

## Tema 3

# Métodos de estimación paramétricos y selección del modelo

### 3.1 Introducción

En este tema nos dedicaremos al estudio de los métodos de estimación de parámetros en el dominio temporal y frecuencial. Estos se basan en el supuesto de que el sistema pueda representarse por una parte determinista o causal y una parte estocástica que engloba las dinámicas no modelizables del sistema. En general se asume que la parte estocástica puede ser representada por una variable Gausiana.

Los métodos de estimación en el dominio temporal que se estudian, tienen la particularidad de que a partir de ellos se estiman modelos discretos (dominio-Z). Consecuentemente, en el caso de desearse un modelo continuo (dominio-S o ecuación diferencial) del sistema será necesario convertir el modelo discreto a continuo. Ello no presenta problemas cuando el sistema presenta un mantenedor de orden cero. Contrariamente, utilizando técnicas frecuenciales podremos estimar modelos tanto continuos como discretos. La comparación entre ambos modelos se muestra en la siguiente tabla.

**Tabla 3.1.** Comparación de modelos de sistemas

<i><b>Métodos frecuenciales</b></i>	<i><b>Métodos temporales</b></i>
Función de transferencia en el dominio $s$ y $z$	Función de transferencia en el dominio $z$
Ruido aditivo en la entrada y en la salida	Ruido aditivo al modelo
Modelo no paramétrico del ruido	Modelo paramétrico del ruido
Retardo fraccional	Retardo es un múltiplo entero de $T_s$
Sistemas SISO	Sistemas MISO

Los métodos de estimación frecuenciales tienen diferentes ventajas y desventajas con respecto a los métodos temporales. Los ingenieros muchas veces prefieren la descripción en el dominio frecuencial por las siguientes razones [Kollár94]:

- Mientras que la solución de una ecuación diferencial necesita la convolución en el dominio del tiempo, esta convolución se sustituye por una simple multiplicación en el dominio de la frecuencia.
- A menudo es posible descomponer la señal / ruido en diferentes bandas frecuenciales.
- Con la selección adecuada de los coeficientes de Fourier en una banda de frecuencias adecuada, es posible reducir el número de datos.
- Es posible obtener un modelo continuo a partir de los datos.
- Pequeñas no linealidades pueden ser fácilmente mensurables y detectables en el dominio de la frecuencia.

Por otro lado, trabajar en el dominio del tiempo tiene ventajas [Ljung91]:

- Es más natural trabajar con señales en el dominio temporal.
- Son métodos menos sensibles al tipo de señal de excitación, los técnicas frecuenciales presentan problemas cuando estas no son periódicas.

- Ciertas no linealidades son más fáciles de detectar, como es el caso de las saturaciones.
- Pueden ser utilizados de forma recursiva.
- Permiten medir directamente los transitorios del sistema.

En general, la base de todos los métodos de estimación consiste en minimizar unos residuos  $\mathbf{e}(t)$ , definiendo  $\mathbf{e}(t)$  como la diferencia entre el valor deseado de la salida,  $y(t)$ , y el valor de predicción,  $\hat{y}(t)$ , que es función del modelo estimado. La minimización se realiza generalmente utilizando un criterio cuadrático. La metodología de cálculo a utilizar dependerá de la relación entre  $\mathbf{e}(t)$  y los parámetros que se quieren estimar. Cuando la relación sea lineal se podrá utilizar un método de cálculo analítico, mientras que en el caso de una relación no lineal, el método de cálculo a utilizar será iterativo.

Se debe decir que los modelos estimados, tanto en el dominio temporal como frecuencial, serán modelos con dinámicas lineales. En la tabla 3.1 se muestran más claramente estos conceptos.

**Tabla 3.2.** Clarificación del término linealidad.

DINÁMICA	PROCESO	ERROR	
		lineal... ... respecto al coeficiente $\hat{a}$	no-lineal ...
Lineal	$y' + ay = u$	$\mathbf{e} = y' + \hat{a}y - u$	$\mathbf{e} = y - w$ $w' + \hat{a}w = u$
No-lineal	$y' + ay^3 = u$	$\mathbf{e} = y' + \hat{a}y^3 - u$	$\mathbf{e} = y - w$ $w' + \hat{a}w^3 = u$

## 3.2 Los modelos y los métodos de estimación paramétricos discretos

### 3.2.1 Estructura de los modelos lineales discretos

Los métodos de estimación paramétricos están muy relacionados con el modelo utilizado. La forma general de representar la estructura de un modelo discreto es, según [Ljung87]:

$$y(t) = G(q^{-1})u(t) + H(q^{-1})e(t) \quad (3.1)$$

Los errores de modelización se incluyen, a diferencia de otros métodos de estimación, en el término  $e(t)$ . A este término se le asocia una serie de variables Random independientes uniformemente distribuida de media nula (*ruido blanco*).  $G(q^{-1})$  i  $H(q^{-1})$  son filtros de orden finito que modelizan la parte determinista y la parte estocástica respectivamente.

Una característica diferencial de las distintas estructuras derivadas de la ecuación general (3.1), es la forma de modelizar la parte estocástica o ruido. Por este motivo los modelos se han agrupado en dos bloques:

**- Modelos en que  $H(q^{-1})=0$**

**a) Modelos de media ajustada, MA:**

$$y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + e(t) \quad (3.2)$$

donde:  $G(q^{-1}) = B(q^{-1})$ ,  $nk$  representa el retardo puro del proceso y  $B(q^{-1})$  es un polinomio de grado  $nb$  que tiene la forma:

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \quad (3.3)$$

Se les denomina también modelos de respuesta impulso finito (FIR). Tienen el inconveniente que, para representar el comportamiento de un proceso, es necesario gran número de coeficientes.

**b) Modelos de error de salida, OE:**

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t - nk) + e(t) \quad (3.4)$$

en este caso:  $G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} q^{-nk}$ , y  $F(q^{-1})$  es un polinomio autoregresivo de orden  $nf$ :

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{nf} q^{-nf} \quad (3.5)$$

**- Modelos en que  $H(q^{-1}) \neq 0$**

**c) Modelos autoregresivos con variables exógenas, ARX:**

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + e(t) \quad (3.6)$$

en este modelo se considera que la parte determinista y la parte estocástica tienen el mismo denominador:

$$G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-nk}$$

$$H(q^{-1}) = \frac{1}{A(q^{-1})} \quad (3.7)$$

El polinomio  $A(q^{-1})$  es el polinomio autoregresivo de orden  $na$ :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na} \quad (3.8)$$

**d) Modelos autoregresivos de media móvil y variables exógenas, ARMAX:**

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + C(q^{-1})e(t) \quad (3.9)$$

Al igual que en c),  $G(q^{-1})$  i  $H(q^{-1})$ , tienen el mismo denominador:

$$G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-nk}$$

$$H(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$
(3.10)

y  $C(q^{-1})$  es un polinomio parecido a (3.8) de orden  $nc$ .

e) Otros modelos del termino error son:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-nk}B(q^{-1})u(t) + \frac{1}{D(q^{-1})}e(t)$$
(3.11)

siendo  $D(q^{-1})$  un polinomio autoregresivo de orden  $nd$ . A este modelo se le denomina ARARX.

Un modelo más general es la estructura ARARMAX:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-nk}B(q^{-1})u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t)$$
(3.12)

f) Modelo Box-Jenkins, BJ:

$$y(t) = q^{-nk} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t)$$
(3.13)

Una propiedad particular de esta estructura es que  $G(q^{-1})$  y  $H(q^{-1})$  no tienen parámetros comunes.

### **- Resumen de los distintos tipos de modelos**

Toda esta familia de modelos se puede representar por el modelo general (3.14) esquematizado en la figura 3.1.

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-nk} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t)$$
(3.14)

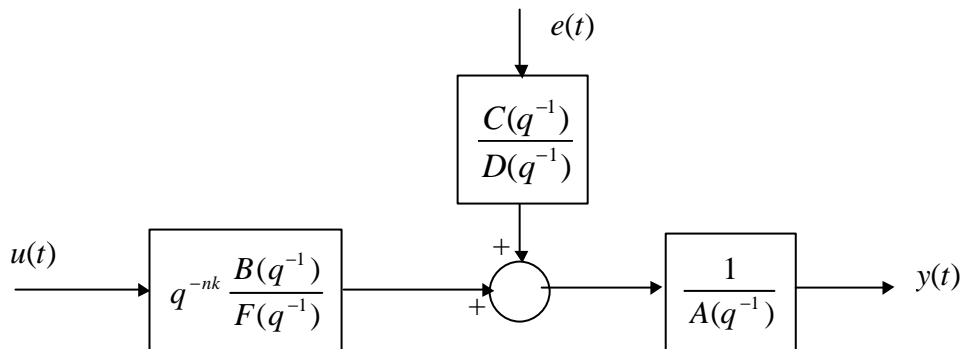


Figura 3.1. Esquema de bloques del modelo general (3.14)

Esta estructura es muy general, pero es útil para elaborar algoritmos ya que sus resultados cubren todos los casos especiales. La relación entre modelos y los casos particulares se exponen en la tabla 3.3.

**Tabla 3.3.** Relación entre el modelo general y los casos especiales.

Polinomios utilizados de (3.14)	Nombre de la estructura del modelo
B	FIR
AB	ARX
ABC	ARMAX
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE
BFCD	BJ

### 3.2.2 Objetivos de los métodos de estimación paramétricos

Los métodos de estimación paramétricos tienen por objetivo estimar los parámetros de los polinomios:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y/o  $F$  según el modelo considerado, de forma que el error de predicción sea mínimo.

En el caso de la ecuación general (3.14) el error de modelización o residuos se determina a partir de la ecuación (3.15).

$$\mathbf{e}(t) = y(t) - \hat{y}(t) = \frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left( A(q^{-1})y(t) - q^{-nk} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) \right) \quad (3.15)$$

La ecuación de los residuos (3.15) se puede evaluar considerando dos términos:

- **Modelización de la parte determinista.** Se observa que hay una relación lineal entre el error de predicción y los coeficientes de los polinomios  $A$  y  $B$ , mientras que respecto a los coeficientes del polinomio  $F$  la relación es no lineal. Este hecho comporta que, para estimar los parámetros del polinomio  $F$ , se debe utilizar un método de cálculo iterativo, mientras que si solo es necesario estimar los parámetros de los polinomios  $A$  y  $B$ , los métodos de cálculo a utilizar son analíticos y, por tanto, más sencillos.
- **Modelización de la parte estocástica.** Los errores de modelización  $\mathbf{e}(t)$  no son conocidos y la relación que hay entre los coeficientes y los residuos no es lineal. Consecuentemente, se deben estimar los valores de  $\mathbf{e}(t)$  al mismo tiempo que los valores de los parámetros de los polinomios. En este caso, por lo tanto, los métodos de cálculo serán iterativos.

## 3.3 Método de estimación por mínimos cuadrados (LS)

### 3.3.1 Descripción del método de mínimos cuadrados

El método LS estima modelos de estructura ARX (3.6). Estos modelos se pueden representar por la ecuación:

$$y(t) = \mathbf{j}^T(t) \mathbf{q} + v(t) \quad (3.16)$$

siendo:  $y(t)$  es el valor de la salida en el instante  $t$ ,  $\mathbf{j}(t)$  es el vector regresor o información, y  $\mathbf{q}$  es el vector de parámetros.

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(t) &= [-y(t-1) \cdots -y(t-na) \ u(t-nk-1) \cdots u(t-nb-nk)]^T \\ \mathbf{q} &= [a_1 \cdots a_{na} \ b_1 \cdots b_{nb}] \end{aligned} \quad (3.17)$$

El problema a resolver consiste en estimar el vector de parámetros,  $\hat{\theta}$ , partiendo de las  $N$  observaciones realizadas:  $y(1), \mathbf{j}(1), \dots, y(N), \mathbf{j}(N)$ .

De la ecuación (3.16) se deducen un conjunto de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} y(1) &= \mathbf{j}^T(1) \hat{\mathbf{q}} \\ y(2) &= \mathbf{j}^T(2) \hat{\mathbf{q}} \\ &\vdots \\ y(N) &= \mathbf{j}^T(N) \hat{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

que pueden ser escritas en forma matricial según:

$$Y = \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}} \quad (3.19)$$

siendo:  $Y$  un vector de dimensión  $N$ ,  $Y = [y(1) y(2) \cdots y(N)]^T$ ; y  $\mathbf{F}$  una matriz de dimensión  $dN$ ,  $\mathbf{F} = [\mathbf{j}(1) \mathbf{j}(2) \cdots \mathbf{j}(N)]^T$ .

El error de modelización o residuo se define como:

$$\mathbf{e} = Y - \mathbf{F} \hat{\mathbf{q}} \quad (3.20)$$

con  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}(1) \dots \mathbf{e}(N))^T$ .

La estimación por mínimos cuadrados (LS), consiste en minimizar la función residuo,  $V(\hat{\mathbf{q}})$ , definida por la ecuación (3.21).

$$V(\hat{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \mathbf{e}^2(t) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \frac{1}{2} \|\mathbf{e}\|^2 \quad (3.21)$$

Sustituyendo la ecuación (3.20) en (3.21), se obtiene que la función a minimizar es:

$$\min_{\hat{\mathbf{q}}} V(\mathbf{q}) = V(\hat{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} [Y^T Y - Y^T \Phi \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \Phi^T Y + \mathbf{q}^T \Phi^T \Phi \mathbf{q}] \quad (3.22)$$

La derivada de la función (3.22) respecto a los parámetros debe ser nula. Deduciéndose que el valor de los parámetros que minimiza  $V(\hat{\mathbf{q}})$  es:

$$\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T Y \quad (3.23)$$

La ecuación anterior se puede escribir como un producto de sumas finitas:

$$\hat{\mathbf{q}} = \left[ \sum_{t=1}^N \mathbf{j}(t) \mathbf{j}(t)^T \right]^{-1} \left[ \sum_{t=1}^N \mathbf{j}(t) y(t) \right] \quad (3.24)$$

de la cual, conocido el orden del modelo:  $na$ ,  $nb$  y  $nk$ , es fácilmente calculable el valor de sus parámetros.

- Se debe tener en cuenta que la ecuación planteada tiene solución si la matriz  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  es definida positiva o, equivalentemente si el rango  $\mathbf{F} \geq n$ . En caso contrario la ecuación tiene infinitas soluciones. *El requisito necesario para garantizar una solución única de la ecuación (3.23) es que la señal de excitación sea persistentemente excitada de orden mayor que  $d$  [Söderström89].*

### 3.3.2 Propiedades del método LS

Las propiedades estadísticas de este método demuestran que dadas unos datos que satisfacen la ecuación (3.25)

$$y(t) = \mathbf{j}^T(t) \mathbf{q}_0 + e(t) \quad (3.25)$$

donde  $\mathbf{q}_0$  es el vector de parámetros verdadero y asumiendo que  $e(t)$  es un ruido blanco de media cero y variancia  $I^2$ :

- (i)  $\hat{\theta}$  converge a  $\mathbf{q}_0$  cuando  $N$  tiende a infinito
- (ii) la variable Random  $\sqrt{N}(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_0)$  se comporta como una distribución normal de media cero y covariancia  $P_{LS}$
- (iii) un estimador de  $\lambda^2$  es:

$$P_{LS} = \hat{I}^2 (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \quad (3.26)$$

$$\hat{I}^2 = \frac{2V(\hat{\mathbf{q}})}{N - d} \quad (3.27)$$

tal y como se demuestra en [Söderström89].

- Resaltar como *principal ventaja* de este método que la conversión a un mínimo global está garantizada y no existen mínimos locales.
- Y como *inconveniente* resaltar que si la perturbación  $v(t)$  no es un ruido blanco y la relación señal útil/señal ruido es importante, la conversión al valor real de  $\mathbf{q}_0$  no está garantizada. Este hecho limita su utilización como método general de estimación.

### 3.3.3 Solución de LS utilizando la ecuación normal

La estimación de los parámetros por el método LS se realiza a partir de la ecuación (3.24), conocida con el nombre de *ecuación normal*.

$$\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{Y}$$

- Resaltar como *ventaja* que la resolución directa de esta ecuación es sencilla y que los cálculos algebraicos a realizar son sencillos.
- Presenta el *inconveniente* que la matriz  $F^T F$  puede estar mal condicionada, particularmente si es de gran dimensión, lo cual comporta errores numéricos importantes en la resolución de la ecuación (3.23). Es por este motivo que diferentes investigadores han presentado alternativas para resolver esta ecuación, una de ellas es por triangulación ortonormal.

### 3.3.4 Solución de LS por triangulación ortonormal

La triangulación ortonormal o transformación QR es una de las alternativas numéricas desarrolladas para resolver la ecuación lineal (3.19) y evitar los errores generados por el mal acondicionamiento de la matriz  $F^T F$  [Ljung87].

Consiste en multiplicar el sistema de ecuaciones original (4.19) por una matriz ortonormal  $Q$ :

$$QFq = QY \quad (3.28)$$

En estas condiciones, la norma de la función error no se ve afectada por la transformación aplicada, ya que si  $Q$  es ortonormal:  $QQ^T = I$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \|QY - QFq\|^2 &= \|Q(Y - Fq)\|^2 = (Y - Fq)^T Q^T Q(Y - Fq) \\ &= (Y - Fq)^T (Y - Fq) = \|Y - Fq\|^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

El objetivo es buscar una matriz ortonormal  $Q$  tal que:

$$QF = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

donde  $R$  es una matriz cuadrada de dimensión  $d/d$  triangular por encima. La ecuación (3.31) se puede escribir como:

$$F = Q^T \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

A la ecuación (3.31) se la denomina factorización QR de  $F$ . Una posible forma de construir la matriz  $Q$  es utilizando la transformación de Householder [Ljung87].

En estas condiciones, el segundo término de la ecuación (3.28),  $QY$ , se puede descomponer en dos matrices:

$$QY = \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

y consecuentemente calcular la función pérdida (3.21) como:



$$V(\hat{\mathbf{q}}) = \|\mathbf{QF}\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{QY}\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \right\|^2 = \|\mathbf{R}\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{L}\|^2 + \|\mathbf{M}\|^2 \quad (3.34)$$

Es fácil ver que  $V(\hat{\mathbf{q}})$  se minimiza por  $\mathbf{q}$  cuando:

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{L} \quad (3.35)$$

y se obtiene que el mínimo de la función pérdida vale:

$$\min_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}) = \|\mathbf{M}\|^2 = \mathbf{M}^T \mathbf{M} \quad (3.36)$$

- Como *ventajas* de esta metodología de cálculo mencionar:

1- el sistema lineal (3.35) está mejor condicionado que la ecuación (3.23) y por tanto es numéricamente superior

2- la función pérdida se calcula sin la necesidad de estimar el valor de sus parámetros.

- Como *inconvenientes* destacar que requiere el doble de cálculo que el método directo.

### 3.4 Método de mínimos cuadrados generalizado (GLS)

El método de mínimos cuadrados presenta como principal inconveniente la no-convergencia del algoritmo cuando el ruido presente en el proceso no es blanco. Una posible forma de solucionar el problema es utilizando el método de mínimos cuadrados generalizado el cual es una extensión del método LS [Åström 71], [Zhu93].

Al considerar un modelo de tipo:

$$\mathbf{A}(q^{-1})y(t) = \mathbf{B}(q^{-1})u(t - nk) + \mathbf{H}(q^{-1})e(t) \quad (3.37)$$

Sí la función de transferencia discreta del ruido,  $\mathbf{H}(q^{-1})$ , es conocida, el modelo puede transformarse de la forma:

$$\mathbf{A}(q^{-1})\mathfrak{y}(t) = \mathbf{B}(q^{-1})\mathfrak{u}(t - nk) + e(t) \quad (3.38)$$

donde:

$$\mathfrak{y}(t) = \frac{1}{\mathbf{G}(q^{-1})} y(t)$$

$$\mathfrak{u}(t) = \frac{1}{\mathbf{G}(q^{-1})} u(t)$$

Con estas nuevas señales filtradas de la entrada y la salida, el problema podría ser resuelto aplicando el método clásico de LS. Por lo tanto el método GLS puede interpretarse como un problema de estimación de LS aplicando como criterio la generalización del error.

El problema que se plantea en la utilización de este método es que la función de transferencia  $\mathbf{H}(q^{-1})$  no es conocida. Para solucionar este problema se requiere un proceso iterativo en cuatro etapas el cual consiste en:

(1) Con el método LS, hacer una primera estimación de los polinomios  $A(q^{-1})$  y  $B(q^{-1})$ :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + v(t) \quad (3.39)$$

(2) Analizar el residuo,  $e(t)$ , y determinar por ejemplo un modelo AR para aproximar  $H(q^{-1})$ . En este caso se tiene un modelo denominado ARARX (3.11).

$$\begin{aligned} G(q^{-1}) &= \frac{1}{D(q^{-1})} \\ D(q^{-1})e(t) &= e(t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

La estimación de  $D(q^{-1})$  requiere otra vez la utilización del método LS

(3) Filtrar (blanquear) la entrada y la salida usando el modelo obtenido en la etapa (2):

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= D(q^{-1})y(t) \\ \tilde{u}(t) &= D(q^{-1})u(t) \end{aligned} \quad (3.41)$$

(4) Hacer una nueva estimación por mínimos cuadrados utilizando los señales filtrados.

Este proceso debe repetirse, a partir de la etapa (2), tantas veces como sea necesario hasta conseguir la convergencia.

La convergencia del método se evalúa comprobando que los residuos definidos obtenidos sean blancos. Para ello puede utilizarse el test de auto correlación. Para utilizarse este método deben definirse tanto el orden de la parte determinista como el orden de la parte estocástica. Para simplificar el problema, la mayoría de las veces se considera que son del mismo orden.

## 3.5 Método de la variable instrumento

### 3.5.1 Descripción del método de la variable instrumento

El método de la variable instrumento (IV) tiene como objetivo aprovechar las ventajas del método LS y superar sus limitaciones. Tiene el inconveniente que para su utilización es necesario definir una nueva variable llamada instrumento.

El planteamiento de este método es muy sencillo. Consiste en multiplicar la ecuación (3.15) por un vector instrumento  $z(t)$

$$z(t)y(t) = z(t)\mathbf{j}^T(t)\mathbf{q} + z(t)v(t) \quad (3.42)$$

que se debe caracterizar por ser independiente del ruido  $v(t)$ , pero dependiente de la entrada y la salida del sistema. Esta propiedad permite plantear el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$z(t)e(t) = z(t)[y(t) - \mathbf{j}^T(t)\hat{\mathbf{q}}] \quad (3.43)$$

El vector de parámetros que minimiza la función pérdida (3.22) vale, en este caso:

$$\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} \quad (3.44)$$

donde  $\mathbf{Z}$  es una matriz de la misma dimensión que  $\mathbf{F}$ .

Para que  $\hat{\mathbf{q}}$  converja a  $\mathbf{q}_0$  es necesario que la variable instrumento tenga como propiedades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z(t) \mathbf{j}^T(t) & \text{ sea singular} \\ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z(t) v(t) & = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

En otras palabras, es necesario que la variable instrumento sea fuertemente dependiente del vector regresión,  $\mathbf{j}(t)$ , pero sea independiente del ruido.

Este método, al igual que LS, presenta el inconveniente de que la matriz  $\mathbf{Z}^T \mathbf{F}$  puede estar mal condicionada cuando su dimensión es grande. Por este motivo puede utilizarse la triangulación ortonormal para calcular el valor de los parámetros.

Si se considera un modelo con una estructura ARMAX, una forma de garantizar las condiciones (3.45) es considerando un vector instrumento definido por:

$$z(t) = L(q^{-1}) [-x(t-1) - x(t-2) \cdots - x(t-na) u(t-1) \cdots u(t-nb)]^T \quad (3.46)$$

donde  $L$  es un filtro lineal y  $x(t)$  se genera a partir del sistema lineal:

$$N(q^{-1})x(t) = M(q^{-1})u(t) \quad (3.47)$$

El problema consiste en determinar el filtro,  $L$ , y el modelo lineal,  $N(q^{-1})$  y  $M(q^{-1})$ . Una forma sencilla sería:

- (1) Aplicar LS
- (2) Utilizar el modelo estimado como polinomios  $N$  y  $M$ , y determinar  $x(t)$  con (3.47)
- (3) Considerando  $L=1$ , definir  $z(t)$  según (3.46) y estimar el vector de parámetros a partir de la ecuación (3.44).

### 3.5.2 Método IV óptimo propuesto por Ljung

El método de la variable instrumento óptimo propuesto por Ljung [Ljung87], también denominado variable instrumento en cuatro etapas, genera el instrumento,  $z(t)$ , y el filtro,  $L$ , estimando al mismo tiempo la función de transferencia de la parte determinista y estocástica. Este cálculo se realiza en cuatro etapas:

- (1). Considera la estructura del modelo como un modelo ARX:

$$\hat{y}(t/\mathbf{q}) = \mathbf{j}^T(t) \hat{\mathbf{q}} \quad (3.48)$$

y se utiliza LS para estimar  $\mathbf{q}$ . A los parámetros estimados se les denomina  $\hat{\mathbf{q}}_N^{(1)}$ . A partir de los parámetros se obtiene la función de transferencia (3.49), donde los subíndices indican las iteraciones realizadas.

$$\hat{G}_N^{(1)}(q) = \frac{\hat{B}_N^{(1)}(q)}{\hat{A}_N^{(1)}(q)} \quad (3.49)$$

- (2) Con la función de transferencia estimada y considerando  $L=1$ , se genera el vector instrumento,  $z^{(1)}(t)$ , según se ha descrito en (4.46);

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= \hat{G}_N^{(1)}(q^{-1})u(t) \\ z^{(1)}(t) &= [-x^{(1)}(t-1) \dots -x^{(1)}(t-na) u(t-1) \dots u(t-nb)]^T \end{aligned} \quad (3.50)$$

La ecuación (3.44) permite estimar un nuevo valor para los parámetros, y obtener la correspondiente función de transferencia,  $\hat{G}_N^{(2)}$ .

- (3) Los nuevos polinomios,  $\hat{A}_N^{(2)}$  i  $\hat{B}_N^{(2)}$ , obtenidos de la función de transferencia  $\hat{G}_N^{(2)}$ , sirven para estimar la parte estocástica del proceso:

$$\hat{v}_N^{(2)}(t) = \hat{A}_N^{(2)}y(t) - \hat{B}_N^{(2)}u(t) \quad (3.51)$$

Considerando que el ruido se comporta como un modelo auto regresivo (AR) de orden  $d$ , se estima, con el método LS, el filtro  $\hat{L}(q^{-1})$ :

$$\hat{L}(q^{-1})\hat{v}_N^{(2)}(t) = e(t) \quad (3.52)$$

- (4) De la misma forma que en (3.50), se calcula de nuevo  $x^{(2)}(t)$  pero considerando la función de transferencia  $\hat{G}_N^{(2)}$ . El vector instrumento óptimo viene dado por (3.53).

$$z^{(2)}(t) = \hat{L}_N(q^{-1})[-x^{(2)}(t-1) \dots -x^{(2)}(t-na) u(t-1) \dots u(t-nb)]^T \quad (3.53)$$

Este nuevo instrumento junto con los filtros sirven para estimar el valor final de los parámetros:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_N &= \left( \sum_{t=1}^N z^{(2)}(t) \mathbf{j}_F^T \right)^{-1} \sum_{t=1}^N z^{(2)}(t) y_F(t) \\ \mathbf{j}_F(t) &= \hat{L}_N(q^{-1}) \mathbf{j}(t), \quad y_F(t) = \hat{L}_N(q^{-1}) y(t) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Las propiedades estadísticas de este método demuestran que la variable Random  $\sqrt{N}(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_0)$  tiende a una distribución Normal de media cero y variancia  $P_{IV}$ :

$$\frac{1}{N} P_{IV} = \hat{\mathbf{I}}_N \left[ \sum_{t=1}^N \mathbf{z}^{(2)}(t) \left[ \sum_{t=1}^N \mathbf{z}^{(2)}(t) \right]^T \right]^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{I}}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[ y_F(t) - \mathbf{j}_F^T(t) \hat{\mathbf{q}}_N \right]^2 \quad (3.55)$$

### 3.5.3 Solución de la estimación IV por triangulación ortogonal

Al igual que LS se genera una matriz ortogonal  $\mathbf{Q}$  que se debe caracterizar porque el producto  $\mathbf{QZ}$  sea triangular por encima. Con esta propiedad la ecuación (3.44) será:

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Y} = (\mathbf{QZ})^T \mathbf{QF} \hat{\mathbf{q}} \quad (3.56)$$

Al descomponer la matriz  $\mathbf{Q}$  en:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{Q}_1$  es una matriz cuadrada  $N/N$ . Puede definirse una matriz cuadrada y triangular por encima  $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Z}$ . Si se define la matriz  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{F}$  y ya que  $\mathbf{Q}_2 \mathbf{Z} = 0$ , la ecuación (3.56) queda transformada en:

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Y} = \mathbf{Z}_1^T \mathbf{F}_1 \hat{\mathbf{q}} \quad (3.57)$$

En (4.58) se demuestra que  $\mathbf{Z}_1$  es la raíz cuadrada de  $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = (\mathbf{QZ})^T \mathbf{QZ} = \mathbf{Z}_1^T \mathbf{Z}_1 + [\mathbf{Q}_2 \mathbf{Z}]^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1^T \mathbf{Z}_1 \quad (3.58)$$

y por tanto, la ecuación (4.56) se puede escribir como:

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Y} = \mathbf{F}_1 \hat{\mathbf{q}} \quad (3.59)$$

El error de modelización vendrá dado en este caso por el producto  $\mathbf{Q}_2 \mathbf{Y}$  y la función pérdida queda definida como:

$$\min_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}) = \|\mathbf{Q}_2 \mathbf{Y}\|^2 = (\mathbf{Q}_2 \mathbf{Y})^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{Y} \quad (3.60)$$

- Cabe resaltar como *ventaja* de esta metodología de cálculo dos aspectos: que el sistema lineal (3.59) está mejor condicionado que la ecuación (3.44) y por tanto es numéricamente superior y que la función pérdida se calcula sin la necesidad de estimar el valor de sus parámetros.
- Como *inconvenientes* debe destacarse que requiere el doble de cálculo que el método directo y complica mucho el método IV óptimo.

### 3.5.4 Método de la máxima probabilidad

El método de la máxima probabilidad (ML) es uno de los métodos más generales para la estimación de parámetros. La idea básica consiste en construir una función, denominada función de probabilidad, que relacione los datos con los parámetros no conocidos. La estimación consiste en determinar el valor de los parámetros cuyo valor maximice la función. La función de probabilidad consiste básicamente en la función de densidad de probabilidad de

las observaciones. La estimación de la máxima probabilidad significa que se selecciona el valor de los parámetros que coinciden más probablemente con las observaciones.

Supongamos que las observaciones están representadas por un vector de variables Random  $Y=[y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  y indicamos la función de densidad de probabilidad como:

$$f(\mathbf{q}; y_1, y_2, \dots, y_n)=f_y(\mathbf{q}; Y) \quad (3.61)$$

La función de probabilidad de los valores observados puede expresarse como:

$$L(\mathbf{q})=f_y(\mathbf{q}; Y) \quad (3.62)$$

La estimación se obtiene como:

$$\max_{\mathbf{q}} L(\mathbf{q}) = L(\hat{\mathbf{q}}) \quad (3.63)$$

El principio de máxima probabilidad es simple y se puede demostrar que converge asintóticamente cuando  $N \rightarrow \infty$  y la estimación es eficiente (variancia mínima)[Söderstrom89].

Si consideramos un modelo genérico dado por la ecuación (3.16) y considerando que  $v(t)$  es una señal Gaussiana, con una distribución normal y de  $N$  elementos, concretamente de media  $E[v]=0$  y covariancia  $E[vv^T]=C_v$  conocida. La función de probabilidad de esta señal viene dada por la expresión:

$$f(v) = \left[ (2\pi)^N \det(C_v) \right]^{-1/2} \exp \left( -\frac{1}{2} v^T C_v^{-1} v \right) \quad (3.64)$$

En la cual al considerar el modelo (3.16) se obtiene:

$$f(v) = \left[ (2\pi)^N \det(C_v) \right]^{-1/2} \exp \left( -\frac{1}{2} [Y - \Phi \mathbf{q}]^T C_v^{-1} [Y - \Phi \mathbf{q}] \right) \quad (3.65)$$

En la práctica la función evaluada es:

$$\log L(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \log \left[ (2\pi)^N \det(C_v) \right] - \frac{1}{2} [Y - \Phi \mathbf{q}]^T C_v^{-1} [Y - \Phi \mathbf{q}] \quad (3.66)$$

Por lo tanto evaluando el máximo de esta función se estimará el valor de los parámetros  $\mathbf{q}$ . En el caso en que el ruido corresponda a un ruido blanco con una matriz de covariancia  $C_v = \mathbf{s}^2 I$ , es fácil demostrar que la maximización de la función de máxima probabilidad (3.66) es equivalente a minimizar la función pérdida:

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} [Y - \Phi \mathbf{q}]^T [Y - \Phi \mathbf{q}] = -\mathbf{s}^2 \log L(\mathbf{q}) + constant \quad (3.67)$$

Sí  $\mathbf{s}$  no es conocido, la maximización de la ecuación (3.66) con respecto a los parámetros y  $\mathbf{s}$  debe realizarse separadamente. Para maximizar la ecuación (3.66) se debe recurrir a métodos de cálculo numérico, como el método de Newton-Raphson.

Consideremos el caso de un sistema ARMAX (3.9) donde el ruido se supone que tiene una distribución normal y una matriz de covarianza conocida. En este caso la función del logaritmo de probabilidad será:

$$\log L(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \log \left[ (2\pi)^N \det(C_v) \right] - \frac{1}{2} \mathbf{e}^T C_v^{-1} \mathbf{e} \quad (3.68)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= y(t) - \mathbf{j}^T(t) \hat{\mathbf{q}}, \\ \mathbf{q} &= [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_p] \\ \mathbf{j}(t) &= [-y(t-1), \dots, -y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-m), v(t-1), \dots, v(t-p)]. \end{aligned}$$

El problema en este caso es que  $v(t-1), \dots, v(t-p)$  no son conocidos. Por lo tanto, en estas circunstancias, la solución solo es posible haciendo soluciones aproximadas (método iterativo) para conseguir a cada paso una mejor estimación de la matriz de covarianza y de los parámetros. Para más detalles [Johansson93] y [Åström80].

## 3.6 Método de predicción de error

### 3.6.1 Formulación general del método de predicción de error

El método de predicción de error se basa de predecir el valor de la salida,  $y(t)$ , en función de los datos de entrada y salida al mismo y de un modelo estimado, de tal manera que se minimice el error existente entre la variable predicha y su valor real.

Considerando la expresión lineal general de un sistema como en (3.16) y despreciando el término ruido, la predicción de la salida en el instante  $t$  se obtiene:

$$\hat{y}(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m) = \mathbf{j}^T(t) \hat{\mathbf{q}} \quad (3.69)$$

aquí la ecuación del residuo definida por la ecuación (3.15):

$$\mathbf{e}(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1; \mathbf{q}) \quad (3.70)$$

puede ser interpretada como un error de predicción donde la predicción a un paso  $\hat{y}(t|t-1; \mathbf{q})$  se basa en todas los datos disponibles hasta el instante  $t-1$  y el vector de parámetros del modelo  $\mathbf{q}$ .

Para la formalización del método se introduce la siguiente estructura general del modelo:

$$y(t) = G(q^{-1}; \mathbf{q})u(t) + H(q^{-1}; \mathbf{q})v(t) \quad (3.71)$$

Asumiendo que  $G(0; \mathbf{q})=0$ , equivale a decir que el modelo tiene como mínimo un retardo puro de una muestra entre entrada y salida. La forma general de expresar un predictor consiste en:

$$\hat{y}(t | t-1; \mathbf{q}) = L_1(q^{-1}; \mathbf{q})y(t) + L_2(q^{-1}; \mathbf{q})u(t) \quad (3.72)$$

la cual es una función de los datos anteriores,  $t-1$ , solo si los filtros de predicción tienen como restricción:  $L_1(0;\mathbf{q})=0$  y  $L_2(0;\mathbf{q})=0$ .

Hay varias formas de escribir el modelo (3.71) y determinar el predictor. Una vez definido el modelo y el predictor, se calculan los errores de predicción a partir de la ecuación (3.70). La estimación de los parámetros,  $\hat{\mathbf{q}}$ , se calcula de tal forma que los errores de predicción sean pequeños. El principio básico de este método se ilustra en la figura 3.1.

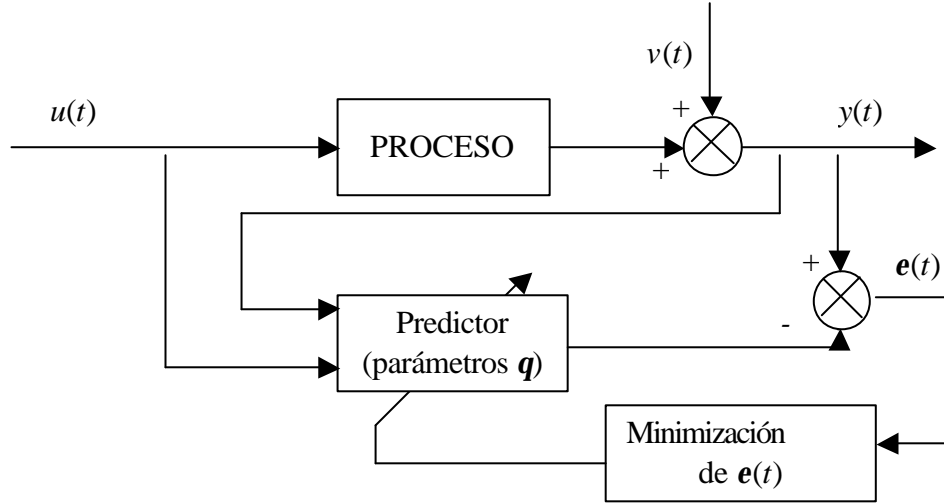


Figura 3.1. Esquema del método de error de predicción

Para definir el método de predicción de error el usuario debe realizar las siguientes elecciones:

- (1) **Elegir la estructura del modelo.** Esto concierne a la parametrización de  $G(q;\mathbf{q})$  y  $H(q;\mathbf{q})$  en (3.71) como una función de  $\mathbf{q}$ . Por razones algorítmicas, la función de transferencia se factoriza en polinomios en el numerador y en el denominador. En el contexto de la identificación, tal como se ha descrito en el apartado 3.2.1., hay distintos modelos de parametrización: OEM, BJM, ...
- (2) **Elegir el predictor.** Esto concierne a los filtros,  $L_1(q;\mathbf{q})$  y  $L_2(q;\mathbf{q})$  en la ecuación (3.72), una vez el modelo ha sido especificado. Estos filtros pueden ser seleccionados de distintas formas. La forma más utilizada es 'optimal mean square predictor'. Esto significa que los filtros son seleccionados de manera que bajo unas condiciones dadas del modelo los errores de predicción tienen la menor variancia posible.

En el caso del modelo general considerado en (3.71), el predictor óptimo sería:

$$\hat{y}(t|\mathbf{q}) = [1 - H^{-1}(q^{-1};\mathbf{q})]y(t) + H^{-1}(q^{-1};\mathbf{q})G(q^{-1};\mathbf{q})u(t) \quad (3.73)$$

El error de predicción se determina de forma similar:

$$\mathbf{e}(t) = y(t) - \hat{y}(t|\mathbf{q}) = y(t) - [1 - H^{-1}(q^{-1};\mathbf{q})]y(t) + H^{-1}(q^{-1};\mathbf{q})G(q^{-1};\mathbf{q})u(t) \quad (3.74)$$

- (3) **Elegir el criterio.** Este se refiere a elegir una función que origine un valor escalar de todos los errores de predicción  $\mathbf{e}(1,\mathbf{q})$ , ...,  $\mathbf{e}(N,\mathbf{q})$ . Este criterio será minimizado con respecto a  $\mathbf{q}$



de manera que se realice la mejor predicción. En el caso de una salida el criterio (función error) puede definirse como una suma de cuadrados del error de predicción, mientras que en el caso de sistemas multi-variables como una proyección escalar de la matriz de covariancia

$$V(\mathbf{q}) = h \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{e}(t; \mathbf{q}) \mathbf{e}^T(t; \mathbf{q}) \right] \quad (3.75)$$

donde  $h()$  es una función de valor escalar y, generalmente, consiste en la traza de los pesos de la matriz de covarianza o su determinante.

El análisis del método de predicción de error muestra que la función perdida converge a un mínimo y la estimación es consistente cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- Los datos  $\{u(t), y(t)\}$  son del proceso en estado estacionario.
- La entrada es persistentemente excitada.
- La Hessiana  $V''(\theta)$  es no singular al menos alrededor del punto mínimo de  $V(\theta)$ .
- Los filtros  $G(q^{-1}; \theta)$  y  $H(q^{-1}; \theta)$  son funciones diferenciables del vector de parámetros  $\theta$ .

En muchos casos el mínimo de  $V(\mathbf{q})$  no puede ser hallado de forma analítica. En estos casos la minimización debe realizarse utilizando una rutina de cálculo numérico. El método más usualmente utilizado es el algoritmo de Newton-Raphson:

$$\hat{\mathbf{q}}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{q}}^{(k)} - \mathbf{a}_k \left[ V''(\hat{\mathbf{q}}^{(k)}) \right]^{-1} V'(\hat{\mathbf{q}}^{(k)})^T \quad (3.76)$$

Aquí  $\hat{\mathbf{q}}^{(k)}$  indica la iteración  $k$  del cálculo numérico. La secuencia de escalares  $\mathbf{a}_k$  se utiliza para controlar la longitud del paso. Estrictamente en el caso del algoritmo Newton-Rapson  $\mathbf{a}_k=1$ , de todas formas en la práctica muchas veces es necesario utilizar un paso variable para asegurar la convergencia del método.

### 3.7 Métodos recursivos para la estimación de parámetros

En los métodos de identificación recursivos, la estimación de los parámetros se calcula recursivamente en tiempo. Esto significa que la estimación  $\hat{\mathbf{q}}(t)$  se calcula como una modificación de la estimación  $\hat{\mathbf{q}}(t-1)$  utilizando las nuevas medidas de  $u(t)$  y  $y(t)$ . Los métodos recursivos para la estimación de parámetros han sido desarrollados para aplicaciones de la identificación en tiempo real y su mayor campo de aplicación son sistema de control adaptativos y diagnostico de fallos. Ello es debido a que estas aplicaciones requieren que las acciones y evaluaciones utilizadas utilicen el modelo mas actualizado del sistema.

Los métodos de identificación recursivos tienen las siguientes características generales:

- Los modelos estimados con estos métodos se adaptan fácilmente a los sistemas variantes en el tiempo. Ellos permiten que el modelo siga los cambios de parámetros del sistema o cambios debidos a condiciones de operación en el caso de sistemas no lineales.

- Los requerimientos de memoria son reducidos y no aumentan en el tiempo, debido a que no se almacenan todos los datos.
- Ellos se han derivado de una aproximación de los métodos no recursivos descritos anteriormente.

### 3.7.1 Método de mínimos cuadrados recursivo

Para deducir el método de mínimos cuadrados recursivo (RLS) se parte de la ecuación (3.24)

$$\hat{\mathbf{q}}(t) = \left[ \sum_{k=1}^t \mathbf{j}(k) \mathbf{j}^T(k) \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^t \mathbf{j}(k) y(k) \right] \quad (3.77)$$

Para calcular esta expresión de forma recursiva se introduce como nueva notación:

$$P(t) = \left[ \sum_{k=1}^t \mathbf{j}(k) \mathbf{j}^T(k) \right]^{-1} \quad (3.78)$$

Esta suma puede descomponerse en el valor de  $P(t)$  y el valor de  $P(t-1)$ :

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + \mathbf{j}(t) \mathbf{j}^T(t) \quad (3.79)$$

Con este cambio de variables, los parámetros pueden estimarse utilizando:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}(t) &= P(t) \left[ \sum_{k=1}^{t-1} \mathbf{j}(k) y(k) + \mathbf{j}(t) y(t) \right] \\ &= P(t) \left[ P^{-1}(t-1) \hat{\mathbf{q}}(t-1) + \mathbf{j}(t) y(t) \right] \end{aligned} \quad (3.80)$$

Por lo tanto el método de mínimos cuadrados recursivos adopta la forma:

$$\hat{\mathbf{q}}(t) = \hat{\mathbf{q}}(t-1) + P(t) \mathbf{j}(t) [y(t) - \mathbf{j}^T(t) \hat{\mathbf{q}}(t-1)] \quad (3.81)$$

donde el último valor puede ser interpretado como el error de predicción, mientras que el factor de corrección  $(P(t) \mathbf{j}(t))$  puede ser considerado como un peso o factor de ganancia determinado como el error de predicción modifica los elementos del vector de parámetros estimado.

El hecho de calcular  $P(t)$  en la ecuación 3.79 requiere invertir una matriz a cada paso de iteración. Utilizando el lema  $[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1}DA^{-1}$  y considerando  $A = P^{-1}(t-1)$ ,  $B = D^T$  y  $C = 1$  se obtiene una expresión más eficiente:

$$P(t) = P(t-1) + K \mathbf{j}^T(t) P(t-1) \quad (3.82)$$

donde

$$K = P(t-1) \mathbf{j}(t) / [1 + \mathbf{j}^T(t) P(t-1) \mathbf{j}(t)] \quad (3.83)$$

que da como resultado una ganancia. La expresión de mínimos cuadrados recursivos queda por tanto:

$$\hat{\mathbf{q}}(t) = \hat{\mathbf{q}}(t-1) + K(t)[y(t) - \mathbf{j}^T(k)\hat{\mathbf{q}}(t-1)] \quad (3.84)$$

### 3.7.2 Valor inicial

Los algoritmos recursivos requieren aproximar el valor inicial del vector de parámetros y de la matriz  $P(t)$ . Si es posible realizar una primera estimación del vector de los parámetros (por ejemplo utilizando LS no recursivo) la matriz  $P(0)$  debe reflejar la confianza de los parámetros estimados. En el caso en que  $P(0)$  sea pequeño  $K(t)$  será pequeño para los distintos  $t$  y los parámetros estimados no variaran mucho del valor inicial. Mientras que, si  $P(0)$  es grande la estimación de los parámetros variará rápidamente del valor inicial. En ausencia de información previa para realizar una primera estimación de los parámetros, se acostumbra a considerar:  $\hat{\mathbf{q}}(0) = 0$  y  $P(0) = kI$ , donde  $k$  es un número grande.

### 3.7.3 Factor de olvido

Muchas aplicaciones pueden considerarse como sistemas de parámetros variables. En ellos se requiere que los parámetros de modelo estimado se vayan adaptando en función de los cambios del sistema. Interesa en estos casos controlar el cómo las medidas antiguas o las recientes afectan sobre la estimación de los parámetros o cómo de rápido son olvidadas las medidas anteriores o antiguas.

Un método utilizado en estos casos es el factor de olvido  $I$  que proporciona un decrecimiento exponencial de los pesos. La función pérdida a minimizar adopta la expresión:

$$V(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^t I^{t-k} \mathbf{e}^2(k) \quad (3.85)$$

donde el valor recomendado de  $I$  es un valor comprendido entre 0.90 y 0.995.

Por lo tanto el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido es:

$$\hat{\mathbf{q}}(t) = \hat{\mathbf{q}}(t-1) + K(t)[y(t) - \mathbf{j}^T(k)\hat{\mathbf{q}}(t-1)] \quad (3.86)$$

$$K = P(t-1)\mathbf{j}(t)/[I + \mathbf{j}^T(k)P(t-1)\mathbf{j}(t)] \quad (3.87)$$

$$P(t) = [P(t-1) + K\mathbf{j}^T(k)P(t-1)]/I \quad (4.88)$$

Para  $I = 1$  coincide con el método de mínimos cuadrados común.

### 3.7.4 Algoritmos de estimación de parámetros recursivos

En la bibliografía hay distintos algoritmos de estimación de parámetros recursivos, todos ellos permiten estimar el valor de los parámetros del sistema en tiempo real. Una forma unificada de representarlos es mediante las expresiones:

$$\hat{\mathbf{q}}(t) = \hat{\mathbf{q}}(t-1) + K(t)\mathbf{e}(t) \quad (3.89)$$

$$K = \mathbf{m}(t)P(t-1)\mathbf{j}(t) \quad (3.90)$$

$$\mathbf{e}(t) = y(t) - \mathbf{y}^T(t)P(t-1)\mathbf{j}(t) \quad (3.91)$$

En la siguiente tabla se observan los valores de los parámetros, vector de datos y vector de corrección para el caso de los métodos: mínimos cuadrados (RLS), método de la variable instrumento recurdivo (RIV) y el método de la máxima probabilidad recursivo (RML). En el caso de incluirse el factor de olvido es necesario realizar las siguientes modificaciones:

(1) Reemplazar el 1 del denominador de  $\mathbf{m}(t)$  por  $I$ .

(2) Dividir  $P(t)$  también por  $I$ .

En Iserman (1991) se realiza una comparación entre estos tres métodos con respecto a las características del estimador, su convergencia y el esfuerzo computacional. Las propiedades de estos tres métodos se resumen a continuación:

RLS: Aplicable cuando la relación ruido/señal es pequeña. Esfuerzo computacional pequeño.

RIV: Tiene unas buenas prestaciones. Para acelerar la convergencia inicial se recomienda empezar con RLS. Esfuerzo computacional mayor que RLS.

RML: Altas prestaciones del estimador. Lenta convergencia en la etapa inicial. Se estiman los parámetros del ruido, pero la convergencia es lenta. El esfuerzo computacional es mayor que en los otros dos.

Método	RLS	RIV	RML
$\hat{\mathbf{q}}$	$[\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n \hat{b}_1 \cdots \hat{b}_m]^T$	$[\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n \hat{b}_1 \cdots \hat{b}_m]^T$	$[\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n \hat{b}_1 \cdots \hat{b}_m \hat{c}_1 \cdots \hat{c}_p]^T$
$\mathbf{y}(t)$	$[-y(t-1) \cdots -y(t-n) u(t-1) \cdots u(t-m)]^T$	$[-y(t-1) \cdots -y(t-n) u(t-1) \cdots u(t-m)]^T$	$[-y(t-1) \cdots -y(t-n) u(t-1) \cdots u(t-m) \mathbf{e}(t-1) \cdots \mathbf{e}(t-p)]^T$
$\mathbf{m}(t)$	$\frac{1}{1 + \mathbf{y}^T(t)P(t-1)\mathbf{y}(t)}$	$\frac{1}{1 + \mathbf{y}^T(t)P(t-1)\mathbf{j}(t)}$	$\frac{1}{1 + \mathbf{y}^T(t)P(t-1)\mathbf{j}(t)}$
$P(t)$	$I - [K(t)\mathbf{y}^T(t)]P(t-1)$	$I - [K(t)\mathbf{y}^T(t)]P(t-1)$	$I - [K(t)\mathbf{y}^T(t)]P(t-1)$
$\mathbf{j}(t)$	$\mathbf{y}(t)$	$[-\mathbf{h}(t-1) \cdots -\mathbf{h}(t-n) u(t-1) \cdots u(t-m)]^T$	$[-y'(t-1) \cdots -y'(t-n) u'(t-1) \cdots u'(t-m) \mathbf{e}'(t-1) \cdots \mathbf{e}'(t-p)]^T$

### 3.8 Métodos de estimación paramétricos frecuenciales

El objetivo de los métodos de identificación en el dominio frecuencial es el mismo que en el dominio temporal: identificar un sistema lineal a partir de los datos. La principal diferencia entre ambos radica en el dominio de trabajo. De todas formas los dos métodos son complementarios y, en algunos casos, ambos pueden utilizarse para solucionar el mismo problema. Analizamos a continuación, en que condiciones ambos métodos identifican el mismo sistema.

El modelo general utilizado en la identificación en el dominio de la frecuencia de un sistema lineal se muestra en la figura 5.1. El sistema se representa por su función de transferencia  $H(W)$ , donde  $W = s = j\omega$  en el dominio de Laplace, o  $W = z^{-1} = \exp(-j\omega T_s)$  en el dominio  $z$ , respectivamente, y  $H$  es una forma racional, eventualmente con un término retardo  $T_d$  (3.92).

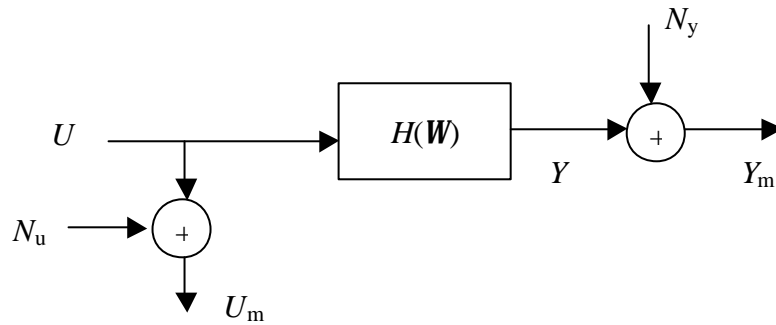


Figura 3.2. Modelo general utilizado en la identificación de sistemas en el dominio frecuencial.

$$H(\Omega) = e^{-j\omega T_d} \frac{b_0 \Omega^0 + b_1 \Omega^1 + \dots + b_{nn} \Omega^{nn}}{a_0 \Omega^0 + a_1 \Omega^1 + \dots + a_{nd} \Omega^{nd}} \quad (3.92)$$

La señal de excitación tiene una amplitud compleja  $U_k$  a la frecuencia angular  $\omega_k$  y la respuesta del sistema es  $Y_k = H(\Omega_k)U_k$ . La amplitud compleja de las señales de entrada y salida medidas están contaminada con ruido  $N_u$  y  $N_y$ , respectivamente, hecho que incorpora un error en las variables del modelo. Para la solución propuesta, se asume que el ruido tiene como características que:

- es Gaussiano
- es independiente de las señales de entrada y salida
- no hay correlación entre las muestras de las diferentes frecuencias

Las medidas se realizan a distintas frecuencias  $\omega_k$ ,  $k=1\dots F$ , las amplitudes de las entradas y salidas son  $U_{mk}$  y  $Y_{mk}$ , respectivamente. Los parámetros no conocidos de la función de transferencia se indican con el vector  $\mathbf{P}$ . Con todo ello las ecuaciones básicas son:

$$Y_k = H(\Omega_k, \mathbf{P})U_k, \quad k=1,2,\dots,F \quad (3.93)$$

$$Y_{mk} = H(\Omega_k, \mathbf{P})(U_{mk} - N_{uk}) + N_{yk}, \quad k=1,2,\dots,F \quad (3.94)$$

Asumiendo que el ruido en las amplitudes complejas es Gaussiana y no correlacionado, y que el ruido de la entrada y la salida no están tampoco correlacionados, su función de densidad probabilística puede escribirse como:

$$p(N_u, N_y) = \prod_{k=1}^F \frac{1}{2ps_{uk}^2} \exp\left(-\frac{N_{Ruk}^2 + N_{Iuk}^2}{2s_{uk}^2}\right) \prod_{k=1}^F \frac{1}{2ps_{yk}^2} \exp\left(-\frac{N_{Ryk}^2 + N_{Iyk}^2}{2s_{yk}^2}\right) \quad (3.95)$$

$$= \prod_{k=1}^F \frac{1}{2ps_{uk}^2} \exp\left(-\frac{N_{uk} \bar{N}_{uk}}{2s_{uk}^2}\right) \prod_{k=1}^F \frac{1}{2ps_{yk}^2} \exp\left(-\frac{N_{yk} \bar{N}_{yk}}{2s_{yk}^2}\right)$$

donde  $N_{Ruk}$ ,  $N_{Iuk}$ ,  $N_{Ryk}$  y  $N_{Iyk}$  se corresponde con las partes real y imaginaria del ruido en las señales de entrada y salida.  $\bar{N}$  es el conjugado complejo de  $N$ ,  $s_{uk}$  y  $s_{yk}$  son las correspondientes desviaciones estándar,  $N_u$  y  $N_y$  indican los vectores formados por  $N_{uk}$  y  $N_{yk}$  en las distintas frecuencias.

Substituyendo en (3.95) la variable ruido por  $N_{uk}=U_{mk}-U_k$  y  $N_{yk}=Y_{mk}-Y_k$ , y haciendo el logaritmo y asumiendo que  $s_u$  y  $s_y$  son conocidas, la función de máxima probabilidad es:

$$\ln(L(U, Y, P)) = cont - \sum_{k=1}^F \left( \frac{(U_{mk} - U_k)(\overline{U_{mk} - U_k})}{2s_{uk}^2} \right) - \sum_{k=1}^F \left( \frac{(Y_{mk} - Y_k)(\overline{Y_{mk} - Y_k})}{2s_{yk}^2} \right) \quad (3.96)$$

La maximización de la ecuación (3.95) se consigue minimizando la ecuación (3.96) sujeto a la restricción (3.93).

$$C_{LS}(L(U, Y, P)) = \sum_{k=1}^F \left( \frac{(U_{mk} - U_k)(\overline{U_{mk} - U_k})}{2s_{uk}^2} \right) + \sum_{k=1}^F \left( \frac{(Y_{mk} - Y_k)(\overline{Y_{mk} - Y_k})}{2s_{yk}^2} \right) \quad (3.97)$$

La restricción (3.93) puede substituirse en (3.97) para eliminar  $Y_k$ . Como resultado se obtiene un problema de mínimos cuadrados con pesos no lineales. En general pero no se está interesado en  $U_k$ , por lo tanto la mejor forma de minimizar la ecuación (3.96) con la restricción (3.93) es utilizar la técnica de multiplicadores de Lagrange para eliminarlos a ambos ( $U_k$  y  $Y_k$ ). En este caso la expresión a minimizar consiste en:

$$C(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F \frac{\left| e^{-j\mathbf{w}_k^T T_d} N(\Omega_k, \mathbf{P}) U_{mk} - D(\Omega_k, \mathbf{P}) Y_{mk} \right|^2}{s_{yk}^2 |D(\Omega_k, \mathbf{P})|^2 + s_{uk}^2 |N(\Omega_k, \mathbf{P})|^2} \quad (3.98)$$

donde  $N(\Omega, \mathbf{P})$  y  $D(\Omega, \mathbf{P})$  son el numerador y el denominador de la función de transferencia, respectivamente.

La chi-cuadrada acostumbra a ser la función de coste más utilizada en la resolución del método de estimación de máxima probabilidad para datos Gaussianos. Para conseguir que la función de coste (3.98) tienda a una distribución chi-cuadrada se formulan distintas alternativas, una de ellas es la expresada en la ecuación (3.99) donde los pesos,  $W$ , han de ser iguales a las variaciones de los términos de los valores absolutos buscados.

$$C_{WLS}(P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F W_{fk} \left| e^{-j\mathbf{w}_k T_d} U_{mk} N(\Omega_k, \mathbf{P}) - Y_{mk} D(\Omega_k, \mathbf{P}) \right|^2 \quad (3.99)$$

La minimización de esta función se consigue de forma que:

$$e^{-j\mathbf{w}_k T_d} U_{mk} N(\Omega_k, \mathbf{P}) - Y_{mk} D(\Omega_k, \mathbf{P}) = 0 \quad (3.100)$$

El término residuo será:

$$\mathbf{e}_k = e^{-j\mathbf{w}_k T_d} U_{mk} N(\Omega_k, \mathbf{P}) - Y_{mk} D(\Omega_k, \mathbf{P}) = 0$$

La variancia de este residuo será igual a:

$$\text{var}\{\mathbf{e}_k\} = 2\mathbf{s}_{uk}^2 |N(\Omega_k, \mathbf{P})|^2 + 2\mathbf{s}_{yk}^2 |D(\Omega_k, \mathbf{P})|^2$$

si  $N_{uk}$  y  $N_{yk}$  son independientes. Haciendo  $W_k = 1/\text{var}\{\mathbf{e}_k\}$ , se obtiene que la función de coste (3.99) consiste en la estimación de un sistema lineal, denominado ELiS (Estimator for Linear Systems).

Para minimizar la ecuación (3.98) respecto a los parámetros  $\mathbf{P}$ , deben utilizarse técnicas no lineales con restricciones y para ser utilizada, el usuario debe aportar el valor inicial del retardo puro.

En el caso en que  $N_{uk}$  y  $N_{yk}$  no sean independientes por distintas razones:

- el sistema está en lazo cerrado.
- o hay ruido en la señal de entrada

la función coste a considerar es:

$$C(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F \frac{\left| e^{-j\mathbf{w}_k T_d} N(\Omega_k, \mathbf{P}) U_{mk} - D(\Omega_k, \mathbf{P}) Y_{mk} \right|^2}{\mathbf{s}_{yk}^2 |D(\Omega_k, \mathbf{P})|^2 + \mathbf{s}_{uk}^2 |N(\Omega_k, \mathbf{P})|^2 - 2\text{real}\{CND_k\}} \quad (3.101)$$

con:

$$CND_k = c_{uyk} e^{-j\mathbf{w}_k T_d} N(\Omega_k, \mathbf{P}) D(\Omega_k, \mathbf{P})$$

y

$$c_{uyk} = 0.5 \text{cov}\{N_{uk}, N_{yk}\} = 0.5 E\{\overline{N_{uk}}, N_{yk}\}$$

### 3.9 Selección y validación de la estructura del modelo

A demás de los métodos de estimación de los parámetros, otro aspecto muy importante es el de buscar la estructura apropiada para el modelo (por ejemplo ver tabla 3.3). Para ello es necesario entender los métodos de estimación o identificación y conocer el sistema que se desea identificar. Cuando la estructura del modelo ha sido determinada, los métodos de estimación proporcionan un modelo particular de dicha estructura. Una vez identificado el modelo otra cuestión a plantearse es si el modelo identificado es suficientemente bueno, para ello se recurre a las técnicas de validación. Obsérvese que no siempre será posible definir una estructura del modelo, identificar los valores de los parámetros y validar de forma independiente, sino al contrario las tres etapas están muy interrelacionadas.

### 3.9.1 Selección de la estructura del modelo. Aspectos generales

La selección de la estructura del modelo tiene un considerable efecto sobre la cualidad del modelo resultante y el coste de computación. La cualidad del modelo puede, por ejemplo evaluarse por el criterio del error cuadrático. La mejor estructura del modelo es un compromiso entre flexibilidad y ahorro. Entendiendo por flexibilidad que la estructura del modelo tiene capacidad para describir diferentes sistemas y una forma de obtenerlo es utilizando muchos parámetros. Por otro lado, el ahorro requiere la utilización de pocos parámetros.

Para empezar a solucionar un problema de identificación, cabe considerar tres aspectos importantes:

- \* Tipos de conjuntos de modelos
- \* Dimensión del conjunto de modelos o selección del orden de los modelos
- \* Métodos de identificación

La selección del tipo dentro de un conjunto de modelos implica buscar entre diferentes clases de modelos como entre modelos no lineales o lineales o entre modelos de entrada-salida, caja negra o parametrizado físicamente, y otros. La búsqueda de que tipo de modelo utilizar es un poco subjetivo y involucra muchos factores que son independientes del conjunto de datos. La búsqueda es habitualmente un compromiso entre diferentes factores, como cualidad del modelo y esfuerzo de modelado. Para obtener unos buenos resultados con pocos parámetros, suele utilizarse el conocimiento previo del proceso y algo de intuición. La información previa es muy útil en el caso de modelos en tiempo continuo. La forma de evaluar  $\mathbf{e}(t, \mathbf{q})$  y su minimización influye mucho en el esfuerzo de programación y el tiempo de cálculo. Modelos sofisticados suelen utilizarse solo en el caso de que no puedan ser validados los modelos sencillos. Las regresiones lineales son los modelos más simples y los que la minimización del criterio es robusta. Cuando se realiza una transformación no lineal de los datos puede ser también evaluado con el ajuste de un modelo lineal.

La selección del orden del modelo implica la selección del número de parámetros de una determinada clase de modelos. Este paso requiere usualmente alguna evaluación del conjunto de datos, de todas formas el conocimiento preliminar que se tiene del proceso muy a menudo permite deducir un rango de ordenes del modelo a considerar.

La selección del método de identificación depende enormemente de la clase de modelo seleccionado. Como se ha visto en apartados anteriores, un sistema lineal puede representarse de diferentes formas, por su respuesta transitoria o frecuencial o modelo paramétrico. Evidentemente podemos transformar unas en las otras, pero estas transformaciones están muy mal condicionadas en el sentido de que pequeños errores en una representación pueden originar mucho error en otra. La conclusión es clara, la búsqueda del método está íntimamente relacionada con el objetivo de la identificación.

### 3.9.2 Análisis preeliminar de los datos para la selección de la estructura del modelo

Ciertos tests o evaluaciones de los datos permiten deducir una posible estructura del modelo, algunos de ellos han sido descritos en el tema 2. Estas técnicas no conducen a la



determinación completa del modelo del sistema. En el caso de métodos paramétricos, el problema se reduce a la selección del orden del modelo.

- (1) La evaluación del análisis espectral estimado proporciona información sobre el rango de frecuencias de interés del proceso y el nivel de ruido, por lo tanto no ayuda a diseñar correctamente la señal de entrada y los filtros. La estimación no paramétrica de la función de transferencia  $\hat{G}(j\omega)$  proporciona información sobre los picos de resonancia y el retardo de fase. Todo ello da una orientación sobre el orden requerido para una adecuada descripción de las dinámicas del sistema (o la zona de interés).
- (2) Evaluar el rango de la matriz de covarianza es un buen método para estimar el orden del sistema. Supóngase que el sistema correcto se describe mediante:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_n u(t-n) + v(t)$$

siendo  $n$  el verdadero orden del sistema. Si tomamos un modelo de orden  $s$ , el vector de datos es:

$$\mathbf{j}(t) = [y(t) \ y(t-1) \dots y(t-s) \ u(t-1) \dots u(t-s)]^T$$

Considerando primero el caso en que  $v(t) \equiv 0$ , tenemos que la matriz de covarianza

$$R_{jj}(N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{j}(t) \mathbf{j}^T(t)$$

será no singular para  $s \leq n$  (en el caso que  $\{u(t)\}$  sea persistentemente excitada) y singular para  $s \geq n+1$ .

En el caso de ruido la matriz de covarianza puede ser utilizada siempre que la relación señal-ruido no sea muy grande, sí es el caso puede utilizarse la fórmula:

$$\hat{R}_{jj}(N) = R_{jj}(N) - \mathbf{s}^2 R_v$$

donde  $\mathbf{s}^2 R_v$  es la estimación de la influencia del ruido del proceso en la matriz de covarianza.

Una mejor alternativa, cuando la influencia de  $v(t)$  no es despreciable, es la de utilizar otro vector de correlación, por ejemplo en el caso en que  $\{v(t)\}$  y  $\{u(t)\}$  no estén correlados (sistema en lazo abierto) podemos utilizar

$$\mathbf{z}(t) = [u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-2s)]^T$$

y por tanto la matriz de covarianza es

$$\hat{R}_{jz}(N) = E[\mathbf{j}(t) \mathbf{z}^T(t)]$$

es no singular para  $s \leq n$  y singular para  $s \geq n+1$ .

- (3) El método de correlación es otro método que permite obtener información acerca de que variables incluir en la estructura del modelo. Esta variable podría ser  $y(t-n-1)$ . La cuestión que permite resolver es si una nueva variable contribuye de alguna forma en explicar la variable de salida  $y(t)$ . Ello puede realizarse mediante la correlación entre la nueva variable y la salida. De todas formas para descartar las posibles relaciones entre ellas, y para conseguir estructuras de poca complejidad, la correlación debería realizarse entre

ella y los residuos obtenidos como resultado de considerar un primer modelo  $\mathbf{e}(t, \hat{\mathbf{q}}) = y(t) - \hat{y}(t | \hat{\mathbf{q}})$ . Ello se conoce con el nombre de correlación parcial.

### 3.9.3 Criterios para la comparación de la estructura de los modelos

Una aproximación natural para determinar la estructura del modelo es simplemente testar diferentes estructuras y comparar el resultado entre ellas. Los métodos de tests más comúnmente utilizados son:

- \* Test de la función error o pérdida
- \* Test de cancelación de polos y ceros
- \* Test del residuo

#### 3.9.3.1 Test de la función error o pérdida

El método más simple es mirar sencillamente la función pérdida  $V(\hat{\mathbf{q}})$  directamente vinculada con el orden del modelo. Cuando incrementa el orden la función pérdida decrece hasta que se mantiene constante o cambia lentamente. Otros métodos se basan en test estadísticos de la función pérdida o en la evaluación de diferentes criterios que tiene en cuenta la complejidad del modelo.

- (1) Un método estadístico para evaluar si la función pérdida disminuye significativamente cuando incrementa el orden del modelo es el *F-test*. Este test se basa en la independencia estadística de  $V^1(\mathbf{q})$  y  $V^1(\mathbf{q}) - V^2(\mathbf{q})$  donde los subíndices indican modelos con un número de parámetros  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente. Para testar si la reducción de la función es significativa cuando el número de parámetros aumenta de  $p_1$  a  $p_2$  se utiliza:

$$t = \frac{V^1(\mathbf{q}) - V^2(\mathbf{q})}{V^2(\mathbf{q})} \frac{N - p_2}{p_1 - p_2}$$

Esta cantidad tiene una distribución  $F[p_1 - p_2, N - p_2]$ , entonces para un suficiente número de muestras  $N$ , se cumple que:  $t > F_{\alpha}[p_1 - p_2, N - p_2]$  entonces se cumple la hipótesis que la reducción de la función pérdida es significativa con el aumento del número de parámetros y por tanto el nuevo parámetro es aceptado con un nivel de confianza de  $1 - \alpha$ . En la práctica, el nivel de confianza tiene un rango de 0.01 a 0.1.

- (2) El criterio de análisis de complejidad puede realizarse simplemente adicionado a la función pérdida un término extra que penalice la complejidad del modelo. En este caso se selecciona el mejor modelo que minimice el criterio.

El criterio de información de Akaike (AIC) disminuye con la función pérdida y aumenta con el número de parámetros, se define como:

$$AIC(p) = N \log V(\mathbf{q}) + 2p$$

siendo:

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{e}^2(t, \mathbf{q})$$

Se ha observado que este criterio puede sobre estimar el orden del modelo.

Otro criterio propuesto por Akaike es ‘final prediction error criterion (FPE)’:

$$FPE(p) = \frac{N + p}{N - p} V(\mathbf{q})$$

Se ha observado que este criterio tiende a subestimar el modelo del sistema.

Una propiedad atractiva tanto del criterio de AIC como FPE es que el orden del modelo se determina como resultado de valor mínimo del criterio y no es necesario evaluarlo en función de unos niveles de confianza como es el caso del método estadístico.

### 3.9.3.2 *Test de cancelación de polos-ceros*

Si se considera que el orden del modelo es  $s$  y es superior al orden del proceso real  $n$ , originan pares de polos-ceros muy próximos que pueden ser cancelados. Este fenómeno puede utilizarse para testar el orden del modelo, calculando las raíces de los polinomios los cuales  $A(q)$  y  $B(q)$  a partir de diferentes órdenes  $s$ .

### 3.9.3.3 *Test de residuo*

Resultado de comparar la salida con la predicción del modelo:

$$\mathbf{e}(t, \hat{\mathbf{q}}) = y(t) - \hat{y}(t, \hat{\mathbf{q}})$$

representa una forma de representar las diferencias entre las variables observadas y el comportamiento del modelo estimado. En general los residuos deben ser blancos o aproximadamente blancos y no correlados con la entrada, si el modelo es una buena representación del sistema. De lo contrario, indicaría que o bien el modelo a la identificación no es completa.

La simple representación de los residuos respecto a los valores ajustados; tal que la representación no revela ninguna dependencia clara. Otro diagrama útil es el histograma de los residuos, amplitudes, el cual revela si la distribución difiere de una distribución normal.

Otros tests útiles son los estudiados en el tema 2, test estadístico de auto correlación de los residuos  $\mathbf{e}(t)$ , test de cross-correlación entre los residuos y las entradas, ...

## 3.9.4 Validación del modelo

La pregunta crucial una vez identificado un modelo es sé este modelo es suficientemente bueno para los objetivos considerados. La validación permite comprobar sí el modelo identificado representa el comportamiento real, teniendo en cuenta las limitaciones de los métodos de identificación y los objetivos finales. El problema planteado tiene distintos aspectos:

1. El modelo, ¿satisface suficientemente bien los datos observados?
2. ¿Es el modelo suficientemente bueno para los requerimientos propuestos?
3. ¿Describe el modelo al sistema real?

El método para responder estas cuestiones es confrontar el modelo con más información – como conocimientos a priori, datos experimentales y experiencia – sobre el sistema real.

Puesto que el uso más natural de la identificación consiste en confrontar el modelo con los datos, las técnicas de identificación tienden a centrarse en la pregunta 1. Mientras que la pregunta 3, prescindiendo de los problemas de test, es filosóficamente imposible de contestar, la pregunta 2 es un requerimiento práctico importante. Evaluar si el problema que motiva la tarea de modelización puede ser solucionado usando el modelo obtenido, puede considerarse como la prueba más importante de validación del modelo. Por ejemplo, si un regulador basado en el modelo satisface los requerimientos de control, entonces el modelo será válido, independientemente de la forma que tenga. No obstante, a menudo es imposible, costoso o peligros probar todos los posible modelos con el uso que se ha previsto. Por ello, la confianza en el modelo debe verificarse de otras maneras. Los dos métodos principales son: la verificación de las asunciones a priori y la verificación del comportamiento de la entrada-salida.

#### **3.9.4.1    *Verification of a priori assumptions***

Las pruebas de si las asunciones a priori de los métodos de identificación son ciertos puede realizarse como:

- \* Linealización: Comparación del modelo obtenido a partir de diferentes amplitudes de la entrada. Comparación de modelos con funciones transitorias medidas en ambas direcciones.
- \* Varianza temporal. Comparación del modelo con los diferentes conjuntos de datos.
- \* Residuos: ¿Son los residuos estadísticamente independientes (auto correlación), con media cero?, ¿Son independientes de la señal de entrada (correlación cruzada con respecto la señal de entrada)?
- \* Medias, tendencias de la salida. Comparación del modelo con y sin eliminación de las tendencias.
- \* Señal de entrada: ¿Puede ser medida sin ruido? ¿Es persistentemente excitada?.
- \* Matriz de covarianza de los parámetros estimados: ¿la varianza y covarianza decrementa con el incremento de número de muestras?

#### **3.9.4.2    *Verificación del comportamiento de las entradas-salidas***

Un juicio final del modelo identificado se obtiene comparando el comportamiento modelo medido y predicho de la entrada-salida. Esto puede realizarse como:

- \* Comparación de la variable medida  $y(t)$  y la señal de salida calculada  $\hat{y}(t, \hat{q})$  :
  - con la entrada  $u(t)$  utilizada en la identificación,
  - con otras señales de entrada como escalones o impulsos.
- \* Comparación de la función de correlación cruzada basada en las señales medidas y las del modelo.

Otra manera es validación cruzada, esto significa la verificación del modelo identificado con otro conjunto de medidas. La comparación entre los datos observados y la salida modelo se muestra generalmente mirando las anomalías del modelo no detectadas previamente. La validación cruzada se considera la mejor manera de validar el modelo y la única prueba verdadera para su aplicabilidad general.

## Bibliografía adicional sobre el tema

- [Åström 71] K. J. Astrom, P. Eykhoff. System Identification – A survey. *Automatica*, 7, p. 123-162, 1971
- [Åström80].K. J. Astrom, Maximum likelihood and prediction error methods. *Automatica*, 16, p. 551-574, 1980
- [Bohlin94] Bohlin, T.: Interactive system identification: prospects and pitfalls, Springer Verlag, 1991.
- [Brdys94]Brdys, M. A. -Malinowski, K. : Computer aided control system design, World Scientific, 1994.
- [Evans92]Evans, D. C. -Rees, D. -Jones, D. L.: Design of test signals for identification of linear systems with nonlinear distortion, *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, 41, 6, p. 768- 774, 1992.
- [Fasol80]Fasol, K. H. -Jorgl, H. P. : Principles of model building and identification, *Automatica*, 16, p. 501-518, 1980.
- [Godfrey80]Godfrey. K. R.: Correlation methods, *Automatica*, 16:, p. 527-534, 1980.
- [Godfrey86]Godfrey, K. -Jones, P.: Signal processing for control, Springer-Verlag, 1986.
- [Gustavsson72]Gustavsson, I: Comparison of different methods for identification of industrial processes, *Automatica*, 6, p. 127-142, 1972
- [Iserman80] R.. Iserman. Prancial aspects of process identification, *Automatica*, 16, p. 575-587, 1980
- [Johansson93] R. Johansson. System modeling and identification. Prentice Hall, 1993
- [Kollás93] I. Kollár “On Frecuency Domain Identification of Linear Systema” IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol. 42 No 1, pp. 2-6, Feb. 1993.
- [Landau90]Landau, I. D. : System identification and control design, Prentice Hall, 1990
- [Ljung87] L.Ljung. System identification – Theory for the user, Prentice Hall, 1987.
- [Pintlon92] R. Pintelon, P. Guillaume, Y. Rolai and F. Verbeys, “ Identification of Linear Systems Captured in a Feedback Loop” IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol. 41, No 6, pp. 747-754, Dec 1992.
- [Söderström89] T. Söderström, P. Stoica. System identification, Prentice Hall, 1989.
- [Zhu93] Y. Zhu – T. backx. Identification of multivariable idustrial process – for simulation, diagnosis and control. Springer-Verlag, 1993.

[Walter97]Walter, E – Pronzato, L. Identification of Parametric Models from Experimental Data. Masson Great Britain, 1997.