

CONTROL ADAPTABLE

Miguel E. Peña

2007

CONTROL ADAPTABLE
Miguel Edgardo Peña

Primera edición: 2007
Editado por el Autor

Impreso en Argentina

PREFACIO

Este texto es una recopilación en castellano efectuada con el objeto de disponer de un documento que cumpla con los requisitos académicos del curso Control Adaptivo de la Maestría en Ingeniería en Control Automático de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Córdoba y, en forma parcial, del curso optativo Identificación y Control Adaptable de la carrera Ingeniería Electrónica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan.

Parte del texto de este trabajo se ha extraído de diferentes fuentes, tanto impresa como de Internet, tratando de realizar las citas respectivas. En el caso de que haya un error u omisión en las referencias, por favor comunicarse con el autor para realizar las correcciones adecuadas.

Índice

1. Introducción al Control Adaptable.....	1
1.1. Concepto de control adaptable.....	1
1.2. Justificación de los sistemas adaptables.....	1
1.3. Reseña Histórica.....	2
1.4. Clasificación de los sistemas de control adaptables.....	3
1.5. Esquemas de control adaptable.....	5
1.5.1. Sistemas adaptables con modelo de referencia (Model Reference Adaptive Systems: MRAS).....	5
1.5.2. Controladores auto-sintonizados (Self Tuning Regulator).....	6
1.5.3. Ganancia tabulada (Gain Scheduling).....	7
1.5.4. Sintonía Automática (Automatic Tuning).....	7
1.6. Aspectos negativos de los sistemas adaptables.....	8
Cuestionario y ejercicios.....	8
2. Identificación de sistemas.....	11
2.1. Introducción a la identificación de sistemas.....	11
2.1.1. Concepto de sistema.....	11
2.1.2. Modelo de un sistema.....	11
2.1.3. Tipos de modelos.....	12
2.1.4. Métodos de obtención de modelos.....	15
2.1.5. Concepto de identificación de sistemas.....	16
2.1.6. El proceso de identificación.....	16
2.1.7. Clasificación de los métodos de identificación.....	17
2.2. Métodos de identificación no paramétricos.....	18
2.2.1. Análisis por respuesta transitoria.....	18
2.2.2. Análisis por correlación.....	22
2.2.3. Técnicas frecuenciales.....	24
2.3. Diseño de los experimentos.....	30
2.3.1. Experimentos preliminares.....	30
2.3.2. Diseño y selección de las señales de entrada.....	31
2.3.3. Selección del período de muestreo y la duración del experimento.....	32
2.3.4. Pretratamiento de los datos.....	33
2.4. Métodos de estimación paramétricos.....	35
2.4.1. Introducción.....	35
2.4.2. Los modelos y los métodos de estimación paramétricos discretos.....	36
2.4.3. Método de estimación por mínimos cuadrados (Least Square, LS).....	39
2.4.4. Método de mínimos cuadrados generalizado (Generalized Least Square , GLS).....	42
2.4.5. Método de la variable instrumento (Instrumental Variable, IV).....	43
2.4.6. Método de predicción de error.....	47
2.4.7. Métodos recursivos para la estimación de parámetros.....	49
2.4.8. Métodos de estimación paramétricos frecuenciales.....	52
2.4.9. Identificación en el espacio de estados.....	54
2.4.10. Selección y validación de la estructura del modelo.....	58
Cuestionario y ejercicios.....	63
3. Sistemas Adaptables con Modelo de Referencia.....	75
3.1. Introducción.....	75

3.2. Esquema indirecto de control con modelo de referencia	76
3.3. Esquema directo de control adaptable con modelo de referencia	78
3.4. La regla del M.I.T.	79
3.4.1. Ejemplos ilustrativos	80
3.4.2. Error en la convergencia de los parámetros	87
3.4.3. Determinación de la ganancia de adaptación	87
3.4.4. Algoritmos Normalizados	89
3.4.5. Aplicación a sistemas lineales en general	91
3.4.6. Conclusión de la aplicación de la regla del M.I.T.	93
3.5. Método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov	93
3.5.1. Ejemplos ilustrativos	94
3.5.2. Conclusión del método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov	98
3.6. Robustez de los sistemas adaptables con modelo de referencia	99
3.6.1. Incertidumbres, perturbaciones y robustez	99
3.6.2. El ejemplo de Rohrs de robustez de sistemas adaptable.	99
3.6.3. Métodos para mejorar la robustez.	104
3.6.4. Robustez a través de la modificación de las leyes de adaptación	107
3.7. Conclusión	109
Cuestionario y ejercicios	109
4. Reguladores Auto-Ajustables	115
4.1. Introducción	115
4.2. Asignación de polos y ceros	117
Casos particulares	120
4.3. Predicción óptima	121
Predictor óptimo	121
4.4. Regulador de mínima varianza	123
4.5. Controladores para plantas con parámetros desconocidos	124
4.6. Algoritmos con estructura explícita e implícita	124
Algoritmo con identificación explícita	125
Algoritmo con identificación implícita	125
Algoritmo con identificación explícita	125
Algoritmo con identificación implícita	126
Ventajas e inconvenientes de uno y otro algoritmo	126
4.7. Propiedad de autosintonía	126
Procedimiento de síntesis	128
4.8. Ejemplos ilustrativos	128
4.8.1. Ejemplo de mínima varianza	128
4.8.2. Control adaptable PI	129
4.9. Control Predictivo.	130
4.9.1. Introducción.	130
4.9.2. Elementos del MBPC	135
4.9.3. Ejemplos de Controladores Predictivos	150
4.10. Conclusión	159
Cuestionario y ejercicios	159
Ap.1. Solución de la ecuación diofántica	161
5. Reguladores con Sintonía Automática	163
5.1. Introducción	163
5.2 Control PID	164
5.3 Métodos de ajuste de respuesta transitoria	166
5.3.1. Método de respuesta en escalón de Ziegler-Nichols	167

5.3.2. Caracterización de la respuesta en escalón	168
5.4 Métodos basados en realimentación con relé.	168
5.4.1. El método de Ziegler-Nichols en bucle cerrado.	169
5.4.2. El método del balance armónico.....	169
5.4.3. Oscilaciones de relé.	171
5.5. Conclusión.	172
Cuestionario y ejercicios.....	172
6. Control por Ganancias Tabuladas.....	173
6.1. Introducción.	173
6.2. Diseño de reguladores con ajuste por tabla.	174
6.2.1. Ejemplo de actuador no lineal.	174
6.2.2. Tanque de sección variable.....	176
6.2.3. Transformación no lineal.	177
6.3. Conclusiones.....	178
Cuestionario y ejercicios.....	179
7. Equipos Comerciales.	181
7.1. Controladores Adaptativos Predictivos.	181
7.1.1. Asea-Brown Boveri (ABB): Novatune.....	181
7.1.2. First Control Systems AB: Firstloop.	181
7.1.3. SCAP Europa: SCAP.....	182
7.2. Controladores PID Autoajustables con Programación de Parámetros.....	182
7.2.1. Taylor Instruments Company: MOD 30 System.	182
7.2.2. Toshiba: EC300 Series.....	183
7.3. PID Autoajustables.	184
7.3.1. Foxboro: Exact.....	184
7.3.2. Fischer & Porter: Easy-Tune.	185
7.3.3. Leeds & Northrup: Electromax V.....	186
7.3.4. Satt Control Instruments: ECA-400.....	188
7.3.5. Turnbull Control System 6355: Eurotherm 902/905.	189
7.3.6. Yokogawa: Yewseries 80.	189
7.3.7. Otros Controladores.....	190
Cuestionario y ejercicios.....	190
Bibliografía	191

1. INTRODUCCIÓN AL CONTROL ADAPTABLE.

1.1. Concepto de control adaptable.

El término adaptable (también se usan los términos adaptivo y adaptativo) significa cambiar el comportamiento conforme a nuevas circunstancias. Un controlador adaptable es un controlador que puede modificar su comportamiento en respuesta a cambios en la dinámica del sistema y de las perturbaciones [Åström and Wittenmark, 1995].

Existen muchas definiciones de control adaptable, siendo una de las más aceptadas la que dice que es un tipo de control especial no lineal en el que el estado del proceso puede ser separado en dos escalas de tiempo que evolucionan en diferente velocidad. La escala lenta corresponde a los cambios de los parámetros y la escala rápida que corresponde a la dinámica del bucle ordinario.

Existen muchos tipos de controladores que proporcionan buenas características de regulación en presencia de cambios de los parámetros del sistema y según la definición anterior no son realmente adaptables, puesto que la adaptación se realiza a lazo abierto. La [figura 1.1](#) muestra un esquema general de un controlador adaptable.

En el diseño de un controlador moderno entran tres fases. El modelado del sistema, la identificación de los parámetros del modelo y por último el diseño del controlador. Los sistemas adaptables en general permiten automatizar las dos últimas etapas.

Si bien los controladores utilizados en los sistemas adaptables pueden ser lineales, por ejemplo controladores del tipo PID, de mínima varianza, predictivos, etc., cuando se combinan con las leyes de ajuste de los parámetros, el sistema completo se convierte en un sistema no lineal. Por ello todo análisis de estabilidad tiene que estar realizado por técnicas aplicables a sistemas no lineales.

1.2. Justificación de los sistemas adaptables.

Existen diferentes aspectos que justifican la utilización del control adaptable.

Uno de los aspectos que trata de resolver el control adaptable es el de plantas con ***parámetros inciertos pero constantes***. El sistema adaptable debe ser capaz de ajustar sus parámetros para que la planta con parámetros desconocidos estén regulados correctamente.

Otra utilización son las plantas con ***parámetros variables***. En este sentido se deben distinguir en el sistema dos dinámicas. La dinámica del sistema con las variables de estado comunes a controlar y la dinámica de los parámetros variantes. En este sentido la dinámica de los parámetros variantes tiene que ser mucho más lenta que la dinámica de las variables de estado del proceso.

Otra utilización de los sistemas adaptables es el caso de ***sistemas no lineales suaves***. Estos sistemas con pequeñas no linealidades, pueden ser controladores por controladores lineales, optimizados para un punto de operación. Bajo cambios en la condiciones de operación no en forma permanente (por ejemplo por un cambio en la referencia del modelo, por un cambio en las perturbaciones, etc.) el controlador adaptable debe ser capaz de ajustar sus parámetros para mantener la regulación en el sistema.

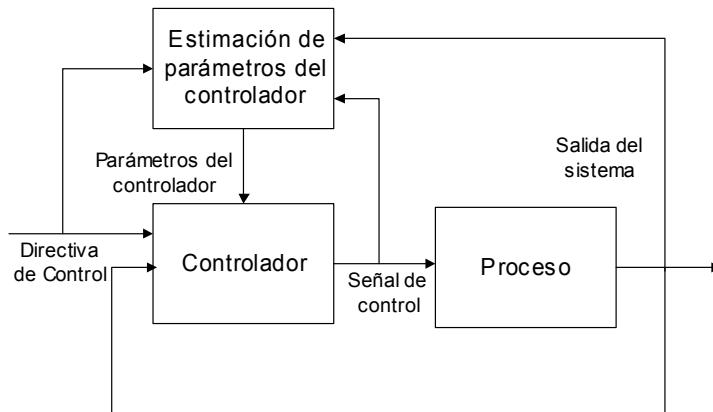


Figura 1.1 Esquema general del controladores adaptables.

1.3. Reseña Histórica

Los hitos principales en el desarrollo de los sistemas adaptables son los siguientes:

- 1950: Se desarrollan sistemas de control de vuelo para aeronaves de alto desempeño (Programa X15¹).
- 1960: Se desarrolla la teoría básica de los sistemas adaptables. Control Dual [Åström and Wittenmark, 1995; Cap. 7], Identificación de Sistemas [Ljung, 1987], Representaciones en espacio de estado, Teoría de estabilidad y control estocástico, [Ogata, 1998], Programación dinámica, Sistemas con aprendizaje.
- 1970: Se desarrollan nuevos métodos de diseño, Algoritmos de sistemas con modelo de referencia y sistemas auto sintonizados.
- 1980: Se desarrollan los análisis de estabilidad, aparecen productos comerciales masivos. Se presentan algoritmos robustos.
- 1990: Se presentan nuevos esquemas basados en redes neuronales, sistemas borrosos (Fuzzy), etc.

También se desarrollan las técnicas de control adaptable. Desde un punto de vista conceptual, las técnicas adaptables aparecen cuando se transvasan a la máquina comportamientos inherentes al hombre: La adaptación, no en términos de decisiones (conseguida con la realimentación simple), sino en término de estructuras para la decisión.

Las Estructuras de Control adaptables que han tenido mayor impacto técnico son:

Sistemas Auto-Ajustables (SAA).

Sistemas Adaptables con Modelo de Referencia (SAMR).

El concepto de regulador autoajutable fue propuesto inicialmente por Kalman [Grewal and Andrews, 2001], utilizando un método de identificación de mínimos cuadrados recursivos en su artículo "Design of a self-optimizing control system" [Kalman, 1958],

¹ Los aviones X-15 (tres naves en total) impulsados por cohetes, surgió del programa de investigación hipersónico X-15 que desarrollaron varias organizaciones de los EE.UU.. La aeronave voló durante un período cercano a los 10 años (1959 - 1968) y estableció los registros mundiales no oficiales de velocidad y altitud al alcanzar los 4.520 mph (Mach 6,7) y los 354.200 pies en un programa que tenía por objeto investigar todos los aspectos de los vuelos hipersónicos tripulados. La información recolectada del altamente exitoso programa X-25 contribuyó al desarrollo de los programas de vuelos espaciales. En la figura 1.2. se observa un esquema de estos aviones.

El 15 de noviembre de 1967, en el séptimo vuelo del piloto Michael Adams, éste ingresó en una rotación en barreno de la cual pudo recuperarse pero no pudo salir de un picado invertido debido a un problema técnico con el sistema de control de vuelo adaptativo. Falleció a raíz del impacto resultante de la X-15 número tres. (http://www.nasa.gov/centers/dryden/espanol/FS-052-DFRC_espanol.html).

otro sistema, basado en la minimización de la varianza de salida es desarrollado por Peterka en 1970, y por Åström y Wittenmark en [Åström and Wittenmark, 1973]. Se consideraba el problema en un entorno estocástico.

La técnica de los sistemas autoajustables se basa en que si se dispone de un método válido de diseño de reguladores que parte del conocimiento del modelo del proceso, para realizar un control que se adapte a los cambios en el proceso basta con acoplar ese método de diseño de reguladores con un procedimiento de identificación en línea. Para ello se supone, evidentemente, que existe una separación entre las tareas de identificación y control. Se dispondrá de un "calculador" que en paralelo al control se encarga de calcular los valores óptimos de los coeficientes del regulador. Este "calculador" consiste en un estimador recursivo de los parámetros del sistema o proceso controlado. Los resultados del estimador servirán para calcular los valores óptimos de los coeficientes del regulador.

El principal inconveniente de esta aproximación es que la estabilidad no llega a asegurarse en el caso general.

Los Sistemas Adaptables con Modelo de Referencia (SAMR) fueron propuestos por los investigadores del M.I.T. Whitaker, Narmon y Kezer en 1958 al estudiar los servomecanismos con ganancia variable en la publicación "Desing of a Model Reference Adaptive System for Aircraft" [Whitaker et.al. 1958].

Los Sistemas Adaptables con Modelo de Referencia se basan en otro concepto muy simple: *se desea que el comportamiento del proceso sea "idéntico" al de un modelo que se da como referencia*. Si existe diferencia entre las salidas del proceso y del modelo un mecanismo de adaptación intenta minimizarla con el ajuste de los parámetros del regulador, o añadiendo una variación en la acción sobre el sistema físico.

Esta aproximación alcanzó un primer paso hacia su madurez teórica con el trabajo de Parks "Liapunov redesign of model reference adaptive control systems" [Parks, 1966]. De esta forma se pudo garantizar la estabilidad global del sistema adaptable. Posteriormente, Landau en su trabajo. "Adaptive Control: The model reference approach" [Landau 1979] utiliza la teoría de la hiperestabilidad de Popov en el diseño de SAMR.

A pesar de las diferencias aparentes entre las dos aproximaciones, SAMR y SAA, se han publicado últimamente gran cantidad de trabajos orientados a mostrar sus semejanzas.

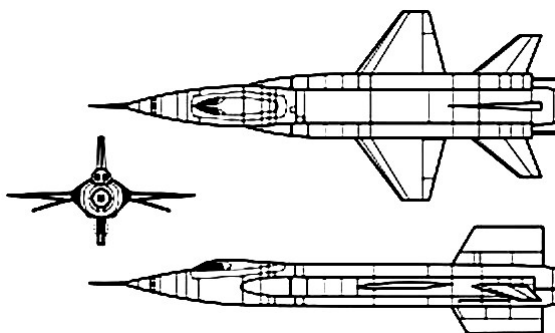


Figura 1.2. Esquema de las aeronaves X15.

1.4. Clasificación de los sistemas de control adaptables

Los sistemas de Control Adaptables se pueden clasificar en Directos e Indirectos.

En los sistemas adaptables *directos* el mecanismo de ajuste de parámetros, directamente indica en que forma los parámetros del controlador se deben ajustar. Esto implica que los parámetros del controlador deben estar parametrizados en términos de los parámetros del modelo del sistema.

En los mecanismos de ajustes *indirectos* el mecanismo de ajuste de los parámetros se aplica para obtener una estima de los parámetros de un modelo del sistema. Basado en la suposición de que los parámetros del proceso son buenos, se obtiene los parámetros del controlador como una solución de un problema de diseño usando los parámetros estimados. En este caso se pueden distinguir un mecanismo de estimación de parámetros de la planta. En la [figura 1.3](#) y [1.4](#) se muestran diagramas en bloques de los esquemas directos e indirectos.

Se debe notar que los esquemas adaptables directos requiere ciertas propiedades de la planta a los que va a ser aplicado, en cambio los esquemas indirectos son de aplicación más general ya que se pueden aplicar distintos métodos de identificación y en bases a los parámetros obtenidos diseñar un controlador específicos. Históricamente se considera que los métodos indirectos corresponden con los reguladores auto sintonizados (Self Tuning Regulator) y los esquemas directos a los reguladores con modelo de referencia (Model Reference Adaptive Control). Actualmente esta separación no es tan tajante. Otra terminología utilizada para esta separación es la de controladores adaptables explícitos (indirectos) e implícitos (directos).

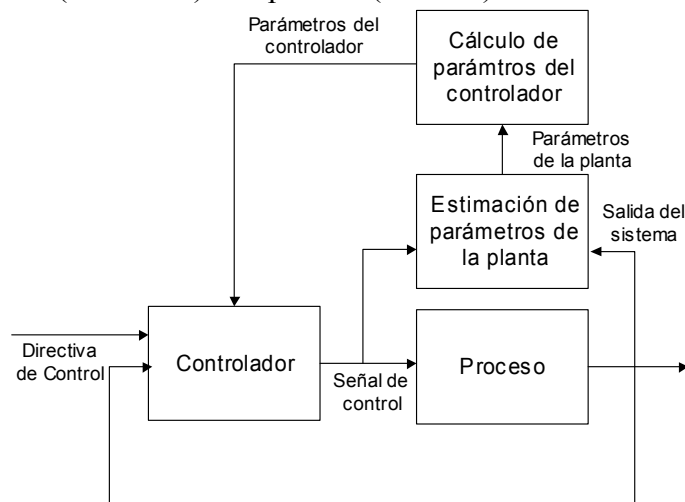


Figura 1.3 Esquema de control adaptable indirecto.

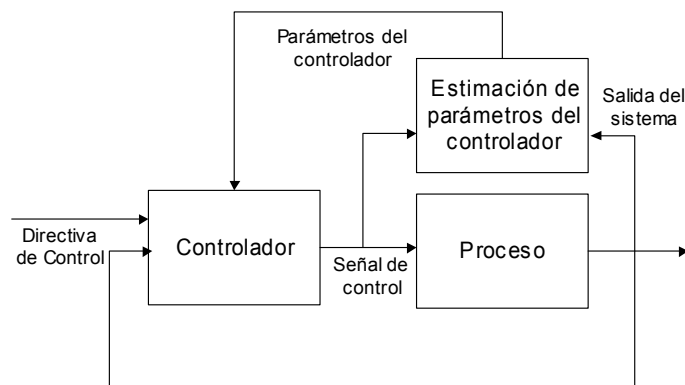


Figura 1.4 Esquema de control adaptable directo.

Otra clasificación de los sistemas adaptables si son de *ajuste permanente* o de *ajuste a demanda*. En los primeros, el mecanismo de ajuste está permanente activo y monitoreando el comportamiento del sistema. En los sistemas a demanda cuando un operario observa que el desempeño del controlador se ha deteriorado, activa un mecanismo automático que ajusta los parámetros del controlador. Terminada el proceso de ajuste, los parámetros del controlador se mantienen constantes hasta que se vuelva a solicitar el ajuste de los parámetros. En general a estos sistemas se los suele llamar con *Ajuste Automático* (Automatic Tunning).

1.5. Esquemas de control adaptable

En esta sección se describen los esquemas de Control Adaptable más comunes.

1.5.1. Sistemas adaptables con modelo de referencia (Model Reference Adaptive Systems: MRAS)

Los sistemas adaptable con modelo de referencia se originaron para resolver el problema en los cual las especificaciones de desempeño se daban en termino de un modelo de referencia. Este modelo indica como el proceso se debe comportar idealmente a la directiva de control. La [figura 1.5](#) muestra un diagrama en bloques. Se puede pensar que el controlador consiste de dos lazos. El lazo interno es un lazo de realimentación común compuesto del proceso y el controlador. El lazo externo ajusta los parámetros del controlador en forma tal que el error entre la salida del sistema y la salida del modelo sea lo más pequeña posible. El problema fundamental de los sistemas adaptables con modelo de referencia es determinar el mecanismo de ajuste para llevar el error a cero.

Un ejemplo típico de este tipo de controladores es el problema originalmente resuelto para el control de vuelo de aviones. En este caso el modelo de referencia describía la respuesta deseada de la aeronave a los movimientos de la palanca de mando.

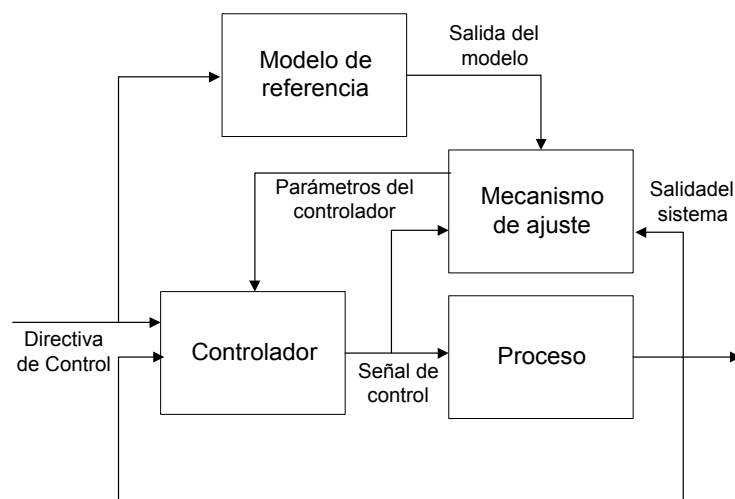


Figura 1.5 Diagrama en bloques de un sistema adaptable con modelo de referencia.

1.5.2. Controladores auto-sintonizados (Self Tuning Regulator)

En esta categoría entran una gran variedad de controladores. En general en estos el proceso es identificado en línea y el controlador se ajusta para obtener el comportamiento deseado a lazo cerrado. Históricamente estos controladores entraban en la categoría de controladores adaptables indirectos. El diagrama en bloques se puede ver en la [figura 1.6](#). Se pueden distinguir tres partes claramente diferenciadas.

- un algoritmo recursivo de estimación de parámetros
- un mecanismo de adaptación que desarrolla la tarea del diseño del controlador
- un controlador con parámetros ajustables

Estos controladores conforman una estructura subóptima basado en el principio de separación de las tareas de identificación y de control. El diseño del controlador se hace suponiendo que los parámetros del sistema son conocidos y posteriormente estos son substituidos por sus estimas.

Desde el punto de vista del control estocástico de sistemas no lineales, es un controlador que claramente aplica el *principio de equivalencia cierta* (supone que los parámetros identificados coinciden con los reales).

La idea de los reguladores autoajustables puede ser aplicada a muchos problemas de control que no son formulados como un problema de control estocástico. Dada la modularidad y la separación del control e identificación, pueden formarse muchas clases de reguladores autoajustable por combinación de diferentes métodos de diseño de controladores e identificadores. Los algoritmos comúnmente usado para la identificación de parámetros son los de mínimos cuadrados y del método del gradiente. Para el diseño del controlador se pueden emplear controladores por asignación de polos, predictivos, de tiempo finito, etc.

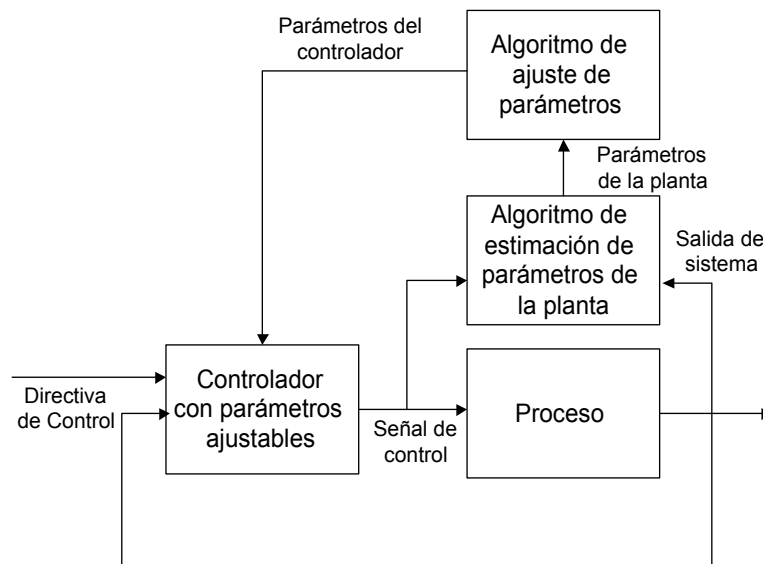


Figura 1.6. Diagrama en bloques de un sistema con regulador auto-ajustable.

Dentro de los controladores autoajustable, que aplican el principio de equivalencia cierta para realizar el mecanismo de adaptación. Existen básicamente dos tipos de algoritmo, unos que identifica directamente los parámetros de la planta (algoritmo de identificación explícita (adaptable indirecto)) y otro que mediante un reescritura del modelo de la planta, simplifican los pasos, estimándose en este caso directamente los parámetros del controlador (algoritmos con identificación implícita (adaptable

indirecto)). Solo en algunos casos un algoritmo con identificación explícita puede ser reformulado como uno con identificación implícita. La identificación explícita necesita más cálculo en cada paso. Por otro lado se tiene directamente los parámetros de la planta, lo que es particularmente interesante para poder realizar la supervisión del control. Con un algoritmo que proporcione los parámetros de la planta se pueden plantear distintos tipos de controladores para distintos requerimientos de funcionamiento. En el caso de la identificación implícita se necesita menos cálculo en cada paso, pero la identificación es en general más complicada. Se necesita rescribir el modelo en cada caso particular y ello no es siempre posible.

1.5.3. Ganancia tabulada (Gain Scheduling)

En algunos casos es posible encontrar variables medibles que están directamente relacionadas con los cambios en la dinámica del proceso. Se pueden usar estas variables para cambiar los parámetros del controlador. Esta estrategia se llama ganancia tabulada o planificada (Gain scheduling).

Un diagrama en bloques de este esquema se muestra en la figura 1.7. Se puede ver sistema como uno que tiene dos lazos. Hay un lazo interno compuesto por el proceso y el controlador, y un lazo externo que ajusta los parámetros del controlador basándose en las condiciones de operación.

Los esquemas de ganancia tabulada son muy útiles para reducir los efectos de la variación de los parámetros. Históricamente, existe controversia si los sistemas de ganancia tabulada se deben considerar sistemas adaptables o no. Esto se debe a que el diseño de la tabla de ganancia (ajuste del controlador) se debe realizar fueran de línea aunque, ya en funcionamiento presenta un mecanismo para ajustar los parámetros.

El concepto de ganancia tabulada está originalmente en conexión con el desarrollo de sistemas de control de vuelo. En estas aplicaciones la velocidad y la altitud se miden por sensores y son usadas como variables de decisión en la aplicación de los controladores.

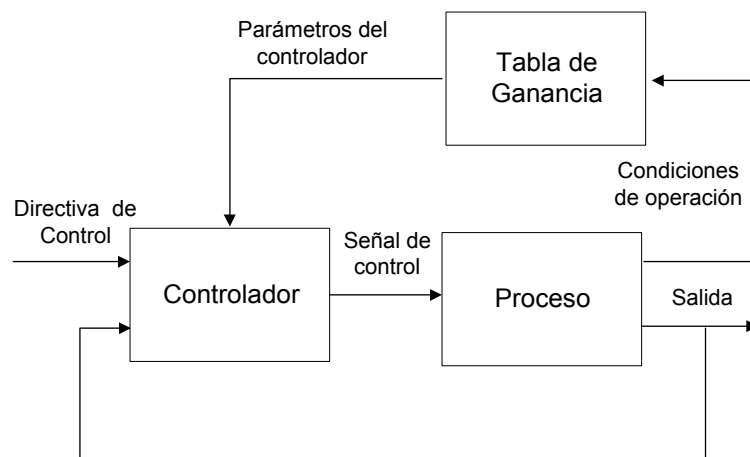


Figura 1.7 Diagrama en bloques de un sistema con ganancia tabulada.

1.5.4. Sintonía Automática (Automatic Tuning)

Los esquemas de control adaptables como MRAC y STR necesitan de información *a priori* acerca de la dinámica del proceso. Es importante conocer las escalas de tiempo, las cuales son críticas para determinar los intervalos de muestreo y filtros. La importancia de la información *a priori* también apareció en conexión con intentos de

desarrollar técnicas de ajustes automáticos de controladores PID. Tales reguladores son usados para sistemas de control con un amplio rango de constantes de tiempo.

Desde el punto de vista del usuario es ideal disponer de una función mediante la cual el controlador sea ajustado independiente de todo conocimiento previo del sistema. Aunque los esquemas adaptables tradicionales son herramientas ideales para su ajuste automático resultan inadecuadas porque requieren conocimientos previos de las escalas de tiempo. En la categoría de controladores con ajuste automático entran una variedad de controladores en los que el conocimiento previo del sistema es mínimo.

Por Sintonía Automática (Automatic Tuning) se entiende que los parámetros de un controlador estándar, por ejemplo un controlador PID, se sintonizan automáticamente con un pedido del operador. Después del ajuste los parámetros permanecen constantes. Prácticamente todos los controladores pueden ser usados en un modelo de sintonía automática. Hay algunas técnicas que se pueden usar exclusivamente con este propósito. El área de aplicación de este tipo de sistemas son los lazos de control simples y los controladores simples en sistemas distribuidos. La mayoría de los controladores de este tipo son del tipo PID. Hay una gran variedad de aplicaciones que utilizan muchos controladores de este tipo y la mayoría de ellos están mal sintonizados.

Aunque la mayoría de los sistemas con sintonía automática están desarrollados para controladores simples, estos se pueden utilizar para determinar las escalas de tiempo y para determinar valores iniciales para sistemas más complejos.

1.6. Aspectos negativos de los sistemas adaptables

Los sistemas adaptables de control tienen sus inconvenientes. No es aplicable a todos los procesos y en algunos casos pueden aparecer mecanismos de inestabilidad que son muy difícil de predecir.

Al ser el sistema completo no lineal (controlador de la planta más el algoritmo de ajuste de parámetros), se pueden excitar dinámicas no modeladas que inestabilizan el sistema completo. Por otro lado aparecen fenómenos de deriva en los parámetros. Los parámetros del controlador o del modelo, en circunstancias especiales, pueden variar lentamente sin que el mecanismo de ajuste lo detecte y lo corrija.

Debido a ello es que, para aplicar un sistema adaptable con éxito, se tiene que tener un buen conocimiento de las restricciones y las posibilidades de uso de los sistemas de control adaptable y del proceso a los que se les va a aplicar. En las secciones donde se detalla cada esquema de control adaptable se brindaran las ventajas e inconvenientes de cada esquema

Cuestionario y ejercicios

Ejercicio 1.1: Concepto de control adaptable.

De el concepto de control adaptable. De dos ejemplos en donde crea que es necesarios aplicar un esquema de control adaptable.

Ejercicio 1.2: Justificación de los sistemas adaptables.

Detalle los diferentes aspectos que justifican la utilización del control adaptable. De un ejemplo para cada caso.

Ejercicio 1.3: Reseña Histórica

De una pequeña reseña histórica de los sistemas adaptables.

Ejercicio 1.4: Clasificación de los sistemas de control adaptables

Explique las diferencias entre los sistemas adaptables:

- Directos e indirectos

- Ajuste permanente o de ajuste a demanda.

Ejercicio 1.5: Esquemas de control adaptable

Explique brevemente los diferentes esquemas de control adaptables:

- Sistemas adaptables con modelo de referencia

- Controladores auto-sintonizados

- Ganancia tabulada

- Sintonía Automática

2. IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

2.1. Introducción a la identificación de sistemas

El diseño de un controlador continuo o discreto, ya sea mediante técnicas clásicas o en variables de estado, requiere de un modelo de la planta a controlar que caracterice su comportamiento dinámico. Este modelo permite al diseñador realizar y validar mediante simulación el ajuste de los parámetros del controlador que permiten obtener una respuesta que satisfaga las especificaciones de diseño. En los esquemas de control adaptable indirectos se debe disponer de un método de identificación para obtener parámetros del sistema que me permitan ajustar los parámetros del controlador.

En esta sección se estudian diferentes alternativas para obtener el modelo de un sistema como paso previo al diseño de un controlador.

Para mayor información ver la bibliografía recomendada especialmente [Ljung and Glad, 1994] y [Ljung, 1999]

2.1.1. Concepto de sistema

Un *sistema* es toda realidad en la que interactúan variables de diferentes tipos para producir señales observables. Las señales observables que son de interés para el observador se denominan *salidas* del sistema, mientras que las señales que pueden ser manipuladas libremente por dicho observador son las *entradas* del mismo. El resto de señales que influyen en la evolución de las salidas pero no pueden ser manipuladas por el observador se denominan *perturbaciones*. Si una perturbación se pueden medir con un instrumento se la denomina *perturbación medible* y sino, *perturbación no medible* [Ljung, 1999]. En la figura 2.1.1 se puede apreciar este concepto.

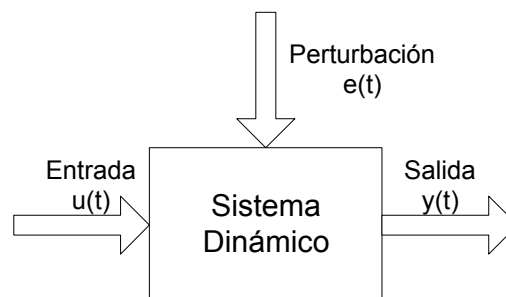


Figura 2.1.1. Sistema dinámico con entrada, perturbación y salida.

2.1.2. Modelo de un sistema

Cuando se hace necesario conocer el comportamiento de un sistema en determinadas condiciones y ante determinadas entradas, se puede recurrir a la experimentación sobre dicho sistema y a la observación de sus salidas. Sin embargo, en muchos casos la experimentación puede resultar compleja o incluso imposible de llevar a cabo, lo que hace necesario trabajar con algún tipo de representación que se aproxime a la realidad. A este tipo de representación se la conoce como *modelo*.

Básicamente, un modelo es una herramienta que permite predecir el comportamiento de un sistema en determinadas circunstancias sin necesidad de experimentar sobre el sistema en sí.

2.1.3. Tipos de modelos

Los modelos de sistemas físicos pueden ser de muy diversos tipos. Los modelos que se tratan en esta sección son los comúnmente usados en el desarrollo de sistemas de control. Existen los llamados modelos a escala, donde lo que se realiza es una reproducción del sistema (a escala normalmente reducida) donde se pueden reproducir determinados experimentos a costo reducido. Después de realizado el experimento se deben extrapolar los resultados al sistema real.

Una clasificación, en función del grado de formalismo matemático que poseen, es la siguiente:

1. *Modelos mentales, intuitivos o verbales*: Estos modelos carecen de formalismo matemático. Para conducir un coche, por ejemplo, se requiere un modelo mental o intuitivo sobre el efecto que produce el movimiento del volante, pero no es necesario caracterizar dicho efecto mediante ecuaciones matemáticas exactas.
2. *Modelos no paramétricos*: Muchos sistemas quedan perfectamente caracterizados mediante un gráfico o tabla que describa sus propiedades dinámicas mediante un número no finito de parámetros (o muy grande). Por ejemplo, un sistema lineal queda definido mediante su respuesta al impulso o al escalón, o bien mediante su respuesta en frecuencia.
3. *Modelos paramétricos o matemáticos*: Para aplicaciones más avanzadas, puede ser necesario utilizar modelos que describan las relaciones entre las variables del sistema mediante expresiones matemáticas como pueden ser ecuaciones diferenciales (para sistemas continuos) o en diferencias (para sistemas discretos).

En función del tipo y de la representación matemática utilizada, los modelos pueden clasificarse en:

- *Determinísticos o estocásticos*: Se dice que un modelo es *determinístico* cuando expresa la relación entre entradas y salidas mediante una ecuación exacta. Por otro lado, un modelo es *estocástico* si posee un cierto grado de incertidumbre. Estos últimos se definen mediante conceptos probabilísticos o estadísticos.
- *Dinámicos o estáticos*: Un sistema es estático cuando la salida depende únicamente de la entrada en ese mismo instante. En estos sistemas existe una relación directa entre entrada y salida, independiente del tiempo. Un sistema dinámico es aquél en el que las salidas evolucionan con el tiempo tras la aplicación de una determinada entrada. En estos últimos, para conocer el valor actual de la salida es necesario conocer no solo la entrada actual, sino también cual fue la entrada en instantes pasados.
- *Continuos o discretos*: Los sistemas continuos trabajan con señales continuas, y se caracterizan mediante *ecuaciones diferenciales*. Los sistemas discretos trabajan con señales muestreadas y quedan descritos mediante *ecuaciones en diferencias*.
- *Con parámetros concentrados o distribuidos*: Un modelo se define de *parámetros distribuidos* cuando la salida depende de coordenadas espaciales y del tiempo. Cuando se lo representa por ecuaciones diferenciales aparecen derivadas parciales con respecto a las variables independiente (coordenadas espaciales). Un modelo se lo llama de *parámetros concentrados* si la dependencia espacial se ignora eligiendo un valor simple representativo y la salida depende del tiempo y de las entradas.

- *Modelos lineales y no lineales:* En los *modelos lineales* existe una relación lineal entre las variables del sistema. En estos modelos se cumple el *principio de superposición* que establece que la respuesta a una señal de entrada formada por dos componentes sumadas es igual a la suma de las respuestas de las componentes por separado. En los modelos no lineales la relación entre las entradas y las salidas es no lineal.
- *Modelos en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia:* En los modelos en el dominio del tiempo las variables aparecen en función del tiempo, esto es en derivadas temporales. En los modelos en el dominio de la frecuencia las variables aparecen en el dominio de la frecuencia (lo que incluye la transformada de Laplace, los espectros de potencia, etc.)

Todo modelo matemático o paramétrico, por lo tanto, consta de una o varias ecuaciones que relacionan las entradas y las salidas (en los modelos dinámicos la variable t , tiempo, juega también un papel primordial). De ahí que a los modelos matemáticos se les conozca más comúnmente como *modelos paramétricos*, ya que pueden definirse mediante una *estructura* y un número finito de *parámetros*.

Los modelos de sistemas dinámicos normalmente se representan a través de ecuaciones diferenciales. De acuerdo como sea la estructura en que se presenten las ecuaciones diferenciales se pueden representar en:

Representación de Entrada-Salida: El proceso y sus variables asociadas se pueden describir gráficamente como se muestra en la [figura 2.1.2](#). El bloque principal representa el proceso donde las flechas indican las entradas, las salidas y las perturbaciones.

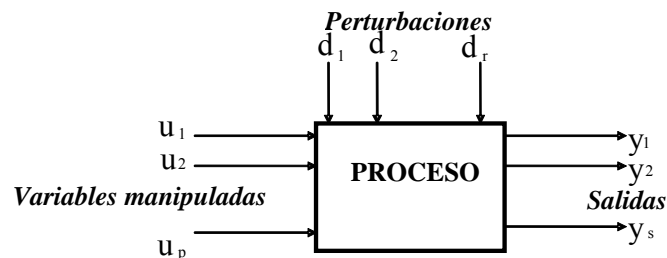


Figura 2.1.2. Un proceso y sus salidas y entradas asociadas.

En particular, el modelo debe tener para cada salida la siguiente forma general

$$\text{Salida} = f(\text{entradas})$$

De acuerdo con la [figura 2.1.2](#), la relación se puede escribir como

$$y_i = f(u_1, u_2, \dots, u_p, d_1, d_2, \dots, d_r) \quad i = 1, 2, 3, \dots, s$$

Este modelo, describe directamente la relación entre las variables de entrada y de salida. Se lo llama modelo entrada-salida. Es muy conveniente ya que representa la relación causa-efecto en el sistema. Por esta razón es muy atractivo para los ingenieros de control y los diseñadores de controladores.

La relación de entrada-salida de un sistema lineal invariante en el tiempo con entrada de continua se puede describir por una ecuación diferencial o por un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas. Considerando que la relación de entrada - salida de un sistema lineal invariante en el tiempo se describe por la siguiente ecuación diferencial de orden n con coeficientes constante

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_m u(t) + \dots + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m}$$

donde los coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n y b_0, b_1, \dots, b_m son reales y constantes, y $n \geq m$. Esta condición proviene de la viabilidad (realizabilidad) del sistema.

Una vez que se conoce la entrada $u(t)$ para todo $t \geq t_0$ y las condiciones iniciales del problema (es decir los valores de la función y su derivada en el instante inicial $y(t_0) = y_0$, $y^{(1)}(t_0) = y_1$, $y^{(2)}(t_0) = y_2$, \dots , $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$) la respuesta de salida $y(t)$ para $t \geq t_0$ se determina resolviendo la ecuación diferencial.

Representación en espacio de estado [Ogata, 1998]: Las variables de estado de un sistema son definidas como el mínimo conjunto de variables $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ tal que el conocimiento de estas variables en cualquier estado inicial t_0 , más la información sobre la entradas de aplicadas posteriormente, son suficientes para determinar el estado del sistema en instante de tiempos futuros $t > t_0$. Los métodos en el espacio de estado se pueden aplicar tanto a sistemas lineales invariantes, a sistemas lineales variantes, a sistemas no lineales con parámetros variantes o constantes como a sistemas multivariable.

Como un ejemplo ilustrativo se considera un sistema lineal invariante en el tiempo con una entrada y una salida, donde la función no envuelve términos derivativos de la entrada $u(t)$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = u(t)$$

El conocimiento de la entrada $u(t)$ y las condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$, $y^{(1)}(t_0) = y_1$, $y^{(2)}(t_0) = y_2$, \dots , $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ determina completamente el comportamiento del sistema. Se debe considerar a $y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ como un conjunto de n variables de estado. Matemáticamente, esta elección de las variables de estado es bastante conveniente. Sin embargo, en la práctica esta elección no es siempre la mejor debido a que los términos de derivadas de alto orden son imprecisas y que el ruido afecta sistemáticamente todas las variables.

Si se definen las siguientes variables, llamadas *variables de estados*

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y^{(1)}(t), \quad x_3(t) = y^{(2)}(t), \dots, x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

esta ecuación se puede escribir como

$$x_1^{(1)}(t) = x_2(t), \quad x_2^{(1)}(t) = x_3(t), \dots, x_{n-1}^{(1)}(t) = x_n(t),$$

$$x_n^{(1)}(t) = -a_1 x_n(t) - a_2 x_{n-1}(t) - \dots - a_{n-1} x_2(t) - a_n x_1(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

o en una representación matriz-vector

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

Hay varias otras maneras para elegir las variables de estado y representar adecuadamente el modelo matemático.

La [figura 2.1.3](#) muestra un esquema con los distintos tipos de modelos.

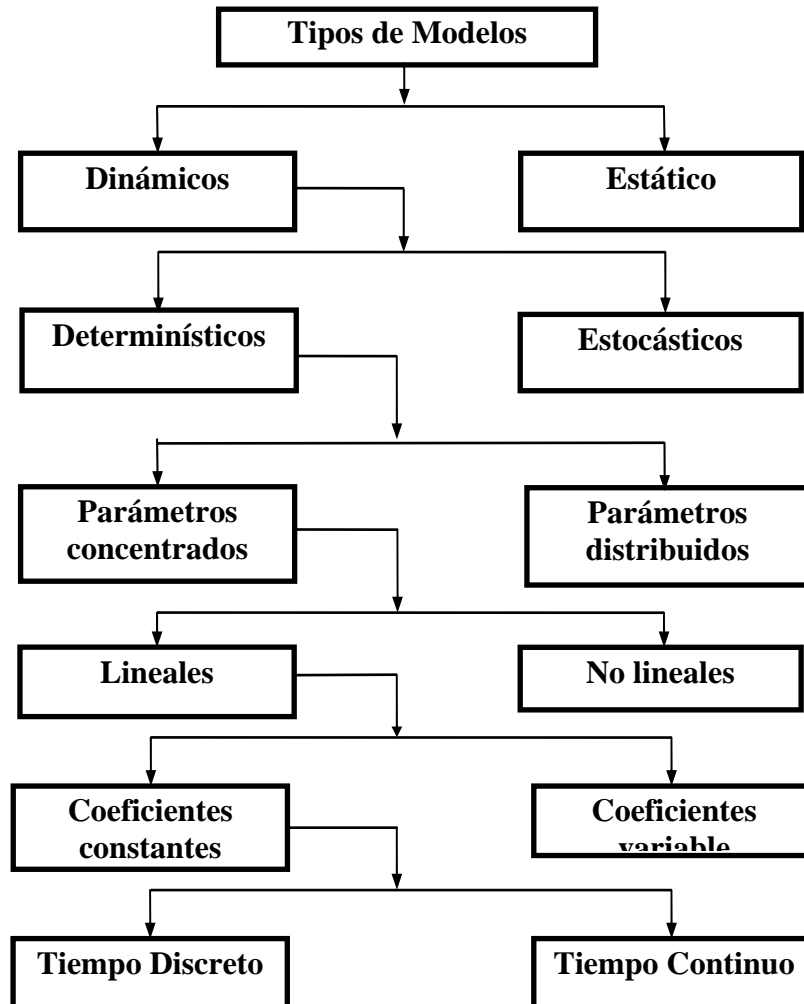


Figura 2.1.3. Diagrama con los diferentes tipos de modelos.

2.1.4. Métodos de obtención de modelos

Existen dos métodos principales para obtener el modelo matemáticos de un sistema:

1. *Modelado teórico.* Se trata de un método analítico, en el que se recurre a leyes básicas de la física para describir el comportamiento dinámico de un fenómeno o proceso.
2. *Identificación del sistema.* Se trata de un método experimental que permite obtener el modelo de un sistema a partir de datos reales recogidos de la planta bajo estudio.

El modelado teórico tiene un campo de aplicación restringido a procesos muy sencillos de modelar, o a aplicaciones en que no se requiera gran exactitud en el modelo obtenido. En muchos casos, además, la estructura del modelo obtenido a partir del conocimiento físico de la planta posee un conjunto de parámetros desconocidos y que sólo se pueden determinar experimentando sobre el sistema real. De ahí la necesidad de recurrir a los métodos de *identificación de sistemas*.

Los modelos obtenidos mediante técnicas de identificación tienen, sin embargo, las siguientes desventajas:

1. Su rango de validez suele ser limitado (sólo son aplicables a un determinado punto de trabajo, un determinado tipo de entrada o un proceso concreto).
2. En muchos casos es difícil dar significado físico al modelo obtenido, puesto que los parámetros identificados no tienen relación directa con ninguna magnitud física. Estos parámetros se utilizan sólo para dar una descripción aceptable del comportamiento conjunto del sistema.
3. Para poder realizar la identificación el sistema debe existir y por lo tanto no es útil en la etapa de diseño de sistema.

En la práctica, lo ideal es recurrir a una mezcla de ambos métodos de modelado para obtener el modelo final. El uso de datos reales para identificar los parámetros del modelo provee a éste de una gran exactitud, pero el proceso de identificación se ve tanto más facilitado cuanto mayor sea el conocimiento sobre las leyes físicas que rigen el proceso.

2.1.5. Concepto de identificación de sistemas

Se entiende por identificación de sistemas a la obtención en forma experimental de un modelo que reproduzca con suficiente exactitud, para los fines deseados, las características dinámicas del proceso objeto de estudio. Cuando se dice en forma experimental se entiende que después de realizar un experimento sobre el sistema, a partir de los datos de entrada y salida medidos se obtiene el modelo.

2.1.6. El proceso de identificación

En términos generales, el proceso de identificación comprende los siguientes pasos:

1. *Obtención de datos de entrada - salida.* Para ello se debe excitar el sistema mediante la aplicación de una señal de entrada y registrar la evolución de sus entradas y salidas durante un intervalo de tiempo.
2. *Tratamiento previo de los datos registrados.* Los datos registrados están generalmente acompañados de ruidos indeseados u otro tipo de imperfecciones que puede ser necesario corregir antes de iniciar la identificación del modelo. Se trata, por tanto, de ‘preparar’ los datos para facilitar y mejorar el proceso de identificación.
3. *Elección de la estructura del modelo.* Si el modelo que se desea obtener es un modelo paramétrico, el primer paso es determinar la estructura deseada para dicho modelo. Este punto se facilita en gran medida si se tiene un cierto conocimiento sobre las leyes físicas que rigen el proceso. Incluye la elección de la estructura la determinación de las entradas y perturbaciones del sistema ya que muchas veces estas no son conocidas.
4. *Obtención de los parámetros del modelo.* A continuación se procede a la estimación de los parámetros de la estructura que mejor ajustan la respuesta del modelo a los datos de entrada-salida obtenidos experimentalmente.
5. *Validación del modelo.* El último paso consiste en determinar si el modelo obtenido satisface el grado de exactitud requerido para la aplicación en cuestión. Si se llega a la conclusión de que el modelo no es válido, se deben revisar los siguientes aspectos como posibles causas:
 - a) El conjunto de datos de entrada-salida no proporciona suficiente información sobre la dinámica del sistema.
 - b) La estructura escogida no es capaz de proporcionar una buena descripción del modelo.

c) El criterio de ajuste de parámetros seleccionado no es el más adecuado. Dependiendo de la causa estimada, deberá repetirse el proceso de identificación desde el punto correspondiente. Por tanto, el proceso de identificación es un proceso iterativo, cuyos pasos pueden observarse en el organigrama de la [figura 2.1.4](#).

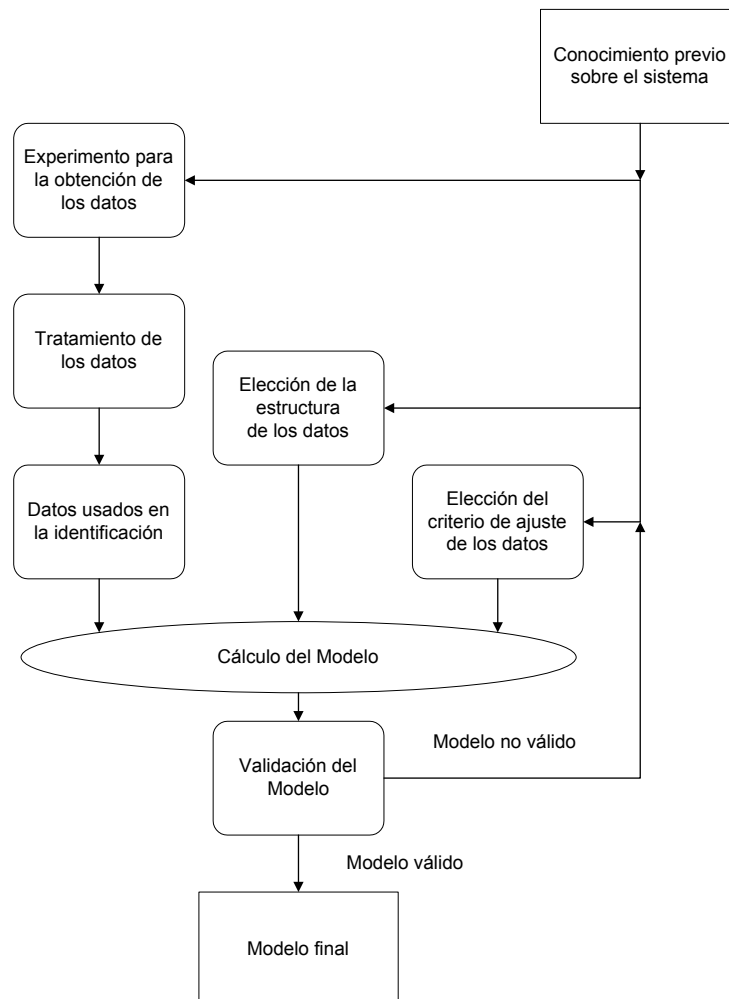


Figura 2.1.4. El proceso de identificación

2.1.7. Clasificación de los métodos de identificación

Existen diversos métodos de identificación, que pueden clasificarse según distintos criterios:

- Dependiendo del tipo de modelo obtenido:
 1. *Métodos no paramétricos*: estos permiten obtener modelos no paramétricos del sistema bajo estudio. Algunos de estos métodos son; análisis de la respuesta transitoria, análisis de la respuesta en frecuencia, análisis de la correlación, análisis espectral, análisis de Fourier, etc.
 2. *Métodos paramétricos*: estos permiten obtener modelos paramétricos. Estos métodos requieren la elección de una posible estructura del modelo, de un criterio de ajuste de parámetros, y por último de la estimación de los parámetros que mejor ajustan el modelo a los datos experimentales.
- Dependiendo de la aplicación:
 1. *Métodos de identificación fuera de línea o a posteriori (off-line)*: estos son utilizados en aquellas aplicaciones en que no se requiera un ajuste continuado del modelo. En estos casos, se realiza la identificación previa de la planta,

considerándose que la validez de los parámetros obtenidos no se verá alterada con el paso del tiempo.

2. *Métodos de identificación en línea o recursiva (on-line)*: en ellos los parámetros se van actualizando continuamente a partir de los nuevos datos de entrada-salida obtenidos durante la evolución del proceso. Estos métodos son muy utilizados en sistemas de control adaptable.

- Dependiendo del criterio de ajuste de los parámetros:

Existen diversos métodos matemáticos para ajustar los parámetros de una estructura a un conjunto de datos de entrada-salida. Entre los más utilizados en el campo de la identificación y el control adaptable están los métodos de mínimos cuadrados, de gradiente descendente, de las variables instrumentales, etc.

2.2. Métodos de identificación no paramétricos.

Los métodos de identificación no paramétricos permiten obtener modelos o representaciones no paramétricas de la planta bajo estudio. Esto quiere decir que los modelos no están representados por un número finito de parámetros (puede ser un número muy grande) sino mas bien por una curva ya sea temporal o frecuencial.

Un sistema lineal invariante en el tiempo se puede describir por su respuesta correspondiente a un impulso o por su respuesta frecuencial. En esta sección se discutirán los métodos directos para determinar estas funciones. Generalmente estos métodos dan como resultado modelos no paramétricos debido a que ellos, en la mayoría de los casos, no emplean un vector con un número finito de parámetros para buscar una buena descripción. Hay métodos en la literatura que permiten obtener modelos paramétricos a partir de estos modelos no paramétricos.

A continuación se tratarán los siguientes métodos:

- *Análisis de respuesta transitoria*: En estos métodos, la entrada es una señal de prueba, generalmente una señal tipo impulso o tipo escalón, y entonces el registro de salida constituye el modelo. En esta sección también se discutirán algunos métodos para obtener modelos paramétricos directamente de la respuesta transitoria.
- *Análisis por correlación*: Este está basado en una señal de entrada tipo ruido blanco. Una función de covarianza cruzada normalizada entre la salida y la entrada da como resultado una estima de la función de peso.
- *Técnicas Frecuenciales*: Estas apuntan a determinar la función frecuencial del sistema. Los métodos son los siguientes.
 - *Análisis de respuesta en frecuencia*: Este utiliza una señal de prueba simple, una señal sinusoidal. Para un sistema lineal en estado estacionario, la salida también será una señal sinusoidal. El cambio en la amplitud y la fase dará la respuesta en frecuencia para la frecuencia usada.
 - *Análisis de Fourier*: Esta obtiene la respuesta en frecuencia usando las transformadas de Fourier de las señales de entrada y salida.
 - *Análisis Espectral*: El análisis espectral estima la respuesta en frecuencia para una entrada arbitraria a través de la división del espectro cruzado entre la salida y la entrada con el espectro de la entrada.

2.2.1. Análisis por respuesta transitoria

Los sistemas lineales y estacionarios quedan completamente caracterizados por su función transferencia, ya que la respuesta del sistema a una entrada arbitraria puede calcularse si se conoce la transformada de Laplace de la entrada y la función de transferencia del sistema (las condiciones iniciales se suponen nulas).

Esto es

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

donde

$G(s)$ es la función de transferencia del sistema

$Y(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta temporal de la salida $y(t)$

$U(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta temporal de la entrada $u(t)$

Por lo tanto calculando la transformada inversa de $Y(s)$ se obtiene la respuesta temporal de la salida.

Debido a que la transformada de Laplace de un impulso (función Delta de Dirac) es igual a 1, esto es

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

la respuesta del sistema al impulso será

$$Y(s) = G(s) \text{ cuando } U(s) = 1$$

Por lo tanto la respuesta del sistema al impulso también caracteriza al sistema y la función de transferencia se puede obtener como la transformada de Laplace de la salida del sistema cuando la entrada es un impulso.

Las señales de prueba (no periódicas) que se usan generalmente son pulsos (de diferente pendiente y relativa corta duración), funciones tipo escalón y funciones tipo rampa. La señal tipo impulso no es físicamente realizable porque es un pulso de amplitud infinita, duración nula y área bajo la curva igual a 1. Un grupo variado de señales no periódicas de prueba se muestran en la [figura 2.2.1](#). Para elegir una señal de prueba en una aplicación específica, se deben considerar las propiedades de la señal, las posibilidades de su generación y aplicación y la clase de información buscada para la prueba. La [tabla 2.2.1](#) muestra las señales más comunes usadas en la identificación con señales tipo.

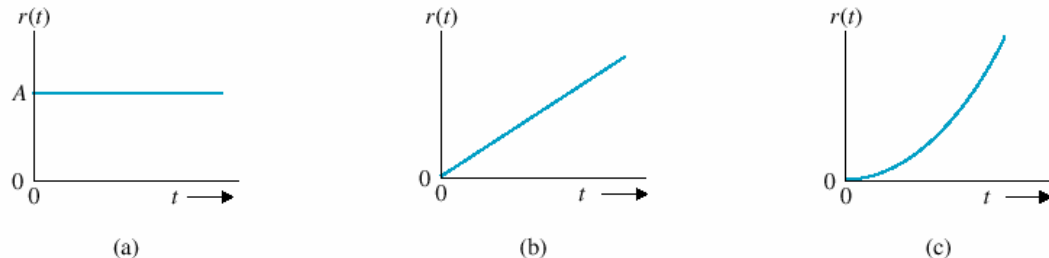


Figura 2.2.1. Señales de prueba no periódicas típicas.

Señal de Prueba	$r(t)$	$R(s)$	Propósito
Impulso	$r(t) = A\delta(t), \quad t \geq 0$ $= 0, \quad t < 0$	A	Prueba de estabilidad
Escalón	$r(t) = A, \quad t \geq 0$ $= 0, \quad t < 0$	$\frac{A}{s}$	Prueba de respuesta temporal
Rampa	$r(t) = At, \quad t \geq 0$ $= 0, \quad t < 0$	$\frac{A}{s^2}$	Prueba de capacidad de seguimiento
Parábola	$r(t) = At^2, \quad t \geq 0$ $= 0, \quad t < 0$	$\frac{2A}{s^3}$	Prueba de capacidad de seguimiento en velocidad

Tabla 2.2.1. Señales de prueba no periódicas típicas

Estas técnicas en general se aplican con sistemas digitales muestreados en el tiempo por lo tanto a continuación se analiza la respuesta de sistemas discretos. Si un sistema que es descrito en la forma de función de transferencia al impulso discreta

$$y(t) = G(q)u(t) + v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k) + v(t) \quad (2.2.1)$$

es sometido a un pulso de entrada

$$u(t) = \begin{cases} \alpha, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

entonces la salida será

$$y(t) = \alpha g(t) + v(t)$$

por la definición de $G(q)$ y la respuesta al impulso $\{g(t)\}$. Si el nivel de ruido es bajo, de esta manera es posible determinar los coeficientes de la respuesta al impulso con un experimento con una señal tipo pulso. La estima será

$$\hat{g}(t) = \frac{y(t)}{\alpha}$$

y el error de estima es $v(t)/\alpha$. La deficiencia de este método es que es difícil de tratar, aún con condiciones libre de ruido, tanto las propiedades para bajas como para altas frecuencia.

Efectivamente, se pueden listar los siguientes problemas prácticos del análisis con respuesta al impulso:

- Está restringido a sistemas estables
- Es difícil la generación de la entrada (señal impulso)
- Está influenciado por la dinámicas de los circuitos muestreadores y retendores
- Problemas de sincronización entre el impulso y las muestras
- Presenta dificultades al tener que aplicar magnitudes de entrada grandes
- Problemas con no linealidades (especialmente saturaciones)
- Aparecen dificultades debidas a que hay señales de larga duración y baja amplitud (cola de la respuesta al impulso)
- Es sensible al ruido.

Un complemento de la respuesta al impulso es el *análisis de respuesta al escalón*. Este en general es más fácil de realizar que la respuesta al impulso.

La señal de prueba es

$$u(t) = \begin{cases} \alpha, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Aplicando esta señal a un sistema descrito por la ecuación (2.2.1) la salida es

$$y(t) = \alpha \sum_{k=1}^t g(k) + v(t)$$

A partir de esta salida se puede obtener la salida al impulso como

$$\hat{g}(t) = \frac{y(t) - y(t-1)}{\alpha} \quad (2.2.2)$$

La cual tiene un error $[v(t) - v(t-1)]/\alpha$. En la mayoría de las aplicaciones la ecuación (2.2.2) resulta en errores graves.

Obtención de parámetros a partir de la respuesta a una señal determinada

Generalmente es útil ajustar la respuesta al escalón a un modelo simple de orden reducido. El sistema de orden reducido se puede utilizar por ejemplo para diseñar un controlador. Este método provee un método simple y directo para estimar los parámetros del modelo.

Uno de los más viejos métodos conocidos es el de aproximar la respuesta del sistema al escalón por la respuesta al escalón de un sistema de primer orden con retardo. Esto es si se describe por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t - \tau)$$

o en forma de función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT} e^{-s\tau}$$

Los parámetros K , T y τ se pueden derivar de la respuesta al escalón como se indica en la [figura 2.2.2](#) donde α es la amplitud de la señal de entrada tipo escalón.

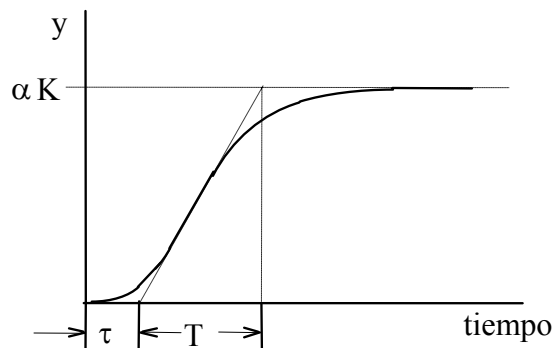


Figura 2.2.2. Obtención de los parámetros a partir de la respuesta al escalón.

Otro método realiza la estimación de los valores de los parámetros de un modelo de orden n con la misma constante de tiempo y retardo:

$$G(s) = \frac{K}{(1 + sT)^n} e^{-s\tau}$$

Las características de la respuesta escalón se muestran en la [tabla 2.2.2](#) y la constante de tiempo se calcula mediante: $\tau_1 = T / n$. La [figura 2.2.3](#) muestra los parámetros usados.

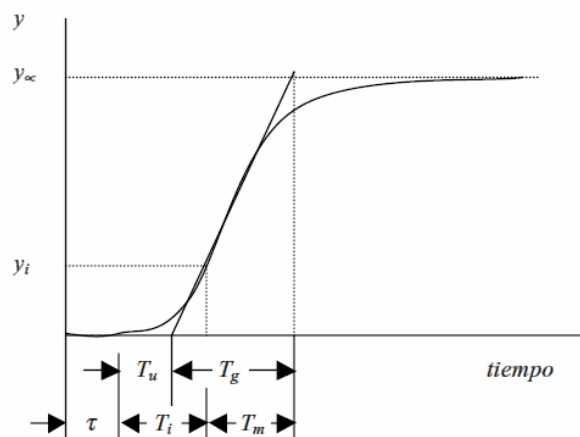


Figura 2.2.3. Evaluación de la respuesta a un escalón según Strejc

Existen distintos métodos práctico para poder estimar los parámetros de un sistema a partir de la respuesta temporal. Es importante reconocer la respuesta de distintos sistemas simples a señales de entrada de prueba. Esto permite estimar el orden del sistema y en que orden se encuentran las constantes de tiempo del sistema. Conociendo estos datos se pueden aplicar métodos de identificación más complejos que nos permite obtener los parámetros del sistema en forma más precisa. En la bibliografía específica (por ejemplo ver [Ogata, 1998]), se describe en forma detallada la respuesta de los sistemas a diferentes señales).

Tabla 2.2.2. Valores característicos de la respuesta escalón

n	T_g/T	T_u/T	T_u/T_g	T_i/T	y_i/y_∞	T_m/T	T_m/T_g
1	1.000	0.000	0.000	0	0.000	1.000	1.000
2	2.718	0.282	0.104	1	0.204	2.000	0.736
3	3.695	0.805	0.218	2	0.323	2.500	0.677
4	4.463	1.425	0.319	3	0.353	2.888	0.674
5	5.199	2.100	0.410	4	0.371	3.219	0.629
6	5.699	2.811	0.493	5	0.384	3.510	0.616
7	6.226	3.549	0.570	6	0.394	3.775	0.606
8	6.711	4.307	0.642	7	0.401	4.018	0.599
9	7.146	5.081	0.709	8	0.407	4.245	0.593
10	7.590	5.869	0.773	9	0.413	4.458	0.587

2.2.2. Análisis por correlación

El análisis por correlación es un método basado en un análisis estadístico y tiene como objetivo estimar la respuesta impulsional del proceso. Esta, se determina a partir del análisis de correlación entre la señal de entrada y la señal de salida. Las señales prueba más utilizadas en este ensayo son las secuencias de ruido blanco o, en la práctica, las señales pseudo aleatorias binarias (PRBS).

Definiciones previas

La función de **convarianza cruzada** entre dos variables, $x(t)$ y $y(t)$ se determina:

$$Cov\{x(t_1), y(t_2)\} = E\{(x(t_1) - \bar{x})(y(t_2) - \bar{y})\}$$

$$R_{xy} = E\{(x(t) - \bar{x})(y(t + \tau) - \bar{y})\} \cong \frac{1}{2} \sum_{t=0}^N ((x(t) - \bar{x})(y(t + \tau) - \bar{y}))$$

con $\tau=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

La función de **auto correlación** se determina:

$$\rho_y(y(t_1), y(t_2)) = \frac{R_y\{y(t_1), y(t_2)\}}{\sigma_y^2} = \frac{R_{yy}(\tau)}{R_{yy}(0)}$$

ya que:

$$R_{yy}(0) = \sigma_y^2 = Var\{y(t)\}$$

La función de **correlación cruzada** se calcula:

$$\rho_{xy}(x(t_1), y(t_2)) = \frac{R_{xy}\{x(t_1), y(t_2)\}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_x(0)} \sqrt{R_y(0)}}$$

Definición: Se dice que dos señales $x(t)$ y $y(t)$ no están correlacionadas (son independientes) con un 95% de confianza si:

$$P\left(\left|\rho_{xy}(\tau)\right| \leq \frac{1.96}{\sqrt{N}}\right) = 0.95$$

$$P\left(\left|R_{xy}(\tau)\right| \leq \frac{1.96\sqrt{R_x(0)}\sqrt{R_y(0)}}{\sqrt{N}}\right) = 0.95$$

Descripción del análisis por correlación

El modelo utilizado en el análisis de correlación es la respuesta impulso o función de pesos definida como

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(t-k) + v(t)$$

o la función continua equivalente.

Si la entrada es una secuencia casi estacionaria de media nula con:

$$R_{uu}(\tau) = E[u(t+\tau)u(t)]$$

y asumiendo que se trata de un proceso estocástico estacionario, la relación equivalente entre la función de covarianza cruzada de la entrada con la salida y la función de auto covarianza de la entrada es:

$$R_{yu}(\tau) = E\{y(t)u(t-\tau)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)E\{u(t)u(t-\tau)\} + E\{v(t)u(t-\tau)\}$$

A esta ecuación de la denomina ecuación de *Wiener-Hopf*. En el caso en que la señal de entrada y las perturbaciones sean independientes:

$$R_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)E\{u(t)u(t-\tau)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)R_{uu}(\tau-k)$$

En la práctica, ya que las señales de entrada y salida no son infinitas, las funciones de covarianza se estiman a partir de los datos de la siguiente forma:

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1-\min(\tau,0)}^{N-\max(\tau,0)} y(t)u(t+\tau), \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\hat{R}_{uu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} u(t)u(t+\tau), \quad \hat{R}_{uu}(-\tau) = \hat{R}_{uu}(\tau)$$

En estas condiciones, el valor estimado de los pesos de la función $g(k)$ puede ser determinado solucionando la ecuación

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}(k)\hat{R}_{uu}(\tau-k) \quad (2.2.3)$$

que consiste en un sistema lineal de dimensión finita.

El problema queda muy simplificado en el caso en que se utilicen señales de prueba especiales con funciones de auto covarianza sencillas. Cuando se utiliza, por ejemplo, un ruido blanco como señal de prueba, sabiendo que $\hat{R}_{uu}(\tau) = 0$ para $\tau > 0$, la ecuación (2.2.3) queda reducida a:

$$g(\tau) = R_{yu}(\tau) / R_{uu}(0) \quad (2.2.4)$$

siendo fácilmente calculable a partir de los datos experimentales.

En el caso en que la señal de excitación no sea un ruido blanco, el cálculo de la ecuación (2.2.3) no es trivial. A continuación se proponen dos métodos para resolverla:

1. *Función de pesos truncada o respuesta impulsional finita (FIR)*: En este caso se considera que la función impulso es de orden finito: $g(k) = 0$ para $k \geq M$. Para ser

utilizado, es necesario que M sea mayor que la constante dominante del sistema. En este caso una buena aproximación para solucionar la ecuación (2.2.3) es:

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{g}(k) \hat{R}_{uu}(\tau - k)$$

Escribiendo esta ecuación de forma desarrollada para $\tau = 0, 1, \dots, M-1$, se obtienen el siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_{yu}(0) \\ \vdots \\ \hat{R}_{yu}(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{uu}(0) & \cdots & \hat{R}_{uu}(M-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}_{uu}(M-1) & \cdots & \hat{R}_{uu}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{g}(0) \\ \vdots \\ \hat{g}(M-1) \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser aplicadas a más de M valores de τ dando lugar a un sistema de ecuaciones lineales sobre determinado.

2. *Aplicando filtros*: Un segundo método propuesto es el de aplicar un filtro para blanquear la señal de entrada. Cuando ambas señales, entrada y salida, son filtradas con el mismo filtro $L(q^{-1})$

$$u_F(t) = L(q^{-1})u(t)$$

$$y_F(t) = L(q^{-1})y(t)$$

las señales filtradas presentan la misma relación que en la ecuación (2.2.1)

$$y_F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u_F(t-k) + v_F(t)$$

El filtro L debe ser seleccionado de tal manera que la señal de entrada $u_F(t)$ sea lo más parecida posible a un ruido blanco. Puede calcularse considerando que L es un filtro AR (auto regresivo): $A(q^{-1})u(t)=e(t)$, donde el polinomio $A(q) = L(q)$ puede calcularse utilizando el método de mínimos cuadrados. El orden del polinomio A , na , suele estar comprendido entre 4 y 8. Se determina la función impulsional aplicando la ecuación (2.2.4) de la forma:

$$\hat{g}(k) = R_{y_F u_F}(k) / R_{u_F u_F}(0)$$

Más detalles sobre el mismo se exponen en [Ljung and Glad, 1994].

Las propiedades básicas del análisis de correlación son:

- Al igual que en el análisis de la respuesta transitoria, el análisis de correlación da una rápida información sobre la constante de tiempo dominante del sistema y del retardo puro.
- Es necesario una entrada especial (no muy complicada de producir).
- Dan como resultado una tabla de datos o una gráfica que no pueden ser utilizados directamente en simulación.
- Los resultados obtenidos parten del hecho de que la entrada es independiente de las perturbaciones y/o ruido, esto limita el uso de este método a sistemas sin realimentación (lazo abierto).

2.2.3. Técnicas frecuenciales

Los sistemas lineales pueden también definirse a partir de la respuesta frecuencial $G(j\omega)$. Mientras que las respuestas transitorias y el análisis de correlación tienen por objetivo estimar la respuesta impulsional, las técnicas frecuenciales tienen por objetivo la estimación directa de la respuesta frecuencial. A partir de ella se puede estimar los parámetros de la función de transferencia. Las técnicas que se presentan en este apartado son el análisis con señales senoidales, el análisis de Fourier y el análisis espectral.

2.2.3.1. Análisis de la respuesta frecuencial

El análisis de la respuesta frecuencial es un método simple para obtener información acerca de un sistema lineal. Consiste simplemente en describir como se comporta el sistema cuando está sometido a una entrada senoidal. Al aplicar una señal de entrada definida por:

$$u(t) = \alpha \sin(\omega t)$$

la respuesta del sistema puede describirse como:

$$y(t) = |G(j\omega)| \alpha \sin(\omega t + \phi(\omega)) + v(t) + \text{Transitorio}$$

donde

$$\phi(\omega) = \arg(G(j\omega))$$

Asumiendo que se puede ignorar el transitorio y considerar solo la respuesta estacionaria, la salida del sistema puede utilizarse directamente para determinar $G(j\omega)$. Observando simplemente la señal de entrada y de salida, se puede calcular la ganancia y el desfase entre ambas señales. La [figura 2.2.4](#) muestra como evaluar la respuesta a una entrada senoidal.

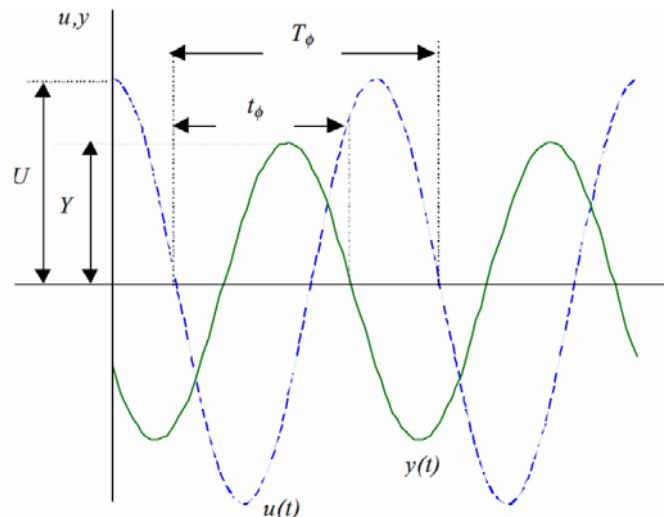


Figura 2.2.4. Evaluación de la respuesta sinusoidal.

La ganancia y la fase se obtienen:

$$\phi(\omega) = -2\pi t_\phi / T_\phi$$

$$|G(j\omega)| = Y / U$$

Cuando el experimento se repite con distintas frecuencias pertenecientes al ancho de banda del sistema, el resultado puede dibujarse en forma de *diagrama de Bode*.

Las ventajas de este método son:

- Es fácil de utilizar y no se requiere un procesamiento difícil de los datos.
- No es necesario hacer ninguna suposición sobre la estructura del modelo, solo considerar que se trata de un modelo lineal.
- Es fácil concentrar el estudio del proceso en un rango de frecuencias determinado.

Los inconvenientes que presenta este método son:

- Dan como resultado una tabla de datos o un gráfico que no puede ser utilizado directamente en simulación.

- Son necesario largos periodos de pruebas si se quiere evaluar el valor de $G(j\omega)$ para un gran número de frecuencias.
- Es muy sensible al ruido presente en el sistema y no da ningún valor medio estadístico.
- En la mayoría de las veces resulta difícil determinar el valor de desfase entre las señales.

Para evitar el problema de las perturbaciones, se puede utilizar el denominado *método de correlación* para el análisis de la respuesta frecuencial. Tal como se muestra en la [figura 2.2.5](#), consiste en multiplicar la salida del sistema por una señal seno y una señal coseno de la misma frecuencia que la entrada del sistema y a continuación integrar las señales obtenidas considerando un intervalo específico de medida T_m :

$$y_s(w) = \int_0^{T_m} y(t) \sin(\omega t) dt = \frac{1}{2} T_m |G(jw)| \alpha \cos(\phi(w))$$

$$y_c(w) = \int_0^{T_m} y(t) \cos(\omega t) dt = \frac{1}{2} T_m |G(jw)| \alpha \sin(\phi(w))$$

La estimación de la amplitud y de la fase se calcula mediante:

$$|\hat{G}(jw)| = \frac{2}{\alpha T_m} \sqrt{y_s^2(w) + y_c^2(w)}$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \arctan \frac{y_c(\omega)}{y_s(\omega)} + k\pi$$

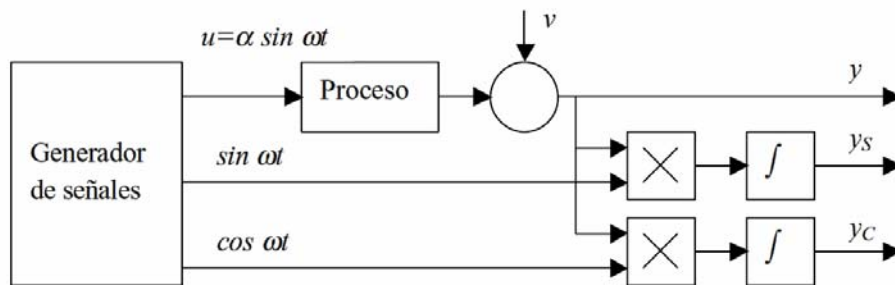


Figura 2.2.5. Análisis de la respuesta frecuencial con técnicas de correlación.

Para minimizar el efecto de las perturbaciones, la duración de las medidas T_m debe ser siempre un múltiplo del periodo de la señal de prueba. En el mercado hay equipos que utilizan este método para realizar el análisis frecuencial. El principal inconveniente de este método radica en el hecho de que en la mayoría de procesos industriales no es posible aplicar una señal seno como entrada en operación normal y, al igual que el método anterior, requiere repetir los experimentos para muchas frecuencias, hecho que en muchos casos lo hace inviable.

2.2.3.2. Análisis de Fourier

Se dice que una señal, $u(t)$, es de energía finita si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt < \infty \quad o \quad T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u(kT)| < \infty$$

Si la entrada tiene energía finita, es posible determinar la función de transferencia frecuencial utilizando la transformada de Fourier de las señales de entrada y salida:

$$Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega) \Rightarrow \hat{G}(j\omega) = Y(\omega)/U(\omega)$$

En el caso de tener acceso a datos en un intervalo de tiempo finito $0 < t < S$, la transformada de Fourier de las señales se determina mediante:

$$Y_s(\omega) = \int_0^S y(t)e^{-j\omega t} dt, \quad U_s(\omega) = \int_0^S u(t)e^{-j\omega t} dt$$

por lo tanto, la *estimación de la función de transferencia empírica* (ETFE) se determina con la ecuación:

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{Y_s(\omega)}{U_s(\omega)}$$

En el caso en que se disponga de datos muestreados: $u(kT)$, $y(kT)$ para $k = 1, \dots, N$, se puede utilizar para el cálculo de la transformada de Fourier discreta:

$$Y_s(\omega) = T \sum_{k=1}^N y(kT) e^{-j\omega kT}$$

$$U_s(\omega) = T \sum_{k=1}^N u(kT) e^{-j\omega kT}$$

siendo T el periodo de muestreo y $N = S/T$.

Cuando la frecuencia tiende por valor $\omega = r2\pi/N$, para $r = 0, \dots, N-1$, y N se ajusta a una potencia de dos, es posible utilizar la transformada rápida de Fourier (FFT) para estimar los valores de $Y_s(\omega)$ y $U_s(\omega)$.

El siguiente teorema nos permite evaluar las propiedades de la ETFE.

Teorema: Considerando que un sistema tiene por expresión

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau + v(t)$$

y asumiendo que:

$$|u(t)| < c_u \quad y \quad \int_0^\infty \tau |g(\tau)| d\tau = c_g$$

se deduce que [Ljung and Glad, 1994]

$$|\hat{G}(j\omega) - G(j\omega)| \leq \frac{2c_u c_g}{|U_s(\omega)|} + \frac{|V_s(\omega)|}{|U_s(\omega)|}$$

Para interpretar el resultado se deben hacer suposiciones respecto a la señal de entrada.

Caso 1. Entrada periódica y S es un múltiplo del período:

- ETFE está definida por un número fijo de frecuencias.
- A estas frecuencias la ETFE converge al valor real y su varianza decrece en función de $1/N$.

Caso 2. La entrada es una señal no periódica:

- La ETFE converge asintóticamente a la función de transferencia cuando se incrementa el número de datos, a mayor S mayor número de frecuencias evaluadas.
- La variancia de ETFE no decrece al incrementar S , esta se mantiene constante e igual a la relación señal/ruido para cada frecuencia.

Entre las ventajas e inconvenientes del análisis de Fourier destacan:

- Es un método fácil e eficiente, especialmente cuando se aplica la FFT.

- Permite una buena estimación de $G(j\omega)$ cuando la entrada es una señal periódica.
- Para señales no periódicas la función obtenida es muy fluctuante.

2.2.3.2. Análisis espectral

El espectro de una señal $u(t)$ o periodograma, $\Phi_{uu}(\omega)$, se puede interpretar como una media de su contenido frecuencial y se define como:

$$\Phi_{uu}(\omega) = \frac{1}{N} |U(\omega)|^2 \quad (2.2.5)$$

donde

$$U_N(\omega) \Phi_{uu}(\omega) = \frac{1}{N} |U(\omega)|^2$$

Las propiedades de los periodogramas son:

1. Una señal puramente senoidal presenta picos en este diagrama.
2. Con otros tipos de señales el resultado obtenido es muy fluctuante.
3. Suavizando visualmente los resultados obtenidos puede obtenerse, a partir de este análisis, una idea del contenido frecuencial de la señal.

Dado una señal $u(t)$ obtenida de un proceso estocástico con una densidad espectral $\Phi_{uu}(\omega)$, el valor estimado de $\hat{\Phi}_N(\omega)$ será

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = \Phi_{uu}(\omega) + R_N \quad (2.2.6)$$

siendo R_N el termino residual, responsable de las fluctuaciones. Este término se caracteriza por tener un valor medio nulo y una variancia que depende del tipo de señal y puede tender a cero a medida que se aumenta N .

Como resultado de aplicar la transformada de Fourier al modelo representado por:

$$y(t) = G(q)u(t) + v(t)$$

se obtiene:

$$Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega) + V(\omega) \quad (2.2.7)$$

Considerando que las señales $u(t)$ y $v(t)$ son independientes, al multiplicar la ecuación (2.2.7) por el término $U(\omega)$ se obtiene la ecuación (2.2.8) con la cual es posible estimar la función frecuencial (2.2.9). Y, al mismo tiempo, como resultado de elevar al cuadrado la ecuación (2.2.7) se obtiene la ecuación (2.2.10) que hace posible estimar el espectro de la perturbación (2.2.11).

$$\Phi_{yu}(\omega) = G(j\omega)\Phi_{uu}(\omega) \quad (2.2.8)$$

La estimación de la función espectral se realiza mediante:

$$\hat{G}_N(j\omega) = \frac{\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)}{\hat{\Phi}_{uu}^N(\omega)} \quad (2.2.9)$$

El análisis del espectro de las perturbaciones se obtiene:

$$\Phi_y(\omega) = |G(j\omega)|^2 \Phi_u(\omega) + \Phi_v(\omega) \quad (2.2.10)$$

$$\hat{\Phi}_v^N(\omega) = \hat{\Phi}_y^N(\omega) - \frac{|\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)|^2}{\hat{\Phi}_u^N(\omega)} \quad (2.2.11)$$

Para aplicar la ecuación (2.2.9), debe determinarse en primer lugar el espectro de la señal de entrada $u(t)$ y el espectro cruzado entre las señales $u(t)$ y $y(t)$. Se ha visto en (2.2.6) que el espectro tiene asociado un término residual, por lo tanto para realizar una buena estimación de la función de transferencia del sistema será necesario reducir este

término. En la bibliografía hay distintos métodos para reducir la variación o término residuo del espectro de una señal, aquí se describen dos de ellos por ser los utilizados en el programa MATLAB [Matlab-Ident, 2001].

1. Método de Welch

Consiste en descomponer la señal en L segmentos de longitud M (siendo M una potencia de dos) y con un tanto por ciento de solapamiento, determinar el espectro de cada uno de estos segmentos y hacer un promedio entre los resultados obtenidos.

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \hat{\Phi}_M^{(k)}(\omega)$$

Con ello se reduce el factor RN a costa de reducir la resolución espectral.

2. Metodo de Blackman-Tukey

Este método consiste en reducir las fluctuaciones haciendo un promedio entre un número determinado de frecuencias vecinas.

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} W_{\gamma}(\omega - \xi) \hat{\Phi}_N(\xi) d\xi$$

donde: $W_{\gamma}(\omega)$ es una función ventana centrada y $1/\gamma$ describe la longitud de la ventana.

Otra forma distinta a la ecuación (2.2.5) para calcular el espectro de una señal consiste en utilizar la función varianza:

$$\Phi_u(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_u(kT) e^{-i\omega kT} \quad (2.2.12)$$

Por lo tanto la ecuación (2.2.12) puede ser expresada también como:

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = T \sum_{k=-\gamma}^{\gamma} W_{\gamma}(k) \hat{R}_u^N(kT) e^{-i\omega kT} \quad (2.2.13)$$

Las etapas que proponen *Blackman-Tukey* para estimar el espectro de una función son:

a) Definir el tipo de ventana. En general para el análisis espectral se suele utilizar la ventana *Hamming*:

$$\omega_{\gamma}(k) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\pi k/\gamma)) \quad \begin{matrix} |k| < \gamma \\ |k| \geq \gamma \end{matrix}$$

$$\omega_{\gamma}(k) = 0$$

b) Determinar la longitud de la ventana. Este valor es un compromiso entre la resolución espectral (mayor γ menor resolución) y la variancia (a mayor γ mayor variancia).

- Cuando se desean determinar picos de resonancia son necesarios valores grandes de γ , comportando un aumento de la variancia.

- Cuando se desea evaluar un espectro llano se utilizan valores pequeños de longitud de ventana.

c) Calcular $R_u(k)$ para $k=0, \dots, \gamma$

d) Determinar $\hat{\Phi}_N(\omega)$ a partir de la ecuación (2.2.13). El espectro cruzado entre las señales de entrada y salida se determinan a partir de:

$$\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega) = \sum_{\ell=-\gamma}^{\gamma} \hat{R}_{yu}^N(\ell) W_{\gamma}(\ell) e^{-i\ell\omega}$$

2.3. Diseño de los experimentos

Para utilizar debidamente los métodos de identificación es necesario, siempre que sea posible, diseñar adecuadamente el experimento. Para ello es necesario disponer de unos conocimientos básicos sobre el comportamiento del proceso, seleccionar las señales de entrada, ... entre otras. Esta información puede obtenerse realizando una serie de experimentos básicos y sencillos conocidos con el nombre de *experimentos preliminares*.

2.3.1. Experimentos preliminares

Los experimentos preliminares permiten obtener información básica del comportamiento del sistema. Se conocen con este nombre los siguientes tipos de ensayos [Ljung and Glad, 1994]:

(a) Los experimentos de *funcionamiento libre* (*free run experiments*) consisten en analizar los datos correspondientes al funcionamiento normal del proceso. Por lo tanto, no se requiere ninguna activación específica de las entradas. Este tipo de experimentos permite determinar las características de las perturbaciones que afectan a la salida del proceso y el ruido inherente en las señales capturadas.

(b) El experimento en *escalón* (*staircase experiment*) es útil para observar el grado de linealidad del proceso estudiado. Consiste en aplicar, a una de las entradas seleccionadas, una prueba con escalones sucesivos, el intervalo de tiempo de cada uno de los cambios del escalón debe ser suficiente para estabilizar el sistema. La prueba de linealidad, en estado estacionario, consiste en: (1) seleccionar de los datos de entrada y salida los puntos de equilibrio, (2) ajustar a los mismos un polinomio de segundo o tercer orden y (3) observar el valor de los términos de mayor orden del polinomio ajustado; en el caso de que estos términos sean muy significativos implica que el proceso tiene un gran componente de no linealidad. Para eliminar dicha no linealidad, puede precompensarse los datos del proceso utilizando el modelo inverso del polinomio. En el caso de que no sea posible aplicar una señal escalonada al proceso (técnica no paramétrica expuesta en el apartado 2.2.1), por motivos técnicos o económicos, si que se acepta habitualmente la utilización de un escalón simple, en este caso solo será posible estimar la constante de tiempo más relevante del proceso estudiado.

(c) Los experimentos con *ruido blanco* (*white noise experiment*) pueden ser útiles para determinar el ancho de banda y los retardos del proceso. Este tipo de experimento se caracteriza por excitar el proceso mediante un ruido blanco. Con los datos resultantes de dicho experimento puede realizarse el estudio espectral y/o el análisis de correlación, técnica también no paramétrica descritas anteriormente. Otros tipos de señales a utilizar en la realización de dicho experimento son señales con el ancho de banda limitado como la *PRBS* (*pseudo random binary sequence*) o senoides múltiples.

(d) Finalmente, se menciona la técnica de la respuesta frecuencial del proceso realimentado con un relé con histéresis [Åström and Wittenmark, 1995]. Este método consiste en conectar en el proceso un relé en el lugar del controlador. Esto da lugar, en la mayoría de los procesos, a una onda cuadrada a la salida del relé y una onda aproximadamente sinusoidal a la salida del proceso. Esta técnica es muy útil para determinar las características fundamentales del sistema en el caso en que, por los motivos que sea, no pueda operarse en lazo abierto. Este método se verá en detalle más adelante.

2.3.2. Diseño y selección de las señales de entrada

Las variables de salida del proceso suelen quedar definidas al formularse el problema de modelación, por ejemplo la variable a controlar o a predecir (simular). No sucede lo mismo con la variable de entrada, en general suele haber varias variables de entrada y por lo tanto se plantea el problema de seleccionar cuales de ellas son las adecuadas para conseguir los objetivos propuestos. Además del problema de la selección, hay otro aspecto a tener en cuenta consiste en determinar la amplitud de la señal de excitación.

2.3.2.1. Selección de las señales de entrada

A la hora de seleccionar cual o cuales son las variables de entrada para el control o la predicción, hay algunas consideraciones que deben tenerse en cuenta:

- (1) La selección de la entrada está muy influenciada por la amplitud y por como incide en el rango de la salida.
- (2) En el caso de tener como objetivo el control, la variable de entrada debe ser manipulable.
- (3) La función de transferencia salida/entrada debe ser lineal o linealizable (las no linealidades pueden ser compensadas por ejemplo usando un lazo cerrado sencillo).
- (4) Las entradas medidas pero no manipulables (perturbaciones medibles) pueden utilizarse como señales de entrada en el proceso de identificación (esto implica que el número de entradas a utilizar en la identificación podrá ser mayor que en el control).
- (5) La utilización de la experiencia de los operadores de proceso y el conocimiento que se tenga sobre el mismo son esenciales para la elección de la entrada. Uno de los objetivos de los experimentos preliminares será el de ayudar a la selección de la señal/es de entrada.

2.3.2.2. Diseño de las señales de entrada

El diseño de las señales de entrada involucra dos aspectos: la determinación de la amplitud y la selección de la forma.

En el caso de la determinación de la amplitud de la señal de prueba se debe tener en cuenta:

- Debe estar restringida por el rango de variación permitido. Por razones de seguridad y económicas, no es posible introducir grandes fluctuaciones en el proceso.
- En la práctica muchos procesos son no lineales y los modelos lineales son solo una aproximación. Una linealización de una dinámica no lineal será válida solo en una cierta región. Para estimar los parámetros de un modelo lineal, una amplitud muy grande en la señal de entrada no será útil.
- Pero, por otro lado, con una amplitud mayor en la entrada se obtiene una mejora en la precisión del modelo estimado, por ejemplo la precisión de un parámetro en términos estadísticos es inversamente proporcional a la energía de la entrada. Esto es lógico ya que al aumentar $u(t)$ la relación señal/ruido incrementa y por lo tanto las perturbaciones o ruidos tienen una influencia menor. Un criterio sencillo para conocer cual debe ser la amplitud mínima será el de buscar que el efecto de la entrada respecto a la salida sea perceptible visualmente. Otro aspecto que no debemos despreciar, es que la amplitud de la señal de entrada esta muy influenciada por la frecuencia de dicha señal, por lo tanto la medida del *factor de cresta*, $\max(|u(t)_{\max}|, |u(t)_{\min}|)/u(t)_{\text{rms}}$ es también importante. Para una amplitud dada, la *energía de la entrada* (*input power*) es proporcional a $1/(\text{factor de cresta})$.

- El rango de frecuencias contenido en la señal excitación es también un elemento importante a tener en cuenta. En función de las características del proceso, como puede ser la constante de tiempo, el rango de frecuencias más adecuadas puede determinarse mediante:

$$f_{\min} \cong \frac{0.1}{2\pi T}$$

$$\frac{5}{2\pi T} < f_{\max} < \frac{10}{2\pi T}$$

2.3.3. Selección del período de muestreo y la duración del experimento

Para la identificación de modelos en tiempo discreto el periodo de muestreo deber ser seleccionado correctamente antes de empezar el experimento, ya que una vez almacenados los datos este no puede ser modificado. Al operar con datos muestreados, es inevitable que se pierda información sobre el proceso, por ello es necesario seleccionar la frecuencia de muestreo para que dichas pérdidas sean insignificantes. En la mayoría de los casos las muestras se adquieren a instantes equidistantes de tiempo.

Para seleccionar el periodo se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- En muchos casos el periodo de muestreo viene definido por la aplicación final. Por ejemplo el instrumento de control a utilizar, los instrumentos de medida, el tipo de algoritmo de control, ..., limitan en muchos casos el periodo de muestreo.
- La pérdida de información debida al periodo se explica mejor en el dominio frecuencial. Es bien conocido que una señal sinusoidal con una frecuencia mayor que la mitad de la frecuencia de muestreo (denominado frecuencia de *Nyquist*) no puede, al ser muestreada, distinguirse de otra por debajo de este periodo. Consecuentemente, la parte del espectro de la señal que corresponde a altas frecuencias será interpretada como una contribución a bajas frecuencias, denominado fenómeno *solapamiento* ("*aliasing*" en ingles). Esto también significa que el espectro de una señal muestreada será la superposición de diferentes partes del espectro inicial. La información acerca de las frecuencias superiores a la frecuencia de *Nyquist* se pierde en el muestreo. La distorsión producida por el efecto de solapamiento, puede ser reducida utilizando un filtro *anti-solapamiento* (*antialiasing*). El ancho de banda del filtro deberá ser mucho menor que la mitad de la frecuencia de muestreo. El diseño del filtro depende del orden y de la frecuencia de corte. Una manera de determinar la frecuencia de corte es aplicando la fórmula:

$$f_{\text{corte}} \cong f_{\max} + (f_s / 2 - f_{\max}) / 2$$

Es práctico aplicar el mismo filtro en las señales de salida y entrada. Al disminuir el efecto de solapamiento, se incrementa la relación señal/ruido.

- Asumiendo que la duración del experimento es fija, puede ser útil aplicar un periodo de muestreo lo más alto posible, de esta manera se dispone de más datos.
- Si el número total de datos a adquirir es fijo, el periodo de muestreo no debe ser muy grande ni muy pequeño. El primer caso hace que los datos contengan muy poca información acerca de las dinámicas a alta frecuencia y el segundo caso hace que el ruido tendrá mucha influencia.
- Una regla a aplicar puede ser entre 5 o 10 – muy frecuentemente alrededor de 10 – el tiempo de estabilización del proceso. Es muchas veces peor seleccionar un periodo de muestreo demasiado grande que demasiado pequeño.

• Conocida la f_{\max} del sistema, en [Ogata, 1987] se propone como fórmula para determinar el periodo de muestreo: $8f_{\max} \leq f_s \leq 10f_{\max}$.

• Tiempos de muestreo muy pequeños pueden provocar problemas prácticos: todos los polos estarán situados alrededor de 1 en el plano z y el modelo determinado pasará a ser numéricamente muy sensible. En muchos casos el modelo resultante de un muestreo rápido, será de fase no mínima a pesar de que el proceso continuo sea de fase mínima, y en el caso de un proceso con retardo, este, debe ser modelado con muchos datos de retardo causando dificultades, por ejemplo, en el diseño de controladores.

La duración del experimento afecta tanto en la precisión de los parámetros, el cual es inversamente proporcional a la duración del experimento, como a la resolución espectral. Una regla a tener en cuenta es que la duración del experimento debe ser mayor a 5 – 10 veces la mayor constante de tiempo del sistema que se desea identificar. Otro aspecto a tener en cuenta es el rango de frecuencias analizado, este debería ser de dos o tres décadas. Finalmente, la duración del experimento debe tener en cuenta el coste de la realización del experimento.

Un aspecto importante a considerar, cuando se usan señales periódicas, es que la duración del experimento debe cubrir un número completo de periodos o secuencias.

2.3.4. Pretratamiento de los datos

Una vez se dispone de los datos es necesario realizar un tratamiento previo de los mismos, antes de ser utilizados en los algoritmos de identificación. Hay distintas deficiencias en los datos adquiridos que deben ser corregidos:

- Perturbaciones de altas frecuencias en los datos;
- Ocasionales datos espurios y/o olvidados,
- Derivas, desbalance ("offset" en inglés) y perturbaciones de bajas frecuencias,
- Los valores numéricos de las distintas señales no tienen el mismo orden de magnitud,
- Presencia de tiempos de transporte o retardo importantes.

Después de adquirir los datos, lo que debe hacerse es visualizarlos con el objetivo de inspeccionar y analizar si hay algún tipo de deficiencias en ellos. Seguidamente con el objetivo de solucionar el problema, pueden aplicarse alguno de los tratamientos comentados a continuación.

1. *Perturbaciones a altas frecuencias.* Las perturbaciones a altas frecuencias de los datos adquiridos indican que el periodo de muestreo y/o el filtro previo al muestreo no han sido convenientemente seleccionados. Si el periodo de muestreo es innecesariamente pequeño, los datos pueden volverse a muestrear tomando una muestra de cada x muestras de los datos iniciales. En este caso, antes del nuevo muestreo, debe aplicarse un filtro anti-solapamiento.

2. *Datos espurios y olvidos.* Los datos espurios y olvidos tienen una gran influencia en el resultado de la estimación. Es por lo tanto necesario eliminar los datos incorrectos e insertar datos en los tiempos en que ha habido errores de adquisición. Las etapas a seguir para determinar estos problemas son:

- Fijar, utilizando el conocimiento previo, un valor de la amplitud de la señal que no sea propia del sistema real;
- Calcular la desviación estándar de la señal;
- Interpolan todas las muestras de la señal original que tengan una amplitud superior o inferior al rango fijado definido por los valores no posibles o como múltiplo de la desviación estándar.

Hay algoritmos que permiten detectar los fallos en la adquisición de datos. De todas formas, se debe ser muy prudente para no falsificar los datos originales.

3. *Perturbaciones lentas (desbalance, tendencias, derivas)*. Este tipo de perturbación es muy frecuente en los datos. Ellas suelen ser debidas a causas externas y en la mayoría de los casos se prefiere no incluirlas en el modelo. Hay, básicamente, dos formas de eliminar el problema:

- Eliminando las perturbaciones mediante un tratamiento de los datos;
 - Definiendo adecuadamente el ruido del modelo teniendo en cuenta las perturbaciones
- La primera aproximación implica sustraer directamente las tendencias y desbalance (offset). En la práctica las técnicas que se aplican para ello son:

a) Linealizando el modelo alrededor de un punto de equilibrio $u(t)$, $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \hat{y}(t) - \bar{y} \\ u(t) &= \hat{u}(t) - \bar{u} \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

siendo (\bar{u}, \bar{y}) un punto de equilibrio físico y (\hat{u}, \hat{y}) las señales medidas.

b) Parecido al caso anterior pero sustrayendo el valor medio de las variables medidas.

c) El desbalance puede ser estimado de forma explícita extendiendo el modelo y utilizando las variables originales

$$A(q^{-1})\hat{y}(t) = B(q^{-1})\hat{u}(t) + \alpha + v(t) \quad (2.3.15)$$

donde α indica el desbalance.

En el caso de tendencias o derivas una alternativa a la ecuación (2.3.14), es sustituir el valor medio de las señales por una recta de pendiente definida por la tendencia de las señales o una curva en el caso en que la deriva no sea constante en el tiempo.

Una segunda aproximación es considerar α como parte del ruido del modelo. En el caso más sencillo esto corresponde a diferenciar los datos (2.3.15) y luego utilizarlos en la identificación, pero el modelo resultante de la utilización de estos nuevos datos amplifica las altas frecuencias, por ello no puede ser utilizado en muchas aplicaciones.

$$\Delta y(t) = \hat{y}(t) - \hat{y}(t-1)$$

$$\Delta u(t) = \hat{u}(t) - \hat{u}(t-1)$$

4. *Escalado de las variables*. En los procesos industriales no todas las variables de entrada y salida son de la misma magnitud. Este problema es importante cuando se evalúa la función de sistemas multivariados. El problema puede ser eliminado corrigiendo adecuadamente el desbalance y el escalado.

5. *Tiempos de retardo*. En muchos procesos industriales, los tiempos de retardo no son despreciables y es muy importante describir correctamente el retardo del proceso en el modelo. En los métodos de estimación de parámetros, el retardo es tratado como un desplazamiento temporal de las entradas respecto a las salidas. Una de las señales es utilizada como referencia la otra es desplazada en el tiempo para compensar el retardo. Usualmente, es la entrada la señal desplazada, por ejemplo en el caso de un retardo d :

$$u(t) = q^{-d}\hat{u}(t) = \hat{u}(t-d)$$

Utilizando la variable desplazada, el modelo puede ser estimado mediante los métodos estándar.

2.4. Métodos de estimación paramétricos.

2.4.1. Introducción.

En este tema nos dedicaremos al estudio de los métodos de estimación de parámetros en el dominio temporal y frecuencial. Estos se basan en el supuesto de que el sistema pueda representarse por una parte determinista o causal y una parte estocástica que engloba las dinámicas no modelables del sistema. En general se asume que la parte estocástica puede ser representada por una variable Gaussiana.

Los métodos de estimación en el dominio temporal que se estudian, tienen la particularidad de que a partir de ellos se estiman modelos discretos (dominio-Z). Consecuentemente, en el caso de desearse un modelo continuo (dominio-S o ecuación diferencial) del sistema será necesario convertir el modelo discreto a continuo. Ello no presenta problemas cuando el sistema presenta un retenedor de orden cero. Contrariamente, utilizando técnicas frecuenciales podremos estimar modelos tanto continuos como discretos. La comparación entre ambos modelos se muestra en la Tabla 2.4.1.

Tabla 2.4.1. Comparación de modelos de sistemas

Métodos frecuenciales	Métodos temporales
Función de transferencia en el dominio s y z	Función de transferencia en el dominio z
Ruido aditivo en la entrada y en la salida	Ruido aditivo al modelo
Modelo no paramétrico del ruido	Modelo paramétrico del ruido
Retardo fraccional	Retardo es un múltiplo entero de T_s
Sistemas SISO	Sistemas MISO

Los métodos de estimación frecuenciales tienen diferentes ventajas y desventajas con respecto a los métodos temporales. Los ingenieros muchas veces prefieren la descripción en el dominio frecuencial por las siguientes razones [Kollas, 1993]:

- Mientras que la solución de una ecuación diferencial necesita la convolución en el dominio del tiempo, esta convolución se sustituye por una simple multiplicación en el dominio de la frecuencia.
- A menudo es posible descomponer la señal / ruido en diferentes bandas frecuenciales.
- Con la selección adecuada de los coeficientes de Fourier en una banda de frecuencias adecuada, es posible reducir el número de datos.
- Es posible obtener un modelo continuo a partir de los datos.
- Pequeñas no linealidades pueden ser fácilmente medibles y detectables en el dominio de la frecuencia.

Por otro lado, trabajar en el dominio del tiempo tiene ventajas [Ljung, 1987]:

- Es más natural trabajar con señales en el dominio temporal.
- Son métodos menos sensibles al tipo de señal de excitación, las técnicas frecuenciales presentan problemas cuando estas no son periódicas.
- Ciertas no linealidades son más fáciles de detectar, como es el caso de las saturaciones.
- Pueden ser utilizados de forma recursiva.
- Permiten medir directamente los transitorios del sistema.

En general, la base de todos los métodos de estimación consiste en minimizar unos residuos $\varepsilon(t)$, definiendo $\varepsilon(t)$ como la diferencia entre el valor deseado de la salida, $y(t)$,

y el valor de predicción, $\hat{y}(t)$, que es función del modelo estimado. La minimización se realiza generalmente utilizando un criterio cuadrático. La metodología de cálculo a utilizar dependerá de la relación entre $\varepsilon(t)$ y los parámetros que se quieren estimar. Cuando la relación sea lineal se podrá utilizar un método de cálculo analítico, mientras que en el caso de una relación no lineal, el método de cálculo a utilizar será iterativo. Se debe decir que los modelos estimados, tanto en el dominio temporal como frecuencial, serán modelos con dinámicas lineales. En la Tabla 2.4.2 se muestran más claramente estos conceptos.

Tabla 2.4.2. Clarificación del término linealidad.

DINÁMICA	PROCESO	ERROR	
		Lineal	No lineal
		respecto al coeficiente a	
Lineal	$\dot{y} + ay = u$	$\varepsilon = \dot{y} + \hat{a}y - u$	$\varepsilon = y - w$ $\dot{w} + \hat{a}w = u$
No-lineal	$\dot{y} + ay^3 = u$	$\varepsilon = \dot{y} + \hat{a}y^3 - u$	$\varepsilon = y - w$ $\dot{w} + \hat{a}w^2 = u$

2.4.2. Los modelos y los métodos de estimación paramétricos discretos

2.4.2.1. Estructura de los modelos lineales discretos

Los métodos de estimación paramétricos están muy relacionados con el modelo utilizado. La forma general de representar la estructura de un modelo discreto es, según [Ljung, 1987]:

$$y(t) = G(q^{-1})u(t) + H(q^{-1})e(t) \quad (2.4.16)$$

Los errores de modelado se incluyen, a diferencia de otros métodos de estimación, en el término $e(t)$. A este término se le asocia una serie de variables aleatoria independientes uniformemente distribuida de media nula (ruido blanco). $G(q^{-1})$ y $H(q^{-1})$ son filtros de orden finito que modelan la parte determinista y la parte estocástica respectivamente. Una característica diferencial de las distintas estructuras derivadas de la ecuación general (2.4.16), es la forma de modelar la parte estocástica o ruido. Por este motivo los modelos se han agrupado en dos bloques:

Modelos en que $H(q^{-1}) = 0$

a) **Modelos de media móvil (Moving Average, MA) o de respuesta al impulso finita (Finite Impulse Response, FIR):**

$$y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + e(t)$$

donde: $G(q^{-1}) = B(q^{-1})$, nk representa el retardo puro del proceso y $B(q^{-1})$ es un polinomio de grado nb que tiene la forma:

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb}$$

Se les denomina también modelos de respuesta impulso finito (FIR, Finite Impulse Response). Tienen el inconveniente que, para representar el comportamiento de un proceso, es necesario un gran número de coeficientes.

b) **Modelos de error de salida, OE (Output Error):**

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t - nk) + e(t)$$

en este caso:

$$G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})q^{-nk}}{F(q^{-1})}$$

, y $F(q^{-1})$ es un polinomio autoregresivo de orden nf :

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{nf} q^{-nf}$$

Modelos en que $H(q^{-1}) \neq 0$

c) Modelos autoregresivos con variables exógenas, ARX (Auto Regressive eXogenous):

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + e(t) \quad (2.4.17)$$

en este modelo se considera que la parte determinista y la parte estocástica tienen el mismo denominador:

$$G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})q^{-nk}}{A(q^{-1})}$$

$$H(q^{-1}) = \frac{1}{A(q^{-1})}$$

El polinomio $A(q^{-1})$ es el polinomio autoregresivo de orden na :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na} \quad (2.4.18)$$

d) Modelos autoregresivos de media móvil y variables exógenas, ARMAX (Auto Regressive Moving Average eXogenous):

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + C(q^{-1})e(t) \quad (2.4.19)$$

Al igual que en c), $G(q^{-1})$ y $H(q^{-1})$, tienen el mismo denominador:

$$G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})q^{-nk}}{A(q^{-1})}$$

$$H(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

y $C(q^{-1})$ es un polinomio similar a (2.4.18) de orden nc .

e) Otros modelos del término error son (ARARX y ARARMAX):

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-nk}B(q^{-1})u(t) + \frac{1}{D(q^{-1})}e(t) \quad (2.4.20)$$

siendo $D(q^{-1})$ un polinomio autoregresivo de orden nd . A este modelo se le denomina ARARX.

Un modelo más general es la estructura ARARMAX:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-nk}B(q^{-1})u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t)$$

f) Modelo Box-Jenkins, BJ (Box - Jenkins):

$$y(t) = q^{-nk} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t)$$

Una propiedad particular de esta estructura es que $G(q^{-1})$ y $H(q^{-1})$ no tienen parámetros comunes.

- Resumen de los distintos tipos de modelos

Toda esta familia de modelos se puede representar por el modelo general (2.4.21) esquematizado en la Figura 2.4.1.

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-nk} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t) \quad (2.4.21)$$

Esta estructura es muy general, pero es útil para elaborar algoritmos ya que sus resultados cubren todos los casos especiales. La relación entre modelos y los casos particulares se exponen en la Tabla 2.4.3.

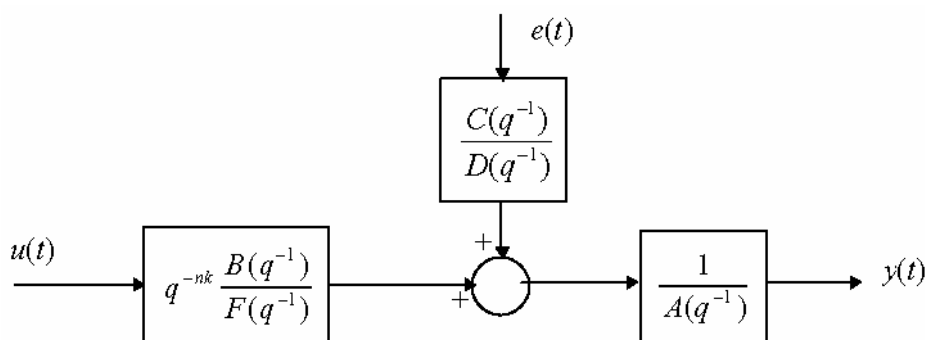


Figura 2.4.1. Esquema de bloques del modelo general (2.4.21)

Tabla 2.4.3. Relación entre el modelo general y los casos especiales.

Polinomios utilizados de (2.4.21)	Nombre de la estructura del modelo
B	MA (FIR)
AB	ARX
ABC	ARMAX
A	AR
AC	ARMA
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE
BFCD	BJ

2.4.2.2. Objetivos de los métodos de estimación paramétricos

Los métodos de estimación paramétricos tienen por objetivo estimar los parámetros de los polinomios: A, B, C, D y/o F según el modelo considerado, de forma que el error de predicción sea mínimo.

En el caso de la ecuación general (2.4.21) el error de modelado o residuos se determina a partir de la ecuación.

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = \frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left(A(q^{-1})y(t) - q^{-nk} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) \right) \quad (2.4.22)$$

La ecuación de los residuos (2.4.22) se puede evaluar considerando dos términos:

- **Modelado de la parte determinista.** Se observa que hay una relación lineal entre el error de predicción y los coeficientes de los polinomios A y B , mientras que respecto a los coeficientes del polinomio F la relación es no lineal. Este hecho comporta que, para estimar los parámetros del polinomio F , se debe utilizar un método de cálculo iterativo, mientras que si solo es necesario estimar los parámetros de los polinomios A y B , los métodos de cálculo a utilizar son analíticos y, por tanto, más sencillos.
- **Modelado de la parte estocástica.** Los errores de modelado $\varepsilon(t)$ no son conocidos y la relación que hay entre los coeficientes y los residuos no es lineal. Consecuentemente, se deben estimar los valores de $\varepsilon(t)$ al mismo tiempo que los valores de los parámetros de los polinomios. En este caso, por lo tanto, los métodos de cálculo serán iterativos.

2.4.3. Método de estimación por mínimos cuadrados (Least Square, LS)

2.4.3.1 Descripción del método de mínimos cuadrados

El método LS estima modelos de estructura ARX (2.4.17). Estos modelos se pueden representar por la ecuación:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + v(t) \quad (2.4.23)$$

siendo: $y(t)$ es el valor de la salida en el instante t , $\varphi(t)$ es el vector regresor o información, y θ es el vector de parámetros.

$$\theta = [a_1 \quad \cdots \quad a_{na} \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{nb}]^T$$

$$\varphi^T(t) = [-y(t-1) \quad \cdots \quad -y(t-na) \quad u(t-nk-1) \quad \cdots \quad u(t-nk-nb)]$$

El problema a resolver consiste en estimar el vector de parámetros, $\hat{\theta}$, partiendo de las N observaciones realizadas: $y(1)$, $\varphi(1)$, ..., $y(N)$, $\varphi(N)$.

$$y(1) = \varphi^T(1)\hat{\theta}$$

$$y(2) = \varphi^T(2)\hat{\theta}$$

$$\vdots$$

$$y(N) = \varphi^T(N)\hat{\theta}$$

que se pueden escribir en forma matricial como:

$$Y = \Phi \hat{\theta} \quad (2.4.24)$$

siendo: Y un vector de dimensión N ,

$$Y = [y(1) \quad y(2) \quad \cdots \quad y(N)]^T$$

y Φ una matriz de dimensión $d \times N$,

$$\Phi = [\varphi(1) \quad \varphi(2) \quad \cdots \quad \varphi(N)]^T$$

El error de modelado o residuo se define como:

$$\varepsilon = Y - \Phi \hat{\theta} \quad (2.4.25)$$

donde

$$\varepsilon = [\varepsilon(1) \quad \varepsilon(2) \quad \cdots \quad \varepsilon(N)]^T$$

La estimación por mínimos cuadrados (LS), consiste en minimizar la función residuo, $V(\hat{\theta})$, definida por la ecuación

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon = \frac{1}{2} \|\varepsilon\|^2$$

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon \quad (2.4.26)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4.25) en (2.4.26), se obtiene que la función a minimizar es:

$$\min_{\hat{\theta}} V(\theta) = V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} [Y^T Y - Y^T \Phi \theta - \theta^T \Phi^T Y + \theta^T \Phi^T \Phi \theta] \quad (2.4.27)$$

La derivada de la función (2.4.27) respecto a los parámetros debe ser nula. Deduciéndose que el valor de los parámetros que minimiza $V(\hat{\theta})$ es:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (2.4.28)$$

La ecuación anterior se puede escribir como un producto de sumas finitas:

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{i=1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \varphi(t) y(t) \right] \quad (2.4.29)$$

de la cual, conocido el orden del modelo: na , nb y nk , es fácilmente calculable el valor de sus parámetros.

Se debe tener en cuenta que la ecuación planteada tiene solución si la matriz $\Phi^T \Phi$ es definida positiva o, equivalentemente si el rango $\Phi \geq n$. En caso contrario la ecuación tiene infinitas soluciones. *El requisito necesario para garantizar una solución única de la ecuación (2.4.28) es que la señal de excitación sea persistentemente excitada de orden mayor que d* [Söderström and Stoica, 1989].

2.4.3.2. Propiedades del método de mínimos cuadrados

Las propiedades estadísticas de este método demuestran que dadas unos datos que satisfacen la ecuación

$$y(t) = \varphi^T(t) \theta_0 + e(t) \quad (2.4.30)$$

donde θ_0 es el vector de parámetros verdadero y asumiendo que $e(t)$ es un ruido blanco de media cero y variancia λ^2 :

(i) $\hat{\theta}$ converge a θ_0 cuando N tiende a infinito

(ii) la variable aleatoria $\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta_0)$ se comporta como una distribución normal de media cero y covarianza P_{LS}

$$P_{LS} = \hat{\lambda}^2 (\Phi^T \Phi)^{-1}$$

(iii) un estimador de λ^2 es:

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{2V(\hat{\theta})}{N-d}$$

tal y como se demuestra en [Söderström and Stoica, 1989].

Se debe resaltar como *principal ventaja* de este método que la conversión a un mínimo global está garantizada y no existen mínimos locales.

Y como *inconveniente* resaltar que sí la perturbación $v(t)$ no es un ruido blanco y la relación señal útil/señal ruido es importante, la conversión al valor real de θ_0 no está garantizada. Este hecho limita su utilización como método general de estimación.

2.4.3.3. Solución de mínimos cuadrados utilizando la ecuación normal

La estimación de los parámetros por el método LS se realiza a partir de la ecuación (2.4.29), conocida con el nombre de *ecuación normal*.

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$$

- Resaltar como *ventaja* que la resolución directa de esta ecuación es sencilla y que los cálculos algebraicos a realizar son sencillos.
- Presenta el *inconveniente* que la matriz $\Phi^T \Phi$ puede estar mal condicionada, particularmente si es de gran dimensión, lo cual comporta errores numéricos importantes en la resolución de la ecuación (2.4.28). Es por este motivo que diferentes investigadores han presentado alternativas para resolver esta ecuación, una de ellas es por triangulación ortonormal.

2.4.3.4. Solución de mínimos cuadrados por triangulación ortonormal

La triangulación ortonormal o transformación QR es una de las alternativas numéricas desarrolladas para resolver la ecuación lineal (2.4.24) y evitar los errores generados por el mal acondicionamiento de la matriz $\Phi^T \Phi$ [Ljung, 1987].

Consiste en multiplicar el sistema de ecuaciones original (2.4.24) por una matriz ortonormal Q :

$$Q\Phi\theta = QY \quad (2.4.31)$$

En estas condiciones, la norma de la función error no se ve afectada por la transformación aplicada, ya que si Q es ortonormal: $QQ^T = I$, por tanto:

$$\begin{aligned} \|QY - Q\Phi\theta\|^2 &= \|Q(Y - \Phi\theta)\|^2 = (Y - \Phi\theta)^T Q^T Q (Y - \Phi\theta) \\ &= (Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) = \|Y - \Phi\theta\|^2 \end{aligned}$$

El objetivo es buscar una matriz ortonormal Q tal que:

$$Q\Phi = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.32)$$

donde R es una matriz cuadrada de dimensión $d \times d$ triangular por encima. La ecuación (2.4.32) se puede escribir como:

$$\Phi = Q^T \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

A la ecuación (2.4.32) se la denomina factorización QR de Φ . Una posible forma de construir la matriz Q es utilizando la transformación de Householder [Ljung, 1987].

En estas condiciones, el segundo término de la ecuación (2.4.31), QY , se puede descomponer en dos matrices:

$$QY = \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}$$

y consecuentemente calcular la función pérdida (2.4.26) como:

$$V(\hat{\theta}) = \|Q\Phi\hat{\theta} - QY\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\theta} - \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} \right\|^2 = \|R\hat{\theta} - L\|^2 + \|M\|^2$$

Es fácil ver que $V(\hat{\theta})$ se minimiza por θ cuando:

$$R\hat{\theta} = L \quad (2.4.33)$$

y se obtiene que el mínimo de la función pérdida vale:

$$\min_{\hat{\theta}} V(\hat{\theta}) = \|M\|^2 = M^T M$$

- Como *ventajas* de esta metodología de cálculo mencionar:
 - 1- el sistema lineal (2.4.33) está mejor condicionado que la ecuación (2.4.28) y por tanto es numéricamente superior
 - 2- la función pérdida se calcula sin la necesidad de estimar el valor de sus parámetros.
- Como *inconvenientes* destacar que requiere el doble de cálculo que el método directo.

2.4.4. Método de mínimos cuadrados generalizado (Generalized Least Square , GLS)

El método de mínimos cuadrados presenta como principal inconveniente la no-convergencia del algoritmo cuando el ruido presente en el proceso no es blanco. Una posible forma de solucionar el problema es utilizando el método de mínimos cuadrados generalizado el cual es una extensión del método LS [Åström and Eykhoff, 1971].

Al considerar un modelo de tipo:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + H(q^{-1})e(t) \quad (2.4.34)$$

Sí la función de transferencia discreta del ruido, $H(q^{-1})$, es conocida, el modelo puede transformarse de la forma

$$A(q^{-1})\tilde{y}(t) = B(q^{-1})\tilde{u}(t - nk) + e(t)$$

donde

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{H(q^{-1})} y(t)$$

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{H(q^{-1})} u(t)$$

ya que

$$A(q^{-1}) \frac{y(t)}{H(q^{-1})} = B(q^{-1}) \frac{u(t - nk)}{H(q^{-1})} + e(t)$$

Con estas nuevas señales filtradas de la entrada y la salida, el problema podría ser resuelto aplicando el método clásico de LS. Por lo tanto el método GLS puede interpretarse como un problema de estimación de LS aplicando como criterio la generalización del error.

El problema que se plantea en la utilización de este método es que la función de transferencia $H(q^{-1})$ no es conocida. Para solucionar este problema se requiere un proceso iterativo en cuatro etapas el cual consiste en:

(1) Con el método LS, hacer una primera estimación de los polinomios $A(q^{-1})$ y $B(q^{-1})$:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + v(t)$$

(2) Analizar el residuo, $\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}$, y determinar por ejemplo un modelo AR para aproximar la función de transferencia $H(q^{-1})$. Resultará el modelo autoregresivo para el residuo como

$$D(q^{-1})\varepsilon(t) = e(t)$$

Lo que implica identificar un modelo de la forma

$$\varepsilon(t) = d_1\varepsilon(t-1) + d_2\varepsilon(t-2) + \dots + d_d\varepsilon(t-d)$$

utilizando otra vez el método de mínimos cuadrados.

En este caso se tiene un modelo denominado ARARX (2.4.20) y se cumplirá que

$$H(q^{-1}) = \frac{1}{D(q^{-1})}$$

en la ecuación (2.4.34)

(3) Filtrar (blanquear) la entrada y la salida usando el modelo obtenido en la etapa (2):

$$\tilde{y}(t) = D(q^{-1})y(t)$$

$$\tilde{u}(t) = D(q^{-1})u(t)$$

(4) Hacer una nueva estimación por mínimos cuadrados utilizando las señales filtradas. Este proceso debe repetirse, a partir de la etapa (2), tantas veces como sea necesario hasta conseguir la convergencia.

La convergencia del método se evalúa comprobando que los residuos definidos obtenidos sean blancos. Para ello puede utilizarse la prueba de auto correlación. Para utilizarse este método deben definirse tanto el orden de la parte determinista como el orden de la parte estocástica. Para simplificar el problema, la mayoría de las veces se considera que son del mismo orden.

2.4.5. Método de la variable instrumento (Instrumental Variable, IV)

2.4.5.1. Descripción del método de la variable instrumento

El método de la Variable Instrumento (IV) tiene como objetivo aprovechar las ventajas del método LS y superar sus limitaciones. Tiene el inconveniente que para su utilización es necesario definir una nueva variable llamada instrumento.

El planteamiento de este método es muy sencillo. Consiste en multiplicar la ecuación (2.4.22) por un vector instrumento $z(t)$

$$z(t)y(t) = z(t)\varphi^T(t)\theta + z(t)v(t)$$

que se debe caracterizar por ser independiente del ruido $v(t)$, pero dependiente de la entrada y la salida del sistema. Esta propiedad permite plantear el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$z(t)\varepsilon(t) = z(t)[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}]$$

El vector de parámetros que minimiza la función pérdida (2.4.27) vale, en este caso:

$$\hat{\theta} = (Z^T \Phi)^{-1} Z^T Y \quad (2.4.35)$$

donde Z es una matriz de la misma dimensión que Φ .

Para que $\hat{\theta}$ converja a θ_0 es necesario que la variable instrumento tenga como propiedades:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z(t) \phi^T(t) \text{ sea singular} \quad (2.4.36)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z(t) v(t) = 0$$

En otras palabras, es necesario que la variable instrumento sea fuertemente dependiente del vector regresión, $\phi(t)$, pero sea independiente del ruido.

Este método, al igual que LS, presenta el inconveniente de que la matriz $Z^T \Phi$ puede estar mal condicionada cuando su dimensión es grande. Por este motivo puede utilizarse la triangulación ortonormal para calcular el valor de los parámetros.

Si se considera un modelo con una estructura ARMAX, una forma de garantizar las condiciones (2.4.36) es considerando un vector instrumento definido por:

$$z(t) = L(q^{-1}) \begin{bmatrix} -x(t-1) & -x(t-2) & \dots & -x(t-na) & u(t-1) & \dots & u(t-nb) \end{bmatrix}^T \quad (2.4.37)$$

donde L es un filtro lineal y $x(t)$ se genera a partir del sistema lineal:

$$N(q^{-1})x(t) = M(q^{-1})u(t) \quad (2.4.38)$$

El problema consiste en determinar el filtro, L , y el modelo lineal, $N(q^{-1})$ y $M(q^{-1})$. Una forma sencilla sería:

- (1) Aplicar LS
- (2) Utilizar el modelo estimado como polinomios N y M , y determinar $x(t)$ con (2.4.38)
- (3) Considerando $L=1$, definir $z(t)$ según (2.4.37) y estimar el vector de parámetros a partir de la ecuación (2.4.35).

2.4.5.2. Método IV óptimo propuesto por Ljung

El método de la variable instrumento óptimo propuesto por Ljung [Ljung, 1987], también denominado variable instrumento en cuatro etapas, genera el instrumento, $z(t)$, y el filtro, L , estimando al mismo tiempo la función de transferencia de la parte determinista y estocástica.

Este cálculo se realiza en cuatro etapas:

- (1). Considera la estructura del modelo como un modelo ARX:

$$\hat{y}(t/\theta) = \phi^T(t) \hat{\theta}$$

y se utiliza LS para estimar θ . A los parámetros estimados se les denomina $\hat{\theta}_N^{(1)}$. A partir de los parámetros se obtiene la función de transferencia (2.4.39), donde los subíndices indican las iteraciones realizadas.

$$\hat{G}_N^{(1)}(q) = \frac{\hat{B}_N^{(1)}(q)}{\hat{A}_N^{(1)}(q)} \quad (2.4.39)$$

- (2) Con la función de transferencia estimada y considerando $L=1$, se genera el vector instrumento, $z^{(1)}(t)$, según se ha descrito en (2.4.37);

$$x^{(1)}(t) = \hat{G}_N^{(1)}(q^{-1})u(t)$$

$$z^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} -x^{(1)}(t-1) & \dots & -x^{(1)}(t-na) & u(t-1) & \dots & u(t-nb) \end{bmatrix}^T \quad (2.4.40)$$

La ecuación (2.4.35) permite estimar un nuevo valor para los parámetros, y obtener la correspondiente función de transferencia $\hat{G}_N^{(2)}$.

(3) Los nuevos polinomios, $\hat{A}_N^{(2)}$ y $\hat{B}_N^{(2)}$, obtenidos de la función de transferencia $\hat{G}_N^{(2)}$, sirven para estimar la parte estocástica del proceso:

$$\hat{v}_N^{(2)}(t) = \hat{A}_N^{(2)} y(t) - \hat{B}_N^{(2)} u(t)$$

Considerando que el ruido se comporta como un modelo auto regresivo (AR) de orden d , se estima, con el método LS, el filtro $\hat{L}(q^{-1})$:

$$\hat{L}(q^{-1})\hat{v}_N^{(2)}(t) = e(t)$$

(4) De la misma forma que en (2.4.40), se calcula de nuevo $x^{(2)}(t)$ pero considerando la función de transferencia $\hat{G}_N^{(2)}$. El vector instrumento óptimo viene dado por

$$z^{(2)}(t) = \hat{L}_N(q^{-1})[-x^{(2)}(t-1) \dots -x^{(2)}(t-na) u(t-1) \dots u(t-nb)]^T$$

Este nuevo instrumento junto con los filtros sirven para estimar el valor final de los parámetros:

$$\hat{\theta}_N = \left(\sum_{t=1}^N z^{(2)}(t) \varphi_F^T(t) \right)^{-1} \sum_{t=1}^N z^{(2)}(t) y_F(t)$$

$$\varphi_F(t) = \hat{L}_N(q^{-1})\varphi(t), \quad y_F(t) = \hat{L}_N(q^{-1})y(t)$$

Las propiedades estadísticas de este método demuestran que la variable aleatoria $\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta_0)$ tiende a una distribución Normal de media cero y variancia P_{IV} :

$$\frac{1}{N} P_{IV} = \hat{\lambda}_N \left[\sum_{t=1}^N z^{(2)}(t) \left[\sum_{t=1}^N z^{(2)}(t) \right]^T \right]^{-1}$$

$$\hat{\lambda}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y_F(t) - \varphi_F^T(t) \hat{\theta}_N]^2$$

2.4.5.3. Solución de la estimación IV por triangulación ortogonal

Al igual que LS se genera una matriz ortogonal Q que se debe caracterizar porque el producto QZ sea triangular por encima. Con esta propiedad la ecuación (2.4.35) será:

$$Z^T Y = (QZ)^T Q \Phi \hat{\theta} \quad (2.4.41)$$

Al descomponer la matriz Q en:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

donde Q_1 es una matriz cuadrada N/N . Puede definirse una matriz cuadrada y triangular por encima $Z_1 = Q_1 Z$. Si se define la matriz $\Phi_1 = Q_1 \Phi$ y ya que $Q_2 Z = 0$, la ecuación (2.4.41) queda transformada en:

$$Z^T Y = Z_1^T \Phi_1 \hat{\theta}$$

En (2.4.42) se demuestra que Z_1 es la raíz cuadrada de $Z^T Z$

$$Z^T Z = (QZ)^T QZ = Z_1^T Z_1 + [Q_2 Z]^T Q_2 Z = Z_1^T Z_1 \quad (2.4.42)$$

y por lo tanto, la ecuación (2.4.41) se puede escribir como:

$$Q_1 Y = \Phi_1 \hat{\theta} \quad (2.4.43)$$

El error de modelado vendrá dado en este caso por el producto $Q_2 Y$ y la función pérdida queda definida como:

$$\min_{\theta} V(\theta) = \|Q_2 Y\|^2 = (Q_2 Y)^T Q_2 Y$$

- Cabe resaltar como *ventaja* de esta metodología de cálculo dos aspectos: que el sistema lineal (2.4.43) está mejor condicionado que la ecuación (2.4.35) y por tanto es numéricamente superior y que la función pérdida se calcula sin la necesidad de estimar el valor de sus parámetros.
- Como *inconvenientes* debe destacarse que requiere el doble de cálculo que el método directo y complica mucho el método IV óptimo.

2.4.5.4. Método de la máxima probabilidad

El método de la máxima probabilidad (ML) es uno de los métodos más generales para la estimación de parámetros. La idea básica consiste en construir una función, denominada función de probabilidad, que relacione los datos con los parámetros no conocidos. La estimación consiste en determinar el valor de los parámetros cuyo valor maximice la función.

La función de probabilidad consiste básicamente en la función de densidad de probabilidad de las observaciones. La estimación de la máxima probabilidad significa que se selecciona el valor de los parámetros que coinciden más probablemente con las observaciones.

Supongamos que las observaciones están representadas por un vector de variables aleatoria $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ y indicamos la función de densidad de probabilidad como:

$$f(\theta; y_1, y_2, \dots, y_n) = f_Y(\theta; Y)$$

La función de probabilidad de los valores observados puede expresarse como:

$$L(\theta) = f_Y(\theta; Y)$$

La estimación se obtiene como:

$$\max_{\theta} L(\theta) = L(\hat{\theta})$$

El principio de máxima probabilidad es simple y se puede demostrar que converge asintóticamente cuando $N \rightarrow \infty$ y la estimación es eficiente (variancia mínima) [Söderström and Stoica, 1989].

Si consideramos un modelo genérico dado por la ecuación (2.4.23) y considerando que $v(t)$ es una señal Gaussiana, con una distribución normal y de N elementos, concretamente de media $E[v] = 0$ y covarianza $E[vv^T] = C_v$ conocida. La función de probabilidad de esta señal viene dada por la expresión:

$$f(v) = [(2\pi)^N \det(C_v)]^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} v^T C_v^{-1} v\right)$$

En la cual al considerar el modelo (2.4.23) se obtiene:

$$f(v) = [(2\pi)^N \det(C_v)]^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} [Y - \Phi\theta]^T C_v^{-1} [Y - \Phi\theta]\right)$$

En la práctica la función evaluada es:

$$\log L(\theta) = -\frac{1}{2} \log[(2\pi)^N \det(C_v)] - \frac{1}{2} [Y - \Phi\theta]^T C_v^{-1} [Y - \Phi\theta] \quad (2.4.44)$$

Por lo tanto evaluando el máximo de esta función se estimará el valor de los parámetros θ . En el caso en que el ruido corresponda a un ruido blanco con una matriz de covarianza $C_v = \sigma^2 I$, es fácil demostrar que la maximización de la función de máxima probabilidad (2.4.44) es equivalente a minimizar la función pérdida:

$$V(\theta) = \frac{1}{2} [Y - \Phi\theta]^T [Y - \Phi\theta] = -\sigma^2 \log L(\theta) + \text{constant}$$

Sí σ no es conocido, la maximización de la ecuación (2.4.44) con respecto a los parámetros y σ debe realizarse separadamente. Para maximizar la ecuación (2.4.44) se debe recurrir a métodos de cálculo numérico, como el método de Newton-Raphson.

Consideremos el caso de un sistema ARMAX (2.4.19) donde el ruido se supone que tiene una distribución normal y una matriz de covarianza conocida. En este caso la función del logaritmo de probabilidad será:

$$\log L(\theta) = -\frac{1}{2} \log \left[(2\pi)^N \det(C_v) \right] - \frac{1}{2} \varepsilon^T C_v^{-1} \varepsilon$$

donde:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta},$$

$$\theta = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_p]$$

$$\varphi(t) = [-y(t-1), \dots, -y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-m), v(t-1), \dots, v(t-p)]$$

El problema en este caso es que $v(t-1), \dots, v(t-p)$ no son conocidos. Por lo tanto, en estas circunstancias, la solución solo es posible haciendo soluciones aproximadas (método iterativo) para conseguir a cada paso una mejor estimación de la matriz de covarianza y de los parámetros. Para más detalles [Åström, 1980].

2.4.6. Método de predicción de error

El método de predicción de error se basa de predecir el valor de la salida, $y(t)$, en función de los datos de entrada y salida al mismo y de un modelo estimado, de tal manera que se minimice el error existente entre la variable predicha y su valor real.

Considerando la expresión lineal general de un sistema como en (2.4.23) y despreciando el término ruido, la predicción de la salida en el instante t se obtiene:

$$\hat{y}(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m) = \varphi^T(t)\hat{\theta}$$

aquí la ecuación del residuo definida por la ecuación (2.4.22):

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1; \theta) \quad (2.4.45)$$

puede ser interpretada como un error de predicción donde la predicción a un paso $\hat{y}(t|t-1; \theta)$ se basa en todas los datos disponibles hasta el instante $t-1$ y el vector de parámetros del modelo θ .

Para la formalización del método se introduce la siguiente estructura general del modelo:

$$y(t) = G(q^{-1}; \theta)u(t) + H(q^{-1}; \theta)v(t) \quad (2.4.46)$$

Asumiendo que $G(0; \theta) = 0$, equivale a decir que el modelo tiene como mínimo un retardo puro de una muestra entre entrada y salida. La forma general de expresar un predictor consiste en:

$$\hat{y}(t|t-1; \theta) = L_1(q^{-1}; \theta)y(t) + L_2(q^{-1}; \theta)u(t) \quad (2.4.47)$$

la cual es una función de los datos anteriores, $t-1$, solo sí los filtros de predicción tienen como restricción: $L_1(0; \theta) = 0$ y $L_2(0; \theta) = 0$.

Hay varias formas de escribir el modelo (2.4.46) y determinar el predictor. Una vez definido el modelo y el predictor, se calculan los errores de predicción a partir de la ecuación (2.4.45). La estimación de los parámetros, $\hat{\theta}$, se calcula de tal forma que los

errores de predicción sean pequeños. El principio básico de este método se ilustra en la Figura 2.4.2.

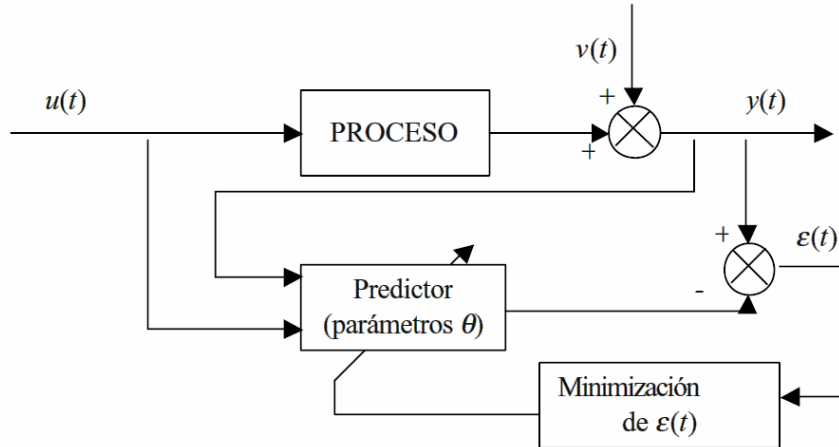


Figura 2.4.2. Esquema del método de error de predicción

Para definir el método de predicción de error el usuario debe realizar las siguientes elecciones:

(1) **Elegir la estructura del modelo.** Esto concierne a la parametrización de $G(q; \theta)$ y $H(q; \theta)$ en (2.4.46) como una función de θ . Por razones algorítmicas, la función de transferencia se factoriza en polinomios en el numerador y en el denominador. En el contexto de la identificación, tal como se ha descrito en el apartado 2.4.1., hay distintos modelos de parametrización: OEM, BJM, ...

(2) **Elegir el predictor.** Esto concierne a los filtros, $L_1(q; \theta)$ y $L_2(q; \theta)$ en la ecuación (2.4.47), una vez el modelo ha sido especificado. Estos filtros pueden ser seleccionados de distintas formas. La forma más utilizada es '*optimal mean square predictor*'. Esto significa que los filtros son seleccionados de manera que bajo unas condiciones dadas del modelo los errores de predicción tienen la menor variancia posible.

En el caso del modelo general considerado en (2.4.46), el predictor óptimo sería:

$$\hat{y}(t|\theta) = [1 - H^{-1}(q^{-1}; \theta)]y(t) + H^{-1}(q^{-1}; \theta)G(q^{-1}; \theta)u(t)$$

El error de predicción se determina de forma similar:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|\theta) = y(t) - [1 - H^{-1}(q^{-1}; \theta)]y(t) + H^{-1}(q^{-1}; \theta)G(q^{-1}; \theta)u(t)$$

(3) **Elegir el criterio.** Este se refiere a elegir una función que origine un valor escalar de todos los errores de predicción $\varepsilon(1, \theta)$, ..., $\varepsilon(N, \theta)$. Este criterio será minimizado con respecto a θ de manera que se realice la mejor predicción. En el caso de una salida el criterio (función error) puede definirse como una suma de cuadrados del error de predicción, mientras que en el caso de sistemas multi-variables como una proyección escalar de la matriz de covarianza

$$V(\theta) = h \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t; \theta) \varepsilon^T(t; \theta) \right]$$

donde $h()$ es una función de valor escalar y, generalmente, consiste en la traza de los pesos de la matriz de covarianza o su determinante.

El análisis del método de predicción de error muestra que la función perdida converge a un mínimo y la estimación es consistente cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- Los datos $\{u(t), y(t)\}$ son del proceso en estado estacionario.
- La entrada es persistentemente excitada.

- La Hessiana $V''(\theta)$ es no singular al menos alrededor del punto mínimo de $V(\theta)$.
- Los filtros $G(q^{-1}; \theta)$ y $H(q^{-1}; \theta)$ son funciones diferenciables del vector de parámetros θ .

En muchos casos el mínimo de $V(\theta)$ no puede ser hallado de forma analítica. En estos casos la minimización debe realizarse utilizando una rutina de cálculo numérico. El método más usualmente utilizado es el algoritmo de Newton-Raphson:

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} - \alpha_k \left[V''(\hat{\theta}^{(k)}) \right]^{-1} V'(\hat{\theta}^{(k)})^T$$

Aquí $\hat{\theta}^{(k)}$ indica la iteración k del cálculo numérico. La secuencia de escalares α_k se utiliza para controlar la longitud del paso. Estrictamente en el caso del algoritmo Newton-Raphson $\alpha_k = 1$, de todas formas en la práctica muchas veces es necesario utilizar un paso variable para asegurar la convergencia del método.

2.4.7. Métodos recursivos para la estimación de parámetros

En los métodos de identificación recursivos, la estimación de los parámetros se calcula recursivamente en tiempo. Esto significa que la estimación $\hat{\theta}(t)$ se calcula como una modificación de la estimación $\hat{\theta}(t-1)$ utilizando las nuevas medidas de $u(t)$ y $y(t)$. Los métodos recursivos para la estimación de parámetros se han desarrollado para aplicaciones de la identificación en tiempo real. Sus mejores campos de aplicación son los sistemas de control adaptable y los sistemas de diagnóstico de fallas. Ello es debido a que estas aplicaciones requieren que las acciones y evaluaciones utilizadas utilicen el modelo mas actualizado del sistema.

Los métodos de identificación recursivos tienen las siguientes características generales:

- Los modelos estimados con estos métodos se adaptan fácilmente a los sistemas variantes en el tiempo. Ellos permiten que el modelo siga los cambios de parámetros del sistema o cambios debidos a condiciones de operación en el caso de sistemas no lineales.
- Los requerimientos de memoria son reducidos y no aumentan en el tiempo, debido a que no se almacenan todos los datos.
- Estos métodos se han derivado de una aproximación de los métodos no recursivos descritos anteriormente.

2.4.7.1. Método de mínimos cuadrados recursivo

Para deducir el método de mínimos cuadrados recursivo (RLS) se parte de la ecuación (2.4.29)

$$\hat{\theta}(t) = \left[\sum_{k=1}^t \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^t \varphi(k) y(k) \right]$$

Para calcular esta expresión de forma recursiva se introduce como nueva notación:

$$P(t) = \left[\sum_{k=1}^t \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1}$$

Esta suma puede descomponerse en el valor de $P(t)$ y el valor de $P(t-1)$:

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + \varphi(k) \varphi^T(k) \quad (2.4.48)$$

Con este cambio de variables, los parámetros pueden estimarse utilizando:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(t) &= P(t) \left[\sum_{k=1}^{t-1} \varphi(k)y(k) + \varphi(t)y(t) \right] \\ &= P(t) \left[P^{-1}(t)\hat{\theta}(t-1) + \varphi(t)y(t) \right]\end{aligned}$$

Por lo tanto el método de mínimos cuadrados recursivos adopta la forma:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t)\varphi(t) \left[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \right]$$

donde el último valor puede ser interpretado como el error de predicción, mientras que el factor de corrección ($P(t)\varphi(t)$) puede ser considerado como un peso o factor de ganancia determinado como el error de predicción modifica los elementos del vector de parámetros estimado.

El hecho de calcular $P(t)$ en la ecuación (2.4.48) requiere invertir una matriz a cada paso de iteración. Utilizando el lema

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1}DA^{-1}$$

y considerando $A = P^{-1}(t-1)$, $B = D^T$ y $C = 1$ se obtiene una expresión más eficiente:

$$P(t) = P(t-1) + K\varphi^T(t)P(t-1)$$

$$K = \frac{P(t-1)\varphi(t)}{[1 + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)]}$$

que da como resultado una ganancia. La expresión de mínimos cuadrados recursivos queda por tanto:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t) \left[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \right]$$

2.4.7.2. Valor inicial

Los algoritmos recursivos requieren aproximar el valor inicial del vector de parámetros y de la matriz $P(t)$. Si es posible realizar una primera estimación del vector de los parámetros (por ejemplo utilizando LS no recursivo) los la matriz $P(0)$ debe reflejar la confianza de los parámetros estimados. En el caso en que $P(0)$ sea pequeño $K(t)$ será pequeño para los distintos t y los parámetros estimados no variaran mucho del valor inicial. Mientras que, si $P(0)$ es grande la estimación de los parámetros variará rápidamente del valor inicial. En ausencia de información previa para realizar una primera estimación de los parámetros, se acostumbra a considerar: $\hat{\theta}(0) = 0$ y $P(0) = \kappa I$, donde κ es un número grande.

2.4.7.3. Factor de olvido

Muchas aplicaciones pueden considerarse como sistemas de parámetros variables. En ellos se requiere que los parámetros de modelo estimado se vayan adaptando en función de los cambios del sistema. Interesa en estos casos controlar el cómo las medidas antiguas o las recientes afectan sobre la estimación de los parámetros o que tan rápido son olvidadas las medidas anteriores o antiguas.

Un método utilizado en estos casos es el factor de olvido λ que proporciona un decrecimiento exponencial de los pesos. La función pérdida a minimizar adopta la expresión:

$$V(\theta) = \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} \varepsilon^2(k)$$

donde el valor recomendado de λ es un valor comprendido entre 0.90 y 0.995.
Por lo tanto el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido es:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t) [y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1)]$$

$$K = \frac{P(t-1)\varphi(t)}{[\lambda + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)]}$$

$$P(t) = [P(t-1) + K\varphi^T(t)P(t-1)] / \lambda$$

Para $\lambda = 1$ coincide con el método de mínimos cuadrados común.

Método	RLS	RIV	RML
θ	$[\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \hat{b}_1 \dots \hat{b}_m]^T$	$[\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \hat{b}_1 \dots \hat{b}_m]^T$	$[\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \hat{b}_1 \dots \hat{b}_m \hat{c}_1 \dots \hat{c}_p]^T$
$\psi(t)$	$[-y(t-1) \dots -y(t-n) u(t-1) \dots u(t-m)]^T$	$[-y(t-1) \dots -y(t-n) u(t-1) \dots u(t-m)]^T$	$[-y(t-1) \dots -y(t-n) u(t-1) \dots u(t-m) \varepsilon(t-1) \dots \varepsilon(t-p)]^T$
$\mu(t)$	$\frac{1}{1 + \psi^T(t)P(t-1)\psi(t)}$	$\frac{1}{1 + \psi^T(t)P(t-1)\varphi(t)}$	$\frac{1}{1 + \psi^T(t)P(t-1)\varphi(t)}$
$P(t)$	$I - [K(t)\psi^T(t)]P(t-1)$	$I - [K(t)\psi^T(t)]P(t-1)$	$I - [K(t)\psi^T(t)]P(t-1)$
$\varphi(t)$	$\psi(t)$	$[-\eta(t-1) \dots -\eta(t-n) u(t-1) \dots u(t-m)]^T$	$[-y'(t-1) \dots -y'(t-n) u'(t-1) \dots u'(t-m) \varepsilon'(t-1) \dots \varepsilon'(t-p)]^T$

Tabla 2.4.4: Valores de los parámetros, vector de datos y vector de corrección para los métodos: mínimos cuadrados (RLS), método de la variable instrumento recursivo (RIV) y el método de la máxima probabilidad recursivo (RML).

2.4.7.4. Algoritmos de estimación de parámetros recursivos

En la bibliografía hay distintos algoritmos de estimación de parámetros recursivos, todos ellos permiten estimar el valor de los parámetros del sistema en tiempo real. Una forma unificada de representarlos es mediante las expresiones:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\varepsilon(t)$$

$$K = \mu(t)P(t-1)\varphi(t)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \psi^T(t)P(t-1)\varphi(t)$$

En la Tabla 2.4.4 se observan los valores de los parámetros, vector de datos y vector de corrección para el caso de los métodos: mínimos cuadrados (RLS), método de la variable instrumento recursivo (RIV) y el método de la máxima probabilidad recursivo (RML). En el caso de incluirse el factor de olvido es necesario realizar las siguientes modificaciones:

- (1) Reemplazar el 1 del denominador de $\mu(t)$ por λ .

(2) Dividir $P(t)$ también por λ .

En [Iserman, 1991] se realiza una comparación entre estos tres métodos con respecto a las características del estimador, su convergencia y el esfuerzo computacional. Las propiedades de estos tres métodos se resumen a continuación:

- RLS: Aplicable cuando la relación ruido/señal es pequeña. Esfuerzo computacional pequeño.
- RIV: Tiene unas buenas prestaciones. Para acelerar la convergencia inicial se recomienda empezar con RLS. Esfuerzo computacional mayor que RLS.
- RML: Altas prestaciones del estimador. Lenta convergencia en la etapa inicial. Se estiman los parámetros del ruido, pero la convergencia es lenta. El esfuerzo computacional es mayor que en los otros dos.

2.4.8. Métodos de estimación paramétricos frecuenciales

El objetivo de los métodos de identificación en el dominio frecuencial es el mismo que en el dominio temporal: identificar un sistema lineal a partir de los datos. La principal diferencia entre ambos radica en el dominio de trabajo. De todas formas los dos métodos son complementarios y, en algunos casos, ambos pueden utilizarse para solucionar el mismo problema. Analizamos a continuación, en que condiciones ambos métodos identifican el mismo sistema.

El modelo general utilizado en la identificación en el dominio de la frecuencia de un sistema lineal se muestra en la Figura 2.4.3. El sistema se representa por su función de transferencia $H(\Omega)$, donde $\Omega = s = j\omega$ en el dominio de Laplace, o $\Omega = z^{-1} = \exp(-j\omega T_s)$ en el dominio z , respectivamente, y H es una forma racional, eventualmente con un término retardo T_d

$$H(\Omega) = e^{-j\omega T_d} \frac{b_0 \Omega^0 + b_1 \Omega^1 + \dots + b_{nn} \Omega^{nn}}{a_0 \Omega^0 + a_1 \Omega^1 + \dots + a_{nd} \Omega^{nd}}$$

La señal de excitación tiene una amplitud compleja U_k a la frecuencia angular ω_k y la respuesta del sistema es $Y_k = H(\Omega_k)U_k$. La amplitud compleja de las señales de entrada y salida medidas están contaminadas con ruido N_u y N_y , respectivamente, hecho que incorpora un error en las variables del modelo. Para la solución propuesta, se asume que el ruido tiene como características que:

- es Gaussiano
- es independiente de las señales de entrada y salida
- no hay correlación entre las muestras de las diferentes frecuencias

Las medidas se realizan a distintas frecuencias ω_k , $k=1\dots F$, las amplitudes de las entradas y salidas son U_{mk} y Y_{mk} , respectivamente. Los parámetros no conocidos de la función de transferencia se indican con el vector \mathbf{P} . Con todo ello las ecuaciones básicas son:

$$Y_k = H(\Omega_k, \mathbf{P})U_k, \quad k=1, 2, \dots, F \quad (2.4.49)$$

$$Y_{mk} = H(\Omega_k, \mathbf{P})(U_{mk} - N_{uk}) + N_{yk}, \quad k=1, 2, \dots, F \quad (2.4.50)$$

Asumiendo que el ruido en las amplitudes complejas es Gaussiana y no correlacionado, y que el ruido de la entrada y la salida no están tampoco correlacionados, su función de densidad probabilística puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
p(N_u, N_y) &= \prod_{k=1}^F \frac{1}{2\pi\sigma_{uk}^2} \exp\left(-\frac{N_{Ruk}^2 + N_{Iuk}^2}{2\sigma_{uk}^2}\right) \prod_{k=1}^F \frac{1}{2\pi\sigma_{yk}^2} \exp\left(-\frac{N_{Ryk}^2 + N_{Iyk}^2}{2\sigma_{yk}^2}\right) \\
&= \prod_{k=1}^F \frac{1}{2\pi\sigma_{uk}^2} \exp\left(-\frac{N_{uk}\bar{N}_{uk}}{2\sigma_{uk}^2}\right) \prod_{k=1}^F \frac{1}{2\pi\sigma_{yk}^2} \exp\left(-\frac{N_{yk}\bar{N}_{yk}}{2\sigma_{yk}^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.4.51}$$

donde N_{Ruk} , N_{Iuk} , N_{Ryk} y N_{Iyk} se corresponde con las partes real y imaginaria del ruido en las señales de entrada y salida. \bar{N} es el conjugado complejo de N , σ_{uk} y σ_{yk} son las correspondientes desviaciones estándar, N_u y N_y indican los vectores formados por N_{uk} y N_{yk} en las distintas frecuencias.

Substituyendo en (2.4.51) la variable ruido por $N_{uk}=U_{mk}-U_k$ y $N_{yk}=Y_{mk}-Y_k$, y haciendo el logaritmo y asumiendo que σ_u y σ_y son conocidas, la función de máxima probabilidad es:

$$\ln(L(U, Y, P)) = \text{const} - \sum_{k=1}^F \left(\frac{(U_{mk} - U_k)(\overline{U_{mk} - U_k})}{2\sigma_{uk}^2} \right) - \sum_{k=1}^F \left(\frac{(Y_{mk} - Y_k)(\overline{Y_{mk} - Y_k})}{2\sigma_{yk}^2} \right) \tag{2.4.52}$$

La maximización de la ecuación (2.4.51) se consigue minimizando la ecuación (2.4.52) sujeto a la restricción (2.4.49).

$$C_{LS}(L(U, Y, P)) = \sum_{k=1}^F \left(\frac{(U_{mk} - U_k)(\overline{U_{mk} - U_k})}{2\sigma_{uk}^2} \right) + \sum_{k=1}^F \left(\frac{(Y_{mk} - Y_k)(\overline{Y_{mk} - Y_k})}{2\sigma_{yk}^2} \right) \tag{2.4.53}$$

La restricción (2.4.49) puede substituirse en (2.4.53) para eliminar Y_k . Como resultado se obtiene un problema de mínimos cuadrados con pesos no lineales. En general pero no se está interesado en U_k , por lo tanto la mejor forma de minimizar la ecuación (2.4.52) con la restricción (2.4.49) es utilizar la técnica de multiplicadores de Lagrange para eliminarlos a ambos (U_k y Y_k). En este caso la expresión a minimizar consiste en:

$$C(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F \frac{\left| e^{-j\omega_k T_d} N(\Omega_k, \mathbf{P}) U_{mk} - D(\Omega_k, \mathbf{P}) Y_{mk} \right|^2}{\sigma_{yk}^2 |D(\Omega_k, \mathbf{P})|^2 + \sigma_{uk}^2 |N(\Omega_k, \mathbf{P})|^2} \tag{2.4.54}$$

donde $N(\Omega, \mathbf{P})$ y $D(\Omega, \mathbf{P})$ son el numerador y el denominador de la función de transferencia, respectivamente.

La chi-cuadrada acostumbra a ser la función de coste más utilizada en la resolución del método de estimación de máxima probabilidad para datos Gaussianos. Para conseguir que la función de coste (2.4.54) tienda a una distribución chi-cuadrada se formulan distintas alternativas, una de ellas es la expresada en la ecuación (2.4.55) donde los pesos, W , han de ser iguales a las variaciones de los términos de los valores absolutos buscados.

$$C_{WLS}(P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F W_{tfk} \left| e^{-j\omega_k T_d} U_{mk} N(\Omega_k, \mathbf{P}) - Y_{mk} D(\Omega_k, \mathbf{P}) \right|^2 \tag{2.4.55}$$

La minimización de esta función se consigue de forma que:

$$e^{-j\omega_k T_d} U_{mk} N(\Omega_k, \mathbf{P}) - Y_{mk} D(\Omega_k, \mathbf{P}) = 0$$

El término residuo será:

$$\varepsilon_k = e^{-j\omega_k T_d} U_{mk} N(\Omega_k, \mathbf{P}) - Y_{mk} D(\Omega_k, \mathbf{P}) = 0$$

La variancia de este residuo será igual a:

$$\text{var}\{\varepsilon_k\} = 2\sigma_{uk}^2 |N(\Omega_k, \mathbf{P})|^2 + 2\sigma_{yk}^2 |D(\Omega_k, \mathbf{P})|^2$$

sí N_{uk} y N_{yk} son independientes. Haciendo $W_k=1/\text{var}\{\varepsilon_k\}$, se obtiene que la función de coste (2.4.55) consiste en la estimación de un sistema lineal, denominado ELiS (Estimator for Linear Systems).

Para minimizar la ecuación (2.4.54) respecto a los parámetros \mathbf{P} , deben utilizarse técnicas no lineales con restricciones y para ser utilizada, el usuario debe aportar el valor inicial del retardo puro.

En el caso en que N_{uk} y N_{yk} no sean independientes por distintas razones:

- el sistema está en lazo cerrado.
- o hay ruido en la señal de entrada

la función coste a considerar es:

$$C(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F \frac{\left| e^{-j\omega_k T_d} N(\Omega_k, \mathbf{P}) U_{mk} - D(\Omega_k, \mathbf{P}) Y_{mk} \right|^2}{\sigma_{yk}^2 |D(\Omega_k, \mathbf{P})|^2 + \sigma_{uk}^2 |N(\Omega_k, \mathbf{P})|^2 - 2 \text{real}\{CND_k\}}$$

$$CND_k = c_{uyk} e^{-j\omega_k T_d} N(\Omega_k, \mathbf{P}) D(\Omega_k, \mathbf{P})$$

$$c_{uyk} = 0.5 \text{cov}\{N_{uk}, N_{yk}\} = 0.5 E\{\overline{N_{uk}}, N_{yk}\}$$

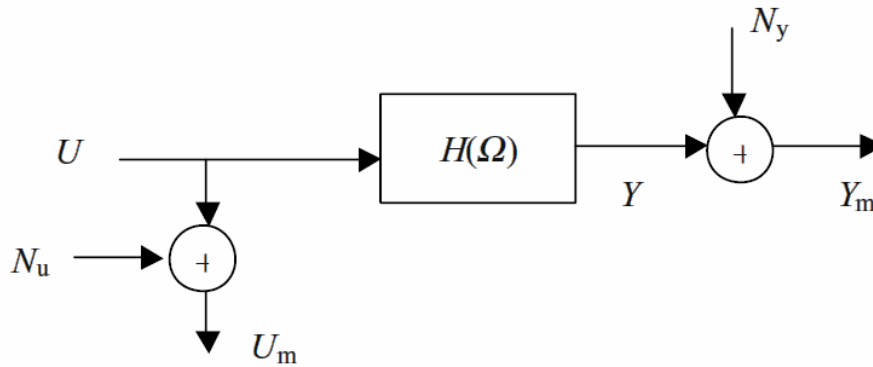


Figura 2.4.3. Modelo general utilizado en la identificación de sistemas en el dominio frecuencial.

2.4.9. Identificación en el espacio de estados

2.4.9.1. Modelos de sistemas lineales en el espacio de estados

Un sistema lineal general discreto e invariante en el tiempo puede ser descrito como

$$y(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q)e_0(t) \quad (2.4.56)$$

donde $y(t)$ es el vector de salida de dimensión p , $u(t)$ es el vector de entrada de dimensión m y que se suponen conocidos. Las perturbaciones desconocidas que actúan en la salida se suponen generadas por el segundo término, donde $e_0(t)$ es el vector de ruido de dimensión p . Se supone que $e_0(t)$ es una secuencia de variables estocásticas independientes que cumplen

$$E[e_0(t)] = 0 \quad \text{y} \quad E[e_0(t)e_0^T(t)] = \Lambda_0 \quad (2.4.57)$$

donde E es el operador esperanza matemática.

Como el sistema es de orden finito, puede ser descrito también en el espacio de estados, introduciendo el vector auxiliar de estados $x(t)$ de dimensión n , siendo n la dimensión del sistema. La relación de entrada-salida puede ser descrita por

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + Ke_0(t) \\ y(t) &= Cx(t) + e_0(t) \end{aligned} \quad (2.4.58)$$

donde $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_{n \times m}$, $K \in \mathbb{R}_{n \times p}$ y $C \in \mathbb{R}_{p \times n}$.

La manera de representar el ruido en (2.4.58) se dice que está en forma de innovaciones. El modelo en espacio de estados (2.4.58) es igual al sistema (2.4.56) si las matrices A , B , C y K cumplen

$$G_0(q) = C(qI - A)^{-1}B \quad y \quad H_0(q) = C(qI - A)^{-1}K + I \quad (2.4.59)$$

Las matrices A , B , C y K no son únicas. Es posible un cambio de base para los estados

$$\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t) \quad (2.4.60)$$

donde $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz no singular, y el sistema en las nuevas variables de estado son

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t+1) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{K}e_0(t) \\ y(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) + e_0(t) \end{aligned} \quad (2.4.61)$$

Donde $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$, $\tilde{K} = T^{-1}K$ y $\tilde{C} = CT$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned} C(qI - A)^{-1}B &= \tilde{C}(qI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \\ C(qI - A)^{-1}K + I &= \tilde{C}(qI - \tilde{A})^{-1}\tilde{K} + I \end{aligned} \quad (2.4.62)$$

2.4.9.2. Parametrización e identificabilidad

Para la identificación de sistemas es deseable frecuentemente utilizar modelos paramétricos, es decir, modelos que pueden ser descritos por un cierto número de parámetros con valores reales, que pueden ser considerados como un vector de parámetros $\theta \in \mathbb{R}^d$. Un modelo en particular viene descrito por un valor del vector d -dimensional θ . La correspondencia del espacio de parámetros \mathbb{R}^d al espacio de modelos lineales se le llama *estructura de modelos* M .

Consideramos, por tanto, las *estructuras de modelos* en el espacio de estados y en la forma de innovaciones:

$$M = \begin{cases} \hat{x}(t+1) = A(\theta)\hat{x}(t) + B(\theta)u(t) + K(\theta)e_0(t) \\ y(t) = C(\theta)\hat{x}(t) + e_0(t) \end{cases} \quad (2.4.63)$$

donde las matrices A , B , C y K están construidas a partir del vector θ de acuerdo con la estructura de modelos M .

Una estructura de modelos M es globalmente identificable si $M(\theta) = M(\theta^*) \Rightarrow \theta = \theta^*$. Es decir, dos vectores de parámetros distintos θ y θ^* no pueden dar el mismo modelo.

Las estructuras de modelos identificables han sido muy utilizadas para la identificación de sistemas debido a la correspondencia biunívoca entre los modelos y los valores del vector de parámetros. Sin embargo, para algunos sistemas es difícil encontrar una parametrización bien condicionada.

Las estructuras de modelo identificables M_I fueron introducidas en [van Overbeek and Ljung, 1992] y pueden ser definidas como:

Definición: Sea $A(\theta)$ una matriz rellena de ceros y con unos en la línea superior a la diagonal. Sean las filas numeradas r_1, r_2, \dots, r_p , donde $r_p = n$, rellenas con parámetros. Sean $B(\theta)$ y $K(\theta)$ rellenas con parámetros y $C(\theta)$ con ceros y con unos en la fila i , columna $r_{i-1} + 1$. (Se considera $r_0 = 0$ y que p es la dimensión de $y(t)$).

Ejemplo Una parametrización identificable en variables de estado de un sistema con cuatro estados, una entrada y una salida con índices 1,4 está dada por

$$\hat{x}(t+1) = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \theta_5 & \theta_6 & \theta_7 & \theta_8 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} \theta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} \theta_{13} & \theta_{14} \\ \theta_{15} & \theta_{16} \\ \theta_{17} & \theta_{18} \\ \theta_{19} & \theta_{20} \end{pmatrix} e(t) \quad (2.4.64)$$

$$\hat{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + e(t) \quad (2.4.65)$$

En [Ljung, 1987] se demuestra el siguiente teorema,

Teorema: La estructura de modelos en el espacio de estados M_I anteriormente definida es globalmente identificable en θ si y sólo si $\{A(\theta), [B(\theta)K(\theta)]\}$ es controlable.

2.4.9.3. Modelos en el espacio de estados totalmente parametrizados

Si consideramos el modelo (2.4.58) con todas las matrices A , B , C y K rellenas con parámetros, estamos sobre-parametrizando el sistema y perdiendo identificabilidad. Más exactamente, para la estructura de modelos identificable se necesitan $2np + nm$ parámetros y el número de parámetros para la estructura de modelos totalmente parametrizada es

$$d = n^2 + 2np + nm \quad (2.4.66)$$

Es decir, para la estructura de modelos totalmente parametrizada se necesitan n^2 parámetros más que para la estructura de modelos identificable.

No obstante, esta estructura de modelos en el espacio de estados tiene las ventajas de que no tenemos que buscar cuál de todas las diferentes formas de los multi-índices se ajusta mejor a nuestro sistema puesto que la estructura totalmente parametrizada contiene a todas las demás. Además la calidad del modelo puede aumentar al elegir una estructura más flexible. Esto nos permite además hacer transformaciones para obtener una descripción que esté bien condicionada numéricamente.

Basándonos en las *realizaciones balanceadas*, introducidas en [Moore, 1981], [Kabamba, 1985] describe una parametrización canónica identificable para sistemas en tiempo continuo con valores singulares de Hankel distintos. Este resultado fue generalizado por Ober a sistemas arbitrarios en [Ober, 1987] incluyendo una extensión a sistemas en tiempo discreto utilizando la transformación bilineal. Con ésta parametrización los parámetros pueden ser variados de forma continua sin que el sistema resulte no mínima. Otra ventaja, en comparación con la forma observable, es que las parametrizaciones balanceadas tienen mejores propiedades numéricas. Sin embargo, los índices estructurales deben ser conocidos también para este tipo de parametrización. En [Chou, 1994] se usa la parametrización equilibrada para la identificación de sistemas.

2.4.9.4. Realizaciones equilibradas (Balanced realizations)

En las realizaciones no equilibradas, pequeños cambios en un parámetro pueden dar grandes cambios en el comportamiento del sistema. Esto debe ser evitado en cualquier

método de identificación.

Un ejemplo de realización no equilibrada es el siguiente. Consideremos el sistema

$$G(q) = \frac{1}{(q - 0,99)^4}$$

que en forma de estructura identificable tiene una matriz A igual a

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.9606 & 3.8812 & -5.8806 & 3.9600 \end{pmatrix} \quad (2.4.67)$$

Los valores propios, que son todos ellos iguales a 0.99, son extremadamente sensible a perturbaciones en los parámetros. Un cambio aditivo de 2×10^{-8} en cualquiera de los parámetros puede perturbar a uno de los autovalores y convertirlo en mayor que uno. Por esta razón es necesario introducir el concepto de realización equilibrada.

La matriz

$$W_o = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k$$

es conocida como el *Gramiano de observabilidad* para el sistema en el espacio de estados. Los autovalores de esta matriz describen cómo la variable de estado inicial $x(0)$ influencia la señal de salida $y(t)$ cuando $u(t) \equiv 0$. Esta matriz también satisface la siguiente ecuación de Lyapunov

$$W_o = A^T W_o A + C^T C$$

La matriz dual

$$W_c = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^T (A^T)^k$$

es llamada el *Gramiano de controlabilidad*. Esta matriz describe cómo la entrada u influencia al vector de estado x . W_c también satisface

$$W_c = A W_c A^T + B B^T$$

Las matrices Gramianas son simétricas por construcción.

Definición. Una realización en el espacio de estados es equilibrada si

$$W_o = W_c = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

con $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

2.4.9.5. Discusión

La identificación de modelos en el espacio de estados es una alternativa válida en el caso que se utilicen controladores que necesiten el valor del estado para generar la acción de control. En esta sección se han estudiado las posibilidades que tiene la estructura de modelo totalmente parametrizada y su identificación. La principal idea es que esta estructura de modelo cubre todos los sistemas de un orden dado. Existen diferentes alternativas para realizar la identificación en el espacio de estados.

2.4.10. Selección y validación de la estructura del modelo

A demás de los métodos de estimación de los parámetros, otro aspecto muy importante es el de buscar la estructura apropiada para el modelo (por ejemplo ver Tabla 2.4.3). Para ello es necesario entender los métodos de estimación o identificación y conocer el sistema que se desea identificar. Cuando la estructura del modelo ha sido determinada, los métodos de estimación proporcionan un modelo particular de dicha estructura. Una vez identificado el modelo otra cuestión a plantearse es si el modelo identificado es suficientemente bueno, para ello se recurre a las técnicas de validación. Obsérvese que no siempre será posible definir una estructura del modelo, identificar los valores de los parámetros y validar de forma independiente, sino al contrario las tres etapas están muy interrelacionadas.

2.4.10.1. Selección de la estructura del modelo. Aspectos generales

La selección de la estructura del modelo tiene un considerable efecto sobre la calidad del modelo resultante y el coste computacional. La calidad del modelo puede, por ejemplo evaluarse por el criterio del error cuadrático. La mejor estructura del modelo es un compromiso entre flexibilidad y ahorro. Entendiendo por flexibilidad que la estructura del modelo tenga la capacidad para describir diferentes sistemas y una forma de obtenerla es utilizando muchos parámetros. Por otro lado, el ahorro requiere la utilización de pocos parámetros.

Para empezar a solucionar un problema de identificación, cabe considerar tres aspectos importantes:

- * Tipos de conjuntos de modelos
- * Dimensión del conjunto de modelos o selección del orden de los modelos
- * Métodos de identificación

La selección del tipo dentro de un conjunto de modelos implica buscar entre diferentes clases de modelos como entre modelos no lineales o lineales o entre modelos de entrada-salida, caja negra o parametrizado físicamente, y otros. La búsqueda de que tipo de modelo utilizar es un poco subjetivo y involucra muchos factores que son independientes del conjunto de datos. La búsqueda es habitualmente un compromiso entre diferentes factores, como calidad del modelo y esfuerzo de modelado. Para obtener buenos resultados con pocos parámetros, suele utilizarse el conocimiento previo del proceso y algo de intuición. La información previa es muy útil en el caso de modelos en tiempo continuo. La forma de evaluar $\mathcal{A}(t, \theta)$ y su minimización influye mucho en el esfuerzo de programación y el tiempo de cálculo. Modelos sofisticados suelen utilizarse solo en el caso de que no puedan ser validados los modelos sencillos. Las regresiones lineales son los modelos más simples y en los cuales la minimización del criterio es más robusta. En algunos casos se puede realiza una transformación no lineal (linealización) de los datos y después realizar un ajuste con algoritmo sobre un modelo lineal. Por ejemplo, en los sistemas robóticos (si no se considera la fricción estática) es posible realizar una *parametrización lineal*. En ella, funciones no lineales de las coordenadas articulares multiplican linealmente combinaciones de parámetros (masa, longitud de las articulaciones, etc.). En esta forma se pueden identificar con un algoritmo de identificación lineal combinaciones de parámetros.

La selección del orden del modelo implica la selección del número de parámetros de una determinada clase de modelos. Este paso requiere usualmente alguna evaluación del conjunto de datos, pero muy a menudo forma el conocimiento preliminar que se tiene

del proceso muy a menudo permite deducir un rango de órdenes del modelo a considerar.

La selección del método de identificación depende enormemente de la clase de modelo seleccionado. Como se ha visto en apartados anteriores, un sistema lineal puede representarse de diferentes formas, por su respuesta transitoria o frecuencial o modelo paramétrico.

Evidentemente podemos transformar unas en las otras, pero estas transformaciones están muy mal condicionadas en el sentido de que pequeños errores en una representación pueden originar mucho error en otra. La conclusión es clara, la búsqueda del método está íntimamente relacionada con el objetivo de la identificación.

2.4.10.2. Análisis preeliminarios de los datos para la selección de la estructura del modelo

Ciertas pruebas o evaluaciones de los datos permiten deducir una posible estructura del modelo, algunos de ellas se han descritos cuando se describió la identificación con métodos no paramétricos. Estas técnicas ya descritas no conducen a una ecuación paramétrica como la (2.4.30). En el caso de métodos paramétricos, el problema se reduce a la selección del orden del modelo.

1) La evaluación del análisis espectral estimado proporciona información sobre el rango de frecuencias de interés del proceso y el nivel de ruido, por lo tanto nos ayuda a diseñar correctamente la señal de entrada y los filtros. La estimación no paramétrica de la función de transferencia $\hat{G}(j\omega)$ proporciona información sobre los picos de resonancia y el retardo de fase. Todo ello da una orientación sobre el orden requerido para una adecuada descripción de las dinámicas del sistema (o la zona de interés).

2) Evaluar el rango de la matriz de covarianza es un buen método para estimar el orden del sistema. Supóngase que el sistema correcto se describe mediante:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_n u(t-n)$$

siendo n el verdadero orden del sistema. Si tomamos un modelo de orden s , el vector de datos es:

$$\varphi(t) = [y(t), y(t-1) + \dots, y(t-s), u(t-1), \dots, u(t-s)]^T$$

Considerando primero el caso en que $v(t) \equiv 0$, tenemos que la matriz de covarianza

$$R_{\varphi\varphi}(N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T$$

será no singular para $s \leq n$ (en el caso que $\{u(t)\}$ sea persistentemente excitada) y singular para $s \geq n+1$.

En el caso de ruido la matriz de covarianza puede ser utilizada siempre que la relación señal-ruido no sea muy grande, sí es el caso puede utilizarse la fórmula:

$$\hat{R}_{\varphi\varphi}(N) = R_{\varphi\varphi}(N) + \sigma^2 R_v$$

donde $\sigma^2 R_v$ es la estimación de la influencia del ruido del proceso en la matriz de covarianza.

Una mejor alternativa, cuando la influencia de $v(t)$ no es despreciable, es la de utilizar otro vector de correlación, por ejemplo en el caso en que $\{v(t)\}$ y $\{u(t)\}$ no estén correlacionados (sistema en lazo abierto) podemos utilizar

$$\zeta(t) = [u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-2s)]^T$$

y por tanto la matriz de covarianza es

$$\hat{R}_{\phi\zeta}(N) = E[\phi(t)\zeta^T(t)]$$

es no singular para $s \leq n$ y singular para $s \geq n+1$.

3) El método de correlación es otro método que permite obtener información acerca de que variables incluir en la estructura del modelo. Esta variable podría ser $y(t-n-1)$. La cuestión que permite resolver es si una nueva variable contribuye de alguna forma en explicar la variable de salida $y(t)$. Ello puede realizarse mediante la correlación entre la nueva variable y la salida. De todas formas para descartar las posibles relaciones entre ellas, y para conseguir estructuras de poca complejidad, la correlación debería realizarse entre ella y los residuos obtenidos como resultado de considerar un primer modelo $\varepsilon(t, \hat{\theta}) = y(t) - \hat{y}(t|\hat{\theta})$. Ello se conoce con el nombre de correlación parcial.

2.4.10.3. Criterios para la comparación de la estructura de los modelos

Una aproximación natural para determinar la estructura del modelo es simplemente testar diferentes estructuras y comparar el resultado entre ellas. Los métodos de prueba más comúnmente utilizados son:

- * Prueba de la función error o pérdida
- * Prueba de cancelación de polos y ceros
- * Prueba del residuo

2.4.10.3.1. Prueba de la función error o pérdida

El método más simple es mirar sencillamente la función pérdida $V(\hat{\theta})$ directamente vinculada con el orden del modelo. Cuando incrementa el orden la función pérdida decrece hasta que se mantiene constante o cambia lentamente. Otros métodos se basan en pruebas estadísticas de la función pérdida o en la evaluación de diferentes criterios que tiene en cuenta la complejidad del modelo.

(1) Un método estadístico para evaluar si la función pérdida disminuye significativamente cuando incrementa el orden del modelo es el F -test². Esta prueba se basa en la independencia estadística de $V_1(\hat{\theta})$ y $V_1(\hat{\theta}) - V_2(\hat{\theta})$ donde los subíndices indican modelos con un número de parámetros p_1 y p_2 respectivamente. Para probar si la reducción de la función es significativa cuando el número de parámetros aumenta de p_1 a p_2 se utiliza:

$$t = \frac{V_1(\hat{\theta}) - V_2(\hat{\theta})}{V_2(\hat{\theta})} \frac{N - p_2}{p_1 - p_2}$$

Esta cantidad tiene una distribución $F[p_1 - p_2, N - p_2]$, entonces para un número de muestras suficiente N , se cumple que: $t > F_{\alpha}[p_1 - p_2, N - p_2]$ entonces se cumple la

² La distribución - F está formada por el cociente de dos distribuciones "chi-cuadrado" independientes divididas por sus respectivos grados de libertad.

hipótesis que la reducción de la función pérdida es significativa con el aumento del número de parámetros y por tanto el nuevo parámetro es aceptado con un nivel de confianza de $1-\alpha$. En la práctica, el nivel de confianza tiene un rango de 0.01 a 0.1.

(2) El criterio de análisis de complejidad puede realizarse simplemente adicionado a la función pérdida un término extra que penalice la complejidad del modelo. En este caso se selecciona el mejor modelo que minimice el criterio.

El criterio de información de Akaike (AIC) disminuye con la función pérdida y aumenta con el número de parámetros, se define como:

$$AIC(p) = N \log V(\theta) + 2p$$

siendo:

$$V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t, \theta)$$

Se ha observado que este criterio puede sobre estimar el orden del modelo.

Otro criterio propuesto por Akaike es el criterio de error de predicción final (Final Prediction Error, FPE):

$$FPE(p) = \frac{N+p}{N-p} V(\theta)$$

Se ha observado que este criterio tiende a subestimar el modelo del sistema.

Una propiedad atractiva tanto del criterio de AIC como FPE es que el orden del modelo se determina como resultado de valor mínimo del criterio y no es necesario evaluarlo en función de unos niveles de confianza como es el caso del método estadístico.

2.4.10.3.2. Prueba de cancelación de polos-ceros

Si se considera que el orden del modelo es s y es superior al orden del proceso real n , originan pares de polos-ceros muy próximos que pueden ser cancelados. Este fenómeno puede utilizarse para testar el orden del modelo, calculando las raíces de los polinomios los cuales $A(q)$ y $B(q)$ a partir de diferentes órdenes s .

2.4.10.3.3. Prueba de residuo

Resultado de comparar la salida con la predicción del modelo:

$$\varepsilon(t, \hat{\theta}) = y(t) - \hat{y}(t, \hat{\theta})$$

representa una forma de interpretar las diferencias entre las variables observadas y el comportamiento del modelo estimado. En general los residuos deben ser blancos o aproximadamente blancos y no correlacionados con la entrada, si el modelo es una buena representación del sistema. De lo contrario, indicaría que o bien el modelo a la identificación no es completa.

La simple representación de los residuos respecto a los valores ajustados; tal que la representación no revela ninguna dependencia clara. Otro diagrama útil es el histograma de los residuos, amplitudes, el cual revela si la distribución difiere de una distribución normal.

Otras pruebas útiles son los estudiados en la [sección 2.2](#), prueba estadístico de auto correlación de los residuos $\varepsilon(t)$, propuesta de cross-correlación entre los residuos y las entradas, ...

2.4.10.4. Validación del modelo

La pregunta crucial una vez identificado un modelo es si este modelo es suficientemente bueno para los objetivos considerados. La validación permite comprobar si el modelo identificado representa el comportamiento real, teniendo en cuenta las limitaciones de los métodos de identificación y los objetivos finales. El problema planteado tiene distintos aspectos:

1. ¿El modelo satisface suficientemente bien los datos observados?
2. ¿Es el modelo suficientemente bueno para los requerimientos propuestos?
3. ¿Describe el modelo al sistema real?

El método para responder estas cuestiones es confrontar el modelo con más información – como conocimientos a priori, datos experimentales y experiencia – sobre el sistema real.

Puesto que el uso más natural de la identificación consiste en confrontar el modelo con los datos, las técnicas de identificación tienden a centrarse en la pregunta 1. Mientras que la pregunta 3, prescindiendo de los problemas de prueba, es filosóficamente imposible de contestar, la pregunta 2 es un requerimiento práctico importante. Evaluar si el problema que motivo la tarea de modelado puede ser solucionado usando el modelo obtenido, puede considerarse como la prueba más importante de validación del modelo. Por ejemplo, si un regulador basado en el modelo satisface los requerimientos de control, entonces el modelo será válido, independientemente de la forma que tenga. No obstante, a menudo es imposible, costoso o peligroso probar todos los posibles modelos con el uso que se ha previsto. Por ello, la confianza en el modelo debe verificarse de otras maneras. Los dos métodos principales son: la verificación de las suposiciones a priori y la verificación del comportamiento de la entrada - salida.

2.4.10.4.1. Verificación de una suposición a priori

Las pruebas de si las suposiciones a priori de los métodos de identificación son ciertos puede realizarse como:

- * Linealización: Comparación del modelo obtenido a partir de diferentes amplitudes de la entrada. Comparación de modelos con funciones transitorias medidas en ambas direcciones.
- * Varianza temporal: Comparación del modelo con los diferentes conjuntos de datos.
- * Residuos: ¿Son los residuos estadísticamente independientes (auto correlación), con media cero?, ¿Son independientes de la señal de entrada (correlación cruzada con respecto la señal de entrada)?
- * Medias, tendencias de la salida. Comparación del modelo con y sin eliminación de las tendencias.
- * Señal de entrada: ¿Puede ser medida sin ruido? ¿Es persistentemente excitante?
- * Matriz de covarianza de los parámetros estimados: ¿la varianza y covarianza decrementa con el incremento de número de muestras?

2.4.10.4.2. Verificación del comportamiento de las entradas-salidas

Un juicio final del modelo identificado se obtiene comparando el comportamiento modelo medido y predicho de la entrada-salida. Esto puede realizarse como:

- * Comparación de la variable medida $y(t)$ y la señal de salida calculada $\hat{y}(t, \hat{\theta})$:

- con la entrada $u(t)$ utilizada en la identificación,
- con otras señales de entrada como escalones o impulsos.

* Comparación de la función de correlación cruzada basada en las señales medidas y las del modelo.

Otra manera es validación cruzada, esto significa la verificación del modelo identificado con otro conjunto de medidas. La comparación entre los datos observados y la salida modelo se muestra generalmente mirando las anomalías del modelo no detectadas previamente. La validación cruzada se considera la mejor manera de validar el modelo y la única prueba verdadera para su aplicabilidad general.

Cuestionario y ejercicios

Ejercicio 2.1.1: Concepto de sistema

De el concepto de sistema.

Defina que son las entradas, salidas y perturbaciones. Presente un ejemplo en donde se especifique cada una de ellas.

Ejercicio 2.1.2: Tipos de modelos

De el concepto de modelo.

De un ejemplo para cada caso de las diferentes clasificaciones de modelos que se pueden realizar.

Ejercicio 2.1.3: Métodos de obtención de modelos

¿De qué forma se pueden obtener modelos matemáticos de los sistemas? ¿Qué ventajas y desventajas tiene cada forma.

Ejercicio 2.1.4: Descripción del proceso de Identificación.

De el concepto de identificación de sistemas.

Describe el proceso de identificación.

Ejercicio 2.1.5: Clasificación de los métodos de identificación.

¿Como se clasifican los métodos de identificación?

Ejercicio 2.2.1: Métodos de identificación no paramétricos

¿En que consisten los métodos de identificación no paramétricos y que características presentan?

Ejercicio 2.2.2: Análisis por respuesta transitoria

Describe brevemente el método de respuesta al impulso e indique que ventajas e inconvenientes posee.

Describe brevemente el método de respuesta al escalón e indique que ventajas e inconvenientes posee.

Ejercicio 2.2.3: Análisis por correlación

Describa brevemente el método de análisis por correlación e indique que ventajas e inconvenientes posee.

Ejercicio 2.2.4: Técnicas frecuenciales: Análisis de la respuesta frecuencial

Describa brevemente el método de análisis de la respuesta frecuencial e indique que ventajas e inconvenientes posee.

Ejercicio 2.2.5: Técnicas frecuenciales: Análisis de Fourier

Describa brevemente el método de análisis de Fourier e indique que ventajas e inconvenientes posee.

Ejercicio 2.2.6: Técnicas frecuenciales: Análisis espectral

Describa brevemente el método de análisis espectral e indique que ventajas e inconvenientes posee.

Ejercicio 2.2.7: Respuesta al impulso.

Determinar en forma aproximada la función de transferencia de los sistemas cuyas respuestas al impulso se muestran en la Figura 4. Simular la salida con la función de transferencia encontrada y comparar.

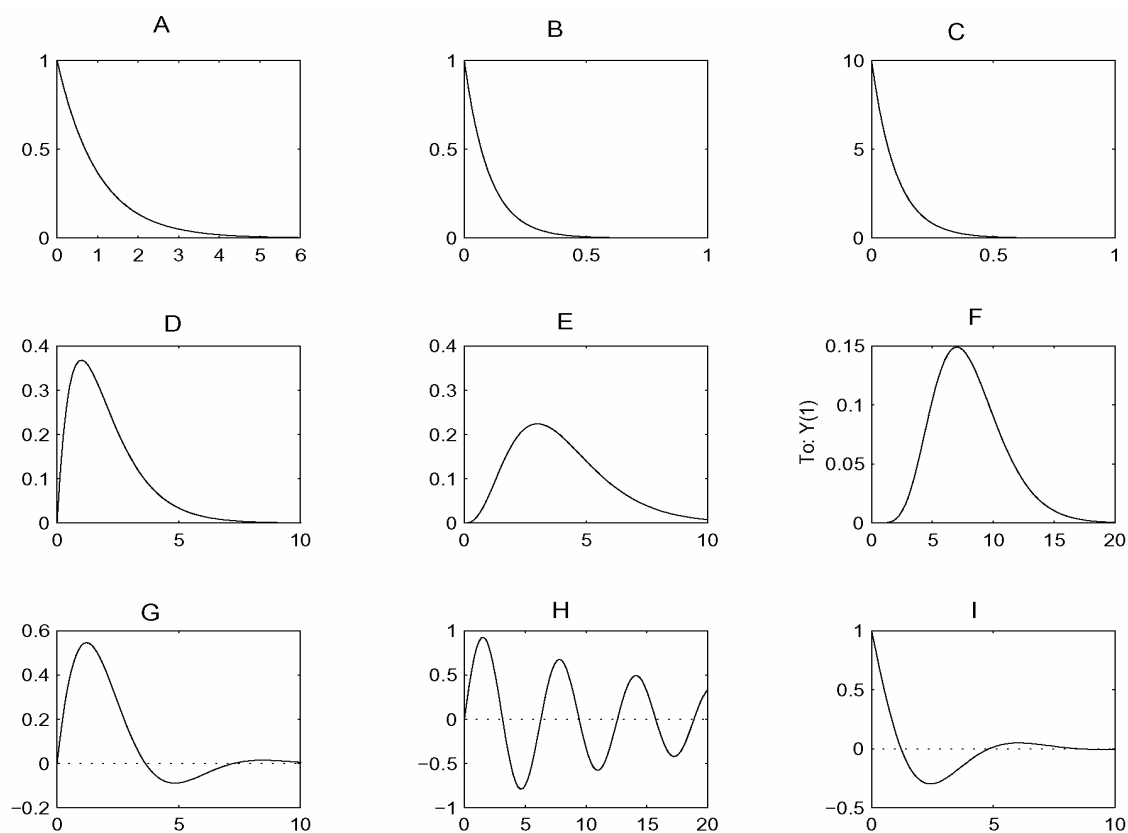


Figura 4. Respuesta al impulso de diferentes sistemas.

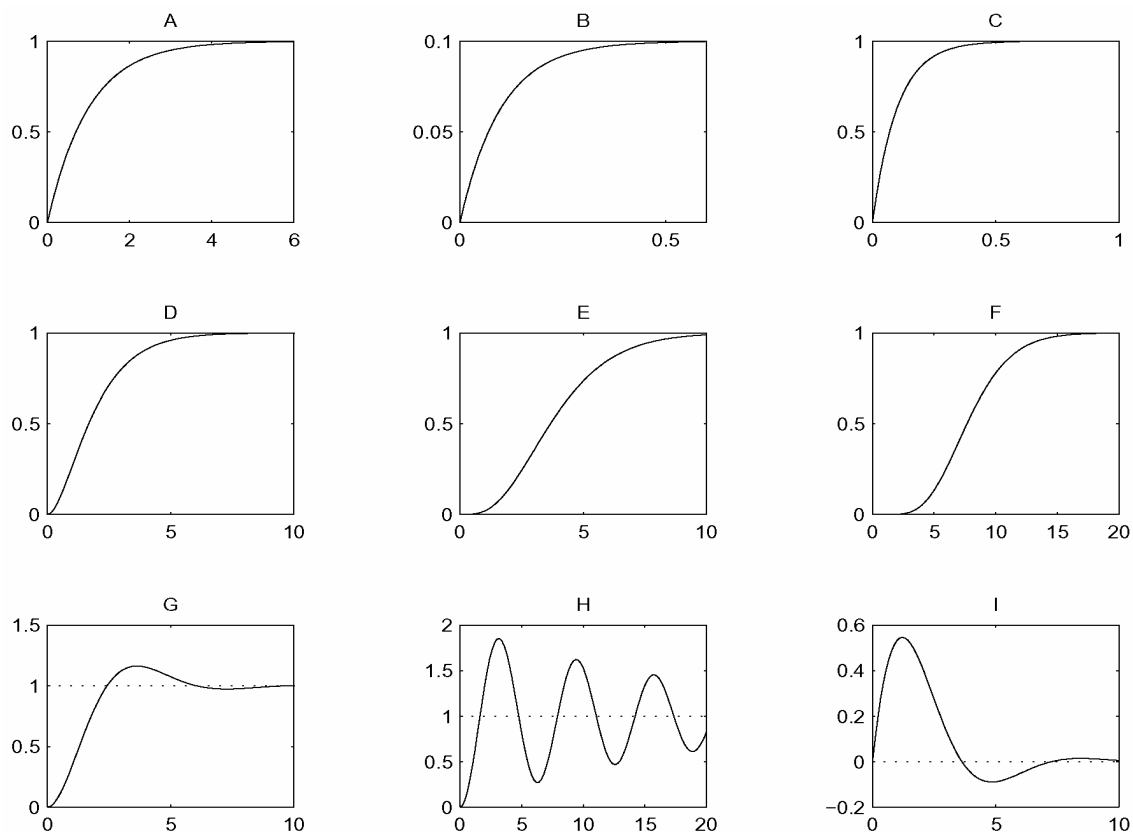


Figura 5. Respuesta al escalón de diferentes sistemas.

Ejercicio 2.2.8: Respuesta al escalón.

Determinar en forma aproximada la función de transferencia de los sistemas cuyas respuestas al escalón se muestran en la Figura 5. Simular la salida con la función de transferencia encontrada y comparar.

Ejercicio 2.2.9: Respuesta al impulso con ruido.

Se tiene un sistema representado por la función de transferencia discreta con un periodo de muestreo de 1 segundo

$$y(t) = \frac{q^{-1} + 0.5q^{-2}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}} u(t) + v(t)$$

a) Comparar la respuesta impulso del sistema en el caso en que no haya ruido, $v(t) = 0$, y en el caso en que el ruido sea coloreado con una función de transferencia

$$y(t) = \frac{1 - q^{-1} + 0.2q^{-2}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}} e(t)$$

siendo $e(t)$ un ruido blanco de varianza 0.5 y media 0.

b) Determinar los valores de la respuesta al impulso en cada caso y calcular el error cuadrado acumulado en presencia de ruido.

c) Comparar los resultados y sacar conclusiones.

Nota: Función de Toolbox de Identificación de Matalab

$$[Y,T] = \text{IMPULSE}(\text{SYS})$$

Ejercicio 2.2.10: Respuesta al impulso a partir de la respuesta al escalón.

Se desea estimar la respuesta impulso del sistema que tienen por función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{4s^4 + 4s + 1} e^{-2s}$$

a partir de la respuesta escalón del mismo.

- Obtener la respuesta al escalón (simulación).
- Obtener la respuesta al impulso a partir de la respuesta escalón.
- Comparar la respuesta al impulso real (obtenida por simulación) con la respuesta estimada.

Nota: Función de Toolbox de Identificación de Matlab

`[Y,T] = STEP(SYS)`

`[Y,T] = IMPULSE(SYS)`

Ejercicio 2.2.11: Respuesta al impulso por correlación.

Se desea utilizar el análisis de correlación para estimar la respuesta impulso del sistema descrito en el [Ejercicio 2.2.9](#). Con el fin de realizar un estudio comparativo de lo explicado en el tema se propone comparar la respuesta impulso real del sistema con la estimada en los siguientes casos:

- Cuando $v(t) = 0$ y la señal de excitación es un ruido blanco de amplitud 1.
- Cuando $v(t)$ es un ruido blanco, no correlacionado con la entrada, de variancia 0.3.

La señal excitación es la misma que en el caso anterior.

Comparar los resultados con la respuesta al impulso obtenida en forma directa.

Nota: Función de Toolbox de Identificación de Matlab

`[IR,R,CL] = CRA(Z,M,NA,PLOT)`

`[Y,T] = IMPULSE(SYS)`

Ejercicio 2.3.1: Experimentos preliminares

Especifique cuales son los tipos de experimentos preliminares que se suele realizar antes de realizar un identificación paramétrica.

Ejercicio 2.3.2: Selección de las señales de entrada

¿Qué aspectos deben ser tenidos en cuenta a la hora de seleccionar las entradas del sistema a identificar?

Ejercicio 2.3.3: Diseño de las señales de entrada

¿Qué aspectos deben ser tenidos en cuenta a la hora del diseño de las señales de entrada para identificar un sistema?

Ejercicio 2.3.4: Selección del período de muestreo y la duración del experimento

¿Qué aspectos deben ser tenidos en cuenta a la hora de seleccionar el periodo de muestreo?

¿Qué aspectos deben ser tenidos en cuenta a la hora de seleccionar la duración del experimento?

Ejercicio 2.3.5: Pretratamiento de los datos.

Describa los diferentes pretratamientos que son necesarios realizar sobre los datos antes de encarar el proceso de identificación.

1. *Perturbaciones a altas frecuencias*
2. *Datos espurios y olvidos.*
3. *Perturbaciones lentas (desbalance, tendencias, derivas)*
4. *Escalado de las variables.*
5. *Tiempos de retardo.*

Ejercicio 2.4.1: Métodos de identificación paramétricos

Realice una comparación entre los modelos de identificación temporales y frecuenciales

Ejercicio 2.4.2: Estructura de los modelos lineales discretos

Para los modelos que se detallan a continuación

- A) Realice un diagrama en bloques del modelo.
 - B) ¿Qué característica debe poseer el sistema para que el modelo represente al sistema en forma correcta? ¿Que ventajas y desventajas posee cada modelo?
 - C) Si es posible realice una parametrización lineal o pseudo lineal del modelo.
 - D) De un ejemplo simple en el que crea que la estructura corresponde a este tipo de modelos.
- 1) MODELO DISCRETO CON ESTRUCTURA TIPO F.I.R. (Finite Impulse Response).
 - 2) MODELO DISCRETO CON ESTRUCTURA TIPO O.E. (Output Error model structure).
 - 3) MODELO DISCRETO CON ESTRUCTURA TIPO A.R.X. (Auto Regressive with eXternal
 - 4) MODELO DISCRETO CON ESTRUCTURA TIPO A.R.M.A. (AutoRegressive Moving Average).
 - 5) MODELO DISCRETO CON ESTRUCTURA TIPO A.R.M.A.X. (Auto Regressive Moving Average with eXternal input).
 - 6) MODELO DISCRETO CON ESTRUCTURA TIPO B.J. (Box y Jenkins model structure)
 - 7) MODELOS EN EL ESPACIO DE ESTADO.

Ejercicio 2.4.3: Descripción del método de mínimos cuadrados

De una descripción de como se realiza la estima modelo con la estructura ARX por mínimos cuadrados.

Ejercicio 2.4.4: Propiedades del método de mínimos cuadrados

¿Cuales son las propiedades del método de mínimos cuadrados?

Ejercicio 2.4.5: Solución de mínimos cuadrados utilizando la ecuación normal

Describe la solución de mínimos cuadrados utilizando la ecuación normal. ¿Que ventajas e inconvenientes posee?

Ejercicio 2.4.6: Solución de mínimos cuadrados por triangulación ortonormal

Describe la solución de mínimos cuadrados por triangulación ortonormal. ¿Que ventajas e inconvenientes posee?

Ejercicio 2.4.7: Método de mínimos cuadrados generalizado

Describe el método de mínimos cuadrados generalizados. ¿Para que se utiliza? ¿Que ventajas e inconvenientes posee?

Ejercicio 2.4.8: Método de la variable instrumento

Describe el método de la variable instrumento. ¿Para que se utiliza? ¿Que ventajas e inconvenientes posee?

Ejercicio 2.4.9: Método de la máxima probabilidad

Describe el método de la máxima probabilidad. ¿Para que se utiliza? ¿Que ventajas e inconvenientes posee?

Ejercicio 2.4.10: Método de predicción de error

Describe el método de predicción de error. ¿Para que se utiliza? ¿Que ventajas e inconvenientes posee?

Ejercicio 2.4.11: Métodos recursivos para la estimación de parámetros

¿Qué son los métodos de estimación recursivos? ¿Para que se utilizan? ¿Cuales son sus características generales?

Ejercicio 2.4.12: Método de mínimos cuadrados recursivo

¿Como se realiza la estima en el método de mínimos cuadrados recursivo? ¿Que se tiene en cuenta para darles los valores iniciales al algoritmo? ¿Para que se agrega el factor de olvido?

Ejercicio 2.4.13: Algoritmos de estimación de parámetros recursivos

¿Cómo se generalizan los algoritmos de estimación paramétricos recursivos?

Ejercicio 2.4.14: Métodos de estimación paramétricos frecuenciales

Describe los métodos de estimación paramétricos frecuenciales.

Ejercicio 2.4.15: Identificación en el espacio de estados

De la estructura de un sistema en espacio de estado. Que relación existe con los modelos entrada-salida.

¿Qué es una parametrización identificable en variables de estado de un sistema?

¿Que es un modelos en el espacio de estados totalmente parametrizados? ¿Que ventajas e inconvenientes posee?

¿Para que se utilizan las realizaciones equilibradas en la identificación en el espacio de estados? ¿Que ventajas presentan?

Ejercicio 2.4.16: Selección de la estructura del modelo

¿En qué consiste la selección de la estructura del modelo?

¿Qué análisis preeliminaremos de los datos se pueden realizar para la selección de la estructura del modelo?

¿Que criterios para la comparación de la estructura de los modelos se suelen realizar?

¿Como se utiliza cada uno de ellos

Ejercicio 2.4.17: Validación del modelo

¿En qué consiste la selección de la validación del modelo?

¿Cuales son las verificaciones a priori que se suelen realizar para validar el modelo?

¿Qué verificación del comportamiento de las entradas-salidas se suelen realizar?

Ejercicio 2.4.18: Utilización TOOLBOX de identificación de Matlab

Una vez instalado el TOOLBOX de Identificación (Ident) del Matlab, utilizar el ejemplo de identificación siguiente:

Escriba en el Espacio de Trabajo del Matlab

» iddemo

Entonces se obtiene la siguiente pantalla

```
The SYSTEM IDENTIFICATION TOOLBOX is an analysis module
that contains tools for building mathematical models of
dynamical systems, based upon observed input-output data.
The toolbox contains both PARAMETRIC and NON-PARAMETRIC
MODELING methods.

Identification Toolbox demonstrations:

1) The Graphical User Interface (ident): A guided Tour.
2) Build simple models from real laboratory process data.
3) Compare different identification methods.
4) Data and model objects in the Toolbox.
5) Dealing with multivariable systems.
6) Building structured and user-defined models.
7) Model structure determination case study.
8) How to deal with multiple experiments.
9) Spectrum estimation (Marple's test case).
10) Adaptive/Recursive algorithms.
11) Use of SIMULINK and continuous time models.
12) Case studies.

0) Quit

Select a demo number:
```

Seleccione la opción 1. Siga los pasos guiados de esta opción. Practique la utilización de las distantes posibilidades de la interfase gráfica del Toolbox de identificación, especialmente la obtención de modelos paramétricos.

Practique con los ejemplos de identificación 2 a 12.

De una pequeña explicación de lo que se realiza en cada opción haciendo correspondencia con los temas vistos en el curso.

Nota: Función de Toolbox de Identificación de Matlab
IDDEMO

Ejercicio 2.4.19: Identificación con un modelo conocido.

Dado el sistema mostrado en la Figura 2.4.6 donde

$$y(t) = G(s)u(t) + H(s)e(t) \quad 1$$

La función de transferencia de la planta es

$$G(s) = k_g \frac{e^{-\tau_g}(s - z_{g_1})(s + z_{g_2}) \dots}{(s - p_{g_1})(s - p_{g_2})(s - p_{g_3}) \dots} \quad 2$$

y la función de transferencia de la perturbación

$$H(s) = k_h \frac{(s - z_{h_1})(s - z_{h_2}) \dots}{(s - p_{h_1})(s - p_{h_2})(s - p_{h_3}) \dots} \quad 3$$

Los valores de los polos, ceros y ganancias son dadas individuales para cada alumno mostrado en el [Apéndice](#).

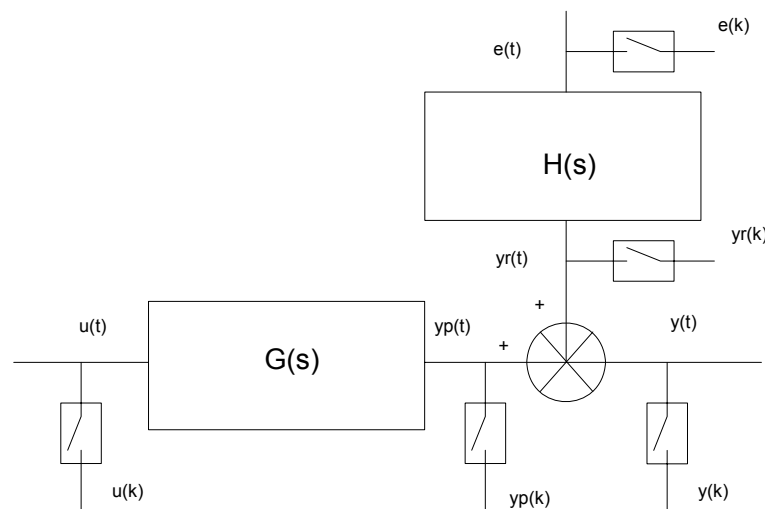


Figura 2.4.6. Sistema Planta - Perturbaciones.

1) Dada la función de transferencia continua obtener la función de transferencia discreta con un período de muestreo de igual a T_s ($\text{SYSD} = \text{C2D}(\text{SYSC}, T_s, \text{METHOD})$). Determinar el orden del Numerador y denominador en z y z^{-1} .

2) Realizar un diagrama en bloques del modelo y una parametrización lineal del modelo discreto (tanto en el error como en la referencia)

3) Obtención de datos por simulación.

El sistema utilizado en la simulación debe ser especificado por la función de transferencia en el campo continuo (en "s" no en "z") en el Simulink. Posteriormente almacenar los datos para realizar la identificación.

Condiciones generales

A) Almacenar los datos de simulación con un período de muestreo igual T_s .

B) Obtener dos conjuntos de datos para cada simulación. Uno para identificación y el otro para validación del modelo. Tener en cuenta que la semilla (Seed) del generador aleatorio debe ser distinta para cada caso.

C) La planta usada en la simulación debe ser especificada con la función de transferencia en el campo continuo.

D) Señales del sistema

Señal de entrada de la planta ($u(t)$)

I) Entrada escalón

II) Entrada rampa

III) Ruido blanco limitado en Banda con un período de muestreo de señal aleatoria de 5 segundos.

Señal de perturbación ($e(t)$)

- Ruido blanco limitado en Banda (Band Limited White Noise) con un Período de Muestreo (Sample Time): Igual al período de muestreo especificado para la planta y realizar las simulaciones con 3 valores distintos de Potencia de ruido (Noise Power). Una de las simulaciones hacerla sin ruido.

4) Estimación de parámetros.

I) Utilizar una estructura A.R.X. para identificar el modelo. Determinar el orden de acuerdo al modelo discreto obtenido para la planta conocida.

II) Utilizar una estructura A.R.M.A.X. para identificar el modelo. Determinar el orden de acuerdo al modelo discreto obtenido para la planta conocida.

III) Utilizar una estructura O.E.. para identificar el modelo. Determinar el orden de acuerdo al modelo discreto obtenido para la planta conocida.

IV) Utilizar una estructura B.J.. para identificar el modelo. Determinar el orden de acuerdo al modelo discreto obtenido para la planta conocida.

V) Utilizar la opción de comienzo rápido de la función de Matlab IDENT (Quick Start) para determinar el orden y tipo de modelo.

VI) Comparar los modelos obtenidos con el modelo original (dado para realizar el ejemplo). Obtener conclusiones de los distintos métodos y condiciones de operación.

Apéndice: Sistemas propuestos

Alumno 1

Parámetros

$$T_s = 0.01$$

$$k_g = 10 \quad \tau_g = 0.5 \quad z_{gi} = -3 \quad p_{gi} = -8, -5, -6, -4$$

$$k_h = 1 \quad \tau_h = 0 \quad z_{hi} = -2, -5 \quad p_{hi} = -8, -5, -6, -4$$

Alumno 2

Parámetros

$$T_s = 0.01$$

$$k_g = 5 \quad \tau_g = 0.4 \quad z_{gi} = -1, -7 \quad p_{gi} = -5, -9, -8, -10$$

$$k_h = 1 \quad \tau_h = 0 \quad z_{hi} = -3 \quad p_{hi} = -5, -9$$

Alumno 3

Parámetros

$$T_s = 0.01$$

$$k_g = 11 \quad \tau_g = 0.3 \quad z_{gi} = -3, -6, -1 \quad p_{gi} = -5, -10, -7, -12$$

$$k_h = 1 \quad \tau_h = 0 \quad z_{hi} = -5 \quad p_{hi} = -9, -10$$

Alumno 4

Parámetros

$$T_s = 0.01$$

$$\begin{array}{llll} k_g = 12 & \tau_g = 0.2 & z_{gi} = -2, -10 & p_{gi} = -3, -11, -15 \\ k_h = 1 & \tau_h = 0 & z_{hi} = -6, -5 & \phi_i = -3, -11, -15, -5 \end{array}$$

Alumno 5**Parámetros**

$$T_s = 0.01$$

$$\begin{array}{llll} k_g = 7 & \tau_g = 0.1 & z_{gi} = -1, -2 & p_{gi} = -3, -4, -7, -2, -6 \\ k_h = 1 & \tau_h = 0 & z_{hi} = -7 & \phi_i = -3, -4 \end{array}$$

Alumno 6**Parámetros**

$$T_s = 0.01$$

$$\begin{array}{llll} k_g = 13 & \tau_g = 0.9 & z_{gi} = -6 & p_{gi} = -5, -10, -15 \\ k_h = 1 & \tau_h = 0 & z_{hi} = -8, -3 & \phi_i = -10, -1, -15 \end{array}$$

Alumno 7**Parámetros**

$$T_s = 0.01$$

$$\begin{array}{llll} k_g = 19 & \tau_g = 0.4 & z_{gi} = -4, -7 & p_{gi} = -2, -4, -6, -5 \\ k_h = 1 & \tau_h = 0 & z_{hi} = -9 & \phi_i = -2, -3, -5 \end{array}$$

Alumno 8**Parámetros**

$$T_s = 0.01$$

$$\begin{array}{llll} k_g = 9 & \tau_g = 0.1 & z_{gi} = -1, -3, -7 & p_{gi} = -2, -4, -6, -5 \\ k_h = 1 & \tau_h = 0 & z_{hi} = -9 & \phi_i = -6, -2 \end{array}$$

Alumno 9**Parámetros**

$$T_s = 0.01$$

$$\begin{array}{llll} k_g = 7 & \tau_g = 0.3 & z_{gi} = -1, -11, -3 & p_{gi} = -1, -7, -4, -13 \\ k_h = 1 & \tau_h = 0 & z_{hi} = -10 & \phi_i = -1, -7 \end{array}$$

Alumno 10**Parámetros**

$$T_s = 0.01$$

$$\begin{array}{llll} k_g = 3 & \tau_g = 0.5 & z_{gi} = -3, -4, -2 & p_{gi} = -1, -20, -15, -7, -9 \\ k_h = 1 & \tau_h = 0 & z_{hi} = -4 & \phi_i = -15, -20 \end{array}$$

Ejercicio 2.4.20: Identificación a partir de un conjunto de datos.

Dado el conjunto de datos de entrada y salida entregado por la cátedra:

- 1) Utilice la función IDENT la opción de inicio rápido (Quick Start) para obtener un modelo a partir de los datos.
- 2) Plante otras estructuras y realice la identificación.
- 3) Escriba el mejor modelo en función de transferencia discreta y continua.
- 3) Que conclusión puede sacar de los resultados de la identificación.

Ejercicio 2.4.21: Métodos de identificación paramétricos recursivos.

Con los datos obtenidos en el [ejercicio 2.4.19](#) utilizar los algoritmos recursivos (RARMAX, RARX, ROE y RBJ) para obtener los modelos ARMAX, ARX, OE y BJ.

- 1) Observe para las distintas señales de excitación (rampa, escalón y ruido binario) y potencias de ruido el comportamiento de los parámetros con las iteraciones.
- 2) Compare los valores reales con los obtenidos con los métodos recursivos. Observe la condición de excitación persistente.
- 3) Observe el comportamiento para los distintos valores de los parámetros que manejan la convergencia de estos algoritmos.
- 4) Obtenga conclusiones al compara los algoritmos recursivos con los no recursivos.

3. SISTEMAS ADAPTABLES CON MODELO DE REFERENCIA

3.1. Introducción

Las técnicas de control por modelo de referencia (MRAC, Model Reference Adaptive Systems; MRAS) fueron introducidas por Whitacker en 1958. Los sistemas adaptable con modelo de referencia se originaron para resolver el problema en los cual las especificaciones de desempeño se daban en termino de un modelo de referencia. Este modelo indica como el proceso se debe comportar idealmente a la directiva de control.

Los sistemas adaptables con modelo de referencia históricamente se desarrollaron en un esquema de control adaptable directo, es decir que los parámetros del controlador se ajustaban directamente sin obtener primero un modelo del proceso. Sin embargo se puede plantear un esquema indirecto. Este da como resultado un problema de control similar al problema de asignación de polos.

La Figura 3.7 muestra un diagrama en bloques de un sistema adaptable directo con modelo de referencia. Se puede pensar que el controlador consiste de dos lazos. El lazo interno es un lazo de realimentación común compuesto del proceso y el controlador. El lazo externo ajusta los parámetros del controlador en forma tal que el error entre la salida del sistema y la salida del modelo sea lo mas pequeña posible. El problema fundamental de los sistemas adaptables con modelo de referencia es determinar el mecanismo de ajuste para llevar el error a cero.

Un ejemplo típico de este tipo de controladores es el problema originalmente resuelto para el control de vuelo de aviones. En este caso el modelo de referencia describía la respuesta deseada de la aeronave a los movimientos de la palanca de mando.

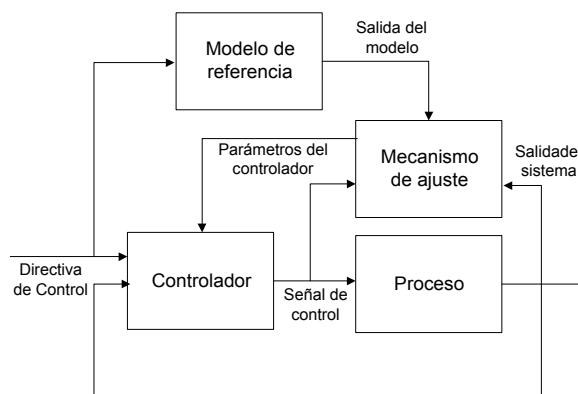


Figura 3.7. Diagrama en bloques de un sistema adaptable con modelo de referencia.

En el esquema de la Figura 3.7 el modelo de referencia está colocado en paralelo con el proceso. Este esquema es bastante usual, aunque existen diversas posibilidades como colocarlo en serie o bien una combinación de serie y paralelo.

3.2. Esquema indirecto de control con modelo de referencia

En el esquema indirecto de control con modelo de referencia se utiliza un método de identificación independiente del controlador. El esquema del controlador se puede resolver usando un diseño de asignación de polos.

Considerando un sistema de entrada simple y salida simple (SISO), el cual se puede modelar como

$$y = \frac{B}{A}u \quad (3.68)$$

donde u es la señal de entrada y y la señal de salida. Los símbolos A y B son polinomios en el operador diferencial p (o el operador retardo q para sistemas discretos). Se asume que:

- $\deg(A) \geq \deg(B)$, es decir el sistema es propio (para el caso de sistemas en tiempo continuo) o causal (para el caso de sistemas de tiempo discreto);
- el polinomio A es mónico, esto es que su primer coeficiente es unitario.

Se quiere encontrar un regulador tal que la relación entre la señal de control u_c y la salida deseada y_m , esta dada por

$$y_m = \frac{B_m}{A_m}u_c \quad (3.69)$$

Donde A_m y B_m son polinomios en el operador en diferencial p (o el operador retardo q).

La acción de control se supone de la forma lineal como

$$Ru = Tu_c - Sy \quad (3.70)$$

donde T , S y R son polinomios. Esta ley de control representa un realimentación negativa con una función de transferencia $-S/R$ y una prealimentación con una función de transferencia T/R . La Figura 3.8 se muestra el esquema usado. Al eliminar u de las ecuaciones (3.69) y (3.70) da la ecuación a lazo cerrado

$$(AR + BS)y = BTu_c \quad (3.71)$$

La condición de seguimiento perfecto es

$$\frac{y}{u_c} = \frac{BT}{(AR + BS)} = \frac{B_m}{A_m}$$

Para obtener el comportamiento a lazo cerrado deseado, A_m debe dividir a $(AR + BS)$ (esto es las raíces o ceros de A_m , donde $A_m = 0$, también deben ser raíces de $(AR + BS)$). Por otro lado, los ceros del proceso, donde $B = 0$, serán también los ceros de lazo cerrado del sistema controlado a menos que se cancelen con polos de lazo cerrado correspondientes. Debido a que los ceros inestables y pobremente amortiguados no pueden ser cancelados (porque cuando hay una cancelación imperfecta aparecen polos inestables en el sistema de lazo cerrado), el polinomio B se factoriza como

$$B = B^+ B^-$$

donde B^+ contiene los factores que se pueden cancelar, y B^- los restantes factores de B . Los ceros de B^+ deben ser estables y bien amortiguados. Para hacer la factorización única, se asume que B^+ es mónico.

Se deduce de la ecuación (3.71) que el polinomio característico en lazo cerrado del sistema es $(AR + BS)$. Este polinomio debe tener a $A_m B^+$ como un factor y será

generalmente de orden mayor que $A_m B^+$. El resto de los factores se pueden interpretar como una dinámica observada. De esta manera hay tres tipos de factores del polinomio característico: cancelación de ceros del proceso dados por B^+ , polos deseados dado por A_m y polos observados dado por el polinomio observador A_0 . Por lo tanto

$$AR + BS = B^+ A_0 A_m \quad (3.72)$$

la que se la llama la *ecuación Diofantina*³. Esta ecuación se puede poner como

$$AR + B^+ B^- S = B^+ A_0 A_m$$

Como A es dato, de esta ecuación se deduce que B^+ debe dividir a R . Por lo tanto se puede escribir

$$R = B^+ R_1 \quad (3.73)$$

Dividiendo la ecuación (3.72) por B^+ resulta

$$AR_1 + B^- S = A_0 A_m \quad (3.74)$$

Ahora requiere que la relación en la ecuación (3.71) entre la señal de control u_c y la señal de salida del proceso y debe ser igual al la respuesta de lazo cerrado deseada dada por la ecuación (3.69).

Las especificaciones deben también ser tal que B^- divida a B_m (que el modelo de referencia tenga los ceros del sistema que no se pueden cancelar); de otra manera no habría solución para el diseño de control. Por lo tanto

$$B_m = B^- B'_m \quad (3.75)$$

y como T debe contener a A_0 para que se anule y no aparezca en la ecuación de lazo cerrado, resulta

$$T = A_0 B'_m$$

Para completar la solución del problema se deben dar condiciones para garantizar que la existan soluciones de la ecuación (3.74) que da una ley de control propia (para los sistemas continuos) o causal (para los sistemas discretos). Estas condiciones de causalidad dan como resultado [Astrom and Wittenmark, 1995, pp. 95]

$$\deg(A_0) \geq 2 \deg(A) - \deg(A_m) - \deg(B^+) - 1 \quad (3.76)$$

$$\deg(A_m) - \deg(B_m) \geq \deg(A) - \deg(B) \quad (3.77)$$

La ley de control (3.70) con los polinomios del controlador (3.73), (3.74) y (3.75) da un seguimiento perfecto del modelo si se cumplen las condiciones de compatibilidad de las ecuaciones (3.76) y (3.77). Se debe notar que el diseño propuesto contiene la solución de la ecuación Diofantina (3.74) y no es apropiada para un control adaptable directo (ya que implicaría resolver la ecuación Diofantina en cada instante de muestreo).

Sin embargo se asume que todos los ceros son cancelados, entonces

$$A_0 A_m = AR_1 + b_0 S$$

Multiplicando por y y usando la ecuación del modelo (3.68), resulta

³ Las ecuaciones diofánticas deben su nombre a Diofanto (Diofanto de Alejandría, nacido alrededor del 200 y fallecido alrededor de 284) que fue quien las estudió primero. Una ecuación diofántica es una ecuación cuyas soluciones son números naturales. Por ejemplo las ecuaciones de la forma " $ax + by = c$ ", para que tenga solución " c " tiene que ser divisible por el máximo común divisor de " a " y " b ". En este caso la ecuación tiene un número finito de soluciones o ninguna.

$$\begin{aligned} A_0 A_m y &= BR_1 u + b_0 S y \\ &= b_0 (Ru + Sy) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Los polinomios en el lado izquierdo se conocen y los del lado derecho son los parámetros desconocidos del controlador. El Polinomio T se obtiene directamente de la ecuación (3.75). El modelo reparametrizado de la ecuación (3.78) se lo puede utilizar para estimar los parámetros desconocidos del controlador usando un método de estimación de parámetros como los ya vistos.

Para ejemplos de utilización ver [Astrom and Wittenmark, 1995, pp. 95].

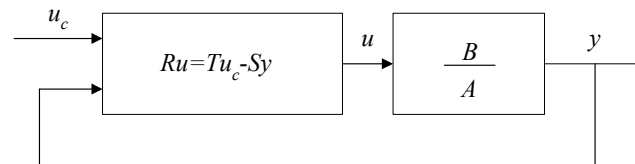


Figura 3.8. Un sistema a lazo cerrado con un controlador general

3.3. Esquema directo de control adaptable con modelo de referencia

Un sistema de control adaptable directo con modelo de referencia básicamente está formado por tres partes: un controlador primario, un modelo de referencia y una ley de adaptación. Por lo tanto para el diseño de un sistema de control adaptable con modelo de referencia directo, será necesario definir las tres partes. Dado que la parte que caracteriza al control adaptable es la ley de adaptación, el lo que sigue nos concentraremos fundamentalmente en esa parte.

Controlador Primario

El controlador primario puede tener en un principio cualquiera de las configuraciones conocidas para el diseño de los controladores lineales. Sin embargo debe cumplir la condición de que sea posible que el conjunto de proceso y el controlador puedan reproducir el modelo de referencia. Este requisito supone restricciones sobre el orden y la estructura del controlador. Por otro lado, para que pueda aplicarse una adaptación directa la señal de control debe de ser una función lineal de los parámetros.

Modelo de referencia

El modelo de referencia que especifica el comportamiento deseado en bucle cerrado, se da usualmente en forma paramétrica. La condición mencionada anteriormente para el seguimiento del modelo de referencia, también condiciona en ciertos aspectos el modelo de referencia posible, en cuanto al orden relativo del proceso (exceso de polos). Por otro lado el modelo elegido debe ser sensible a la dinámica del proceso, ya que si por ejemplo se eligen un modelo con una dinámica muy rápida, la señal de control será muy grande causando saturaciones en los actuadores y el sistema no responderá a dicha dinámica. Por ello la elección del modelo de referencia no es fácil, eligiéndose normalmente un modelo conservador.

Ley de adaptación

La ley de adaptación es la parte más sensible en los sistemas adaptables y merece la mayor parte de los estudios en este tema. Los primeros estudios se presentaron en sistemas de tiempo continuo minimizando un índice de discrepancia entre la salida del modelo de referencia y la del sistema formulado como la integral del error al cuadrado. Este criterio de diseño conduce a la técnica de ajuste de parámetros denominada “regla del M.I.T.” (Massachusetts Institute of Technology). Si bien esta técnica es simple, no se garantiza estabilidad. Para obtener un buen desempeño es necesario un laborioso estudio por simulación. Otra técnica de diseño se fundamenta en la utilización del segundo método de estabilidad de Lyapunov, el cual tiene la ventaja de que asegura la

estabilidad global para cualquier valor de la ganancia de adaptación y cualquier tipo de entrada. La principal desventaja de este método es que se requiere el conocimiento del vector de estado que no siempre es accesible. Otra desventaja es que no es aplicable a casos donde los parámetros del conjunto planta más controlador no pueden ser modificados directamente. A partir de los años 80 se proponen una técnica de diseño basado en el concepto de estabilidad entrada-salida. Estas propuestas aumentan la cantidad de problemas en los que se puede demostrar estabilidad y extiende las aplicaciones a muchos sistemas no lineales (tales como los robot manipuladores).

3.4. La regla del M.I.T.

Los primeros estudios se presentaron en sistemas de tiempo continuo minimizando un índice de discrepancia entre la salida del modelo de referencia y la del sistema formulado como la integral del error al cuadrado. Este criterio de diseño conduce a la técnica de ajuste de parámetros denominada “regla del M.I.T.” (Massachusetts Institute of Technology).

Actualmente a la regla del MIT se la puede considerar como un sistema a lazo cerrado en el cual el controlador tiene un parámetro de ajuste θ . La respuesta a lazo cerrado deseada se especifica por un modelo cuya salida es y_m . Sea e el error entre la salida y del sistema a lazo cerrado y la salida del modelo y_m . Una posibilidad es ajustar los parámetros en tal sentido que la función de pérdida

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \quad (3.79)$$

es minimizada. Para que J disminuya, es razonable cambiar los parámetros en la dirección del gradiente negativo de J , esto es

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} \quad (3.80)$$

La derivada parcial $\partial e / \partial \theta$, la que se le llama *derivada de sensibilidad* del sistema, indica como el error es influenciado por el ajuste de los parámetros. Si se asume que los parámetros que cambian lo hacen en forma más lenta que las otras variables del sistema, entonces la derivada $\partial e / \partial \theta$ se puede evaluar sumiendo que θ es constante.

Hay varias alternativas para el funcional de coste (3.79). Si esta se define como

$$J(\theta) = |e|$$

el método del gradiente da como resultado

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial e}{\partial \theta} \text{sign}(e)$$

donde $\text{sign}(\circ)$ es el signo de la función.

Uno de los primeros controladores adaptables con modelo de referencia fueron implementados de esta manera. Sin embargo, hay muchas otras alternativas, por ejemplo

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \text{sign}\left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right) \text{sign}(e)$$

Este es el llamado algoritmo “sign-sign”. En los sistemas de telecomunicaciones se usa una versión discreta (en el tiempo) de este algoritmo, resultando en una implementación simple y rápida.

La ecuación (3.80) también se puede implicar cuando hay muchos parámetros para ajustar. El símbolo θ se debe interpretar como un vector y $\partial e / \partial \theta$ como el gradiente del error con respecto a los parámetros.

3.4.1. Ejemplos ilustrativos

En esta sección se darán distintos ejemplos para ilustrar la regla de adaptación del MIT. Se probará con distintas plantas simples para mostrar diferentes propiedades de los sistemas adaptables.

Ejemplo 3.1: Ajuste de una ganancia de prealimentación.

En este ejemplo se realiza un ajuste de una ganancia de prealimentación. En la Figura 3.9 se muestra el esquema usado. En este ejemplo el modelo de la planta es

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p G(s)$$

y el modelo de referencia es

$$\frac{y(s)}{u_c(s)} = k_m G(s)$$

donde

$$G(s) = \frac{b}{s + a}$$

Como se pueden ver la planta y el modelo solo difieren de una ganancia. Se desea ajustar la ganancia de prealimentación θ de tal forma que el error e entre la planta y el modelo sea nulo.

Si consideramos que los valores del sistema son conocidos entonces se puede sacar el valor teórico del parámetro como sigue.

El error del sistema será

$$\begin{aligned} e &= y - y_m \\ &= \theta k_p G(s) u_c - k_m G(s) u_c \\ e &= (\theta k_p - k_m) G(s) u_c \end{aligned} \quad (3.81)$$

si se considera que el error de salida será nulo entonces

$$e = 0 \Rightarrow \theta k_p - k_m = 0$$

Finalmente

$$\theta^* = \frac{k_m}{k_p}$$

Este es el valor al que tiene que tender el parámetro θ cuando el algoritmo adaptable converja.

Para el cálculo de la ley de ajuste se parte del funcional de coste

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2$$

y aplicando la regla de ajuste del M.I.T.

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta}$$

donde el error estará dado por la ecuación (3.81), esto es $e = (\theta k_p - k_m) G(s) u_c$, resultando la derivada parcial del error respecto del parámetro θ igual

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = k_p G(s) u_c \quad (3.82)$$

como $y_m = k_m G(s) u_c$ entonces $G(s) u_c = \frac{y_m}{k_m}$ reemplazando en la ecuación (3.82)

resulta

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = \frac{k_p}{k_m} y_m$$

y la regla del M.I.T. queda

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\gamma e \frac{k_p}{k_m} y_m$$

realizando un cambio de variables $\bar{\gamma} = \gamma \frac{k_p}{k_m}$ la ecuación de adaptación finalmente queda

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\bar{\gamma} e y_m$$

donde es necesario conocer el signo de k_p para que el parámetro converja.

La Figura 3.10 muestra el diagrama de simulación usado (Simulink). En la Figura 3.11 se realiza la simulación para distintos valores iniciales del parámetro θ y con $b = 1$, $a = 1$ y $k_p = 1$. Se comprueba para todos los casos simulados que este converge al valor ideal. En la Figura 3.12 se realiza la simulación para distintos valores del parámetro γ . Se comprueba que a medida que aumenta γ , la velocidad de convergencia es mayor, pero puede producir oscilaciones en la respuesta del sistema.

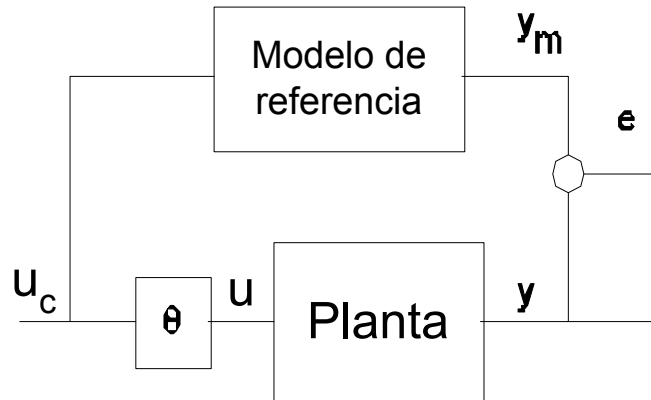


Figura 3.9. Sistema adaptable usado en el Ejemplo 3.1.

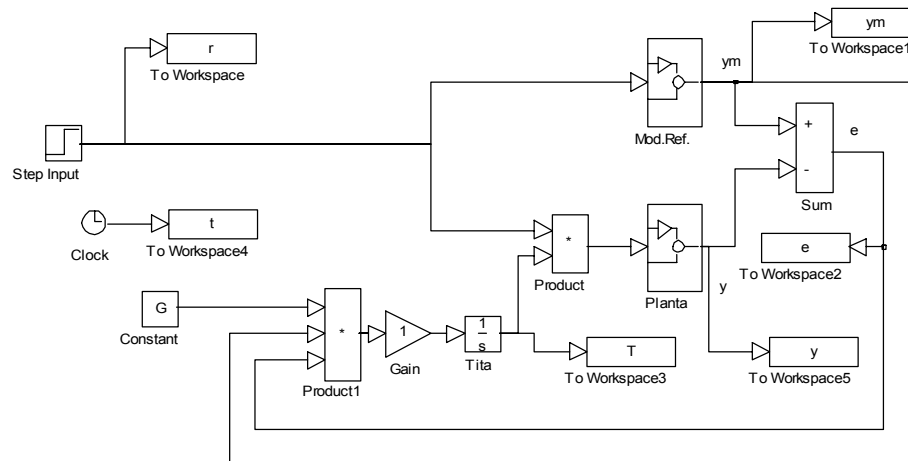


Figura 3.10. Diagrama en bloques del sistema de simulación del Ejemplo 3.1.

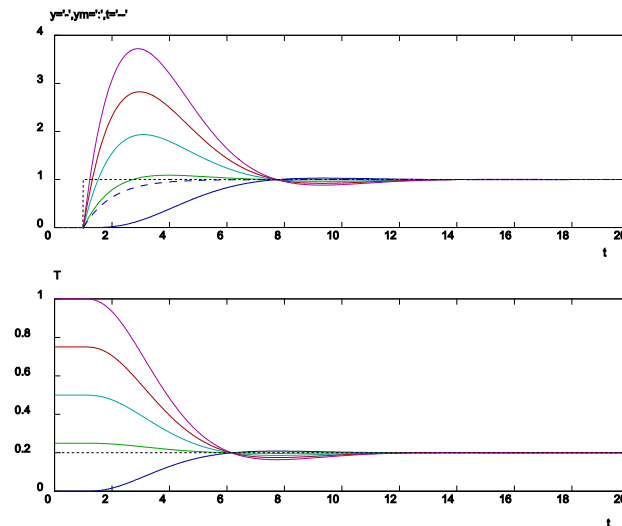


Figura 3.11. Distinto valor inicial del parámetro θ . $\theta(0)$ igual a 0, 0.25, 0.5, 0.75 y 1.

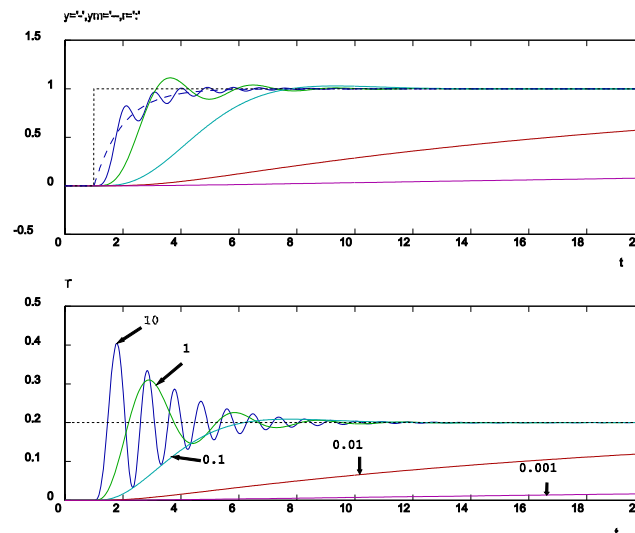


Figura 3.12. Distinto valores para el parámetro de ajuste γ . γ igual 10, 1, 0.1, 0.01 y 0.001.

Si bien esta técnica es simple, la ganancia de adaptación gobierna la velocidad de convergencia del algoritmo. Si esta es pequeña puede que el algoritmo no converja y si es demasiado grande puede que el sistema se inestabilice. Para obtener un buen desempeño es necesario un laborioso estudio por simulación.

Ejemplo 3.2: MRAS con regla del M.I.T. para un sistema de primer orden.

Dado el sistema

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu \Leftrightarrow G(p) = \frac{y}{u} = \frac{b}{(p+a)} \quad (3.83)$$

donde u es la variable de control, y es la salida medida y p es el operador derivada ($d/dt \Leftrightarrow p$). Se desea obtener un sistema cuyo comportamiento sea

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c \Leftrightarrow G_m(p) = \frac{y}{u_c} = \frac{b_m}{(p + a_m)} \quad (3.84)$$

Para resolver este ejemplo se supone una acción de control dada por

$$u(t) = \theta_1 u_c(t) - \theta_2 y(t) \quad (3.85)$$

La Figura 3.13 muestra el esquema de control usado.

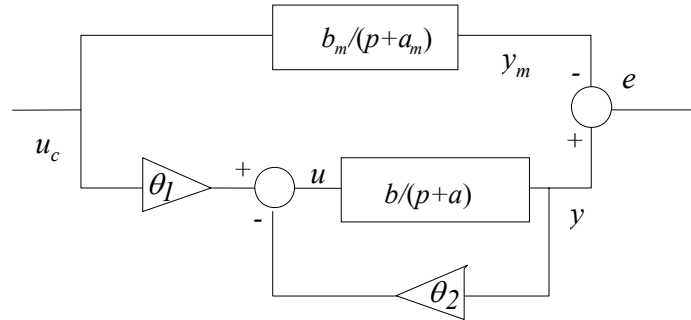


Figura 3.13. Esquema de control usado.

El controlador tiene dos parámetros. Si se eligen como

$$\theta_1 = \theta_1^0 = \frac{b_m}{b} \quad (3.86)$$

$$\theta_2 = \theta_2^0 = \frac{a_m - a}{b} \quad (3.87)$$

la relación entrada-salida del sistema y el modelo de referencia es la misma. Esto se llama seguimiento perfecto del modelo. Se comprueba reemplazando (3.85) en (3.83)

$$y = \frac{b}{(p + a)} (\theta_1 u_c - \theta_2 y)$$

$$(p + a + \theta_2 b) y = b \theta_1 u_c$$

La ecuación a lazo cerrado queda

$$y = \frac{b \theta_1}{(p + a + \theta_2 b)} u_c \quad (3.88)$$

comparando (3.88) con (3.84) resultan las ecuaciones (3.86) y (3.87).

Para aplicar la regla del M.I.T., se debe evaluar

$$\theta_i = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta_i}$$

el error será

$$e = y - y_m$$

donde y denota la salida del sistema en lazo cerrado. De las ecuaciones (3.83) y (3.85)

$$y(s) = \frac{b \theta_1}{(p + a + b \theta_2)} u_c$$

La derivada de sensibilidad se obtienen con la derivada parcial del error e respecto de los parámetros θ_1 y θ_2 . Considerando que $\partial y_m / \partial \theta_i = 0$ se tiene

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b}{(p + a + b \theta_2)} u_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{b^2 \theta_1}{(p + a + b\theta_2)^2} u_c = -\frac{b}{(p + a + b\theta_2)} y$$

La ley de ajuste queda

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma' \left(\frac{b}{(p + a + b\theta_2)} u_c \right) e \quad (3.89)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma' \left(\frac{b}{(p + a + b\theta_2)} y \right) e \quad (3.90)$$

Las fórmulas (3.89) y (3.90) no se pueden usar directamente porque los parámetros del proceso a y b no son conocidos. Por ello se deben aproximar.

Una posibilidad de aproximación esta basada en que cuando hay un seguimiento perfecto los parámetros cumplen

$$p + a + b\theta_2^0 = p + a_m$$

Entonces se puede usar la aproximación

$$p + a + b\theta_2 \approx p + a_m$$

La cual da una aproximación razonable cuando los parámetros están cerca de sus valores correctos, esto es $\theta_1 \approx \theta_1^0$ y $\theta_2 \approx \theta_2^0$. Bajo estas suposiciones se tiene

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma' \left(\frac{b}{(p + a_m)} u_c \right) e \quad (3.91)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma' \left(\frac{b}{(p + a_m)} y \right) e \quad (3.92)$$

Como b tampoco es conocido, lo puede absorber el parámetro γ' haciendo $\gamma'' = \gamma' b$. Quedan las ecuaciones

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma'' \left(\frac{1}{(p + a_m)} u_c \right) e$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma'' \left(\frac{1}{(p + a_m)} y \right) e$$

Las aproximaciones de las derivadas parciales $\partial e / \partial \theta_1$ y $\partial e / \partial \theta_2$ se obtiene al aplicar un filtro de primer orden a las señales de control u_c y de salida y . Para que este filtro esté normalizado y tenga ganancia unitaria en estado estacionario se puede definir el

parámetro $\gamma' = \frac{\gamma''}{a_m} = \frac{\gamma' b}{a_m}$ resultando las ecuaciones

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma' \left(\frac{a_m}{(p + a_m)} u_c \right) e \quad (3.93)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma' \left(\frac{a_m}{(p + a_m)} y \right) e \quad (3.94)$$

Las ecuaciones (3.93) y (3.94) son las ecuaciones finales de ajuste. Se debe tener en cuenta que se debe conocer el signo del parámetro b para conocer el signo correcto del parámetro γ' .

La Figura 3.14 muestra el esquema de simulación del sistema completo. El sistema adaptable consta de 5 estados las que se pueden elegir como la salida del modelo y_m (es

un sistema de primer orden por lo tanto tiene 1 estado), los parámetros θ_1 y θ_2 (los cuales hay que integrar par obtener su valor), y por último las derivada de sensibilidad $\partial e/\partial \theta_1$ y $\partial e/\partial \theta_2$ (salida de los filtros de primer orden).

El comportamiento del sistema se muestra en las figuras siguientes. Los parámetros se eligen como $a = 1$, $b = 0.5$, $a_m = 2$, $b_m = 2$ y $\gamma = 1$. La señal de entrada es una señal cuadrada con una amplitud de 1. La Figura 3.15 muestra los resultados de simulación. La Figura 3.16 muestra la estima de parámetros para diferentes valores de la ganancia de adaptación γ . Se debe notar que los parámetros cambian más cuando cambia la señal de entrada. La velocidad de convergencia aumenta cuando aumenta γ . El hecho de que el controlador es bastante bueno para el tiempo igual a 10 refleja el hecho de que hay una relación especial entre los parámetros que producen un error pequeño en la salida aun cuando los parámetros θ_1 y θ_2 están muy lejos de sus valores óptimos. Esto se muestra en la Figura 3.17 donde se grafica el parámetro θ_2 en función del parámetro θ_1 para una simulación de 500 unidades de tiempo. Esta muestra que los parámetros se aproximan a sus valores correctos cuando el tiempo aumenta. Los parámetros rápidamente se aproximan a la línea $\theta_2 = \theta_1 - a/b$. Esta línea representa valores de parámetros tal que el sistema a lazo cerrado tiene una ganancia estática correcta.

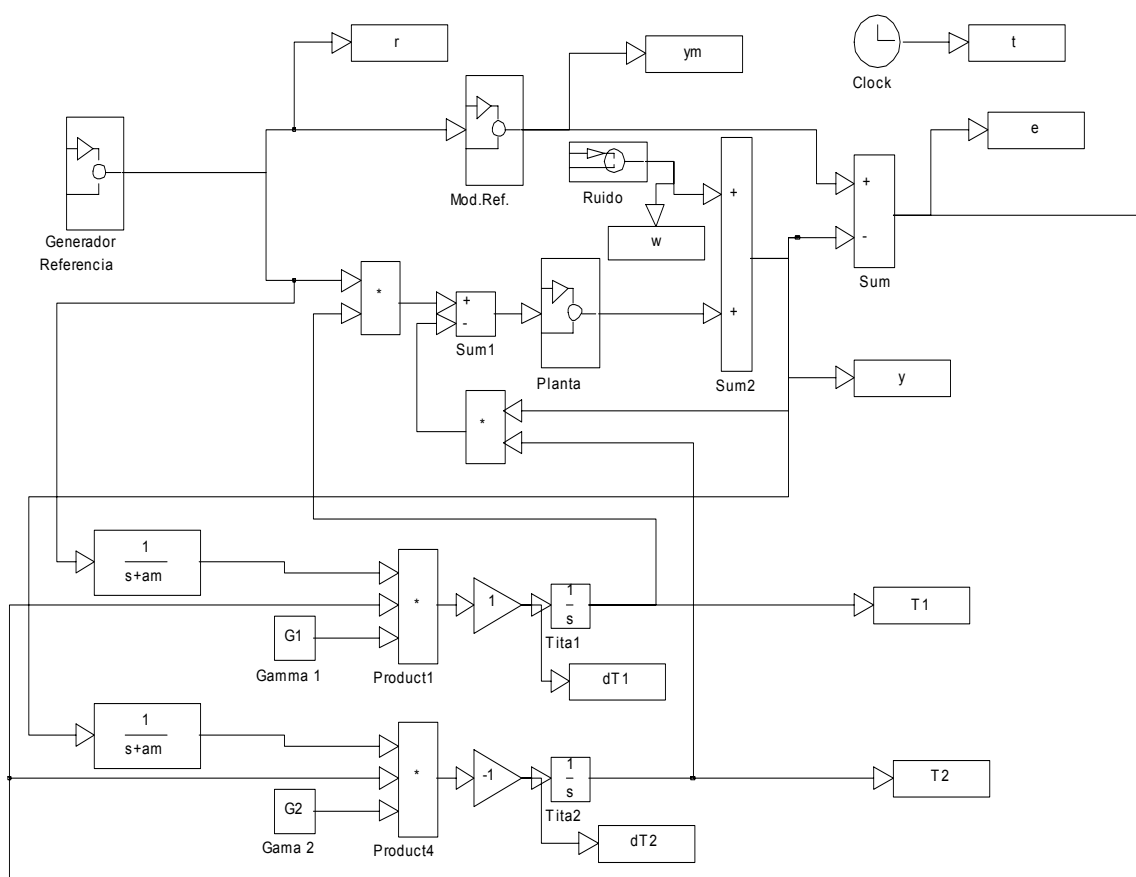


Figura 3.14. Esquema de simulación (Simulink).

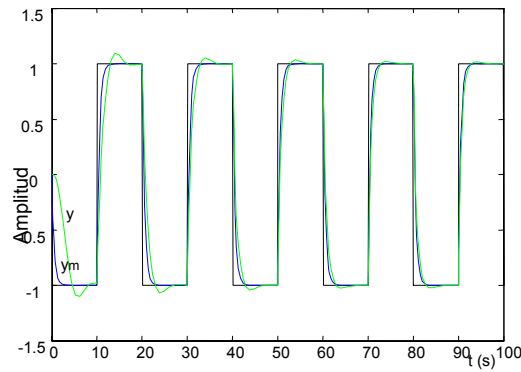


Figura 3.15. Simulación del sistema del Ejemplo 3.2 usando MRAS. Los valores de los parámetros son $a=1$, $b=0.5$, $a_m=2$, $b_m=2$, $\gamma=1$.

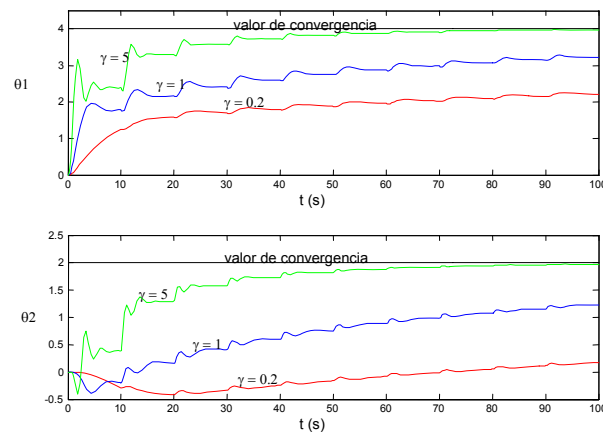


Figura 3.16. Parámetros del controlador θ_1 y θ_2 para el sistema del Ejemplo 3.2 cuando $\gamma = 0.2, 1$ y 5 .

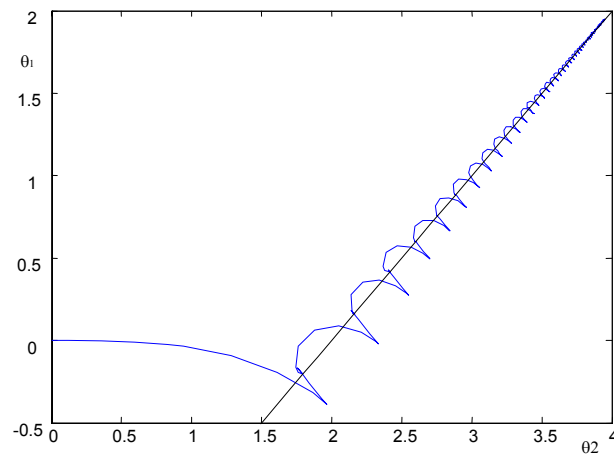


Figura 3.17. Relación entre los parámetros del controlador θ_1 y θ_2 , cuando el sistema del Ejemplo 3.2 se simula 500 unidades de tiempo. La línea de trazo muestra la línea $\theta_2 = \theta_1 - a/b$. El Punto indica el punto de convergencia.

3.4.2. Error en la convergencia de los parámetros

El objetivo en los sistemas adaptables con modelo de referencia es llevar el error $e = y - y_m$ a cero. Esto no necesariamente indica que los parámetros se aproximen a sus valores correctos. En el siguiente ejemplo se muestra este comportamiento.

Ejemplo 3: Falta de convergencia en los parámetros.

Si se considera el sistema de ganancia de prealimentación vista en el [Ejemplo 3.1](#) con una $G(s)=1$ el modelo del procesos es $y = k_m u$, la acción de control es $u = \theta u_c$ y la respuesta deseada esta dada por $y_m = k_m u_c$. El error es

$$e = (k_p \theta - k_m) u_c = k_p (\theta - \theta_0) u_c$$

donde $\theta_0 = k_m / k_p$. La regla del M.I.T. da la siguiente ecuación diferencial para el parámetro

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma k_p^2 u_c^2 (\theta - \theta_0)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria tiene como resultado

$$\theta(t) = \theta_0 + (\theta(0) - \theta_0) e^{-\gamma k^2 I_t} \quad (3.95)$$

donde

$$I_t = \int_0^t u_c^2(\tau) d\tau \quad (3.96)$$

y $\theta(0)$ es el valor inicial del parámetro θ . Se puede observar de la ecuación (3.95) que la estima converge a sus valores correctos solo si la integral I_t diverge cuando $t \rightarrow \infty$. La convergencia es exponencial si la señal de entrada es persistentemente excitante. El error está dado por

$$e(t) = k u_c(t) (\theta(0) - \theta_0) e^{-\gamma k^2 I_t}$$

Notar que el error irá a cero cuando $t \rightarrow \infty$ ya sea porque la integral I_t diverja o porque de $u_c(t) \rightarrow 0$. Sin embargo, el valor al que tenderá el parámetro θ dependerá de las propiedades de la señal de entrada.

Este ejemplo muestra el hecho que el error e puede converger a cero aun cuando los parámetros no necesariamente converjan a los valores correctos. Esta es una característica del comportamiento de todos los sistemas adaptables. La señal de entrada debe tener ciertas propiedades para la convergencia de los parámetros.

3.4.3. Determinación de la ganancia de adaptación

En las secciones anteriores se vio que una forma de simple de obtener un sistema adaptable es aplicar la regla del M.I.T.. La ley de control adaptable tiene un parámetro que debe ser elegido por el usuario, este es la ganancia de adaptación γ . Las simulaciones muestran que la elección de γ puede ser crucial para el buen desempeño del controlador. A continuación se discutirán métodos para determinar esta ganancia de adaptación.

Se considera el [Ejemplo 3.1](#) en donde sea ajusta una ganancia de prealimentación. En el la ecuación del sistema es

$$\frac{y}{u} = k_p G(p)$$

y el modelo de referencia es

$$\frac{y_m}{u_c} = k_m G(p)$$

donde $G(p)$ es conocido y estable. Además se asume que k_p es una constante desconocida. Se asume que $G(p)$ es estable. El sistema queda descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= k_p G(p) u, & y_m &= k_m G(p) u_c \\ u &= \theta u_c, & e &= y - y_m \end{aligned}$$

resultando la ley de ajuste de parámetros

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma y_m e$$

Al reemplazar los valores de u e y en la ley de ajuste de parámetros resulta

$$\frac{d\theta}{dt} + \gamma y_m k_p G(p) \theta u_c = \gamma y_m^2 \quad (3.97)$$

Esta ecuación es una descripción compacta del comportamiento de los parámetros. A esta ecuación se la puede llamar ecuación diferencial del parámetro. Como está expresada esta ecuación a y_m se la puede considerar como una función variante en el tiempo conocida. Si $G(p)$ es una función de transferencia racional, entonces la ecuación (3.97) es una ecuación diferencial ordinaria variante en el tiempo. Esta ecuación puede presentar un comportamiento muy complicado. No es posible dar una caracterización analítica simple de las propiedades del sistema, particularmente de cómo cambia el comportamiento del sistema al variar γ .

Para obtener una visión en el comportamiento del sistema dado por la ecuación (3.97) se realizan consideraciones de forma que se simplifique la ecuación del sistema. Estas consideraciones dan una visión reducida del comportamiento del sistema pero sin ser una explicación detallada.

Se asume que el parámetro θ es fijo, que el mecanismo de adaptación está desconectado y que la señal de entrada u_c es constante. En estas circunstancias el mecanismo de adaptación se conecta cuando todas las señales tienen su valor en estado estacionario. El comportamiento del parámetro será

$$\frac{d\theta}{dt} + \gamma y_m^0 u_c^0 (k_p G(p) \theta) = \gamma (y_m^0)^2$$

el cual es un sistema lineal invariante. Esta ecuación es lineal con coeficientes constantes. Su estabilidad está gobernada por la ecuación algebraica

$$s + \gamma y_m^0 u_c^0 k_p G(p) = 0 \quad (3.98)$$

se puede concluir que el comportamiento del parámetro esta determinado por el valor

$$\mu = \gamma y_m^0 u_c^0 k_p \quad (3.99)$$

Un diagrama de cómo varían los ceros de la ecuación (3.98) cuando varía el parámetro μ se puede obtener realizando el grafico del lugar de las raíces con respecto a este parámetro. Se puede concluir que si la ecuación (3.98) tiene ceros en el semiplano derecho (positivos), entonces los parámetros divergirán. Esta conclusión es para el caso muy especial que se ha propuesto, pero se puede extender, en forma aproximada, al caso en el que las señales cambien lentamente con respecto a la dinámica de $G(s)$.

La ecuación (3.98) también se puede usar para determinar una ganancia de adaptación (γ) adecuada como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4: Elección de la ganancia de adaptación.

Si se considera el [Ejemplo 3.1](#) con $G(s) = 1/(s+1)$, $k_p = 1$ y $k_m = 2$. Se asume que la señal de referencia es unitaria ($u_c = 1$). La ecuación (3.98) resulta de la forma

$$s^2 + s + \mu = s^2 + s + \gamma y_m^0 u_c^0 k_p = 0 \quad (3.100)$$

Una elección razonable es hacer $\gamma y_m^0 u_c^0 k_p = 1$. Si no se toma en cuenta el transitorio, el valor $y_m u_c$ es 2. Esto da como resultado $\gamma = 0.5$ que es uno de los valores que se realizó la simulación.

3.4.4. Algoritmos Normalizados

Se puede deducir de la ecuación (3.98) del sistema adaptable puede pasar a ser inestable si la función de transferencia tiene polos que exceden en mucho 1 y el parámetro μ en la ecuación (3.99) sea lo suficientemente grande. El parámetro μ es grande si las señales son grandes (y_m y u_c) o si la ganancia de adaptación son grandes. El comportamiento del sistema depende fuertemente del valor de las señales.

Ejemplo 3.5: La estabilidad depende de la amplitud de las señales.

Considere el sistema del [Ejemplo 3.1](#). Sea la función de transferencia G dada por

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

La ecuación (3.98) se transforma en

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + \mu = 0 \quad (3.101)$$

donde $\mu = \gamma y_m^0 u_c^0 k_p$. Esta ecuación tiene todos sus polos en el semiplano izquierdo si

$$\gamma y_m^0 u_c^0 k_p < a_1 a_2 \quad (3.102)$$

Debido a que esa inecuación incluye la magnitud de la señal de entrada, puede ocurrir que la solución de equilibrio para una amplitud de señal de entrada sea estable y para otra amplitud de la señal de entrada sea inestable.

Esto se ilustra en simulación y se muestran los resultados en la Figura 3.18, donde los parámetros se eligen como $k_p = 1$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$. En las simulaciones la ganancia de adaptación γ se ajusta para dar una buena respuesta cuando la señal de referencia es una señal cuadrada con una amplitud de 1. En estas circunstancias $u_c^0 = 1$, $y_m^0 = 1$ y la inecuación (3.102) da la ecuación de estabilidad $\gamma < 1$. Un valor razonable de γ es $\gamma = 0.1$ la que se usa en las simulaciones. La Figura 3.18 muestra que la convergencia depende de la magnitud de la señal de entrada. Notar que la solución es inestable cuando la amplitud de u_c es 3.5. El Modelo aproximado prevé inestabilidad para u_c mayor que 3.16. También se deben otra que la convergencia es muy lenta para pequeños valores de amplitud.

Este ejemplo indica claramente que la elección de la ganancia es crucial y que el valor que se elija depende de la amplitud de las señales. Debido a esto es natural modificar el algoritmo de tal manera que este no dependa de la amplitud de las señales.

Debido a ello, la regla del M.I.T. se escribe como

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e$$

donde se introduce $\varphi = -\partial e / \partial \theta$. Se realiza la siguiente modificación en la regla de ajuste

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\gamma \varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi} \quad (3.103)$$

donde se agrega $\alpha > 0$ para evitar las dificultades numéricas cuando φ es pequeño. Se debe notar que la ecuación está escrita de forma tal que es válida aun cuando θ sea un vector de parámetros. En este caso φ también será un vector de la misma dimensión. Si se repite el análisis en estado estacionario se obtiene que la ecuación (3.98) es remplazada por la ecuación

$$s + \gamma \frac{\varphi^0 u_c^0}{\alpha + \varphi^{0T} \varphi^0} k_p G(p) = 0$$

Debido a que φ^0 es proporcional a u_c^0 , las raíces de esta ecuación no cambiarán con los cambios en los niveles de las señales. La ley de adaptación dada por la ecuación (3.103) se la llama *regla del M.I.T. normalizada*. En la Figura 3.19 se muestra el desempeño de este algoritmo el cual se puede comparar con el desempeño del algoritmo no normalizado mostrado en la Figura 3.18.

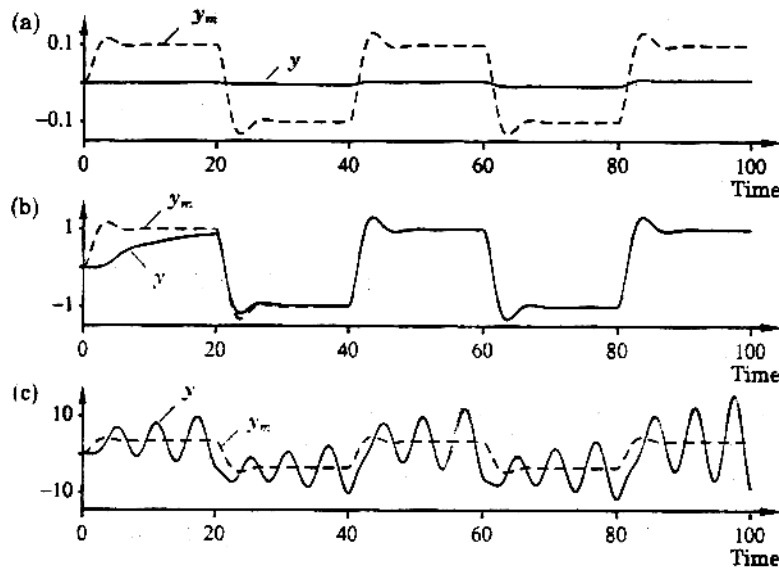


Figura 3.18. Simulación de un MRAS del Ejemplo 3.5. La señal de referencia es una señal cuadrada con una amplitud (a) $u_c = \text{cuad}(0.1)$, (b) $u_c = \text{cuad}(1)$ y (c) $u_c = \text{cuad}(3.5)$. La salida del modelo y_m es la línea de puntos, la salida del proceso es la línea sólida. Se usan los siguientes parámetros $k_p = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $\gamma = 0.1$

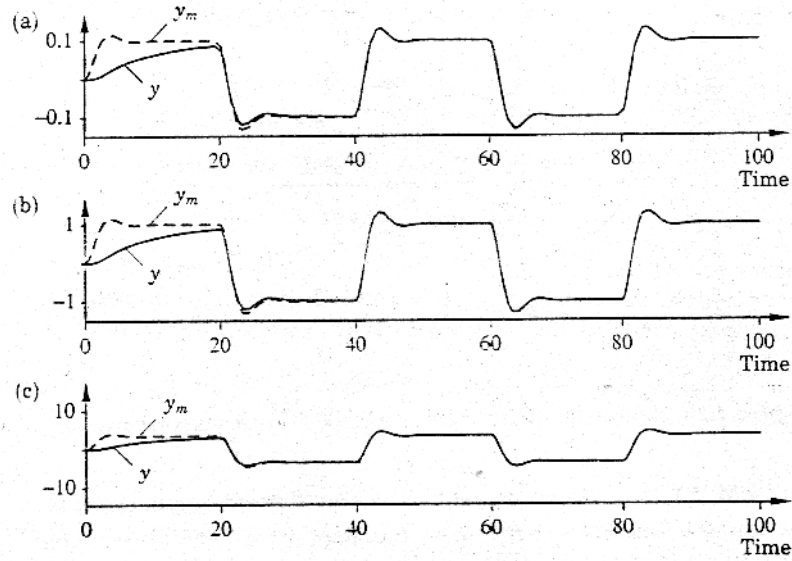


Figura 3.19. Simulación de un MRAS en el Ejemplo 3.5 con la regla del M.I.T. normalizada. La señal de referencia es una señal cuadrada con una amplitud (a) $u_c = \text{cuad}(0.1)$, (b) $u_c = \text{cuad}(1)$ y (c) $u_c = \text{cuad}(3.5)$. La salida del modelo y_m es la línea de puntos, la salida del proceso y es la línea sólida. Se usan los siguientes parámetros $k_p = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $\gamma = 0.1$ y $\alpha = 0.001$. Comparar los resultados con la Figura 3.18.

3.4.5. Aplicación a sistemas lineales en general

Una ley de control por modelo de referencia basada en el método del gradiente se puede derivar para un sistema SISO general.

Sea la ecuación del sistema descrita por

$$Ay = Bu \quad (3.104)$$

y se desea obtener un sistema caracterizado por la ecuación

$$A_m y_m = B_m u_c$$

Se utiliza una estructura para el controlador de la forma

$$Ru = Tu_c - Sy$$

La ecuación del sistema a lazo cerrado se describe como

$$y = \frac{BT}{AR + BS} u_c \quad (3.105)$$

y

$$u = \frac{AT}{AR + BS} u_c \quad (3.106)$$

El error es

$$e = y - y_m$$

Para obtener la ley de ajuste de parámetro se debe determinar la derivada de sensibilidad, es decir la derivada parcial del error con respecto a los parámetros del regulador. Sea r_i , s_i y t_i los coeficientes del polinomio R, S y T. Las derivadas de sensibilidad son

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial r_i} &= -\frac{BTAp^{k-i}}{(AR+BS)^2}u_c = -\frac{Bp^{k-i}}{AR+BS}u \quad i=1,\dots,k \\ \frac{\partial e}{\partial s_i} &= -\frac{BTBp^{l-i}}{(AR+BS)^2}u_c = -\frac{Bp^{l-i}}{AR+BS}y \quad i=1,\dots,l \\ \frac{\partial e}{\partial t_i} &= -\frac{Bp^{m-i}}{AR+BS}u_c \quad i=1,\dots,m\end{aligned}$$

donde $k = \deg(R)$, $l = \deg(S)$ y $m = \deg(T)$. La segunda equivalencia surge de utilizar las ecuaciones (3.105) y (3.106) que relacionan u y y . La derivada de sensibilidad no se puede evaluar, ya que esta incluye los polinomios A y B que son los parámetros desconocidos. Hay varias formas de realizar aproximaciones que den una ley de actualización razonable. Una posibilidad es

$$AR + BS \approx A_0 A_m B^+$$

Esta aproximación será exacta cuando los parámetros tengan sus valores deseados. La derivada de sensibilidad se aproxima por

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial r_i} &\approx -\frac{B^- p^{k-i}}{A_0 A_m}u \quad i=1,\dots,k \\ \frac{\partial e}{\partial s_i} &\approx -\frac{B^- p^{l-i}}{A_0 A_m}y \quad i=1,\dots,l \\ \frac{\partial e}{\partial t_i} &= -\frac{B^- p^{m-i}}{A_0 A_m}u_c \quad i=1,\dots,m\end{aligned}$$

El lado derecho es todavía no realizable debido a que contiene el polinomio B^- . Sin embargo, si todos los ceros del proceso son cancelados, se tiene que $B^- = b_0$. Una ley de actualización realizable si se conoce el signo de b_0 . Entonces se puede absorber la magnitud de b_0 por la ganancia de adaptación. Finalmente se obtiene la siguiente ecuación para el ajuste de los parámetros

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_i}{\partial t} &= \gamma e \frac{p^{k-i}}{A_0 A_m}u \quad i=1,\dots,k; \quad k = \deg(R) \\ \frac{\partial s_i}{\partial t} &= \gamma e \frac{p^{l-i}}{A_0 A_m}y \quad i=1,\dots,l; \quad l = \deg(S) \\ \frac{\partial t_i}{\partial t} &= -\gamma e \frac{p^{m-i}}{A_0 A_m}u_c \quad i=1,\dots,m; \quad m = \deg(T)\end{aligned}$$

Para implementar esta ley de ajuste se deben aplicar a las señales u , y y u_c tres filtros de la forma $1/A_0 A_m$. La velocidad de cambio se obtiene al multiplicar la salida de los filtros por el error e . Para obtener el ajuste de los parámetros es necesario asumir que los ceros del proceso son estables y que la ganancia instantánea b_0 se conoce.

Esta suposición se puede evitar si se utiliza un algoritmo más complejo. Si se agrega una estimación de los parámetros, se puede realizar una aproximación como

$$\begin{aligned}AR + BS &\approx \hat{A}R + \hat{B}S \\ B^- &\approx \hat{B}^-\end{aligned}$$

De esta forma es posible obtener un algoritmo que trabaje para sistemas de fase no mínima y para sistemas donde el signo de b_0 sea desconocido. Sin embargo se debe notar que el algoritmo es indirecto, ya que se deben estimar los parámetros.

3.4.6. Conclusión de la aplicación de la regla del M.I.T.

Los resultados numéricos indican que los sistemas adaptables obtenidos con la regla del M.I.T. trabajan en forma adecuada para ganancias pequeñas. Para ganancias grandes se presentan comportamientos muy complejos. Los sistemas normalmente se hace inestable cuando la ganancia de adaptación aumenta o el modelo de referencia no se escoge en forma adecuada.

Se pueden utilizar algoritmos normalizados que mejoran el comportamiento del sistema adaptable cuando cambia la amplitud de las señales. Se debe notar que estos algoritmos solo es un avance en la solución de los problemas de convergencia pero estos no garantizan una estabilidad total del sistema.

3.5. Método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov

Dado el carácter no lineal y variable en el tiempo de los sistemas adaptables por modelo de referencia, no son válidos los criterios de estabilidad de sistemas lineales. Se puede utilizar el método directo de Lyapunov para diseñar sistemas con modelo de referencia estables.

Este método establece que un sistema tiene un equilibrio $\mathbf{x} = 0$, asintóticamente estable, si existe una función, llamada de Lyapunov, $V(x)$ que satisface

$$V(x) > 0 \text{ para } \mathbf{x} \neq 0 \text{ (definida Positiva)}$$

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ para } \mathbf{x} \neq 0 \text{ (definida Negativa)}$$

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ para } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$$

$$V(0) = 0$$

Como la función de Lyapunov es similar a una función de energía, esta debe decrecer con el tiempo.

Utilizando este método en el diseño de sistemas adaptables, se trasladan las especificaciones de estabilidad directamente en la ley de adaptación. Generalmente, los pasos a seguir para el diseño de un sistema adaptable con modelo de referencia por el método de estabilidad de Lyapunov son los siguientes:

1. El primer paso es encontrar una ecuación del error, bien en la salida ($e = y_p - y_m$) o en las variables de estado ($\mathbf{e} = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_m$).

2. Encontrar una función de Lyapunov como una función del error entre las señales y el error de los parámetros ($\phi = \hat{\theta} - \theta$). En su forma más simple esta función toma la forma

$$V = \mathbf{e}^T P \mathbf{e} + \phi^T \Gamma^{-1} \phi$$

donde P y Γ^{-1} deben ser definidas positivas.

3. Calcular la derivada de la función de Lyapunov. La derivada debe ser definida negativa. Generalmente toma la forma

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \text{algunos términos que incluyen } \phi$$

El primer término garantiza que la derivada es definida negativa, por lo que, haciendo el resto igual a cero se tiene una posible solución. La matriz Q es definida positiva. Las

matrices P y Q , para un sistema gobernado por una matriz A , está relacionadas por la ecuación de Lyapunov

$$-Q = A^T P + PA$$

4. Haciendo el término extra igual a cero se obtiene la ley de adaptación. Normalmente tiene la forma

$$\dot{\theta} = -\Gamma \varepsilon \xi$$

donde ε está directamente relacionado con el error e y ξ es una versión modificada del vector de señales (referencia, salida, etc.).

3.5.1. Ejemplos ilustrativos

Ejemplo 3.6: Ganancia de prealimentación para sistema de primer orden por Lyapunov

Considerando el sistema de la Figura 3.20 donde la señal de control está dada por

$$u = \theta u_c$$

siendo K la ganancia ajustable que hay que calcular, la deducción de la ley de adaptación es como sigue

$$\dot{y} = b\theta u_c - y \quad (3.107)$$

y además

$$\begin{aligned} \dot{y}_m &= u_c - y_m \\ \dot{e} &= \dot{y} - \dot{y}_m \\ &= (b\theta - 1)u_c - (y - y_m) \\ &= -e + (b\theta - 1)u_c \end{aligned} \quad (3.108)$$

Teniendo en cuenta que el término $(b\theta - 1)$ es proporcional al error en el parámetro, la función de Lyapunov en este caso puede elegirse como

$$V = e^2 + \frac{1}{\gamma} (b\theta - 1)^2$$

Su derivada resulta

$$\dot{V} = 2e\dot{e} + \frac{2b}{\gamma} \dot{\theta} (b\theta - 1) \quad (3.109)$$

reemplazando la ecuación (3.108) en (3.109)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2e[-e + (b\theta - 1)u_c] + \frac{2b}{\gamma} \dot{\theta} (b\theta - 1) \\ \dot{V} &= -2e^2 + 2e(b\theta - 1)u_c + \frac{2b}{\gamma} \dot{\theta} (b\theta - 1) \end{aligned}$$

El primer término es negativo. Así que haciendo el resto igual a cero se obtiene la ley de adaptación, esto es

$$0 = 2e(b\theta - 1)u_c + \frac{2b}{\gamma} \dot{\theta} (b\theta - 1)$$

despejando $\dot{\theta}$

$$2e(b\theta - 1)u_c = -\frac{2b}{\gamma}\dot{\theta}(b\theta - 1)$$

$$eu_c = -\frac{b}{\gamma}\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\gamma}{b}eu_c$$

como b es desconocido se puede definir el parámetro de ajuste $\gamma_1 = \gamma/b$ resultando finalmente

$$\dot{\theta} = -\gamma_1 eu_c$$

Se debe notar que se debe conocer el signo de b .

En la Figura 3.21 y Figura 3.22 se representa una simulación del ejemplo descrito cuando el parámetro b vale inicialmente 4 y en el instante de tiempo 20 pasa a valer 2. Puede observarse como la adaptación es buena en ambos casos, siendo más rápida en el caso de la Figura 3.22 dado que la ganancia de adaptación es superior. En línea de trazos se representa la salida del modelo de referencia y en línea continua la salida del modelo ajustable.

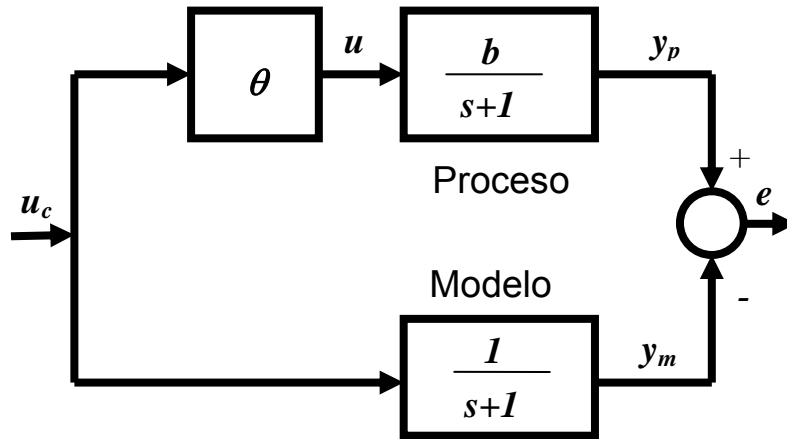


Figura 3.20. Sistema y modelo de primer orden

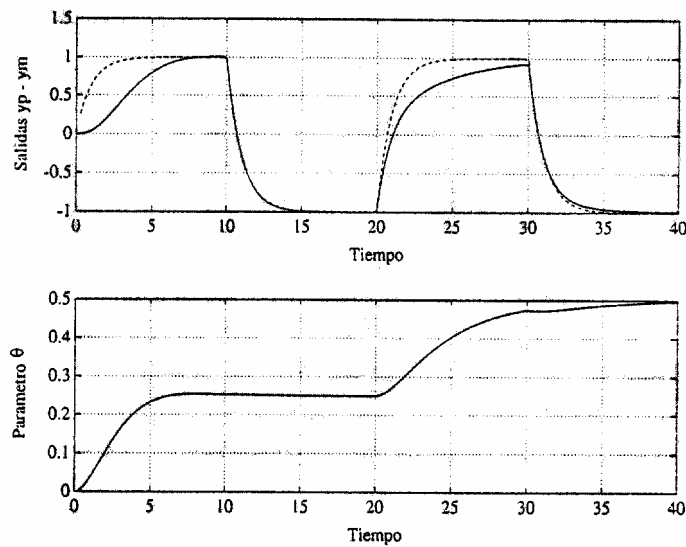


Figura 3.21. Proceso de primer orden ($\gamma_1=0.1$)

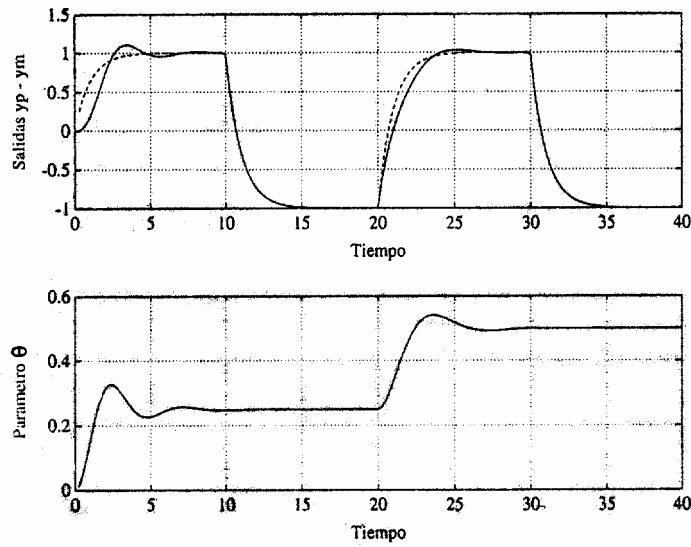


Figura 3.22. Proceso de primer orden ($\gamma_1=0.5$)

Ejemplo 3.7: MRAS para sistema de primer orden por Lyapunov

En este ejemplo se considera el sistema usado en el Ejemplo 3.2 con la regla del M.I.T. El sistema tiene la forma

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu \Leftrightarrow G(p) = \frac{y}{u} = \frac{b}{(p+a)}$$

La respuesta deseada es

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c \Leftrightarrow G_m(p) = \frac{y_m}{u_c} = \frac{b_m}{(p+a_m)}$$

donde $a_m > 0$ y la señal de referencia está acotada. El controlador toma la forma

$$u(t) = \theta_1 u_c(t) - \theta_2 y(t)$$

El error se define como

$$e = y - y_m$$

Debido a que se está tratando de hacer el error pequeño, es natural obtener una ecuación diferencial para el error.

$$\frac{de}{dt} = -a_m e - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)u_c \quad (3.110)$$

Notar que el error va a cero si los parámetros son iguales a los valores dados por las ecuaciones

$$\theta_1 = \frac{b_m}{b} \quad , \quad \theta_2 = \frac{a_m - a}{b} \quad (3.111)$$

Para lograr que los parámetros θ_1 y θ_2 vayan a los valores deseados se diseña el siguiente mecanismo de ajuste.

Si se asume que $b\gamma > 0$ y se introduce la siguiente función cuadrática

$$V(e, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{b\gamma} (b\theta_2 + a - a_m)^2 + \frac{1}{b\gamma} (b\theta_1 - b_m)^2 \right)$$

Esta función es cero cuando e es cero y los parámetros del controlador son iguales a los valores correctos. Por lo tanto la función califica como candidata de Lyapunov. Para que sea una función de Lyapunov la derivada debe ser negativa. Esta derivada es

$$\frac{dV}{dt} = e \frac{de}{dt} + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \frac{d\theta_1}{dt} \quad (3.112)$$

reemplazando (3.110) en (3.112)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -a_m e^2 \\ & + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \left(\frac{d\theta_2}{dt} - \gamma e y \right) \\ & + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \left(\gamma e u_c + \frac{d\theta_1}{dt} \right) \end{aligned} \quad (3.113)$$

Si los parámetros se actualizan como

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= -\gamma u_c e \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= -\gamma y e \end{aligned} \quad (3.114)$$

al anularse los términos resulta

$$\frac{dV}{dt} = -a_m e^2$$

Por lo tanto la derivada de V con respecto al tiempo es por lo tanto semidefinida negativa pero no definida negativa. Esto implica que $V(t) \leq V(0)$ y que por lo tanto que e , θ_1 y θ_2 serán acotados. Esto implica que $y = e + y_m$ también serán acotados. Para poder usar el [Teorema 1](#), se tiene que determinar que \ddot{V} esta acotada. Esta es

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -2a_m e \frac{de}{dt} \quad (3.115)$$

Reemplazando la ecuación (3.110) en (3.115)

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -2a_m e \left(-a_m e - (b\theta_2 + a - a_m) y + (b\theta_1 - b_m) u_c \right)$$

Debido a que u_c , e y y son acotadas, se cumple que \ddot{V} es acotada, por lo tanto uniformemente continua. Por la aplicación del [Teorema 1](#) se concluye que el error e va a cero. Sin embargo, los parámetros no necesariamente convergerán a sus valores correctos. Solo demuestra que están acotados. Para que los parámetros converjan a sus valores correctos es necesario imponer condiciones en la excitación del sistema.

La ecuación de adaptación dada por la ecuación (3.114) es similar a la regla obtenida por el método del M.I.T. pero las derivadas de sensibilidad son reemplazadas por otras señales. La única diferencia es que no hay señales filtradas de u_c y y al aplicar el método de Lyapunov. En ambos casos la ley de ajuste se puede escribir como

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e$$

donde θ es el vector de parámetros. Al aplicar el método de Lyapunov, φ resulta como

$$\varphi = [-u_c \quad y]^T$$

Al aplicar la regla del M.I.T., φ resulta como

$$\varphi = \frac{a_m}{p + a_m} [-u_c \quad y]^T$$

La regla de ajuste obtenida por la teoría de estabilidad de Lyapunov es más simple porque no requiere filtrar las señales. El comportamiento de los dos métodos es bastante similar, sin embargo en la propuesta que utiliza la teoría de estabilidad del Lyapunov se pueden usar ganancias de adaptación γ arbitrariamente grandes y por lo tanto aumentar la velocidad de convergencia.

Teorema 1 [Astrom y Wittenmark (1995), pp. 205]

Dado

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$$

y suponiendo que $f(x, t)$ es localmente Lipschitz en $D \times [0, \infty)$. Sea V una función continua y diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

y

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dV}{dx} f(x, t) \leq -W(x) \leq 0$$

$\forall t \geq 0$, $\forall x \in D$, donde α_1 y α_2 son funciones clase K definidas en $[0, r)$ y $W(x)$ es continua en D . Además, se asume que dV/dt es uniformemente continua en t .

Entonces la solución de $dx/dt = f(x, t)$ con $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ es acotada y satisface

$$W(x(t)) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad (3.116)$$

Además, si se asume que todas las suposiciones son globales y que α_1 y α_2 pertenecen a la clase K_∞ la ecuación (3.116) es válida para todo $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$. ■

Este teorema indica que los estados del sistema están acotados y que ellos se aproximan al conjunto $\{x \in D \mid W(x) = 0\}$. Si en este teorema se asume que dV/dt es uniformemente continua, esto es que la continuidad es independiente de t . Una condición suficiente para esto es que \ddot{V} sea acotada.

3.5.2. Conclusión del método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov

La principal desventaja del método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov es que no es un método sistemático, dado que hay que encontrar la función del Lyapunov V adecuada en cada caso.

Las reglas de ajuste obtenidas por la teoría de Lyapunov garantiza que el error vaya a cero, pero esto no quiere decir que los parámetros converjan a sus valores correctos. La regla de ajuste obtenida es similar a la obtenida a la regla del M.I.T.. Sin embargo, las reglas no están normalizadas. Las reglas de ajuste tienen la ventaja de que se puede usar cualquier ganancia de adaptación (arbitrariamente grande).

3.6. Robustez de los sistemas adaptables con modelo de referencia

3.6.1. Incertidumbres, perturbaciones y robustez

En un gran número de diseño de sistemas de control, el diseñador no tiene un modelo detallado de la planta a ser controlada. Esto se puede deber a que este modelo sea muy complejo o debido a que las dinámicas del sistema no son entendidas completamente. Por otro lado, aún cuando se conozca y se pueda utilizar un modelo de la planta de alto orden, usualmente es deseable obtener un controlador que sea lo más sencillo posible, esto conlleva a que no se tome en cuenta parte de la dinámica de la planta.

Si un modelo no especifica en forma exacta el comportamiento dinámico del sistema se dice que éste cuenta con *incertidumbres* (o *incertezas*). Estas incertidumbres se las llama *paramétricas* o *estructuradas* cuando hay un desconocimiento en los valores exacto de los parámetros del sistema. En los sistemas lineales, la incertidumbre paramétrica implica que no existe un conocimiento exacto en la ubicación de los polos y cero. En cambio, si este error en el comportamiento se debe al desconocimiento de parte de la dinámica del sistema se las llama incertidumbres *inherentes* o *no estructuradas*. Las incertidumbres no estructuradas incluyen las dinámicas no modeladas. Para los sistemas lineales, una incertidumbre en la estructura implica que no se conoce el orden exacto del sistema.

Por otro lado se debe tener en cuenta que muchas veces en los procesos existen señales que no se pueden manejar por el que diseña el sistema de control. A estas señales se las llama *perturbaciones*. Si se puede obtener un valor de estas señales con un instrumento se las llama *perturbaciones medible*. Hay perturbaciones que no se pueden medir y solo se toma conocimiento de ellas por los efectos que causa en el comportamiento del sistema. A estas se las llama *perturbaciones no medibles*.

Como se observó en secciones anteriores, los sistemas adaptables son sistemas no lineales. Debido a ello el comportamiento del sistema también depende de las amplitudes de las señales y en ciertas circunstancias puede existir un comportamiento inestable para ciertas señales.

Lo importante es preguntarse si un controlador adaptable se comportará en forma adecuada cuando parte de la dinámica de la planta no sea tenida en cuenta o cuando perturbaciones afecten al sistema. Una propiedad básica deseable de los algoritmos de control es que se mantenga la estabilidad ante la presencia de incertidumbres, perturbaciones y para una amplio rango de señales. A esta propiedad usualmente se la refiere como *robustez de los algoritmos control*.

La mayor dificultad en la definición de robustez es que esta es muy dependiente del problema en cuestión. Un algoritmo que no tolere ninguna incertidumbre (por pequeña que sea) se lo puede llamar claramente *no robusto*. Por otro lado, se lo puede llamar *no robusto en la práctica* cuando el rango de incertidumbres que tolera es más pequeño que el rango de incertidumbres presente en el sistema a controlar. En forma similar un algoritmo puede ser lo suficientemente robusto para una aplicación y no para otra.

A continuación se presenta un ejemplo que muestra el comportamiento de un sistema adaptable ante la presencia de perturbaciones e incertidumbres.

3.6.2. El ejemplo de Rohrs de robustez de sistemas adaptable.

A pesar de la existencia de pruebas de estabilidad para sistemas de control adaptable, Rohrs, Athans, Valavani y Stein [Rohrs *et al.*, 1985] mostraron que algunos algoritmos se pueden tornan inestables cuando no se cumplen algunas de las suposiciones realizadas para realizar la demostración. En los artículos de Rohrs se trataron diferentes

sistemas (tanto continuos como discretos) con diferentes leyes de adaptación. En esta sección se considerará uno de estos esquemas

El esquema de control adaptable supone una planta de primer orden con una función de transferencia

$$\hat{P}_{\theta^*} = \frac{k_p}{s + a_p} \quad (3.117)$$

el modelo de referencia

$$\hat{M}(s) = \frac{k_m}{s + a_m} = \frac{3}{s + 3} \quad (3.118)$$

El esquema de control adaptable es de la forma

$$u = \theta_1 u_c + \theta_2 y$$

$$e = y - y_m$$

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma e u_c$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma e y$$

Como un primer paso se asume que la función de transferencia de la planta está dada por la ecuación (3.117) con $k_p = 2$, $a_p = 1$. Los parámetros nominales del controlador son

$$\theta_1^* = \frac{k_m}{k_p} = 1.5$$

$$\theta_2^* = \frac{a_p - a_m}{k_p} = -1$$

Esta planta se estudió anteriormente y se demostró que el comportamiento del sistema adaptable es estable (por Lyapunov). Ahora se estudia el comportamiento del sistema adaptable asumiendo que la planta real no satisface exactamente las suposiciones con el cual el sistema adaptable es estable.

Se supone que la planta nominal es solo una aproximación de primer orden y en realidad es una aproximación de una planta de tercer orden con una función de transferencia de la forma

$$\hat{P}(s) = \frac{2}{(s+1)} \frac{229}{(s^2 + 30s + 229)}$$

Al segundo término se lo llama *dinámicas no modeladas*, en analogía con la terminología de control no adaptable. Los Polos de las dinámicas no modeladas se encuentran en $-15 \pm j2$, y a bajas frecuencias este término es aproximadamente igual a 1.

En el ejemplo de Rohrs, la salida de la planta y es afectada por un ruido de medición $n(t)$. En la Figura 3.23 se muestra la planta con el modelo de referencia y controlador.

Un aspecto importante del ejemplo de Rohrs es que los polos de la planta así como los polos del modelo están bien adentro de la región de estabilidad. Además, las dinámicas no modeladas son bien amortiguadas, con polos estables. Desde un punto de vista de diseño tradicional de control, se los puede considerar inocuos.

Al principio, Rohrs mostró a través de simulaciones que, sin ruido de medición y dinámicas no modeladas, el esquema adaptable es estable y el error de salida converge a cero como predice el análisis de estabilidad.

Sin embargo, con las dinámicas no modeladas, aparecen tres mecanismos de inestabilidad:

- (R1) Con una entrada de referencia *constante y grande*, y sin ruido de medición, el error de salida inicialmente converge a cero, pero finalmente diverge a infinito, junto con el parámetro θ_1 y θ_2 . Las Figura 3.24 y Figura 3.25 muestra una simulación con $u_c = 4.3$, $n(t) = 0$ que muestran este comportamiento ($\theta_1(0) = 1.14$, $\theta_2(0) = -0.65$ y las otras condiciones iniciales son cero).
- R(2) Con una entrada de referencia *con una componente pequeña constante y una componente grande de alta frecuencia*, el error de salida diverge en un principio en forma lenta y entonces crece rápidamente hasta infinito junto con los parámetros del controlador θ_1 y θ_2 . Las Figura 3.26 y Figura 3.27 muestra una simulación con $u_c = 0.3 + 1.85 \sin(16t)$, $n(t) = 0$ que muestran este comportamiento ($\theta_1(0) = 1.14$, $\theta_2(0) = -0.65$ y las otras condiciones iniciales son cero).
- R(3) Con una *entrada constante moderada y una perturbación de salida pequeña*, el error de salida inicialmente converge a cero. Después de permanecer en un entorno de cero por un periodo de tiempo prolongado, este diverge a infinito. En otras maneras, los parámetros del controlador θ_1 y θ_2 derivan aparentemente a una velocidad constante hasta que repentinamente divergen a infinito. Las Figura 3.28 y Figura 3.29 muestran simulaciones con $u_c = 2$, $n = 0.5 \sin(16.1t)$ ($\theta_1(0) = 1.14$, $\theta_2(0) = -0.65$ y las otras condiciones iniciales nulas). Aunque estas simulaciones corresponden aun valor comparativamente alto de $n(t)$, las simulaciones muestran que cuando están presentes valores de perturbaciones de salida $n(t)$ más pequeños, la inestabilidad también aparece pero después de un periodo de tiempo más largo. Los parámetros del controlador derivan con una velocidad muy lenta. La inestabilidad también se observa con otras frecuencias en la perturbación, incluyendo a $n(t)$ constante.

Cuando se examina los mecanismos de inestabilidad en el ejemplo de Rohrs se revela que la inestabilidad está relacionada con el sistema identificador. La convergencia de los parámetros está relacionada con la señal de referencia. Esta debe ser persistentemente excitante para que los parámetros converjan. Es importante destacar que si el sistema no perturbado está persistentemente excitado, este tolerará cierta cantidad de perturbación, o recíprocamente una perturbación pequeña no podrá desestabilizar el sistema.

Los ejemplos de Rohrs estimularon a otros investigadores a estudiar la robustez en los sistemas adaptables.

Se han detectado distintos mecanismos de inestabilidad de los sistemas adaptables. A continuación se da una pequeña introducción a los más importantes de estos.

Inestabilidad por deriva paramétrica [Ioannou and Sun, 1996, pag. 545]: Cuando hay deriva paramétrica se observa un corrimiento lento del valor de los parámetros del sistema. Después de cierto tiempo puede inestabilizar el sistema. Normalmente ocurre porque la señal de referencia no es persistentemente excitante.

Inestabilidad por alta Ganancia [Ioannou and Sun, 1996, pag. 548]: Esta puede ocurrir cuando hay dinámicas no modeladas que pueden ser modeladas como perturbaciones singulares. En este caso la ley de control adaptable puede generar ganancias de realimentación altas que excitan las dinámicas no modeladas del sistema.

Inestabilidad por adaptación rápida [Ioannou and Sun, 1996, pag. 549]: Cuando la ganancia de adaptación γ es grande puede que genere cambios muy rápidos en los parámetros. Estos pueden excitar las dinámicas no modeladas. En general la velocidad

de adaptación de los parámetros debes ser comparativamente pequeña comparada con las dinámicas no modeladas.

Inestabilidad por alta frecuencia [Ioannou and Sun, 1996, pag. 551]: Si la señal de referencia tiene frecuencias en el rango de las dinámicas no modeladas, estas pueden excitar las dinámicas no modeladas dando un mal ajuste de parámetros y eventualmente causando la inestabilidad del sistema.

Inestabilidad por cambios en los parámetros [Ioannou and Sun, 1996, pag. 552]: Los análisis de estabilidad de los sistemas adaptable con modelo de referencia normalmente se realizan considerando que los parámetros del sistema son desconocidos pero constantes. Si se producen variaciones abruptas de los parámetros del sistema estas pueden causar la inestabilidad del sistema. En general si esta variación de los parámetros del sistema es lenta comparada con las dinámicas no modeladas no causa mayores problemas, pero si esto no ocurre pueden inestabilizarse el sistema.

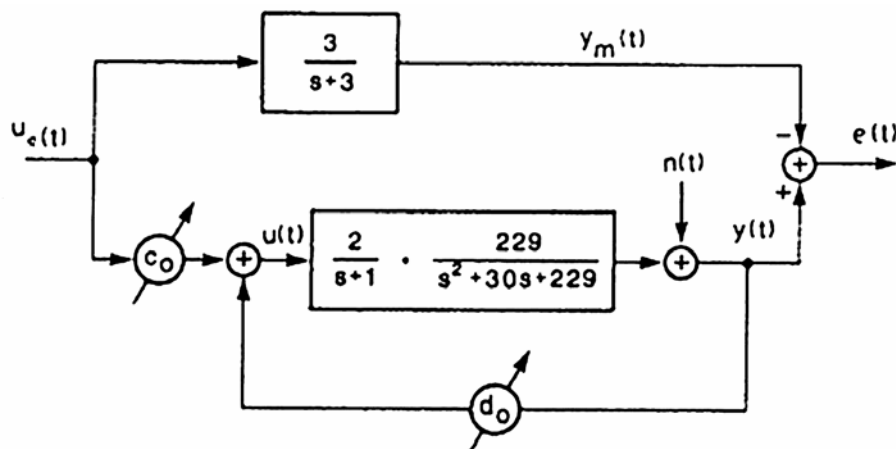


Figura 3.23. Planta, modelo de referencia, perturbación y controlador en el ejemplo de Rohrs.

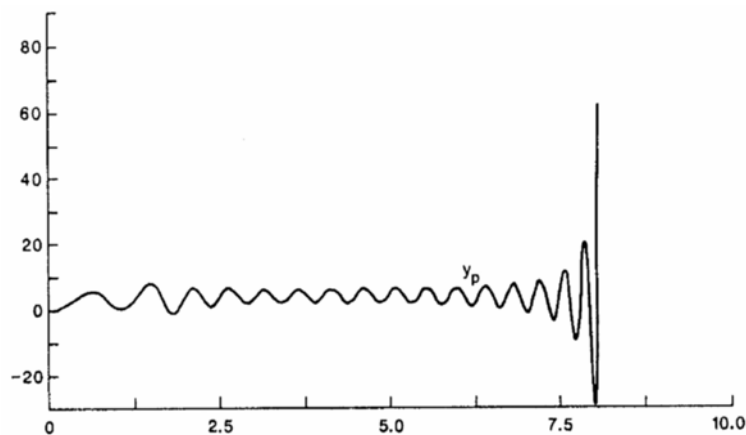


Figura 3.24. Salida de la planta ($u_c = 4.3$, $n(t) = 0$)

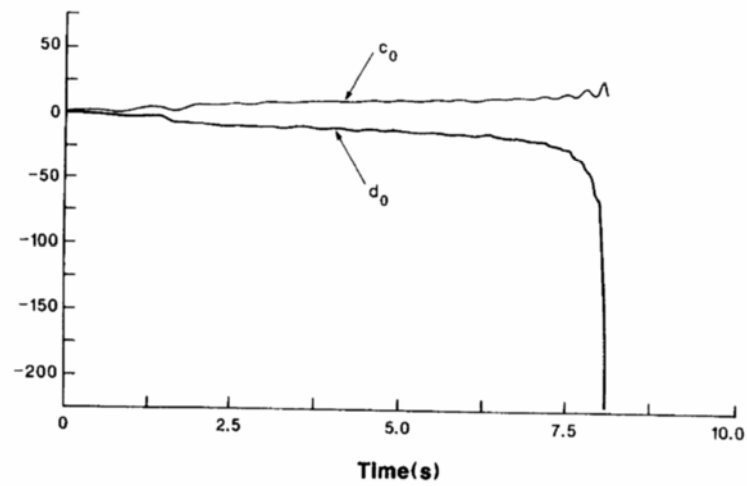


Figura 3.25. Parámetros del controlador ($u_c = 4.3$, $n(t) = 0$)

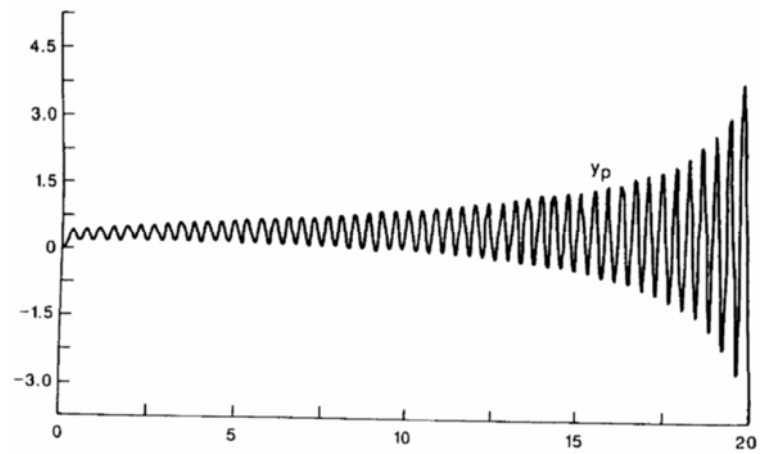


Figura 3.26. Salida de la planta ($u_c = 0.3 + 1.85 \sin(16.1t)$, $n = 0$)

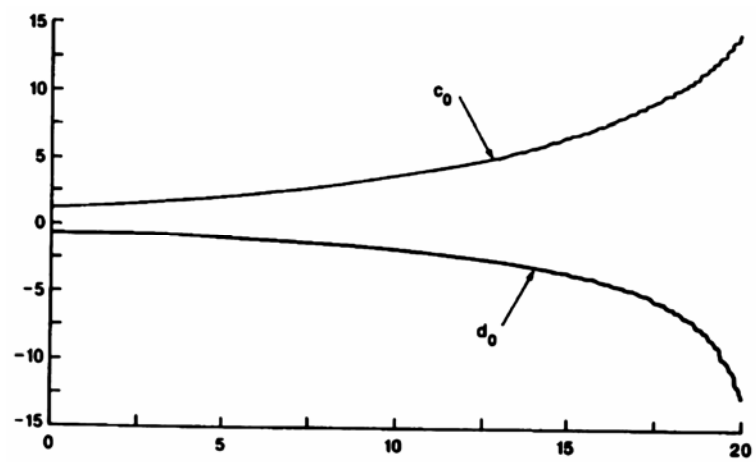


Figura 3.27. Parámetros del controlador ($u_c = 0.3 + 1.85 \sin(16.1t)$, $n = 0$).

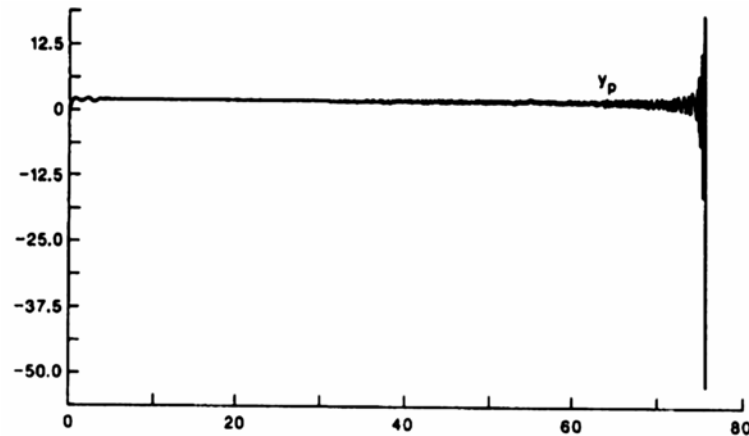


Figura 3.28. Salida de la planta ($r = 2$, $n = 0.5 \sin(16.1t)$)

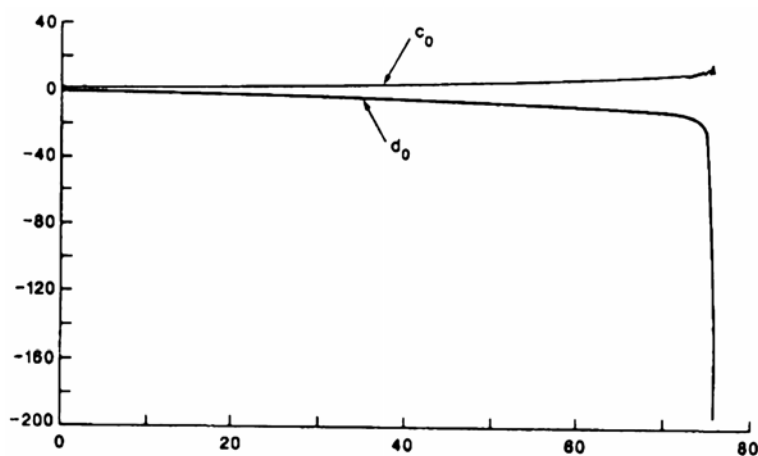


Figura 3.29. Parámetros del controlador ($u_c = 2$, $n = 0.5 \sin(16.1t)$)

3.6.3. Métodos para mejorar la robustez.

Los sistemas adaptables no son mágicamente robustos, se deben realizar elecciones cuidadosamente en el transcurso del diseño y estas necesitan explícitamente tomar en cuenta las limitaciones y flexibilidades de los algoritmos utilizados. Se realizará una discusión cualitativa de diferentes aspectos metodológicos para mejorar la robustez de los sistemas adaptables.

3.6.3.1. Esquemas de identificación robusta [Sastry and Bodson, 1989, pp. 248]

Una parte importante del esquema de control adaptable es el algoritmo de adaptación (o el identificador). Cuando solo están presente incertezas paramétricas, se puede probar que los esquemas adaptables son estables, con seguimiento de trayectoria asintótico. La convergencia de los parámetros en general no está garantizada, pero esta no es necesaria para lograr la estabilidad. Ante la presencia de dinámicas no modeladas y ruido de medición, puede activarse alguno de los mecanismos de inestabilidad. Debido a ello el contenido espectral de las entradas es importante.

Una elección inicial del diseñador del sistema de control es el rango de frecuencias de interés. En el contexto de los sistemas de control adaptable, este es el rango de frecuencias que se desea un seguimiento preciso del modelo de referencia.

Normalmente este está limitado por los anchos de banda de los actuadores y los sensores.

Después se debe elegir el orden de la planta. El orden debe ser el suficiente para permitir el modelado de las dinámicas de la planta en las frecuencias del rango de interés. Por otro lado, si la planta es de un orden alto, se requerirán señales de excitación que estimulen todos los modos del sistema (serán múltiples frecuencias independientes). La presencia de grandes vectores de parámetros en el identificador puede también causar problemas numéricos que condicionan el proceso de identificación. En resumen, es importante elegir un orden de la planta lo suficientemente bajo capaz de representar todas las dinámicas en el rango de frecuencia de interés.

Para reducir el efecto del ruido, puede ser razonable filtrar el vector de regresión en los algoritmos de identificación, de forma de excluir la contribución de los datos en las regiones de frecuencia que están fuera del rango de frecuencias de interés (esto es por ejemplo colocar filtros pasa-bajos con una frecuencia de corte un poco mayor que el ancho de banda de control).

El espectro de la entrada de referencia es otro parámetro pendiente para el diseñador (no siempre manejable a gusto). Se puede decir, sin detallar mucho, que el algoritmo identificador identifica la porción de las dinámicas de la planta en el rango de frecuencias del espectro de entrada. Por lo tanto, es importante que la señal de entrada a) sea lo suficientemente rica para garantizar la convergencia paramétrica y b) tenga un contenido de energía suficiente en el rango de frecuencias donde el modelo de la planta deba ser identificada.

Desde un punto de vista práctico, es importante monitorear la señal de excitación en el lazo del identificador y desconectarla la adaptación cuando la excitación sea pobre. Esto incluye el caso cuando el nivel de excitación sea tan bajo que sea difícil distinguir entre la excitación y el ruido. También está claro que si la excitación es pobre en periodos de tiempo donde los parámetros varían, la identificación de parámetros será inefectiva. En estas circunstancias, la única solución es agregar señales de perturbación extras dentro de la entrada de referencia para proporcionar excitación al algoritmo de identificación.

En la siguiente tabla se resumen como es un esquema para un esquema robusto

	Paso	Consideración
1	Elección del rango de frecuencias de interés	El rango de frecuencias sobre el cual se desea el seguimiento
2	Determinación del orden de la planta	Modelar las dinámicas de la planta en el rango de frecuencias de interés Debe ser lo mas bajo posible
3	Selección del filtro del regresor	Filtrar las componentes de alta frecuencia (rango de dinámicas no modeladas)
4	Selección de la entrada de referencia	Con riqueza suficiente El espectro de frecuencias tiene que estar en el rango de interés.
5	Si la referencia no es lo suficientemente rica, - desconectar la actualización de parámetros - si en estos periodos los parámetros varían, y el error se ve afectado se deberá agregar señales de perturbación a la referencia.	

3.6.3.2. Especificaciones del objetivo de control a lazo cerrado - Elección del modelo de referencia y la entrada de referencia [Sastry and Bodson, 1989, pp. 248].

El modelo de referencia debe elegirse de forma que refleje la respuesta deseada de la planta a lazo cerrado. Desde un punto de vista robusto, sin embargo, el control solo se llevará a cabo sobre un rango de frecuencias donde existe un modelo satisfactorio y los parámetros del controlador son posibles. Por lo tanto el objetivo de control (o modelo usado como referencia) debe tener un ancho de banda no mayor el ancho de banda del identificador. En particular, el modelo de referencia no debe tener una ganancia grande en las regiones de frecuencias en las cuales son significativas las dinámicas no modeladas.

La elección del la entrada de referencia es otro de las elecciones del objetivo general de control. Esta es muy importante para el algoritmo de identificación. Sin embargo la excitación persistente en el rango de frecuencias correcto puede requerir el agregado de entradas de referencia no deseadas para el desempeño del controlador. En algunas aplicaciones (como el vuelo de aviones), el agregado de señales de perturbación en la entrada puede resultar en un temblor (dithering) en la salida de la planta. En los sistemas adaptables la referencia de entrada juega un doble papel. Por un lado se requiere para generar la salida y por otro lado debe proveer la excitación necesaria para la convergencia de los parámetros.

3.6.3.3. El uso de la información existente con anterioridad (Información a priori)

Los esquemas de prueba de estabilidad vistos usan muy poca información a priori de la planta bajo control. En la practica, el diseñador puede encontrarse con un sistema el cual está bastante bien modelado, excepto por algunas componentes no modelada y desconocidas que hay que identificar. Esta información puede ayudar a que el objetivo de control sea alcanzado más fácilmente. El inconveniente es que cada problema en particular impondrá la forma que se pueda utilizar. Se pueden utilizar cotas para las distintas variables y señales del sistema que monitoreen el sistema y actúen como alarmas ante irregularidades.

3.6.3.4. Variación en el tiempo de los parámetros

Los algoritmos de control adaptables se han analizado y derivados para el caso de parámetros desconocidos pero fijos. En la práctica el control adaptable es más útil en problemas que incluyen cambios lentos de los parámetros de la planta. En estas circunstancias el estimador necesita converger más rápidamente que la velocidad en la que cambian los parámetros de la planta. El estimador debe descartar los datos de entrada-salida viejos para poder seguir los parámetros que varían en el tiempo. Este descarte no debe, sin embargo, ser tan rápido ya que esto puede provocar inconsistencia en los valores de los parámetros y sensibilidad a ruido. En la Figura 3.30 se muestra los rangos de dinámicas deseados en un sistema adaptable.

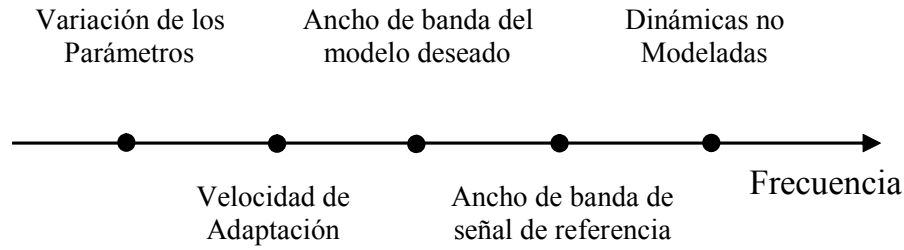


Figura 3.30. Rangos de frecuencia adecuados para el correcto funcionamiento de un sistema adaptable

3.6.4. Robustez a través de la modificación de las leyes de adaptación

En las secciones anteriores se realizó una revisión de las razones de la pérdida de robustez en los sistemas adaptables y se discutió en forma cualitativa de como remediar estos problemas. En esta sección se presentan modificaciones de las reglas de adaptación para mejorar la robustez del sistema.

3.6.4.1. Zona Muerta y Zona muerta relativa

La idea general de la zona muerta es detener la actualización de los parámetros cuando la excitación es insuficiente para distinguir entre las señales del regresor y del ruido. Por lo tanto la adaptación se desconecta cuando el error del identificador es más pequeño que un umbral.

Más específicamente, si se considera el esquema de control adaptable con la regla del M.I.T.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\gamma e v & \text{si } |e| > \Delta \\ \dot{\theta} &= 0 & \text{si } |e| < \Delta \end{aligned} \quad (3.119)$$

donde $v = d\theta/dt$ (o en forma más general un vector de regresor). Para la regla normalizada toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\gamma \frac{e \varphi}{\alpha + \varphi^T \varphi} & \text{si } |e| > \Delta \\ \dot{\theta} &= 0 & \text{si } |e| < \Delta \end{aligned} \quad (3.120)$$

El parámetro Δ en las ecuaciones (3.119) y (3.120) representa el tamaño de la zona muerta. En los otros esquemas de control adaptables con modelo de referencia el esquema es el mismo. La parte más crítica para la aplicación de este esquema es la selección del ancho de la zona muerta. Si la zona muerta es muy grande entonces e no tenderá a cero y por lo tanto el sistema no será estable sino solo para grandes valores del error e . Existen diferentes técnicas para elegir a Δ . Estas usan cotas obtenidas a priori de las perturbaciones y de la planta para encontrar un valor del parámetro Δ y establecen que el error se mantendrá acotado por $|e| \leq \Delta$. Sin embargo este valor es muy conservativo y desde un punto de vista práctico no es muy útil. Por lo tanto, en forma práctica se debe elegir Δ sobre el piso de ruido de la variable e (sin la señal de referencia presente). Se puede modificar el valor de Δ en línea dependiendo de la calidad de los datos.

Si bien este esquema está planteado para la regla del M.I.T. se puede usar para otras propuestas que consideran estabilidad en el error reemplazando v por un vector con parámetros de las distintas variables.

3.6.4.2. Término de fuga (modificación σ)

Existen modificaciones a la ley de actualización de parámetros para contrarrestar la fuga de los valores de los parámetros dentro de la región de inestabilidad en la ausencia de excitación persistentemente excitante. La modificación original es de la forma

$$\dot{\theta} = -\gamma ev - \sigma \theta \quad (3.121)$$

donde σ se elige pequeño pero positivo para mantener θ creciendo en forma no acotada. Una modificación en este espíritu toma la forma

$$\dot{\theta} = -\gamma ev - \sigma(\theta - \theta_0) \quad (3.122)$$

donde θ_0 es una estima obtenida de θ en una identificación anterior. Otra modificación considera

$$\dot{\theta} = -\gamma ev - \sigma|e|\theta \quad (3.123)$$

Las formas (3.122) y (3.123) tratan de capturar el espíritu de (3.121) sin sus inconvenientes que causan que $\theta \rightarrow 0$ cuando e es pequeño. La ecuación (3.122) trata de sesgar la deriva en la dirección de θ_0 en lugar de 0 y (3.123) trata de desconectar la fuga en la dirección de 0 cuando $|e|$ es pequeño. La principal ventaja de la ley de actualización (3.123) es que retiene las características sin fuga (lo que implica convergencia de los parámetros con los valores correctos cuando la excitación es persistentemente excitante). También el algoritmo (3.123) puede ser menos susceptible de estallar que la (3.121).

3.6.4.3. Filtro del vector de regresor [Satry and Bodson, 1989, pp. 253]

El concepto de filtro pasa bajos o pre acondicionamiento del vector en la actualización de los parámetros ya se trataron anteriormente. Además es común filtrar las entradas y las salidas. Algunos autores formalizan este concepto. La lógica es que el filtrado pasa bajos tiende a remover el ruido y atenúa las contribuciones de las altas frecuencias de dinámicas no modeladas.

3.6.4.4. Adaptación lenta, promediación y leyes de adaptación híbridas.

Las características claves de las leyes de adaptación con la adición de zona muerta, del término de fuga y del filtro del vector del regresor es su ‘impaciencia’. Por lo tanto si el error de identificación se incrementa momentáneamente, quizás por razones espurias o por un ruido transitorio, la actualización del parámetro se realizará instantáneamente. Una posible solución para esta ‘impaciencia’ es realizar más lentamente la adaptación. Como se vio, se puede hacer más lenta la adaptación haciendo pequeña la ganancia de adaptación. Efectivamente, se ha observado que esto provoca una reducción de los efectos del ruido aditivo (por promediación).

Otra modificación de la ley de adaptación de los parámetros que tiene el mismo espíritu es el llamado ley de adaptación híbrida que envuelve actualización discreta de un esquema de adaptación continuo. Una modificación de este tipo es de la forma

$$\theta(t_{k+1}) = \theta(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma ev dt \quad (3.124)$$

En la ecuación (3.124), t_k se refiere al tiempo de actualización y los parámetros del controlador se mantiene constantes entre $[t_k, t_{k+1}]$. La ley (3.124) cuenta con la promediación propia de la integral para remover el ruido.

La adaptación lenta y las leyes de adaptación híbridas sufren de dos inconvenientes. El primero es que resultan con un comportamiento indeseado en el transitorio si la estima de los parámetros inicialmente resulta en un lazo inestable de control (ya que la estabilización es lenta). Segundo, no son capaces de seguir cambios en los parámetros que sean rápidos. Consecuentemente la mejor forma es usarlas después que pasó la parte transitoria del algoritmo de adaptación o después de que los parámetros hayan cambiado y permanecen estables.

3.7. Conclusión

En esta sección se presentaron las principales ideas de los métodos de control adaptable con un modelo de referencia (Model Reference Adaptive Systems: MRAS).

Se dieron algunos ejemplos de los métodos del gradiente (regla del M.I.T.) y de las técnicas basadas en la teoría de estabilidad de Lyapunov. Existen otros métodos de diseño de los sistemas adaptables con modelo de referencia basados en la teoría de pasividad y por realimentación de la salida.

En todos los casos la regla de adaptación toma la forma

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi \varepsilon$$

o en la forma normalizada

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\varphi \varepsilon}{\alpha + \varphi^T \varphi}$$

en el método del gradiente (Regla del M.I.T.) el vector φ es el gradiente negativo del error con respecto a los parámetros. Para resolver el problema se necesitan hacer aproximaciones o bien estimas de los parámetros del sistema. En otros casos, φ es un vector de regresión, el cual se encuentra filtrando entradas, salidas las señales de control. El parámetro ε es el error (o error aumentado), el cual se lo puede interpretar como una predicción del error del problema de estimación. Normalmente se usa un error aumentado que es lineal en los parámetros.

El método del gradiente es flexible y simple de aplicar a cualquier estructura. El cálculo requiere la determinación de la derivada de sensibilidad. Debido a que la derivada de sensibilidad no se puede obtener para sistemas no conocidos, para poder aplicarlo es necesario realizar aproximaciones. Los parámetros iniciales deben ser tales que el sistema a lazo cerrado sea estable. Los resultados empíricos indican que los sistemas son estables para ganancias de adaptación pequeñas, las ganancias de adaptación grandes tienden a inestabilizar el problema.

Cuestionario y ejercicios

Ejercicio 3.1: Introducción a los Sistema Adaptable con Modelo de Referencia

De el concepto de Sistema Adaptable con Modelo de Referencia.

Ejercicio 3.2: Esquema indirecto de control con modelo de referencia

- ¿En qué consiste el esquema indirecto de control adaptable con modelo de referencia?
- ¿De qué se debe disponer para poder aplicarlo?
- ¿Que condición deben cumplir los polinomios para que se tenga una solución?

Ejercicio 3.3: Esquema directo de control adaptable con modelo de referencia

- ¿En qué consiste el esquema directo de control adaptable con modelo de referencia?
- ¿Cuales son las partes con las que cuenta?

Ejercicio 3.4: La regla del M.I.T.

- ¿En qué consiste la regla del M.I.T.?
- ¿Si un sistemas adaptables con modelo de referencia lleva el error entre la salida del modelo de referencia y la planta a cero, esto indicaría que los parámetros se han aproximen a sus valores correctos?
- ¿Que efectos produce el aumento de la ganancia de adaptación?
- ¿Cual es el objetivo de utilizar algoritmos normalizados en la regla del M.I.T.?
- ¿Se garantiza la estabilidad del sistema cuando se utiliza la regla del M.I.T. ?

Ejercicio 3.5: Simulación del ejemplo 1 de ajuste de una ganancia de prealimentación por la regla del M.I.T.

Simular en el Simulink (Matlab) el [Ejemplo 1](#) de ajuste de una ganancia de prealimentación por la regla del M.I.T.

a) Para un valor de γ (valor sugerido: $\gamma = 0.1$), una entrada de referencia tipo escalón unitaria y cinco valor inicial diferentes del parámetro θ (valores sugeridos: $\theta(0)$ igual a 0, 0.25, 0.5, 0.75 y 1), observar y , y_m y θ . Obtener curvas similares a las de la [Figura 5](#).

b) Para $\theta(0)=0$, una entrada de referencia tipo escalón unitaria y 5 valores distintos del parámetro de ajuste γ (valores sugeridos: γ igual 10, 1, 0.1, 0.01 y 0.001.), observar y , y_m , e y θ . Obtener curvas similares a las de la [Figura 6](#).

Sacar conclusiones de estas simulaciones.

Los valores sugeridos para γ y $\theta(0)$ son para orientar y pueden cambiarse de acuerdo a los parámetros asignados para la planta.

Los valores de los parámetros del sistema son los que muestra la tabla siguiente:

Nº de alumno	Parámetros
1	$b = 1$, $a = 1$, $K_p = 1$ y $K_m = 2$
2	$b = 1.5$, $a = 1.1$, $K_p = 1.05$ y $K_m = 2.1$
3	$b = 0.5$, $a = 1.2$, $K_p = 1.1$ y $K_m = 2.2$
4	$b = 0.75$, $a = 1.3$, $K_p = 1.15$ y $K_m = 2.3$
5	$b = 1.25$, $a = 1.4$, $K_p = 1.2$ y $K_m = 2.4$

6	$b = 1.75, a = 1.5, K_p = 1.25$ y $K_m = 2.5$
7	$b = 2, a = 1.6, K_p = 1.3$ y $K_m = 2.6$
8	$b = 2.25, a = 1.7, K_p = 1.35$ y $K_m = 2.7$
9	$b = 2.5, a = 1.8, K_p = 1.4$ y $K_m = 2.8$
10	$b = 2.75, a = 1.9, K_p = 1.45$ y $K_m = 2.9$
11	$b = 3, a = 2, K_p = 1.5$ y $K_m = 3$
12	$b = 3.25, a = 0.9, K_p = 1.55$ y $K_m = 3.1$
13	$b = 3.5, a = 0.8, K_p = 1.6$ y $K_m = 3.2$
14	$b = 3.75, a = 0.7, K_p = 1.65$ y $K_m = 3.3$
15	$b = 4, a = 0.6, K_p = 1.7$ y $K_m = 3.4$

Ejercicio 3.6: Simulación del ejemplo 3.2 del MRAS con regla del M.I.T. para un sistema de primer orden.

Simular en el Simulink (Matlab) el [Ejemplo 3.2](#) del MRAS con regla del M.I.T. para un sistema de primer orden. La señal de entrada es una señal cuadrada con una amplitud de 1.

- Simulación del sistema en el [Ejemplo 3.2](#) con un valor de γ (Valor sugerido: $\gamma = 1$). Obtener una figura similar a la [Figura 3.9](#) de y , y_m en función del tiempo.
- Simulación del sistema en el [Ejemplo 3.2](#) con tres valores de γ (Valores sugeridos: $\gamma = 0.2, 1$ y 5). Obtener una figura similar a la [Figura 3.10](#).
- Simulación del sistema en el [Ejemplo 3.2](#) y obtener una figura similar a la [Figura 3.11](#) donde se grafica θ_1 en función de θ_2 .

Sacar conclusiones de estas simulaciones.

Los valores sugeridos para γ son para orientar y pueden cambiarse de acuerdo a los parámetros asignados para la planta.

Los valores de los parámetros del sistema son los que muestra la tabla siguiente

Nº de alumno	Parámetros
1	$a = 1, b = 0.5, a_m = 2$ y $b_m = 2$
2	$a = 0.9, b = 0.6, a_m = 1.9$ y $b_m = 2.2$
3	$a = 0.8, b = 0.7, a_m = 1.8$ y $b_m = 2.4$
4	$a = 0.7, b = 0.8, a_m = 1.7$ y $b_m = 2.6$
5	$a = 0.6, b = 0.9, a_m = 1.6$ y $b_m = 2.8$
6	$a = 0.5, b = 1, a_m = 1.5$ y $b_m = 3$
7	$a = 1.1, b = 1.1, a_m = 2.1$ y $b_m = 3.2$
8	$a = 1.2, b = 1.2, a_m = 2.2$ y $b_m = 3.4$
9	$a = 1.3, b = 1.3, a_m = 2.3$ y $b_m = 3.6$
10	$a = 1.4, b = 1.4, a_m = 2.4$ y $b_m = 3.8$
11	$a = 1.5, b = 1.5, a_m = 2.5$ y $b_m = 4$

12	$a = 1.6, b = 1.6, a_m = 2.6 \text{ y } b_m = 4.2$
13	$a = 1.7, b = 1.7, a_m = 2.7 \text{ y } b_m = 4.4$
14	$a = 1.8, b = 1.8, a_m = 2.8 \text{ y } b_m = 4.6$
15	$a = 1.9, b = 1.8, a_m = 2.9 \text{ y } b_m = 4.8$

Ejercicio 3.7: MRAS con la regla del M.I.T. Normalizada.

Simular en el Simulink (Matlab) el [Ejemplo 3.5](#) del MRAS con regla del M.I.T. normalizada.

La ecuación del sistema es

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

donde $k_p = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, k_m = 2$ y $\gamma = 0.1$

Debido a ello, la regla del M.I.T. se escribe como

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e \quad \text{(Regla del MIT No Normalizada)}$$

donde se introduce $\varphi = -\partial e / \partial \theta$. Se realiza la siguiente modificación en la regla de ajuste

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\gamma \varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi} \quad \text{(Regla del MIT Normalizada)}$$

donde se agrega $\alpha > 0$.

a) Simular con la ley de ajuste de la regla del MIT No Normalizada para una señal cuadrada de amplitud 0.1, 1 y 3.5.

b) Simular con la ley de ajuste la regla del MIT Normalizada para una señal cuadrada de amplitud 0.1, 1 y 3.5.

Determinar un valor conveniente de α y obtener figuras similares a las [Figura 3.12](#) y [Figura 3.13](#) del apunte de MRAS ([[Åström and Wittenmark, 1995](#)], página 197).

Obtener conclusiones de las simulaciones.

Ejercicio 3.8: Método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov

De el concepto de estabilidad según Lyapunov.

¿Cuales son los pasos que normalmente se siguen para obtener el sistema adaptable?

¿Qué ventajas e inconvenientes tiene la obtención de la ley de adaptación por la teoría de estabilidad de Lyapunov?

Ejercicio 3.9: Ganancia de prealimentación para sistema de primer orden por Lyapunov.

Simular en el Simulink (Matlab) el [Ejemplo 3.6](#) del MRAS con regla de adaptación obtenida por el método de Lyapunov para el sistema de primer orden. La regla de adaptación es

$$\dot{\theta} = -\gamma_1 e u_c$$

Verificar el comportamiento del sistema cuando el parámetro b vale inicialmente 4 y en el instante de tiempo 20 pasa a valer 2. Simular para una ganancia de adaptación $\gamma_1=0.1$ y $\gamma_1=0.5$. Obtener figuras similares a las [Figura 3.15](#) y [Figura 3.16](#).

Ejercicio 3.10: Ecuaciones de estado para los Sistemas Adaptables.

Escribir las ecuaciones de estado para los controladores descritos en los [Ejemplos 3.2](#) (regla del M.I.T.) y los [Ejemplos 3.7](#) (por el método Lyapunov) para el sistema de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu$$

con el modelo de referencia

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c$$

y el controlador

$$u(t) = \theta_1 u_c(t) - \theta_2 y(t)$$

Se debe tener en cuenta que:

- Las entradas al controlador son las salidas de la planta y y la referencia u_c .
- Los estados son la salida del modelo, las señales de entrada filtradas y las leyes de ajuste de los parámetros (5 estados).
- La salida es la acción de control u .

Justificar por que controlador y por ende el sistema total es no lineal. Comparar las ecuaciones obtenidas por la Regla del M.I.T. y por el método de Lyapunov.

Ejercicio 3.11: Robustez de los sistemas adaptables con modelo de referencia

Defina incertidumbre y perturbación.

De como ejemplo un sistema a controlar en donde se distingan:

- Incertidumbres paramétricas
- Incertidumbres no paramétricas
- Perturbaciones medible
- Perturbaciones no medibles.

Describa los mecanismos de inestabilidad siguientes:

- Inestabilidad por deriva paramétrica
- Inestabilidad por alta Ganancia
- Inestabilidad por adaptación rápida
- Inestabilidad por alta frecuencia
- Inestabilidad por cambios en los parámetros

Ejercicio 3.12: Métodos para mejorar la robustez

¿Que propone el esquemas de identificación robusta para mejorar la de los sistemas adaptables?

¿En que influye la elección del modelo de referencia en la robustez del sistema?

¿Cuales son los rangos de frecuencia adecuados para el correcto funcionamiento de un sistema adaptable?

Describa brevemente las siguientes modificaciones de las leyes de adaptación para obtener robustez:

Zona muerta y zona muerta relativa
 Término de fuga
 Filtro del vector de regresor
 Adaptación lenta, promediación y leyes de adaptación híbridas

Ejercicio 3.13: Robustez de sistemas adaptables. Ejemplo de Rohrs.

a) Simular el sistema adaptable para diferentes valores de ganancia de adaptación para el esquema de control adaptable de una planta de primer orden con una función de transferencia

$$\hat{P}_{\theta^*} = \frac{k_p}{s + a_p} \quad (4.125)$$

el modelo de referencia

$$\hat{M}(s) = \frac{k_m}{s + a_m} = \frac{3}{s + 3} \quad (4.126)$$

El esquema de control adaptable es de la forma obtenida por Lyapunov

$$u = \theta_1 u_c + \theta_2 y$$

$$e = y - y_m$$

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma e u_c$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma e y$$

Los parámetros de la planta son $k_p = 2$, $a_p = 1$.

b) Simular el sistema adaptable si se supone que la planta nominal es solo una aproximación de primer orden y en realidad es una aproximación de una planta de tercer orden con una función de transferencia de la forma

$$\hat{P}(s) = \frac{2}{(s+1)} \frac{229}{(s^2 + 30s + 229)}$$

y además cuenta con una perturbación en la salida como se muestra en la [Figura 3.17](#).

I) Simular con una entrada de referencia *constante y grande*, y sin ruido de medición, ($u_c = 4.3$, $n(t) = 0$, $\theta_1(0) = 1.14$, $\theta_2(0) = -0.65$ y las otras condiciones iniciales son cero). Obtener figuras similares a la [Figura 3.18](#) y a la [Figura 3.19](#). Obtener conclusiones [[Sastry and M. Bodson, 1989.pag. 217](#)].

II) Con una entrada de referencia *con una componente pequeña constante y componente grande de alta frecuencia* ($u_c = 0.3 + 1.85 \sin(16t)$, $n(t) = 0$, $\theta_1(0) = 1.14$, $\theta_2(0) = -0.65$ y las otras condiciones iniciales son cero). Obtener figuras similares a la [Figura 3.20](#) y a la [Figura 3.21](#). Obtener conclusiones [[Sastry and M. Bodson, 1989.pag. 218](#)].

III) Con una *entrada constante moderada y un perturbación de salida pequeña* ($u_c = 2$, $n = 0.5 \sin(16.1t)$, $\theta_1(0) = 1.14$, $\theta_2(0) = -0.65$ y las otras condiciones iniciales son cero). Obtener figuras similares a la [Figura 3.22](#) y a la [Figura 3.23](#). Obtener conclusiones [[Sastry and M. Bodson, 1989.pag. 220](#)].

Que conclusiones se obtienen de estos experimentos.

4. REGULADORES AUTO-AJUSTABLES

4.1. Introducción

El nombre de reguladores auto-sintonía (o Auto-Sintonía, STR: Self-Tuning Regulator) proviene de uno de los primeros artículos sobre el tema. La razón principal para el uso de los sistemas adaptables es cuando los parámetros del proceso o de su medio ambiente cambiando continuamente. Es difícil analizar este tipo de sistemas, por lo tanto, para simplificar el problema se asume que los parámetros del proceso permanecen constantes pero son desconocidos. El término auto-sintonía se usa para expresar la propiedad de convergencia de los parámetros del controlador a los parámetros que surgirían al desarrollar un controlador suponiendo que los parámetros del sistema fueran conocidos. En general cuando diseñamos un controlador, éste se diseña para un punto de funcionamiento determinado del proceso. Ahora bien, si los parámetros del proceso varían con el tiempo (ya sea por derivas o desgastes de las constantes físicas, o bien porque el proceso es no lineal y se modifica el punto de funcionamiento en el que estamos trabajando, el controlador calculado para un punto de funcionamiento concreto, no será en general el adecuado para este tipo de situaciones.

Cuando nos enfrentamos con este tipo de problemas, podemos plantear una estructura de control que además del bucle principal de regulación que existe en todo sistema de control, incorpore un segundo bucle de control, en el que a partir de la información recogida del proceso y con un determinado criterio de diseño, se modifiquen los parámetros del regulador.

Como se vio en el [capítulo 1](#) sobre los controladores adaptables, esto puede hacerse con dos planteamientos diferentes: con un modelo de referencia o en mediante los reguladores auto-ajustables.

En este caso, se comienza con un método de diseño para sistemas con parámetros conocidos, sustituyendo posteriormente los parámetros conocidos por sus estimados y recalculando el controlador en cada paso. La aplicación de esta idea es lo que se conoce como el *principio de equivalencia cierta*.

El diagrama de bloques de estos controladores se puede ver en la Figura 4.1, en él se distinguen tres partes claramente diferenciadas:

- un algoritmo recursivo de estimación de parámetros
- un mecanismo de adaptación que desarrolla la tarea de diseño del regulador y
- un regulador con parámetros ajustables.

Estos reguladores conforman una estructura sub-óptima basada en el principio de *separación de las tareas de control e identificación*.

El controlador mostrado en la Figura 4.1 es una estructura muy rica. En ella se puede usar cualquier tipo de controlador con cualquier tipo de identificador. Solo algunas de estas estructuras se han estudiado. La elección de la estructura del modelo y su parametrización son importantes para los reguladores auto-sintonizables. Una forma sencilla de realizar un control auto-sintonía es utilizar un algoritmo de identificación para obtener los parámetros del proceso y con ellos obtener los parámetros del controlador. Esto da como resultado un *algoritmo de adaptación indirecto (indirect adaptive algorithm)*. Los parámetros del controlador no se actualizan directamente, pero sí en forma indirecta por la estimación de los parámetros del proceso. Algunas veces, se

puede reparametrizar el modelo de tal forma que los parámetros del controlador se pueden estimar en forma directa. En este caso lo que se obtiene es un *algoritmo de adaptación directo (direct adaptive algorithm)*. Hay algo de confusión en la nomenclatura. En el contexto de los algoritmos de auto-sintonía, los algoritmos indirectos se los suele llamar *controladores con auto-sintonía explícitos (explicit self-tuning control)*, ya que se debe estimar los parámetros del sistema. La actualización directa de los parámetros del controlador se los suele llamar *controladores con auto-sintonía implícita (implicit self-tuning control)*. En los primeros artículos de control adaptable se les llamaba a los esquemas adaptables directos como controladores adaptables sin identificación (adaptive controller without identification). Es conveniente dividir los algoritmos con auto-sintonía indirectos y directos, pero la diferencia no debe ser sobre enfatizada. La idea básica es que en ambos tipos de algoritmos es identificar algunos parámetros que están relacionados o bien con el proceso, o bien con el comportamiento del sistema a lazo cerrado.

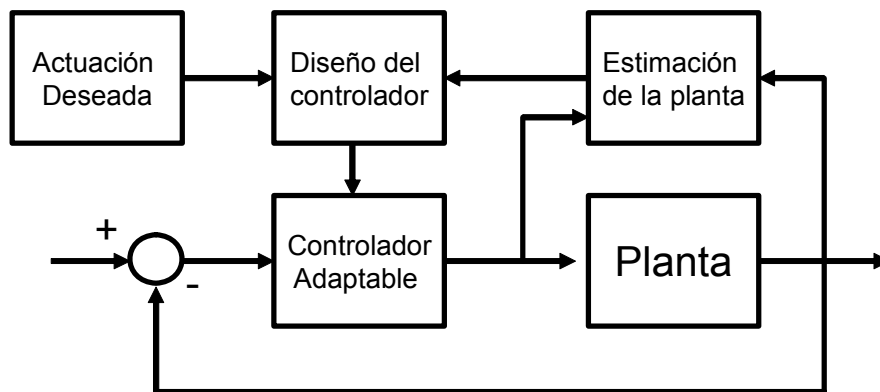


Figura 4.1. Esquema de regulador autoajustable (STR)

La idea de los reguladores autoajustables puede ser aplicada a muchos problemas de control que no son formulados como un problema de control estocástico. Dada la modularidad y la separación del control e identificación, pueden formarse muchas clases de reguladores autoajustables por combinación de diferentes métodos de diseño e identificadores.

En cuanto al modelo de la planta, supondremos en general, que sobre el sistema actúan perturbaciones estocásticas, por lo que el proceso estará descrito por su modelo ARMAX, de la siguiente forma

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(k) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(k)$$

donde los distintos polinomios y variables tienen el siguiente significado

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}$$

siendo $y(k)$ la secuencia de salida, $u(k)$ la señal de control del sistema, $v(k)$ una señal aleatoria independiente con distribución gaussiana $N(0, \sigma)$, d es el retardo del sistema y z^{-1} es el operador retardo tal que $y(k) = z^{-1} y(k+1)$. $A(z^{-1})$ y $B(z^{-1})$ deben ser primos relativos, es decir que no tiene factores en común.

En cuanto al criterio de diseño, pueden dividirse en dos tipos, según el planteamiento del problema sea: estocástico o no estocástico. Cuando el planteamiento es estocástico, se consideran sistemas cuyas señales no se pueden conocer en forma exacta y tampoco se pueden predecir en forma exacta.

En el diseño con planteamiento estocástico, normalmente se minimiza un cierto índice de desempeño (actuación), como por ejemplo para el caso de mínima varianza, se trata de minimizar las variaciones con respecto a cero, ya que se trata de un problema de regulación

$$J = E \{ y^2 (k + d + 1) \}$$

O bien puede plantearse un índice más general de la forma.

$$J = E \left\{ \left(Py(k + d + 1) + Qu(k) - Rr(k) \right)^2 \right\}$$

Mediante el planteamiento no estocástico, se considera que las perturbaciones que inciden sobre un sistema son exactamente conocidas, pudiéndose describir estos sistemas analíticamente por medio de un sistema dinámico determinista.

En este caso el índice de actuación se da en función de unas especificaciones que debe cumplir la salida del sistema, lo que normalmente se traduce en especificar una función de transferencia deseada en bucle cerrado, como es el caso de asignación de polos. En la actualidad, se ha demostrado en numerosos casos, que ambos planteamientos conducen a resultados similares.

A continuación se exponen algunas técnicas de diseño de controladores, que son utilizadas frecuentemente en control adaptable.

4.2. Asignación de polos y ceros

[Astrom y Wittenmark, 1980] proponen una estructura de control con diseño por asignación de polos como la dada en la Figura 4.2. Esta estructura puede interpretarse como un compensador en adelante y un compensador en bucle cerrado.

$$M(z^{-1})u(k) = S(z^{-1})w(k) - G(z^{-1})y(k)$$

También puede demostrarse que dicha estructura corresponde a un controlador lineal por realimentación del estado y a un observador. La ley de control puede diseñarse para obtener unos polos deseados del sistema en bucle cerrado, preservando los ceros inestables del sistema en bucle abierto.

El problema que se plantea consiste en hacer que la función de transferencia, desde la salida a la referencia, del sistema (Figura 4.2), sea de la forma:

$$y(k) = \frac{B_m}{A_m} z^{-d} w(k) \quad (4.127)$$

donde los polinomios B_m y A_m no tienen factores comunes y el grado de A_m es mayor o igual a B_m . Esto permitirá dar las especificaciones del problema de seguimiento en términos de la respuesta deseada a una señal de referencia.

El método de diseño elegido es el de síntesis algebraica directa. La solución consiste básicamente en resolver una ecuación polinomial con ciertas restricciones en los órdenes de los polinomios para asegurar que el regulador propuesto sea causal y con realización mínima.

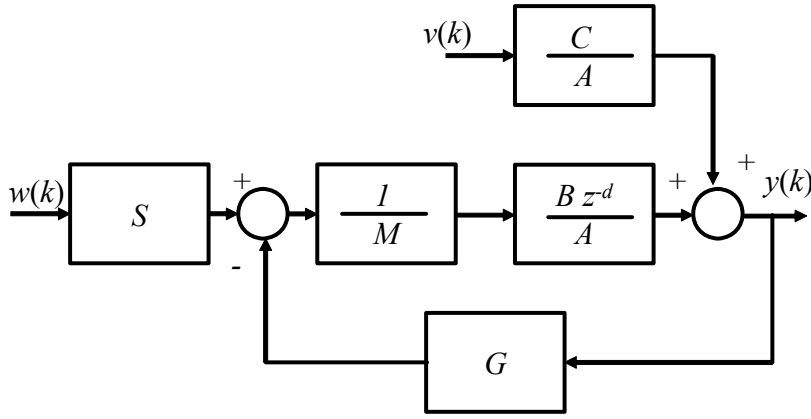


Figura 4.2. Estructura de control por asignación de polos y ceros

A partir de la Figura 4.2, la función de transferencia en bucle cerrado que se obtiene es

$$y(k) = \frac{SBz^{-d}}{AM + BGz^{-d}} w(k) + \frac{CM}{AM + BGz^{-d}} v(k) \quad (4.128)$$

Suponiendo que las perturbaciones son despreciables, resulta el sistema

$$y(k) = \frac{SBz^{-d}}{AM + BGz^{-d}} w(k) \quad (4.129)$$

Se puede definir al polinomio

$$AM + BGz^{-d} = A_c \quad (4.130)$$

Igualando (4.129) con la (4.127), se tiene la siguiente ecuación polinomial

$$\frac{SB}{(AM + BGz^{-d})} = \frac{B_m}{A_m}$$

o

$$(AM + BGz^{-d})B_m = SBA_m \quad (4.131)$$

Las raíces de ésta ecuación polinomial contienen las raíces de los polinomios S , B y A_m . Si el polinomio B no está contenido en el polinomio B_m , entonces formará parte del regulador que cancelará estos ceros, luego para que así pueda ocurrir, los ceros del polinomio B deben ser estables o estar contenidos en B_m .

Factorizando B como

$$B = B^- B^+ \quad (4.132)$$

donde el superíndice B^- corresponde a los ceros inestables y el B^+ corresponde a los ceros estables y bien amortiguados (que se pueden cancelar).

Por otro lado B^- debe ser un factor de B_m , por lo tanto

$$B_m = B^- B_{m1} \quad (4.133)$$

Como se debe cancelar B^+ , este debe ser un factor de A_c . De la ecuación (4.131) se deduce que A_m debe ser también un factor de A_c . Por lo tanto la ecuación característica en lazo cerrado será

$$A_c = A_0 A_m B_m \quad (4.134)$$

También habrá que especificar la dinámica extra mediante el polinomio A_0 . Debido a que B^+ es un factor de B y A_c , de la ecuación (4.130) se puede ver que también es factor M . Por lo tanto

$$M = M_1 B^+$$

Introduciendo (4.132), (4.133) y (4.134) en (4.131) resulta

$$S = A_0 B_{m1} \quad (4.135)$$

introduciendo (4.135) en la ecuación (4.131), se obtiene la expresión

$$AM_1 + B^- G z^{-d} = A_0 A_m \quad (4.136)$$

Para resolver esta ecuación polinomial, cuyas incógnitas son M_1 y G , pueden utilizarse varios métodos, como son: resolución de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, utilización del método de la matriz polinomial, o bien como apuntan, mediante un segundo algoritmo de identificación, lo que conduce a un método llamado cuasi-directo. La ecuación característica del bucle cerrado es de la forma

$$AM + BGz^{-d} = AM_1 B^+ + B^- B^+ Gz^{-d} = B^+ A_0 A_m \quad (4.137)$$

luego dicha ecuación tiene como ceros suyos, los ceros estables del sistema en bucle abierto, los ceros del observador y los polos del modelo deseado.

La ecuación (4.136) (4.137), tiene infinitas soluciones, pudiéndose obtener una solución única realizable. Para ello es necesario determinar los órdenes mínimos de los polinomios para que el controlador por asignación de polos y ceros de [Astrom y Wittenmark, 1980], sea causal. El grado de un polinomio A , se escribe como $\text{grad}(A)$.

A partir de la ecuación (4.137), se sabe que,

$$\max(\text{grad}(A) + \text{grad}(M), \text{grad}(B) + \text{grad}(G) + d) = \text{grad}(B^+) + \text{grad}(A_0) + \text{grad}(A_m) \quad (4.138)$$

Además para que el regulador sea causal debe cumplirse que,

$$\text{grad}(G) < \text{grad}(M) \quad \text{y} \quad \text{grad}(S) < \text{grad}(M) \quad (4.139)$$

Por otro lado para una ecuación de la forma,

$$AX + BY = C$$

donde X e Y son las incógnitas, se tiene una solución única, (resultado conocido del álgebra),

$$\text{si } \text{grad}(X) < \text{grad}(B) \quad \text{o} \quad \text{grad}(Y) < \text{grad}(A)$$

A partir de (4.138) pueden ocurrir dos casos:

$$1. \text{grad}(A) + \text{grad}(M) = \text{grad}(B^+) + \text{grad}(A_0) + \text{grad}(A_m)$$

$$\text{o sea, } \text{grad}(M) = \text{grad}(B^+) + \text{grad}(A_0) + \text{grad}(P_m) - \text{grad}(A)$$

y para obtener una solución única,

$$\text{grad}(G) < \text{grad}(A) \quad \text{tomando} \quad \text{grad}(G) < \text{grad}(A) - 1$$

El grado del polinomio del observador puede deducirse utilizando (4.139), que sustituyendo se tiene,

$$\text{grad}(A_0) > 2\text{grad}(A) - \text{grad}(P_m) - \text{grad}(B^+) - 1$$

$$2. \text{grad}(B) + \text{grad}(G) + d = \text{grad}(B^+) + \text{grad}(A_0) + \text{grad}(A_m)$$

o sea,

$$\text{grad}(G) = \text{grad}(B^+) + \text{grad}(A_0) + \text{grad}(P_m) - \text{grad}(B) - d$$

y para obtener una solución única,

$$\text{grad}(M) < \text{grad}(B) + d$$

tornando

$$\text{grad}(M) < \text{grad}(B) + d - 1$$

Sustituyendo $\text{grad}(M) = \text{grad}(M_1) + \text{grad}(B^+)$, en los dos casos nos dan las condiciones para los grados de M_1 y G como:

$$\text{grad}(G) = \text{grad}(A) - 1$$

$$\text{grad}(M_1) = \text{grad}(A_0) + \text{grad}(P_m) - \text{grad}(A)$$

o bien,

$$\text{grad}(G) = \text{grad}(A_0) + \text{grad}(P_m) - \text{grad}(B^-) - d$$

$$\text{grad}(M_1) = \text{grad}(B^-) + d - 1 \quad (4.140)$$

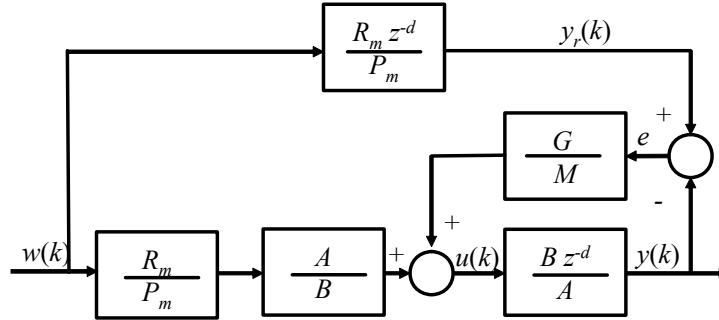


Figura 4.3. Interpretación como modelo de referencia

La estructura del regulador diseñado puede interpretarse como seguimiento a un modelo de referencia de la forma dada en (4.127). Operando con la ecuación (4.131), para obtener S/M y sustituyendo en la expresión del regulador,

$$u(k) = \frac{1}{M} (Sw(k) - Gy(k))$$

se tiene,

$$u(k) = \frac{A}{B} y_r(k + d) + \frac{G}{M} (y_r(k) - y(k))$$

que corresponde a la estructura de la Figura 4.3.

En dicha estructura se puede observar que el regulador está compuesto de dos partes, un controlador en adelante (feedforward) y un controlador en bucle cerrado. Si la señal e es igual a cero, la acción del bloque G/M desaparece y la relación que liga la entrada con la salida es justamente el modelo de referencia (4.127). Por otro lado es de notar que el bloque A/B no es realizable pero sí lo es $R_m A / P_m B$.

Casos particulares

Como se desprende de la deducción anterior, para el diseño del regulador propuesto es necesario factorizar el polinomio B y resolver la ecuación polinomial (4.136). Estos pasos pueden consumir un tiempo de cálculo apreciable y si se pretende que el algoritmo funcione en línea con el proceso (caso normal en control adaptable), es de gran interés considerar casos particulares en los que dichos cálculos se simplifiquen.

1. Cancelación de todos los ceros del sistema.

En éste caso se supone que el sistema es de fase mínima, pudiéndose cancelar todos los ceros del sistema en bucle abierto, por lo que se tiene,

$$\begin{aligned} B^+ &= B & B^- &= 1 & B_m &= B_{m1} = K \\ M &= M_1 B & S &= K A_0 \end{aligned}$$

que sustituyendo en la ecuación (4.136), se llega a,

$$AM_1 + Gz^{-d} = A_m A_0$$

Dicha ecuación es más simple de resolver, sobre todo si se toman las condiciones (4.140). Este caso también puede verse como el controlador de [Clarke y Gawthrop, 1975] si se eligen,

$$\begin{aligned} M_1 &= zF & C &= z^{-1}A_0 \\ Q &= 0 & w(k) &= 0 \end{aligned}$$

2. No se cancela ningún cero del sistema.

Si el sistema a controlar es de fase no mínima, se supone que todos los ceros están fuera del círculo unidad, y se eligen los ceros del sistema en bucle cerrado como $B_m = KB$, siendo K una constante, o sea,

$$\begin{aligned} B^+ &= 1 & B^- &= B \\ B_m &= BB_{m1} & M &= M_1 \\ S &= KA_0 \end{aligned}$$

la ecuación resultante es de la forma,

$$AM + BGz^{-d} = A_m A_0$$

4.3. Predicción óptima

El problema de control estocástico está íntimamente ligado con el de predicción. Por ello vamos a desarrollar el predictor óptimo [Astrom and Wittenmark, 1973], de d pasos de la salida de un sistema, el cual será necesario posteriormente.

Dado el proceso estocástico en tiempo discreto:

$$A(z^{-1})y(k+d) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})v(k+d) \quad (4.141)$$

donde los distintos polinomios y variables tienen el siguiente significado:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}$$

consideramos el problema de encontrar la predicción de la salida en el instante $k+d$ con la información disponible en el instante k , tal que la esperanza matemática de $(y(k+d) - y(k+d/k))$ al cuadrado sea mínima, siendo $y(k)$ la secuencia de salida, $u(k)$ la señal de control del sistema y $v(k)$ una señal aleatorio independiente con distribución gaussiana $N(0, \sigma)$.

Predictor óptimo

La ecuación del sistema (4.141) puede escribirse como

$$y(k+d) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}v(k+d) \quad (4.142)$$

El último término de la expresión anterior es una función de $v(k+d)$, $v(k+d-1)$, ..., $v(k+1)$, $v(k)$, $v(k-1)$, donde $v(k+d)$, $v(k+d-1)$, ..., $v(k+1)$ no están disponibles en el instante k , por ello se va a descomponer este último término, mediante la utilización de la identidad

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-(d+1)}G(z^{-1}) \quad (4.143)$$

con,

$$F(z^{-1}) = 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_d z^{-d}$$

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{n-1} z^{-(n-1)}$$

quedando el sistema (4.142) de la forma

$$y(k+d) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(k) + F(z^{-1}) v(k+d) + \frac{z^{-1} G(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(k) \quad (4.144)$$

resolviendo la ecuación (4.142) para $v(k)$.

$$v(k) = \frac{A(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) - \frac{B(z^{-1})}{C(z^{-1})} z^{-d} u(k) \quad (4.145)$$

Sustituyendo (4.145) en (4.144) y operando con la ayuda de la identidad (4.143).

$$y(k+d) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(k) + F(z^{-1}) v(k+d) + \frac{z^{-1} G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) - \frac{B(z^{-1}) G(z^{-1})}{C(z^{-1}) A(z^{-1})} z^{-(d+1)} u(k)$$

$$y(k+d) = F(z^{-1}) v(k+d) + \frac{z^{-1} G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) + \frac{B(z^{-1}) F(z^{-1})}{C(z^{-1})} u(k)$$

Tomando la esperanza matemática del error de predicción. (En lo que se sigue, se omite z^{-1} en los polinomios para mayor claridad).

$$E \left[\left(y(k+d) - \hat{y}(k+d/k) \right)^2 \right]$$

$$= E \left[\left(\left(F(z^{-1}) v(k+d) + \frac{z^{-1} G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) + \frac{B(z^{-1}) F(z^{-1})}{C(z^{-1})} u(k) \right) - \hat{y}(k+d/k) \right)^2 \right]$$

$$= E \left[\left(F(z^{-1}) v(k+d) \right)^2 \right] + E \left[\left(\frac{z^{-1} G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) + \frac{B(z^{-1}) F(z^{-1})}{C(z^{-1})} u(k) - \hat{y}(k+d/k) \right)^2 \right]$$

$$+ 2E \left[\left(F(z^{-1}) v(k+d) \right) \left(\frac{z^{-1} G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) + \frac{B(z^{-1}) F(z^{-1})}{C(z^{-1})} u(k) - \hat{y}(k+d/k) \right) \right]$$

El último término es cero puesto que $v(k+d)$ es independiente (ruido blanco), y sobre el primer término no se puede influir, por lo tanto la mejor predicción de la salida se obtiene igualando a cero el segundo término, con lo que resulta

$$\frac{z^{-1} G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) + \frac{B(z^{-1}) F(z^{-1})}{C(z^{-1})} u(k) - \hat{y}(k+d/k) = 0$$

$$\hat{y}(k+d/k) = \frac{z^{-1} G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) + \frac{B(z^{-1}) F(z^{-1})}{C(z^{-1})} u(k)$$

o bien

$$\hat{y}(k+d+1/k) = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y(k) + \frac{zB(z^{-1}) F(z^{-1})}{C(z^{-1})} u(k)$$

siendo el error de predicción,

$$\begin{aligned} e(k+d+1) &= y(k+d+1) - \hat{y}(k+d+1/k) \\ &= F(z^{-1})v(k+d+1) \end{aligned}$$

4.4. Regulador de mínima varianza

Este regulador óptimo pretende reducir el efecto de las perturbaciones sobre la salida. Para ello la estrategia de control consiste en calcular la señal de control $u(k)$, como una función de los valores disponibles en ese instante, o sea, $u(k-1)$, $u(k-2)$, ..., $y(k)$, $y(k-1)$, ..., de tal forma que se minimice el criterio

$$J = E[y^2(k+d/k)]$$

Se supone que sobre el sistema, actúan perturbaciones estocásticas, por lo que el proceso estará descrito por su modelo ARMA, de la siguiente forma:

$$A(z^{-1})y(k+d) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})v(k+d) \quad (4.146)$$

donde, los distintos polinomios y variables tienen el significado dado en el apartado anterior. Deduciéndose que la señal de control $u(k)$ afecta a la salida $y(k+d)$ pero no antes. Utilizando la identidad,

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-(d+1)}G(z^{-1})$$

El segundo miembro de la igualdad anterior puede descomponerse, quedando la ecuación

$$y(k+d) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + F(z^{-1})v(k+d) + \frac{z^{-1}G(z^{-1})}{A(z^{-1})}v(k) \quad (4.147)$$

Los dos últimos términos del lado derecho de la igualdad tienen la siguiente interpretación:

1. $F(z^{-1})v(k+d)$, es una combinación lineal de las perturbaciones producidas entre el instante k y $k+d$, cuyo efecto sobre la salida $y(k+d)$ no se puede controlar con $u(k)$, ya que $v(k+d)$ para $d > 0$, es independiente de $y(k-1)$, $y(k-2)$, ..., $u(k-1)$, $u(k-2)$
2. $z^{-1}G(z^{-1})v(k)/A(z^{-1})$, es el efecto sobre la salida de las perturbaciones anteriores a k .

Resolviendo la ecuación (4.146) para $v(k)$ y sustituyendo su expresión en (4.147) se obtiene

$$y(k+d) = F(z^{-1})v(k+d) + \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(k) + \frac{z^{-1}G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k)$$

Tomando la esperanza matemática en ambos miembros al cuadrado se tiene que:

$$\begin{aligned} &E[(y(k+d))^2] \\ &= E\left[\left(F(z^{-1})v(k+d) + \frac{z^{-1}G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k) + \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(k)\right)^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\left(F(z^{-1})v(k+d) \right)^2 \right] + E \left[\left(\frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(k) + \frac{z^{-1}G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k) \right)^2 \right] \\
&\quad + 2E \left[\left(F(z^{-1})v(k+d) \right) \left(\frac{z^{-1}G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k) + \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(k) \right) \right]
\end{aligned}$$

El último término de la expresión anterior es cero, ya que $v(k+d)$ es independiente de los valores anteriores de $y(k)$ y $u(k)$, y sobre el primer término del segundo miembro de la ecuación no se puede influir, luego el mínimo se obtendrá igualando a cero el término que queda, resultando que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(k) + \frac{z^{-1}G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k) \\
\frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(k) &= -\frac{z^{-1}G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k) \\
u(k) &= -\frac{z^{-1}G(z^{-1})}{B(z^{-1})F(z^{-1})}y(k)
\end{aligned}$$

o bien,

$$u(k) = -\frac{G(z^{-1})}{zB(z^{-1})F(z^{-1})}y(k) \quad (4.148)$$

A la vista de las expresiones obtenidas y comparándolas con la deducción del predictor óptimo en el apartado anterior, se puede interpretar el problema del regulador de mínima varianza, como la determinación del predictor y buscar la señal de control tal que la predicción coincida con la salida deseada. En este caso $\hat{y}(k+d/k) = 0$.

4.5. Controladores para plantas con parámetros desconocidos

En los apartados anteriores se han disecado reguladores y controladores para plantas cuyos parámetros se han supuesto conocidos. En este punto reemplazaremos esta hipótesis por otra en que se supone que los parámetros son desconocidos y constantes. No obstante, como han demostrado experimentalmente algunos autores, estas técnicas pueden ser aplicadas cuando los parámetros varían lentamente o bien bruscamente, pero sus valores se mantienen constantes durante largos periodos de tiempo.

Como se ha comentado anteriormente, la idea en que se basan los reguladores autoajustables (STR), reside en la aplicación del principio de equivalencia cierta. Ello implica el utilizar un algoritmo de identificación de parámetros, y calcular los parámetros del regulador en base a suponer que los parámetros estimados coinciden con los reales.

4.6. Algoritmos con estructura explícita e implícita

Dentro de los controladores autoajustables, que aplican el principio de equivalencia cierta, para realizar el mecanismo de adaptación, existen básicamente dos tipos de algoritmos, unos que identifican directamente los parámetros de la planta (algoritmo con identificación explícita (esquema de control adaptable indirecto)), Figura 4.1, y otros que mediante una reescritura del modelo de la planta, simplifican los pasos,

estimándose en este caso directamente los parámetros del controlador (algoritmo con identificación implícita (esquema de control adaptable directo)), Figura 4.4.

Algoritmo con identificación explícita

1. Estimar los parámetros del modelo (4.146) mediante un algoritmo de identificación de parámetros, como el propuesto en el [tema 2](#).
2. Calcular los parámetros del controlador, según se ha visto en los apartados anteriores, necesitándose en muchos casos resolver una ecuación polinomial.
3. Calcular la señal de control con los parámetros del controlador.
4. Repetir, los pasos 1, 2 y 3 en cada periodo de muestreo.

Mediante este algoritmo se puede realizar un paquete de programas de control, donde el paso 1 de identificación sería común para todos los controladores, cambiando cada uno de éstos bajo demanda del usuario, según el tipo de proceso a controlar.

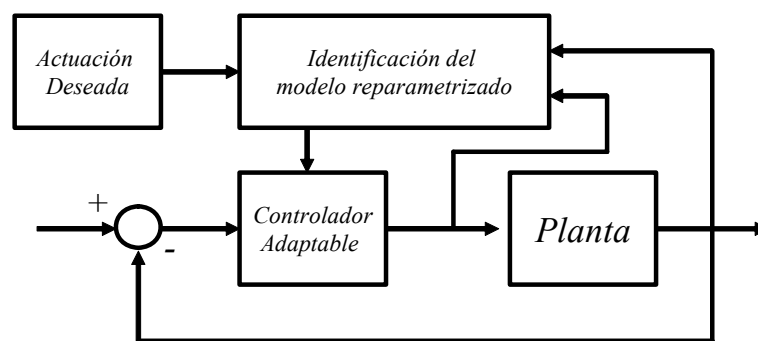


Figura 4.4. Algoritmo con identificación implícita

Algoritmo con identificación implícita

1. Estimar los parámetros del modelo reparametrizado mediante un algoritmo de identificación de parámetros.
2. Calcular la señal de control con los parámetros del controlador.
3. Repetir los pasos 1 y 2 en cada periodo de muestreo.

La realización de este algoritmo no siempre es posible, ya que para el paso 1, se necesita en cada caso particular reformular el modelo para que aparezcan directamente los parámetros del controlador.

Se ilustran estos dos tipos de algoritmos, para el caso de diseño del controlador con, el criterio de asignación de polos, poniéndose de manifiesto, que en el caso de la identificación implícita, la reescritura del modelo conduce a un modelo bilineal en los parámetros que entraña una mayor dificultad para su identificación. También se hace notar que la reescritura del modelo no siempre es posible y hay que realizarla para cada caso en particular.

Algoritmo con identificación explícita

Dados: R_m , A_0 , P_m , d

1. Estimar A y B en el modelo,

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u(k)$$

2. Factorizar el polinomio $B = B^+ B^-$

3. Resolver la ecuación siguiente para M_1 y G ,

$$AM_1 + B^-Gz^{-d} = A_0P_m \quad (4.149)$$

que corresponde a un sistema de ecuaciones lineales.

4. Calcular la señal de control mediante,

$$u(k) = \frac{1}{M} (Sw(k) - Gy(k)) \quad \begin{cases} S = A_0R_{m1} \\ M = M_1B^+ \end{cases}$$

5. Ir al paso 1.

Algoritmo con identificación implícita

La ecuación (4.149) puede describirse de la siguiente forma:

$$AM_1y(k) + B^-Gz^{-d}y(k) = A_0P_my(k)$$

como por otro lado $Ay(k) = Bz^{-d}u(k)$, lleva a,

$$M_1bz^{-d}u(k) + B^-Gz^{-d}y(k) = A_0P_my(k)$$

teniendo en cuenta que $M = M_1B^+$ y $B = B^+B^-$, resulta:

$$A_0P_my(k) = B^-z^{-d} [Mu(k) + Gy(k)]$$

Esta ecuación puede verse como el modelo de un proceso, en el que los polinomios del controlador M y C aparecen directamente. Teniendo en cuenta esto, puede escribirse el algoritmo de control adaptable con identificación implícita siguiente

Dados: R_{m1} , A_0 , P_m , d

1. Estimar M , G y B^- en el modelo,

$$A_0P_my(k) = B^-z^{-d} [Mu(k) + Gy(k)]$$

2. Calcular la señal de control mediante,

$$u(k) = \frac{1}{M} (Sw(k) - Gy(k)) \quad S = A_0R_{m1}$$

3. Ir al paso 1.

Hay que hacer notar que el modelo a identificar en este caso es bilineal en los parámetros, por lo que la identificación no es trivial. Para el caso en que $B^- = 1$, o sea que tengamos un sistema de fase mínima que tiene todos sus ceros estables, el algoritmo se reduce notablemente, ya que la identificación del modelo resultante no presenta ningún problema.

Ventajas e inconvenientes de uno y otro algoritmo

En el caso de la identificación explícita se necesitan más cálculos en cada paso. Por otro lado se tienen directamente los parámetros de la planta, lo que es particularmente interesante para poder realizar la supervisión del control. Así mismo, como se ha mencionado anteriormente, permitir un único algoritmo en el que puede cambiarse el controlador en cada caso.

En el caso de la identificación implícita se necesitan menos cálculos en cada paso, pero la identificación es en general más complicada. Se necesita describir el modelo en cada caso particular, y ello no siempre es posible.

4.7. Propiedad de autosintonía

En esta sección se ilustra, la propiedad de autosintonía de los controladores autoajustables para el caso del regulador de mínima varianza. Al aplicar esta propiedad

lo que se consigue es la obtención del controlador de mínima varianza pero el algoritmo de identificación que hay que aplicar es más simple.

Este regulador que se estudió en un apartado anterior, tiene como resultado que

$$u(k) = -\frac{G(z^{-1})}{zB(z^{-1})F(z^{-1})}y(k)$$

utilizándose la identidad

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-(d+1)}G(z^{-1})$$

con,

$$F(z^{-1}) = 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_d z^{-d}$$

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{n-1} z^{-(n-1)}$$

Así mismo vimos que el modelo del sistema puede escribirse como

$$y(k+d+1) = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k) + \frac{zB(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(k) + F(z^{-1})v(k+d+1)$$

que para el caso en que $C(z^{-1})=1$, o sea, no se consideran las perturbaciones, el algoritmo de identificación se reduce notablemente, quedando el modelo

$$y(k+d+1) = A'(z^{-1})y(k) + B'(z^{-1})u(k) + v(k+d+1)$$

donde $A'(z^{-1})$ es de orden $n-1$ y de orden $n+d-1$. Este último modelo puede utilizarse para estimar los parámetros de A' y B' por mínimos cuadrados y de esta forma la ley de control de mínima varianza resulta simplemente

$$u(k) = \frac{A'(z^{-1})}{B'(z^{-1})}y(k)$$

donde

$$A'(z^{-1}) = a'_0 1 + a'_1 z^{-1} + \dots + a'_{n-1} z^{-(n-1)}$$

$$B'(z^{-1}) = b'_0 + b'_1 z^{-1} + \dots + b'_{n+d-1} z^{-(n+d-1)}$$

que coincidiría con el regulador calculado para el caso del conocimiento exacto de los parámetros de la planta.

Para el caso en que $C(z^{-1}) \neq 1$, cabe esperar que los parámetros sufran desviaciones, sin embargo, como veremos a continuación, el regulador converge al regulador calculado con parámetros conocidos.

Si utilizamos el regulador

$$u(k) = \frac{A'(z^{-1})}{B'(z^{-1})}y(k)$$

Al sustituir dicho regulador en el modelo de la planta y operando se obtiene la función de transferencia en bucle cerrado de la forma

$$y(k) = \frac{C(z^{-1})B'(z^{-1})}{A(z^{-1})B'(z^{-1}) + B(z^{-1})A'(z^{-1})z^{-d}}v(k)$$

Así mismo, como el control es de mínima varianza, esta función debe ser de la forma

$$y(k) = F(z^{-1})v(k)$$

Luego igualando las dos expresiones anteriores y reordenando la ecuación resultante se obtiene,

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-d} \frac{F(z^{-1})B(z^{-1})A'(z^{-1})}{B'(z^{-1})}$$

que comparando con la identidad

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-d}G(z^{-1})$$

se obtiene la expresión del regulador obtenida anteriormente (4.148),

$$\frac{A'(z^{-1})}{B'(z^{-1})} = \frac{G(z^{-1})}{zB(z^{-1})F(z^{-1})}$$

Cuando utilizamos la propiedad de autosintonía podemos utilizar un algoritmo de identificación de mínimos cuadrados mucho más simple que el que sería necesario para identificar los polinomios A , B y C del modelo original. El regulador que se obtiene converge al óptimo como si se utilizara el algoritmo de identificación con los polinomios A , B , C y se diseñara el regulador de mínima varianza.

Procedimiento de síntesis

A continuación se dan resumidos los pasos del procedimiento a seguir para el cálculo del control, en el que se suponen conocidos los grados de los polinomios A , B y C , así como el retardo d del sistema.

1º paso

Identificar usando mínimos cuadrados el siguiente modelo

$$y(k) = A'(z^{-1})z^{-(d+1)}y(k) + B'(z^{-1})z^{-(d+1)}u(k) + e(k)$$

donde $A'(z^{-1})$ y $B'(z^{-1})$ están definidos por:

$$A'(z^{-1}) = a'_0 + a'_1 z^{-1} + \dots + a'_{n-1} z^{-(n-1)}$$

$$B'(z^{-1}) = b'_0 + b'_1 z^{-1} + \dots + b'_{n+d-1} z^{-(n+d-1)}$$

$e(k)$ es el residuo de la identificación y b'_0 se fija de antemano por condiciones de identificabilidad.

2º paso :

Calcular la señal de control por la expresión,

$$u(k) = \frac{A'(z^{-1})}{B'(z^{-1})} y(k)$$

Los pasos descritos anteriormente son efectuados en cada periodo de muestreo, constituyendo un procedimiento de síntesis de los controladores autoajustables.

4.8. Ejemplos ilustrativos

4.8.1. Ejemplo de mínima varianza

Dado el sistema,

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + e(k) + ce(k-1)$$

donde $a = -0,5$, $b = 3$ y $c = 0.7$. El regulador de mínima varianza para este sistema es:

$$u(k) = \frac{a-c}{b} y(k) = -0.4y(k)$$

Un regulador con esta estructura puede obtenerse empleando un algoritmo de control adaptable autoajustable, como el descrito en las secciones precedentes, basado en el modelo:

$$y(k) + ay(k-1) = \beta u(k-1) + \varepsilon(k-1)$$

La Figura 4.5 muestra la evolución del parámetro α cuando $\beta = 1$. Puede verse como este converge al valor de -0.4.

4.8.2. Control adaptable PI

Vamos a ver un ejemplo de control adaptable suponiendo que el sistema se modela como un sistema de primer orden y el regulador que se va a emplear es un PI. A partir de las entradas y salidas (u y y), se identificarán los parámetros del modelo y mediante un método de diseño se actualizarán los parámetros del regulador PI.

En un primer paso se utilizará como método de diseño la regla de Ziegler- Nichols. Dicha regla se basa en los parámetros de la respuesta a un escalón de un sistema de primer orden con retardo,

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s} e^{-\tau_d s}$$

Si se elige un tiempo de muestreo (T_m) tal que $\tau_d = T_m d$, el equivalente discreto viene dado por,

$$G(z^{-1}) = \frac{bz^{-1}}{1 + az^{-1}} z^{-d} \quad (4.150)$$

siendo la correspondencia entre ambas representaciones,

$$a = e^{-T_m/\tau}, \quad \tau = \frac{T_m}{\ln(a)}, \quad K = \frac{b}{1-a}$$

Luego con este sistema de control adaptable, en primer lugar se estiman los parámetros a y b , a partir de estos se calculan τ y K , y aplicando las reglas de Ziegler-Nichols, se obtendrían los parámetros del regulador PI. Como dichas reglas son para el sistema continuo, la realización práctica, conllevaría la discretización del regulador PI.

Veamos otro método de diseño: el basado en la técnica de asignación de polos. En este caso, al igual que en el anterior, se identificará el sistema dado por (4.150) y suponiendo que estos parámetros son los correctos se diseñará un regulador PI discreto, el cual viene dado por

$$G_R(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}} z^{-d}$$

Para el caso en que $d = 0$, la función de transferencia total del conjunto regulador y planta en bucle cerrado viene dada por

$$G_T(z) = \frac{bq_0(z + q_1/q_0)}{(z-a)(z-1) + bq_0(z + q_1/q_0)}$$

Sistema de segundo orden, donde se pueden fijar los dos polos (con q_0 y q_1), aunque no se puede fijar el cero.

Una forma de asignar los polos, puede ser cancelando el polo en a (puede hacerse si el sistema es estable), con $q_1/q_0 = -a$. De esta forma sólo habría que fijar un polo. La función de transferencia total quedaría

$$G_T(z) = \frac{bq_0}{(z-1) + bq_0}$$

Luego si el polo deseado es p quedarían como ecuaciones del regulador adaptable

$$q_0 = \frac{1-p}{\hat{b}}, \quad q_1 = -q_0 \hat{a}$$

A la vista de estas ecuaciones está claro, que cuanto mayor se elija p mayor será el esfuerzo de control (u). Luego no puede ponerse el polo todo lo cerca del cero que se quiera. Puede elegirse, por ejemplo como $p = 0.9a$, con lo que estamos especificando que la respuesta del sistema controlado sea más rápida que la del sistema original.

Puede observarse que las ecuaciones del controlador adaptable que se obtiene en este caso son muy simples, así como los parámetros a identificar que serían \hat{a} , \hat{b} y un término para evitar las componentes de continua. La ecuación del sistema para identificar sería

$$y_k = ay_{k-1} + bu_{k-1} + \text{Constante}$$

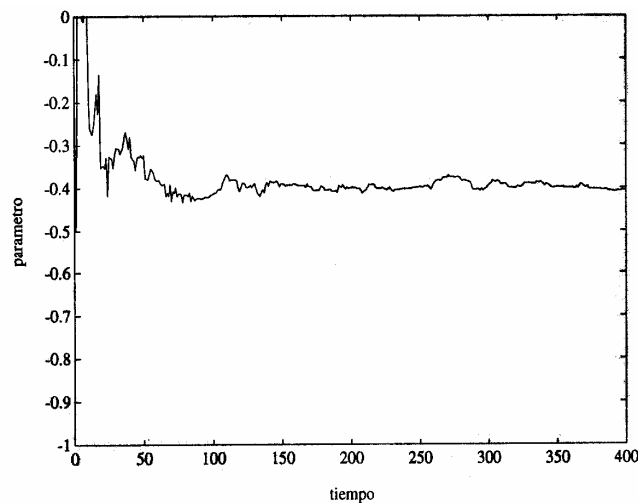


Figura 4.5. Parámetro estimado

4.9. Control Predictivo.

4.9.1. Introducción.

Aunque en el pasado podía considerarse que el único objetivo del control consistía en mantener una operación estable del proceso, actualmente las industrias se enfrentan a un mercado cambiante y difícil de predecir, lo que les obliga a operar sus procesos productivos en consonancia con la evolución del mercado para poder mantenerse competitivos y rentables.

La competencia en muchos sectores industriales así como el creciente interés social por los problemas medioambientales relacionados con los procesos de producción provoca la necesidad de disponer de técnicas fiables que permitan la operación del proceso con gran eficiencia y alto grado de flexibilidad.

Actualmente los sistemas de control en la industria de procesos deben satisfacer criterios económicos, asociados con el mantenimiento de las variables de proceso en sus referencias minimizando dinámicamente una función de coste de operación, criterios de seguridad y medioambientales, y de calidad en la producción, la cual debe satisfacer ciertas especificaciones sujetas a una demanda normalmente variable.

Por ello, se puede considerar que en la actualidad el objetivo de todo sistema de control consiste en actuar sobre las variables manipuladas de forma que puedan satisfacerse múltiples y cambiantes criterios de funcionamiento (económicos, de seguridad, medioambientales o de calidad) en presencia de cambios en las características del proceso.

El amplio abanico de metodologías actuales de control de procesos se enfrenta al cumplimiento de este objetivo. La diferencia entre las diversas técnicas radica básicamente en los compromisos hechos en la formulación matemática de los criterios de funcionamiento y en la elección de la manera de representar el proceso. La representación matemática de muchos de estos criterios se lleva a cabo en la forma de funciones objetivo dinámicas y de restricciones mientras que el proceso se representa como un modelo dinámico con incertidumbres asociadas. La importancia de las incertidumbres está siendo cada vez más reconocida y por tanto incluida explícitamente en la formulación de los controladores.

Las técnicas de Control Predictivo Basado en Modelo (Model Based Predictive Control, MPC) parecen constituir unas poderosas herramientas para afrontar estos retos. MPC, en su forma más general, acepta cualquier tipo de modelos, funciones objetivo o restricciones, siendo la metodología que actualmente puede reflejar más directamente los múltiples criterios de funcionamiento relevantes en la industria de procesos. Quizás sea ésta la principal razón del éxito de estas técnicas en numerosas aplicaciones de la industria de procesos, unida a que es la forma más general de formular el problema de control en el dominio del tiempo, de manera que puede resultar fácil de aceptar por el personal de la industria.

El Control Predictivo se desarrolló en base a dos líneas básicas. Por un lado, a finales de los años setenta surgieron diversos algoritmos que usaban explícitamente un modelo dinámico del proceso para predecir el efecto de las acciones de control futuras en la salida, las cuales eran determinadas minimizando el error predicho sujeto a restricciones de operación. La optimización se repetía en cada instante de muestreo con información actualizada del proceso. Estas formulaciones eran de naturaleza heurística y algorítmica e intentaban aprovechar el creciente potencial de los computadores digitales por aquella época.

Rápidamente el MPC adquirió gran popularidad en las industrias de procesos químicos principalmente debido a la simplicidad del algoritmo y al uso del modelo de respuesta impulsional o en escalón, que aunque posea muchos más parámetros que las formulaciones en el espacio de estados o función de transferencia suele ser preferido por ser intuitivo y necesitar menos información a priori para identificar. La mayoría de las aplicaciones fueron llevadas a cabo sobre sistemas multivariados incluyendo restricciones. Los algoritmos utilizados fueron principalmente el IDCOM (Identification-Command) y el DMC (Control con Matriz Dinámica, Dynamic Matrix Control).

Independientemente fue surgiendo otra línea de trabajo en torno a las ideas del control adaptable, desarrollando estrategias esencialmente para procesos monovariados formuladas con modelos entrada/salida. En este contexto se extendieron las ideas del Controlador de Mínima Varianza y se desarrolló el Control Predictivo Generalizado (Generalized Predictive Control GPC) que es uno de los métodos más populares en la actualidad.

¿Qué es el Control Predictivo?

El Control Predictivo (MBPC) no es una estrategia de control específica sino un conjunto de métodos de control desarrollados en torno a determinadas ideas comunes:

- Uso explícito de un modelo para predecir el comportamiento futuro del proceso
- Cálculo de la secuencia de control mediante la minimización de una determinada función objetivo
- Estrategia del horizonte móvil.

La aplicación de técnicas MBPC, y en general de todas las técnicas de control avanzado, se justifica plenamente cuando se integra dentro de una estructura más compleja donde el objetivo no es el control de una única variable⁴. En la Figura 4.6 se muestra un esquema con las diferentes áreas de conocimiento que pueden influir en el desarrollo de un controlador predictivo.

Las técnicas MBPC son técnicas discretas, esto es no actúan continuamente sino sólo en determinados instantes de tiempo. Esto es, dado un sistema a controlar se obtiene un modelo del mismo y se muestrea con un periodo de muestreo t_m , entonces el controlador predictivo actuará cada t_m unidades de tiempo.

También se han desarrollado técnicas de Control Predictivo que trabajan en el espacio continuo, pero desde el punto de vista de su aplicación en la industria de procesos no tiene la misma aplicación que las técnicas discretas.

Inicialmente las ideas que están detrás de los controladores predictivos pueden resultar un poco complejas, pero en las siguientes páginas y durante las clases se tratará de que estos conceptos queden lo suficientemente claros.

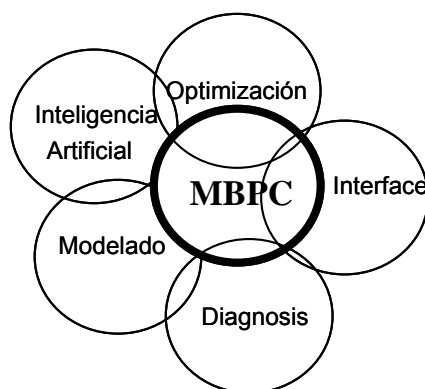


Figura 4.6. Ubicación del control predictivo dentro de diferentes áreas de conocimiento.

Ventajas y desventajas de los controladores predictivos

El concepto de Control Predictivo Basado en Modelos (CPBM o MBPC) fue introducido a finales de la década de los 70 en respuesta a demandas del mundo industrial.

Desde su aparición hasta el momento actual, las técnicas de Control Predictivo han experimentado una gran evolución y desarrollo siendo utilizadas tanto en el entorno industrial como en el mundo académico. Las razones que han llevado a su amplia difusión son varias, entre las que se pueden enumerar:

- Los conceptos fundamentales del Control Predictivo basado en modelos son fáciles de comprender.
- Son técnicas que pueden ser aplicadas a muchos y muy diferentes tipos de sistemas (SISO, MIMO, con perturbaciones, sin perturbaciones, dinámicas difíciles, ...).

⁴ Aunque también se ha demostrado que la aplicación de técnicas de Control Predictivo a procesos SISO mejora su rendimiento. En este caso se entra en un problema de compromiso entre: controlador más sencillo y peor comportamiento o controlador más complejo y mejor comportamiento.

- Su formulación en el dominio del tiempo hace que la inclusión de restricciones tanto en las variables de control como en las controladas se pueda realizar de forma directa.

El conjunto de métodos que se agrupan bajo el nombre de CPBM, presentan ventajas sobre otras técnicas de control [Camacho y Bordons, 1995]:

- Permiten resolver problemas de control con dinámica difícil (retardos, fase no mínima, sistemas inestables).
- Permiten solucionar de forma sencilla problemas de control multivariable con interacción entre los lazos.
- Realizan de forma inherente una compensación de los retardos (dead-time).
- Introducen de forma natural la compensación por adelanto (feedforward) para compensar las perturbaciones medidas.
- La inclusión de restricciones, tanto en las señales manipuladas como en las controladas, no plantea ningún problema desde el punto de vista conceptual, pueden incluirse de forma sistemática durante la fase de diseño del controlador.
- Debido al carácter predictivo de estos controladores, están especialmente indicados en aquellos problemas en los que se conoce de antemano la referencia (robótica y procesos por lotes).
- Es una metodología abierta: dentro del marco del Control Predictivo hay muchas formas de diseñar un controlador lo que ha dado lugar a la proliferación en la literatura de diferentes controladores predictivos, cada uno con sus propiedades, durante los últimos años.
- Los parámetros de diseño tienen una relación directa con las especificaciones de diseño, siendo fácil su sintonía. Por ello es relativamente sencillo establecer un compromiso entre el rendimiento dinámico y la robustez del sistema de control.

Sin embargo también presentan algunas desventajas:

- Pueden ser computacionalmente costosos porque la forma de obtener la secuencia de controles a aplicar es más compleja que en los controladores tradicionales. Sin embargo, gracias a la gran evolución del mundo de la informática durante los últimos años, los ordenadores son cada vez más potentes y esto lleva a que la complejidad de cálculo esté dejando de ser un inconveniente.
- Necesidad de un modelo del proceso a controlar. Este es el inconveniente más importante de las técnicas de Control Predictivo, ya que obliga a realizar una identificación o modelado previos. Además la bondad de las secuencias de control que obtengamos estarán relacionadas con la diferencia entre el sistema real y el modelo de la planta.

Evolución histórica

El concepto de Control Predictivo aparece simultáneamente en Estados Unidos [Cutler y Ramaker, 1980] y en Europa [Richalet *et al.*, 1978].

En 1978 los artículos de Richalet [Richalet *et al.* 1978] introdujeron el controlador MPHC (Model Predictive Heuristic Control), que más tarde sería conocido como MAC (Model Algorithmic Control). Este controlador utiliza un modelo de respuesta impulsional para dar la secuencia futura de controles. [Cutler y Ramaker, 1980] y [Prett y Gillette, 1979] desarrollaron el Dynamic Matrix Control (DMC) y lo aplicaron en la industria petroquímica. El controlador DMC utiliza un modelo de respuesta salto.

Algunas de las ideas básicas del Control Predictivo se remontan a principios de la década de los sesenta. Fueron [Zadeh y Whalen, 1962] los que describieron por primera vez la estrecha relación entre el problema de control óptimo de tiempo mínimo y la

programación lineal. [Propoi, 1963] propuso la estrategia del horizonte móvil que es una de las ideas centrales de todos los algoritmos de Control Predictivo. [Chang y Seborg (1983)] descubrieron la relación entre los trabajos de Propoi y el Control Predictivo basado en modelos.

La popularidad del CPBM fue en aumento desde finales de los setenta, sobre todo en la industria química. Durante la década de los 80, se desarrollaron numerosas aplicaciones para el mundo industrial [Mehra et al.; 1982]; [García y Morshedi, 1986]; [Matsko, 1985]; [Martin y Caldwell, 1986]; [Cutler y Hawkins, 1987].

De forma independiente, a mediados de los 80, apareció otra línea de trabajo en el campo del Control Predictivo dentro de grupos académicos provenientes del control adaptativo. Estos desarrollos estaban limitados, generalmente, al caso de sistemas SISO y no profundizaban en el tema de las restricciones sobre las variables del proceso. Todos estos controladores se caracterizan por solucionar el problema de control para un horizonte o ventana de coste finito y tienen un número pequeño de parámetros de diseño. Entre estos controladores cabe citar: Predictor-Based Self-Tuning Control [Peterka, 1984], el SCAP (Sistema de Control Adaptativo Predictivo de 1982 [Martín Sánchez y Rodellar, 1995]), el EHAC (Extended Horizon Adaptive Control, [Ydstie, 1984]), EPSAC (Extended Prediction Self Adaptive Control; [de Keyser y Van Cauwenberghe, 1985], el MUSMAR (Multistep Multivariable Adaptive Control; [Greco, Menga, Mosca y Zappa, 1984]), el controlador predictivo generalizado (GPC: Generalized Predictive Control; [Clarke, Mohtadi y Tuffs, 1987]) y el UPC (Unified Predictive Control; [Soerteboek, 1992]).

De entre todos los controladores predictivos que han sido desarrollados, el DMC, el GPC y el PFC (Predictive Functional Control; [Richalet, 1993]), son, posiblemente los que más atención han recibido, tanto por parte de la industria como de los entornos académicos.

Muchos de los controladores que han surgido en la década de los 90 (CRHPC: Constrained Receding Horizon Predictive Control, [Clarke y Scattolini, 1991]; SIORHC: Stabilizing I/O Receding Horizon Control, [Mosca, Lemos y Zhang, 1990]; SGPC: Stable Generalised Predictive Control, [Kouvaritakis, Rossiter y Chang, 1992]) han diseñado a partir del GPC para tratar de cubrir y mejorar aspectos que no estaban reflejados en su formulación original. Se ha realizado especial énfasis en los conceptos de estabilidad [Scokaert y Clarke, 1994a-b] y robustez [Campo y Morari, 1987]; [Allwright, 1994]; [Serrano, 1994].

Ya ha sido mencionado que las técnicas de Control Predictivo además de estar presentes en el mundo académico, han estado y están presentes en el mundo industrial. Esta presencia ha sido especialmente relevante en la industria petroquímica. El artículo de [García et al., 1989] presenta un estudio detallado de las aplicaciones durante la década de los ochenta en este tipo de industrias. Otras aplicaciones pueden encontrarse en los artículos de [Mehra et al., 1982], [García y Morshedi, 1984], [Matsko, 1985], [Martin y Caldwell, 1986], [Cutler y Hawkins, 1987]. Todas ellas referidas a la industria química. Muchas de estas aplicaciones son el resultado de la colaboración entre el mundo académico y el industrial.

Ya en la década de los 90, el abanico de procesos industriales donde se aplican técnicas de Control Predictivo aumenta y así se desarrollan aplicaciones en campos tan dispares como la anestesia clínica [Linkens y Mahfouf, 1994], el tratamiento de aguas [Evans y Harpin, 1994], planta de energía solar [Camacho y Berenguel, 1994], industria cementera [Martín-Sánchez y Rodellar, 1995], control del blanqueador de una papelera [Dumont, Martín-Sánchez y Zervos, 1989], etc.

Tendencias actuales

Desde la aparición del CPBM a finales de los años setenta, la relación entre el mundo industrial y el académico ha estado siempre presente, produciéndose un intercambio de opiniones y conocimientos que ha llevado a esta técnica de control avanzado hasta el punto en el que está actualmente.

A pesar de que desde sus comienzos las técnicas CPBM se aplicaron en el entorno industrial, ha sido durante los últimos años cuando se ha producido uno de los hechos más importante para este tipo de metodología: se ha entrado en la fase de **explotación comercial**. Es decir, se ha producido la comercialización por parte de diferentes compañías, de productos que incorporan técnicas CPBM, tanto a nivel de software como de hardware. Esto supone un gran avance en la introducción de las técnicas de control avanzado en el entorno industrial. En este momento, en el mercado ya hay una oferta de productos CPBM que hacen que el desarrollo de aplicaciones industriales no sean casos puntuales.

Entre las empresas que comercializan controladores predictivos, bien como parte de un DCS (Distributed Control System) o como un producto independiente, están:

- Honeywell ha incorporado su RMPC™ (Robust Multivariable Predictive Control) en su sistema de control TDC 3000.
- DMC Corporation, trabaja con controladores DMC [Cutler, Ramaker, 1980].
- Profimatics ha desarrollado el sistema PC/PCT.
- ADERSA, los controladores que está implantando en el mundo industrial son dos, el PFC y el HIECON.
- SETPOINT utiliza el controlador IDCOM-M (es una versión multiobjetivo con restricciones del controlador IDCOM).
- Bailey, utiliza un controlador IDCOM-B (versión del controlador IDCOM-M para el sistema INFI90 DCS).
- Shell: DMC y SMOC (Shell Multivariable Optimizing Controls).
- INITEC con el sistema HITO.
- SCAP Europa [Martín Sánchez y Rodellar, 1995], con el controlador SCAP.

Por ello el desarrollo de formulaciones de MBPC que tengan en cuenta los problemas asociados a su implementación y uso industrial es un tema de interés.

4.9.2. Elementos del MBPC

En las técnicas de **Control Predictivo**, las señales de control se calculan utilizando predicciones de las salidas del proceso a controlar obtenidas a partir de un modelo del proceso. La Figura 4.7 es un esquema de la estructura básica de los controladores predictivos y resume gráficamente la estrategia de los controladores predictivos.

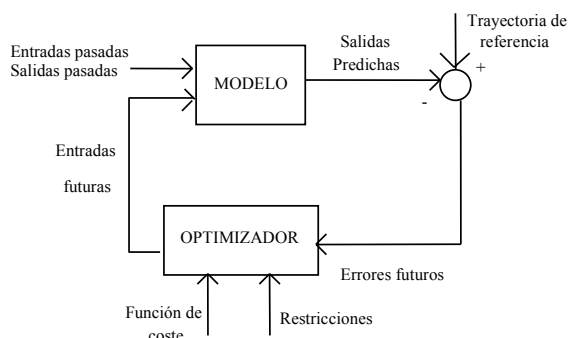


Figura 4.7. Estructura básica de un controlador CPBM

Las características que hacen que se agrupen bajo el nombre de controladores predictivos y que explican lo presentado en la Figura 4.7 y la Figura 4.8 son:

- Uso explícito de un modelo para predecir el comportamiento futuro del proceso a controlar, basándose en los valores pasados de las entradas y salidas del proceso y una secuencia futura de control (Figura 4.8).

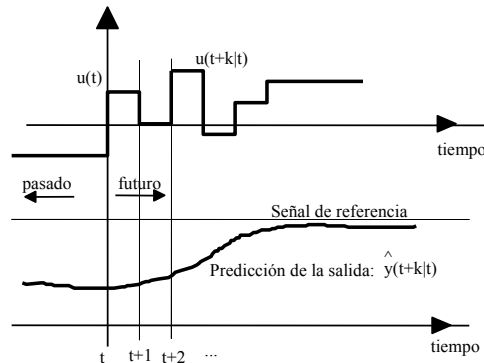


Figura 4.8. Estrategia del CPBM

- La predicción del comportamiento del modelo se hace durante un **horizonte** o **ventana de coste**. El horizonte de coste puede definirse infinito o finito. Se suele denotar por $[N_1, N_2]$.
- Estructuración de la ley de control, que consiste en imponer alguna relación entre los cambios futuros de la señal de control (Δu).
- Se define una trayectoria de referencia $w(t)$ que describe cómo se quiere conducir la salida o salidas del proceso desde el valor actual hasta el valor de referencia durante todo el horizonte de predicción. La Figura 4.9 muestra un ejemplo de trayectoria de referencia obtenida a partir de aplicar un filtro de primer orden a la señal de consigna.

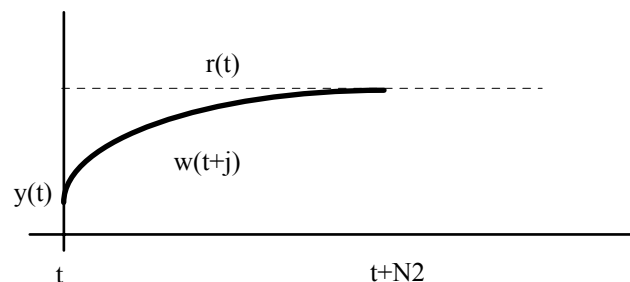


Figura 4.9. Trayectoria de referencia de primer orden

- Se define una función de coste u objetivo para tener una indicación cuantitativa del rendimiento predicho del problema de control en la ventana de coste (Figura 4.10). En general, esta función se construye como una combinación lineal de una norma del error de seguimiento y de una norma de la señal de control.

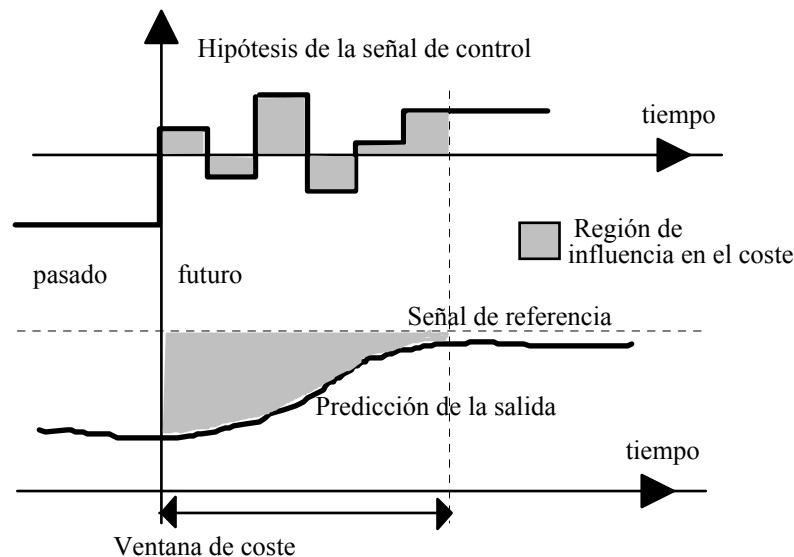


Figura 4.10. Influencia de la ventana en el coste

- La secuencia de controles futuros (Figura 4.10) $u(t+k|t)$, $k=0, N_2-1$, se calcula mediante la minimización de la función objetivo que depende de los errores de predicción (diferencia entre la trayectoria de referencia y la salida predicha). Esta optimización puede incluir restricciones en los valores futuros de las variables del proceso, por ejemplo, la salida, la señal de control o la variación de la señal de control.
- Sólo se aplica el primero de los elementos de la secuencia de controles futuros. En cada invocación del controlador los cálculos se repiten. Es lo que se denomina *estrategia del horizonte móvil* (Figura 4.11).

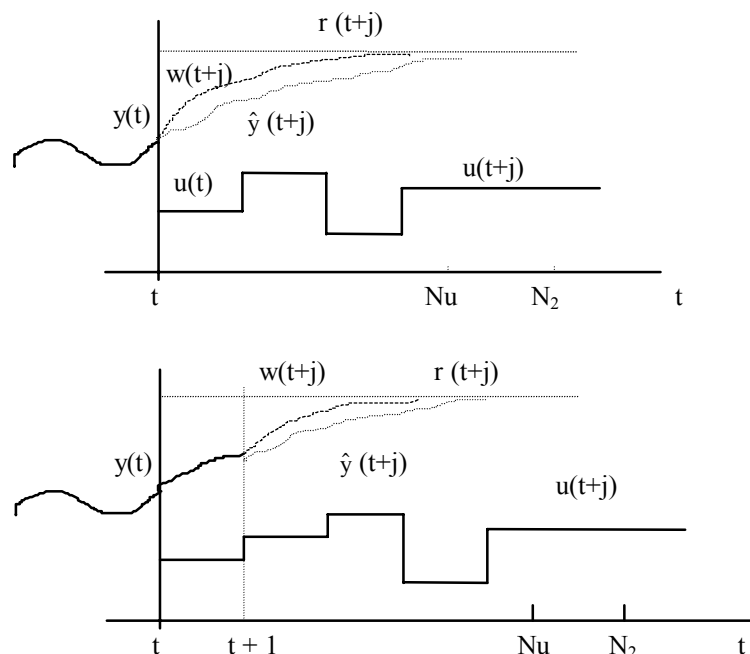


Figura 4.11. Estrategia del horizonte móvil

Para describir la relación entre las salidas y las entradas del sistema puede utilizarse cualquier tipo de modelo, desde el modelo de respuesta impulsional, salto, función de

transferencia, espacio de estados [Ordys y Clarke, 1994] hasta el uso de redes neuronales, modelos fuzzy, de conocimiento,

La complejidad numérica del problema de control depende en buena medida del tipo de modelo, del número de variables de control, el tamaño de los horizontes y la presencia o no de restricciones. Cuando se tienen en cuenta restricciones los algoritmos de optimización que se precisa utilizar son mucho más costosos desde el punto de vista computacional.

En los siguientes subapartados se describen con más profundidad cada uno de los elementos de los controladores predictivos.

4.9.2.1. Modelos de predicción

Un modelo de un sistema real se puede dividir en dos submodelos aditivos (Figura 4.12):

- Un modelo del proceso, que relaciona la salida de la planta con todas las entradas medibles. Si hay sólo una entrada medible, ella es la variable manipulada. Si hay más de una entrada al proceso, una o más serán las variables manipuladas y las otras serán perturbaciones medibles. La estrategia MBPC compensará automáticamente estas perturbaciones mediante una acción feedforward.
- Un modelo de perturbaciones, que intenta describir la parte de la salida medible de la planta que no se explica mediante el modelo del proceso. Por ejemplo, los efectos de las perturbaciones del medio ambiente, el ruido de medida, etc. así como los errores de modelado.

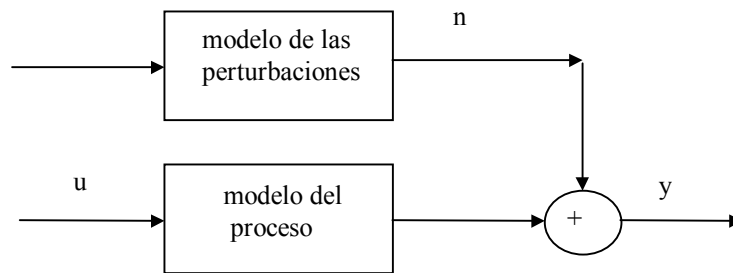


Figura 4.12. Estructura de un modelo interno típico.

Cualquier tipo de modelo a partir del cual se puedan calcular las predicciones se puede utilizar para la estrategia del Control Predictivo, pero los más utilizados para el modelo del proceso son:

Modelo respuesta impulsional. (Utilizado en los métodos: IDCOM, ...) La salida del proceso utilizando este modelo es:

$$y(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} h_j u(t-j) \approx \sum_{j=1}^n h_j u(t-j) = H(q^{-1})u(t)$$

donde h_j son las muestras de la respuesta impulsional unidad y q^{-1} es el operador retardo unidad, con $q^{-1} u(t) = u(t-1)$, y $H(q^{-1}) = h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \dots + h_n q^{-n}$. Hay un truncamiento después de un punto n , suponiendo que el sistema es estable. La mejor predicción usando este modelo es:

$$\hat{y}(t+k/t) = \sum_{j=1}^n h_j u(t+k-j/t) = H(q^{-1})u(t+k/t)$$

Notar que $u(t+k/t) = u(t+k)$ para $k < 0$. La ventaja de este modelo FIR: (respuesta impulsional finita) es que no requiere información a priori, y como no hay términos

recursivos la predicción es simple y poco sensible a errores. La desventaja es que no se puede aplicar directamente a sistemas inestables, y además contiene muchos parámetros (n es del orden de 30 ó 50)

Modelo respuesta salto. (Utilizado en el método DMC). Suponiendo que la respuesta salto se ha asentado después de n periodos de muestreo:

$$y(t) = y_0 + \sum_{j=1}^n g_j \Delta u(t-j) = y_0 + G(q^{-1})(1-q^{-1})u(t)$$

donde g_j son las muestras de la respuesta al salto unidad y $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$, y_0 es el efecto acumulativo de los incrementos de control después de n muestras, el cual se supone que se ha asentado a un valor constante. La predicción de la salida del proceso $\hat{y}(t+k/t)$ se puede calcular como:

$$\hat{y}(t+k/t) = \sum_{j=1}^n g_j \Delta u(t+k-j/t) = G(q^{-1})(1-q^{-1})u(t+k/t)$$

Este modelo tiene las mismas ventajas e inconvenientes que el modelo respuesta impulsional.

Modelo de función de transferencia. (Utilizado por EPSAC, GPC, MUSMAR). El proceso se describe por la ecuación en diferencias:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m)$$

o

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t)$$

La predicción de la salida del proceso es:

$$\hat{y}(t+k/t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t+k/t)$$

Las ventajas de usar un modelo de función de transferencia es que puede usarse para procesos inestables o poco amortiguados, además el número de parámetros es mínimo. La desventaja es que es necesario conocer a priori los órdenes de los polinomios A y B, es decir, n y m. La naturaleza recursiva hace que la predicción sea más difícil y mas sensible a los ruidos.

Modelo en espacio de estados. (PFC). El proceso se describe por las ecuaciones:

$$\underline{x}(t) = A\underline{x}(t-1) + B\underline{u}(t-1)$$

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t)$$

donde $\underline{x}(\cdot)$ es el vector de estados del proceso, A: es la matriz del sistema, B: es la matriz de entrada y C: es la matriz de salida. La predicción de la salida del proceso puede calcularse como:

$$\hat{y}(t+k/t) = C\underline{x}(t+k/t) = C \left[A^k \underline{x}(t) + \sum_{j=1}^k A^{j-1} B \underline{u}(t+k-j/t) \right]$$

El modelo en espacio de estados es adecuado para analizar la estructura interna del proceso, y el algoritmo basado en este modelo es muy fácil de extender al caso multivariable. Como desventaja se tiene que los cálculos son más complejos y si los estados no son directamente medibles se tiene que usar un observador.

Se puede utilizar cualquier otro tipo de modelos del proceso, por ejemplo modelos no lineales que son lineales en la señal de control futura [García et al. 1989], modelos basados en redes neuronales [Zamarreño y Vega, 1999], etc.

Las propiedades de regulación de los métodos MBPC dependen mucho del modelo de perturbaciones. Si dicho modelo representa un ruido coloreado de media nula con un espectro dado, entonces el controlador MBPC basado en este modelo tendrá un buen comportamiento eliminando perturbaciones de ruido, pero no será capaz de asegurar un control sin error estacionario en presencia de perturbaciones tipo salto. Si se necesita un control sin error estacionario en presencia de perturbaciones tipo salto, el modelo de perturbaciones debe representar esta clase de perturbaciones y la estrategia MBPC incluirá automáticamente los elementos de compensación (en este caso un integrador) en el controlador. La elección de un modelo apropiado de perturbaciones es muy importante. Como modelo de perturbaciones los modelos más usados son:

Perturbaciones constantes. Debido a que en la mayoría de las aplicaciones prácticas se espera un control sin error estacionario en presencia de perturbaciones de media cero, muchos métodos de MBPC incluyen este modelo de perturbaciones simple y básico:

$$n(t) = d \quad (4.151)$$

o

$$n(t) = \frac{\xi(t)}{1 - q^{-1}} \quad (4.152)$$

donde d es una constante desconocida y $\xi(t)$ puede interpretarse como una serie de impulsos con amplitud desconocida llegando en instantes de tiempo aleatorios. El modelo (4.152) describe perturbaciones salto aleatorias. La señal $\xi(t)$ puede también interpretarse como un ruido blanco de media cero. La mejor predicción de las perturbaciones basadas en este modelo es:

$$n(t + k / t) = n(t)$$

Perturbaciones ARMA o ARIMA. Un modelo de perturbaciones general es:

$$n(t) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} \xi(t) \quad (4.153)$$

Encontrando los polinomios $E_k(q^{-1})$ (de orden $k-1$) y $F_k(q^{-1})$ de la ecuación diofántica:

$$C(q^{-1}) = E_k(q^{-1})D(q^{-1}) + q^{-k}F_k(q^{-1})$$

nos da

$$n(t) = E_k(q^{-1})\xi(k) + q^{-1} \frac{F_k(q^{-1})}{D(q^{-1})} \xi(t)$$

La predicción de la perturbación es:

$$n(t + k / t) = \frac{F_k(q^{-1})}{C(q^{-1})} n(t)$$

El modelo (4.153) se llama modelo ARMA (Auto-Regressive Moving-Average). Cuando el polinomio $D(q^{-1})$ contiene explícitamente el factor $\Delta = (1 - q^{-1})$, que se necesita para obtener un control sin offset, se llama modelo ARIMA (Auto-Regressiva Integrated Moving-Average). Este modelo es la base de la predicción de perturbaciones usada en los paquetes MBPC de EPSAC [de Keyser y Van Cauwenberghe, 1985] y GPC [Clarke, Mohtadi y Tuffs, 1987], y la técnica UPC [Soeterboek, 1992]. Algunas ideas importantes acerca de la importancia del polinomio $C(q^{-1})$ para mejorar la robustez de la estrategia MBPC está en [Clarke y Mohtadi, 1989].

El último paso para calcular el modelo del proceso total es elegir un modelo del proceso y un modelo de perturbaciones de los que se presentan aquí. Por ejemplo se puede elegir

el modelo respuesta impulsional con el modelo de perturbaciones constante: usado en los paquetes IDCOM Y PCA:

$$y(t) = H(q^{-1})u(t) + n(t)$$

O el modelo respuesta a salto con el modelo de perturbaciones constantes que utiliza el método DMC:

$$y(t) = G(q^{-1})\Delta u(t) + n(t)$$

O combinar el modelo del proceso en función de transferencia con un modelo específico de perturbaciones ARIMA, utilizado por los paquetes EPSAC y GPC.

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + n(t)$$

con

$$n(t) = \frac{1}{A(q^{-1})(1-q^{-1})}\xi(t)$$

4.9.2.2. Trayectoria de referencia

En los métodos de MBPC se supone que la salida del proceso futura deseada es conocida: $\{r(t+k/t), k=1, \dots, N_2\}$. Los sistemas robóticos, de servo control y procesos batch satisfacen esta demanda. En estos casos se puede esperar un buen comportamiento del control, debido a la estrategia de predicción de MBPC, el controlador tomará acciones adelantadas (antes de que la referencia cambie) para compensar los retardos del proceso. Si la referencia no está pre-especificada en el futuro se puede tomar constante, es decir: $r(t+k/t) = r(t)$.

La trayectoria de referencia $w(t+k/t)$ se inicia en el valor actual de la salida de la planta: $w(t/t) = y(t)$ y se calcula sobre un horizonte de predicción N_2 , tal que guíe a la salida del proceso actual a la salida del proceso deseada en el futuro según un camino dinámico determinado. La trayectoria de referencia más usada es una de primer orden:

$$w(t+k/t) = \alpha w(t+k-1/t) + (1-\alpha)r(t+k/t), \quad k=1, \dots, N_2$$

Una estrategia ligeramente diferente, útil para cambios de referencia se usa en PFC:

$$r(t+k/t) - w(t+k/t) = \alpha^k [r(t) - w(t)]$$

En ambos casos α ($0 \leq \alpha < 1$) es un parámetro de sintonía que especifica la dinámica de lazo cerrado deseada ($\alpha \rightarrow 0$: control muy rápido; si $\alpha \rightarrow 1$: control lento). En realidad es la distancia entre $w(t+k/t)$ e $\hat{y}(t+k/t)$ lo que debe ser minimizado por el controlador MBPC.

Hay otra forma de especificar la dinámica de lazo cerrado (EPSAC y GPC). Un señal de predicción filtrada se puede calcular como:

$$P(q^{-1})\hat{y}(t+k/t) = p_0\hat{y}(t+k/t) + p_1\hat{y}(t+k-1/t) + \dots + p_{n_p}\hat{y}(t+k-n_p/t)$$

(con $P(1) = p_0 + p_1 + \dots + p_{n_p} = 1$ para obtener un seguimiento asintótico perfecto de la referencia). Si se usa la señal de error :

$$r(t+k/t) - P(q^{-1})\hat{y}(t+k/t)$$

en la función objetivo, esto tendrá un efecto similar que usar la trayectoria de referencia $w(t+k/t)$ con dinámica definida por el sistema $1/P(q^{-1})$ y que se inicializa automáticamente en el valor actual de la salida del proceso.

4.9.2.3. Cálculo de la señal de control

Horizontes

En los controladores predictivos se trabaja con varios horizontes que se describen a continuación. También se dan algunos apuntes de cómo seleccionar estos horizontes.

Horizontes de coste

Se distinguen dos horizontes de coste:

- Mínimo horizonte de coste, se denota por N_1 .
- Máximo horizonte de coste, se denota por N_2 .

El **horizonte de coste** se denota por $[N_1, N_2]$. En este intervalo se trata de que el error entre el valor de la variable controlada y su referencia interna (ver Trayectoria de referencia en la página 141) sea lo más pequeño posible.

La predicción del comportamiento de las variables controladas se realiza en el intervalo $[1, N_2]$.

El horizonte de coste se refiere a las variables controladas del sistema. Cuando se trabaja con sistemas multivariables suele ser habitual disponer de un horizonte diferente para cada una de las variables controladas.

El mínimo horizonte de coste se suele escoger mayor o igual que el dead-time (retraso) del sistema y el máximo horizonte de coste se escoge de tal forma que esté relacionado con el tiempo de respuesta del sistema.

Horizonte de aplicación de las restricciones

Cuando se trabaja con técnicas de Control Predictivo que utilizan restricciones es necesario definir el **horizonte de aplicación de las restricciones**, que se denota por $[N_3, N_4]$ y esta contenido o es igual que $[1, N_2]$. Este horizonte también se refiere a las variables controladas.

Estructuración de la ley de control

La predicción de la salida $\{\hat{y}(t+k/t), k=1, \dots, N_2\}$ depende de la señal de control futura: $\{u(t+k/t), k=0, \dots, N_2-1\}$. Conceptualmente se puede considerar como la suma de dos efectos:

$$\hat{y}(t+k/t) = y_f(t+k/t) + y_c(t+k/t), \quad k=1, \dots, N_2 \quad (4.154)$$

donde

$y_f(t+k/t)$ es la respuesta libre suponiendo que no hay acciones de control futuro.

$y_c(t+k/t)$ es la parte de la salida del proceso controlada debido a la señal de control futura (que no ha sido determinada)

La predicción de la salida generalmente depende de $\Delta u(t+k/t)$ más que de $u(t+k/t)$. Esto es esencialmente un resultado de la elección del modelo de perturbaciones, que en todos los casos se supone que contiene valores medios distintos de cero. En la práctica esto es importante porque generalmente se quiere un control que no tenga errores estacionarios en presencia de perturbaciones constantes. Se define que no hay acciones de control futuras cuando $\{\Delta u(t+k/t) = 0, k=0, \dots, N_2-1\}$.

La respuesta libre $y_f(t+k/t)$ puede calcularse de forma sencilla poniendo $\Delta u(t+k/t) = 0$ para $k \geq 0$ en la ecuación de predicción apropiada. La respuesta libre dependerá de las

señales de control pasadas, las cuales son conocidas al tiempo t : $\Delta u(t+k/t) = \Delta u(t+k) = u(t+k) - u(t+k-1)$ para $k < 0$.

La parte controlada es:

$$y_c(t+k/t) = g_k u(t/t) + g_{k-1} u(t+1/t) + \dots + g_1 u(t+k-1/t) \quad (4.155)$$

donde los parámetros g_j son las muestras de la respuesta salto unidad:

$$G(q^{-1}) = g_1 q^{-1} + g_2 q^{-2} + \dots$$

Las relaciones entre la respuesta salto unidad $G(q^{-1})$, la respuesta impulsional $H(q^{-1})$ y la respuesta del sistema en función de transferencia $B(q^{-1}) / A(q^{-1})$ son:

$$G(q^{-1}) = \frac{H(q^{-1})}{(1-q^{-1})} \quad \text{y} \quad G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})(1-q^{-1})}$$

Estas relaciones nos permiten calcular los coeficientes de la respuesta salto cuando se usa un modelo respuesta impulsional o función de transferencia.

La parte controlada $y_c(t+k/t)$ es el efecto de los incrementos futuros de la señal de control $\{\Delta u(t/t), \Delta u(t+1/t), \dots, \Delta u(t+k-1/t)\}$. Cada incremento representa un salto aplicado a la entrada del proceso a los tiempos $t, t+1, t+2, \dots, t+k-1$. La contribución a la salida del proceso de un salto en la entrada con magnitud $\Delta u(t/t)$ aplicado al tiempo t , es $g_1 \Delta u(t/t)$ al tiempo $t+1$, $g_2 \Delta u(t/t)$ al tiempo $t+2$, ..., $g_k \Delta u(t/t)$ al tiempo $t+k$. La contribución a la salida del proceso de la entrada salto con magnitud $\Delta u(t+1/t)$ aplicada al tiempo $t+1$, es $g_1 \Delta u(t+1/t)$ al tiempo $t+2$, $g_2 \Delta u(t+1/t)$ al tiempo $t+3$, ..., $g_{k-1} \Delta u(t+1/t)$ al tiempo $t+k$. Repitiendo este razonamiento para todas las otras entradas salto, y aplicando el principio de superposición se obtiene la relación (4.155).

Se define el vector de los errores futuros de control como:

$$\underline{E} = [e(t+1/t) \ e(t+2/t) \ \dots e(t+N_2/t)]^T \quad (4.156)$$

donde $e(t+k/t) = w(t+k/t) - \hat{y}(t+k/t)$, y aplicando las ecuaciones (4.154) y (4.155) obtenemos:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 - \underline{G}\underline{U} \quad (4.157)$$

con:

$$\underline{E}_0 = [w(t+1/t) - y_f(t+1/t) \ \dots \ w(t+N_2/t) - y_f(t+N_2/t)]^T$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{N_2} & g_{N_2-1} & \dots & g_1 \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

$$\underline{U} = [\Delta u(t/t) \ \Delta u(t+1/t) \ \dots \ \Delta u(t+N_2-1/t)]^T$$

Cualquiera que sea el criterio usado para minimizar los errores \underline{E} , siempre habrá una función de las N_2 variables independientes en \underline{U} . Como el horizonte de predicción N_2 , típicamente es del orden de 10 a 30 periodos de muestreo, está claro que resolver este problema de optimización para la mejor \underline{U} requiere un considerable número de cálculos.

Esta es una de las razones para poner alguna estructuración en el escenario de control postulado \underline{U} . Estructuración significa reducir el número de grados de libertad, especificando a priori alguna relación entre las señales de control futuro, es decir, los elementos de \underline{U} .

Hay otra razón, más importante para introducir esta estructuración. Se ha encontrado por muchos autores que una ley de control estructurada tiene buenos efectos sobre la robustez y sobre el comportamiento general del sistema de control. Si todas las variables manipuladas futuras se dejan libres (no estructuradas), puede resultar unas entradas de control de alta frecuencia que generalmente no son deseadas en los sistemas de control reales, y que no se usan en el comportamiento del control debido a las características de pasa bajos de la mayoría de los sistemas físicos. Este fenómeno ocurre especialmente en el caso de inexactitud del modelo. En el peor caso puede ocurrir inestabilidades en el lazo de control. Un ejemplo clásico es el control de procesos de fase no mínima.

Una forma de resolver este problema es añadir penalizaciones sobre los incrementos de las variables de control en la función objetivo. Esto introduce nuevos parámetros de diseño (los coeficientes de peso) que no tienen un significado físico claro: son parámetros de sintonía en línea más que parámetros de diseño de especificaciones. Una estructuración apropiada de la ley de control futura puede a menudo eliminar la necesidad de la introducción de estos coeficientes de peso.

La estructuración de la ley de control añade un nuevo grado de libertad a la cantidad de herramientas de MBPC existentes. Las técnicas más utilizadas son:

1. **Horizonte de control.** (Usado en el DMC, EPSAC, GPC). Si la referencia es constante suponemos que se necesita una entrada de control asintóticamente constante. Entonces, es razonable especificar un horizonte de control N_u (donde $N_u \leq N_2$) después del cual la señal de control permanece constante: $\Delta u(t+k/t) = 0$ para $k \geq N_u$. Esto nos da un vector de control de dimensión N_u en vez de N_2 :

$$\underline{U} = [\Delta u(t/t) \ \Delta u(t+1/t) \ \dots \ \Delta u(t+N_u-1/t)]^T$$

Notar que la entrada de control real $u(t+k)$ no permanecerá constante, debido a la estrategia de horizonte móvil del MBPC. Desde un punto de vista computacional esta estrategia omite las últimas $(N_2 - N_u)$ columnas de la matriz G (4.158). Esto reduce la dimensión, ya que N_u es generalmente mucho menor que N_2 . Valores típicos de $N_2 = 10 \dots 30$ y para $N_u = 1 \dots 3$.

Un caso límite de esta estrategia es cuando $N_u=1$ o suponer que las señal de control futura permanece constante desde el instante actual. Sólo se tiene que calcular $\Delta u(t/t)$ y nos da un problema escalar. Muchos estudios en simulación y aplicaciones experimentales han mostrado que la mayoría de los procesos con buen comportamiento con esta estrategia han dado excelentes resultados, incluso en el caso de referencias variables. Más información en los efectos del horizonte de control N_u se pueden encontrar en [Clarke and Mohtadi, 1989].

2. **Bloques.** En esta estrategia el horizonte de predicción N_2 se divide en unos pocos bloques y la entrada de control se mantiene constante en cada bloque. Esto corresponde a eliminar columnas específicas de la matriz G , lo cual de nuevo reduce la complejidad computacional. La forma de elegir los bloques es una cuestión abierta [Reid et al., 1981]; [Mehra et al., 1982].
3. **Funciones base.** [Richalet, 1993] propusieron estructurar la entrada de control futuro como una combinación lineal de funciones base pre-especificadas:

$$u(t+k/t) = \sum_{i=1}^{n_B} \mu_i(t) B_i(t) \quad k = 0, \dots, N_2 - 1$$

La selección de las funciones base B_i depende de la naturaleza del proceso (tipo 0, tipo 1 etc.) y de la naturaleza de la referencia variable en el tiempo. Una elección específica es seleccionar funciones base polinómicas:

$$B_0(k) = 1, \ B_1(k) = k, \ B_2(k) = k^2, \ \dots$$

Los únicos coeficientes desconocidos que deben ser determinados por el algoritmo de control son n_B y los coeficientes μ .

Estos métodos de estructuración de la ley de control no son únicos, puede haber otras políticas, el número sólo está limitado por la creatividad del usuario.

Función de coste

La distancia entre la trayectoria de referencia y la predicción de la salida del proceso puede minimizarse con la siguiente función objetivo:

$$\min_{\underline{U}} \sum_{k=N_1}^{N_2} [w(t+k/t) - \hat{y}(t+k/t)]^2 \quad (4.159)$$

El parámetro N_1 es un parámetro de diseño que determina junto con N_2 el horizonte de coincidencia, es decir, se quiere que la predicción de la salida del proceso siga a la trayectoria de referencia en el intervalo de tiempo $\{t+N_1 \dots t+N_2\}$ donde t es el momento actual.

El efecto de N_1 es claro, si cogemos un N_1 grande, no estamos interesados en los errores de control en el futuro cercano, esto generalmente da un control más suave. En el caso de que un proceso tenga un tiempo muerto, no tiene sentido elegir N_1 menor que dicho tiempo, porque debido a las restricciones físicas, somos incapaces de mover la salida del proceso en el futuro cercano. Si el proceso es de fase no mínima, el parámetro de diseño N_1 permite saltar sobre la repuesta inversa inicial. [Clarke, Mohtadi y Tuffs, 1987].

Otra función objetivo es:

$$\min_{\underline{U}} \sum_{k=1}^{N_2} \alpha_k [w(t+k/t) - \hat{y}(t+k/t)]^2 \quad (4.160)$$

El vector de coeficientes de peso $\underline{\alpha} = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N_2}]^T$ introduce varias alternativas:

- Seleccionando $\underline{\alpha} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ tenemos un horizonte de coincidencia como en la (4.159).
- Seleccionando un vector de pesos con sólo algunos elementos distintos de cero: $\underline{\alpha} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 1]^T$ da un concepto de puntos de coincidencia.
- Seleccionando $\alpha_k = \lambda^{N_2-k}$ tenemos que $\underline{\alpha} = [\dots \lambda^3 \ \lambda^2 \ \lambda \ 1]^T$ que corresponde a un peso exponencial sobre el horizonte de predicción:
- $0 < \lambda < 1$: el error de control en el futuro lejano es más importante que en futuro cercano. Esto da normalmente un control más suave, un esfuerzo de control menor y un sistema de control robusto
- > 1 : el error de control en el futuro cercano se considera de mucha importancia, dando un control más agresivo con más esfuerzos de control.

Una versión generalizada de la función objetivo, incluyendo penalizaciones en los incrementos de control es:

$$\min_{\underline{U}} \sum_{k=1}^{N_2} \alpha_k [w(t+k/t) - \hat{y}(t+k/t)]^2 + \sum_{k=0}^{Nu-1} \beta_k \Delta u^2(t+k/t) \quad (4.161)$$

Los coeficientes de peso $\{\beta_k, k=0, \dots, Nu-1\}$ pueden usarse para mejorar la robustez y la estabilidad numérica. Tienen que considerarse como parámetros de sintonía en línea más que como parámetros de especificación, por tanto es difícil asignar a priori los mejores valores para β_k . Esto es una desventaja. Pero con una estructuración adecuada de la ley de control se pueden tomar $\beta_k = 0$ para todo k . Otro compromiso práctico es hacer todos los β_k iguales unos a otros $\beta_k = \beta$ para todo k , dejando un único parámetro

de sintonía. La función objetivo (4.161) se ha usado en el método EPSAC, el método GPC usa una función objetivo muy parecida.

Una ventaja de usar los criterios (4.159), (4.160) y (4.161) es que la solución óptima para \underline{U} se puede obtener analíticamente. Como ejemplo, si cogemos la función objetivo (4.159) con $N_1 = 1$. Con la notación vectorial de (4.156) y (4.157), la función objetivo puede escribirse como

$$\min_{\underline{U}} \underline{E}^T \underline{E} = \min_{\underline{U}} [\underline{E}_o - G\underline{U}]^T [\underline{E}_o - G\underline{U}]$$

La solución a este problema de mínimos cuadrados es:

$$\underline{U} = [G^T G]^{-1} G^T \underline{E}_o$$

Por supuesto, una solución analítica es agradable pero no es un pre-requisito imprescindible hoy en día, con el uso de los computadores. Se pueden utilizar otras funciones objetivo, por ejemplo funciones lineales etc., además normalmente se especifican restricciones tanto en las variables manipuladas como en las variables controladas.

Restricciones

El tema de las restricciones en las técnicas MBPC puede considerarse de dos formas diferentes. Por un lado puede referirse a los diferentes tipos de restricciones y cómo introducirlas en los controladores predictivos, y por otro a las técnicas que se aplican a las restricciones cuando no es posible obtener una secuencia futura de señales de control, para relajarlas y poder obtener unos controles que verifiquen el nuevo conjunto de restricciones. Este último enfoque suele denominarse el **problema de la no factibilidad** del Control Predictivo.

A. Tipos de restricciones

En [Tsang y Clarke, 1988]; [Camacho, 1993]; [Oliveira y Biegler, 1994]; [Abu el Ata-Doss, Fiani y Richalet, 1991]; [Kuznetsov y Clarke, 1994]; [Prett y García, 1988], se introducen diferentes tipos de restricciones que se pueden aplicar a las variables manipuladas y a las variables de control:

- Restricciones en la señal de control, su velocidad y aceleración:

$$u_{\min} \leq u(t+j) \leq u_{\max}, \quad j = 0, N_u - 1$$

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u(t+j) = u(t+j) - u(t-1+j) \leq \Delta u_{\max}, \quad j = 0, N_u - 1$$

$$\Delta^2 u_{\min} \leq \Delta^2 u(t+j) = \Delta u(t+j) - \Delta u(t-1+j) \leq \Delta^2 u_{\max}, \quad j = 0, N_u - 1$$

donde N_u es el horizonte de control de la variable.

- Restricciones en la señal controlada, su velocidad y aceleración:

$$y_{\min} \leq y(t+j) \leq y_{\max}, \quad j = N_3, \dots, N_4$$

$$\Delta y_{\min} \leq \Delta y(t+j) \leq \Delta y_{\max}, \quad j = N_3, \dots, N_4$$

$$\Delta^2 y_{\min} \leq \Delta^2 y(t+j) \leq \Delta^2 y_{\max}, \quad j = N_3, \dots, N_4$$

donde $[N_3, N_4]$ es el horizonte de aplicación de las restricciones.

- Restricciones en el sobrepico de la señal controlada:

$$y(t+j) \leq w(t), \quad j = N_{3_s}, \dots, N_{4_s}$$

$$w(t) \leq y(t+j), \quad j = N_{3_s}, \dots, N_{4_s}$$

donde:

$[N_{3_s}, N_{4_s}]$ es el intervalo en el que se quiere disminuir eliminar el efecto del sobrepico.

$w(t)$ es la trayectoria de referencia.

La primera de las inecuaciones corresponde al caso en el que la consigna de la señal es mayor que la señal (salto hacia arriba) y la segunda de las inecuaciones al caso en el que la consigna es menor que la señal (salto hacia abajo). Estas restricciones sólo se introducen cuando se produce un cambio en la señal de consigna.

- Restricciones para lograr un comportamiento monótonico. Se trata de evitar que la señal controlada oscile. Se introducen estas restricciones cada vez que se produce un cambio de consigna que se mantiene constante durante el suficiente tiempo:

$$y(t+j) \leq y(t+j+1), \quad y(t) \leq w(t)$$

$$y(t+j) \geq y(t+j+1), \quad y(t) \geq w(t)$$

- Restricciones para evitar el comportamiento de fase no mínima:

$$y(t+j) \geq y(t), \quad y(t) \leq w(t)$$

$$y(t+j) \leq y(t), \quad y(t) \geq w(t)$$

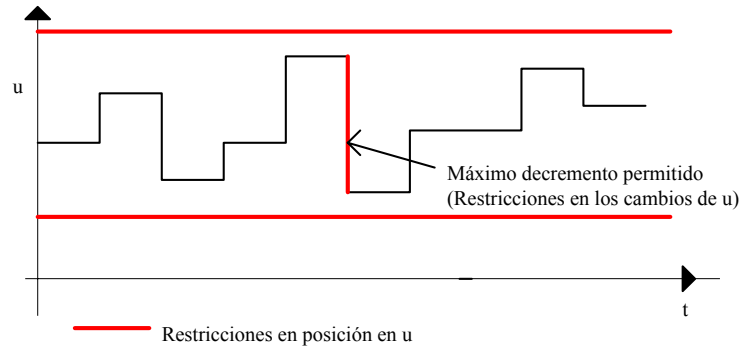


Figura 4.13. Restricciones en velocidad y posición en las variables manipuladas

De todos los tipos de restricciones presentados, los más habituales (**Figura 4.13** y **Figura 4.14**) son las restricciones en la velocidad de variación de las variables manipuladas:

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u(t+j) = u(t+j) - u(t-1+j) \leq \Delta u_{\max}, \quad j = 0, N_u - 1$$

en posición de las señales manipuladas:

$$u_{\min} \leq u(t+j) \leq u_{\max}, \quad j = 0, N_u - 1$$

y en posición de las variables controladas (**Figura 4.14**):

$$y_{\min} \leq y(t+j) \leq y_{\max}, \quad j = N_{3_s}, \dots, N_{4_s}$$

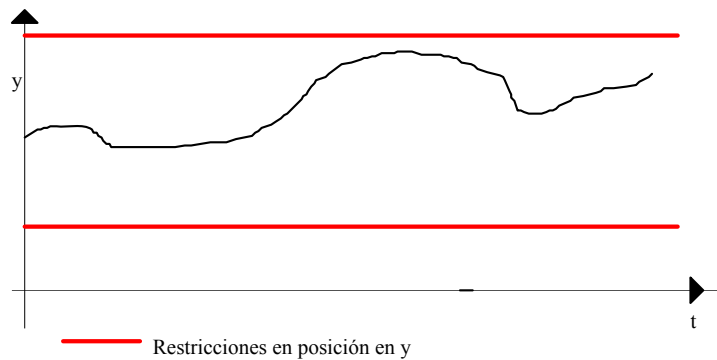


Figura 4.14. Restricciones en posición en las variables controladas.

B. Incorporación de las restricciones en CPBM

Mediante la aplicación de un controlador predictivo, se trata de obtener en el instante t , una secuencia futura de las señales de control que verifiquen todo el conjunto de restricciones que se haya definido.

Las restricciones pueden incorporarse de diversas formas en los controladores predictivos:

- Para asegurar el cumplimiento de las restricciones de las variables manipuladas, la técnica más sencilla consiste en saturar la señal de control con el valor de sus límites cuando el valor que ha calculado el controlador no verifica los límites de las restricciones de esa variable. Esto puede efectuarse dentro del propio controlador o por el actuador. De esta forma no se aprovechan todas las capacidades del controlador predictivo y en determinadas situaciones puede llevar a que el proceso se desestabilice. Cuando se utiliza este método, no hay una inclusión explícita de las restricciones para realizar el cálculo de la nueva señal de control, ni hay forma de considerar restricciones en las variables controladas.
- El controlador PFC (Predictive Functional Control, [Abu el Ata-Doss, Fiani y Richalet, 1991]; [Richalet, 1993]) considera las restricciones de forma diferente. Se distingue entre las variables manipuladas y las controladas. El procedimiento consiste en calcular la señal de control futura sin restricciones, cuando estos valores violan sus restricciones se puede optar por saturar la señal de control al valor de los límites. Para las variables controladas la forma de trabajo es diferente. Se trata en todo momento de obtener un controlador que sea aplicable a procesos muy rápidos. Por eso se evita la minimización de funciones no lineales sujetas a restricciones. En su lugar se introduce un elemento de supervisión lógico que es el encargado de conmutar entre dos controladores (en el caso más sencillo).

El proceso que se sigue es el siguiente (se explica para un caso SISO):

- ♦ Se calcula la señal de control como si no se hubiesen impuesto restricciones sobre las variables controladas.
- ♦ Con la nueva señal de control, se calcula la predicción de la salida. Hay dos posibilidades:
 1. La predicción de la salida está dentro de la región definida por sus restricciones (Figura 4.15), entonces se aplican esas señales de control a la planta.

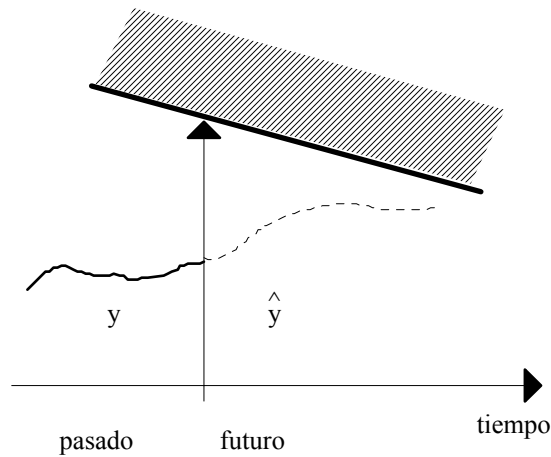


Figura 4.15. Predicción dentro de las restricciones

2. La predicción de la salida viola alguna de sus restricciones (Figura 4.16), entonces se conmuta a otro controlador que considera como señal de referencia la restricción que no se cumple y se aplican las señales de control devueltas por este controlador, hasta que la restricción se cumpla de nuevo.

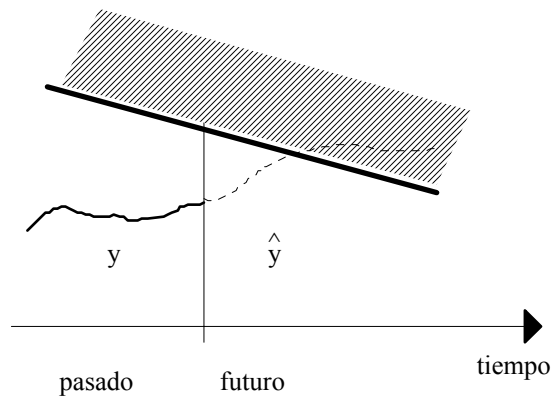


Figura 4.16. Predicción violando alguna restricción

Para realizar esta conmutación entre controladores se necesita un elemento supervisor con una lógica sencilla que sea capaz de tomar la decisión del cambio (Figura 4.17). El problema de esta técnica es que cuando el número de variables es grande, se dispara el número de controladores de los que es necesario disponer y la lógica de conmutación.

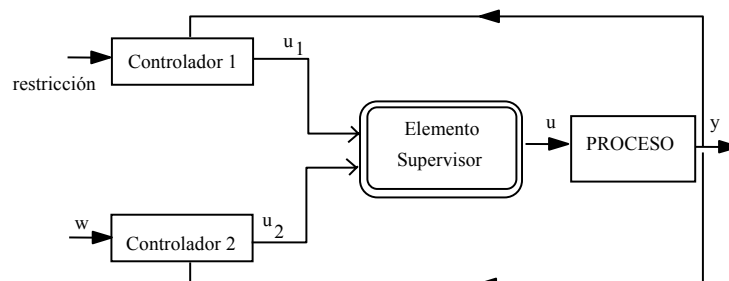


Figura 4.17. Control con conmutación

Cuando no se verifican las restricciones de alguna variable controlada lo que se hace es un cambio de referencia, pero no se penaliza de ninguna forma el no cumplimiento del límite.

- Otra posibilidad para considerar las restricciones de forma explícita es añadirlas como términos en forma de funciones de penalización a la función de coste cuadrático original [Scokaert, 1994]. Los dos principales inconvenientes de este método son que no se garantiza el cumplimiento de las restricciones (se permite la violación de las restricciones, pero se penaliza de acuerdo a unas determinadas funciones) y el coste computacional es muy grande, ya que hay que resolver un problema de optimización no lineal.
- Aunque resulta más complejo, se obtienen mejores resultados cuando se introducen las restricciones de las variables (tanto manipuladas como controladas) de forma explícita en el controlador. La forma habitual de trabajo es que las restricciones definan la región donde se va optimizar la función de coste. Normalmente la función de coste será una función cuadrática que estará sujeta al conjunto de restricciones que se hayan impuesto a las variables controladas y manipuladas. No obstante también es posible trabajar con otros tipos de funciones de coste, como por ejemplo funciones de coste lineales, pero la forma más habitual es una función de coste cuadrática.

La forma de considerar las restricciones en los controladores predictivos es muy diversa. En el caso lineal, el problema se plantea como uno de programación cuadrática (QP: Quadratic Programming), para el cual existen algoritmos y paquetes de software eficientes. No obstante, esta alternativa, junto a sus ventajas, presenta el problema de la posibilidad de aparición de situaciones no factibles, en las que el controlador no puede operar. Lográndose una solución de compromiso entre eficiencia y facilidad de implantación.

4.9.3. Ejemplos de Controladores Predictivos

En este apartado se presentan dos de los controladores predictivos que más relevancia han tenido y todavía tienen:

DMC

GPC

La principal diferencia entre ambos es el modelo del proceso y el de las perturbaciones no medibles. Una vez obtenidas las ecuaciones de predicción, la forma en la que se obtiene la secuencia de controles futuros es la misma en ambos casos, por lo que se ha agrupado bajo el mismo epígrafe.

4.9.3.1. Control de Matriz Dinámica (DMC)

Vamos ahora a presentar como primer ejemplo de un controlador predictivo basado en modelos al controlador DMC (Dynamic Matrix Control). Este controlador fue desarrollado por [Cutler y Ramaker, 1980] y desde su aparición ha tenido una gran aceptación.

Es un controlador predictivo que presenta como principales ventajas:

1. El modelo es sencillo de implementar.
2. Atractivo para uso industrial, ya que la formación para comprender su funcionamiento no es complicada.
3. No se necesita hacer ningún supuesto sobre el orden del modelo.

No obstante, también presenta algunas desventajas, la más importante es que los procesos inestables en lazo abierto no pueden ser controlados.

En los apartados siguientes se describirán las características más importantes de este controlador. El desarrollo se ha realizado suponiendo que se trata de un sistema con una variable controlada, una variable manipulada y una perturbación medible.

Elementos básicos del DMC

Los elementos que consideramos como básicos son:

1. Modelo del sistema utilizado (Figura 4.18). El modelo del proceso que utiliza es un modelo en respuesta salto, tanto para el modelo entre la variable controlada y la variable manipulada, como para el modelo entre la variable controlada y la perturbación medible. Las perturbaciones no medibles se suponen constantes.

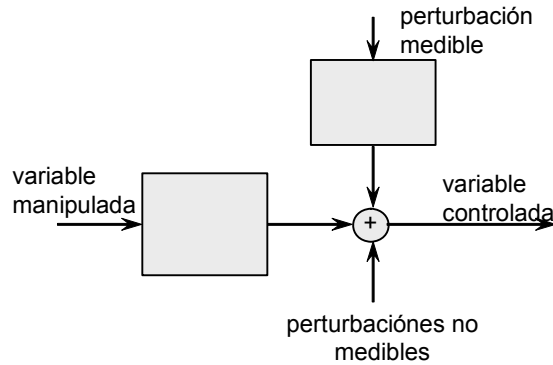


Figura 4.18. Modelo interno usado en el DMC

El modelo será:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \Delta v(t-i) + n(t)$$

donde: $y(t)$ es la salida del sistema en el instante t , $\Delta u(t)$ son los cambios en la variable manipulada, $\Delta v(t)$ son los cambios en la perturbación medible, $n(t)$ es una perturbación constante, g_i son los coeficientes de la respuesta salto, con $g_0=0$.

2. La trayectoria de referencia. La trayectoria de referencia deseada $w(t+j)$ desde $y(t)$ hasta $r(t+N_2)$ se calcula mediante:

$$w(t+j) = \alpha \hat{y}(t+j-1) + (1-\alpha)r(t+j)$$

con $w(t) = y(t)$

3. La estructuración de la ley de control. El algoritmo GPC utiliza la estructuración del horizonte de control, es decir se especifica un valor N_u , llamado horizonte de control a partir del cual la señal de control futura es constante, es decir,

$$\Delta u(t+j) = 0 \quad \text{para } j > N_u$$

4. Función objetivo. El índice a minimizar en el algoritmo DMC es:

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [w(t+j/t) - \hat{y}(t+j/t)]^2 + \sum_{j=0}^{N_u-1} [\beta \Delta u(t+j/t)]^2 \quad (4.162)$$

donde:

N_2 es el horizonte de predicción $> N_1 \geq 1$

$\beta \geq 0$, es el factor de peso.

Cálculo de las ecuaciones de predicción

Para minimizar este índice (4.162), se necesita calcular la predicción de la salida en el instante $t+j$, para ello se utiliza el modelo dado en el paso 1 del apartado anterior:

$$\hat{y}(t+j) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \Delta v(t+j-i) + n(t+j) \quad (4.163)$$

Buscamos $\hat{y}(t+j)$ estructurada en dos términos:

Un término que dependa sólo de las acciones de control futuro, es la respuesta controlada o forzada: $y_c(t+j)$

Un término que dependa sólo del comportamiento pasado, es la respuesta libre del sistema: $y_f(t+j) = p_j$.

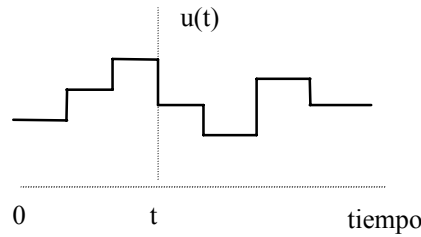


Figura 4.19. Señal de control futura

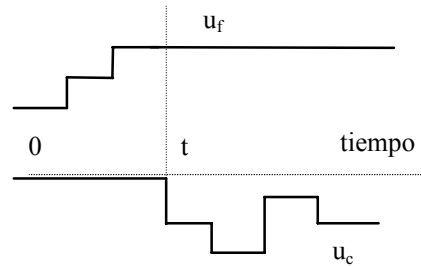


Figura 4.20. Señal de control pasada y futura

$$u(t) = u_f(t) + u_c(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_f(t+j) &= u(t-1) & j \geq 0 \\ u_f(t+j) &= u(t+j) & j < 0 \\ u_c(t+j) &= 0 & j < 0 \\ \Delta u_c(t+j) &= \Delta u(t+j) & j \geq 0 \end{aligned}$$

Es decir la señal de control se calcula como la superposición de dos términos: u_f que es la señal de control que se aplica en el pasado y u_c : la señal de control futuro que calculará el controlador (Figura 4.20). Entonces separando en la ecuación (4.163) los términos que dependen del pasado de los que no queda:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+j) &= \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) \\ &+ \sum_{i=1}^j d_i \Delta v(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} d_i \Delta v(t+j-i) + n(t+j) \end{aligned} \quad (4.164)$$

y si ahora hacemos una hipótesis:

$$n(t+j) = n(t) = y(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) - \sum_{i=1}^{\infty} d_i \Delta v(t-i)$$

La expresión (4.164), se transforma en:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+j) &= \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) \\ &+ \sum_{i=1}^j d_i \Delta v(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} d_i \Delta v(t+j-i) + y(t) \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) - \sum_{i=1}^{\infty} d_i \Delta v(t-i)\end{aligned}$$

Entonces, la respuesta libre vendrá dada por:

$$\begin{aligned}p_j &= y(t) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) + \\ &+ \sum_{i=j+1}^{\infty} d_i \Delta v(t+j-i) - \sum_{i=1}^{\infty} d_i \Delta v(t-i) + \sum_{i=1}^j d_i \Delta v(t+j-i)\end{aligned}$$

es decir

$$p_j = y(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (g_{j+i} - g_i) \Delta u(t-i) + \sum_{i=1}^{\infty} (d_{j+i} - d_i) \Delta v(t-i) + \sum_{i=1}^j d_i \Delta v(t+j-i)$$

Si además tenemos en cuenta que para procesos estables:

$$g_{j+i} - g_i \cong 0 \quad d_{j+i} - d_i \cong 0 \quad i > N, \quad j = N1, \dots, N2$$

finalmente la respuesta libre quedará como:

$$p_j = y(t) + \sum_{i=1}^N (g_{j+i} - g_i) \Delta u(t-i) + \sum_{i=1}^N (d_{j+i} - d_i) \Delta v(t-i) + \sum_{i=1}^j d_i \Delta v(t+j-i)$$

Se necesita una hipótesis sobre la evolución futura de $v(t)$, se suele considerar que $v(t+j)=v(t)$. El efecto de la perturbación queda incluido en la respuesta libre.

La respuesta forzada será:

$$y_c(t+j) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(t+j-i) = G_j(q^{-1}) \Delta u(t+j)$$

donde

$$G_j(q^{-1}) = g_1 q^{-1} + g_2 q^{-2} + \dots + g_j q^{-j}$$

En resumen, la predicción vendrá dada por la suma de la respuesta forzada y la libre:

$$\hat{y}(t+j) = G_j(q^{-1}) \Delta u(t+j) + p_j$$

Ahora ya se puede calcular el índice a minimizar de la ecuación (4.162)..

4.9.3.2. Control Predictivo Generalizado (GPC).

El Control Predictivo Generalizado (GPC, General Predictive Control) fue propuesto por Clarke et al. [Clarke, Mohtadi y Tuffs, 1987], y se ha convertido en uno de los métodos más populares en el ámbito del Control Predictivo tanto en el mundo industrial como en el académico. Se ha empleado con éxito en numerosas aplicaciones industriales [Clarke, 1988], mostrando buenas prestaciones, a la vez que un cierto grado de robustez respecto a sobre-parametrización o retardos mal conocidos. Puede resolver muchos problemas de control diferentes para un amplio campo de procesos con un número razonable de variables de diseño, que son especificadas por el operario dependiendo del conocimiento previo del proceso y de los objetivos de control. Pero a pesar de este éxito en la práctica, este método adolece de la ausencia de un análisis teórico completo que estudie la influencia de los parámetros de diseño (horizontes, secuencias de ponderación) sobre la estabilidad del bucle cerrado así como de resultados de robustez.

La idea básica del GPC es calcular una secuencia de futuras acciones de control de tal forma que minimice una función de coste multi-paso. El índice a minimizar es la esperanza matemática de una función cuadrática que mide por un lado la distancia entre la salida predicha del sistema y una cierta trayectoria de referencia hasta el horizonte de predicción, y por otro el esfuerzo de control necesario para obtener dicha salida. Esta idea ha sido usada por [Lelic y Zarrop, 1987a], y Lelic y Wellstead [Lelic y Zarrop, 1987b], para la obtención de un controlador por asignación de polos generalizado que pertenece a la clase de los controladores de horizonte extendido y es una extensión de los bien conocidos controladores por asignación de polos.

El Control Predictivo Generalizado tiene muchas ideas en común con otros controladores predictivos, ya que está basado en las mismas ideas pero posee a su vez algunas diferencias. Como se verá más adelante, es capaz de proporcionar una solución explícita (en ausencia de restricciones), puede trabajar con procesos inestables o de fase no mínima e incorpora el concepto de horizonte de control así como la consideración de la función de coste de ponderación de los incrementos en las acciones de control. Las diversas posibilidades disponibles para el GPC conducen a una gran variedad de objetivos de control comparado con otras realizaciones, algunas de las cuales pueden ser consideradas como subconjuntos o casos límites del GPC.

Formulación del Control Predictivo generalizado.

La mayoría de los procesos de una sola entrada y una sola salida (single-input single-output, SISO), al ser considerados en torno a un determinado punto de trabajo y tras ser linealizados, pueden ser descritos de la siguiente forma

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t)$$

donde $u(t)$ y $y(t)$ son respectivamente la serial de control y la salida del proceso y $e(t)$ es un ruido blanco de media cero. A , B y C son los siguientes polinomios en el operador de desplazamiento hacia atrás z^{-1}

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_naz^{-na}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nbz^{-nb}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_ncz^{-nc}$$

donde d es el tiempo muerto del sistema.

Este modelo es conocido como Autorregresivo de Media Móvil (Controller Auto-Regressive Moving-Average CARMA). En muchas aplicaciones industriales en las que las perturbaciones son no-estacionarias resulta más conveniente [Clarke, Mohtadi y Tuffs, 1987], el uso de un modelo CARMA integrado, dando lugar al CARIMA, que viene descrito por

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \quad (4.165)$$

donde

$$\Delta = 1 - z^{-1}$$

Por simplicidad, a partir de ahora el polinomio C se va a tomar igual a 1. Nótese que en el caso de que C pueda ser truncado se puede absorber en A y B . El caso general de ruido coloreado (C distinto de 1), es tratado más adelante.

El algoritmo del Control Predictivo Generalizado consiste en aplicar una secuencia de señales de control que minimice una función de coste de la forma

$$J(N_1, N_2, N_u) = E \left\{ \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u y(t+j-1)]^2 \right\} \quad (4.166)$$

donde $E\{\cdot\}$ es la esperanza matemática e $\hat{y}(t+j|t)$ es la predicción óptima j pasos hacia delante de la salida del proceso con datos conocidos hasta el instante t , N_1 y N_2 son los horizontes mínimo y máximo de coste, N_u es el horizonte de control y $\delta(j)$ y $\lambda(j)$ son las secuencias de ponderación mientras que $w(t+j)$ es la futura trayectoria de referencia, que se puede calcular según se muestra en la Figura 4.21. En [Clarke, Mohtadi y Tuffs, 1987] se considera $\delta(j)$ igual a 1 y $\lambda(j)$ constante.

El objetivo es pues el cálculo de la futura secuencia de control $u(t)$, $u(t+1)$, ... de tal manera que la salida futura del proceso $y(t+j)$ permanezca próxima a $w(t+j)$. Esto se logra minimizando $J(N_1, N_2, N_u)$.

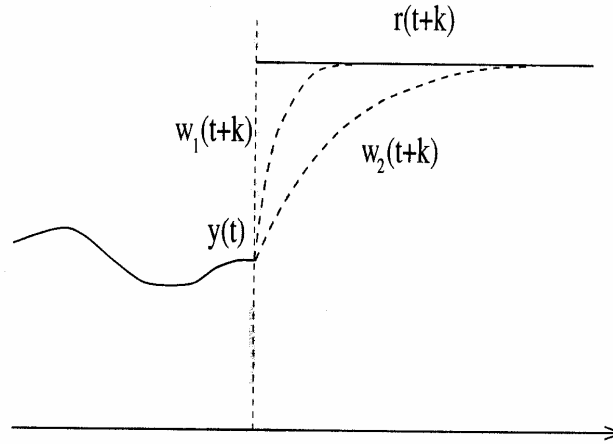


Figura 4.21. Trayectoria de referencia.

Con la intención de minimizar la función de coste, se obtendrá previamente la predicción óptima de $y(t+j)$ para $j \geq N_1$, y $j \leq N_1$. Considérese la siguiente ecuación diofántica

$$\begin{aligned} 1 &= E_j(z^{-1})\Delta A + z^{-j}F_j(z^{-1}) \\ 1 &= E_j(z^{-1})\tilde{A} + z^{-j}F_j(z^{-1}) \end{aligned} \quad (4.167)$$

Los polinomios E_j y F_j están únicamente definidos con grados $j-1$ y na respectivamente. Se pueden obtener dividiendo 1 entre $\tilde{A}(z^{-1})$ hasta que el resto pueda ser factorizado como $z^{-j}F_j(z^{-1})$. El cociente de la división es entonces el polinomio $E_j(z^{-1})$.

Si se multiplica la ecuación (4.165) por $E_j(z^{-1})z^{-j}\Delta$

$$\begin{aligned} A(z^{-1})E_j(z^{-1})z^{-j}\Delta y(t) &= E_j(z^{-1})z^{-j}\Delta z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + E_j(z^{-1})z^{-j}\Delta C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \\ \tilde{A}(z^{-1})E_j(z^{-1})y(t+j) &= E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(t+j) \end{aligned} \quad (4.168)$$

Teniendo en cuenta (4.167), la ecuación (4.168) queda

$$(1 - z^{-j} F_j(z^{-1})) y(t+j) = E_j(z^{-1}) B(z^{-1}) \Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1}) e(t+j)$$

La cual puede ser escrita como

$$y(t+j) = F_j(z^{-1}) y(t) + E_j(z^{-1}) B(z^{-1}) \Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1}) e(t+j) \quad (4.169)$$

Al ser el grado del polinomio $E_j(z^{-1})$ igual a $j-1$ los términos del ruido en la ecuación (4.169) están todos en el futuro. La mejor predicción de $y(t+j)$ será por consiguiente

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+j) &= E_j(z^{-1}) B(z^{-1}) \Delta u(t+j-d-1) + F_j(z^{-1}) y(t) \\ &= G_j(z^{-1}) \Delta u(t+j-d-1) + F_j(z^{-1}) y(t) \end{aligned}$$

donde

$$G_j(z^{-1}) = E_j(z^{-1}) B(z^{-1})$$

Se puede demostrar que los polinomios E_j y F_j se pueden obtener en forma recursiva, de forma que los nuevos valores en el paso $j+1$ (E_{j+1} y F_{j+1}) sean función de los del paso j . La recursividad de la ecuación diofántica ha sido demostrada en [Clarke, Mohtadi y Tuffs, 1987]. A continuación se muestra una demostración más simple. Existen otras formulaciones del GPC que no están basadas en la recursividad de esta ecuación [Albertos y Ortega, 1989].

Considérese que los polinomios E_j y F_j se han obtenido dividiendo 1 entre $\tilde{A}(z^{-1})$ hasta que el resto haya sido factorizado como $z^{-j} F_j(z^{-1})$

Con

$$\begin{aligned} F_j(z^{-1}) &= f_{j,0} + f_{j,1} z^{-1} + \dots + f_{j,na} z^{-na} \\ E_j(z^{-1}) &= e_{j,0} + f_{j,1} z^{-1} + \dots + f_{j,j-1} z^{-(j-1)} \end{aligned}$$

Supóngase que se utiliza el mismo procedimiento para obtener E_{j+1} y F_{j+1} , es decir, dividir 1 entre $\tilde{A}(z^{-1})$ hasta que el resto se pueda factorizar como $z^{-(j+1)} F_{j+1}(z^{-1})$ con

$$F_{j+1}(z^{-1}) = f_{j+1,0} + f_{j+1,1} z^{-1} + \dots + f_{j+1,na} z^{-na}$$

Está claro que solamente es necesario dar un paso más en la división para obtener los polinomios E_{j+1} y F_{j+1} . Donde E_{j+1} vendrá dado por

$$E_{j+1}(z^{-1}) = E_j(z^{-1}) + e_{j+1,j} \quad \text{con} \quad e_{j+1,j} = f_{j,0}$$

Los coeficientes del polinomio F_{j+1} se pueden expresar como

$$f_{j+1,i} = f_{j,i+1} - f_{j,0} \tilde{a}_{i+1} \quad \text{para} \quad i = 0 \dots na-1$$

El polinomio G_{j+1} , puede ser obtenido recursivamente como sigue

$$G_{j+1} = E_{j+1} B = (E_j + f_{j,0} z^{-j}) B = G_j + f_{j,0} z^{-j} B$$

Es decir, los primeros j coeficientes de G_{j+1} , serán idénticos a los de G_j mientras que el resto viene dado por

$$g_{j+1,j+i} = g_{j,j+i} - f_{j,0} b_i \quad \text{para} \quad i = 0, \dots, nb$$

Para resolver el GPC es necesario obtener el conjunto de señales de control $u(t)$, $u(t+1)$, ..., $u(t+N)$ que minimizan la ecuación (4.166). Al tener el proceso un retardo de d períodos de muestreo, la salida sólo se verá influenciada por la señal $u(t)$ después del instante $d+1$. Los valores N_1 , N_2 y N_u que marcan los horizontes pueden ser definidos como $N_1 = d+1$, $N_2 = d+N$ y $N_u = N$. No tiene sentido hacer $N_1 < d+1$ ya

que los términos de (4.166) sólo dependerán de las señales de control pasadas. Por otro lado, haciendo $N_1 > d+1$ los primeros puntos de la secuencia de salida, que serán los mejor estimados, no se tendrán en cuenta.

El conjunto de las j predicciones óptimas:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+d+1|t) &= G_{d+1}\Delta u(t) + F_{d+1}y(t) \\ \hat{y}(t+d+2|t) &= G_{d+2}\Delta u(t+1) + F_{d+2}y(t) \\ &\vdots \\ \hat{y}(t+d+N|t) &= G_{d+N}\Delta u(t+N-1) + F_{d+N}y(t)\end{aligned}$$

puede ser escrito en forma matricial como

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{F}(z^{-1})y(t) + \mathbf{G}'(z^{-1})\Delta u(t-1) \quad (4.170)$$

Donde

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \hat{y}(t+d+1|t) \\ \hat{y}(t+d+2|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+d+N|t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} F_{d+1}(z^{-1}) \\ F_{d+2}(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_{d+N}(z^{-1}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}'(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} z(G_{d+1}(z^{-1}) - g_0) \\ z^2(G_{d+1}(z^{-1}) - g_0 - g_1z^{-1}) \\ \vdots \\ z^N(G_{d+N}(z^{-1}) - g_0 - g_1z^{-1} - \cdots - g_{N-1}z^{-(N-1)}) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Al depender los últimos términos de la ecuación (4.170) sólo del pasado, pueden agruparse en \mathbf{f} , dando lugar a

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

Entonces la ecuación (4.166) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}J &= (\mathbf{y} - \mathbf{w})^T (\mathbf{y} - \mathbf{w}) + \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w})^T (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w}) + \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u}\end{aligned} \quad (4.171)$$

donde:

$$\mathbf{w} = [w(t+d+1) \quad w(t+d+2) \quad \cdots \quad w(t+d+N)]^T$$

La ecuación (4.171) se puede poner como

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u} + \mathbf{b} \mathbf{u} + \mathbf{f}_0$$

donde

$$\mathbf{H} = 2(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})$$

$$\mathbf{b} = 2(\mathbf{f} - \mathbf{w})^T \mathbf{G}$$

$$\mathbf{f}_0 = (\mathbf{f} - \mathbf{w})^T (\mathbf{f} - \mathbf{w})$$

El mínimo de J , siempre que no existan restricciones en la señal de control, puede ser calculado igualando a cero el gradiente de J , lo cual conduce a

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}^T$$

Debido al uso de la estrategia deslizante, sólo el primer elemento del vector \mathbf{u} es aplicado realmente, repitiendo de nuevo el mismo procedimiento al siguiente instante de muestreo. La solución propuesta involucra la inversión (o al menos la triangularización) de una matriz de dimensión $N \times N$, lo cual conlleva una gran carga de cálculo. El concepto ya usado en otros métodos de horizonte de control es empleado en [Clarke, Mohtadi y Tuffs, 1987] con la finalidad de reducir la cantidad de cálculo, asumiendo que las señales de control permanecerán en un valor constante a partir del intervalo $Nu < N$. Por tanto la dimensión de la matriz que hay que invertir queda reducida a $Nu \times Nu$, quedando la carga de cálculo reducida (en el caso límite de $Nu \times 1$, se reduce al caso escalar, como en el EPSAC, [de Keyser y Van Cauwenberghe, 1985] aunque restringiendo la optimalidad.

Para aumentar la rapidez del algoritmo, fundamental sobre todo en el caso adaptable, en [Camacho y Bordons, 1995], se presenta un método desarrollado para la gran mayoría de procesos industriales y con una carga de cálculo mínima. También existen realizaciones usando redes neuronales de Hopfield para obtener algoritmos rápidos [Quero y Camacho, 1990].

Consideración de ruidos coloreados.

Cuando el polinomio del ruido $C(z^{-1})$ de la ecuación (4.165) no es igual a 1 la predicción cambia ligeramente. Para calcular el predictor en esta situación se debe resolver la siguiente ecuación diofántica

$$C(z^{-1}) = E_j(z^{-1}) \tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j} F_j(z^{-1}) \quad (4.172)$$

con $\delta(E_j(z^{-1})) = j-1$ y $\delta(F_j(z^{-1})) = \delta(\tilde{A}(z^{-1})) - 1$, siendo $\delta(\cdot)$ el grado del polinomio.

Multiplicando la ecuación (4.165) por $\Delta E_j(z^{-1})$ y usando (4.172)

$$C(z^{-1})(y(t+j) - E_j(z^{-1})e(t+j)) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + F_j(z^{-1})y(t)$$

Como los términos de ruido están todos en el futuro, el valor esperado para el término de la izquierda de la ecuación anterior es

$$E[C(z^{-1})(y(t+j) - E_j(z^{-1})e(t+j))] = C(z^{-1})\tilde{y}(t+j|t)$$

El valor esperado de la salida puede ser generado por la ecuación

$$C(z^{-1})\tilde{y}(t+j|t) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + F_j(z^{-1})y(t) \quad (4.173)$$

Nótese, que esta ecuación de predicción podría ser usada para generar las predicciones de forma recursiva. Se puede obtener una expresión explícita para la predicción óptima de j pasos resolviendo la siguiente ecuación diofántica

$$1 = C(z^{-1})M_j(z^{-1}) + z^{-j}N_j(z^{-1}) \quad (4.174)$$

con $\delta(M_j(z^{-1})) = j-1$ y $\delta(N_j(z^{-1})) = \delta(C(z^{-1})) - 1$

Multiplicando la ecuación (4.173) por y usando (4.174)

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t+j|t) &= M_j(z^{-1})E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) \\ &\quad + M_j(z^{-1})F_j(z^{-1})y(t) + N_j(z^{-1})y(t)\end{aligned}$$

que se puede expresar como

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t+j|t) &= G(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + G_p(z^{-1})\Delta u(t+j-1) \\ &\quad + (M_j(z^{-1})F_j(z^{-1}) + N_j(z^{-1}))y(t)\end{aligned}$$

con $\delta(G(z^{-1})) < j$. Estas predicciones se pueden usar en la función de coste que se minimiza de la misma forma que el caso de ruido blanco.

4.10. Conclusión

A los controladores del tipo de Auto-Ajuste (Self Tunning) se los debe ver como un intento de automatizar el proceso de modelado y control que es normalmente realizado por un diseñador de sistemas de control. Si se especifica la estructura del modelo, el modelado se reduce a una estimación paramétrica recursiva. El diseño del controlador es simplemente un mapeo de los parámetros del controlador a los parámetros del proceso. Normalmente se utilizan métodos de identificación simples (mínimos cuadrados) y técnicas de control también simples (asignación de polos, mínima varianza,...). Estos controladores usan el principio de equivalencia cierta, es decir que supone que se pueden dividir las tareas de identificación y control, y por lo tanto las incertezas en los valores de los parámetros no afectan considerablemente el comportamiento del controlador. Se han analizado dos esquemas, uno directo y otro indirecto. En el primero se aplica un algoritmo de identificación y con esos parámetros se calcula los parámetros del controlador. En el esquema directo los parámetros del controlador se estiman directamente. Para lograr esto hay que reparemetrizar los parámetros del proceso en los parámetros del controlador.

Cuestionario y ejercicios

Ejercicio 4.1: Introducción a los reguladores Auto-Ajustables

¿En que consisten los reguladores Auto-Ajustables?

Dé un diagrama en bloques de este tipo de reguladores.

¿Cual es la principal ventaja del esquema indirecto de regulador autoajustable?

Ejercicio 4.2: Asignación de polos y ceros

¿En que consisten los reguladores por asignación de polos y ceros?

¿A que esquema visto anteriormente se parece el esquema indirecto de asignación de polos?

Ejercicio 4.3: Predicción óptima

¿En que consiste la predicción óptima a d pasos de un sistema estocástico?

¿Que consideraciones se deben realizar para encontrar la predicción óptima?

Ejercicio 4.4: Regulador de mínima varianza

¿Cuál es el objetivo del regulador de mínima varianza?

¿Que relación se puede establecer entre el regulador de mínima varianza y la predicción óptima de la salida?

Ejercicio 4.5: Controladores para plantas con parámetros desconocidos.

¿Que ocurre con los controladores de auto ajustables cuando los parámetros son desconocidos?

¿En que se basa la utilización de este tipo de controladores cuando los parámetros son desconocidos?

Ejercicio 4.6: Algoritmos con estructura explícita e implícita

¿Que diferencia hay entre los algoritmos con identificación implícita y explícita?

Describe el algoritmo adaptable con identificación explícita

Describe el algoritmo adaptable con identificación implícita

¿Cuáles son las ventajas e inconvenientes de cada uno y estos algoritmos?

Ejercicio 4.7: Propiedad de autosintonía

¿En que consiste la propiedad de auto sintonía de los controladores auto ajustables de mínima varianza?

¿Cuál es el procedimiento de síntesis cuando se utiliza la propiedad de auto sintonía?

Ejercicio 4.8: Ejemplo de mínima varianza

Simular el ejemplo de regulador de mínima varianza del tema 4.8.1.

Ejercicio 4.9: Control Predictivo. Introducción.

¿Es el Control Predictivo una estrategia de control específica?

¿Cuales son las ideas comunes que poseen todos los esquemas de control predictivo?

¿Cuales son las ventajas y desventajas de los controladores predictivos?

Ejercicio 4.10: Elementos del control predictivo

¿Cuales son los elementos principales de los controladores predictivos?

¿Para que se utiliza un modelo de predicción y el funcional de coste? ¿Cómo se obtiene la acción de control?

¿En qué consiste la estrategia de horizonte móvil?

¿En que se beneficia el comportamiento del sistema al agregar restricciones al diseño del controlador?

Ejercicio 4.11: Control de Matriz Dinámica (DMC)

¿Que modelo de predicción utiliza el DMC? ¿Como se obtiene este modelo?

¿Cual es el funcional de coste?

Ejercicio 4.12: Control Predictivo Generalizado (GPC)

¿Que modelo de predicción utiliza el GPC? ¿Como se obtiene este modelo?

¿Cual es el funcional de coste?

Ap.1. Solución de la ecuación diofántica

Para resolver la ecuación diofántica $A R + B q^{-d} S = A_c$, se desarrollan los productos y sumas de polinomios, luego se igualan los coeficientes de igual orden de ambos miembros resultando un sistema de ecuaciones lineales

$$M_s \theta_c = b$$

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_{na} & \vdots & \ddots & a_1 & b_{nb} & \vdots & & b_1 \\ 0 & a_{na} & \ddots & \vdots & 0 & b_{nb} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{na} & 0 & \cdots & 0 & b_{nb} \end{bmatrix}, \theta_c = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{nr} \\ s_{ns} \\ \vdots \\ s_{ns} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} a_{c1} - a_1 \\ \vdots \\ a_{cna} - a_{na} \\ a_{cna+1} \\ \vdots \\ a_{cnr+ns+1} \end{bmatrix}$$

La matriz M_s se denomina matriz de Sylvester y se presenta frecuentemente en las aplicaciones matemáticas. Esta posee la propiedad de ser no singular (por lo tanto invertible) si y solo si los polinomios A y B no tienen factores comunes (son polinomios primos). En ese caso la ecuación anterior tiene solución única

$$\theta_c = M_s^{-1} b$$

Observar no obstante la no unicidad con respecto a los ordenes de R y S como se discutió anteriormente.

5. REGULADORES CON SINTONÍA AUTOMÁTICA

5.1. Introducción

Los esquemas de control adaptables, como los de modelo de referencia (MRAC) y de auto-sintonía (STR), necesitan de información *a priori* acerca de la dinámica del proceso. En estos sistemas adaptables es indispensable conocer las escalas de tiempo, las cuales son críticas para determinar los intervalos de muestreo y los filtros de estos sistemas. Desde el punto de vista del usuario es ideal disponer de una función mediante la cual el controlador sea ajustado independiente de todo conocimiento previo del sistema [Åström and Witternmark, 1995].

Aunque los esquemas adaptables tradicionales son herramientas ideales para su ajuste automático resultan inadecuadas porque requieren conocimientos previos de las escalas de tiempo. En la categoría de controladores con ajuste automático entran una variedad de controladores en los que el conocimiento previo del sistema es mínimo.

Los reguladores del tipo PID (Proportional Integral Derivative) son los más usados para los sistemas de control y se utilizan en rango amplio de constantes de tiempo. La importancia de la información *a priori* también apareció en conexión con intentos de desarrollar técnicas de ajustes automáticos de controladores del tipo PID.

Por Sintonía Automática (Automátic Tunning) se entiende que los parámetros de un controlador estándar, por ejemplo un controlador PID, se sintonizan automáticamente con un pedido del operador. Después del ajuste los parámetros permanecen constantes. Prácticamente todos los controladores pueden ser usados en un modelo de sintonía automática. Hay algunas técnicas que se pueden usar exclusivamente con este propósito. El área de aplicación de este tipo de sistemas son los lazos de control simples y los controladores simples en sistemas distribuidos. La mayoría de los controladores de este tipo son del tipo PID. Hay una gran variedad de aplicaciones que utilizan muchos controladores de este tipo y la mayoría de ellos están mal sintonizados.

Aunque la mayoría de los sistemas con sintonía automática están desarrollados para controladores simples, estos se pueden utilizar para determinar las escalas de tiempo y para determinar valores iniciales para sistemas más complejos.

Tradicionalmente, el ajuste de los reguladores complejos toma la vía del modelado (o de la identificación) y del posterior diseño del regulador. Esto requiere un consumo de tiempo elevado, además de ser un procedimiento costoso. Normalmente, es económicamente rentable, cuando se aplica a sistemas críticos en tamaño e importancia, o a sistemas que van a ser manufacturados en grandes cantidades. Algunos fabricantes incorporan en sus productos funciones de sintonía automática en sus reguladores, que obtienen la información *a priori* que requiere todo especialista para poder ajustar un regulador manualmente, y con ello llegan a realizar un ajuste automático de los parámetros del regulador.

Todas las técnicas adaptables se pueden usar para el ajuste automático de controladores. En tales aplicaciones, el bucle de adaptación opera durante un tiempo y puede conmutarse entre éste y el controlador fijo. Normalmente se añaden señales de perturbación para mejorar la estimación de los parámetros. El regulador adaptable está operativo hasta que el funcionamiento es satisfactorio, entonces el bucle de adaptación es desconectado y el sistema se deja correr con los parámetros fijos del regulador.

El ajuste puede ser considerado como un camino conveniente para incorporar modelado y diseño automático en un regulador. Simplifica el uso del regulador y amplía la clase de problemas en que los métodos de diseño automático pueden ser usados con un coste razonable.

A continuación se van a comentar algunas de las técnicas de ajuste de controladores que pueden utilizarse para obtener aproximaciones de los procesos dinámicos. Los métodos pueden utilizarse para ajuste automático de reguladores del tipo PID o como preajustes para algoritmos de control adaptables más sofisticados.

5.2 Control PID

Muchos problemas de control pueden ser manejados muy bien mediante controladores PID. Este algoritmo es muy conocido y es un estándar para el control de procesos. La versión académica del algoritmo es

$$u(t) = K_c \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(s) ds + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (5.175)$$

donde u es la variable de control, e el error definido como $e = r - y$, donde r es el valor de referencia, y y la salida del proceso.

Vemos dentro del corchete tres términos representando la acción Proporcional

$$P(t) = K_c e(t)$$

, Integral

$$I(t) = K_c \frac{1}{T_i} \int_0^t e(s) ds$$

y Derivativa

$$D(t) = K_c T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Resulta la ecuación

$$u(t) = P(t) + I(t) + D(t)$$

La acción proporcional es el control por realimentación más simple que se pueda obtener. De todos modos ya incorpora ventajas en el comportamiento dinámico del sistema en lazo cerrado. Por ejemplo sea un sistema de primer orden

$$Y(s) = \frac{A}{1 + sT} U(s)$$

Si se lo realimenta con un regulador P resulta

$$Y(s) = \frac{\frac{K A}{1 + sT}}{1 + \frac{K A}{1 + sT}} R(s) = \frac{\frac{K A}{1 + sT}}{1 + s \frac{T}{1 + K A}} R(s)$$

La constante de tiempo en lazo abierto es T , en cambio en lazo cerrado es $T/(1+KA)$. Al aumentar K el sistema se hace más rápido. Además la ganancia en lazo abierto es A y en lazo cerrado $KA/(1+KA)$. A medida que K aumenta, la ganancia tiende a 1 objetivo buscado en el control.

Sin embargo, solo con $K=\infty$ llegaríamos a ganancia 1 es decir que no tendríamos error en régimen permanente. En este ejemplo sencillo no habría problema en aumentar la ganancia. Pero en sistemas más complejos aumentar la ganancia implicaría transitorios oscilantes o directamente sistemas inestables.

De aquí surge la idea de la acción integral cuya función es eliminar el error en régimen estacionario. El segundo término de la ecuación (5.175) muestra que esta acción es

proporcional a la integral del error. Por lo tanto este factor dejará de integrar, es decir se estabilizará, solo cuando el error sea nulo que es el objetivo buscado.

Por último el término D es utilizado para mejorar los transitorios del sistema y el comportamiento frente a perturbaciones. Como lo indica su nombre, su tarea es oponerse a cualquier cambio brusco en el error. Por ejemplo, en los casos en que el error esté próximo al cero pero variando con una cierta velocidad, el término P no tendría casi efecto pero sí el aporte derivativo.

Los algoritmos utilizados actualmente contienen varias modificaciones. Es práctica estándar dejar que la acción derivada sólo opere sobre la variable de salida. Por lo que

$$D(t) = -K_c T_d \frac{dy(t)}{dt}$$

Puede ser ventajoso dejar la parte proporcional actuar sólo una fracción del valor de referencia. La acción derivada es sustituida por una aproximación que reduce la ganancia en alta frecuencia. La acción integral también se modifica para que no mantenga la integración cuando la variable de control se sature (anti-windup). Se toman precauciones para que no se produzcan transitorios cuando el regulador se conmuta de control manual a control automático o cuando los parámetros se cambian. Una versión razonable del regulador PID puede ser descrita por

$$u(t) = P(t) + I(t) + D(t)$$

donde

$$\begin{aligned} P(t) &= K_c (u_c(t) - by(t)) \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{K_c}{T_i} (u_c(t) - y(t)) + \frac{1}{T_t} (v(t) - u(t)) \\ \frac{T_d}{N} \frac{dD}{dt} + D &= -K_c T_d \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

El último término en la expresión dI/dt se introduce para mantener la integral limitada cuando la variable de salida se satura. La variable v es una señal de seguimiento, la cual es igual a la salida saturada del actuador y el parámetro T_t es una constante de tiempo para la acción de seguimiento. Los parámetros esenciales para ser ajustados son K_c , T_d y T_i . El parámetro N puede ser fijo; un valor típico es $N = 10$. La constante de tiempo de seguimiento es típicamente una fracción del tiempo de integración T_i .

La mayoría de los controladores comerciales están basados en microprocesadores u otros elementos de cálculo digital. Por lo tanto la forma que toma el regulador PID es la de su representación discreta. Si utilizamos, por ejemplo la aproximación por operador derivada, siendo T el período de muestreo resulta,

$$u_k = k_p \left[e_k + \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^k e_j + \frac{T_d}{T} (e_k - e_{k-1}) \right]$$

del mismo modo en el instante siguiente

$$u_{k-1} = k_p \left[e_{k-1} + k_i \sum_{j=0}^{k-1} e_j + k_d (e_{k-1} - e_{k-2}) \right]$$

restando miembro a miembro

$$u_k - u_{k-1} = k_p \left[(1 + k_i + k_d) e_k - (1 + 2k_d) e_{k-1} + k_d e_{k-2} \right]$$

de modo que la función de transferencia en z queda de la siguiente forma:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\alpha + \beta z^{-1} + \gamma z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

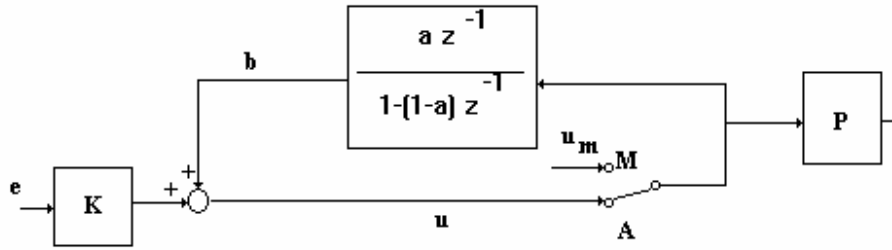


Figura 5.31. PID con Efecto Bumpless.

En la práctica se introducen algunas otras modificaciones para hacerlo más robusto. Una de ellas es el llamado efecto *Bumpless* para evitar acciones bruscas de control al pasar de manual a automático.

$$u_k = k e_k + \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha) z^{-1}} u_{k-1}$$

$$u_k = k \left[1 + \frac{\alpha}{z-1} \right] e_k = k \left[\frac{z-1+\alpha}{z-1} \right] e_k$$

con lo que resulta un PID. Pero en manual, la actuación será la que se imponga manualmente y el término b seguirá a u_m de la forma:

$$b_k = \frac{\alpha z^{-1}}{1 - (1 - \alpha) z^{-1}} u_{m_k}$$

Suponiendo que u_m permanezca constante, b tenderá a este valor. Si al conectar nuevamente el automático no hay error, la actuación coincidirá con el último valor manual sin que haya ningún pico.

$$\begin{cases} u_k = u_{k-1} + e_k - \alpha e_{k-1} \\ u_k = u_m \text{ en manual} \end{cases}$$

Normalmente se introduce otro efecto que es el de Antireset wind up. Este mecanismo lo que hace es saturar el término integral en un valor fijado a fin de evitar actuaciones exageradamente grandes. Recordemos que el PI es intrínsecamente inestable, por lo tanto si integra mucho tiempo tarda en volver a cero. Una forma de evitar esto es limitar la salida, otra es solo integrar para errores pequeños.

5.3 Métodos de ajuste de respuesta transitoria

Varios métodos sencillos de ajuste para controladores PID están basados en experimentos de respuesta transitoria. Muchos procesos industriales tienen una respuesta ante entrada en escalón del tipo mostrado en la Figura 5.31. En la cual, la respuesta escalón es monótona después de un tiempo inicial. Un sistema con una respuesta escalón de este tipo puede ser aproximado por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts} e^{-sL}$$

donde k es la ganancia estática, L el tiempo aparente de retraso, T la constante de tiempo aparente y a es el punto de corte de la tangente con el eje de ordenadas. Hay

que hacer notar que la distancia desde el origen al corte de la prolongación de la recta tangente a la curva (a), cumple la relación,

$$a = k \frac{L}{T}$$

5.3.1. Método de respuesta en escalón de Ziegler-Nichols

Una manera simple de determinar los parámetros de un regulador PID basada en los datos de respuesta en escalón fue desarrollada por Ziegler y Nichols y publicada en 1942. El método usa sólo dos de los parámetros reseñados anteriormente, a y L . Los parámetros del regulador se dan en la siguiente Tabla 5.5.

Controlador	K_c	T_i	T_d
P	$1/a$		
PI	$0.9/a$	$3L$	
PID	$1.2/a$	$2L$	$L/2$

Tabla 5.5. Constantes del controlador en función de la respuesta al escalón.

La regla de ajuste Ziegler-Nichols fue desarrollada a partir de simulaciones empíricas de muchos sistemas diferentes. La regla tiene el inconveniente de que se obtienen sistemas en bucle cerrado que están pobremente amortiguados. Pueden obtenerse sistemas con mejor amortiguamiento por medio de la modificación de los valores numéricos de la tabla.

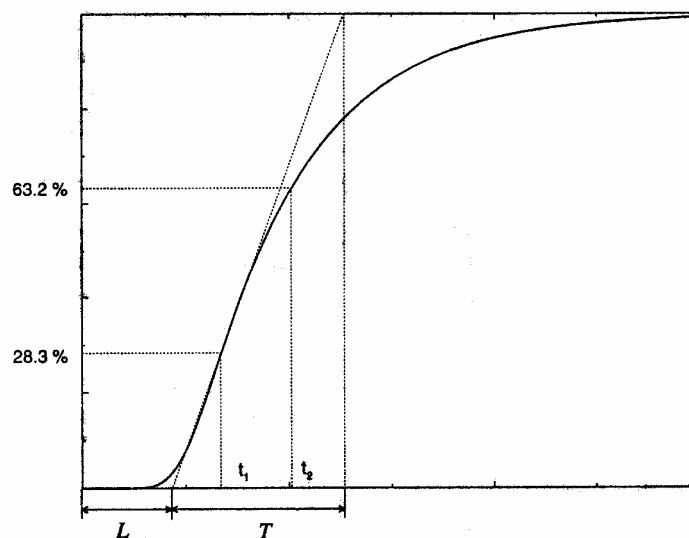


Figura 5.32. Respuesta al escalón unitario de un proceso industrial típico.

Se puede determinar si la regla de Ziegler-Nichols es aplicable mediante el uso de parámetros adicionales. Si está determinada la constante de tiempo T , una regla empírica para establecer si la regla de Ziegler-Nichols es aplicable es considerar si $0.1 < L/T < 1$. Si el valor L/T es grande, entonces es ventajoso usar una ley de control que compense el tiempo muerto. Para valores pequeños de L/T , puede obtenerse un procedimiento mejorado con compensadores de alto-orden. También es posible usar reglas de ajuste más sofisticadas basadas en los tres parámetros.

5.3.2. Caracterización de la respuesta en escalón

Se pueden determinar los parámetros k , L y T a partir de una construcción gráfica tal como la indicada en la Figura 5.32. Tal método es difícil de automatizar. Se puede obtener el parámetro k de la relación de cambios estáticos de entrada y salida en régimen permanente. Hay un método siempre, basado en mediciones de área, para determinar L y T (Figura 5.33). Determinando el área A_0 y A_1 se tiene

$$T + L = \frac{A_0}{k}$$

$$T = \frac{eA_1}{k}$$

donde e es la base del logaritmo natural. Los inconvenientes esenciales al método son que puede ser difícil conocer el tamaño del escalón en la señal de control y determinar si se ha alcanzado el régimen permanente. El escalón debería ser del tamaño suficiente como para que la respuesta del sistema sufra variaciones, y no demasiado grande como para provocar perturbaciones.

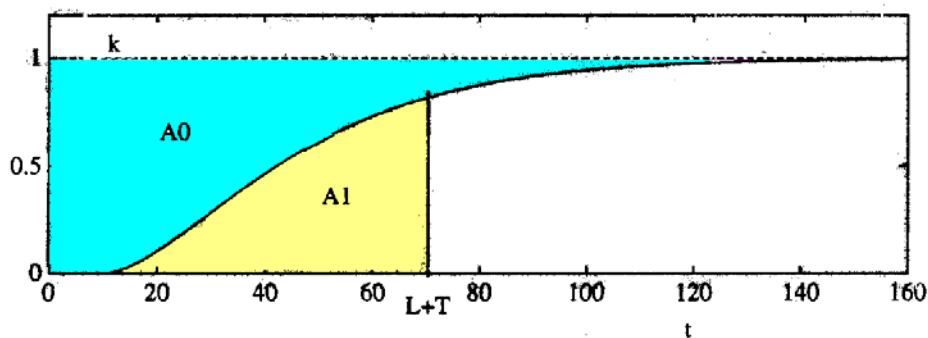


Figura 5.33. Método del área para la determinación de L y T .

Refinamiento en línea

Si se tiene un ajuste razonable del regulador, se puede determinar el amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema en bucle cerrado a partir de la respuesta transitoria en bucle cerrado, pudiéndose mejorar el ajuste del regulador.

5.4 Métodos basados en realimentación con relé.

Los principales inconvenientes de los métodos de respuesta transitoria es que son sensibles a las perturbaciones, porque se basan en experimentos en lazo abierto. Los métodos basados en relé evitan esta dificultad porque los experimentos necesarios son ejecutados en bucle cerrado.

La idea básica es que muchos procesos tendrán oscilaciones de ciclo límite bajo realimentación con relé. Las propiedades esenciales del proceso se pueden determinar de los parámetros del ciclo límite, y por lo tanto se pueden calcular los parámetros de un regulador PID. La Figura 5.34 muestra un diagrama en bloque para la aplicación de este método. Cuando se requiere un ajuste, el conmutador se coloca en la posición T , lo que significa que la realimentación por relé es activada y el regulador PID se desconecta. Cuando se alcanza un ciclo límite, se calculan los parámetros del PID. Posteriormente se conecta el controlador PID al proceso.

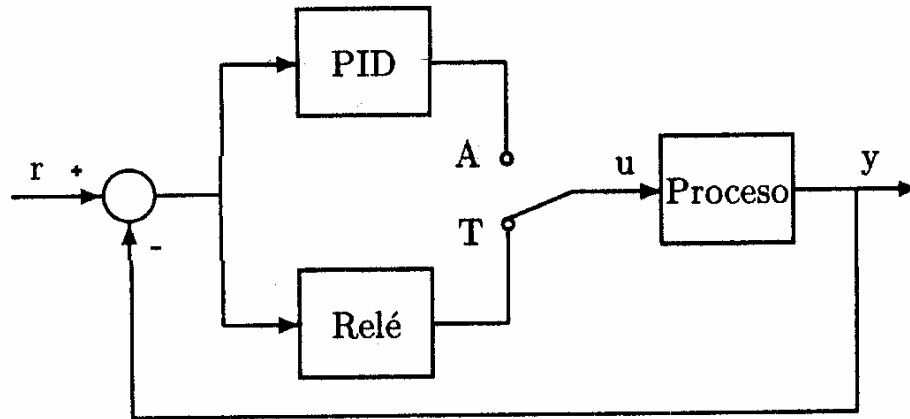


Figura 5.34. Diagrama de bloque de sintonía automática por el método del relé.

5.4.1. El método de Ziegler-Nichols en bucle cerrado.

El método de Ziegler-Nichols basado en la respuesta en frecuencia o en lazo cerrado consiste en lo siguiente: Se realimenta la planta con un regulador proporcional, P . Se aumenta la ganancia hasta que el sistema presente una oscilación no amortiguada. Se mide la ganancia K_u en la que empezó la oscilación y el período T_u de las oscilaciones. Con los valores de K_u y T_u se obtienen los parámetros del controlador al usar la Tabla 5.6.

Estos parámetros dan un sistema en bucle cerrado con amortiguamiento bajo. Sistemas con mejor amortiguamiento pueden obtenerse por ligeras modificaciones de los valores de la Tabla 5.6.

Una regla simple para escoger los parámetros de los reguladores PID está idealmente emparejada a la determinación de K_u y T_u por el método del relé. Para poder tener una idea de la información que se puede obtener en un experimento con el método del relé se describe un método aproximado del comportamiento.

Controlador	K_c	T_i	T_d
P	$0.5K_u$		
PI	$0.4K_u$	$0.8T_u$	
PID	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.12T_u$

Tabla 5.6. Constantes del controlador en función de la respuesta al escalón.

5.4.2. El método del balance armónico.

A continuación se va a comentar un método aproximado llamado método de balance armónico o el método de la función descriptiva. Considerando un sistema realimentado simple, compuesto de una parte lineal con la función de transferencia $G(s)$ y la realimentación con un relé ideal. El diagrama de bloques se muestra en la Figura 5.35.

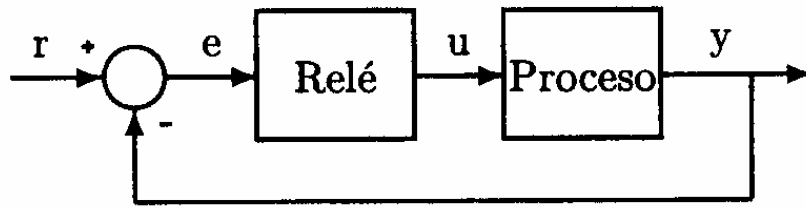


Figura 5.35. Sistema lineal con control por relé

Se asume que $r = 0$. Se puede determinar una condición (en forma de aproximada) para que aparezcan las oscilaciones sigue: Asumiendo que hay un ciclo límite con período T_u , y frecuencia $\omega = 2\pi/T_u$ tal que la salida de relé es una onda simétrica periódica cuadrada. Si la amplitud del relé es d , por expansión en serie de Fourier de la salida de relé, se muestra que el primer armónico tiene la amplitud $4d/\pi$. Además se asume que el proceso dinámico tienen un carácter de filtro paso bajo y que la contribución del primer armónico domina la salida. La señal de error tiene entonces la amplitud

$$a = \frac{2d}{\pi} |G(j\omega_u)|$$

La condición para la oscilación es tal que

$$\arg[G(j\omega_u)] = -\pi \text{ y } K_u = \frac{4d}{\pi a} = \frac{1}{|G(j\omega_u)|} \quad (5.176)$$

donde K_u puede interpretarse como la ganancia equivalente del relé para transmisión de señales sinusoidales con amplitud a . La condición es además que el sistema lineal en la Figura 5.35, tenga una curva Nyquist que intercepte el eje real negativo. La amplitud a y la frecuencia de oscilación ω_u son fácilmente deducibles de la ecuación (5.176). La frecuencia del ciclo límite es además automáticamente ajustada a la frecuencia ω_u , en la cual el proceso dinámico en bucle abierto tiene un retraso de fase de 180° . Físicamente K_u es la ganancia que lleva el sistema al límite de estabilidad bajo control proporcional. Un experimento con realimentación por relé dará además el período y la amplitud de la función de transferencia en bucle abierto del proceso en la frecuencia en la cual el retardo de fase es 180° . Hay que hacer notar también que una señal de entrada cuyo contenido de energía está concentrado en ω_u , es generada automáticamente en el experimento.

Se pueden utilizar varios refinamientos o mejoras del método. La amplitud de las oscilaciones del ciclo límite pueden especificarse por introducción de una realimentación que ajuste la amplitud del relé. Por otro lado, una histéresis en el relé es útil para hacer al sistema menos sensible al ruido. Se va a mostrar a continuación como determinar los parámetros de un regulador PID. El método puede ser insensible a las perturbaciones por comparación y promediado de varios períodos de oscilación.

Estimaciones mejoradas

A partir del experimento del relé se han obtenido, sólo dos parámetros (K_u y T_u). Cambiando el punto de trabajo durante el experimento es posible determinar la ganancia estática (k) del proceso. El producto kK_u , puede utilizarse para evaluar si el ajuste del regulador PID mediante las reglas de Ziegler Nichois es adecuado. Si $2 < kK_u < 20$ entonces puede utilizarse el método. Valores más pequeños indican que se necesita una

ley de control que admita compensación del tiempo muerto. Valores más grandes indican que debe utilizarse un algoritmo de control más complejo.

5.4.3. Oscilaciones de relé.

Dado que los ciclos límites con realimentación por relé es una idea clave de los métodos de ajuste automático por relé, es importante comprender por qué un sistema lineal oscila en estas condiciones y cuando la oscilación es estable. Es importante también tener métodos para la determinación del período y la amplitud de las oscilaciones. Considerando el sistema mostrado en la Figura 5.35, e introduciendo la realización en el espacio de estados de la función de transferencia $G(s)$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ y &= C\mathbf{x}\end{aligned}\tag{5.177}$$

El relé puede ser descrito por

$$u = \begin{cases} d, & \text{si } e > 0 \\ -d, & \text{si } e < 0 \end{cases}\tag{5.178}$$

donde

$$e = r - y$$

A continuación se va a analizar el periodo del ciclo límite. Para ello asumiendo que el sistema definido en la Figura 5.35 y las ecuaciones (5.177) y (5.178) tiene un ciclo límite, simétrico con período T . El período T es entonces el valor más pequeño de $T > 0$ que satisface la ecuación [Åstrom and Wittenmark, 1995, pag. 386],

$$C(I + \Phi)^{-1} \Gamma = 0\tag{5.179}$$

donde

$$\Phi = e^{AT/2}$$

y

$$\Gamma = \int_0^{T/2} e^{As} ds B$$

Hay que hacer notar que la condición de la ecuación (5.179) puede escribirse también como,

$$H_{T/2}(-1) = 0\tag{5.180}$$

donde $H_{T/2}(z) = 0$ es la función de transferencia al impulso obtenida cuando se muestrea el sistema de ecuación (5.177) con período $T/2$.

Se debe remarcar que el periodo está dado por la ecuación (5.180) también se mantiene para sistemas lineales con retardos de tiempo, siempre que $T/2$ sea mayor o igual que el retardo. Se pueden deducir condiciones similares para sistemas con un relé con histéresis.

Habiendo obtenido la fórmula exacta de la ecuación (5.179) para T , es posible investigar la precisión de la aproximación de la función descriptiva. Considerando el caso simétrico e introduciendo $h = T/2$. La función de transferencia al impulso obtenida cuando se muestrea el sistema de ecuación (5.177) con período $h = T/2$ está dada por

$$H_h(e^{sh}) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s + jn\omega_s} (1 - e^{-h(s + jn\omega_s)}) G(s + jn\omega_s)$$

donde $\omega_s = 2\pi/h$. Haciendo $sh = j\pi$

$$\begin{aligned}
 H_h(-1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{j(\pi + 2n\pi)} G\left(j \frac{\pi + 2n\pi}{h}\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(1+2n)} \operatorname{Im} \left[G\left(j \frac{\pi + 2n\pi}{h}\right) \right] = 0
 \end{aligned}$$

El primer término de la serie da,

$$H_h(-1) \approx \frac{4}{\pi} \operatorname{Im} \left[G\left(j \frac{\pi}{h}\right) \right] = \frac{4}{\pi} \operatorname{Im} \left[G\left(j \frac{2\pi}{h}\right) \right] = 0$$

que es el mismo resultado para el cálculo de T obtenido del análisis de la función descriptiva. Esto implica que la aproximación de la función descriptiva es correcta sólo si $G(s)$ tiene un carácter de paso-bajo.

5.5. Conclusión.

En esta sección se describe un método simple y robusto que se puede usar para obtener una estimación grosera de la dinámica del proceso. El método se puede usar para la sintonía automática de un controlador simple del tipo del PID. Además se puede usar como para realizar la pre-sintonía de algoritmos de control adaptable más sofisticados. Se discutieron dos tipos de métodos: Un método basado en la respuesta a lazo abierto al escalón y un método basado en la respuesta a lazo cerrado con un relé.

Cuestionario y ejercicios

Ejercicio 5.1: Introducción Reguladores con Sintonía Automática (Automatic Tuning)

- ¿En que consisten los reguladores de sintonía automática y cual es su justificación?
- ¿Por que en los sistemas adaptable de auto-sintonía y modelo de referencia hay que tener conocimiento previo del sistema?

Ejercicio 5.2: Control PID

- ¿Como se obtiene la acción de control en un controlador del tipo PID?
- ¿Cuales son los efectos de la acción de control Proporcional, Integral y Derivativa?

Ejercicio 5.3: Métodos de ajuste de respuesta transitoria

- ¿En que consiste el método de ajuste del PID por respuesta transitoria?
- ¿Como se ajusta un PID por el método de respuesta en escalón de Ziegler-Nicholsy que inconvenientes presenta?
- ¿Como se ajusta el PID por el método de las áreas?

Ejercicio 5.4: Métodos basados en realimentación con relé

- ¿Que inconvenientes presentan los métodos de respuesta transitoria?
- ¿Cuál es la idea básica que explota el método del relé?
- ¿En que consiste el método de Ziegler-Nichols en bucle cerrado?
- ¿Que sucede en el sistema de control cuando se reemplaza el PID por un relé?

6. CONTROL POR GANANCIAS TABULADAS.

6.1. Introducción.

Algunas veces es posible encontrar variables auxiliares que correlacionan bien los cambios en la dinámica de un proceso. Es entonces posible reducir los efectos de las variaciones de los parámetros simplemente cambiando los parámetros del regulador como función de las variables auxiliares [Åström and Witternmark, 1995]. A este esquema de control adaptable se le llama Control por Ganancias Tabuladas, Ajuste por tabla de controladores (en inglés: Gain-Scheduling Control)

Como se observa en la Figura 6.36, el ajuste por tabla se puede ver como un sistema de control realimentado, en el que las ganancias de realimentación son ajustadas usando una compensación de pre-alimentación. Como ejemplo, en los sistemas de vuelo se usan como variables auxiliares el, número de Mach y la presión dinámica, que pueden medirse mediante sensores.

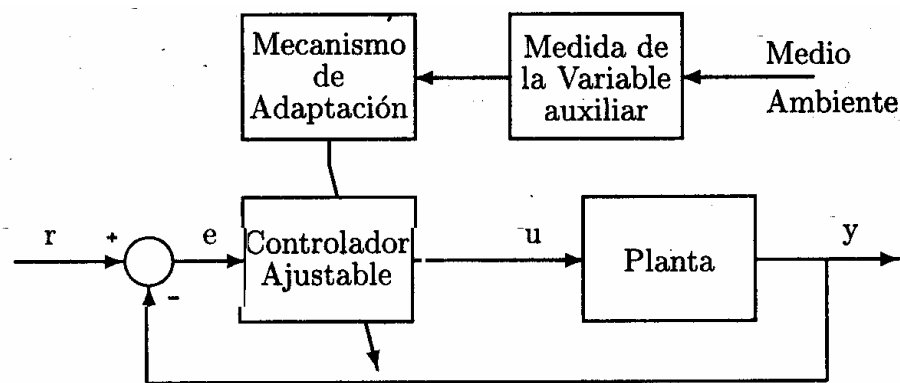


Figura 6.36. Controlador ajustable por tabla

El problema principal en el diseño de sistemas con ajuste por tabla es encontrar las variables auxiliares apropiadas. Esto se hace normalmente basándose en el conocimiento físico del sistema. En control de procesos, el caudal de producción puede escogerse frecuentemente como variable auxiliar, puesto que las constantes de tiempo y tiempo de retardo son inversamente proporcional a dicho caudal.

Cuando se determinan las variables auxiliares, los parámetros del regulador se calculan para un determinado número de condiciones de operación, usando algún método de diseño adecuado. El regulador es por tanto sintonizado o calibrado para cada condición de operación. La estabilidad y actuación del sistema son evaluados por simulación; teniendo una atención especial a la transición entre diferentes condiciones de operación. Algunas veces es posible obtener ajuste por tabla introduciendo las transformaciones no lineales de tal manera que el sistema transformado no depende de las condiciones de operación. Las medidas auxiliares se usan junto con las medidas del proceso para calcular las variables transformadas. La variable de control transformada se calcula y se retransforma antes de ser aplicada al proceso. El regulador resultante puede considerarse compuesto de dos transformaciones no lineales con un regulador lineal en medio. Otras

veces la transformación se basa en las variables obtenidas indirectamente a través de estimación de estados.

El ajuste por tabla tiene la ventaja de que los parámetros del regulador pueden cambiarse muy rápidamente en respuestas a los cambios del proceso. Puesto que no existe estimación de los parámetros, la limitación depende de como de rápido responden las medidas auxiliares a los cambios del proceso.

6.2. Diseño de reguladores con ajuste por tabla.

Es difícil dar reglas generales para diseñar este tipo de reguladores. La cuestión clave es determinar las variables que pueden usarse como variables de ajuste. Es claro que estas señales auxiliares deben reflejar las condiciones de operación de la planta. Idealmente tendríamos una expresión que relaciona los parámetros del regulador con las variables de ajuste. Es necesario por tanto tener una buena información de la dinámica del proceso, si se utiliza el ajuste por tabla.

Como ideas generales para el diseño debemos tener en cuenta los siguientes casos:

- Linealización de actuadores no lineales.
- Ajuste por tabla basado en medida de variables auxiliares.
- Ajuste de tiempo basado en el caudal de producción.
- Transformaciones no lineales.

A continuación se dan una serie de ejemplos para explicar estos conceptos.

6.2.1. Ejemplo de actuador no lineal.

Considerando el sistema no lineal de la Figura 6.37, con un regulador PI cuyo actuador es una válvula con la característica,

$$v = f(u) = u^4, \quad u > 0$$

Sea \hat{f}^{-1} una aproximación de la inversa de la característica de la válvula. Para compensar la no linealidad, la salida del regulador se lleva a través de esta función antes de ser aplicada a la válvula,

Esto da la relación,

$$v = f(u) = f(\hat{f}^{-1}(c))$$

donde c es la salida del regulador PI. La función $f(\hat{f}^{-1}(c))$ debería tener menos variación en ganancia que f . Si \hat{f}^{-1} es la inversa exacta, entonces $v = c$.

Si consideramos que $f(u) = u^4$ puede ser aproximada por dos líneas: una conectando los puntos (0,0) y (1.3,3), y otra conectando este punto y el (2,16), entonces tenemos la Figura 6.38 en donde

$$f^{-1}(c) = \begin{cases} 0.433c & 0 \leq c \leq 3 \\ 0.0538c + 1.139 & 3 \leq c \leq 16 \end{cases}$$

La Figura 6.39 muestra los cambios en la señal de referencia en cuatro condiciones de operación diferentes cuando utilizamos la aproximación de la inversa de la válvula. Se observa una considerable mejora en la respuesta del sistema. Con esta mejora es posible hacer al proceso más insensible a la no-linealidad de la válvula.

Este ejemplo nos muestra una idea muy útil y simple para compensar no linealidades conocidas. En la práctica es a menudo suficiente aproximar la no linealidad mediante unos pocos segmentos lineales. Hay varios controladores comerciales que pueden hacer esta clase de compensación.

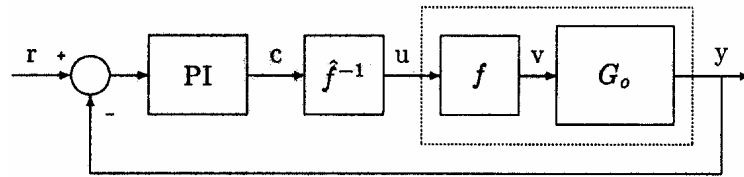


Figura 6.37. Compensación no lineal del actuador

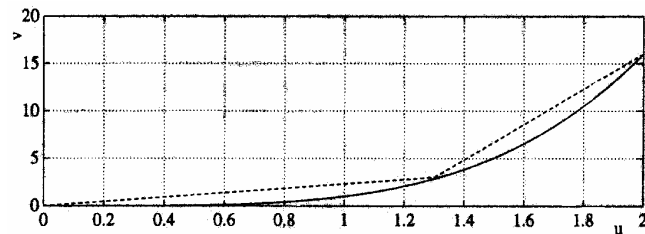


Figura 6.38. Característica no lineal de la válvula

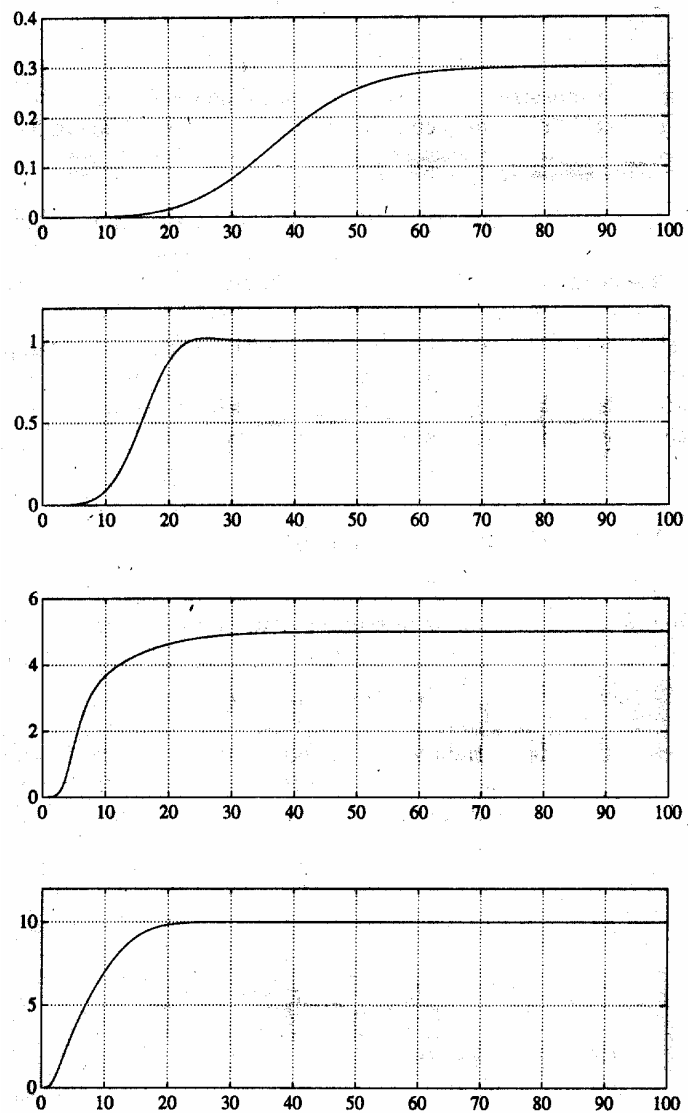


Figura 6.39. Respuesta a escalón del sistema compensado

6.2.2. Tanque de sección variable.

Consideremos un tanque donde la sección A varía con la altura h . El modelo es,

$$\frac{d(A(h)h)}{dt} = q_i - a\sqrt{2gh}$$

donde q_i es el flujo de entrada y a es la sección de la tubería de salida. Si q_i es la entrada y h la salida del sistema, el modelo linealizado en un punto de operación, q_{in}^0 y h^0 , viene dado por la función de transferencia,

$$G(s) = \frac{\beta}{s + a}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{A(h^0)}$$

controlador PI del tanque viene dado por,

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int (e\tau) d\tau \right)$$

donde

$$K = \frac{2\xi\omega - \alpha}{\beta}$$

$$T_i = \frac{2\xi\omega - \alpha}{\omega^2}$$

Esto nos da un sistema de bucle cerrado con una frecuencia natural ω y un amortiguamiento relativo ξ .

Introduciendo las expresiones de α y β se tiene el siguiente controlador ajustable por tabla,

$$K = 2\xi\omega A(h^0) - \frac{q_{in}^0}{2h^0}$$

$$T_i = \frac{2\xi}{\omega} = \frac{q_{in}^0}{2A(h^0)h^0\omega^2}$$

Los valores numéricos son frecuentemente tal que $\alpha \ll 2\xi\omega$, por lo que las expresiones pueden simplificarse entonces a

$$K = 2\xi\omega A(h^0)$$

$$T_i = \frac{2\xi}{\omega}$$

En este caso, es por tanto suficiente hacer la ganancia proporcional a la sección del tanque. En la Figura 6.40 se muestra la respuesta de este regulador para un tanque piramidal con sección variable igual hl .

Este ejemplo pone de manifiesto que algunas veces se pueden medir una o dos variables en un proceso y usarlas como entradas para el ajuste de la ganancia. Frecuentemente no es tan fácil como aparece en este ejemplo, determinar los parámetros del controlador como función de las variables medidas. El diseño del regulador debe entonces rehacerse para diferentes puntos de trabajo del proceso. También debe tenerse cuidado con las

señales que se miden por si tienen ruidos, en este caso pueden filtrarse antes de ser utilizadas como variables de ajuste.

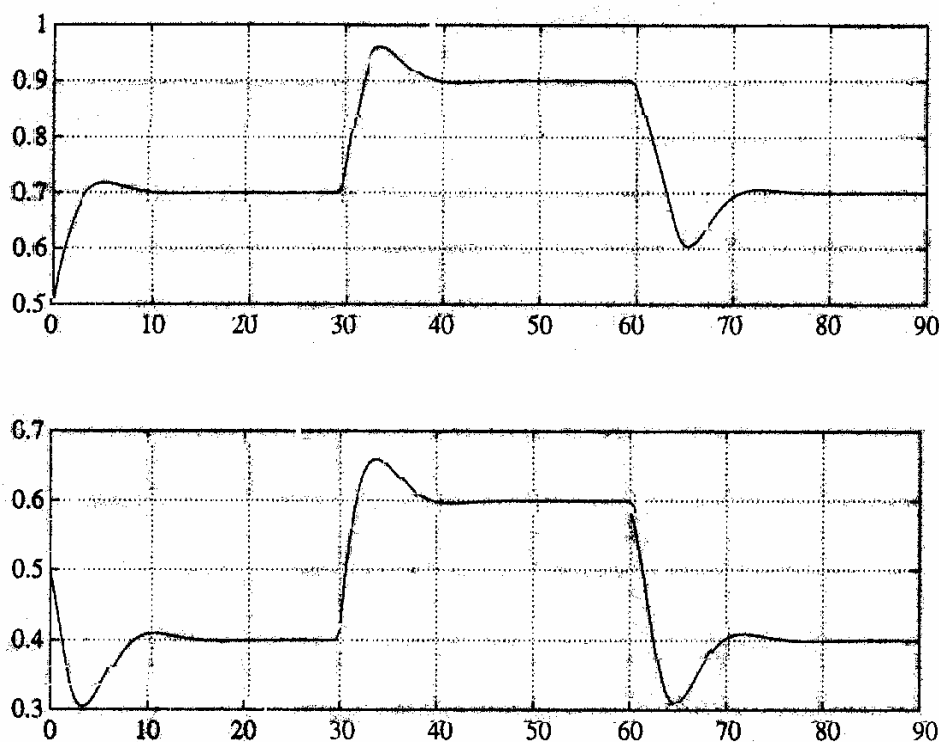


Figura 6.40. Respuesta del sistema en diferentes puntos de trabajo

6.2.3. Transformación no lineal.

Es de gran interés encontrar las transformaciones que hacen al sistema transformado lineal e independiente de las condiciones de operación. En algunos procesos esto puede hacerse mediante escalas de tiempos. Todos los procesos asociados con el flujo de material tienen esta propiedad: molinos rodantes, bandas transportadoras, flujo en tuberías, etc.

Un sistema de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))y(t)$$

puede ser transformado en un sistema lineal, con tal de que todos los estados del sistema puedan ser medidos y darse las condiciones de observabilidad generalizada.

El diseño se hace en primer lugar transformando el sistema en un sistema lineal fijo. La transformación es generalmente no lineal y depende de los estados del proceso. Entonces se diseña un regulador para el modelo transformado, y las señales de control del modelo son retransformadas en las señales de control originales. El resultado es un controlador no lineal de tipo especial, que puede ser interpretado como un controlador de ajuste por tabla. El controlador se construye a partir del conocimiento acerca de las no linealidades en el modelo.

Transformación no lineal de segundo orden

Consideremos el sistema,

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, u)\end{aligned}$$

Supongamos que las variables de estado pueden ser medidas y que queremos encontrar una realimentación tal que la respuesta de la variable x , a la señal de mando viene dada por la función de transferencia,

$$G(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \quad (6.181)$$

Introduciendo nuevas coordenadas z_1 y z_2 definidas como,

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ z_2 &= \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

y la nueva señal de control v , definida por

$$v = F(x_1, x_2, u) = z_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 \quad (6.182)$$

De estas transformaciones resulta un sistema lineal,

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= v\end{aligned} \quad (6.183)$$

Fácilmente se observa que la realimentación lineal

$$v = \omega^2(u_c - z_1) - 2\xi\omega z_2 \quad (6.184)$$

de la función de transferencia en bucle cerrado (6.181) de u_c , $z_1 = x_1$ para el sistema lineal de la ecuación (6.183), se continua para transformar a las variables originales. De las ecuaciones (6.182) y (6.184) se tiene para las variables originales

$$v = F(x_1, x_2, u) = \omega^2(u_c - x_1) - 2\xi\omega f_2(x_1, x_2)$$

Resolviendo esta ecuación para u se obtiene la realimentación deseada. Del teorema de la función implícita, una condición para la solución local es que la derivada parcial $\partial F/\partial u$ sea diferente de cero. La generalización del ejemplo requiere una solución al problema general de transformar un sistema no lineal en uno lineal mediante realimentación no-lineal. Una versión simple del problema también se da en el control de robots industriales. En este caso la ecuación básica puede escribirse como

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = T_e$$

donde J es el momento de inercia, φ un ángulo de una unión, y T_e un par que depende de la corriente del motor, los ángulos de par, y sus dos derivadas. Las ecuaciones son por tanto de la forma considerada y la realimentación no lineal se obtiene determinando las corrientes que dan el par deseado. El problema se llama transformación de par.

6.3. Conclusiones.

El control por ajuste por tablas es una manera muy buena para compensar las no linealidades conocidas. Con este esquema el controlador reacciona rápidamente a

condiciones que cambian. Un inconveniente de este método es que el proceso de diseño consume mucho tiempo si no se pueden usar transformaciones no lineales o métodos de auto-sintonía. Otro inconveniente de este método es que los parámetros del controlador se cambian a lazo abierto, sin ninguna realimentación del desempeño del sistema a lazo cerrado. Esto provoca que este tipo de métodos sean imposibles de usarlos si no se conocen con precisión las dinámicas del proceso o de las perturbaciones.

Cuestionario y ejercicios

Ejercicio 6.1: Introducción al Control por Ganancias Tabuladas

- ¿En que consisten los controladores por ganancias tabuladas?
- ¿Cual es el problema principal del diseño de este tipo de controladores?
- ¿Que ventajas presenta respecto de otros sistemas adaptables?
- ¿Cuales son las ideas generales para el diseño de este tipo de controlados?

Ejercicio 6.2: Ejemplo de actuador no lineal

Simular el sistema no lineal presentado en la sección 6.2.1.

La planta toma la forma

$$G_0 = \frac{1}{(s+1)^3}$$

El actuador no lineal tiene una respuesta de la forma

$$v = f(u) = u^4, \quad u > 0$$

La función de transferencia del PI es

$$G_{PI} = \frac{u_{PI}}{e} = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

donde $e = r - y$

1) Considerando que $\hat{f}^{-1} = 1$ (no se realiza compensación por tabla) ajustar los valores del PI para obtener una buena respuesta en forma simultánea para los 4 casos siguientes:

- A) Escalón de 0.3 (la referencia pasa de $r = 0$ a $r = 0.3$)
- B) Escalón de 1.0 (la referencia pasa de $r = 0$ a $r = 1.0$)
- C) Escalón de 5.0 (la referencia pasa de $r = 0$ a $r = 5.0$)
- D) Escalón de 10.0 (la referencia pasa de $r = 0$ a $r = 10.0$)

Los valores sugeridos son $K = 0.15$ y $T_i = 1$.

2) Considerar la compensación por tabla sugerida en la sección 6.2.1, ajustar los valores del PI para los mismos casos que en el punto anterior (Obtener gráficos similares a los dados en la [Figura 4](#)).

Obtener conclusiones de las simulaciones realizadas.

Ejercicio 6.3: Ejemplo de actuador no lineal

Simular el sistema con control por tablas presentado en la sección 6.2.2. dando valores a las diferentes constantes del ejemplo. Primero ajustar un PI de parámetros fijos y luego obtener gráficas similares a presentadas en la [Figura 5](#).

7. EQUIPOS COMERCIALES.

En esta sección se presentan algunos productos comerciales. Este no es un análisis exhaustivo y algunos de los productos presentados se encuentran descontinuados o absorbidos por desarrollos más completos de los sistema de control. La bibliografía recomendada en este tema es [Åström and Witternmark, 1995] y [Åström, 1987]

7.1. Controladores Adaptativos Predictivos.

7.1.1. Asea-Brown Boveri (ABB): Novatune.

El **Novatune** es un regulador adaptativo de auto-sintonía incluido dentro del sistema de control **Asea-Brown Boveri (ABB)**. Es un ejemplo de regulador adaptativo directo basado en un controlador predictivo de mínima varianza lo que permite compensar la acción de perturbaciones aleatorias. Este fue presentado en 1982

El algoritmo de identificación es el clásico de mínimos cuadrados recursivos incluyendo un factor de olvido. En el caso de un control adaptativo directo el identificador se modifica para estimar directamente los parámetros del regulador.

El controlador de mínima varianza se ha modificado para poder posicionar uno de los polos en lazo cerrado y por otro lado, penaliza la variable de control para reducir los esfuerzos en la actuación [Åström and Witternmark, 1995].

El modelo considerado por este equipo es del tipo predictivo que expresado en función de los parámetros del bloque resulta

$$(1 - PLq^{-1})y(t + KD) - (1 - PL)y(t) = A(q^{-1})(\Delta y(t) + B(q^{-1})\Delta u(t) + C(q^{-1})\Delta v(t))$$

la ley de control de mínima varianza resulta:

$$(\rho + B(q^{-1}))\Delta u(t) = (1 + PL)(u_c(t) - y(t)) - A(q^{-1})\Delta y(t) - C(q^{-1})\Delta v(t)$$

Luego se modifica el algoritmo de estimación para lograr el regulador directo o implícito como hemos visto anteriormente. Al igual que en otros reguladores también con éste se puede lograr un comportamiento similar a un PID haciendo $NA = 2$ y $NB = 1$. La elección normal de estos parámetros es $NA = NB = NC = 3$.

7.1.2. First Control Systems AB: Firstloop.

El componente Firstloop es un desarrollo de First Control Systems. Esta compañía esta fundada por el equipo de trabajo que desarrollo el Novatune.

Este controlador forma parte de un autómata con funciones más generales llamado **First Controller**. Consiste en un regulador predictivo con asignación de polos. Se puede optar entre diferentes versiones del algoritmo incluso convertirlo en un PID.

El modelado del proceso se hace por estimación recursiva de parámetros incluyendo un factor de olvido en el algoritmo de modo que da mayor importancia a las muestras más recientes. Se activa la identificación solo cuando el sistema muestra cierta actividad que permite conseguir el correcto modelado.

El usar un control por asignación de polos que garantiza el cumplimiento de las especificaciones dadas por el usuario. Cuando se instala por primera vez el controlador, al no conocerse el proceso, el equipo toma por defecto un regulador integral muy lento. Luego de 20-50 muestras se puede considerar que el controlador está satisfactoriamente ajustado.

Consta de una opción para sumar un control de prealimentación. Se define una o dos variables como señales de prealimentación y el equipo genera un modelo para conocer el efecto de estas señales en la salida. Además, al ser un regulador predictivo es relativamente sencillo compensar el efecto de los retardos.

7.1.3. SCAP Europa: SCAP.

Este es un producto español y sus siglas corresponden a Sistema de Control Adaptativo Predictivo. Juan Manuel Martín Sánchez presenta la primera patente en control predictivo en 1976 y funda en 1986 la compañía SCAP Europa que realizó más de 150 aplicaciones industriales de control adaptativo predictivo hasta 1998 [Martín Sanchez y Rodellar, 1995]. Como su nombre lo indica es un controlador predictivo en particular basado en un modelo de referencia o bloque de consigna como lo llama el fabricante.

Es un controlador indirecto o sea que consta de un primer cálculo de los parámetros del modelo para luego computar la variable de control.

El algoritmo de identificación es por minimización del cuadrado del error de estimación (método del gradiente) y su forma básica es la siguiente

$$\theta(k) = \theta(k-1) + \frac{\psi^2 e(k/k-1)x(k-1)}{1 + \psi^2 x^T(k-1)x(k-1)}$$

$$\theta(k) = [\theta_0 \quad \theta_1]$$

donde

θ es el vector de parámetros estimados,

x el vector de mediciones,

e el error de estimación,

ψ un escalar que se define para asegurar la convergencia del algoritmo haciéndolo igual a 0 para errores menores a una cierta cota.

El equipo está pensado en forma general para aceptar sistemas multivariantes (MIMO).

La ley de control es la clásica de los controladores predictivos:

$$u(k) = \frac{1}{\theta_1(k)} [r(k+d+1) - \theta_0(k)\phi(k)]$$

$$\phi(k) = [y(k) \dots u(k) \dots]$$

La señal r es la salida del bloque de consigna o modelo de referencia. El período de muestreo del controlador es de 200 ms. Como el resto de los productos tiene una serie de modos lógicos de operación y seguridades. Se pueden controlar varios lazos, incluso formar un sistema de control distribuido.

7.2. Controladores PID Autoajustables con Programación de Parámetros.

7.2.1. Taylor Instruments Company: MOD 30 System.

Esta firma (absorbida por ABB en 1990) presentó en 1980 el sistema de panel de control MOD 30. Este es un regulador PID basado en la programación de la ganancia o la constante de integración (no ambas a la vez). La función de variación puede ser dada por una entrada del proceso, el error, una entrada remota o una señal discreta (o todas a la vez).

Para ambos cambios se define un valor activo de ganancia o integral (active gain o active reset time) de la siguiente forma:

$$VA = VB \times FEP \times FE \times FS \times FER \times FC$$

donde

- VA : valor activo de ganancia o integral,
- VB : valor base o de partida,
- FEP : factor de corrección función de la entrada de proceso,
- FE : factor de corrección función del error,
- FS : factor de corrección función de la salida,
- FER : factor de corrección función de una entrada remota,
- FC : factor de corrección función de un contacto discreto externo.

Si no se activa la función para la adaptación de las ganancias, entonces la ganancia base (BV) es la ganancia activa. Si se activa la función para la adaptación la ganancia activa será el producto de todos los factores.

Los diferentes factores pueden tomar diferentes valores de acuerdo a la variable que estén referidas. De esta forma se implementa un sistema con programación de las ganancias. En la Figura 7.1 Se muestra la curva de corrección que se puede implementar para cada uno de los factores. Para Lograr esta gráfica se deberán definir BP1, BP2, GF1 y GF2 siendo los dos primeros los puntos de corte de la curva y los últimos las pendientes de los tramos oblicuos.

Una aplicación que plantean los fabricantes es el control de nivel de volúmenes cuya superficie de corte horizontal es variable.

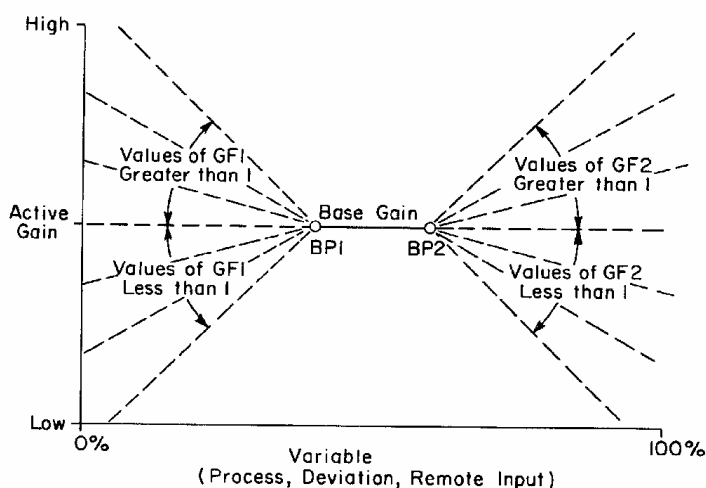


Figura 7.1. Curva de Corrección del MOD 30.

7.2.2. Toshiba: EC300 Series.

Este regulador es un PID autoajutable que emplea un algoritmo de identificación de parámetros para modelar el proceso. Para esta tarea se superpone, durante la estimación, una secuencia pseudoaleatoria de una amplitud igual al 1% de la variable de control. Con esto se evita perturbar al proceso en forma indebida.

La respuesta en lazo cerrado puede ser elegida entre cuatro tipos de modelos según el sobrepico y el tiempo de crecimiento deseados.

Para ajustar convenientemente la respuesta frente a cambios en la referencia y perturbaciones se agrega un prefiltro en la referencia. Esta forma de diseñar el regulador es llamada por los fabricantes PID con dos grados de libertad.

También tiene la posibilidad de elegir entre una tabla de controladores precalculados (un máximo de 10). La variable que actúa de conmutador puede ser una señal externa, la

salida del proceso, la referencia, la entrada o desviaciones del control. Esto permite el ajuste cuando los cambios de la planta son muy bruscos.

7.3. PID Autoajustables.

7.3.1. Foxboro: Exact.

El algoritmo EXACT de Foxboro toma el nombre de **Expert Adaptive Controller Tuning**. Emula el razonamiento de un ingeniero de control de Foxboro. Está implementado con tecnología de sistemas expertos. En concreto es un sistema basado en reglas.

El ajuste de los parámetros de reguladores PID en Foxboro está basado en los trabajos de Shinskey, que extienden y profundizan las reglas de Ziegler-Nichols.

Si se asume que los parámetros del controlador están ajustados, de tal forma que el sistema en lazo cerrado es estable, una respuesta típica del error a una perturbación tipo escalón o a un impulso, se muestra en la Figura 7.2. Una lógica heurística se usa para detectar que una perturbación adecuada ha ocurrido y para detectar los picos e_1 , e_2 y e_3 , y el periodo de T_p . El diseño de control se basa en las especificaciones de amortiguamiento d , definido como

$$d = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}$$

, el sobrepico o , definido como

$$o = \frac{e_2}{e_1}$$

y las relaciones T_i/T_p y T_d/T_p , donde T_i y T_d son las constantes integral y derivativa respectivamente.

Un valor típico para d y o es 0.3. Se usan reglas empíricas para calcular los parámetros del controlador a partir de d , o y T_p . Estas reglas están basadas en las reglas tradicionales del Tipo Ziegler-Nichols.

El modo adaptativo normal es el modo **auto-ajuste**. En este modo, el bucle está cerrado con un regulador PID. El algoritmo vigila la señal de error $e(t)$ y cuando ésta evoluciona por cambios en la referencia o en la carga, estima el amortiguamiento, la sobreoscilación y el período de las oscilaciones.

Las reglas de ajuste son de la siguiente forma:

Si $e(t)$ ha sido oscilatoria y el amortiguamiento y la sobreoscilación están por debajo de los máximos especificados al algoritmo, se aumenta K en una cantidad proporcional a la distancia a los mencionados máximos.

Si $e(t)$ no ha sido oscilatoria se aumenta K y se disminuye T_i y T_d en una cantidad dependiente de la mencionada distancia a los máximos.

Los parámetros que el usuario debe fijar son, básicamente, los valores máximos de la sobreoscilación y el amortiguamiento.

El método descrito es bastante antiguo y nos permite aproximarnos al funcionamiento del EXACT, si bien no explicarlo en detalle.

El EXACT requiere información para realizar la sintonía del mismo ya que debe estar el PID medianamente sintonizado. Para proveerse de esta información, el EXACT puede utilizarse en modo pre-sintonía. En este modo, el proceso es excitado en lazo abierta con un escalón, ajustándose los parámetros del regulador mediante reglas del tipo de Ziegler-Nichols de lazo abierto. También en este experimento se obtienen una

estimación del ruido del proceso, una cota para el valor de T_d ligada al contenido de ruido y una estimación del tiempo máximo que el algoritmo debe esperar al 2º pico de $e(t)$.

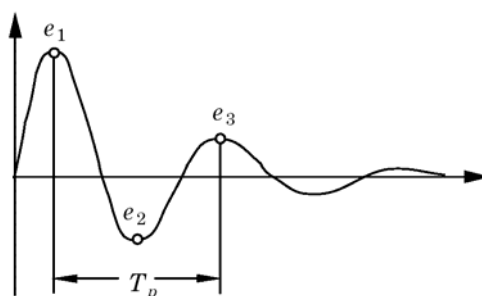


Figura 7.2. Esquema en lazo cerrado para el EXACT

7.3.2. Fischer & Porter: Easy-Tune.

La compañía Fischer & Porter fue fundada en 1937 y actualmente se encuentra integrada al grupo ABB. Este producto tiene como controlador un PID y el modelo de la planta se ajusta en lazo abierto. Se excita el proceso en cadena abierta con un escalón unitario y se aproxima la respuesta por un modelo de primer orden con retardo puro, es decir

$$G(s) = \frac{k_p}{1 + T_p s} e^{-W_p s}$$

El valor de k_p viene dado por la amplitud de la salida. Para estimar W_p y T_p se miden en la respuesta del proceso los tiempos t_A , t_B para los cuales pasa por el 28.35% y el 63.21% de su valor final (Figura 7.3). Se escogen los valores de W_p y T_p tales que el modelo pase por los citados valores en los mismos tiempos.

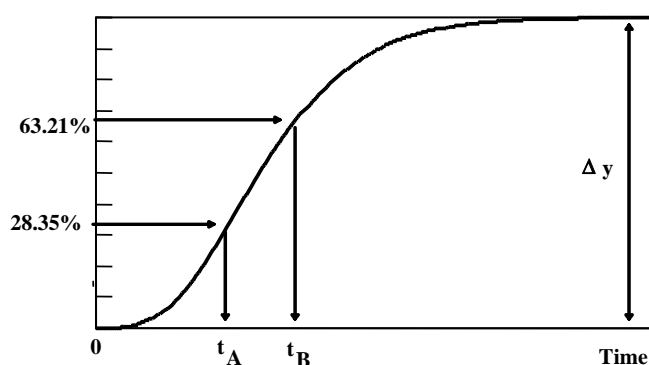


Figura 7.3. Modelo aproximado del Easy-Tune

Las ecuaciones correspondientes son

$$t_B = W_p + T_p$$

$$t_A = W_p + \frac{1}{3}T_p$$

De donde se obtiene

$$T_p = 1.5(t_B - t_A)$$

$$W_p = t_A - \frac{T_p}{3}$$

Los parámetros del regulador se obtienen aplicando la Tabla 7.7.

Tipo de Control	BP en %	T_i en minutos	T_d en minutos
P	$204k_p \left(\frac{W_p}{T_p} \right)^{1.084}$	0	0
PI	$116.4k_p \left(\frac{W_p}{T_p} \right)^{0.977}$	$\frac{T_p}{40.44} \left(\frac{W_p}{T_p} \right)^{0.68}$	0
PID	$73.69k_p \left(\frac{W_p}{T_p} \right)^{0.947}$	$\frac{T_p}{51.02} \left(\frac{W_p}{T_p} \right)^{0.73}$	$\frac{T_p}{157.5} \left(\frac{W_p}{T_p} \right)^{0.995}$
PD	$54.02k_p \left(\frac{W_p}{T_p} \right)^{0.947}$	0	$\frac{T_p}{157.5} \left(\frac{W_p}{T_p} \right)^{0.995}$
I	0	$T_p \frac{k_p}{25} \left(\frac{W_p}{T_p} \right)^{0.15}$	0

Tabla 7.7. Parámetros de ajuste del PID

Estos parámetros son los que minimizan el índice ITAE (Integral del tiempo por el valor absoluto del error) para el modelo correspondiente, ante escalón unitario en la referencia

$$ITEA = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

7.3.3. Leeds & Northrup: Electromax V.

El ELECTROMAX V de Leeds & Northrup tiene una opción de autoajuste que es un ejemplo de STR indirecto. La operación del sistema comienza con una **fase de identificación** en cadena cerrada con regulador PID cuyos parámetros reciben valores por defecto. Para facilitar la identificación se excita el bucle dando en la referencia ciclos de pulsos. Cada ciclo tiene un pulso positivo y otro negativo de amplitud dada por el usuario (ver Figura 7.4).

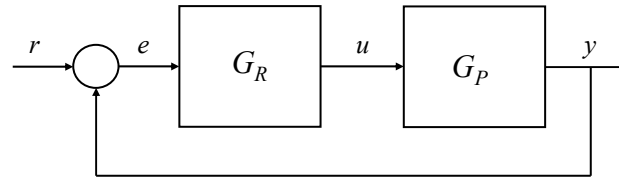


Figura 7.5. Sistema a lazo cerrado del Electromax V

7.3.4. Satt Control Instruments: ECA-400.

Este equipo consiste en un PID ajustable. La forma de modelar el proceso está basada en su respuesta en frecuencia. En particular se controla al sistema con un relé y se calcula un punto de la curva de Nyquist.

El producto permite regular la amplitud de la salida del relé y ajusta automáticamente un nivel de histéresis para evitar el efecto del ruido durante el modelado. Si se aproximan la entrada y la salida del proceso a dos senoides, la función de transferencia polar será:

$$G(j\omega) = \alpha e^{j\varphi}$$

Para estimar α y φ se utiliza un estimador por mínimos cuadrados siendo el modelo el siguiente:

$$y_k = b_1 u_{k-h} + b_2 u_{k-2h}$$

donde h es el período de muestreo y se elige como

$$h = \frac{2\pi}{8\omega}$$

α y φ se pueden calcularse de acuerdo a las fórmulas:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b_1 \sin(\omega h)}{b_1 \cos(\omega h) + b_2}\right) - 2\omega h$$

$$\alpha = \frac{b_1 \sin(\omega h)}{\sin(2\omega h + \varphi)}$$

Se hacen modificaciones en esta identificación para lograr que la matriz P del algoritmo de mínimos cuadrados sea un escalar. Esta es una modificación con respecto al modelo anterior, el ECA-40, que simplemente modelaba el proceso detectando los cruces por cero y los picos de las oscilaciones.

Una vez obtenidos α y φ el diseño se hace para que

$$G(j\omega)G_{PID}(j\omega) = 0.5e^{-j\frac{135\pi}{180}}$$

$$T_i = 4T_d$$

Este equipo posee la capacidad de detectar la necesidad o no del término derivativo. En la mayoría de los casos basta con solo un PI y entonces las constantes del regulador son

$$k = \frac{0.5}{\alpha}$$

$$T_i = \frac{4}{\omega}$$

$$\alpha = |G(j\omega)|$$

Para procesos con grandes tiempos muertos el operador puede optar por el siguiente par de valores

$$k = \frac{0.25}{\alpha}$$

$$T_i = \frac{1.6}{\omega}$$

7.3.5. Turnbull Control System 6355: Eurotherm 902/905.

El TCS 6355 es un PID ajustable con un período de muestreo de 40 ms lo que lo aproxima bastante a un regulador continuo. El modelado se realiza por estimación recursiva de parámetros y luego se calcula el equivalente continuo del modelo obtenido que tiene la siguiente forma

$$G(z) = \frac{(z+1)(b_0z+b_1)}{z^2+a_1z+a_2} z^{-d}$$

El modelo continuo se consigue por medio de la transformación de Tustin es decir:

$$G'(s) = G \left(\frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \right)$$

La estimación se realiza en lazo cerrado filtrándose el valor medio de entrada y salida. También se le puede agregar una perturbación para aumentar la precisión del modelo. Se pueden elegir diferentes tipos de controladores siempre dentro del esquema PID. La especificación de diseño es tener un margen de fase de 60° y un sobrepico del 12%. Consta también de un modo de pre-sintonía (**pretune**) que consiste en excitar el sistema con un escalón en sentido positivo y otro negativo para obtener los valores iniciales del regulador.

Los modelos 902 y 905 de Eurotherm son PID's autoajustables para control de temperatura. Tienen dos modos de funcionamiento: el **self tune** y el **adaptive tune**. En el primero se realimenta el proceso con un relé, se analiza la respuesta y se calcula el regulador dejándose fijo. El segundo analiza constantemente la presencia o no de perturbaciones; al aparecer una de éstas reajusta el PID.

7.3.6. Yokogawa: Yewseries 80.

Este PID autoajustable adopta como modelo de la planta un sistema de primer orden con retardo estando caracterizado por los siguientes parámetros: retardo, constante de tiempo y ganancia. También puede distinguir entre dos tipos de modelo: el ya descrito y éste más un integrador (es decir inestable en lazo abierto). La planta se calcula cuando se presenta un cambio en la variable de control ya sea por una modificación de la referencia o debido a una perturbación.

También en este controlador se calculan los parámetros del PID según el sobrepico deseado pudiéndose distinguir cuatro tipos diferentes de respuesta. Permite diferenciar el cálculo del PID para compensar rápidamente las perturbaciones, los cambios en la referencia o ambas.

7.3.7. Otros Controladores

Se pueden citar los siguientes PIDs autoajustables que difieren en la forma en que se obtiene el modelo de la planta: los que utilizan una realimentación con relé, el **Micro Controller** de **Fuji Electric** y el **OMROM** serie **E5XX**, y los que analizan la respuesta a un escalón, los **Philips KS4XXX** y el **Protronic P** de **Mannesmann - Hartmann & Braun**. Los Philips utilizan el método de Ziegler-Nichols para el cálculo de las constantes del regulador. En los otros equipos no se especifica exactamente qué técnica se emplea.

Por último, cinco controladores PIDs de los que no se tiene información sobre el tipo de algoritmo utilizado. Ellos son el **Chino Co** serie **DB**, el **Sensycon CM1**, el **Eagle** modelo **948**, el **West 3200** y los **Conatec** series **4000** y **5000**.

Cuestionario y ejercicios

Ejercicio 7.1: Introducción al Control por Ganancias Tabuladas

Buscar en Internet información de por lo menos 2 controladores (NO PRESENTES EN ESTE INFORME) que posean alguna característica adaptable y realizar un pequeño informe con sus características.

BIBLIOGRAFÍA

- [Abu el Ata-Doss, Fiani y Richalet, 1991] Ata-Doss S. A., Fiani P, Richalet J. Handling Input and State Constraints Predictive Functional Control[C]. Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, Brighton, England, 1991: 985-990.
- [Albertos y Ortega, 1989] P. Albertos and R. Ortega (1989). On Generalized Predictive Control: Two Alternative Formulations, *Automatica*. VOL. 25, N0.5, 753-755.
- [Allwright, 1994] Allwright, J.C., On min-max Model-Based Predictive Control, *Advances in Model Predictive Control*, Oxford University press, 1994
- [Åström, 1980] K. J. Astrom, Maximum likelihood and prediction error methods. *Automatica*,16, p. 551-574, 1980
- [Åström, 1987] Karl Johan Astrom, Adaptive Feedback Control, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 75, No. 2, February 1987
- [Åström and Eykhoff, 1971] K. J. Astrom, P. Eykhoff. System Identification: A survey. *Automatica*,7, p. 123-162, 1971
- [Åström y Wittenmark, 1973],Astrom K J, Wittenmark B. On self-tuning regulators [J]. *Automatica*, 1973, 9(2):195-199.
- [Åström y Wittenmark, 1980], Astrom, K. J. and B. Wittenmark (1980). ‘Self-tuning controllers based on pole-zero placement’.*Proceedings IEE Pt.D* 127, 120{130.
- [Åström and Witternmark, 1995] K. J. Åström and B. Witternmark. *Adaptive Control* (Second Edition), Addison-Wesley Publishing Company Inc., ISBN 0-201-55866-1. 1995.
- [Camacho, 1993], Camacho E.F. (1993): Constrained generalised predictive control. — *IEEE Trans. Automat.Contr.*, Vol.38, No.2, pp.327–332.
- [Camacho y Berenguel, 1994] Camacho, E. y Berenguel, M., Application of generalized Predictive control to a solar power plant, *Advances in Model-Predictive Control*, D.W.Clarke-Editor Oxford University Press 1994
- [Camacho y Bordons, 1995] Camacho, E. y Bordons, C., *Model Predictive Control in the Industry Process*, Springer Verlag, 1995
- [Campo y Morari, 1987], Campo, P.J. y Morari, M., *Robust Model Predictive Control*, ACC, Minneapolis, Minnesota, 1987
- [Chou, 1994] Chou, C. T. *Geometry of Linear Systems and Identification*. PhD thesis, Trinity College, Cambridge, England, 1994.
- [Clarke y Gawthrop, 1975] Clarke D.W., Gawthrop P.J. (1975) A Self-Tuning Controller , *Proc. IEE*, vol.122, pp. 929- 34.
- [Clarke, Mohtadi y Tuffs, 1987] Clarke D.W., Mohtadi C. y Tuffs P.S., Generalised predictive control-Part I: The basic algorithm and Part II: Extensions and Interpretations, *Automatica*, Vol. 23,Nº2 1987, 137-160, 1987
- [Clarke, 1988] Clarke D.W., Application of Generalized Predictive Control to Industrial Processes, *IEEE Control Systems Magazine*, April 1988, pp.49-55
- [Clarke y Mohtadi, 1989] Clarke D.W. y Mohtadi C., Properties of generalized predictive control, *Automatica*, Vol. 25, Nº6, pp.859-875, 1989
- [Clarke y Scattolini, 1991] Clarke D.W. y Scattolini, R., Constrained Receding-Horizon Predictive Control, *IEE-D*, pp. 347-354, 1991
- [Chang y Seborg, 1983] Chang, T.S., Seborg, D.E., A linear programming approach to multivariable feedback control with inequality constraints, *International Journal of Control*, Vol.37, pp.583-597, 1983

-
- [Cutler y Ramaker, 1980] Cutler, C.R. y Ramaker, B.C., Dynamic Matrix Control- a computer control algorithm, Automatic Control Conference, San Francisco, 1980
- [Cutler y Hawkins, 1987] Cutler, C.R. y Hawkins, R.B., Constrained Multivariable Control of a Hydrocracker reactor, Proc. ACC, Minneapolis, Minnesota, 1987, pp.1014-1020
- [de Keyser y Van Cauwenberghe, 1985], De Keyser, R.M.C. and A.R. Van Cauwenberghe,(1985). Extended Prediction Self-adaptive Control. Proc. 7th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, York, U.K. pp. 1255 – 1260.
- [Dumont, Martín-Sánchez y Zervos, 1989] Dumont, G., Martín-Sánchez, J.M. y Zervos, Ch.C., Comparison of an auto-tuned PID regulator and an adaptive predictive control system on an industrial bleach plant, Automatica, Vol. 25, pp.33-40, 1989
- [Evans y Harpin, 1994] Evans, E.P. y Harpin, R., Modelling Control in a Large Water treatment works, Advances in Model-Predictive Control, Advances in Model-Based Predictive Control, D.W.Clarke-Editor Oxford University Press 1994
- [García et al., 1989] García, C. E., Prett, D. M. Morari, M. 1989. Model predictive control: Theory and practice--a survey, Automatica 25(3): 335-348.
- [García y Morshedi, 1986] García, C.E. y Morshedi, A.M., Quadratic programming solution of dynamic matrix control, Chem. Eng. Commun., Vol.46, pp.73-87, 1986
- [García et al.,1989] García, C. E., Prett, D. M. Morari, M. 1989. Model predictive control: Theory and practice--a survey, Automatica 25(3): 335-348.
- [Greco, Menga, Mosca y Zappa, 1984] Greco, C., Menga, G., Mosca, E., Zappa, G., Performance Improvement of Self Tuning Controllers by Multistep Horizons: the MUSMAR approach, Automatica, Vol.20, pp.681-700, 1984
- [Grewal and Andrews, 2001] Grewal, M. S. and Andrews, A. P., Kalman filtering: Theory and practice using MATLAB, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc. 2001.
- [Iserman, 1991], Isermann, R.: Digital Control Systems, Springer Verlag, 1991.
- [Ioannou and Sun, 1996, pag. 545] P. A. Ioannou and J. Sun, Robust Adaptive Control, Prentice-Hall, New Jersey, USA.
- [Kabamba, 1985] P. T. Kabamba. Balanced forms: Canonicity and parametrization. IEEE Trans. on Automatic Control, 30(11):1106–1109, 1985.
- [Kalman, 1958], R. Kalman. “Design of a Self-Optimizing Control System” Trans. ASME, 80 (2), pp. 468-478, 1958
- [Kollás, 1993] I. Kollár “On Frequency Domain Identification of Linear Systems” IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol. 42 No 1, pp. 2-6, Feb. 1993.
- [Kouvaritakis, Rossiter y Chang, 1992] Kouvaritakis, B., Rossiter, J.A. y Chang, A.O.T., Stable Generalized Predictive Control: an algorithm with guaranteed stability, Proceedings IEE, Parte D, Vol.139, N°4, pp.349-362, 1992
- [Kuznetsov y Clarke, 1994] Kuznetsov, A. y Clarke, D.W., Application of constrained GPC for improving performance of controlled plants, Advances in Model-Based Predictive Control, D.W.Clarke-Editor Oxford University Press 1994, pp.318-328
- [Landau 1979] Landau, Y. D. Adaptive Control: The Model Reference Approach, ISBN:0824765486; Marcel Dekker, Inc.New York, NY, USA, 1979
- [Lelic y Zarrop, 1987a] Lelic M A, Zarrop M B. Generalized pole-placement self-tuning controller, Part 1: Basic algorithm [J]. Intl. J. Control, 1987, 46(2): 547-568.

- [Lelic y Zarrop, 1987b], Lelic M A, Zarrop M B. Generalized pole-placement self-tuning controller, Part 2: Application to robot manipulator control [J]. Intl. J. Control, 1987, 46(2): 569-601.
- [Linkens y Mahfouf, 1994] Linkens, D.A. y Mahfouf, M., Generalised Predictive Control (GPC) in clinical anesthesia, Advances in Model-Based Predictive Control, D.W.Clarke-Editor Oxford University Press 1994.
- [Ljung, 1987] L. Ljung. System identification – Theory for the user, Prentice Hall, 1987.
- [Ljung and Glad, 1994], Ljung, L. and Glad, T. Modeling of Dynamic Systems, Prentice Hall, 1994.
- [Ljung, 1999] Ljung, L.. System identification: Theory for the user, Second edition, Prentice Hall, 1999.
- [Martín y Caldwell, 1986] Martín, G. D. y Caldwell, J.M., Predictive Control Applications for the Petroleum Refining Industry, Japan, Petroleum Institute, Petroleum Refining Conference, Tokyo, Japan, 1986
- [Martín Sánchez y Rodellar, 1995] J. M. Martín Sánchez, J. Rodellar, Adaptive Predictive Control. From the Concepts to Plant Optimization, Prentice Hall, 1995.
- [Matlab-Ident, 2001] Lennart Ljung, System Identification Toolbox For Use with MATLAB, The MathWorks, Inc., 2001.
- [Matsko, 1985] Matsko, T.N., Internal Model Control for Chemical Recovery, Chem. Eng. Progress, Vol.81, N°12, pp. 46-51
- [Mehra et al., 1982] Mehra, R.K., Rouhani, R., Eterno, J., Richalet, J. y Rault, A., Model Algorithmic Control for Nonminimum Phase Systems, Eng. Foundation Conference on Chemical Process Control II, Sea Island, GA, pp.287-310, 1982
- [Mosca, Lemos y Zhang, 1990] Mosca, E., Lemos, J.M. y Zhang, J., Stabilizing I/O Receding Horizon Control, IEEE Conference on Decision and Control, 1990
- [Moore, 1981] Moore, B. C. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. IEEE Trans. on Automatic Control, 26(1):17–32, 1981.
- [Ober, 1987] Ober, R. J. Balanced realizations: Canonical form, parametrization, model reduction. Int. J. Control, 46(2):643–670, 1987.
- [Ogata, 1987]. Ogata, K.. Discrete-time Control Systems. Prentice-Hall International Editions, United States. 1997
- [Ogata, 1998], Ogata, K., Ingeniería de Control Moderna, Tercero Edición, Prentice Hall, 1998.
- [Oliveira y Biegler, 1994] Oliveira, N.C. y Biegler, L.T., Constraint handling and stability properties of model-predictive control, AIChE Journal, Vol.40, N°7, pp. 1138-1155, 1994
- [Ordys, Clarke, 1993] Ordys, A. y Clarke, D.W., A state-space description for GPC controllers, Int. J. Systems Sci., Vol. 24, N° 9, pp. 1727-1744, 1993
- [Parks 1966] Parks, P.C.: Liapunov redesign of model reference adaptive control systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 11, I 3, pp. 362-367. 1966.
- [Peterka, 1984] V. Peterka, "Predictor-based self-tuning control," Automatica, vol. 20, pp. 39-50, 1984.
- [Prett y Gillette, 1979] Prett, D.M. y Gillette, R.D., Optimization and constrained multivariable control of a catalytic cracking unit, Proc. JACC, San Francisco, USA, 1979

-
- [Prett y García, 1988] Prett, D. M., and C. E. García (1988). Fundamental Process Control, Butterworths.
- [Propoi, 1963] Propoi, A.I., Use of LP Methods for Synthesizing Sampled-Data Automatic Systems, Automn. Remote Control, Vol.24, 1963
- [Quero y Camacho, 1990] J.M. Quero y E.F. Camacho, Neural Generalized Predictive Self-tuning Controllers, IEEE International Conference on Systems Engineering, pp. 160-163, Aug 1990, Pittsburgh, Pennsylvania (USA)
- [Reid et al., 1981] J. G. Reid, D. E. Chaffin, and J. T. Silverthron, " Output Predictive Algorithm Control : Precision Tracking with Application to Terrain Following," Journal of Guidance and Control, vol. 4, No. 5, pp. 502-509, 1981.
- [Richalet et al., 1978] Richalet, J., Rault, A, Testud, J.L. y Papon, J., Model Predictive Heuristic Control: Application to industrial processes, Automatica, Vol.14, N°2, pp.413-428, 1978
- [Richalet, 1993] Richalet, J., Industrial applications of model based predictive control, Automatica, Vol.29, N°5, pp. 1251-1274, 1993
- [Rohrs et al., 1985] C. E. Rohrs, L. S. Valavani, M. Athans, and G. Stein, "Robustness of continuous time adaptive control algorithms in the presence of unmodelled dynamics, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-30, Sept.1982.
- [Sastry and Bodson, 1989] S. Sastry, M. Bodson, Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness. Prentice-Hall. 1989
- [Scokaert, 1994] Scokaert, P.O.M. , Constrained predictive control, OUEL 2023/94, PhD Thesis, Universidad de Oxford, 1994
- [Scokaert y Clarke, 1994a] Scokaert, P.O.M. y Clarke, D.W., Stabilising properties of constrained predictive control, IEE Proc-Control Theory Appl, Vol.141, N°5, Septiembre 1994
- [Scokaert y Clarke, 1994b] Scokaert, P.O.M. y Clarke, D.W., Stability and feasibility in constrained predictive control, Advances in Model-Based Predictive Control, D.W. Clarke -Editor, Oxford University Press , , pp. 217-230, 1994
- [Serrano, 1994] Serrano, J., Aspectos de implementación y análisis de robustez en CPBM, Tesis, 1994
- [Soeteboek, 1992] Soeteboek, R., Predictive Control, a unified approach, Prentice Hall, 1992
- [Söderström and Stoica, 1989] T. Söderström, P. Stoica. System identification, Prentice Hall, 1989.
- [Tsang y Clarke, 1988] Tsang, T.T.C. y Clarke, D.W., Generalised predictive control with input constraints, IEE Transactions, Part D, Vol.135, N°6, pp 451-460
- [van Overbeek and Ljung, 1992] van Overbeek, A. J. M. and L. Ljung. On-line structure selection for multivariable state space models. Automatica, 18(5):529–543, 1992.
- [Whitaker et.al. 1958] Whitaker, H.P., Yamron, J. and Kezer, A. 1958. Design of Model Reference Adaptive Control Systems for Aircraft. Instrumentation Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, Report R-164., 1958.
- [Ydstie, 1984] Ydstie B. E.: 'Extended horizon adaptive control', Proc. 9 th IFAC World Congress, 1984, Budapest, Hungary. 29
- [Zadeh y Whalen, 1962] Zadeh, L.A. y Whalen, B.H., On optimal control and linear programming, IRE Trans. Aut. Control, Vol.7, N°4, 1962
- [Zamarreño y Vega,1999] J. M. Zamarreño and P. Vega, "Neural predictive control: Application to a highly non-linear system," Engineering Applications of Artificial Intelligence, vol. 12, pp. 149--158, 1999.