SISTEMAS NO LINEALES

Ricardo Carelli

Instituto de Automática
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de San Juan - CONICET
Av. San Martín Oeste 1109
5400 San Juan, Argentina
Fax: +54 264 4213672
E-mail: rcarelli@inaut.unsj.edu.ar
Web: www.inaut.unsj.edu.ar

2019

CONTENIDOS

CONTENIDOS

CONTENIDOS

7. ESTABILIDAD DE ENTRADA-SALIDA
    - Definiciones de espacios de funciones
    - Conceptos de estabilidad de entrada-salida
    - Funciones de transferencias real positivas
    - Pasividad
8. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL
    - Diseño por Lyapunov
    - Diseño con linealización por realimentación
    - Diseño por superficies deslizantes
    - Ejercicios

Referencias:

Las notas están parcialmente basadas en los siguientes libros:

- M. Vidyasagar. Nonlinear Systems Analysis, second edition. Prentice-Hall. 1993.
- J.J. Slotine, W. Li. Applied Nonlinear Control. Prentice-Hall, 1991.
- H. Khalil. Nonlinear Systems, Second Edition. Prentice Hall, 1996.
- C. A. Desoer, M. Vidyasagar. Feedback Systems: Input-Output Properties. Academic Press. 1975.

1. INTRODUCCIÓN

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Justificación del estudio de los sistemas no lineales

Un sistema no lineal es aquél que no verifica el principio de superposición.

La justificación del estudio de los sistemas no lineales se fundamenta en numerosas razones. Desde la óptica del control automático pueden mencionarse las siguientes:

- Virtualmente todos los sistemas físicos son *de naturaleza no lineal*. A veces es posible describir la operación de un sistema físico por un modelo lineal, por ejemplo ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Este es el caso cuando la operación del sistema no se desvía demasiado del punto de operación nominal. Por esto el análisis de sistemas lineales es importante en la teoría y práctica del control. Sin embargo, otras veces el modelo linealizado no es adecuado. Esto tiene que ver también con el desempeño deseado del sistema de control.

- *Mejoramiento de sistemas de control* existentes. Los controladores no lineales pueden manejar no linealidades en un amplio rango de operación del sistema. Esto puede ser ejemplificado con el caso del robot. En altas velocidades las fuerzas no lineales de Coriolis y centrífugas (que son funciones cuadráticas de la velocidad) se manifiestan con intensidad. En este caso, un controlador no lineal denominado de par calculado puede mejorar notablemente el desempeño respecto de un controlador de movimiento de tipo lineal.

1. INTRODUCCIÓN

- Análisis de *no linealidades fuertes*. Una suposición del control lineal es que el modelo es linealizable. Sin embargo existen no linealidades cuya naturaleza discontinua no permite la aproximación lineal. Ejemplos de éstas son la fricción de Coulomb, la saturación, el juego muerto ("backlash"), las zonas muertas, la histéresis, que son frecuentemente encontradas en ingeniería. Estas no linealidades causan efectos no deseables como inestabilidades y ciclos límites, por lo que sus efectos deben ser predecidos y compensados.

- *Incertidumbres en el modelo*. Cuando se diseñan sistemas lineales se asume que los parámetros del modelo son suficientemente bien conocidos. Sin embargo, a veces esto no ocurre, lo cual puede deberse a variaciones lentas o abruptas de esos parámetros. En estos casos pueden incorporarse intencionalmente no linealidades al sistema de control a fin de que esas incertidumbres sean bien toleradas. Ejemplos son los sistemas de control robusto y los adaptables.

- *Simplicidad de diseño*. En algunos casos un buen diseño de control no lineal puede ser más simple que la contraparte lineal, porque el diseño no lineal está asociado a la física misma del sistema. También, un diseño no lineal puede permitir el uso de componentes de control menos costosos, al no requerir que los sensores y actuadores sean de comportamiento estrictamente lineal.

- *Facilidades computacionales*. Los avances en las tecnologías de cómputo facilitan la aplicación de controladores no lineales.

1. INTRODUCCIÓN

1.2 Comportamiento de sistemas no lineales

- Los sistemas físicos son inherentemente no lineales. Sin embargo, si las no linealidades son suaves y el rango de operación del sistema es pequeño, el sistema puede ser aproximado por un modelo lineal.

- Las no linealidades pueden **clasificarse** como

  - *naturales o inherentes:* naturalmente incluidas en el sistema, como las fuerzas centrípetas, fricción de Coulomb, etc. Usualmente tienen efectos indeseables y los sistemas de control deben compensarlas.

  - *artificiales o intencionales*: son introducidas intencionalmente por el diseñador, como las leyes de control adaptable.

  - *discontinuas*: no pueden ser localmente aproximadas por funciones lineales, ej. el juego muerto, la histéresis, la fricción estática...

  - *continuas:* pueden ser localmente linealizadas.

  - *estáticas:* representables por ecuaciones algebraicas o por curvas.

  - *dinámicas:* representables por ecuaciones diferenciales o en diferencias.

1. INTRODUCCIÓN

- **Propiedades de los sistemas lineales**

$$\dot{x} = Ax$$
$$A: \quad matriz\,constante$$
$$x: \quad vector\,de\,estados$$

- Tienen un único equilibrio si A no es singular.
- El equilibrio es estable si los autovalores de A tienen parte real negativa, independientemente de las condiciones iniciales.
- La respuesta se compone de los modos naturales del sistema.
- En presencia de entradas externas, el sistema satisface el principio de superposición; la estabilidad asintótica implica que a entrada acotada corresponde salida acotada; a entrada senoidal corresponde salida senoidal de igual frecuencia.

1. INTRODUCCIÓN

- ## Comportamientos no lineales

a. Considérese la ecuación que representa el movimiento de un vehículo submarino en forma simplificada:

$$\dot{v} + |v|v = u$$

donde *v* es la velocidad y *u* la propulsión. Para dos entradas distintas resultan los siguientes valores de velocidad en estado permanente v_s:

$$u = 1: \quad 0 + |v_s|v_s = 1 \quad \Rightarrow \quad v_s = 1$$

$$u = 10: \quad 0 + |v_s|v_s = 10 \Rightarrow \quad v_s = \sqrt{10}$$

Respuestas típicas se observan en la figura 1.1.

- El comportamiento al escalón positivo es más rápido que al escalón negativo.
- El comportamiento no es proporcional al valor del escalón.

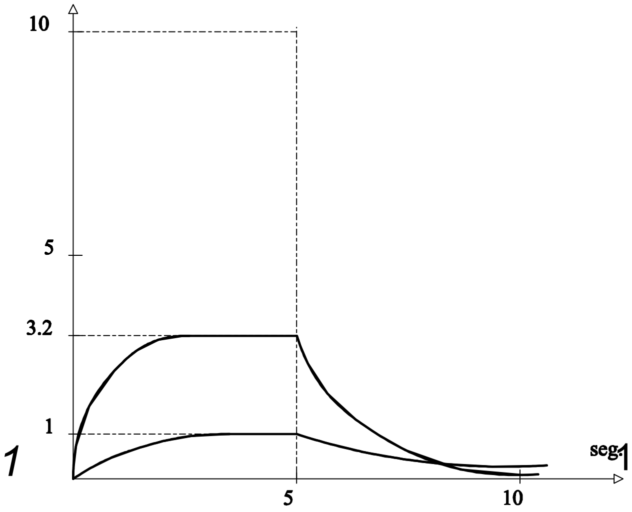


Figura 1.1

b. *Múltiples puntos de equilibrio.*

$$\dot{x} = -x + x^2; \quad x(0) = x_0$$

La solución es

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$

Según se ve en la figura 1.2, se tienen dos equilibrios, uno en *x=0* y el otro en *x=1*.
El primero corresponde al del sistema linealizado en *x=0*.
También se observa que para condiciones iniciales mayores que 1, se tiene un "tiempo de escape" finito para las soluciones del sistema.

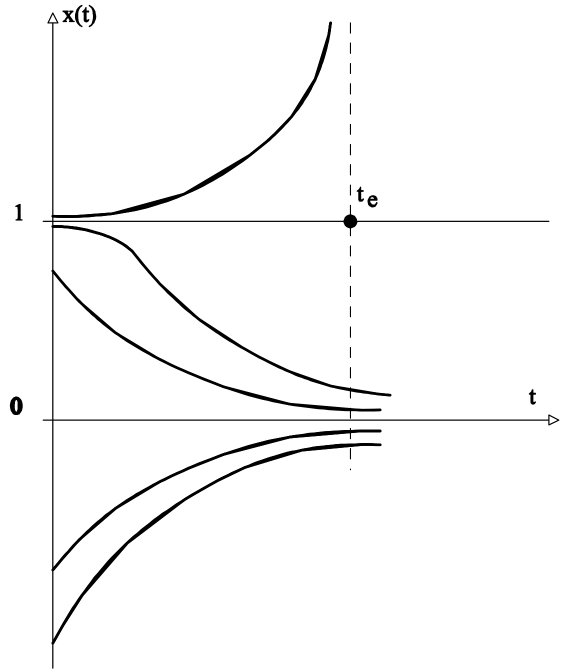


Figura 1.2

c. Para entradas *u* externas acotadas, la salida puede ser *acotada o no*, dependiendo del valor de la entrada.

$$\dot{x} = x\,u$$

$$u = 1 \quad \Rightarrow \quad |x| \rightarrow \infty$$

$$u = -1 \quad \Rightarrow |x| \rightarrow 0$$

d. *Comportamiento frecuencia-amplitud*.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + k'x^3 = 0 \quad Duffing$$

$$m, b, k > 0$$

$$k' \geq 0 \quad ó \quad k' \leq 0$$

En la figura 1.3 se observa el comportamiento amplitud-frecuencia.

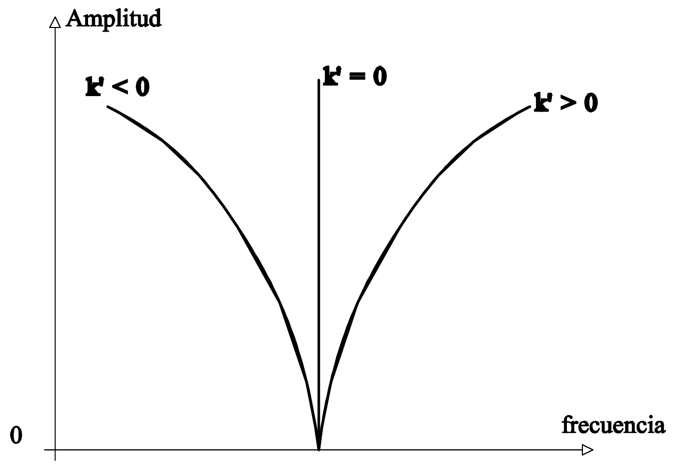


Figura 1.3

1. INTRODUCCIÓN

e. *Respuestas multivaluadas y saltos de resonancia.*

Considérese el sistema con oscilaciones forzadas

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + k'x^3 = P\cos\omega t$$

En la figura 1.4 se observa el comportamiento amplitud-frecuencia con los saltos de resonancia y la zona de oscilaciones inestables, para k´>0.

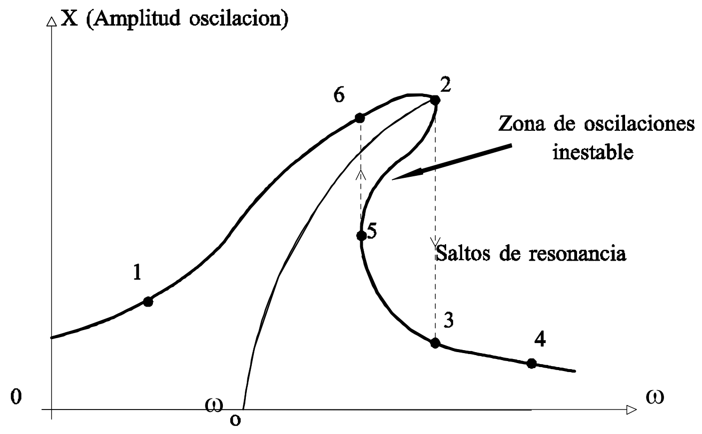
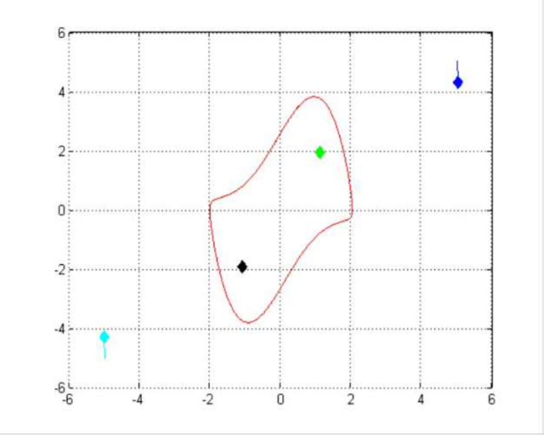


Figura 1.4

f. *Ciclos límites.*
Oscilaciones de amplitud y período fijos sin excitación externa.

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0 \quad Van\ der\ Pol$$
$$m, c, k > 0$$



Sistema con amortiguamiento que depende de la posición. Para pequeños desplazamientos la fricción es negativa y la amplitud crece, para desplazamientos grandes es positiva y la amplitud decrece. El sistema presenta una oscilación sostenida independientemente de las condiciones iniciales (diferente de las oscilaciones de sistemas lineales marginalmente estables).

1. INTRODUCCIÓN

g. *Bifurcaciones.*
Cambio de las propiedades cualitativas del sistema con el cambio cuantitativo de los parámetros.

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = 0 \quad \textit{Duffing no amortiguada}$$

En la figura 1.5 se observa la distribución de los equilibrios en función del parámetro α.
El valor cero es el valor crítico de bifurcación (tipo horquilla).

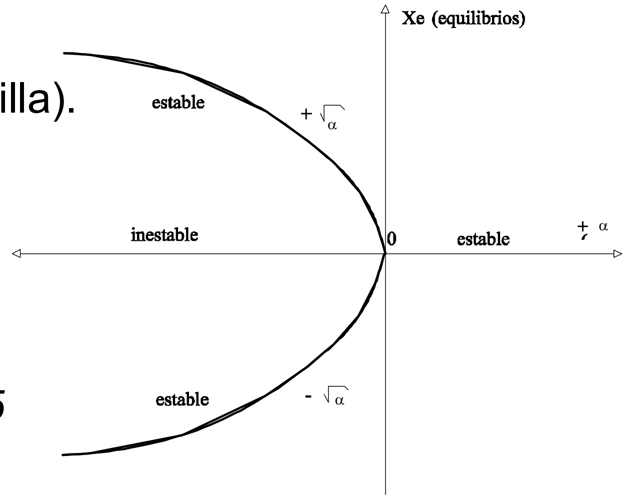


Figura 1.5

h. *Caos.*
Para sistemas lineales, pequeñas diferencias en las condiciones iniciales causan pequeñas diferencias en la salida. En sistemas no lineales, la salida puede ser extremadamente sensible a las condiciones iniciales, por lo que la misma se vuelve impredecible. Este fenómeno se denomina caos.

1. INTRODUCCIÓN

- ***Conclusiones***

- Los sistemas no lineales presentan una riqueza dinámica y comportamientos complejos que no tienen los sistemas lineales.

- En general no es posible resolverlos analíticamente. Para su análisis se requieren herramientas matemáticas más complejas que para los sistemas lineales y no admiten un análisis general.

- La simulación es un complemento valioso en su estudio.

1.3 Modelos y conceptos

No linealidades estáticas

Se representan por gráficas o ecuaciones algebraicas. Ej.: saturación, ver figura 1.6.

$$x = ku \qquad para \quad u \geq -u_s \quad y \quad u \leq u_s$$

$$x = ku_s \qquad para \quad u > u_s$$

$$x = -ku_s \qquad para \quad u < u_s$$

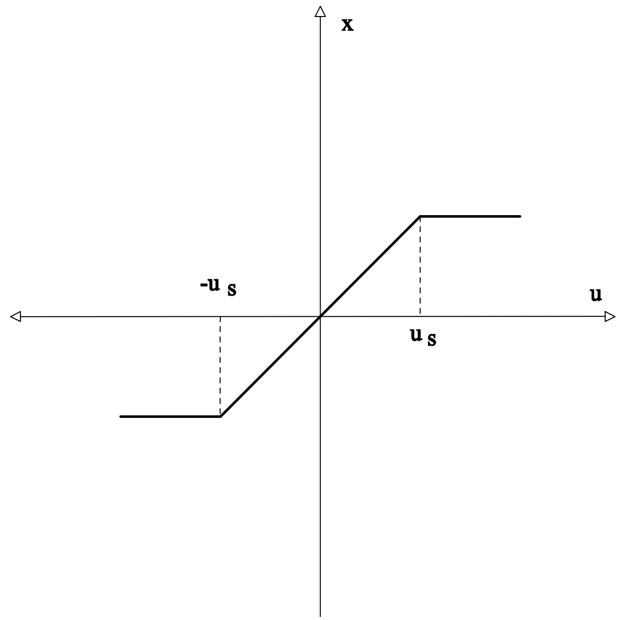


Figura 1.6

1. INTRODUCCIÓN

- **No linealidades dinámicas**

  En el **dominio continuo** (ecuación de estados):

$$\dot{x}(t) = f\left[t, x(t), u(t)\right] \quad \forall t \geq 0$$

$$t \in \Re^{+} \quad tiempo$$

$$x(t) \in \Re^{n} \quad estado$$

$$u(t) \in \Re^{m} \quad entrada$$

$$f : \Re^{+} \times \Re^{n} \times \Re^{m} \rightarrow \Re^{n}$$

- Ecuación diferencial ordinaria de orden n:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = h\left[t, y(t), \dot{y}(t), \ldots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, u(t)\right], \quad t \geq 0$$

donde,

t : parámetro de tiempo

$u(\cdot)$: función de entrada (función de control o función forzante)

$y(\cdot)$: función de salida (función de respuesta)

1. INTRODUCCIÓN

Se definen los estados,

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{aligned}\right\}$$

entonces resulta,

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= h\left[t, x_1(t), x_2(t) \ldots x_n(t), u(t)\right]. \end{aligned}\right\}$$

Definiendo: $x(\cdot) : \Re^+ \to \Re^n$, $x(t) = \left[x_1(t), x_2(t) \ldots x_n(t)\right]^T$ (**vector de estados**)

$$f : \Re^+ \times \Re^n \times \Re \to \Re^n$$

$$f(t, x, u) = \left[x_2, x_3, \ldots, x_n, h(t, x_1, \ldots x_n, u)\right]^T$$

resulta,

$$\dot{x}(t) = f\left[t, x(t), u(t)\right], \quad t \geq 0.$$

1. INTRODUCCIÓN

- **Ejemplo** (sistema masa-resorte con fricción no lineal):

$$u(t) = m\ddot{y}(t) + b(t)\dot{y}^2(t) + cy(t)$$

$$x_1 = y \qquad \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{u}{m} - \dfrac{b(t)}{m}x_2^2 - \dfrac{c}{m}x_1 = h[t,x,u] \end{cases}$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$\boxed{\dot{x} = f[t,x,u]}$$

- **Dominio discreto**

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k) \quad k = 0,1,2\ldots$$

1. INTRODUCCIÓN

- **Análisis:**

Dado: $\dot{x} = f(t, x, u)$

con *u(.)* especificada, estudiar el comportamiento de *x(.)*.

- **Síntesis:**

Dado $\dot{x} = f(t, x, u)$, y el comportamiento deseado de *x(.)*, hallar *u(.)* que alcance ese comportamiento deseado.

1. INTRODUCCIÓN

- **Clasificación de los modelos**

- *Forzado* (con entrada): $\dot{x}(t) = f\left[t, x(t), u(t)\right] \quad \forall t \geq 0$

- *No forzado* (sin entrada): $\dot{x}(t) = f\left[t, x(t)\right] \quad \forall t \geq 0$

Sin embargo el sistema forzado puede escribirse, para *u(t)* establecida:

$$\dot{x}(t) = f_u\left[t, x(t)\right] \quad \forall t \geq 0$$

lo que representa un sistema no forzado. O sea, la distinción a veces no es precisa.

- Sistema *autónomo* o invariante del tiempo: la función *f* no depende explícitamente del tiempo.

- *No autónomo* o variante del tiempo

1. INTRODUCCIÓN

- **Equilibrio**

$x_0 \in \Re^n$ es equilibrio del sistema no forzado si $f(t, x_0) = 0 \quad \forall t \geq 0$

Si x_0 es equilibrio del sistema, entonces la ecuación diferencial para condición inicial $x(t_0) = x_0$ tiene la única solución $x(t) = x_0 \quad \forall t \geq t_0$, o sea si el sistema comienza en el equilibrio, permanece en él.

El punto de equilibrio x_0 es **aislado** si existe una vecindad N de x_0 en $\Re^n$ tal que N no tiene puntos de equilibrio del sistema además de x_0.

Punto de Equilibrio = Punto singular = Punto Estacionario.

1. INTRODUCCIÓN

- **Ejemplo:** Péndulo sin fricción

$$\ell^2\ddot{\theta} + g\ell \operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta = 0}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -(g/l)\operatorname{sen} x_1 \end{pmatrix}$$

Es un sistema autónomo.

Equilibrios:

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \quad con \quad \begin{cases} x_{02} = 0 \\ \operatorname{sen} x_{01} = 0 \Rightarrow x_0 = \begin{pmatrix} n\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \end{cases}$$

básicamente $x_0 : (0,0)^T \text{ y } (0,\pi)^T$

1. INTRODUCCIÓN

Linealización de modelos no lineales

Sea $y = f(x)$

Para el punto de operación en $\overline{x}, \overline{y}$, la expansión por Taylor es:

$$y = f(x) = f(\overline{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\overline{x}} (x - \overline{x}) + \frac{1}{2!} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=\overline{x}} (x - \overline{x})^2 + \ldots$$

Si la variación $(x - \overline{x})$ es pequeña, puede escribirse

$$y = \overline{y} + k(x - \overline{x})$$

$$\overline{y} = f(\overline{x})$$

$$k = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\overline{x}}$$

1. INTRODUCCIÓN

Para el sistema: $y = f(x_1, x_2)$

cuyo punto de operación es $\bar{x}_1, \bar{x}_2,\ \bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, la expansión de Taylor:

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} (x_1 - \bar{x}_1) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} (x_2 - \bar{x}_2) \right] +$$

$$\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}\right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} (x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}\right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} (x_2 - \bar{x}_2)^2 \right] + \ldots$$

La **linealización**, válida en la vecindad del punto de operación, es

$$y - \bar{y} = k_1 (x_1 - \bar{x}_1) + k_2 (x_2 - \bar{x}_2)$$

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$k_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \qquad k_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2}$$

1. INTRODUCCIÓN

- **Ejemplo:** Linealización de un sistema de nivel de líquido, figura 1.7.

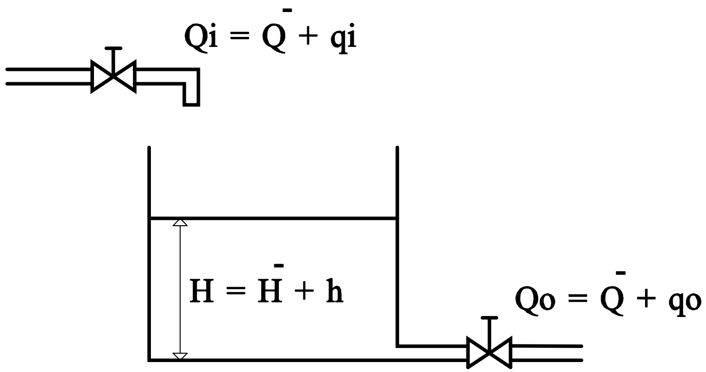


Figura 1.7

Punto de operación: $\overline{Q}, \overline{H}$

Para orificio salida: $\overline{Q} = K\sqrt{\overline{H}}$

Ante un cambio $Q_i = \overline{Q} + q_i$, cambian H, Q_o según

$$C\frac{dH}{dt} = Q_i - Q_o = Q_i - K\sqrt{H}$$

$$C: \quad Capacitancia\ del\ tanque$$

Resulta:

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = f(H, Q_i) = \frac{1}{C}Q_i - \frac{K}{C}\sqrt{H}}$$

1. INTRODUCCIÓN

Linealizando:
$$\frac{dH}{dt} = f(\overline{H},\overline{Q}) + \left.\frac{\partial f}{\partial H}\right|_{\overline{H},\overline{Q}} (H-\overline{H}) + \left.\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right|_{\overline{H},\overline{Q}} (Q_i-\overline{Q})$$

con:
$$f(\overline{H},\overline{Q}) = \frac{1}{C}\overline{Q} - \frac{K}{C}\sqrt{\overline{H}} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial H}\right|_{\overline{H},\overline{Q}} = -\frac{K}{2C}\frac{1}{\sqrt{\overline{H}}} = -\frac{\overline{Q}}{2C\overline{H}} = -\frac{1}{RC} \qquad R = 2\frac{\overline{H}}{\overline{Q}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Q_i} = \frac{1}{C}$$

Entonces resulta la ecuación linealizada:

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{RC}(H-\overline{H}) + \frac{1}{C}(Q_i-\overline{Q})}$$

O bien en términos de las variaciones:

$$\boxed{RC\frac{dh}{dt} + h = Rq_i}$$

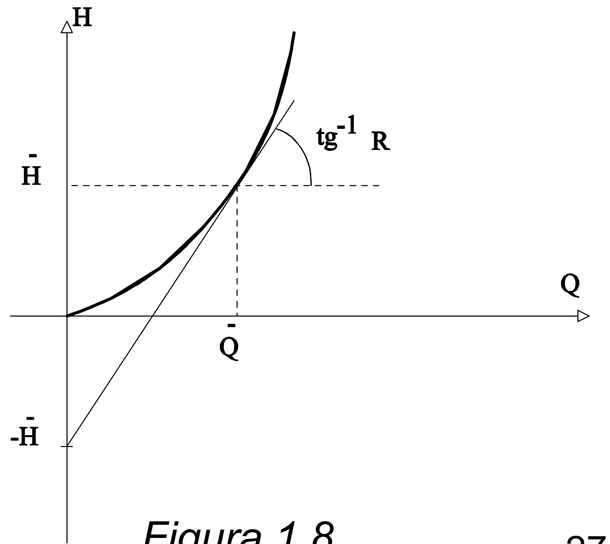


Figura 1.8

1.4 Ejercicios

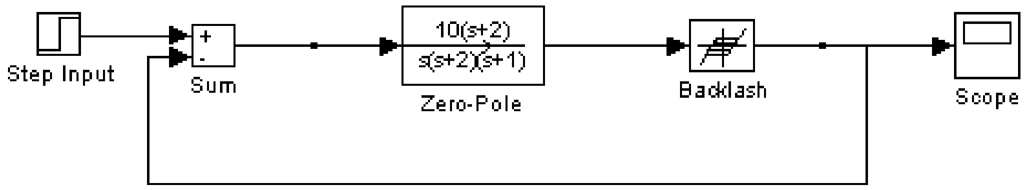
1.1 Analizar por simulación el comportamiento del sistema $\dot{v} + |v|v = u$.

1.2 Analizar por simulación el comportamiento del sistema
$\dot{x} = -x + x^2; \quad x(0) = x_0$. Determinar el valor del tiempo de escape finito.

1.3 Analizar por simulación el comportamiento amplitud-frecuencia de la ecuación de Duffing forzada.

1.4 Analizar por simulación el comportamiento de la ecuación de Van der Pol. Identificar el ciclo límite.

1.5 Programar el siguiente sistema con juego muerto



a. Comprobar la existencia de ciclos límites.
b. Analizar de qué depende la amplitud y frecuencia del ciclo límite.

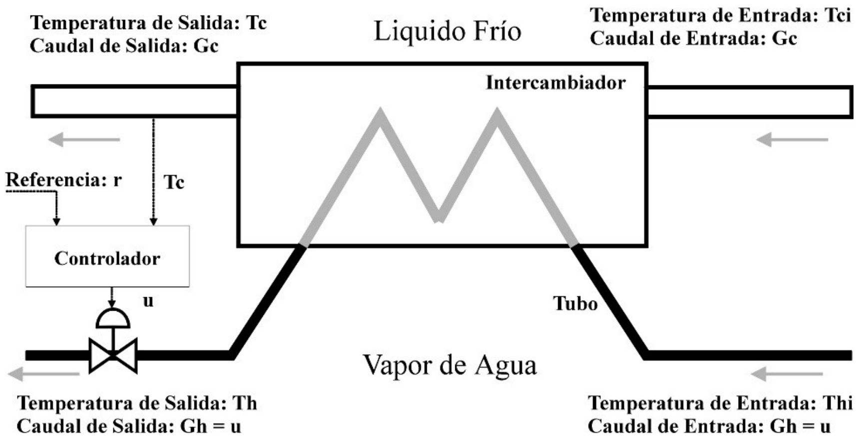
1.6 Dar un ejemplo de sistema físico no lineal y su representación matemática en función de los estados.

1.7 Para el siguiente sistema halle los puntos de equilibrio. Tomando valores de a_1, a_2, b_1, b_2 grafique algunas trayectorias. ¿Bajo qué condiciones en los parámetros, (0,0) es un equilibrio aislado?, explique.

$$\dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_1 x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_2 x_1 x_2$$

1.8 En el sistema $\ddot{x} = -x^2 + 3x$ determinar los equilibrios y linealizar el sistema alrededor de los mismos.

1.9 Considere el inercambiador de calor de la figura.



El modelo de estados con parámetros concentrados es,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Tc \\ Th \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mc^{-1}\left(Gc\left(Tci - Tc\right) + c^{-1}k\left(Th - Tc\right)\right) \\ Mh^{-1}\left(u\left(Thi - Th\right) - c^{-1}k\left(Th - Tc\right)\right) \end{pmatrix}$$

donde u es la acción de control, c es el calor específico del fluido, Mc y Mh son las masas del liquido y del vapor de agua en el intercambiador.

1. INTRODUCCIÓN

El sistema tiene un punto de equilibrio tal que,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(Gc\left(Tci - Tc0\right) + c^{-1}k\left(Th0 - Tc0\right)\right) \\ \left(u0\left(Thi - Th0\right) - c^{-1}k\left(Th0 - Tc0\right)\right) \end{pmatrix}$$

donde, Tc0, Th0, Gh0 = u0, son los valores de equilibrio de Tc, Th, Gh respectivamente.

Calcular el modelo de estados linealizado alrededor del punto de equilibrio.

1. INTRODUCCIÓN

Revisión

- Justificación del estudio de sistemas no lineales
- Comportamientos no lineales
- Modelos
- Equilibrio
- Linealización

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

2.1 Espacio vectorial

- **Definición** (axiomática): Espacio vectorial o lineal real (complejo) es un conjunto con dos operaciones:

$$+: \quad VxV \rightarrow V \quad suma$$

$$\bullet: \quad \Re xV \rightarrow V(\bullet : CxV \rightarrow V) \quad prod.\ por\ escalar$$

tal que se verifica,

$V1)\ x+y=y+x \quad \forall x,y \in V$ conmutativa

$V2)\ x+(y+z)=(x+y)+z \quad \forall x,y,z \in V$ asociativa

$V3)\ \exists\, 0_v \,/\, x+0_v=0_v+x=x \quad \forall x \in V$ elemento nulo

$V4)\ \forall x \in V, \exists -x \,/\, x+(-x)=0_v$ elemento inverso de la suma

$V5)\ \forall r_1, r_2 \in \Re\ (c_1, c_2 \in C),\ x \in V; \quad r_1.(r_2.x)=(r_1 r_2).x \quad [c_1.(c_2.x)=(c_1 c_2).x]$

$V6)\ (r_1+r_2).x=r_1.x+r_2.x$

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

$$V7)\ \forall r \in \Re \ \ (c \in C),\ x_1, x_2 \in V$$

$$r.(x_1 + x_2) = r.x_1 + r.x_2$$

$V8) \forall x \in V,\ 1.x = x$ elemento unitario

- **Ejemplos:**

➢ $\Re^n = \{n - uplas\ de\ números\ reales\}$ Espacio vectorial real

➢ $C^n = \{n - uplas\ de\ números\ complejos\}$

Espacio vectorial real, si el campo escalar es real.

Espacio vectorial complejo, si el campo escalar es complejo.

➢ $$F[a,b] = \{funciones\ \ reales\ \ definidas\ \ en\ [a,b] \in \Re\}$$
$$= \{f(\bullet) : [a,b] \to \Re\}; \quad campo = \Re$$

➢ $F^n[a,b] = \{f(\bullet) : [a,b] \to \Re^n\}$

➢ $S = \{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ *conjunto de secuencias complejas*

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Subespacio:** $M \subset V$ es subespacio del espacio vectorial V si se verifica,

$$x, y \in M \Rightarrow x + y \in M$$
$$x \in M, \alpha \in K(campo) \Rightarrow \alpha x \in M$$

o sea *M* es en sí un espacio vectorial.

- **Ejemplo:** $F_{t_0}[a,b] \subset F[a,b]$

$$F_{t_0}[a,b] = \{funciones\ x(.)\ de\ F[a,b] / x(t_0) = 0\}$$

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

2.2 Espacio vectorial normado

EN = EV + medida de longitud de los vectores.

- **Espacio vectorial normado:**
  Es un par $(X, \|.\|)$ con X espacio vectorial, $\|.\|: X \to \Re_+$ tal que

N1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$

$\|x\| = 0 \quad sii \; x = 0_x$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\| \quad \forall x \in X, \alpha \in K(campo)$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ (desigualdad triangular)

- **Nota:** $d(x, y) = \|x - y\|$ (métrica definida por la norma). **No toda métrica deriva de una norma!**

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Propiedades métricas inducidas por una norma**

$$d(\mathrm{x}+\mathrm{a},\mathrm{y}+\mathrm{a})=\|(\mathrm{x}+\mathrm{a})-(\mathrm{y}+\mathrm{a})\|=d(x,y) \quad d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|\|x-y\|=|\alpha|d(x,y)$$

- **Ejemplos:**

➢ $\left(\Re^n,\|.\|_\infty\right)$ con $\|.\|_\infty : \Re^n \to \Re_+$ definida por $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

Axiomas: N_1 y N_2 son obvios.

$$N_3 : |x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i| \quad \forall i$$

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty = \max_i |x_i + y_i| \le \max |x_i| + \max |y_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$$

➢ $\left(\Re^n,\|.\|_1\right)$ con $\|.\|_1 : \Re^n \to \Re_+$ definida por $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$

Axiomas: N_1 y N_2 son obvios.

$$N_3 : \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1 = \sum_i |x_i + y_i| \le \sum_i (|x_i| + |y_i|) = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1$$

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- $(\Re^n, \|.\|_p)$ con $\|.\|_p : \Re^n \to \Re_+$ definida por $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$, $p \in [1,\infty]$.

  Si $p = 2 \to$ norma Euclideana.

- $\left(C[a,b], \|.\|_p\right)$ funciones continuas en el cerrado [a,b] con

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

- **Convergencia:**

  Una secuencia $(x_n)_1^\infty \in (X, \|.\|)$ converge a un elemento $x_o \in X$ si $\|x_n - x_o\| \to 0$ con $n \to \infty$.

  Equivalentemente: $(x_n)_1^\infty \to x_o$

  si para cada $\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) / \|x_n - x_0\| < \varepsilon$ cuando $n \geq N(\varepsilon)$

- **Interpretaciones:**

  a) $(x_n)_1^\infty \to x_o$ *sii* $(\|x_n - x_o\|)_1^\infty \to 0.$

  b) Sea $B(x_o, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - x_o\| < \varepsilon\}$, $(x_n)_1^\infty \to x_o$ sii para cada $\varepsilon > 0$, $B(x_o, \varepsilon)$ contiene todos menos un número finito de elementos de $(x_n)_1^\infty$. x_o es pto. acumul.

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Mapeo continuo**

Dados $(X, \|.\|_x), \quad (Y, \|.\|_y), \quad f : X \to Y.$

- f es **continuo en** $x_o \in X$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_o) > 0 /$

$$\|f(x_o) - f(x)\|_y < \varepsilon \quad para \quad \|x_o - x\|_x < \delta(\varepsilon, x_o).$$

- f es **continuo** si es continuo en todo $x \in X$.

- f es **uniformemente continuo** si es continuo y $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon)$ tal que

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_y < \varepsilon \text{ para } \|x_1 - x_2\|_x < \delta(\varepsilon) .$$

- **Nota:** para $(X, \|.\|_x), \quad (Y, \|.\|_y), \quad f : X \to Y$. es continua en x_0 , entonces:

$$\forall (\mathrm{x}_\mathrm{n}) \to x_0 \Rightarrow (f(x_n)) \to f(x_0)$$

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Secuencia de Cauchy**

$(x_n)_1^\infty$ en $(X, \|.\|)$ es Cauchy si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, N(\varepsilon)$ tal que, $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ para $n, m \geq N(\varepsilon)$.

- **Proposición:** Toda secuencia convergente en un espacio vectorial normado es una secuencia de Cauchy.

Tomar $\varepsilon > 0$ y N tal que $\|x_n - x_o\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ahora,

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x_o - x_m + x_o\| \leq$$

$$\leq \|x_n - x_o\| + \|x_m - x_o\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Pero *no toda* secuencia Cauchy es convergente!

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Espacio de Banach.** Un espacio lineal normado $(X, \|.\|)$ es **completo** o Banach si toda secuencia de Cauchy en X converge.

- **Ejemplo:**

$(\Re^n, \|.\|_\infty)$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ cumple N1),N2),N3)

N3) $\|x+y\|_\infty = \max\limits_i |x_i + y_i| \le \max(|x_i| + |y_i|) \le \max\limits_i |x_i| + \max\limits_i |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$\Rightarrow (\Re^n, \|.\|_\infty)$ es espacio normado. Además es Banach pues,

$$si\ (\mathrm{x}_\mathrm{n})\ Cauchy, \|x_n - x_m\|_\infty \to 0, \max |x_n^i - x_m^i| \to 0, (x_n^i) \to x_0^i \Rightarrow (x_n) \to (x_0)$$

- **Ejemplo:** $(\Re^n, \|.\|_1)$, $\|.\|_1 : \Re^n \to \Re$, $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$

N3) $\|x+y\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i + y_i| \le \sum (|x_i| + |y_i|) = \sum |x_i| + \sum |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

$\Rightarrow (\Re^n, \|.\|_1)$ es espacio normado. Además es Banach.

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Ejemplo:** $\left(\Re^n, \|.\|_p\right)$, $\|.\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{p} |x_i|^p \right\}^{1/p}$ $\quad 1 \le p < \infty.$

  Es espacio normado. Además es Banach.

- **Ejemplo:** $C[a,b] = \{fc.\ continuas\ reales\ en\ [a,b]\}.$

  $$\|.\|_c : \quad si\ x(.) \in C[a,b], \quad \|x(.)\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

N3) $\|x(.)+y(.)\|_c = \underset{t}{máx}|x(t)+y(t)| \le \underset{t}{máx}\left(|x(t)|+|y(t)|\right)$

$$\le \underset{t}{máx}|x(t)| + \underset{t}{máx}|y(t)| = \|x(.)\|_c + \|y(.)\|_c$$

$\left(C[a,b], \|.\|_c\right)$ es un espacio normado. $\|.\|_c$ es la norma de **convergencia uniforme**.

$$[x_n(.)] \xrightarrow{\|.\|_c} x_o(.) \quad sii \quad [x_n(t)] \xrightarrow{unif} x_o(t)$$

$$\|x_n(.) - x_o(.)\|_c = \text{máx}|x_n(t) - x_o(t)| \to 0 \Rightarrow \text{máx}|x_n(t) - x_o(t)| < \varepsilon\ si\ n > N(\varepsilon)$$

$$o\ sea\ \forall \varepsilon, \exists N(\varepsilon) / |x_n(t) - x_o(t)| < \varepsilon\ si\ n > N(\varepsilon) \quad \forall t \in [a,b].$$

Además, es Banach.

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Ejemplo:** $C^n[a,b]=\{x(t):[a,b]\to\Re^n\}$

$\|x(.)\|_c = \underset{t\in[a,b]}{máx}\|x(t)\|$ con $\|\cdot\|$ alguna norma en $\Re^n$.

N3) $\|x(t)+y(t)\|_c = \underset{t}{máx}\|x(t)+y(t)\| \le \underset{t}{máx}(\|x(t)\|+\|y(t)\|)$

$$\le \underset{t}{máx}\|x(t)\| + \underset{t}{máx}\|y(t)\| = \|x(.)\|_c + \|y(.)\|_c$$

$\Rightarrow \left(C^n[a,b],\|.\|_c\right)$ es espacio normado. Además es Banach.

- **Propiedades especiales de $\Re^n$ y C^n**

- **Normas equivalentes**. Sean $\|.\|_\alpha$ y $\|.\|_\beta$ dos normas en $\Re^n$. Luego $\exists$ constantes positivas k_1, k_2 tal que,

$k_1\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le k_2\|x\|_\alpha \quad \forall x\in\Re^n$, o sea $\|.\|_\alpha, \|.\|_\beta$ son **equivalentes**.

- **Ejemplo:** $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Consecuencias:**

a) Sea $(x_n)_1^{\infty} \in \Re^n$, $si\ (x_n)$ converge en $\|.\|_\alpha$:

$$\|x_n - x_0\|_\alpha \to 0$$

también converge en otra norma $\|.\|_\beta$:

$$\|x_n - x_0\|_\beta \leq k\|x_n - x_0\|_\alpha \Rightarrow \|x_n - x_0\|_\beta \to 0.$$

O sea, en $\Re^n$ **la convergencia es independiente de la norma**.

b) $\|x_n - x_0\|_\infty \to 0\ sii\ \left(x_n^{(i)}\right) \to x_o^{(i)}$

$$\Rightarrow \|x_n - x_o\|_{cq\ \ 'norma} \to 0\ sii\ (x_n^i) \to x_o^{(i)}$$

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

c) Sea $\mathbf{x}(t): \Re \to \Re^n$. $\mathbf{x}(t)$ es una función continua de $(\Re, |.|)$ en $(\Re^n, \|.\|)$ sii cada función componente $x_i\ (.)$ es continua en $\Re$.

Prueba: $\mathbf{x}(t)$ es continua en t si $\|\mathbf{x}(t_n) - \mathbf{x}(t)\| \to 0$ con $(t_n) \to t$.

Como esto se verifica sii $\left|x^{(i)}(t_n) - x^{(i)}(t)\right| \to 0$, queda demostrado.

d) La **continuidad en** $\Re^n$ **no depende de la norma.**

2.3 Espacios de Producto Interno

- **Espacio de Producto Interno**. Es un espacio vectorial X con campo $K(\Re\, ó\, C)$ y una función $<.,.>$: $X \times X \to K$ tal que,

1) $<x, y> = <y, x>\ si\ K = \Re \quad \forall x, y \in X$

   $<x, y> = \overline{<y, x>}\ si\ K = C$

2) $<x, y+z> = <x, y> + <x, z> \quad \forall x, y, z \in X$

3) $<x, \alpha\, y> = \alpha <x, y> \quad \alpha \in K$

4) $<x, x> \geq 0$

   $<x, x> = 0 \quad sii\ x = 0_x$

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Teorema:** Sea X un espacio de producto interno. Se define $\|x\| = <x,x>^{1/2}$. Entonces $\|.\|$ es una norma sobre X, $(X, \|.\|)$ es un espacio normado.

  Prueba: se ve que $\|x\| = <x,x>^{1/2}$ cumple axiomas de norma. Para N3) se requiere la desigualdad de Schwartz: $|<x,y>| \leq \|x\|\|y\|$. La igualdad se verifica sólo si x, y son linealmente dependientes.

- **Espacio de Hilbert:** Espacio de producto interno que es completo en el sentido de la norma inducida por el producto interno.

- **Ejemplo:** $\left(\Re^n, <.,.>\right) con <x,y> = \sum_1^n x_i y_i$.

  Es un espacio de Hilbert. La norma correspondiente a este producto interno es

  $\|x\|_2 = \left\{ \sum_1^n x_i^2 \right\}^{1/2}$ (Norma Euclideana).

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Ejemplo:** $\left(C^n[a,b], <.,.>_c\right)$

$$< \mathbf{x}(.),\mathbf{y}(.) >_c = \int_a^b < \mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t) >_n dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n x_i(t) y_i(t) dt =$$

$$= \sum_1^n \int_a^b x_i(t) y_i(t) dt$$

No es Hilbert. Su completación es $L_2^n\left[a,b\right]$.

- **Proposición:** Sea $\left(X,\|.\|\right)$ un espacio lineal normado. Entonces la función norma $\|.\|: x \to \Re$ es uniformemente continua en X.

Prueba: Tomar $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$

$$\|x-y\| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x-y\| < \varepsilon \#$$

- **Corolario:**

  Sea $(X,\|.\|)$, $(x_n)\in X$, $(x_n)\to x_o \Rightarrow (\|x_n\|)\to\|x_o\|$.

- **Proposición:** Sea $(X,<.,.>)$. Para cada $y\in X$ la función $x\to<x,y>$ es uniformemente continua.

  Prueba: $|<x_1,y>-<x_2,y>|=|<x_1-x_2,y>|\leq\|x_1-x_2\|\|y\|\leq\delta\|y\|=\varepsilon\#$

- **Ortogonalidad:**

  $x\perp y:$ $x\in X$ *es* ***ortogonal*** *a* $y\in X$ *si* $<x,y>=0$.

  Dados $A,B\subset X$ *(subconjuntos de X)*

  $$x\perp A \quad si \quad x\perp a \quad \forall a\in A$$
  $$A\perp B \quad si \quad a\perp b \quad \forall a\in A, b\in B$$

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

2.4 Norma inducida de una matriz

$$C^{nxn} = \{matrices\ n \times n\ de\ números\ complejos\}$$
$$R^{nxn} = \{matrices\ n \times n\ de\ números\ reales\}$$

son espacios vectoriales de dimensión finita.

$A \in C^{nxn}$ define un mapeo lineal $\alpha: \quad C^n \to C^n \qquad \alpha(x) = Ax, \quad \forall x \in C^n$

- A la inversa, todo mapeo lineal $\beta : C^n \to C^n$ puede asociarse con una matriz $B \in C^{nxn}$

$$B = \left[b_1 \middle| b_2 \middle| \ldots \middle| b_n \right]$$
$$con\ b_i = \beta\ (e_i).$$

$$y = \mathbf{b_1} x_1 + \mathbf{b_2} x_2 + \ldots + \mathbf{b_n} x_n = \beta(e_1) x_1 + \ldots + \beta(e_n) x_n = \beta(x)$$

$\Rightarrow \exists$ **correspondencia biunívoca** entre mapeos lineales $C^n \to C^n$ y matrices en C^{nxn}

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Norma inducida** en C^{nxn}

Sea $\|.\|$ una norma en C^n, $A \in C^{nxn}$

$$\|A\|_i = \sup_{x \neq 0,\, x \in C^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

es la norma inducida de A por la norma $\|.\|$, $\|.\| : C^n \rightarrow \Re_+$

$$\|.\|_i : C^{nxn} \rightarrow \Re_+$$

- **Interpretación**

a) Ganancia del operador A.

b) Máxima distorsión de bola unitaria (Fig. 2.1).

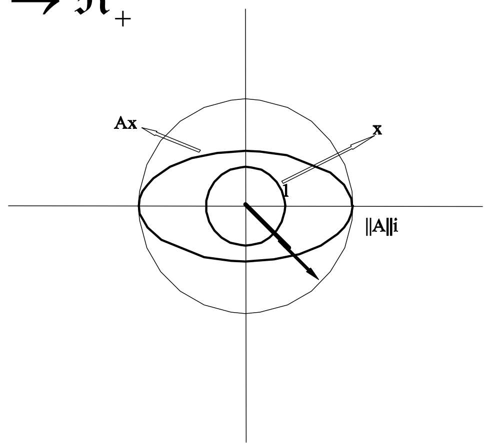


Figura 2.1

- **Lema:** $\|.\|_i$ es una norma.

N3) $\|A+B\|_i = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \sup \|Ax+Bx\|$

$\leq \sup \left[\|Ax\|+\|Bx\|\right] \leq \sup \|Ax\| + \sup \|Bx\| = \|A\|_i + \|B\|_i$

- **Observaciones:**

a) A cada norma en C^n le corresponde una norma inducida en C^{nxn}. La inversa no es válida.

Ejemplo: Sea $\|.\|_s : C^{nxn} \rightarrow [0,\infty]$ definida por $\|A\|_s = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$, esto es una norma sobre C^{nxn}. Sin embargo no existe norma en C^n tal que $\|\cdot\|_s$ sea inducida por ella.

b) Dos normas en C^{nxn} (inducidas o no) son equivalentes.

- **Lema (Propiedad de normas inducidas).**

Sea $\|\cdot\|_i$ una norma inducida en C^{nxn} por $\|\cdot\|$ en C^n .

Entonces, $\|AB\|_i \leq \|A\|_i \|B\|_i \quad \forall A, B \in C^{nxn}$ (**submultiplicativa**).

Prueba:

$$\|AB\|_i = \sup_{\|x\|=1} \|ABx\|$$

$$\|A\|_i = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\|_i \|x\|$$

$$\|ABx\| \leq \|A\|_i \|Bx\| \leq \|A\|_i \|B\|_i \|x\|$$

$$\|AB\|_i = \sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A\|_i \|B\|_i \|x\| = \|A\|_i \|B\|_i$$

$$\Rightarrow \|AB\|_i \leq \|A\|_i \|B\|_i$$

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

Norma en C^n

$$\|x\|_\infty = \underset{i}{máx}\, |x_i|$$

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_i |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

Norma inducida en C^{nxn}

$$\|A\|_{i\infty} = \underset{i}{máx} \sum_j |a_{ij}| \quad (suma\ fila)$$

$$\|A\|_{i1} = \underset{j}{máx} \sum_i |a_{ij}| \quad (suma\ \ columna)$$

$$\|A\|_{i2} = (\lambda_{máx}\ \ A^* A)^{1/2} \quad (autov.\ \ máx.)$$

* conjugada transpuesta

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

2.5 Medidas de Matrices

- **Definición:** Sea $\|.\|$ una norma inducida en C^{nxn}. La correspondiente medida de $A \in C^{nxn}$ es una función $\mu_i : C^{nxn} \to \Re$

$$\mu_i(A) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\|I + A\varepsilon\|_i - 1}{\varepsilon}$$

Se **interpreta** como la derivada direccional de la función norma $\|.\|$ en I en la dirección A.

- **Teorema**. Dada $\|.\|_i$ en C^{nxn}, la medida $\mu_i(.)$ tiene las siguientes **propiedades**.

1) Para cada $A \in C^{nxn}$, el límite existe y está bien definido.

2) $-\|A\|_i \leq -\mu_i(-A) \leq \mu_i(A) \leq \|A\|_i, \quad \forall A \in C^{nxn}$

3) $\mu_i(\alpha A) = \alpha \mu_i(A) \quad \forall \alpha \geq 0, \quad \forall A \in C^{nxn}$

4) $\text{máx}[\mu_i(A) - \mu_i(-B), -\mu_i(-A) + \mu_i(B)] \leq \mu_i(A+B) \leq \mu_i(A) + \mu_i(B).$

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

5) $\mu_i(.)$ es una función convexa en C^{nxn} :

$$\mu_i[\alpha A + (1-\alpha)B] \leq \alpha\mu_i(A) + (1-\alpha)\mu_i(B), \quad \forall \alpha \in [0,1], \quad \forall A, B \in C^{nxn}$$

6) $-\mu_i(-A) \leq R_e\lambda \leq \mu_i(A), \quad \lambda \textit{ autovalor de } A.$

Observaciones:

- La medida $\mu_i(A)$ puede tomar valores (+) o (-).
- Tanto $\mu_i(.)$ como $\|.\|_i$ son funciones convexas.
- $\mu_i(.)$es sensible al signo: En general $\mu_i(-A) \neq \mu_i(A)$ mientras la norma verifica $\|A\|_i = \|-A\|_i$.
- Por estas propiedades la medida μ_i es apta para obtener cotas “ajustadas” en las soluciones de las ecuaciones diferenciales.
- Podría definirse μ a partir de una norma no inducida $\|.\| \; en \; C^{nxn}$. Sin embargo resultan útiles las vistas, a los efectos de estimar soluciones de ecuaciones diferenciales.

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

Norma en C^n

$$\|x\|_\infty = \underset{i}{m\acute{a}x}|x_i|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

Medida en C^{nxn}

$$u_{i\infty}(A) = \underset{i}{m\acute{a}x.}\left\{ a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}$$

$$u_{i1}(A) = \underset{j}{m\acute{a}x}\left\{ a_{jj} + \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right\}$$

$$u_{i2}(A) = \left(\lambda_{m\acute{a}x}\left[\left(A^* + A\right)\right]\right)/2$$

$*$ conj. transpuesta

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Ejemplo:** $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\mu_{i1}(A) = -1 \quad \mu_{i1}(-A) = 4 \qquad A + A^* = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad (-A)^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{i2}(A) = -2 \quad \mu_{i2}(-A) = 3 \qquad (\lambda + 4)(\lambda + 6) = 0; \quad \lambda_1 = -4 \ \lambda_2 = -6$$

$$\mu_{i\infty}(A) = -1 \quad u_{i\infty}(-A) = 4 \qquad -A^+(-A)^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

Usando la propiedad 6): $-\mu_{\mathbf{i}}(-A) \le R_e\lambda \le \mu_i(A)$

$$-4 \le -\frac{5}{2} \le -1 \quad (\mu_{i1}, \mu_{i\infty})$$

$$-3 \le \frac{5}{2} \le -2 \qquad (\mu_{i2})$$

- La norma inducida 2 da mejores cotas para $R_e(\lambda)$.
- Para estimar el intervalo que contiene las partes reales, podría calcularse diversas medidas y luego intersectar los intervalos, ya que 6) vale para todas las medidas.

2.6 Teorema del mapeo de contracción (del punto fijo de Banach)

- **Contracciones Globales**
- **Teorema (Mapeo de Contracción Global).** Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach

y $T: X \rightarrow X$. Suponga que existe una constante fija $\rho < 1$ tal que

$$\|Tx - Ty\| \leq \rho \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$$

Entonces existe exactamente un $x^* \in X$ tal que $Tx^* = x^*$ (*punto fijo*). Para cada

valor inicial $x_o \in X$ la secuencia $\{x_n\}$ *en* X definida como $x_{n+1} = Tx_n$ converge a x^*.

Además,

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho} \|Tx_o - x_o\|$$

T se denomina **contracción**.

- **Ejemplo:**

  $f : \Re \rightarrow \Re$ continuamente diferenciable con $\sup\limits_{x \in \Re} |f'(x)| = \rho < 1$.

  Por el teorema del valor medio:

  $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$ para un $z \in (x, y)$

  y cumple $|f(x) - f(y)| < \rho |x - y| \Rightarrow f$ es una contracción en $\Re$.

- Por lo tanto $\exists$ un único $x^* \in \Re$ tal que $f(x^*) = x^*$.

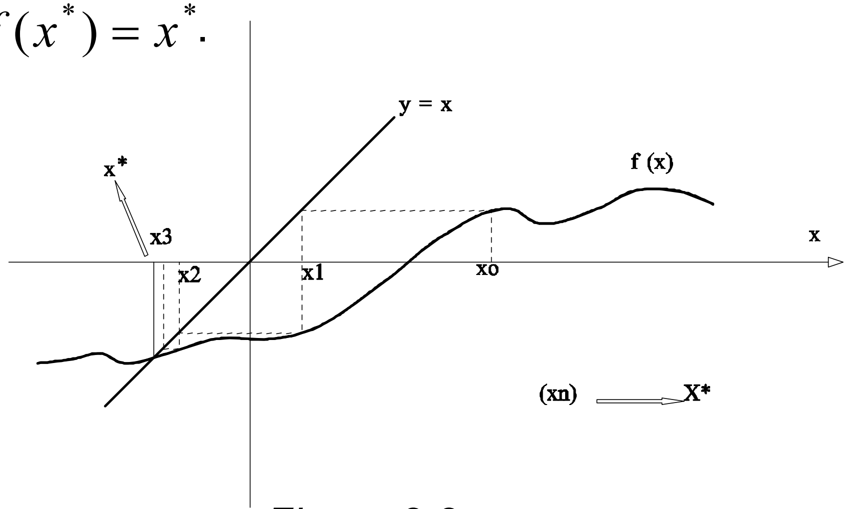


Figura 2.2

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Contracciones locales**
- **Teorema.** Sea $(X, \|.\|)$ Banach, $M \subset X$, $T : M \to X$, $\rho < 1$, $\|T_x - T_y\| \leq \rho \|x - y\| \quad \forall x, y \in M$ y $\exists x_o \in M$ tal que

$$B = \left\{ x \in X : \|x - x_o\| \leq \frac{\|Tx_o - x_o\|}{1-\rho} \right\} \subset M$$

Entonces T tiene exactamente un punto fijo x^* en M $(Tx^* = x^*)$. La secuencia (x_n)

con $x_{n+1} = Tx_n \to x^*$.

Además:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho} \|Tx_o - x_o\| \quad \forall n \geq 0$$

- **Ejemplo:** $X = \Re,\ f : \Re \to \Re$ continuamente diferenciable con $\sup\limits_{x \in [-1,1]} \left| f'(x) \right| = \rho < 1$

y suponga existe un $x_o \in [-1,1]$ tal que

$$B = \left[x_o - \frac{f(x_o) - x_o}{1-\rho},\ x_o + \frac{f(x_o) - x_o}{1-\rho} \right] \subset [-1,1]$$

Entonces existe un único punto fijo $x^* \in [-1,1]$ tal que $f(x^*) = x^*$, que es límite de la secuencia $\{x_o, f(x_o), f[f(x_o)]\ldots\}$

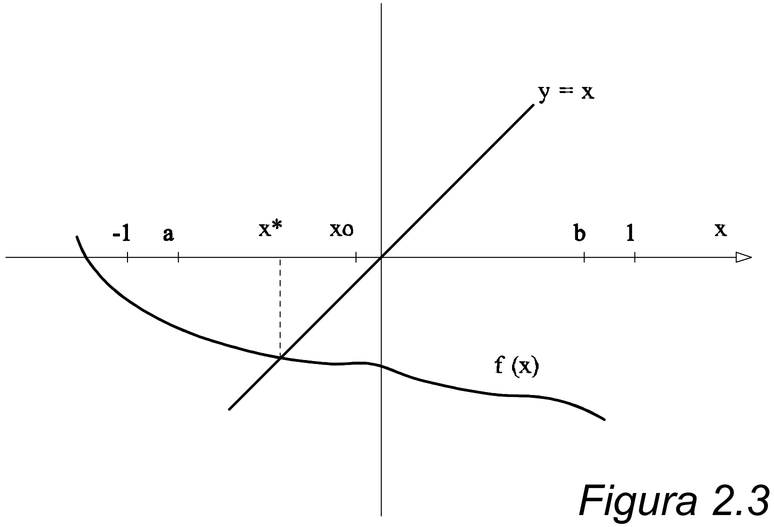


Figura 2.3

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

- **Teorema.** Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach.

  Sea B un entorno cerrado en X: $B = \{x: \|x - z\| \leq r\}$ para un $z \in X, r \geq 0$.

  Sea $T: X \to X$ un operador que satisface:

  (1) $\forall x \in B, \quad Tx \in B$ (T mapea B en B)

  (2) $\exists \rho < 1$ tal que $\|Tx - Ty\| \leq \rho \|x - y\| \quad \forall x, y \in B$.

  Bajo estas condiciones, T tiene exactamente un punto fijo x^* en B.

  Para cada $x_0 \in B$, (x_n) con $x_{n+1} = Tx_n$, converge a x^*.

  Además, $\|x_n - x^*\| \leq \dfrac{\rho^n}{1-\rho}\|Tx_o - x_o\| \quad \forall n \geq 0$

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

2.7 Ejercicios

2.1 Verificar N_3 de los axiomas de normas, para $(\Re^n, \|.\|_p)$. Nota: usar la desigualdad de Minkowski: .

$$(\sum_i |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_i |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

2.2 Probar que para $f : X \to Y$ continua en x_0 se verifica que para toda secuencia $(x_n) \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.

2.3 Probar que el espacio $(\Re^n, \|.\|_\infty)$ es Banach.

2.4 Probar que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{1/2} \|x\|_\infty$ (normas equivalentes en $\Re^n$).

2.5 Probar que $(C[a,b], \|.\|_c)$ es Banach. Nota: probar que si $(x_n) \xrightarrow{\|.\|_c} x_o$ siendo

$(x_n) \in C[a,b]$ entonces $x_o \in C[a,b]$.

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

2.6 Verificar que $$\|A\|_i = \sup_{x\neq 0,\, x\in C^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

2.7 Verificar que $\|A\|_s = \max_{ij} |a_{ij}|$ no es una norma inducida.

2.8 Para las siguientes matrices calcular

$$\|A\|_{i1}, \|A\|_{i2}, \|A\|_{i\infty};\ \mu_{ii}(A),\ \mu_{i2}(A),\ \mu_{i\infty}(A), \mu_{i1}(-A),\ \mu_{i2}(-A),\ \mu_{i\infty}(-A).$$

$$a)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Encuentre el intervalo real que contenga las partes reales de los autovalores, como mejor estima.

2.9 Mostrar gráficamente que la función $f(x)$ de Fig. 2.4 no cumple el teorema de contracción local en la región A.

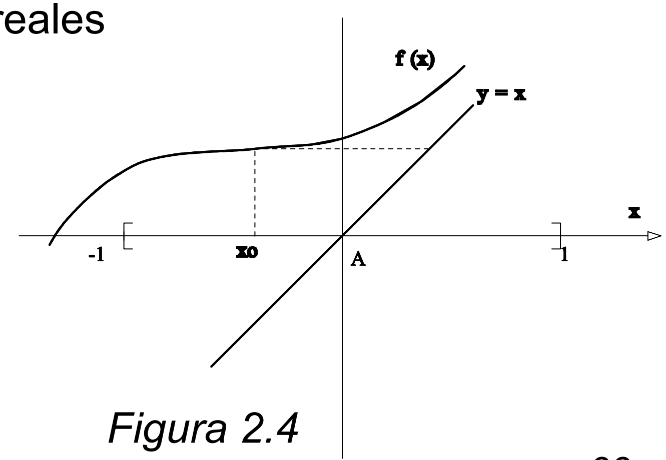


Figura 2.4

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

Revisión

- Espacio vectorial
- Espacio vectorial normado
  - Convergencia
  - Continuidad
  - Secuencia de Cauchy (no implica convergente)

- Espacio de Banach (normado completo, toda secuencia de Cauchy converge en el mismo espacio)
- Espacio de producto interno
- Espacio de Hilbert (producto interno completo)
- Norma inducida de una matriz
- Teorema de contracción