

## **8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL**

# 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

### 8.1 Introducción

- **Diseño:** Dado un sistema físico (normalmente su modelo dinámico y sus restricciones) y su comportamiento deseado (especificaciones), obtener una ley de control de modo que el sistema realimentado se comporte como se desea.

Si las tareas del sistema de control involucran grandes excursiones de las variables o alta velocidad, muy probablemente deba recurrirse a un diseño de control no lineal a fin de alcanzar las especificaciones.

- **Tareas de control:**  
*Estabilización o regulación* (temperatura, posición...).

Dado un sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

encontrar una ley de control  $\mathbf{u}$  tal que, comenzando en una región  $\Omega$ , el estado

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \text{ con } t \rightarrow \infty$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

**Seguimiento o servo** (trayectorias, perfiles...).

Dado un sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

y una trayectoria deseada  $\mathbf{y}_d(t)$ , encontrar una ley de control  $\mathbf{u}$  tal que, comenzando en una región  $\Omega$ , el error de seguimiento  $\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t) \rightarrow 0$  con  $t \rightarrow \infty$  mientras el estado permanece acotado.

Cuando se escriben, como es usual, las ecuaciones del error, o sea la dinámica del sistema en términos de  $\mathbf{y}_d - \mathbf{y}$ , el problema de seguimiento se convierte en un problema de regulación del error, para un sistema variante en el tiempo (pues aparecen las referencias y sus derivadas).

- **Especificaciones de diseño**
  - Estabilidad
  - Exactitud y velocidad de respuesta
  - Robustez
  - Costo

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Procedimiento de diseño**
  1. Especificación del comportamiento deseado.
  2. Modelado de la planta.
  3. Diseño de la ley de control.
  4. Análisis y simulación del sistema de control.
  5. Implementación del sistema de control.
- **Métodos de diseño**
  - Diseño usando Lyapunov.
  - Diseño de linealización por realimentación
  - Diseño de control deslizante

# 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

## 8.1 Diseño usando Lyapunov

- **Diseño de un controlador (regulación a cero)**

Dado el sistema

$$\ddot{x} - \dot{x}^3 + x^2 = u$$

Se propone la siguiente estructura de controlador para regulación a cero ( $\mathbf{x}=0$ )

$$u = u_1(\dot{x}) + u_2(x)$$

El sistema de lazo cerrado resulta:

$$\ddot{x} - (\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})) + (x^2 - u_2(x)) = 0$$

$$\ddot{x} - b(\dot{x}) + c(x) = 0$$

En esta ecuación se asume que el origen es un equilibrio

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Ahora se toma la función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x c(y) dy \quad x.c(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\dot{V} = +\dot{x}b(\dot{x})$$

Para asegurar la estabilidad del equilibrio:

$$\dot{V} \leq 0 \Rightarrow \dot{x}b(\dot{x}) = \dot{x}(\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})) < 0 \quad \forall x \neq 0$$

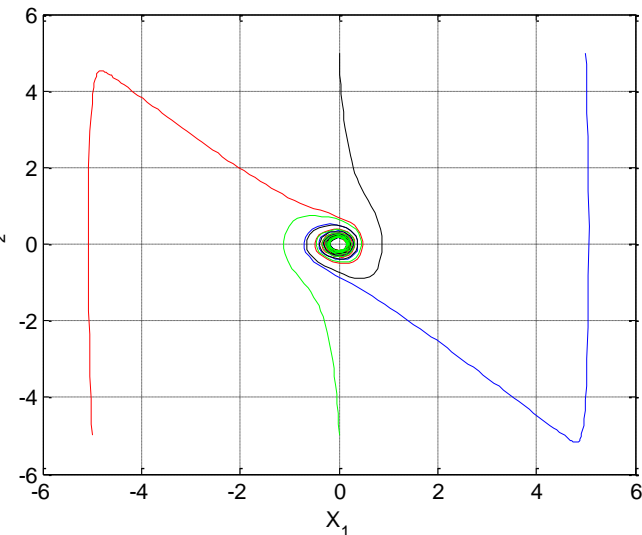
Entonces  $u_1(\dot{x}), u_2(x)$  deben elegirse tal que:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}b(\dot{x}): & \dot{x}(\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})) < 0 \quad \forall \dot{x} \neq 0 \\ xc(x): & x(x^2 - u_2(x)) > 0 \quad \forall x \neq 0 \end{array}$$

Por ejemplo:

$$u_1(\dot{x}) = -2\dot{x}^3$$

$$u_2(x) = -x - x^3$$



Finalmente debe verificarse que el origen es un equilibrio. También puede verificarse **estabilidad asintótica** usando el Teorema del Conjunto Invariante.

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Diseño de un controlador (posicionamiento en  $x_d$ )**

$$\ddot{x} - \dot{x}^3 + x^2 = u$$

$$u = u_1(\dot{x}) + u_2(\tilde{x}); \quad \tilde{x} = x - x_d$$

$$\ddot{x} - (\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})) + (x^2 - u_2(\tilde{x})) = 0$$

$$\ddot{x} - b(\dot{x}) + c(\tilde{x}) = 0$$

Definiendo los estados:

$$x_1 = \tilde{x} \qquad \tilde{x}^2 = x^2 - 2xx_d + x_d^2$$

$$x_2 = \dot{x}$$

El sistema de lazo cerrado resulta:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_2^3 + u_1(x_2) - (x_1 + x_d)^2 + u_2(x_1)$$

Se supone que el origen es un equilibrio:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Ahora se elige una función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^{\tilde{x}} (x^2 - u_2(\tilde{x})) d\tilde{x} \quad ; \quad (x^2 - u_2(\tilde{x}))\tilde{x} > 0 \quad \forall \tilde{x} \neq 0$$

O bien, usando  $x = \tilde{x} + x_d$ ,  $\boxed{(\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}x_d + x_d^2 - u_2(\tilde{x}))\tilde{x} > 0 \quad \forall \tilde{x} \neq 0}$

La derivada temporal es:  $\dot{V} = \dot{x}\ddot{x} + (x^2 - u_2(\tilde{x}))\dot{x}$

$$\dot{V} = \dot{x}(\dot{x}^3 + u_1(\dot{x}) - x^2 + u_2(\tilde{x})) + x^2\dot{x} - u_2(\tilde{x})\dot{x}$$

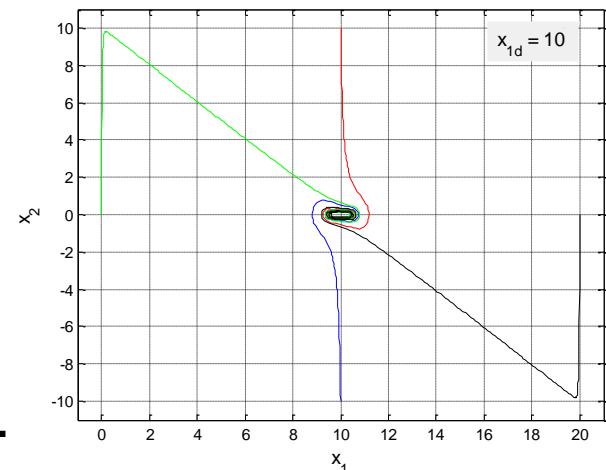
Si  $\boxed{\begin{matrix} \dot{x}b(\dot{x}) < 0 & \forall x \neq 0 \\ \dot{x}(\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})) < 0 \end{matrix}}$  entonces  $\dot{V} \leq 0$  y el equilibrio  $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = 0$  es estable.

Una posible elección para  $u_1(\dot{x})$ ,  $u_2(\tilde{x})$  es

$$u_1(\dot{x}) = -2\dot{x}^3$$

$$u_2(\tilde{x}) = x_d^2 + 2\tilde{x}x_d + \tilde{x}^2 - \tilde{x}^3$$

También en este caso debe verificarse que el origen es equilibrio y puede completarse **E. Asint.**





## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Posicionamiento de un robot ( $q_d = \text{cte}$ )**

La dinámica del robot viene expresada por:

$$H(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g(q) = \tau$$

donde  $q$  representa el vector de posiciones articulares,  $H(q)$  es la matriz de inercias,  $b(q, \dot{q})$  es el vector de pares centrífugos y de Coriolis,  $g(q)$  es el vector de pares gravitatorios y  $\tau$  es el vector de pares motores. Se define el error de posicionamiento como  $\tilde{q} = q_d - q$ , y se propone la siguiente ley de control:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} + g(q)$$

La ecuación de lazo cerrado resulta,  $H(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) = K_p \tilde{q} - K_d \dot{q}$

Tomando como estados el vector  $(\tilde{q} \quad \dot{q})^T$  resulta la ecuación de estados:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{q} \\ H^{-1}[K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} - b(q, \dot{q})] \end{pmatrix}$$

Interesa analizar su equilibrio  $\begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = 0$ , o sea error de posición cero con velocidad cero.

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- ***Propiedad del robot manipulador:***

Derivando la energía cinética en el tiempo

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q}$$

$$\dot{K} = \dot{q}^T H \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H} \dot{q}$$

La potencia cinética es el producto de la velocidad y el par que la genera,

$$\dot{K} = \dot{q}^T (\tau - g)$$

Entonces, usando la ecuación dinámica del robot:

$$\dot{q}^T H \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} = \dot{q}^T (H \ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g - g)$$

$$\frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} = \dot{q}^T b(q, \dot{q})$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Estabilidad del equilibrio:**

$$V = K + P = \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q}$$

$$\dot{V} = \dot{q}^T H \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} - \tilde{q}^T K_p \dot{q}$$

$$\dot{V} = \dot{q}^T (K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} - b(q, \dot{q})) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H} \dot{q} - \tilde{q}^T K_p \dot{q}$$

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_d \dot{q} \leq 0$$

Aplicando teorema del *conjunto invariante global*:  $\dot{V} = 0$  en  $\dot{q} = 0$

$$V \rightarrow \infty \quad \text{con} \quad \left\| \begin{array}{c} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{array} \right\| \rightarrow \infty$$

De la ecuación del sistema,  $\ddot{q} = 0$  si, además de  $\dot{q} = 0$  se verifica  $\tilde{q} = 0$ .

Entonces, el mayor conjunto invariante es el origen. Según el teorema de LaSalle se concluye que:

$$\tilde{q}(t) \rightarrow 0$$

$$\dot{q}(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

verificándose el objetivo de control de posicionamiento del robot manipulador.

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- Control de un robot móvil

### Ecuaciones cinemáticas

De la figura 8.1, las ecuaciones cinemáticas en coordenadas Cartesianas son:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cdot \cos \varphi \\ \dot{y} = u \cdot \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases}$$

o bien, en coordenadas polares en función de  $e$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$ :

$$\dot{e} = -u \cdot \cos \alpha$$

$$\dot{\alpha} = -\omega + u \frac{\sin \alpha}{e}$$

$$\dot{\theta} = u \frac{\sin \alpha}{e}$$

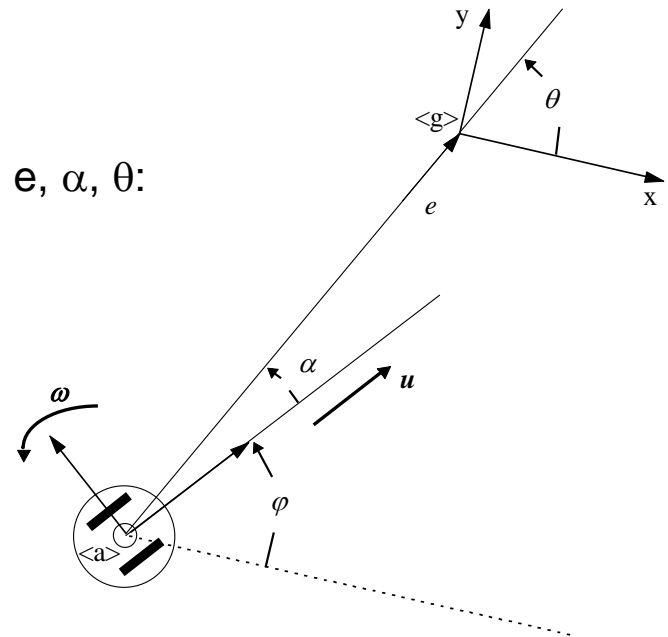


Figura 8.1

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

A continuación se analiza el problema de control de *posicionamiento final* sin prescribir orientación final. Se asume que  $e$  y  $\alpha$  son variables medibles. Una estructura posible de control es:

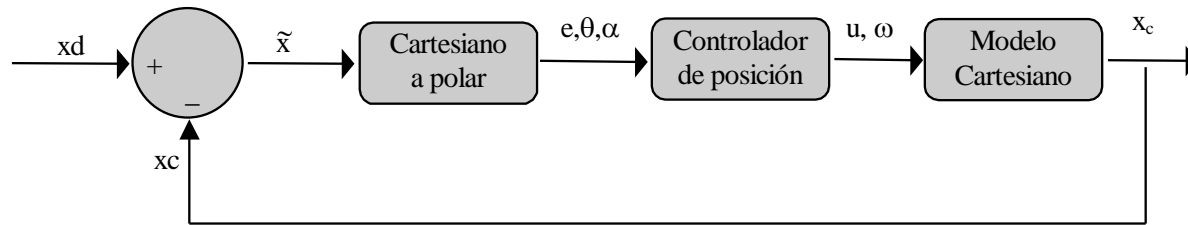


Figura 8.2

Como no se prescribe la orientación final, se consideran sólo las variables de estado  $e$ ,  $\alpha$ .

### ***Diseño del controlador:***

Considérese la función candidata de Lyapunov

$$V(e, \alpha) = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \alpha^2,$$

$$\dot{V} = e \dot{e} + \alpha \dot{\alpha}$$

$$\dot{V} = e(-u \cos \alpha) + \alpha \left( -\omega + u \frac{\sin \alpha}{e} \right) = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

$\dot{V}_1$  puede hacerse no positivo eligiendo

$$u = \lambda e \cos \alpha, \quad \lambda > 0$$

Entonces

$$\dot{V}_2 = \alpha (-\omega + \lambda \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)$$

que puede también hacerse no positivo tomando

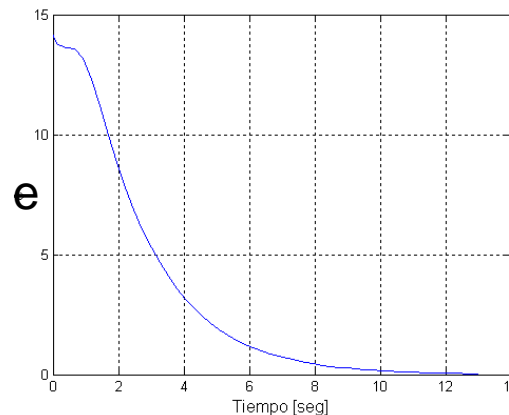
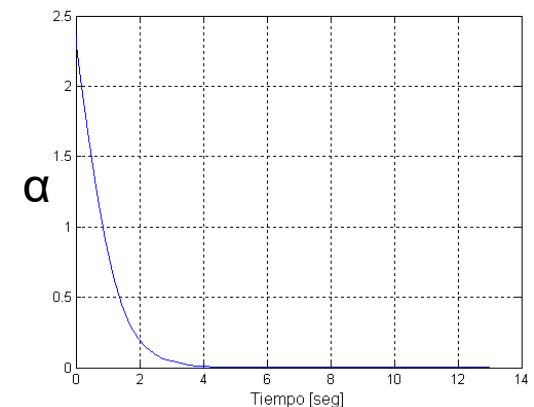
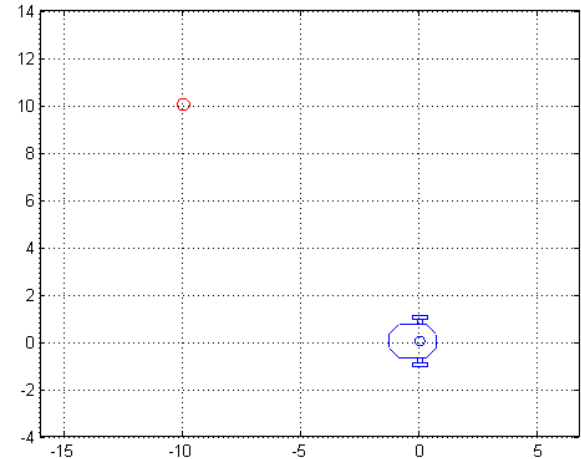
$$\omega = k\alpha + \lambda \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \quad k > 0$$

Entonces:

$$\dot{V} = -\lambda e^2 \cos^2 \alpha - k\alpha^2$$

lo cual implica que

$$e(t), \alpha(t) \rightarrow 0 \quad \text{con} \quad t \rightarrow \infty$$



## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Control adaptable de una planta lineal**

Considérese la siguiente planta lineal de primer orden

$$G_p = \frac{b}{s+a} = \frac{y}{u} \quad \dot{y} + ay = bu$$

donde

$b$  : constante positiva *desconocida*

$a$  : constante *desconocida*.

Se desea que el sistema realimentado se comporte como un "modelo de referencia" descrito por la siguiente dinámica:

$$G_m = \frac{b_m}{s+a_m} = \frac{y_m}{r}$$

$$\dot{y}_m + a_m y_m = b_m r$$

$$a_m > 0$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Se propone la siguiente estructura para la *ley de control*:

$$u = \theta_1 r - \theta_2 y = \theta^T \phi$$

$$\theta^T = [\theta_1 \quad \theta_2] \quad \text{vector de parámetros}$$

$$\phi^T = [r \quad -y] \quad \text{regresor}$$

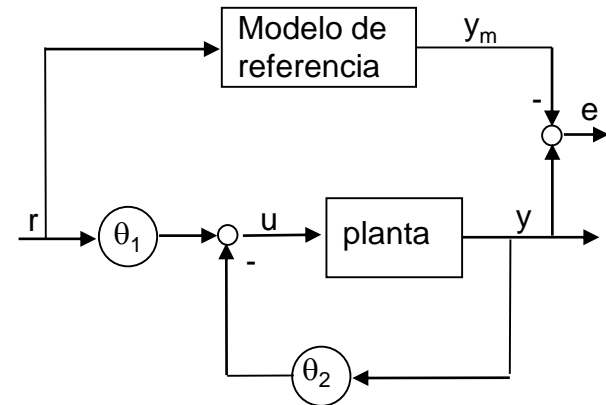


Figura 8.3 Estructura del sistema de control

Ahora se requiere escribir las denominadas *ecuaciones del error*:

$$\dot{e} = E(e, t, \tilde{\theta})$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = \Theta(e, t, \tilde{\theta})$$

donde  $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$ , y  $\theta^*$  representa el vector de parámetros exactos que verifican la condición de dinámica del modelo de referencia igual a la del sistema realimentado de la figura 8.3.



## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Si se igualan ambas dinámicas se encuentran los siguientes valores:

$$\theta_1^* = \frac{b_m}{b}; \quad \theta_2^* = \frac{a_m - a}{b}$$

Ahora,

$$e = y - y_m$$

$$\dot{e} = \dot{y} - \dot{y}_m = -ay + bu + a_m y_m - b_m r$$

La acción de control es  $u = \theta^T \phi = (\tilde{\theta} + \theta^*)^T \phi$ . Reemplazando en la expresión de  $\dot{e}$ :

$$\dot{e} = -ay + b\tilde{\theta}^T \phi + b\theta^{*T} \phi + a_m y_m - b_m r$$

Además,  $b\theta^{*T} \phi = b(\theta_1^* r - \theta_2^* y) = b_m r - a_m y + ay$ , resultando

$$\dot{e} = -ay + b\tilde{\theta}^T \phi + b_m r - a_m y + ay + a_m y_m - b_m r$$

$$\dot{e} = -a_m (y - y_m) + b\tilde{\theta}^T \phi$$

$$\boxed{\dot{e} = -a_m e + b\tilde{\theta}^T \phi; \quad b, a_m > 0}$$

Esta es una de las ecuaciones del error. La otra ecuación del error  $\dot{\tilde{\theta}} = \Theta(e, t, \tilde{\theta})$  se determinará del análisis de estabilidad.

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Considérense las dos ecuaciones del error y supóngase que tienen un equilibrio único en el origen. Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(e, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{b}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}$$

Su derivada temporal es

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}) &= e\dot{e} + \frac{b}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} = e(-a_m e + b \tilde{\theta}^T \phi) + \frac{b}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} = \\ &= -a_m e^2 + b \tilde{\theta}^T \phi e + \frac{b}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} = -a_m e^2 + b \tilde{\theta}^T \left( \phi e + \frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{\theta}} \right) \end{aligned}$$

Si se toma  $\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \phi e$  entonces resulta

$$\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0$$

lo que implica la estabilidad del equilibrio en el origen. Como  $\theta^* = \text{constante}$ ,  $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta}$  entonces resulta definida la **ley de adaptación** como

$$\boxed{\dot{\theta} = -\gamma \phi e}$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

De la estabilidad del equilibrio se concluye que las variables de estado de las ecuaciones del error,  $e, \tilde{\theta}$  son señales acotadas. Además, como la referencia  $r$  se elige como una señal acotada y el modelo de referencia es estable, su salida  $y_m$  resulta acotada. También, de  $e = y - y_m$ , como  $e, y_m$  son acotadas, resulta que  $y$  es acotada. Entonces el vector regresor  $\phi$  es acotado.

Ahora puede aplicarse el denominado *Lema de Barbalat*, que asegura que si una función temporal es uniformemente continua (continua con derivada primera acotada) y su integral absoluta es finita, la función tiende asintóticamente a cero con el tiempo. Aplicando el lema a la derivada temporal de la función de Lyapunov, se observa que

a)  $\dot{V}(t)$  es continua,

$\ddot{V} = -2a_m e \dot{e} = -2a_m e(-a_m e + b \tilde{\theta}^T \phi)$  es acotado pues  $e, \tilde{\theta}, \phi$  son acotados.

b)  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \dot{V}(\tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} [V(T) - V(0)]$ . Como  $V(t, e, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{b}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}$  es acotado pues  $e, \tilde{\theta}$  son acotados, entonces  $\lim_{T \rightarrow \infty} [V(T) - V(0)]$  es finito.

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Resulta que se cumplen las hipótesis del lema de Barbalat, pudiéndose concluir que

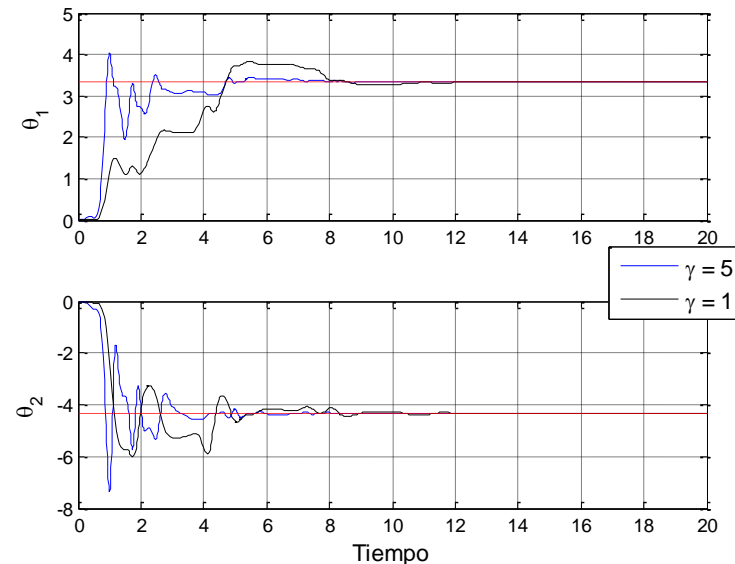
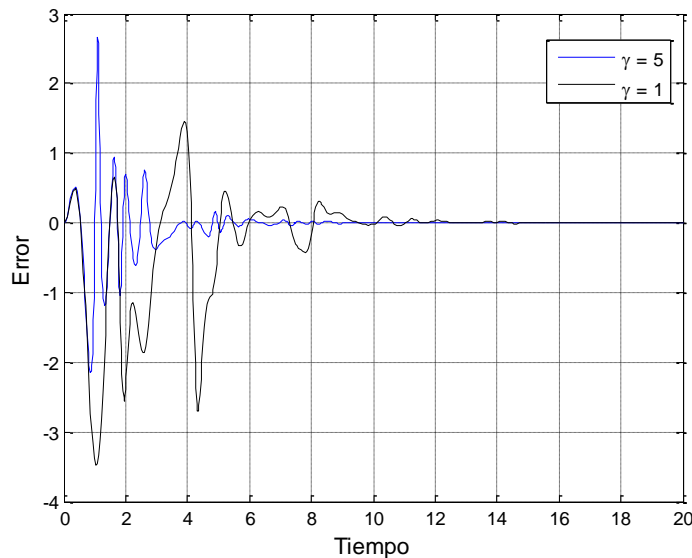
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-a_m e^2(t)) = 0$$

o sea

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

lo que significa que se cumple asintóticamente el objetivo de control adaptable con modelo de referencia.

Simulación:  $b_m = 10$ ;  $a_m = 2$ ;  $b = 3$ ;  $a = 15 \Rightarrow \theta_1^* = 3,33$ ;  $\theta_2^* = -4,33$



# 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

## 8.2 Linealización por realimentación

La linealización por realimentación tiende a cancelar las no linealidades de modo de obtener una dinámica lineal y así poder aplicar las técnicas de control lineal.

- Ejemplo de motivación:**

Dado el sistema de la figura

$$A(h)\dot{h} = u - a\sqrt{2gh}; \quad g : \text{gravedad}$$

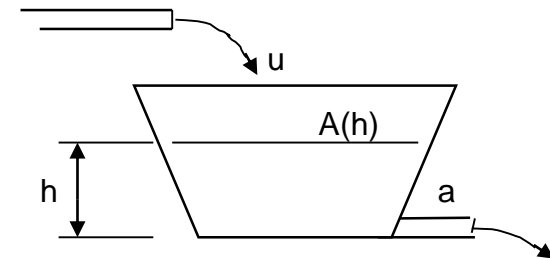


Figura 8.4

si se elige la acción de control:

$$u(t) = a\sqrt{2gh} + A(h)v$$

resulta  $\dot{\tilde{h}} = v$  (sistema *lineal*) con la señal  $v$ : entrada equivalente.

Ahora, tomando  $v = \alpha \tilde{h}$ ,  $\tilde{h} = h_d - h(t)$ , con  $h_d$  constante, resulta

$$\dot{\tilde{h}} = \alpha \tilde{h} \quad \dot{\tilde{h}} - \alpha \tilde{h} = 0$$

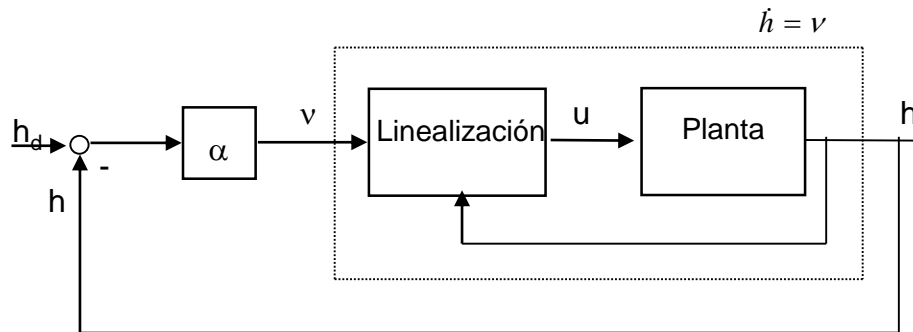
$$\dot{\tilde{h}} = \dot{h}_d - \dot{h} = -\dot{h}$$

$$\dot{\tilde{h}} + \alpha \tilde{h} = 0 \Rightarrow \text{para } \alpha > 0, \quad \tilde{h}(t) \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Para  $h_d(t)$  (seguimiento) el análisis es también válido, tomando

$$v = \dot{h}_d + \alpha \tilde{h}.$$



*Figura 8.5*

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Solución general**

La solución del ejemplo sólo puede aplicarse a sistemas que puedan ponerse en la siguiente forma (forma canónica):

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u$$
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

con  $u$ : entrada de control y la salida  $y=x$ . No aparecen derivadas de  $u$  en la ecuación dinámica del sistema.

En ecuación de estados:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(\mathbf{x}) \end{pmatrix} u$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Con

$$u = \frac{1}{b}(v - f), \quad b(\mathbf{x}) \neq 0$$

$$x^{(n)} = v$$

y tomando

$$\begin{aligned} v &= -k_0 x - k_1 \dot{x} - \dots - k_{n-1} x^{(n-1)} \\ \Rightarrow x^{(n)} + k_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + k_0 x &= 0 \end{aligned}$$

Si se eligen  $k_i$  tal que las raíces estén en el semiplano izquierdo:  $\Rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ .

- **Para seguimiento**  $[x_d(t)]$ :

$$\begin{aligned} v &= x_d^{(n)} + k_0 e + k_1 \dot{e} + \dots + k_{n-1} e^{(n-1)} \\ \Rightarrow k_0 e + k_1 \dot{e} + \dots + k_{n-1} e^{(n-1)} + e^{(n)} &= 0 \end{aligned}$$

Con  $k_i$  adecuadamente elegidos (por ejemplo todos positivos),  $e(t) \rightarrow 0$ .



## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- Ejemplo (Robótica):

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) = \tau$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = H^{-1}(-C\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}) + H^{-1}\tau$$

En esta ecuación,  $u = \tau$ ,  $\mathbf{x}^T = (q \quad \dot{q})$ . Si se usa la ley de control

$$\tau = H(\mathbf{q})\nu + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q})$$

$$\text{con } \nu = \ddot{\mathbf{q}}_d + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p\tilde{\mathbf{q}}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$$

Entonces:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \nu = \ddot{\mathbf{q}}_d + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p\tilde{\mathbf{q}}$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p\tilde{\mathbf{q}} = 0$$

$$\text{Si } K_v, K_p > 0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{q}}(t) \rightarrow \mathbf{0} \text{ con } t \rightarrow \infty$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Nota:** Si la forma canónica no es lineal en  $u$ , o sea en vez de ser

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix} u \quad \text{es} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix} g(u) \quad \text{con } b(x), g(u) \text{ separables}$$

también puede aplicarse el método anterior siempre que  $g(u)$  sea invertible, usando  $w=g(u) \rightarrow u=g^{-1}(w)$ . Por ejemplo, sea  $w=u^4$ ,  $u=w^{1/4}$ , que puede ser el caso de control de flujo con una válvula, donde  $u$  es la sección de apertura de la válvula.

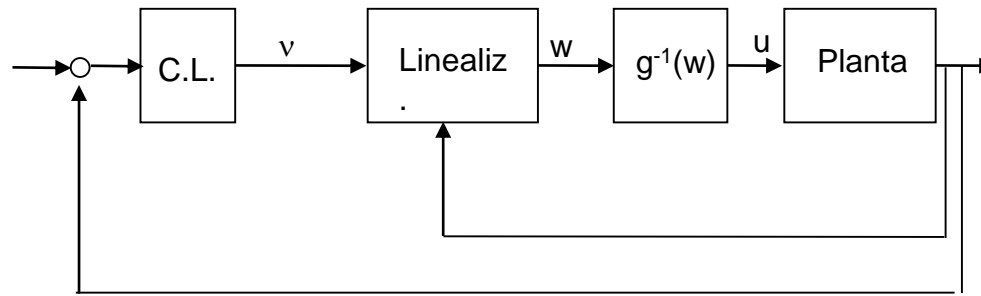


Figura 8.6

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Ejemplo**

Considere el sistema en ecuaciones de estados,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

$$y = h(\mathbf{x})$$

y el objetivo que la salida siga a la referencia manteniendo los estados acotados.

Se observa que no se tiene una relación directa entre la salida y la entrada. Para ello se debe derivar la salida hasta que aparezca la entrada. Por ejemplo sea el sistema,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^3 + u \\ u \end{bmatrix}$$

$$y = x_1$$

con el objetivo de control que la salida  $y$  siga a la referencia  $y_d(t)$ . Diferenciando la salida una vez,

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2^3 + u$$

que se encuentra en la forma canónica vista en los primeros ejemplos. Ahora puede elegirse,

$$u = -x_2^3 + v = -x_2^3 + \dot{y}_d(t) - e(t); \quad e(t) = y - y_d$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

por lo que en lazo cerrado resulta,

$$\dot{e}(t) + e(t) = 0$$

que garantiza convergencia exponencial del error de control a cero. Sin embargo, la linealización se ha realizado con una parte de la dinámica del sistema. Sustituyendo la entrada  $u$  en la segunda ecuación de estado del sistema,

$$\dot{x}_2 = u; \quad \dot{x}_2 + x_2^3 = \dot{y}_d - e$$

resulta lo que se denomina la **dinámica interna** del sistema, esto es, la dinámica que no es observada por la relación entrada-salida. Esta dinámica debe ser tal que garantice el acotamiento de las variables de estado involucradas,  $x_2$  en el ejemplo. Como el error y la referencia son acotados, por ejemplo por el valor  $F$ , resulta que

$$|x_2| \leq F^{1/3}$$

pues,  $\dot{x}_2 < 0$  cuando  $x_2 > F^{1/3}$  y  $\dot{x}_2 > 0$  cuando  $x_2 < -F^{1/3}$ .

Puede verse que, si en las ecuaciones dinámicas se considera la segunda ecuación de estados como,

$$\dot{x}_2 = -u$$

la dinámica interna habría resultado inestable.

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Procedimiento de linealización entrada-salida:**
  1. Diferenciar la salida hasta que aparezca la entrada (grado relativo del sistema).
  2. Elegir una entrada tal que cancele las no linealidades y diseñe un control lineal sobre la misma.
  3. Verificar la estabilidad de la dinámica interna del sistema.
- **Definiciones matemáticas (geometría diferencial)**

Los conceptos de linealización por realimentación se encuentran fundamentados matemáticamente en la denominada geometría diferencial. A continuación se dan algunas definiciones en este campo.
- **Campo vectorial:** función suave  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{f} : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ . Una función es suave si tiene derivadas continuas hasta un orden requerido.
- **Gradiente:** dada una función escalar suave  $h(\mathbf{x})$ , el gradiente (vector fila) de  $h$  es
- **Jacobiano:** dado un campo vectorial  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , el Jacobiano (matriz) se define como

$$\nabla h = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}; \quad (\nabla h)_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

$$\nabla \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}; \quad (\nabla \mathbf{f})_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Derivadas de Lie:**

Dados una función escalar suave  $h(\mathbf{x})$ ,  $h : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  y un campo vectorial  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{f} : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ , la derivada de Lie de  $h$  respecto de  $\mathbf{f}$  es un escalar definido como,

$$L_{\mathbf{f}}h = \nabla h \mathbf{f}$$

o sea la derivada direccional de  $h$  en la dirección de  $\mathbf{f}$ .

- **Aplicación recursiva de las derivadas de Lie.**

$$L_{\mathbf{f}}^0 h = h$$

$$L_{\mathbf{f}}^1 h = \nabla h \mathbf{f}$$

$$L_{\mathbf{f}}^2 h = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}h) = \nabla(L_{\mathbf{f}}h)\mathbf{f}$$

...

$$L_{\mathbf{f}}^i h = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{i-1}h) = \nabla(L_{\mathbf{f}}^{i-1}h)\mathbf{f}$$

- **Ejemplo:** Dado el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  y la función candidata de Lyapunov  $V$ , su derivada temporal puede expresarse como  $\dot{V} = L_{\mathbf{f}}V$ .

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Difeomorfismo:** Una función  $\phi(\mathbf{x})$ ,  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida en una región  $\Omega$  es un difeomorfismo si es suave y tiene inversa  $\phi^{-1}$  suave. Si  $\Omega$  es todo el espacio  $\mathbb{R}^n$  el difeomorfismo es global.
- **Lema:** Sea una función suave  $\phi(\mathbf{x})$  definida en la región  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Si el jacobiano  $\nabla \phi$  no es singular en algún punto de  $\Omega$ , entonces  $\phi(\mathbf{x})$  define un difeomorfismo local en una subregión de  $\Omega$ .

Un difeomorfismo puede ser usado para transformar un sistema no lineal en otro en términos de un nuevo conjunto de variables de estado, según  $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$ .

- **Linealización entrada-salida general**

Considerando el sistema de una entrada y una salida descrito por la ecuaciones de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$$

$$y = h(\mathbf{x})$$

La linealización entrada-salida significa generar una relación diferencial lineal entre la salida  $y$  y una nueva entrada  $v$ . La técnica consiste en realizar sucesivas diferenciaciones de la función de salida. Así,

$$\dot{y} = \nabla h(\mathbf{f} + \mathbf{g}u) = L_f h(\mathbf{x}) + L_g h(\mathbf{x})u$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Si  $L_g h(\mathbf{x}) \neq 0$  en un punto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  de la región de interés  $\Omega$ , se verifica también por continuidad en una vecindad de  $\mathbf{x}_0$ . Entonces,

$$u = \frac{1}{L_g h} (v - L_f h)$$

produce una relación lineal entre la salida y la entrada auxiliar  $v$ :  $\dot{y} = v$ .

Si  $L_g h(\mathbf{x}) = 0$  para todo punto en la región de interés  $\Omega$ , se sigue diferenciando la salida,

$$y^{(i)} = L_f^i h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{i-1} h(\mathbf{x}) u$$

hasta que para algún entero  $r$ ,  $L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0$  para algún punto en la región de interés  $\Omega$ . En esta región, la ley de control

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (-L_f^r h + v)$$

aplicada a  $y^{(r)} = L_f^r h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) u$  produce la relación lineal  $y^{(r)} = v$ .

El número  $r$  de diferenciaciones de la salida requeridas para que aparezca la entrada  $u$  se denomina el **grado relativo del sistema** (que es una extensión del mismo concepto en sistemas lineales). 355



## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- Definición (grado relativo)

Un sistema de una entrada y una salida se dice de grado relativo  $r$  en la región  $\Omega$ , si para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$  se verifica,

$$L_g L_f^i h(\mathbf{x}) = 0 \quad 0 \leq i < r-1$$

$$L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0$$

- Forma normal

Un sistema de grado relativo  $r$  puede transformarse usando la salida y sus derivadas  $y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}$  como parte del vector de estados del sistema. O sea, definiendo

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_r]^T = [y \quad \dot{y} \quad \dots \quad y^{(r-1)}]^T$$

en una región  $\Omega$  puede definirse la **forma normal** del sistema como,

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_r \\ a(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\psi}) + b(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\psi})u \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{w}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\psi})$$

$$y = \mu_1$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Puede probarse que siempre esta representación es posible, o sea existe un difeomorfismo que permite obtenerla. Se observa que la dinámica del sistema se ha **descompuesto** en dos, una **externa de entrada-salida** que permite obtener una relación lineal entre la salida  $y$  y una entrada auxiliar  $v$ , y una dinámica que no depende de la entrada  $u$  y que representa la **dinámica interna**. Como un buen control debe tener en cuenta ambas, es importante que la dinámica interna se comporte bien, o sea que conduzca a estados acotados.

- **Estabilización local asintótica**

Dado el sistema de grado relativo  $r$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$$

$$y = h(\mathbf{x})$$

Tomando:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} y} (-L_f^r y + v) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} y} (-L_f^r y - k_0 y - k_1 \dot{y} - \dots - k_{r-1} y^{r-1})$$

se conduce, con los coeficientes adecuadamente elegidos, al sistema lineal estable

$$k_0 y + k_1 \dot{y} + \dots + k_{r-1} y^{r-1} + y^{(r)} = 0$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Si además, en el manifold definido por  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  (superficie suave de dimensión  $n-r$ ) se verifica que  $\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{w}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi})$  tiene un comportamiento asintóticamente estable, la ley de control propuesta estabiliza el sistema completo localmente.

La dinámica  $\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{w}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi})$  se denomina la **dinámica cero** del sistema. Si esta dinámica tiene un comportamiento asintóticamente estable, se dice que el sistema es de **fase mínima**.

- **Control de seguimiento**

Considérese el sistema de grado relativo  $r$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$$

$$y = h(\mathbf{x})$$

y el problema que la salida siga a una referencia  $y_d(t)$ . Se definen,

$$\boldsymbol{\mu}_d = \begin{bmatrix} y_d & \dot{y}_d & \dots & y_d^{r-1} \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) = \boldsymbol{\mu}(t) - \boldsymbol{\mu}_d(t)$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Se elige la ley de control,

$$\nu = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} y} (-L_f^r y + \nu) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} y} (-L_f^r y + y_d^{(r)} - k_{r-1} \tilde{\mu}_r - \dots - k_0 \tilde{\mu}_1)$$

y se verifica que la dinámica interna en la trayectoria de interés,

$$\dot{\psi}_d = w(\mu_d, \psi_d); \quad \psi_d(0) = 0$$

tiene solución acotada y asintóticamente convergente. Entonces puede asegurarse que se cumple el objetivo de control de seguimiento,

$$\tilde{\mu}(t) \rightarrow 0 \quad \text{exponencialmente.}$$

# 5. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- Ejemplo: control coordinado de robots móviles (líder y seguidor)**

## Objetivo de control

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d_d - d) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\varphi} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_d - \varphi) = 0$$

## Modelo

$$\dot{e} = -v_T \cos \theta + v \cos \tilde{\varphi}$$

$$\dot{\tilde{\varphi}} = \omega + v_T \frac{\sin \theta}{d} + v \frac{\sin \tilde{\varphi}}{d}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\tilde{\varphi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_T \cos \theta \\ \frac{v_T \sin \theta}{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \tilde{\varphi} \\ \frac{\sin \tilde{\varphi}}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}$$

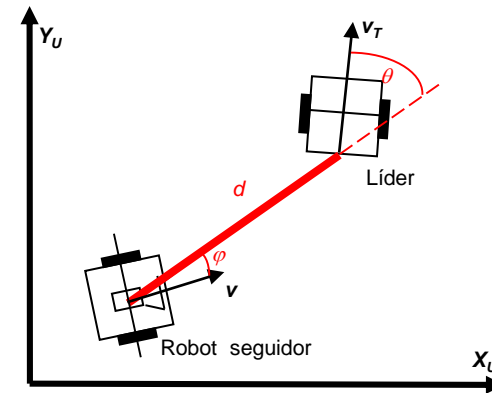


Figura 5.6

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} e \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}$$

## 5. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

$$\dot{y}_1 = \nabla \mathbf{h}_1 \mathbf{f} + \nabla \mathbf{h}_1 \mathbf{g} \mathbf{u}$$

$$\dot{y}_2 = \nabla \mathbf{h}_2 \mathbf{f} + \nabla \mathbf{h}_2 \mathbf{g} \mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_T \cos \theta \\ v_T \frac{\sin \theta}{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \tilde{\varphi} & 0 \\ \frac{\sin \tilde{\varphi}}{d} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

*Grado relativo dos (no hay dinámica interna)*

**Ley de control de linealización:**

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})[\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{x})]$$

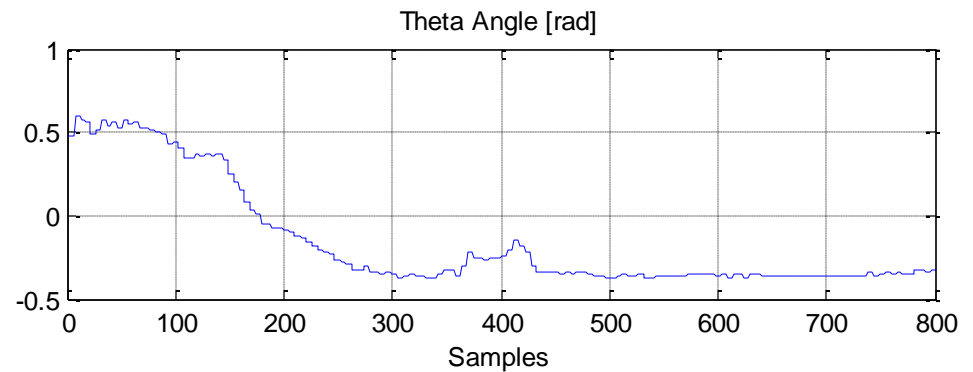
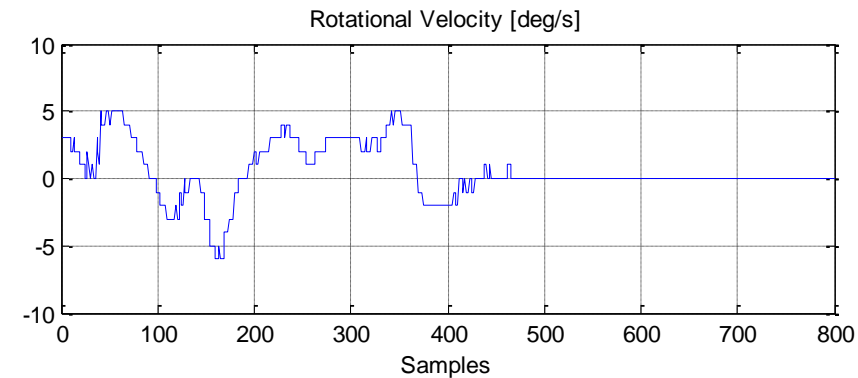
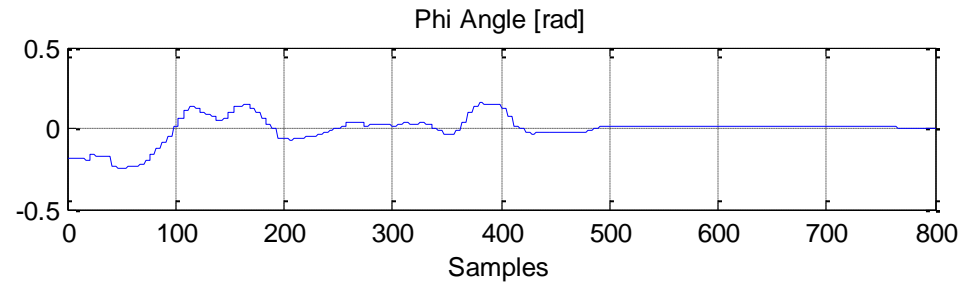
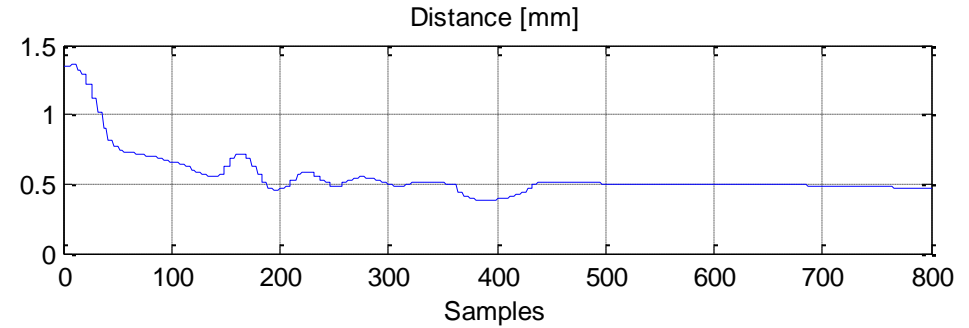
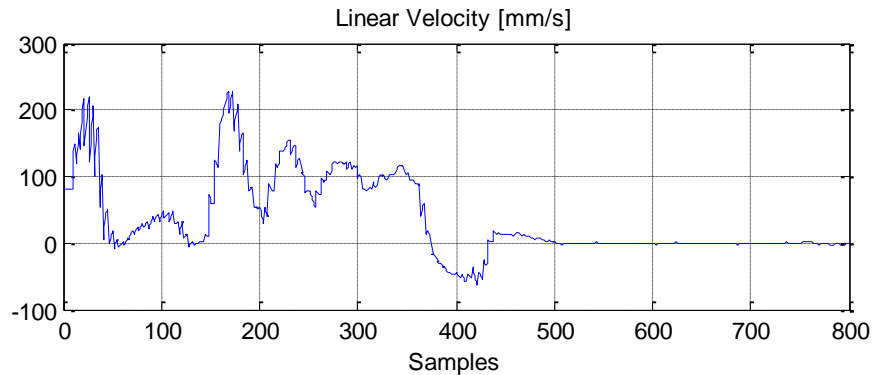
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos \tilde{\varphi}} & 0 \\ -\frac{\sin \tilde{\varphi}}{d \cos \tilde{\varphi}} & 1 \end{bmatrix} (-\mathbf{K}\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

$$v = \frac{1}{\cos \tilde{\varphi}} [-k_1 e + v_T \cos \theta]$$

$$\omega = -\frac{\sin \tilde{\varphi}}{d \cos \tilde{\varphi}} [-k_1 e + v_T \cos \theta] - k_2 \tilde{\varphi} - \frac{v_T \sin \theta}{d} = -\frac{\sin \tilde{\varphi}}{d} v - k_2 \tilde{\varphi} - \frac{v_T \sin \theta}{d}$$

# 5. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

## Resultados experimentales



## 5. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

### Resultados experimentales

Video:





# 5. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Ejemplo: Control de trayectoria de un robot móvil (Lawton, 2003):**

**Modelo (cinemática y dinámica)**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}\mathbf{u} \\ \mathbf{h} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

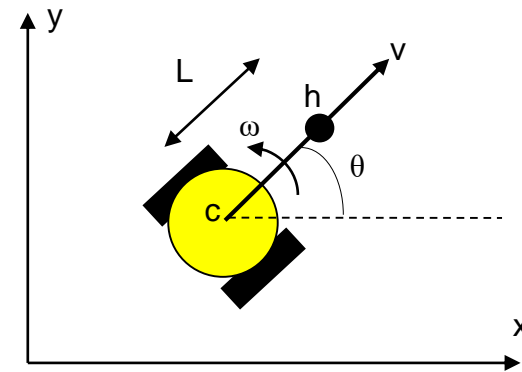


Figura 5.7

Derivadas de tiempo de la salida:

$$\dot{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -L \sin \theta \\ \sin \theta & L \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} -v\omega \sin \theta - L\omega^2 \cos \theta \\ v\omega \cos \theta - L\omega^2 \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos \theta & -\frac{L}{j} \sin \theta \\ \frac{1}{m} \sin \theta & \frac{L}{j} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix}$$

## 5. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Defina el mapa:

con inversa:

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + L \cos \theta \\ y + L \sin \theta \\ v \cos \theta - L \omega \sin \theta \\ v \sin \theta + L \omega \cos \theta \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} z_1 - L \cos z_5 \\ z_2 - L \sin z_5 \\ z_5 \\ z_3 \cos z_5 + z_4 \sin z_5 \\ -\frac{1}{L} z_3 \sin z_5 + \frac{1}{L} z_4 \cos z_5 \end{bmatrix}$$

La dinámica en las coordenadas transformadas  $\mathbf{z}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \omega \sin \theta - L \omega^2 \cos \theta \\ v \omega \cos \theta - L \omega^2 \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos \theta & -\frac{L}{j} \sin \theta \\ \frac{1}{m} \sin \theta & \frac{L}{j} \cos \theta \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\dot{z}_5 = -\frac{1}{L} z_3 \sin z_5 + \frac{1}{L} z_4 \cos z_5$$

## 5. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Tomando la ley de control como:  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos \theta & -\frac{L}{j} \sin \theta \\ \frac{1}{m} \sin \theta & \frac{L}{j} \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \left[ \mathbf{v} - \begin{bmatrix} -v\omega \sin \theta - L\omega^2 \cos \theta \\ v\omega \cos \theta - L\omega^2 \sin \theta \end{bmatrix} \right]$

La dinámica del sistema de lazo cerrado resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{v}$$

$$\dot{z}_5 = -\frac{1}{L} z_3 \sin z_5 + \frac{1}{L} z_4 \cos z_5$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Si se toma:

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{K}_d \dot{\tilde{\mathbf{y}}} \quad \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d$$

Entonces la dinámica linealizada queda como:

$$\ddot{\mathbf{h}} = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{h}} + \mathbf{K}_d \dot{\tilde{\mathbf{h}}} + \ddot{\tilde{\mathbf{h}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \tilde{\mathbf{h}}(t); \quad \tilde{\mathbf{h}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$$

La dinámica cero (dinámica interna con  $z_1, z_2, z_3, z_4 = 0$ ) es  $\dot{z}_5 = 0$  la cual es **estable**.

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Nota (incertidumbres en el modelo):**

El método de la linealización por realimentación se basa en un conocimiento preciso del modelo. El modelo puede tener incertidumbres de dos tipos:

*a) Incertidumbres estructuradas o paramétricas:* se conoce la estructura del modelo pero se tiene un conocimiento imperfecto de los parámetros incluidos en el modelo. Por ejemplo coeficientes de fricción no bien conocidos.

*b) Incertidumbres no estructuradas o de dinámicas no modeladas:* ésta afecta a la estructura del modelo matemático. Por ejemplo fricción no modelada o defectuosamente modelada, como es el caso de asumirla lineal cuando en realidad es más compleja.

Supóngase que en el modelo canónico conocido las incertidumbres paramétricas son expresadas por términos estimados:

$$x^{(n)} = \hat{f}(\mathbf{x}) + \hat{b}(\mathbf{x})u$$

El modelo del sistema incluye los términos exactos y además la incertidumbre estructural  $d(t)$ :

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u + d(t)$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Tomando la ley de control en base al modelo conocido:  $u = \frac{1}{\hat{b}}(v - \hat{f})$ , con  $\hat{b} \neq 0$  resulta la siguiente ecuación de lazo cerrado:

$$b\hat{b}^{-1}(v - \hat{f}) = x^{(n)} - f - d$$

$$x^{(n)} = f + d + b\hat{b}^{-1}(v - \hat{f}) + v - v$$

$$x^{(n)} - v = (b\hat{b}^{-1} - 1)v + f + d - b\hat{b}^{-1}\hat{f} = \eta(x, v, d)$$

Sustituyendo  $v$  en función de los errores de control:

$$x^{(n)} - x_d^{(n)} + k_v \dot{e} + k_p e = \ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = \eta(x, v, d)$$

Entonces no se puede afirmar que el error converge a cero y se requiere un análisis del término  $\eta$ . Obviamente, si se conoce exactamente el modelo y no se tienen incertidumbres estructurales, se recupera la ecuación homogénea y el error converge a cero.

- Para los casos de modelos con incertidumbres importantes, se utilizan los diseños de **control robusto** y de **control adaptable**. A continuación se describe un diseño particular de control robusto. En el control adaptable se realiza una estimación en línea del modelo del sistema.

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

### 8.3 Control deslizante

El control deslizante es un diseño de control robusto (escasa sensibilidad a las incertidumbres del modelo, lo que asegura buen desempeño ante éstas).

Considérese el modelo del sistema en la forma:

$$\dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u$$

Se define una superficie de deslizamiento  $s(t)$  en el espacio de estados mediante la ecuación

(escalar)

$$s(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x} = 0; \quad \tilde{x} = x - x_d, \quad \lambda > 0$$

Por ejemplo para  $n=2$ ,  $s = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} = 0$   
y puede asegurarse que

$$\tilde{x}(t) \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow \infty$$

Entonces el problema de obtener un error de control igual a cero se reduce al de mantener al sistema en la superficie  $s(t)$ . De este modo

se ha reducido la complejidad del problema, de una ecuación de orden  $n$  del sistema a la ecuación de la superficie deslizante.

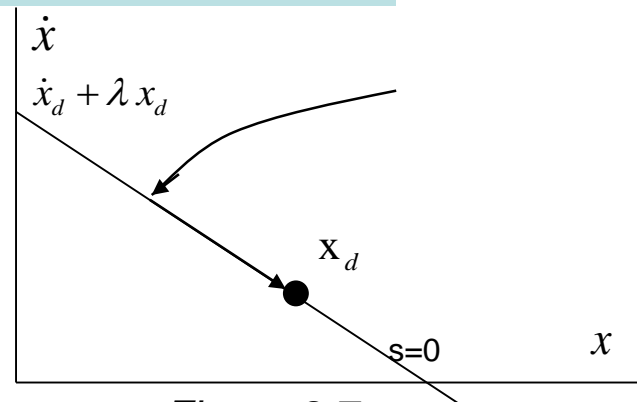


Figura 8.7

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Si las condiciones iniciales del sistema coinciden con valores deseados de  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_d(0)$$

entonces  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = 0$ ,  $s(t) = 0, \forall t \geq 0$  y el sistema permanece en la superficie deslizante, por lo que los errores permanecen nulos.

Cuando la condición inicial no coincide con valores deseados del estado, debe asegurarse que el sistema tenderá hacia la superficie deslizante y la alcanzará en un tiempo finito (**modo de alcance**). Una vez en ella, permanecerá en la misma (**modo de deslizamiento**). O sea, que la superficie deslizante sea un *invariante* del sistema. Esto se consigue eligiendo la ley de control  $u$  tal que se verifique la denominada **condición de deslizamiento**:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|$$

y además que  $\dot{s} = 0$ .

Esta condición establece que la distancia al cuadrado a la superficie deslizante disminuye a lo largo de las trayectorias (tiende hacia la superficie).

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Integrando esta expresión entre el instante inicial y el tiempo en que alcanza la superficie ( $t_r$ ) se obtiene una cota para este tiempo de alcance:

$$s(t_r) - s(0) \leq -\eta t_r, \quad s(t_r) = 0$$
$$t_r \leq \frac{s(0)}{\eta}$$

Una vez en el modo de deslizamiento, los errores de seguimiento convergen exponencialmente a cero con una constante de tiempo  $(n-1)/\lambda$ , de acuerdo a la ecuación de  $s(t)$ .

Con el objeto de tener en cuenta la presencia de incertidumbres del modelo y de perturbaciones, la ley de control debe ser discontinua a través de la superficie deslizante. Esto conduce al fenómeno de "*chattering*" o conmutaciones rápidas de la acción de control, que es indeseable por implicar grandes esfuerzos de control y excitar dinámicas parásitas de alta frecuencia.



## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Ejemplo:**

Considérese el sistema de segundo orden:  $\ddot{x} = f + u$   
donde  $f$  está estimada como  $\hat{f}$ . Además se supone que el error de estima de  $f$  está

acotado por una función  $F(x, \dot{x}) : |f - \hat{f}| \leq F$

Por ejemplo, si  $f = a(t)\dot{x}\sin x$ ,  $1 \leq a(t) \leq 2$ , se puede considerar la estima

$\hat{f} = 1.5\dot{x}\sin x$ , y entonces resulta la posible cota  $F = |\dot{x}\sin x|$ .

Ahora se define la superficie de deslizamiento,  $s = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}$

Derivando respecto del tiempo:

$$\dot{s} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}} = f + u - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}}$$

La mejor aproximación para la acción de control que logre  $\dot{s} = 0$  es:

$$\hat{u} = -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}}$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Para satisfacer la condición de deslizamiento, se debe agregar un término discontinuo:

$$u = \hat{u} - k \operatorname{sgn}(s)$$

Ahora,  $k$  debe elegirse suficientemente grande como para garantizar que se cumple la condición de deslizamiento:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = \dot{s} s = \left[ f - \hat{f} - k \operatorname{sgn}(s) \right] s = (f - \hat{f})s - k|s|$$

tomando,

$$k = F + \eta$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta|s|$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Ejemplo:**

Ahora considérese el sistema:  $\ddot{x} = f + bu$

donde la ganancia de control  $b$  es incierta pero con cotas:

$$0 < b_{\min} \leq b \leq b_{\max}$$

Como  $b$  es un valor multiplicativo, se elige la estima como la media geométrica,

$$\hat{b} = \sqrt{b_{\min} b_{\max}}. \text{ Resultan las siguientes cotas, } \beta^{-1} \leq \frac{\hat{b}}{b} \leq \beta$$

$$\beta = \sqrt{\frac{b_{\max}}{b_{\min}}}$$

Ahora se calcula la acción de control. Para  $\dot{s} = 0$  la mejor estima de  $u$  es:

$$\hat{u} = \hat{b}^{-1} \left[ -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} \right]$$

Considerando que hay incertidumbres se agrega el término discontinuo:

$$u = \hat{b}^{-1} \left[ -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - k \operatorname{sgn}(s) \right]$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Ahora corresponde calcular el valor de  $k(\mathbf{x})$  para que se verifique la condición de deslizamiento:

$$\dot{s} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} = f + bu - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}}$$

$$\dot{s} = f + b\hat{b}^{-1} \left[ -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - k \operatorname{sgn}(s) \right] - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}}$$

$$\dot{s} = \left( f - b\hat{b}^{-1} \hat{f} \right) + \left( 1 - b\hat{b}^{-1} \right) \left( -\ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right) - b\hat{b}^{-1} k \operatorname{sgn}(s)$$

La condición de deslizamiento,

$$\dot{s}s = \left\{ \left( f - b\hat{b}^{-1} \hat{f} \right) + \left( 1 - b\hat{b}^{-1} \right) \left( -\ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right) - b\hat{b}^{-1} k \operatorname{sgn}(s) \right\} s \leq -\eta |s|$$

se verifica si se toma:  $k \geq \left| \hat{b}b^{-1} f - \hat{f} + \left( \hat{b}b^{-1} - 1 \right) \left( -\ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right) \right| + \eta \hat{b}b^{-1}$

$$f = \hat{f} + (f - \hat{f})$$

$$k \geq \left| \hat{b}b^{-1} (f - \hat{f}) + \left( \hat{b}b^{-1} - 1 \right) \left( \hat{f} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \right) \right| + \eta \hat{b}b^{-1}$$

$$|f - \hat{f}| \leq F, \quad \hat{b}b^{-1} \leq \beta$$

$$k \geq \beta(F + \eta) + (\beta - 1) \left| \hat{f} - \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} \right|$$

Se observa que ha aumentado el valor de  $k$  respecto del ejemplo anterior por la incertidumbre en  $b$ .

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- Ejemplo (robótica):

$$\tau = H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + d(t)$$

con  $d(t)$  un vector de perturbación

$$d(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) \\ \dots \\ d_n(t) \end{pmatrix}$$

La ecuación dinámica del robot manipulador puede escribirse como expresión lineal de los parámetros:

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta + d(t)$$

Existe incertidumbre en los parámetros  $\theta$  y en la perturbación  $d(t)$ , pero se conocen cotas de las mismas:

$$|d_i(t)| \leq D_i, i = 1 \dots n$$

$$|\tilde{\theta}_j| \leq A_j, j = 1 \dots p, \quad \tilde{\theta}_j = \hat{\theta}_j - \theta_j$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Siguiendo el procedimiento de diseño:

$$s = \dot{\tilde{q}} + \lambda \tilde{q}$$

$$\dot{s} = \ddot{q} - \ddot{q}_d + \lambda \dot{\tilde{q}} = H^{-1}(\tau - C\dot{q} - g - d) - \ddot{q}_d + \lambda \dot{\tilde{q}} \stackrel{!}{=} 0$$

Resulta la siguiente estima para la ley de control

$$\hat{\tau} = \hat{H}[\ddot{q}_d - \lambda \dot{\tilde{q}}] + \hat{C}\dot{q} + \hat{g}$$

Ahora se desea contemplar las incertidumbres y también aprovechar las propiedades físicas del robot vistas en un ejemplo de la sección 7.1. Por ello se propone la siguiente ley de control:

$$\tau = \hat{H}[\ddot{q}_d - \lambda \dot{\tilde{q}}] + \hat{C}[\dot{q} - s] + \hat{g} - K \operatorname{sgn}(s)$$

con

$$K \operatorname{sgn}(s) = \begin{pmatrix} k_1 \operatorname{sgn}(s_1) \\ \dots \\ k_n \operatorname{sgn}(s_n) \end{pmatrix} \quad K = \operatorname{diag}(k_i)$$

Denominando  $a = \ddot{q}_d - \lambda \dot{\tilde{q}}$  y teniendo en cuenta

la expresión lineal en los parámetros:  $\tau = Y(a, q, \dot{q})\hat{\theta} - K \operatorname{sgn}(s)$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Ahora corresponde hacer cumplir la condición de deslizamiento que para el caso del robot conviene expresarla del siguiente modo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^T H s = s^T H \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{H} s \leq -\eta \sum_i |s_i|$$

donde:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \left\{ H^{-1} (Y(a, q, \dot{q}) \hat{\theta} - K \operatorname{sgn}(s) - C \dot{q} - g - d) - \ddot{q}_d + \lambda \dot{\tilde{q}} \right\} = \\ &= H^{-1} (Y \hat{\theta} - H a + H a - C \dot{q} + C s - C s - g - d) - H^{-1} K \operatorname{sgn}(s) - (\ddot{q}_d - \lambda \dot{\tilde{q}}) = \\ &= H^{-1} (Y \hat{\theta} - Y \theta + H a - C s - d) - H^{-1} K \operatorname{sgn}(s) - (\ddot{q}_d - \lambda \dot{\tilde{q}}) = \\ &= H^{-1} (Y \tilde{\theta} - C s) - H^{-1} d - H^{-1} K \operatorname{sgn}(s) + a - (\ddot{q}_d - \lambda \dot{\tilde{q}}) = \\ &= H^{-1} (Y \tilde{\theta} - C s) - H^{-1} d - H^{-1} K \operatorname{sgn}(s) \end{aligned}$$

Resulta entonces:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^T H s = s^T H \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{H} s =$$

$$= s^T Y \tilde{\theta} - s^T C s - s^T d - s^T K \operatorname{sgn}(s) + \frac{1}{2} s^T \dot{H} s \leq -\eta \sum_i |s_i| \quad 378$$

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

Por la propiedad de antisimetría de la matriz  $\frac{\dot{H}}{2} - C$

$$\text{resulta: } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^T H s = s^T Y \tilde{\theta} - s^T d - s^T K \operatorname{sgn}(s) \leq -\eta \sum_i |s_i|$$

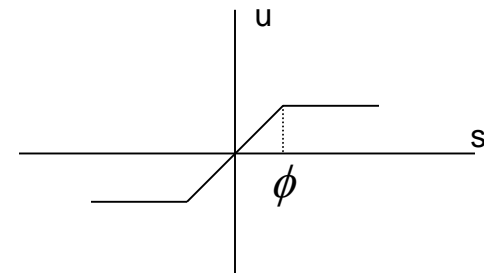
Para cumplir la condición de deslizamiento se requiere que:

$$k_i \geq \sum_j |Y_{i,j}| A_j + D_i + \eta$$

- **Nota ("chattering"):** El efecto de "chattering" o de conmutaciones rápidas alrededor de la superficie de deslizamiento es un fenómeno intrínseco de este tipo de controladores. Por lo general es indeseable pues implica grandes esfuerzos de control y puede excitar dinámicas de alto orden. Para evitarlo se sustituye la función discontinua del signo por una función de saturación:

$$-k \operatorname{sat}(s / \phi)$$

que introduce una zona alrededor de la superficie deslizante, donde puede encontrarse la trayectoria.



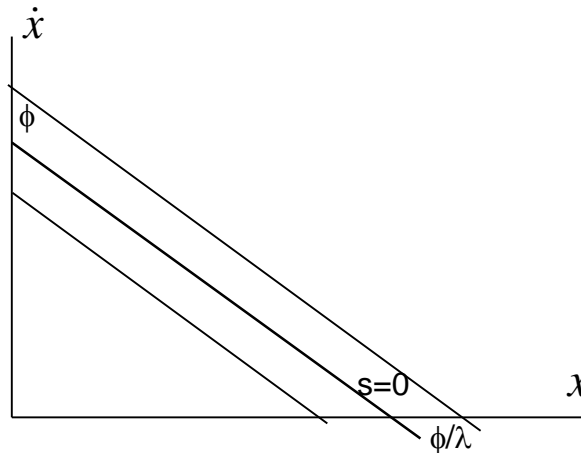


## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

El ancho de esta región está dada por  $\phi$ :

$$B(t) = \{\mathbf{x}, |s(\mathbf{x}, t)| \leq \phi\}, \quad \phi > 0$$

Esto introduce un error de control, que es el precio de obtener acciones de control más suaves.



*Figura 8.8*

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

- **Cálculo de los errores de control**

Cuando se utiliza una función de saturación para evitar las conmutaciones rápidas, se admite un error de control que puede calcularse de la siguiente manera.

$$\dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} = \phi$$

$$V = \frac{\tilde{x}^2}{2}$$

$$\dot{V} = \tilde{x} \dot{\tilde{x}} = \tilde{x}(\phi - \lambda \tilde{x}) = -\lambda \tilde{x}^2 + \phi \tilde{x}$$

Los errores permanecen en la región que no verifica  $\dot{V} < 0$ , o sea

$$\lambda \tilde{x}^2 \leq \phi \tilde{x}$$

$$\|\tilde{x}\| \leq \frac{\phi}{\lambda}$$

También, de un análisis de cotas sobre la ecuación del error,

$$\|\dot{\tilde{x}}\| \leq 2\phi$$

# 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

## 8.4 Ejercicios

**8.1** Para el caso presentado en "Diseño de un controlador (regulación a cero)" y "Diseño de un controlador (posicionamiento)", estudiar si se puede probar la convergencia asintótica de los errores de control a cero (estabilidad asintótica).

**8.2** Para el sistema de control adaptable de una planta lineal, realizar simulaciones digitales para verificar el comportamiento del sistema de control y la evolución de los parámetros estimados. Elegir valores para los parámetros de la planta y del controlador.

**8.3** Para el sistema de péndulo con fricción, calcular el control de linealización por realimentación para seguimiento de una referencia de movimiento angular.

**8.4** Para el siguiente sistema que representa la dinámica de un vehículo submarino,

$$m\ddot{x} + c\dot{x}|\dot{x}| = u$$

obtenga la ley de control de deslizamiento asumiendo incertidumbre en la masa  $m$  y en el coeficiente de fricción  $c$ .

## 8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL

### Revisión

- Diseño usando Lyapunov: condiciones para que la función candidata sea función de Lyapunov.
- Linealización por realimentación: dos lazos, uno de linealización y otro de control del sistema lineal resultante.
- Control deslizante: llevar (alcance) y mantener (deslizamiento) al sistema en una superficie deslizante, donde converge a los valores deseados del vector de estados.