7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

El análisis de entrada-salida de sistemas dinámicos tiene un desarrollo más reciente que el análisis de estabilidad de Lyapunov. Por ejemplo, en el área de los sistemas de control adaptable se usa desde los años 70. Mientras el análisis de Lyapunov está centrado en las ecuaciones diferenciales de estado del sistema y hace referencia a su evolución temporal, el análisis de entrada-salida considera los sistemas como operadores que mapean espacios funcionales de entrada en espacios funcionales de salida. Ambos análisis están vinculados pero no son equivalentes. Por consiguiente pueden dar información complementaria sobre el sistema bajo estudio.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

7.1 Definiciones de Espacios de Funciones

- **Espacios L_p**

a) Para $p \in [1,\infty)$

Para todo $p \in [1,\infty)$ se define el espacio de funciones L_p como

$$L_p = \left\{ f : \Re^+ \to \Re \,/\, \int_0^\infty \left| f(\tau) \right|^p d\tau < \infty \right\}$$

y el espacio L_p^n como

$$L_p^n = \left\{ f : \Re^+ \to \Re^n \,/\, \int_0^\infty \left\| f(\tau) \right\|^p d\tau < \infty \right\}$$

b) Para $p=\infty$

El espacio de funciones L_∞ se define como

$$L_\infty = \left\{ f : \Re^+ \to \Re \,/\, \sup_\tau \left| f(\tau) \right| < \infty \right\}$$

y el espacio L_∞^n como

$$L_\infty^n = \left\{ f : \Re^+ \to \Re^n \,/\, \sup_\tau \left\| f(\tau) \right\| < \infty \right\}$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Ejemplos:**

$$f(t) = e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0$$

$$\int_0^{\infty} |f(\tau)|^p d\tau = \int_o^{\infty} e^{-\alpha p \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha p} < \infty$$

$$\sup_{\tau} \left| e^{-\alpha \tau} \right| = 1$$

por lo que $f(t) \in L_p$, L_∞.

$$f(t) = a \operatorname{sen} \omega t$$

$$\sup_{\tau} | f(\tau) | = a$$

por lo que $f(t) \in L_\infty$.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Norma**

a) Para *p*∈[1,∞)

$$\|\cdot\|_p : L_p \to \Re^+, \qquad \|f(.)\|_p = \left(\int_0^\infty |f(\tau)|^p d\tau\right)^{1/p}$$

b) Para *p*=∞

$$\|f(.)\|_\infty = \sup_\tau |f(\tau)|$$

- **Ejemplo:**

$$\|e^{-t}\|_1 = 1, \quad \|e^{-t}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \|e^{-t}\|_\infty = 1$$

- **Desigualdad de Minkowski**

Sea $p \in [1,\infty]$ y $f(.)$, $g(.) \in L_p$. Entonces $(f(.)+g(.)) \in L_p$ y se verifica

$$\|f(.)+g(.)\|_p \leq \|f(.)\|_p + \|g(.)\|_p$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Observación:**

  Para cada $p \in [1,\infty]$, $(L_p, \|.\|_p)$ es un espacio vectorial normado y completo (**Banach**).

- **Desigualdad de Hölder**

  Sea $p \in [1,\infty]$, $q \in [1,\infty]$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

($p=\infty$ si $q=1$). Suponga que $f(.) \in L_p$, $g(.) \in L_q$. Entonces la función $f(t)g(t) \in L_1$ y

$$\int_0^\infty |f(t)g(t)| dt \le \left[\int_0^\infty |f(t)|^p dt \right]^{1/p} \left[\int_0^\infty |g(t)|^q dt \right]^{1/q}$$

o bien

$$\|f(.)g(.)\|_1 \le \|f(.)\|_p \|g(.)\|_q$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Función truncada**

Sea $f : \Re^+ \to \Re$. Para todo $T \geq 0$, f_T (función truncada) se define como

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

- **Espacios L_p extendidos**

Un espacio L_p extendido se define como el conjunto de funciones

$$L_{pe} = \left\{ f \,/\, f_T \in L_p \quad \forall T \text{ finito} \right\}$$

- **Observación:** $f \in L_{pe}$ si y solo si existe una constante positiva $m(T)$ que es función de T:

$$f \in L_{pe} \Leftrightarrow \exists\, m(T) / \left\| f_T \right\|_p \leq m(T)$$

$f \in L_p$ si y solo si existe una constante positiva m:

$$f \in L_p \Leftrightarrow \exists\, m / \left\| f \right\|_p \leq m$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Ejemplos**

La función $f(t)=t$ no pertenece a ninguno de los espacios L_p para $p \in [1,\infty]$. Sin embargo $f_T(t)$ pertenece a todos los L_{pe} para $p \in [1,\infty]$.

Para $p \in [1,\infty)$:

$$\|f_T\|_p = \left(\int_0^T t^p dt\right)^{1/p} = \left(\left.\frac{t^{p+1}}{p+1}\right|_0^T\right)^{1/p} = \left(\frac{T^{p+1}}{p+1}\right)^{1/p} = m(T)$$

Para $p=\infty$:

$$\|f_T\|_\infty = T = m(T)$$

que también puede obtenerse de la expresión anterior haciendo $p \to \infty$.

La función $f(t) = \dfrac{1}{t-1}$ no pertenece ni a L_∞ ni a $L_{\infty e}$.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Causalidad de un operador**

Un operador es causal si la salida en el instante *t* depende solo de los valores de la entrada hasta el instante *t*. O sea, $A : L_{pe}^{n} \rightarrow L_{pe}^{m}$ es *causal* si,

$$(Af)_T = (Af_T)_T, \quad \forall T \geq 0, \quad \forall f \in L_{pe}^{n}$$

Una forma equivalente de expresarlo es,

$$f, g \in L_{pe}^{n},\ f_T = g_T \Rightarrow (Af)_T = (Ag)_T, \quad \forall T \geq 0$$

- **Lema**

Sea $f : \Re_{+} \rightarrow \Re$. Si $\dot{f} \in L_{\infty}$ (función uniformemente continua) y $f \in L_p, \quad 1 \leq p < \infty$, entonces $f(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Teorema**

  Sea la función de transferencia matricial *H(s)* exponencialmente estable y estrictamente propia. Entonces,

  a) Si $u \in L_1^n \Rightarrow y = H * u \in L_1^n \cap L_\infty^n,\ \dot{y} \in L_1^n,\ y(t) \to 0 \text{ con } t \to \infty$

  b) Si $u \in L_2^n \Rightarrow y = H * u \in L_2^n \cap L_\infty^n,\ \dot{y} \in L_2^n,\ y(t) \to 0 \text{ con } t \to \infty$

  c) Si $u \in L_\infty^n \Rightarrow y = H * u \in L_\infty^n,\ \dot{y} \in L_\infty^n$

  d) Si $u \in L_p^n \text{ con } 1 < p < \infty \Rightarrow y = H * u \in L_p^n,\ \dot{y} \in L_p^n$

- **Teorema (Parseval)**

  Sean $f, g \in L_2$, entonces

  a) $(f \hat{*} g)(j\omega) = \hat{f}(j\omega)\hat{g}(j\omega)$ con $\hat{f}(j\omega) = F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} f(t)dt$

  b) $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(j\omega)\hat{g}(j\omega)d\omega, \quad \hat{f}^* : \text{conjugado}}$

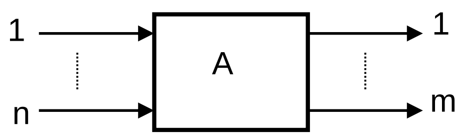
  c) $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \|\hat{f}\|_2$

7.2 Conceptos de estabilidad entrada-salida

- **Estabilidad L_p**

Sea el operador (mapa o sistema) $A : L_{pe}^n \rightarrow L_{pe}^m$. El operador *A* es L_p-*estable* si

1) $Af \in L_p^m \quad \forall f \in L_p^n$



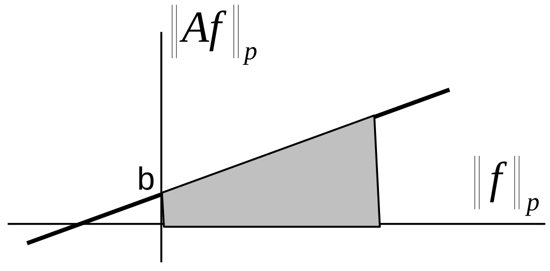
2) Existen constantes *k*, *b* tal que

$$\|Af\|_p \leq k\|f\|_p + b \quad \forall f \in L_p^n$$

- **Interpretación:**

a) Las entradas y salidas deben estar en el mismo espacio L_p

b)



7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Ejemplo:** $(Af)(t) = K.f(t)$

a) $A : L_{pe} \rightarrow L_{pe}$

Sea $f \in L_{pe} \Leftrightarrow \exists\, m(T) / \left\| f_T \right\|_p \leq m(T)$

Por otro lado $(Af)_T(t) = Kf_T(t)$

Aplicando norma *p*:

$$\left\| (Af)_T(\cdot) \right\|_p = \left\| Kf_T(\cdot) \right\|_p = \left| K \right| \left\| f_T(\cdot) \right\|_p$$

$$\left\| (Af)_T(\cdot) \right\|_p \leq \left| K \right| m(T) \Rightarrow (Af)(t) \in L_{pe} \quad \forall p$$

b) Sea $f \in L_p \Rightarrow \exists\, m / \left\| f \right\|_p \leq m$

$$(Af)(t) = Kf(t)$$

$$\left\| (Af)(\cdot) \right\|_p = \left\| Kf(\cdot) \right\|_p = \left| K \right| \left\| f(\cdot) \right\|_p \leq \left| K \right| m$$

$$\Rightarrow Af \in L_p \ \forall p$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

c) $\left\|\left(Af\right)(\cdot)\right\|_p \leq \left|K\right| \left\|f(\cdot)\right\|_p$

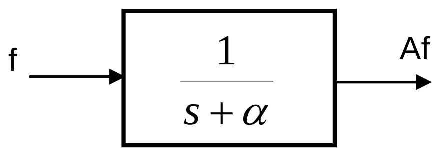
$\exists\, k, b \;\textbf{con}\; k = \left|K\right|,\, b = 0$

Conclusión: A es L_p-estable $\forall p$.

- **Observación:**

  Si *A* es un operador lineal invariante en el tiempo y si el sistema asociado es asintóticamente estable (en el sentido de Lyapunov), entonces *A* es L_p-estable para todo $p \in [1, \infty]$.

- **Ejemplo**



$$\left(Af\right)(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau, \quad \alpha > 0$$

Demostrar que *A* es L_∞estable.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

a) $A: L_{\infty e} \to L_{\infty e}$

$$f \in L_{\infty e} \Rightarrow \exists\, m(T) / \| f_T(.) \|_\infty \leq m(T) \quad \forall T \in [0,\infty)$$

$$(Af)_T(t) = \left[\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau) d\tau \right]_T \quad \forall t \leq T \quad T \in [0,\infty)$$

$$|(Af)_T(t)| = \left| \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_T(\tau) d\tau \right|$$

$$\leq \int_0^t \left| e^{-\alpha(t-\tau)} \right| \left| f_T(\tau) \right| d\tau$$

$$\leq m(T) \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau$$

$$= \frac{m(T)}{\alpha} \left[1 - e^{-\alpha t} \right] \leq \frac{m(T)}{\alpha} \quad \forall t \leq T \quad T \in [0,\infty)$$

O sea:

$$\sup_t |(Af)_T(t)| \leq \frac{m(T)}{\alpha} \Rightarrow (Af)(t) \in L_{\infty e}$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

b) A: $L_\infty \rightarrow L_\infty$

Sea $f \in L_\infty \Rightarrow \exists\, m / \| f \|_\infty \leq m$

$$(Af)(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

$$|(Af)(t)| = \ldots \leq \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} |f(\tau)| d\tau \leq \frac{m}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha t}\right] \leq \frac{m}{\alpha}$$

$$\sup_t |(Af)(t)| \leq \frac{m}{\alpha} \quad \Rightarrow Af \in L_\infty$$

Nota: si $\alpha < 0$ se cumple *A:* $L_{\infty e} \rightarrow L_{\infty e}$ pero no *A:* $L_\infty \rightarrow L_\infty$

c) Tomando $\inf(m) = \overline{m}$:

$$\|(Af)(\cdot)\|_\infty \leq \frac{\overline{m}}{\alpha} = \frac{\|f(t)\|_\infty}{\alpha}, \quad k = \frac{1}{\alpha}, \quad b = 0$$

Conclusión: A es L_∞-estable.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Ejemplo**

Considere el operador no lineal $(Af)(t) = f^2(t)$. Concluya si *A* es L_∞- estable.

a) A: $L_{\infty e} \to L_{\infty e}$

Sea $f \in L_{\infty e} \Rightarrow \exists\, m(T) / \| f_T \|_\infty \leq m(T) \quad \forall T \in [0,\infty)$

$$|Af_T(t)| = |f_T^2(t)| = |f_T(t)|^2 \leq m^2(T) \quad \forall t \leq T \quad \forall T \in [0,\infty)$$

$$\Rightarrow Af \in L_{\infty e}$$

b) A: $L_\infty \to L_\infty$

Sea $f \in L_\infty \Rightarrow \exists\, m / \| f \|_\infty \leq m$

$$(Af)(t) = f^2(t)$$

$$|(Af)(t)| = |f^2(t)| = |f(t)|^2$$

$$|(Af)(t)| \leq m^2 \quad \forall t \quad \Rightarrow Af \in L_\infty$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

c) $$\left|(Af)(t)\right| = \left|f^2(t)\right| = \left|f(t)\right|^2$$

$$\left\|Af\right\|_\infty = \left\|f\right\|_\infty^2$$

Por lo que no existen constantes *k, b* que verifiquen la condición de estabilidad L_∞.

Conclusión: A **no** es L_∞-estable.

- **Observación:** Para que un sistema sea L_∞-estable no basta que entradas acotadas den salidas acotadas.

- **Ejemplo**: Operador saturación

$$(Af)(t) = \begin{cases} f_{\inf} & si \quad f < f_{\inf} \\ f & si \quad f_{\inf} \le f \le f_{\sup} \\ f_{\sup} & si \quad f > f_{\sup} \end{cases}$$

¿Es el operador *A*, L_∞-estable?

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

a) $A : L_{\infty e} \rightarrow L_{\infty e}$

Sea: $f \in L_{\infty e} \Rightarrow \exists\, m(T) / \left\| f_T \right\|_{\infty} \leq m(T) \quad \forall T \in [0, \infty)$

$$\left| (Af)_T (t) \right| \leq \bar{f} = \max\left\{ \left| f_{\sup} \right|, \left| f_{\inf} \right| \right\} \quad \forall t \leq T \quad T \in [0, \infty)$$

$$(Af) \in L_{\infty e}$$

b) *(Af)* $\in L_{\infty}$ pues $\left| (Af)(t) \right| \leq \bar{f}$ se verifica para todo *t*.

c) $\left\| Af \right\|_{\infty} \leq k \left\| f \right\|_{\infty} + b$

se verifica para *k=0, b=*f_{sup} $\Rightarrow$ *A* es L_{∞} estable.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Ejemplo:** Probar que el operador saturación es L_p estable.

a) A: $L_{pe} \to L_{pe}$

Sea $f \in L_{pe} \Rightarrow \exists\, m(T) / \| f \|_p \leq m(T) \quad \forall T \in [0, \infty)$

$$\| Af_T \|_p \leq \| f_T \|_p \quad \forall T \in [0, \infty) \Rightarrow Af \in L_{pe}$$

b) $\| Af(\cdot) \|_p \leq \| f(\cdot) \|_p \to Af \in L_p$

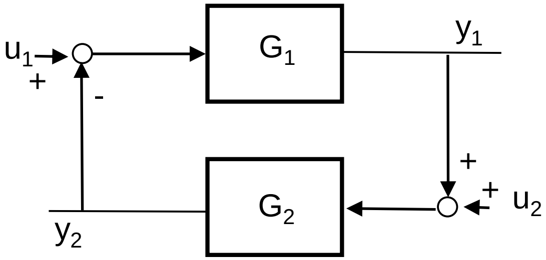
c) $\| Af(\cdot) \|_p \leq k \| f(\cdot) \|_p + b \;\text{ con }\; k = 1, \quad b = 0$

Conclusión: A es L_p-estable

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Estabilidad L_p de lazo cerrado**

Sea el siguiente sistema:



$$y_1 = G_1(u_1 - y_2)$$
$$y_2 = G_2(u_2 + y_1)$$

Se supone que

$$G_1 : L_{pe} \rightarrow L_{pe}$$
$$G_2 : L_{pe} \rightarrow L_{pe}$$

El sistema realimentado es ***L**$_p$***-estable** si:

1) Para toda $u_1, u_2 \in L_p \Rightarrow y_1, y_2 \in L_p$

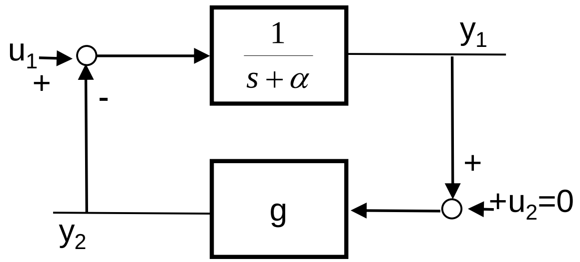
2) Existen constantes *k* y *b* tales que:

$$\|y_1\|_p \leq k\left(\|u_1\|_p + \|u_2\|_p\right) + b$$
$$\|y_2\|_p \leq k\left(\|u_1\|_p + \|u_2\|_p\right) + b$$

- **Ejemplo**

Para

$$G_1 = \frac{1}{s+\alpha}, \quad \alpha > 0$$
$$G_2 = g > 0$$



Verificar si el sistema realimentado es L_∞-estable.

$$y_1(t) = G_1(u_1 - y_2) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}(u_1(\tau) - y_2(\tau))\,d\tau$$
$$y_2(t) = G_2 y_1 = g\, y_1(t)$$

Ya se ha visto que G_1, G_2: $L_{\infty e} \to L_{\infty e}$

a) $y_1 = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}u_1(\tau)d\tau - \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} g\, y_1(\tau)d\tau$ $\qquad \sup|y_1| \le \frac{m}{\alpha} + g \sup\frac{|y_1|}{\alpha}$

$$\sup|y_1| \le \frac{m}{\alpha}\left(1 - \frac{g}{\alpha}\right)^{-1}$$

Se requiere $\frac{g}{\alpha} < 1, \quad g < \alpha$. Si $g < \alpha, \quad y_1 \in L_\infty$.

b) $y_2 = g\ y_1$. Como $y_1 \in L_\infty \Rightarrow y_2 \in L_\infty$.

c) $$\|y_1\|_\infty \le \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{g}{\alpha}\right)^{-1}\|u_1\|_\infty$$

$$\|y_2\|_\infty \le \frac{g}{\alpha}\left(1-\frac{g}{\alpha}\right)^{-1}\|u_1\|_\infty$$

$$k = \text{máx}\left\{\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{g}{\alpha}\right)^{-1}, \frac{g}{\alpha}\left(1-\frac{g}{\alpha}\right)^{-1}\right\} = \text{máx}\left\{\frac{1}{\alpha-g}, \frac{g}{\alpha-g}\right\}$$

$$b = 0$$

Conclusión: El sistema realimentado es L_∞-estable.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Definición (ganancia de un operador)**

Dado un operador $H : L_{pe} \to L_{pe}$ que verifica,

$$\|Hx\|_{p,T} \le \gamma \|x\|_{p,T} + \beta; \quad \forall x \in L_{pe}, \quad \forall T > 0 \qquad (*)$$

Se denomina *ganancia* del operador *H* al menor número γ que verifica la desigualdad. O sea

$$\gamma(H) = \inf \{\gamma \in \Re_+ \,/\, \exists \beta \text{ que verifica } (*)\}$$

- **Lema (ganancia de un operador lineal)**

1) Sea $H : L_{pe} \to L_{pe}; \quad u \to y$ un operador *lineal* donde $y(t) = h(t)u(t)$ con

$h(t) \in L_\infty$. La ganancia L_p de *H* es $\gamma_p(H) = \|h(.)\|_\infty$

2) Sea $H : L_{pe} \to L_{pe}; \quad u \to y$ un operador *de convolución* donde $y(t) = h(t) * u(t)$

La ganancia L_p de *H* está acotada por $\gamma_p(H) \le \|h(.)\|_1, \quad \forall p \in [1, \infty]$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

3) Sea $H : L_{pe} \to L_{pe}; \quad u \to y$ un operador *lineal no anticipativo* con respuesta al impulso $F(t,\tau) \leq Ke^{-a(t-\tau)}, \quad t > \tau,\ \tau > 0,\ a > 0,\ K \geq 0$. La ganancia L_p de *H* es tal que $\gamma_p(H) \leq \dfrac{K}{a}, \quad \forall p \in [1, \infty)$.

4) Sea *H* lineal invariante, causal y L_p-estable. Sea *H(s)* la transformada de Laplace y *h(t)* su respuesta impulsiva. Entonces las ganancias L_2 y L_∞ están dadas por,

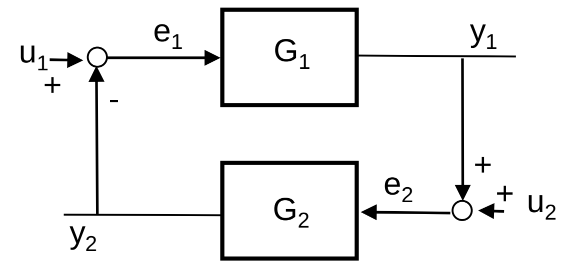
$$\gamma_2(H) = \max_{\omega \in \Re} |H(j\omega)| \leq \gamma_\infty(H)$$

$$\gamma_\infty(H) = \int_0^\infty |h(t)| dt = \|h(.)\|_1$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Teorema de Pequeñas Ganancias**

Considérese el siguiente sistema interconectado



$$y_1 = G_1(u_1 - y_2)$$
$$y_2 = G_2(u_2 + y_1)$$

donde: G_1, G_2: $L_{pe} \to L_{pe}$. Supóngase que $e_1, e_2 \in L_{pe}$. Supóngase que existen constantes $\beta_1, \beta_2, \gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0$ tales que:

$$\|y_{1T}\|_p \leq \gamma_1 \|e_{1T}\|_p + \beta_1$$
$$\|y_{2T}\|_p \leq \gamma_2 \|e_{2T}\|_p + \beta_2 \quad \forall T \in [0, \infty)$$

G_1 y G_2 son operadores de ganancia finita (las γ_1, γ_2 ínfimas son las ganancia de los operadores). Si $\gamma_1.\gamma_2 < 1$, entonces:

$$\|e_{1T}\|_p \leq (1 - \gamma_1\gamma_2)^{-1}\left(\|u_{1T}\|_p + \gamma_2\|u_{2T}\|_p + \beta_2 + \gamma_2\beta_1\right)$$
$$\|e_{2T}\|_p \leq (1 - \gamma_1\gamma_2)^{-1}\left(\|u_{2T}\|_p + \gamma_1\|u_{1T}\|_p + \beta_1 + \gamma_1\beta_2\right) \quad \forall T \in [0, \infty)$$

Si además u_1 y $u_2 \in L_p$, entonces e_1, e_2, y_1, y_2, $\in L_p$ y el sistema lazo cerrado es L_p estable.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Interpretación del teorema:**
  Si ambos operadores tienen ganancia finita y su producto es *menor que uno*, si existe solución, a entradas acotadas corresponden salidas acotadas y el sistema de lazo cerrado tiene ganancia finita.

Prueba:

$$e_{1T} = u_{1T} - (G_2 e_2)_T$$

$$\|e_{1T}\|_p \leq \|u_{1T}\|_p + \|(G_2 e_2)_T\|_p \leq \|u_{1T}\|_p + \gamma_2 \|e_{2T}\|_p + \beta_2 \quad \forall T \in [0,\infty)$$

También:

$$\|e_{2T}\|_p \leq \|u_{2T}\|_p + \gamma_1 \|e_{1T}\|_p + \beta_1 \quad \forall T \in [0,\infty)$$

Como $\gamma_2 \geq 0$:

$$\|e_{1T}\|_p \leq \gamma_1\gamma_2 \|e_{1T}\|_p + \left(\|u_{1T}\|_p + \gamma_2 \|u_{2T}\|_p + \beta_2 + \gamma_2\beta_1\right)$$

Como $\gamma_1\gamma_2 < 1$:

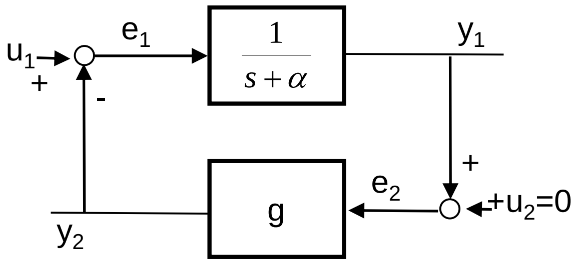
$$\|e_{1T}\|_p \leq (1-\gamma_1\gamma_2)^{-1}\left(\|u_{1T}\|_p + \gamma_2 \|u_{2T}\|_p + \beta_2 + \gamma_2\beta_1\right)$$

Así también surge la condición sobre $\|e_{2T}\|_p$. También es inmediata la conclusión cuando u_1 y $u_2 \in L_p$.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Ejemplo**

Sea el sistema



donde: $G_1, G_2 : L_{\infty e} \rightarrow L_{\infty e}$

$$(G_1 f)(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

$$(G_2 f)(t) = g\, f(t)$$

Para G_1 se tiene, de un ejemplo anterior: $\|y_{1T}\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha}\|e_{1T}\|_\infty = \gamma_1 \|e_{1T}\|_\infty$
con $\alpha > 0$ entonces $\gamma_1 > 0$.

Para G_2, también de un ejemplo anterior: $\|y_{2T}\|_\infty \leq g\|y_{1T}\|_\infty = \gamma_2 \|y_{1T}\|_\infty$

Para $g > 0 \Rightarrow \gamma_2 > 0$.

Si $\gamma_1 \gamma_2 < 1, \ \frac{1}{\alpha}.g < 1, \ \frac{g}{\alpha} < 1$, entonces el sistema es L_∞*-estable*.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

7.3 Funciones de transferencia real positivas

- **Definición (real positivas).** Una función de transferencia h(s) es *real positiva* (PR) si

$$\mathrm{Re}\left[h(s)\right] \geq 0, \quad \forall\, \mathrm{Re}\left[s\right] \geq 0$$

Es estrictamente real positiva (SPR) si $h(s-\varepsilon)$ es real positiva para algún $\varepsilon > 0$. O sea una función de transferencia es PR si mapea el semiplano derecho cerrado (incluyendo el eje imaginario) en el semiplano derecho cerrado del plano *h(s)*.

- **Ejemplo**

Considere la función racional

$$h(s) = \frac{1}{s+\alpha}; \quad \alpha > 0$$

Reemplazando la variable compleja por su expresión explícita $s = \sigma + j\omega$, resulta

$$h(s) = \frac{1}{(\sigma+\alpha) + j\omega} = \frac{\sigma+\alpha - j\omega}{(\sigma+\alpha)^2 + \omega^2}$$

Resulta evidente que para $\sigma \geq 0, \quad \mathrm{Re}\left[h(s)\right] \geq 0$, por lo que h(s) es real positiva. Además, puede elegirse un $\varepsilon > 0$, por ejemplo $\varepsilon = \alpha / 2$ tal que *h(s-ε)* es PR, por lo que *h(s)* es también estrictamente real positiva.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Ejemplo**

  Considere un integrador, $h(s) = \frac{1}{s}$.

  Poniendo explícita la variable *s*,

$$h(s) = \frac{\sigma - j\omega}{\sigma^2 + \omega^2}$$

  Se observa fácilmente que *h(s)* es PR pero no es SPR.

  Los siguientes teoremas dan condiciones para verificar más fácilmente las condiciones de PR y SPR.

- **Teorema (SPR)**

  Una función de transferencia *h(s)* es estrictamente real positiva (SPR) si y solo si,

  1) h(s) es una función de transferencia estrictamente estable.

  2) La parte real de *h(s)* es estrictamente positiva en el eje $j\omega$, o sea

$$\operatorname{Re}\left[h(j\omega)\right] > 0, \quad \forall \omega \geq 0$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Observación:** De este teorema se deducen condiciones necesarias para que una función de transferencia *h(s)* sea SPR:

  a) h(s) es estrictamente estable.
  b) El lugar de Nyquist de *h(j*ω*)* se ubica enteramente en el semiplano complejo derecho (desfase a entradas senoidales es siempre menor que *90* grados).
  c) h(s) tiene grado relativo *0* o *1*.
  d) h(s) es estrictamente de fase mínima (todos sus ceros estrictamente en el semiplano izquierdo).

- **Teorema (PR)**

  Una función de transferencia *h(s)* es real positiva si y solo si,

  1) h(s) es estable
  2) Los polos de *h(s)* sobre el eje $j\omega$ son simples y los residuos asociados son reales y no negativos.
  3) $\mathrm{Re}\left[h(j\omega)\right] \geq 0$ para todo $\omega \geq 0$ tal que $j\omega$ no es un polo de *h(s)*.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Propiedades**

a) Si $h(s)$ es SPR, también $1/h(s)$ es SPR.

b) Si $h_1(s)$ y $h_2(s)$ son SPR, $h(s)=\alpha_1 h_1(s)+\alpha_2 h_2(s)$ también es SPR supuesto que $\alpha_1,\alpha_2 \geq 0$.

c) Si $h_1(s)$ y $h_2(s)$ son SPR, también es SPR el sistema

$$h(s)=\frac{h_1(s)}{1+h_1(s)h_2(s)}$$

que es el sistema de realimentación negativa con $h_1(s)$ el camino directo y $h_2(s)$ el camino de realimentación.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Lema (Kalman-Yacubovitch-Popov)**

Sea un sistema lineal invariante, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$$

controlable y observable. La función de transferencia $G(s) = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$

es SPR si y solo si existen matrices ***P***, ***Q*** simétricas y definidas positivas tales que

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q}$$

$$\mathbf{Pb} = \mathbf{c}$$

Idea de la prueba:
Tomando la candidata de Lyapunov: $V = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{Px}$.

Considerando ahora el sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$, resulta,

$\dot{V} = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{Pbu} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{Qx}$. Integrando entre *0* y *T*: $V(T) - V(0) = \int_0^T \mathbf{y}^T\mathbf{u}dt - \frac{1}{2}\int_0^T \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{Qx}dt$

$$\int_0^T \mathbf{y}^T\mathbf{u}dt \geq \frac{1}{2}\lambda_{min}(\mathbf{Q})\int_0^T \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}dt - V(0)$$

$$\int_0^T \mathbf{y}^T\mathbf{u}dt \geq \frac{1}{2}\lambda_{min}(\mathbf{Q})\|\mathbf{x}\|_{2,T}^2 - V(0)$$

Por lo que el operador del sistema es estrictamente pasivo (lo que se verá en el punto 7.4). Esta condición implica SPR.

7.4 Pasividad

- **Producto escalar de funciones**

  El producto escalar de dos funciones *f(.) y g(.)* $\in L_2$ se define como

$$< f(.), g(.) >= \int_0^\infty f(t)g(t)dt \qquad f, g \in L_2$$

- **Observación:** El espacio vectorial normado y de producto interno $\left(L_2, \|.\|_2, <.,.>\right)$ constituye un espacio de Hilbert (es completo).

- **Propiedades:**

  1) $< f, g > \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ (desigualdad de Schwartz)

  2) $< f, g > = < g, f >$

  3) $< f, g + h > = < f, g > + < f, h >$

  4) $< f, \alpha g > = \alpha < f, g > \qquad \alpha \in \Re$

  5) $< f, f > = \|f\|_2^2 > 0 \ \mathbf{si} \ f \neq 0; \quad = 0 \ \mathbf{si} \ f = 0$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

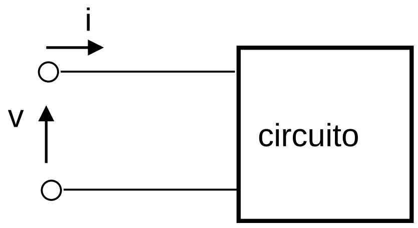
- **Producto escalar truncado**

$$< f, g >_T = < f_T, g > = < f, g_T > = < f_T, g_T > = \int_0^T f(t)g(t)dt \quad \forall T \in [0, \infty)$$

- **Pasividad de un operador**

El concepto de pasividad está motivado en la teoría de circuitos. Considerando el circuito de la figura, con $\varepsilon(t_0)$ la energía almacenada en el mismo en el instante inicial, puede decirse que el circuito es pasivo si se verifica que el balance de la energía inicial y la entregada al circuito en un intervalo cualquiera $[t_0,t]$ es mayor o igual a cero, esto es, el circuito no genera energía,

$$\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)i(t)dt \geq 0 \quad \forall v(.), i(.) \quad \forall t \geq t_0$$



Estos conceptos físicos se generalizan en las siguientes definiciones de pasividad.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Definición (pasividad de un operador):**
  Sea el operador $H : L_{2e} \to L_{2e}$. *H* es *pasivo* (P) si y solo si existe una constante β tal que

$$< Hx, x >_T \geq \beta \quad \forall x \in L_{2e} \quad \forall T \in [0, \infty)$$

- **Definición (estricta pasividad de un operador):**
  Sea el operador $H : L_{2e} \to L_{2e}$. H es *estrictamente pasivo* (EP) si y solo si existen constantes $\delta > 0, \quad \beta \in \Re$ tales que

$$< Hx, x >_T \geq \beta + \delta \|x\|_{2,T}^2 \quad \forall x \in L_{2e}$$

- **Definición (estricta pasividad de entrada de un operador):**
  Sea el operador $H : L_{2e} \to L_{2e}$. H es *estrictamente pasivo de entrada* (EPE) si y solo si existen constantes $\delta, \beta \in \Re$ tales que

$$< Hx, x >_T \geq \beta + \delta \|x\|_{2,T}^2 \quad \forall x \in L_{2e}$$

- **Definición (estricta pasividad de salida de un operador)**
  Sea el operador $H : L_{2e} \to L_{2e}$. H es *estrictamente pasivo de salida* (EPS) si y solo si existen constantes $\delta, \beta \in \Re$ tales que

$$< Hx, x >_T \geq \beta + \delta \|Hx\|_{2,T}^2 \quad \forall x \in L_{2e}$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

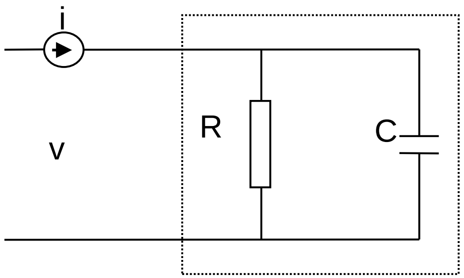
- **Observaciones:**

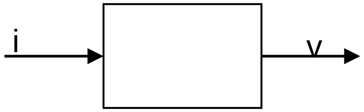
  De acuerdo a las definiciones anteriores puede observarse que

  a) P $\Rightarrow$ EPS, EPE

  b) EP $\Rightarrow$ EPE, P

- **Ejemplo**





$$i = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} \qquad Riv = v^2 + RC\dot{v}v$$

$$R\int_0^T iv\,dt = \int_0^T v^2 dt + RC\int_0^T \dot{v}v\,dt$$

$$R\langle i, v\rangle_T = \|v\|_{2,T}^2 + \frac{RC}{2}\left(v^2(T) - v^2(0)\right)$$

$$\langle i, v\rangle_T \geq -\frac{C}{2}v^2(0) + \frac{1}{R}\|v\|_{2,T}^2$$

EPS, el segundo sumando es la disipación en R.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Ejemplo**

Sea el operador *H* una ganancia *K> 0:* $H : L_{2e} \to L_{2e}; \quad x \to Kx$

$< Hx, x >_T = < Kx, x >_T = \int_0^T Kx^2 dt \geq 0$. Por lo tanto H es pasivo.

También, $< Hx, x >_T = < Kx, x >_T = \int_0^T Kx^2 dt \geq K \|x\|_{2,T}^2 + \beta, \quad \beta \leq 0$

Por lo que *H* es estrictamente pasivo.

- **Ejemplo (operador integrador)**

Considere el operador $(Hx)(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$.

$$< Hx, x >_T = < y, \dot{y} >_T = \int_0^T y\dot{y} dt = \frac{1}{2}\left[y^2(T) - y^2(0)\right] \geq -\frac{1}{2} y^2(0)$$

Entonces el operador es pasivo (y también estrictamente pasivo de entrada y de salida).

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Ejemplo**

Considere el operador lineal $(Hx)(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} x(\tau) d\tau; \quad \alpha > 0$.
Primero debe probarse que $H : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$:

$$x \in L_{2e} \Leftrightarrow \exists m(T) / \|x\|_{2,T} \leq m(T)$$

$$\|Hx\|_{2,T}^2 = \int_0^T \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} x(\tau) d\tau \right)^2 dt \leq \int_0^T \left(\int_0^t e^{-2\alpha(t-\tau)} d\tau \int_0^t x^2(\tau) d\tau \right) dt \leq$$

$$\int_0^T \left((1/2\alpha) \int_0^t x^2(\tau) d\tau \right) dt \leq (1/2\alpha) \int_0^T \|x\|_{2,T}^2 dt = (1/2\alpha) \|x\|_{2,T}^2 .T$$

Entonces $\|Hx\|_{2,T} \leq \sqrt{1/2\alpha} \|x\|_{2,T} T^{1/2}$, por lo que $Hx \in L_{2e}$.
Ahora se verificará la propiedad de pasividad. Escribiendo el sistema como,

$$\dot{y} + \alpha y = x; \quad y = Hx$$

$$\dot{y}y + \alpha y^2 = xy$$

Integrando entre *0* y *T*:

$$< Hx, x >_T = \int_0^T xydt = \int_0^T y\dot{y}dt + \alpha \int_0^T y^2 dt = \frac{1}{2}\left[y^2(T) - y^2(0) \right] + \alpha \|y\|_{2,T}^2$$

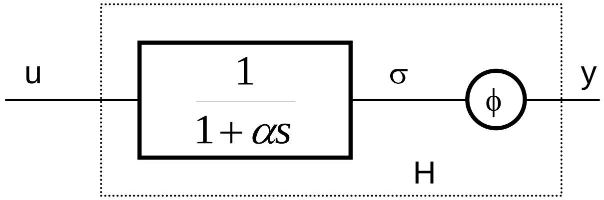
$$< Hx, x >_T \geq -\frac{1}{2} y^2(0) + \alpha \|y\|_{2,T}^2$$

Se concluye que el operador *H* es estrictamente pasivo de salida y es pasivo.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Ejemplo**

Para el siguiente sistema:



$$\alpha\dot{\sigma}(t)+\sigma(t)=u(t), \quad \sigma(0)=\sigma_0, \quad \alpha>0$$

$$y(t)=\phi[\sigma(t)], \quad \phi:\Re\rightarrow\Re \ \textbf{continua}, \quad \phi\in\textbf{sector}[0,\infty)$$

$$<Hu,u>_T=<\phi(\sigma),u>_T=<\phi(\sigma),\alpha\dot{\sigma}+\sigma>_T=$$

$$=\alpha\int_0^T\phi[\sigma(t)]\dot{\sigma}(t)dt+\int_0^T\sigma(t)\phi[\sigma(t)]dt$$

La última integral es no negativa pues $\phi\in\text{sector}[0,\infty)$. Definiendo, $\Phi:\Re\rightarrow\Re, \quad \Phi(\sigma)=\int_0^\sigma\phi(\eta)d\eta$ se verifica que $\Phi(\sigma)\geq 0, \ \forall\sigma\in\Re$.

Entonces,

$$<Hu,u>_T\geq\alpha\int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)}\phi[\eta]d\eta\geq-\alpha\Phi[\sigma(0)], \quad \forall u\in L_{2e}, \forall T\geq 0$$

Con lo cual se verifica que el operador *H* es pasivo.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Teorema (sistemas lineales)**

Sea $H : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ un operador lineal causal definido por $Hu = h * u, \quad u \in L_{2e}$. Entonces,

1) H es pasivo si y solo si $\mathrm{Re}\left[h(j\omega)\right] \geq 0, \quad \forall \omega \in \Re$

2) H es estrictamente pasivo si y solo si, para algún $\delta > 0$,

$$\mathrm{Re}\left[h(j\omega)\right] \geq \delta, \quad \forall \omega \in \Re$$

3) H es estrictamente pasivo de salida si y solo si, para algún $\delta > 0$,

$$\mathrm{Re}\left[h(j\omega)\right] \geq \delta \left|h(j\omega)\right|^2, \quad \forall \omega \in \Re$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- ***Prueba***

  La prueba se basa en el siguiente cálculo,

$$< u, h * u >_T = < u_T, h * u > = < u_T, (h * u)_T > \qquad \text{(causal)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(j\omega)\hat{u}_T(j\omega)\hat{u}_T^*(j\omega)d\omega \quad \text{(Parseval)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\hat{h}(j\omega)\right]\left|\hat{u}_T(j\omega)\right|^2 d\omega$$

La última igualdad se justifica por la cancelación de las partes imaginarias en la integración de ω entre $(-\infty, \infty)$.

Se observa que, por el lema de Parseval,

$$\|u_T\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{u}_T(j\omega)\right|^2 d\omega$$

Entonces, si $\mathrm{Re}\left[\hat{h}(j\omega)\right] \geq 0, \quad \forall \omega \in \Re$, resulta que *H* es pasivo.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

Si $\mathrm{Re}\left[\hat{h}(j\omega)\right] \geq \delta, \quad \forall \omega \in \Re$,

$$< u, h * u >_T \geq \delta \|u\|_{2,T}^2$$

por lo que *H* es estrictamente pasivo.

Si $\mathrm{Re}\left[\hat{h}(j\omega)\right] \geq \delta \left|\hat{h}(j\omega)\right|^2, \quad \forall \omega \in \Re$,

$$< u, h * u >_T \geq \delta \|h * u\|_{2,T}^2$$

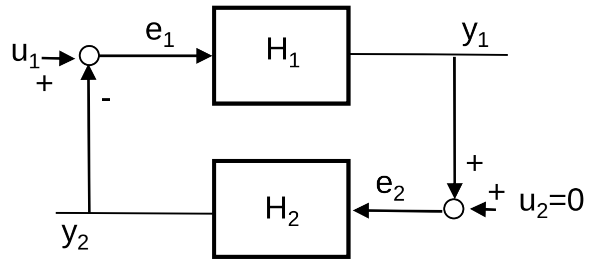
por lo que *H* es estrictamente pasivo de salida con $\delta > 0$.

Las pruebas en la dirección opuesta se verifican considerando que, si las partes reales no verifican la desigualdad en algún tramo de la frecuencia ω, en ese mismo tramo, que es finito, pueden tomarse entradas con valores tan grandes como sea necesario para que la integral sea arbitrariamente grande y no se verifiquen las condiciones de pasividad.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Teorema de pasividad (versión simple):** Considérese el sistema interconectado, con u_2=0,

$$e_1 = u_1 - H_2 e_2$$
$$e_2 = H_1 e_1$$



donde H_1, H_2: $L_{2e} \rightarrow L_{2e}$.

Se asume que para todo $u_1 \in L_{2e}$, existen soluciones e_1, $e_2 \in L_{2e}$ (se obvia así el problema de la existencia). Bajo estas condiciones, si H_1 es pasivo y H_2 estrictamente pasivo:

Si $u_1 \in L_2$ entonces $y_1 \in L_2$.

Si además H_2 tiene ganancia finita, entonces $y_2 \in L_2$.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- ***Prueba:***

De las propiedades de pasividad de los operadores,

$$< H_1 e_1, e_1 >_T \geq \beta_1$$

$$< H_2 e_2, e_2 >_T \geq \beta_2 + \delta_2 \|e_2\|_{2,T}^2 \qquad \delta_2 > 0$$

Calculando,

$$< u_1, y_1 >_T = < u_1, H_1 e_1 >_T = < e_1, H_1 e_1 >_T + < H_2 e_2, e_2 >_T \geq \beta_1 + \beta_2 + \delta_2 \|e_2\|_{2,T}^2$$

pues $u_1 = e_1 + H_2 e_2$

$$H_1 e_1 = e_2$$

Usando la desigualdad de Schwartz y sabiendo que $u_1 \in L_2$:

$$\|u_1\|_2 \, \|H_1 e_1\|_{2,T} \geq \beta_1 + \beta_2 + \delta_2 \|H_1 e_1\|_{2,T}^2 \qquad \forall T \in [0, \infty)$$

Esto implica que $\|H_1 e_1\|_{2,T}$ está acotada para todo T, o sea $y_1 = H_1 e_1 \in L_2$.

Si además, H_2 tiene ganancia finita: $\|y_2\|_{2,T} \leq \gamma_2 \|e_2\|_{2,T} + \alpha_2$. Como e_2 $(= y_1) \in L_2$:

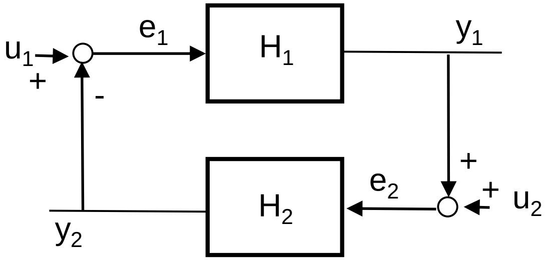
$$\|y_2\|_{2,T} \leq \gamma \|e_2\|_2 + \alpha_2 \qquad \forall T \in [0, \infty)$$

$$\Rightarrow y_2 \in L_2$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Teorema (Pasividad):** Considérese el sistema interconectado

$$e_1 = u_1 - H_2 e_2$$
$$e_2 = u_2 + H_1 e_1$$



donde H_1, H_2: $L_{2e} \rightarrow L_{2e}$. Asúmase que para todo u_1, $u_2 \in L_2$ $\exists$ solución $e_1, e_2 \in L_{2e}$ (existencia). Supóngase que existen constantes $\gamma_1, \beta_1, \delta_1, \beta_1', \varepsilon_2, \beta_2'$ tal que,

1) $\|H_1 x\|_{2T} \leq \gamma_1 \|x\|_T + \beta_1$ H$_1$ es de ganancia finita

2) $< H_1 x, x >_T \geq \delta_1 \|x\|_{2,T}^2 + \beta_1'$ H$_1$ es EPE

3) $< H_2 x, x >_T \geq \varepsilon_2 \|H_2 x\|_{2,T}^2 + \beta_2'$ H$_2$ es EPS

Si $\delta_1 + \varepsilon_2 > 0$ entonces,

$$u_1, u_2 \in L_2 \Rightarrow e_1, e_2, y_1, y_2 \in L_2$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- ***Prueba:***

$$< e_1, H_1 e_1 >_T + < H_2 e_2, e_2 >_T =$$
$$=< u_1 - H_2 e_2, H_1 e_1 >_T + < H_2 e_2, u_2 + H_1 e_1 >_T$$
$$=< u_1, H_1 e_1 >_T + < H_2 e_2, u_2 >_T$$

Aplicando 1), 2) y 3), y la desigualdad de Schwartz,

$$\delta_1 \|e_1\|_{2,T}^2 + \varepsilon_2 \|H_2 e_2\|_{2,T}^2 + \beta_1' + \beta_2' \leq \|u_1\|_{2,T} \gamma_1 \|e_1\|_{2,T} + \beta_1 \|u_1\|_{2,T} + \|u_2\|_{2,T} \|H_2 e_2\|_{2,T} \quad (*)$$

Además, $H_2 e_2 = u_1 - e_1$

$$\|u_1 - e_1\|_{2,T}^2 \geq \|u_1\|_{2,T}^2 - 2\|u_1\|_{2,T} \|e_1\|_{2,T} + \|e_1\|_{2,T}^2$$
$$\|H_2 e_2\|_{2,T} = \|u_1 - e_1\|_{2,T} \leq \|u_1\|_{2,T} + \|e_1\|_{2,T}$$

Sustituyendo estas desigualdades en (*):

$$\delta_1 \|e_1\|_{2,T}^2 + \varepsilon_2 (\|u_1\|_{2,T}^2 - 2\|u_1\|_{2,T} \|e_1\|_{2,T} + \|e_1\|_{2,T}^2) + \beta_1' + \beta_2'$$
$$\leq \gamma_1 \|u_1\|_{2,T} \|e_1\|_{2,T} + \beta_1 \|u_1\|_{2,T} + \|u_2\|_{2,T} (\|u_1\|_{2,T} + \|e_1\|_{2,T})$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

Reordenando,

$$(\delta_1+\varepsilon_2)\|e_1\|_{2,T}^2 \leq \|e_1\|_{2,T}\left[\left(2|\varepsilon_2|+|\gamma_1|\right)\|u_1\|_{2,T}+\|u_2\|_{2,T}\right]+\|u_1\|_{2,T}\|u_2\|_{2,T}$$
$$+\beta_1\|u_1\|_{2,T}+\varepsilon_2\|u_1\|_{2,T}-\beta_1'-\beta_2'$$

Si $(\delta_1+\varepsilon_2)>0$ y teniendo en cuenta que se ha supuesto que $u_1, u_2 \in L_2$, entonces puede escribirse,

$$\|e_1\|_{2,T} \geq \alpha\|e_1\|_{2,T}^2+\beta, \quad \alpha>0$$

por lo que se concluye que $\|e_1\|_2$ está acotado y por consiguiente $e_1 \in L_2$.

Asimismo de la hipótesis 1) resulta que $y_1 \in L_2$, y de la estructura del sistema realimentado también resulta que $e_2 \in L_2,\ y_2 \in L_2$.

- **Corolario**

  Con las condiciones del teorema anterior, si $u_1 \equiv 0$, entonces el mapeo $u_2 \mapsto H_2 e_2$ es pasivo.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Aplicación (control adaptable)**

Las ecuaciones del modelo del error para un sistema de control adaptable con modelo de referencia y ley de adaptación del tipo gradiente es,

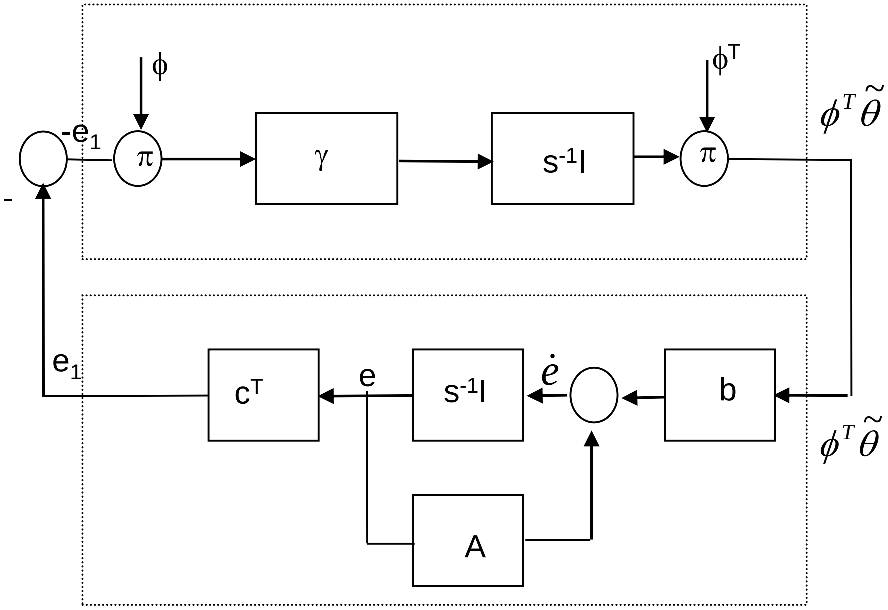
$$\dot{e} = Ae + b\phi^T\tilde{\theta}$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\,\phi\, e_1$$

$$e_1 = c^T e$$

donde *e* es el error de control, $\tilde{\theta}$ es el error paramétrico, ϕ es el regresor y los demás son matrices y vectores constantes. El sistema del error pueden interpretarse como la interconexión de dos sistemas, como se observa en la figura.

$$H_1 : -e_1 \rightarrow \phi^T\tilde{\theta}$$



$$H_2 : \phi^T\tilde{\theta} \rightarrow e_1$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Proposición:**

  H_1 es pasivo, o sea ∃ β < ∞ tal que $< u, H_1 u >_T \geq \beta \qquad \forall u \in L_{2e} \quad T < \infty$

  Prueba:

  $\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\, \phi\, e_1$. Multiplicando por $\tilde{\theta}^T$:

$$\frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} = -\tilde{\theta}^T \phi\, e_1$$

  Integrando entre *0* y *T*:

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^T \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}\, dt = \int_0^T -\tilde{\theta}^T \phi\, e_1\, dt = < -e_1, \tilde{\theta}^T \phi >_T = < u, H_1 u >_T$$

$$< u, H_1 u >_T = \frac{1}{\gamma} \int_0^T \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}\, dt = \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \bigg|_0^T = \frac{1}{2\gamma} \left[\tilde{\theta}^T (T) \tilde{\theta}(T) - \tilde{\theta}^T (0) \tilde{\theta}(0) \right]$$

$$< u, H_1 u >_T \geq -\frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T (0) \tilde{\theta}(0)$$

$$\Rightarrow \exists \beta \ \text{ tal que} < u, H_1 u >_T \geq \beta$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Proposición:**

  H_2 es EPS, o sea existe δ, β tal que $< u, H_2 u >_T \geq \delta \left\| H_2 u \right\|_{2,T}^2 + \beta$

$$< u, H_2 u >_T = < u_T, H_2 u_T > =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_2(j\omega) \hat{u}_T(j\omega) \hat{u}_T^*(j\omega) d\omega \quad \textbf{(Parseval)}$$

Como las partes imaginarias cancelan porque la integral va de ω: $(-\infty,\infty)$,

$$< u, H_2 u >_T = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{Re}\big(H_2(j\omega)\big) \left| \hat{u}_T(j\omega) \right|^2 d\omega$$

El operador H_2 es SPR y estrictamente propio - recordar que

$$e_1 = c^T e = c^T (sI - A)^{-1} b \phi^T \tilde{\theta}, \quad G_m = c^T (sI - A)^{-1} b$$

$H_2(s) = G_m,$ verifica la siguiente propiedad $\mathrm{Re}\, H_2(j\omega) \geq \delta \left| H_2(j\omega) \right|^2$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

Esta propiedad puede justificarse verificando con el operador escalar $1/s+a$, ver ejercicio 7.6. Entonces resulta que:

$$< u, H_2 u >_T \geq \frac{\delta}{\pi} \int_0^\infty \left| H_2(j\omega) \right|^2 \left| \hat{u}_T(j\omega) \right|^2 d\omega$$

$$\geq \delta \left\| H_2 u_T \right\|_2^2$$

recordando que, por Parserval, $\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| x(j\omega) \right|^2 d\omega = \left\| x \right\|_2^2$

- **Conclusiones:** Utilizando las dos proposiciones anteriores en el esquema de bloques H_1 y H_2 interconectados del control adaptable:

$$< -e_1, \phi^T \tilde{\theta} >_T \geq \beta \qquad \textbf{(}\beta \textbf{ negativo)}$$

$$< e_1, \phi^T \tilde{\theta} >_T \geq \delta \left\| e_1 \right\|_{2,T}^2 \qquad \textbf{(}\delta \textbf{ positivo)}$$

Resulta sustituyendo la primera en la segunda, $-\beta \geq \delta \left\| e_1 \right\|_{2,T}^2 \qquad \left\| e_1 \right\|_{2,T}^2 \leq -\frac{\beta}{\delta}$

Entonces se concluye que $e_1 \in L_2$. Si además se considera que e_1 es uniformemente continua (lo cual parece razonable por ser la salida de un sistema lineal estrictamente propio y estable), entonces $e_1(t) \to 0$ con $t \to \infty$.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Aplicación (control adaptable de un robot)**
  El modelo dinámico de un robot rígido de *n* grados de libertad es,

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

donde $q \in \Re^n$ es el vector de desplazamientos angulares, $\tau \in \Re^n$ es el vector de pares aplicados en las articulaciones, $H(q) \in \Re^{nxn}$ la matriz de inercias del robot (simétrica y definida positiva), $C(q,\dot{q})\dot{q} \in \Re^n$ el vector de pares centrípetos y de Coriolis, $g(q) \in \Re^n$ el vector de pares gravitacionales.

- **Propiedad 1:** Existe $\alpha > 0$ tal que $H(q) \geq \alpha I \quad \forall q \in \Re^n$

- **Propiedad 2:** (Parametrización lineal). El modelo dinámico del robot puede expresarse en función de un vector de parámetros $\theta \in \Re^m$:

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \phi(q,\dot{q},\ddot{q})\theta$$

- **Propiedad 3:** Usando una definición apropiada de $C(q,\dot{q})$, se verifica:

$$x^T(\dot{H} - 2C)x = 0 \quad \forall x \in \Re^n$$

- **Propiedad 4:** El operador $H_R : L_{2e}^n \to L_{2e}^n$ es pasivo.

$$\tau \to \dot{q}$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- ***Prueba:***

$$<\dot{q},\tau>_T=\int_0^T \dot{q}^T(t)\tau(t)\,dt=\int_0^T\left[\dot{q}^T H(q)\ddot{q}+\dot{q}^T C(q,\dot{q})\dot{q}+\dot{q}^T g(q)\right]dt$$

Se observa que

$$\dot{q}^T H(q)\ddot{q}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\dot{q}^T H(q)\dot{q}\right]-\frac{1}{2}\dot{q}^T\dot{H}(q)\dot{q}$$

donde $\frac{1}{2}\dot{q}^T H\dot{q}=K\geq 0$ (energía cinética del robot). También, denominando *V* a la energía potencial, $\frac{dV}{dt}=\dot{q}^T g(q)$ y $\dot{q}^T g(q)dt=dV$.

Reemplazando y teniendo en cuenta la propiedad 3,

$$<\dot{q},\tau>_T=\int_0^T dK-\tfrac{1}{2}\dot{q}^T(\dot{H}-2C)\dot{q}dt+dV=$$

$$=K(T)-K(0)+V(T)-V(0)\geq -K(0)-V(0)$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- ***Controlador adaptable:***
  Se considera la siguiente *ley de control* bajo el supuesto de incertidumbres paramétricas del modelo del robot,

$$\boxed{\tau = \hat{H}(q)\left[\ddot{q}_d + K_v\dot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q}\right] + \hat{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \hat{g}(q) + \hat{C}(q,\dot{q})\upsilon}$$

donde $\tilde{q} = q_d - q$, $\hat{H}(q), \hat{C}(q,\dot{q}), \hat{g}(q)$ las estimas de $H(q), C(q,\dot{q}), g(q)$ respectivamente, y

$$\upsilon = \frac{1}{p+\lambda}\left[\ddot{\tilde{q}} + K_v\dot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q}\right], \quad \lambda > 0$$

con K_p, K_v matrices *nxn* definidas positivas. Se observa que,

$$\dot{\upsilon} + \lambda\upsilon = \left[\ddot{\tilde{q}} + K_v\dot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q}\right] \qquad \upsilon = \frac{p}{p+\lambda}\dot{\tilde{q}} + \frac{1}{p+\lambda}\left[K_v\dot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q}\right]$$

Considerando la propiedad 2, la ley de control puede escribirse,

$$\tau = \phi(q,\dot{q},\tilde{q},\dot{\tilde{q}},\upsilon)\hat{\theta}$$

donde $\hat{\theta}$ es la estima del vector de parámetros $\theta \in \Re^m$,. $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$
También se considera la siguiente *ley de adaptación*,

$$\boxed{\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma\phi^T(q,\dot{q},\tilde{q},\dot{\tilde{q}},\upsilon)\upsilon, \quad \Gamma \in \Re^{nxn}, \quad \Gamma > 0}$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- ***Ecuaciones del error:***

  Considerando la ecuación del robot, la ley de control y la ley de adaptación, pueden obtenerse las ecuaciones del error,

$$H(q)\left[\ddot{\tilde{q}} + K_v\dot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q}\right] + C(\dot{q},q)\upsilon = \phi(q,\dot{q},\tilde{q},\dot{\tilde{q}},\upsilon)\tilde{\theta}$$

$$\boxed{H(q)\left[\dot{\upsilon} + \lambda\upsilon\right] + C(\dot{q},q)\upsilon = \phi(q,\dot{q},\tilde{q},\dot{\tilde{q}},\upsilon)\tilde{\theta}} \qquad (1)$$

con $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$. También, considerando $\theta = constante$,

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma\phi(q,\dot{q},\tilde{q},\dot{\tilde{q}},\upsilon)\upsilon} \qquad (2)$$

- ***Operadores:***

  Se consideran, asociados a las ecuaciones del error, dos operadores no lineales. Relacionado a la ecuación (1):

$$H_2 : L_{2e}^n \to L_{2e}^n$$
$$\phi\tilde{\theta} \to \upsilon$$

Este operador es *estrictamente pasivo de salida*, como se prueba a continuación.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

Tomando la función no negativa $V(t) = \frac{1}{2}\upsilon^T H \upsilon \geq 0$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (1) es,

$$\dot{V}(t) = \frac{1}{2}\upsilon^T \left[\dot{H} - 2C\right]\upsilon + \upsilon^T \phi\tilde{\theta} - \lambda\upsilon^T H \upsilon$$

De la propiedad 3, $\dot{V}(t) = \upsilon^T \phi\tilde{\theta} - \lambda\upsilon^T H \upsilon$. Integrando entre *0* y *T*:

$$V(T) - V(0) = -\int_0^T \lambda\upsilon^T H \upsilon\, d\tau + \int_0^T \upsilon^T \phi\tilde{\theta}\, d\tau$$

y notando que,

$$< u, H_2 u >_T = < \upsilon, \phi\tilde{\theta} >_T = \int_0^T \upsilon^T \phi\tilde{\theta}\, d\tau$$

$$< u, H_2 u >_T \geq -V(0) + \lambda\int_0^T \upsilon^T H \upsilon\, d\tau$$

Según la propiedad 1, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|x\|^2 \leq x^T H x \quad \forall t \geq 0$. Entonces,

$$< u, H_2 u >_T \geq -V(0) + \lambda\alpha\int_0^T \upsilon^T \upsilon\, d\tau$$

$$< u, H_2 u >_T = < \phi\tilde{\theta}, \upsilon >_T \geq \lambda\alpha\|\upsilon\|_{2,T}^2 - V(0) = \delta\|\upsilon\|_{2,T}^2 + \beta_2$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

Relacionado a la ecuación (2) se define el operador:

$$H_1 : L_{2e}^n \to L_{2e}^n$$
$$-\upsilon \to \phi\tilde{\theta}$$

Este operador, como fue probado en la aplicación del control adaptable, es *pasivo*, o sea existe β_1 constante tal que, $< -\upsilon, \phi\tilde{\theta} >_T \geq \beta_1$

- ***Conclusiones:***

Teniendo en cuenta las propiedades de pasividad de H_1 y H_2 vistas anteriormente,

$$< \phi\tilde{\theta}, \upsilon >_T \geq \delta \left\| \upsilon \right\|_{2,T}^2 + \beta_2, \quad \delta > 0$$
$$< -\upsilon, \phi\tilde{\theta} >_T \geq \beta_1$$

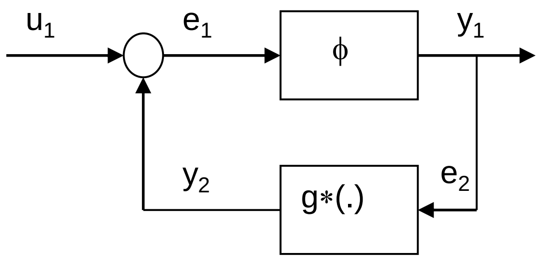
Sumando ambas desigualdades, $0 \geq \delta \left\| \upsilon \right\|_{2,T}^2 + \beta_1 + \beta_2$

$$\left\| \upsilon \right\|_{2,T}^2 \leq \frac{-\beta_1 - \beta_2}{\delta}$$

por lo que $\upsilon \in L_2^n$. Considerando ahora la ecuación $\dot{\upsilon} + \lambda\upsilon = -\left[\ddot{\tilde{q}} + K_v\dot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q}\right]$ y considerando la entrada υ y la salida $\tilde{q}$, se trata de un sistema lineal estrictamente propio y exponencialmente estable. Usando un lema antes visto, como $\upsilon \in L_2^n$, entonces $\tilde{q} \in L_2^n \cap L_\infty^n$, $\dot{\tilde{q}} \in L_2^n$, $\tilde{q}(t) \to 0$ con $t \to \infty$.

- ## Aplicación (Criterio de Popov)

Considérese el sistema realimentado de la figura, con ϕ una no linealidad estática continua. Sea g(t) la respuesta impulsiva de un sistema lineal invariante, $g:\Re_+ \to \Re, \quad g \in L_1(\Re_+)$ y $\dot{g}$ pertenece al álgebra de convolución (es la respuesta impulsiva de un sistema lineal causal).



Teorema ($\phi \in$ *sector[0,∞)*, o sea $\phi(0)=0, \quad \sigma\phi(\sigma)\geq 0, \forall \sigma \in \Re$)

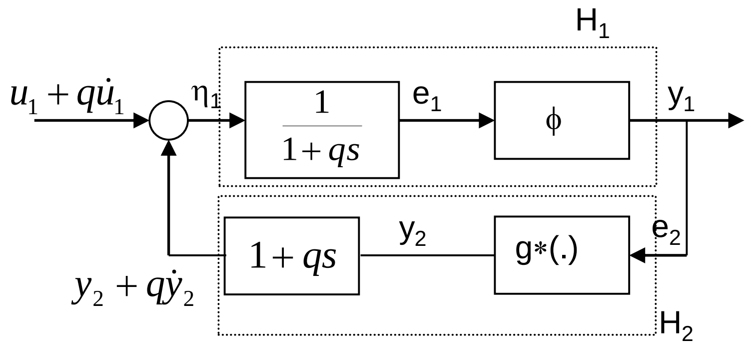
Se asume que para una entrada u_1 tal que $u_1, \dot{u}_1 \in L_2$, entonces $e_1, e_2 \in L_{2e}$. Si existe un *q>0* tal que

$$\inf_{\omega\geq 0} \mathrm{Re}\big[(1+qj\omega)\hat{g}(j\omega)\big] = \delta > 0 \qquad (*)$$

y si $u_1, \dot{u}_1 \in L_2$, entonces e_1, y_1, y_2 son continuas, $\in L_\infty$ y tienden a cero con t $\to \infty$.

Lema: Si $u_1, \dot{u}_1 \in L_2$, entonces $u_1 \in L_\infty$, es continua y $u_1(t) \to 0$ con $t \to \infty$

Prueba del teorema: Se transforma el diagrama de bloques en el siguiente



Se definen los operadores,

$$H_1: \quad H_1\eta_1 = y_1$$
$$H_2 \quad H_2 e_2 = y_2 + q\dot{y}_2$$

De un ejemplo visto en 7.4, H_1 es pasivo. Del Teorema (sistemas lineales) de 7.4, H_2 es estrictamente pasivo dada la condición (*). Por el Teorema de pasividad (versión simple), si $u_1, \dot{u}_1 \in L_2$ entonces $y_1, e_2 \in L_2$. Como $g \in L_1$ y $\dot{g}$ pertenece al álgebra de convolución, H_2 tiene ganancia finita, por lo que $y_2, \dot{y}_2, \eta_1 \in L_2$. Volviendo al diagrama de bloques inicial, $e_1, \dot{e}_1 \in L_2$, por lo que (Lema) $e_1 \in L_\infty$, $e_1(.)$ es continua y $e_1 \to 0$ con $t \to \infty$. La misma propiedad vale para $y_1 = \phi[e_1]$ pues ϕ es continua y para y_2 pues $y_2 = g * e_2$ y $g \in L_1$.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

- **Teorema** ($\phi \in$ sector[0,k]).
  Se consideran las mismas suposiciones que en el teorema anterior excepto que $\phi \in \text{sector}\left[0,k\right]$. Si existe $q > 0$ y algún δ tal que

$$\mathrm{Re}\left[\left(1+qj\omega\right)\hat{g}\left(j\omega\right)\right]+\frac{1}{k}=\delta>0, \quad \forall\omega>0$$

entonces se obtienen las mismas conclusiones que en el teorema anterior.

Prueba: Considere el operador $H_1, \forall T \geq 0$:

$$<\eta_1, H\eta_1>_T=<e_1+q\dot{e}_1,\phi(e_1)>_T=<e_1,\phi(e_1)>_T+q<\dot{e}_1,\phi(e_1)>_T$$
$$\geq\frac{1}{k}<\phi(e_1),\phi(e_1)>_T-q\Phi\left[e_1(0)\right]$$

donde se ha usado la nomenclatura y el razonamiento del cuarto Ejemplo de 7.4. Así se puede escribir

$$<\eta_1, H_1\eta_1>_T\geq\frac{1}{k}\left\|H_1\eta_1\right\|_T^2-\beta_1$$

por lo que H_1 es estrictamente pasivo de salida.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

Considerando ahora H_2 se observa que es un operador de ganancia finita, con

$$< e_2, H_2 e_2 >_T \geq \inf_{\omega \in \Re} \mathrm{Re}\left[(1+qj\omega)\hat{g}(j\omega)\right]\left\|e_2\right\|_T^2$$

o sea, H_2 es estrictamente pasivo de entrada. Del Teorema de pasividad se concluye que si $u_1, \dot{u}_1 \in L_2$ entonces $y_1, e_2 \in L_2$ y el razonamiento sigue igual que para el teorema anterior.

7.5 Ejercicios

7.1 Probar para $f:\Re_+ \to \Re$, que si $f \in L_1 \cap L_\infty$, entonces $f \in L_p \ \forall p \in [1,\infty]$.

7.2 Indique a qué espacios funcionales, L_1, L_2, L_∞, pertenecen las siguentes funciones:

$$f_1(t) = 1 \qquad f_2(t) = \frac{1}{1+t} \qquad f_3(t) = \frac{1}{1+t}\,\frac{1+t^{1/4}}{t^{1/4}}$$

$$f_4(t) = e^{-t} \qquad f_5(t) = \frac{1}{1+t^2}\,\frac{1+t^{1/4}}{t^{1/4}} \qquad f_6(t) = \frac{1}{1+t^2}\,\frac{1+t^{1/2}}{t^{1/2}}$$

7.3 Decir (justificando) si las siguientes funciones de transferencia son SPR o no.

$$h_1(s) = \frac{s-1}{s^2+as+b}; \quad h_2(s) = \frac{s+1}{s^2-s+1};$$

$$h_3(s) = \frac{1}{s^2+as+b}; \quad h_4(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

7.4 Sea $H : L_{2e} \to L_{2e}$. Sea $K : L_{2e} \to L_{2e}$ una ganancia variante $\left(Kx\right)(t) = k(t)x(t)$ donde $k : \Re_+ \to \Re$ y *k* es acotada. Muestre que:

a) Si *H* es pasivo, *KHK* es también pasivo.

b) Si *H* es estrictamente pasivo y si *k* está acotada fuera de *0*, *KHK* es estrictamente pasivo.

7.5 Demostrar el Corolario del Teorema de Pasividad.

7.6 Probar que el operador lineal $h(s) = \dfrac{1}{s+a},\ a > 0$

verifica que es SPR y además, $\mathrm{Re}\left[\hat{h}(j\omega)\right] \geq \delta \left|\hat{h}(j\omega)\right|^2$.

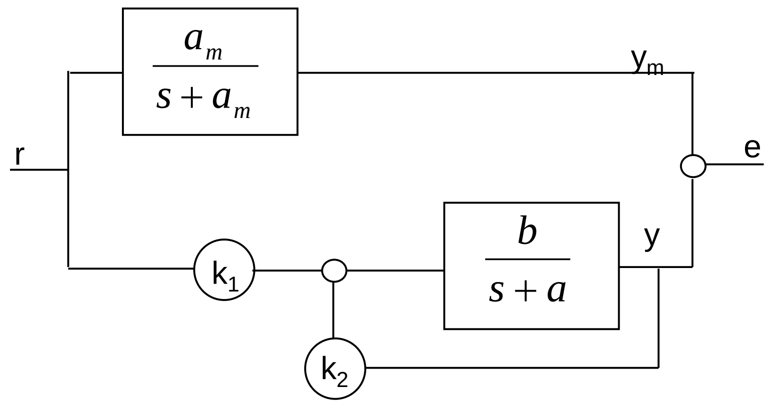
7.7 Considere el circuito eléctrico consistente en una resistencia de valor *R* en paralelo con un capacitor de valor *C*, ambos alimentados por una fuente de corriente de valor *i*. Defina el operador *H* cuya entrada es la corriente *i* y cuya salida es la tensión *v* sobre la resistencia (y el capacitor). Qué propiedad de pasividad tiene ese operador?. Interprete en función de la disipación de potencia en la resistencia *R*.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

7.8 Considere las siguientes ecuaciones correspondientes a un sistema de control adaptable con modelo de referencia y planta de primer orden, como se muestra en la figura.

$$\dot{e} = -ae + b\phi^T\tilde{\theta}$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\phi e, \quad \gamma > 0$$



donde, $e = y - y_m$, $\phi^T = (r \quad -y)$, $\theta^T = (k_1 \quad k_2)$, $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$. Además, se consideran las constantes $a_m, b : 0$.

Probar, utilizando propiedades de pasividad, que el error de control $e \in L_2$.

$$H_1 : -e \rightarrow \phi^T\tilde{\theta}$$

$$H_2 : \phi^T\tilde{\theta} \rightarrow e$$

Sugerencias: considerar los siguientes operadores asociados a cada una de las ecuaciones diferenciales, interconectados en un sistema de realimentación con entradas externas nulas, Probar que H_1 es pasivo y H_2 es estrictamente pasivo de salida. Luego, combinando ambas relaciones puede probarse que $e \in L_2$.

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA

Revisión

- Espacios de funciones. Espacios extendidos.
- Estabilidad L_p de entrada-salida. Estabilidad L_p de lazo cerrado.
- Funciones de transferencia real positivas: SPR, PR.
- Lema de Kalman-Yacubovitch-Popov.
- Pasividad. Definiciones de pasividad.
- Sistemas lineales: vinculaciones con positivas reales.
- Teoremas de pasividad. Aplicaciones.