

IDENTIFICACION
PARAMETRICA
DE
SISTEMAS
LINEALES

Fernando di Sciascio

INDICE

Modelos de entrada-salida	1
Modelos de espacio de estados	6
Parametrización lineal y pseudolineal	9
Ejemplos de parametrización lineal y pseudolineal	11
1- Estructura FIR	11
2- Estructura ARX	11
3- Estructura ARMAX	12
4- Modelos de estados	13
Estimación de parámetros	13
Estimación de parámetros mediante los métodos de mínimos cuadrados	14
a) Mínimos cuadrados no-recursivos	14
b) Mínimos cuadrados recursivos	18
Estimación de parámetros mediante el método del gradiente	22
Ejemplos	24
1- Identificación de la estructura FIR	24
2- Identificación de la estructura ARMAX	25
Bibliografía	26

IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS LINEALES

System identification is the theory and the art of building mathematical models of dynamical systems based on observed inputs and outputs.

Lotfi Zadeh

MODELOS DE ENTRADA-SALIDA

El modelo de un sistema es una descripción de algunas o todas sus propiedades las cuales son apropiadas para algún propósito. El modelo no necesita ser una descripción muy precisa del sistema, sino que sirva a los fines para los cuales se construye. El objetivo de la identificación de sistemas es construir o seleccionar modelos de los sistemas dinámicos que sirvan a ciertos propósitos. El primer paso es determinar la clase de modelos en la cual se busca el mas apropiado, en lo que sigue se considerará exclusivamente la construcción de modelos de sistemas dinámicos lineales.

Un sistema lineal discreto queda completamente caracterizado por su respuesta impulsiva (función de peso $g(k)$). Para una secuencia de entrada acotada $\{u(k)\}_1^\infty$ con $|u(k)| < U_{\max}$ que permanece constante o varia poco entre instantes de muestreo, la salida del sistema lineal estará dada por la sumatoria de convolución

$$y(k) = \sum_{j=1}^{\infty} g(j) u(k-j) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

De acuerdo con la Ec.(1), la salida del sistema puede ser calculada exactamente una vez que se conoce la entrada. Esto en muchos casos es poco realista pues siempre existen señales fuera de control que pueden afectar el sistema. Dentro del marco lineal se asume que tales efectos se pueden concentrar en un término aditivo $v(k)$ a la salida del sistema

$$y(k) = \sum_{j=1}^{\infty} g(j) u(k-j) + v(k) \quad (2)$$

Existen muchas fuentes que componen el término $v(k)$, entre ellos

Ruido de medición: Los datos enviados por los sensores están sujetos a ruido y deriva.

Entradas no controladas: El sistema está sujeto a señales de perturbación que poseen el carácter de entradas no deseadas, pero que no son controladas, por ejemplo, viento en un avión o en generadores eólicos, oleaje en embarcaciones, etc.

Dinámicas no contempladas: Estimación incorrecta del orden del sistema, por ejemplo fricciones, elasticidades, etc.

Comportamiento no-lineal: Debido a que generalmente todo sistema físico exhibe comportamiento no-lineal para grandes excursiones de las señales involucradas en el sistema, por lo que la hipótesis de linealidad solo puede sustentarse en un pequeño entorno del punto de trabajo normal del sistema.

La suposición sobre la naturaleza aditiva de las perturbaciones a la salida de la planta implica algunas restricciones, de todos modos permite caracterizar adecuadamente una gran parte de las perturbaciones reales de manera simple y eficiente. Por ejemplo algunas veces las mediciones de las entradas pueden estar corruptas por ruido, en tal caso se considera que las entradas medidas son las verdaderas entradas $u(k)$ al proceso y que sus desviaciones de las "verdaderas" (ruido) son propagadas por el sistema y se adiciona a $v(k)$ (esta claro que en sistemas lineales esto es lícito en base al principio de superposición).

Normalmente la perturbación se caracteriza por:

$$v(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) e(k-j) \quad (3)$$

Donde $\{e(k)\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con una cierta función de densidad de probabilidad, normalmente se considera como *ruido blanco* de valor medio nulo y varianza λ . Pese a que esta caracterización no permite una descripción completamente general para toda posible perturbación probabilística, es lo suficientemente versátil desde el punto de vista práctico.

Por razones de formalización usualmente se asume que $h(0) = 1$, no se pierde generalidad en esta restricción ya que la varianza de $\{e(k)\}$ puede ser ajustada.

Se tiene que la salida real del sistema se caracteriza por

$$y(k) = \sum_{j=1}^{\infty} g(j) u(k-j) + \sum_{j=0}^{\infty} h(j) e(k-j) \quad (4)$$

Es conveniente simplificar la notación de las sumatorias, se definen los operadores desplazamiento hacia adelante q y hacia atrás q^{-1} .

$$q u(k) = u(k+1) \quad (5)$$

$$q^{-1} u(k) = u(k-1) \quad (6)$$

Luego,

$$\sum_{j=1}^{\infty} g(j) u(k-j) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} g(j) q^{-j} \right] u(k) = G(q) u(k)$$

donde

$$G(q) = \sum_{j=1}^{\infty} g(j) q^{-j} \quad (7)$$

La Ec.(7) se denomina *operador de transferencia* y es una función racional. Se elige q como argumento de G en lugar de q^{-1} que parece mas natural en vista del segundo miembro de la Ec.(7) para mantener un acuerdo formal con la transformada z . El término *función de transferencia* se reserva para la transformada z de $\{g(k)\}_1^{\infty}$, esto es,

$$G(z) = \sum_{j=1}^{\infty} g(j) z^{-j} \quad (8)$$

El operador de transferencia $G(q)$ es estable si $\sum_{j=1}^{\infty} |g(j)| < \infty$, esta definición coincide con la de estabilidad de Entrada acotada-Salida acotada (BIBO - Bounded input-Bounded Output), lo que significa que para entradas acotadas, para todo k se verifica $|y(k)| < Cte$. En el dominio z la definición anterior implica que las raíces del polinomio denominador de la función de transferencia racional $G(z)$ se encuentren en el interior del círculo unitario $|z| < 1$ o lo que es equivalente $G(z)$ es analítica en $|z| \geq 1$.

En forma similar para $v(k)$ se define:

$$v(k) = H(q) e(k) \quad (9)$$

con

$$H(q) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) q^{-j} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} h(j) q^{-j} \quad (10)$$

El filtro $H(q)$ debe verificar las siguientes condiciones:

a) Ser mónico como se indica en la Ec.(10), esto es, el coeficiente de orden cero de su desarrollo en serie toma el valor 1.

b) Ser estable esto es, $\sum_{j=0}^{\infty} |h(j)| < \infty$.

c) Ser invertible, esto es poseer inversa estable $H^{-1}(q) = \frac{1}{H(q)}$ lo que implica que las raíces del numerador y denominador de $H(z)$ deben encontrarse en el interior del círculo unitario.

$$H^{-1}(q) = \frac{1}{H(q)} = \frac{1}{1 + h(1)q^{-1} + h(2)q^{-2} + \dots} = 1 - h(1)q^{-1} - (h(2) - h(1)^2)q^{-2} + \dots = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} h^{-1}(j)q^{-j} \quad (11)$$

Esta condición implica que si $v(k)$ es conocida, se puede calcular $e(k)$ de la siguiente manera:

$$e(k) = \mathbf{H}^{-1}(q) v(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h^{-1}(j) v(k-j) \quad , \quad \sum_{j=0}^{\infty} |h^{-1}(j)| < \infty \quad (12)$$

De lo expuesto anteriormente un sistema lineal con ruido aditivo puede expresarse de la siguiente manera:

$$y(k) = \mathbf{G}(q) u(k) + \mathbf{H}(q) e(k) \quad (13)$$

El objetivo es predecir $y(k)$, esto es el valor de la salida en el instante k conocidos hasta el instante $k-1$ los valores (mediciones) de $u(k)$ e $y(k)$.

La Ec.(13) se puede escribir como

$$y(k) = \mathbf{G}(q) u(k) + (\mathbf{H}(q) - 1) e(k) + e(k) \quad (14)$$

pero por las Ecs.(12) y (2)

$$(\mathbf{H}(q) - 1) e(k) = (\mathbf{H}(q) - 1) \mathbf{H}^{-1} v(k) = (1 - \mathbf{H}^{-1}(q)) (y(k) - \mathbf{G}(q) u(k)) \quad (15)$$

reemplazando la Ec.(15) en la Ec.(14) se tiene

$$y(k) = \mathbf{H}^{-1}(q) \mathbf{G}(q) u(k) + [1 - \mathbf{H}^{-1}(q)] y(k) + e(k) \quad (16)$$

por la Ec.(11)

$$[1 - \mathbf{H}^{-1}(q)] y(k) = h^{-1}(1) y(k-1) + h^{-1}(2) y(k-2) + \dots \quad (17)$$

$$\mathbf{H}^{-1}(q) \mathbf{G}(q) u(k) = l(1) u(k-1) + l(2) u(k-2) + \dots \quad (18)$$

reemplazando las Ecs.(17) y (18) en la (16)

$$y(k) = l(1) u(k-1) + l(2) u(k-2) + \dots + h^{-1}(1) y(k-1) + h^{-1}(2) y(k-2) + \dots + e(k) \quad (19)$$

Lo único que no se conoce de la Ec.(19) es $e(k)$, entonces la mejor elección para la estima de la salida en el instante k conocidos los valores de $u(k)$ e $y(k)$ hasta el instante $k-1$ es

$$\hat{y}(k | k-1) = \mathbf{H}^{-1}(q) \mathbf{G}(q) u(k) + [1 - \mathbf{H}^{-1}(q)] y(k) \quad (20)$$

El error de predicción estará dado por

$$y(k) - \hat{y}(k | k-1) = e(k) \quad (21)$$

Luego $e(k)$ representa la parte de la salida que no puede ser predicha de los datos pasados, por esta razón $e(k)$ es la *innovación* en el instante k .

De la expresión de un sistema lineal con ruido aditivo (Ec.(13)), resulta claro que el comportamiento de un sistema particular depende de la ubicación precisa de los polos y ceros de $G(z)$ y $H(z)$ o lo que es equivalente de los coeficientes de los polinomios numerador y denominador de G y H . Estos coeficientes constituyen un conjunto finito de parámetros los cuales se representan en un vector θ denominado *vector de parámetros*. Muy a menudo puede resultar muy costoso en términos de tiempo y esfuerzo determinar estos coeficientes o parámetros, o puede no ser posible obtenerlos a partir del conocimiento apriori de los mecanismos físicos que gobiernan el comportamiento del sistema. Por lo que la determinación de todos o algunos de ellos debe realizarse mediante procedimientos de *estimación* a partir de los datos de entrada-salida disponibles. Esto significa que los coeficientes en cuestión entren en el modelo de la Ec.(13) como parámetros que deben ser determinados y la Ec.(13) resulta

$$y(k, \theta) = G(q, \theta) u(k) + H(q, \theta) e(k) \quad (22)$$

Modelos como el de la Ec.(22) cuyos coeficientes se determinan a partir de mediciones se denominan *modelos de caja-negra* (Black-Box models). Sobrentendiendo que la estima en k se realiza con los datos de entrada-salida hasta el instante $k-1$, se adoptará la notación $\hat{y}(k | k-1) = \hat{y}(k)$, luego explicitando la dependencia de la estima (Ec.(20)) del vector de parámetros θ resulta:

$$\hat{y}(k, \theta) = H^{-1}(q, \theta) G(q, \theta) u(k) + [1 - H^{-1}(q, \theta)] y(k) = W_u(q, \theta) u(k) + W_y(q, \theta) y(k) \quad (23)$$

Donde mediante $W_u(q, \theta)$ y $W_y(q, \theta)$ se representan filtros realizables y estables que dependen del vector de parámetros θ , el cual toma valores en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^d$, donde d es la dimensión de θ .

La forma mas usual de parametrizar la Ec.(22) es mediante la siguiente familia de modelos

$$A(q, \theta) y(k) = \frac{B(q, \theta)}{F(q, \theta)} u(k) + \frac{C(q, \theta)}{D(q, \theta)} e(k) \quad (24)$$

Donde $A(q, \theta)$, $B(q, \theta)$, $C(q, \theta)$, $D(q, \theta)$ y $F(q, \theta)$ son polinomios en q^{-1} , comparando con la Ec.(22) se tiene que:

$$G(q, \theta) = \frac{B(q, \theta)}{A(q, \theta) F(q, \theta)}, \quad H(q, \theta) = \frac{C(q, \theta)}{A(q, \theta) D(q, \theta)} \quad (25)$$

Reemplazando las Ecs.(25) en la Ec.(23) se obtiene el predictor para la familia de modelos dada por la Ec.(24)

$$\hat{y}(k, \theta) = \frac{D(q, \theta) B(q, \theta)}{C(q, \theta) F(q, \theta)} u(k) + \left[1 - \frac{D(q, \theta) A(q, \theta)}{C(q, \theta)} \right] y(k) \quad (26)$$

La estructura dada por la Ec.(24) es muy general y compleja para propósitos prácticos, normalmente algunos de los 5 polinomios se hacen igual a la unidad lo que da lugar a 32 conjuntos de modelos. Algunos de estos modelos son de los mas empleados en las aplicaciones prácticas. Los casos especiales mas comunes se resumen en la siguiente tabla.

Polinomio empleado en la Ec.(26)	Nombre de la estructura
B	FIR (Finite Impulse Response)
B, F	OE (Output Error model structure)
A, B	ARX (AutoRegressive with eXternal input)
A, C	ARMA (AutoRegressive Moving Average)
A, B, C	ARMAX (AutoRegressive Moving Average with eXternal input)
B, C, D, F	BJ (Box-Jenkins model structure)

Tabla I - Algunos modelos de caja-negra como casos especiales de las Ecs.(24) y (26)

MODELOS DE ESPACIO DE ESTADOS

En los modelos lineales de estado, las relaciones entre las señales de entrada, salida y perturbaciones (ruido) se escribe como un sistema de ecuaciones diferenciales o en diferencia de primer orden por medio de un vector auxiliar de estados $x(k)$. Este tipo de representación permite introducir el conocimiento de las leyes físicas que gobiernan el comportamiento del sistema de manera mas sencilla y eficiente que los modelos de entrada-salida (caja negra). Una primera aproximación a la representación en espacio de estados es:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(\theta)x(k) + B(\theta)u(k) \\ y(k) = C(\theta)x(k) + v(k) \end{cases} \quad (27)$$

con $v(k) = H(q, \theta) e(k)$

La correspondencia con el modelo general entrada-salida dada por la Ec.(22) es:

$$G(q, \theta) = C(\theta) [qI - A(\theta)]^{-1} B(\theta) \quad (28)$$

Donde $I \in \Re^{n \times n}$ es la matriz identidad.

Para la descripción en el espacio de estados es más común partir el término de perturbación en

dos partes, una contribución $v(k)$ de ruido aditivo de medida y $w(k)$ ruido del proceso que actúa sobre los estados. Por lo tanto el modelo anterior queda:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})u(k) + w(k) \\ y(k) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(k) + v(k) \end{cases} \quad (29)$$

Donde $\{v(k)\}$ y $\{w(k)\}$ son secuencias de variables aleatorias independientes con valor medio nulo y covarianzas

$$\begin{aligned} R_w(\boldsymbol{\theta}) &= E\{w(k)w^T(k)\} \\ R_v(\boldsymbol{\theta}) &= E\{v(k)v^T(k)\} \\ R_{w,v}(\boldsymbol{\theta}) &= E\{w(k)v^T(k)\} \end{aligned} \quad (30)$$

Las señales $v(k)$ y $w(k)$ muy a menudo poseen un origen físico conocido. El problema de predecir $\hat{y}(k|\boldsymbol{\theta})$ (la mejor estima de la salida en el instante k con las mediciones de las entradas y salidas hasta el instante $k-1$) a partir de la Ecs.(29) y (30) suponiendo v y w Gaussianas se resuelve mediante el *filtro de Kalman*.

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1|\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{x}}(k|\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})u(k) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})[y(k) - \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{x}}(k|\boldsymbol{\theta})] \\ \hat{y}(k|\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{x}}(k|\boldsymbol{\theta}) \end{cases} \quad (31)$$

Donde $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ es la ganancia del filtro de Kalman, la cual es posible obtener en forma algorítmica resolviendo la denominada *ecuación de Ricatti* a partir de $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})$, $R_w(\boldsymbol{\theta})$, $R_v(\boldsymbol{\theta})$ y $R_{w,v}(\boldsymbol{\theta})$. A fin de obtener un predictor más sencillo y evitar el cálculo descripto, directamente se parametriza $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ en términos de $\boldsymbol{\theta}$ y se identifican los parámetros del vector $\boldsymbol{\theta}$. Este modelo más simple se denomina *forma de las innovaciones directamente parametrizadas* (directly parametrized innovation form).

La innovación, esto es error de predicción del modelo descripto por la Ec.(34) viene dado por:

$$e(k) = y(k) - \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{x}}(k|\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|\boldsymbol{\theta})] + v(k) \quad (32)$$

Luego la Ec.(31) puede reescribirse como

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1|\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{x}}(k|\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})u(k) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})e(k) \\ y(k) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{x}}(k|\boldsymbol{\theta}) + e(k) \end{cases} \quad (33)$$

En lugar del modelo dado por la Ec.(29), en base a la Ec.(33) se justifica el empleo de modelos de estado de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})u(k) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})e(k) \\ y(k) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(k) + e(k) \end{cases} \quad (34)$$

En la Ec.(34) las innovaciones aparecen en forma explícita por lo que este modelo se denomina *forma de innovaciones* (innovation form) de la descripción en variables de estado.

Suponiendo que la Ec.(34) representa el comportamiento de un sistema real (para algún vector θ determinado), se plantea el objetivo de obtener la mejor predicción de los estados $\hat{x}(k | \theta)$ y de la salida $\hat{y}(k | \theta)$.

A partir de la Ec.(33) teniendo en cuenta que $\hat{x}(k+1 | \theta) = q I \hat{x}(k | \theta)$ se tiene:

$$\hat{x}(k | \theta) = [qI - A(\theta)]^{-1} [B(\theta) u(k) + K(\theta) e(k)]$$

$$y(k) = C(\theta) [qI - A(\theta)]^{-1} [B(\theta) u(k) + K(\theta) e(k)] + e(k) = G(q, \theta) u(k) + H(q, \theta) e(k) \quad (35)$$

con

$$G(q, \theta) = C(\theta) [qI - A(\theta)]^{-1} B(\theta) \quad (36)$$

$$H(q, \theta) = I + C(\theta) [qI - A(\theta)]^{-1} K(\theta) \quad (37)$$

entonces según la Ec.(23)

$$\hat{y}(k, \theta) = H^{-1}(q, \theta) G(q, \theta) u(k) + [1 - H^{-1}(q, \theta)] y(k) = W_u(q, \theta) u(k) + W_y(q, \theta) y(k) \quad (38)$$

Obtener $H^{-1}(q, \theta)$ a partir de la Ec.(37) para emplearlo en la Ec.(38) es muy complicado por lo que se realiza el siguiente procedimiento. Se reescribe la Ec.(33) con $e(k) = y(k) - C(\theta) \hat{x}(k | \theta)$ en la ecuación de estados

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1 | \theta) = [A(\theta) - K(\theta) C(\theta)] \hat{x}(k | \theta) + B(\theta) u(k) + K(\theta) y(k) \\ \hat{y}(k | \theta) = C(\theta) \hat{x}(k | \theta) \end{cases} \quad (39)$$

Aplicando el operador adelanto se obtiene a partir de la Ec.(39)

$$\hat{x}(k | \theta) = [Iq - A(\theta) + K(\theta) C(\theta)]^{-1} B(\theta) u(k) + [Iq - A(\theta) + K(\theta) C(\theta)]^{-1} K(\theta) y(k) \quad (40)$$

La Ec.(40) representa la mejor predicción de los estados y se denomina *observador de estados*.

$$\hat{y}(k, \theta) = C(\theta) [Iq - A(\theta) + K(\theta) C(\theta)]^{-1} B(\theta) u(k) + C(\theta) [Iq - A(\theta) + K(\theta) C(\theta)]^{-1} K(\theta) y(k) \quad (41)$$

La Ec.(41) representa la mejor predicción de la salida.

El observador y el predictor de salida se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\hat{x}(k | \theta) = W_u'(q, \theta) u(k) + W_y'(q, \theta) y(k) \quad (42)$$

$$\hat{y}(k | \theta) = W_u(q, \theta) u(k) + W_y(q, \theta) y(k) \quad (43)$$

Donde:

$$W_u'(q, \theta) = [Iq - A(\theta) + K(\theta)C(\theta)]^{-1} B(\theta) \quad (44)$$

$$W_y'(q, \theta) = [Iq - A(\theta) + K(\theta)C(\theta)]^{-1} K(\theta) \quad (45)$$

$$W_u(q, \theta) = H^{-1}(q, \theta) G(q, \theta) = C(\theta) [Iq - A(\theta) + K(\theta)C(\theta)]^{-1} B(\theta) \quad (46)$$

$$W_y(q, \theta) = I - H^{-1}(q, \theta) = C(\theta) [Iq - A(\theta) + K(\theta)C(\theta)]^{-1} K(\theta) y(k) \quad (47)$$

Las funciones de transferencia $W_u'(z, \theta)$, $W_y'(z, \theta)$, $W_u(z, \theta)$ y $W_y(z, \theta)$ deben ser estables para que los predictores dados por las Ecs.(42) y (43) o el equivalente dado por la Ec.(39) sean estables.

PARAMETRIZACIÓN LINEAL Y PSEUDOLINEAL

En las secciones anteriores se obtuvieron distintos predictores de la salida del sistema $\hat{y}(k|\theta)$ (la mejor estima de la salida en el instante k con las mediciones de las entradas y salidas hasta el instante $k-1$), así para la descripción entrada-salida y para la descripción en el espacio de estados el sistema real se representa por las Ecs.(22) y (34)

$$y(k, \theta) = G(q, \theta) u(k) + H(q, \theta) e(k) \quad (48)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(\theta) u(k) + \mathbf{K}(\theta) e(k) \\ y(k) = \mathbf{C}(\theta) \mathbf{x}(k) + e(k) \end{cases} \quad (49)$$

Donde las descripciones son equivalentes si los operadores de transferencia $G(q, \theta)$, $H(q, \theta)$ y las matrices $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ y $K(\theta)$ verifican las relaciones

$$G(q, \theta) = C(\theta) [qI - A(\theta)]^{-1} B(\theta) \quad (50)$$

$$H(q, \theta) = I + C(\theta) [qI - A(\theta)]^{-1} K(\theta) \quad (51)$$

En ambas representaciones el predictor obtenido es de la forma

$$\hat{y}(k|\theta) = W_u(q, \theta) u(k) + W_y(q, \theta) y(k) \quad (52)$$

Esto es, la predicción $\hat{y}(k|\theta)$ se obtiene mediante filtrado lineal de las entradas y las salidas pasadas a través de filtros que dependen del vector θ o lo que es equivalente de los operadores de transferencia $G(q, \theta)$ y $H(q, \theta)$ en el caso entrada-salida o de las matrices $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ y $K(\theta)$ en el caso de la representación de estados.

En todos los casos si la expresión del predictor $\hat{y}(k|\boldsymbol{\theta})$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\hat{y}(k|\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\varphi}^T(k) \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}(k) \quad (53)$$

Esto es como producto escalar entre un vector de datos (señales) conocidas $\boldsymbol{\varphi}(k)$ y el vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$. Tal modelo se denomina en estadística *regresión lineal*, el vector $\boldsymbol{\varphi}(k)$ se denomina *vector de regresión* y sus componentes *regresores*. También se dice que el modelo dado por la Ec.(53) está *linealmente parametrizado*. La propiedad de parametrización lineal es muy importante, pues existen métodos de estimación poderosos y simples para estimar el vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$, por ejemplo mínimos cuadrados recursivo y no-recursivo también es posible encontrar una forma cerrada de cálculo (esto es mediante una fórmula), por ejemplo mediante la denominada *ecuación normal* en el método de mínimos cuadrados. En caso que algunos coeficientes de $\boldsymbol{\theta}$ sean conocidos la expresión de regresión lineal es de la forma

$$\hat{y}(k|\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}(k) + \mu(k) \quad (54)$$

donde $\mu(k)$ es conocido

Si la expresión de $\hat{y}(k, \boldsymbol{\theta})$ se representa de la siguiente manera

$$\hat{y}(k|\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\varphi}^T(k, \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}(k, \boldsymbol{\theta}) \quad (55)$$

Entonces la regresión es *no-lineal* pues $\boldsymbol{\theta}$ afecta al regresor $\boldsymbol{\varphi}(k, \boldsymbol{\theta})$. Por la similitud con la expresión de la regresión lineal (Ec.(53)) también se denomina *regresión pseudolineal*. La estimación del vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$ en este caso de modelos no-linealmente parametrizados (regresión no-lineal) es mucho mas complicada de realizar que en el caso anterior pues no existe una forma cerrada de calcularlos y se debe recurrir a algoritmos numéricos más lentos en los cuales generalmente no puede asegurarse la convergencia y la estabilidad. El mas simple de estos métodos es el *método de gradiente*. También para estos casos recientemente se emplean técnicas nuevas surgidas de la teoría de aprendizaje mediante computadoras (computing learning theory) como los algoritmos genéticos, simulated annealing, etc.

Ejemplos de parametrización lineal y pseudolineal

1- Estructura FIR Esta es la estructura mas simple y surge de considerar $B \neq 1$ y $A = C = D = F = 1$

$$\text{con } B(q) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \quad (56)$$

$$y(k) = B(q) u(k) + e(k) \quad (57)$$

$$\hat{y}(k) = B(q) u(k) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) = \theta^T \varphi(k) \quad (58)$$

$$\text{con } \theta = (b_1, b_2, \dots, b_{n_b})^T, \quad \varphi(k) = (u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_b))^T \quad (59)$$

Se observa que en este modelo no se consideran las perturbaciones.

2- Estructura ARX Esta es la estructura surge de considerar $A \neq 1$, $B \neq 1$ y $C = D = F = 1$

$$A(q) y(k) = B(q) u(k) + e(k) \quad (60)$$

con

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \quad (61)$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \quad (62)$$

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_a} y(k-n_a) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) + e(k) \quad (63)$$

de la Ec.(26)

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) &= B(q) u(k) + [1 - A(q)] y(k) = \\ &= -a_1 y(k-1) - \dots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) = \theta^T \varphi(k) \end{aligned} \quad (64)$$

con

$$\theta = (a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_1, b_2, \dots, b_{n_b})^T \quad (65)$$

$$\varphi(k) = (-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n_a), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_b))^T \quad (66)$$

3- Estructura ARMAX Esta es la estructura surge de considerar $A \neq 1$, $B \neq 1$, $C \neq 1$ y $D = F = 1$. Este modelo mejora los modelos FIR y ARX es que no modelan adecuadamente las perturbaciones $v(k)$.

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)} u(k) + \frac{C(q)}{A(q)} e(k) = G(q) u(k) + H(q) e(k) \quad (67)$$

con

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q) &= b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \\ C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c} \end{aligned} \quad (68)$$

Esta estructura emplea el mismo denominador para $G(q)$ y $H(q)$, esto significa que la secuencia de entrada $\{u(k)\}_1^\infty$ y la de ruido $\{e(k)\}_0^\infty$ están sujetas a la misma dinámica (polos). Esta asunción es razonable en muchos casos si los disturbios dominantes entran al sistema junto con la entrada. Considérese un aeroplano donde los disturbios del viento produce el mismo tipo de fuerzas que la deflección de las superficies de control.

De la Ec.(26) se obtiene que la mejor estima de la salida es:

$$\hat{y}(k) = \frac{B(q)}{C(q)} u(k) + \left[1 - \frac{A(q)}{C(q)} \right] y(k) \quad (69)$$

sumando $[1 - C(q)]$ en ambos miembros, sumando y restando $y(k)$ en el segundo miembro y reordenando se tiene

$$\hat{y}(k) = B(q) u(k) + [1 - A(q)] y(k) + [C(q) - 1] \varepsilon(k) \quad (70)$$

donde $\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ es el error de predicción en el instante k

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) &= -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) + \\ &+ c_1 \varepsilon(k-1) + c_2 \varepsilon(k-2) + \dots + c_{n_c} \varepsilon(k-n_c) = \theta^T \varphi(k, \theta) \end{aligned} \quad (71)$$

donde

$$\varphi(k) = (-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n_a), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_b), \varepsilon(k-1), \varepsilon(k-2), \dots, \varepsilon(k-n_c))^T \quad (72)$$

$$\theta = (a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_1, b_2, \dots, b_{n_b}, c_1, c_2, \dots, c_{n_c})^T \quad (73)$$

se observa que el regresor en el instante k depende de los errores de estimación $\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ hasta el instante $k-1$, esto es depende de las estimas $\hat{y}(k)$ hasta el instante $k-1$ y como estas dependen de los valores de los parámetros se concluye que el regresor es función del vector de parámetros θ y por lo tanto la regresión es no-lineal.

4- Modelos de estado

Los modelos dados por las Ecs.(40)-(47) ó (39) pueden ser descriptos como regresión pseudolineal con la predicción

$$\hat{y}(k | \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\mathbf{x}}(k | \boldsymbol{\theta}) \quad (74)$$

Donde los estados $\hat{\mathbf{x}}(k | \boldsymbol{\theta})$ son los regresores. La ventaja esencial entre un regresor basado en los estados y los basados en modelos de entrada-salida es que el regresor en el espacio de estados es menos restrictivo en su estructura interna. Esto implica que es posible obtener modelos mas eficientes con un número menor de regresores.

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Independientemente de la estructura de modelo original esto es, FIR, ARMAX, estados, etc., en esta sección se considera que la expresión del predictor $\hat{y}(k | \boldsymbol{\theta})$ se a reescrito en la forma de parametrización lineal o pseudolineal, esto es,

$$\hat{y}(k | \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\varphi}^T(k) \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}(k) \quad (75)$$

ó

$$\hat{y}(k | \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\varphi}^T(k, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}(k, \boldsymbol{\theta}) \quad (76)$$

Con los vectores $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^d$.

La estimación de parámetros consiste en obtener la mejor estima posible del vector $\boldsymbol{\theta}$ a partir de un conjunto de datos obtenidos mediante mediciones experimentales, tal conjunto se denomina \mathbf{Z}^N .

$$\mathbf{Z}^N = \{ [y(k), \boldsymbol{\varphi}(k)], k = 1, 2, \dots, N \} \quad (77)$$

Donde N es el número de datos (pares salida, regresor en N instantes de tiempo). Los algoritmos de estimación pueden ser clasificados en dos categorías:

a) Algoritmos no-recursivos: También denominados fuera de línea (off-line) o de un paso, se emplea la totalidad de los datos de \mathbf{Z}^N en un solo paso. Normalmente se construyen matrices no-singulares de dimensiones proporcionales a N , las cuales deben invertirse para obtener el vector $\boldsymbol{\theta}$. Dentro de esta categoría se encuentra el método de *mínimos cuadrados*.

b) Algoritmos recursivos: También denominados en-línea (on-line) o de múltiples pasos, se calcula el vector $\boldsymbol{\theta}(k)$ en el instante k con los datos (pares $(y(k), \boldsymbol{\varphi}(k))$) disponibles hasta el instante $k - 1$. El valor final $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}(N)$ se obtiene tras N pasos (recursiones). La necesidad de los algoritmos recursivos resulta evidente en dos situaciones, en primer lugar si el número de datos

disponibles N es grande generalmente no es posible o práctico invertir matrices de por ejemplo 1000×1000 elementos. En segundo lugar considérese que en los algoritmos no recursivos el modelo solo se dispone cuando se tiene la totalidad de los datos, tal situación es inaceptable para aplicaciones en tiempo real esto es, cuando se debe disponer de un modelo aunque sea aproximado en todo momento como por ejemplo en las áreas de control adaptable o de detección de fallas. Dentro de esta categoría se encuentran el algoritmo de *mínimos cuadrados recursivos* y el *método del gradiente*.

En las siguientes secciones se considerarán tres algoritmos de estimación de parámetros, el método de *mínimos cuadrados* (algoritmo no-recursivo), *mínimos cuadrados recursivos* y el *método del gradiente* (algoritmo recursivo). Para el caso de modelos linealmente parametrizados pueden emplearse los tres algoritmos, para el caso de ser la parametrización pseudolineal de los tres métodos solo se puede emplear el método del gradiente.

Estimación de parámetros mediante los métodos de mínimos cuadrados

Como se mencionó en el párrafo anterior estos algoritmos son válidos para los modelos linealmente parametrizados.

a) Mínimos cuadrados no-recursivos

Considérese que se dispone del modelo linealmente parametrizado y de el conjunto de datos $\mathbf{Z}^N = \{[y(k), \boldsymbol{\varphi}(k)], k = 1, 2, \dots, N\}$.

$$\hat{y}(k|\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\varphi}^T(k) \boldsymbol{\theta} = \varphi_1(k) \theta_1 + \varphi_2(k) \theta_2 + \dots + \varphi_d(k) \theta_d \quad (78)$$

$$\text{con } \boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_d]^T \in \mathfrak{R}^d \text{ y } \boldsymbol{\varphi}(k) = [\varphi_1(k) \ \varphi_2(k) \ \dots \ \varphi_d(k)]^T \in \mathfrak{R}^d$$

se definen los residuos (innovaciones en el contexto anterior)

$$\varepsilon(k|\boldsymbol{\theta}) = y(k) - \hat{y}(k|\boldsymbol{\theta}) = y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k) \boldsymbol{\theta} \quad (79)$$

se construyen los siguientes vectores

$$\mathbf{Y}(N) = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N)]^T \in \mathfrak{R}^N \quad (80)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\theta}, N) = [\hat{y}(1|\boldsymbol{\theta}) \ \hat{y}(2|\boldsymbol{\theta}) \ \dots \ \hat{y}(N|\boldsymbol{\theta})]^T \in \mathfrak{R}^N \quad (81)$$

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}, N) = [\varepsilon(1|\boldsymbol{\theta}) \ \varepsilon(2|\boldsymbol{\theta}) \ \dots \ \varepsilon(N|\boldsymbol{\theta})]^T = \mathbf{Y}(N) - \hat{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\theta}, N) \in \mathfrak{R}^N \quad (82)$$

Mediante los datos de \mathbf{Z}^N se construye el siguiente sistema de N ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(1|\boldsymbol{\theta}) &= y(1) - \varphi_1(1)\theta_1 + \varphi_2(1)\theta_2 + \cdots + \varphi_d(1)\theta_d \\
 \varepsilon(2|\boldsymbol{\theta}) &= y(2) - \varphi_1(2)\theta_1 + \varphi_2(2)\theta_2 + \cdots + \varphi_d(2)\theta_d \\
 &\dots\dots\dots \\
 \varepsilon(k|\boldsymbol{\theta}) &= y(k) - \varphi_1(k)\theta_1 + \varphi_2(k)\theta_2 + \cdots + \varphi_d(k)\theta_d \\
 &\dots\dots\dots \\
 \varepsilon(N|\boldsymbol{\theta}) &= y(N) - \varphi_1(N)\theta_1 + \varphi_2(N)\theta_2 + \cdots + \varphi_d(N)\theta_d
 \end{aligned} \tag{83}$$

Que puede reescribirse en forma matricial

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}, N) = \mathbf{Y}(N) - \hat{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\theta}, N) = \mathbf{Y}(N) - \boldsymbol{\Phi}(N)\boldsymbol{\theta} \tag{84}$$

con

$$\boldsymbol{\Phi}(N) = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \cdots & \varphi_d(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \cdots & \varphi_d(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \cdots & \varphi_d(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^T(1) \\ \boldsymbol{\varphi}^T(2) \\ \dots \\ \boldsymbol{\varphi}^T(N) \end{bmatrix} \in \Re^{N \times d} \tag{85}$$

Se define el error cuadrático de los residuos mediante la siguiente expresión

$$V(\boldsymbol{\theta}, N) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varepsilon(k|\boldsymbol{\theta})^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k|\boldsymbol{\theta}))^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}, N)^T \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}, N) = \frac{1}{2} \|\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}, N)\|^2 \tag{86}$$

El método de mínimos cuadrados consiste en determinar algún vector de parámetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}(N)$ tal que el error cuadrático de los residuos sea mínimo, esto es,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(N) = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} V(\boldsymbol{\theta}, N) \tag{87}$$

Donde el operador $\arg \min_{\boldsymbol{\theta}}$ aplicado a una función cualquiera de $\boldsymbol{\theta}$ por ejemplo $f(\boldsymbol{\theta})$, devuelve como resultado el valor de $\boldsymbol{\theta}$ que hace mínima la función f .

Notar que se a explicitado la dependencia del vector de parámetros estimado $\hat{\boldsymbol{\theta}}(N)$ al número de datos N . Este hecho se explica de la siguiente manera, suponiendo que exista un vector desconocido de parámetros "verdaderos" $\boldsymbol{\theta}^*$ tal que la respuesta real del sistema (que generó los datos $y(k)$ de \mathbf{Z}^N) este dada por:

$$y(k) = \boldsymbol{\varphi}(k)^T \boldsymbol{\theta}^* + e(k) \tag{88}$$

En base a las características estadísticas del ruido (valor medio nulo) se tiene que

$$\boldsymbol{\theta}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}(N) \quad (89)$$

por lo tanto se espera que para N lo suficientemente grande

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(N) \approx \boldsymbol{\theta}^* \quad (90)$$

Un estimador que verifique las Ec.(89), (90) se dice que posee la *propiedad de consistencia*. La solución del problema de mínimos cuadrados viene dada por el siguiente teorema.

Teorema: (Estimación de mínimos cuadrados)

El vector de parámetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}(N)$ que minimiza el error cuadrático verifica la siguiente expresión

$$\boldsymbol{\Phi}^T(N) \boldsymbol{\Phi}(N) \hat{\boldsymbol{Y}}(N) = \boldsymbol{\Phi}^T(N) \boldsymbol{Y}(N) \quad (91)$$

Si la matriz $\boldsymbol{\Phi}^T(N) \boldsymbol{\Phi}(N)$ es no singular (invertible), el mínimo es único y está dado por la denominada *ecuación normal*

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(N) = (\boldsymbol{\Phi}^T(N) \boldsymbol{\Phi}(N))^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T(N) \boldsymbol{Y}(N) \quad (92)$$

Prueba (No se explicita la dependencia con N por simplicidad de notación): El error cuadrático (Ec.(86)) puede ser escrito de la siguiente manera

$$2 V(\boldsymbol{\theta}, N) = \boldsymbol{E}^T \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\theta})^T (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\theta} \quad (93)$$

Si la matriz $\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}$ es no singular (invertible) se puede sumar y restar $\boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{Y}$ al segundo miembro de la Ec.(93)

$$\begin{aligned} 2 V(\boldsymbol{\theta}, N) &= \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{Y} = \\ &= \boldsymbol{Y}^T (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T) \boldsymbol{Y} + (\boldsymbol{\theta} - (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{Y})^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{\theta} - (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{Y}) \end{aligned} \quad (94)$$

El término $\boldsymbol{Y}^T (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T) \boldsymbol{Y}$ no depende de $\boldsymbol{\theta}$ por lo que el error cuadrático será mínimo cuando

$$(\boldsymbol{\theta} - (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{Y})^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{\theta} - (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{Y}) = 0 \quad (95)$$

Como la matriz $\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}$ es no-singular la Ec.(95) se satisface para el vector nulo, esto es, para $(\boldsymbol{\theta} - (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{Y}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{Y}$ **Q.E.D**

Observación 1- La matriz cuadrada real $\Phi^T(N) \Phi(N)$ desempeña un papel muy importante en el algoritmo de mínimos cuadrados, por lo que es conveniente puntualizar algunas propiedades de esta clase de matrices. Para cualquier matriz real $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a la matriz $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se la denomina matriz de Gram de la matriz A . Las matrices de Gram poseen las siguientes propiedades:

p1) El rango de matriz de Gram de toda matriz real A es igual al rango de A , esto es,

$$\text{Rango}(A^T A) = \text{Rango}(A)$$

p2) La matriz de Gram $A^T A$ de la matriz real $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es positiva definida o semidefinida positiva de acuerdo a que el rango de A sea igual o menor que el número de sus columnas.

$$A^T A > 0 \text{ si } \text{Rango}(A) = n$$

$$A^T A \geq 0 \text{ si } \text{Rango}(A) < n$$

Recordar que una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ por definición es definida positiva ($Q > 0$) cuando el escalar $x^T Q x > 0$, para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$. La definición no es operativa para verificar cuando una matriz es definida positiva, por lo que la verificación se realiza mediante las siguientes equivalencias (no son únicas): Una matriz es definida positiva cuando su determinante es positivo ($|Q| > 0$) o cuando todos sus autovalores son positivos. Para el caso de una matriz semidefinida positiva ($Q \geq 0$) se admite que el escalar $x^T Q x$ tome el valor nulo para algunos vectores x ($x^T Q x \geq 0$). La condición de una matriz de ser semidefinida positiva se verifica mediante la siguiente equivalencia: Una matriz es semidefinida positiva cuando todos sus autovalores son positivos o nulos.

Observación 2- La condición para la cual la matriz $\Phi^T(N) \Phi(N) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ es invertible se denomina *condición de excitación*, la matriz $\Phi^T(N) \Phi(N)$ puede expresarse de la siguiente manera

$$\Phi^T(N) \Phi(N) = \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (96)$$

Pues de la Ec.(85)

$$\Phi(N) = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \cdots & \varphi_d(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \cdots & \varphi_d(2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \cdots & \varphi_d(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \cdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T(N) = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \cdots & \varphi_1(N) \\ \varphi_2(1) & \varphi_2(2) & \cdots & \varphi_2(N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_d(1) & \varphi_d(2) & \cdots & \varphi_d(N) \end{bmatrix} = [\varphi(1) \ \varphi(2) \ \cdots \ \varphi(N)]$$

$$\Phi^T(N) \Phi(N) = [\varphi(1) \ \varphi(2) \ \dots \ \varphi(N)] \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \dots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k)$$

Se define la matriz

$$P(N) \triangleq (\Phi^T(N) \Phi(N))^{-1} = \left(\sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right)^{-1} \in \Re^{d \times d} \quad (97)$$

Empleando la Ec.(97) la ecuación normal (Ec.(92)) queda:

$$\hat{\theta}(N) = \left(\sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k) \right) = P(N) \left(\sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k) \right) \quad (98)$$

b) Mínimos cuadrados recursivos

El algoritmo de mínimos cuadrados visto en la sección anterior se aplica en forma recursiva a medida que se dispone de nuevos datos. El vector $\theta(k)$ en el instante k , se calcula con los datos (pares $(y(k), \varphi(k))$) disponibles hasta el instante k . Para tal fin la ecuación normal Ecs.(92) ó (98) se deben reescribir en forma recursiva.

De la definición de $P(N)$ (Ec.(97))

$$P(k)^{-1} = \sum_{j=1}^k \varphi(j) \varphi^T(j) = \sum_{j=1}^{k-1} \varphi(j) \varphi^T(j) + \varphi(k) \varphi^T(k) = P(k-1)^{-1} + \varphi(k) \varphi^T(k) \quad (99)$$

la ecuación normal (Ec.(98)) es:

$$\hat{\theta}(k) = P(k) \left(\sum_{j=1}^k \varphi(j) y(j) \right) = P(k) \left(\sum_{j=1}^{k-1} \varphi(j) y(j) + \varphi(k) y(k) \right) \quad (100)$$

teniendo en cuenta que

$$\sum_{j=1}^{k-1} \varphi(j) y(j) = P(k-1)^{-1} \hat{\theta}(k-1) = P(k)^{-1} \hat{\theta}(k-1) - \varphi(k) \varphi^T(k) \hat{\theta}(k-1) \quad (101)$$

reemplazando la Ec.(101) en la Ec.(100), se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= P(k)^{-1} \left(P(k)^{-1} \hat{\theta}(k-1) - \varphi(k) \varphi^T(k) \hat{\theta}(k-1) + \varphi(k) y(k) \right) = \\ &= \hat{\theta}(k-1) - P(k) \varphi(k) \varphi^T(k) \hat{\theta}(k-1) + P(k) \varphi(k) y(k) = \end{aligned}$$

$$= \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{P}(k) \boldsymbol{\varphi}(k) \left(y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \right) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k) \boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (102)$$

luego

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k) \boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (103)$$

con

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k) \boldsymbol{\varphi}(k) \quad (104)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k) = y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \quad (105)$$

luego para que el algoritmo funcione necesitamos calcular en forma recursiva $\mathbf{K}(k)$ o lo que es equivalente $\mathbf{P}(k)$ lo que se tiene hasta el momento es el cálculo recursivo de $\mathbf{P}(k)^{-1}$ mediante la Ec.(99), para resolver el problema se emplea el siguiente Lema.

Lema de inversión de matrices

Sean \mathbf{A} , \mathbf{C} y $\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ matrices cuadradas no-singulares, entonces:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \quad (106)$$

Prueba: La prueba se obtiene por sustitución directa

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}) (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1}) = \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} = \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B} \mathbf{C} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} = \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

Desarrollando $\mathbf{P}(k)$ de la Ec.(97) se tiene

$$\mathbf{P}(k) = (\boldsymbol{\Phi}^T(k) \boldsymbol{\Phi}(k))^{-1} = (\boldsymbol{\Phi}^T(k-1) \boldsymbol{\Phi}(k-1) + \boldsymbol{\varphi}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k))^{-1} = (\mathbf{P}(k-1)^{-1} + \boldsymbol{\varphi}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k))^{-1} \quad (107)$$

Empleando el lema de inversión en la Ec.(107) con: $\mathbf{P}(k-1) = \mathbf{A}$, $\boldsymbol{\varphi}(k) = \mathbf{B}$, $\mathbf{I} = \mathbf{C}$ y $\boldsymbol{\varphi}^T(k) = \mathbf{D}$ se tiene

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k) (\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k))^{-1} \boldsymbol{\varphi}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \quad (108)$$

La Ec.(108) implica que

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k) \boldsymbol{\varphi}(k) = \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k) \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k) \right)^{-1} \quad (109)$$

La recurrencia se obtiene al reemplazar la Ec.(109) en la Ec.(108)

$$\mathbf{P}(k) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k) \right) \mathbf{P}(k-1) \quad (110)$$

Notar de la Ec(108) ó (109) que para calcular $\mathbf{P}(k)$ de todos modos debe invertirse una matriz (la matriz $\left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k) \right)$), pero si el sistema es de una salida $y(k)$ la matriz $\left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k) \right)$ es un escalar y solo se debe invertir un número. (recordar que $\mathbf{P}(k-1) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ y que $\boldsymbol{\varphi}(k) \in \mathbb{R}^d$).

Todo el desarrollo anterior se resume en el siguiente teorema (que ya se a probado)

Teorema: (Estimación por mínimos cuadrados recursivos)

Asuma que la matriz $\boldsymbol{\Phi}(k)$ es de rango completo para $k \geq k_0$. Si $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es la estima en el sentido de los mínimos cuadrados, entonces se satisfacen las ecuaciones recursivas.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k) \left(y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \right) \quad (111)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k) \boldsymbol{\varphi}(k) = \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k) \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k) \right)^{-1} \quad (112)$$

$$\mathbf{P}(k) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k) \right) \mathbf{P}(k-1) \quad (113)$$

Observaciones

La Ec.(111) tiene una interpretación intuitiva. La estima del vector de parámetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ se obtiene adicionando un factor de corrección a la estima del instante anterior $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$. La corrección es proporcional a $y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$, donde el último término puede interpretarse como el valor de $y(k)$ predicho por el modelo de la Ec.(75) ($\hat{y}(k|\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\varphi}^T(k) \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}(k)$). El término de corrección es entonces proporcional a la diferencia entre los valores medidos y predichos de $y(k)$ basados en los parámetros disponibles para el cálculo. Si la diferencia entre los valores medidos y predichos de $y(k)$ es nula entonces $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) = \boldsymbol{\theta}^*$.

Todo método de estimación recursiva da como resultado ecuaciones similar a la Ec.(111), donde lo que cambia de un método a otro es la forma de calcular el vector $\mathbf{K}(k)$.

Notar que el teorema exige que la matriz $\mathbf{P}(k)$ esté definida y esto ocurre cuando la matriz $\boldsymbol{\Phi}^T(k) \boldsymbol{\Phi}(k)$ es no-singular (invertible). Como

$$\boldsymbol{\Phi}^T(k) \boldsymbol{\Phi}(k) = \sum_{j=1}^k \boldsymbol{\varphi}(j) \boldsymbol{\varphi}^T(j)$$

Se sigue que la matriz $\Phi^T(k) \Phi(k)$ siempre es singular si k es lo suficientemente pequeño (Se dispone de pocos datos y se deben calcular muchos parámetros o en término de sistemas de ecuaciones se tienen pocas ecuaciones y muchas incógnitas por lo que el sistema no está determinado), se debe verificar que $k \geq d$ (el número de filas de $\Phi(k)$ debe ser mayor o igual que el número de columnas, en general $k \gg d$).

Para evitar el problema descripto y que el algoritmo se pueda ejecutar desde el instante inicial se inicializa la matriz P de la siguiente manera:

$$P(0) = P_0 \quad (113)$$

Donde P_0 es una matriz definida positiva, entonces

$$P(k) = \left(P_0^{-1} + \Phi^T(k) \Phi(k) \right)^{-1} \quad (114)$$

$P(k)$ puede ser tan próxima a $\left(\Phi^T(k) \Phi(k) \right)^{-1}$ como se quiera eligiendo P_0 lo suficientemente grande, en general se elige

$$P_0 = \alpha I \quad (115)$$

con $\alpha > 10^6$

El método de mínimos cuadrados recursivo se resume en el siguiente algoritmo:

Algoritmo (Mínimos cuadrados recursivo)

- 1- **Inicializar** $\hat{\theta}(0) = 0$, $P(0) = P_0$, α (cota en el error del modelo permitida es un número pequeño)
- 2- $k = 1$
- 3- **Calcular**

$$P(1) = \left(P_0^{-1} + \Phi^T(1) \Phi(1) \right)^{-1} = \left(P_0^{-1} + \varphi^T(1) \varphi(1) \right)^{-1}$$

$$K(1) = P_0 \varphi(1) \left(I + \varphi^T(1) P_0 \varphi(1) \right)^{-1}$$

$$\hat{\theta}(1) = K(1) y(1)$$
- 4- **Incrementar** k ($k = k + 1$)
- 5- **Calcular**

$$K(k) = P(k) \varphi(k) = P(k-1) \varphi(k) \left(I + \varphi^T(k) P(k-1) \varphi(k) \right)^{-1}$$

$$P(k) = \left(I - K(k) \varphi^T(k) \right) P(k-1)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k) \left(y(k) - \varphi^T(k) \hat{\theta}(k-1) \right)$$

$$\hat{y}(k) = \varphi^T(k) \hat{\theta}(k)$$

$$| y(k) - \hat{y}(k) |$$

6- Si $|y(k) - \hat{y}(k)| > \alpha$ incrementar k y retornar a 5, de lo contrario terminar.

Estimación de parámetros mediante el método del gradiente

Como se mencionó anteriormente este algoritmo recursivo es válido tanto para los modelos linealmente parametrizados como los modelos no linealmente parametrizados. Recordando que el objetivo es disminuir error cuadrático entre la salida real del sistema y la salida estimada (residuos) a medida que crece k (se dispone de más información (mediciones) del proceso).

$$V(k | \hat{\theta}(k-1)) = \frac{1}{2} \varepsilon(k | \hat{\theta}(k-1))^2 = \frac{1}{2} [y(k) - \hat{y}(k | \hat{\theta}(k-1))]^2 \quad (116)$$

$$V(k+1 | \theta(k)) \leq V(k | \theta(k-1)) \quad (117)$$

En general la actualización del vector de parámetros estimado es de la forma

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \gamma f(\hat{\theta}(k-1)) \quad (118)$$

Donde $f \in \mathbb{R}^d$ es una dirección de búsqueda basada en el vector de parámetros $\hat{\theta}$ y γ es una constante positiva. Por otra parte $V \in \mathbb{R}$ es un función escalar que depende del vector de parámetros $\hat{\theta}$. Del análisis vectorial es conocido el hecho que la dirección del vector gradiente de una función escalar es hacia los valores crecientes de de la función y es perpendicular a las curvas de nivel. Por otra parte el gradiente es nulo en un máximo o en un mínimo de la función. En el método del gradiente se adopta f igual a la dirección opuesta del gradiente de V , esto es $f = -\nabla V$ cuya dirección es hacia los valores decrecientes de V .

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \gamma \nabla V(\hat{\theta}(k-1)) \quad (119)$$

La Ec.(119) se justifica de la siguiente manera: suponer que el vector de parámetros evoluciona en forma continua $\hat{\theta}(k-1) \rightarrow \hat{\theta}(k)$, entonces se puede calcular $V(\hat{\theta}(k))$ mediante el desarrollo en serie de Taylor alrededor de $\hat{\theta}(k-1)$

$$V(\hat{\theta}(k)) = V(\hat{\theta}(k-1)) + \nabla V(k-1))^T (\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)) + o(\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)\|) \quad (120)$$

Si γ es pequeña el vector de parámetros $\hat{\theta}(k)$ esta próximo a $\hat{\theta}(k-1)$ y el término lineal del desarrollo en serie domina a los términos de orden superior $o(\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)\|)$, luego para γ pequeña

$$V(\hat{\theta}(k)) \approx V(\hat{\theta}(k-1)) + \nabla V(k-1))^T (\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)) \quad (121)$$

por la Ec.(119)

$$V(\hat{\theta}(k)) \approx V(\hat{\theta}(k-1)) - \gamma \nabla V(k-1))^T \nabla V(k-1) = V(\hat{\theta}(k-1)) - \gamma \|\nabla V(k-1)\|^2 \quad (122)$$

Como $-\gamma \|\nabla V(k-1)\|^2 \leq 0$ se verifica la Ec.(117), esto es $V(\hat{\theta}(k)) \leq V(\hat{\theta}(k-1))$

Cada componente $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2, \dots, d$ del vector de parámetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ se actualiza mediante la siguiente expresión

$$\hat{\theta}_i(k) = \hat{\theta}_i(k-1) - \gamma \frac{\partial V(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))}{\partial \hat{\theta}_i(k-1)} \quad (123)$$

$$\hat{\theta}_i(k) = \hat{\theta}_i(k-1) - \gamma \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}_i(k-1)} \left[\frac{1}{2} (y(k) - \hat{y}(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)))^2 \right] \quad (124)$$

$$\hat{\theta}_i(k) = \hat{\theta}_i(k-1) + \gamma [y(k) - \hat{y}(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))] \frac{\partial \hat{y}(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))}{\partial \hat{\theta}_i(k-1)} \quad (125)$$

$$\hat{\theta}_i(k) = \hat{\theta}_i(k-1) + \gamma \varepsilon(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)) \frac{\partial \hat{y}(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))}{\partial \hat{\theta}_i(k-1)} \quad (126)$$

para $i = 1, 2, \dots, d$, con $\varepsilon(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)) = y(k) - \hat{y}(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))$.

Si la parametrización es lineal

$$\hat{y}(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)) = \sum_{i=1}^d \hat{\theta}_i(k-1) \varphi_i(k) \quad (127)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))}{\partial \hat{\theta}_i(k-1)} = \varphi_i(k) \quad (128)$$

$$\hat{\theta}_i(k) = \hat{\theta}_i(k-1) + \gamma [y(k) - \hat{y}(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))] \varphi_i(k) = \hat{\theta}_i(k-1) + \gamma \varepsilon(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)) \varphi_i(k) \quad (129)$$

Para $i = 1, 2, \dots, d$. Si la parametrización es pseudolineal se tiene:

$$\hat{y}(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)) = \sum_{i=1}^d \hat{\theta}_i(k-1) \varphi_i(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)) \quad (130)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))}{\partial \hat{\theta}_i(k-1)} = \varphi_i(k) + \sum_{j=1}^d \hat{\theta}_j(k-1) \frac{\partial \varphi_j(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))}{\partial \hat{\theta}_i(k-1)} \quad (131)$$

$$\hat{\theta}_i(k) = \hat{\theta}_i(k-1) + \gamma \varepsilon(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)) \left(\varphi_i(k) + \sum_{j=1}^d \hat{\theta}_j(k-1) \frac{\partial \varphi_j(k | \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))}{\partial \hat{\theta}_i(k-1)} \right) \quad (132)$$

para $i = 1, 2, \dots, d$.

Ejemplos

1- Identificación de la estructura FIR

$$\begin{aligned}\hat{y}(k|\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)) &= \hat{\mathbf{B}}(q, \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)) u(k) = \hat{b}_1(k-1) u(k-1) + \hat{b}_2(k-1) u(k-2) + \cdots + \hat{b}_{n_b}(k-1) u(k-n_b) = \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}^T(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k)\end{aligned}$$

con

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) = (\hat{b}_1(k-1) \ \hat{b}_2(k-1) \ \cdots \ \hat{b}_{n_b}(k-1))^T$$

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = (u(k-1) \ u(k-2) \ \cdots \ u(k-n_b))^T$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k|\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))}{\partial b_i(k-1)} = \varphi_i(k) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n_b$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k|\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))}{\partial b_1(k-1)} = u(k-1)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k|\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))}{\partial b_2(k-1)} = u(k-2)$$

.....

$$\frac{\partial \hat{y}(k|\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))}{\partial b_{n_b}(k-1)} = u(k-n_b)$$

$$\hat{b}_i(k) = \hat{b}_i(k-1) + \gamma [y(k) - \hat{y}(k|\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))] \varphi_i(k) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n_b$$

$$\hat{b}_1(k) = \hat{b}_1(k-1) + \gamma [y(k) - \hat{y}(k|\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))] u(k-1)$$

$$\hat{b}_2(k) = \hat{b}_2(k-1) + \gamma [y(k) - \hat{y}(k|\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))] u(k-2)$$

.....

$$\hat{b}_{n_b}(k) = \hat{b}_{n_b}(k-1) + \gamma [y(k) - \hat{y}(k|\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))] u(k-n_b)$$

2- Identificación de la estructura ARMAX: Sobrentendiendo que las matrices A , B y C son función del vector de parámetros $\hat{\theta}(k-1)$, se tiene que:

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

$$\hat{y}(k | \hat{\theta}(k-1)) = \frac{B(q)}{C(q)} u(k) + \left[1 - \frac{A(q)}{C(q)} \right] y(k)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k | \hat{\theta}(k-1))}{\partial a_i(k-1)} = -\frac{1}{C(q)} y(k-i)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k | \hat{\theta}(k-1))}{\partial b_i(k-1)} = \frac{1}{C(q)} u(k-i)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}(k | \hat{\theta}(k-1))}{\partial c_i(k-1)} &= -\frac{B(q)}{C(q)C(q)} u(k-i) + \frac{A(q)}{C(q)C(q)} y(k-i) = \frac{1}{C(q)} \left[\frac{B(q)}{C(q)} u(k-i) + \left(1 - \frac{A(q)}{C(q)} \right) y(k-i) \right] + \frac{1}{C(q)} y(k-i) = \\ &= \frac{1}{C(q)} (y(k-i) - \hat{y}(k-i | \hat{\theta}(k-1))) = \frac{1}{C(q)} \varepsilon(k-i | \hat{\theta}(k-1)) \end{aligned}$$

El ajuste de los parámetros esta dado por:

$$\hat{a}_i(k) = \hat{a}_i(k-1) - \gamma \varepsilon(k | \hat{\theta}(k-1)) (C(q)^{-1} y(k-i)) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n_a$$

$$\hat{b}_i(k) = \hat{b}_i(k-1) + \gamma \varepsilon(k | \hat{\theta}(k-1)) (C(q)^{-1} u(k-i)) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n_b$$

$$\hat{c}_i(k) = \hat{c}_i(k-1) + \gamma \varepsilon(k | \hat{\theta}(k-1)) (C(q)^{-1} \varepsilon(k-i | \hat{\theta}(k-1))) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n_c$$

Se observa que las derivadas de la salida estimada respecto de los parámetros se obtiene filtrando señales del regresor (con el filtro $C^{-1}(q)$)

$$\left(\dots \frac{\partial \hat{y}(k | \hat{\theta}(k-1))}{\partial a_i(k-1)} \dots \frac{\partial \hat{y}(k | \hat{\theta}(k-1))}{\partial b_i(k-1)} \dots \frac{\partial \hat{y}(k | \hat{\theta}(k-1))}{\partial c_i(k-1)} \dots \right)^T = \frac{1}{C(q)} (\dots -y(k-i) \dots u(k-1) \dots \varepsilon(k | \hat{\theta}(k-1)) \dots)^T$$

$$\Psi(k | \hat{\theta}(k-1)) = \frac{1}{C(q)} \Phi(k | \hat{\theta}(k-1))$$

Donde $\Psi(k | \hat{\theta}(k-1)) \in \Re^d$ ($d = n_a + n_b + n_c =$ número de parámetros) es un vector cuyas componentes son las derivadas de la salida estimada respecto de los parámetros.

BIBLIOGRAFÍA

- 1- K.J. Astrom, B.Wittenmark, **Sistemas Controlados por Computador**, PARANINFO, (1988).
- 2- K.J. Astrom, B.Wittenmark, **Adaptive Control, Second Edition**, ADDISON-WESLEY, (1995).
- 3- D.P. Bertsekas, **Nonlinear Programming**, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, (1995).
- 4- L. Ljung, **System Identification: Theory for the User**, Prentice-Hall, Inc. (1987).
- 5- L. Ljung, **System Identification**, Internal Report, Department of Electrical Engineering, Linkoping University, Sweden, (1995).
- 6- A. Ollero Baturone, **Control por Computador: Descripción Interna y Diseño Optimo**, MARCOMBO BOIXAREU EDITORES, (1991).
- 7- S. Sastry, M. Bodson, **Adaptive Control**, Prentice-Hall, (1989).