede evaluar sumiendo que θ es constante.

Hay varias alternativas para el funcional de coste (4.12). Si esta se define como

$$J(\theta) = |e|$$

el método del gradiente da como resultado

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial e}{\partial \theta} \text{sign}(e)$$

donde $\text{sign}(\circ)$ es el signo de la función.

Uno de los primeros controladores adaptables con modelo de referencia fueron implementados de esta manera. Sin embargo, hay muchas otras alternativas, por ejemplo

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \text{sign}\left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right) \text{sign}(e)$$

Este es el llamado algoritmo “sign-sign”. En los sistemas de telecomunicaciones se usa una versión discreta (en el tiempo) de este algoritmo, resultando en una implementación simple y rápida.

La ecuación (4.13) también se puede implicar cuando hay muchos parámetros para ajustar. El símbolo θ se debe interpretar como un vector y $\partial e / \partial \theta$ como el gradiente del error con respecto a los parámetros.

4.4.1. Ejemplos ilustrativos

En esta sección se darán distintos ejemplos para ilustrar la regla de adaptación del MIT. Se probará con distintas plantas simples para mostrar diferentes propiedades de los sistemas adaptables.

Ejemplo 1: Ajuste de una ganancia de prealimentación.

En este ejemplo se realiza un ajuste de una ganancia de prealimentación. En la Figura 3 se muestra el esquema usado. En este ejemplo el modelo de la planta es

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p G(s)$$

y el modelo de referencia es

$$\frac{y(s)}{u_c(s)} = k_m G(s)$$

donde

$$G(s) = \frac{b}{s+a}$$

Como se pueden ver la planta y el modelo solo difieren de una ganancia. Se desea ajustar la ganancia de prealimentación θ de tal forma que el error e entre la planta y el modelo sea nulo.

Si consideramos que los valores del sistema son conocidos entonces se puede sacar el valor teórico del parámetro como sigue.

El error del sistema será

$$\begin{aligned} e &= y - y_m \\ &= \theta k_p G(s) u_c - k_m G(s) u_c \\ e &= (\theta k_p - k_m) G(s) u_c \end{aligned} \quad (4.14)$$

si se considera que el error de salida será nulo entonces

$$e = 0 \Rightarrow \theta k_p - k_m = 0$$

Finalmente

$$\theta^* = -\frac{k_m}{k_p}$$

Este es el valor al que tiene que tender el parámetro θ cuando el algoritmo adaptable converja.

Para el cálculo de la ley de ajuste se parte del funcional de coste

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2$$

y aplicando la regla de ajuste del M.I.T.

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta}$$

donde el error estará dado por la ecuación (4.14), esto es $e = (\theta k_p - k_m) G(s)$, resultando la derivada parcial del error respecto del parámetro θ igual

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = k_p G(s) u_c \quad (4.15)$$

como $y_m = k_m G(s) u_c$ entonces $G(s) u_c = \frac{y_m}{k_m}$ reemplazando en la ecuación (4.15)

resulta

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = \frac{k_p}{k_m} y_m$$

y la regla del M.I.T. queda

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\gamma e \frac{k_p}{k_m} y_m$$

realizando un cambio de variables $\bar{\gamma} = \gamma \frac{k_p}{k_m}$ la ecuación de adaptación finalmente

queda

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\bar{\gamma} e y_m$$

donde es necesario conocer el signo de k_p para que el parámetro converja.

La Figura 4 muestra el diagrama de simulación usado (Simulink). En la Figura 5 se realiza la simulación para distintos valores iniciales del parámetro θ y con $b = 1$, $a = 1$ y $k_p = 1$. Se comprueba para todos los casos simulados que este converge al valor ideal. En la Figura 6 se realiza la simulación para distintos valores del parámetro γ . Se comprueba que a medida que aumenta γ , la velocidad de convergencia es mayor, pero puede producir oscilaciones en la respuesta del sistema.

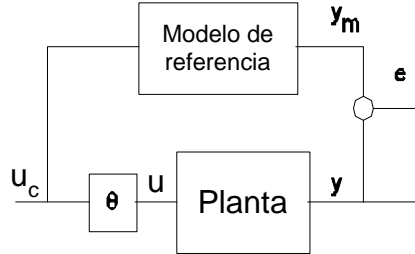


Figura 3. Sistema adaptable usado en el Ejemplo 1.

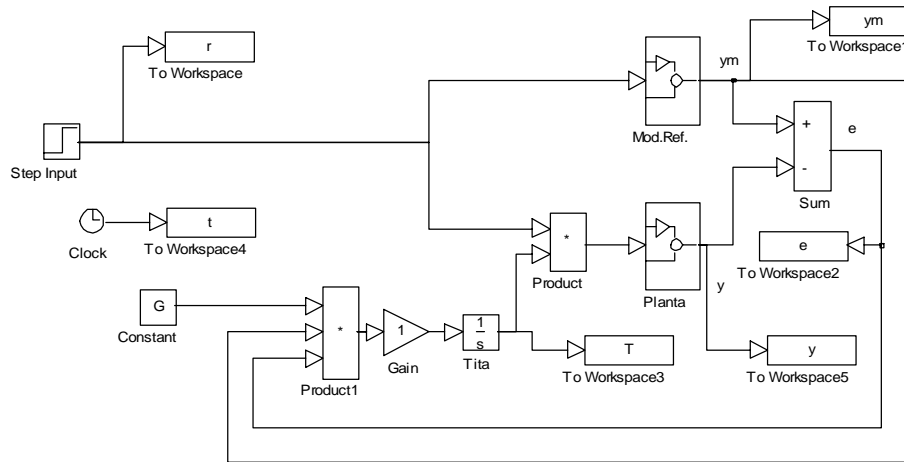


Figura 4. Diagrama en bloques del sistema de simulación del Ejemplo 1.

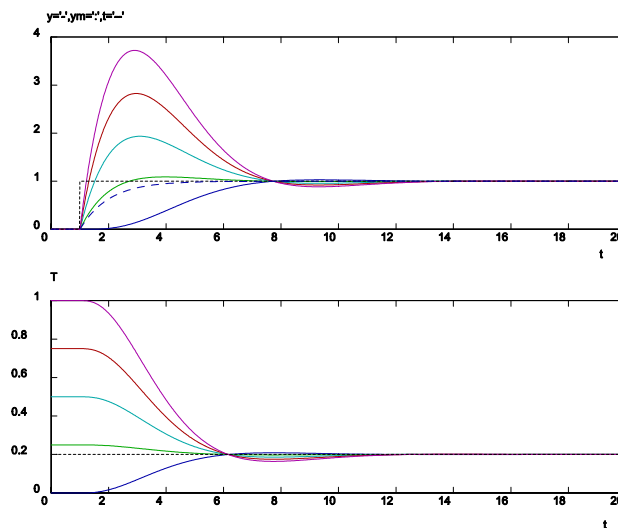


Figura 5. Distinto valor inicial del parámetro θ . $\theta(0)$ igual a 0, 0.25, 0.5, 0.75 y 1.

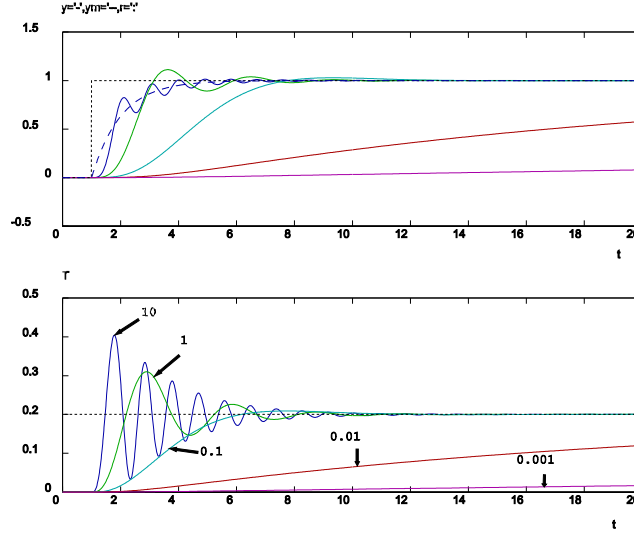


Figura 6. Distinto valores para el parámetro de ajuste γ . γ igual 10, 1, 0.1, 0.01 y 0.001.

Si bien esta técnica es simple, la ganancia de adaptación gobierna la velocidad de convergencia del algoritmo. Si esta es pequeña puede que el algoritmo no converja y si es demasiado grande puede que el sistema se inestabilice. Para obtener un buen desempeño es necesario un laborioso estudio por simulación.

Ejemplo 2: MRAS con regla del M.I.T. para un sistema de primer orden.

Dado el sistema

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu \Leftrightarrow G(p) = \frac{y}{u} = \frac{b}{(p+a)} \quad (4.16)$$

donde u es la variable de control, y es la salida medida y p es el operador derivada ($d/dt \Leftrightarrow p$). Se desea obtener un sistema cuyo comportamiento sea

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c \Leftrightarrow G_m(p) = \frac{y_m}{u_c} = \frac{b_m}{(p+a_m)} \quad (4.17)$$

Para resolver este ejemplo se supone una acción de control dada por

$$u(t) = \theta_1 u_c(t) - \theta_2 y(t) \quad (4.18)$$

La Figura 7 muestra el esquema de control usado.

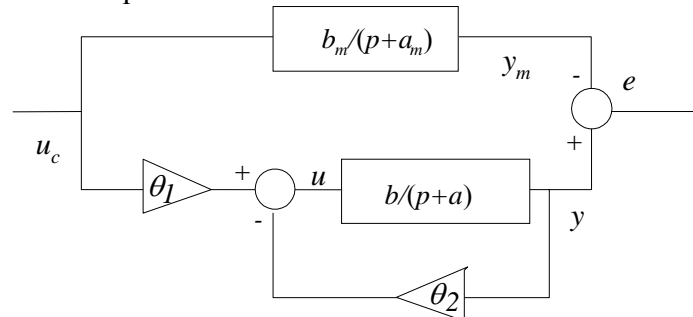


Figura 7. Esquema de control usado.

El controlador tiene dos parámetros. Si se eligen como

$$\theta_1 = \theta_1^0 = \frac{b_m}{b} \quad (4.19)$$

$$\theta_2 = \theta_2^0 = \frac{a_m - a}{b} \quad (4.20)$$

la relación entrada-salida del sistema y el modelo de referencia es la misma. Esto se llama seguimiento perfecto del modelo. Se comprueba reemplazando (4.18) en (4.16)

$$y = \frac{b}{(p+a)}(\theta_1 u_c - \theta_2 y)$$

$$(p+a+\theta_2 b)y = b\theta_1 u_c$$

La ecuación a lazo cerrado queda

$$y = \frac{b\theta_1}{(p+a+\theta_2 b)} u_c \quad (4.21)$$

comparando (4.21) con (4.17) resultan las ecuaciones (4.19) y (4.20).

Para aplicar la regla del M.I.T., se debe evaluar

$$\theta_i = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta_i}$$

el error será

$$e = y - y_m$$

donde y denota la salida del sistema en lazo cerrado. De las ecuaciones (4.16) y (4.18)

$$y(s) = \frac{b\theta_1}{(p+a+b\theta_2)} u_c$$

La derivada de sensibilidad se obtienen con la derivada parcial del error e respecto de los parámetros θ_1 y θ_2 . Considerando que $\partial y_m / \partial \theta_i = 0$ se tiene

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b}{(p+a+b\theta_2)} u_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{b^2 \theta_1}{(p+a+b\theta_2)^2} u_c = -\frac{b}{(p+a+b\theta_2)} y$$

La ley de ajuste queda

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma' \left(\frac{b}{(p+a+b\theta_2)} u_c \right) e \quad (4.22)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma' \left(\frac{b}{(p+a+b\theta_2)} y \right) e \quad (4.23)$$

Las fórmulas (4.22) y (4.23) no se pueden usar directamente porque los parámetros del proceso a y b no son conocidos. Por ello se deben aproximar.

Una posibilidad de aproximación esta basada en que cuando hay un seguimiento perfecto los parámetros cumplen

$$p+a+b\theta_2^0 = p+a_m$$

Entonces se puede usar la aproximación

$$p+a+b\theta_2 \approx p+a_m$$

La cual da una aproximación razonable cuando los parámetros están cerca de sus valores correctos, esto es $\theta_1 \approx \theta_1^0$ y $\theta_2 \approx \theta_2^0$. Bajo estas suposiciones se tiene

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma' \left(\frac{b}{(p+a_m)} u_c \right) e \quad (4.24)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma' \left(\frac{b}{(p + a_m)} y \right) e \quad (4.25)$$

Como b tampoco es conocido, lo puede absorber el parámetro γ' haciendo $\gamma'' = \gamma' b$. Quedan las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= -\gamma'' \left(\frac{1}{(p + a_m)} u_c \right) e \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= -\gamma'' \left(\frac{1}{(p + a_m)} y \right) e \end{aligned}$$

Las aproximaciones de las derivadas parciales $\partial e / \partial \theta_1$ y $\partial e / \partial \theta_2$ se obtiene al aplicar un filtro de primer orden a las señales de control u_c y de salida y . Para que este filtro esté normalizado y tenga ganancia unitaria en estado estacionario se puede definir el parámetro $\gamma' = \frac{\gamma''}{a_m} = \frac{\gamma' b}{a_m}$ resultando las ecuaciones

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma' \left(\frac{a_m}{(p + a_m)} u_c \right) e \quad (4.26)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma' \left(\frac{a_m}{(p + a_m)} y \right) e \quad (4.27)$$

Las ecuaciones (4.26) y (4.27) son las ecuaciones finales de ajuste. Se debe tener en cuenta que se debe conocer el signo del parámetro b para conocer el signo correcto del parámetro γ' .

La Figura 8 muestra el esquema de simulación del sistema completo. El sistema adaptable consta de 5 estados las que se pueden elegir como la salida del modelo y_m (es un sistema de primer orden por lo tanto tiene 1 estado), los parámetros θ_1 y θ_2 (los cuales hay que integrar par obtener su valor), y por último las derivada de sensibilidad $\partial e / \partial \theta_1$ y $\partial e / \partial \theta_2$ (salida de los filtros de primer orden).

El comportamiento del sistema se muestra en las figuras siguientes. Los parámetros se eligen como $a = 1$, $b = 0.5$, $a_m = 2$, $b_m = 2$ y $\gamma = 1$. La señal de entrada es una señal cuadrada con una amplitud de 1. La Figura 9 muestra los resultados de simulación. La Figura 10 muestra la estima de parámetros para diferentes valores de la ganancia de adaptación γ . Se debe notar que los parámetros cambian más cuando cambia la señal de entrada. La velocidad de convergencia aumenta cuando aumenta γ . El hecho de que el controlador es bastante bueno para el tiempo igual a 10 refleja el hecho de que hay una relación especial entre los parámetros que producen un error pequeño en la salida aun cuando los parámetros θ_1 y θ_2 están muy lejos de sus valores óptimos. Esto se muestra en la Figura 11 donde se grafica el parámetro θ_2 en función del parámetro θ_1 para una simulación de 500 unidades de tiempo. Esta muestra que los parámetros se aproximan a sus valores correctos cuando el tiempo aumenta. Los parámetros rápidamente se aproximan a la línea $\theta_2 = \theta_1 - a/b$. Esta línea representa valores de parámetros tal que el sistema a lazo cerrado tiene una ganancia estática correcta.

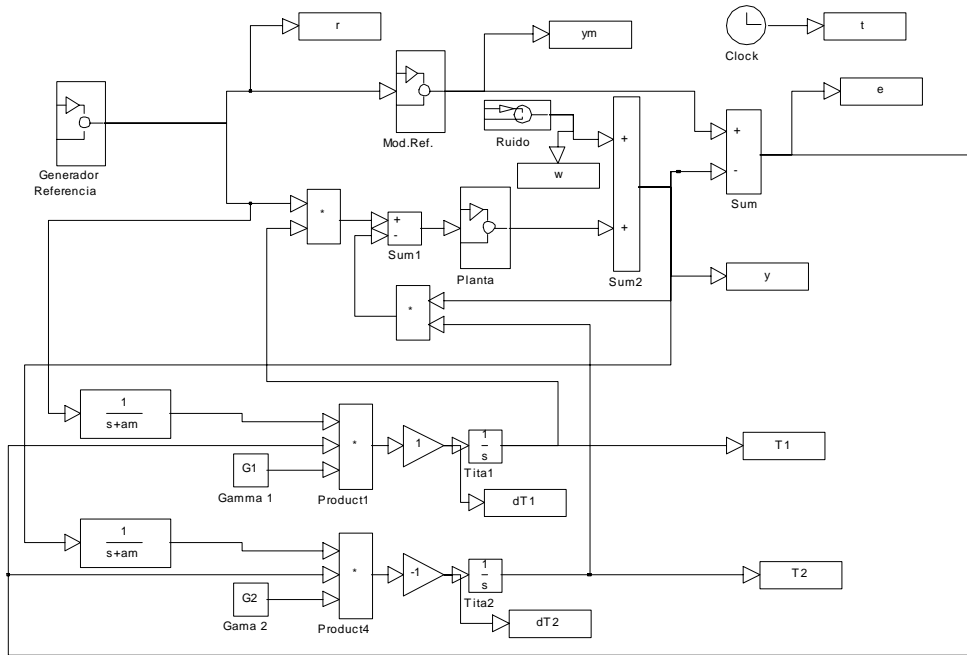


Figura 8. Esquema de simulación (Simulink).

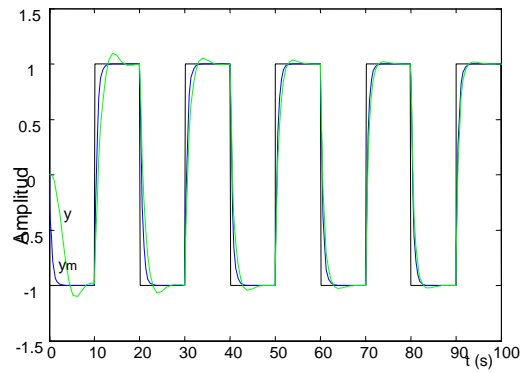


Figura 9. Simulación del sistema del Ejemplo 2 usando MRAS. Los valores de los parámetros son $a=1$, $b=0.5$, $a_m=2$, $b_m=2$, $\gamma=1$.

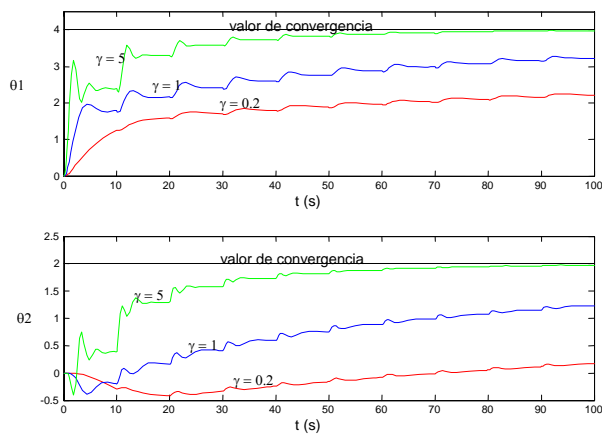


Figura 10. Parámetros del controlador θ_1 y θ_2 para el sistema del Ejemplo 2 cuando $\gamma = 0.2, 1$ y 5 .

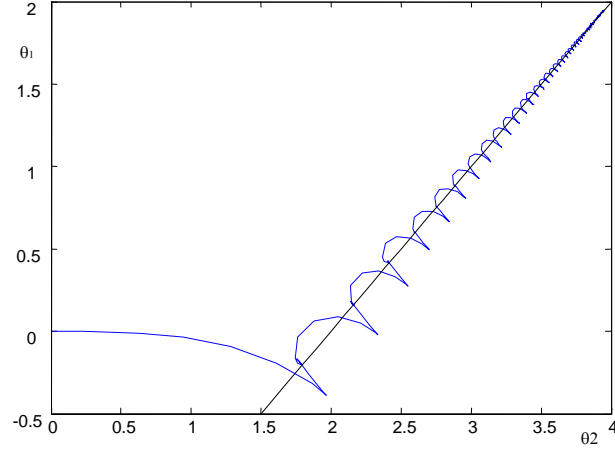


Figura 11. Relación entre los parámetros del controlador θ_1 y θ_2 , cuando el sistema del Ejemplo 2 se simula 500 unidades de tiempo. La línea de trazo muestra la línea $\theta_2 = \theta_1 - a/b$. El Punto indica el punto de convergencia.

4.4.2. Error en la convergencia de los parámetros

El objetivo en los sistemas adaptables con modelo de referencia es llevar el error $e = y - y_m$ a cero. Esto no necesariamente indica que los parámetros se aproximen a sus valores correctos. En el siguiente ejemplo se muestra este comportamiento.

Ejemplo 3: Falta de convergencia en los parámetros.

Si se considera el sistema de ganancia de prealimentación vista en el [Ejemplo 1](#) con una $G(s)=1$ el modelo del procesos es $y=k_m u$, la acción de control es $u=\theta u_c$ y la respuesta deseada esta dada por $y_m=k_m u_c$. El error es

$$e = (k_p \theta - k_m) u_c = k_p (\theta - \theta_0) u_c$$

donde $\theta_0 = k_m / k_p$. La regla del M.I.T. da la siguiente ecuación diferencial para el parámetro

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma k_p^2 u_c^2 (\theta - \theta_0)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria tiene como resultado

$$\theta(t) = \theta_0 + (\theta(0) - \theta_0) e^{-\gamma k^2 I_t} \quad (4.28)$$

donde

$$I_t = \int_0^t u_c^2(\tau) d\tau \quad (4.29)$$

y $\theta(0)$ es el valor inicial del parámetro θ . Se puede observar de la ecuación (4.28) que la estima converge a sus valores correctos solo si la integral I_t diverge cuando $t \rightarrow \infty$. La convergencia es exponencial si la señal de entrada es persistentemente excitante. El error está dado por

$$e(t) = k u_c(t) (\theta(0) - \theta_0) e^{-\gamma k^2 I_t}$$

Notar que el error irá a cero cuando $t \rightarrow \infty$ ya sea porque la integral I_e diverja o porque de $u_c(t) \rightarrow 0$. Sin embargo, el valor al que tenderá el parámetro θ dependerá de las propiedades de la señal de entrada.

Este ejemplo muestra el hecho que el error e puede converger a cero aun cuando los parámetros no necesariamente converjan a los valores correctos. Esta es una característica del comportamiento de todos los sistemas adaptables. La señal de entrada debe tener ciertas propiedades para la convergencia de los parámetros.

4.4.3. Determinación de la ganancia de adaptación

En las secciones anteriores se vio que una forma de simple de obtener un sistema adaptable es aplicar la regla del M.I.T.. La ley de control adaptable tiene un parámetro que debe ser elegido por el usuario, este es la ganancia de adaptación γ . Las simulaciones muestran que la elección de γ puede ser crucial para el buen desempeño del controlador. A continuación se discutirán métodos para determinar esta ganancia de adaptación.

Se considera el [Ejemplo 1](#) en donde sea ajusta una ganancia de prealimentación. En el la ecuación del sistema es

$$\frac{y}{u} = k_p G(p)$$

y el modelo de referencia es

$$\frac{y_m}{u_c} = k_m G(p)$$

donde $G(p)$ es conocido y estable. Además se asume que k_p es una constante desconocida. Se asume que $G(p)$ es estable. El sistema queda descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= k_p G(p) u, & y_m &= k_m G(p) u_c \\ u &= \theta u_c, & e &= y - y_m \end{aligned}$$

resultando la ley de ajuste de parámetros

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma y_m e$$

Al reemplazar los valores de u e y en la ley de ajuste de parámetros resulta

$$\frac{d\theta}{dt} + \gamma y_m k_p G(p) \theta u_c = \gamma y_m^2 \quad (4.30)$$

Esta ecuación es una descripción compacta del comportamiento de los parámetros. A esta ecuación se la puede llamar ecuación diferencial del parámetro. Como está expresada esta ecuación a y_m se la puede considerar como una función variante en el tiempo conocida. Si $G(p)$ es una función de transferencia racional, entonces la ecuación (4.30) es una ecuación diferencial ordinaria variante en el tiempo. Esta ecuación puede presentar un comportamiento muy complicado. No es posible dar una caracterización analítica simple de las propiedades del sistema, particularmente de cómo cambia el comportamiento del sistema al variar γ .

Para obtener una visión en el comportamiento del sistema dado por la ecuación (4.30) se realizan consideraciones de forma que se simplifique la ecuación del sistema. Estas consideraciones dan una visión reducida del comportamiento del sistema pero sin ser una explicación detallada.

Se asume que el parámetro θ es fijo, que el mecanismo de adaptación está desconectado y que la señal de entrada u_c es constante. En estas circunstancias el mecanismo de adaptación se conecta cuando todas las señales tienen su valor en estado estacionario. El comportamiento del parámetro será

$$\frac{d\theta}{dt} + \gamma y_m^0 u_c^0 (k_p G(p) \theta) = \gamma (y_m^0)^2$$

el cual es un sistema lineal invariante. Esta ecuación es lineal con coeficientes constantes. Su estabilidad está gobernada por la ecuación algebraica

$$s + \gamma y_m^0 u_c^0 k_p G(p) = 0 \quad (4.31)$$

se puede concluir que el comportamiento del parámetro está determinado por el valor

$$\mu = \gamma y_m^0 u_c^0 k_p \quad (4.32)$$

Un diagrama de cómo varían los ceros de la ecuación (4.31) cuando varía el parámetro μ se puede obtener realizando el gráfico del lugar de las raíces con respecto a este parámetro. Se puede concluir que si la ecuación (4.31) tiene ceros en el semiplano derecho (positivos), entonces los parámetros divergirán. Esta conclusión es para el caso muy especial que se ha propuesto, pero se puede extender, en forma aproximada, al caso en el que las señales cambien lentamente con respecto a la dinámica de $G(s)$.

La ecuación (4.31) también se puede usar para determinar una ganancia de adaptación (γ) adecuada como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4: Elección de la ganancia de adaptación.

Si se considera el [Ejemplo 1](#) con $G(s) = 1/(s+1)$, $k_p = 1$ y $k_m = 2$. Se asume que la señal de referencia es unitaria ($u_c = 1$). La ecuación (4.31) resulta de la forma

$$s^2 + s + \mu = s^2 + s + \gamma y_m^0 u_c^0 k_p = 0 \quad (4.33)$$

Una elección razonable es hacer $\gamma y_m^0 u_c^0 k_p = 1$. Si no se toma en cuenta el transitorio, el valor $y_m u_c$ es 2. Esto da como resultado $\gamma = 0.5$ que es uno de los valores que se realizó la simulación.

4.4.4. Algoritmos Normalizados

Se puede deducir de la ecuación (4.31) del sistema adaptable puede pasar a ser inestable si la función de transferencia tiene polos que exceden en mucho 1 y el parámetro μ en la ecuación (4.32) sea lo suficientemente grande. El parámetro μ es grande si las señales son grandes (y_m y u_c) o si la ganancia de adaptación son grandes. El comportamiento del sistema depende fuertemente del valor de las señales.

Ejemplo 5: La estabilidad depende de la amplitud de las señales.

Considere el sistema del [Ejemplo 1](#). Sea la función de transferencia G dada por

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

La ecuación (4.31) se transforma en

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + \mu = 0 \quad (4.34)$$

donde $\mu = \gamma y_m^0 u_c^0 k_p$. Esta ecuación tiene todos sus polos en el semiplano izquierdo si

$$\gamma y_m^0 u_c^0 k_p < a_1 a_2 \quad (4.35)$$

Debido a que esa inecuación incluye la magnitud de la señal de entrada, puede ocurrir que la solución de equilibrio para una amplitud de señal de entrada sea estable y para otra amplitud de la señal de entrada sea inestable.

Esto se ilustra en simulación y se muestran los resultados en la Figura 12, donde los parámetros se eligen como $k_p=1$, $a_1=1$ y $a_2=1$. En las simulaciones la ganancia de adaptación γ se ajusta para dar una buena respuesta cuando la señal de referencia es una señal cuadrada con una amplitud de 1. En estas circunstancias $u_c^0=1$, $y_m^0=1$ y la inecuación (4.35) da la ecuación de estabilidad $\gamma < 1$. Un valor razonable de γ es $\gamma=0.1$ la que se usa en las simulaciones. La Figura 12 muestra que la convergencia depende de la magnitud de la señal de entrada. Notar que la solución es inestable cuando la amplitud de u_c es 3.5. El Modelo aproximado prevé inestabilidad para u_c mayor que 3.16. También se deben otra que la convergencia es muy lenta para pequeños valores de amplitud.

Este ejemplo indica claramente que la elección de la ganancia es crucial y que el valor que se elija depende de la amplitud de las señales. Debido a esto es natural modificar el algoritmo de tal manera que este no dependa de la amplitud de las señales.

Debido a ello, la regla del M.I.T. se escribe como

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e$$

donde se introduce $\varphi = -\partial e / \partial \theta$. Se realiza la siguiente modificación en la regla de ajuste

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\gamma \varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi} \quad (4.36)$$

donde se agrega $\alpha > 0$ para evitar las dificultades numéricas cuando φ es pequeño. Se debe notar que la ecuación está escrita de forma tal que es válida aun cuando θ sea un vector de parámetros. En este caso φ también será un vector de la misma dimensión.

Si se repite el análisis en estado estacionario se obtiene que la ecuación (4.31) es remplazada por la ecuación

$$s + \gamma \frac{\varphi^0 u_c^0}{\alpha + \varphi^{0T} \varphi^0} k_p G(p) = 0$$

Debido a que φ^0 es proporcional a u_c^0 , las raíces de esta ecuación no cambiarán con los cambios en los niveles de las señales. La ley de adaptación dada por la ecuación (4.36) se la llama *regla del M.I.T. normalizada*. En la Figura 13 se muestra el desempeño de este algoritmo el cual se puede comparar con el desempeño del algoritmo no normalizado mostrado en la Figura 12.

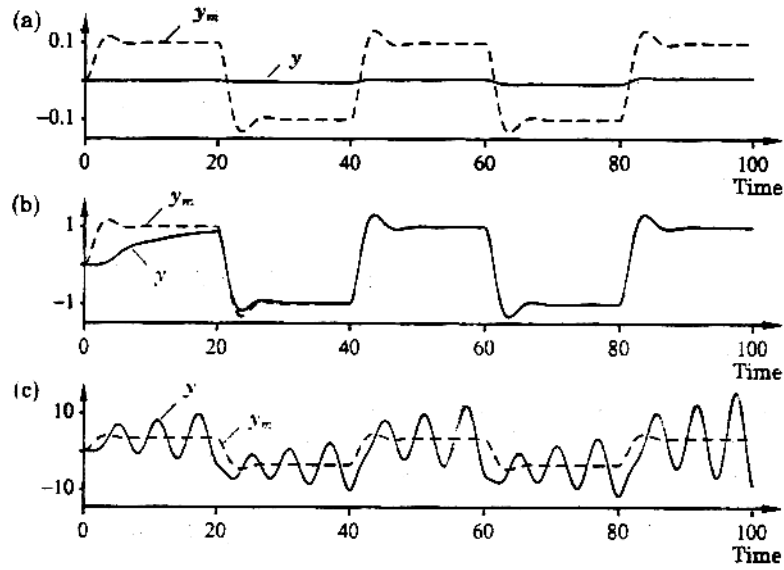


Figura 12. Simulación de un MRAS del Ejemplo 5. La señal de referencia es una señal cuadrada con una amplitud (a) $u_c = \text{cuad}(0.1)$, (b) $u_c = \text{cuad}(1)$ y (c) $u_c = \text{cuad}(3.5)$. La salida del modelo y_m es la línea de puntos, la salida del proceso es la línea sólida. Se usan los siguientes parámetros $k_p = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $\gamma = 0.1$

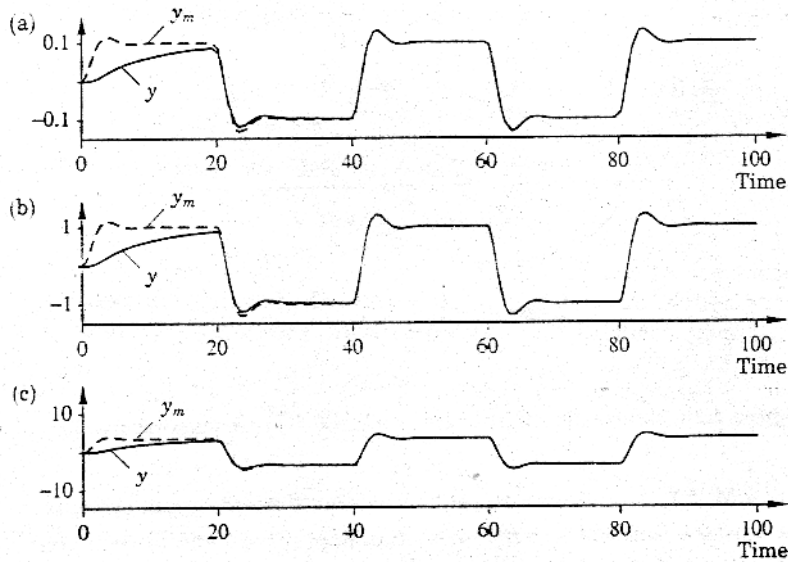


Figura 13. Simulación de un MRAS en el Ejemplo 5 con la regla del M.I.T. normalizada. La señal de referencia es una señal cuadrada con una amplitud (a) $u_c = \text{cuad}(0.1)$, (b) $u_c = \text{cuad}(1)$ y (c) $u_c = \text{cuad}(3.5)$. La salida del modelo y_m es la línea de puntos, la salida del proceso y es la línea sólida. Se usan los siguientes parámetros $k_p = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $\gamma = 0.1$ y $\alpha = 0.001$. Comparar los resultados con la Figura 12.

4.4.5. Aplicación a sistemas lineales en general

Una ley de control por modelo de referencia basada en el método del gradiente se puede derivar para un sistema SISO general.

Sea la ecuación del sistema descripta por

$$Ay = Bu \quad (4.37)$$

y se desea obtener un sistema caracterizado por la ecuación

$$A_m y_m = B_m u_c$$

Se utiliza una estructura para el controlador de la forma

$$Ru = Tu_c - Sy$$

La ecuación del sistema a lazo cerrado se describe como

$$y = \frac{BT}{AR + BS} u_c \quad (4.38)$$

y

$$u = \frac{AT}{AR + BS} u_c \quad (4.39)$$

El error es

$$e = y - y_m$$

Para obtener la ley de ajuste de parámetro se debe determinar la derivada de sensibilidad, es decir la derivada parcial del error con respecto a los parámetros del regulador. Sea r_i , s_i y t_i los coeficientes del polinomio R, S y T. Las derivadas de sensibilidad son

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial r_i} &= -\frac{BTAp^{k-i}}{(AR + BS)^2} u_c = -\frac{Bp^{k-i}}{AR + BS} u \quad i = 1, \dots, k \\ \frac{\partial e}{\partial s_i} &= -\frac{BTBp^{l-i}}{(AR + BS)^2} u_c = -\frac{Bp^{l-i}}{AR + BS} y \quad i = 1, \dots, l \\ \frac{\partial e}{\partial t_i} &= -\frac{Bp^{m-i}}{AR + BS} u_c \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

donde $k = \deg(R)$, $l = \deg(S)$ y $m = \deg(T)$. La segunda equivalencia surge de utilizar las ecuaciones (4.38) y (4.39) que relacionan u y y . La derivada de sensibilidad no se puede evaluar, ya que esta incluye los polinomios A y B que son los parámetros desconocidos. Hay varias formas de realizar aproximaciones que den una ley de actualización razonable. Una posibilidad es

$$AR + BS \approx A_0 A_m B^+$$

Esta aproximación será exacta cuando los parámetros tengan sus valores deseados. La derivada de sensibilidad se aproxima por

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial r_i} &\approx -\frac{B^- p^{k-i}}{A_0 A_m} u \quad i = 1, \dots, k \\ \frac{\partial e}{\partial s_i} &\approx -\frac{B^- p^{l-i}}{A_0 A_m} y \quad i = 1, \dots, l \\ \frac{\partial e}{\partial t_i} &= -\frac{B^- p^{m-i}}{A_0 A_m} u_c \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

El lado derecho es todavía no realizable debido a que contiene el polinomio B^- . Sin embargo, si todos los ceros del proceso son cancelados, se tiene que $B^- = b_0$. Una ley

de actualización realizable si se conoce el signo de b_0 . Entonces se puede absorber la magnitud de b_0 por la ganancia de adaptación. Finalmente se obtiene la siguiente ecuación para el ajuste de los parámetros

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_i}{\partial t} &= \gamma e \frac{p^{k-i}}{A_0 A_m} u \quad i=1, \dots, k; \quad k = \deg(R) \\ \frac{\partial s_i}{\partial t} &= \gamma e \frac{p^{l-i}}{A_0 A_m} y \quad i=1, \dots, l; \quad l = \deg(S) \\ \frac{\partial t_i}{\partial t} &= -\gamma e \frac{p^{m-i}}{A_0 A_m} u_c \quad i=1, \dots, m; \quad m = \deg(T)\end{aligned}$$

Para implementar esta ley de ajuste se deben aplicar a las señales u , y y u_c tres filtros de la forma $1/A_0 A_m$. La velocidad de cambio se obtiene al multiplicar la salida de los filtros por el error e . Para obtener el ajuste de los parámetros es necesario asumir que los ceros del proceso son estables y que la ganancia instantánea b_0 se conoce.

Esta suposición se puede evitar si se utiliza un algoritmo más complejo. Si se agrega una estimación de los parámetros, se puede realizar una aproximación como

$$AR + BS \approx \hat{A}R + \hat{B}S$$

$$B^- \approx \hat{B}^-$$

De esta forma es posible obtener un algoritmo que trabaje para sistemas de fase no mínima y para sistemas donde el signo de b_0 sea desconocido. Sin embargo se debe notar que el algoritmo es indirecto, ya que se deben estimar los parámetros.

4.4.6. Conclusión de la aplicación de la regla del M.I.T.

Los resultados numéricos indican que los sistemas adaptables obtenidos con la regla del M.I.T. trabajan en forma adecuada para ganancias pequeñas. Para ganancias grandes se presentan comportamientos muy complejos. Los sistema normalmente se hace inestable cuando la ganancia de adaptación aumenta o el modelo de referencia no se escoge en forma adecuada.

Se pueden utilizar algoritmos normalizados que mejoran el comportamiento del sistema adaptable cuando cambia la amplitud de las señales. Se debe notar que estos algoritmos solo es un avance en la solución de los problemas de convergencia pero estos no garantizan una estabilidad total del sistema.

4.5. Método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov

Dado el carácter no lineal y variable en el tiempo de los sistemas adaptables por modelo de referencia, no son válidos los criterios de estabilidad de sistemas lineales. Se puede utilizar el método directo de Lyapunov para diseñar sistemas con modelo de referencia estables.

Este método establece que un sistema tiene un equilibrio $\mathbf{x} = 0$, asintóticamente estable, si existe una función, llamada de Lyapunov, $V(\mathbf{x})$ que satisface

$$V(\mathbf{x}) > 0 \text{ para } \mathbf{x} \neq 0 \text{ (definida Positiva)}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \text{ para } \mathbf{x} \neq 0 \text{ (definida Negativa)}$$

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \text{ para } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$$

$$V(0) = 0$$

Como la función de Lyapunov es similar a una función de energía, esta debe decrecer con el tiempo.

Utilizando este método en el diseño de sistemas adaptables, se trasladan las especificaciones de estabilidad directamente en la ley de adaptación. Generalmente, los pasos a seguir para el diseño de un sistema adaptable con modelo de referencia por el método de estabilidad de Lyapunov son los siguientes:

1. El primer paso es encontrar una ecuación del error, bien en la salida ($e = y_p - y_m$) o en las variables de estado ($\mathbf{e} = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_m$).

2. Encontrar una función de Lyapunov como una función del error entre las señales y el error de los parámetros ($\phi = \hat{\theta} - \theta$). En su forma más simple esta función toma la forma

$$V = \mathbf{e}^T P \mathbf{e} + \phi^T \Gamma^{-1} \phi$$

donde P y Γ^{-1} deben ser definidas positivas.

3. Calcular la derivada de la función de Lyapunov. La derivada debe ser definida negativa. Generalmente toma la forma

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \text{algunos términos que incluyen } \phi$$

El primer término garantiza que la derivada es definida negativa, por lo que, haciendo el resto igual a cero se tiene una posible solución. La matriz Q es definida positiva. Las matrices P y Q , para un sistema gobernado por una matriz A , está relacionadas por la ecuación de Lyapunov

$$-Q = A^T P + P A$$

4. Haciendo el término extra igual a cero se obtiene la ley de adaptación. Normalmente tiene la forma

$$\dot{\theta} = -\Gamma \varepsilon \xi$$

donde ε está directamente relacionado con el error e y ξ es una versión modificada del vector de señales (referencia, salida, etc.).

4.5.1. Ejemplos ilustrativos

Ejemplo 6: Ganancia de prealimentación para sistema de primer orden por Lyapunov

Considerando el sistema de la Figura 14 donde la señal de control está dada por

$$u = \theta u_c$$

siendo K la ganancia ajustable que hay que calcular, la deducción de la ley de adaptación es como sigue

$$\dot{y} = b\theta u_c - y \quad (4.40)$$

y además

$$\begin{aligned} \dot{y}_m &= u_c - y_m \\ \dot{e} &= \dot{y} - \dot{y}_m \\ &= (b\theta - 1)u_c - (y - y_m) \\ &= -e + (b\theta - 1)u_c \end{aligned} \quad (4.41)$$

Teniendo en cuenta que el término $(b\theta - 1)$ es proporcional al error en el parámetro, la función de Lyapunov en este caso puede elegirse como

$$V = e^2 + \frac{1}{\gamma}(b\theta - 1)^2$$

Su derivada resulta

$$\dot{V} = 2e\dot{e} + \frac{2b}{\gamma}\dot{\theta}(b\theta - 1) \quad (4.42)$$

reemplazando la ecuación (4.41) en (4.42)

$$\dot{V} = 2e[-e + (b\theta - 1)u_c] + \frac{2b}{\gamma}\dot{\theta}(b\theta - 1)$$

$$\dot{V} = -2e^2 + 2e(b\theta - 1)u_c + \frac{2b}{\gamma}\dot{\theta}(b\theta - 1)$$

El primer término es negativo. Así que haciendo el resto igual a cero se obtiene la ley de adaptación, esto es

$$0 = 2e(b\theta - 1)u_c + \frac{2b}{\gamma}\dot{\theta}(b\theta - 1)$$

despejando $\dot{\theta}$

$$2e(b\theta - 1)u_c = -\frac{2b}{\gamma}\dot{\theta}(b\theta - 1)$$

$$eu_c = -\frac{b}{\gamma}\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\gamma}{b}eu_c$$

como b es desconocido se puede definir el parámetro de ajuste $\gamma_1 = \gamma/b$ resultando finalmente

$$\dot{\theta} = -\gamma_1 eu_c$$

Se debe notar que se debe conocer el signo de b .

En la Figura 15 y Figura 16 se representa una simulación del ejemplo descrito cuando el parámetro b vale inicialmente 4 y en el instante de tiempo 20 pasa a valer 2. Puede observarse como la adaptación es buena en ambos casos, siendo más rápida en el caso de la Figura 16 dado que la ganancia de adaptación es superior. En línea de trazos se representa la salida del modelo de referencia y en línea continua la salida del modelo ajustable.

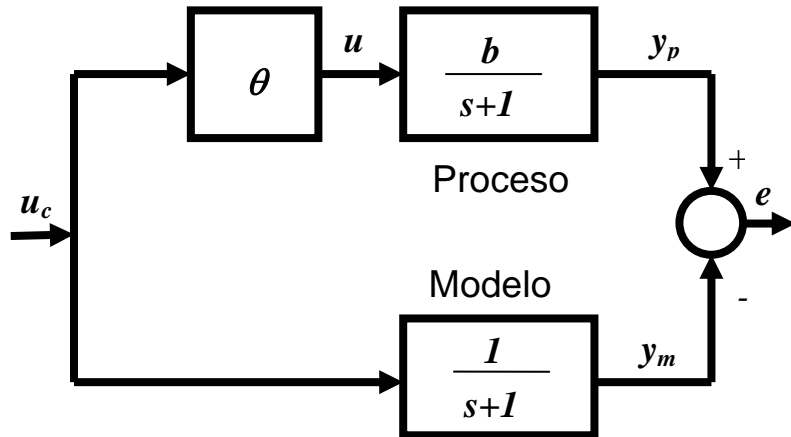


Figura 14. Sistema y modelo de primer orden

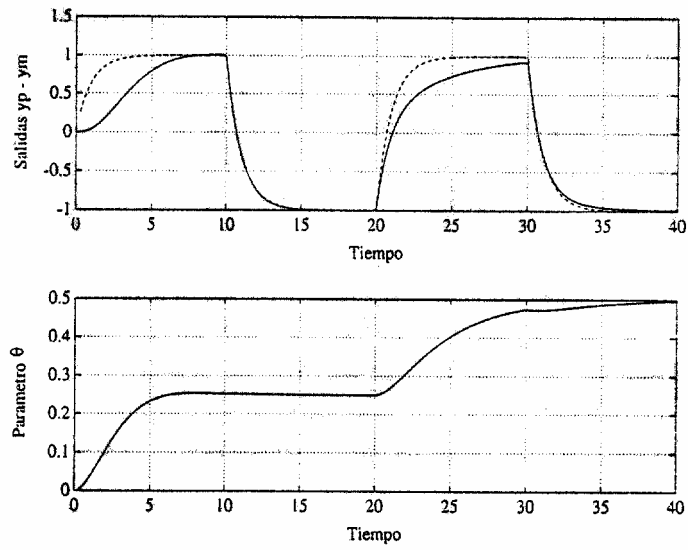


Figura 15. Proceso de primer orden ($\gamma_1=0.1$)

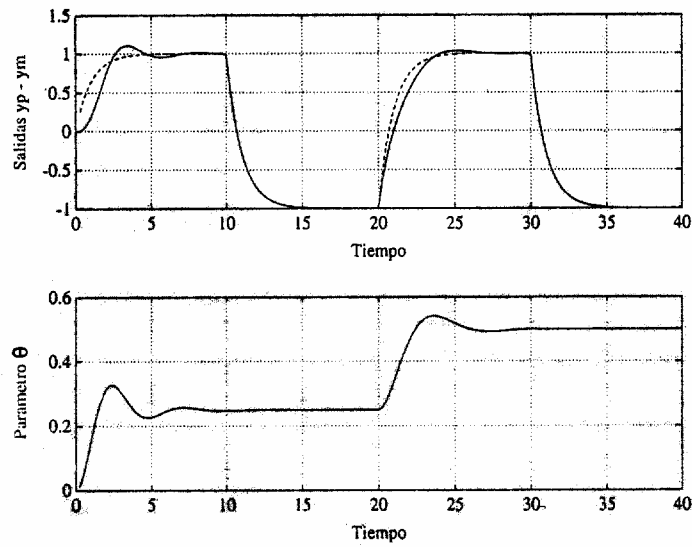


Figura 16. Proceso de primer orden ($\gamma_1=0.5$)

Ejemplo 7: MRAS para sistema de primer orden por Lyapunov

En este ejemplo se considera el sistema usado en el Ejemplo 2 con la regla del M.I.T. El sistema tiene la forma

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu \Leftrightarrow G(p) = \frac{y}{u} = \frac{b}{(p+a)}$$

La respuesta deseada es

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c \Leftrightarrow G_m(p) = \frac{y_m}{u_c} = \frac{b_m}{(p+a_m)}$$

donde $a_m > 0$ y la señal de referencia está acotada. El controlador toma la forma

$$u(t) = \theta_1 u_c(t) - \theta_2 y(t)$$

El error se define como

$$e = y - y_m$$

Debido a que se está tratando de hacer el error pequeño, es natural obtener una ecuación diferencial para el error.

$$\frac{de}{dt} = -a_m e - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)u_c \quad (4.43)$$

Notar que el error va a cero si los parámetros son iguales a los valores dados por las ecuaciones

$$\theta_1 = \frac{b_m}{b}, \quad \theta_2 = \frac{a_m - a}{b} \quad (4.44)$$

Para lograr que los parámetros θ_1 y θ_2 vayan a los valores deseados se diseña el siguiente mecanismo de ajuste.

Si se asume que $b\gamma > 0$ y se introduce la siguiente función cuadrática

$$V(e, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{b\gamma} (b\theta_2 + a - a_m)^2 + \frac{1}{b\gamma} (b\theta_1 - b_m)^2 \right)$$

Esta función es cero cuando e es cero y los parámetros del controlador son iguales a los valores correctos. Por lo tanto la función califica como candidata de Lyapunov. Para que sea una función de Lyapunov la derivada debe ser negativa. Esta derivada es

$$\frac{dV}{dt} = e \frac{de}{dt} + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \frac{d\theta_1}{dt} \quad (4.45)$$

reemplazando (4.43) en (4.45)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -a_m e^2 \\ & + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \left(\frac{d\theta_2}{dt} - \gamma e y \right) \\ & + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \left(\gamma e u_c + \frac{d\theta_1}{dt} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Si los parámetros se actualizan como

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= -\gamma u_c e \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= -\gamma y e \end{aligned} \quad (4.47)$$

al anularse los términos resulta

$$\frac{dV}{dt} = -a_m e^2$$

Por lo tanto la derivada de V con respecto al tiempo es por lo tanto semidefinida negativa pero no definida negativa. Esto implica que $V(t) \leq V(0)$ y que por lo tanto que e , θ_1 y θ_2 serán acotados. Esto implica que $y = e + y_m$ también serán acotados. Para poder usar el **Teorema 1**, se tiene que determinar que \ddot{V} esta acotada. Esta es

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -2a_m e \frac{de}{dt} \quad (4.48)$$

Reemplazando la ecuación (4.43) en (4.48)

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -2a_m e \left(-a_m e - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)u_c \right)$$

Debido a que u_c , e y y son acotadas, se cumple que \ddot{V} es acotada, por lo tanto uniformemente continua. Por la aplicación del **Teorema 1** se concluye que el error e va a cero. Sin embargo, los parámetros no necesariamente convergerán a sus valores correctos. Solo demuestra que están acotados. Para que los parámetros converjan a sus valores correctos es necesario imponer condiciones en la excitación del sistema.

La ecuación de adaptación dada por la ecuación (4.47) es similar a la regla obtenida por el método del M.I.T. pero las derivadas de sensibilidad son reemplazadas por otras señales. La única diferencia es que no hay señales filtradas de u_c y y al aplicar el método de Lyapunov. En ambos casos la ley de ajuste se puede escribir como

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e$$

donde θ es el vector de parámetros. Al aplicar el método de Lyapunov, φ resulta como

$$\varphi = [-u_c \quad y]^T$$

Al aplicar la regla del M.I.T., φ resulta como

$$\varphi = \frac{a_m}{p + a_m} [-u_c \quad y]^T$$

La regla de ajuste obtenida por la teoría de estabilidad de Lyapunov es más simple porque no requiere filtrar las señales. El comportamiento de los dos métodos es bastante similar, sin embargo en la propuesta que utiliza la teoría de estabilidad del Lyapunov se pueden usar ganancias de adaptación γ arbitrariamente grandes y por lo tanto aumentar la velocidad de convergencia.

Teorema 1 [Astrom y Wittenmark (1995), pp. 205]

Dado

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$$

y suponiendo que $f(x, t)$ es localmente Lipschitz en $D \times [0, \infty)$. Sea V una función continua y diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

y

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dV}{dx} f(x, t) \leq -W(x) \leq 0$$

$\forall t \geq 0$, $\forall x \in D$, donde α_1 y α_2 son funciones clase K definidas en $[0, r)$ y $W(x)$ es continua en D . Además, se asume que dV/dt es uniformemente continua en t .

Entonces la solución de $dx/dt = f(x, t)$ con $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ es acotada y satisface

$$W(x(t)) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad (4.49)$$

Además, si se asume que todas las suposiciones son globales y que α_1 y α_2 pertenecen a la clase K_∞ la ecuación (4.49) es válida para todo $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

Este teorema indica que los estados del sistema están acotados y que ellos se aproximan al conjunto $\{x \in D \mid W(x) = 0\}$. Si en este teorema se asume que

dV/dt es uniformemente continua, esto es que la continuidad es independiente de t . Una condición suficiente para esto es que \ddot{V} sea acotada.

4.5.2. Conclusión del método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov

La principal desventaja del método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov es que no es un método sistemático, dado que hay que encontrar la función del Lyapunov V adecuada en cada caso.

Las reglas de ajuste obtenidas por la teoría de Lyapunov garantiza que el error vaya a cero, pero esto no quiere decir que los parámetros converjan a sus valores correctos. La regla de ajuste obtenida es similar a la obtenida a la regla del M.I.T.. Sin embargo, las reglas no están normalizadas. La reglas de ajuste tienen la ventaja de que se puede usar cualquier ganancia de adaptación (arbitrariamente grande).

4.6. Robustez de los sistemas adaptables con modelo de referencia

4.6.1. Incertidumbres, perturbaciones y robustez

En un gran número de diseño de sistemas de control, el diseñador no tiene un modelo detallado de la planta a ser controlada. Esto se puede deber a que este modelo sea muy complejo o debido a que las dinámicas del sistema no son entendidas completamente. Por otro lado, aún cuando se conozca y se pueda utilizar un modelo de la planta de alto orden, usualmente es deseable obtener un controlador que sea lo más sencillo posible, esto conlleva a que no se tome en cuenta parte de la dinámica de la planta.

Si un modelo no especifica en forma exacta el comportamiento dinámico del sistema se dice que éste cuenta con *incertidumbres* (o *incertezas*). Estas incertidumbres se las llama *paramétricas* o *no estructuradas* cuando hay un desconocimiento en los valores exacto de los parámetros del sistema. En los sistemas lineales, la incertidumbre paramétrica implica que no existe un conocimiento exacto en la ubicación de los polos y cero. En cambio, si este error en el comportamiento se debe al desconocimiento de parte de la dinámica del sistema se las llama incertidumbres *inherentes* o *estructuradas*. Para los sistemas lineales, una incertidumbre en la estructura implica que no se conoce el orden exacto del sistema.

Por otro lado se debe tener en cuenta que muchas veces en los procesos existen señales que no se pueden manejar por el que diseña el sistema de control. A estas señales se las llama *perturbaciones*. Si se puede obtener un valor de estas señales con un instrumento se las llama *perturbaciones medible*. Hay perturbaciones que no se pueden medir y solo se toma conocimiento de ellas por los efectos que causa en el comportamiento del sistema. A estas se las llama *perturbaciones no medibles*.

Como se observó en secciones anteriores, los sistemas adaptables son sistemas no lineales. Debido a ello el comportamiento del sistema también depende de las amplitudes de las señales y en ciertas circunstancias puede existir un comportamiento inestable para ciertas señales.

Lo importante es preguntarse si un controlador adaptable se comportará en forma adecuada cuando parte de la dinámica de la planta no sea tenida en cuenta o cuando perturbaciones afecten al sistema. Una propiedad básica deseable de los algoritmos de control es que se mantenga la estabilidad ante la presencia de incertidumbres,

perturbaciones y para una amplio rango de señales. A esta propiedad usualmente se la refiere como *robustez de los algoritmos control*.

La mayor dificultad en la definición de robustez es que esta es muy dependiente del problema en cuestión. Un algoritmo que no tolere ninguna incertidumbre (por pequeña que sea) se lo puede llamar claramente *no robusto*. Por otro lado, se lo puede llame *no robusto en la práctica* cuando el rango de incertidumbres que tolera es más pequeño que el rango de incertidumbres presente en el sistema a controlar. En forma similar un algoritmo puede ser lo suficientemente robusto para una aplicación y no para otra.

A continuación se presenta un ejemplo que muestra el comportamiento de un sistema adaptable ante la presencia de perturbaciones e incertidumbres.

4.6.2. El ejemplo de Rohrs de robustez de sistemas adaptable.

A pesar de la existencia de pruebas de estabilidad para sistemas de control adaptable, Rohrs, Athans, Valavani y Stein [Rohrs *et al.* 1985] mostraron que algunos algoritmos se pueden tornan inestables cuando no se cumplen algunas de las suposiciones realizadas para realizar la demostración. En los artículos de Rohrs se trataron diferentes sistemas (tantos continuos como discretos) con diferentes leyes de adaptación. En esta sección se considerará uno de estos esquemas

El esquema de control adaptable supone una planta de primer orden con una función de transferencia

$$\hat{P}_{\theta^*} = \frac{k_p}{s + a_p} \quad (4.50)$$

el modelo de referencia

$$\hat{M}(s) = \frac{k_m}{s + a_m} = \frac{3}{s + 3} \quad (4.51)$$

El esquema de control adaptable es de la forma

$$u = \theta_1 u_c + \theta_2 y$$

$$e = y - y_m$$

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma e u_c$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma e y$$

Como un primer paso se asume que la función de transferencia de la planta está dada por la ecuación (4.50) con $k_p = 2$, $a_p = 1$. Los parámetros nominales del controlador son

$$\theta_1^* = \frac{k_m}{k_p} = 1.5$$

$$\theta_2^* = \frac{a_p - a_m}{k_p} = -1$$

Esta planta se estudió anteriormente y se demostró que el comportamiento del sistema adaptable es estable (por Lyapunov). Ahora se estudia el comportamiento del sistema adaptable asumiendo que la planta real no satisface exactamente las suposiciones con el cual el sistema adaptable es estable.

Se supone que la planta nominal es solo una aproximación de primer orden y en realidad es una aproximación de una planta de tercer orden con una función de transferencia de la forma

$$\hat{P}(s) = \frac{2}{(s+1)} \frac{229}{(s^2 + 30s + 229)}$$

Al segundo término se lo llama *dinámicas no modeladas*, en analogía con la terminología de control no adaptable. Los Polos de las dinámicas no modeladas se encuentran en $-15 \pm j2$, y a bajas frecuencias este término es aproximadamente igual a 1.

En el ejemplo de Rohrs, la salida de la planta y es afectada por un ruido de medición $n(t)$. En la Figura 17 se muestra la planta con el modelo de referencia y controlador.

Un aspecto importante del ejemplo de Rohrs es que los polos de la planta así como los polos del modelo están bien adentro de la región de estabilidad. Además, las dinámicas no modeladas son bien amortiguadas, con polos estables. Desde un punto de vista de diseño tradicional de control, se los puede considerar inocuos.

Al principio, Rohrs mostró a través de simulaciones que, sin ruido de medición y dinámicas no modeladas, el esquema adaptable es estable y el error de salida converge a cero como predice el análisis de estabilidad.

Sin embargo, con las dinámicas no modeladas, aparecen tres mecanismos de inestabilidad:

- (R1) Con una entrada de referencia *constante y grande*, y sin ruido de medición, el error de salida inicialmente converge a cero, pero finalmente diverge a infinito, junto con el parámetro θ_1 y θ_2 . Las Figura 18 y Figura 19 muestra una simulación con $u_c = 4.3$, $n(t) = 0$ que muestran este comportamiento ($\theta_1(0) = 1.14$, $\theta_2(0) = -0.65$ y las otras condiciones iniciales son cero).
- (R2) Con una entrada de referencia *con una componente pequeña constante y una componente grande de alta frecuencia*, el error de salida diverge en un principio en forma lenta y entonces crece rápidamente hasta infinito junto con los parámetros del controlador θ_1 y θ_2 . Las Figura 20 y Figura 21 muestra una simulación con $u_c = 0.3 + 1.85 \sin(16t)$, $n(t) = 0$ que muestran este comportamiento ($\theta_1(0) = 1.14$, $\theta_2(0) = -0.65$ y las otras condiciones iniciales son cero).
- (R3) Con una *entrada constante moderada y una perturbación de salida pequeña*, el error de salida inicialmente converge a cero. Después de permanecer en un entorno de cero por un periodo de tiempo prolongado, este diverge a infinito. En otras maneras, los parámetros del controlador θ_1 y θ_2 derivan aparentemente a una velocidad constante hasta que repentinamente divergen a infinito. Las Figura 22 y Figura 23 muestran simulaciones con $u_c = 2$, $n = 0.5 \sin(16.1t)$ ($\theta_1(0) = 1.14$, $\theta_2(0) = -0.65$ y las otras condiciones iniciales nulas). Aunque estas simulaciones corresponden a un valor comparativamente alto de $n(t)$, las simulaciones muestran que cuando están presentes valores de perturbaciones de salida $n(t)$ más pequeños, la inestabilidad también aparece pero después de un periodo de tiempo más largo. Los parámetros del controlador derivan con una velocidad muy lenta. La inestabilidad también se observa con otras frecuencias en la perturbación, incluyendo a $n(t)$ constante.

Cuando se examina los mecanismos de inestabilidad en el ejemplo de Rohrs se revela que la inestabilidad está relacionada con el sistema identificador. La convergencia de los parámetros está relacionada con la señal de referencia. Esta debe ser persistentemente excitante para que los parámetros converjan. Es importante destacar que si el sistema no

perturbado está persistentemente excitado, este tolerará cierta cantidad de perturbación, o recíprocamente una perturbación pequeña no podrá desestabilizar el sistema.

Los ejemplos de Rohrs estimularon a otros investigadores a estudiar la robustez en el los sistemas adaptables.

Se han detectado distintos mecanismos de inestabilidad de los sistemas adaptables. A continuación se da una pequeña introducción a los más importantes de estos.

Inestabilidad por deriva paramétrica [Ioannou and Sun, 1996, pag. 545]: Cuando hay deriva paramétrica se observa un corrimiento lento del valor de los parámetros del sistema. Después de cierto tiempo puede inestabilizar el sistema. Normalmente ocurre porque la señal de referencia no es persistentemente excitante.

Inestabilidad por alta Ganancia [Ioannou and Sun, 1996, pag. 548]: Esta puede ocurrir cuando hay dinámicas no modeladas que pueden ser modeladas como perturbaciones singulares. En este caso la ley de control adaptable puede generar ganancias de realimentación altas que excitan las dinámica no modeladas del sistema.

Inestabilidad por adaptación rápida [Ioannou and Sun, 1996, pag. 549]: Cuando la ganancia de adaptación γ es grande puede que genere cambios muy rápidos en los parámetros. Estos pueden excitar las dinámicas no modeladas. En general la velocidad de adaptación de los parámetros debes ser comparativamente pequeña comparada con las dinámicas no modeladas.

Inestabilidad por alta frecuencia [Ioannou and Sun, 1996, pag. 551]: Si la señal de referencia tiene frecuencias en el rango de las dinámicas no modeladas, estas pueden excitar las dinámicas no modeladas dando un mal ajuste de parámetros y eventualmente causando la inestabilidad del sistema.

Inestabilidad por cambios en los parámetros [Ioannou and Sun, 1996, pag. 552]: Los análisis de estabilidad de los sistemas adaptable con modelo de referencia normalmente se realizan considerando que los parámetros del sistema son desconocidos pero constantes. Si se producen variaciones abruptas de los parámetros del sistema estas pueden causar la inestabilidad del sistema. En general si esta variación de los parámetros del sistema es lenta comparada con las dinámicas no modeladas no causa mayores problemas, pero si esto no ocurre pueden inestabilizarse el sistema.

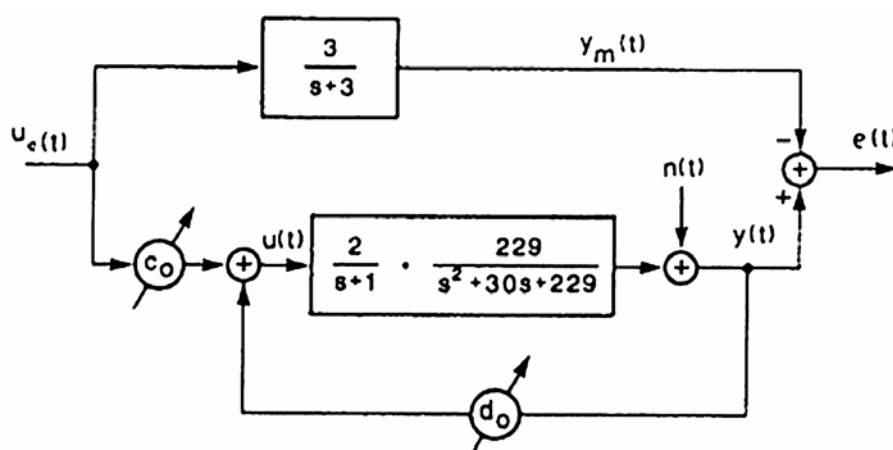


Figura 17. Planta, modelo de referencia, perturbación y controlador en el ejemplo de Rohrs.

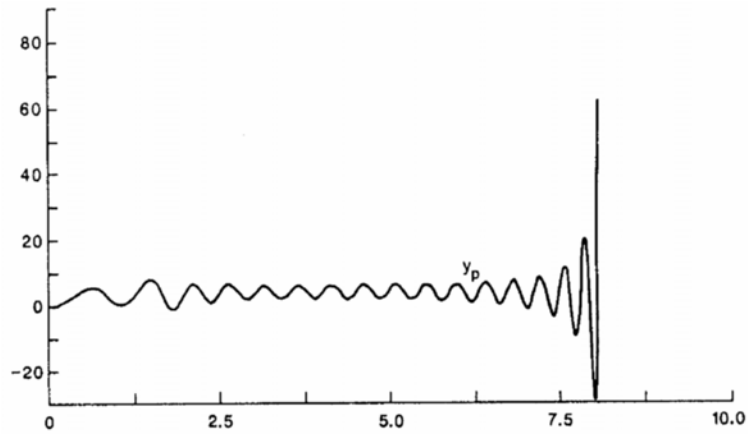


Figura 18. Salida de la planta ($u_c = 4.3$, $n(t) = 0$)

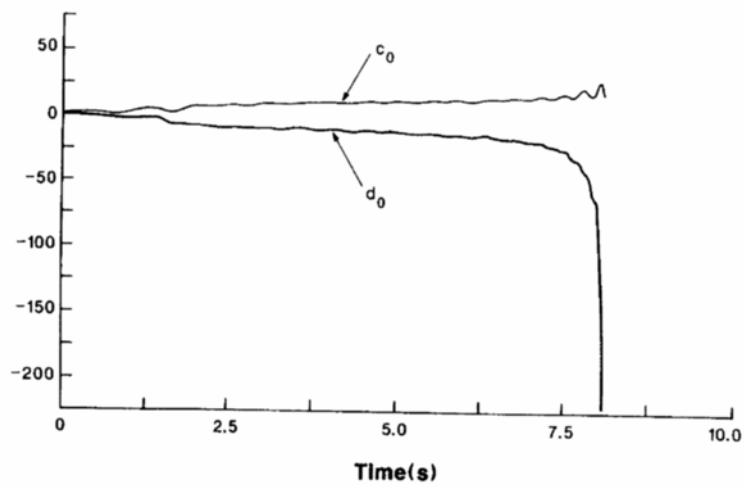


Figura 19. Parámetros del controlador ($u_c = 4.3$, $n(t) = 0$)

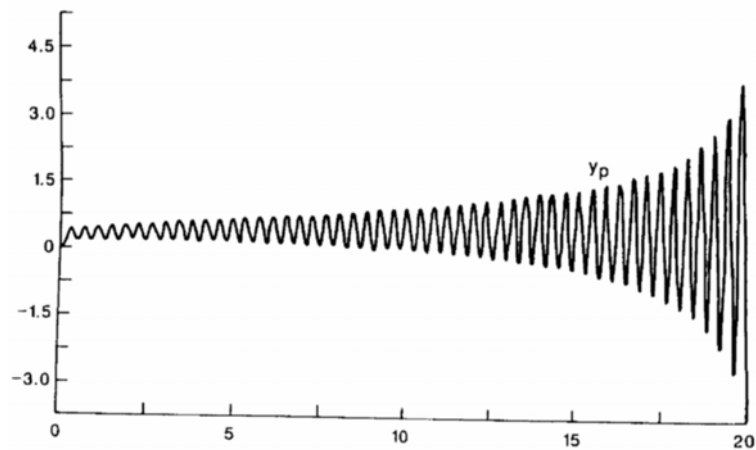


Figura 20. Salida de la planta ($u_c = 0.3 + 1.85 \sin(16.1t)$, $n = 0$)

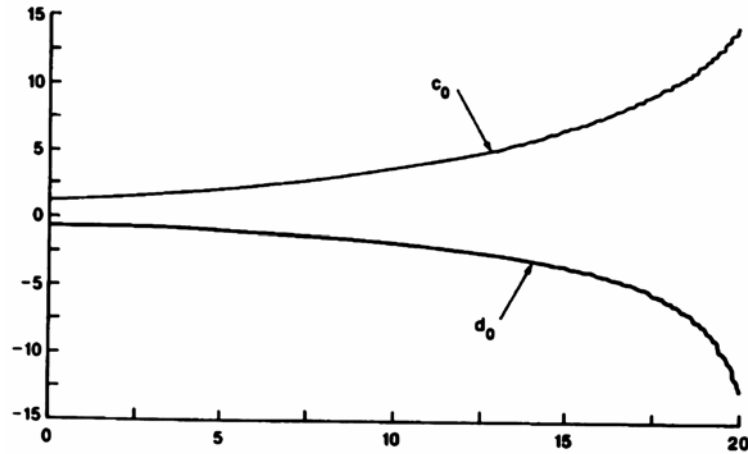


Figura 21. Parámetros del controlador ($u_c = 0.3 + 1.85 \sin(16.1t)$, $n = 0$).

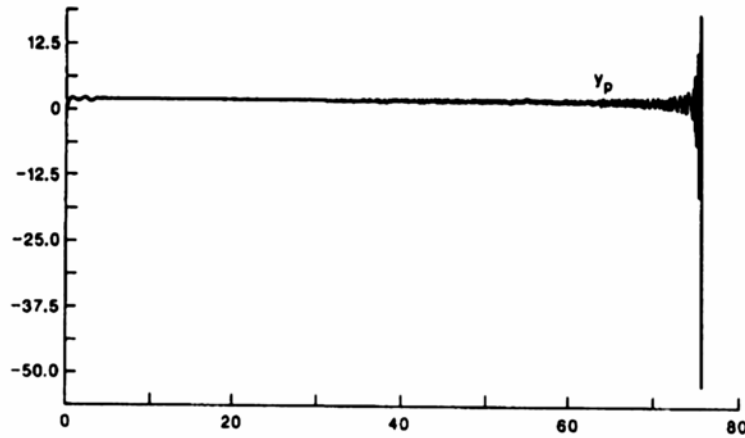


Figura 22. Salida de la planta ($r = 2$, $n = 0.5 \sin(16.1t)$)

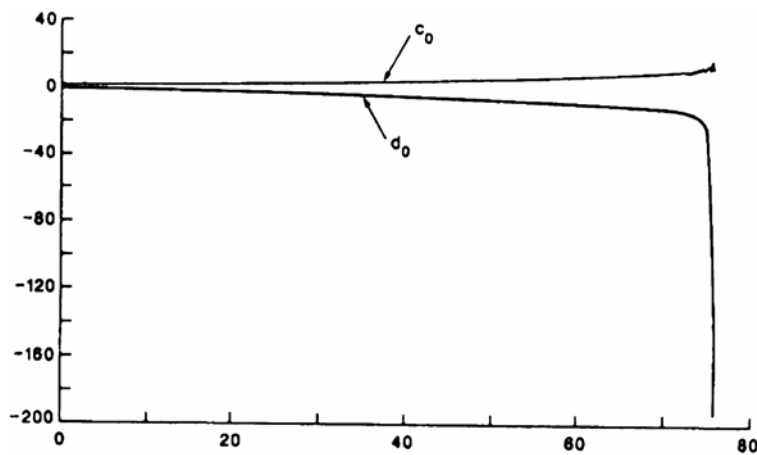


Figura 23. Parámetros del controlador ($u_c = 2$, $n = 0.5 \sin(16.1t)$)

4.6.3. Métodos para mejorar la robustez.

Los sistemas adaptables no son mágicamente robustos, se deben realizar elecciones cuidadosamente en el transcurso del diseño y estas necesitan explícitamente tomar en

cuenta las limitaciones y flexibilidades de los algoritmos utilizados. Se realizará una discusión cualitativa de diferentes aspectos metodológicos para mejorar la robustez de los sistemas adaptables.

4.6.3.1. Esquemas de identificación robusta (Sastry and Bodson, 1989, pp. 248)

Una parte importante del esquema de control adaptable es el algoritmo de adaptación (o el identificador). Cuando solo están presente incertezas paramétricas, se puede probar que los esquemas adaptables son estables, con seguimiento de trayectoria asintótico. La convergencia de los parámetros en general no está garantizada, pero esta no es necesaria para lograr la estabilidad. Ante la presencia de dinámicas no modeladas y ruido de medición, puede activarse alguno de los mecanismos de inestabilidad. Debido a ello el contenido espectral de las entradas es importante.

Una elección inicial del diseñador del sistema de control es el rango de frecuencias de interés. En el contexto de los sistemas de control adaptable, este es el rango de frecuencias que se desea un seguimiento preciso del modelo de referencia. Normalmente este está limitado por los anchos de banda de los actuadores y los sensores.

Después se debe elegir el orden de la planta. El orden debe ser el suficiente para permitir el modelado de las dinámicas de la planta en las frecuencias del rango de interés. Por otro lado, si la planta es de un orden alto, se requerirán señales de excitación que estimulen todos los modos del sistema (serán múltiples frecuencias independientes). La presencia de grandes vectores de parámetros en el identificador puede también causar problemas numéricos que condicionan el proceso de identificación. En resumen, es importante elegir un orden de la planta lo suficientemente bajo capaz de representar todas las dinámicas en el rango de frecuencia de interés.

Para reducir el efecto del ruido, puede ser razonable filtrar el vector de regresión en los algoritmos de identificación, de forma de excluir la contribución de los datos en las regiones de frecuencia que están fuera del rango de frecuencias de interés (esto es por ejemplo colocar filtros pasa-bajos con una frecuencia de corte un poco mayor que el ancho de banda de control).

El espectro de la entrada de referencia es otro parámetro pendiente para el diseñador (no siempre manejable a gusto). Se puede decir, sin detallar mucho, que el algoritmo identificador identifica la porción de las dinámicas de la planta en el rango de frecuencias del espectro de entrada. Por lo tanto, es importante que la señal de entrada a) sea lo suficientemente rica para garantizar la convergencia paramétrica y b) tenga un contenido de energía suficiente en el rango de frecuencias donde el modelo de la planta deba ser identificada.

Desde un punto de vista práctico, es importante monitorear la señal de excitación en el lazo del identificador y desconectarla la adaptación cuando la excitación sea pobre. Esto incluye el caso cuando el nivel de excitación sea tan bajo que sea difícil distinguir entre la excitación y el ruido. También está claro que si la excitación es pobre en periodos de tiempo donde los parámetros varían, la identificación de parámetros será inefectiva. En estas circunstancias, la única solución es agregar señales de perturbación extras dentro de la entrada de referencia para proporcionar excitación al algoritmo de identificación.

En la siguiente tabla se resumen como es un esquema para un esquema robusto

	Paso	Consideración
1	Elección del rango de frecuencias de interés	El rango de frecuencias sobre el cual se desea el seguimiento
2	Determinación del orden de la planta	Modelar las dinámicas de la planta en el rango de frecuencias de interés Debe ser lo mas bajo posible
3	Selección del filtro del regresor	Filtrar las componentes de alta frecuencia (rango de dinámicas no modeladas)
4	Selección de la entrada de referencia	Con riqueza suficiente El espectro de frecuencias tiene que estar en el rango de interés.
5	Si la referencia no es lo suficientemente rica, - desconectar la actualización de parámetros - si en estos periodos los parámetros varían, y el error se ve afectado se deberá agregar señales de perturbación a la referencia.	

4.6.3.2. Especificaciones del objetivo de control a lazo cerrado - Elección del modelo de referencia y la entrada de referencia (Sastry and Bodson, 1989, pp. 248).

El modelo de referencia debe elegirse de forma que refleje la respuesta deseada de la planta a lazo cerrado. Desde un punto de vista robusto, sin embargo, el control solo se llevará a cabo sobre un rango de frecuencias donde existe un modelo satisfactorio y los parámetros del controlador son posibles. Por lo tanto el objetivo de control (o modelo usado como referencia) debe tener un ancho de banda no mayor el ancho de banda del identificador. En particular, el modelo de referencia no debe tener una ganancia grande en las regiones de frecuencias en las cuales son significativas las dinámicas no modeladas.

La elección de la entrada de referencia es otro de las elecciones del objetivo general de control. Esta es muy importante para el algoritmo de identificación. Sin embargo la excitación persistente en el rango de frecuencias correcto puede requerir el agregado de entradas de referencia no deseadas para el desempeño del controlador. En algunas aplicaciones (como el vuelo de aviones), el agregado de señales de perturbación en la entrada puede resultar en un temblor (dithering) en la salida de la planta. En los sistemas adaptables la referencia de entrada juega un doble papel. Por un lado se requiere para generar la salida y por otro lado debe proveer la excitación necesaria para la convergencia de los parámetros.

4.6.3.3. El uso de la información existente con anterioridad (Información a priori)

Los esquemas de prueba de estabilidad vistos usan muy poca información a priori de la planta bajo control. En la practica, el diseñador puede encontrarse con un sistema el cual está bastante bien modelado, excepto por algunas componentes no modelada y desconocidas que hay que identificar. Esta información puede ayudar a que el objetivo de control sea alcanzado más fácilmente. El inconveniente es que cada problema en particular impondrá la forma que se pueda utilizar. Se pueden utilizar cotas para las

distintas variables y señales del sistema que monitoreen el sistema y actúen como alarmas ante irregularidades.

4.6.3.4. Variación en el tiempo de los parámetros

Los algoritmos de control adaptables se han analizado y derivados para el caso de parámetros desconocidos pero fijos. En la práctica el control adaptable es más útil en problemas que incluyen cambios lentos de los parámetros de la planta. En estas circunstancias el estimador necesita converger más rápidamente que la velocidad en la que cambian los parámetros de la planta. El estimador debe descartar los datos de entrada-salida viejos para poder seguir los parámetros que varían en el tiempo. Este descarte no debe, sin embargo, ser tan rápido ya que esto puede provocar inconsistencia en los valores de los parámetros y sensibilidad a ruido. En la Figura 24 se muestra los rangos de dinámicas deseados en un sistema adaptable.

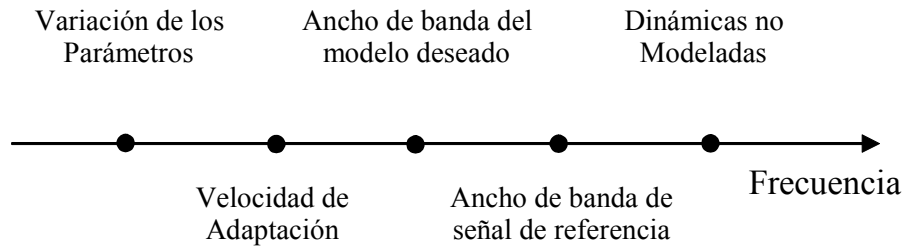


Figura 24. Rangos de frecuencia adecuados para el correcto funcionamiento de un sistema adaptable

4.6.4. Robustez a través de la modificación de las leyes de adaptación

En las secciones anteriores se realizó una revisión de las razones de la pérdida de robustez en los sistemas adaptables y se discutió en forma cualitativa de como remediar estos problemas. En esta sección se presentan modificaciones de las reglas de adaptación para mejorar la robustez del sistema.

4.6.4.1. Zona Muerta y Zona muerta relativa

La idea general de la zona muerta es detener la actualización de los parámetros cuando la excitación es insuficiente para distinguir entre las señales del regresor y del ruido. Por lo tanto la adaptación se desconecta cuando el error del identificador es más pequeño que un umbral.

Más específicamente, si se considera el esquema de control adaptable con la regla del M.I.T.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\gamma e \nu & \text{si } |e| > \Delta \\ \dot{\theta} &= 0 & \text{si } |e| < \Delta \end{aligned} \quad (4.52)$$

donde $\nu = d\theta/dt$ (o en forma más general un vector de regresor). Para la regla normalizada toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\gamma \frac{e\varphi}{\alpha + \varphi^T \varphi} & \text{si } |e| > \Delta \\ \dot{\theta} &= 0 & \text{si } |e| < \Delta \end{aligned} \quad (4.53)$$

El parámetro Δ en las ecuaciones (4.52) y (4.53) representa el tamaño de la zona muerta. En los otros esquemas de control adaptables con modelo de referencia el esquema es el mismo. La parte más crítica para la aplicación de este esquema es la

selección del ancho de la zona muerta. Si la zona muerta es muy grande entonces e no tenderá a cero y por lo tanto el sistema no será estable sino solo para grandes valores del error e . Existen diferentes técnicas para elegir a Δ . Estas usan cotas obtenidas a priori de las perturbaciones y de la planta para encontrar un valor del parámetro Δ y establecen que el error se mantendrá acotado por $|e| \leq \Delta$. Sin embargo este valor es muy conservativo y desde un punto de vista práctico no es muy útil. Por lo tanto, en forma práctica se debe elegir Δ sobre el piso de ruido de la variable e (sin la señal de referencia presente). Se puede modificar el valor de Δ en línea dependiendo de la calidad de los datos.

Si bien este esquema esta planteado par al regla del M.I.T. se puede usar para otras propuestas que consideran estabilidad en el error reemplazando v por un vector con parámetros de las distintas variables.

4.6.4.2. Término de fuga (modificación σ)

Existen modificaciones a la ley de actualización de parámetros para contrarrestar la fuga de los valores de los parámetros dentro de la región de inestabilidad en la ausencia de excitación persistentemente excitante. La modificación original es de la forma

$$\dot{\theta} = -\gamma e v - \sigma \theta \quad (4.54)$$

donde σ se elige pequeño pero positivo para mantener θ creciendo en forma no acotada. Una modificación en este espíritu toma la forma

$$\dot{\theta} = -\gamma e v - \sigma (\theta - \theta_0) \quad (4.55)$$

donde θ_0 es una estima obtenida de θ en una identificación anterior. Otra modificación considera

$$\dot{\theta} = -\gamma e v - \sigma |e| \theta \quad (4.56)$$

Las formas (4.55) y (4.56) tratan de capturar el espíritu de (4.54) sin sus inconvenientes que causan que $\theta \rightarrow 0$ cuando e es pequeño. La ecuación (4.55) trata de sesgar la deriva en la dirección de θ_0 en lugar de 0 y (4.56) trata de desconectar la fuga en la dirección de 0 cuando $|e|$ es pequeño. La principal ventaja de la ley de actualización (4.56) es que retiene las característica sin fuga (lo que implica convergencia de los parámetros con los valores correctos cuando la excitación es persistentemente excitante). También el algoritmo (4.56) puede ser menos susceptible de estallar que la (4.54).

4.6.4.3. Filtro del vector de regresor (Satry and Bodson, 1989, pp. 253)

El concepto de filtro pasa bajos o pre acondicionamiento del vector en la actualización de los parámetros ya se trataron anteriormente. Además es común filtrar las entradas y las salidas. Algunos autores formalizan este concepto. La lógica es que el filtrado pasa bajos tiende a remover el ruido y atenúa las contribución del las altas frecuencias de dinámicas no modeladas.

4.6.4.4. Adaptación lenta, promediación y leyes de adaptación híbridas.

Las características claves de las leyes de adaptación con la adición de zona muerta, del término de fuga y del filtro del vector del regresor es su ‘impaciencia’. Por lo tanto si el error de identificación se incrementa momentáneamente, quizás por razones espurias o

por un ruido transitorio, la actualización del parámetro se realizará instantáneamente. Una posible solución para esta ‘impaciencia’ es realizar más lentamente la adaptación. Como se vio, se puede hacer más lenta la adaptación haciendo pequeña la ganancia de adaptación. Efectivamente, se ha observado que esto provoca una reducción de los efectos del ruido aditivo (por promediación).

Otra modificación de la ley de adaptación de los parámetros que tiene el mismo espíritu es el llamado ley de adaptación híbrida que envuelve actualización discreta de un esquema de adaptación continuo. Una modificación de este tipo es de la forma

$$\theta(t_{k+1}) = \theta(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma e v dt \quad (4.57)$$

En la ecuación (4.57), t_k se refiere al tiempo de actualización y los parámetros del controlador se mantiene constantes entre $[t_k, t_{k+1}]$. La ley (4.57) cuenta con la promediación propia de la integral para remover el ruido.

La adaptación lenta y las leyes de adaptación híbridas sufren de dos inconvenientes. El primero es que resultan con un comportamiento indeseado en el transitorio si la estima de los parámetros inicialmente resulta en un lazo inestable de control (ya que la estabilización es lenta). Segundo, no son capaces de seguir cambios en los parámetros que sean rápidos. Consecuentemente la mejor forma es usarlas después que pasó la parte transitoria del algoritmo de adaptación o después de que los parámetros hayan cambiado y permanecen estables.

4.7. Conclusión

En esta sección se presentaron las principales ideas de los métodos de control adaptable con un modelo de referencia (Model Reference Adaptive Systems: MRAS).

Se dieron algunos ejemplos de los métodos del gradiente (regla del M.I.T.) y de las técnicas basadas en la teoría de estabilidad de Lyapunov. Existen otros métodos de diseño de los sistemas adaptables con modelo de referencia basados en la teoría de pasividad y por realimentación de la salida.

En todos los casos la regla de adaptación toma la forma

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi \varepsilon$$

o en la forma normalizada

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\varphi \varepsilon}{\alpha + \varphi^T \varphi}$$

en el método del gradiente (Regla del M.I.T.) el vector φ es el gradiente negativo del error con respecto a los parámetros. Para resolver el problema se necesitan hacer aproximaciones o bien estimas de los parámetros del sistema. En otros casos, φ es un vector de regresión, el cual se encuentra filtrando entradas, salidas las señales de control. El parámetro ε es el error (o error aumentado), el cual se lo puede interpretar como una predicción del error del problema de estimación. Normalmente se usa un error aumentado que es lineal en los parámetros.

El método del gradiente es flexible y simple de aplicar a cualquier estructura. El cálculo requiere la determinación de la derivada de sensibilidad. Debido a que la derivada de sensibilidad no se puede obtener para sistemas no conocidos, para poder aplicarlo es necesario realizar aproximaciones. Los parámetros iniciales deben ser tales que el sistema a lazo cerrado sea estable. Los resultados empíricos indican que los sistemas son

estables para ganancias de adaptación pequeñas, las ganancias de adaptación grandes tienden a inestabilizar el problema.

Bibliografía

Astrom and Wittenmark, 1995, "Adaptive Control, second edition", Addison Wesley Publishing Company, USA.

C. E. Rohrs, L. S. Valavani, M. Athans, and G. Stein, "Robustness of continuous time adaptive control algorithms in the presence of unmodelled dynamics, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-30, Sept.1982.

P. A. Ioannou and J. Sun, 1996, Robust Adaptive Control, Prentice-Hall, New Jersey, USA.

S. Sastry, M. Bodson, 1989, Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness. Prentice-Hall. 1989

Apéndices: Demostraciones.

Demostración de la ecuación (**4.4)

$$Ru = Tu_c - Sy$$

$$y = \frac{B}{A}u \rightarrow u = \frac{A}{B}y$$

$$R\frac{A}{B}y = Tu_c - Sy$$

$$\left(R\frac{A}{B} + S\right)y = Tu_c$$

$$\left(\frac{RA + SB}{B}\right)y = Tu_c$$

$$(RA + SB)y = BTu_c$$

$$(AR + BS)y = BTu_c$$

c.q.d.

Demostración de la ecuación (**4.7)

$$AR + BS = B^+ A_0 A_m$$

$$B = B^+ B^-$$

$$AR + B^+ B^- S = B^+ A_0 A_m$$

$$R = B^+ R_1$$

$$AB^+ R_1 + B^+ B^- S = B^+ A_0 A_m$$

$$AR_1 + B^- S = A_0 A_m$$

c.q.d.

Demostración: Ejemplo 8, Ajuste de una ganancia de prealimentación.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p G(s) \quad (\text{Modelo de la planta})$$

$$\frac{y(s)}{u_c(s)} = k_m G(s) \quad (\text{Modelo de referencia})$$

$$\text{donde } G(s) = \frac{b}{s + a}$$

$$u = \theta u_c \quad (\text{Ecuación del controlador})$$

Ecuación del error y valor teórico del parámetro

$$e = y - y_m$$

$$y = k_p G(s)u$$

$$u = \theta u_c \quad ()$$

$$y = \theta k_p G(s)u_c$$

$$y_m = k_m G(s)u_c$$

$$e = \theta k_p G(s) u_c - k_m G(s) u_c$$

$$e = (\theta k_p - k_m) G(s) u_c$$

$$\text{si } e = 0 \Rightarrow \theta k_p - k_m = 0$$

$$\theta^* = -\frac{k_m}{k_p} \text{ valor al que tiene que tender el parámetro } \theta$$

Cálculo de la ley de ajuste

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta}$$

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \rightarrow \frac{\partial J}{\partial \theta} = e \frac{\partial e}{\partial \theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta}$$

$$e = (\theta k_p - k_m) G(s) u_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = \frac{\partial (\theta k_p - k_m) G(s) u_c}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = \frac{\partial (\theta k_p G(s) u_c)}{\partial \theta} - \frac{\partial (k_m G(s) u_c)}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial (\theta k_p G(s) u_c)}{\partial \theta} = k_p G(s) u_c$$

$$\frac{\partial (k_m G(s) u_c)}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = k_p G(s) u_c$$

$$y_m = k_m G(s) u_c \rightarrow G(s) u_c = \frac{y_m}{k_m}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = \frac{k_p}{k_m} y_m$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\gamma e \frac{k_p}{k_m} y_m$$

$$\bar{\gamma} = \gamma \frac{k_p}{k_m}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\bar{\gamma} e y_m$$

c.q.d.

Demostración: Ejemplo 2: MRAS con regla del M.I.T. para un sistema de primer orden.

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu \Leftrightarrow G(p) = \frac{y}{u} = \frac{b}{(p+a)} \quad (\text{Modelo de la planta})$$

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c \Leftrightarrow G_m(p) = \frac{y_m}{u_c} = \frac{b_m}{(p+a_m)} \quad (\text{Modelo de referencia})$$

$$u(t) = \theta_1 u_c(t) - \theta_2 y(t) \quad (\text{Ecuación del controlador})$$

Parámetros a los que tiende

$$\frac{y}{u} = \frac{b}{(p+a)}$$

$$y = \frac{b}{(p+a)} u$$

$$u = \theta_1 u_c - \theta_2 y$$

$$y = \frac{b}{(p+a)} (\theta_1 u_c - \theta_2 y)$$

$$(p+a)y = b\theta_1 u_c - b\theta_2 y$$

$$(p+a)y + b\theta_2 y = b\theta_1 u_c$$

$$(p+a+\theta_2 b)y = b\theta_1 u_c$$

$$\frac{y}{u_c} = \frac{b\theta_1}{(p+a+\theta_2 b)} \quad \text{comparando con} \quad \frac{y_m}{u_c} = \frac{b_m}{(p+a_m)}$$

$$b\theta_1 = b_m \quad \theta_1 = \theta_1^0 = \frac{b_m}{b}$$

$$a_m = a + \theta_2 b \quad \theta_2 = \theta_2^0 = \frac{a_m - a}{b}$$

Cálculo de la ley de ajuste

$$\frac{d\theta_i}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta_i} \quad (\text{Regla del M.I.T.})$$

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \rightarrow \frac{\partial J}{\partial \theta_i} = e \frac{\partial e}{\partial \theta_i}$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta_i}$$

$$e = y - y_m \quad (\text{error})$$

$$y(s) = \frac{b\theta_1}{(p+a+b\theta_2)} u_c$$

$$y_m = \frac{b_m}{(p+a_m)}$$

$$e = \frac{b\theta_1}{(p+a+b\theta_2)} u_c - \frac{b_m}{(p+a_m)}$$

Para θ_1

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b}{(p+a+b\theta_2)} u_c$$

Para θ_2

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{b^2 \theta_1}{(p+a+b\theta_2)^2} u_c = -\frac{b}{(p+a+b\theta_2)} y$$

La ley de ajuste queda

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma \left(\frac{b}{(p+a+b\theta_2)} u_c \right) e$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma' \left(\frac{b}{(p+a+b\theta_2)} y \right) e$$

Los parámetros del proceso a y b no son conocidos, cuando hay un seguimiento perfecto los parámetros cumplen

$$p+a+b\theta_2^0 = p+a_m$$

$$p+a+b\theta_2 \approx p+a_m \text{ (Aproximado)}$$

$$\theta_1 \approx \theta_1^0$$

$$\theta_2 \approx \theta_2^0$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma' \left(\frac{b}{(p+a_m)} u_c \right) e$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma' \left(\frac{b}{(p+a_m)} y \right) e$$

Como b tampoco es conocido, lo absorbe γ'

$$\gamma'' = \gamma' b$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma'' \left(\frac{1}{(p+a_m)} u_c \right) e$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma'' \left(\frac{1}{(p+a_m)} y \right) e$$

Aplica un filtro de primer orden a u_c y y para ganancia unitaria

$$\gamma' = \frac{\gamma''}{a_m} = \frac{\gamma' b}{a_m}$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma' \left(\frac{a_m}{(p+a_m)} u_c \right) e$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma' \left(\frac{a_m}{(p+a_m)} y \right) e$$

c.q.d.

Demostración de la ecuación (4.30)

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma y_m e$$

$$e = y - y_m$$

$$y = K_p G(p) u$$

$$y_m = K_m G(p) u_c$$

$$e = K_p G(p) u - y_m$$

$$u = \theta u_c$$

$$e = K_p G(p) \theta u_c - y_m$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma y_m (K_p G(p) \theta u_c - y_m)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= -\gamma y_m K_p G(p) \theta u_c + \gamma y_m^2 \\ \frac{d\theta}{dt} + \gamma y_m K_p G(p) \theta u_c &= \gamma y_m^2 \\ \text{c.q.d.}\end{aligned}$$

Demostración de la ecuación (4.31)

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} + \gamma y_m^0 u_c^0 (K_p G(p) \theta) &= \gamma (y_m^0)^2 \\ \frac{d}{dt} &\equiv s \\ s\theta + \gamma y_m^0 u_c^0 K_p G(p) \theta &= \gamma (y_m^0)^2 \\ (s + \gamma y_m^0 u_c^0 K_p G(p)) \theta &= \gamma (y_m^0)^2 \\ \theta &= \frac{\gamma (y_m^0)^2}{(s + \gamma y_m^0 u_c^0 K_p G(p))} \\ \text{c.q.d.}\end{aligned}$$

Demostración de la ecuación (4.33).

$$\begin{aligned}s + \gamma y_m^0 u_c^0 K_p G(p) &= 0 \\ G(p) &= \frac{1}{s+1} \\ s + \gamma y_m^0 u_c^0 K_p \frac{1}{s+1} &= 0 \\ \frac{(s+1)s + \gamma y_m^0 u_c^0 K_p}{s+1} &= 0 \\ \frac{s^2 + s + \gamma y_m^0 u_c^0 K_p}{s+1} &= 0 \\ s^2 + s + \gamma y_m^0 u_c^0 K_p &= 0 \\ \text{c.q.d.}\end{aligned}$$

Demostración de la ecuación (4.34)

$$\begin{aligned}s + \gamma y_m^0 u_c^0 K_p G(p) &= 0 \\ G(s) &= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2} \\ s + \gamma y_m^0 u_c^0 K_p \left(\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2} \right) &= 0 \\ \frac{s(s^2 + a_1 s + a_2) + \gamma y_m^0 u_c^0 K_p}{s^2 + a_1 s + a_2} &= 0\end{aligned}$$

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + \gamma y_m^0 u_c^0 K_p = 0$$

$$\mu = \gamma y_m^0 u_c^0 K_p$$

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + \mu = 0$$

c.q.d.

Demostración de la ecuación (4.40)

$$y_p = \frac{b}{p+1} u$$

$$(p+1)y_p = bu$$

$$py_p + y_p = bu$$

$$p = \frac{d}{dt}$$

$$\frac{dy_p}{dt} + y_p = bu$$

$$\frac{dy_p}{dt} = bu - y_p$$

$$u = Kr$$

$$\frac{dy_p}{dt} = bKr - y_p$$

c.q.d.

Demostración de la ecuación (4.43)

$$e = y - y_m$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_m}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu$$

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c$$

$$\frac{de}{dt} = (-ay + bu) - (-a_m y_m + b_m u_c)$$

$$u(t) = \theta_1 u_c - \theta_2 y$$

$$\frac{de}{dt} = (-ay + b(\theta_1 u_c - \theta_2 y)) - (-a_m y_m + b_m u_c)$$

$$\frac{de}{dt} = (-ay + b\theta_1 u_c - b\theta_2 y) - (-a_m y_m + b_m u_c)$$

$$\frac{de}{dt} = -ay + b\theta_1 u_c - b\theta_2 y + a_m y_m - b_m u_c$$

$$\frac{de}{dt} = (a_m y - a_m y) + (a_m y_m - ay - b\theta_2 y) + (b\theta_1 u_c - b_m u_c)$$

$$\frac{de}{dt} = (a_m y_m - a_m y) + (a_m y - ay - b\theta_2 y) + (b\theta_1 u_c - b_m u_c)$$

$$\frac{de}{dt} = -a_m(y - y_m) + (a_m - a - b\theta_2)y + (b\theta_1 - b_m)u_c$$

$$\frac{de}{dt} = -a_me - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)u_c$$

c.q.d

Demostración de la ecuación **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

$$\frac{de}{dt} = -a_me - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)u_c$$

$$b\theta_1 - b_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{b_m}{b}$$

$$b\theta_2 + a - a_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{a_m - a}{b}$$

$$\frac{de}{dt} = -a_me \quad \text{La solución es una exponencial negativa}$$

c.q.d

Demostración de la ecuación (4.46)

$$\frac{dV}{dt} = e \frac{de}{dt} + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \frac{d\theta_1}{dt}$$

$$\frac{de}{dt} = -a_me - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)u_c$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e(-a_me - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)u_c) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \frac{d\theta_1}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -a_me^2 \\ &\quad - e(b\theta_2 + a - a_m)y + e(b\theta_1 - b_m)u_c \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \frac{d\theta_1}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -a_me^2 \\ &\quad - e(b\theta_2 + a - a_m)y + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \frac{d\theta_2}{dt} \\ &\quad + e(b\theta_1 - b_m)u_c + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \frac{d\theta_1}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= -a_m e^2 \\
&\quad - (b\theta_2 + a - a_m)ey + (b\theta_2 + a - a_m) \frac{1}{\gamma} \frac{d\theta_2}{dt} \\
&\quad + (b\theta_1 - b_m)eu_c + (b\theta_1 - b_m) \frac{1}{\gamma} \frac{d\theta_1}{dt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= -a_m e^2 \\
&\quad - (b\theta_2 + a - a_m) \left(ey - \frac{1}{\gamma} \frac{d\theta_2}{dt} \right) \\
&\quad + (b\theta_1 - b_m) \left(eu_c + \frac{1}{\gamma} \frac{d\theta_1}{dt} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= -a_m e^2 \\
&\quad - \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \left(\gamma ey - \frac{d\theta_2}{dt} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \left(\gamma eu_c + \frac{d\theta_1}{dt} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= -a_m e^2 \\
&\quad + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \left(\frac{d\theta_2}{dt} - \gamma ey \right) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \left(\gamma eu_c + \frac{d\theta_1}{dt} \right)
\end{aligned}$$

c.q.d.