3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

3.1 Soluciones de ecuaciones diferenciales

Dada la ecuación diferencial no lineal:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \qquad t \geq 0 \qquad \mathbf{x}(0) = x_0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$f : \Re_+ \times \Re^n \to \Re^n$$

La **solución** en $[0, T]$: $\quad x(.) \in C^n\,[0, T]$ tal que

- $x(.)$ es diferenciable, o sea $\dot{x}(t)$ está definida $\forall\ t \in [0, T]$.
- La ecuación (1) vale $\forall\ t \in [0, T]$.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

En relación a un **sistema físico** se espera que verifique:

a) Tiene al menos una solución (existencia).

b) Tiene exactamente una solución para *T* suficientemente pequeño (existencia y unicidad local).

c) Tiene exactamente una solución definida sobre $\left[0,\infty\right)$ (existencia y unicidad global)

d) Tiene exactamente una solución $\forall t$ sobre $\left[0,\infty\right)$ y ésta depende en forma continua de la condición inicial $x(0)$ (solución bien condicionada).

$(a) \rightarrow (d)$ son progresivamente fuertes. Están vinculados a restricciones en la naturaleza de f.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

Es importante estudiar las condiciones de f para existencia y unicidad **local**, o sea existe una solución en $\left[0,\delta\right]$ con δ suficientemente pequeño, y existencia y unicidad **global** en $\left[0,\infty\right)$.

- **Observación:**

$x(.)$ es una solución de la ecuación diferencial **(1)** en $\left[0,T\right]$ sii $x(.)$ satisface:

$$\boxed{x(t)=x_o+\int_o^t f\left[\tau,x(\tau)\right]d\tau \quad en\ t\in\left[0,T\right]} \qquad \textbf{(2)}$$

- **Ejemplo:**

$$\dot{x}(t)=-sign\ x(t) \quad t\geq 0 \quad x(0)=0$$

$$sign\ x(t)=\begin{cases}1\ si\ x\geq 0\\ -1\ si\ x<0\end{cases}$$

no $\exists$ solución $x(t)$ continuamente diferenciable.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- **Ejemplo:**

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2x(t)} \quad t \geq 0 \quad x(0) = 0$$

2 soluciones: $x_1(t) = t^{1/2}$

$x_2(t) = -t^{1/2}$

- **Ejemplo:**

$$\dot{x}(t) = 1 + x^2(t) \quad t \geq 0 \quad x(0) = 0.$$

1 solución: $x(t) = \operatorname{tg} t \quad en \quad [0, \frac{\pi}{2})$

pero no solución continuamente diferenciable en $[0, \infty)$.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

3.2 Existencia y unicidad local

- **Teorema.** Suponga que $f(t,x)$ es continua en t y x y satisface:

Existen constantes T, r, h, k tal que,

$$\left\| f(t,x) - f(t,y) \right\| \le k \left\| x - y \right\| \quad \forall x, y \in B, \quad \forall t \in [0,T]$$ (**Lipschitz**)

$$\left\| f(t,x_0) \right\| \le h \qquad \forall t \in [0,T]$$

con B un entorno en $\Re^n$,

$$B = \left\{ x \in \Re^n : \left\| x - x_o \right\| \le r \right\}$$

Luego (1) tiene exactamente una solución en $[0,\delta]$ siempre que δ sea suficientemente pequeño para satisfacer: $h\delta\, e^{k\delta} \le r$ (3)

y

$$\delta \le mín\left(T, \frac{\ell}{k}, \frac{r}{h+kr} \right) \quad (4)$$

para alguna constante $\ell < 1$.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- ***Prueba:***

Se define $x_o(.) \in C^n[0,\delta]$ función tal que vale $x_o \quad \forall t \in [0,\delta]$.
Supóngase δ satisface (3)-(4) y sea S un entorno en $C^n[0,\delta]$ definido por

$$S = \left\{ x(.) \in C^n[0,\delta] : \left\| x(.) - x_o(.) \right\|_c \leq r \right\}$$

Sea $P: \quad C^n[0,\delta] \rightarrow C^n[0,\delta],$

$$(Px)(t) = x_o + \int_o^t f[\tau, x(\tau)] d\tau \quad \forall t \in [0,\delta]$$

Claramente $x(.)$ es una solución de (1) en $[0,\delta]$ si $(Px)(.) = x(.)$ o sea $x(.)$ es un punto fijo de *P*.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- Ahora se verá que ***P* es una contracción en *S***. Sean $x(.), y(.)$ elementos arbitrarios de *S*, luego $x(t), y(t)$ están en *B* $\forall t \in [0,\delta]$.

  Luego,

$$(Px)(t)-(Py)(t)=\int_o^t \left\{ f\left[\tau, x(\tau)\right]- f\left[\tau, y(\tau)\right]\right\} d\tau$$

$$\left\|(Px)(t)-(Py)(t)\right\| \leq \int_o^t \left\| f\left[\tau, x(\tau)\right]- f\left[\tau, y(\tau)\right]\right\| d\tau$$

$$\leq \int_o^t k\left\|x(\tau)-y(\tau)\right\| d\tau$$

$$\leq kt\left\|x(.)-y(.)\right\|_c$$

$$\leq \ell\left\|x(.)-y(.)\right\|_c$$

  pues $kt \leq k\delta \leq \ell$ por (4). Como el último término es independiente de *t*,

$$\left\|(Px)(.)-(Py)(.)\right\|_c = \sup_{t\in[0,\delta]} \left\|(Px)(t)-(Py)(t)\right\| \leq \ell \left\|x(.)-y(.)\right\|_c$$

  P es una contracción en *S*.

- Ahora se verá que ***P* mapea *S* en *S***. Sea $x(.) \in S$. Luego,

$$\left\| P(x)(t) - x_o \right\| = \left\| \int_o^t f\left[\tau, x(\tau)\right] d\tau \right\|$$

$$= \left\| \int_o^t \left\{ \left(f\left[\tau, x(\tau)\right] - f\left[\tau, x_o\right] \right) + f\left[\tau, x_o\right] \right\} d\tau \right\|$$

$$\leq \int_o^t \left\{ \left\| f\left[\tau, x(\tau)\right] - f\left[\tau, x_o\right] \right\| + \left\| f\left[\tau, x_o\right] \right\| \right\} d\tau$$

$$\leq tk \left\| x(.) - x_o \right\|_c + th$$

$$\leq tkr + th \leq \delta kr + \delta h \leq r \qquad \text{(de (4))}$$

Por lo tanto,

$$\left\| (Px(.) - x_o(.) \right\|_c = \sup_{t \in [0,\delta]} \left\| (Px)(t) - x_o \right\| \leq r$$

por lo que $(Px)(.) \in S$.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- Como *P* mapea *S* en *S* y es una contracción en *S*, tiene exactamente un punto fijo en *S*. Sin embargo ahora se probará que *P* tiene exactamente un punto fijo en $C^n[0,\delta]$, no sólo en *S* que es subconjunto propio de $C^n[0,\delta]$. O sea que *cualquier punto fijo en* $C^n[0,\delta]$ *debe estar en S.*

  Sea $x(.) \in C^n[0,\delta]$ que satisface (2), o sea es solución de la ec. Diferencial (1)

$$x(t) - x_o = \int_o^t f[\tau, x(\tau)]d\tau$$

$$= \int_o^t \{ f[\tau, x(\tau)] - f(\tau, x_o) + f(\tau, x_o) \} d\tau$$

$$\|x(t) - x_o\| \leq \int_o^t k \|x(\tau) - x(0)\| d\tau + ht$$

Esto es válido para tiempos *t* menores o iguales a α, en que la función continua x(.) se asume que sale de la región S, o sea $\|x(\alpha) - x_0\| = r$.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- **Nota:** *Desigualdad de Bellman-Gronwall:*

$$r(t) \leq c + \int_0^t k(\tau) r(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T]$$

$$con\ c \geq 0,\ r(.), k(.)\ continuas\ no\ negativas$$

$$\Rightarrow \quad r(t) \leq c.\exp\left[\int_0^t k(\tau)\, d\tau\right]$$

□

- Aplicando la desigualdad de Bellman-Gronwall, y para α en que la x(.) sale del entorno S:

$$\left\| x(\alpha) - x_o \right\| \leq hte^{kt} < h\delta e^{k\delta} \leq r \quad \forall t \in [0, \delta]$$

pues $h\delta e^{h\delta} \leq r$ de (3). Entonces α<δ no es un tiempo en que la función sale de S, y resulta:

$$\sup \left\| x(t) - x_o \right\| = \left\| x(.) - x_o \right\|_c \leq r, \quad x(.) \in S$$

$\Rightarrow P$ tiene exactamente un punto fijo en $[0, \delta]$.

$\Rightarrow$(1) tiene exactamente una solución en $C^n[0, \delta]$. .

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- **Corolario**
  Considérese la ecuación diferencial (1). Suponga que en un entorno de $\left(0, x_o\right)$ la función $f(t,x)$ es *continuamente diferenciable*. Luego (1) tiene exactamente una solución en $\left[0,\delta\right]$, para δ suficientemente pequeño.

  Prueba: Las condiciones de diferenciabilidad de *f* aseguran que *f* cumple Lipschitz y acotamiento para algún conjunto de valores r, T, k, h .

- **Ejemplo:** Oscilador de Van der Pol

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \mu(x_1^2 - 1)x_2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + \mu(x_1^2 - 1)x_2 \end{bmatrix}$$

Como cada componente es continuamente diferenciable dondequiera, se concluye que partiendo de una condición inicial arbitraria $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$, $\exists$ solución única en $\left[0,\delta\right]$ para δ suficientemente pequeño.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- **Ejemplo:**

$$\dot{x}(t) = 1 + x^2 \qquad x(0) = 0$$

$$x(t) = tg\ t$$

$$\delta_{máx} = \frac{\pi}{2} \quad o\ sea \quad [0, \delta] \subset [0, \delta_{máx})$$

$$x(t) \to \infty \quad con \quad t \to \frac{\pi}{2}$$

(Tiempo de escape finito)

3.3 Existencia y unicidad global

- **Teorema:** Suponga que para cada $T \in [0, \infty)$ existen constantes k_T, h_T tal que,

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq k_T \| x - y \| \quad \forall x, y \in \Re^n, \quad \forall t \in [0, T]$$ (Lipschitz global)

$$\| f(t, x_o) \| \leq h_T \quad \forall t \in [0, T]$$

Luego (1) tiene exactamente una solución en $[0, \infty)$.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- ***Prueba:*** Dado $T < \infty, sea\ P: C^n[0,T] \to C^n[0,T],$

$$(Px)(t) = x_o + \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau \quad \forall t \in [0,T],$$

y se define $x_o(.) \in C^n[0,T]$ como igual a x_o en $[0,T]$.

- **a)** $\left[P^m x_o(.)\right]_{m=1}^{\infty}$ es Cauchy en $C^n[0,T]$.

Sea $x_m(.) = \left(P^m x_o\right)(.)$

$$x_1(t) - x_o(t) = \int_0^t f(\tau, x_o)d\tau$$

$$\left\|x_1(t) - x_o(t)\right\| \le \int_o^t \left\|f\left(\tau, x_o\right)\right\| d\tau \le h_T t \qquad (5)$$

En general, para un $m \ge 1$:

$$\left\|x_{m+1}(t) - x_m(t)\right\| \le \int_o^t \left\| f\left[\tau, x_m(\tau)\right] - f\left[\tau, x_{m-1}(\tau)\right] \right\| d\tau$$

$$\le k_T \int \left\|x_m(\tau) - x_{m-1}(\tau)\right\| d\tau \quad \le k_T \int_0^t k_T \int_o^t \left\|x_{m-1}(\tau) - x_{m-2}(\tau)\right\| d\tau$$

$$\le \cdots \le k_T^m \int_o^t \cdots \int_0^t \left\|x_1(\tau) - x_o\right\| d\tau \cdots d\tau$$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

y usando (5):

$$\leq k_T^m h_T \int_o^t \cdots \int_o^t \tau d\tau = k_T^m h_T \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}$$

Por ejemplo:

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq \int_o^t \| f[\tau, x_1(\tau)] - f[\tau, x_o]\| d\tau$$

$$\leq k_T \int_o^t \|x_1(\tau) - x_o\| d\tau$$

$$\leq k_T \int_o^t h_T \tau d\tau = k_T h_T \frac{t^2}{2}$$

O sea,

$$\|x_m(t) - x_{m-1}(t)\| \leq k_T^{m-1} h_T \frac{t^m}{m!}$$

Para un entero $p \geq 0$ se tiene,

$$\|x_{m+p}(t) - x_m(t)\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \|x_{m+i+1}(t) - x_{m+i}(t)\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} h_T k_T^{m+i} \frac{t^{m+i+1}}{(m+i+1)!} = \sum_{i=m+1}^{m+p} h_T k_T^{i-1} \frac{t^i}{i!}$$

$$\|x_{m+p}(.) - x_m(.)\|_c = \sup_{t\in[0,T]} \|x_{m+p}(t) - x_m(t)\|$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^{m+p} h_T \; k_T^{i-1} \frac{T^i}{i!} \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} h_T k_T^{i-1} \frac{T^i}{i!} \qquad (6)$$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

La serie $\left(\sum_{i=0}^{m} h_T k_T^{i-1} \frac{T^i}{i!}\right)$ converge a $\frac{h_T}{k_T} e^{k_T T}$ con $m \to \infty$.

Entonces, $\sum_{i=m+1}^{\infty} (.) = \frac{h_T}{k_T} e^{k_T T} - \sum_{i=0}^{m} (.)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera con m suficientemente grande, $\Rightarrow$ de (6), $\left[x_m(.)\right]^{\infty}$ es Cauchy, y como $C^n\left[0,T\right]$ es Banach, la serie converge, supóngase a $x^*(.)$ en $C^n\left[0,T\right]$.

- **b)** $x^*(.)$ es una solución:

Tómense dos elementos cualquiera en $C^n\left[0,T\right]$, $z_1(.)$ y $z_2(.)$.

$$(Pz_1)(t) - (Pz_2)(t) = \int_o^t \left\{ f\left[\tau, z_1(\tau)\right] - f\left[\tau, z_2(\tau)\right] \right\} d\tau$$

$$\left\|(Pz_1)(t) - (Pz_2)(t)\right\| \le \int_o^t \left\| f\left[\tau, z_1(\tau)\right] - f\left[\tau, z_2(\tau)\right] \right\| d\tau$$

$$\le k_T \int_o^t \left\| z_1(\tau) - z_2(\tau) \right\| d\tau \;\; \le k_T T \left\| z_1(.) - z_2(.) \right\|_C$$

$$\left\|(Pz_1)(.) - (Pz_2)(.)\right\|_C = \sup_{t \in [o,T]} \left\|(Pz_1)(t) - (Pz_2)(t)\right\| \le k_T T \left\| z_1(.) - z_2(.) \right\|_C$$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

Como $k_T T$ es constante, *P es uniformemente continua* en $C^n[0,T]$.

Entonces si $\left[x_m(.)\right]_o^\infty$ converge a $x^*(.)$,

$$(Px^*)(.) = (P(\text{lím } x_m))(.) = \lim_{m\to\infty}(Px_m)(.) = \text{lím } x_{m+1}(.) = x^*(.),$$

o sea $x^*(.)$ es una solución de la ecuación diferencial.

- **c)** x^* es la única solución :

Supóngase que $y(.)$ también es solución:

$$y(t) - x^*(t) = \int_o^t \left\{ f\left[\tau, y(\tau)\right] - f\left[\tau, x^*(\tau)\right] \right\} d\tau$$

Aplicando la desigualdad de Bellman-Gronwall:

$$\left\| y(t) - x^*(t) \right\| = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

ó sea $y(.) = x^*(.)$.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- **Observaciones**

- **Iteraciones de Picard**

La secuencia $\left[P^m x_o(.) \right]$ que converge a la solución $x^*(.)$ es conocida como secuencia de las iteraciones de Picard y este método de hallar la solución es el *método de Picard*. Es fácil mostrar que las iteraciones de Picard convergen partiendo de cualquier función en $C^n\left[0,T\right]$ y no sólo de $x_o(.)$.

- El teorema anterior asegura que existe una única solución correspondiente a cada condición inicial. Ahora se verá un teorema que muestra que en cualquier instante dado, existe una única solución que pasa a través de cada punto en $\Re^n$.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- **Teorema (unicidad de soluciones que pasan por un punto):** Sea *f* que satisface las hipótesis del teorema de existencia y unicidad global. Luego, para cada $z \in \Re^n$ y cada $T \in [0, \infty)$ existe exactamente un elemento $z_o \in \Re^n$ tal que la única solución en $[0, T]$ de la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t)] \quad x(0) = z_o \tag{7}$$

satisface

$$x(T) = z \tag{8}$$

- ***Prueba:*** Considérese

$$\dot{x}(t) = f_s[t, x(t)] \quad x(0) = z \tag{9}$$

$$f_s(t, x) = -f(T - t, x) \quad \forall t \in [0, T]$$

f_s satisface las hipótesis del teorema anterior $\Rightarrow$ la ecuación diferencial (9) tiene solución única en $[0, T]$. Sea $y(.)$ esa solución y se define $z_o = y(T)$.

Puede verificarse que las funciones $y_s(t) = y(T - t) \quad \forall t \in [0, T]$ satisfacen (7) y (8).

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

Para probar *unicidad* de z_o correspondiente a un z particular, supóngase que $y_1(.)$ e $y_2(.) \in C^n[0,T]$ satisfacen (7)-(8).

Sea $y_1(0) = z_1, y_2(0) = z_2$. Luego $y_a(.)$ e $y_b(.)$ definidas por $y_a(t) = y_1(T-t),\ y_b(t) = y_2(T-t)$ deben satisfacer (9). Como la solución de (9) es única, $y_a(.) = y_b(.) \Rightarrow z_1 = z_2$.

- **Teorema (Dependencia continua de la solución con las condiciones iniciales):**

Sea *f* que satisface hipótesis del teorema de existencia y unicidad global.
Sea $T \in [0,\infty)$ especificado y suponga $x(.), y(.) \in C^n[0,T]$ que satisfacen,

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t)] \quad x(0) = x_o$$
$$\dot{y}(t) = f[t, y(t)] \quad y(0) = y_o$$

Luego para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta(\varepsilon, T) > 0$ tal que $\|x(.) - y(.)\|_C < \varepsilon$ cuando $\|x_o - y_o\| < \delta(\varepsilon, T)$.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- **Observaciones:** Interpretación de los 2 teoremas anteriores.

$\rightarrow$ Sea $\phi: \Re^n \rightarrow C^n[0,T]$

$$CI\ x_o \rightarrow \text{ solución única } x(.)$$

El teorema último establece que ϕ es ***uniformemente continua*** en $\Re^n$.

$\rightarrow$ Sea: $\chi: \Re^n \rightarrow \Re^n$

$$CI\ x_o \rightarrow x(T)$$

El teorema de unicidad de soluciones que pasan por un punto establece que χ es ***uno a uno y sobre*** (rango de χ es todo $\Re^n$).

Más aún, el teorema último muestra que χ, χ^{-1} son ***continuos***.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- **Ejemplo:** Los teoremas vistos dan condiciones suficientes (no necesarias) para existencia y unicidad.

  Sea
  $$\dot{x}(t) = -x^2 \qquad x(0) = 1$$
  $$x(t) = \frac{1}{1+t}$$
  es solución única en $\left[0,\infty\right)$ aún cuando $f(x) = x^2$ no es globalmente Lipschitz.

- **Ejemplo:** $\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(0) = x_o$

  A(.) continua.
  $$\left\|A(t)\right\|_i \leq k_T \qquad \forall t \in [0,T]$$
  $$\left\|A(t)x - A(t)y\right\| \leq k_T \left\|x - y\right\| \qquad \forall x,y \in \Re^n, \forall t \in [0,T]$$
  $$\left\|A(t)x_o\right\| \leq k_T \left\|x_o\right\| \qquad \forall t \in [0,T]$$

  $\Longrightarrow$ solución única en $\left[0,\infty\right)$.

3.4 Estimas de la solución

- **Sistemas lineales**

- **Teorema:** Considérese la ecuación diferencial lineal ***no forzada***,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad t \geq 0$$

$x(t) \in \Re^n$, $A(t) \in \Re^{nxn}$, $A(.)$ es continua por tramos.

Sea $\|.\|$ una norma en $\Re^n$, $\|.\|_i$, μ_i las correspondientes normas y medidas inducidas en $\Re^{nxn}$. Luego, siempre que $t \geq t_o \geq 0$ se tiene,

$$\boxed{\|x(t_o)\| \, e^{\left\{\int_{to}^{t} -\mu_i[-A(\tau)]d\tau\right\}} \leq \|x(t)\| \leq \|x(t_o)\| \, e^{\left\{\int_{to}^{t} \mu_i[A(\tau)]d\tau\right\}}}$$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- **Teorema:** Considérese la ecuación diferencial lineal ***forzada***

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \upsilon(t) \quad \forall t \geq 0$$

con $x(t), \upsilon(t) \in \Re^n, A(t) \in \Re^{nxn} \quad \forall t \geq 0, \quad \upsilon(.), A(.)$ son continuas a tramos.

Sea $\|.\|$ una norma en $\Re^n$, $\|.\|_i, \mu_i(.)$ las normas y medida inducida en $\Re^{nxn}$. Luego,

con $t \geq t_o \geq 0$ se tiene,

$$\boxed{\|x(t)\| \leq \|x(t_o)\| \, e^{\left\{\int_{to}^{t} \mu_i[A(\tau)]d\tau\right\}} + \int_{to}^{t} \|\upsilon(\tau)\| \, e^{\left\{\int_{\tau}^{t} \mu_i[A(s)]ds\right\}} d\tau}$$

$$\boxed{\|x(t)\| \geq \|x(t_o)\| \, e^{\left\{\int_{to}^{t} -\mu_i[-A(\tau)d\tau\right\}} - \int_{to}^{t} \|\upsilon(\tau)\| \, e^{\left\{\int_{\tau}^{t} -\mu_i[-A(s)ds\right\}} d\tau}$$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- **Observación**

  Sistema no forzado:

  Sea $x(t_o) \neq 0, \|x(t_o)\| > 0.$ Para t finito, el límite inferior es estrictamente positivo y el superior es finito.

  Esto significa que no puede tener tiempo de establecimiento (ir a cero) finito ni tiempo de escape finito.

  Un sistema lineal discreto $x_{k+1} = A_k x_k$ puede tener tiempo de establecimiento finito, aunque no de escape finito (porque es $A_k = A$ nilpotente o porque A_k es singular y $x_k \in \{esp.\, nulo\ de\ A_k\}$.

- **Ejemplo:**

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1[A(t)] = \mu_\infty[A(t)] = -t + 1$$
$$\mu_1[-A(t)] = \mu_\infty[-A(t)] = 2t + 1$$
$$\mu_2[A(t)] = -t;\ \mu_2[-A(t)] = 2t.$$

$$e^{(-t-t^2)} \leq \underbrace{|x_1(t)| + |x_2(t)|}_{\|x(t)\|_1} \leq e^{(-t-t^2/2)}$$

$$e^{(-t-t^2)} \leq \underbrace{|x_1(t)|, |x_2(t)|}_{\|x(t)\|_\infty = \text{máx}(|x_1(t)|, |x_2(t)|)} \leq e^{(-t-t^2/2)}$$

$$e^{-t^2} \leq \underbrace{\left(|x_1(t)|^2 + |x_2(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x(t)\|_2} \leq e^{-t^2/2}$$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- **Sistemas no lineales**

- **Teorema:** Sea $\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad t \geq 0 \; x(0) = x_0$

Supóngase : a) f es continuamente diferenciable.

b) $f(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0$

Defínase $A(t, x) \in \Re^{nxn}$ como :

$$f(t, x) = f(t, 0) + A(t, x).x \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \Re^n$$

Sea $\|.\|$ norma en $\Re^n$ y $\|.\|_i, \mu_i(.)$ las correspondientes normas y medidas inducidas en $\Re^{nxn}$.

Supóngase que existen funciones continuas $\alpha(.), \beta(.)$:

$$\mu[A(t, x)] \leq \alpha(t), \quad \mu[-A(t, x)] \geq \beta(t) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \Re^n$$

Entonces :

$$\boxed{\|x_o\|.\exp\left[-\int_o^t \beta(\tau) d\tau\right] \leq \|x(t)\| \leq \|x_o\|.\exp\left[\int_o^t \alpha(\tau) d\tau\right], \quad \forall t \geq 0}$$

3.4 Ejercicios.

3.1 Analizar la soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $\dot{x}(t) = x(t)^{1/3} \quad x(0) = 0$

b) $\dot{x}(t) = -x^2(t) \quad x(0) = -1$

3.2 Mostrar que la condición de Lipschitz es independiente de la norma que se use en $\Re^n$.

3.3 Determinar si las siguientes funciones satisfacen una condición global de Lipschitz.

a) $f(x) = \left[x_1^2 - x_1 x_2 \quad 2x_1 - x_2^2\right]^T$

b) $f(x) = \left[x_1 \exp(-x_2^2) \quad x_2 \exp(-x_1^2)\right]^T$

3.4 Calcular cotas para solución en el sistema del péndulo con y sin fricción.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

- **Revisión**

- Existencia y unicidad local (condiciones en un entorno de x_0 y de t_0).

- Existencia y unicidad global (condiciones en todo *x* y *t).*

- Dos soluciones no se cruzan.

- Dependencia continua de la solución con las CI.

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

4.1 Preliminares

- **Por qué** particularizar en los sistemas de 2º orden?
  - Las trayectorias (soluciones) se pueden representar en el plano.
  - Fácil interpretación geométrica.
  - Existen técnicas de análisis específicas.

- **Representación:**

$$\dot{x}_1(t) = f_1[t, x_1(t), x_2(t)] \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2[t, x_1(t), x_2(t)] \quad (2)$$

- **Plano de estado:**

Sea $x_1(.), x_2(.)$ solución de (1)-(2), puede representarse en el plano de estados como se muestra en la figura 4.1.

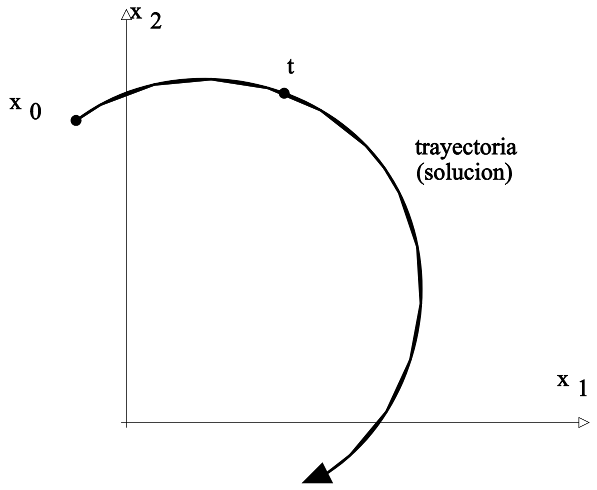


Figura 4.1

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Plano de fase:**

Si $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, el plano de estado se denomina *plano de fase* y se tienen trayectorias del plano de fase.

En particular para $\ddot{y}(t) = g\left[t, y(t), \dot{y}(t)\right]$ se define:

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = g\left[t, x_1(t), x_2(t)\right] \end{cases}$$

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Reconstrucción del parámetro tiempo** en el plano de fase.

- Si x_2 no cambia signo en la trayectoria C:

$$t_f = t_o + \int_C \frac{dx_1}{x_2}$$

($t_f - t_0$)=área bajo la curva 1/x_2

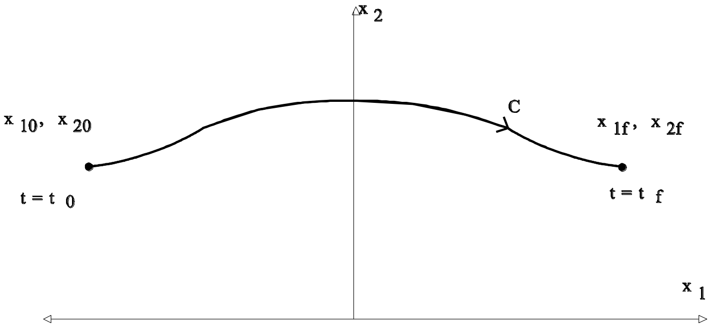


Figura 4.2

- Si x_2 cambia signo: particionar en segmentos sin cambio de signo, Fig. 4.3.

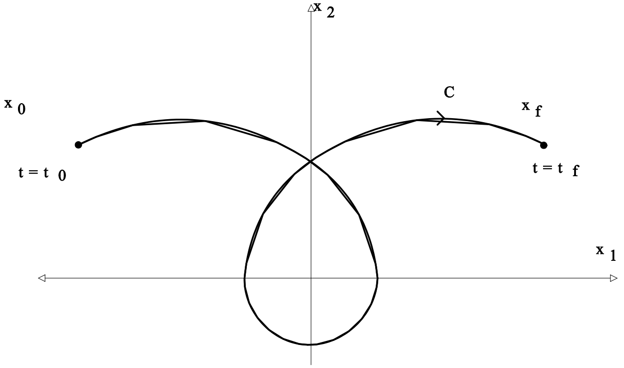


Figura 4.3

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Campo vectorial**

Dado el sistema *autónomo*,

$$\dot{x}_1(t) = f_1\left[x_1(t), x_2(t)\right]$$
$$\dot{x}_2(t) = f_2\left[x_1(t), x_2(t)\right]$$

Es posible asociar a (x_1, x_2) el campo vectorial $\left[f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2)\right]$.

Un ***campo vectorial*** es una función $f: \Re^2 \to \Re^2$ cuyas componentes f_1 y f_2 son funciones suaves.

- La ***dirección*** del campo vectorial f en el punto $x \in \Re^2$ es,

$$\theta_f(x) = \mathrm{arctg}\left[f_1,\ f_2\right]$$

$\theta_f(x)$ es indefinido si $f(x) = \mathbf{0}$ (en los equilibrios).

- El concepto de campo vectorial es válido para sistemas autónomos de cualquier orden. $f(x)$ se denomina *campo vectorial de velocidad*.

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Suposiciones del capítulo**

- Sistemas autónomos

- f_1, f_2 continuamente diferenciables $\Rightarrow$ soluciones únicas al menos localmente en *t*.

O sea, dadas (1)-(2) y condiciones iniciales arbitrarias

$$x_1(0) = x_{10}$$
$$x_2(0) = x_{20}$$

$\exists\, T > 0 \,/ (1)-(2)$ tienen exactamente 1 solución en $[0, T]$.

En el caso de sistemas autónomos, condiciones adicionales sobre f aseguran solución única sobre $[0, \infty)$.

4.2 Sistemas Lineales

- **Forma general** de sistema lineal autónomo de 2º orden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \qquad & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \qquad & x_2(0) &= x_{20} \end{aligned}$$

Notación matricial:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$x(0) = x_0$$

Transformación de variables:

$$z(t) = M^{-1}x(t)$$

M : matriz constante real no singular $\in \Re^{2x2}$

Se obtiene,

$$\dot{z}(t) = M^{-1}AMz(t)$$

$$z(0) = M^{-1}x_0$$

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Eligiendo *M* puede hacerse que $M^{-1}AM$ sea:

- **1. *Forma diagonal***

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

λ_1 , λ_2 autovalores reales y distintos de A.

- **2. *Forma de Jordan***

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

λ autovalor real repetido.

- **3. *Forma compleja conjugada*.**

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{matrix} \alpha + j\beta \\ \alpha - j\beta \end{matrix}\right\}$ autovalores complejos conjugados de A.

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Caso 1:** Forma diagonal.
  Resulta,

$$\dot{z}_1(t) = \lambda_1 z_1(t) \qquad z_1(0) = z_{10}$$
$$\dot{z}_2(t) = \lambda_2 z_2(t) \qquad z_2(0) = z_{20}$$

cuya solución es:

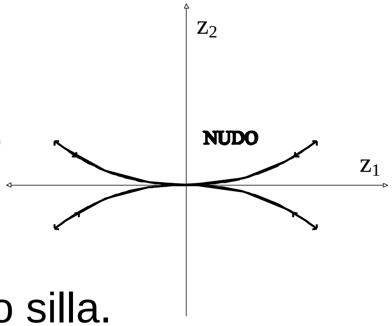
$$z_1(t) = z_{10} e^{\lambda_1 t}$$
$$z_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t}$$

Para $\lambda_1 \neq 0$

$$z_2 = z_{20} \left(\frac{z_1}{z_{10}} \right)^{\lambda_2 / \lambda_1}$$

- Cuando $sig\lambda_1 = sig\lambda_2$ resulta un nudo (estable o inestable).

- Cuando $sig\lambda_1 \neq sig\lambda_2$ resulta un punto silla.



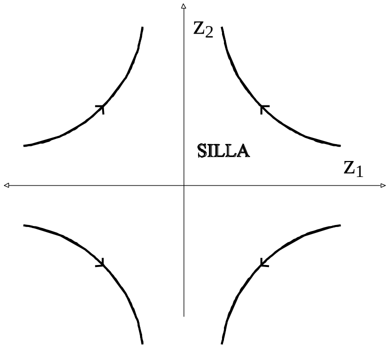


Figura 4.4

- **Caso 2:** Forma de Jordan. Resultan,

$$\dot{z}_1(t) = \lambda \; z_1(t) + z_2(t) \qquad z_1(0) = z_{10}$$
$$\dot{z}_2(t) = \lambda \; z_2(t) \qquad z_2(0) = z_{20}$$

cuya solución es:

$$z_1(t) = z_{10} e^{\lambda t} + z_{20} t e^{\lambda t}$$
$$z_2(t) = z_{20} e^{\lambda t}$$

Resulta un nudo estable o inestable (Fig. 4.5).

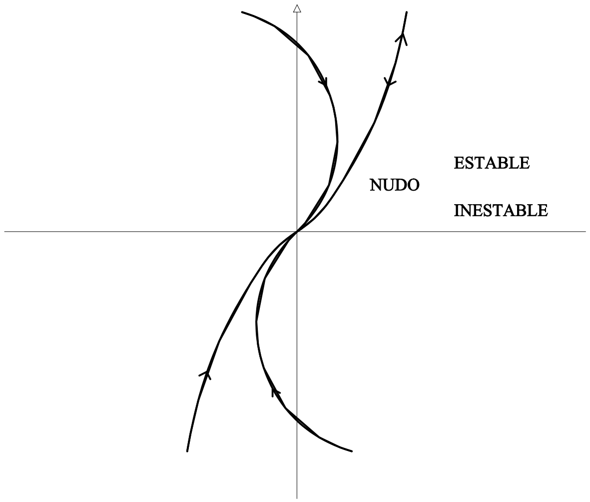


Figura 4.5

- **Caso 3:** Forma compleja conjugada. Resultan,

$$\dot{z}_1(t) = \alpha\, z_1(t) + \beta\, z_2(t) \qquad z_1(0) = z_{10}$$
$$\dot{z}_2(t) = -\beta\, z_1(t) + \alpha\, z_2(t) \qquad z_2(0) = z_{20}$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} r = (z_1^2 + z_2^2)^{1/2} \\ \phi = \operatorname{arctg}\dfrac{z_2}{z_1} \end{cases} \qquad \dot{r} = \frac{\partial r}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \frac{\partial r}{\partial z_2}\dot{z}_2 = \cdots = \alpha r$$

resultan,

$$\dot{r} = \alpha\, r \qquad r = r_0 e^{\alpha t}$$
$$\dot{\phi} = -\beta \qquad \phi(t) = \phi_0 - \beta\, t$$

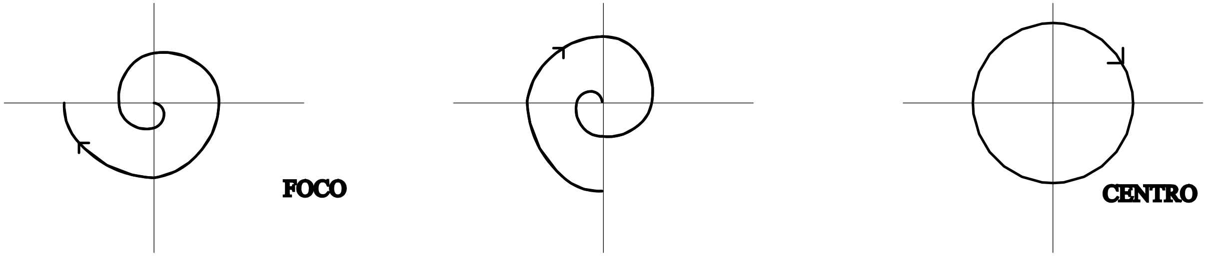


Figura 4.6

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

4.3 Sistemas no lineales en general

- Métodos para obtener las trayectorias del plano de estado de un sistema autónomo de 2º orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1\left[x_1(t), x_2(t)\right] \\ \dot{x}_2(t) = f_2\left[x_2(t), x_2(t)\right]. \end{cases}$$

  - Método computacional
  - Método analítico
  - Método de linealización.
  - Método gráfico de Euler
  - Método de las isoclinas
  - Método del campo vectorial

A pesar que los métodos computacionales son muy adecuados, es bueno conocer algunas técnicas que permitan esbozar rápidamente estas trayectorias. Se verán dos de ellas: el método analítico y el método de las isoclinas.

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Método analítico**

Estas técnicas conducen a una relación funcional entre x_1 y x_2 de la forma

$$g(x_1, x_2, c) = 0$$

donde c representa los efectos de las condiciones iniciales (y posiblemente de las entradas externas). Luego se dibuja esta relación en el plano fásico para distintas condiciones iniciales.

- **Una técnica** consiste en resolver

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} x_1(t) &= g_1(t) \\ x_2(t) &= g_2(t) \end{aligned}$$

y luego eliminar el tiempo t obteniendo una relación funcional $g(x_1, x_2, c)=0$.

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Ejemplo:** Sistema masa-resorte

$$\ddot{x} + x = 0$$

$$x(t) = x_0 \cos t$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \operatorname{sen} t$$

Eliminando el tiempo se obtiene la ecuación de las trayectorias $x^2 + \dot{x}^2 = x_0^2$ que representa círculos en el plano de fase (estabilidad marginal).

- **Otra técnica** elimina directamente la variable tiempo notando que

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

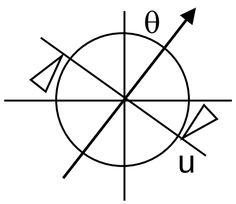
y luego resolviendo esta ecuación para una relación funcional entre x_1 y x_2.

- **Ejemplo:** Sistema masa-resorte $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}$ $\quad x_1 = x \quad f_1 = x_2$; $\quad x_2 = \dot{x} \quad f_2 = -x_1$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{-x}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} + x = 0$$

Integrando: $\dot{x}^2 + x^2 = x_0^2$

- **Ejemplo:** (Sistemas lineales a tramos).
  Sistema de control de un satélite.



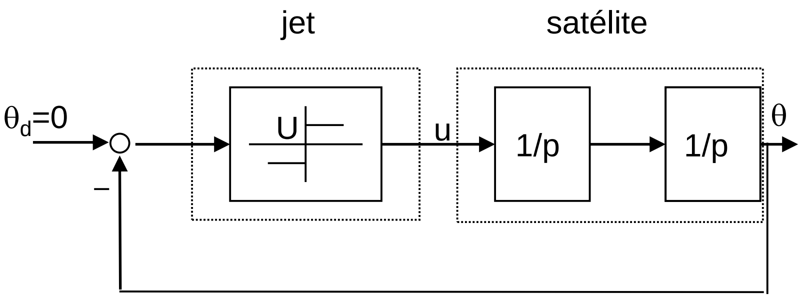


Figura 4.7

$$\ddot{\theta} = u$$

$$u(t) = \begin{cases} -U \;\; si\,\theta > 0 \\ U \;\; si\,\theta < 0 \end{cases} \qquad x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta} \qquad \dot{x}_1 = x_2 = f_1 \quad \dot{x}_2 = u = f_2$$

- *Caso u(t)=U* $\quad \ddot{\theta} = U$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{U}{x_2} \quad \text{o sea} \quad \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{U}{\dot{\theta}}$$

o bien $\quad \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta} = U \qquad$ Integrando: $\quad \dot{\theta}^2 = 2U\theta + c_1$

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- *Caso u(t)=-U* $\ddot{\theta} = -U$ y resulta: $\dot{\theta}^2 = -2U\theta + c_1$

Combinando ambas trayectorias en el eje vertical, que es la línea de conmutación de las ecuaciones de control, se obtienen las trayectorias de la Fig. 4.8. Se ve que el sistema de control se comporta como marginalmente estable.

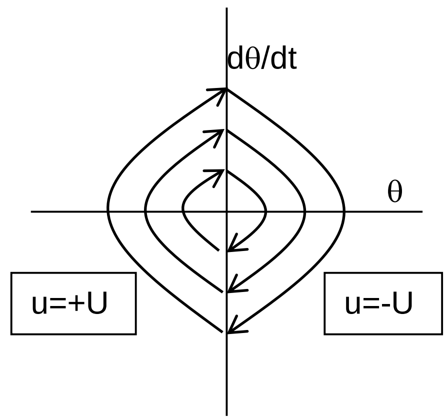
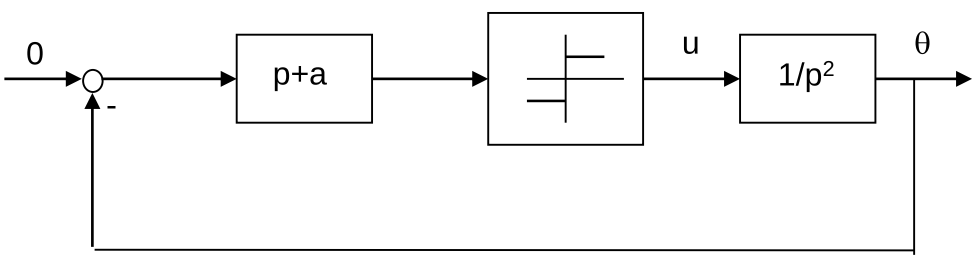
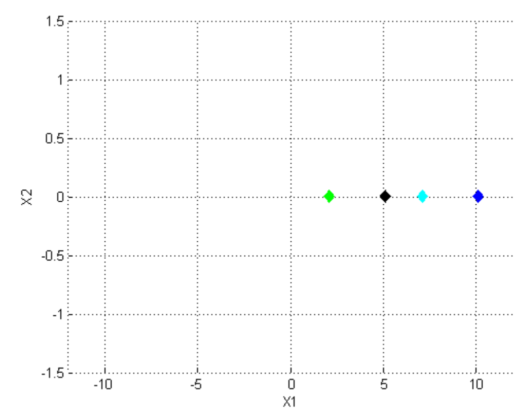


Figura 4.8

Solución: realimentar además la velocidad.



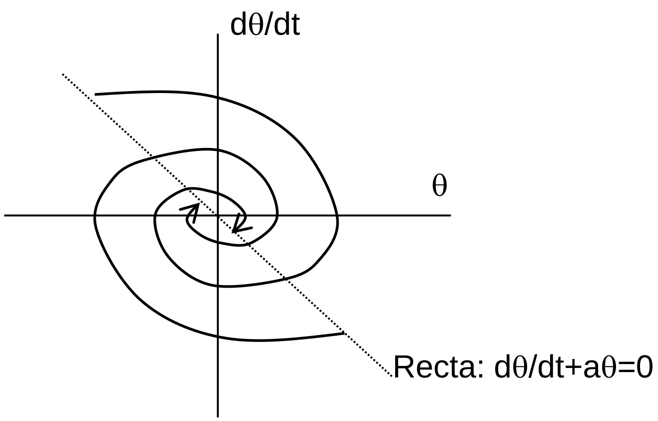


En este caso $\ddot{\theta} = u$

$$u(t) = \begin{cases} -U & si \quad \dot{\theta} + a\theta > 0 \\ U & si \quad \dot{\theta} + a\theta < 0 \end{cases}$$

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Resultan las trayectorias en el plano fásico que se muestran en la figura 4.10, lo que conduce a trayectorias convergentes al origen (estabilidad asintótica).



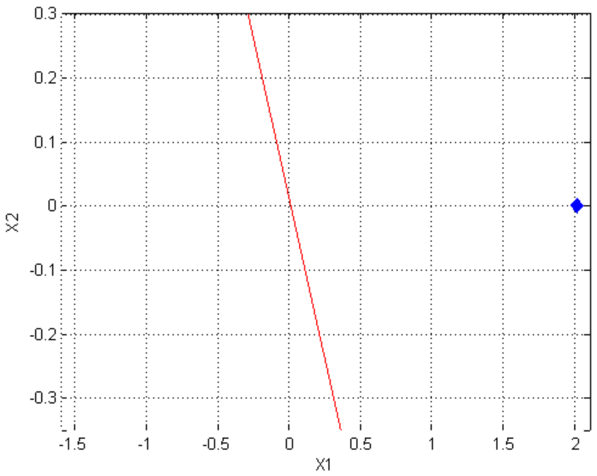


Figura 4.10

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Método de las isoclinas**

Dado el sistema:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

en el punto *(x_1 ,x_2)* del plano fásico, la tangente a la trayectoria tiene pendiente

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

Una **isoclina** es el lugar de los puntos con igual pendiente α

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \alpha$$

o sea puntos tal que

$$f_2(x_1, x_2) = \alpha\ f_1(x_1, x_2)$$

En este método primero se determina un campo de direcciones de tangentes y luego se trazan las trayectorias.

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Ejemplo:** sistema masa-resorte

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 \qquad \frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{x_1}{x_2}$$

La ecuación de la isoclina de pendiente α es:

$$x_1 + \alpha\ x_2 = 0$$

que es una recta. Sobre ésta se pueden dibujar pequeños segmentos de pendientes α. Se trazan varias isoclinas con sus segmentos y luego se esbozan las trayectorias, que para este caso resultan círculos, figura 4.11.

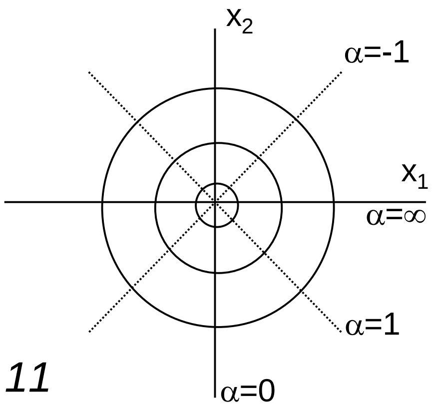


Figura 4.11

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

4.4 Soluciones periódicas y ciclos límites

- **Introducción**

Algunos sistemas autónomos presentan soluciones periódicas. Por ejemplo: el oscilador armónico.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) & (1) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) & (2) \end{cases} \qquad CI: \quad \begin{aligned} x_1(0) &= x_{10} \\ x_2(0) &= x_{20} \end{aligned}$$

Solución:

$$x_1(t) = r_0 \cos(\phi_0 - t) \qquad r_0 = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2}$$

$$x_2(t) = r_0 \,\mathrm{sen}\,(\phi_0 - t) \qquad \phi_0 = arctg\,\frac{x_{20}}{x_{10}}$$

Tiene un continuo de soluciones periódicas.

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Sistema no lineal**

$$\dot{x}_1 = x_2 + \alpha\, x_1(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \alpha\, x_2(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2)$$

cuyo campo vectorial es la suma del de (1)-(2) y otro **radial** que **sale** para $x_1^2 + x_2^2 < \beta^2$ y **entra** para $x_1^2 + x_2^2 > \beta^2$. [Radial: si $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ está siempre alineado con $\mathbf{x}$].

- En coordenadas polares: $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}\, 2x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}\, 2x_2\dot{x}_2$$
$$= \frac{x_1}{r}(x_2 + \alpha\, x_1(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2)) +$$
$$+ \frac{x_2}{r}(-x_1 + \alpha\, x_2(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2))$$

$$\dot{r} = \alpha\, r(\beta^2 - r^2)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2}\left[\frac{1}{x_1}\dot{x}_2 - \frac{x_2}{x_1^2}\dot{x}_1\right] =$$
$$= \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}\left[\frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2\dot{x}_1}{x_1^2}\right] = -1$$

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Solución:

$$r(t) = \frac{\beta}{\left(1 + c_0 e^{-2\beta^2 \alpha t}\right)^{1/2}}$$

$$\phi(t) = \phi_o - t \qquad\qquad c_o = \frac{\beta^2}{r_o{}^2} - 1$$

El sistema tiene sólo 1 solución periódica, $r_o = \beta$. Esta es **aislada.**

- **Definición:** Un **ciclo límite** de

$$\dot{x}_1(t) = f_1\left[x_1(t), x_2(t)\right] \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2\left[x_1(t), x_2(t)\right] \qquad (2)$$

es una ***solución periódica aislada*** de estas ecuaciones (existe alguna vecindad que no contiene otra solución periódica).

Se excluyen las soluciones periódicas triviales (equilibrios).

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Teorema de Bendixson (condición suficiente para la no existencia de soluciones periódicas).** Supóngase que *D* sea un dominio en $\Re^2$ *simplemente conectado -sin huecos-* tal que

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

no es $\equiv 0$ sobre cualquier subdominio de *D* y no cambia el signo en *D*. Entonces *D* no contiene trayectorias cerradas de (1)-(2).

Este teorema da **condiciones suficientes** para que **no existan** soluciones periódicas en *D*.

Demostración: Supóngase una trayectoria cerrada *J* de (1)-(2). Si se denomina *n(x)* a la normal de la trayectoria en el punto *x*, $\int_J f(x).n(x)dl = 0$. Por el teorema de la divergencia (Stokes),

$\int_J f(x).n(x)dl = \iint_S \nabla f(x)dS = 0$, con $\nabla f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ la divergencia de *f(x)*.

Entonces, o se verifica que $\nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in S$ o bien $\nabla f(x)$ cambia de signo en *S*.

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Ejemplo:** Sistema Lineal

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$
$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

Se sabe que $\exists$ solución periódica sii A tiene autovalores imaginarios:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$
$$a_{11} + a_{22} = 0 \qquad (a)$$
$$\mathbf{y} \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \qquad (b)$$

No existen soluciones periódicas sii se viola (a) ó (b).
Aplicando el teorema:

$$\nabla f(x) = a_{11} + a_{22} \qquad \forall x \in \Re^2$$

Si $a_{11} + a_{22} \neq 0 \Rightarrow$ no existen soluciones periódicas (se viola (a)). Es condición suficiente para que no existan soluciones periódicas.

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Ejemplo:** sistema no lineal $\dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2^2$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_1^2 x_2$$

$$\nabla f(x) = x_2^2 + x_1^2 > 0 \qquad \forall (x_1, x_2) \neq (0,0)$$

Entonces $\nabla f(x)$ no es cero ni cambia signo $\forall x \in \Re^2 \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow$ no existen soluciones periódicas en $\Re^2$ (a menos la trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

- **Ejemplo:**

$$\dot{x}_1 = x_2 + \alpha\, x_1(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \alpha\, x_2(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2)$$

Para $D = \{r^2 < 2\beta^2\}$, $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\alpha\beta^2 - 4\alpha(x_1^2 + x_2^2) = 2\alpha(\beta^2 - 2r^2)$ cambia signo. No se puede asegurar que no exista ciclo límite. En efecto, existe.

- Si se toma la región anular (conjunto que no es simplemente conectado, como exige el teorema):

$D = \left\{(x_1, x_2):\ 2\dfrac{\beta^2}{3} < x_1^2 + x_2^2 < 2\beta^2\right\}$ ∇ *f(x)* es negativo en todo *D* y nulo en ninguna parte. Sin embargo $\exists$ ciclo límite. Esto es porque no se cumple la hipótesis del teorema sobre región simplemente conectada.

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- **Teorema de Poincaré (condición necesaria para existencia de ciclos límites).** Si existe un ciclo límite, entonces $N=S+1$, donde N es el número de nodos, centros y focos rodeados por el ciclo límite y S el número de puntos silla rodeados.

- **Ejemplo:**
En el oscilador de Van der Pol, S=0, N=1 (un foco en el origen), entonces se verifica N=S+1 lo que indica que puede existir un ciclo límite rodeando al origen. De hecho existe un ciclo límite.

- **Teorema de Poincaré-Bendixson.** Si una trayectoria permanece en una región finita Ω, entonces ocurre alguna de las siguientes afirmaciones:

  a) La trayectoria va hacia un punto de equilibrio.

  b) La trayectoria tiende asintóticamente hacia una trayectoria periódica (por ejemplo un ciclo límite).

  c) La trayectoria es periódica (como por ejemplo un ciclo límite).

  Este teorema es bastante intuitivo y puede verificarse en los ejemplos anteriores.

4.4 Ejercicios

4.1 Demostrar la fórmula de reconstrucción del tiempo en el plano de fase. Interpretar gráficamente.

4.2 Para las siguientes matrices, encuentre los autovalores, clasifique el tipo de equilibrio (0,0), verifique por simulación.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

4.3 Para el sistema siguiente (predador-presa de Volterra), analizar el tipo de los equilibrios por linealización y aplicar el teorema de Poincaré para inferir la posible existencia de ciclos límites.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_2 - x_1 x_2$$

4.4 Graficar trayectorias del siguiente sistema incluyendo la solución periódica (ciclo límite). Observar que es una solución periódica aislada.

$$\dot{x}_1 = x_2 + \alpha\, x_1(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \alpha\, x_2(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2)$$

4.5 Considerar la ecuación de Van der Pol:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -0.2(x_1^2 - 1)x_2 - x_1$$

Aplicar el teorema de Bendixson para probar que en la región $-0.5 \leq x_1 \leq 0.5$ no puede existir ciclo límite y en la región $-2 \leq x_1 \leq 2$ sí puede existir.

4.6 Interpretar los teoremas vistos en relación a posibles ciclos límites del sistema del péndulo con fricción lineal.

4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Revisión

- Campo vectorial
- Trayectorias en el plano fásico
- Soluciones periódicas y ciclo límite
- Teorema de Bendixson (condición suficiente para la no existencia)
- Teorema de Poincaré (condición necesaria para la existencia)