

IDENTIFICACIÓN Y CONTROL ADAPTABLE

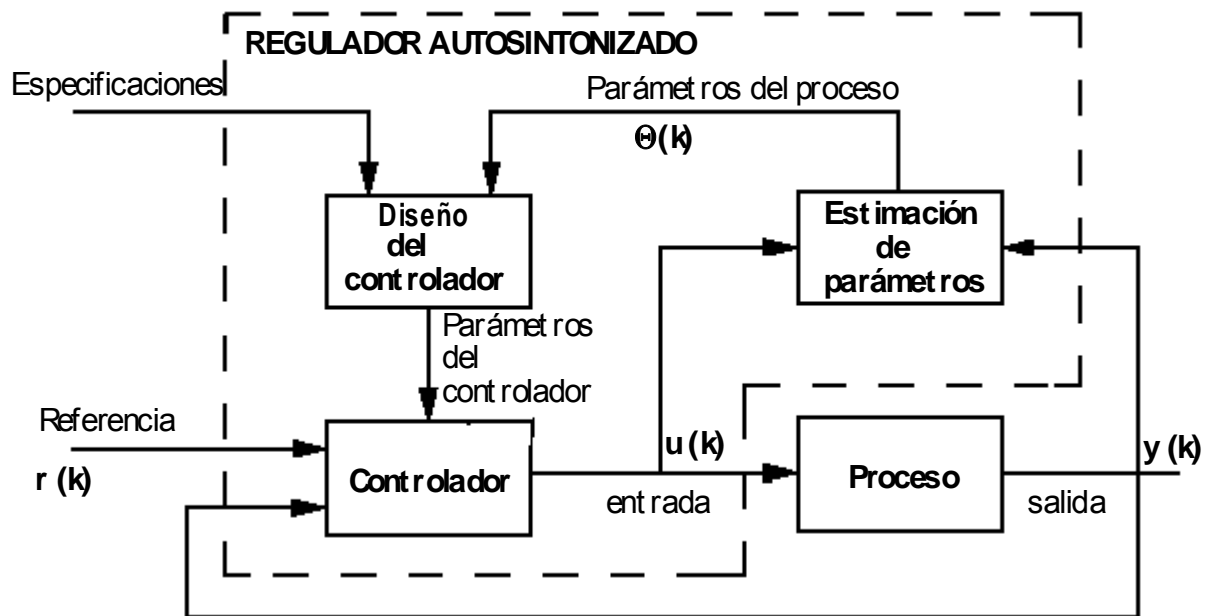
PRÁCTICO 3 CURSO: 2005

CONTROL ADAPTABLE AUTOSINTONIZADO

Dr. Ing. Fernando di Sciascio

Introducción

El esquema general de un controlador adaptable autosintonizado es el siguiente:



El objetivo de la primera parte de la práctica es diseñar un controlador adaptable autosintonizado para controlar una planta (o proceso) desconocida sin considerar perturbaciones estocásticas. El controlador adaptable final se alcanza diseñando y probando en forma independiente las distintas partes del controlador. Los pasos son los siguientes:

- 1- Se identificará fuera de línea un modelo ARX_{n_A, n_B, n_k} del proceso mediante el toolbox de identificación de Matlab. Este paso se hace para estimar el grado de los polinomios $A(q)$ y $B(q)$ de la función de transferencia del proceso n_A y n_B respectivamente y el retardo n_k . Para obtener los parámetros que consideraremos los verdaderos de la planta.
- 2- Se verifica el funcionamiento de la identificación recursiva en línea desarrollada en la práctica anterior. El orden de $A(q)$ y $B(q)$ y el retardo se determina del punto anterior y los parámetros deben converger a los hallados anteriormente).
- 3- Se diseña y verifica un controlador fijo (no adaptable) mediante el método de asignación de polos a lazo cerrado.
- 4- Finalmente se diseña y verifica a partir del trabajo anterior un controlador adaptable autosintonizado.

En la segunda parte de la práctica se le adiciona al proceso una perturbación estocástica y se modela el proceso con un modelo ARMAX. En esta parte se utiliza la estructura de identificación recursiva para un modelo ARMAX desarrollada en la práctica anterior. Luego se diseña un controlador de mínima varianza y se construye el controlador adaptable.

Parte I

En lo que sigue se describen los pasos lógicos para el diseño e implementación de un control adaptable en una planta continua desconocida. Para facilitar el proceso de aprendizaje e ir ganando experiencia con la metodología se sugiere ir siguiendo los pasos de diseño con una planta discreta conocida, por ejemplo, en el apéndice se sugiere una de referencia.

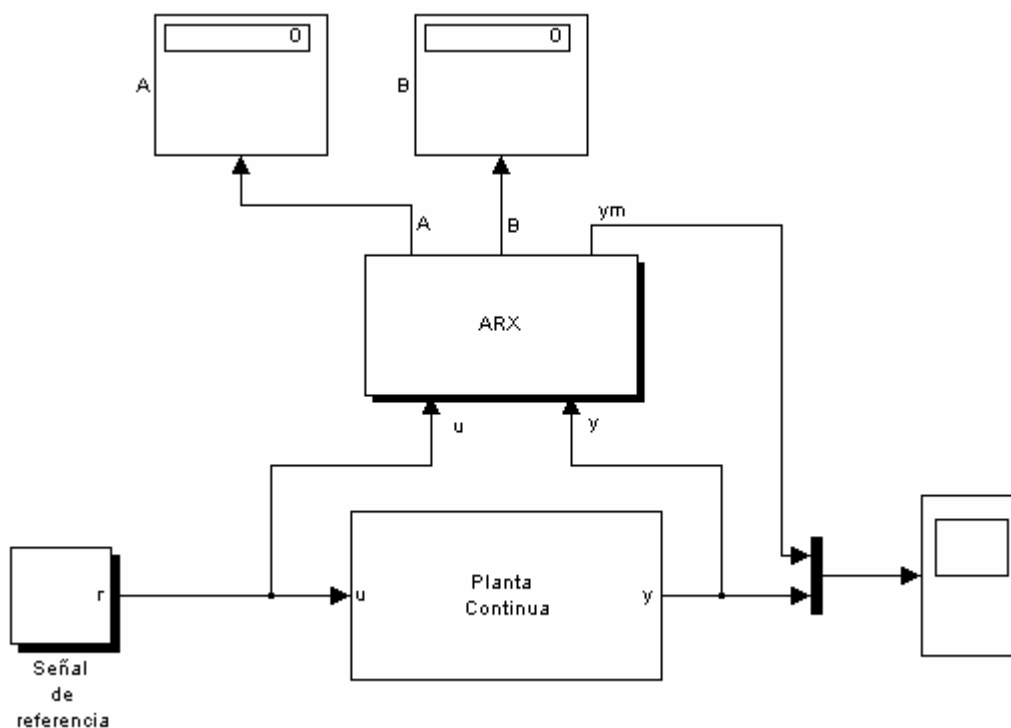
- a) Dada la planta lineal continua desconocida cuya función de transferencia es $G(s)$ (por ejemplo, un bloque Simulink que invoca una S-function como en la práctica 1 o una planta real continua que deseamos controlar con un autosintonizado)



- a1) Modelar la planta mediante un modelo ARX e identificarla fuera de línea con el Toolbox de Identificación. Este paso permite (tras una adecuada elección del período de muestreo t_s) obtener un modelo discreto

$$\hat{G}(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$$

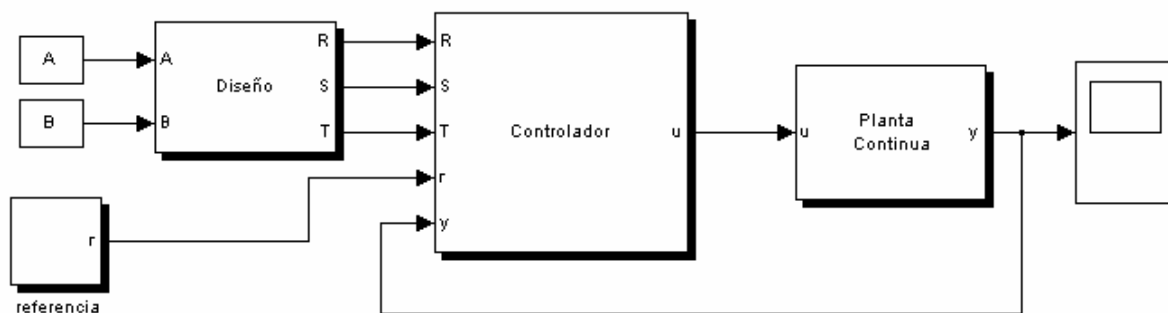
- a2) Estimado ya en el paso anterior los polinomios $A(q)$ y $B(q)$ (en consecuencia se conoce los órdenes de esos polinomios) identificar en línea mediante el bloque Simulink ARX desarrollado en la práctica de identificación recursiva, adoptando el mismo período de muestreo t_s del modelo hallado en el punto anterior.



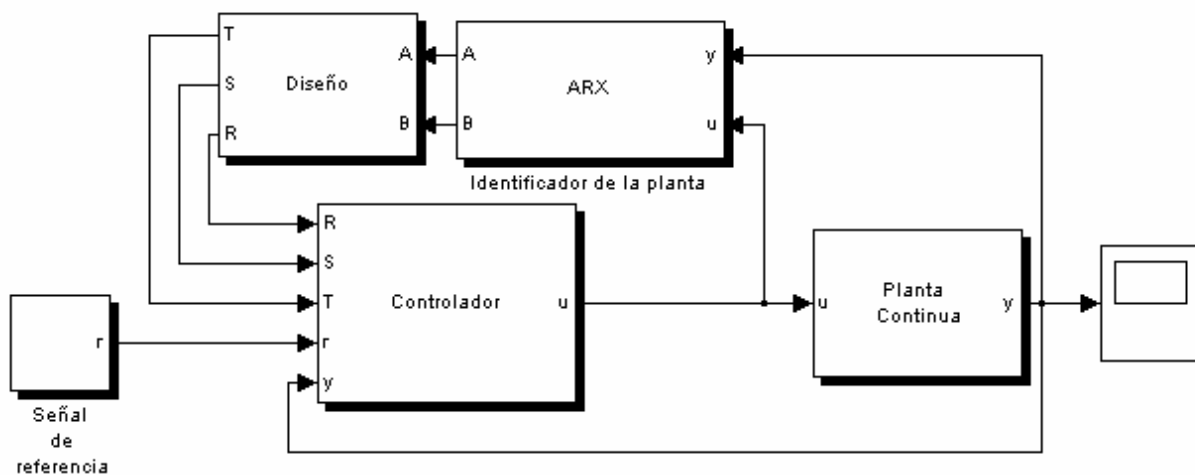
a3) Graficar para distintas señales de excitación $u(t)$ los parámetros identificados en el punto a2 y verificar que convergen a los parámetros obtenidos fuera de línea en el punto a1. Verificar que cuando la señal de excitación no es persistentemente excitante, los parámetros no convergen a los “verdaderos” (llamamos verdaderos a los encontrados en el punto a1).

Recordar que una señal es persistentemente excitante cuando posee un gran contenido armónico (ancho de banda grande). Por supuesto esto es relativo a cada sistema que se desea identificar, por ejemplo, una señal puede ser persistentemente excitante para un sistema de orden n y no para otro de orden $n + 1$.

b) Diseñar con Simulink un controlador fijo de asignación de polos para la planta continua $G(s)$ utilizando la información de la planta estimada $\hat{G}(q)$.



c) Diseñar un regulador adaptable autosintonizado empleando como bloques constructivos el identificador en línea de la parte a) y el controlador de la parte b).



Considérese lo siguiente, si los parámetros de la planta permanecen fijos y los mismos ya han sido identificados y con esos parámetros el bloque de diseño del controlador ya ha determinado los parámetros del controlador (esto se conoce como principio de equivalencia cierta, esto es, se asume los parámetros suministrados por el identificador como los parámetros verdaderos de la planta), entonces el comportamiento del sistema será idéntico al del sistema con el controlador, esto es, si la planta no cambia no se puede observar la ventaja de un controlador adaptable sobre un controlador fijo. La idea es que en el análisis que se pide a continuación, se modifiquen los parámetros de la planta, (no necesariamente todos al mismo tiempo), por ejemplo, se puede variar en el tiempo un parámetro del

polinomio denominador $A(q)$ (esto significa que la posición de los polos cambia) o numerador $B(q)$ (cambia la posición de los ceros).

Si a_j es uno de los coeficientes (fijo) del polinomio $A(q)$ se puede experimentar transformándolo en un parámetro variable en el tiempo de la siguiente manera:

$$a_j(t) = ao_j \pm \Delta$$

a_j cambia a partir de un determinado tiempo (el parámetro varía como un escalón) o

$$a_j(t) = ao_j \pm \Delta \sin(wt)$$

el parámetro varía en forma sinusoidal en forma lenta $T = \frac{2p}{w} \ll t$, donde t es el tiempo que necesita el identificador para seguir la variación del parámetro). Los controladores adaptables autosintonizados funcionan bien cuando los parámetros varían en forma de escalón y permanecen fijos durante un tiempo grande (mayor o igual que t) o cuando varían lentamente¹.

d) Partiendo de una condición estacionaria, tras una perturbación (cambio de parámetros de la planta), analizar el comportamiento del controlador. Emplee distintas señales de excitación y distintos niveles de ruido, graficar las distintas señales del sistema,

Analizar el comportamiento del sistema ante distintas clases de variaciones en los parámetros de la planta (si se tiene problemas de identificabilidad (a causa de entradas de excitación inadecuadas) adicionar a la entrada de la planta un poco de ruido blanco también puede intentarse adicionando ruido a la referencia (típicamente del orden del 1% de la amplitud de la señal de referencia).

Parte II

En lo que sigue se desea controlar una planta que posee una estructura ARMAX, esto es se le adiciona al modelo determinístico de la parte I una perturbación estocástica. En un modelo ARMAX el modelo de perturbación es:

$$H(q) = \frac{C(q)}{A(q)}$$

y el modelo ARMAX completo es:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \quad \text{o} \quad A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$$

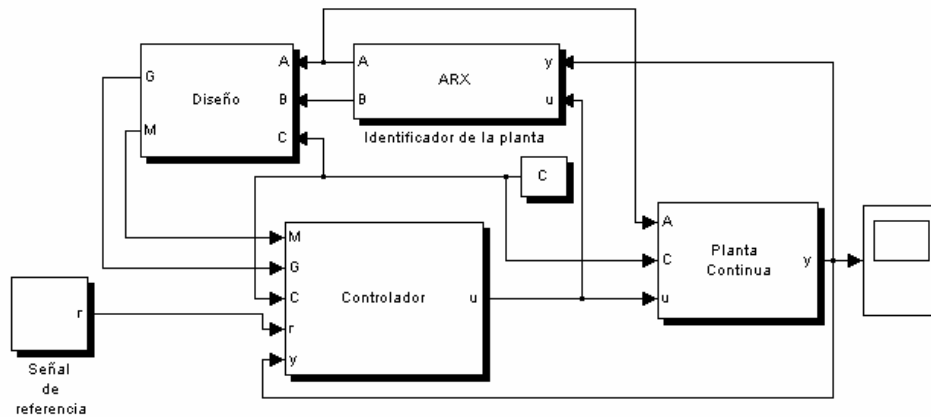
Se asume que la varianza de $e(t)$ es igual a 1 ($\sigma_e^2 = \mathbf{E} \mathbf{e}(t)^2 \approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{e}(t)^2 \approx 1$).

Se pide:

- 1- En el controlador adaptable diseñado en la primera parte, se debe cambiar el bloque de la planta continua por el nuevo bloque que incluye la parte estocástica y analizar el comportamiento.

¹ Siempre y cuando λ el factor de olvido del algoritmo RARX sea menor que 1. Si $\lambda = 1$ al algoritmo le cuesta mucho reidentificar la planta ya que no "olvida" los parámetros viejos.

- 2- Identificar en línea los polinomios $A(q)$, $B(q)$ y $C(q)$ de manera similar a la parte I de la práctica con el identificador ARMAX desarrollado en la práctica anterior.
- 3- Se debe cambiar el diseño del controlador por uno de mínima varianza generalizado y repetir el análisis.



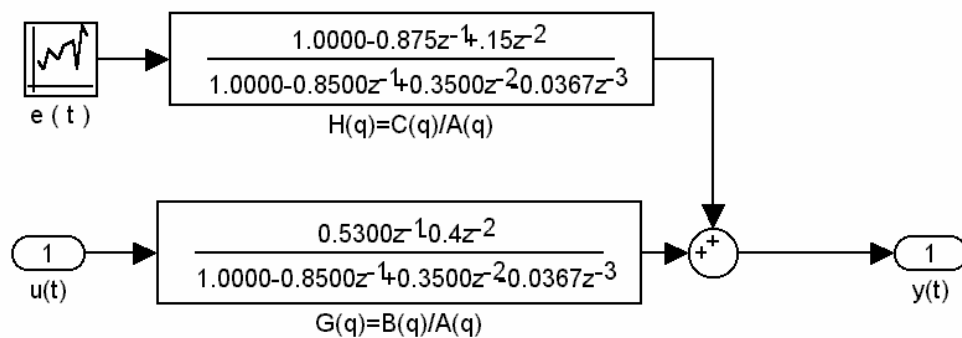
Ojo, en la figura el identificador es ARMAX y no ARX.

Apéndice

Se puede emplear la siguiente planta de referencia para verificar que las etapas del diseño se realizan correctamente

$\mu = 0$ (valor medio)

$\sigma^2 = 10^{-3}$ (varianza)



En MATLAB la planta se genera con los siguientes comandos:

```
>> A=[1 -0.85 0.35 -0.0367];  
>> B=[0 0.53 -0.4];  
>> C=[1 -0.875 0.15];  
>> ts=.1; g=filt({B , C}, {A , A},ts)
```

Transfer function from input 1 to output:
 $0.53 z^{-1} - 0.4 z^{-2}$

 $1 - 0.85 z^{-1} + 0.35 z^{-2} - 0.0367 z^{-3}$

Transfer function from input 2 to output:
 $1 - 0.875 z^{-1} + 0.15 z^{-2}$

 $1 - 0.85 z^{-1} + 0.35 z^{-2} - 0.0367 z^{-3}$

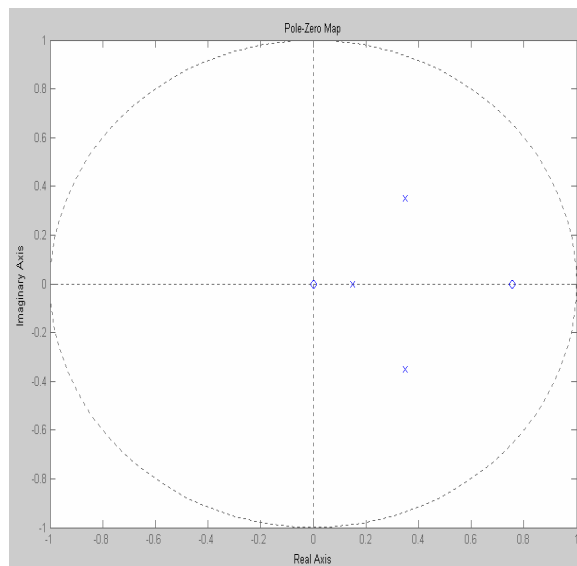
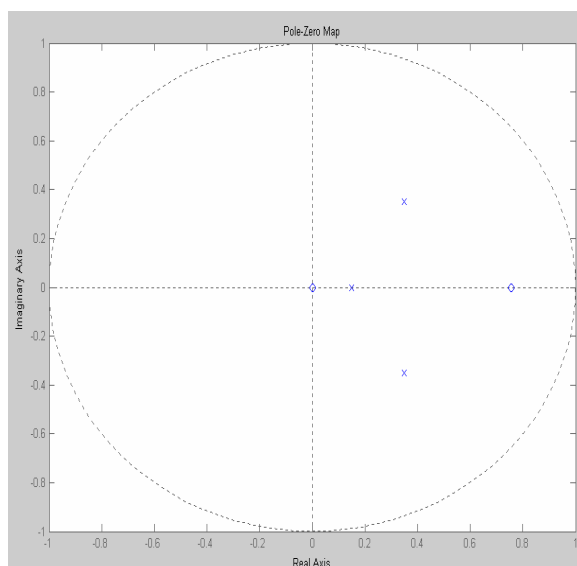
Sampling time: 0.1

```
>> size(g)  
Transfer function with 1 output and 2 inputs.
```

```
>> pole(g)
```

```
ans = 0.3502 + 0.3501i  
      0.3502 - 0.3501i  
      0.1497
```

Observación: $g=\{ g(1) , g(2)\}$, $g(1)$ es $\mathbf{G(q)}$ y $g(2)$ es $\mathbf{H(q)}$, con `pzmap(g(1))` y `pzmap(g(2))` se observan los polos y ceros de $\mathbf{G(q)}$ y $\mathbf{H(q)}$



CONTROLADOR ADAPTABLE AUTOSINTONIZADO

COMPLEMENTO TEÓRICO

Modelo ARMAX del sistema y de las perturbaciones

Suponer que el sistema puede ser modelado como un proceso estable, invariante en el tiempo y linealizable, con una sola entrada y una sola salida (SISO), por lo que puede ser descrito por una ecuación lineal en diferencias de la forma:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \dots + b_n u(k-d-n) + e(k) + c_1 e(k-1) + c_2 e(k-2) + \dots + c_n e(k-n) \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} u(k) &= U(k) - \bar{U} \\ y(k) &= Y(k) - \bar{Y} \end{aligned} \quad (2)$$

$U(k)$ e $Y(k)$ son los valores de entrada y salida del sistema en el instante k , \bar{U} es el valor medio de la señal de entrada, \bar{Y} es el valor medio de la variable de salida y $e(k)$ es una señal de ruido estadísticamente independiente y estacionaria con distribución normal y de media nula.

Obsérvese en la (1) que una acción de control aplicada en el instante $k_1 T$ ($u(k_1)$), actúa sobre la salida d periodos de muestreo posteriores $(k_1 + d) T$. Luego, la salida $y(k)$ depende de las acciones de control $u(k-d)$, $u(k-d-1)$, \dots , $u(k-n-1)$, esto es, en los instantes $k-d$ y anteriores. El parámetro d representa entonces el retardo del sistema¹ y matemáticamente es el exceso de polos en el origen del sistema².

Asumiendo que las perturbaciones pueden ser modeladas por un proceso ARMA, con el mismo polinomio que el sistema. El operador de transferencia en q de este sistema puede escribirse como:

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)} q^{-d} u(k) + \frac{C(q)}{A(q)} e(k) \quad (4)$$

donde:

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_n q^{-na} \\ B(q) &= b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_n q^{-nb} \\ C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_n q^{-nc} \end{aligned} \quad (5)$$

para que la planta sea realizable debe ser:

$$\begin{aligned} na &\geq nb \\ na &\geq nc \end{aligned}$$

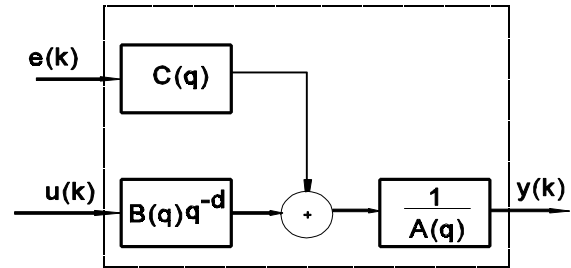


Fig.1. Modelo ARMAX del sistema y de las perturbaciones estocásticas.

¹ A veces se lo designa como tiempo muerto, retardo de transporte (en los procesos con transferencias de masas). En ingles se emplean los términos: delay time, dead time, lag time, transport delay.

² Para la parte determinística del sistema la función de transferencia es: $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{z^d A(z)}$

El primer cociente $B(q)/A(q)$ representa el modelo de la planta y el segundo $C(q)/A(q)$ representa el modelo de las perturbaciones. El conjunto planta más perturbaciones se denomina modelo ARMAX.

Los tres polinomios A , B y C no tienen factores comunes (polinomios primos entre si). Los polinomios se normalizan para que A y C sean mónicos, esto es, los coeficientes de mayor orden son la unidad. Se asume en lo que sigue que los ceros de A y B también están en el interior del círculo unidad, esto es el sistema es estable y de dinámica inversa estable³ (el caso de dinámica inversa inestable también puede ser analizada en otro contexto).

Se asume que los ceros del polinomio C están dentro del círculo unidad, de no ser así por factorización espectral siempre se pueden llevar los ceros de C al interior del círculo unidad. El polinomio C puede ser multiplicado por una potencia arbitraria de q^{-1} (o q) sin que cambie la estructura de correlación de $C(q)e(k)$ ⁴. Este hecho se utiliza para normalizar C tal que el grado de C sea el mismo que A :

$$\text{grad } A = \text{grad } C = n \quad (6)$$

Predicción óptima

El problema de control estocástico está íntimamente ligado con el de predicción. Por ello se va a desarrollar el predictor óptimo de d pasos de la salida de un sistema.

Dado el proceso

$$A(q)y(k+d) = B(q)u(k) + C(q)e(k+d) \quad (7)$$

donde los polinomios $A(q)$, $B(q)$ y $C(q)$ son los definidos previamente por la (5).

El problema consiste en encontrar la predicción de la salida en el instante $k+d$ con la información disponible en el instante k , tal que la esperanza matemática del error de predicción al cuadrado $\tilde{y}(k+d|k)^2 = [y(k+d) - \hat{y}(k+d|k)]^2$ sea mínima. La ecuación del sistema puede escribirse como:

$$y(k+d) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}e(k+d) \quad (8)$$

Definición (polinomio recíproco): Dado el polinomio P en potencias negativas de q , se le denomina polinomio recíproco P^* (en potencia positivas de q) al que verifica la relación $P = q^{-\text{grad } P^*} P^*$, por ejemplo, para los polinomios A y C se tiene: $A^* = q^n A$ y $C^* = q^n C$.

$$A^*(q) = q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \dots + a_n$$

³ Para sistemas discretos cuando todos los ceros están en el interior del círculo unidad se dice que es dinámica inversa estable y no que es de fase mínima y cuando algún cero está en el exterior del círculo se dice que es de dinámica inversa inestable y no que es de no mínima fase.

⁴ $e(k)$ Es ruido blanco por lo que no esta correlacionado con ningún otro término excepto con el mismo, por lo que el tiempo absoluto carece de importancia.

$$C^*(q) = q^n + c_1 q^{n-1} + c_2 q^{n-2} + \dots + c_n$$

El último término de la (8) es:

$$\frac{C(q)}{A(q)} e(k+d) = \frac{C(q) q^{d-1}}{A(q)} e(k+1) = \frac{C^*(q) q^{d-1}}{A^*(q)} e(k+1)$$

Obsérvese que: $\text{grad } C^*(q) q^{d-1} = n + d - 1$ y $\text{grad } A^* = n$, por lo que el cociente entre polinomios $C^*(q) q^{d-1} / A^*(q)$ resulta en un polinomio cociente F^* de grado $d-1$ ($\text{grad } F^* = d-1$) y en un polinomio resto G^* de grado $n-1$ ($\text{grad } G^* = n-1$), esto es,

$$\frac{C^*(q) q^{d-1}}{A^*(q)} = F^*(q) + \frac{G^*(q)}{A^*(q)}$$

operando

$$\begin{aligned} C^*(q) q^{d-1} &= F^*(q) A^*(q) + G^*(q) \rightarrow C^*(q) q^{d-1} q^{-n} = F^*(q) A^*(q) q^{-n} + G^*(q) q^{-n} \\ C(q) q^{d-1} &= F^*(q) A(q) + G(q) q^{-1} \rightarrow C(q) = F^*(q) q^{-(d-1)} A(q) + q^{-d} G(q) \end{aligned}$$

$$\boxed{C(q) = A(q) F(q) + q^{-d} G(q)} \quad (9)$$

con,

$$\begin{aligned} F(q) &= 1 + f_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + f_{d-1} q^{-(d-1)} \\ G(q) &= g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{n-1} q^{-(n-1)} \end{aligned} \quad (10)$$

empleando la igualdad (9), el último término de la (8) queda:

$$\frac{C(q)}{A(q)} e(k+d) = F(q) e(k+d) + \frac{G(q)}{A(q)} e(k)$$

Evidentemente es una función de $e(k+d)$, $e(k+d-1)$, ..., $e(k+1)$, $e(k)$, $e(k-1)$, ..., donde $e(k+d)$, $e(k+d-1)$, ..., $e(k+1)$ no están disponibles en el instante k . La (8) queda:

$$y(k+d) = \frac{B(q)}{A(q)} u(k) + F(q) e(k+d) + \frac{G(q)}{A(q)} e(k) \quad (11)$$

despejando de la (4) $e(k)$, se tiene:

$$e(k) = \frac{A(q)}{C(q)} y(k) - \frac{B(q)}{C(q)} q^{-d} u(k) \quad (12)$$

sustituyendo la (12) en la (11)

$$y(k+d) = \frac{B(q)}{A(q)} u(k) + F(q) e(k+d) + \frac{G(q)}{C(q)} y(k) - \frac{B(q) G(q)}{C(q) A(q)} q^{-d} u(k)$$

operando con la ayuda de la identidad (9)

$$y(k+d) = \frac{G(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q) F(q)}{C(q)} u(k) + F(q) e(k+d) \quad (13)$$

desarrollando los términos del lado derecho de la (13) se tiene que:

$$\frac{G(q)}{C(q)} y(k) = \alpha_0 y(k) + \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + \dots \quad (14)$$

$$\frac{B(q) F(q)}{C(q)} u(k) = \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \beta_2 u(k-2) + \dots \quad (15)$$

$$F(q) e(k+d) = f_{d-1} e(k+1) + \dots + f_1 e(k+d-1) + e(k+d) \quad (16)$$

Sea $\hat{y}(k+d|k)$ la mejor predicción de la salida en el instante $k+d$ que puede realizarse con la información disponible en el instante k , esto es, $y(k)$, $y(k-1)$, $y(k-2)$, \dots $u(k)$, $u(k-1)$, $u(k-2)$, \dots . Por lo tanto $\hat{y}(k+d|k)$ no dependerá del primer término del lado derecho de la (13) (ecuación (16) donde aparecen $e(k+1)$, \dots , $e(k+d)$ y sí dependerá del segundo y tercer término de la (13) (ecs.(14) y (15)).

$$\boxed{\hat{y}(k+d|k) = \frac{G(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q) F(q)}{C(q)} u(k)} \quad (17)$$

que es de la forma

$$\hat{y}(k+d|k) = \alpha_0 y(k) + \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + \dots + \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \beta_2 u(k-2) + \dots \quad (18)$$

Observaciones

- ☞ Para el caso $d = 1$ se tiene que $F(q) = 1$ y $q^{-1}G(q) = C(q) - A(q)$, entonces las (13) y (17) quedan:

$$y(k+1) = \left(1 - \frac{A(q)}{C(q)} \right) y(k+1) + \frac{B(q)}{C(q)} u(k) + e(k+1)$$

$$\hat{y}(k+1 | k) = \left(1 - \frac{A(q)}{C(q)} \right) y(k+1) + \frac{B(q)}{C(q)} u(k)$$

equivalentemente

$$y(k) = \left(1 - \frac{A(q)}{C(q)} \right) y(k) + \frac{B(q)q^{-1}}{C(q)} u(k) + e(k)$$

$$\hat{y}(k | k-1) = \left(1 - \frac{A(q)}{C(q)} \right) y(k) + \frac{B(q)q^{-1}}{C(q)} u(k)$$

Las cuales coinciden con las ecuaciones vistas en el apunte anterior (Teniendo en cuenta que en esta sección el polinomio $B(q)$ es $B(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots$ y en el apunte anterior es $B(q) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots$).

- ☞ El predictor (17) se obtuvo a partir de argumentos heurísticos, también puede obtenerse minimizando la esperanza matemática del error de predicción (por esta razón se afirma que el predictor (17) es óptimo).

$$\begin{aligned} E(y(k) - \hat{y}(k+d | k))^2 &= E \left(F(q) e(k+d) + \frac{G(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q)F(q)}{C(q)} u(k) - \hat{y}(y+d | k) \right)^2 = \\ &= E(F(q) e(k+d))^2 + E \left(\frac{G(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q)F(q)}{C(q)} u(k) - \hat{y}(y+d | k) \right)^2 + \\ &+ 2 E \left((F(q) e(k+d)) \left(\frac{G(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q)F(q)}{C(q)} u(k) - \hat{y}(y+d | k) \right) \right)^2 \end{aligned}$$

El último término es cero puesto que $e(k+d)$ es independiente y el primer termino no puede ser influenciado, luego la mejor predicción de la salida se obtiene igualando a cero el segundo término que resulta idéntico a la (17).

- ☞ Suponer que la acción de control actual y las anteriores $u(k)$, $u(k-1)$, $u(k-2)$, \dots fueron las adecuadas para que en el instante $k+d$ la salida sea igual a una referencia deseada $\hat{y}(k+d | k) = r(k)$, entonces, es razonable despejar de la (17) la acción de control adecuada para que en d períodos de muestreos hacia adelante la salida sea igual a la referencia deseada.

$$u(k) = \frac{C(q)}{B(q)F(q)} r(k) - \frac{G(q)}{B(q)F(q)} y(k) \quad (19)$$

La ley de control (19) que se obtiene a partir del predictor óptimo (17) coincide con el denominado controlador de **mínima varianza**.

Cálculo de los polinomios $F(q)$ y $G(q)$

Conociendo los polinomios A, C y para n y d pequeños, los polinomios F y G pueden evaluarse a partir de la igualdad (9) manualmente. Para valores superiores de n y d pueden calcularse mediante software ya sea en forma numérica o simbólica, por ejemplo, con MATLAB puede emplearse el comando **deconv**.

[f,g]=deconv(pn,pd): Retorna como resultado del cociente entre los polinomios pn y pd el polinomio f y el polinomio r. Donde pn es el polinomio numerador (o polinomio dividendo) y pd es el polinomio denominador (o polinomio divisor), f es el polinomio resultado de la división y r es el polinomio resto.

Para interpretar correctamente el resultado de aplicar el comando deconv, los polinomios deben ser en potencias positivas de la variable q , por lo que es necesario emplear los polinomios recíprocos de A, C, F y G , para el presente caso se tiene:

$$A^* = q^n A, \quad C^* = q^n C, \quad F^* = q^{d-1} F \quad \text{y} \quad G^* = q^{n-1} G.$$

$$A^*(q) = q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \dots + a_n$$

$$C^*(q) = q^n + c_1 q^{n-1} + c_2 q^{n-2} + \dots + c_n$$

$$G^*(q) = g_0 q^{n-1} + g_1 q^{n-2} + \dots + g_{n-1}$$

$$F^*(q) = q^{d-1} + f_1 q^{d-2} + a_2 q^{d-3} + \dots + f_{d-1}$$

$$\frac{C^* q^{d-1}}{A^*} = F^* + \frac{G^*}{A^*}$$

Particularizando para el ejemplo de los polinomios $A(q) = 1 + 0.9 q^{-1} + 0.26 q^{-2} + 0.024 q^{-3}$ y $C(q) = 1 - 0.6 q^{-1} + 0.1 q^{-2} - 0.006 q^{-3}$, se calculan los polinomios $F(q)$ y $G(q)$ de la ecuación

$$\frac{C^* q^{d-1}}{A^*} = F^* + \frac{G^*}{A^*}$$

$$A(q) = 1 + 0.9 q^{-1} + 0.26 q^{-2} + 0.024 q^{-3} \Rightarrow A^*(q) = q^3 + 0.9 q^2 + 0.26 q + 0.024$$

$$C(q) = 1 - 0.6 q^{-1} + 0.1 q^{-2} - 0.006 q^{-3} \Rightarrow C^*(q) = q^3 - 0.6 q^2 + 0.1 q - 0.006$$

$$C^* q^{d-1} = q^4 - 0.6 q^3 + 0.1 q^2 - 0.006 q$$

Se definen los polinomios pn y pd para trabajar con MATLAB

$$pn = C^* q^{d-1} = [1 \quad -0.6 \quad 0.1 \quad -0.006 \quad 0]$$

$$pd = A^*(q) = [1 \quad 0.9 \quad 0.26 \quad 0.024]$$

» [f,g]=deconv(pn,pd)

$$f = [1 \quad -1.5]$$

$$g = [0 \ 0 \ 1.19 \ 0.36 \ 0.036]$$

$$F^*(q) = q - 1.5 \Rightarrow F(q) = 1 - 1.5 q^{-1}$$

$$G^*(q) = 1.2 q^2 + 0.36 q - 0.036 \Rightarrow G(q) = 1.2 + 0.36 q^{-1} - 0.036 q^{-2}$$

$$A(q) = 1 + 0.9 q^{-1} + 0.26 q^{-2} + 0.024 q^{-3}$$

$$C(q) = 1 - 0.6 q^{-1} + 0.1 q^{-2} - 0.006 q^{-3}$$

$$F(q) = 1 - 1.5 q^{-1}$$

$$G(q) = 1.19 + 0.36 q^{-1} + 0.036 q^{-2}$$

Resumen: Dada una planta cuyo comportamiento esta dado por el modelo ARMAX

$$\begin{aligned} y(k+d) &= \frac{B(q)}{A(q)} u(k) + \frac{C(q)}{A(q)} e(k+d) \\ &= \frac{G(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q)F(q)}{C(q)} u(k) + F(q) e(k+d) \end{aligned}$$

la mejor predicción posible de la salida del sistema estará dada por:

$$\hat{y}(k+d | k) = \frac{G(q)}{C(q)} y(k) + \frac{B(q)F(q)}{C(q)} u(k)$$

Diseño de controladores por asignación de polos

Considérese la siguiente planta

$$A(q)y(t) = B(q)q^{-d}u(t) - C(q)e(t) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} A &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{na} q^{-na} \\ B &= b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \\ C &= 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{nc} q^{-nc} \end{aligned} \quad (2)$$

A y C polinomios mónicos, d es el número de retardos entre la entrada y la salida o el exceso de polos en el origen.

Recordando que dado el polinomio P en potencias negativas de q , se le denomina polinomio recíproco P^* (en potencia positivas de q) al que verifica la relación $P = q^{-\text{grad } P^*} P^*$, para los polinomios A y C se tiene: $A^* = q^{na} A$, $B^* = q^{nb} B$ y $C^* = q^{nc} C$.

$$\begin{aligned} A^* &= q^{na} + a_1 q^{na-1} + a_2 q^{na-2} + \dots + a_n \Rightarrow \text{grad } A^* = na \\ B^* &= b_0 q^{nb} + b_1 q^{nb-1} + b_2 q^{nb-2} + \dots + b_{nb} \Rightarrow \text{grad } B^* = nb \\ C^* &= q^{nc} + c_1 q^{nc-1} + c_2 q^{nc-2} + \dots + c_n \Rightarrow \text{grad } C^* = nc \end{aligned} \quad (3)$$

En lo que sigue por simplicidad se designa con $\text{grad } P$ al grado para cualquier polinomio P . Si P está expresado en potencias positivas de q entonces como es usual $\text{grad } P$ coincide con el orden del polinomio, si P está expresado en potencias negativas de q entonces $\text{grad } P$ es el orden del polinomio recíproco P^* .

Para que la planta sea realizable debe ser:

$$\begin{aligned} \text{grad } A^* &\geq \text{grad } B^* \Rightarrow na \geq nb \\ \text{grad } A^* &\geq \text{grad } C^* \Rightarrow na \geq nc \end{aligned} \quad (4)$$

Se propone un controlador de dos grados de libertad, esto es, con una salida $u(t)$ y dos entradas, la señal de referencia $r(t)$ y la salida de la planta $y(t)$ (ver la figura 1).

$$R(q)u(t) = T(q)r(t) - S(q)y(t) \quad (5)$$

o

$$u(t) = \frac{T(q)}{R(q)}r(t) - \frac{S(q)}{R(q)}y(t)$$

con

$$\begin{aligned} R &= 1 + r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2} + \dots + r_{nr} q^{-nr} \Rightarrow \text{grad } R^* = nr \\ S &= s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2} + \dots + s_{ns} q^{-ns} \Rightarrow \text{grad } S^* = ns \\ T &= t_0 + t_1 q^{-1} + t_2 q^{-2} + \dots + t_{nt} q^{-nt} \Rightarrow \text{grad } T^* = nt \end{aligned}$$

La ley de control (5) representa la combinación de una prealimentación de la señal de referencia $r(t)$ y con la función de transferencia discreta

$$H_{ff}(z) = \frac{T(z)}{R(z)}$$

y una realimentación de la salida de la planta $y(t)$ con la función de transferencia

$$H_{fb}(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$$

Para obtener un controlador propio o realizable se deben verificar las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \text{grad } R \geq \text{grad } T \\ \text{grad } R \geq \text{grad } S \end{cases} \quad (6)$$

Si el tiempo de cálculo de la señal de control en el computador es solamente una fracción del período de muestreo, entonces es normal exigir que

$$\text{grad } R = \text{grad } S = \text{grad } T$$

Esto significa que no hay retardo de tiempo en el regulador. Si el tiempo de cálculo se aproxima al período de muestreo, la restricción correspondiente es

$$\text{grad } R = 1 + \text{grad } S = 1 + \text{grad } T$$

Esto significa que hay un retardo en la ley de control de un período de muestreo.

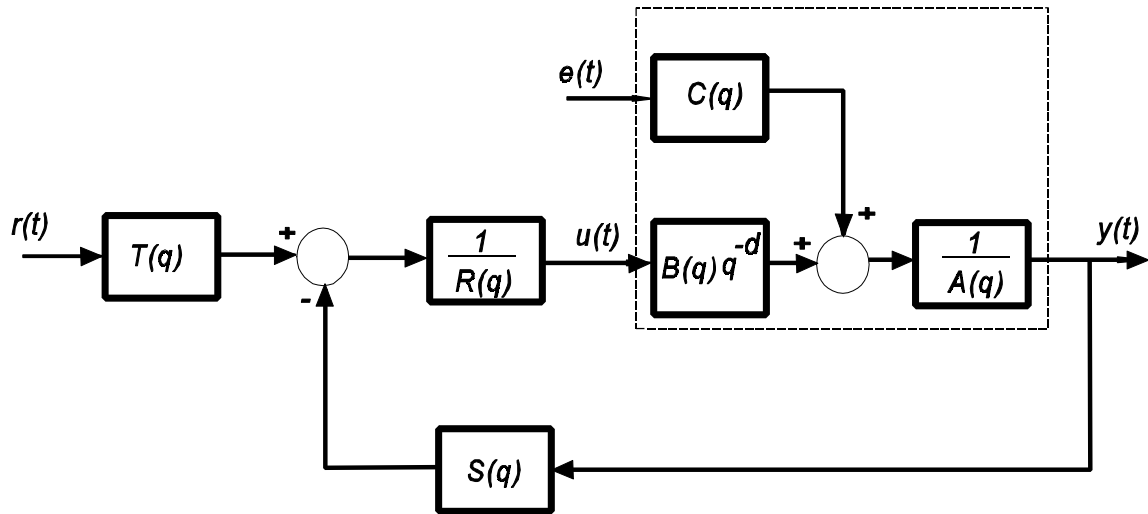


Figura 1: Estructura del sistema completo planta mas controlador de dos grados de libertad

La salida del sistema será:

$$y(t) = \frac{Bq^{-d}T}{AR + Bq^{-d}S} r(t) + \frac{CR}{AR + Bq^{-d}S} e(t) \quad (7)$$

Considerese el problema determinístico ($e(t) = 0$) y que se desea que el comportamiento a lazo cerrado del

sistema coincide con la de un modelo estable

$$y(t) = \frac{B_m}{A_m} r(t)$$

con A_m mónico y $\text{grad } A_m \geq \text{grad } B_m$

$$y(t) = \frac{Bq^{-d}T}{AR + Bq^{-d}S} r(t) = \frac{B_m}{A_m} r(t) \quad (8)$$

luego se debe verificar la siguiente igualdad

$$\frac{Bq^{-d}T}{AR + Bq^{-d}S} = \frac{B_m A_0}{A_m A_0} \quad (9)$$

Donde se a multiplicado y dividido el segundo miembro por el polinomio mónico A_0 que otorga flexibilidad al diseño (se lo denomina polinomio del observador debido a que en el planteo de asignación de polos en el espacio de estados coincide con el polinomio del observador).

A partir de los datos A , B , C y las especificaciones de diseño A_m , B_m , A_0 ; se deben calcular los polinomios R , S , T mediante las identidades

$$\begin{cases} Bq^{-d}T = B_m A_0 \\ AR + Bq^{-d}S = A_m A_0 \end{cases} \quad (10)$$

Como estamos considerando el caso donde no hay cancelación de ceros del sistema se tiene de la primera igualdad que Bq^{-d} Debe ser múltiplo de B_m

$$B_m = Bq^{-d} B_0 \quad (11)$$

$$T = B_0 A_0 \quad (12)$$

para una solución de grado mínimo $B_0 = t_0$ y se tiene que

$$\begin{aligned} B_m &= t_0 Bq^{-d} \\ T &= t_0 A_0 \end{aligned} \quad (13)$$

El valor de la constante t_0 se obtiene del estado estacionario, si deseo que $y \rightarrow r$ para $t \rightarrow \infty$ debe ser:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{t_0 B(z)z^{-d}}{A_m(z)} = \frac{t_0 B(1)}{A_m(1)} = 1$$

$$t_0 = \frac{A_m(1)}{B(1)} \quad (14)$$

$$T = \frac{A_m(1)}{B(1)} A_0 \quad (15)$$

Resta determinar R y S a partir de A , B , A_m , A_0 se debe emplear la segunda igualdad (10)

$$A R + B q^{-d} S = A_m A_0 = A_c \quad (16)$$

Esta ecuación polinómica se conoce como ecuación diofántica (o diofantina) o igualdad de Bezout. Esta ecuación tendrá solución solo si A y B son polinomios primos o lo que es equivalente si el máximo común divisor de A y B divide a A_c .

Si R_0 y S_0 es una solución de la ecuación diofántica, entonces

$$\begin{aligned} R &= R_0 + Q B q^{-d} \\ S &= S_0 - Q A \end{aligned}$$

es también una solución, donde Q es un polinomio arbitrario. Si existe una solución pueden encontrarse infinitas soluciones añadiendo o sustrayendo un múltiplo apropiado de A y $B q^{-d}$.

Se verifica que de las infinitas soluciones, existe una solución única de la ecuación diofántica tal que:

$$\text{grad } S < \text{grad } A$$

en lo que sigue se adopta

$$\text{grad } S = \text{grad } A - 1 \quad (n_s = n_a - 1) \quad (17)$$

Análisis de las condiciones de causalidad del controlador

Para obtener un controlador causal (en el caso continuo o propio en el caso discreto) se deben verificar las condiciones (6):

$$\begin{cases} \text{grad } R \geq \text{grad } T \\ \text{grad } R \geq \text{grad } S \end{cases}$$

Considere la primera condición $\text{grad } R \geq \text{grad } T$, la misma es equivalente a

$$\text{grad } A_m - \text{grad } B_m \geq \text{grad } A - \text{grad } B q^{-d} \quad (18)$$

La (18) implica que el retardo del modelo debe ser al menos tan grande como el retardo del proceso, normalmente $A_0 = t_0 \rightarrow \text{grad } A_0 = 0$, luego la (18) queda

$$\text{grad } A_m \geq \text{grad } A$$

lo que implica que el orden del modelo debe ser igual o mayor que el orden de la planta

Considere ahora la segunda condición $\text{grad } R \geq \text{grad } S$, la misma es equivalente a

$$\text{grad } A_c = \text{grad } A_m + \text{grad } A_0 \geq 2 \text{ grad } A - 1 \quad (19)$$

Teniendo en cuenta que normalmente $\text{grad } B = \text{grad } A - 1$, la (19) queda

$$\text{grad } A_c \geq \text{grad } A + \text{grad } B \quad (20)$$

Demostración de la (18)

$$\text{grad } (A R + B q^{-d} S) = \text{grad } A_c = \text{grad } (A_m A_0) = \text{grad } A_m + \text{grad } A_0$$

como $\text{grad } A \geq \text{grad } B$ y $\text{grad } R \geq \text{grad } S$

$$\text{grad } (A R + B q^{-d} S) = \text{grad } (A R) = \text{grad } A + \text{grad } R$$

luego

$$\text{grad } R = \text{grad } A_m + \text{grad } A_0 - \text{grad } A \quad (21)$$

Por otra parte mediante la (14)

$$\text{grad } T = \text{grad } A_0 + \text{grad } B_0 \quad (22)$$

$$B_m = B q^{-d} B_0, \quad \text{grad } B_m = \text{grad } B q^{-d} + \text{grad } B_0$$

$$\text{grad } T = \text{grad } A_0 + \text{grad } B_m - \text{grad } B q^{-d}$$

reemplazando la (21) y (22) en $\text{grad } R \geq \text{grad } T$

$$\text{grad } A_m + \text{grad } A_0 - \text{grad } A \geq \text{grad } A_0 + \text{grad } B_m - \text{grad } B q^{-d}$$

$$\text{grad } A_m - \text{grad } B_m \geq \text{grad } A - \text{grad } B q^{-d}$$

Demostración de la (19)

por la (17)

$$\text{grad } S = \text{grad } A - 1$$

luego $\text{grad } R \geq \text{grad } A - 1$

reemplazando la (21) en la anterior

$$\text{grad } A_m + \text{grad } A_0 - \text{grad } A \geq \text{grad } A - 1$$

$$\text{grad } A_c = \text{grad } A_m + \text{grad } A_0 \geq 2 \text{ grad } A - 1$$

Solución de la ecuación diofántica

Para resolver la ecuación diofántica $A R + B q^{-d} S = A_c$, se desarrollan los productos y sumas de polinomios, luego se igualan los coeficientes de igual orden de ambos miembros resultando un sistema de ecuaciones lineales

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_{na} & \vdots & \ddots & a_1 & b_{nb} & \vdots & & b_1 \\ 0 & a_{na} & & \vdots & 0 & b_{nb} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{na} & 0 & \cdots & 0 & b_{nb} \end{bmatrix}}_{M_s} \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{nr} \\ s_{ns} \\ \vdots \\ s_{ns} \end{bmatrix}}_{\theta_c} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{c1} - a_1 \\ \vdots \\ a_{cna} - a_{na} \\ a_{cna+1} \\ \vdots \\ a_{cnr+ns+1} \end{bmatrix}}_b$$

La matriz M_s se denomina matriz de Sylvester y se presenta frecuentemente en las aplicaciones matemáticas. Esta posee la propiedad de ser no singular (por lo tanto invertible) si y solo si los polinomios A y B no tienen factores comunes (son polinomios primos). En ese caso la ecuación anterior tiene solución única.

$$\theta_c = M_s^{-1} b$$

Observar no obstante la no unicidad con respecto a los ordenes de R y S como se discutió anteriormente.

Diseños de Controladores para Sistemas Estocásticos Lineales.

Formulación del problema de control para sistemas estocásticos.

Cuando un sistema estocástico, monovariable, lineal e invariante, representado por el modelo ARMAX

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)} q^{-d} u(k) + \frac{C(k)}{A(k)} e(k) \quad (21)$$

se ve afectado por perturbaciones estocásticas, las mismas son transmitidas a través de la dinámica del sistema, afectando la variable de salida, cuyo comportamiento también será aleatorio. El objetivo de un controlador para este tipo de sistemas, es minimizar los efectos que aparecen sobre la salida cuando se ve afectada por perturbaciones estocásticas. El hecho de hablar de minimizar implica un proceso de optimización y por lo tanto se necesita formular un índice de desempeño adecuado, cuya optimización asegure un correcto funcionamiento del sistema.

Un controlador que se adecua muy bien para el control de sistemas teniendo en cuenta las perturbaciones estocásticas es el denominado **Controlador de Mínima Varianza**. El principio básico en el que se sustenta este controlador, consiste precisamente en obtener los parámetros y la estructura óptima del mismo tal que minimicen la varianza V de la señal de salida $y(k)$.

$$J = V \{ y(k) \} = E \{ y^2(k) \} \quad (22)$$

Con este planteo se asegura que la fluctuación aleatoria de la señal de salida debido a perturbaciones se reduce al mínimo posible.

Esta propuesta produce buenos resultados, pero presenta como inconveniente que al no incluirse la acción de control en el índice de desempeño, ésta última puede tomar valores excesivos. Un índice de desempeño que tiene en cuenta este aspecto es el siguiente

$$J = E \{ y^2(k) + p u^2(k) \} \quad (23)$$

donde $y^2(k)$ representa la varianza de la salida, $u^2(k)$ la varianza de la acción de control y p un factor de peso de la misma. Al minimizar este índice se obtendrá un controlador que con una acción de control $u(k)$ de varianza reducida, logra también una varianza baja en la salida $y(k)$. Lo que se minimiza en este caso, es una combinación de ambas variables. El controlador resultante de minimizar este índice de desempeño, se lo denomina **Controlador de Mínima Varianza Generalizado**.

El factor de peso p permite variar la penalización que se hace sobre la acción de control. En general, pesar la acción de control $u(k)$ implica que la varianza de $y(k)$ deje de ser la mínima obtenible. Esta disminución en el desempeño del control de la salida es el resultado del compromiso de pretender reducir simultáneamente la varianza de la acción de control $u(k)$.

Cuando se toma en cuenta en el control, la señal de referencia $r(k)$, el índice de desempeño se expresa como

$$J = E \{ [y(k) - r(k)]^2 + p u^2(k) \} \quad (24)$$

Si el proceso incluye elementos con retardo puro dT_o , deberá hacerse una predicción de la salida para los d pasos de retardo. En tal caso la (24) toma la forma

$$J = E \{ [y(k+d) - r(k)]^2 + p u^2(k) \} \quad (25)$$

Podrían usarse aún índices de desempeño más complejos que incluyan por ejemplo el pesado de las variables mediante polinomios o predicciones de las variables para determinados pasos en el futuro. El que se ha planteado en la (25) tiene suficiente generalidad y provee muy buenos resultados.

En la Fig.2 se muestra un sistema de control para sistemas con perturbaciones estocásticas.

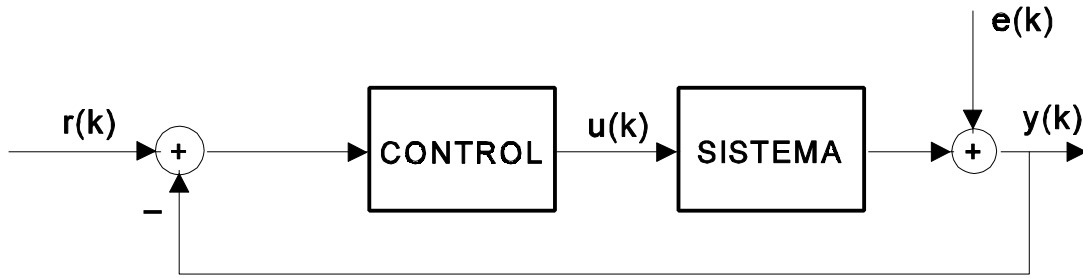


Fig.2. Sistema de Control con perturbaciones estocásticas.

Se puede formular a continuación el problema del **regulador estocástico lineal invariante de varianza mínima**

Dado un sistema estocástico lineal invariante de tiempo discreto dado por la (21), se debe encontrar una ley de control u , que lleve la salida y al valor de referencia r haciendo mínimo el índice de desempeño de la (25). En estas circunstancias la varianza de la diferencia entre la señal de salida y la referencia, será tan pequeña como sea posible, bajo la condición de obtener una varianza de la acción de control suficientemente pequeña.

Obtención del controlador estocástico.

La ecuación de predicción (17) puede incluirse ahora en el índice de desempeño (25).

$$J = E \{ [\hat{y}(k+d|k) + \varepsilon(k+d) - r(k)]^2 + p u^2(k) \} \quad (26)$$

operando y reordenando

$$J = E \{ [\hat{y}(k+d|k) - r(k)]^2 + p u^2(k) \} + E \{ \varepsilon^2(k+d) \} + 2E \{ \hat{y}(k+d|k) \varepsilon(k+d) \} - 2E \{ r(k) \varepsilon(k+d) \} \quad (27)$$

Reemplazando la (17) en el tercer término del segundo miembro de la (27) se puede observar que $2E \{ \hat{y}(k+d|k) \varepsilon(k+d) \} = 0$ puesto que tanto $y(k)$ como $u(k)$, no dependen de los valores futuros de $\varepsilon(k+d)$ y por lo tanto no están correlacionados. El quinto término de la (27), $E \{ r(k) \varepsilon(k+d) \} = 0$ también es nulo dado que r no está correlacionado con ε . Resulta entonces

$$J = E \{ [\hat{y}(k+d|k) - r(k)]^2 + p u^2(k) \} + E \{ \varepsilon^2(k+d) \} \quad (28)$$

Para minimizar el índice respecto de la acción de control $u(k)$ se hace

$$\frac{\partial J}{\partial u(k)} = E \{ [\hat{y}(k+d|k) - r(k)] \frac{\partial \hat{y}(k+d|k)}{\partial u(k)} + p u(k) \} = 0 \quad (29)$$

Es necesario calcular la derivada parcial del predictor (Ec. 5.2-24) respecto de la acción de control. Para obtener esta derivada deben incluirse las expresiones explícitas de los polinomios $B(q)$, $C(q)$, $F(q)$ y $G(q)$ definidos por las (5) y (10) y tenerse en cuenta que se deriva solo con respecto al instante k . Así es

$$\frac{\partial \hat{y}(k+d|k)}{\partial u(k)} = b_0 \quad (30)$$

Por lo tanto se obtendrá un mínimo para J cuando

$$E \{ [\hat{y}(k+d|k) - r(k)] b_0 + p u(k) \} = 0 \quad (31)$$

sustituyendo $\hat{y}(k+d|k)$ según (17), resulta

$$b_0 \frac{G(q)}{C(q)} y(k) + b_0 \frac{B(q)F(q)}{C(q)} u(k) - r(k) b_0 + p u(k) = 0 \quad (32)$$

o bien

$$G(q) y(k) - C(q) r(k) + [B(q)F(q) + C(q) \frac{p}{b_0}] u(k) = 0 \quad (33)$$

renombrando

$$M(q) = B(q)F(q) + C(q) \frac{p}{b_0} \quad (34)$$

queda

$$G(q) y(k) - C(q) r(k) + M(q) u(k) = 0 \quad (35)$$

De esta expresión se puede despejar $u(k)$ para obtener la acción de control óptima

$$u(k) = \frac{C(q)}{M(q)} r(k) - \frac{G(q)}{M(q)} y(k) \quad (36)$$

La Ec.16 representa al controlador de varianza mínima generalizada. La acción de control $u(k)$ es una función de los valores (medidos) presentes $r(k)$ e $y(k)$. Transformando en variable z se puede representar al controlador y al proceso en un diagrama en bloques como en la Fig.3.

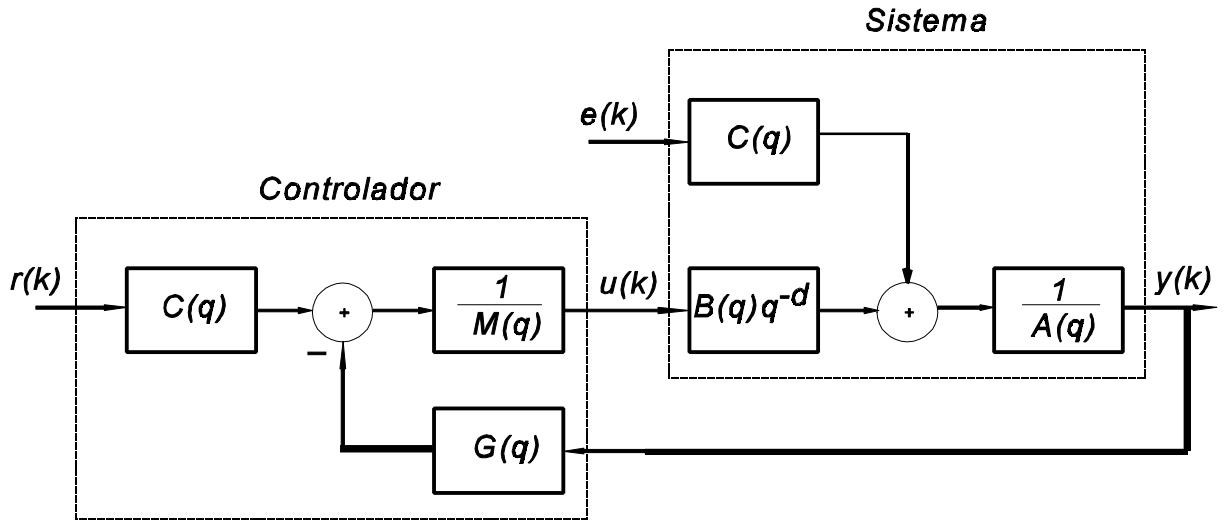


Fig.3. Estructura del Sistema de Control Estocástico con Controlador de Varianza Mínima.

Si en el índice de desempeño dado por la (25) no se pesa la acción de control $u(k)$; esto es $p = 0$, la (34) se transforma en

$$M(q) = B(q) F(q) \quad (37)$$

Con esta expresión para $M(q)$ la (26) del controlador de varianza mínima se transforma en el Controlador Estocástico de Varianza Mínima Simple.

Condiciones de estabilidad.

La salida del sistema a lazo cerrado a partir de la Fig.3 resulta

$$y(k) = \frac{C(q) B(q) q^{-d}}{M(q) A(q) + B(q) G(q) q^{-d}} r(k)$$

la función de transferencia a lazo cerrado es:

$$\frac{y(z)}{r(z)} = \frac{C(z) B(z) z^{-d}}{M(z) A(z) + B(z) G(z) z^{-d}} \quad (38)$$

La ecuación característica del sistema de lazo cerrado es

$$M(z) A(z) + B(z) G(z) z^{-d} = 0 \quad (39)$$

Obteniendo $M(z)$ a partir de su expresión en variable z de la (34) queda

$$M(z) = B(z) F(z) + C(z) \frac{p}{b_0} \quad (40)$$

Despejando $G(z)$ y aplicando la transformada z a la (35) se obtiene

$$G(z) = [C(z) - F(z) A(z)] z^d \quad (41)$$

y reemplazando $M(z)$ y $G(z)$ en la (39) se llega

$$C(z) \left[A(z) \frac{p}{b_o} + B(z) \right] = 0 \quad (42)$$

Las raíces de $C(z)$ constituyen los polos fijos del sistema de lazo cerrado, mientras que los polos de $A(z)p/b_o + B(z) = 0$ son los polos móviles que pueden modificarse con el controlador. Se observa que para obtener un sistema de control estable, las raíces de $C(z)$ deben encontrarse necesariamente en el interior del círculo unitario. Para el controlador de varianza mínima simple, donde $p = 0$, la ecuación característica (42) se reduce a

$$C(z) B(z) = 0 \quad (43)$$

Esta ecuación impone además la condición que las raíces de $B(z)$ estén dentro del círculo unitario. Esto implica que el sistema a controlar debe ser de dinámica inversa estable, condición que no exige el controlador de varianza mínima generalizado cuando $p \neq 0$.

Apéndice Simulink

En la figura 1 se observa un modelo de Simulink de una estructura de control adaptable autosintonizado y en la figura 2 el modelo equivalente de la figura 1.

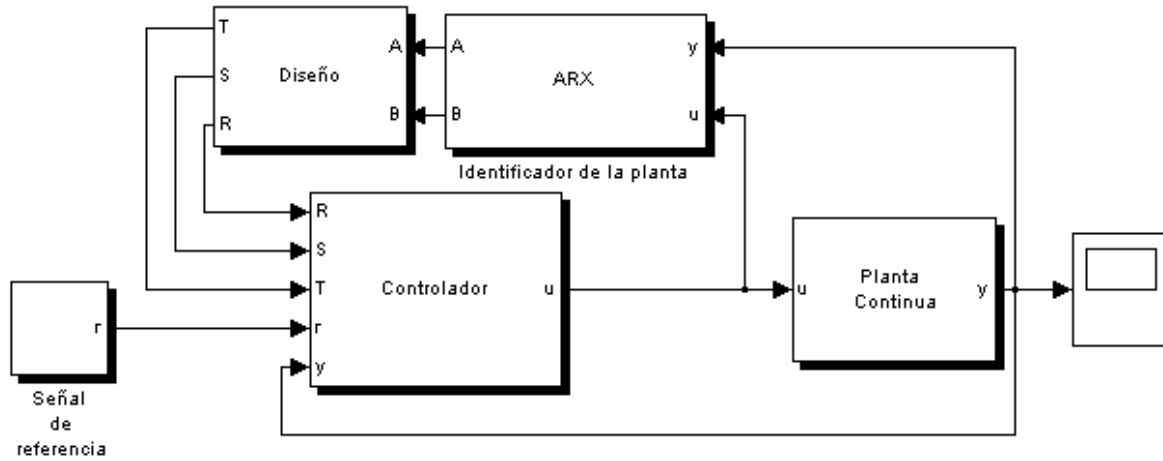


Figura 1: Estructura de control adaptable autosintonizado

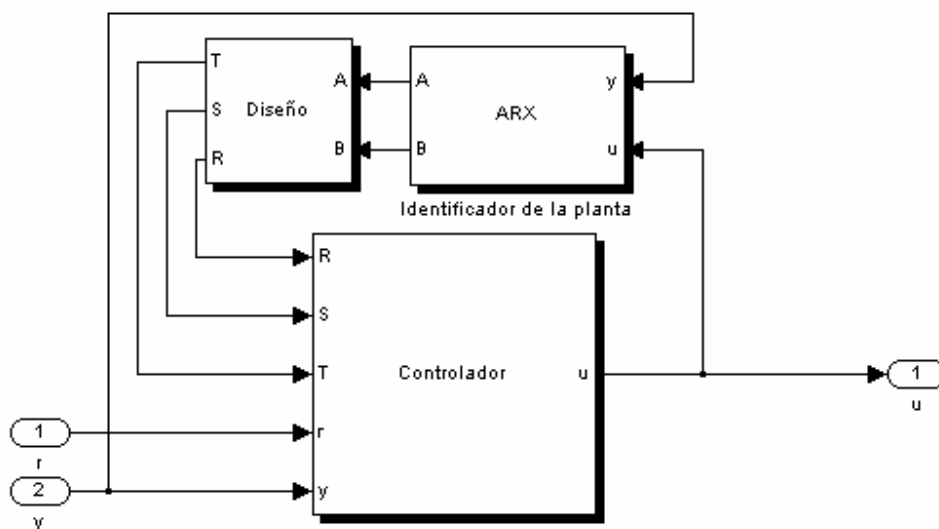
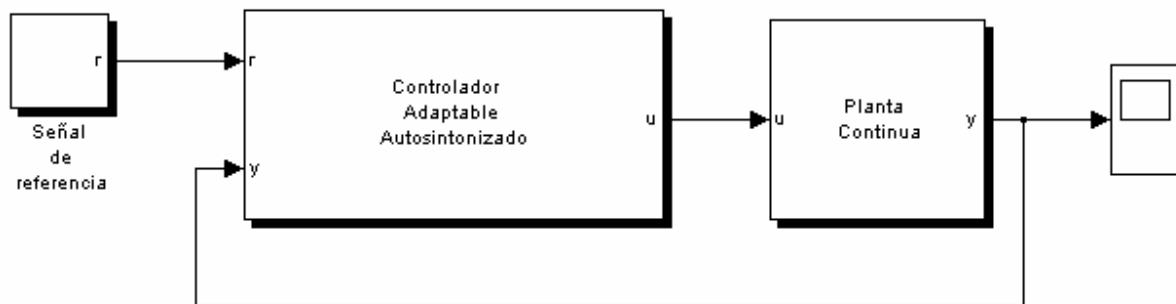
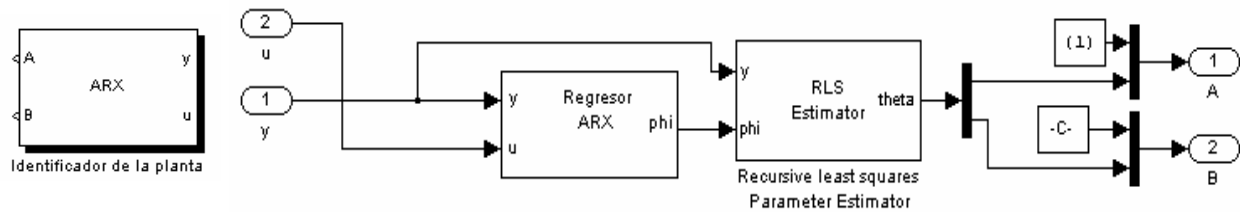


Figura 2: Modelo equivalente

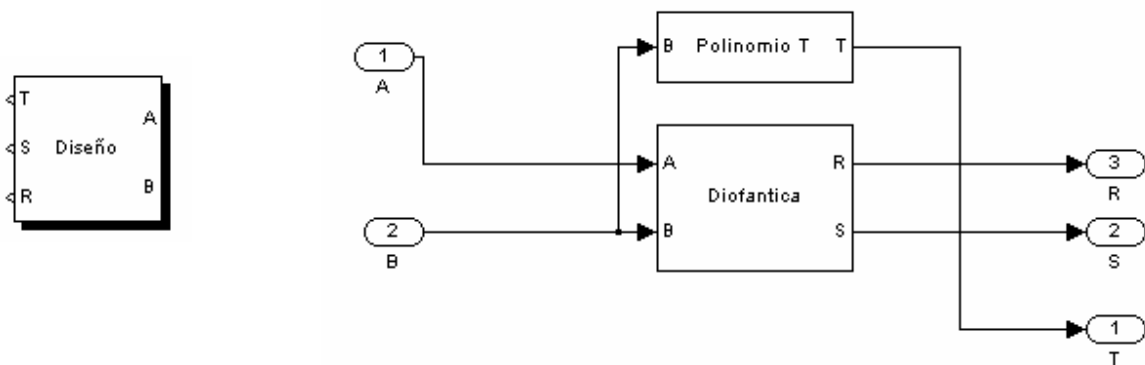
Básicamente el controlador esta formado por tres bloques: Identificador, Diseño y Controlador.

Bloque Identificador: Se emplean los bloques identificadores ARX y ARMAX desarrollado en la práctica de identificación recursiva.



De manera similar para el ARMAX.

Bloque Diseño: Este bloque calcula los polinomios R, S y T del controlador a partir de los polinomios identificados de la planta A y B. Se le debe suministrar como parámetros los polinomios Am y Ao (Ac=AmAo). El bloque de diseño consta de dos bloques uno denominado Polinomio T y otro denominado Diofantica.



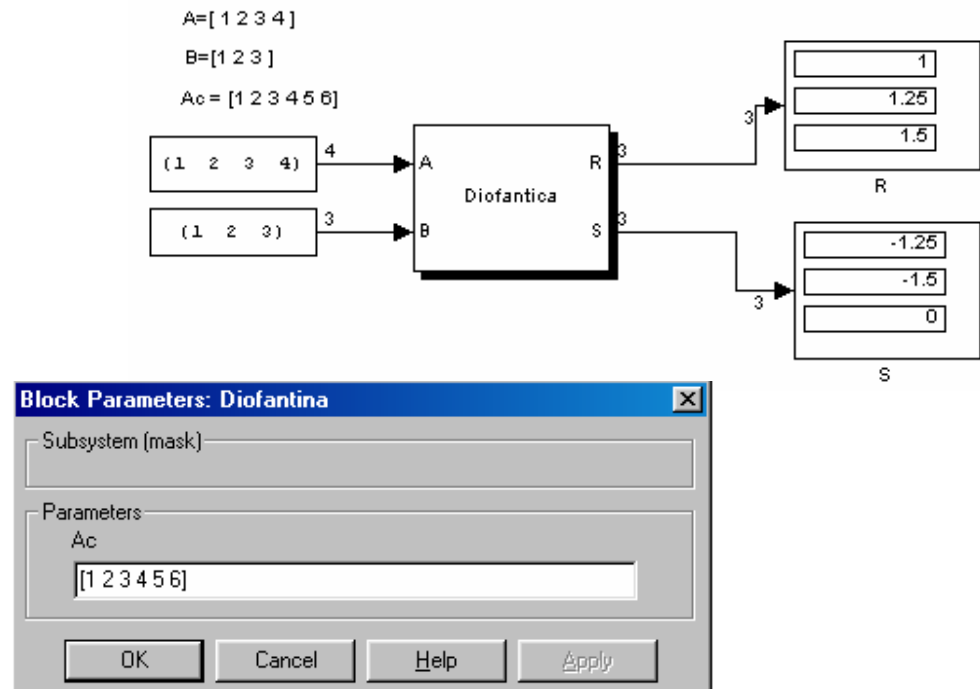
Bloque Polinomio T: Este bloque permite calcula el polinomio T del controlador mediante la ecuación

$$T = A_0 \frac{A_m(1)}{B_m(1)}$$

Las señales que ingresan a bloque son los polinomios A y B y la salida es el polinomio T. Los parámetros que se introducen en el box de diálogo son los polinomios Am y Ao (Ac=AmAo).

Bloque Diofántica: Este bloque permite resolver en línea la ecuación diofántica

$$AR + BS = A_c$$



Las señales que ingresan a bloque son los polinomios A y B y las salidas son los polinomios R y S. Los parámetros que se introducen en el box de diálogo son los polinomios Am y Ao ($A_c=A_mA_o$).

El bloque invoca a la función : $[R,S]=\text{diofantina}[A,B,A_c]$

Condiciones para un funcionamiento correcto:

- a) A y A_c mónicos
- b) Los grados de R y S deben ser tales que $\text{grad}(AR) > \text{grad}(BS)$
- c) $\text{grad}(A_c) \geq \text{grad}(A) + \text{grad}(B)$

La función devuelve

- a) R mónico $\text{grad}(R) = \text{grad}(A_c) - \text{grad}(A)$
- b) $\text{grad}(S) = \text{grad}(A) - 1$

Bloque Controlador: Este bloque calcula la acción de control $u(t)$

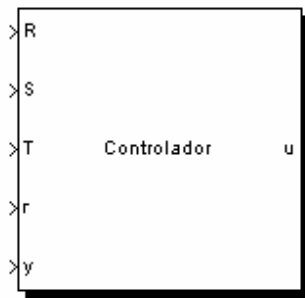
$$u(t) = \frac{T(q)}{R(q)} r(t) - \frac{S(q)}{R(q)} y(t)$$

$$R = 1 + r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2} + \dots + r_{nr} q^{-nr}$$

$$S = s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2} + \dots + s_{ns} q^{-ns}$$

$$T = t_0 + t_1 q^{-1} + t_2 q^{-2} + \dots + t_{nt} q^{-nt}$$

a partir de las señales de referencia y salida del proceso. También son entradas a este bloque los polinomios R, S y T suministrados por el bloque de diseño. Los parámetros de este bloque son los ordenes de los polinomios R, S y T.



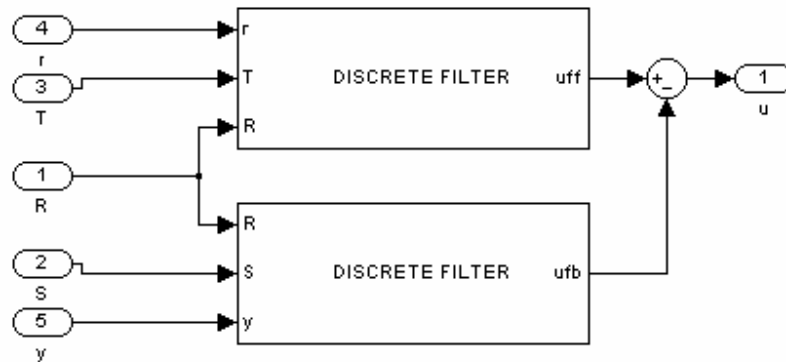
Obsérvese que el controlador posee dos grados de libertad, esto es, esta constituido por parte de precompensación u_{ff} (la ff por feedforward) y una parte de realimentación de la salida u_{fb} (la fb por feedback)

$$u(t) = \frac{T(q)}{R(q)} r(t) - \frac{S(q)}{R(q)} y(t) = u_{ff}(t) + u_{fb}(t)$$

$$u_{ff}(t) = \frac{T(q)}{R(q)} r(t)$$

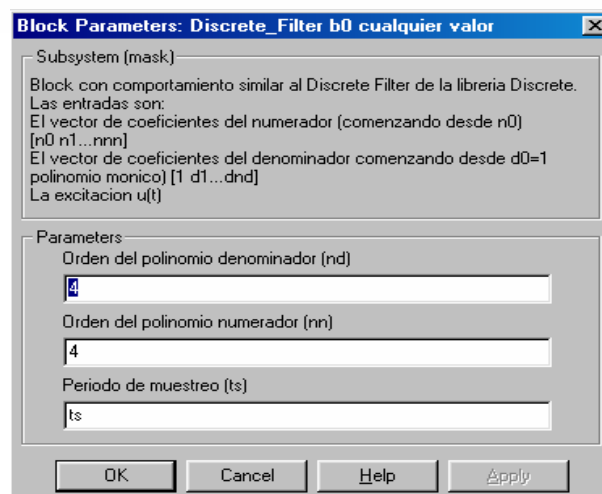
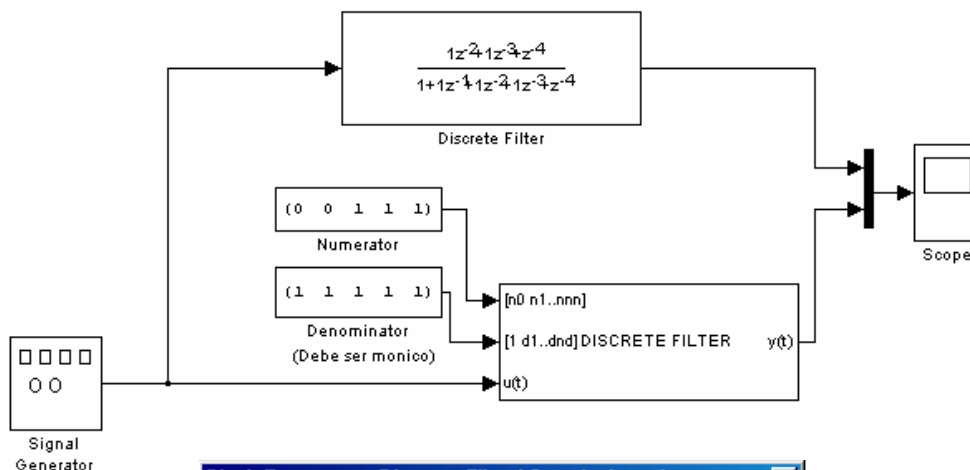
$$u_{fb}(t) = -\frac{S(q)}{R(q)} y(t)$$

Esta ley de control se implementa mediante dos filtros discretos como se muestra en la figura



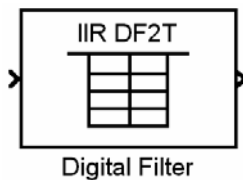
Bloque Discrete Filter

El bloque Discrete Filter implementa la misma función que el bloque homónimo de la librería Discrete de Simulink (ver figura). La diferencia es que permite cambiar los parámetros en línea, esto es, permite simular sistemas lineales variantes en el tiempo (en inglés linear time-varying systems o LPV systems por lineal de parámetros variables). Los parámetros que se introducen en el box de diálogo son los órdenes de los polinomios denominador y numerador (nd y nn respectivamente) y el período de muestreo.



Observación

En realidad lo anterior se diseñó para las versiones de Simulink anteriores al Matlab 6.0 que no disponían de un filtro adaptable incorporado en sus librerías. En el Simulink 5 (R13) de Matlab 6.5 ya se cuenta en **DSP Blockset/Filtering/Filter Designs**, el bloque Digital Filter.



Block Parameters: Digital Filter

Digital Filter (mask) (link)

Independently filter each channel of the input over time using a specified digital filter implementation. Filter coefficients can be specified using either tunable mask dialog parameters or separate input ports (useful for time-varying coefficients).

Time-varying coefficients are supported at one of two possible rates of coefficient update in frame-based processing. The coefficients can update at a rate of one filter per frame (i.e. they stay constant for the duration of an input frame and change for the next frame). Or, the coefficients can update at a rate of one filter per sample (i.e. they change with every sample in the input frame).

Parameters

Transfer function type: **IIR (poles & zeros)**

Filter structure: **Direct form II transposed**

Coefficient source: **Specify via dialog**

Numerator coefficients:
[1 2]

Denominator coefficients:
[1 0.1]

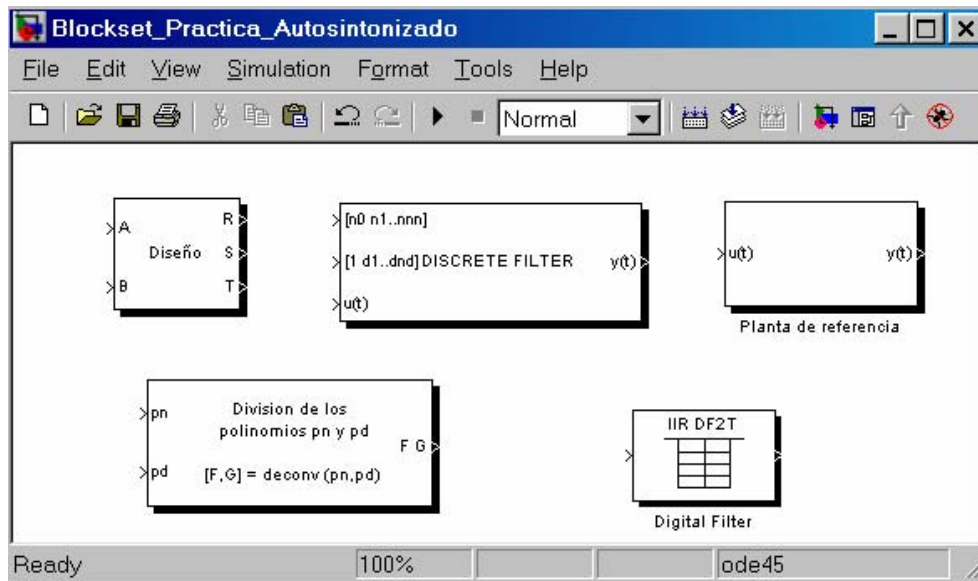
☒ First denominator coefficient = 1, remove 1/a0 term in the structure

Coefficient update rate: **One filter per frame**

Initial conditions:
0

OK Cancel Help Apply

Se suministra la librería **Blockset_Practica_Autosintonizado.mdl** para facilitar el desarrollo de la práctica. La misma posee los bloques Diseño, Discrete Filter y deconvolución.



El bloque deconvolución facilita el diseño del controlador de mínima varianza y mínima varianza generalizado. Este bloque realiza la división de los polinomios pn y pd que ingresan al bloque y devuelve el polinomio resultante de la división F y el polinomio resto G.

