

## **5. SOLUCIONES APROXIMADAS**

# 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

Los métodos para analizar aproximadamente un sistema no lineal son muy útiles, pues usualmente es imposible obtener soluciones analíticas cerradas de las ecuaciones diferenciales no lineales.

### 5.1 Función descriptiva: motivación

El método de la respuesta frecuencial es muy útil en el análisis y diseño de sistemas lineales, pues permite representaciones gráficas, interpretaciones físicas y su complejidad no aumenta significativamente con el orden del sistema. Sin embargo no puede aplicarse directamente a sistemas no lineales, pues en estos no están definidas las funciones de respuesta frecuencial.

Una extensión de este método a sistemas no lineales se denomina método de la *función descriptiva*, que permite analizar y predecir aproximadamente el comportamiento no lineal. Su principal utilidad es la de predecir los ciclos límites.

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- Ejemplo de motivación:**

Dada la ecuación de Van der Pol:  $\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad \alpha > 0$

se plantea determinar si existe un ciclo límite y cuál es su amplitud y frecuencia.

Puede interpretarse la ecuación en la forma de un sistema realimentado:

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x} + x = -\alpha(\dot{x}x^2), \quad z = -\dot{x}x^2$$

como se esquematiza en la figura 5.1.

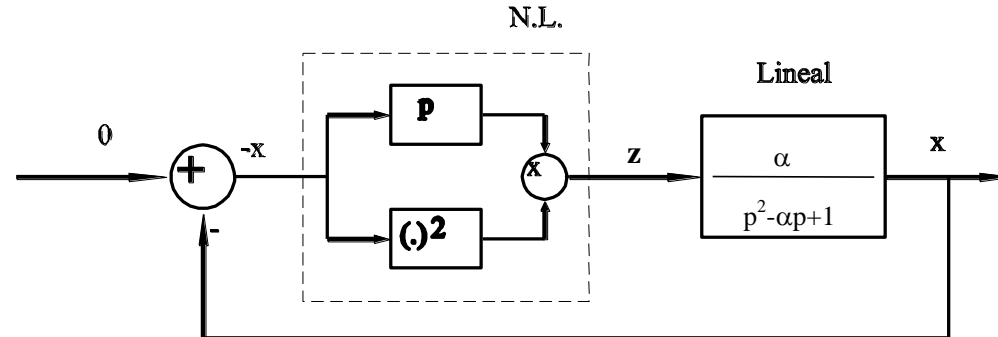


Figura 5.1

Se asume la hipótesis de que existe un ciclo límite y la oscilación de la señal  $x(t)$  es

$$x(t) = A \sin \omega t$$

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

Entonces  $\dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t$ . La salida del bloque no lineal es:

$$\begin{aligned} z &= -x^2 \dot{x} = -A^2 \sin^2 \omega t A\omega \cos \omega t = -\frac{A^3 \omega}{2} (1 - \cos 2\omega t) \cos \omega t = \\ &= -\frac{A^3 \omega}{4} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \end{aligned}$$

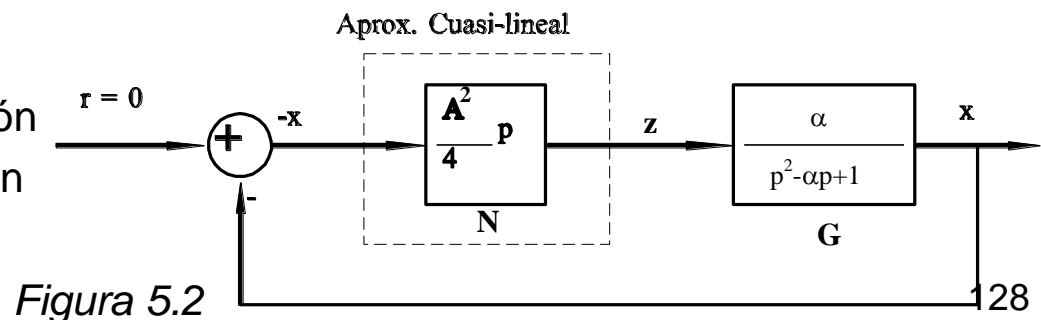
donde se han usado las relaciones trigonométricas,

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha); \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

Se asume que la tercera armónica es atenuada debido a la propiedad pasabajos del bloque lineal:

$$z \approx -\frac{A^3}{4} \omega \cos \omega t = \frac{A^2}{4} \frac{d}{dt} [-A \sin \omega t]$$

conduciendo a una aproximación cuasi-lineal como se muestra en la figura 5.2.



## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

En el dominio frecuencial:

$$z = N(A, \omega)(-x) \quad N(A, \omega) = \frac{A^2}{4} j\omega$$

Entonces:

$$x = A \sin \omega t = G(j\omega)z = G(j\omega)N(A, \omega)(-x)$$

$$x(1 + GN) = 0$$

$$1 + \frac{A^2 j\omega}{4} \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} = 0$$

De aquí puede obtenerse el resultado buscado:  $A = 2$ ,  $\omega = 1$

También, la ecuación característica de lazo cerrado es:

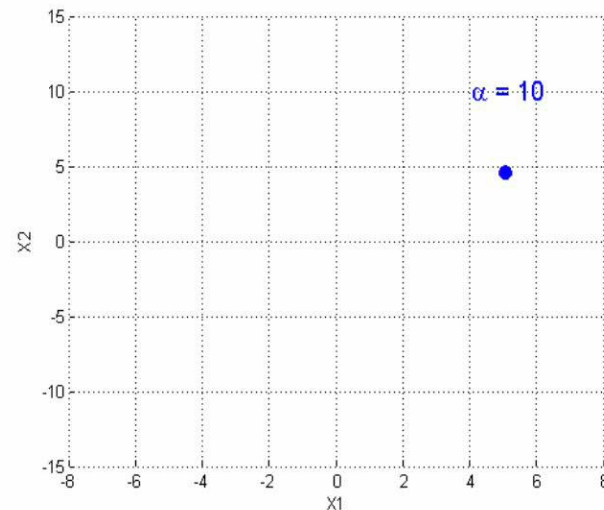
$$4p^2 + (A^2\alpha - 4\alpha)p + 4 = 0$$

con autovalores:

$$\frac{-\alpha(A^2 - 4)}{8} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2(A^2 - 4)^2 - 64}}{8}$$

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- Con  $A=2$  se tienen los autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm j$  que indica un ciclo límite de amplitud 2 y frecuencia  $\omega = 1$ . Este resultado es independiente de  $\alpha$  y representa sólo una aproximación. El resultado es más exacto para  $\alpha$  pequeños, cuando la no linealidad es menos dominante.
- La estabilidad del ciclo límite también puede estudiarse, observando que si la amplitud  $A$  se incrementa, aparece en los autovalores una parte real negativa y si se disminuye respecto de  $A=2$ , ésta es positiva. Resulta un ciclo límite estable (atractivo).
- La parte crítica del análisis es hallar la función  $N(A, \omega)$  que se denomina la función descriptiva del elemento no lineal.



## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

### 5.2 Fundamentación teórica: Cuasi-linealización óptima

Las funciones descriptivas constituyen un caso particular de un problema teórico más general que se denomina cuasi-linealización óptima. La particularización se hace usando entradas del tipo senoidal, por lo que el método de la función descriptiva constituye a su vez, una generalización del análisis frecuencial para sistemas lineales.

La cuasi-linealización óptima consiste en el problema de aproximar un sistema no lineal dado, por un sistema lineal invariante, en forma óptima. Aquí se planteará el problema y se darán sus resultados sin incluir las demostraciones, las que pueden consultarse en la bibliografía, por ejemplo [Vidyasagar, 1993].

Considérese el espacio de las funciones continuas real-valuadas en  $[0, \infty)$ ,  $C[0, \infty)$ . Sea  $N$  un operador no lineal  $N : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ . Supóngase que  $r \in C[0, \infty)$  es una función de entrada de referencia y  $H$  un sistema lineal invariante:

$$(Hr)(t) = \int_0^t h(t - \tau)r(\tau)d\tau$$

Se define el error de aproximación:  $E(H) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [(Nr)(t) - (Hr)(t)]^2 dt$

asumiendo que el límite existe (*error de potencia promedio finita*).

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Teorema (solución al problema de cuasi-linealización óptima).**

Supóngase que la entrada de referencia  $r$  y la salida  $Nr$  del sistema no lineal tienen potencia promedio finita. Supóngase que  $H$  es un operador lineal invariante tal que  $Hr$  también es de potencia promedio finita. Entonces  $H$  minimiza el criterio del error  $E$  sii

$$\phi_{r, Hr}(\tau) = \phi_{r, Nr}(\tau), \quad \forall \tau \geq 0$$

donde

$$\phi_{x,y}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt$$

es la función de correlación cruzada, que está bien definida cuando  $x$  e  $y$  son funciones de potencia promedio finita.

- **Observación:** la aproximación de  $H$  a  $N$  es óptima en relación a la entrada especificada  $r$ . Para una  $r$  puede haber más de una cuasi-linealización óptima.



## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- Ejemplo:**

$$N : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$$

$$(Nx)(t) = n[x(t)] \quad \forall t \geq 0$$

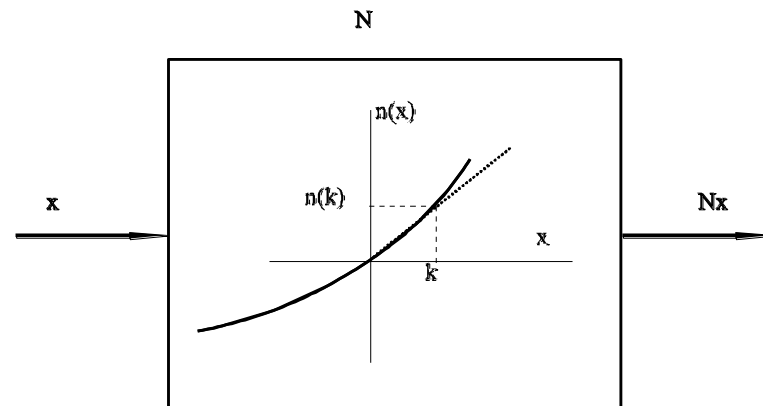
$$n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

Tomando  $x(t) = k \quad \forall t \geq 0$ ,  $x$  y  $Nx$  tienen potencia promedio finita.  
La condición de optimalidad se satisface para:

$$(Hx)(t) = \frac{n(k)}{k} x(t) \quad \forall t \geq 0.$$

- También para cualquier  $H$  lineal estable con

$$\hat{h}(s) \text{ tal que } \hat{h}(0) = \frac{n(k)}{k}.$$



## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Funciones descriptivas**

La entrada de referencia más usada en cuasi-linealización óptima es la senoidal,

$$r(t) = A \text{ sen} \omega t$$

la cual es de potencia promedio finita.

- **Teorema:** Sea  $r(t) = A \text{ sen} \omega t$ . Supóngase  $Nr =: z$  de la forma  $z = z_{ss} + z_{tr}$  con  $z_{ss}$  continuo y periódico con período  $2\pi/\omega$  y

$$\int_0^\infty z_{tr}^2(t) dt < \infty \quad (\text{transitorio de potencia finita})$$

Finalmente, supóngase  $H$  un operador lineal invariante, cuya transformada de Laplace  $\hat{h}(s)$  es una función racional propia con todos sus polos de parte real negativa (estable).  $H$  es una cuasi-linealización óptima de  $N$  con respecto a la entrada  $r$  si y solo si,

$$\hat{h}(j\omega) = \frac{g_{re} + jg_{im}}{A}$$

donde  $z_1(t) = g_{re} \text{ sen} \omega t + g_{im} \cos \omega t$  es la primera armónica de  $z_{ss}$ .

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Demostración:**

$$\phi_{r,Nr} = \phi_{r,z} = \phi_{r,z_{ss}} + \phi_{r,z_{tr}} = \phi_{r,z_{ss}} = \phi_{r,z_1}$$

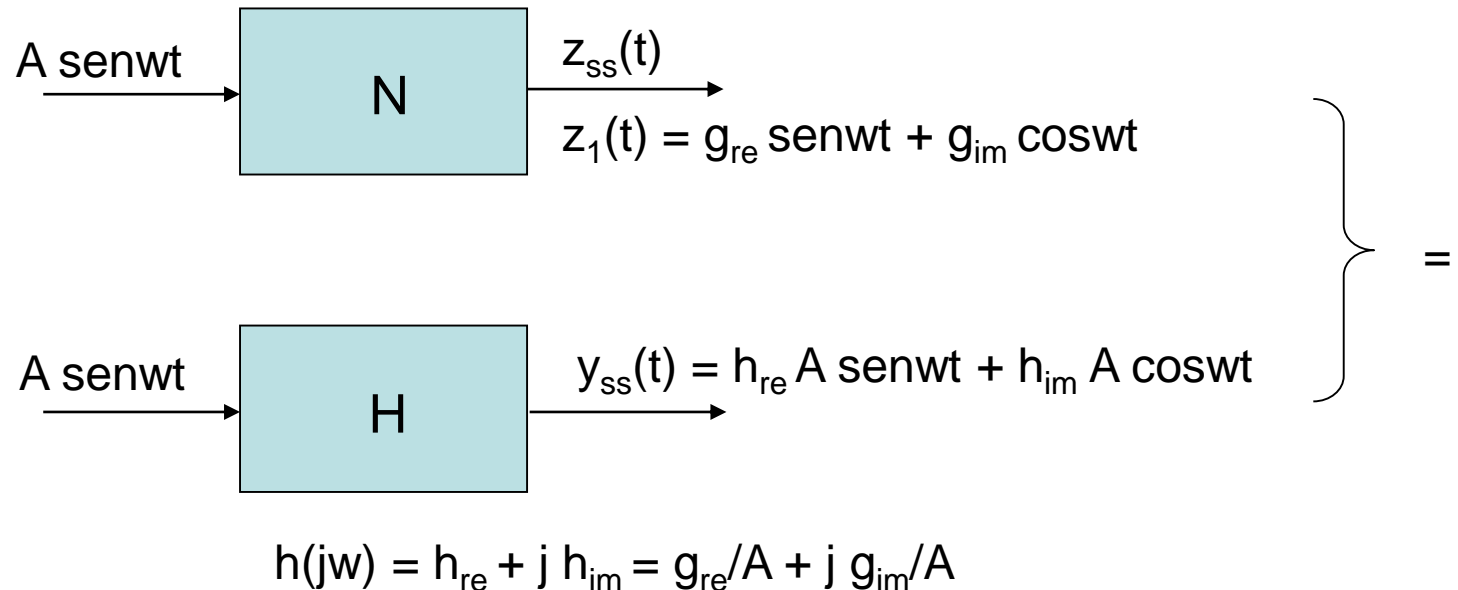
pues la señal transitoria tiene energía total finita y además a la correlación con  $r$  contribuyen sólo los términos de primera armónica. Además también  $\phi_{r,Hr} = \phi_{r,y_{ss}}$ , con  $y$  la salida del sistema lineal. Entonces, de la condición del teorema de cuasi-linealización óptima:  $\phi_{r,Nr} = \phi_{r,Hr}$  es equivalente a  $\phi_{r,z_1} = \phi_{r,y_{ss}}$  que se verifica sólo para las condiciones del teorema.

- **Observaciones:**

- El teorema indica que la cuasi-linealización óptima está dada por un sistema lineal cuya salida en estado permanente iguale a la primera armónica de la salida en estado permanente del sistema no lineal. Ambos sistemas, el lineal y el no lineal tienen la misma entrada senoidal.
- Claramente, existen infinitas cuasi-linealizaciones óptimas del sistema no lineal (sistemas lineales que cumplen con la condición anterior: todos cuyas respuestas frecuenciales coinciden con la requerida en la frecuencia de  $r$ ).

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- Interpretación



## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- Definición (función descriptiva del operador  $N$ )

$$N(A, \omega) = \frac{g_{re} + jg_{im}}{A}$$

Esta función es única para  $A$  y  $\omega$  definidos.

### 5.3 Cálculo de la función descriptiva

- Cómo representar un componente no lineal con la función descriptiva?  
Si la entrada es senoidal  $x(t) = A \text{sen} \omega t$ , la salida es periódica y en general no senoidal:

$$z = f(x); \quad f[A \text{sen}(\omega t + 2\pi)] = f[A \text{sen} \omega t]$$

Desarrollando por Fourier:

$$z(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) d(\omega t)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) \cos(n\omega t) d(\omega t)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) \text{sen}(n\omega t) d(\omega t) \quad 137$$

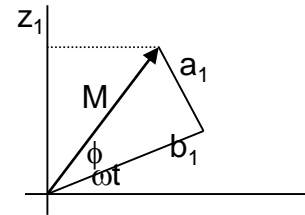
## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

Se adopta la **suposición** de que la no linealidad es tal que  $a_0=0$ .

Considerando ahora la componente fundamental de  $z(t)$ :

$$z_1(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t = M \sin(\omega t + \phi)$$

$$M(A, \omega) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \phi(A, \omega) = \arctg\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$$



La *componente fundamental* es una senoide de igual frecuencia  $\omega$ , que puede expresarse en representación compleja como:

$$z_1 = M e^{j(\omega t + \phi)} = (b_1 + ja_1) e^{j\omega t}$$

La función descriptiva resulta la relación compleja entre la primera armónica de la salida y la entrada senoidal:

$$N(A, \omega) = \frac{M e^{j(\omega t + \phi)}}{A e^{j\omega t}} = \frac{M}{A} e^{j\phi} = \frac{1}{A} (b_1 + ja_1)$$

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Cálculo de las funciones descriptivas:**
- **Cálculo analítico.** Por cálculo de las integrales de  $a_n$  y  $b_n$  cuando las mismas son fáciles de calcular y  $z=f(x)$  se describe por funciones explícitas.
- **Integración numérica.** Cuando  $z=f(x)$  se da por gráficos o tablas.
- **Evaluación experimental.** Utilizada para no linealidades complejas y no linealidades dinámicas. Se excita con distintas frecuencias y amplitudes analizando con un analizador de armónicas la salida.

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- Ejemplo (saturación):

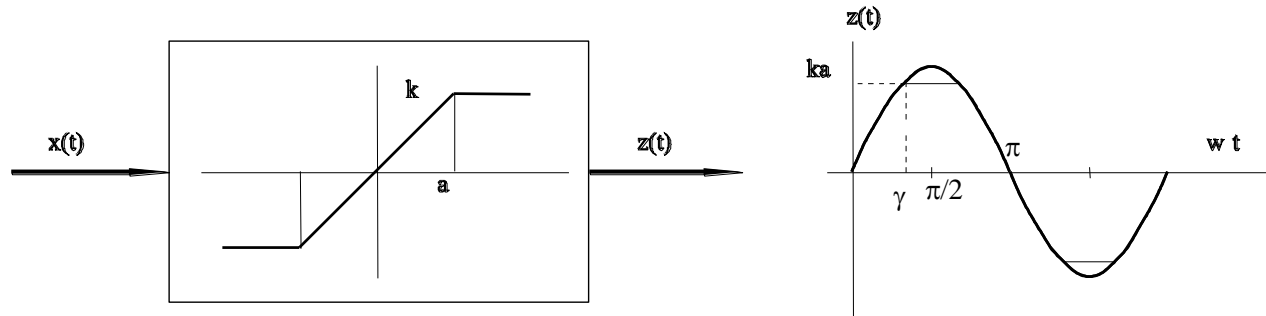


Figura 5.4

En relación a la figura 5.4,

$$\text{si } A \leq a, \quad z(t) = kA \sin \omega t \Rightarrow N(A, \omega) = k$$

$$\text{si } A > a, \quad z(t) = kA \sin \omega t \quad 0 \leq \omega t \leq \gamma$$

$$z(t) = ka \quad \gamma < \omega t \leq \frac{\pi}{2}$$

El valor de  $\gamma$  puede calcularse observando que (ver figura 5.4):

$$A \sin \gamma = a \Rightarrow \gamma = \arcsen\left(\frac{a}{A}\right)$$



## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

Como la saturación es una no linealidad impar,  $a_1 \neq 0$ . Además, por semejanza de los cuatro cuartos de período:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} z(t) \sin \omega t \, d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\gamma} kA \sin^2 \omega t \, d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\gamma}^{\frac{\pi}{2}} k a \sin \omega t \, d(\omega t) \end{aligned}$$

Recordando que  $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$        $\int \sin x \, dx = -\cos x$

$$b_1 = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{kA}{2} \gamma - \frac{kA}{4} \sin 2\gamma + k a \cos \gamma \right]$$

Como  $\sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cos \gamma$ ,  $\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}$ ,  $\sin \gamma = \frac{a}{A}$

$$\boxed{b_1 = \frac{2kA}{\pi} \left[ \gamma + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right]}$$

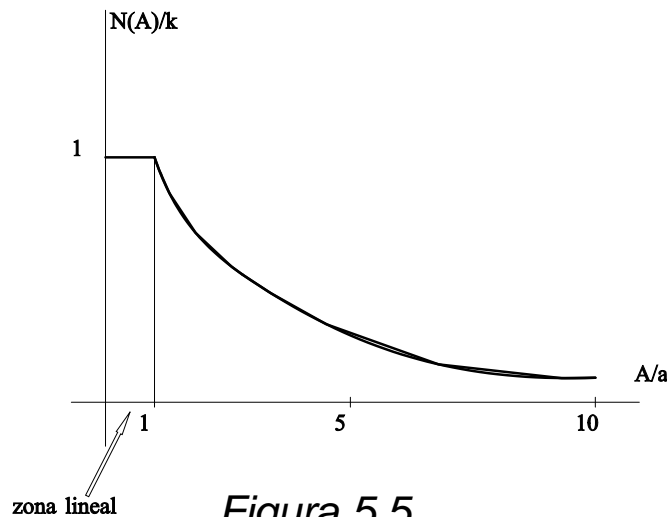
## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

Entonces la función descriptiva resulta:

$$N(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[ \sin^{-1} \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right]$$

En la figura 5.5 se muestra la representación gráfica de esta función.

Se observa que  $N$  no depende de  $\omega$  (no linealidad estática). Además, es una función real, debido a la simetría de la no linealidad (no provoca cambio de fase).



*Figura 5.5*

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

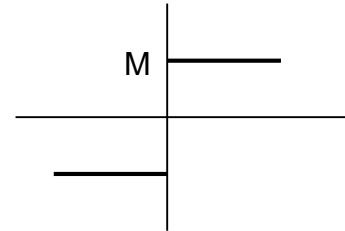
- Ejemplo (relé):

Puede considerarse como un caso límite de la saturación

$$a \rightarrow 0$$

$$k \rightarrow \infty$$

$$ka = M$$

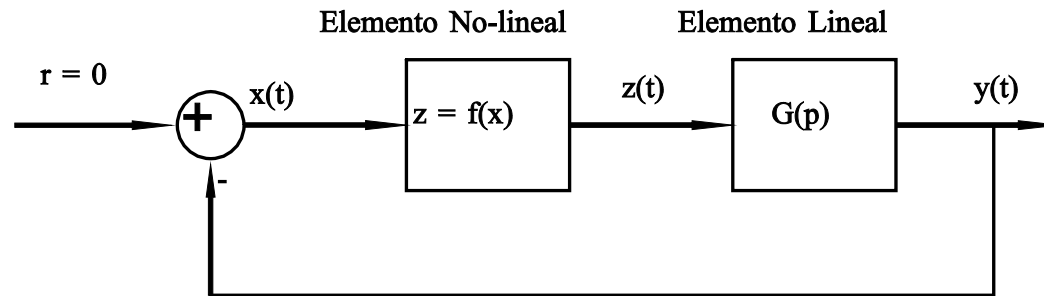


$$\begin{aligned} N(A) &= \lim_{a \rightarrow 0, k \rightarrow \infty} \frac{2k}{\pi} \left[ \sin^{-1} \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] = \\ &= \frac{2k}{\pi} \left[ \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \right] = \frac{4M}{\pi A} \end{aligned}$$

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

### 5.4 Análisis de sistemas no lineales con la función descriptiva

- Dominio de aplicación



*Figura 5.6*

Prácticamente todo sistema que se pueda colocar en la forma de la figura 5.6, puede analizarse con la función descriptiva.

- a) No linealidad en el actuador o el sensor o la planta en forma localizada (saturación, juego muerto, fricción, etc.), y el resto es lineal.
- b) No linealidades del sistema, pero que pueden ponerse separando un bloque no lineal y otro lineal pasa bajos.

El método de la función descriptiva puede ser usado en estos sistemas para prever la existencia de ciclos límites y su amplitud y frecuencia aproximadas. Puede guiar el diseño de compensadores para evitar estos ciclos límites que en general son indeseables (desgaste, degradación de la calidad del control, no comfortable, etc.)

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Suposiciones:**

1. Existe una única componente no lineal (de otro modo agruparlas).
2. La componente no lineal es invariante del tiempo.
3. Para una entrada senoidal, se considera sólo la primera armónica de la salida.  
Para que ello sea aproximado, el elemento lineal debe ser pasa-bajos.
5. La no linealidad es antisimétrica. De este modo se anula el término constante del desarrollo de Fourier.

- **Criterio de Nyquist y su extensión**

Sea un sistema  $G(s)$  con un bloque de realimentación negativa  $H(s)$ , la ecuación característica es

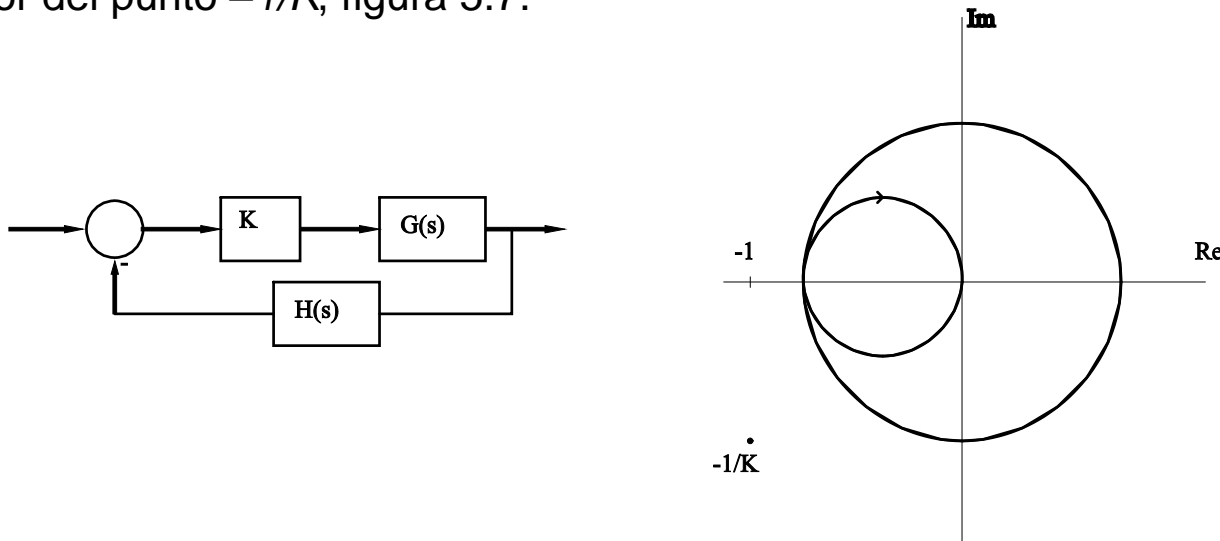
$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

El criterio de Nyquist consiste en graficar en el plano  $G(s)H(s)$  la *trayectoria de Nyquist* del plano  $s$ , o sea la que rodea el semiplano derecho. Luego se aplica  $Z=N+P$ , donde  $Z$  es el número de ceros de  $1+GH$  en el semiplano derecho (polos inestables de lazo cerrado),  $P$  el número de polos de  $1+GH$  (o de  $GH$ ) en el semiplano derecho y  $N$  el número de rodeos en sentido horario del punto  $-1$  en el plano  $GH$ .

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- Una extensión simple del criterio de Nyquist se hace incluyendo una ganancia  $K$  (posiblemente compleja) en el camino directo. Entonces los rodeos se consideran alrededor del punto  $-1/K$ , figura 5.7.



*Figura 5.7*

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- Existencia de ciclos límites

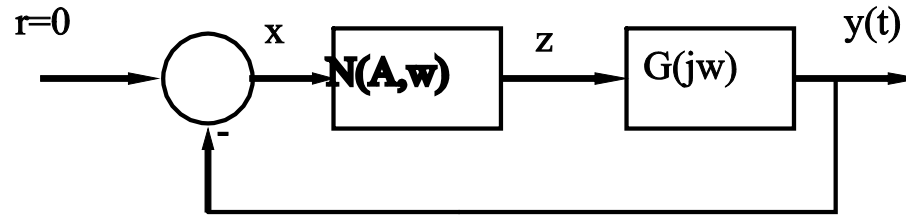


Figura 5.8

En referencia a la figura 5.8, si existe ciclo límite

$$\left. \begin{array}{l} x = -y \\ z = Nx \\ y = Gz \end{array} \right\} y = GN(-y); \quad y(1 + GN) = 0$$

Como  $y \neq 0$  (se asume que existe ciclo límite),  $1 + GN = 0$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A, \omega)}$$

- Existen  $A$  y  $\omega$  que deben satisfacer esta ecuación, de otro modo no existe ciclo límite.
- La solución analítica puede ser complicada para sistemas de orden elevado. La solución gráfica consiste en hallar la intersección de ambas curvas  $G$  y  $-1/N$ . Ahora se analizarán distintos casos.

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Función descriptiva independiente de la frecuencia**

$$N(A, \omega) = N(A)$$

Es el caso de no linealidades estáticas monovaluadas e impares y algunas doble-valuadas como el juego muerto. En este caso resulta:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

Si las dos curvas se intersectan, como se observa en la figura 5.9, existen ciclos límites con valores  $A$  y  $\omega$  correspondientes a la intersección. Si la no linealidad es monovaluada,  $N(A)$  es real y coincide con el eje real.

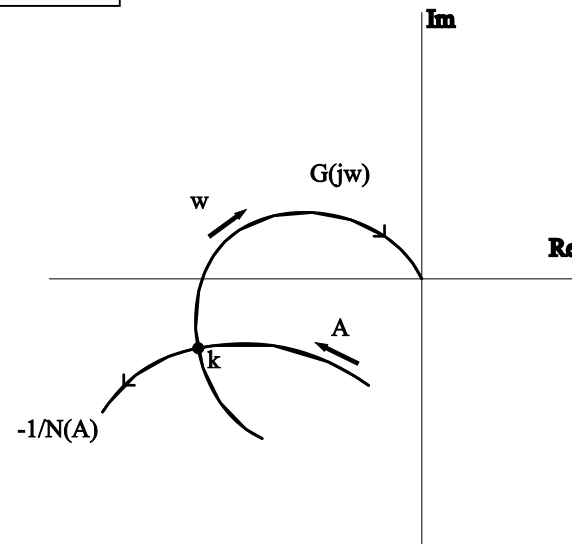


Figura 5.9



## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- Función descriptiva dependiente de la frecuencia**

$N(A, \omega)$  : el método gráfico puede aplicarse aunque con más complejidad. Se tiene una familia de curvas

$$-\frac{1}{N(A, \omega)}$$

para distintas frecuencias, ver figura 5.10. Los puntos de intersección con  $\omega$  coincidentes para ambas curvas  $G$  y  $-1/N$  son indicadores de ciclos límites.

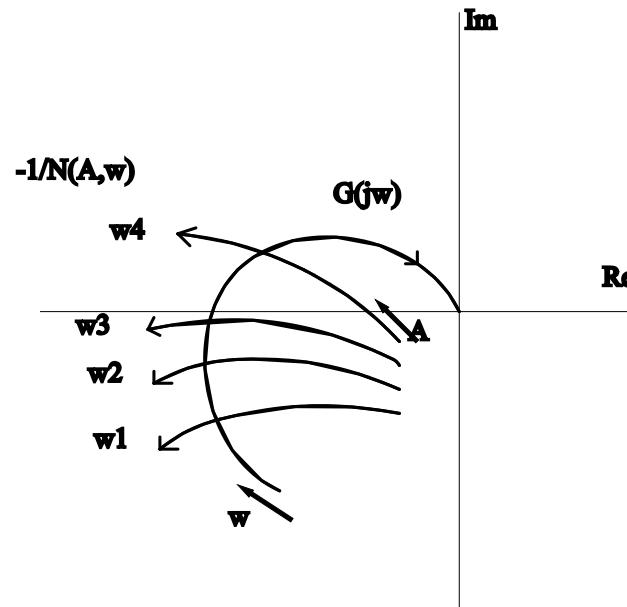


Figura 5.10

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Otro modo** de hacerlo es como se muestra en la figura 5.11. Se dibuja la familia de curvas  $G(j\omega)N(A,\omega)$ , cada curva para  $A$  fijo y la variable  $\omega$ . Una curva que pase por  $(-1,0)$  indica un posible ciclo límite con  $A$  y  $\omega$  correspondientes a la intersección.

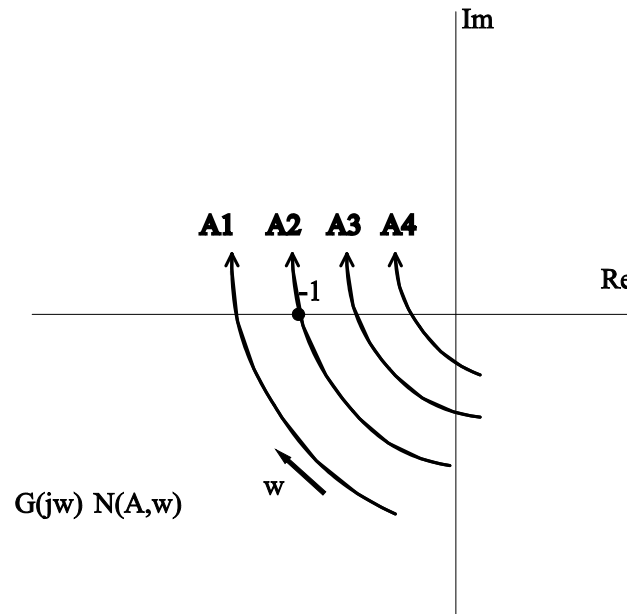


Figura 5.11

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- Estabilidad de los ciclos límites**

Suponiendo perturbaciones de amplitud en los ciclos límites y aplicando el criterio de Nyquist extendido, puede inferirse la estabilidad de los mismos. En la figura 5.12 resulta que  $L1$  es inestable y  $L2$  es estable. Por ejemplo, al aumentar la amplitud se pasa de  $L1$  a  $L'1$ , el sistema es inestable por el criterio de Nyquist extendido por lo que la amplitud crece alejándose del ciclo límite en  $L1$ . Se supone que  $P$  (polos inestables de  $G$ ) es igual a cero.

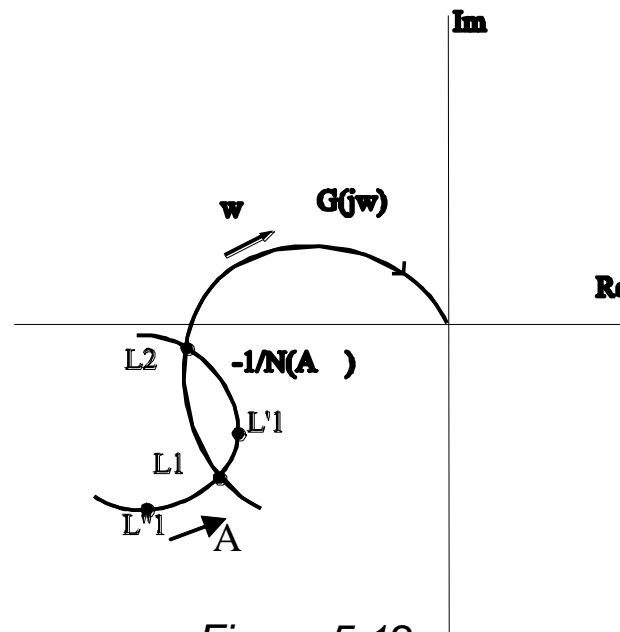


Figura 5.12

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Credibilidad del análisis de la función descriptiva**

En la determinación de los ciclos límites pueden ocurrir inexactitudes como:

- La amplitud y frecuencia estimados del ciclo límite no son exactos. Es la inexactitud más común, para obtener valores exactos hay que recurrir a simulación.
- Un ciclo límite estimado, en realidad no existe.
- Existe un ciclo límite no estimado.

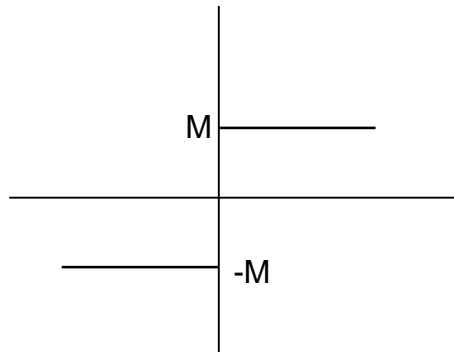
Las dos últimas son las más graves. Sus causas pueden ser que no se verifican las hipótesis de filtrado (por ej.: que el elemento lineal tenga picos de resonancia en su respuesta de frecuencia  $G(j\omega)$ ). También pueden ocurrir situaciones gráficas desfavorables, como intersecciones casi tangenciales de las curvas  $G(j\omega)$  y  $-1/N(A, \omega)$ .

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Ejemplo:**

$$G(s) = \frac{(s + 20)^2}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

$N$ : no linealidad de tipo relé, como se muestra en la figura 5.13, con  $M=1$ .



*Figura 5.13*

La función descriptiva correspondiente al relé es:

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

Ahora se grafica  $G(j\omega)$  y  $-1/N(A)$ , ver figura 5.14. La curva correspondiente a  $-1/N(A)$  corresponde al semieje real negativo. Resultan dos intersecciones que se corresponden con dos ciclos límites, uno con la frecuencia  $\omega_1=5.420$  y el otro con  $\omega_2=11,901$ . Las amplitudes de los ciclos límites resultan

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A_1}{4} = -2,177 \Rightarrow A_1 = 2,772$$

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A_2}{4} = -0,306 \Rightarrow A_2 = 0,390$$

También puede observarse, aplicando el criterio de Nyquist extendido, que el primer ciclo límite es estable y el segundo es inestable.

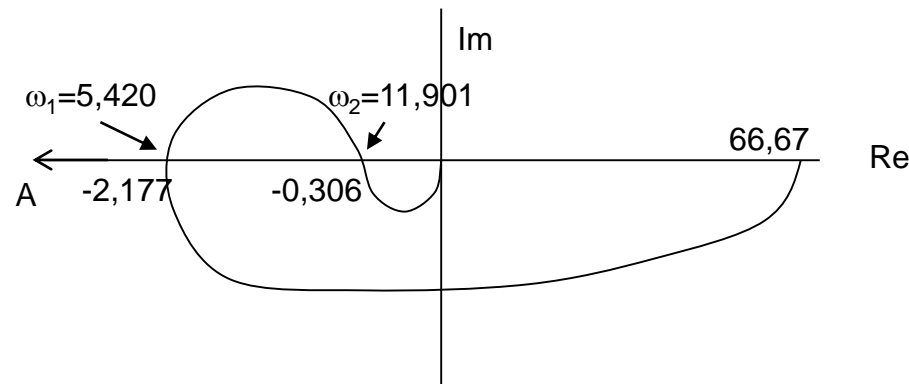


Figura 5.14

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

### 5.5 Perturbaciones singulares

El método de las perturbaciones singulares es valioso para analizar sistemas en los cuales el orden de su dinámica cambia como resultado de despreciar algunos elementos o hacer suposiciones simplificativas.

- **Ejemplo de motivación**

Para un motor eléctrico de corriente continua valen las siguientes ecuaciones:

$$J \frac{d\omega}{dt} = ki \qquad L \frac{di}{dt} = -k\omega - Ri + u$$

donde  $i$  es la corriente de armadura,  $u$  la tensión de alimentación,  $R$  la resistencia de armadura,  $L$  la inductancia de armadura,  $J$  el momento de inercia del rotor,  $k$  una constante del motor,  $\omega$  la velocidad angular del rotor.

Despreciando  $L$  resulta:  $0 = -k\omega - Ri + u$

$$i = \frac{u - k\omega}{R}$$

El modelo queda de orden reducido:  $J\dot{\omega} = -\frac{k^2}{R}\omega + \frac{k}{R}u$

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- Otro ejemplo de motivación (actuador de alta ganancia):

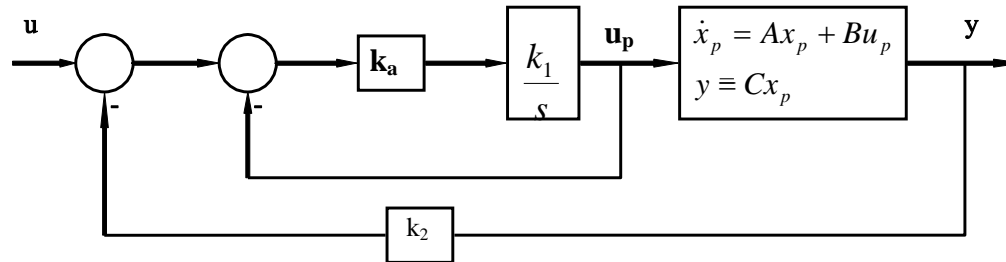


Figura 5.15

Para el sistema de la figura 5.15,

$$\dot{x}_p = Ax_p + Bu_p$$

$$\frac{1}{k_1} \dot{u}_p = k_a (u - u_p - k_2 Cx_p)$$

Para alta ganancia  $k_1$ ,

$$u - u_p - k_2 Cx_p = 0; \quad u_p = u - k_2 Cx_p$$

Por lo que resulta el modelo reducido;

$$\dot{x}_p = (A - Bk_2C)x_p + Bu$$



## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Planteo teórico**

Considérese un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales,

$$\dot{x} = f(x, y) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

$$\varepsilon \dot{y} = g(x, y) \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Para  $\varepsilon \neq 0$ , (1) es un sistema de  $n+m$  ecuaciones diferenciales.

Si  $\varepsilon = 0$  se tienen  $n$  ecuaciones diferenciales y  $m$  algebraicas:

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$0 = g(x, y)$$

Si se pueden resolver las  $m$  ecuaciones algebraicas para obtener explícitamente

$$y = h(x) \quad h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

se tiene,

$$\dot{x} = f[x, h(x)]$$

un sistema de orden  $n$  (simplificado o de *orden reducido*). Hacer  $\varepsilon = 0$  se denomina “*perturbación singular*” porque cambia el orden del sistema.

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

Se observa que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= \frac{1}{\varepsilon} g(x, y)\end{aligned}$$

no es continuo respecto de  $\varepsilon$ , en  $\varepsilon=0$ . En contraste,  $\dot{x} = f(x, p)$  con  $f$  continuo, variando  $p$  no cambia el orden, es perturbación “regular”.

- **Objetivo:** analizar el comportamiento del sistema original basado en el estudio del sistema simplificado.

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- Sistemas lineales:**

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \varepsilon \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ y \in \mathbb{R}^m \end{array} \quad (2)$$

Con  $\varepsilon=0$ ,

$$0 = A_{21}x + A_{22}y$$

Si  $A_{22}$  no es singular :

$$y = -A_{22}^{-1} A_{21}x$$

Sustituyendo en (2) :

$$\dot{x} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})x =: A_o x$$

$$A_o = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$$

$$\Lambda = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\} \quad \text{espectro de } A_o, \quad \Gamma = \{\gamma_1 \dots \gamma_m\} \quad \text{espectro de } A_{22}$$

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Teorema:** Considérese el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \varepsilon \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ y \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

Supóngase que  $A_{22}$  no es singular. Defínase  $A_0 = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$ . Entonces, dado  $\delta > 0$ , existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , los  $n+m$  autovalores  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+m}\}$  de la matriz

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}/\varepsilon & A_{22}/\varepsilon \end{pmatrix}$$

satisfacen las cotas,

$$\begin{aligned} |\lambda_i - \alpha_i| &< \delta && \text{para } i = 1, \dots, n \\ |\gamma_{i-n} - \varepsilon \alpha_i| &< \delta && \text{para } i = n+1, \dots, n+m. \end{aligned}$$

- **Interpretación:** Con  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$n$  autovalores de  $A_\varepsilon \rightarrow$  autovalores de  $A_0$

los restantes  $m$  autovalores  $\rightarrow \infty$  como  $\gamma_i / \varepsilon$ .

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Demostración:** Se transforma la matriz  $A_\varepsilon$  (transformación semejante):

$$\begin{pmatrix} I & -M_\varepsilon \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}/\varepsilon & A_{22}/\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & M_\varepsilon \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\varepsilon & 0 \\ G_\varepsilon & H_\varepsilon \end{pmatrix}$$

que debe satisfacer:

$$A_{11}M_\varepsilon + A_{12} - M_\varepsilon \frac{A_{21}}{\varepsilon} M_\varepsilon - M_\varepsilon \frac{A_{22}}{\varepsilon} = 0$$

Se toma  $M_\varepsilon = \varepsilon P_\varepsilon$  para poder hacer  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\varepsilon A_{11}P_\varepsilon + A_{12} - \varepsilon P_\varepsilon A_{21}P_\varepsilon - P_\varepsilon A_{22} = 0 \quad (3)$$

Con  $\varepsilon=0$

$$A_{12} - P_0 A_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_0 = A_{12}A_{22}^{-1}$$

Como la ecuación (3) es continua en  $\varepsilon$ , con  $\varepsilon \rightarrow 0$  la solución  $P_\varepsilon \rightarrow P_0$

$$P_\varepsilon = P_0 + o(\varepsilon).$$

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

Ahora se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} F_\varepsilon & 0 \\ G_\varepsilon & H_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - M_\varepsilon A_{21} / \varepsilon & 0 \\ A_{21} / \varepsilon & A_{21} M_\varepsilon / \varepsilon + A_{22} / \varepsilon \end{pmatrix}$$

Se sabe que

$$P_\varepsilon = A_{12} A_{22}^{-1} + o(\varepsilon)$$

entonces,

$$F_\varepsilon = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} + o(\varepsilon) = A_0 + o(\varepsilon)$$

$$H_\varepsilon = A_{21} A_{12} A_{22}^{-1} + \frac{A_{22}}{\varepsilon} + o(\varepsilon)$$

El espectro de  $A_\varepsilon$  es el de  $F_\varepsilon$  más el de  $H_\varepsilon$ . Con  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $F_\varepsilon \rightarrow A_0 \Rightarrow$  espectro  $F_\varepsilon \rightarrow$  espectro de  $A_0$ .

- También  $\frac{A_{22}}{\varepsilon}$  es dominante por lo que los autovalores de  $H_\varepsilon \rightarrow$  autovalores  $A_{22}$  divididos por  $\varepsilon$ .

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

- **Corolario:** Considere la matriz  $A_\varepsilon$  y suponga que  $A_{22}$  es hiperbólica (autovalores con parte real no nula). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  1. Existe un  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $A_\varepsilon$  es Hurwitz si  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ .
  2. Las matrices  $A_0$  y  $A_{22}$  son ambas Hurwitz.
- **Ejemplo:** En la práctica, las ecuaciones diferenciales con perturbaciones singulares surgen cuando algunos elementos dinámicos (denominados parásitos) son despreciados en el proceso de modelado. Considérese el circuito eléctrico de la figura 5.16.

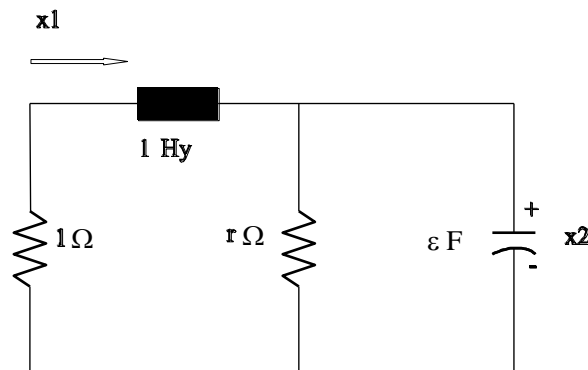


Figura 5.16

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

Estados:  $x_1$  (corriente),  $x_2$  (tensión)

$$L \frac{di}{dt} + x_2 + 1\Omega i = 0 \quad \dot{x}_1 = -x_1 - x_2$$

$$x_1 = \varepsilon \dot{x}_2 + \frac{x_2}{r}$$

$$\varepsilon \dot{x}_2 = x_1 - \frac{x_2}{r}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1/\varepsilon & -1/\varepsilon r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_\varepsilon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = -\frac{1}{r} \quad (\text{Hurwitz si } r > 0)$$

$$A_0 = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} = -1 - r$$



## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

Sistema simplificado: ( $\varepsilon=0$ )

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 - rx_1 = -(1+r)x_1 = \dot{x}_1 \quad \dot{x}_1 = A_0 x_1$$

$$0 = x_1 - \frac{x_2}{r} \Rightarrow x_2 = rx_1$$

$r$  podría ser negativo para un diodo túnel.

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1/\varepsilon & -1/\varepsilon r \end{pmatrix}$$

Autovalores de  $A_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} |\lambda I - A_\varepsilon| &= \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1/\varepsilon & -1/\varepsilon r \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda + 1 & +1 \\ -1/\varepsilon & \lambda + 1/\varepsilon r \end{pmatrix} \right| = \\ &= (\lambda + 1)\left(\lambda + \frac{1}{\varepsilon r}\right) + 1/\varepsilon = \lambda^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon r}\right)\lambda + \left(\frac{1}{\varepsilon r} + \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0 \end{aligned}$$

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\left(1 + \frac{1}{\varepsilon r}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varepsilon r}\right)^2 - 4\left(\frac{1+r}{\varepsilon r}\right)}}{2}$$

$$R_e(\lambda) = \frac{-(1 + \frac{1}{\varepsilon r})}{2}$$

Para  $r < 0$ , con  $\varepsilon$  suficientemente pequeño  $Re(\lambda) > 0$ .

En este ejemplo se puede analizar la aplicación del teorema y el corolario.

Con  $\varepsilon \rightarrow 0$ , los autovalores de  $A_\varepsilon$  tienden a:

$$F_\varepsilon = -1 - r + o(\varepsilon)$$

$$H_\varepsilon = r - \frac{1}{\varepsilon r} + o(\varepsilon)$$

$$\text{Con } \varepsilon \rightarrow 0 \quad F_\varepsilon \rightarrow A_0$$

$$H_\varepsilon \rightarrow \frac{A_{22}}{\varepsilon}$$

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

### 5.6 Ejercicios

**5.1.** Considerando el sistema realimentado negativamente, que tiene la función de transferencia

$$G(s) = \frac{(s + 20)^2}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

y la no linealidad de saturación, con  $k=4$  y  $a=1$ , encontrar los posibles ciclos límites y su condición de estabilidad.

- La solución se resume en la figura 5.17.

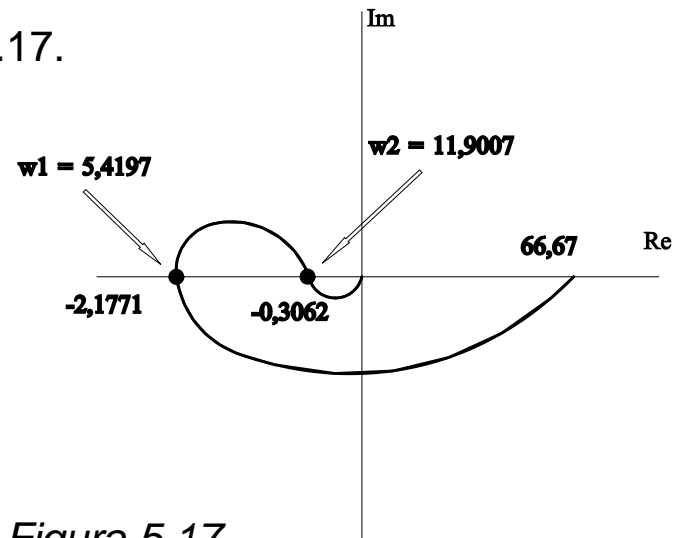


Figura 5.17

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

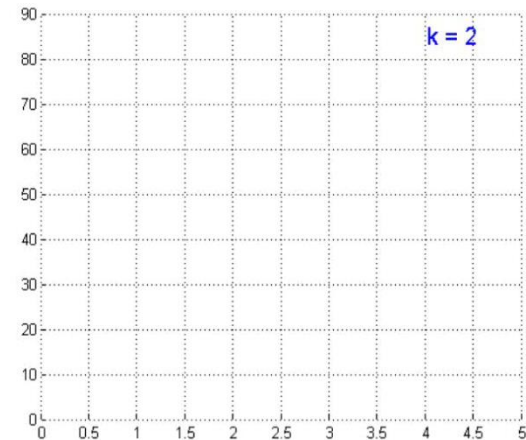
**5.2.** Considerando el sistema realimentado negativamente, con

$$G(s) = \frac{(s + 20)(s + 30)}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)}$$

analice la existencia de posibles ciclos límites cuando la no linealidad es del tipo signo.

**5.3.** Considerando el sistema realimentado negativamente, con

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.02s)}$$



y la no linealidad del tipo saturación con valor máximo de 20, determine el mayor  $K$  tal que no aparece ciclo límite en el sistema. Si  $K=2K_{max}$ , encuentre la amplitud y frecuencia del ciclo límite. Verifique por simulación.

## 5. SOLUCIONES APROXIMADAS

### Revisión

- Función descriptiva  $N(A, \omega)$  : respuesta frecuencial coincide con la primera armónica del sistema no lineal.
- Obtención: desarrollo de Fourier, primera armónica dividida por A.
- Suposiciones de aplicación.
- Obtención de ciclos límites: intersección de curvas  $-1/N(A, \omega)$  y  $G(\omega) \Rightarrow A, \omega$
- Perturbaciones singulares: sistemas de orden reducido.