

# IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

## 1. INTRODUCCIÓN

Identificación es un campo de la modelación matemática de sistemas a partir de datos experimentales. Se trata de determinar un modelo matemático a partir de un grupo de datos experimentales de entrada y de salida sin necesidad de conocer las leyes internas que gobiernan el comportamiento del sistema (Fig. 1). Por esta razón, los modelos obtenidos mediante identificación se denominan modelos de “caja negra”.

El término “Identificación de Sistemas” adoptado en la década de los 60 por especialistas de control automático, puede ser definido como la obtención de la estructura y parámetros de un modelo matemático generalmente dinámico, que reproduce con suficiente exactitud para los fines de deseados de control automático, las características dinámicas del proceso objeto de estudio.

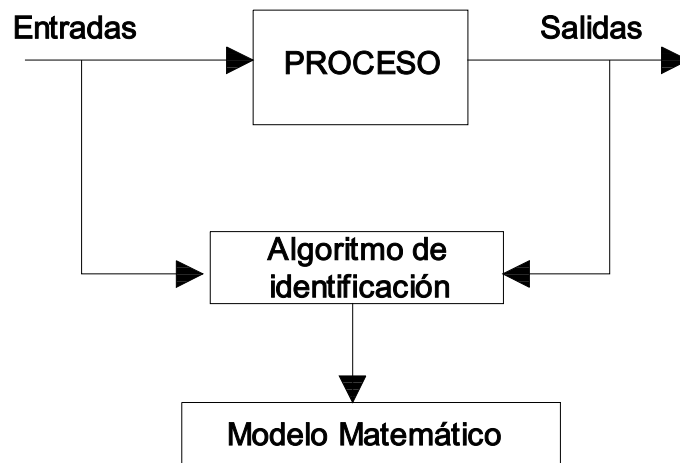


Figura 1: Esquema general de la identificación.

Actualmente esta herramienta ha adquirido aplicaciones en muchas áreas, tales como ingeniería de control y de sistemas, procesamiento de señales, diseño de modelos, diseño integrado, etc.

En la identificación de sistemas se observan tres elementos fundamentales:

1. **Experimento:** debe diseñarse un experimento que involucre entre otros, las señales de excitación, captura de datos y organización de información.

2. **Clase de Modelos:** se busca el mejor modelo disponible que refleje el comportamiento del sistema. Se incluye estructuras, retardos, linealidad, invarianza.
3. **Criterios:** Minimizar un índice de performance que refleje el nivel de proximidad del modelo respecto al comportamiento del sistema a identificar.

La identificación de sistemas no es una metodología totalmente segura, la cual puede ser utilizada sin interacción con el usuario. Las razones son:

1. Se debe encontrar una apropiada estructura del modelo. Esto puede ser una dificultad, sobretodo si la dinámica del sistema es no lineal.
2. Presenta sin dudas datos no perfectos en la vida real. El factor que los datos grabados son perturbados por los ruidos, debe ser tenido en consideración.
3. el proceso puede variar con el tiempo, lo cual puede ser causar un problema, sobre todo si se intenta describirlo con un sistema invariante en el tiempo.
4. Puede ser dificultoso o imposible de medir alguna variable o señal de central importancia para el modelo.

### Necesidad de modelar sistemas dinámicos

Un sistema dinámico puede ser conceptualmente descrito como en la figura 2.2. El sistema está influenciado por la variable de entrada  $u(t)$  y disturbios  $v(t)$ . Generalmente se tienen información de las variables de salida  $y(t)$  y las de entrada  $u(t)$ .

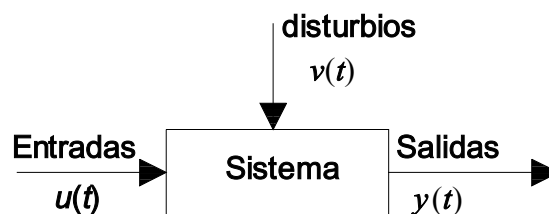


Figura 2: Esquema de un sistema físico dinámico.

Muchos procesos industriales, como por ejemplo producción de papel, hierro, vidrio o componentes químicos, deben ser controlados a fin de operar con eficiencia y seguridad. Para el diseño de reguladores se necesita algún tipo de modelo del proceso.

En muchas aplicaciones de procesamiento de señales de predicción, comunicación de datos, procesamiento de voz, radar, sonar y análisis de electrocardiogramas, los datos recolectados son filtrados de algún modo y un buen diseño del filtro debería reflejar las propiedades (características pasa alto, características pasa bajo, existencia de frecuencias de resonancia, etc.) de la señal. Para describir tales propiedades espectrales se necesita un modelo de la señal.

## Modelación matemática e identificación de sistemas

Como se discutió anteriormente, en muchas aplicaciones son útiles modelos descriptivos de sistemas dinámicos. Básicamente hay dos campos de construcción de modelos:

- **Modelación matemática:** Este es un enfoque analítico. Las ecuaciones del modelo son obtenidas a partir del conocimiento de las leyes físicas y químicas que gobiernan el comportamiento del proceso.
- **Identificación de sistemas:** Este es un enfoque experimental. El modelo es obtenido a partir de un grupo de datos experimentales recolectados de una prueba en la planta, es decir, es un método que no se basa en leyes físicas, sino en experiencias.

Los modelos obtenidos mediante identificación tienen las siguientes propiedades en contraste con los modelos basados solamente en modelación matemática:

- Tiene limitada validez (son válidos para un cierto punto de trabajo, a ciertos tipos de entrada, a ciertos procesos, etc. y sobretodo para sistemas lineales).
- Dan una pequeña intuición física, desde que en muchos casos los parámetros del modelo no tienen significado físico directo.
- Son relativamente fáciles de construir y usar.

Otro tipo de modelos obtenidos experimentalmente son los basados en redes neuronales y en lógica borrosa. Estos modelos no son casos de estudio.

## 2. METODOLOGÍA DE IDENTIFICACIÓN

### 2.1 INTRODUCCION

En términos generales, un experimento de identificación es realizado excitando al sistema [usando algún tipo de entrada tales como señales escalón, sinusoidal, PRBS (Pseudo Random Binary Signal) o random] y observando las señales de entrada y de salida en un intervalo de tiempo. Estas señales son normalmente recolectadas en un computador para luego procesar esa información.

En la práctica la estimación de la *estructura* y *parámetros* del proceso son hechos frecuentemente de forma iterativa. Esto significa que la estructura tentativa es elegida y los parámetros correspondientes son estimados.

El modelo obtenido es examinado para ver si es una representación apropiada del sistema. Si este no es el caso, alguna otra estructura más compleja debe ser considerada, estimando sus parámetros, validando el nuevo modelo, etc.

El proceso de obtener un modelo a partir de los datos de entrada y de salida del proceso sigue los siguientes pasos:

- Seleccionar las variables de entrada (variable manipulable) y de salida (variable que se desea controlar).
- Seleccionar un conjunto de datos experimentales de entrada y de salida realizando los ensayos al proceso.
- Examinar y pulir los datos (filtrar los datos, eliminar datos espureos, etc.).
- Seleccionar la estructura del modelo y elegir un algoritmo particular para determinar sus parámetros.

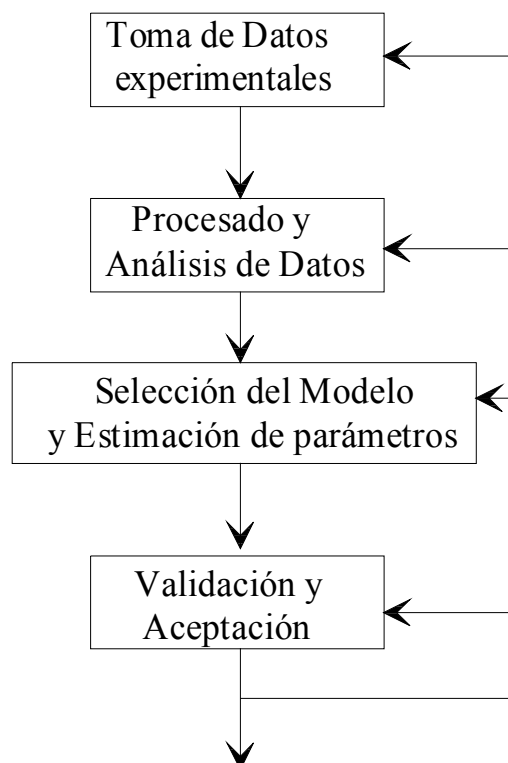


Figura 3: Metodología de identificación.

- Validar el modelo identificado y sus incertidumbres, esto engloba un análisis en el tiempo y en frecuencia del modelo obtenido.

El proceso es cíclico tal como se observa en la figura 3. Si la respuesta no es satisfactoria, se tendrá que regresar a cualquiera de las etapas anteriores y modificar el método de identificación, la estructura del modelo o los datos experimentales.

## 2.1 CÓMO SE APLICA LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS?

La identificación de sistemas incluye las siguientes etapas:

- Planificación experimental
- Selección de la estructura del modelo
- Formulación de un criterio
- Estimación de parámetros
- Validación del modelo obtenido

### **2.2.1 Planificación experimental**

Cuando se investiga un proceso del que se tiene un conocimiento previo pobre, lo razonable es comenzar con un análisis transitorio o de respuesta en frecuencia para lograr una estimación grosera de la dinámica y de las perturbaciones, pudiéndose utilizar los resultados para planificar posteriores experimentos.

Generalmente experimentos como la respuesta al salto nos dan información útil sobre el retraso, constantes de tiempo y ganancias del sistema.

Basándose en los resultados obtenidos se puede mejorar la estructura del modelo y pueden diseñarse nuevos experimentos.

### **2.2.2 Selección de la estructuras del modelo**

Las estructuras del modelo se determinan del conocimiento previo del proceso y de las perturbaciones.

En algunos casos, el único conocimiento previo que se tiene es que el proceso se puede describir como un sistema lineal en un rango de operación concreto del proceso. En este caso es natural utilizar representaciones de sistemas lineales de tipo general “Caja negra”. Un ejemplo típico es el modelo de ecuación en diferencias:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(k)$$

donde

$u(t)$ : entrada

$y(t)$ : salida

$e(t)$ : perturbación del tipo ruido blanco

### **2.2.3 Formulación de un criterio**

Cuando se formula un problema de identificación se introduce un criterio para tener una medida de que hasta que punto un modelo se ajusta a los datos experimentales.

El criterio se puede postular. Mediante hipótesis estadísticas se pueden deducir criterios de base probabilística. Con frecuencia los criterios para los sistemas discretos se expresan de la forma:

$$J(\theta) = \sum_{t=1}^n g(\varepsilon(t))$$

donde  $\varepsilon(t)$  es el error de entrada, el error de salida o un error generalizado.

Frecuentemente la función  $g$  se elige del tipo cuadrático, pero puede ser de muchas otras formas.

Gauss formuló el problema de identificación como un problema de optimización e introdujo el principio de los *mínimos cuadrados*, un método basado en la minimización de la suma de los cuadrados del error.

Cuando las perturbaciones de un proceso se describen como procesos estocásticos, el problema de Identificación se formular como un problema estadístico de estimación de parámetros.

#### **2.2.4 Estimación de parámetros**

Resolver un problema de estimación de parámetros requiere de los siguientes componentes:

- A. Datos de entrada/salida del proceso,
- B. Una clase de modelos,
- C. Un criterio

La estimación de parámetros se puede formular como un problema de optimización en que el mejor modelo es aquel que mejor se ajusta a los datos, de acuerdo con un criterio dado.

Una distinción especial se realiza entre los métodos de estimación en línea (*on line*) y fuera de línea (*off line*). Los métodos en línea dan las estimaciones en forma recursiva. En muchos casos, los métodos fuera de línea dan estimaciones con mayor precisión y son más fiables, por ejemplo, en términos de convergencia.

#### **2.3.5 Validación del modelo**

Cuando se ha obtenido un modelo a partir de datos experimentales es necesario comprobar el modelo para encontrar sus inadecuaciones.

Para la validación de un modelo es útil determinar factores tales como respuesta a saltos escalón, respuesta a impulsos, polos y ceros, errores del modelo y errores de predicción.

La validación permite determinar los posibles defectos del modelo y diagnosticar sus causas. Si estos defectos no aparecen, el modelo se encuentra listo para su utilización. Si se encuentra alguna no correspondencia, los ciclos iterativos de identificación, estimación y comprobación se repiten hasta que se encuentren un modelo apropiado.

### 3. MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN

Es posible efectuar múltiples clasificaciones de métodos de identificación. Teniendo en cuenta las mediciones disponibles y la forma de aplicación del sistema de identificación se distinguen los siguientes métodos:

1. Métodos que utilizan la respuesta ante señales de ensayo sobre el sistema.
2. Métodos que utilizan mediciones históricas de funcionamiento del proceso. Son imprescindibles cuando no es posible realizar ensayos o resulta muy costoso. Es el caso de los sistemas socioeconómicos.
3. Métodos de Identificación en línea. Su aplicación es posible sin perturbar significativamente las condiciones de trabajo del sistema.
4. Métodos de identificación en tiempo real. Tiene lugar, cuando la identificación en línea se realiza en cada período de muestreo.

La consideración de las características de los modelos que se pretenden obtener permite establecer otras clasificaciones de métodos de identificación, entre los que se encuentran:

- Métodos de identificación de modelos no paramétricos
- Métodos de identificación de modelos paramétricos
- Métodos basados en la distancia de salida y de predicción

**3.1 MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN DE MODELOS NO PARAMÉTRICOS.** Se trata de obtener curvas o gráficos que caracterizan el comportamiento dinámico del proceso. Ejemplo: las curvas de módulos y argumentos de una respuesta en frecuencia.

Algunos de estos métodos son los siguientes:

- **Análisis transitorio:** La entrada es un escalón o un impulso y los datos de salida constituyen el modelo.
- **Análisis en frecuencia:** La entrada es sinusoidal. Para un sistema lineal en estado estacionario la salida será también sinusoidal. Los cambios de amplitud y de fase darán la respuesta en frecuencia.
- **Análisis de correlación:** La entrada es un ruido blanco. Una función normalizada de covarianza cruzada entre la salida y entrada proporcionará una estimación de las funciones de peso.
- **Análisis espectral:** La respuesta en frecuencia puede ser estimada para una entrada arbitraria mediante división del espectro cruzado entre la salida y entrada del espectro de entrada.

### 3.2 DOS DE IDENTIFICACIÓN DE MODELOS PARAMÉTRICOS.

Se trata de obtener los valores numéricos de los coeficientes de las funciones o matrices de transferencia o los elementos de las matrices de representación mediante variables de estado.

La forma general de la estructura de un modelo paramétrico en discreto es la siguiente:

$$y(t) = G(q^{-1}, \theta)u(t) + H(q^{-1}, \theta)e(t) \quad (3.1)$$

donde

$y(t)$  es la salida del sistema.

$u(t)$  es la entrada del sistema.

$e(t)$  es un ruido blanco no medible.

$G$  y  $H$  son funciones de transferencia en el operador de retardo  $q$ , el cual está definido en forma genérica como

$$\begin{aligned} q^{-1}f(t) &= f(t-1) \\ f(t+1) &= qf(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$\theta$  es el vector paramétrico que contiene los coeficientes de  $G$  y  $H$

En muchos casos las funciones  $G$  y  $H$  son de orden finito. Luego son funciones racionales de  $q^{-1}$ . El modelo de la ecuación (2.1) es representado en la figura 4

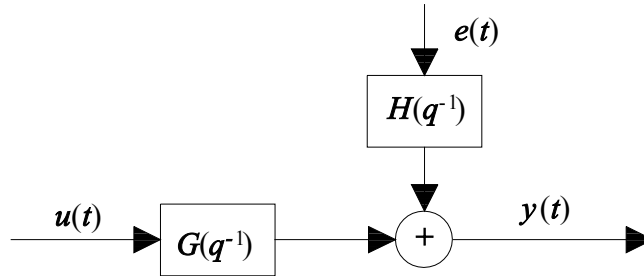


Figura 4: Diagrama de bloques de un modelo general.

$G(q^{-1}, \theta)$  y  $H(q^{-1}, \theta)$  son funciones del vector paramétrico  $\theta$ . La ecuación (2.1) describe un modelo lineal general. En los siguientes tópicos describiremos estructuras de modelos típicos especificando la parametrización.

### 3.2.1 Estructura general de un modelo SISO

Para un caso general, se puede escribir la ecuación (2.1) como:

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})F(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})}e(t) \quad (3.3)$$



En este caso:

$$G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})F(q^{-1})} \text{ y } H(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})}$$

con

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{na} q^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} \dots + b_{nb} q^{-nb} \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{nc} q^{-nc} \\ D(q^{-1}) &= 1 + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2} + \dots + d_{nd} q^{-nd} \\ F(q^{-1}) &= 1 + f_1 q^{-1} + f_2 q^{-2} + \dots + f_{nf} q^{-nf} \end{aligned} \quad (3.4)$$

El vector paramétrico está definido por

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_{na} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{nb} \quad c_1 \quad \dots \quad c_{nc} \quad d_1 \quad \dots \quad d_{nd} \quad \dots \quad f_1 \quad \dots \quad f_{nf}] \quad (3.5)$$

que representa los coeficientes de los polinomios de la ecuación (3.3).

### Casos particulares

- Si  $na = nc = nd = 0$  tenemos

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + e(t) \quad (2.6)$$

En este caso  $H(q^{-1}, \theta) = 1$ . La ecuación (3.6) es muchas veces referida como estructura del error de salida, ya que esto implica que

$$e(t) = y(t) - \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t)$$

es el error de salida (**OE**, *ouput error*), es decir, la diferencia entre la salida medida  $y(t)$  y la salida del modelo  $B(q^{-1})/F(q^{-1})u(t)$ .

- Si  $na = 0$  tenemos

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t) \quad (3.7)$$

Esta estructura es conocida como **BJ** (*Box-Jenkins*). Una propiedad particular de esta estructura es que  $G(q^{-1}, \theta)$  y  $H(q^{-1}, \theta)$  no tienen parámetros comunes.

- Si  $nd = nf = 0$  ( $D(q^{-1})=F(q^{-1})=1$ ), tenemos la estructura de modelo denominada **ARMAX** (*AutoRegressive Moving Average*) y está representada por el modelo

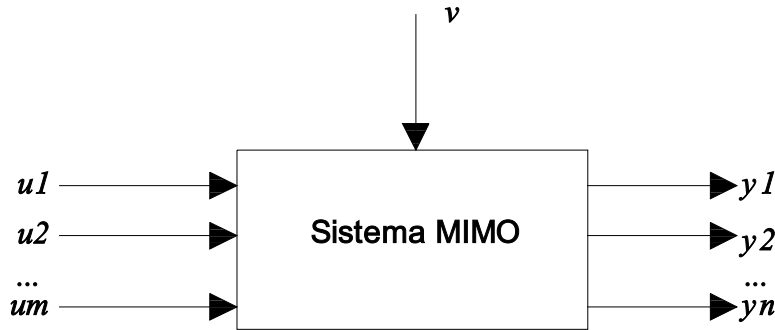
$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(t) \quad (3.8)$$

- Si  $nc = nd = nf = 0$ , tenemos el modelo **ARX** (*AutoRegressive with eXternal input*) y está representado por el modelo

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + \frac{1}{A(q^{-1})}e(t) \quad (3.9)$$

### 3.2.3 Caso Multivariable

En la práctica muchos procesos tienen múltiples entradas y salidas. Sin embargo, usando ciertos modelos es posible extender los modelos presentados anteriormente al caso MIMO.



Tenemos la siguiente estructura de modelo para el caso MIMO

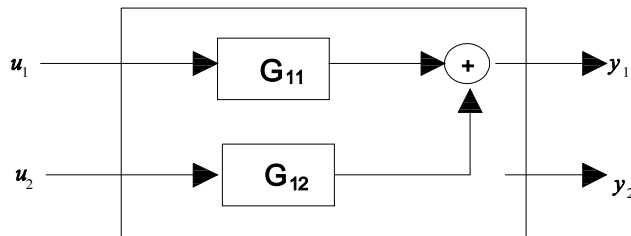
$$y_1(t) = G_{11}(q^{-1})u_1(t) + G_{12}(q^{-1})u_2(t) + \dots + G_{1m}(q^{-1})u_m(t) + v(t)$$

$$y_2(t) = G_{21}(q^{-1})u_1(t) + G_{22}(q^{-1})u_2(t) + \dots + G_{2m}(q^{-1})u_m(t) + v(t)$$

...

$$y_n(t) = G_{n1}(q^{-1})u_1(t) + G_{n2}(q^{-1})u_2(t) + \dots + G_{nm}(q^{-1})u_m(t) + v(t)$$

en el cual cada salida es una combinación lineal de un grupo de funciones de transferencia.



$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \dots \\ v_n(t) \end{bmatrix}$$

Para el siguiente caso particular

$$A_1(q^{-1})y_1(t) = B_{11}(q^{-1})u_1(t) + B_{12}(q^{-1})u_2(t) + \dots + B_{1m}(q^{-1})u_m(t) + C_1(q^{-1})e(t)$$

$$A_2(q^{-1})y_2(t) = B_{21}(q^{-1})u_1(t) + B_{22}(q^{-1})u_2(t) + \dots + B_{2m}(q^{-1})u_m(t) + C_2(q^{-1})e(t)$$

...

$$A_n(q^{-1})y_n(t) = B_{n1}(q^{-1})u_1(t) + B_{n2}(q^{-1})u_2(t) + \dots + B_{nm}(q^{-1})u_m(t) + C_n(q^{-1})e(t)$$

El vector paramétrico se puede definir como

$$\theta = [a_{i1} \quad \dots \quad a_{im} \quad b_{i11} \quad \dots \quad b_{i1m_1} \quad b_{i21} \quad \dots \quad b_{i2m_2} \quad \dots \quad c_{i1} \quad \dots \quad c_{in}]$$

Como veremos en el capítulo 5, los primeros algoritmos pueden aplicarse directamente al caso MIMO. El último algoritmo descrito (N4SID) también contempla el caso MIMO de una manera natural, pues el modelo obtenido es en forma de variables de estado.

### 3.3 METODOS BASADOS EN LA DISTANCIA DE SALIDA Y DE PREDICCIÓN

También existen métodos de identificación que se basan en estimar parámetros de una descripción (situación de polos y ceros, ganancias, retardos, coeficientes de matrices, etc.), minimizando un índice que expresa cuantitativamente las discrepancias entre el proceso y el modelo.

Consideremos el espacio definido por los parámetros que son necesarios determinar. En este espacio, un punto representa al modelo y el otro al proceso. El índice es la distancia entre los dos.

Normalmente se utiliza alguna de las distancias que se presentan a continuación:

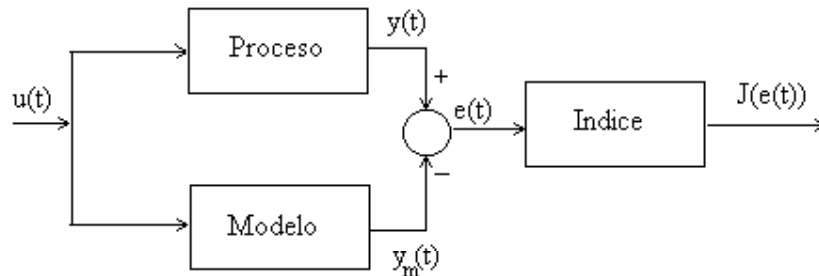
1. Distancia de salida (o de estado)
2. Distancia de predicción

#### **Distancia de salida (o de estado):**

Se utiliza la diferencia entre la salida (o el estado) del modelo y la del sistema, como se ilustra en la figura:

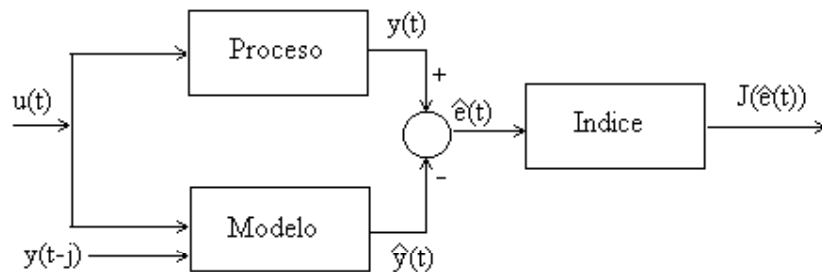
$$J = \sum_{t=t_0}^N [e'(t) W e(t)]$$

W – matriz de ponderación simétrica definida positiva



### Distancia de predicción

Se encuentra basada en la diferencia entre la salida del sistema y la salida que predice el modelo en el mismo instante.



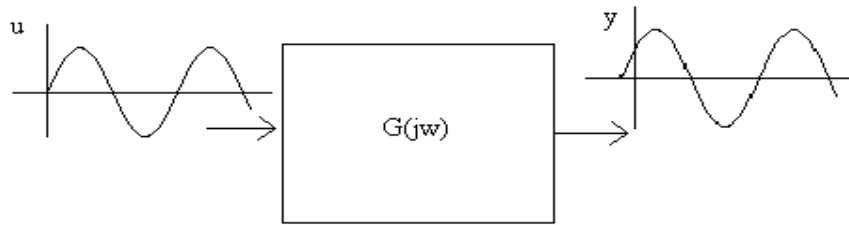
$$J = \sum_{t=t_0}^N [\dot{e}^T(t) W \dot{e}(t)] \quad \hat{y}(t) = \sum_{j=0}^N g_m(j) u(t-j)$$

W – matriz de ponderación simétrica definida positiva

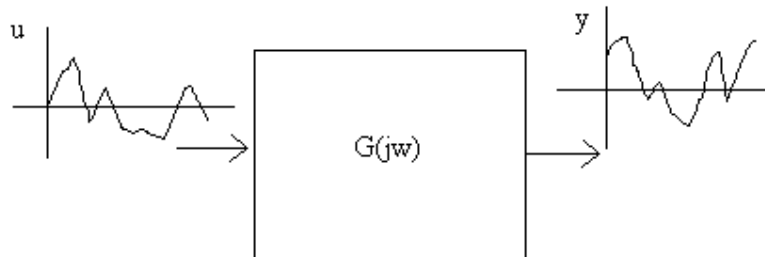
## 4. ALGUNOS METODOS NO PARAMETRICOS

### 4.1 MÉTODOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Los métodos en el dominio de la frecuencia no son usados muy frecuentemente en la identificación del procesos. La excitación con señales sinusoidales a distintas frecuencias toman tiempo y es difícil implementarlos. A demás, los modelos en formato de un grupo de valores de la respuesta en frecuencia no son muy útiles en muchas aplicaciones.



No obstante, otros tipos de entradas, el cual tienen un contenido significativo de frecuencias en un rango dado, pueden ser usados para estimar una función de transferencia en el dominio de la frecuencia por medio de una fórmulas muy conocidas que enlazan las funciones de espectro de potencia, por ejemplo:



$$G(j\omega) = \frac{\Phi_{uy}(j\omega)}{\Phi_u(j\omega)}$$

El espectro de potencia de una señal da el peso de todas las frecuencias elementales de la señal. Usando esta fórmula, puntos de la función de transferencia para valores diferentes de la frecuencia son calculados a partir del espectro cruzado de la entrada y salida y del espectro de entrada.

A continuación se verán dos procedimientos que permiten abordar este tema.

## 4.2 MÉTODOS DE CORRELACIÓN

Otro enfoque para la identificación de modelos lineales de procesos está basada en el uso de funciones de correlación. Como bien se sabe, la función de autocorrelación de una serie en tiempo de  $n$  datos de una variable de proceso, da una medida de dependencia interna con respecto de las series en sus valores previos. En el caso de los valores de 2 variables de proceso, la función de correlación cruzada mide la dependencia de los valores de una variable con respecto a los valores pasados de la otra variable.

Una estimación de la función de autocorrelación es dada por

$$R_u(k) = E\{u(t)u(t-k)\} \cong \frac{1}{n-1} \sum_{i=k}^n u(i)u(i-k)$$

mientras

$$R_{uy}(k) = E\{y(t)u(t-k)\} \cong \frac{1}{n-1} \sum_{i=k}^n y(i)u(i-k)$$

da una estimación de la correlación cruzada

Si un experimento es realizado en un proceso, y recolectamos las series en tiempo de datos de entrada y salida alrededor de un punto de operación, entonces, considerando las variables  $u$  e  $y$  como cambios de ambas entrada y salida sobre este punto de operación, podemos postular el modelo

$$y(t) = \sum_{i=1}^N h_i u(t-i) + v(t)$$

donde  $v(t)$  representa el disturbio

Esta relación matemática puede ser transformada en una relación más útil para propósitos de estimación. Multiplicando ambos términos por  $u(t-j)$  y tomando valores esperados

$$y(t)u(t-j) = \sum_{i=1}^N h_i u(t-i)u(t-j) + v(t)u(t-j)$$

$$E\{y(t)u(t-j)\} = E\left\{\sum_{i=1}^N h_i u(t-i)u(t-j) + v(t)u(t-j)\right\}$$

$$E\{y(t)u(t-j)\} = \sum_{i=1}^N h_i E\{u(t-i)u(t-j)\} + E\{v(t)u(t-j)\}$$

Ahora, si los datos han sido tomados en lazo abierto, de modo que el ruido es independiente de la entrada y

$$E\{v(t)u(t-j)\} = 0$$

Y recordando la definición de funciones de correlación, llegamos finalmente a:

$$R_{uy}(j) = \sum_{i=1}^n h_i R_u(j-i)$$

Como las funciones de correlación pueden ser calculadas a partir de los datos experimentales, dando valores  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$  a esta fórmula, podemos formar un grupo de  $N$  ecuaciones en las  $N$

desconocidas  $h_i$  que pueden ser solucionados usando métodos estandarizados.

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_{uy}(0) \\ R_{uy}(1) \\ \dots \\ R_{uy}(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_u(-1) & R_u(-2) & \dots & R_u(-N) \\ R_u(0) & R_u(-1) & \dots & R_u(1-N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_u(N-2) & \dots & \dots & R_u(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_N \end{bmatrix}$$

De esta forma, puntos de la respuesta impulso en valores diferentes de tiempo son calculados a partir de las funciones de correlación de entrada y salida.

En la práctica la estimación es realizada muy a menudo por mínimos cuadrados, pero esta ecuación sirve para remarcar un punto importante: Note que, además de la suposición de prueba a lazo abierto, con el fin de solucionar para las  $h_i$ , la matriz de autocorrelación de entrada debe ser **no singular** y muy bien condicionada. Esto se denomina “condición de excitación persistente”. Esto implica que no todos los grupos de datos son útiles para la identificación. Si la entrada  $u$  tiene sólo un pequeño número de cambios, entonces, probablemente, la  $R_u$  en la matriz será muy similar y la matriz será mal condicionada. Los **experimentos deben ser cuidadosamente diseñados** de modo de mantener la condición mencionada.

Si la secuencia de entrada es una señal como un ruido blanco, compuestos de valores independientes, tales como una señal PRBS (Pseudo Random Binary Signal), entonces, su función de autocorrelación  $R_u(k)$  será igual a cero para todos los  $k \neq 0$ , de modo que en

$$R_{uy}(j) = \sum_{i=1}^n h_i R_u(j-i)$$

para un valor dado de  $j$ , todos los términos en el lado derecho será cero excepto para  $i=j$  y

$$R_{uy}(j) = h_j R_u(0)$$

los coeficientes de la respuesta impulso son proporcionales a la función de correlación cruzada.

A pesar de sus propiedades atractivas, los métodos basados en señales PRBS no son muy usadas en la industria. Esto se debe realmente a que los experimentos requieren mucho tiempo y que, como la PRBS tiene un contenido significativo de altas frecuencia, los modelos obtenidos tienden a adaptarse mejor a los cambios rápidos que a los lentos.

## 5. MÉTODOS PARAMÉTRICOS

### 5.1 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS (LS)

Se considera el siguiente modelo :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + e(t) \quad (5.1)$$

donde:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{na} q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} \dots + b_{nb} q^{-nb}$$

Reemplazando  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$ , en la ecuación (5.1):

$$(1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{na} q^{-na})y(t) = (b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} \dots + b_{nb} q^{-nb})u(t) + e(t) \quad (5.12)$$

Descomponemos la ecuación anterior de tal modo que separamos las variables medidas de las variables desconocidas. Para esto utilizamos el operador de retraso  $q^{-1}$  descrito en la ecuación (3.2) y ponemos la ecuación (5.2) de la siguiente forma:

$$y(t) = \varphi(t)\theta + e(t) \quad (5.3)$$

donde

$\varphi(t)$  es el vector fila que contiene las variables de entrada y de salida que se han medido

$$\varphi(t) = [y(t-1), \dots, y(t-na), \dots, u(t-1), \dots, u(t-nb)] \quad (5.4)$$

$\theta$  es el vector de parámetros desconocidos y está definido por

$$\theta^T = [-a_1, -a_2, \dots, -a_{na}, b_1, b_2, \dots, b_{nb}] \quad (5.5)$$

Suponemos que el sistema descrito por la ecuación (5.3) se ha hecho correr el tiempo suficiente para formar  $N$  conjunto de vectores de datos  $\varphi(t)$  de modo que:

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ \vdots \\ y(t+N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi(t+1) \\ \vdots \\ \varphi(t+N) \end{pmatrix} \theta + \begin{pmatrix} e(t) \\ e(t+1) \\ \vdots \\ e(t+N) \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$



Denominamos:

$$Y = \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ \vdots \\ y(t+N) \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi(t+1) \\ \vdots \\ \varphi(t+N) \end{pmatrix} \text{ y } \varepsilon = \begin{pmatrix} e(t) \\ e(t+1) \\ \vdots \\ e(t+N) \end{pmatrix}$$

y escribimos la ecuación (5.6) de la sgte. manera

$$Y = \phi\theta + \varepsilon$$

Despejamos  $\varepsilon$  de la ecuación anterior

$$\varepsilon = Y - \phi\theta$$

Ahora seleccionamos la estimación de  $\theta$  ( $\hat{\theta}$ ) de modo que la suma de los cuadrados de los errores entre el grupo de datos experimentales tomados en los instantes  $t = 1, 2, \dots, N$  y la salida del modelo  $y_m(t)$

$$V = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t)^2 = \frac{1}{N} \varepsilon' \varepsilon \quad (5.7)$$

sea mínima.

Luego para encontrar la estimación de mínimos cuadrados se reescribe la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{N} (Y - \phi\theta)' (Y - \phi\theta) \\ &= \frac{1}{N} (Y'Y - \theta\phi'Y - Y'\phi\theta + \theta\phi'\phi\theta) \end{aligned} \quad (5.8)$$

y puede ser minimizada en relación a  $\theta$  de

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{N} [-2\phi'Y + 2\phi'\phi\theta] = 0$$

que es mínimo si  $\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \geq 0$ .

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_{LS}} = 2(\phi'\phi) \geq 0 \quad \text{lo cual se cumple.}$$

Luego el estimador de mínimos cuadrados será

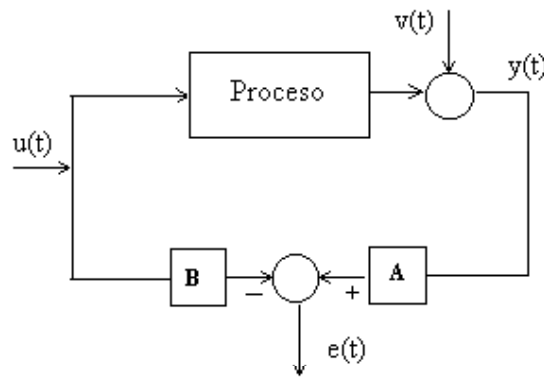
$$\theta_{LS} = [\phi' \phi]^{-1} [\phi' Y] \quad (5.9)$$

La ecuación (5.9) es la denominada estimación de mínimos cuadrados de  $\theta$ .

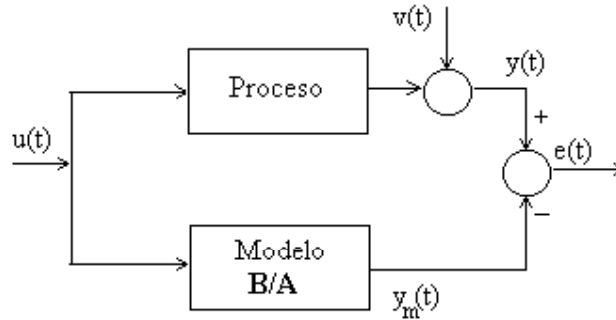
Hemos visto (De ec. 5.1) que el error en la función de costo está dada por

$$e(t) = A(q^{-1})y(t) - B(q^{-1})u(t)$$

Esta ecuación es lineal en los parámetros  $\theta$  y corresponde al siguiente esquema:



Este error es diferente al que podríamos considerar como el natural a minimizar



Por esta razón, la minimización del índice de mínimos cuadrados

$$V = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [A(q^{-1})y(t) - B(q^{-1})u(t)]^2$$

Que no corresponde, en general, a la minimización del error de salida

$$V = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[ y(t) - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) \right]^2$$

Este es un inconveniente de la solución **LS** en la identificación del modelo en función de transferencia.

### Propiedades de la estimación de mínimos cuadrados

A fin de investigar que tan bueno es el estimador **LS**, asumiremos que tenemos un proceso regido por la ecuación

$$y(t) = \varphi(t)\theta_0 + v(t)$$

donde  $\theta_0$  es el vector de parámetros “verdaderos” del sistema y  $v(t)$  es un proceso estocástico estacionario que es independiente de la señal de entrada.

Sustituyendo los valores de  $y(t)$  en el estimador  $\theta_{LS}$ , y denominando  $\theta_{LS} = \hat{\theta}$ , tenemos:

$$\hat{\theta} = [\phi' \phi]^{-1} [\phi' \phi \theta_0 + \phi' \varepsilon]$$

$$\text{Luego} \quad \hat{\theta} = \theta_0 + [\phi' \phi]^{-1} [\phi' \varepsilon] \quad (5.10)$$

y extrayendo valores esperados a ambos miembros de la ecuación (5.10), tenemos

$$E\{\hat{\theta}\} = \theta_0 + E\{[\phi' \phi]^{-1} [\phi' \varepsilon]\} \quad (5.11)$$

En la ecuación (5.11), si el vector de datos  $\varphi(t)$  es no correlacionado con los disturbios  $v(t)$ , y si  $E\{v(t)\} = 0$  (lo cual se cumple si  $v(t)$  es un ruido blanco), entonces el 2do. término del miembro de la derecha de la ecuación (5.11) es cero de modo que

$$E\{\theta_{LS}\} = \theta_0$$

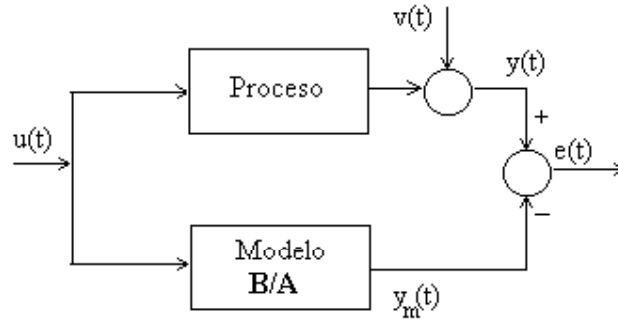
Entonces, si se cumple lo anterior, obtendremos un buen estimador del vector paramétrico  $\theta$ .

## 5.2 EL MÉTODO DEL ERROR DE SALIDA

Se ha visto los inconvenientes relacionados a la estimación de mínimos cuadrados de una función de transferencia. Estos provienen de la forma especial de la función de costo usada en los mínimos cuadrados con el fin de obtener un error lineal en los parámetros y, como consecuencia, una solución analítica del problema de identificación.

Se sabe que una función de costo más natural a minimizar sería la suma de los cuadrados del error de salida:

$$V = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y(t) - y_m(t)]^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[ y(t) - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) \right]^2$$



El principal inconveniente de usar esta función de costo es que el error  $e(t) = y(t) - y_m(t)$  es no lineal en los coeficientes desconocidos de los polinomios  $A$  y  $B$ , de modo que, en lugar de tener una solución analítica, la estimación tiene que ser obtenida usando un algoritmo de minimización numérica. Uno de los más usados para esta tarea es el método de Gauss-Newton.

La base de este algoritmo es linealizar la expresión de error y aplicar la fórmula del estimador de mínimos cuadrados a este error linealizado, para mejorar la estimación. Iterando de esta forma podemos esperar alcanzar el mínimo después de una serie de pasos. Para hacer explícito el algoritmo, denotaremos como antes

$$\theta^T = [a_1, \dots, a_{na}, b_1, \dots, b_{nb}]$$

el vector de parámetros a ser estimado, y por  $\hat{\theta}_k$  la estimación en la iteración  $k$ . Si  $\hat{\theta}_k$  no está tan lejos del óptimo, entonces podemos aproximar el error  $e(t, \theta)$  por una serie de expansión de Taylor de primer orden alrededor de  $\hat{\theta}_k$

$$\begin{aligned} e(t, \theta) &\cong e(t, \hat{\theta}_k) + \left. \frac{\partial e(t, \theta)}{\partial \theta^T} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k} (\theta - \hat{\theta}_k) \\ &= e(t, \hat{\theta}_k) + \varphi_k(t)(\theta - \hat{\theta}_k) \\ &= [e(t, \hat{\theta}_k) - \varphi_k(t)\hat{\theta}_k] + \varphi_k(t)\theta \end{aligned}$$

donde  $\varphi_k(t)$  es el gradiente del error y puede ser calculado por

$$\varphi_k(t) = \left. \frac{\partial e(t, \theta)}{\partial \theta^T} \right|_{\theta = \hat{\theta}_k} =$$

$$= \left[ \frac{\hat{B}_k(q^{-1})}{\hat{A}_k(q^{-1})^2} u(t-1), \dots, \frac{\hat{B}_k(q^{-1})}{\hat{A}_k(q^{-1})^2} u(t-na), \frac{1}{\hat{A}_k(q^{-1})} u(t-1), \dots, \frac{1}{\hat{A}_k(q^{-1})} u(t-nb) \right]$$

Con esta aproximación  $e(t, \theta)$  es lineal en  $\theta$ . Si comparamos la expresión de arriba para  $e(t, \theta)$  con el fue usado en el estimador LS, esto es  $e(t) = y(t) - \varphi^T(t)\theta$  podemos ver que ahora  $[e(t, \hat{\theta}_k) - \varphi(t)\hat{\theta}_k]$  juega el papel de  $y(t)$  y  $\varphi_k(t)$  el de  $\varphi(t)$ , por eso el estimador de mínimos cuadrados estaba dado por

$$\hat{\theta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T y = \left[ \sum_{t=1}^N \varphi^T(t) \varphi(t) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi^T(t) y(t)$$

Podemos actualizar  $\hat{\theta}_k$  con

$$\hat{\theta}_{k+1} = \left[ \sum_{t=1}^N \varphi_k^T(t) \varphi_k(t) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi_k^T(t) [e(t, \hat{\theta}_k) - \varphi_k(t) \hat{\theta}_k] =$$

$$\hat{\theta}_k - \left[ \sum_{t=1}^N \varphi_k^T(t) \varphi_k(t) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi_k^T(t) e(t, \hat{\theta}_k)$$

El cual, bajo ciertas condiciones proporcionará con un estimador de los parámetros del modelo que minimiza la función de costo del error de salida. Note que, aunque si el estimador es obtenido recursivamente, este no es un algoritmo adecuado para identificación en línea (*on-line*), porque en cada iteración este usa el grupo entero de datos experimentales, de  $t=1$  hasta  $N$ . De otro punto vista, para mejorar la validez de la linealización, el punto de inicio del método de Gauss-Newton es elegido frecuentemente como el proporcionado por el estimador de mínimos cuadrados (LS).

Con el fin de analizar las propiedades del estimador, se asume que el algoritmo de Gauss-Newton trabaja bien y nos permite sustituir en la función de costo  $V$ ,  $y(t)$  por lo que tenemos que suponer que este es su representación “verdadera”

$$y(t) = \frac{B_0(t)}{A_0(t)} u(t) + v(t)$$

entonces

$$V = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[ \frac{B_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})} u(t) + v(t) - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) \right]^2 =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[ \left( \frac{B_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})} - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \right) u(t) + v(t) \right]^2$$

y si hacemos  $N \rightarrow \infty$ , y asumimos que los datos experimentales son tomados en lazo abierto, de modo que  $u(t)$  y  $v(t)$  no están correlacionados, podemos escribir

$$E\{V\} = \left( \frac{B_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})} - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \right)^2 E\{u(t)^2\} + E\{v(t)^2\}$$

Siendo  $E\{\cdot\}$  el valor esperado. Ahora, si el orden del modelo es correcto, el mínimo será encontrado cuando

$$\left( \frac{B_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})} - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \right)^2 \rightarrow 0$$

el cuál significa que la estimación del error de salida es consistente. Del mismo modo, haciendo uso del teorema de Parseval, podemos escribir

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left( \frac{B_0(e^{-j\omega T})}{A_0(e^{-j\omega T})} - \frac{B(e^{-j\omega T})}{A(e^{-j\omega T})} \right)^2 \Phi_u(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_v(\omega) d\omega$$

y el error del modelo en el dominio de la frecuencia será pesado sólo por el contenido de frecuencias de la entrada usada en el experimento. Esta propiedad, así como la de consistencia, son las grandes ventajas con relación al método **LS**. También notamos que el modelo encontrado

$$y_m(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t)$$

depende sólo de la entrada  $u(t)$  el cuál lo hace muy atractivo para aplicaciones tales como control predictivo.

### 5.3 MÉTODO DEL ERROR DE PREDICCIÓN (PEM)

Uno de los inconvenientes que presenta el algoritmo **LS** es que no se estima el modelo del disturbio, el cual debe ser necesitado, por ejemplo en el diseño del controlador.

Si queremos estimar el modelo del disturbio, necesitamos añadir éste al modelo que ha sido usado antes.

Muy a menudo un modelo estocástico tal como un ruido blanco  $\mathbf{e}(t)$  de media cero filtrado por una función de transferencia es usado para este propósito. Ejemplos de estos modelos son: ARMAX y *Box-Jenkins* descritos en la sección 3.2.

En este método los parámetros del modelo son elegidos tal que la suma de los cuadrados del error de predicción es mínima. De acuerdo a esto, la función de error a ser minimizada es

$$V = \frac{1}{N} \sum \hat{e}(t/\theta)^2 = \frac{1}{N} \sum [y(t) - \hat{y}(t/\theta)]^2 \quad (5.12)$$

Con la finalidad de obtener una expresión para la predicción  $\hat{y}(t/\theta)$ , asumiremos que el proceso puede ser representado exactamente por:

$$y(t) = G_o(q^{-1})u(t) + H_o(q^{-1})e(t) \quad (5.13)$$

donde  $G_o(q^{-1})$  y  $H_o(q^{-1})$  son funciones de transferencia como descritos en la sección 3.2.

Sumando y restando al 2do. miembro de la ecuación (5.13) el término  $e(t)$  obtenemos

$$y(t) = G_o(q^{-1})u(t) + [H_o(q^{-1}) - 1]e(t) + e(t) \quad (5.14)$$

y como  $[H_o(q^{-1}) - 1]e(t)$  contiene solamente información pasada podemos despejar  $e(t)$  de la ecuación (5.13)

$$e(t) = \frac{1}{H_o(q^{-1})} [y(t) - G_o(q^{-1})u(t)]$$

Reemplazando  $e(t)$  en la ecuación (5.14) obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= G_o(q^{-1})u(t) + [H_o(q^{-1}) - 1] \frac{1}{H_o(q^{-1})} [y(t) - G_o(q^{-1})u(t)] + e(t) \\ &= G_o(q^{-1})u(t) + \left[ 1 - \frac{1}{H_o(q^{-1})} \right] [y(t) - G_o(q^{-1})u(t)] + e(t) \\ &= \frac{G_o(q^{-1})}{H_o(q^{-1})} u(t) + \left[ 1 - \frac{1}{H_o(q^{-1})} \right] y(t) + e(t) \end{aligned}$$

y la mejor predicción es dada por

$$\hat{y}(t/\theta) = E\{y(t)\} = \frac{G_o(q^{-1})}{H_o(q^{-1})}u(t) + \left[1 - \frac{1}{H_o(q^{-1})}\right]y(t).$$

Si nuestro modelo tiene la estructura

$$y_m(t) = G(q^{-1})u(t) + H(q^{-1})e(t),$$

podemos usar los resultados previos para predecir el valor de  $y(t)$  por medio de

$$\hat{y}(t/\theta) = \frac{G(q^{-1})}{H(q^{-1})}u(t) + \left[1 + \frac{1}{H(q^{-1})}\right]y(t) \quad (5.15)$$

donde  $\theta$  incluye todos los coeficientes del polinomio no conocidos de  $G$  y  $H$ . Luego podemos calcular el error de predicción como:

$$\begin{aligned} \hat{e}(t/\theta) &= y(t) - \hat{y}(t/\theta) = y(t) - \frac{G(q^{-1})}{H(q^{-1})}u(t) - \left[1 - \frac{1}{H(q^{-1})}\right]y(t) \\ \hat{e}(t/\theta) &= \frac{1}{H(q^{-1})}[y(t) - G(q^{-1})u(t)] \end{aligned} \quad (5.16)$$

y por lo tanto, reemplazando la ecuación (5.16) en (5.12) se obtiene

$$V = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \frac{1}{H(q^{-1})} [y(t) - G(q^{-1})u(t)] \right)^2$$

Como el error de predicción es no lineal en los parámetros  $\theta$ , una solución analítica para minimizar  $V$  no existe y la solución debe ser encontrada numéricamente usando algoritmos de optimización apropiada tal como el Gauss-Newton adaptado al particular modelo que estamos usando.

#### 5.4. METODO DE IDENTIFICACIÓN A ESPACIOS DE ESTADOS (N4SID)

En este caso la definición de la estructura del modelo a identificar requiere de un solo parámetro: el orden del sistema. En cuanto al problema de identificación consiste en determinar la matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  del modelo:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (5.17a)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (5.17b)$$

donde

$u$ , es el vector de entrada de dimensión  $m$ ,

$y$ , es el vector de salida de dimensión  $l$ , y

$x$  es el vector de estado del sistema de dimensión  $n$ .



La familia de algoritmos de identificación basados en subespacios proporciona métodos para obtener modelos lineales en tiempo discreto, en el espacio de los estados a partir de las medidas de ingreso y salida.

Todos estos métodos están basados sobre una aproximación de tipo geométrico que aplica la teoría de subespacios a filas y/o columnas de matrices oportunas construidas en base a datos de ingreso y salida.

Aquí se resume brevemente el algoritmo<sup>(1)</sup> que es de mayor complejidad que los anteriores.

El punto de partida fundamental de los algoritmos basados en subespacios es la ecuación siguiente:

$$Y = \Gamma X + HU \quad (5.18)$$

donde

$Y$ ,  $U$  son matrices de Hankel formadas con las señales de salida y de ingreso:

$$Y(li, j) = \begin{bmatrix} y_k & y_{k+1} & \cdots & y_{k+j-1} \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \cdots & y_{k+j} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_{k+i-1} & y_{k+i} & \cdots & y_{k+i+j-2} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$U(mi, j) = \begin{bmatrix} u_k & u_{k+1} & \cdots & u_{k+j-1} \\ u_{k+1} & u_{k+2} & \cdots & u_{k+j} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_{k+i-1} & u_{k+i} & \cdots & u_{k+i+j-2} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$X$  es la secuencia de estados definida por:

$$X(k, j) = [x_k \ x_{k+1} \ \cdots \ x_{k+j-1}] \quad (5.21)$$

$\Gamma$  es la matriz extensa de observabilidad.

---

(1)Ver [4]

$$\Gamma(li, n) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$H$  es una matriz de Toeplitz formada con los parámetros de Markov del modelo:

$$H(li, mi) = \begin{bmatrix} D & O & O & \dots & O \\ CB & D & O & \dots & O \\ CAB & CB & D & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \dots & D \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

A través de la ecuación (2.30) la mayor parte de los algoritmos a subespacios estima la secuencia de estados de los datos de ingreso y salida. Una vez que la secuencia de estado es calculada, las matrices ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ) se obtienen como la solución a un problema de mínimos cuadrados.

#### 5.4.1.- ALGORITMO NUMÉRICO N4SID PARA LA IDENTIFICACIÓN

Este algoritmo permite identificar las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $Q^s$ ,  $R^s$  y  $S^s$  que describe el sistema determinístico estocástico:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \quad (5.24a)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + v_k \quad (5.24b)$$

con

$$E \left[ \begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_l^T & v_l^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q^s & S^s \\ (S^s)^T & R^s \end{pmatrix} \delta_{kl} \geq 0$$

a partir de un conjunto de medidas de ingreso y salida. Los vectores  $v(l \times 1)$  y  $w(n \times 1)$  son ruidos gaussianos no medibles ;  $\delta_{kl}$  es el índice de Kronecker.

N4SID opera sobre la ecuación (5.17) con la finalidad de calcular una estima de secuencia de estado  $X$ . Esta estima permite determinar las matrices del sistema como soluciones a los mínimos cuadrados de un único conjunto, sobredeterminado, de ecuaciones lineales. Las estimaciones de la matriz  $X$  es obtenida de la proyección,  $Z_i$  y  $Z_{i+L}$ , de las filas de  $y$  sobre un subespacio de las filas de las matrices de Hankel que contienen datos de ingreso y de salida pasados. Por lo tanto las proyecciones son obtenidas por:

$$Z_i = Y_{h1} / \begin{pmatrix} U(m(2i), li) \\ Y_{h1} \end{pmatrix} \quad (5.25a)$$

$$Z_{i+1} = Y_{h2} / \begin{pmatrix} U(m(2i), li) \\ Y_{h1} \end{pmatrix} \quad (5.25b)$$

donde  $F/G = FG^*(GG^*)^{-1}G$ . El subespacio a filas de  $F/G$  es igual a la proyección del subespacio a filas de  $F$  sobre el subespacio a filas de  $B$ . De este modo, dos secuencias de estado,  $X_1$  y  $X_2$ , se pueden calcular de las ecuaciones siguientes:

$$X_1 = \Gamma_i^\dagger(li, n)(Z_i - H(li, mi)U(m(2i), li)) \quad (5.26)$$

$$X_2 = \Gamma_{i-1}^\dagger(l(i-1), n)(Z_{i+1} - H(l(i-1), mi) - U_{h2}) \quad (5.27)$$

El símbolo  $\dagger$  representa la pseudoinversa. Se puede demostrar que la expresión (5.25) es posible expresarla como:

$$Z_i = (L_i^1 / L_i^2 / L_i^3) \begin{pmatrix} U(m(2i), li) \\ Y_{h1} \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

$L_i^1$ ,  $L_i^2$  tienen dimensión  $li \times mi$ ,  $L_i^3$  tiene dimensión  $li \times li$ , y  $\Gamma_i$  puede ser obtenido de la descomposición a valores singulares de:

$$(L_i^1 / L_i^3) \begin{pmatrix} U_{h1} \\ Y_{h1} \end{pmatrix} = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T \quad (5.29)$$

$$T_i = U_1 \Sigma_1 \quad (5.30)$$

El orden del sistema,  $n$ , es igual al número de valores singulares no nulos presentes en  $\Sigma_1$ . Si se demuestra incluso que las matrices para identificar pueden ser calculados de las soluciones a mínimos cuadrados de la ecuación siguiente ( $\rho_1(nxj)$  y  $\rho_2(lxj)$  son los residuos):

$$\begin{pmatrix} T_i Z_{i+1} \\ Y_{ih1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} T_i^+ Z_{i+1} \\ U_{h2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

$T_{i-1}$  es la matriz obtenida de  $T_i$  eliminando la última fila,  $Y_{ih1}$  es la última fila de  $Y_{h1}$ . El sistema de matrices viene determinado:

$$A \leftarrow K_{11}, C \leftarrow K_{21}, \begin{pmatrix} Q^s & S^s \\ (S^s) & R^s \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \rho_1 \rho_1' & \rho_1 \rho_2' \\ \rho_2 \rho_1' & \rho_2 \rho_2' \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Mientras las matrices  $B$  y  $D$  se obtienen de  $A$ ,  $C$ ,  $K_{12}$  y  $K_{22}$  a través de la ecuación:

$$\begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B - AT_i^+ \begin{pmatrix} D \\ T_{i-1} B \end{pmatrix} T_i^+ H_{i-1} - AT_i^+ \begin{pmatrix} 0 \\ H_{i-1} \end{pmatrix} \\ D - CT_i^+ \begin{pmatrix} D \\ T_{i-1} B \end{pmatrix} CT_i^+ \begin{pmatrix} 0 \\ H_{i-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Recapitulando, el algoritmo N4SID identifica las matrices del sistema (5.17) a través de los siguientes pasos:

- Obtener las proyecciones, a través de (5.25).
- Calcular el orden del sistema y la matriz  $T_i$ , con la ecuación (5.30).
- Resolver el sistema (5.31) y obtener las matrices a identificar con las ecuaciones (5.32) y (5.33).

## 6. VALIDACIÓN DEL MODELO

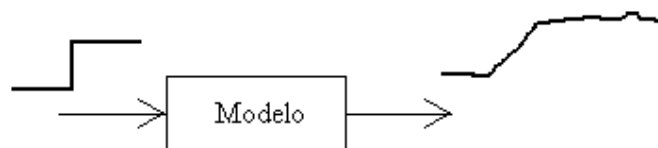
La validación de los modelos calculados es uno de los pasos esenciales en un proceso de identificación. Luego que la fase de estimación de parámetros ha sido realizada, tenemos que validar el modelo obtenido. Validación significa evaluar un grado de confianza de nuestro modelo. Esto puede ser muy impreciso y, en realidad, no existe una medida de validación definitiva. La aceptación del modelo no sólo depende del modelo en sí, sino del propósito de su uso. En lugar de una prueba simple, validar el modelo involucra analizar la respuesta del modelo bajo diferentes puntos de vista. Es este grupo de pruebas, y la coherencia de los resultados obtenidos, el cual nos permite aceptar el modelo. Hay varias formas de probar un modelo, de los cuales tenemos:

- Respuestas cualitativas del modelo
- Validación cruzada
- Índices de performance
- Verificación cruzada con otros modelos
- Medidas estadísticas
- Capacidad de predicción del modelo

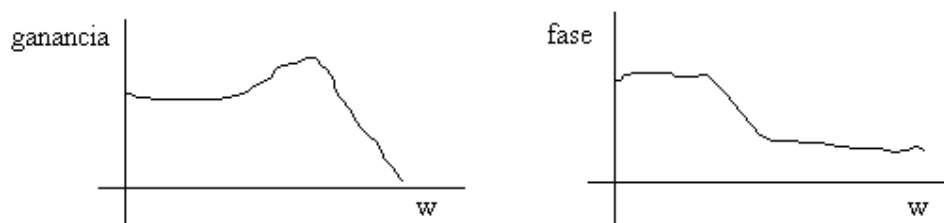
A continuación veremos en forma breve cada uno de estos métodos.

## 6.1 RESPUESTAS CUALITATIVAS

Una forma natural de probar la respuesta de modelo es ver su respuesta al paso o impulso y hacer juicios basados en las características conocidas del proceso. El modelo debe proporcionar respuestas lógicas similares a las esperadas del proceso. Por ejemplo, si sabemos que cuando la entrada del proceso se incrementa repentinamente, la salida del proceso evoluciona crecientemente en forma continua, con un pequeño retraso, antes de alcanzar un nuevo estado estacionario sin sobreoscilación, podemos ver para este tipo de respuesta, la respuesta escalón del modelo. Presencia de respuestas de fase no-mínima, sobreoscilación, etc. podrá en contra el modelo de este ejemplo. De la misma forma, podemos verificar, en relación a la respuesta esperada del proceso, el orden de magnitud de varios parámetros del modelo tales como la ganancia, tiempo de retraso, tiempo de establecimiento, etc.



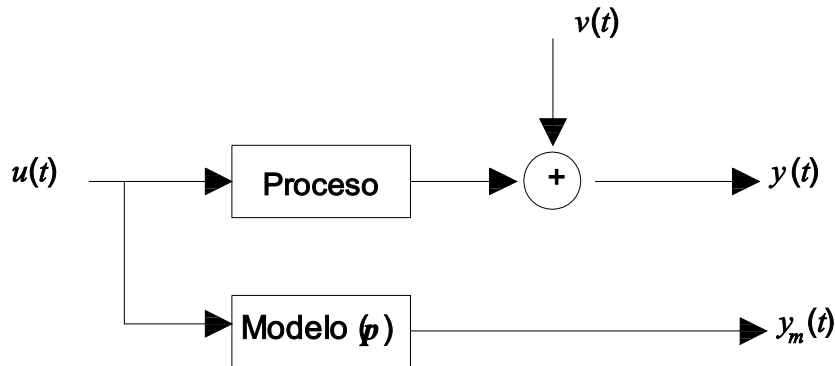
La repuesta del modelo también puede ser analizada en el dominio de la frecuencia. Los diagramas de bode y nyquist permiten ver otras características del modelo, tales como rechazo al ruido, velocidad de respuesta, resonancia, etc. que pueden ser observados a través del ancho de banda, pendiente en las altas frecuencia, pico de resonancia, etc.



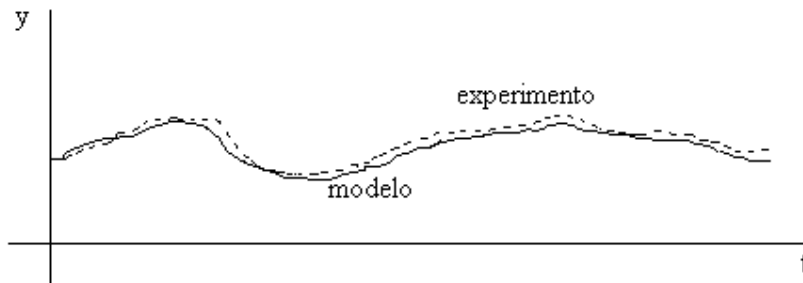
Este grupo de pruebas da una primera idea de la calidad del modelo, que debe ser complementada con otro criterio.

## 6.2 VALIDACIÓN CRUZADA

Un paso necesario en la validación del modelo es comparar gráficamente en el dominio del tiempo la respuesta del modelo  $y_m$  y la respuesta del proceso  $y$  al introducirle a ambos en su entrada datos experimentales  $u$ .



La comparación entre la respuesta del modelo y los datos normalmente conviene hacerla en relación a otros conjuntos de datos experimentales distintos a aquellos que sirvieron para la identificación. De este modo se puede estudiar la independencia de los resultados del conjunto de los experimentos particulares.



### 6.3 ÍNDICES DE PERFORMANCE

Una medida cuantitativa de la calidad del modelo puede ser obtenida usando los índices RMS (Media cuadrática relativa) y MSE (Error cuadrático medio):

$$RMS_i = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (y_{ri}(k) - y_{mi}(k))^2}{\sum_{k=1}^N y_{ri}(k)^2}}; \quad i = 1, 2, \dots$$

$$MSE_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_{ri}(k) - y_{mi}(k))^2; \quad i = 1, 2, \dots$$

Los índices anteriores pueden ser usados para comparar los modelos obtenidos mediante varios algoritmos de identificación.

El índice **RMS** indica una medida de los errores respecto a los valores reales de salida en un experimento, es decir, si durante un experimento se obtiene un **RMS** menor que 1, se puede decir que el modelo obtenido es bueno.

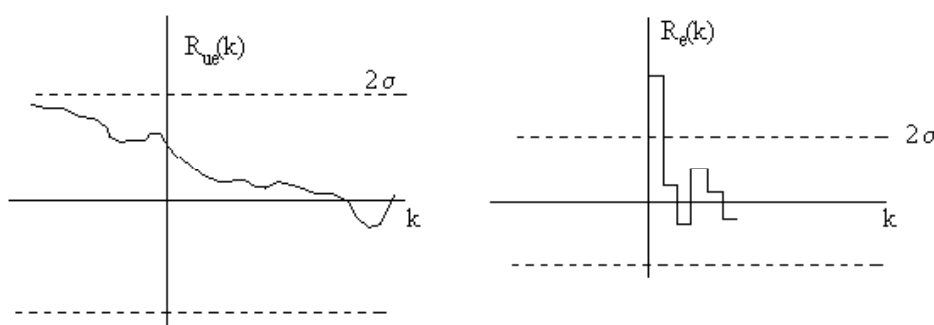
El índice **MSE** indica una varianza de los errores absolutos a lo largo de un experimento. Este índice puede ser empleado para calcular un error promedio extrayéndole la raíz cuadrada. Dependiendo del rango de trabajo en que se encuentre mi variable de salida, puedo extraer conclusiones de cuan bueno es el modelo obtenido.

## 6.4 VERIFICACIÓN CRUZADA CON OTROS MODELOS

Si varios tipos de modelos han sido identificados, por ejemplo, una función de transferencia, un modelo a respuesta impulso y la respuesta en frecuencia, si el modelo es correcto, todos ellos deben ser coherentes entre si. Por eso, calcular, por ejemplo, la respuesta impulso de la función de transferencia, y comparar luego con la respuesta impulso estimada de datos experimentales, ambos deben dar similar comportamiento. Y lo mismo puede darse calculando la respuesta en frecuencia de la función de transferencia y comparar esta con una estimada experimentalmente.

## 6.5 MEDIDAS ESTADÍSTICAS

Es claro que, si un modelo es una representación válida del proceso, los errores, o residuos, deben ser estadísticamente independientes de la entrada particular. Esto quiere decir que la correlación cruzada entre la entrada y los residuos,  $R_{ue}(k)$ , deben ser cero para  $k$  positivo, esto es, no siendo significativamente diferente de cero. Note que una correlación cruzada distinta de cero puede ser obtenida para  $k$  negativo si los datos experimentales son obtenidos en lazo cerrado dado que la variable manipulada fue calculada de valores de la salida del proceso.



De la misma manera, la autocorrelación de los residuos nos permite verificar alguna de sus propiedades estadísticas. En particular con los métodos PEM que estiman el modelo del ruido, los residuos deben ser ruido blanco si el modelo es correcto. Esto puede ser verificado usando su función de autocorrelación.

En cambio, los métodos de estimación proporcionan rangos de incertidumbre asociadas cada uno de los parámetros. Observando este rango, uno puede obtener una cierta medida de su validez.

## **6.6 CAPACIDAD DE PREDICCIÓN DEL MODELO**

Si el modelo será usado para hacer predicciones, tales como en un controlador predictivo, probar esta capacidad es un punto importante en el proceso de validación. Esto puede ser realizado usando datos experimentales pasados y una fórmula de predicción.

## **REFERENCIAS**

- [1] De Prada, C., "Introduction to Modeling and Identification", on International Conference on Automatic Control, PADI2, Peru, 1998
- [2] Ljung L., System Identification, Prentice Hall 1987
- [3] Soderstrom T., System Identification, Prentice Hall 1989
- [4] Overshee P. And Moor B. (1994), "N4SID: subspace algorithm for the identification of combined deterministic-stochastic system"