

ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO. TIPOS DE SISTEMAS. COEFICIENTES DE ERROR.

Objetivo: Analizar el error en estado estacionario para sistemas con realimentación unitaria y no unitaria. Como así también definir el tipo de sistema, es decir a que señal de referencia es capaz de seguir, con error nulo en régimen permanente.

Introducción.

Antes de emprender el análisis del error en estado estable, se debe clarificar cuál es el significado de error del sistema. En general el error se puede ver como una señal que rápidamente debe ser minimizada y si es posible reducida a cero.-

Considérese un sistema de control SISO, como el indicado en la figura 1

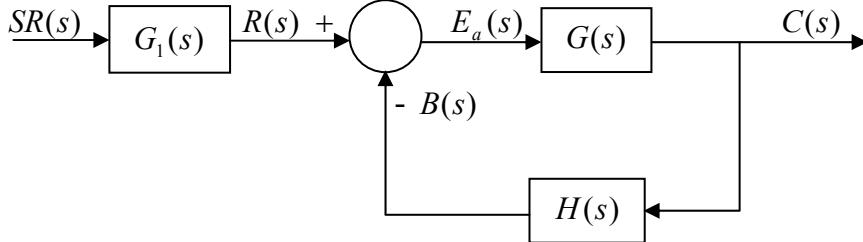


Fig. 1 Esquema de bloques para un control SISO

El error verdadero se define como la diferencia entre la señal de referencia $Sr(t)$ y la señal de salida $c(t)$, mientras que el error actuante, o señal activa, es la entrada al bloque $G(s)$, que se denominara en adelante $e_a(t)$, (si está en las unidades de $r(t)$) y $e^a(t)$ si la dimensión es la misma que tiene la señal de referencia $Sr(t)$.-

$$E(s) = SR(s) - C(s) \quad (\text{Error Verdadero}); \text{ la unidad es la misma que la de } Sr(t). -$$

$$E_a(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s) = SR(s)G_1(s) - H(s)C(s) : (\text{Error Actuante, o Señal Activa})$$

La dimensión de la $ea(t)$ es igual a la de $r(t)$, generalmente en [Volt], pero también suele expresarse en la misma unidad que la referencia, $e^a(t)$, por ejemplo: [$^{\circ}\text{C}$, rad., rad/seg., m/seg,...etc.], con su **valor equivalente** como se verá mas adelante.

La función de transferencia $H(s)$, se supondrá de acá en más que no tiene polos ni ceros en el origen y representa al sistema de **medición**, que generalmente realiza la medición de la variable controlada $c(t)$ y la convierte en otra variable, $b(t)$, más conveniente de procesar y transmitir como ser, tensión, corriente, presión, etc.

Por lo tanto $H(0) = K_H = \text{cte.}$ -

Como se puede apreciar la **relación** entre la **dimensión** de la señal de salida, por ejemplo, $^{\circ}\text{C}$, metros, rad/seg. etc., y la **señal de realimentación**, o la señal de entrada que es por lo general Volts, **estará dada por la ganancia estática de la función de transferencia del elemento de medición $H(s)$ o sea K_H .**

Por lo tanto deberá ser la **misma relación** entre la señal de referencia y la señal de entrada, o sea, la ganancia estática de $G_1(s)$ deberá ser también K_H .

Como la función de transferencia $G_1(s)$, del llamado selector de referencia, (usualmente una ganancia y siempre tiene una dimensión, por ejemplo [Volt/rad, Volt/°C, Volt/m etc.]), representa al elemento que convierte la señal de referencia $Sr(t)$ en una variable adecuada, la de entrada $r(t)$, para poder ser comparada con la medición de la salida, $b(t)$, por ende, $G_1(s) = K_{SR} = K_H$

Si se supone que $G_1(s) = K_{SR}$, la ganancia estática de la función de transferencia del sistema será: $M'(0) = \frac{C(0)}{SR(0)} = K_{SR}$ $M(0) = \frac{K_{SR} G(0)}{1 + G(0)H(0)} = \frac{K_{SR}}{\frac{1}{G(0)} + H(0)}$

Como se puede ver solo si $G(0) \rightarrow \infty$, $K_{SR} = K_H$, en consecuencia si $G(s)$ no tiene polos en el origen y se hace $K_{SR} = K_H$ el sistema tendrá un error de estado estacionario a una entrada escalón, (el sistema será **Tipo cero**).-

Si el **error verdadero fuera siempre nulo** para una referencia escalón, K_{SR} deberá tener en el valor: $K_{SR} = \frac{1}{G(0)} + H(0) = \frac{1}{G(0)} + K_H$, pero ya **no se respetaría la relación comentada** entre $Sr(t)$ y la de entrada $r(t)$.

Si $G(0) \rightarrow \infty$, (tiene un polo en el origen), y K_{SR} se hace igual a la ganancia estática de $H(s)$, en estos casos se tendrá dicho error nulo, sistema **Tipo uno**.-

Por lo tanto la señal de referencia sería:

$$Sr(t) = \frac{r(t)}{K_{SR}} \quad \text{que se empleará así:}$$

$$Sr(t) = \frac{r(t)}{K_H}$$

En consecuencia la señal del error verdadero será:

$$e(t) = \frac{r(t)}{K_{SR}} - c(t) \quad \text{que se tomará así:}$$

$$e(t) = \frac{r(t)}{K_H} - c(t)$$

Para el tiempo tendiendo a infinito será el error de estado estacionario en estudio. Cuando $H(s)$ y $G_1(s)$ **valen 1**, se dice que el sistema es de **realimentación unitaria** y, para este caso los **dos errores** coinciden y además $Sr(t) = r(t) \Rightarrow SR(s) = R(s)$.-

Sistemas con realimentación unitaria

Estos sistemas tienen un diagrama en bloques como el indicado en la figura 2. En ellos la señal de referencia y la de entrada coinciden o sea: $SR(s) = R(s)$

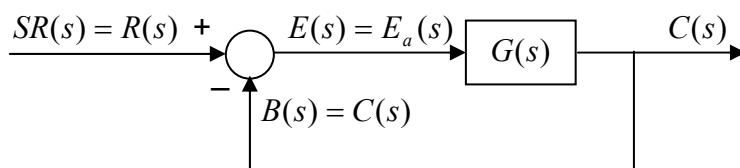


Fig. 2. Diagrama en bloques para un sistema de realimentación unitaria.

En general cualquier función transferencia puede ser escrita como:

$$G(s) = \frac{K' n (s + z_1) \dots (s + z_m)}{s^n (s + p_1) \dots (s + p_k)} = \frac{K' n \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{s^n \prod_{i=1}^k (s + p_i)} \quad \text{donde } n + k \geq m$$

Para los sistemas de **realimentación unitaria** el “**tipo de sistema**” se define según sea el valor de “n” en la expresión anterior. Es decir según el número de integraciones puras en la cadena directa.

Ejemplo:

$$G(s) = \frac{(s+1)}{s^2(s^2 + 3s + 4)} \quad \text{es de tipo 2}$$

El tipo de sistema indica que orden de señales de referencia puede “seguir” un sistema con error nulo en régimen estacionario. Aquí “el orden” se refiere a la potencia de s en la transformada de Laplace de la referencia. Para ver esto, investigaremos el error en estacionario para varios tipos de sistemas, debido a las señales de referencia: impulso $R(s)=1$, escalón $R(s)=1/s$, rampa $R(s)=1/s^2$ y parábola $R(s)=1/s^3$.

El error para el sistema de realimentación unitaria, se obtiene como:

$$E(s) = E_a(s) = R(s) - C(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

En régimen permanente, el error se obtiene aplicando el teorema del valor final, de la transformada de Laplace:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

1.- Entrada Impulso: $R(s)=1$

Sistema Tipo “0”

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_0 \prod (s + z_j)}{s^0 \prod (s + p_i)}} 1 = 0$$

Sistema tipo “1”

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_1 \prod (s + z_j)}{s^1 \prod (s + p_i)}} 1 = 0 - \frac{1}{1 + \frac{K'_1 \prod z_j}{0 \prod p_i}} 1 = 0$$

Sistema tipo “2” y superiores

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_2 \prod(s + z_j)}{s^2 \prod(s + p_i)}} = 0 \frac{1}{1 + \frac{K'_2 \prod z_j}{0 \prod p_i}} = 0$$

Resumen: Un impulso puede ser seguido en régimen permanente, sin error, por todos los tipos de sistemas.

2.-Entrada escalón R(s)=1/s

Sistema Tipo “0”

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_0 \prod(s + z_j)}{s^0 \prod(s + p_i)}} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + K_0}$$

Sistemas Tipo “1” y mayores

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_1 \prod(s + z_j)}{s^1 \prod(s + p_i)}} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

Resumen: Un escalón puede ser seguido sin error, en régimen permanente, por los sistemas tipo uno y superiores.

3.- Entrada rampa R(s)=1/s^2

Sistema tipo “0”

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_0 \prod(s + z_j)}{s^0 \prod(s + p_i)}} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Sistema Tipo “1”

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_1 \prod(s + z_j)}{s^1 \prod(s + p_i)}} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{K_1}$$

Sistema Tipo “2” y superiores

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_2 \prod(s + z_j)}{s^2 \prod(s + p_i)}} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

Resumen: Una rampa puede ser seguida en régimen permanente por sistemas tipo “2” y superiores.

4.-Entrada parábola R(s)=1/s^3

Sistema Tipo “0”,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_0 \prod(s + z_j)}{s^0 \prod(s + p_i)}} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Sistema Tipo “1”,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_1 \prod(s + z_j)}{s^1 \prod(s + p_i)}} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Sistema tipo “2”,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_2 \prod(s + z_j)}{s^2 \prod(s + p_i)}} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{K_2}$$

Sistema tipo “3” y superiores

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_3 \prod(s + z_j)}{s^3 \prod(s + p_i)}} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Resumen: Una entrada parábola puede ser seguida sin error en estacionario por los sistemas tipo tres y superiores.

Coeficientes de error.

Se definen los coeficientes de error como:

Coeficiente de error al escalón:

c.e.e. = $K_p \equiv K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$, como $E(s)$ y $C(s)$ tienen las mismas unidades, por tanto K_0 es adimensional.-

Coeficiente de error a la rampa:

c.e.r. = $K_v \equiv K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$, K_1 tiene las dimensiones de segundo⁻¹.-

Coeficiente de error a la parábola:

c.e.p. = $K_a \equiv K_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$, K_2 tiene las dimensiones de segundo⁻².-

Luego los errores en estado estacionario para las señales de prueba unitarias son:

Para el escalón unitario en la entrada: $e(\infty) = \frac{1}{1 + K_0}$

Para la rampa unitaria en la entrada: $e(\infty) = \frac{1}{K_1}$

Para la parábola unitaria en la entrada: $e(\infty) = \frac{1}{K_2}$

Resumiendo los resultados obtenidos en un cuadro de valores, para las diferentes señales de referencia unitarias se tendrá, (recordar que $SR(s) = R(s)$):

Error en estado estacionario para sistemas de realimentación unitaria				
Tipo de Sistema	Impulso [$R(s)=1$]	Escalón unitario [$R(s) = 1/s$]	Rampa unitaria [$R(s) = 1/s^2$]	Parábola unitaria [$R(s) = 1/s^3$]
0	0	$\frac{1}{1 + K_0}$	∞	∞
1	0	0	$\frac{1}{K_1}$	∞
2	0	0	0	$\frac{1}{K_2}$

Ejemplo.

a) Dado el error calcular el rango de la ganancia del lazo (problema inverso).

Sea el sistema de realimentación unitaria, cuya planta tiene la transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

Hallar el valor de K de manera que el error en estacionario sea $e(\infty) < 0.1$

Solución:

El sistema es tipo cero, de manera que el error es:

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_0}, \quad \text{donde} \quad K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

$$\frac{1}{1+K_0} = \frac{2}{2+K} \leq 0.1 \Rightarrow K \geq 18$$

b) Dado el sistema calcular los errores (Problema directo)

Considere el sistema con realimentación unitaria, cuya planta es:

$$G(s) = \frac{K(s+3.15)}{s(s+1.5)(s+0.5)}$$

El rango de K para la estabilidad del sistema es: $0 < K < 1.304$.-

Determine el error en estacionario cuando el sistema es excitado con diferentes tipos de señales de referencia, con la ganancia variando entre: $0 < K < 1.304$.-

- Entrada escalón $\Rightarrow e(\infty) = 0$: pues el sistema es tipo 1.
- Entrada rampa:

$$e(\infty) = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{K \frac{(3.15)}{(1.5)(0.5)}} = \frac{1}{4.2K}$$

En este caso $e(\infty)$, puede regularse, ajustando **K dentro del rango ya mencionado.**

- Entrada parábola $\Rightarrow e(\infty) = \infty$
-

Error en estacionario debido a perturbaciones.

Cuando sobre el sistema actúa una perturbación, además de la referencia, por ejemplo el sistema de control de posición de una antena como se indica la figura 3.

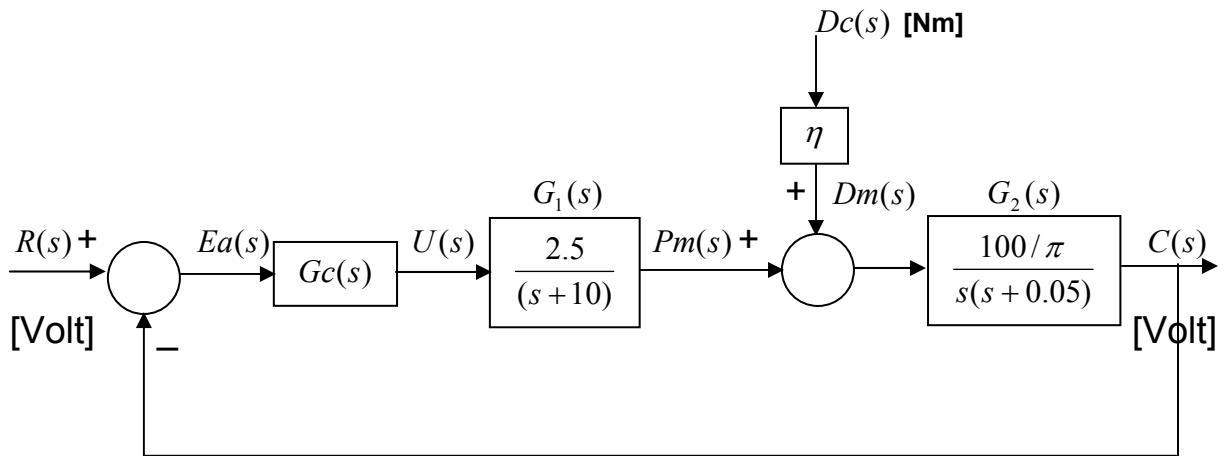


Figura 3. Sistema con perturbación

El error debido a la perturbación está dado por.

$$E(s) = -C(s) = \frac{-\eta G_2(s)}{1 + G_c(s) G_1(s) G_2(s)} Dc(s)$$

Si la perturbación del par perturbador en la carga es de forma escalón **unitario** el error en estacionario se determina mediante:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-\eta G_2(s)}{1 + G_c(s) G_1(s) G_2(s)} \frac{1}{s}$$

$$e(\infty) = \frac{-\eta}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) G_1(s)}$$

La perturbación es usualmente una carga que actúa sobre el sistema fuera del modelo normal. Nosotros debemos esperar que no haya error de posición, debido al polo del origen creado por el motor. ¡Perfecto!

Ahora, supongamos que se levanta viento, dando lugar a la aparición de una cupla sobre la antena de **1Nm**, desplazando la antena de su set-point. Esta cupla se conoce como "**cupla de perturbación**", la cual impactará sobre el error en estado estacionario. En este caso la cupla de perturbación reducida por la relación de engranajes $\eta = 0.10$, aparece sobre el eje del motor, generando una corriente de perturbación, que a su vez genera un par de reacción a la perturbación, en el eje del motor. Si el controlador es uno proporcional, $G_c(s) = K_c$, el diagrama en bloques acondicionado tiene el aspecto indicado en la figura 4:

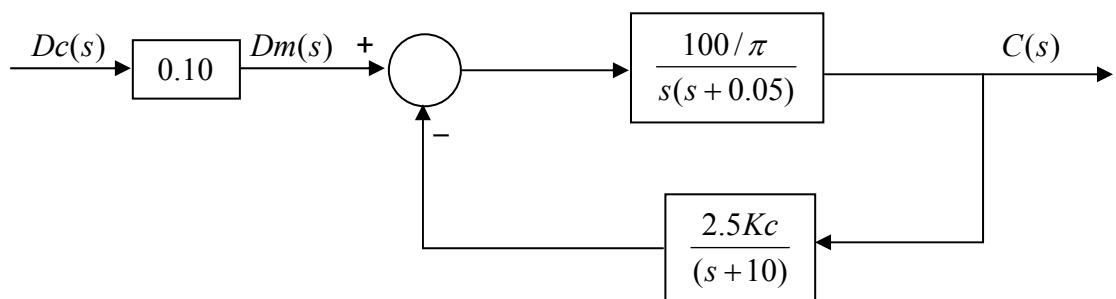


Figura 4. Diagrama en bloques del control de posición modificado.

Donde la perturbación $D_c(s)$ es un escalón de 1Nm.-

¿Cómo afecta esto al error en estacionario? Como se sabe el error en estacionario está dado por.

$$e(\infty) = e_R(\infty) + e_{D_c}(\infty);$$

El error debido a la entrada de referencia escalón será nulo pues el sistema es tipo1. El error debido a la perturbación lo calculamos con la relación ya deducida:

$$e_{D_c}(\infty) = \frac{-\eta}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G_1(s)}$$

Para nuestro caso será:

$$e_{D_c}(\infty) = \frac{-0.1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+0.05)}{100/\pi} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2.5Kc}{(s+10)}} = \frac{-1}{2.5Kc}$$

Por lo tanto:

$$e(\infty) = \frac{-0.40}{Kc}$$

El cálculo realizado muestra que aumentando la ganancia del controlador, Kc se disminuye el efecto de la perturbación sobre nuestro sistema de control automático.

Sistemas con realimentación no unitaria

a) error verdadero.

El caso general se indica en la figura 5, llamaremos $G(s) = G_c(s)G_p(s)$, donde $G_c(s)$ y $G_p(s)$ son las funciones de transferencia del controlador y de la planta.-

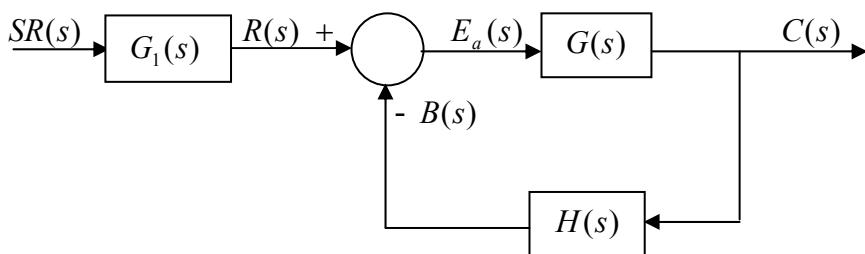


Figura 5. Sistema SISO con realimentación no unitaria

Se considerará en este estudio en principio que la ganancia del selector de referencia tiene un valor cualquiera, como se ya dijo generalmente es igual a la ganancia estática de la función de transferencia del camino de realimentación.- El error verdadero es:

$$E(s) = SR(s) - C(s) = SR(s) - G_1(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} SR(s)$$

$$E(s) = \left[\frac{1 + G(s)[H(s) - G_1(s)]}{1 + G(s)H(s)} \right] SR(s)$$

El cálculo efectuado con el error verdadero, es similar a considerar una adecuación del diagrama en bloques indicado en la figura 5, tal como se muestra en la figura 6.

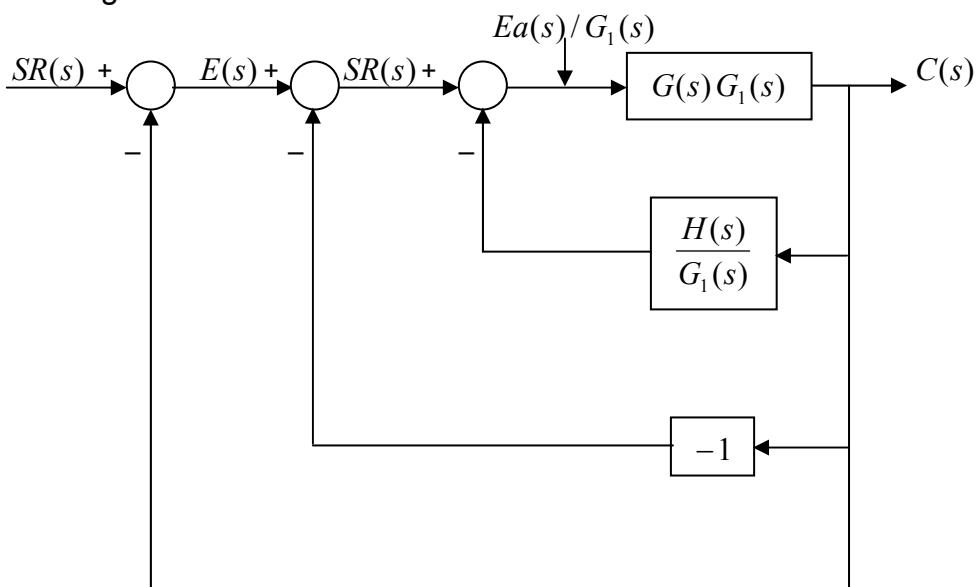


Figura 6. Diagrama en bloque equivalente.

Reduciendo el diagrama en bloque equivalente precedente, obtenemos el indicado en la figura 7.

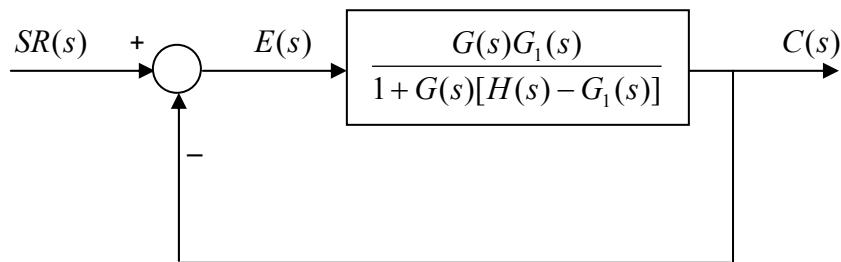


Figura 7. Diagrama en bloques reducido de realimentación unitaria.

Calculando el error verdadero, en el diagrama de la figura 7, obtenemos el mismo resultado que el ya obtenido precedentemente.

$$E(s) = \left[\frac{1 + G(s)[H(s) - G_1(s)]}{1 + G(s)H(s)} \right] SR(s)$$

Al sistema de realimentación unitaria de la figura 7 le aplicamos todo lo ya dicho respecto al error verdadero en régimen estacionario, tipo de sistemas y coeficientes de error de los sistemas con realimentación unitaria.

El diagrama se puede simplificar así:

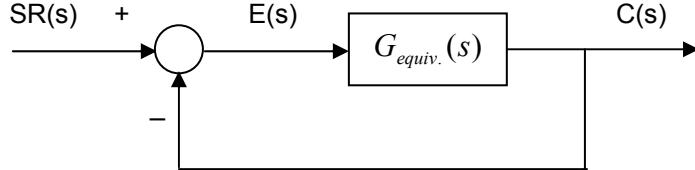


Figura 7 a.

Donde la $G_{equiv.}(s)$ es:

$$G_{equiv.}(s) = \frac{G_1(s)G(s)}{1 + G(s)[H(s) - G_1(s)]} \quad \text{si } G_1(s) = K_H :$$

$$G_{equiv.}(s) = \frac{K_H G(s)}{1 + G(s)[H(s) - K_H]}$$

- **Como se puede apreciar si $H(s) = Cte = K_H$, la función equivalente del camino directo del sistema con realimentación unitaria será $G_{equiv.}(s) = K_H G(s)$, por lo tanto el Tipo del sistema coincidirá siempre con los polos en el origen que tenga la función de trasferencia real del camino directo $G(s)$.** –
- **Si $H(s)$ es una función con polos y ceros, (recordar que no pueden estar el origen como se ha supuesto), el Tipo del sistema quedará determinado por los integradores de la función $G(s)$, solo en los casos que la misma tenga uno o ningún polo en el origen.**
- **Si $G(s)$ tiene dos o más integradores, el Tipo del sistema será el indicado por los integradores de la función $G(s)$, solamente en el caso que la función de transferencia $H(s)$ sea una constante, $H(s) = Cte = K_H$.** –

Comentario: Considerar como error del sistema al “error verdadero”, significa tomar como salida del mismo la variable **controlada verdadera**, es decir $C(s)$, la cual se compara con la **señal de referencia $SR(s)$** .

Otra forma de calcular el error verdadero es con los coeficientes de los polinomios de la función de transferencia del sistema $M'(s)$. –

Se seguirá suponiendo que: $\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = K_H$ y además que: $Sr(t) = \frac{r(t)}{K_{SR}}$ con: $K_{SR} = K_H$

El error verdadero será:

$$e(t) = \frac{r(t)}{K_H} - c(t)$$

Aplicando el teorema del valor final ser tendrá:

$$e_{EE} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s E(s)]$$

$[sE(s)]$ debe tener todos sus polos en el semiplano izquierdo del plano s, esto equivale a decir que el sistema sea estable. Transformado por Laplace la primera ecuación:

$$E(s) = \frac{R(s)}{K_H} - C(s) = \frac{R(s)}{K_H} - M(s)R(s) = \frac{1}{K_H} [1 - K_H M(s)] R(s)$$

Como $K_H M(s) = M'(s)$, se tendrá:

$$e_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{K_H} [1 - M'(s)] R(s) s$$

Si, $Sr(t) = \mu_s(t) = \frac{r(t)}{K_H} \Rightarrow r(t) = K_H \mu_s(t) \Rightarrow r(t) = R \mu_s(t) \Rightarrow R = K_H \cdot -$

Como $R(s) = \frac{R}{s} = \frac{K_H}{s}$, se tendrá:

$$e_{EE} \text{ (referencia escalón unitario)} = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - M'(s))$$

Si, $Sr(t) = t \mu_s(t) = \frac{r(t)}{K_H} \Rightarrow r(t) = K_H t \mu_s(t) \Rightarrow r(t) = R t \mu_s(t) \Rightarrow R = K_H \cdot -$

Como $R(s) = \frac{R}{s^2} = \frac{K_H}{s^2}$, se tendrá:

$$e_{EE} \text{ (referencia rampa unitaria)} = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - M'(s)) \frac{1}{s}$$

Si, $Sr(t) = \frac{1}{2} t^2 \mu_s(t) = \frac{r(t)}{K_H} \Rightarrow r(t) = \frac{1}{2} K_H t^2 \mu_s(t) \Rightarrow r(t) = \frac{R}{2} t^2 \mu_s(t) \Rightarrow R = K_H \cdot -$

Como $R(s) = \frac{R}{s^3} = \frac{K_H}{s^3}$, se tendrá:

$$e_{EE} \text{ (referencia parabólica)} = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - M'(s)) \frac{1}{s^2}$$

Se supondrá que la función de transferencia del sistema $M(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$, no tiene polos en el origen y es de la forma:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}; \quad \text{donde: } n > m \text{ y } \alpha_0 \neq 0$$

Por lo tanto $M'(s)$ será:

$$M'(s) = \frac{C(s)}{SR(s)} = \frac{K_H b_m s^m + K_H b_{m-1} s^{m-1} + \dots + K_H b_2 s^2 + K_H b_1 s + K_H b_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Si llamamos:

$$K_H b_0 = b'_0; K_H b_1 = b'_1; K_H b_2 = b'_2 \text{ etc. -}$$

$$M'(s) = \frac{C(s)}{SR(s)} = \frac{b'_m s^m + b'_{m-1} s^{m-1} + \dots + b'_2 s^2 + b'_1 s + b'_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Por ende se tendrá:

$$[1 - M'(s)] = \frac{s^n + \dots + (\alpha_2 - b'_2)s^2 + (\alpha_1 - b'_1)s + (\alpha_0 - b'_0)}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Reemplazando en las tres expresiones del error verdadero de estado estacionario, para las tres señales de referencia unitarias se llega al valor de los mismos, en función de los coeficientes de la función de transferencia $M'(s)$ y se resumen de la tabla siguiente:

Si la magnitud de los escalones o pendientes de las rampas de las señales de referencias, **no son unitarias**, los errores aquí indicados se deberán **multiplicar** por el valor de esas magnitudes.

$M'(s)$	$\alpha_0 \neq b'_0$	$\alpha_0 = b'_0$ $\alpha_1 \neq b'_1$	$\alpha_0 = b'_0$ $\alpha_1 = b'_1$ $\alpha_2 \neq b'_2$	$\alpha_0 = b'_0$ $\alpha_1 = b'_1$ $\alpha_2 = b'_2$
$Sr(t) \downarrow$	$\frac{\alpha_0 - b'_0}{\alpha_0}$	0	0	0
$Sr(t) = \mu_S(t)$	∞	$\frac{\alpha_1 - b'_1}{\alpha_0}$	0	0
$Sr(t) = t\mu_S(t)$	∞	∞	$\frac{\alpha_2 - b'_2}{\alpha_0}$	0

b) Error actuante.

El error actuante se puede determinar en la **misma dimensión o unidad que sale del comparador**, generalmente en Volts, o en la **misma unidad de la señal de referencia o de la de salida**, por ejemplo °C, rad/seg., metros, radianes, etc.

Como se sabe:

$$Ea(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)} ; \text{(en Volts generalmente), por lo tanto:}$$

$$Ea(s) = \frac{1}{1+L(s)} K_H SR(s) ; \text{ aplicando el teorema del valor final:}$$

$$ea(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} ea(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Ea(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K_H}{1+L(s)} SR(s) s$$

$$\text{Si } Sr(t) = \mu_s(t) \Rightarrow SR(s) = \frac{1}{s}$$

Por lo tanto se tendrá:

$$ea(\infty) (\text{escalón de referencia}) = \frac{K_H}{1+L(0)} ; \text{ Generalmente en Volts. -}$$

$$\text{Si } Sr(t) = t\mu_s(t) \Rightarrow SR(s) = \frac{1}{s^2}$$

Por ende el error actuante será:

$$ea(\infty) (\text{rampa de referencia}) = \frac{K_H}{\lim_{s \rightarrow 0} s L(s)} ; \text{ Generalmente en Volts. -}$$

$$\text{Si } Sr(t) = \frac{1}{2}t^2\mu_s(t) \Rightarrow SR(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$ea(\infty) (\text{parábola de referencia}) = \frac{K_H}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 L(s)} ; \text{ Generalmente en Volts. -}$$

Para considerar el error actuante, **en la misma unidad que SR(s)**, como ya se menciono, el diagrama en bloques de la figura 5, conviene dibujarlo como indica la figura 8.

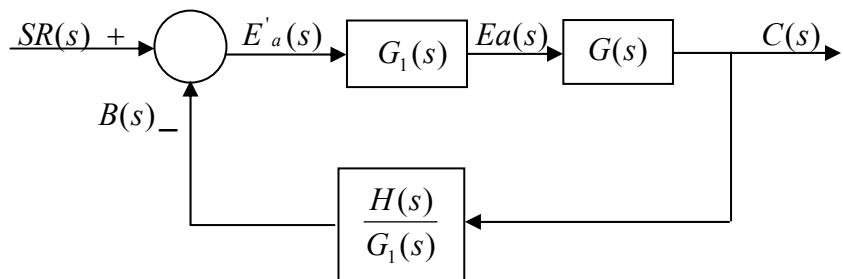


Figura 8. Indicación del error actuante.

Llamaremos $e'a(t)$ al error actuante en la misma dimensión que la $Sr(t)$.

Como se puede apreciar la relación entre $ea(t)$ y $e'a(t)$, si $G_1(s) = K_{SR} = K_H$ será.

$$e^{'a}(t) = \frac{ea(t)}{K_H}$$

El error actuante está dado por:

$$E^{'a}(s) = SR(s) - \frac{H(s)}{G_1(s)} C(s)$$

Reemplazando la salida $C(s)$ en función de $SR(s)$ obtenemos, la expresión para el cálculo del error actuante, en las mismas unidades que la señal de referencia:

$$E^{'a}(s) = \left[\frac{1}{1 + G(s)H(s)} \right] SR(s)$$

Este error actuante, podría considerarse como el que se obtendría de un sistema de realimentación unitaria como el indicado en la figura 9.

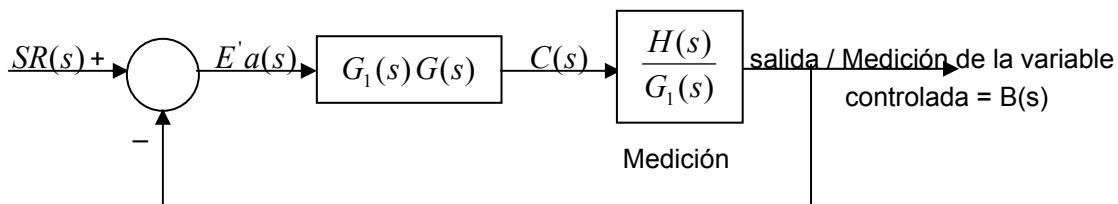


Fig. 9. Sistema equivalente de realimentación unitaria mostrando $E^{'a}(s)$.

Al sistema representado por el diagrama en bloques de la figura 9, se le puede aplicar todo lo dicho respecto de los sistemas de realimentación unitaria, en cuanto al cálculo del error, tipos de sistemas y coeficientes de error.-

Llamando: $G'(s) = G_1(s)G(s) = K_H G(s)$ y $H'(s) = H(s)/G_1(s) = H(s)/K_H$,

$G'(s)H'(s) = G(s)H(s)$, la función del lazo es igual a la real.-

La ganancia estática de la función de transferencia $H'(s)$ es siempre uno $H'(0) = 1$.

Recordar que el error actuante está en la **misma unidad** que la señal de referencia.-

Comentario: Considerar como error del sistema al “**error actuante**”, significa tomar como salida del sistema la **medición de la variable controlada verdadera**, es decir

$B(s) = \frac{H(s)}{G_1(s)} C(s)$, la cual se compara con la **señal de referencia $SR(s)$** .

Conclusión:

Desde el punto de vista teórico cualquiera de los dos errores definidos como “**verdadero**” o “**actuante**”, pueden considerarse como correctos. No obstante hay que tener bien presente cuáles son las variables que se toman como “**salida**” del sistema, ya que si se pierde de vista este concepto pueden presentarse dificultades en la interpretación del “**error en estado estacionario**”, tipos de sistema y coeficientes de error, como así también sobre la interpretación y análisis de los resultados obtenidos con sistemas **reales** en la práctica.

Análisis del error verdadero y actuante para algunos sistemas reales.

Ejemplo 1. Control de posición angular con motor de CC.

Sea un sistema de control de posición basado en un motor de CC, como el indicado en la figura 10.- En la misma se ha hecho $K_{SR} = Kp_1$ y $H(s) = K_H = Kp_2$.

Se tomarán tres valores de Kp_1 , menor, igual y mayor que $Kp_2 = K_H$.

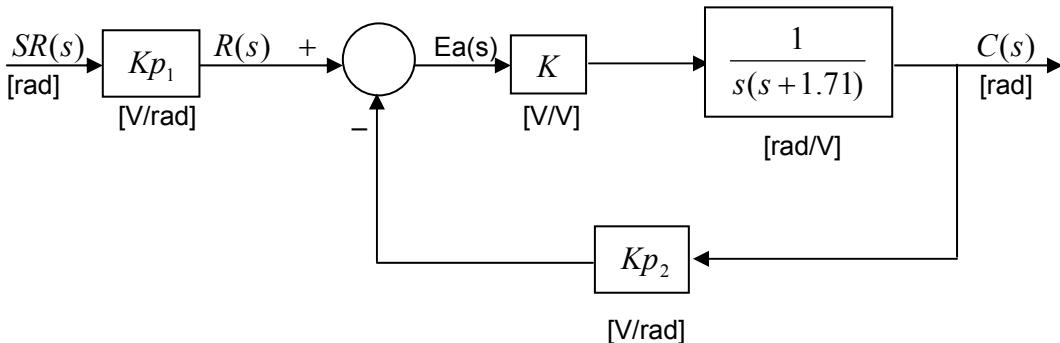


Figura 10. Diagrama en bloques del control de posición.

A los fines de determinar el comportamiento en estacionario, adoptaremos los siguientes valores para los parámetros:

K : Ganancia del Amplificador : 10[V/V]

$Kp_1 = K_{SR} = G_1(s) = \text{Cte del potenciómetro de entrada}$: tres valores: 0.5; 0.8; y 1.0 [V/rad]

$K_H = H(0) = Kp_2$: Cte. del potenciómetro de salida : 0.80 [V/rad]

1 a) Error verdadero.

En este caso el diagrama en bloques equivalente será el indicado en la figura 11, donde se explicitan el error verdadero y la salida verdadera.

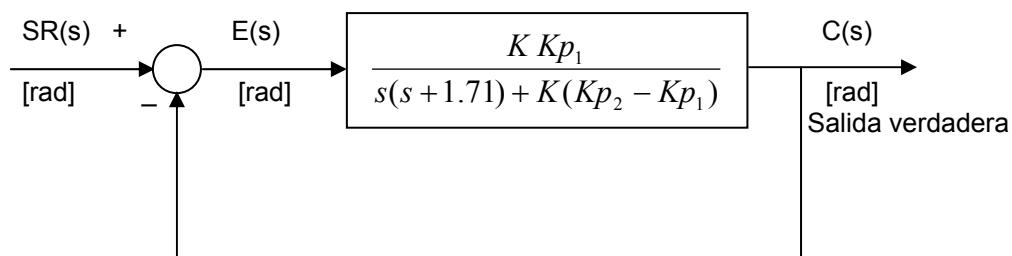


Fig. 11. Diagrama equivalente de realimentación unitaria con la salida verdadera.

De acuerdo a la figura 11, el sistema desde la salida verdadera a la señal de referencia, es de **"Tipo cero"** si $Kp_1 \neq Kp_2$ y **Tipo uno** si $Kp_1 = Kp_2$ pues $G(0) = \infty$, esto último **sería lo correcto** y está de acuerdo con lo ya comentado anteriormente.- Con lo cual podemos afirmar que el sistema tiene error verdadero constante al escalón unitario en la señal de referencia, e infinito a la unitaria si $Kp_1 \neq Kp_2$.

En cambio si $Kp_1 = Kp_2$ el sistema sería **Tipo uno** y el error verdadero al escalón sería nulo, situación mas real ya que $G(s)$ tiene un polo en el origen.-

Los coeficientes de error son respectivamente, para los tres valores de Kp_1 :

$$c.e.\text{escalón.} = Ko = \lim_{s \rightarrow 0} G_{\text{equiv.}}(s) = \frac{Kp_1}{Kp_2 - Kp_1} = 1,67 ; \infty \text{ y } -5$$

$$c.e.\text{rampa.} = K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{\text{equiv.}}(s) = 0 ; 4.67836 \text{ y } 0$$

Luego los “errores verdaderos” en estacionario serian:

$$e(\infty)\text{escalón} = \frac{1}{1+Ko} = 0,375 ; 0 \text{ y } -0.25$$

$$e(\infty)\text{rampa} = \frac{1}{K_1} = \infty ; 0.21375 \text{ e } \infty$$

Conclusión:

Aplicando un escalón de amplitud 1rad. en la señal de referencia, la salida (posición verdadera del eje del motor) en estado estacionario termina en un escalón de amplitud igual a 0.625 rad, (si $Kp_1 < Kp_2$, $Kp_1 = 0.50$), por ende con un error verdadero de 0.375 rad.-.

Aplicando una rampa unitaria en la señal de referencia, la salida (posición verdadera del eje del motor) en estado estacionario, termina en una rampa de menor pendiente, (si $Kp_1 \neq Kp_2$), por eso el error verdadero es infinito.

Si $Kp_1 = Kp_2$ el error al escalón unitario en $Sr(t)$ será nulo y a la rampa unitaria la pendiente es igual y el error será finito, sistema será tipo uno como sabemos-

Si $Kp_1 > Kp_2$ el error al escalón unitario en $Sr(t)$ será negativo, por lo tanto la posición final será mayor que la deseada. A una rampa el mismo será infinito.

El sistema de control considerado, tomando como salida verdadera a la variable $C(t)$, se comporta como de tipo cero, (si $Kp_1 \neq Kp_2$), y puede decirse que el mismo: sigue a un escalón con error verdadero constante y no sigue a una rampa.-

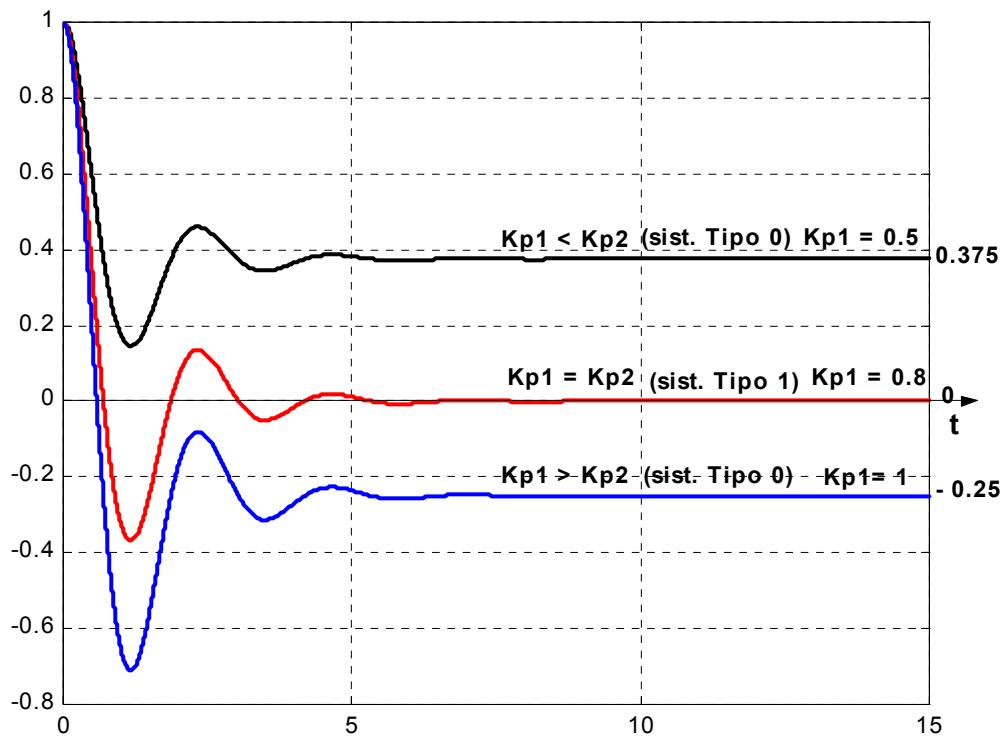
Si $Kp_1 = Kp_2$, el sistema se comporta como de tipo uno y puede decirse que el mismo sigue a un escalón con error verdadero nulo y tiene un error finito para una señal de referencia rampa unitaria.-

Si $Kp_1 > Kp_2$ el error será negativo para el escalón de referencia, la salida será mayor que la deseada, y además no sigue a una rampa.-

Como en este sistema tiene la $G(s)$ con un polo en el origen, ya se dijo que si la $H(s) = \text{Cte.}$, y la ganancia del selector de referencia es: $Kp_1 = K_H = 0.8$, el error verdadero al escalón de regencia será nulo pues el sistema sería de Tipo uno.-

Empleando Simulink puede obtenerse el error verdadero en función del tiempo, y en especial del referido error para comportamiento en régimen estacionario. En las graficas de la figura 12 se puede ver todo lo comentado para los tres valores de la ganancia del selector de referencia, Kp_1 .

Error verdadero con una señal de referencia escalón unitario



Error verdadero para una señal de referencia rampa unitaria

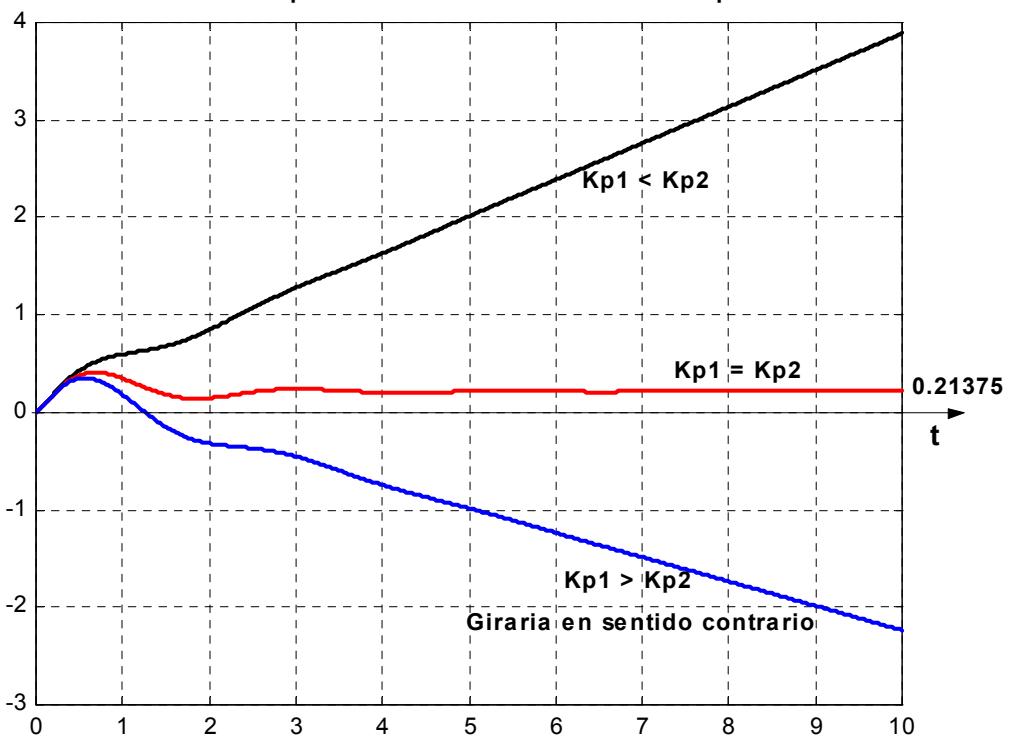


Fig. 12. Error verdadero para $S_r(t)$ escalón y rampa unitarios.

1 b) Error actuante.

Cuando consideramos el error actuante, **en las mismas unidades que SR(s)**, la salida del sistema es la señal de salida medida $B(s)$, y la entrada la señal de referencia $SR(s)$, como se indica en el diagrama en bloques de la figura 13
Como $G_1(s) = Kp_1$ y $H(s) = Kp_2$, se tendrá el diagrama de bloques siguiente:

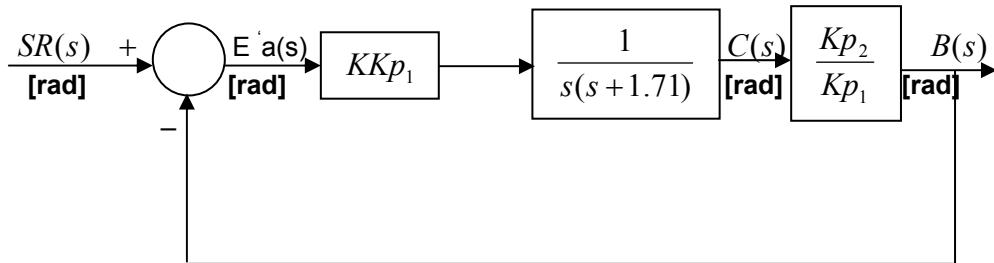


Figura 13. Diagrama en bloques indicando como salida la medición.

De acuerdo a la figura 13 desde la “salida” medida en radianes, a la entrada de referencia, el “sistema” es de **“Tipo 1”**, **siempre** con lo cual podemos afirmar que en estas condiciones el sistema tendrá **error actuante nulo al escalón y constante a la rampa**.

Además si $Kp_1 = Kp_2$, $c(t)\{rad\} = b(t)\{rad\}$, **serían iguales**, y no proporcionales.-

Los coeficientes de error que **son independientes del valor de Kp_1** y serán:

$$c.e.e.(escalón) = Ko = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \frac{1}{0} = \infty$$

$$c.e.r.(rampa) = K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \frac{KKp_2}{1.71} = 4.68$$

$$c.e.p.(parábola) = K_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s) = 0$$

Los errores actuantes en estado estacionario también serán **independientes del valor de Kp_1** y sus valores son:

$$e'a(\infty)(escalón) = \frac{1}{1+Ko} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

$$e'a(\infty)(rampa) = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{4.68} = 0.21(rad.)$$

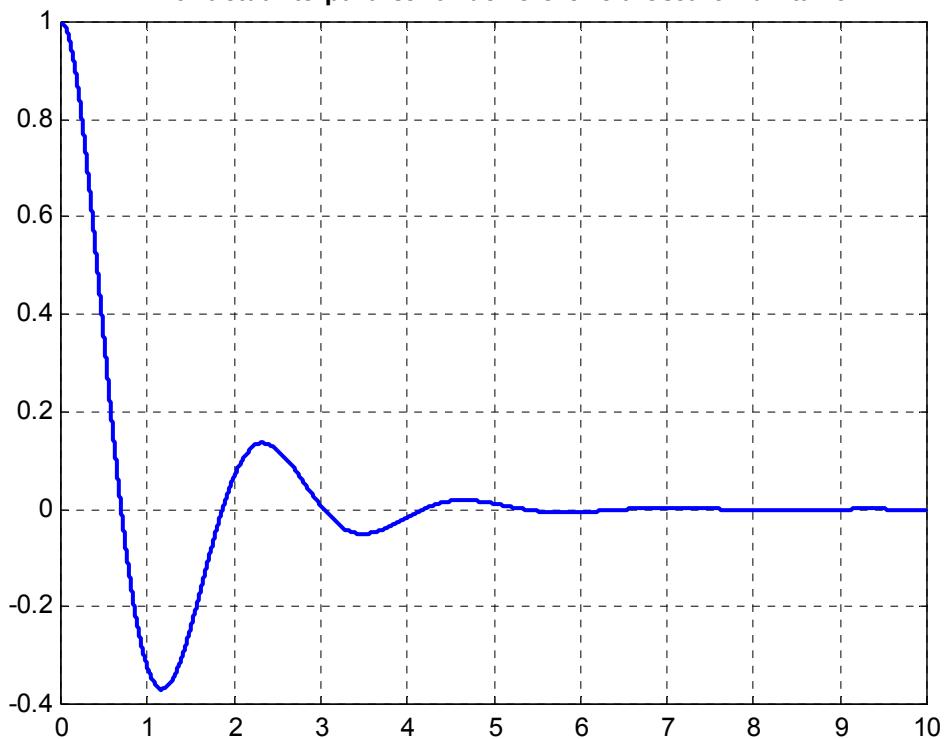
$$e'a(\infty)(parábola) = \frac{1}{K_2} = \frac{1}{0} = \infty$$

Conclusión.

Considerando como “salida del sistema a la medición”, puede decirse que el mismo se comporta como **de tipo uno** y, que en este caso el mismo sigue a un escalón con error actuante nulo, y a una rampa con error actuante constante y no sigue a una parábola.

En forma gráfica (empleando Simulink), se obtiene la respuesta temporal para entrada escalón y rampa, donde se puede observar el error actuante en función del tiempo y, en especial para régimen estacionario . Ver figura 13.

Error actuante para señal de referencia escalón unitario



Error actuante para señal de referencia rampa unitaria

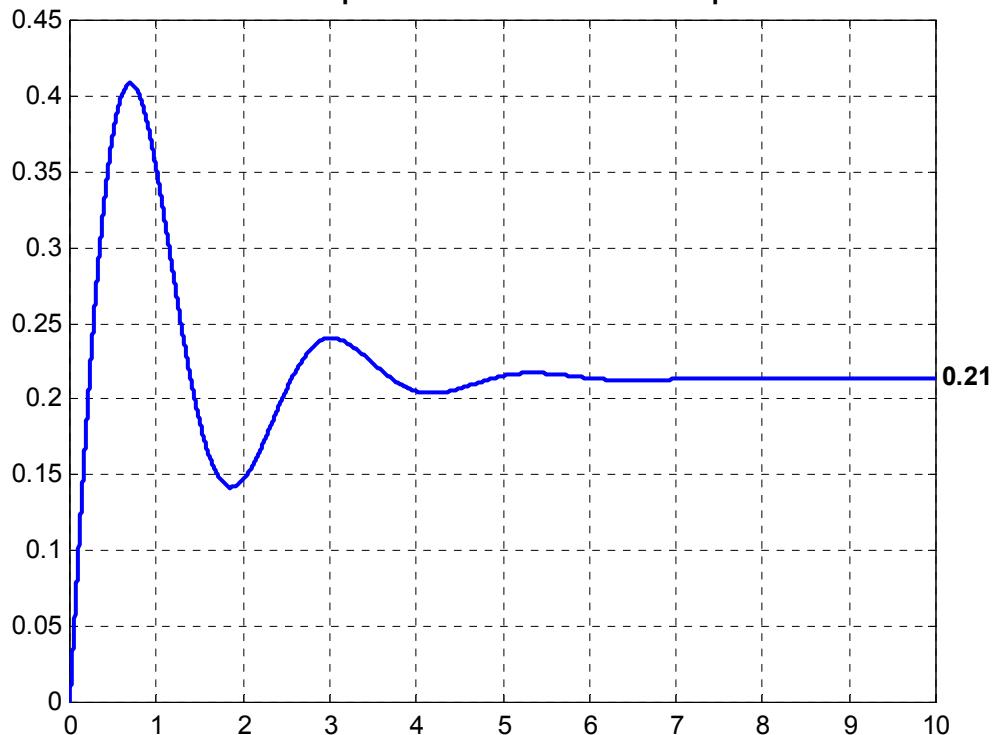


Figura 14. Error actuante al escalón y rampa unitarios.

Ejemplo 2. Control de temperatura.

Sea el sistema de control de temperatura indicado en la figura 15.

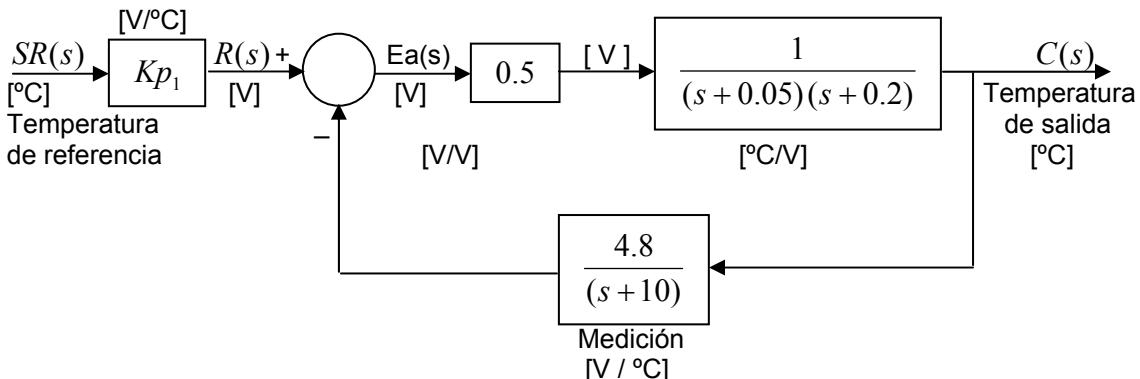


Figura 15. Control de temperatura

Se tomarán tres valores de la ganancia del selector de referencia K_{p_1} , uno menor, igual y el otro mayor a la $H(0)$.-

$$K_{p_1} = 0.4V [V/^\circ C], \quad K_{p_1} = 0.48[V/^\circ C] \text{ y } K_{p_1} = 0.50[V/^\circ C] \text{ con } K_{p_2} = 0.48[V/^\circ C].$$

Para los dos valores primeros el sistema será **Tipo cero**, lo **correcto** sería tomar $K_{p_1} = 0.48V [V/^\circ C]$, **como ya se mencionó al principio**.

Si $K_{p_1} = 0.5 V [V/^\circ C] \neq K_H$, el error verdadero al escalón de referencia sería **nulo**, pues el “sistema” sería **Tipo uno**: $K_{p_1} = 1/G(0) + H(0) = 0.02 + 0.48 = 0.50..$

2 a) Error verdadero.

En este caso el diagrama de bloques conviene expresarlo como indica la figura 16, donde se explicitan el error verdadero y la salida verdadera, en el diagrama equivalente con realimentación unitaria:

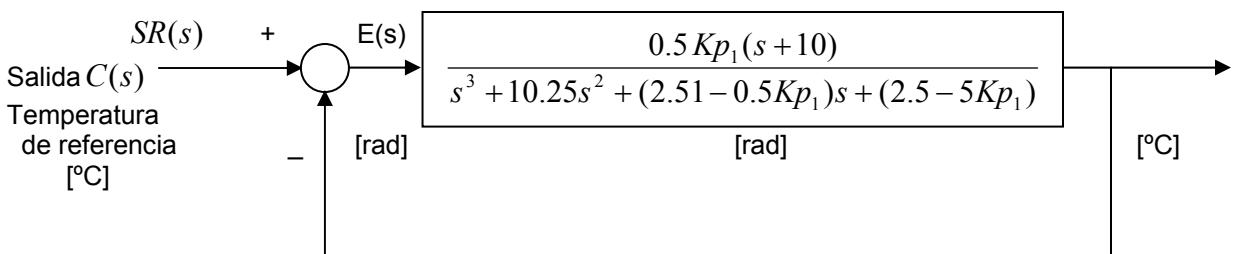


Figura 16. Diagrama equivalente de realimentación unitaria con la salida verdadera.

Tomando como salida la variable verdadera $c(t)$ y como entrada la de referencia $S_r(t)$, en $^\circ C$, el sistema resulta ser de “**Tipo cero**” si $K_{p_1} = 0.40$, o para cualquier valor distinto de 0.50, es decir que seguirá con error verdadero constante a una señal de referencia escalón y no seguirá a una entrada rampa.

Si se hace $K_{p_1} = 0.50$, el sistema es de “**Tipo uno**”. Sería como aumentar la señal de entrada hasta que la salida coincida con el valor deseado, pero como se ve la

relación entre la salida $c(t)$ y la señal de realimentación $b(t)$ **no sería igual** a la relación entre la señal de referencia $S_r(t)$ y la señal de entrada $r(t)$.

Volviendo al ejemplo los coeficientes de error son para $K_{p_1} = 0.40 ; 0.48$ y 0.50 :

$$c.e.e.(escalón) = K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} G_{eq}(s) = \frac{0.2 \times 10}{0.05 \times 0.2 \times 10 \times +0.2 \times 2} = 4 ; 24 \text{ y } \infty.-$$

$$c.e.r.(rampa) = K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{eq}(s) = 0 ; 0 \text{ y } \frac{2.5}{2.26}.-$$

Los errores verdaderos en estacionario están dados por:

$$e(\infty)(escalón) = \frac{1}{1+K_0} = \frac{1}{1+4} = 0.20 ; 0.04 \text{ y } 0.-$$

$$e(\infty)(rampa) = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{0} = \infty ; \infty \text{ y } 0.904.-$$

Cuando $K_{p_1} = K_{p_2} = 0.48$, el coeficiente de error es $K_o = 24$ y en consecuencia el error en estado estacionario sería : $e(\infty) = 0.04^\circ C$, el cual sería el más lógico de acuerdo a lo comentado con anterioridad.-

Conclusión:

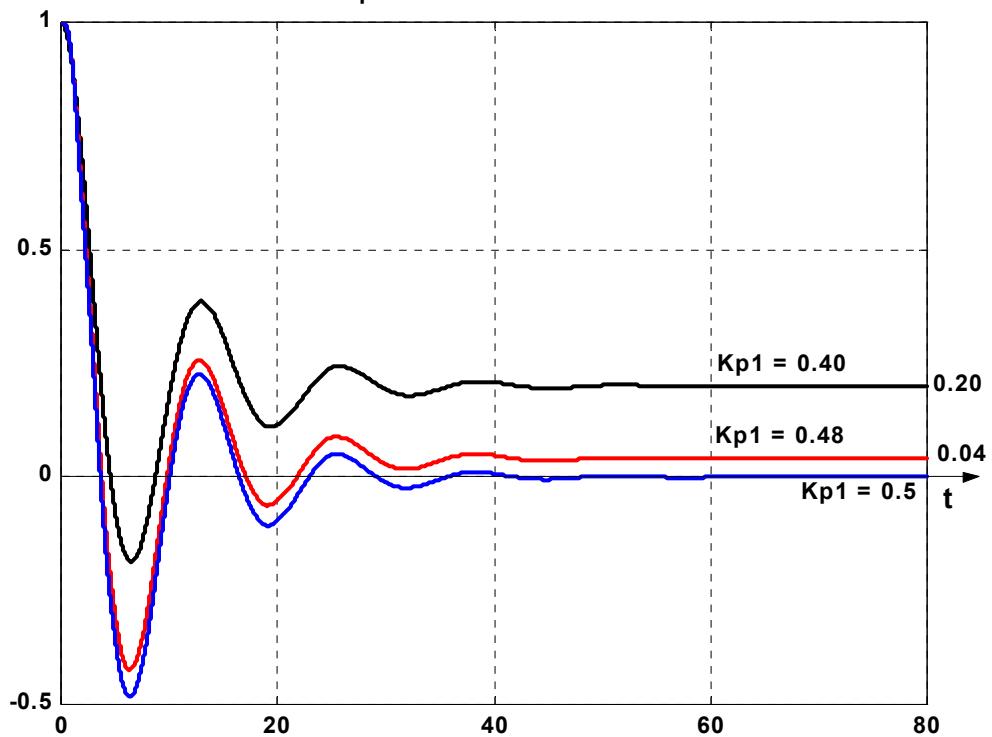
Los cálculos precedentes indican que al excitar en la referencia con un escalón unitario de $1^\circ C$, con $K_{p_1} = 0.4$, el sistema se comporta como de " **Tipo cero**" y, la salida verdadera del sistema se posiciona aproximadamente en $0.8^\circ C$. Esto da lugar a un error verdadero de $0.2^\circ C$.

Si $K_{p_1} = K_{p_2} = 0.48$ al excitar en la referencia con un escalón unitario de $1^\circ C$, el sistema se comporta como de " **Tipo cero" y, la salida verdadera del sistema se posiciona aproximadamente en $0.96^\circ C$. Esto da lugar a un error verdadero de $0.04^\circ C$. Esto sería lo adecuado por todo lo ya estudiado en los párrafos anteriores.**

Si $K_{p_1} = 0.50$ al excitar en la referencia con un escalón unitario de $1^\circ C$, el sistema se comportaría como de " **Tipo uno" y, la salida verdadera del sistema se posiciona en $1^\circ C$. Esto da lugar a un error verdadero nulo.-**

Empleando Simulink puede obtenerse el **error verdadero** en función del tiempo, y en especial el referido error para comportamiento en régimen estacionario, para $K_{p_1} = 0.40 ; K_{p_1} = 0.48$ y $K_{p_1} = 0.50$. Ver figura 17:

Error Verdadero para una Referencia Escalón Unitario



Error Verdadero para Referencia Rampa Unitaria

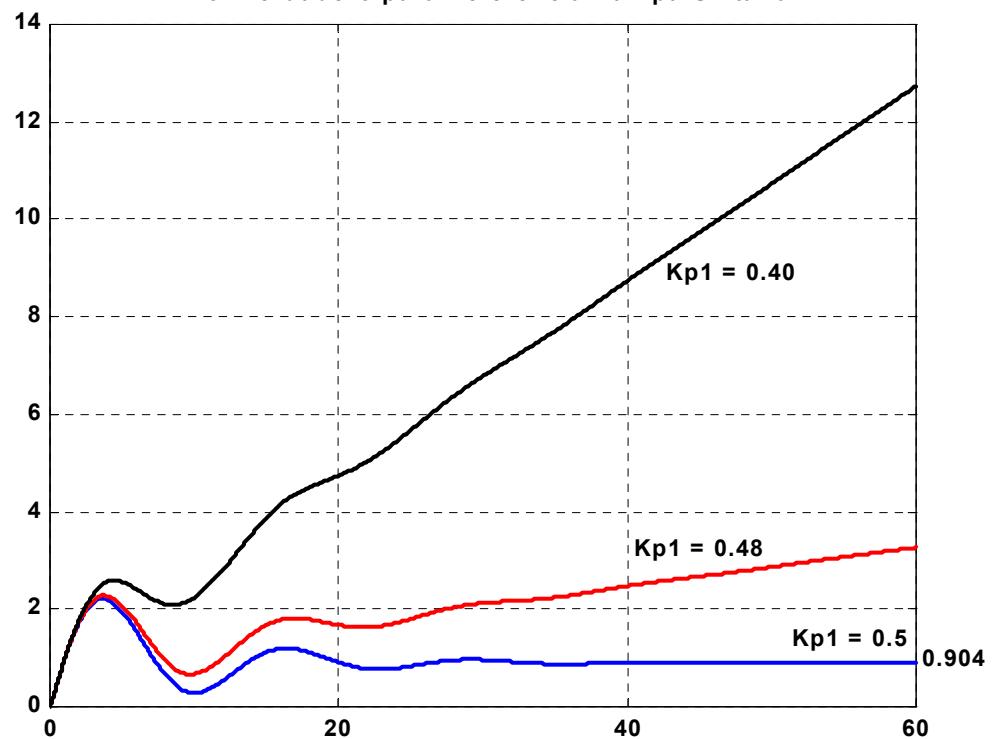


Figura 17. Error verdadero para escalón y rampa unitarios

2 b) Error actuante

Cuando consideramos el error actuante, la salida del sistema es la señal de medición, como se indica en el diagrama en bloques de la figura 18. Previamente se introduce dentro del esquema de bloques la transferencia del acondicionador de referencia, en este caso la constante K_p1 [V/ $^{\circ}$ C], para tener la $E' a(s)$ en [$^{\circ}$ C].-

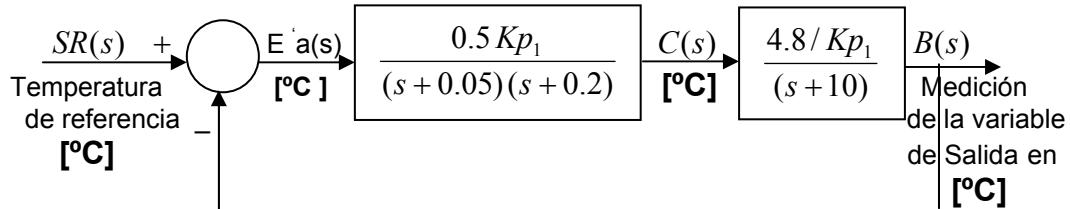


Figura 18. Diagrama en bloques indicando como salida la medición.

De acuerdo a la figura 18 desde la salida de medición a la entrada de referencia el sistema es de “**Tipo cero**” con lo cual se puede afirmar que en estas condiciones el sistema tendrá error actuante constante al escalón.

Los coeficientes de error, serán todos iguales para los diferentes K_p1 , (pues son independientes del valor de K_p1):

$$c.e.e.(escalón) = Ko = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \frac{0.2 \times 12}{0.2 \times 0.05 \times 10} = 24$$

$$c.e.r.(rampa) = K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)H(s) = 0$$

Los errores actuantes en estacionario son:

$$e'a(\infty) = (escalón) = \frac{1}{1 + Ko} = \frac{1}{1 + 24} = 0.04$$

$$e'a(\infty)(rampa) = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Como se puede ver si $K_p1 = K_p2 = 0.48$, en general si $K_{SR} = K_H$, el error actuante de estado estable, en la unidad de la señal de referencia coincide con el error verdadero de estado estacionario en la misma dimensión siempre que los sistemas equivalentes con realimentación unitaria sean Tipo cero.

Pues en estos casos es $C(\infty) \equiv B(\infty)$, ya que $\frac{H(0)}{K_{SR}} = \frac{K_H}{K_H} = 1$.

Esto es una conclusión general y justifica también por que $K_{SR} = K_H$.

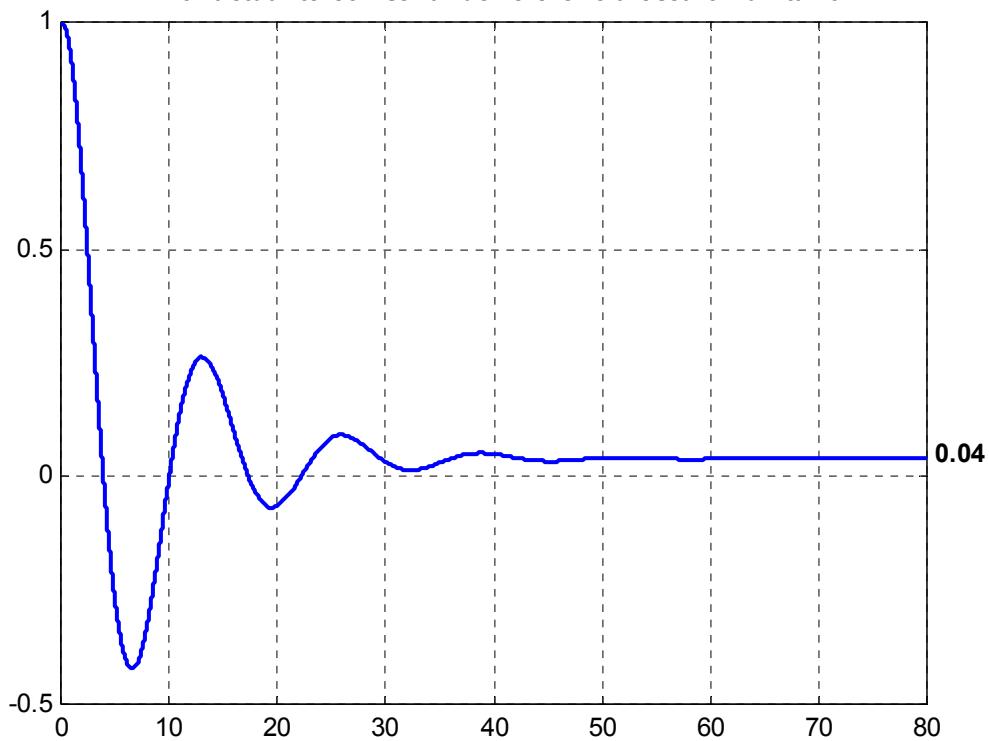
Conclusión:

Los cálculos precedentes indican que al excitar en la referencia con un escalón unitario de 1° C, la salida de medición del sistema se posiciona en 0.96° C. Esto da lugar a un error actuante de 0.04° C.

Empleando Simulink puede obtenerse el error actuante en función del tiempo, y en especial el referido error para comportamiento en régimen estacionario.

Ver figura 19:

Error actuante con señal de referencia escalón unitario



Error actuante con señal de referencia rampa unitaria

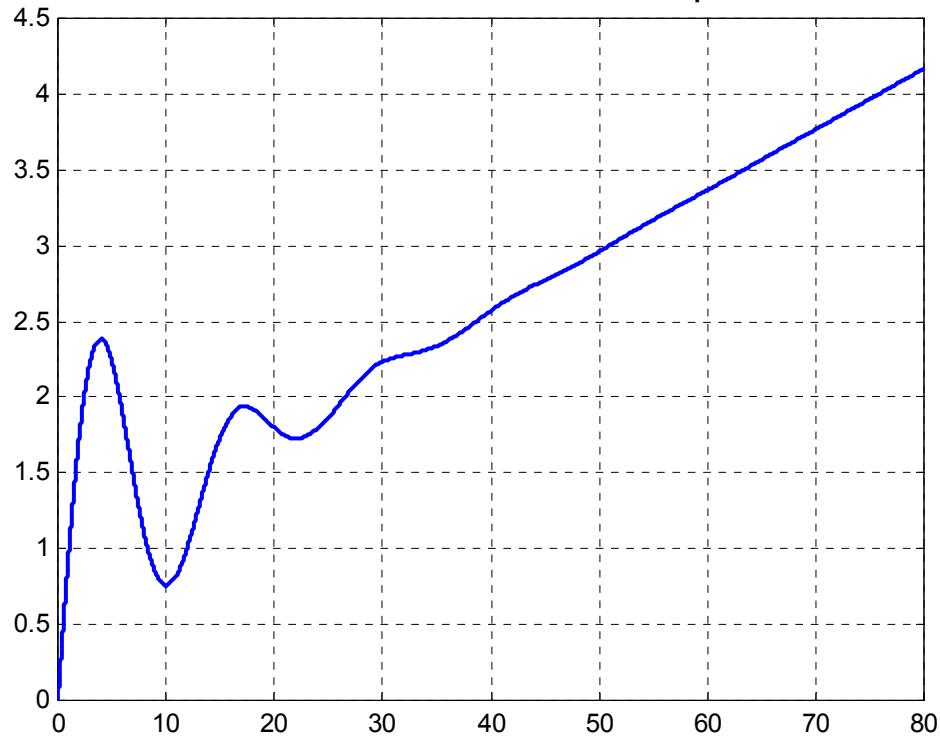


Figura 19. Error actuante para entrada escalón y rampa unitarios

Ejemplo 3. Planta de segundo orden con inercia pura.

Sea la planta de segundo orden con inercia pura indicado en la figura 20.
 La ganancia del selector de entrada la llamaremos $K_{SR} = Kp_1$ y la función de transferencia del elemento de medición una ganancia $H(s) = Cte = K_H = Kp_2 \cdot -$

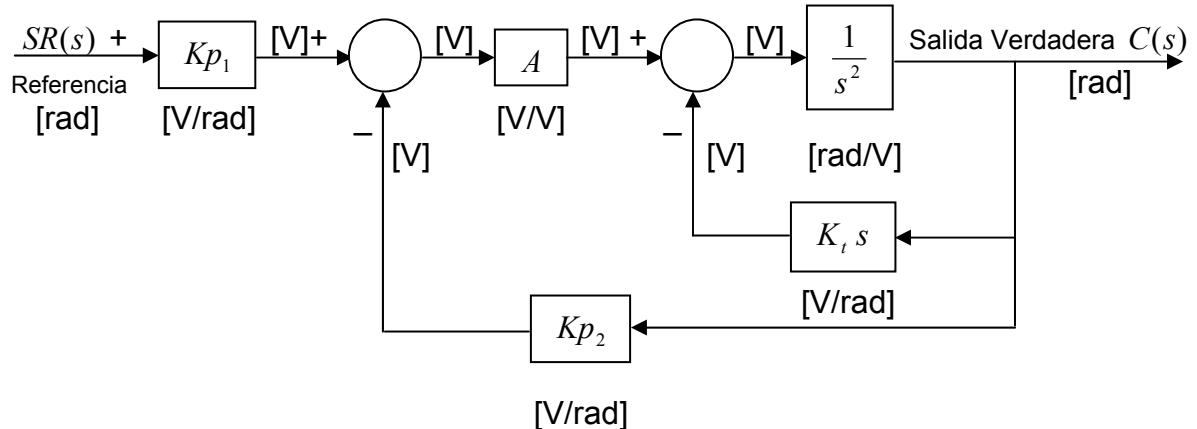


Figura 20. Planta de 2º orden con inercia pura.

A los fines de analizar el comportamiento de los errores, sintonizaremos el lazo con los siguientes valores de los parámetros :

A = 10 [V/V]
Kp1 = 0.5 [V/rad] y Kp1 = Kp2 = 0.7 [V/rad]
Kp2 = 0.7 [V/rad]
Kt = 1 [V/rad/seg.]

3 a) Error Verdadero.

En este caso el diagrama en bloques conviene expresarlo como indica la figura 21, donde se explicitan el error verdadero y la salida verdadera.

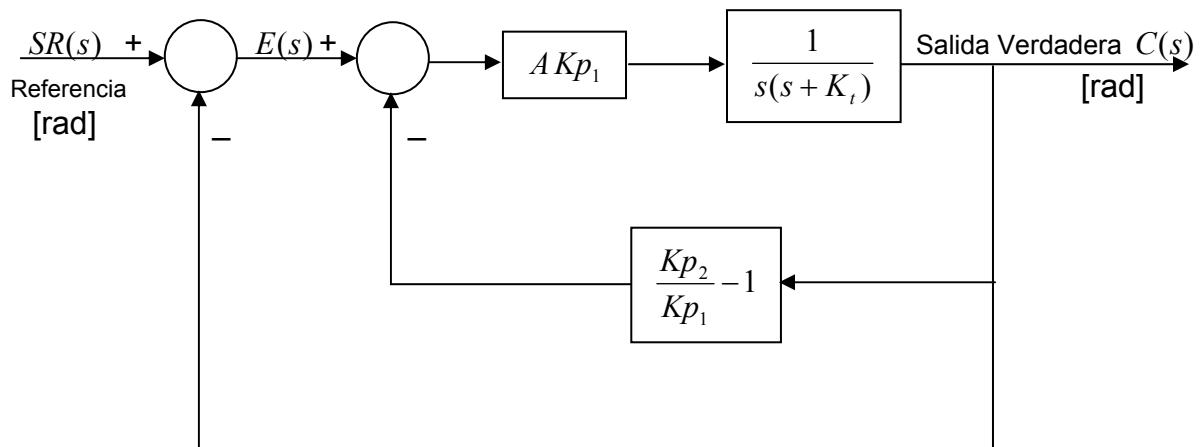


Figura 21. Sistema equivalente indicando salida y error verdadero

Resolviendo el lazo interno, obtenemos el diagrama de la figura 22:

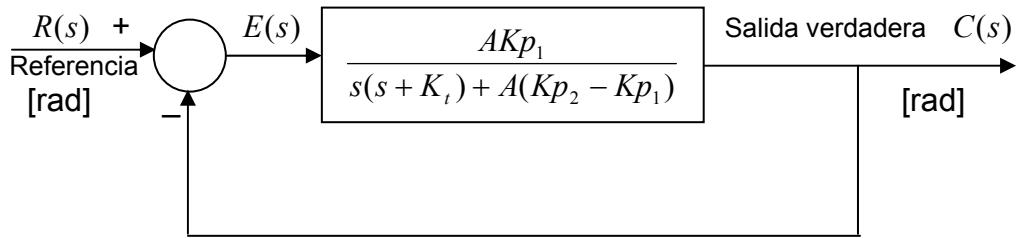


Figura 22. Diagrama equivalente indicando la salida y el error verdadero.

El sistema, considerando como “variable de salida la verdadera” es de “**tipo 0**”, cuando $Kp_1 \neq Kp_2$, (si $Kp_1 = Kp_2$, **sería tipo uno**), con lo cual los coeficientes de error para $Kp_1 = 0.5$ serán:

$$c.e.e = \lim_{s \rightarrow 0} G_{equiv.}(s) = \frac{Kp_1}{Kp_2 - Kp_1} = \frac{0.50}{0.7 - 0.5} = 2.5$$

$$c.e.r. = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{equiv.}(s) = 0$$

y para $Kp_1 = 0.7$ son:

$$c.e.e = \lim_{s \rightarrow 0} G_{equiv.}(s) = \infty$$

$$c.e.r. = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{equiv.}(s) = \frac{AKp_1}{K_t} = \frac{10 \times 0.7}{1} = 7$$

Los errores verdaderos en régimen permanente serán para $Kp_1 = 0.5$:

$$e(\infty) \text{ escalón} = \frac{1}{1 + c.e.e.} = \frac{1}{3.5} = 0.286$$

$$e(\infty) \text{ rampa} = \frac{1}{c.e.r.} = \infty$$

y para $Kp_1 = 0.70$:

$$e(\infty) \text{ escalón} = \frac{1}{1 + c.e.e.} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

$$e(\infty) \text{ rampa} = \frac{1}{7} = 0.143$$

Si $Kp_1 = Kp_2 = 0.7$ el sistema sería **Tipo uno**, y el **error verdadero** en estado estable al escalón unitario en la $S_r(t)$ será nulo y a la rampa aproximadamente 0.143.

Conclusión:

Los cálculos precedentes indican que al excitar en la referencia con un escalón unitario de 1rad, el sistema, tomando como salida la verdadera se comporta como de ”**Tipo cero**” si $Kp_1 \neq Kp_2$ y, la salida verdadera del sistema se posiciona en **0.714 rad**. Esto da lugar a un error verdadero de **0.286 rad**.

Si $Kp_1 = Kp_2$ y este error es nulo y a la rampa es finito.-

Empleando Simulink puede obtenerse el error verdadero en función del tiempo, y en especial el referido error para comportamiento en régimen estacionario.

Ver figura 23:

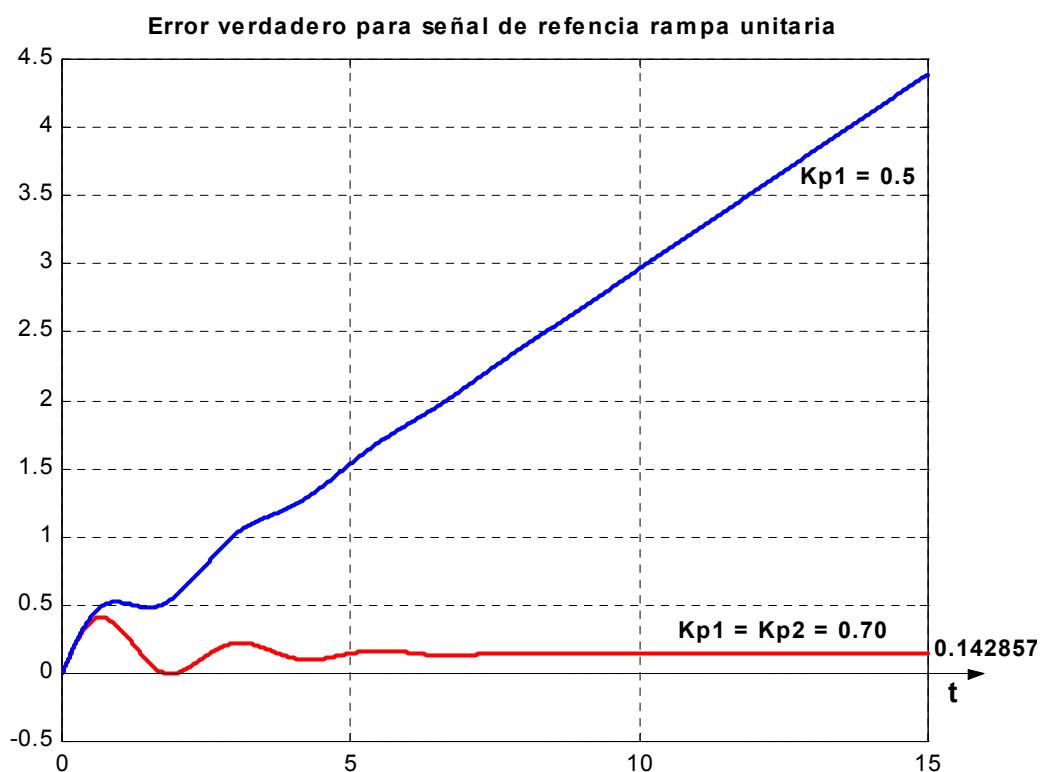
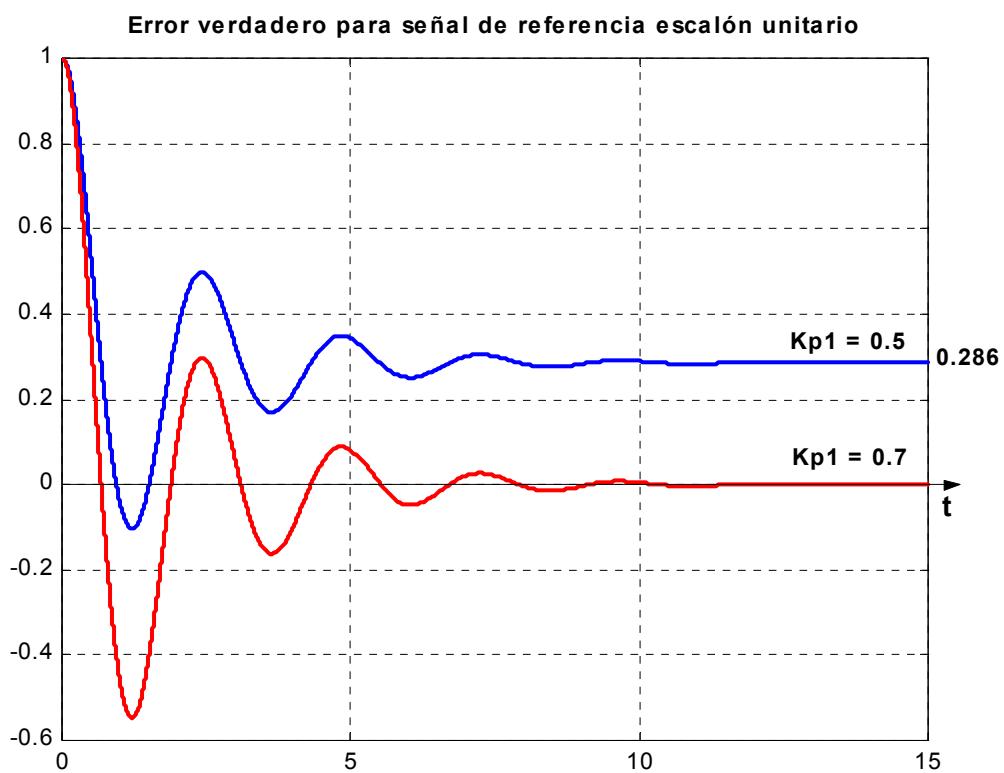


Figura 23. Error verdadero con entradas escalón y rampa unitaria con $Kp_1 = 0.50$ y 0.70

3 b) Error actuante.

Cuando consideramos el error actuante, la salida del sistema es la señal de medición, como se indica en el diagrama en bloques de la figura 24. Previamente se introduce dentro del esquema de bloques la transferencia del acondicionador de referencia, en este caso la constante K_p1 [V/rad].-

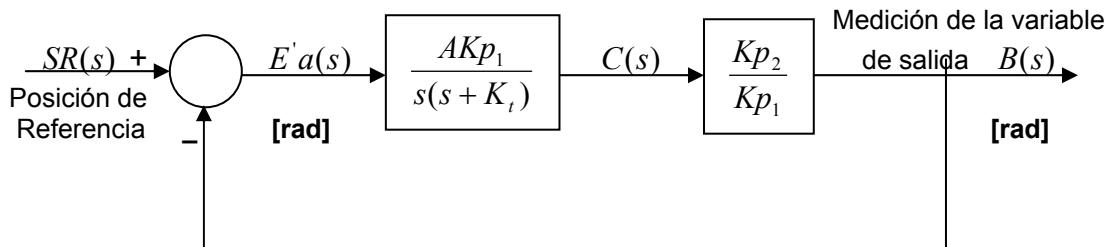


Figura 24. Diagrama en bloques indicando como salida la medición.

De acuerdo a la figura 24 desde la salida de medición a la entrada de referencia el sistema es de “**Tipo uno**”, sea cualquiera el valor de K_p1 , con lo cual podemos afirmar que en estas condiciones el sistema tiene el error actuante nulo al escalón y constante a la rampa.

Sobre la base de lo indicado los coeficientes de error son:

$$c.e.e. = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \infty$$

$$c.e.r. = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \frac{AK_p2}{K_t} = \frac{10 \times 0.7}{1} = 7$$

El error actuante en estacionario es.

$$e_{a(\infty)}_{\text{escalón}} = \frac{1}{1 + c.e.e.} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$e_{a(\infty)}_{\text{rampa}} = \frac{1}{c.e.r.} = \frac{1}{7} = 0.143$$

Conclusión:

Los cálculos precedentes indican que al excitar en la referencia con un escalón unitario de 1rad, la salida de medición del sistema se posiciona en 1 rad. Esto da lugar a un error actuante de 0 rad. Cuando se excita con una rampa unitaria la salida de medición es una rampa paralela a la de referencia, de manera que el error actuante es de 0.143, igual al error verdadero cuando $K_{SR} = K_H$, pues los sistemas equivalentes son del mismo Tipo, uno en este caso.-

Empleando Simulink puede obtenerse el error actuante en función del tiempo, y en especial el referido error para comportamiento en régimen estacionario. Ver figura 25.

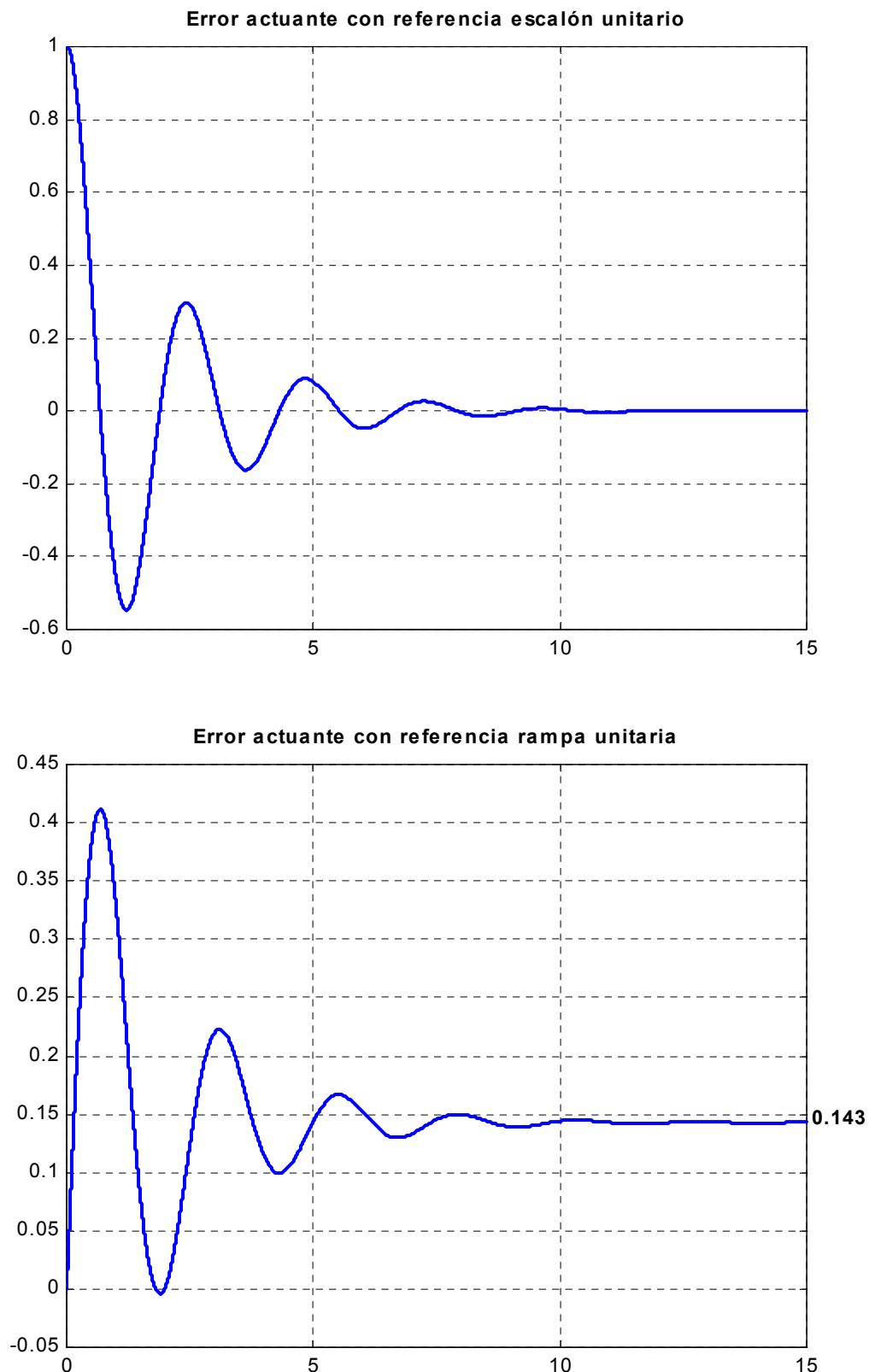


Fig. 25. Error actuante con entradas escalón y rampa unitaria.

Ejemplo 4:

Un sistema de control de velocidad tiene la configuración indicada en la figura 26:

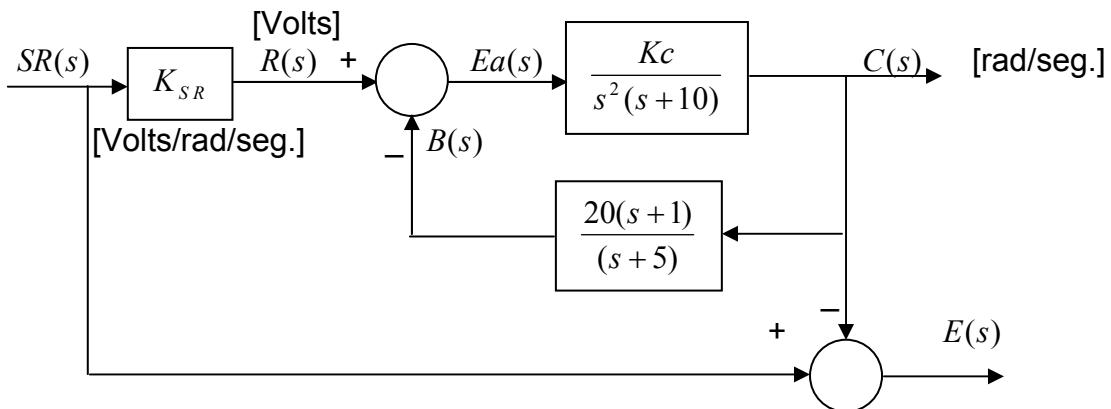


Figura 26:

Determinar:

1. El rango del parámetro K_c para que el sistema sea estable.-
2. La ganancia estática del elemento de medición.
3. El valor apropiado de la ganancia del selector de referencia.-
4. Con el valor de K_{SR} determinado en 3), las señales de entrada $r(t)$ para las tres referencias típicas unitarias.
5. Si $K_c = 12.5$, siempre con K_{SR} determinado en 3), la $G_{equiv.}(s)$ del sistema equivalente con realimentación unitaria y el tipo del sistema de control.
6. Usando la $G_{equiv.}(s)$ y la función de transferencia $M'(s)$, los errores verdaderos de estado estacionario para las tres señales de referencia típicas de prueba unitarias, $Sr(t) = \mu_S(t)$; $Sr(t) = t \mu_S(t)$ y $Sr(t) = \frac{1}{2}t^2 \mu_S(t)$. - .-
7. Los errores actuantes de estado estacionario en la misma dimensión que $Sr(t)$, para las referencias típicas de prueba unitarias.-

Solución:

- 1) La ecuación característica del sistema es:

$$s^2(s+5)(s+10) + 20Kc(s+1) = 0; \text{ desarrollando quedará:}$$

$$s^4 + 15s^3 + 50s^2 + 20Kc s + 20Kc = 0$$

Por Hurwitz las restricciones serán las siguientes:

- $Kc > 0$ Condición Necesaria
- $15 \times 50 > 20Kc \rightarrow Kc < 37.5$
- $\frac{15 \times 50 \times 20Kc - (20Kc)^2}{(15)^2} > 20Kc \rightarrow Kc < 26.25$

El rango total será en consecuencia:

$0 < Kc < 26.25$

$$2) K_H = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20(s+1)}{(s+5)} = 4 \Rightarrow K_H = 4$$

$$3) K_{SR} = K_H = 4$$

$$4) \text{ Si } Sr(t) = \mu_s(t) = \frac{r(t)}{K_H} = \frac{r(t)}{4} \Rightarrow r(t) = 4\mu_s(t) \Rightarrow R = 4. -$$

$$Sr(t) = t\mu_s(t) = \frac{r(t)}{K_H} = \frac{r(t)}{4} \Rightarrow r(t) = 4t\mu_s(t) \Rightarrow R = 4. -$$

$$Sr(t) = \frac{1}{2}t^2\mu_s(t) = \frac{r(t)}{K_H} = \frac{r(t)}{4} \Rightarrow r(t) = \frac{4}{2}t^2\mu_s(t) \Rightarrow R = 4. -$$

5) Usando:

$$Gequiv(s) = \frac{K_H G(s)}{1 + G(s)H(s) - K_H G(s)} , \text{ reemplazando los valores nos queda:}$$

$$Gequiv.(s) = \frac{4Kc(s+5)}{s(s^3 + 15s^2 + 50s + 16Kc)} \quad \text{para } Kc = 12.5 :$$

$$Gequiv.(s) = \frac{50(s+5)}{s(s^3 + 15s^2 + 50s + 200)}$$

El sistema equivalente será **Tipo uno a pesar de los dos integradores de G(s)**, esto se debe a que la función de transferencia H(s) tiene dinámica y además **dos integradores.**-

6) Para el escalón unitario en la referencia:

$$K_p = \infty \Rightarrow e_{EE} = 0$$

Para una rampa unitaria en la referencia:

$$Kv = \lim_{s \rightarrow 0} s Gequiv.(s) = \frac{250}{200} = 1.25 \Rightarrow e_{EE} = \frac{1}{Kv} = 0.80 [\text{rad / seg.}]$$

Para la parábola unitaria en la referencia:

$$Ka = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 Gequiv.(s) = 0 \Rightarrow e_{EE} = \infty [\text{rad / seg.}]$$

Usando a la función de transferencia $M'(s)$:

$$M'(s) = \frac{C(s)}{SR(s)} = K_H M(s) = \frac{4Kc(s+5)}{s^4 + 15s^3 + 50s^2 + 20Kcs + 20Kc} ; \text{ para } Kc = 12.5 < 26.25. -$$

$$M'(s) = \frac{50s + 250}{s^4 + 15s^3 + 50s^2 + 250s + 250} , \text{ por lo tanto:}$$

Al escalón unitario en la referencia: $e_{EE} = 0$; pues $\alpha_0 = b'_0 . -$

A la rampa unitaria en la referencia: $e_{EE} = \frac{\alpha_1 - b'_1}{\alpha_0} = \frac{250 - 50}{200} = 0.80 [\text{rad / seg.}]$

A la parábola unitaria en la referencia: $e_{EE} = \infty$ pues $\alpha_0 = b'_0$ y $\alpha_1 \neq b'_1$.

7) Para el error actuante en la misma unidad que $Sr(t)$, como:

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{20Kc(s+1)}{s^2(s+5)(s+10)};$$

El sistema equivalente para determinar el error actuante será de "**Tipo dos**", porque el error actuante al escalón y la rampa serán nulos.

Los dos sistemas equivalentes para determinar el error verdadero y para el error actuante son de **diferente Tipo** esto es debido a que los integradores de $G(s)$ son dos y la $H(s)$ no es una constante.-.-

Ahora se tendrá que:

$$e^{\dot{a}}(0); (\text{escalón en } Sr(t)) = 0$$

$$e^{\dot{a}}(0); (\text{rampa en } Sr(t)) = 0$$

$$e^{\dot{a}}(0); (\text{parábola unitaria en } Sr(t)) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 L(s)} = \frac{1}{0.4Kc} = \frac{2.5}{Kc} = \frac{2.5}{12.5} = 0.20 \text{ [unidad de } Sr(t)]$$

Esto se puede ver con el diagrama de bloques de la figura 27.

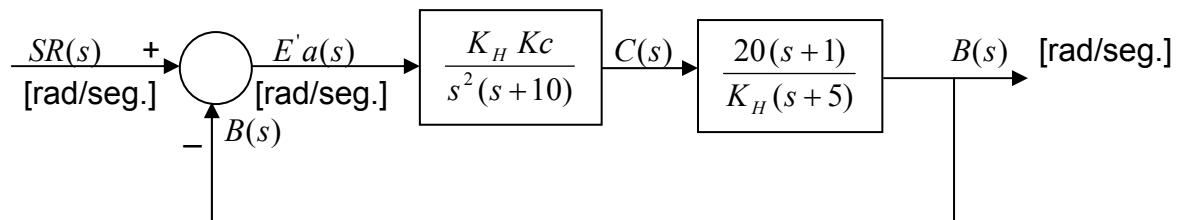


Figura 27:

Como se puede ver si $K_{SR} = K_H = 4$, la ganancia estática del función del último bloque es la unidad, por lo tanto $c(\infty) = b(\infty)$, o sea los valores finales de $c(t)$ y $b(t)$ serán iguales en rad/seg.

Por lo tanto, $e(\infty) = Sr(\infty) - c(\infty)$ y $e^{\dot{a}}(0) = Sr(\infty) - B(\infty)$ serán iguales **si los sistemas equivalentes fueran del mismo tipo**.

Al mismo resultado se llegaría si se emplea la relación:

$$e^{\dot{a}}(0)(\text{parábola}) [\text{rad / seg.}] = \frac{ea(\infty)(\text{parábola}) [\text{Volts}]}{K_H} = \frac{0.80[\text{Volts}]}{4[\text{V / rad / seg.}]} = 0.20 [\text{rad / seg.}]$$

En la figura 28 se muestran todas las señales obtenida con un esquema de Simulink para una señal de referencia rampa unitaria.

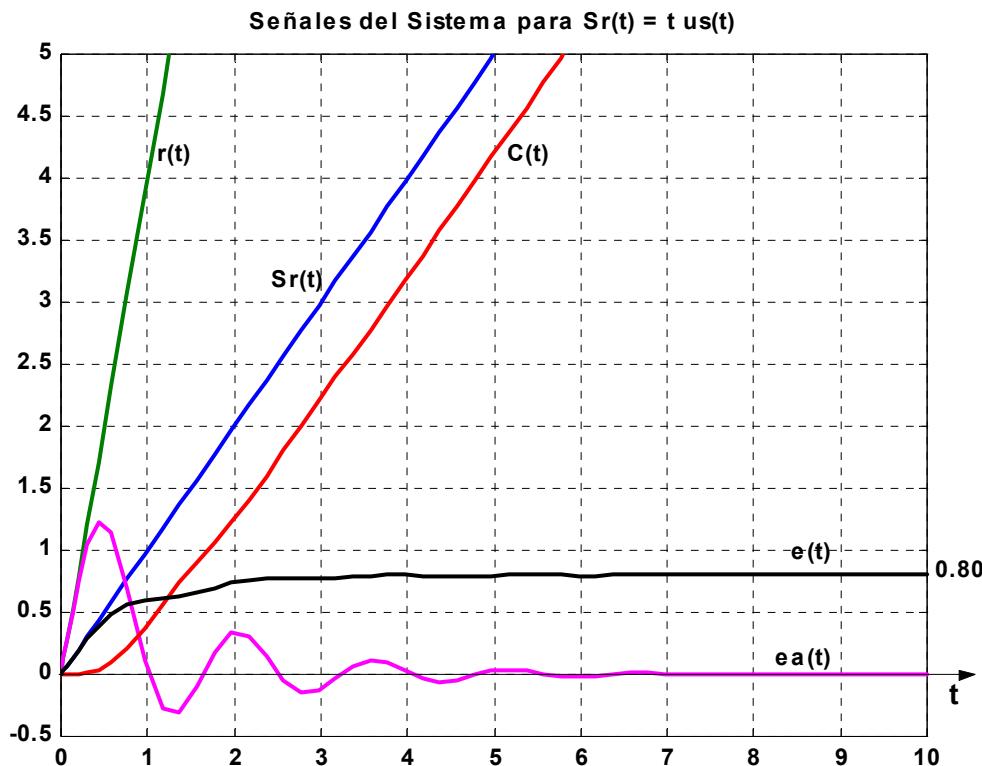


Figura 28.

Ejemplo 5:

Analizar los errores del sistema que tiene:

$$G(s) = \frac{5}{s^3 + 6s^2 + 8.5s + 6} \quad y \quad H(s) = 0.5(s + 4)$$

Determinar los errores verdadero y actuante en estado estacionario para señales de referencia escalón y rampa unitarios.-

Si se toma $K_{SR} = K_H = 2$, como se hace habitualmente, el sistema será **Tipo cero** y tendrá un error verdadero de estado estable finito para $Sr(t) = \mu_s(t)$, lo cual implica que: $r(t) = 2\mu_s(t)$.

$$\text{Si se elige, (cosa no común): } K_{SR} = \frac{1}{G(0)} + K_H = \frac{6}{5} + 2 = 3.2 \quad \Rightarrow \quad K_{SR} = 3.2$$

El sistema sería **al menos tipo uno**.

Pero se elegirá $K_{SR} = K_H = 2$, por todo lo ya comentado con anterioridad.

Calculo de los errores verdaderos:

Como:

$$M'(s) = K_{SR}M(s) = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 16}$$

$$\text{o } G_{equiv.}(s) = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Como el sistema equivalente es **Tipo cero** el error verdadero al escalón unitario en la referencia será:

$$e_{EE}(\text{escalón}) = \frac{1}{1+Ko} = \frac{1}{1+5/3} = \frac{3}{8} = 0.375$$

Para el error actuante en la misma unidad que $Sr(t)$ se tendrá:

$$L(s) = \frac{2.5(s+4)}{s^3 + 6s^2 + 8.5s + 6},$$

También **Tipo cero** por lo tanto el error actuante deberá ser igual al verdadero como se comentó.

Por lo tanto se tendrá para $Sr(t) = \mu_s(t)$, como $Ksr = Kh = 2$, que:

$$e'a(\infty)(\text{escalón}) = \frac{1}{1+\lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1+5/3} = 0.375 \quad [\text{en la misma unidad que la } Sr(t)]$$

Para la rampa como $Kv = 0 \Rightarrow ea(\infty) = \infty$

Usando un diagrama de Simulink las señales se muestran en las figuras 29 y 30 para señales de referencia escalón unitario y rampa unitaria respectivamente:

Señales del Sistema para $Sr(t) = us(t)$, con $Ksr = Kh = 2$

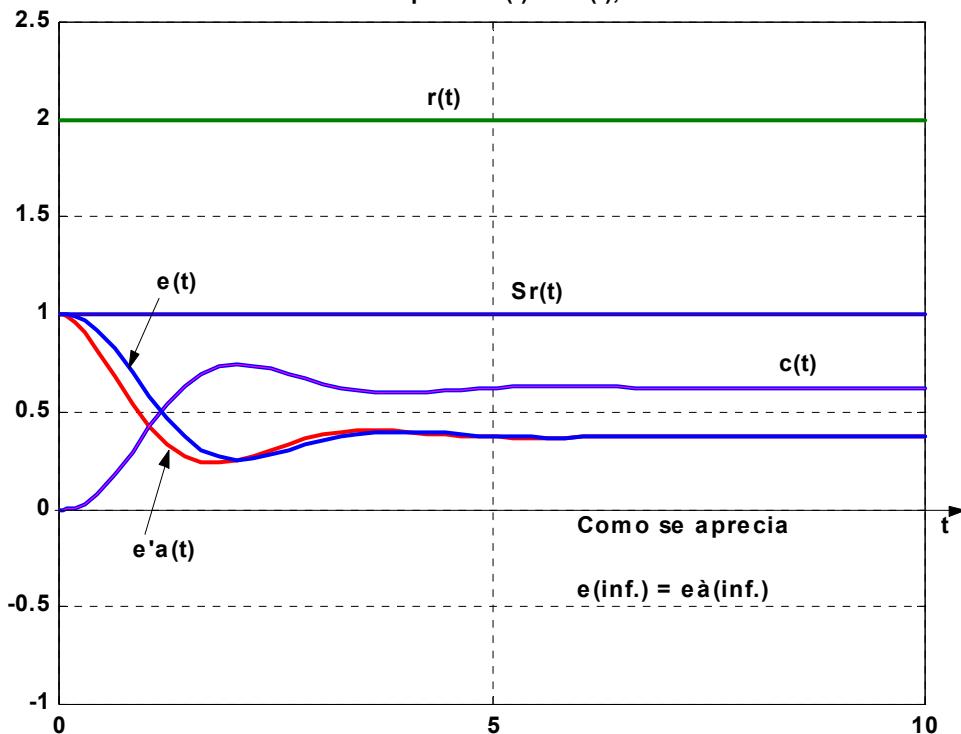


Figura 29.

Señales del Sistema para $Sr(t) = t us(t)$; con $Ksr = Kh = 2$

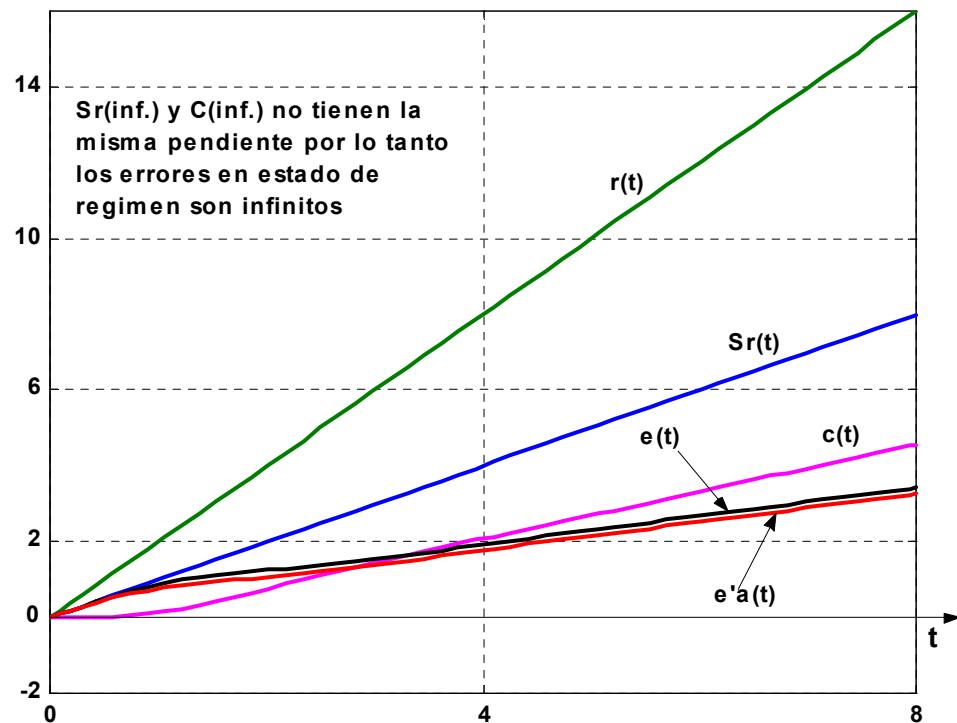
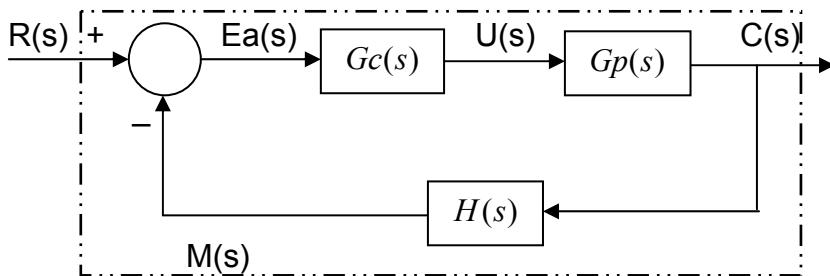


Figura 30.

Ejemplo 6:

En el sistema de la figura es un control de velocidad y las funciones de transferencia representadas tienen las siguientes características:

- $G_p(s)$ es un sistema de primer orden, sin ceros, con constante de tiempo $T = 10$ segundos y ganancia estática $K_0 = 36$.
- $M(s)$ tiene entre otros elementos solo un cero en $s = -20$.
- $H(s)$ es un sistema de primer orden sin ceros.
- $G_c(s)$ es una función de transferencia con un único polo, ningún cero y la ganancia es un número entero positivo.



Construya uno de los posibles ejemplos para las funciones $G_c(s)$, $G_p(s)$ y $H(s)$ que bajo las condiciones anteriores cumpla con las siguientes especificaciones del sistema:

1. Evidentemente que el sistema sea estable.
2. Que el sistema $M(s)$ tenga una ganancia estática de 5 (Rad/seg./ Volt), (por ejemplo que la señal de entrada $r(t)$ varía entre ± 10 Volt para que $c(t)$ varíe entre ± 50 Rad/seg., es decir, cuando la entrada es 5 Volt la salida es 25 Rad/seg.).-
3. Que el sistema tenga un error de posición nulo para una señal de referencia escalón y menor o igual a 0.625 radianes para una señal referencia rampa de pendiente 25rad/seg.-

Solución:

Se tiene que:

$$G_p(s) = \frac{K_c}{(1+Ts)} \Rightarrow G_p(s) = \frac{36}{1+10s} \Rightarrow \boxed{G_p(s) = \frac{3.6}{(s+0.1)}}$$

Como el sistema tiene un cero en -20 , y ni el controlador ni la planta tienen uno, por ende la $H(s)$ deberá tener un polo en -20 , o sea:

$$H(s) = \frac{K_2}{(s+20)}$$

Además tendrá que cumplirse la expresión siguiente:

$$K_H(\text{volt}) \times 5 \left[\frac{\text{Rad / seg}}{\text{Volt}} \right] = 1 \text{ Rad / seg.} -$$

En consecuencia:

$$K_H = \frac{1}{5} = 0.20. -$$

$$\text{Como } H(0) = \frac{K_2}{20} = K_H = 0.20 \Rightarrow K_2 = 4$$

En consecuencia:
$$H(s) = \frac{4}{(s + 20)}$$

La $G_c(s)$ deberá ser por los datos y especificaciones pedidas \Rightarrow

$$G_c(s) = \frac{K_c}{s}$$

Donde K_c es un número entero que deberá estar en el rango estable Y cumplir con la especificación del error a la rampa de entrada.-

Encontrando la $G_{\text{equiv.}}(s)$, se tendrá:

$$G_{\text{equiv.}}(s) = \frac{K_H G_c(s) G_p(s)}{1 + G_c(s) G(s) [H(s) - K_H]} ; \text{ remplazando las funciones, nos queda:}$$

$$G_{\text{equiv.}}(s) = \frac{0.72 K_c (s + 20)}{s [s^2 + 20.1s + (2 - 0.72 K_c)]} ; \text{ Tipo uno, como era de esperar.}$$

El error a la rampa unitaria será:

$$e(\infty) \text{rampa} = \frac{25 \text{Rad / seg.}}{K_v \text{seg}^{-1}} = \frac{25(2 - 0.72 K_c)}{14.4 K_c} \leq 0.625 \Rightarrow K_c \geq 1.85$$

El rango de K_c para que el sistema sea estable, se puede determinar por cualquier criterio. La ecuación característica será:

$$s^3 + 20.1s^2 + 2s + 14.4K_c = 0,$$

Evidentemente K_c debe ser positivo y aplicando el criterio de Hurwits, se tendrá:

$$20.1 \times 2 > 14.4 K_c \Rightarrow K_c < 2.7916$$

Como el dato es que debe ser entero y además estar en el rango:

$$1.85 < K_c < 2.79, \text{ se elegirá} \Rightarrow K_c = 2 \Rightarrow$$

$$G_c(s) = \frac{2}{s}$$

Con lo cual se determinó las tres funciones pedidas.-

Las mismas cumplen con las especificaciones solicitadas.-

El error de estado estacionario a una rampa de referencia de pendiente 25rad/seg. será:

$$e(\infty) \text{rampa} = 0.486 < 0.625. -$$

Resumen Final:

Tipo de un sistema: Es el número de polos en el origen, (o de integradores) que tiene la $G_{equiv.}(s)$ del sistema correspondiente con realimentación unitaria:

Llamaremos $G_c(s)$ y $G_p(s)$ a las Funciones de Transferencias del Controlador y la Planta respectivamente. El **Diagrama de Bloques del Sistema Real es:**

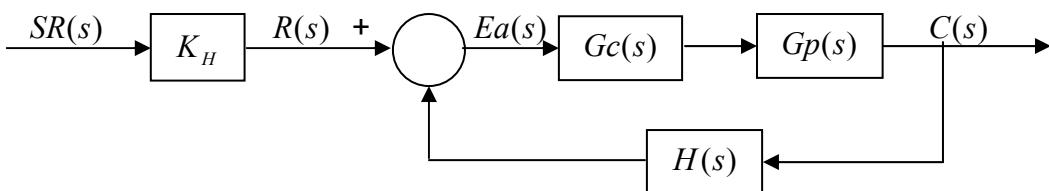


Figura 31:

El **Diagrama de Bloques del Sistema Equivalente para Determinar el Error Verdadero es:**

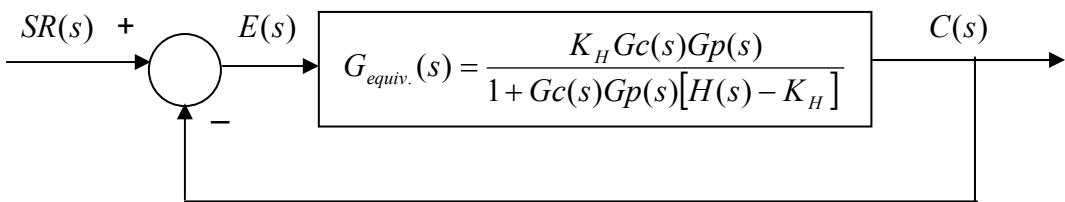


Figura 32:

Coeficientes de error:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_{equiv.}(s)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{equiv.}(s)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_{equiv.}(s)$$

TIPO	0	1	2	3
ep	$1/(1+K_p)$	0	0	0
ev	Inf.	$1/K_v$	$0^{(1)}$	$0^{(1)}$
ea	Inf.	Inf.	$1/K_a^{(1)}$	$0^{(1)}$

Recordar que $H(s)$ no tiene polos ni ceros en el origen.-

- Si $G_{equiv.}(s)$ no tiene polos en el origen:

$$K_p = cte., \quad K_v = K_a = 0 \Rightarrow ep = cte., \quad ev = ea = \text{inf.}$$

- Si $G_{equiv.}(s)$ tiene un polo en el origen:

$$K_p = \text{inf.}, \quad K_v = cte., \quad K_a = 0 \Rightarrow ep = 0, \quad ev = cte., \quad ea = \text{inf.}$$

- Si $G_{equiv.}(s)$ tiene dos polos en el origen⁽¹⁾:

$$K_p = \text{inf.}, \quad K_v = \text{inf.}, \quad K_a = cte. \Rightarrow ep = ev = 0, \quad ea = cte.$$

- Si $G_{equiv.}(s)$ tiene tres o más polos en el origen:

Todos los errores son nulos⁽¹⁾.-

Nota: Si $H(s)$ es una constante, $H(s)=K_H$, entonces $G_{equiv.}(s) = K_H G_c(s) G_p(s)$.-

⁽¹⁾ Expresiones y afirmaciones válidas sólo si $H(s) = \text{Cte.}$.-

Diagrama de Bloques del Sistema Equivalente para Determinar el Error Actuante en la Misma Dimensión que la Señal de Referencia:

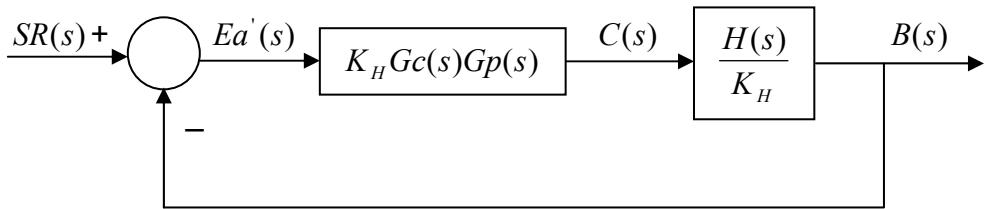


Figura 33

Como $H(s)$ no tiene polos en el origen, la función que define el “**Tipo del Sistema**” para el error actuante será $Gc(s)Gp(s)$, en lugar de la $G_{equiv.}(s)$.

La magnitud del error actuante estará en general estará dada por la función $L(s) = Gc(s)Gp(s)H(s)$.

Pero cuando $H(s)=K_H$, coincide con la $G_{equiv.}(s) = K_H Gc(s)Gp(s)$, en consecuencia la magnitud de los dos errores serán iguales o sea:

$$e(\infty) = e'a(\infty) .-$$

Conclusión:

Del estudio teórico realizado y de los ejemplos desarrollados, puede concluirse que el tratamiento del error en régimen permanente puede efectuarse con el **error verdadero o con el error actuante**. Ambos errores aportan informaciones equivalentes, debiendo tenerse presente que en un caso la salida del sistema es la “salida verdadera” $C(s)$ y en el otro la salida del sistema es “la medición” de la misma $B(s)$ en las mismas unidades que $C(s)$.

Desde el punto de vista del ingeniero en control o del instrumentista, quizá el error actuante sea más adecuado, ya que en la práctica la salida verdadera no se conoce, **salvo a través de su medición**, lo que representa considerar la misma como formando parte de la cadena directa, y al sistema como de realimentación unitaria.

Además si la función de transferencia $H(s)$ es una constante K_H , y la ganancia del selector de referencia se hace, $K_{sr} = K_H$, los sistemas equivalentes para determinar el error verdadero y el actuante tendrán el **mismo Tipo**, y será el indicado por los polos en el origen de la $G(s)$ real, ya que en estos casos la $G_{equiv.}(s) = K_H \cdot G(s)$.- Cuando la función $H(s)$ tiene dinámica esto generalmente no se cumple como se demostró en el ejemplo 4 en el mismo el sistema equivalente para determinar el error verdadero era Tipo uno y el sistema para determinar el error actuante era Tipo dos.-

CONTROL II

Tema:

CRITERIOS DE ESTABILIDAD

ALGEBRAICOS:

HURWITS Y ROUTH-HURWITZ

Prof. Ing. Carlos F. Martín

Año: 2010

Introducción

De los estudios de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de sistemas de simple entrada simple salida, en inglés (SISO) se aprendió que la solución homogénea que corresponde a la respuesta transitoria del sistema está gobernada por las raíces de la ecuación característica.

Básicamente, el diseño de los sistemas de control lineales se pueden considerar como el problema de arreglar la localización de los polos y ceros de la función de transferencia del sistema $M(s)$ para que el mismo se comporte de acuerdo con las especificaciones de funcionamiento prescriptas. Entre las variadas formas de especificaciones de desempeño utilizados en el diseño, el requerimiento más importante es que el sistema sea estable.

La definición de estabilidad se puede dar en muchas formas diferentes. En las siguientes discusiones solamente se tratará con la estabilidad de sistemas lineales SISO, invariantes con el tiempo.

Para propósitos de análisis y diseño, la estabilidad se puede clasificar como *estabilidad absoluta* y *estabilidad relativa*. La estabilidad absoluta se refiere a la condición de si el sistema es estable o inestable, es una respuesta de *sí* o de *no*.

Una vez que se ha encontrado que el sistema es estable, es interesante determinar que tan estable es, y este grado de estabilidad es una medida de la *estabilidad relativa*.

Antes de definir la estabilidad se definen los siguientes dos tipos de respuestas de sistemas lineales invariantes en el tiempo:

1º) *Respuesta de Estado Cero*: La respuesta de estado cero se debe a la entrada únicamente, todas las condiciones iniciales del sistema son nulas. Hay que aclarar que una/s entrada/s aplicadas al sistema *revela* la condición de estabilidad pero *no* causa o afecta a la misma.

2º) *Respuesta de Entrada Cero*: La respuesta de entrada cero se debe a la condición inicial únicamente, con todas las *entradas son nulas*. Del principio de superposición, cuando un sistema está sujeto tanto a las entradas como a las condiciones iniciales, la respuesta total se escribe como:

Respuesta total = Respuesta de estado cero + respuesta de entrada cero
Refiriéndonos a la 1º) *respuesta de estado cero* a una *entrada específica*, como se sabe tiene dos términos distintos:

- a) El término de *estado estacionario* (solución particular), $c_{0_1}(t)$, tiene la misma forma que la entrada y no revela la condición de estabilidad del sistema.

b) El término *transitorio*, (solución complementaria u homogénea) es precisamente la solución de la ecuación homogénea del sistema, y es en general de la forma:

$$c_{0_2}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{\lambda_k t}$$

Donde:

n : es el orden de la ecuación característica del sistema.

λ_k : son las raíces de la misma, o los polos de la función $M(s)$ del sistema.

Por lo tanto: $c(t) = c_{0_1}(t) + C_{0_2}(t)$

En un *sistema de control estable*, la $c_{0_2}(t)$ está definida como la parte de la respuesta $c(t)$ que tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Por lo tanto, $c_{0_2}(t)$ tiene la propiedad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_{0_2}(t) = 0$$

La respuesta en estado estable $c_{0_1}(t)$ es la parte de la respuesta total $c(t)$ que permanece después que la transitoria ha desaparecido. Por lo tanto, la respuesta en estado estable puede variar en un patrón establecido, ya sea como una onda senoidal o como una función rampa que se incrementa con el tiempo o como una función escalón.

La respuesta transitoria de un sistema de control es necesariamente importante, ya que es una parte significativa del comportamiento dinámico del sistema; la desviación entre la respuesta de la salida y la entrada o respuesta deseada se debe *controlar* cuidadosamente *antes* de alcanzar el estado estable.

La respuesta en estado estable es también muy importante, ya que indica en donde termina la salida del sistema cuando $t \rightarrow \infty$.

Para un sistema de control de posición, la respuesta en estado estable cuando se compara con la posición de referencia deseada, da una indicación de la exactitud final del sistema. En general, si la respuesta en estado estable de la salida no concuerda exactamente con la referencia deseada, se dice que el sistema tiene un *error de estado estable* (e_{EE})

En un *problema de diseño*, las especificaciones se proporcionan normalmente en términos de los dos desempeños, transitorio y en estado estable, y los controladores se diseñan para que todas esas especificaciones sean satisfechas por el sistema diseñado.

Evidentemente esto será posible *siempre* que el sistema sea *estable* ($C_{0_2}(t) \rightarrow 0$).

Desde un punto de vista práctico, la estabilidad separa a dos clases de sistemas, los *útiles* y los *inútiles*.

Veremos algunas definiciones de estabilidad:

Estabilidad de Entrada Acotada y Salida Acotada

Con condiciones *iniciales nulas*, se dice que el sistema es estable de *entrada acotada/salida acotada*, en inglés "Bounded Input/Bounded Output", (BIBO), o simplemente estable si su salida $c(t)$ es acotada para una entrada $u(t)$ también acotada.

Se puede demostrar que la relación entre las raíces de la ecuación característica para que se cumpla la definición dada es que las mismas deben estar *todas* en el semiplano izquierdo del plano s.

O sea, el sistema con el tiempo deberá alcanzar una condición de estado estacionario la cual es única y repetida para una entrada acotada específica, tiene la misma forma de la entrada y además se extingue cuando la entrada se retira.

Hay excepciones para esta definición y son:

1º) *Componentes Diferenciadores*: En ellos, para una entrada acotada (por ejemplo un escalón) produce como salida para $t = 0^+$ una magnitud infinita (no acotada)

2º) *Componentes Integradores*: Con la misma entrada, la salida final será una rampa (no acotada) y además *no se extingue* cuando la entrada se retira, pues permanece en un valor constante.

3º) El motor de corriente continua cuya Función de Transferencia es: $\frac{\theta(s)}{\omega(s)}$, pues para una tensión constante de alimentación $u(t) = cte$, la salida $\theta(t)$ en estado estacionario es una rampa (velocidad angular constante).

Todos estos componentes pueden estar en el lazo del sistema de control, son usados frecuentemente y se consideran como componentes estables (no se les aplica la definición anterior).

Por lo tanto $L(s) = G(s)H(s)$ puede tener polos en el origen (integradores) y si todos los demás están en el semiplano izquierdo, el lazo no será Inestable sino Estable.

Veremos otra definición de estabilidad:

Estabilidad a Entrada Cero y Estabilidad Asintótica

La *estabilidad a entrada cero* se refiere a la condición de estabilidad cuando la entrada es cero, y el sistema es llevado solamente por sus condiciones iniciales. Se demuestra que también depende de la ubicación de las raíces de la ecuación característica.

La estabilidad entrada cero se define como sigue:

Si la respuesta a entrada cero $c(t)$, sujeta a condiciones iniciales finitas, alcanza a cero cuando $t \rightarrow \infty$, se dice que el sistema es estable a entrada cero, o simplemente estable: de otra manera el sistema es inestable. Debido a que se requiere que la magnitud de $c(t)$ alcance cero cuando $t \rightarrow \infty$, esta estabilidad también se conoce como *estabilidad asintótica*.

Acá también, para que esto ocurra, las raíces de la ecuación característica deberán estar todas en el semiplano izquierdo del plano s.

De las discusiones anteriores, se observa que para sistemas lineales e invariantes en el tiempo, la estabilidad BIBO, a entrada cero y asintótica, tienen el mismo requisito de que todas las raíces de la ecuación característica deben localizarse en el semiplano izquierdo del plano s.

Por lo que, si un sistema es BIBO estable, debe también serlo para entrada cero o asintóticamente estable.

Por esta razón, simplemente la condición de estabilidad de un sistema lineal se refiere como *estable* o *inestable*.

Esta última condición (inestable) se refiere a que por lo menos una de las raíces de la ecuación característica no está en el semiplano izquierdo del plano s.

Por razones prácticas, a menudo se hace referencia a la situación en que la ecuación característica tiene raíces *simples* sobre el eje $j\omega$ y *ninguna* en el semiplano derecho del plano s, como *marginalmente estable* o *marginalmente inestable*.

Una excepción a esto es si en el sistema se coloca un integrador, o en el caso de un sistema de control de velocidad, (como el ya mencionado), el sistema tendrá una raíz en $s=0$, la ecuación característica y el sistema sería considerado como estable.

En forma similar, si el sistema está diseñado para ser un oscilador, la ecuación característica tendría raíces simples en el eje $j\omega$ y el sistema sería visto como estable.

Si se considera que las raíces de la ecuación característica de un sistema en tiempo continuo, SISO, lineal e invariante en el tiempo son:

$$s_i = \sigma_i + j\omega_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Si cualquiera de las raíces es compleja, está en pares conjugados.

Las posibles condiciones de estabilidad del sistema se resumen en la tabla siguiente, en función de las s_i .

Condición de Estabilidad	Valores de las Raíces
Asintóticamente estable o simplemente estable	$\sigma_i < 0$ para todo i (todas las raíces están en el semiplano izquierdo del plano s)
Marginalmente estable o marginalmente inestable	$\sigma_i = 0$ para cualquier i para raíces simples y no $\sigma_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ (por lo menos una raíz simple y ninguna raíz de orden múltiple en el eje $j\omega$ y no hay raíces en el

	semiplano derecho del plano s) Nótese las excepciones.-
Inestable	$\sigma_i > 0$ para cualquier i , o $\sigma_i = 0$ para cualquier raíz de orden múltiple, $i = 1, 2, \dots, n$ (Por lo menos una raíz simple en el semiplano derecho del plano s o al menos una raíz de orden múltiple sobre el eje $j\omega$)

Los ejemplos siguientes ilustran las condiciones de estabilidad de sistemas con referencia a los polos de $M(s)$, que son también las raíces de la ecuación característica:

$$M(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

BIBO o asintóticamente estable, o simplemente estable

$$M(s) = \frac{20(s+1)}{(s-1)(s^2 + 2s + 2)}$$

Inestable debido al polo en $s = 1$

$$M(s) = \frac{20(s-1)}{(s+2)(s^2 + 4)}$$

Marginalmente estable o marginalmente inestable debido a $s = \pm j2$

$$M(s) = \frac{10}{(s^2 + 4)^2(s+10)}$$

Inestable debido al polo de orden múltiple (dos) en $s = \pm j2$

$$M(s) = \frac{10}{(s^4 + 12s^3 + 22s^2 + 20s)}$$

Estable si el polo en $s = 0$ es colocado intencionalmente. De otra forma es inestable.

Métodos para determinar la Estabilidad

Las discusiones precedentes llevan a la conclusión de que la estabilidad de sistemas SISO, lineales e invariantes con el tiempo se puede determinar:

- 1) Al verificar la *ubicación* de las raíces de la ecuación característica del sistema.
- 2) Para todos los propósitos prácticos no hay necesidad de calcular la respuesta completa del sistema para tal fin.

Cuando se *conocen todos los parámetros* del sistema, las raíces de la ecuación característica se pueden obtener mediante un *programa para computadora* de cálculo de las raíces que esta disponible en muchos paquetes comerciales. Por ejemplo, el archivo .m, roots (p) de Matlab, resuelve las raíces de un polinomio p. Varias funciones en la caja de herramientas del Csad contienen características que permiten el cálculo de los polos de la función de transferencia del sistema M(s).

En el programa CC, la instrucción *Zeros* se puede usar para encontrar los ceros de un polinomio. La instrucción *Stability*, regresa los polos de M(s) y la condición de estabilidad una vez que se introduce la función L(s).

A continuación se tratarán algunos ejemplos, usando Matlab:

1º) Si la ecuación característica es:

$s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 0.50 = 0$, se puede proceder así:

» p=[1 2 2 2 0.5];

» roots(p)

ans =

-1.4092

-0.1313 + 1.0315i

-0.1313 - 1.0315i

-0.3281

Por ende el sistema es Estable.

2º) Si se tiene a la función L(s) como dato, por ejemplo:

$L(s) = \frac{12.5(s+2)}{s(s+5)(s^2 + 2s + 5)}$, la ecuación característica será:

$p = s(s+5)(s^2 + 2s + 5) + 12.5(s+2)$

Se puede utilizar la instrucción pmake del Csad, para formar el vector p y luego emplear la intrusión: roots (p), por ende se tendrá:

» p=pmake(0,-5,[1 2 5],'+',[0 12.5],-2)

p =

1.0000 7.0000 15.0000 37.5000 25.0000

» roots(p)

ans =

-5.3422

-0.4002 + 2.3016i

-0.4002 - 2.3016i

-0.8575

Por lo tanto el sistema en estudio será estable.

El numerador de L(s), se puede colar también así:

2.5*[1 2], o [12.5 25], o [0 12.5],[1 2]

3º) Un sistema tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$L(s) = \frac{130(s+12)}{s(s^2 + 10s + 26)}$; la ecuación característica es:

$$s(s^2 + 10s + 26) + 130(s + 12) = 0 \Rightarrow s^3 + 10s^2 + 156s + 1560 = 0$$

» roots([1 10 156 1560])

ans =

-0.0000 +12.4900i

-0.0000 -12.4900i

-10.0000

En consecuencia el sistema será marginalmente estable.

4º) Si se tiene:

$$L(s) = \frac{50(s+2)}{s(s+5)(s^2 + 2s + 5)};$$

» p=pmake(0,-5,[1 2 5],'+',50*[1 2])

p =

1 7 15 75 100

» roots(p)

ans =

-6.1154

0.3287 + 3.2398i

0.3287 - 3.2398i

-1.5421

En consecuencia el sistema será inestable.

5º) La ecuación característica de un sistema es:

$$s^5 + 10s^4 + 8s^3 + 80s^2 + 16s + 160 = 0$$

» roots([1 10 8 80 16 160])

ans =

-10.0000

0.0000 + 2.0000i

0.0000 - 2.0000i

-0.0000 + 2.0000i

-0.0000 - 2.0000i

En consecuencia el sistema será inestable, pues tiene un par imaginario doble en $s = \pm j2$.

Para fines de diseño, existirán *parámetros desconocidos*, (generalmente de los controladores), contenidos en la ecuación característica, y no será factible utilizar programas de búsqueda de raíces.

Los métodos siguientes son muy conocidos para determinar la estabilidad de sistemas lineales en tiempo continuo, *sin involucrar la solución de las raíces*.

1. Criterios de Hurwitz y de Routh-Hurwitz

Estos criterios son *métodos algebraicos* que proporcionan información sobre la estabilidad absoluta de los sistemas lineales autónomos los cuales tienen la ecuación característica con *coeficientes constantes*. Los criterios prueban si algunas de las raíces de la ecuación característica están en el

semiplano derecho del plano s. También indican el *número de las mismas que están sobre el eje jw y en el semiplano derecho del plano s.*

Si hay un parámetro variable indican el o los rangos del mismo que hacen que el sistema sea estable.

2. Criterio de Nyquist

Este criterio es un método grafico-analítico que provee información sobre la diferencia entre el número de ceros y polos de $F(s)=1+L(s)$ que están en el semiplano derecho del plano s, mediante la observación del comportamiento de la gráfica o traza de Nyquist de $L(s)$, o sea del diagrama polar de la función de transferencia frecuencial del lazo $L(jw)$.

3. Diagrama de Bode

Los gráficos de Bode de $L(jw)$ se pueden utilizar para determinar la estabilidad de los sistemas cuyas funciones de transferencias del lazo sean de fase mínima, al observar el comportamiento de los mismos.-

4. Técnica del Lugar de las Raíces

Como se vera este método si da la ubicación exacta de las raíces de la ecuación característica y su estudio se hará mas adelante.

Por lo tanto, es evidente que la mayoría de las técnicas de análisis y diseño para los sistemas de control representan *métodos alternativos* para resolver el mismo problema. El diseñador simplemente tiene que hacer la *elección correcta* de la mejor herramienta de análisis, dependiendo del gusto y de cada situación en particular.-

Criterios Algebraicos para Determinar la Estabilidad de un Sistema Lineal

Estos criterios nos permiten observar y estudiar la estabilidad de los sistemas lineales autónomos directamente a partir del conocimiento de los coeficientes de sus ecuaciones características, si necesidad de resolverlas. Esta propiedad la tiene los criterios de Hurwitz y Routh-Hurwitz o simplemente Routh.-

Criterio Algebraico de Hurwitz

En general se está interesado en algoritmos que sean de aplicación sencilla y directa y nos indiquen si el sistema es estable o no, sin computaciones complicadas. Esto se puede llevar a cabo con los criterios algebraicos de Hurwitz y de Routh-Hurwitz, (o Routh simplemente).

Pero el uso más importante de estos criterios, es que nos *permite determinar los rangos de un parámetro dentro de los cuales el sistema es estable*. También para sistemas con *dos parámetros variables* permiten

demarcar en el plano paramétrico $k_1 = f(k_2)$ la región de estabilidad del sistema de control (k_1 y k_2 son los parámetros variables).

Se verá primero las *condiciones necesarias* para que un polinomio, (la ecuación característica), tenga todas sus raíces en el semiplano izquierdo del plano s.

Supongamos que la ecuación característica de un sistema lineal es la siguiente:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

En la misma los *coeficientes son reales* y se supone que $a_0 \neq 0$, (sino la ecuación característica tendría una raíz en el origen).

En la práctica haremos $a_n = 1$, si el mismo es función de algún parámetro.

Las condiciones *necesarias pero no suficientes* para que un polinomio (la ecuación característica) *no tenga* raíces con las partes *reales positivas* son:

- 1º) Que todos los coeficientes tengan el *mismo signo*, si $a_n = 1$, entonces todos los coeficientes deberán ser positivos.
- 2º) Que *existan todos* ellos ($a_i \neq 0$).

Estas condiciones se pueden verificar por simple inspección y están basadas en las siguientes propiedades del álgebra:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\sum \text{(de todas las raíces)} = -\sum_{j=1}^n (\lambda_j), \text{ si } a_n = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^n (\lambda_j) = -a_{n-1}$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = +\sum \text{(Producto de las raíces tomando dos a la vez)}$$

$$\frac{a_{n-3}}{a_n} = -\sum \text{(Producto de las raíces tomando tres a la vez)}$$

.....

.....

$$\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \prod_{j=1}^n (\lambda_j) \Rightarrow \text{si } a_n = 1 \Rightarrow \prod_{j=1}^n (\lambda_j) = (-1)^n a_0$$

Como se puede ver, todas las *relaciones* tienen que ser *positivas y no nulas*, a menos que *una o más* de las raíces *tengan la parte real positiva*. Las dos condiciones necesarias se pueden verificar por una simple inspección de la ecuación característica. Sin embargo *no son suficientes*, ya que es posible que cumpliéndose las dos, la ecuación puede tener alguna raíz con parte real positiva. Se verá a continuación la *Condición Necesaria y Suficiente*. Sea el polinomio ya visto:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Se definirá la *Matriz de Hurwitz de orden $n \times n$* , como la que se forma con los coeficientes de la ecuación característica, de la manera siguiente:

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{bmatrix} \quad (\text{nxn})$$

El enunciado del criterio dice:

Si $a_n > 0$ el polinomio será uno de Hurwitz, (todas sus raíces en el semiplano izquierdo del plano s), si y solo si, los n menores principales diagonales de H, (también llamados determinantes de Hurwitz), son todos positivos.-

Por ende los determinantes de Hurwitz serán los siguientes:

$$H_1 = a_{n-1}$$

$$H_2 = \text{determinante de } \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \text{determinante de } \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-6} \end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

$$H_n = \text{determinante de } H$$

En donde los coeficientes con subíndices mayores que n o negativos, se reemplazan por ceros.

Ejemplo 1:

$$\text{Para } n = 2, \Rightarrow a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\text{Si } a_2 > 0 ; \quad H_1 = a_1 > 0 \quad y \quad H_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} = a_1 a_0 > 0 \Rightarrow a_0 > 0. -$$

Por ende para un sistema de segundo orden, (sin retardos), la condición necesaria se vuelve también suficiente, o sea que si en la ecuación característica: $a_0 > 0 ; a_1 > 0 ; y a_2 > 0$, el sistema será estable.

Ejemplo 2:

$$\text{Para } n = 3, \Rightarrow a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Si $a_3 > 0$, la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea estable será:

$$H_1 = a_2; \quad H_2 = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{bmatrix} = (a_2 a_1 - a_0 a_3) > 0 \text{ y}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & a_{-2} \\ a_3 & a_1 & a_{-1} \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = a_0 \times H_2 > 0$$

Por lo tanto si se cumple la condición necesaria, ($a_i > 0$), solo es necesario verificar que:

$H_2 = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{bmatrix} = (a_2 a_1 - a_0 a_3) > 0$, para que el sistema sea estable. También se

puede expresar: $\frac{a_2 a_1}{a_3} > 0$, y si $a_3 = 1$, quedaría:

$$a_2 \times a_1 > 0$$

Ejemplo 3:

Si la ecuación característica del sistema es:

1. $s^3 + 2s^2 + 2s + 2 = 0 \Rightarrow 2 \times 2 > 2 \Rightarrow 4 > 2$ Sistema Estable.

2. $s^3 + 2s^2 + 2s + 6 = 0 \Rightarrow 2 \times 2 < 6 \Rightarrow 4 < 6$ Sistema Inestable.

3. $s^3 + 2s^2 + 2s + 4 = 0 \Rightarrow 2 \times 2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$ Sistema Marginalmente

Estable. El polinomio tiene un par imaginario en:

$$s_{1-2} = \pm j\sqrt{2} \quad y \quad s_3 = -2 \Rightarrow (s^2 + 2)(s + 2) = s^3 + 2s^2 + 2s + 4 = 0$$

4. $s^3 + 7s^2 + 2s + a_0 = 0$, el rango de a_0 para la estabilidad será:

$$7 \times 2 > a_0 \Rightarrow a_0 < 14 \quad \Rightarrow \quad 0 < a_0 < 14$$

5. $s^3 + 2s^2 + a_1 s + 6 = 0$, el rango de a_1 para la estabilidad será:

$$2 \times a_1 > 6 \Rightarrow a_1 > 3 \quad \Rightarrow \quad 3 < a_1 < \infty$$

Ejemplo 4:

Si la ecuación característica de un sistema, con $0 < \alpha < 1$, es:

$$s^3 + 10.05s^2 + (0.5 + 1500\alpha)s + 500 = 0$$

Encontrar el rango del parámetro α para que el sistema sea estable.

La condición necesaria se cumple si:

$$(0.5 + 1500\alpha) > 0 ; \quad \alpha > \frac{-1}{300}, \text{ como } \alpha > 0 \text{ se cumple siempre.}$$

El sistema será estable si:

$10.50(0.50 + 1500\alpha) > 500$, operando se llega a que: $\alpha > 0.0328$, por ende el rango buscado será:

$$0.0328 < \alpha < 1$$

En el mismo sistema si $\alpha = 0.02 = cte$, y otro parámetro $Ka > 0$, varía, encontrar el rango del mismo para que el sistema sea estable. La ecuación característica es ahora:

$$s^3 + 10.05s^2 + \left[0.5 + \frac{15Ka}{\pi} \right]s + \frac{250Ka}{\pi} = 0$$

Como $Ka > 0$, se cumple la condición necesaria. El sistema será estable si:

$$10.05 \left[0.5 + \frac{15Ka}{\pi} \right] > \frac{250Ka}{\pi} \Rightarrow 5.025\pi > Ka(250 - 150.75) \Rightarrow Ka < 0.159$$

El rango buscado será:

$$0 < Ka < 0.159$$

En el mismo sistema si $\alpha = 0.06 = cte$, y el parámetro, varía, encontrar el rango del mismo para que el sistema sea estable. La ecuación característica es ahora:

$$s^3 + 10.05s^2 + \left[0.5 + \frac{45Ka}{\pi} \right]s + \frac{250Ka}{\pi} = 0$$

Si $Ka > 0$ (1), se cumple la condición necesaria. El sistema será estable si:

$$10.05 \left[0.5 + \frac{45Ka}{\pi} \right] > \frac{250Ka}{\pi} \Rightarrow 5.025\pi + 452.25Ka > 250Ka \Rightarrow Ka > -0.07805 \quad (2)$$

Interceptando (1) y (2) el rango buscado será:

$$0 < Ka < \infty$$

Ejemplo 5:

Un sistema con realimentación unitaria tiene:

$$G(s) = \frac{2(s+2)}{s(s^2 + 3Ks + K)};$$

Determinar el rango de K para que el sistema sea estable.

La ecuación característica es:

$$s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 4 = 0$$

La condición necesaria se cumple si $K > 0$.

La condición necesaria y suficiente será:

$$3K(K+2) > 4 \Rightarrow 3K^2 + 6K - 4 > 0 \Rightarrow 3(K+2.5275)(K-0.5275) > 0$$

Por lo tanto: $K - 0.5275 > 0 \Rightarrow K > 0.5275$

En consecuencia el rango buscado será:

$$0.5275 < K < \infty .-$$

Ejemplo 6:

Un sistema con realimentación unitaria tiene:

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 1)}{(s+1)^3};$$

Determinar el rango de K para que el sistema sea estable.

La ecuación característica es:

$$s^3 + (3+K)s^2 + 3s + (1+K) = 0$$

La condición necesaria se cumple si:

$$\begin{aligned} 3+K > 0 & \quad K > -3 \\ 1+K > 0 & \quad K > -1 \end{aligned} \Rightarrow K > -1 \quad (1)$$

La condición necesaria y suficiente será:

$$(3+K)3 > 1+K \Rightarrow 2K+8 > 0 \Rightarrow 2(K+4) > 0 \Rightarrow K > -4 \quad (2)$$

Interceptando (1) y (2): $\Rightarrow K > -1$

Por ende el rango buscado será:

$$-1 < K < \infty$$

Ejemplo 7:

Para $n = 4$, $\Rightarrow a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$

$$\text{Si } a_4 > 0; H_1 = a_3 > 0; H_2 = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{bmatrix} = (a_2 a_3 - a_1 a_4) > 0$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{bmatrix} = (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 a_0 - a_1^2 a_4) > 0$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = a_0 \times H_3 > 0$$

Como se puede apreciar si se cumple la condición necesaria, solo se deberá cumplir para que el sistema sea estable que: $H_2 > 0$ y $H_3 > 0$, o sea:

$$1. \quad a_2 a_3 > a_1 a_4 \quad \text{si } a_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_3 a_2 > a_1$$

$$2. \quad \frac{a_3 a_2 a_1 - a_1^2 a_4}{a_3^2} > a_0; \quad \text{si } a_4 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{a_3 a_2 a_1 - a_1^2}{a_3^2} > a_0$$

Ejemplo 8:

Si la ecuación característica de un sistema es:

$$s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 0.50 = 0$$

Como se cumple la condición necesaria, deberá ser:

$$1. \quad 2 \times 2 > 2 \quad ; \quad 4 > 2$$

$$2. \quad \frac{2 \times 2 \times 2 - 4}{4} > 0.5 \quad ; \quad 1 > 0.50$$

Por lo tanto el sistema es estable.

Ejemplo 9:

Si la ecuación característica de un sistema es:

$$s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 10s + K = 0, \text{ cual es el rango de } K \text{ para la estabilidad.}$$

Como se cumple la condición necesaria, deberá ser:

$$3. \quad 2 \times 6 > 10 \quad ; \quad 12 > 10$$

$$4. \quad \frac{2 \times 6 \times 10 - 100}{4} > K \Rightarrow K < 5$$

El rango de K buscado será:

$$0 < K < 5$$

Ejemplo 10:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{2K(s^2 + 8s + 20)}{(s+1)(s+2)(s+4)} ; \text{ Cual es el rango de } K \text{ para la estabilidad.}$$

La ecuación característica es:

$$s^3 + (7 + 2K)s^2 + (14 + 16K)s + (8 + 40K) = 0$$

La condición necesaria se cumple si:

$$7 + 2K > 0 \Rightarrow 2K > -7 \Rightarrow K > -3.5$$

$$14 + 16K > 0 \Rightarrow 16K > -14 \Rightarrow K > -0.875$$

$$8 + 40K > 0 \Rightarrow 40K > -8 \Rightarrow K > -0.2$$

La intersección de estas tres restricciones nos da: $K > -0.20$ (1).-

La condición necesaria y suficiente será:

$$(7 + 2K)(14 + 16K) > (8 + 40K), \text{ operando:}$$

$32K^2 + 100K + 90 > 0$, como las raíces son complejas, se puede poner:

$$32K^2 + 90 > -100K \Rightarrow y > x$$

La figura 1, muestra que, $y(K) > x(K)$, para todo valor de K (2).-

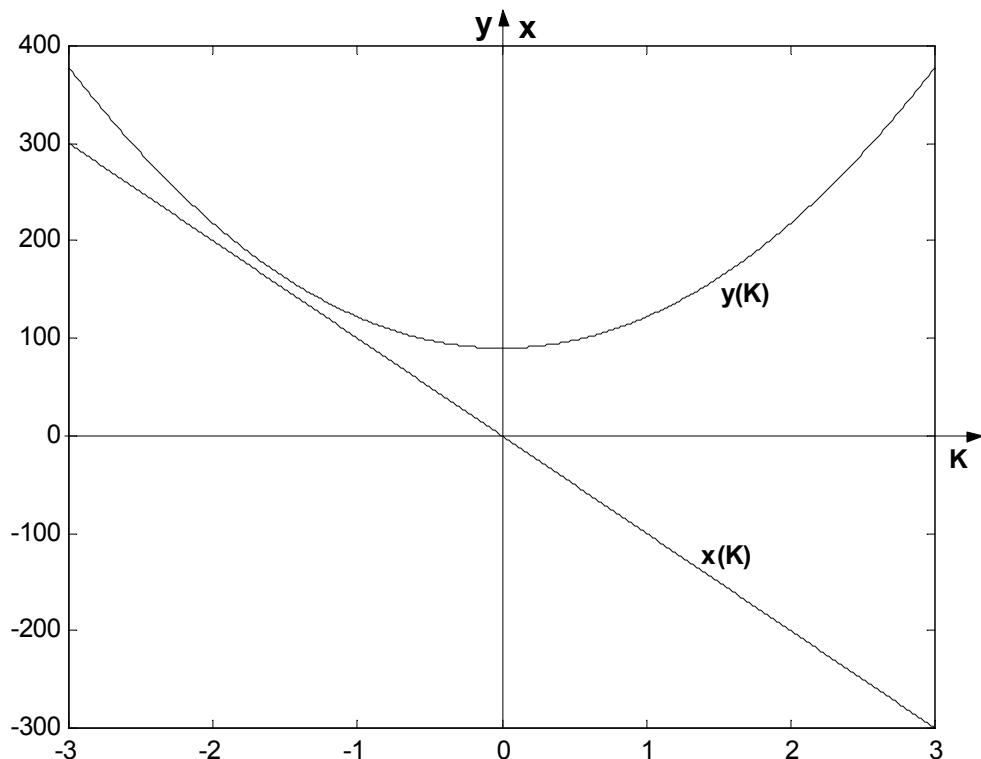


Figura 1

Interceptando (1) y (2) se tiene el rango buscado, a saber:

$$-0.20 < K > \infty$$

Ejemplo 11: La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K(s + 0.50)}{(s+1)(s+2)(s^2 - s + 3.25)} ; \text{ Cual es el rango de } K \text{ para la estabilidad.}$$

La ecuación característica es:

$$s^4 + 2s^3 + 2.25s^2 + (7.75 + K)s + (6.5 + 0.5K) = 0$$

La condición necesaria se cumple si:

$$7.75 + K > 0 \Rightarrow K > -7.75$$

$$6.5 + 0.5K > 0 \Rightarrow K > -13$$

Por lo tanto, será: $K > -7.75$ (1)

Cumpliéndose la (1), además deberá ser:

$$2 \times 2.25 > (K + 7.75) \Rightarrow K < -3.25 \quad (2)$$

$$\frac{2 \times 2.25 \times (7.75 + K) - (7.75 + K)^2}{4} > (6.5 + 0.5K); \text{ operando se llega a:}$$

$$-K^2 - 13K + 51.1875 < 0; \text{ o también: } K^2 + 13K + 51.1875 < 0$$

Las raíces son complejas conjugadas, en consecuencia se tendrá que:

$$K^2 + 13K + 51.1875 < -13K \Rightarrow y(K) < x(K) \quad (3)$$

La figura 2, indica que (3) no se cumple para cualquier valor de K.

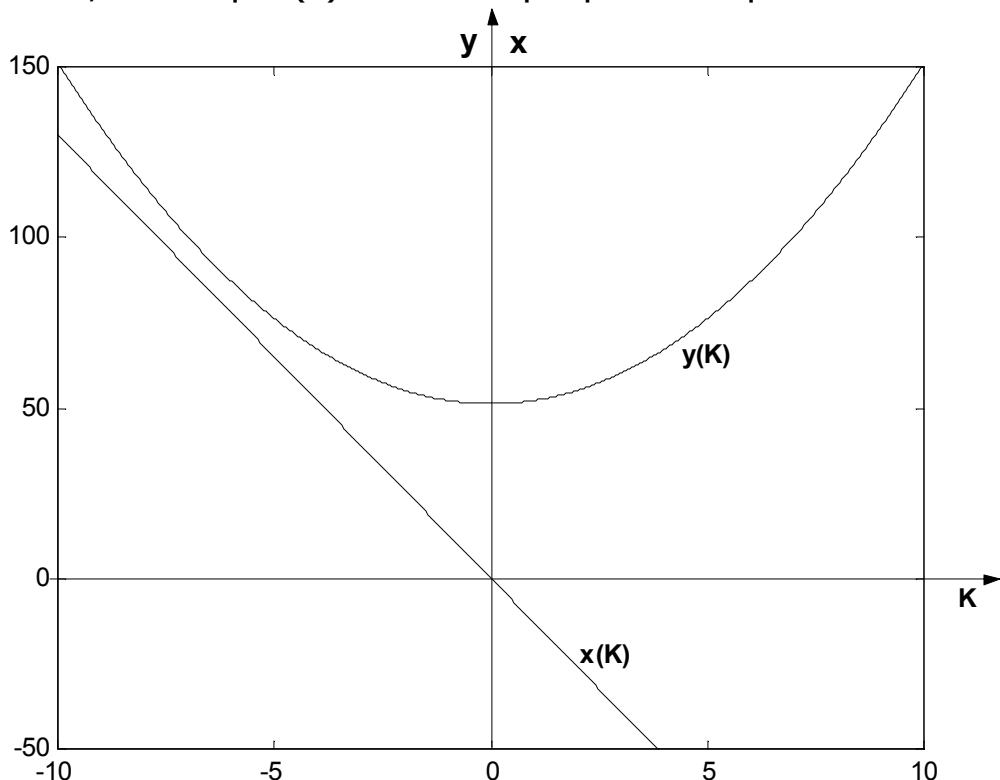


Figura 2

Interceptando (1), (2) y (3), el sistema será inestable para cualquier valor de K, sería un sistema inútil.

Ejemplo 12: La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{32(1-1.4375s)}{s(s^3 + 6s^2 + 12s + 5K)}; \text{ Cual es el rango de } K \text{ para la estabilidad.}$$

La ecuación característica es:

$$s^4 + 6s^3 + 12s^2 + (5K - 46)s + 32 = 0$$

La condición necesaria se cumple si:

$$5K - 46 > 0 \Rightarrow K > 9.2 \quad (1)$$

Además se deberá cumplir que:

$$6 \times 12 > (5K - 46) \Rightarrow K < 23.6 \quad (2)$$

$$\frac{6 \times 12 \times (5K - 46) - (5K - 46)^2}{36} > 32 \Rightarrow (K - 14)(K - 18.8) < 0 \quad (3)$$

Interceptando (1), (2) y (3), el sistema será estable en el siguiente rango de K.

$$14 < K < 18.8$$

A primera parece muy tediosa la aplicación de este criterio a sistemas de orden mayor o igual a cuatro, debido a que las expresiones para las condiciones necesarias y suficientes se complican y no serían de fácil memorización. Afortunadamente, Routh simplificó esta situación, introduciendo un método de tabulación, con los coeficientes de la ecuación característica, en lugar de calcular los determinantes de Hurwitz.-

Tabulación de Routh. Criterio de Routh-Hurwitz

El primer paso en la simplificación del criterio de Hurwitz, ahora llamado Routh-Hurwitz es arreglar los coeficientes de la ecuación característica en dos filas. La primera consiste del 1º, 3º, 5º, etc. coeficientes y la segunda del 2º, 4º, 6º, etc. todos con todos desde el coeficiente de mayor orden a_n . O sea:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	:	:	0
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	:	:	0
s^{n-2}	x_1	x_2	x_3	:	:	:	0
s^{n-3}	y_1	y_2	y_3	:	:	:	0
:	:	:	:	:	:	:	0
:	:	:	:	:	:	:	0
s^1	u_1	0	0	0	0	0	0
s^0	v_1	0	0	0	0	0	0

Este arreglo se conoce como *tabulación de Routh* o *arreglo de Routh*. La columna de "eses" en el lado izquierdo se usa para propósitos de identificación. La columna de referencia mantiene el rastro de los cálculos y la última fila del arreglo es siempre la fila: $s^0 (a_0 \ 0 \ 0 \dots \ 0)$.

Recordar que los determinantes de Hurwitz de la ecuación característica eran:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Si $a_n > 0$, los menores principales diagonales de:

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \end{bmatrix} \quad (n \times n)$$

eran los determinantes de Hurwitz:

$$H_1 = a_{n-1} > 0$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix} = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} > 0$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} = a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} + a_n a_{n-1}a_{n-5} - a_n a_{n-3}^2 - a_{n-1}^2 a_{n-4} > 0$$

$$H_n > 0$$

Retornando, el arreglo de Routh:

La tercera fila: x_1, x_2, x_3 , etc., se calcula así:

$$x_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \equiv \frac{H_2}{H_1} \rightarrow x_1 = \frac{H_2}{H_1}$$

$$x_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots, \text{etc } x_1, x_2, x_3,$$

Y se continua hasta que $x_i \equiv 0$

La cuarta fila: v_1, v_2 ; etc. se calcula así:

$$y_1 = \frac{x_1 a_{n-3} - a_{n-1} x_2}{x_1} = \frac{a_{n-1}}{\frac{a_{n-1} a_{n-2} a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} =$$

$$= \frac{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} - a_n a_{n-3}^2 - a_{n-1}^2 a_{n-4} + a_n a_{n-1} a_{n-5}}{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}} = \frac{H_3}{H_2}$$

$$y_1 = \frac{H_3}{H_2} . -$$

$$y_2 = \frac{x_1 a_{n-5} - a_{n-1} x_3}{x_1}$$

Se continua de igual forma hasta que $y_i = 0$

El resto de las filas se determinan con el mismo procedimiento.

La penúltima fila será:

$u_1 = \frac{H_{n-1}}{H_{n-2}}$ y será el único elemento de la fila los demás son nulos.-

La última fila será:

$v_1 = \frac{H_n}{H_{n-1}} \equiv a_0$, también es el único elemento, los demás son nulos.

Por lo tanto, la columna del arreglo se puede colocar así:

$$\left[\begin{array}{c} a_n > 0 \\ a_{n-1} = H_1 \\ x_1 = \frac{H_2}{H_1} \\ y_1 = \frac{H_3}{H_2} \\ \vdots \\ u_1 = \frac{H_{n-1}}{H_{n-2}} \\ v_1 = \frac{H_n}{H_{n-1}} = a_0 \end{array} \right]$$

Si $a_n > 0$, al ser los determinantes de Hurwitz, para que el sistema sea estable, todos positivos, sus cocientes también lo serán y por lo tanto los elementos de la primera columna del arreglo de Routh deberán ser todos positivos para que el polinomio característico sea uno de Hurwitz y por ende el sistema estable. El enunciado del criterio de Routh-Hurwitz es el siguiente:

El *número de raíces* de la ecuación característica *que tengan la parte real positiva*, será igual al número de *cambios de signo* de los elementos de la primera columna del arreglo de Routh.-

Ejemplo 13:

Dada la función de transferencia del lazo de un sistema:

$L(s) = \frac{6(s+2.5)}{s^2(s^3 + 3s^2 + 7s + 20)}$, determinar si el mismo es estable, por Routh.

La ecuación característica del sistema será:

$$s^2(s^3 + 3s^2 + 7s + 20) + 6(s+2.5) = 0, \text{ operando se llega a:}$$

$$s^5 + 3s^4 + 7s^3 + 20s^2 + 6s + 15 = 0$$

El arreglo de Routh será:

s^5	1	7	6
s^4	3	20	15
s^3	1/3	1	0
s^2	11	15	0
s^1	6/11	0	0
s^0	15	0	0

Como se puede ver todos los elementos de la primera columna son positivos, (no hay cambios de signo), por ende el sistema será estable, llamando Z al número de raíces de la ecuación característica en el semiplano derecho del plano s, se tendrá que:

$$Z = 0$$

Ejemplo 14:

Dada la función de transferencia del lazo de un sistema:

$L(s) = \frac{K(s+0.25)}{s^2(s^2 + 2s + 3)}$, Si K = 8, determinar si el sistema es estable, por Routh.

La ecuación característica del sistema será:

$$s^2(s^2 + 2s + 3) + 8(s+0.25) = 0, \text{ operando se llega a:}$$

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 8s + 2 = 0$$

Por Hurwitz ya se ve que el sistema es inestable pues: $a_3 a_2 > a_1$, no se cumple pues $2 \times 3 < 8$.

El arreglo de Routh será:

s^4	1	3	2
s^3	2	8	0
s^2	-1	2	0
s^1	12	0	0
s^0	2	0	0

Como Z = 2, (dos cambios de signo), de las cuatro raíces o ceros de la ecuación característica dos están en el semiplano derecho del planos.

En este ejemplo: $H_1 = a_3 = 2$; $H_2 = -2$; $H_3 = -24$ y $H_4 = -48$.

$$\frac{H_2}{H_1} = -1; \quad \frac{H_3}{H_2} = 12 \quad y \quad \frac{H_4}{H_3} = a_0 = 2.$$

Se puede resolver estos problemas usando programas de computación, por ejemplo la instrucción Routh, del Csad/Matlab.-

Apliquémoslo al último ejemplo:

» Routh

Enter polynomial vector D > [1 2 3 8 2]

You entered: $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 8s^1 + 2$

S^4 Row: 1 3 2

S^3 Row: 2 8 0

S^2 Row: -1 2 0

S^1 Row: 12 0

S^0 Row: 2

Press any key to continue...

First column is:

S^4 1

S^3 2

S^2 -1

S^1 12

S^0 2

Number of sign changes in the first column is 2

The computed roots of D(s) are:

2.0711e-001 +1.8361e+000i

2.0711e-001 -1.8361e+000i

-2.1406e+000

-2.7366e-001

O el programa Srouth, agregado al Csad.

» Srouth

Variables posibles de utilizar: kp kd ki t a k

Ingresar el polinomio como vector > [1 2 3 8 2]

El polinomio ingresado es:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 \\ s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 8s^1 + 2 \end{array}$$

La tabla de Routh es:

[s^4 , 1, 3, 2, 0]

[s^3 , 2, 8, 0, 0]

[s^2 , -1, 2, 0, 0]

[s , 12, 0, 0, 0]

[1, 2, 0, 0, 0]

Las raíces están ubicadas en:

0.2071 + 1.8361i

0.2071 - 1.8361i

-2.1406

-0.2737

También se pueden determinar el o los rangos de un parámetro variable para que el sistema sea estable.

Ejemplo 15:

Dada la función de transferencia del lazo de un sistema:

$L(s) = \frac{K(s+2.5)}{s^2(s^2 + 2s + 3)}$, determinar el rango de K para que el sistema sea estable, por Routh. La ecuación característica del sistema será:

$$s^2(s^2 + 2s + 3) + K(s + 2.5) = 0, \text{ operando se llega a:}$$
$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + Ks + 0.25K = 0$$

El arreglo de Routh será:

s^4	1	3	0.25K
s^3	2	K	0
s^2	$(6-K)/2$	$0.25K$	0
s^1	$[(6-K)K - K]/(6-K)$	0	0
s^0	$0.5K$	0	0

⇒ Se multiplica la fila por 2.-

Las restricciones son:

1. $K > 0$
2. $6 - K > 0 ; K < 6$
3. $6K - K^2 - K > 0 ; K(5 - K) > 0 ; K < 5$

La intersección de todas las restricciones nos da el rango total de K .

$$0 < K < 5$$

Como se puede ver para $K = 5$, el sistema sería marginalmente estable.

La ecuación característica sería:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 5s + 1.25 = 0$$

Como se cumple la condición necesaria, para que el sistema fuese estable se debería cumplir además que:

1. $2 \times 3 > 5$, se cumple.
2. $\frac{2 \times 3 \times 5 - 25}{4} > 1.25$, no se cumple es *igual y no mayor*, por lo tanto hay

un par de raíces imaginarias y las otras dos están en el semiplano derecho del plano s , el sistema es marginalmente estable.-

Comentarios del Arreglo de Routh

1. Hay que ordenar la ecuación característica en potencias decrecientes de s para definir bien los coeficientes, $a_n ; a_{n-1} ; a_{n-2} ; \dots ; a_0$.-

Por ejemplo si se tiene:

$$s^4 + 3s^2 + 4 + 2s^3 + 5s = 0 ; \text{ ordenado:}$$

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 5s + 4 = 0 ; \text{ y por lo tanto, los coeficientes son:}$$

$$a_4 = 1 ; a_3 = 2 ; a_2 = 3 ; a_1 = 5 \text{ y } a_0 = 4 .-$$

2. Si falta un coeficiente, el sistema como se sabe será inestable, pues no cumpliría la condición necesaria. Si se desea saber cuantas raíces están en el semiplano derecho del plano s , (a menos que falte el coeficiente a_{n-1} , que se vera como un caso especial mas adelante), se

reemplaza por un cero el coeficiente faltante y se continua con el proceso de tabulación.

Ejemplo 16:

La función de transferencia de un sistema es:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+2)}{s^4 + 2s^3 + 3s + 4}; \text{ la ecuación característica del mismo es:}$$

$s^4 + 2s^3 + 3s + 4 = 0$; el arreglo de Routh será:

s^4	1	0	4	
s^3	2	3	0	
s^2	-1.5	4	0	$\Rightarrow Z = 2$
s^1	25/3	0	0	
s^0	4	0	0	

Como hay dos cambios de signo en la primera columna del arreglo, en consecuencia serán dos las raíces de la ecuación característica que se ubican en el semiplano derecho del plano s.-

3. La distribución completa es triangular.
4. Las penúltimas y últimas filas del arreglo tienen *solo el primer elemento* y los demás nulos. El último elemento de la *columna pivote* es el coeficiente a_0 .
5. Cualquier fila del arreglo puede ser multiplicada por *cualquier numero positivo*, sin que se altere el resultado.-

Ejemplo 17:

La función de transferencia del lazo de un sistema de control es:

$$L(s) = \frac{5(s^2 + 2.4s + 4)}{s^3(s^3 + 3s^2 + 2s + 9)}, \text{ determinar si el sistema es estable:}$$

La ecuación característica es:

$$s^3(s^3 + 3s^2 + 2s + 9) + 5(s^2 + 2.4s + 4) = 0, \text{ operando:}$$

$s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 9s^3 + 5s^2 + 12s + 20 = 0$, el arreglo será:

s^6	1	2	5	20	
s^5	3	9	12	0	
s^4	1	3	4	0	
s^3	-1	1	20	0	
s^2	4	24	0	0	
s^1	1	6	0	0	
s^0	7	20	0	0	
	22/7	0	0	0	
	20	0	0	0	

La segunda fila se dividió por 3 y la cuarta por 4.

Como se aprecia hay dos cambios de signo en la primera columna, $Z = 2$,

Por ende el sistema en estudio es inestable.-

6. Ecuaciones Auxiliares: Cualquier fila simple del arreglo representa una expresión que contiene potencias de "s" alternadas, estas expresiones son llamadas ecuaciones auxiliares. Por ejemplo:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & : & : & : \\ s^4 & k_1 & k_2 & k_3 \\ s^3 & : & : & : \end{array} \Rightarrow \text{Ecuación auxiliar: } k_1 s^4 + k_2 s^2 + k_3 = A(s).-$$

Casos Especiales donde el Arreglo de Routh se Interrumpe Prematuramente

Los polinomios característicos considerados en los ejemplos anteriores están diseñados de tal forma que la tabulación de Routh pueda llevarse a cabo sin ninguna complicación. Dependiendo del valor de los coeficientes de la ecuación característica, las siguientes *dificultades* pueden *impedir* que la tabulación de Routh sea *completada apropiadamente*.-

Los casos más comunes son:

- I) Ceros en la columna pivote con elementos *no nulos* en la fila donde está el cero.-
- II) Los elementos de *una sola fila* de la tabulación son *todos nulos*.
- III) Cuando aparecen *más de una fila iguales a cero*, (como mínimo dos), luego de salvar las interrupciones del arreglo.-

Caso I):

Si aparece un cero en primer elemento de una fila del arreglo, con algunos distintos de cero, se interrumpirá prematuramente la formación del arreglo y no se podrá aplicar la prueba de Routh. Cuando pasa esto, el sistema es *siempre inestable*, por ende al tratar de salvar este inconveniente solo es para determinar el número de ceros de la ecuación característica que están en el semiplano derecho del plano s.

Para salvar este problema se pueden seguir los métodos siguientes:

- a) Sustituir el cero por un número *pequeño positivo*, ξ , (en el programa Routh del Csad/Matlab, $\xi = 10^{-5}$), luego operar como es sabido y finalmente hacer tender $\xi \rightarrow 0$ y aplicar la prueba ordinaria.

Ejemplo18:

La ecuación característica de un sistema es:

$$s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$$

El arreglo de Routh será:

s^5	1	2	11	
s^4	2	4	10	
s^3	0	6	0	
	ξ	6	0	
s^2	$(4\xi - 12)/\xi = A$	10	0	
s^1	$(6A - 10\xi)/A = B$	0	0	
s^0	10	0	0	

Cuando $\xi \rightarrow 0$:

$A \rightarrow -12/\xi \Rightarrow$ Un número grande negativo.

$B \rightarrow 6$

Por lo tanto la primera columna será:

$$\begin{bmatrix} +1 \\ +2 \\ +\xi \\ -12/\xi \\ +6 \\ +10 \end{bmatrix}$$

Como $Z = 2$, el sistema será inestable.-

Con la función Routh del Csad/Matlab se tiene:

» Routh

Enter polynomial vector D > [1 2 2 4 11 10]

You entered: $s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s^1 + 10$

S^5 Row: 1 2 11 0

S^4 Row: 2 4 10 0

Zero element in first column of the next row.

Replacing zero with 1e-5.

S^3 Row: 1.0000e-005 6.0000e+000 0 0

S^2 Row: -1.2000e+006 1.0000e+001 0

S^1 Row: 6.0000e+000 0

S^0 Row: 10

Press any key to continue...

First column is:

S^5 1

S^4 2

S^3 1e-005

S^2 -1.2e+006

S^1 6

S^0 10

Number of sign changes in the first column is 2

The computed roots of $D(s)$ are:

8.9502e-001 +1.4561e+000i

8.9502e-001 -1.4561e+000i

$$\begin{aligned} &-1.2407e+000 + 1.0375e+000i \\ &-1.2407e+000 - 1.0375e+000i \\ &-1.3087e+000 \end{aligned}$$

Ejemplo 19:

Si, $L(s) = \frac{6(s+0.25)}{s^2(s^2+2s+3)}$ \Rightarrow la F(s) es: $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 6s + 1.5 = 0$

El arreglo será:

s^4	1	3	1.5	
s^3	2	6	0	
s^2	0	1.5	0	
	ξ	1.5	0	
s^1	$(6\xi - 3)/\xi$	0	0	
s^0	1.5	0	0	

Cuando $\xi \rightarrow 0^+$, la primera columna será:

$$\begin{bmatrix} +1 \\ +2 \\ \xi \\ -3/\xi \\ +1.5 \end{bmatrix}; \text{ Como } Z = 2, \text{ el sistema será inestable.}$$

Ejemplo 20:

Si, $L(s) = \frac{3(s+5/3)}{s^2(s^2+3)}$ \Rightarrow la F(s) es: $s^4 + 0s^3 + 3s^2 + 3s + 5 = 0$

El arreglo será:

s^4	1	3	5	
s^3	0	3	0	
	ξ	3	0	
s^2	$(3\xi - 3)/\xi = A$	5	0	
s^1	$(3A - 5\xi)/A$	0	0	
s^0	5	0	0	

Cuando $\xi \rightarrow 0^+$, la primera columna será:

$$\begin{bmatrix} +1 \\ \xi \\ -3/\xi \\ \xi \\ +5 \end{bmatrix}; \text{ Como } Z = 2, \text{ el sistema será inestable.}$$

- b) El segundo método para solucionar este inconveniente es, sustituir en la ecuación original (s) por (1/x), ordenar según potencias decrecientes de x y operar en la forma habitual y hallar el número de raíces con parte real

positiva en el plano x. Como es evidente será el *mismo número* que las del plano s original.-

Ejemplo 21:

Para la ecuación característica del ejemplo 18 se tendrá, haciendo $s=1/x$:

$$\frac{1}{x^5} + \frac{2}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{11}{x} + 10 = 0, \text{ o multiplicando por } x^5, \text{ quedará:}$$

$$10x^5 + 11x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

Finalmente si se divide por 10 para hacer 1 el coeficiente de mayor orden, aunque no sea necesario en este caso, nos quedará:

$$x^5 + 1.1x^4 + 0.4x^3 + 0.2x^2 + 0.2x + 0.1 = 0$$

El arreglo de Routh será:

x^5	1	0.4	0.2	
x^4	1.1	0.2	0.1	
x^3	0.24/1.1	0.12/1.1	0	
x^2	-0.35	0.1	0	
x^1	1.2/7	0	0	
x^0	0.1	0	0	

; Como $Z = 2$, el sistema será Inestable.

Una función agregada al Csad/Matlab, llamada Srouth, hace este cálculo:

Nota: Las raíces que además proporciona son las que están en el plano x y no en el plano s. La inversa de las mismas serán las raíces reales de la ecuación característica del sistema en el plano s, por ejemplo será.

» Srouth

Variables posibles de utilizar: kp kd ki t a k

Ingresar el polinomio como vector > [1 2 2 4 11 10]

El polinomio ingresado es:

$$\begin{array}{cccccc} 5 & 4 & 3 & 2 \\ s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 \end{array}$$

El primer elemento de la fila es nulo, se invertirán los coeficientes.

Presione cualquier tecla para continuar

El polinomio ingresado es:

$$\begin{array}{cccccc} 5 & 4 & 3 & 2 \\ s^5 + 11/10s^4 + 2/5s^3 + 1/5s^2 + 1/5s + 1/10 \end{array}$$

La tabla de Routh es:

```
[ s^5,    1,    2/5,   1/5,   0]
[ s^4, 11/10, 1/5, 1/10, 0]
[ s^3, 12/55, 6/55, 0, 0]
[ s^2, -7/20, 1/10, 0, 0]
[ s,    6/35, 0, 0, 0]
[ 1,    1/10, 0, 0, 0]
```

Las raíces están ubicadas en:

$$0.3064 + 0.4984i$$

Las raíces de $F(s)$ serían:

$$0.3064 - 0.4984i$$

$$\Rightarrow 1/(0.3064) \pm j0.4984 \cong 0.8952 \mp j1.4561$$

$$-0.4743 + 0.3967i$$

$$-0.4743 - 0.3967i$$

$$\Rightarrow 1/(0.4743 \pm j0.3957) \cong -1.2406 \mp j1.03375$$

$$-0.7641$$

$$\Rightarrow 1/-0.7641 \cong -1.3087$$

Ejemplo 22:

Si tenemos la siguiente ecuación característica: $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 6s + 1.5 = 0$, si se aplica el criterio de Routh, el primer elemento de la tercera fila sería nulo y el segundo 6. Por ende aplicando el método b), se tendría:

x^4	1	2	2/3	
x^3	4	4/3	0	
x^2	5/3	2/3	0	; Z = 2, sistema Inestable.-
x^1	-4/15	0	0	
x^0	2/3	0	0	

c) El último método que se estudiara es multiplicar la ecuación característica por $(s+a)$, en donde a es en principio cualquier número real. Al polinomio resultante de orden $(n+1)$, se le aplica la prueba de Routh ordinaria, que tendría una raíz en $(-a)$ como es lógico. Si $a < 0$, tendría una raíz en $(+a)$, o sea en el semiplano derecho del plano s , la cual se deberá descontar del número de cambios de signo Z , dados por la prueba ordinaria de Routh. Si $a > 0$, no.-

Ejemplo 23:

Consideremos la misma ecuación característica del ejemplo 18, apliquemos ahora este método:

$$(s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10) \times (s + 1) = 0; a = 1.-$$

El polinomio resultante seria:

$$s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 15s^2 + 21s + 10 = 0, \text{ el arreglo será:}$$

s^6	1	4	15	10	
s^5	3	6	21	0	
s^4	2	8	10	0	
s^3	-6	6	0	0	Como Z = 2, el sistema será inestable.-
s^2	10	10	0	0	
s^1	12	0	0	0	
s^0	10	0	0	0	

Si $a = -1$, el polinomio resultante y el arreglo serian:

$$(s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10) \times (s - 1) = 0$$

$$s^6 + s^5 + 0s^4 + 2s^3 + 7s^2 - 1s - 10 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & 1 & 0 & 7 & -10 \\ s^5 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ s^4 & -2 & 8 & -10 & 0 \\ s^3 & 6 & -6 & 0 & 0 \\ s^2 & 6 & -10 & 0 & 0 \\ s^1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ s^0 & -10 & 0 & 0 & 0 \end{array} ; \quad Z = 3 - 1 = 2, \text{ Sistema Inestable. -}$$

Como se aprecia el número de cambios de signo es tres, por lo tanto:
 $Z = 3 - 1 = 2$, sería el número de raíces de la ecuación característica en el semiplano derecho del plano s.

Caso Especial II: (Cuando se genera *una sola fila nula*)

Se presenta si la ecuación característica tiene *pares simples de raíces simétricas respecto al origen* del plano s. En estos casos *una fila del arreglo se hará nula* y no se podrá seguir con la tabulación. La solución será utilizar la ecuación auxiliar precedente a la fila de ceros A(s), se deriva respecto a s, $\left[\frac{d}{ds} A(s) \right]$, y los coeficientes de polinomio resultante se ubican en la fila de ceros. Luego se continúa con la tabulación hasta el final de la misma. Puede suceder que el número de cambios de signo sea nulo $Z = 0$, o no, $Z \neq 0$, en el primer caso el sistema será *marginalmente estable*, en el segundo por supuesto inestable.

Una propiedad importante en general es que en estos casos las raíces de las ecuaciones auxiliares, ($A(s)=0$), son los pares simétricos mencionados al inicio y también son raíces de la ecuación característica del sistema.

En consecuencia el polinomio A(s) será siempre de *orden par* con potencias alternadas de s, (no hay potencias impares de s). En consecuencia la fila nula del arreglo debe ser de índice impar, o sea s^i con i impar. Si por ejemplo $i=3$, resultara $A(s) = k_1 s^4 + k_2 s^2 + k_3$, sus raíces serán dos pares simples simétricos respecto al origen del plano s y también serán raíces de la ecuación característica del sistema como se dijo.

Entonces si se anula la fila de índice s^3 , se tendrá:

$$A(s) = k_1 s^4 + k_2 s^2 + k_3 = 0$$

Se supondrá que las ($n-4$) raíces restantes de la ecuación característica están en el semiplano izquierdo del plano s. Los casos que se pueden presentar, *para los pares simples simétricos*, serían los indicados en la figura 3. Como se puede observar, una vez salvada la indeterminación, el caso (b) será, con la suposición hecha, marginalmente estable.

El caso más usual en la práctica es que la fila de índice s^1 se anule. La ecuación auxiliar A(s) será:

$$A(s) = k s^2 + a_0 = 0 ; \text{ y sus raíces serán:}$$

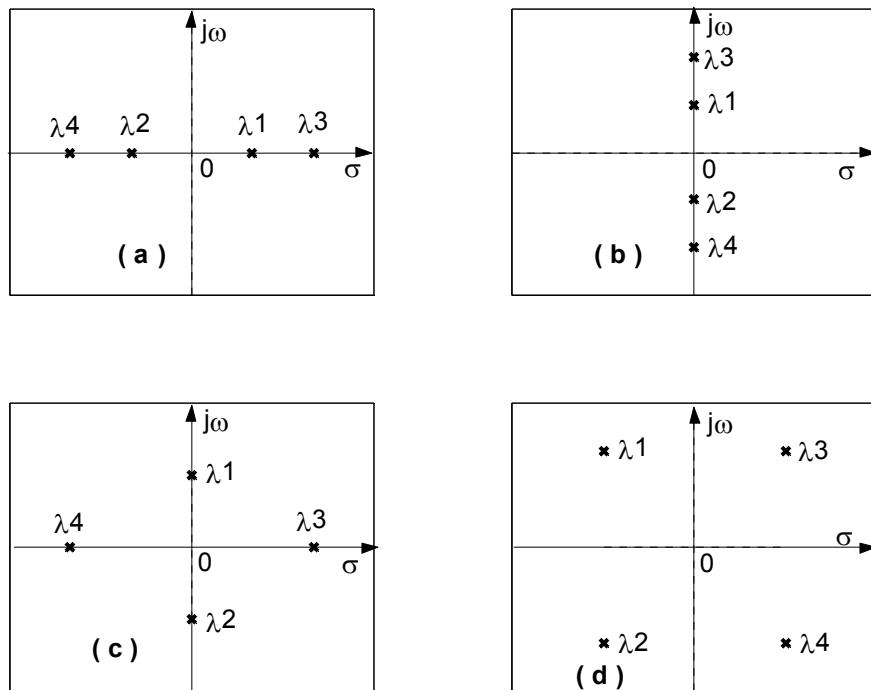


Figura 3

$s_{1-2} = \pm j\sqrt{\frac{a_0}{k}}$. Si $\frac{a_0}{k} > 0$, el par será imaginario. Si es $\frac{a_0}{k} < 0$ el par será real.-

Estos casos están ilustrados en la figura 4.

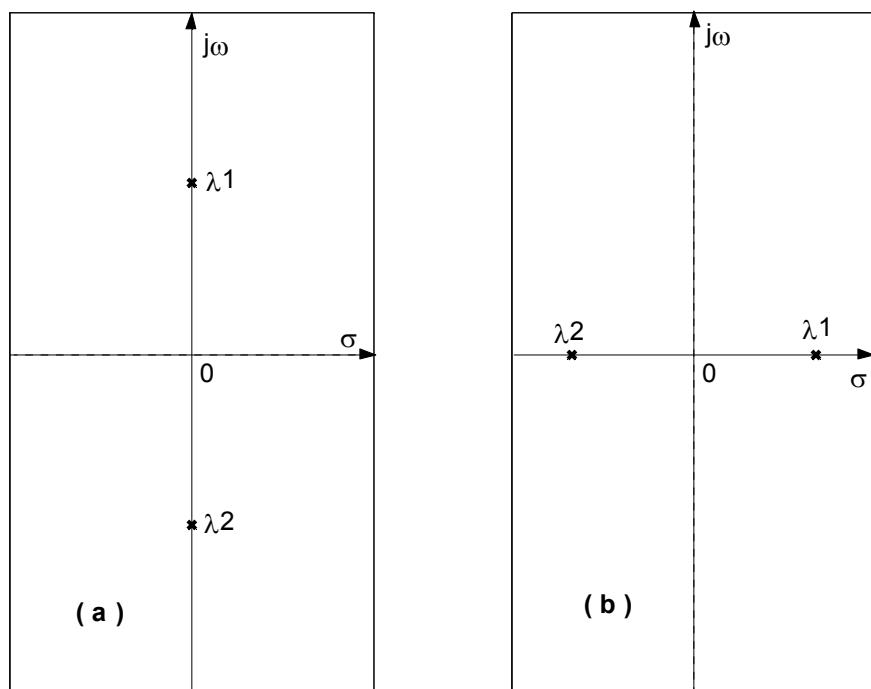


Figura 4

Como se puede apreciar solo para el primer caso figura 4a), con la suposición hecha, será: $Z = 0$, y el sistema será marginalmente estable.

El sistema de control en este caso responderá en régimen permanente a un escalón en la entrada, con una senoide de frecuencia igual a:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{a_0}{k}} \text{ rad / seg.}$$

Esta situación se puede provocar a propósito, si hay un parámetro variable, para encontrar el valor límite del mismo que hace que el sistema sea marginalmente estable. Además usando la ecuación auxiliar $A(s)$, se puede determinar la frecuencia de la oscilación sostenida correspondiente w_c . Hay casos que pueden tener más de un $K_{\text{Límite}}$, y en consecuencia más de una w_c , estos sistemas son los llamados condicionalmente inestables.-

Resumen de los pasos a seguir:

1. Se usa la ecuación auxiliar $A(s)$ precedente a la fila de ceros.
2. Se deriva la misma respecto de s , $\frac{d}{ds} A(s)$.-
3. Se reemplaza la fila de ceros por los coeficientes de $\frac{d}{ds} A(s)$.-
4. Se continúa con la tabulación en la forma usual.
5. Se determina Z .
6. Si $Z = 0$, el sistema será marginalmente estable de otra forma será inestable.-

Se tratarán a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 24:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{5(s + 0.25)}{s^2(s^2 + 2s + 3)} ; \text{ determinar la condición de estabilidad del mismo.}$$

La ecuación característica es:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 5s + 1.25 = 0$$

Como en el arreglo de Routh la penúltima fila se anula, se tendrá:

$$A(s) = 0.5s^2 + 1.25 \Rightarrow \frac{d}{ds} A(s) = 1s + 0$$

s^4	1	3	1.25	$; Z = 0$, el sistema es marginalmente estable.-
s^3	2	5	0	
s^2	0.5	1.25	0	
s^1	0	0	0	
	1	0	0	
s^0	1.25	0	0	

$$A(s) = s^2 + 2.5 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j\sqrt{2.5} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{2.5} \text{ rad / seg. -}$$

Ejemplo 25:

La ecuación característica de un sistema es la siguiente:

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$$

Determinar la condición de estabilidad.

El arreglo de Routh es:

s^5	1	8	7	
s^4	4	8	4	
s^3	6	6	0	
s^2	4	4	0	; Z = 0, el sistema es marginalmente estable.-
s^1	0	0	0	
	8	0	0	
s^0	4	0	0	

$$\text{Como } A(s) = 4s^2 + 4 \Rightarrow \frac{d}{ds} A(s) = 8s + 0$$

$$A(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 1 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j1 \Rightarrow \omega_C = 1 \text{ rad / seg. -}$$

Ejemplo 26:

La ecuación característica de un sistema es la siguiente:

$$s^5 + s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 4s + 8 = 0$$

Determinar la condición de estabilidad.

s^5	1	5	4	
s^4	1	6	8	
s^3	-1	-4	0	
s^2	2	8	0	; Z = 2, Sistema Inestable.-
s^1	0	0	0	
	4	0	0	
s^0	8	0	0	

$$A(s) = 2s^2 + 8 \quad \frac{d}{ds} A(s) = 4s + 0$$

$$A(s) = 0; \Rightarrow s^2 + 4 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j2 \Rightarrow \omega_C = 2 \text{ rad / seg. -}$$

Ejemplo 27:

La función de transferencia del lazo de un sistema con $H(s) = 1$ es:

$$L(s) = \frac{K(s+10)}{s^2(s^3 + 10s^2 + 8s + 80)};$$

Determinar la condición de estabilidad del mismo.

La ecuación característica, para $K = 7$, es:

$$s^5 + 10s^4 + 8s^3 + 80s^2 + 7s + 70 = 0$$

Como en el arreglo de Routh la fila de índice 3 se anula, se tendrá

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^5 & 1 & 8 & 7 \\
 s^4 & 1 & 8 & 7 \Rightarrow \div \text{por } 10 \\
 s^3 & 0 & 0 & 0 \\
 s^2 & 1 & 4 & 0 \\
 s^1 & 4 & 7 & 0 \\
 s^0 & 2.25 & 0 & 0 \\
 \hline
 & 7 & 0 & 0
 \end{array} ; Z = 0, \text{ sistema marginalmente estable.}$$

$$A(s) = s^4 + 8s^2 + 7 \Rightarrow \frac{d}{ds} A(s) = 4s^3 + 16s + 0 \Rightarrow \div 4 \Rightarrow s^3 + 4s + 0$$

Los dos pares *simples* imaginarios serán, la quinta raíz esta en -10:

$$s^4 + 8s^2 + 7 = 0 \Rightarrow x = s^2 \Rightarrow s = \sqrt{x}$$

$$x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -7 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j \quad y \quad s_{3-4} = \pm j\sqrt{7}.$$

$$\omega_{C1} = 1 \text{ rad/seg.} \quad y \quad \omega_{C2} = \sqrt{7} \text{ rad/seg.}$$

Se puede emplear Routh del Csad para resolver este problema:

» Routh

Enter polynomial vector D > [1 10 8 80 7 70]

You entered: $s^5 + 10s^4 + 8s^3 + 80s^2 + 7s^1 + 70$

S^5 Row: 1 8 7 0

S^4 Row: 10 80 70 0

The next row contains all zeros.

Replacing row using derivative of auxiliary equation.

S^3 Row: 40 160 0 0

S^2 Row: 40 70 0

S^1 Row: 90 0

S^0 Row: 70

Press any key to continue...

First column is:

S^5 1

S^4 10

S^3 40

S^2 40

S^1 90

S^0 70

Number of sign changes in the first column is 0

The computed roots of D(s) are:

-1.0000e+001

+2.6458e+000i

-2.6458e+000i

+1.0000e+000i

-1.0000e+000i

La respuesta a un escalón de entrada de magnitud unitaria se muestra en la figura 5, como se puede observar es una señal periódica.-

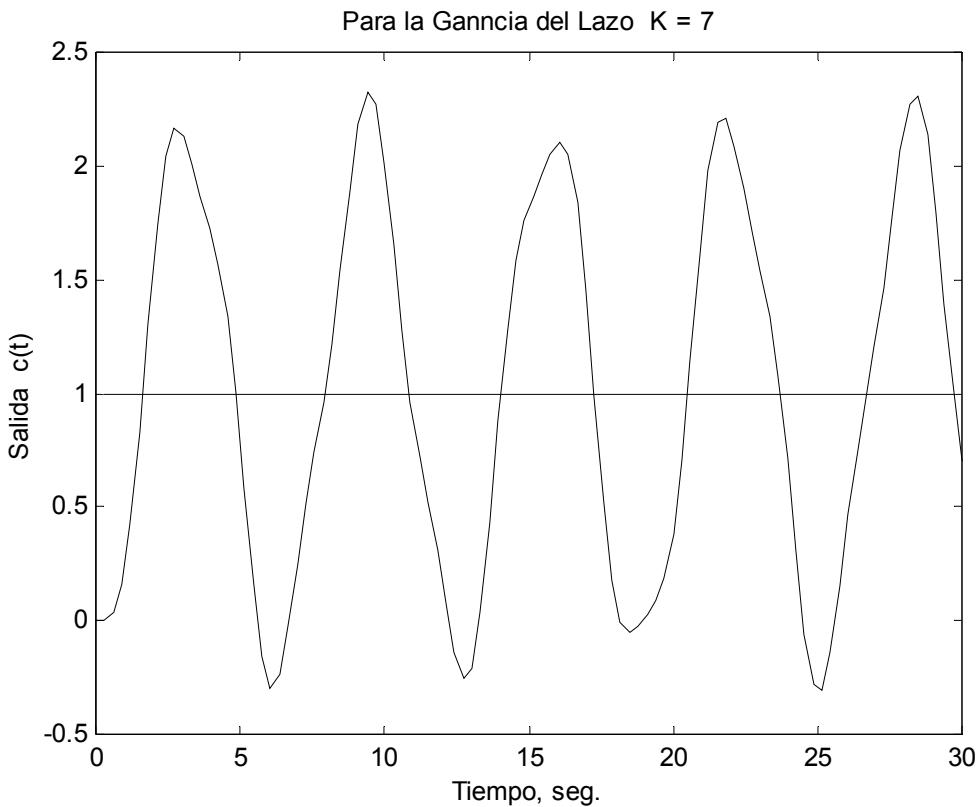


Figura 5

Ejemplo 28:

Para el sistema del ejemplo anterior, pero con $K = 36$.

La ecuación característica de sistema será ahora:

$$s^5 + 10s^4 + 8s^3 + 80s^2 + 36s + 360 = 0 \Rightarrow s^5 + 1s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 36s + 36 = 0$$

El arreglo de Routh será:

s^5	1	8	36	
s^4	1	8	36	
s^3	0	0	0	
s^2	1	4	0	; $Z = 2$, sistema inestable.-
s^1	4	36	0	
s^0	-5	0	0	
	36	0		

$$A(s) = s^4 + 8s^2 + 36 \Rightarrow \frac{d}{ds} A(s) = 4s^3 + 16s + 0 \Rightarrow \div 4 \Rightarrow 1s^3 + 4s + 0$$

Los dos pares complejos serán, la quinta raíz esta en -10:

$$s^4 + 8s^2 + 36 = 0 \Rightarrow x = s^2 \Rightarrow s = \sqrt{x}$$

$$x^2 + 8x + 36 = 0 \Rightarrow x_{1-2} = -4 \pm j\sqrt{20}; \Rightarrow s_{1-2} = +1 \pm j\sqrt{5} \quad y \quad s_{3-4} = -1 \pm j\sqrt{5}.$$

La respuesta al sistema a una entrada escalón unitario se muestra en la figura 6, como se aprecia el sistema es inestable y oscilatorio.

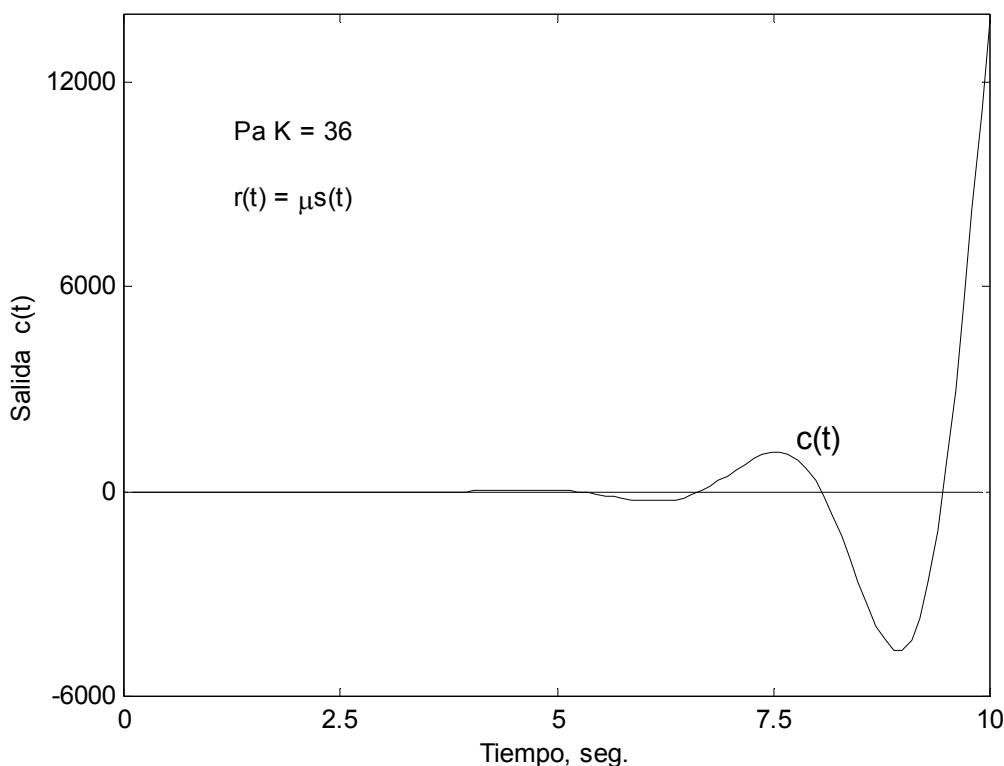


Figura 6

Veamos una combinación de los dos casos anteriores:

Supongamos un sistema cuya función de transferencia es:

$$M(s) = \frac{4s+1}{s^7 + 3s^6 + 3s^5 + s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

Construimos el arreglo:

s^7	1	3	1	3		
s^6	3	1	3	1	<i>Aparece un cero en la primera columna y el resto de la fila es cero. (Esto quiere decir que los polos son simétricos con respecto a todos los ejes).</i>	
s^5	8/3	0	8/3	0	<i>(Esto quiere decir que los polos son simétricos con respecto a todos los ejes).</i>	
s^4	1	0	1	0	<i>Se procede de la siguiente manera :</i>	
s^3	0	0			<i>Se elabora un polinomio auxiliar que corresponda con la fila anterior a la fila problema.</i>	
s^2						
s						
0						

En este caso el polinomio auxiliar queda de la forma:

$$P(s) = 1s^4 + 0s^2 + s^0 = 1s^4 + 1$$

Reemplazo la fila de ceros por la derivada del polinomio auxiliar y prosigo la construcción.

Después de sustituir la línea problema notamos que aparece otro cero en la primera columna, como el resto de la fila no es cero, se aplica el principio del caso anterior.

Como se puede observar ocurren dos cambios de signo lo que nos indica que el sistema es inestable y presenta dos polos en el semiplano derecho.
iHay que tener cuidado a la hora de construir el arreglo, los errores más comunes se cometan multiplicando y dividiendo los términos!

s^7	1	3	1	3			
s^6	3	1	3	1			
s^5	8/3	0	8/3	0			
s^4	1	0	1	0			
s^3	4	0			$\Rightarrow Z = 2$		$\Rightarrow F(s) = (s+1)^3 (s^4 + 1)$
s^2	0	1					
s^2	ε	1					
s	-4/ ε	0					
0	1						

Factoreando el polinomio característico se confirma el resultado alcanzado con el arreglo de Routh.-

Casos Especiales III (Sistemas Siempre Inestables)

Estos casos suceden cuando se presentan *más de una fila del arreglo*, (al menos dos), nulas. O sea, salvado el inconveniente para la primera fila nula, se sigue con el procedimiento habitual y se vuelve a anular otra fila. Estos casos se presentan si la ecuación característica tiene:

IIIa) Raíces reales de orden de multiplicidad dos o mayor, simétricas respecto al origen del plano s. El orden del sistema deberá ser $n \geq 4$.

Y por lo tanto el sistema será siempre inestable.

IIIb) Raíces imaginarias múltiples, también deberá ser $n \geq 4$.

IIIc) La combinación de las dos anteriores, por ende deberá ser $n \geq 8$.

Como se puede deducir en todos los casos el sistema será inestable.-

También las filas que se anulan deberán ser de índice impar, $s^5; s^3, \dots$ etc.

Se verán a continuación algunos ejemplos de estos casos.

IIIa) Ejemplo 29:

La función de transferencia del lazo de un sistema con $H(s) = 1$ es:

$$L(s) = \frac{Ks^2(s+5)}{(s^5 + 5s^4 + 4s^2 + 20)}; \text{ determinar la condición de estabilidad del mismo.}$$

La ecuación característica, para $K = -4$, es:

$$s^5 + 5s^4 - 4s^3 - 20s^2 + 4s + 20 = 0$$

Como se ve el sistema será inestable, ¿Cuánto vale Z?

Dividiendo la segunda fila del arreglo por 5, la ecuación característica se puede expresar así:

$$s^5 + 1s^4 - 4s^3 - 4s^2 + 4s + 5 = 0$$

El arreglo de Routh será:

s^5	1	-4	4	
s^4	1	-4	4	
s^3	0	0	0	
	1	-2	0	; $Z = 2$, Sistema inestable.-
s^2	-2	4	0	
	0	0	0	
s^1	-1	0	0	
s^0	4	0	0	

Para la primer fila de ceros:

$$A(s) = s^4 - 4s^2 + 4 \Rightarrow \frac{d}{ds} A(s) = 4s^3 - 8s + 0 \Rightarrow \div \text{por } 4 \Rightarrow 1s^3 - 2s + 0$$

Para la segunda fila de ceros:

$$A(s) = -2s^2 + 4 \Rightarrow \frac{d}{ds} A(s) = -4s + 0 \Rightarrow \div \text{por } 4 \Rightarrow -1s + 0$$

Los dos pares estarán en:

$$s^4 - 4s^2 + 4 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm\sqrt{2} \quad y \quad s_{3-4} = \pm\sqrt{2}, \text{ también:}$$

$$A(s) = -s^2 + 2 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm\sqrt{2}.$$

La quinta raíz estará en el semiplano derecho del plano s, ya que $Z=2$.

IIIb) Ejemplo 30:

La función de transferencia del lazo de un sistema con $H(s) = 1$ es:

$$L(s) = \frac{16(s+10)}{s^2(s^3 + 10s^2 + 8s + 80)}; \text{ determinar la condición de estabilidad del mismo.}$$

La ecuación característica es:

$$s^5 + 10s^4 + 8s^3 + 80s^2 + 16s + 160 = 0$$

Arreglo de Routh será:

s^5	1	8	16	
s^4	10	80	160	
s^3	0	0	0	
	40	160	0	; $Z=0$, sistema marginalmente estable. Par imag. doble
s^2	40	160	0	
s^1	0	0	0	
	80	0	0	
s^0	160	0	0	

Para la primera fila nula:

$$A_1(s) = 10s^4 + 80s^2 + 160 \Rightarrow \frac{d}{ds} A_1(s) = 40s^3 + 160s + 0$$

Para la segunda fila nula:

$$A_2(s) = 40s^2 + 160 \Rightarrow \frac{d}{ds} A_2(s) = 80s + 0$$

El par imaginario doble, dado por la primera ecuación auxiliar, estaría ubicado en:

$$A_1(s) = 10s^4 + 80s^2 + 160 = 0 \Rightarrow \div por 10 \Rightarrow s^4 + 8s^2 + 16 = 0$$

$$\text{Llamando: } x = s^2 \Rightarrow s = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 0 \Rightarrow x_1 = -4 \text{ y } x_2 = -4$$

$$\text{Por lo tanto el par doble será: } s_{1-2} = \pm j2 \text{ y } s_{3-4} = \pm j2$$

Si se grafica el movimiento de las raíces de la ecuación característica al variar K, una está fija en -10, se tendría el indicado en la figura 7.

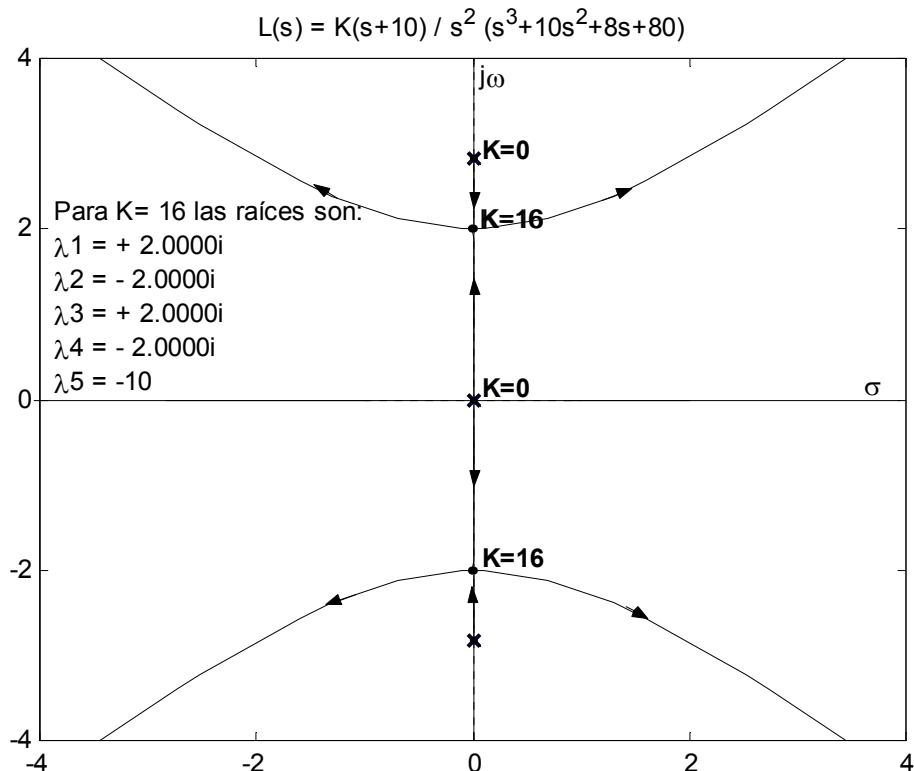


Figura 7

En el rango, $0 < K < 16$, $Z = 0$, el sistema es marginalmente estable.

Si $K = 16$, $Z = 0$, pero el sistema será inestable, un par doble imaginario.-

En el rango, $16 < K < \infty$, $Z = 2$, el sistema es inestable.

Con el comando Routh del Csad/matlab, para $K = 16$ sería:

» Routh

Enter polynomial vector D > [1 10 8 80 16 160]

You entered: $s^5 + 10s^4 + 8s^3 + 80s^2 + 16s + 160$

S^5 Row: 1 8 16 0

S^4 Row: 10 80 160 0

The next row contains all zeros.

Replacing row using derivative of auxiliary equation.

S^3 Row: 40 160 0 0

S^2 Row: 40 160 0

The next row contains all zeros.

Replacing row using derivative of auxiliary equation.

S^1 Row: 80 0

S^0 Row: 160

First column is:

S^5 1
 S^4 10
 S^3 40
 S^2 40
 S^1 80
 S^0 160

Number of sign changes in the first column is 0

The computed roots of $D(s)$ are:

-1.0000e+001
 +2.0000e+000i
 -2.0000e+000i
 +2.0000e+000i
 -2.0000e+000i

Como el sistema tiene polos dobles imaginarios, el mismo a pesar de no tener ningún cambio de signo el arreglo, INESTABLE, figura 8.

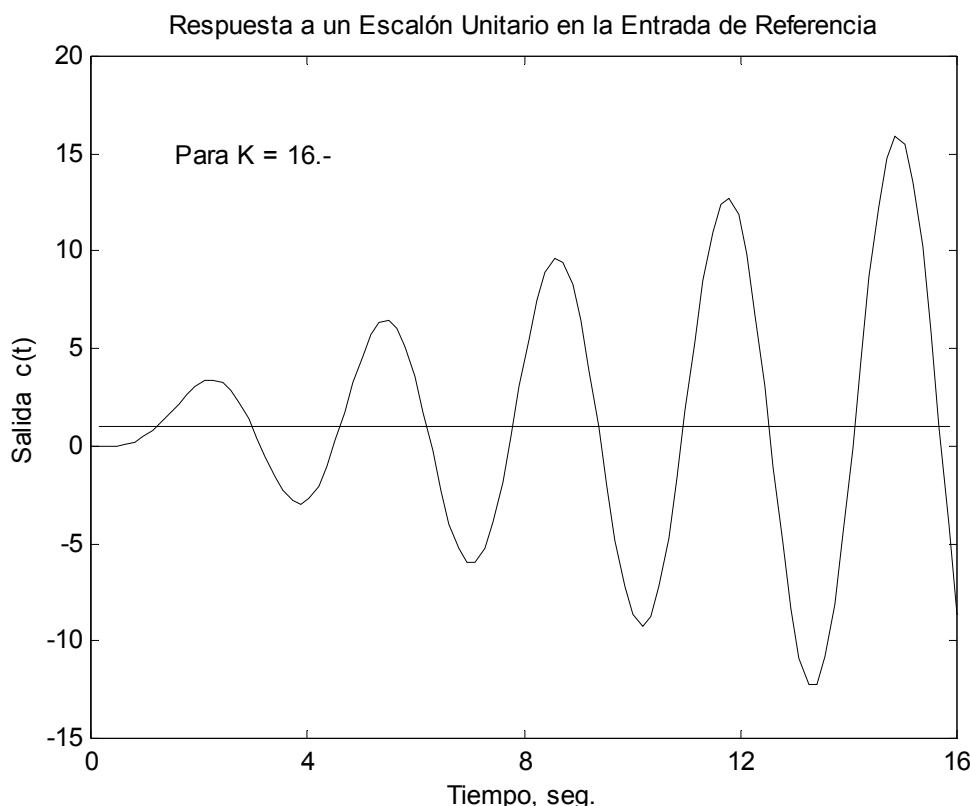


Figura 8

IIIb) Ejemplo 30a:

La ecuación característica de un sistema es la siguiente:

$$F(s) = s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 5s^2 + 3s + 2 = 0$$

- Como se aprecia se cumple la condición necesaria.-
- Veamos si se cumple la suficiente con el arreglo de Routh.-

s^6	1	4	5	2	<i>Primer Polinomio Auxiliar:</i> $A_1(s) = 2s^4 + 4s^2 + 2$
s^5	3	6	3	0	$\Rightarrow \frac{dA_1(s)}{dt} = 8s^3 + 8s + 0$
s^4	2	4	2	0	<i>Segundo polinomio Auxiliar:</i> $A_2(s) = 2s^2 + 2$
s^3	0	0	0	0	$\Rightarrow \frac{dA_2(s)}{dt} = 4s + 0$
s^2	8	8	0	0	$\Rightarrow Z = 0. -$
s^1	2	2	0	0	<i>SISTEMA INESTABLE.</i> -
s^0	0	0	0	0	
	4	0	0	0	
	2	0	0	0	

La primera observación sobre el arreglo obtenido es que no hay ningún cambio de signo, por lo tanto de entrada se puede pensar que el sistema es estable pues no se revela la existencia de polos ubicados en el semiplano derecho del plano s, ($Z=0$). Esto último si bien es cierto, que no hay polos con parte real positiva, no implica que el sistema sea necesariamente estable. Dado el conocimiento de cómo se logró la construcción del arreglo, donde tuvo que emplearse dos polinomios auxiliares, $A_1(s)$ y $A_2(s)$ para reemplazar las dos filas de ceros obtenidas y con ello establecer una conclusión definitiva sobre la estabilidad absoluta. Del caso II se vio que el hecho con sola fila cero, implicaba que existen polos simétricos comprobado esto en los ejemplos correspondientes. En este ejemplo, como más de una fila se hizo cero por completo, se revela existencia de multiplicidad mayor que uno de polos imaginarios puros dado que no hay cambios de signo en la primera columna del arreglo, se concluye con ello que el sistema es inestable, (polos imaginarios de orden de multiplicidad mayor que uno).

S se obtienen las raíces de los polinomios auxiliares, (lo cual no es parte del método), solo lo haremos para una validación de la conclusión.

$$A_1(s) = 2s^4 + 4s^2 + 2; \quad si \quad s^2 = z \quad \Rightarrow \quad A_1(z) = 2z^2 + 4z + 2$$

$$\begin{cases} z_1 = -1 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = +j \\ s_2 = -j \end{cases} & A_2(s) = 2s^2 + 2 \quad si \quad s^2 = z \quad \Rightarrow \quad A_2(z) = 2z + 2 \\ z_2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} s_3 = +j \\ s_4 = -j \end{cases} & \text{*****} \quad z_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = +j \\ s_2 = -j \end{cases} \end{cases}$$

Claramente $A_2(s)$ es factor de $A_1(s)$ siendo estos a su vez factores de $F(s)$. Se observa en las raíces de $A_1(s)$ que en efecto los polos imaginarios puros son de multiplicidad 2, lo cual implica inestabilidad. Si se obtienen los polos de $F(s)$ se tiene entonces: $F(s) = (s+1)(s+2)(s^2+1)^2. -$

Ejemplo 31:

Un sistema de control tiene: $L(s) = \frac{32(1-1.4375s)}{s(s^3+6s^2+12s+5K)}$

1. Determinar el rango de K para que el lazo sea estable.

2. El o los rangos de K para que el sistema sea estable.
3. El o los K Límites y las frecuencias de las oscilaciones sostenidas, ω_C .

1) Aplicando Hurwitz para que el lazo sea estable, se tiene que:

$$6 \times 12 > 5K \Rightarrow K < 14.4, \text{ el rango pedido será:}$$

$$0 < K < 14.4. -$$

2) La ecuación característica es:

$$s^4 + 6s^3 + 12s^2 + (5K - 46)s + 32 = 0$$

El arreglo de Routh será:

s^4	1	12	32	
s^3	6	$5K - 46$	0	
s^2	$\frac{118 - 5K}{6}$	32	0	
s^1	$\frac{(118 - 5K)(5K - 46) - 1152}{118 - 5K}$	192	0	; Se multiplico x 6, la 3º fila.-
s^0	192	0	0	

Las restricciones serán:

$$1^{\circ}) 118 - 5K > 0 \Rightarrow K < 23.60$$

$$2^{\circ}) (118 - 5K)(5K - 46) - 1152 > 0, \text{ operando queda:}$$

$$-25K^2 + 820K - 6580 > 0 \Rightarrow (14 - K)(K - 18.8) > 0$$

Interceptando las dos restricciones el rango buscado será:

$$14 < K < 18.8$$

3) Este sistema tiene dos valores de K límites, los mismos son:

$$K_{\text{Límite } 1} = 14 \quad y \quad K_{\text{Límite } 2} = 18.80$$

La ecuación auxiliar es:

$$A(s) = (118 - 5K_L)s^2 + 192 = 0 \Rightarrow s_{12} = \pm \sqrt{\frac{192}{(118 - 5K_L)}} \Rightarrow \omega_C = \sqrt{\frac{192}{(118 - 5K_L)}}$$

Para $K_{\text{Límite } 1} = 14$:

$$\omega_{C1} = \sqrt{\frac{192}{48}} \Rightarrow \omega_{C1} = 2 \text{ rad/seg. -}$$

Para $K_{\text{Límite } 2} = 18.8$:

$$\omega_{C2} = \sqrt{\frac{192}{24}} \Rightarrow \omega_{C2} = \sqrt{8} \text{ rad/seg. -}$$

El grafico del lugar de las raíces de la ecuación característica es el indicado en la figura 9.

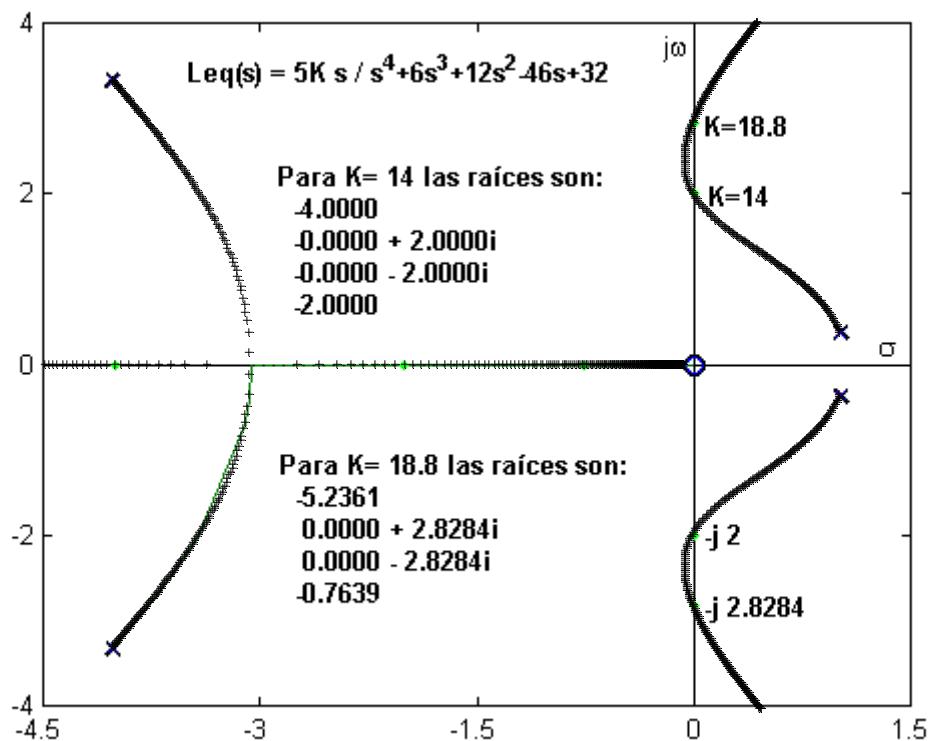


Figura 9

Ejemplo 32:

Un sistema de control tiene: $L(s) = \frac{2K}{(s^3 + 9s^2 + 30s + 8)}$

1. Determinar si el lazo es estable.
2. El o los rangos de K para que el sistema sea estable.
3. El o los K Límites y las frecuencias de las oscilaciones sostenidas, w_C .

1º) El lazo es estable pues: $9 \times 30 > 8$.-

2º) La ecuación característica es:

$$s^3 + 9s^2 + 30s + (8 + 2K) = 0$$

El arreglo de Routh será:

s^3	1	30	0	; Las restricciones son:
s^2	9	$8 + 2K$	0	
s^1	$\frac{262 - 2K}{9}$	0	0	
s^0	$8 + 2K$	0	0	

$$1º) 262 - 2K > 0 \Rightarrow K < 131$$

$$2º) 8 + 2K > 0 \Rightarrow K > -4$$

Por ende el rango total buscado es:

$$-4 < K < 131$$

3º) Para $K_L = 131$, la frecuencia w_C se determina de:

$$A(s) = 9s^2 + 8 + 2K = 0 \Rightarrow s^2 + 30 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j\sqrt{30}$$

Por ende: $\omega_C = \sqrt{30}$ rad / seg.-

Para el otro K_L , no hay oscilación sostenida pues $w_C = 0$. El sistema tendría un polo en el origen, evidentemente. El grafico del lugar de las raíces cuando varía el parámetro K está indicado en la figura 10.

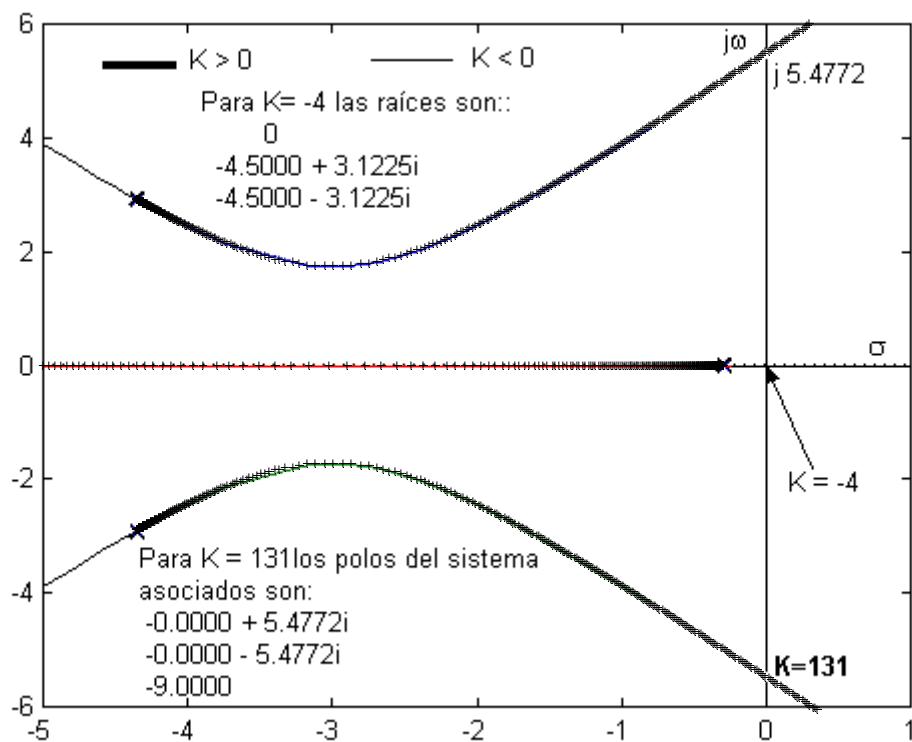


Figura 10

Ejemplo 33:

Un sistema de control tiene: $L(s) = \frac{K(s+10)(s+20)}{s^2(s+2)}$

1. Determinar si el lazo es estable.
2. El o los rangos de K para que el sistema sea estable.
3. El o los K Límites y las frecuencias de las oscilaciones sostenidas, w_C .

1º) El lazo es estable pues los polos de $L(s)$ están en: 0, 0 y -2.-

2º) La ecuación característica es la siguiente:

$$s^3 + (2+K)s^2 + 30Ks + 200K = 0$$

El arreglo de Routh será:

s^3	1	$30K$; Las restricciones son:
s^2	$2+K$	$200K$	
s^1	$\frac{30K(2+K)-200K}{2+K}$	0	
s^0	0	0	

1) $K > 0$

2) $2+K > 0 \Rightarrow K > -2$

3) $K(3K-14) > 0$ como $K > 0 \Rightarrow 3K-14 > 0 \Rightarrow K > 14/3$

El rango pedido será: $14/3 < K < \infty$.

3º) El $K_L=14/3$, la ecuación Auxiliar es: $A(s) = (2 + K_L)s^2 + 200K_L = 0$
 En consecuencia: $20/3s^2 + 2800/3 = 0 \Rightarrow s^2 + 140 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j\sqrt{140}$
 Por lo tanto la frecuencia de la oscilación sostenida es: $\omega_C = \sqrt{140} \text{ rad / seg.}$ -
 Esto se puede realizar empleando el comando Srouth, agregado al Csad.
 » Srouth

Variables posibles de utilizar: kp kd ki t a k

Ingresar el polinomio como vector > [1 2+k 30*k 200*k]

El polinomio ingresado es:

$$s^3 + (2 + k)s^2 + 30k s + 200 k$$

La tabla de Routh es:

[$s^3,$	1,	$30*k,$	0]
[$s^2,$	$2+k,$	$200*k,$	0]
[$s,$	$30*k - 200*k/(2+k),$	0,	0]
[1,	$200*k,$	0,	0]

Las siguientes expresiones deben ser mayores que cero para que el sistema sea estable.

$$\begin{aligned} 2 + k &\Rightarrow K > -2 \\ k & \\ 30 k - 200 &\quad \Rightarrow \quad K > 14/3 \\ 2 + k & \\ 200 k &\quad \Rightarrow \quad K > 0 \end{aligned}$$

Como se puede apreciar se llega al mismo resultado.-

Ejemplo 34:

Un sistema de control tiene: $L(s) = \frac{K(s+10)(s+20)}{s^2(s+2)}$, se supone $K > 0$.

1. Determinar si el lazo es estable.
2. El o los rangos de K para que el sistema sea estable.
3. El o los $K_{\text{Límites}}$ y las frecuencias de las oscilaciones sostenidas, ω_C .

1º) El lazo es inestable pues los polos de $L(s)$ están en: -2,-2 y +5.-

2º) La ecuación característica es la siguiente:

$$s^3 - s^2 + (K - 16)s + (K - 20) = 0$$

El arreglo de Routh será:

s^3	1	$K - 16$	
s^2	-1	$K - 20$	
s^1	$2K - 36$	0	
s^0	$K - 20$	0	

; El sistema será inestable siempre, para cualquier K.

Con $Z = 1$, $Z=3$ y $Z = 2$ nuevamente a medida que aumenta el valor de la ganancia $K > 0$.

Si se anula la penúltima fila $K_{L1} = 18$, habrá un cambio de signo en la primera columna una vez salvada la indeterminación, o sea:

$$A(s) = -s^2 - 2 \Rightarrow \frac{d}{ds} A(s) = -2 - 0, \text{ la primera columna será:}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$; por lo tanto como se dijo hay una raíz en el semiplano derecho.

Para $K = 18$, $A(s) = s^2 + 2 = 0 \Rightarrow \omega_C = \sqrt{2} \text{ rad / seg.}$

Habrá una raíz en el semiplano derecho del plano s, en $s=+1$.-

Para $K=20$ la ecuación característica tiene una raíz en el origen del plano s. Por ende en el intervalo: $18 < K < 20$, habrá 3 raíces en el plano derecho del plano s. Para el rango: $20 > K >$ infinito, habrá otra vez 2 raíces en el plano derecho del plano s.

Todo esto se visualiza mejor en el grafico del lugar de las raíces, al variar el parámetro K, (para $K > 0$), indicado en la figura 11.-

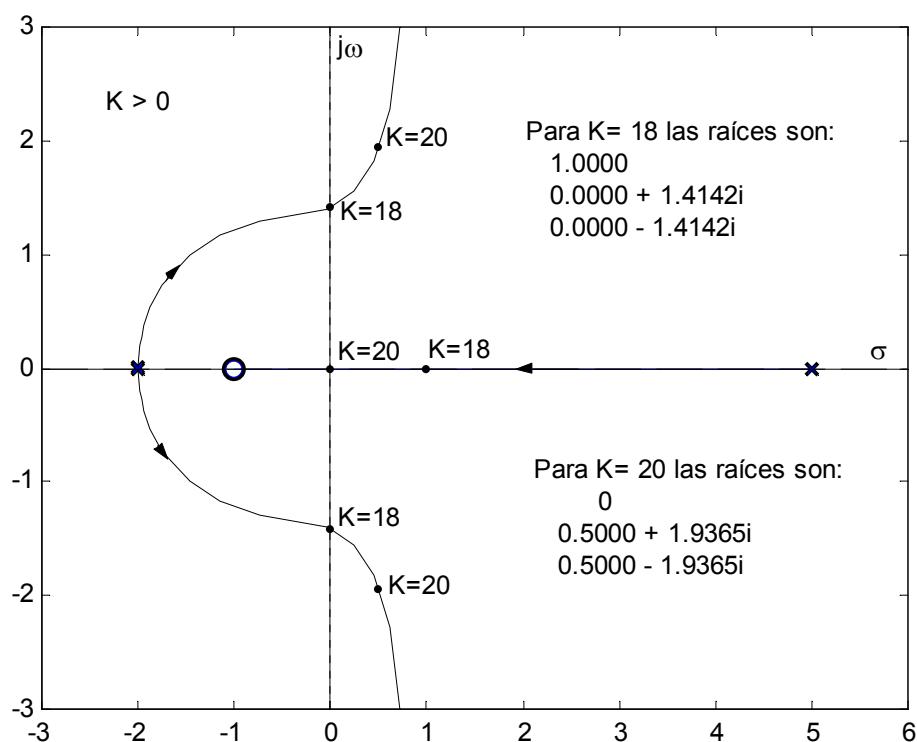


Figura 11

Planos Paramétricos

Se designará así a los planos en los cuales se pueden marcar las regiones donde el sistema de control, con dos parámetros variables, es estable. Veremos un sencillo ejemplo como ilustración del procedimiento a seguir.

Ejemplo 35:

Demarcar en el plano $K_2 = f(K_1)$ la región donde el sistema, cuya ecuación característica es la siguiente, es estable:

$s^3 + (1+K_1)s^2 + (K_1 + K_2 - 1)s + (K_2 - 1) = 0$; El arreglo de Routh será:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & K_1 + K_2 - 1 \\ s^2 & 1 + K_1 & K_2 - 1 \\ \hline s^1 & \frac{K_1(K_1 + K_2)}{1 + K_1} & 0 \\ s^0 & K_2 - 1 & 0 \end{array}; \text{ las restricciones son:}$$

- 1) $1 + K_1 > 0 \Rightarrow K_1 > -1$
- 2) $K_2 - 1 > 0 \Rightarrow K_2 > 1$
- 3) $K_1(K_1 + K_2) > 0 \Rightarrow \begin{aligned} Si \ K_1 > 0 &\Rightarrow (K_1 + K_2) > 0 \Rightarrow K_2 > -K_1 \\ Si \ K_1 < 0 &\Rightarrow (K_1 + K_2) < 0 \Rightarrow K_2 < -K_1 \end{aligned}$

Interceptando las restricciones la región buscada se muestra en la fig. 12.

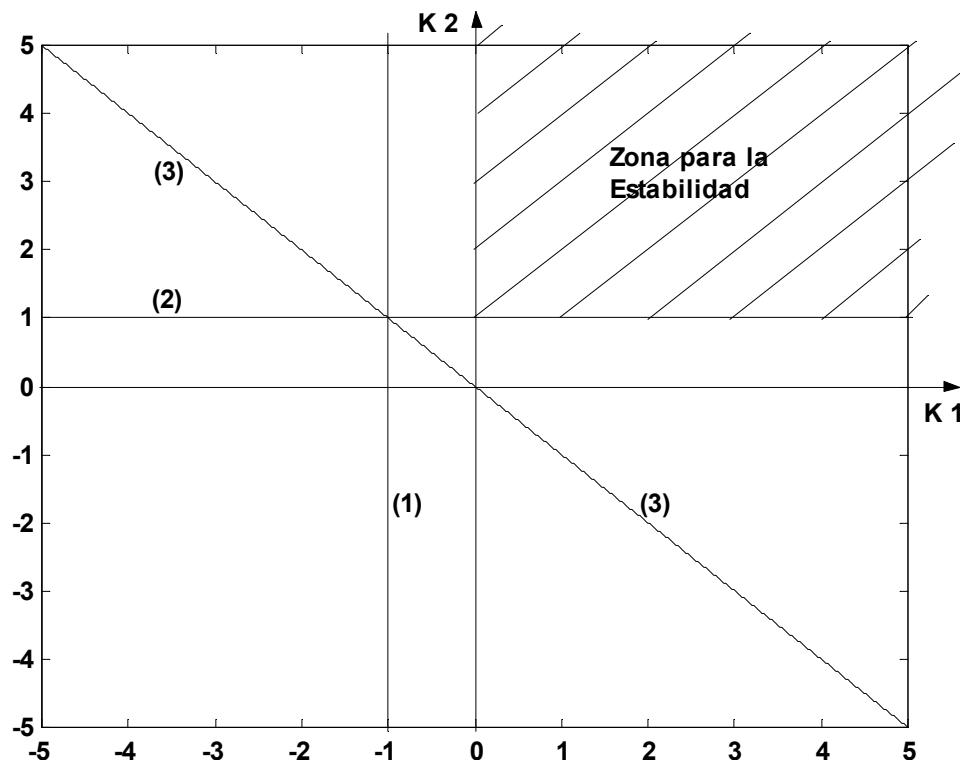


Figura 12

Por lo tanto para este sistema:

El rango de K_1 , será: $0 < K_1 < \infty$

El rango de K_2 , será: $1 < K_2 < \infty$

Ejemplo 36:

El diagrama de bloques de un sistema es el indicado en la figura 13.

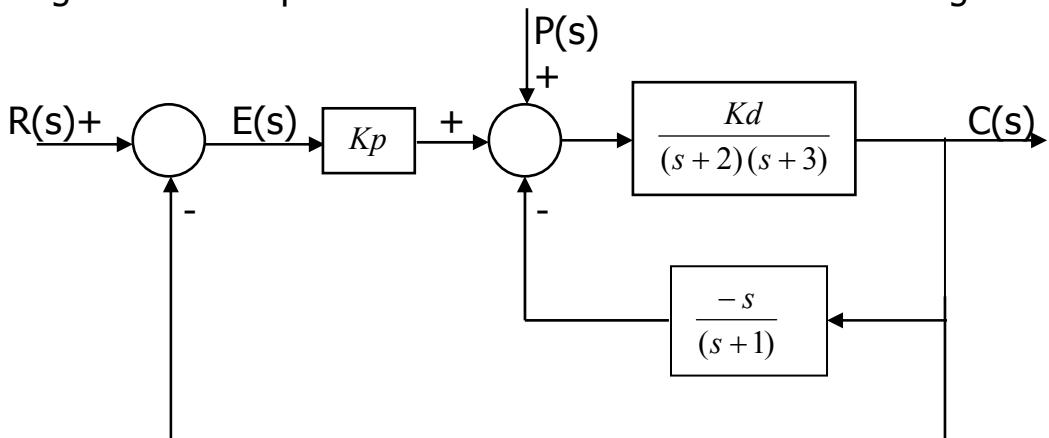


Figura 13

Demarcar en el plano $K_p = f(K_d)$ o en el $K_d = f(K_p)$, la zona para la cual el sistema sea estable.

Reduciendo el lazo interno:

$$G^*(s) = \frac{Kd(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3) - Kd s}; \text{ en consecuencia } G(s), \text{ será:}$$

$$G(s) = \frac{K_p K_d (s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3) - K_d s} \quad y \quad H(s) = 1$$

La ecuación característica es:

$$(s+1)(s+2)(s+3) - K_d s + K_p K_d (s+1) = 0; \text{ operando:}$$

$$s^3 + 6s^2 + (11 - K_d + K_p K_d)s + (6 + K_p K_d) = 0;$$

El arreglo de Routh correspondiente será:

$$\begin{array}{c|cc|c} s^3 & 1 & 11 - K_d + K_p K_d \\ s^2 & 6 & 6 + K_p K_d \\ s^1 & \frac{6(11 - K_d + K_p K_d) - (6 + K_p K_d)}{6} & 0 \\ s^0 & 6 + K_p K_d & 0 \end{array} ; \text{ las restricciones son:}$$

$$1^{\circ}) 6 + K_p K_d > 0 \Rightarrow K_p K_d > -6 \quad (1)$$

$$2^{\circ}) 6(11 - K_d + K_p K_d) - (6 + K_p K_d) > 0 \Rightarrow K_p K_d > 1.20(K_d - 10) \quad (2)$$

Para el plano: $K_p = f(K_d)$, se tendrá:

$$\text{De (1) si } K_d > 0 \Rightarrow K_p > \frac{-6}{K_d} \quad (3)$$

$$\text{si } K_d < 0 \Rightarrow K_p < \frac{-6}{K_d} \quad (4)$$

$$\text{De (2) si: } K_d > 0 \Rightarrow K_p > \frac{1.2(K_d - 10)}{K_d} \quad (5)$$

$$\text{si: } K_d < 0 \Rightarrow K_p < \frac{1.2(K_d - 10)}{K_d} \quad (6)$$

Para el plano: $K_d = f(K_p)$, se tendrá:

$$\text{De (1) si } K_p > 0 \Rightarrow K_d > \frac{-6}{K_p} \quad (7)$$

$$\text{si } K_p < 0 \Rightarrow K_d < \frac{-6}{K_p} \quad (8)$$

Además se deberá cumplir que:

$$5K_p K_d - 6K_d > -60 \Rightarrow K_d(K_p - 1.2) > -12 \quad (9)$$

$$\text{De (9) si: } K_p - 1.2 > 0 \Rightarrow K_p > 1.2 \Rightarrow K_d > \frac{-12}{(K_p - 1.2)} \quad (10)$$

$$\text{si: } K_p - 1.2 < 0 \Rightarrow K_p < 1.2 \Rightarrow K_d < \frac{-12}{(K_p - 1.2)} \quad (11)$$

Utilizando las expresiones (3), (4), (5) y (6) se grafica en el plano $K_p=f(K_d)$ El mismo esta indicado en la figura 14.

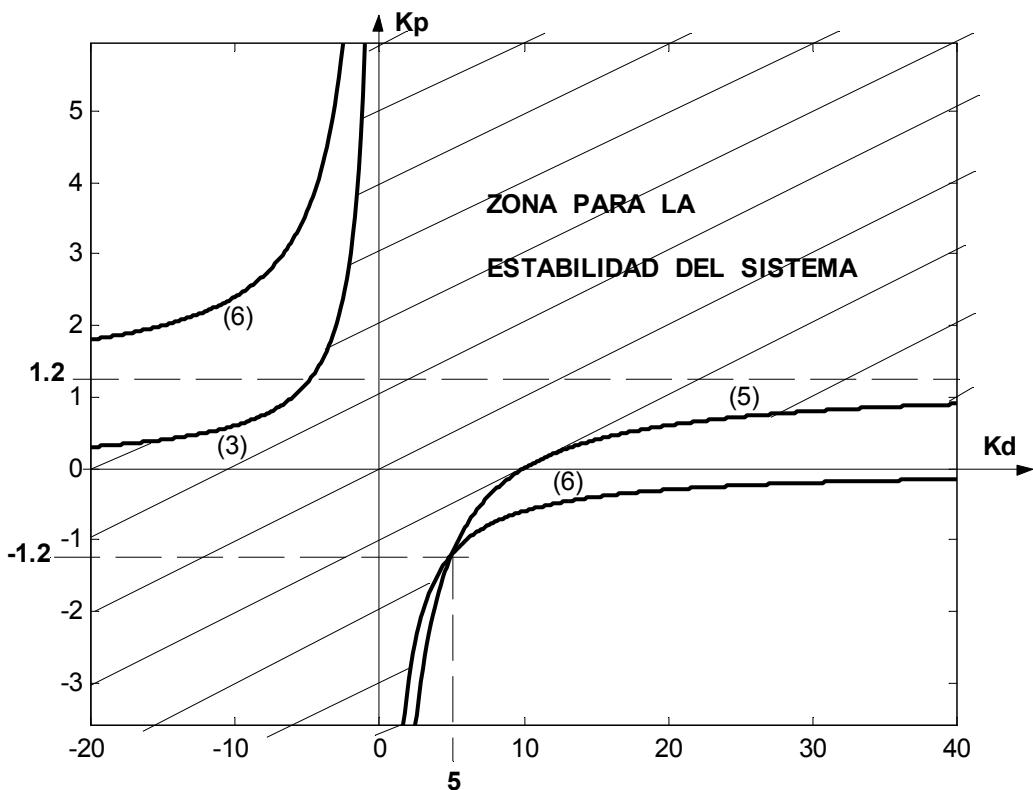


Figura 14

De la figura 14, dado el valor de un parámetro se puede determinar el rango del otro para que el sistema sea estable, por ejemplo:

- | | | |
|---|----------|--|
| <i>Si</i> $K_d = 2 \Rightarrow -3 < K_p < \infty$ | <i>y</i> | <i>Si</i> $K_p = 6 \Rightarrow -1 < K_d < \infty$ |
| <i>Si</i> $K_d = 5 \Rightarrow -1.2 < K_p < \infty$ | <i>y</i> | <i>Si</i> $K_p = 0.8 \Rightarrow -7.5 < K_d < 30$ |
| <i>Si</i> $K_d = 8 \Rightarrow -0.3 < K_p < \infty$ | <i>y</i> | <i>Si</i> $K_p = 0.6 \Rightarrow -10 < K_d < 20$ |
| <i>Si</i> $K_d = 10 \Rightarrow 0 < K_p < \infty$ | <i>y</i> | <i>Si</i> $K_p = -0.2 \Rightarrow -\infty < K_d < 6$ |
| <i>Si</i> $K_d = 15 \Rightarrow 0.4 < K_p < \infty$ | <i>y</i> | <i>Si</i> $K_p = -2 \Rightarrow -\infty < K_d < 3$ |

Para estos gráficos se puede utilizar la función ezplot y el lenguaje simbólico de Matlab.

```
» syms Kd
Kp=-6/Kd
```

```

Kp =
-6/Kd
» Kp1=(1.2*(Kd-10))/(Kd)
Kp1 =
(6/5*Kd-12)/Kd
» ezplot(Kp,-20,40)
» hold on
» ezplot(Kp1,-20,40)
» grid

```

Para el plano $Kd=f(Kp)$, empleando las expresiones: (7), (8), (10) y (11), con el mismo procedimiento se llega al grafico de la figura 15.

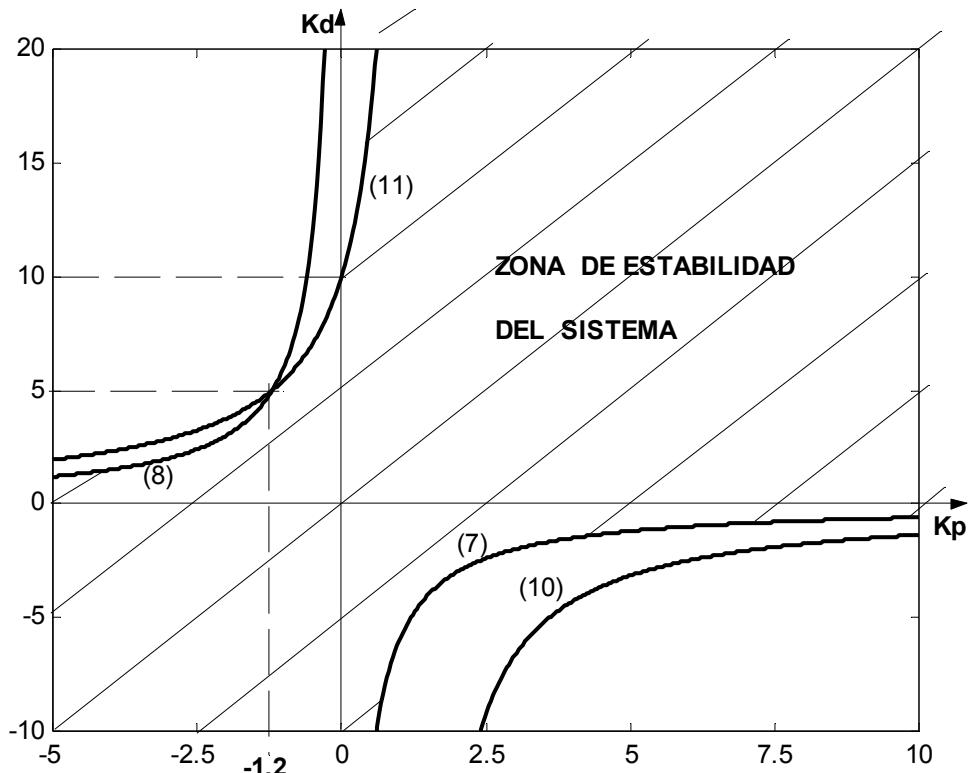


Figura 15

De la figura 15, dado el valor de un parámetro se puede determinar el rango del otro para que el sistema sea estable, por ejemplo:

$$\text{Si } Kp = 6 \Rightarrow -1 < Kd < \infty \quad \text{y} \quad \text{Si } Kp = 0.8 \Rightarrow -7.5 < Kd < 30$$

$$\text{Si } Kp = -1 \Rightarrow -\infty < Kd < 60/11 \quad \text{y} \quad \text{Si } Kp = -2 \Rightarrow -\infty < Kd < 3$$

Para determinar las expresiones límites se puede usar el programa Srouth agregado al Csad/Matlab, por ejemplo:

» Srouth

Variables posibles de utilizar: kp kd ki t a k

Ingresé el polinomio como vector > [1 6 11-kd+kp*kd 6+kp*kd]

Las variables que se encuentran presentes en el polinomio son: kd, kp.
 Ingrese como vector las variables que desee
 reemplazar por un valor constante [kp,ki,kd,t,a,k] >
 Se optó por dejar todas como elementos variables.
 El polinomio ingresado es:

3 2

$$s^3 + 6s^2 + (11 - kd + kp \cdot kd)s + 6 + kp \cdot kd$$

La tabla de Routh es:

$$\begin{bmatrix} s^3, & 1, & 11-kd+kp \cdot kd, & 0 \\ s^2, & 6, & 6+kp \cdot kd, & 0 \\ s, & 10-kd+5/6 \cdot kp \cdot kd, & 0, & 0 \\ 1, & 6+kp \cdot kd, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes expresiones deben ser mayores que cero para que el sistema sea estable.

$$\begin{aligned} 10 - kd + 5/6 kp \cdot kd \\ 6 + kp \cdot kd \end{aligned}$$

¿Qué variable desea despejar? kp(p),ki(i),kd(d),t,a,k > p

kp

$$\begin{bmatrix} 12 \\ [- \frac{6}{5} + 6/5] \\ kd \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ [- \frac{6}{5}] \\ kd \end{bmatrix}$$

Como se aprecia se llega a las mismas expresiones.

Para el plano Kd=f(Kp), se tendrá:

» Srouth

Variables posibles de utilizar: kp kd ki t a k

Ingresar el polinomio como vector > [1 6 11-kd+kp \cdot kd 6+kp \cdot kd]

Las variables que se encuentran presentes en el polinomio son: kd, kp.

Ingresar como vector las variables que desee

reemplazar por un valor constante [kp,ki,kd,t,a,k] >

Se optó por dejar todas como elementos variables.

El polinomio ingresado es:

3 2

$$s^3 + 6s^2 + (11 - kd + kp \cdot kd)s + 6 + kp \cdot kd$$

La tabla de Routh es:

$$\begin{bmatrix} s^3 & 1, & 11-kd+kp*kd, & 0 \\ s^2, & 6, & 6+kp*kd, & 0 \\ s, & 10-kd+5/6*kp*kd, & 0, & 0 \\ 1, & 6+kp*kd, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes expresiones deben ser mayores que cero para que el sistema sea estable.

$$\begin{aligned} 10 - kd + 5/6 kp kd \\ 6 + kp kd \end{aligned}$$

¿Qué variable desea despejar? kp(p),ki(i),kd(d),t,a,k > d

kd

$$\begin{bmatrix} 60 \\ [- \frac{\cdot}{\cdot}] \\ [-6 + 5 kp] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ [- \frac{\cdot}{\cdot}] \\ [kp] \end{bmatrix}$$

Ejemplo 37:

El diagrama de bloques de un sistema es el indicado en la figura 16.

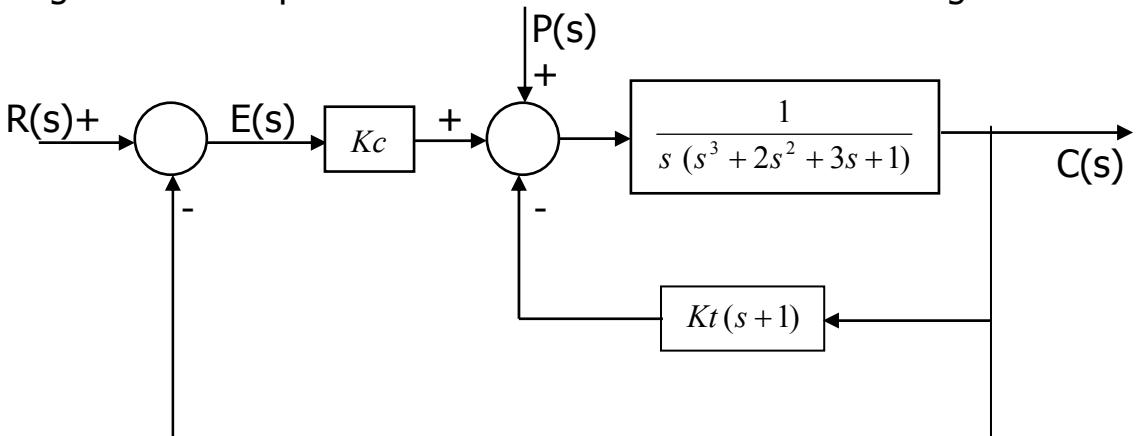


Figura 16

Demarcar en el plano $K_c = f(K_t)$ la zona para la cual el sistema sea estable.

Reduciendo el lazo interno:

$$G^*(s) = \frac{1}{s(s^3 + 2s^2 + 3s + 1) + Kt(s+1)} ; \text{ por ende la } G(s) \text{ será:}$$

$$G(s) = \frac{Kc}{s(s^3 + 2s^2 + 3s + 1) + Kt(s+1)} \quad y \quad H(s) = 1$$

La ecuación característica es:

$$s(s^3 + 2s^2 + 3s + 1) + Kt(s+1) + Kc = 0, \text{ operando se llega a:}$$

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + (Kt + 1)s + (Kt + Kc) = 0$$

El arreglo de Routh es:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & Kt + Kc \\ s^3 & \frac{2}{5-Kt} & Kt+1 & 0 \\ s^2 & \frac{2}{5-Kt} & Kt+Kc & 0 \\ s^1 & \frac{(5-Kt)(Kt+1)-4(Kt+Kc)}{2(5-Kt)} & 2(Kt+Kc) & 0 \\ s^0 & \frac{2}{2(5-Kt)} & 0 & 0 \end{array}$$

; las restricciones son:

$$1^o) 5 - Kt > 0 \Rightarrow Kt < 5 \quad (1)$$

$$2^o) Kt + Kc > 0 \Rightarrow Kc > -Kt \quad (2)$$

$$3^o) (5 - Kt)(Kt + 1) - 4(Kt + Kc) > 0 \Rightarrow Kc < 1.25 - 0.25 Kt^2. - \quad (3)$$

Interceptando las mismas en el plano $Kc = f(Kt)$, el resultado se muestra en la figura 17.

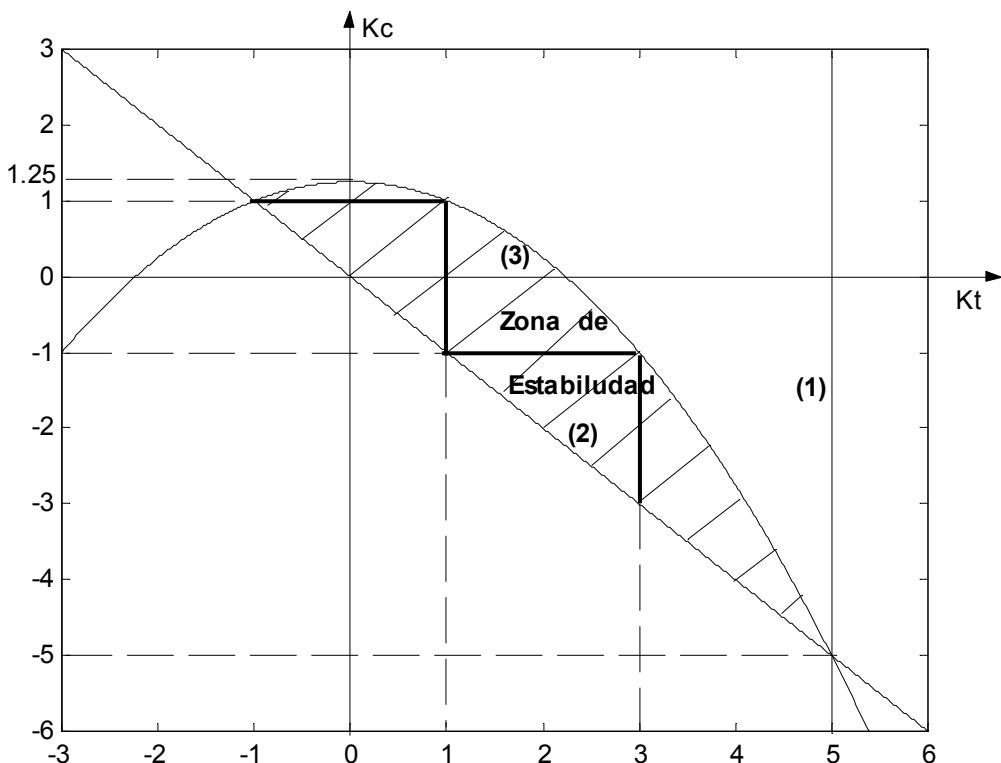


Figura 17

De la figura 17, dado el valor de un parámetro se puede determinar el rango del otro para que el sistema sea estable, por ejemplo:

$$Si \ Kt = 1 \Rightarrow -1 < Kd < 1 \quad y \quad Si \ Kc = -1 \Rightarrow 1 < Kd < 3$$

$$Si \ Kt = 3 \Rightarrow -3 < Kp < -1 \quad y \quad Si \ Kc = 1 \Rightarrow -1 < Kd < 1$$

Usando Srouth del Csad, con $Kt = t$ y $Kc = k$, sería:

» Srouth

Variables posibles de utilizar: kp kd ki t a k

Ingresé el polinomio como vector > [1 2 3 t+1 t+k]

Las variables que se encuentran presentes en el polinomio son: k, t.
 Ingrese como vector las variables que desee
 reemplazar por un valor constante [kp,ki,kd,t,a,k] >
 Se optó por dejar todas como elementos variables.
 El polinomio ingresado es:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + (t+1)s + t + k$$

La tabla de Routh es:

$$\begin{bmatrix} s^4, & 1, & 3, & t+k, & 0 \\ s^3, & 2, & t+1, & 0, & 0 \\ s^2, & 5/2 - 1/2*t, & t+k, & 0, & 0 \\ s, & (t^2 - 5 + 4*k)/(t-5), & 0, & 0, & 0 \\ 1, & t+k, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes expresiones deben ser mayores que cero para que el sistema sea estable.

$$5/2 - 1/2 t$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ t - 5 + 4 k \\ \hline t - 5 \end{array}$$

$$t + k$$

¿Qué variable desea despejar? kp(p),ki(i),kd(d),t,a,k > k

$$K \Rightarrow K_c \quad y \quad t \Rightarrow K_t$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1/4 t + 5/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -t \end{bmatrix}$$

Hay elementos de la columna que no tienen la variable (k).

$$5/2 - 1/2 t \Rightarrow K_t < 5$$

Sistemas con Retardo de Transporte

Todos los sistemas considerados hasta aquí tienen funciones de transferencia que son el cociente de polinomios. En la práctica, se pueden encontrar retardos puros en varias clases de sistemas. En estos componentes la salida no comienza a responder a la entrada sino hasta después de un intervalo de tiempo dado. Por ejemplo el esquema de un proceso de laminado de una plancha de acero se muestra en la figura 18, junto con el diagrama de bloques correspondiente.

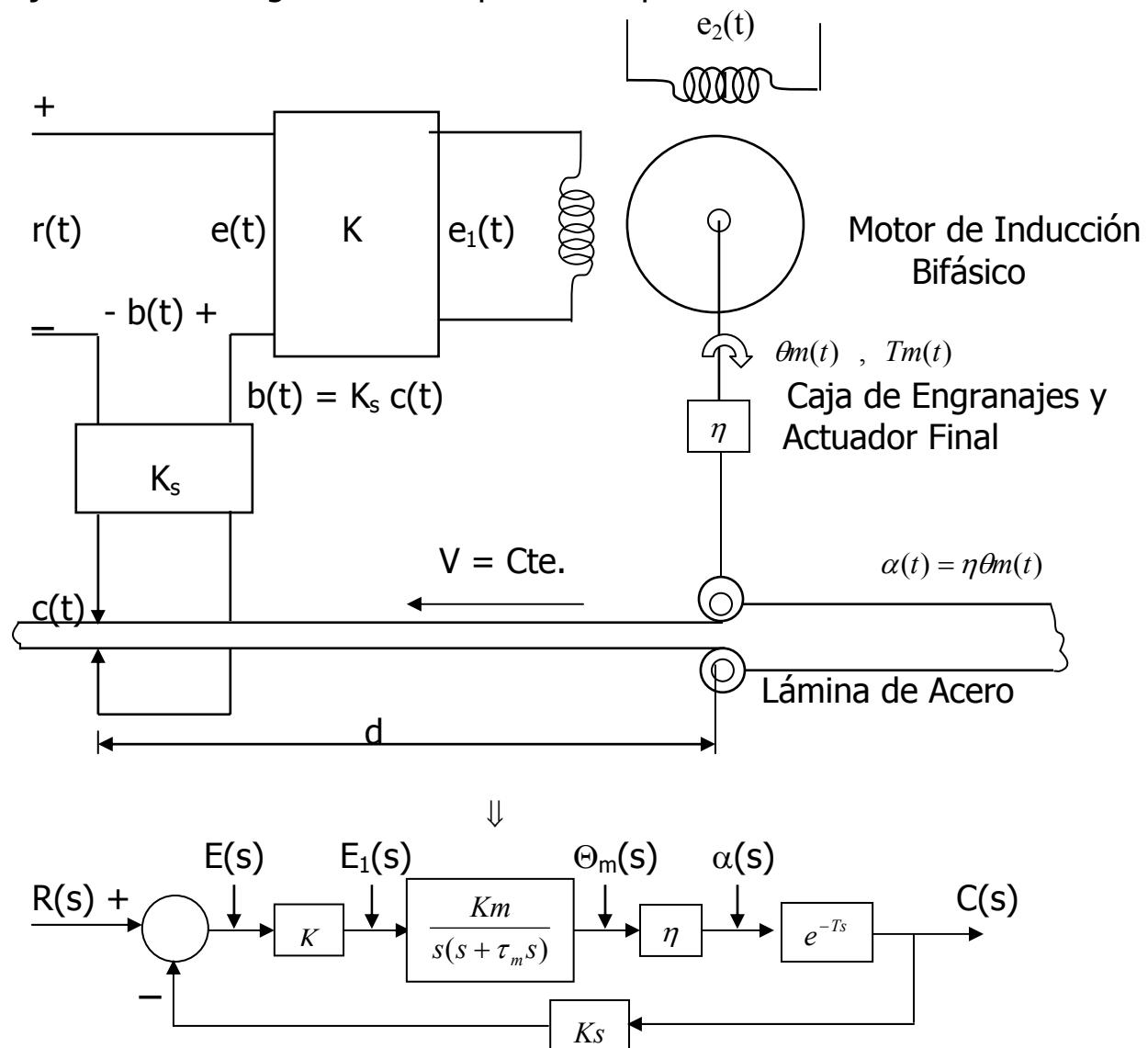


Figura 18

La placa de acero se alimenta a través de un rodillo a una velocidad constante v (m/seg.). La distancia entre los rodillos y el punto donde se mide el espesor es d (m). El desplazamiento angular del motor $\theta_m(t)$ se convierte en un movimiento vertical mediante una combinación de caja de engranajes y un actuador lineal. Por ende el retardo será de:

$$Td = \frac{d}{v} \text{ (seg.)}$$

Se supone que el espesor en los rodillos es $\alpha(t)$ y se reproduce sin cambios a Td seg. en el punto de medición, o sea:

$$y(t) = \alpha(t - Td) \Rightarrow y(Td) = \alpha(0)$$

La transformada de Laplace será:

$$Y(s) = \alpha(s) e^{-Tds}$$

La función de transferencia entre $\alpha(t)$ e $y(t)$ es:

$$\frac{Y(s)}{\alpha(s)} = e^{-Tds}$$

En consecuencia el diagrama de bloques es el mostrado en la figura 18.-

$$\text{Por lo tanto: } G(s)H(s) = \frac{(KKm\eta Ks)e^{-Ts}}{s(1 + \tau_m s)} \equiv \frac{K^* e^{-Ts}}{s(s + 1/\tau_m)} \quad \begin{cases} K^* = KKm\eta Ks / \tau_m \\ d/v = T \text{ (seg.)} \end{cases}$$

La ecuación característica del sistema será:

$$s(s + 1) + K^* e^{-s} = 0$$

Por lo tanto la función de transferencia del lazo del sistema, y por ende la ecuación característica ya no tendrá coeficientes constantes.

Por ende los criterios algebraicos de estabilidad *no se podrán aplicar* y como se verá más adelante es una de las motivaciones para estudiar el criterio de Nyquist.

A los efectos de la estabilidad, que el retardo este en $G(s)$ o en $H(s)$ es indiferente pues la ecuación característica será la misma, no así la respuesta de la salida $c(t)$. Por el momento se verán algunas aproximaciones de los retardos de transporte, con funciones racionales para poder estudiar los efectos sobre la estabilidad de los sistemas.

Aproximaciones de la Función de Transferencia de los Retardos

Existen varias formas de aproximar a e^{-Ts} , por una función racional. Las mas usadas so las de Padé, de diferentes ordenes.

Padé de primer orden:

$$e^{-Ts} \cong \frac{1 - (T/2)s}{1 + (T/2)s} \equiv \frac{-(s - 2/T)}{(s + 2/T)}$$

Por lo tanto se agrega un cero y un polo reales simétricos respecto al origen del plano s . Si el retardo está en $G(s)$ el sistema un cero en el semiplano derecho del plano s , si esta en $H(s)$, el cero en $M(s)$ se agregara en el semiplano izquierdo del plano s . La Figura 19a indica el polo y el cero agregados al lazo.

Padé de segundo orden:

$$e^{-Ts} \cong \frac{s^2 - (6/T)s + (12/T^2)}{s^2 + (6/T)s + (12/T^2)}$$

Por lo tanto se agrega un par de ceros complejos en el semiplano derecho del plano s , un par de polos en el semiplano izquierdo del plano s .

Esto se muestra en la figura 19b.-

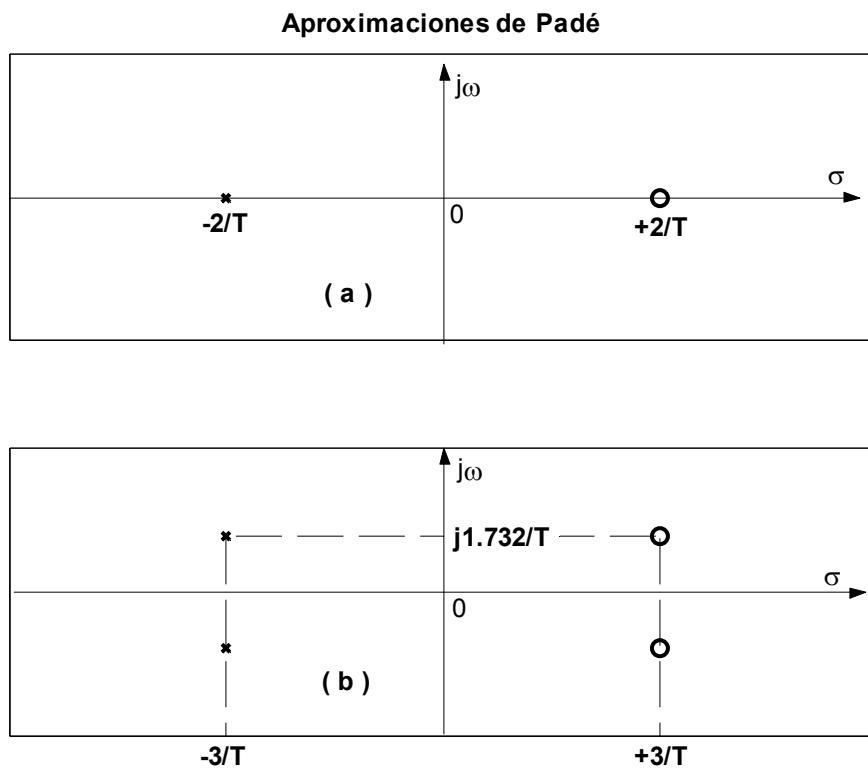


Figura 19

Ejemplo 38:

Un sistema de control tiene el diagrama de bloques de la figura 20:

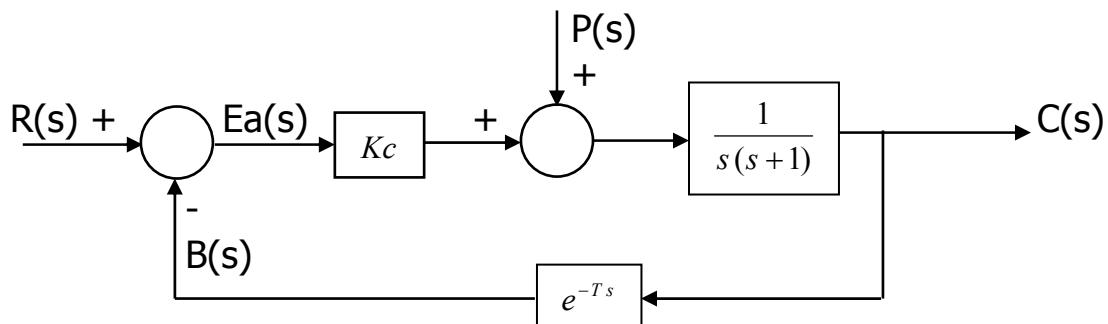


Figura 20

Hacer un análisis de la estabilidad del mismo.

Aproximar el retardo por una función de Padé, si el retardo es de $T=0.5$ seg., determinar el rango del parámetro K_c para que el sistema sea estable.

Usaremos primero la aproximación de primer orden, por lo tanto la función de transferencia del lazo será:

$$L(s) \approx \frac{-K_c(s-2/T)}{s(s+1)(s+2/T)} \equiv \frac{-K_c(s-4)}{s(s+1)(s+4)}$$

Como se verá aplicando el criterio de Nyquist el rango exacto de K_c para que el sistema sea estable es:

$$0 < K_c < 2.1496.-$$

Con la aproximación de Padé de 1º orden la ecuación característica es:

$$s(s+1)(s+4) - Kc(s-4) = 0 ; \text{ operando:}$$

$$s^3 + 5s^2 + (4 - Kc)s + 4Kc = 0 ; \text{ el arreglo de Routh será:}$$

s^3	1	4 - Kc	
s^2	5	4Kc	
s^1	$\frac{20 - 9Kc}{5}$	0	; las restricciones son:
s^0	4Kc	0	

$$1^o) Kc > 0$$

$$2^o) 20 - 9Kc > 0 \Rightarrow Kc < 20/9 \approx 2.222$$

En consecuencia el rango buscado es:

$$0 < Kc < 2.222$$

Como se ve el valor máximo es un poco mayor que el real.

Veamos con una aproximación de 2º orden, la función de transferencia del lazo será:

$$L(s) \approx \frac{Kc(s^2 - 12s + 48)}{s(s+1)(s^2 + 12s + 48)} ;$$

la ecuación característica será:

$$s^4 + 13s^3 + (Kc + 60)s^2 + (48 - 12Kc)s + 48Kc = 0 ; \text{ el arreglo de Routh es:}$$

s^4	1	Kc + 60	48Kc	
s^3	13	48 - 12Kc	0	
s^2	$\frac{25Kc + 732}{13}$	48Kc	0	
s^1	$\frac{25Kc + 732}{(25Kc + 732)(48 - 12Kc) - 8112Kc}$	624Kc	0	; las restricciones son:
s^0	$\frac{(25Kc + 732)^2}{624Kc}$	0	0	

$$1^o) Kc > 0$$

$$2^o) 25Kc + 732 > 0 \Rightarrow Kc > -29.28, \text{ para } Kc > 0 \text{ se cumple siempre.}$$

$$3^o) -300Kc^2 - 15696Kc + 35136 > 0 \Rightarrow (Kc - 2.1502)(Kc + 54.4702) < 0$$

Como $Kc > 0$, deberá ser: $(Kc - 2.1502) < 0 \Rightarrow Kc < 2.1502$

En consecuencia el rango de Kc para la estabilidad será:

$$0 < Kc < 2.1502$$

Como se aprecia es casi el real, en consecuencia la aproximación de Padé de 2º orden, es la adecuada para este sistema.

Veamos ahora con Kc constante y T variable, por ejemplo para $Kc=1.2$, determinar el valor máximo del tiempo de retardo admitido por el sistema.

La ecuación Característica será:

$$Ts^3 + (2 + T)s^2 + (2 - 1.2T)s + 2.4 = 0$$

El arreglo de Routh es:

$$\begin{array}{c|cc|c} s^4 & T & 2-1.2T \\ s^3 & (2+T) & 2.4 \\ s^2 & \frac{(2+T)(2-1.2T)-2.4T}{(2+T)} & 0 \\ s^1 & 2.4 & 0 \end{array}; \text{ para } T>0, \text{ la restricción es:}$$

$$(2+T)(2-1.2T)-2.4T > 0 \Rightarrow -1.2T^2 - 2.8T + 4 > 0$$

$$0 \cdot 1.2T^2 + 2.8T - 4 < 0 \Rightarrow 1.2(T-1)(T+3.3333) < 0$$

Como $T>0$, deberá ser: $T-1 < 0 \Rightarrow T < 1 \text{ seg.}$

En consecuencia el rango de T , para la estabilidad del sistema es:

$$0 < T < 1$$

Si los dos parámetros K_c y T son variables, demarcaremos en el plano $K_c=f(T)$, la zona donde el sistema sea estable. Se usara la aproximación de Padé de primer orden. En realidad la zona buscada estará solo en el primer cuadrante si tanto K_c como T son positivos.

Si consideraremos que tanto K_c como T pueden ser negativos, (la aproximación ya no sería un retardo, sino un componente inestable en el lazo). De los resultados, para el retardo se tomará solo el primer cuadrante del plano paramétrico.-

La ecuación característica será:

$$s^3 + \left[\frac{2+T}{T} \right] s^2 + \left[\frac{2-1.2T}{T} \right] s + \frac{2.4}{T} = 0; \text{ el arreglo de Routh es:}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} s^3 & 1 & \frac{2-K_cT}{T} \\ s^2 & \frac{(2+T)}{T} & \frac{2K_c}{T} \\ s^1 & \frac{(2+T)(2-K_cT)}{T} - \frac{2K_c}{T} \times \frac{T}{T} & 0 \\ s^0 & \frac{2+T}{T} & 0 \end{array}; \text{ las restricciones serán:}$$

$$1^o) \frac{2+T}{T} > 0 \quad 2^o) \frac{K_c}{T} > 0 \quad y \quad 3^o) K_cT(T+4) < 2(T+2)$$

Para $T>0$, para el retardo la 1º) se cumple siempre y además se deberá cumplir que:

$$2^o) K_c > 0 \quad y \quad 3^o) K_c < \frac{2(T+2)}{T(T+4)}.$$

Para el componente inestable, $T < 0$, se deberá cumplir que:

$$1^o) T < -2 \quad 2^o) K_c < 0 \quad y \quad 3^o) K_cT(T+4) < 2(T+2)$$

$$\text{Para la 3º), si } (T+4) > 0 \Rightarrow T > -4 \Rightarrow K_c > \frac{2(T+2)}{T(T+4)}.$$

$$\text{Si } (T+4) < 0 \Rightarrow T < -4 \Rightarrow K_c < \frac{2(T+2)}{T(T+4)}. -$$

Las zonas buscadas se muestran en la figura 21.

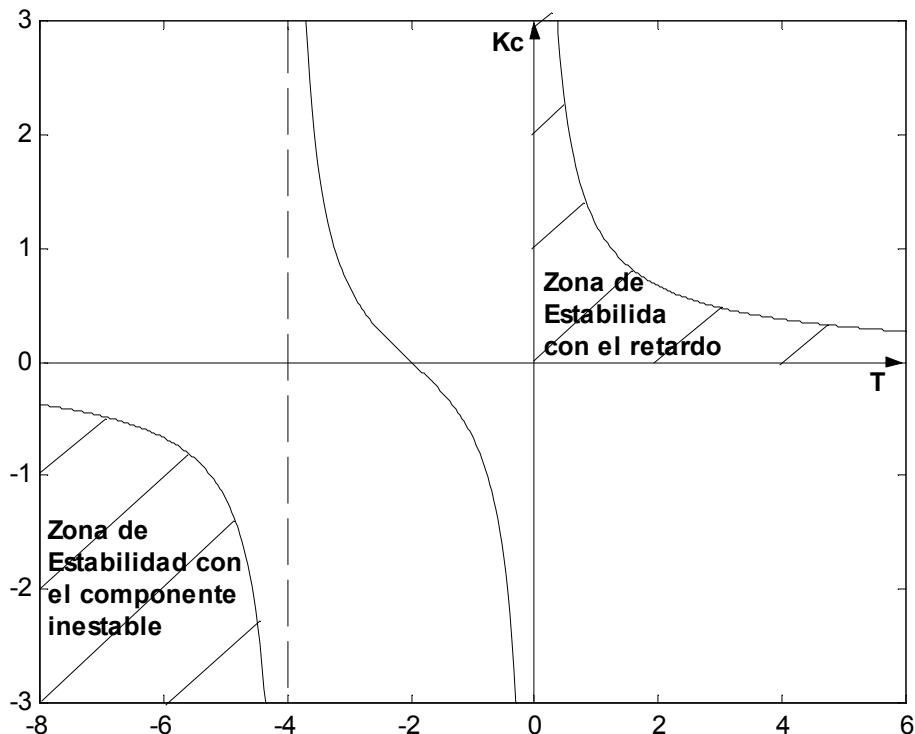


Figura 21

De la misma se pueden calcular los rangos de un parámetro para el otro fijo en un valor constante:

Si $T=0.5$ seg., Rango de $K_c \Rightarrow 0 < K_c < 20/9$

Si $T=1.0$ seg., Rango de $K_c \Rightarrow 0 < K_c < 1.20$

Si $T=-6$, Comp. Inestable, Rango de $K_c \Rightarrow -\infty < K_c < -2/3$

Si $K_c=2/3$, Rango de $T \Rightarrow 0 < T < 2$

Si $K_c=-1.2$, Comp. Inestable, Rango de $T \Rightarrow -\infty < T < -5$

Las funciones Límites se pueden hallar con Srouth del Csad/Matlab.

Se tomará $t \equiv T$ y $k \equiv K_c$.

» Srouth

Variables posibles de utilizar: kp kd ki t a k

Ingresar el polinomio como vector $> [1 (2+t)/t (2-k*t)/t (2*k)/t]$

Las variables que se encuentran presentes en el polinomio son: k, t.

Ingresar como vector las variables que deseé

reemplazar por un valor constante $[kp,ki,kd,t,a,k] >$

Se optó por dejar todas como elementos variables.

El polinomio ingresado es:

$$3 + \frac{(2+t)s^2}{t} + \frac{(2-kt)s}{t} + 2k/t$$

La tabla de Routh es:

$$\begin{bmatrix} s^3, & 1, & (2-kt)/t, & 0 \\ s^2, & (2+t)/t, & 2k/t, & 0 \\ s, & (2-kt)/t - 2k/(2+t), & 0, & 0 \\ 1, & 2k/t, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes expresiones deben ser mayores que cero para que el sistema sea estable.

$$\begin{array}{c} 2+t \\ \hline t \\[10pt] \frac{2-kt}{t} & k \\ \hline -2 & \frac{2}{2+t} \end{array}$$

$$2k/t$$

¿Qué variable desea despejar? kp(p), ki(i), kd(d), t, a, k > k

k

$$\begin{bmatrix} 2+t \\ 2 \frac{2+t}{t} \\ t(4+t) \end{bmatrix} \Rightarrow 2(T+2)/T(T+4)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Hay elementos de la columna que no tienen la variable (k).

$$2/t + 1 \Rightarrow (T+2)/T$$

Como se puede apreciar se llega a las mismas funciones límites.-

Respuestas Temporales en Sistemas con Retardos en el Lazo

Si el retardo esta en $G(s)$ y $H(s)=1$, se puede usar Pidesign del Csad, en el mismo las aproximaciones de Padé pueden ser de 1º, 2º, etc. orden, por defecto está la de 3º orden. Supongamos el sistema del ejemplo 38, pero con el retardo en $G(s)$ en lugar de $H(s)$. Para la estabilidad sería lo mismo. Si $K_c=1$, y $T = 0.5$ seg, usando Pidesign, se puede obtener las propiedades siguientes:

» Pidesign

Default transfer function:

100

 $s^2 + 10s + 1$

Enter numerator [n] > 1

Enter denominator [d] > [1 1 0]

Enter controller type (p,pi,pd,pid,other) [pid] > p

--- PIDESIGN OPTIONS ---

Controller type Time response

Begin Rltool View Nyquist

Kp,Kd,Ki values Freq response

Show values Root locus

Goals to meet Error, Ess

Ziegler-Nichols Display TF's

Add controller New/clear TF's

Poles and Zeros Lldesign

H-Routh Introd. Delay

M - Rootcontorn

Quit

PIDESIGN > K

Enter Kp [1] >

PIDESIGN > I

Time Delay [0] > 0.5

Enter the order Pade approximation: [3] > 1

--- PIDESIGN DELAY OPTIONS ---

Controller type Time response

Begin Rltool View Nyquist

Kp,Kd,Ki values Freq response

Show values Root locus

Add controller Error, Ess

Poles and Zeros H-Routh

Quit(return to design)

PIDESIGN DELAY > H

El polinomio ingresado es:

$$s^3 + 5s^2 + (-kp + 4)s + 4kp$$

La tabla de Routh es:

$$\begin{bmatrix} s^3, & 1, & -kp+4, & 0 \\ s^2, & 5, & 4*kp, & 0 \\ s, & -9/5*kp+4, & 0, & 0 \\ 1, & 4*kp, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes expresiones deben ser mayores que cero para que el sistema sea estable.

$$-9/5 kp + 4 \Rightarrow Kp < 20/9.-$$

$$4 kp \Rightarrow Kp > 0$$

PIDESIGN DELAY > T

Choose output variable: Y,E,U [y] >

- TFTPLOT OPTIONS -

Plot Stimulus

Error Final time

Zoom New TF

Grid Display TF

Hold Attributes

Label Roots

View data

Quit Interpolate

TFTPLOT > D \Rightarrow muestra la $M(s)$

$$-(s^1 - 4)$$

$$-----$$
$$s^3 + 5s^2 + 3s^1 + 4$$

TFTPLOT > S

Stimulus: Step,Impulse,Ramp [s] >

Desired amplitude [1] >

TFTPLOT > F

Enter desired final time [28.26] > 25

TFTPLOT > P

La respuesta se muestra en la figura 22.-

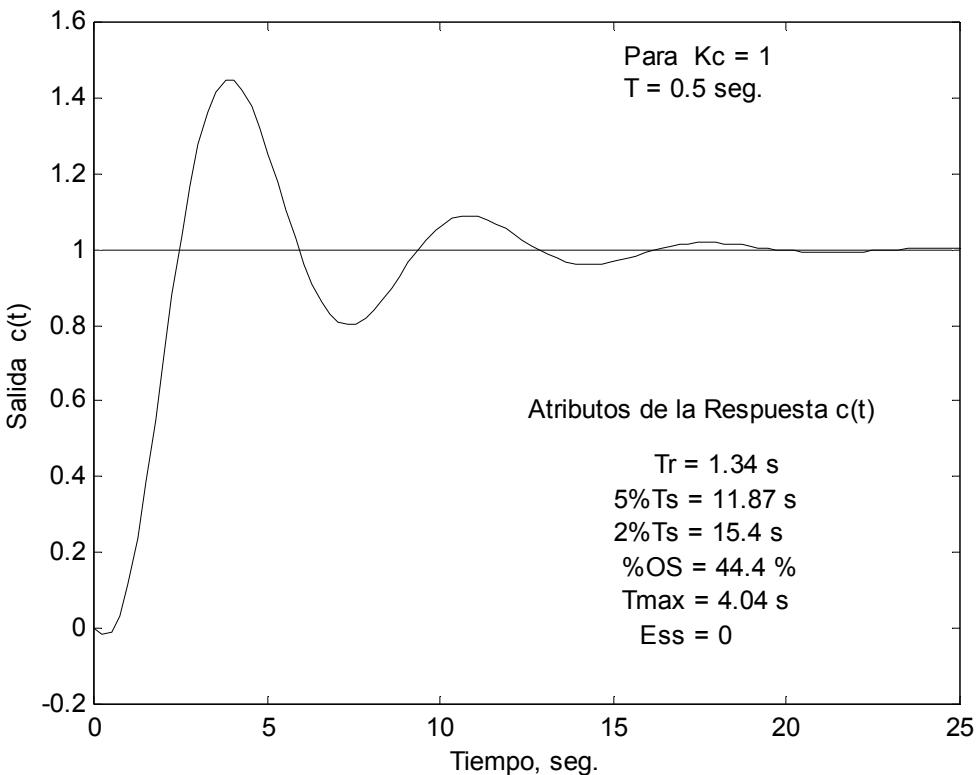


Figura 22

Si se sigue el mismo procedimiento con la aproximación de 2º orden:

--- PIDESIGN DELAY OPTIONS ---

PIDESIGN DELAY > H

El polinomio ingresado es:

$$s^4 + 13s^3 + (kp + 60)s^2 + (-12kp + 48)s + 48kp$$

La tabla de Routh es:

$$\begin{bmatrix} s^4, & 1, & kp+60, & 48*kp, \\ s^3, & 13, & -12*kp+48, & 0, \\ s^2, & 25/13*kp+732/13, & 48*kp, & 0, \\ s, & -12*kp+48-624*kp/(25/13*kp+732/13), & 0, & 0, \\ 1, & 48*kp, & 0, & 0, \end{bmatrix}$$

Las siguientes expresiones deben ser mayores que cero para que el sistema sea estable.

$$\begin{aligned} \frac{25}{13} + \frac{732}{13} &> 0 \\ -12kp + 48 - 624 \frac{kp}{\frac{25}{13} + \frac{732}{13}} &> 0 \\ 48kp &> 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, operando se llega a:

$$0 < K_p < 2.1502$$

La respuesta será la indicada en la figura 23.

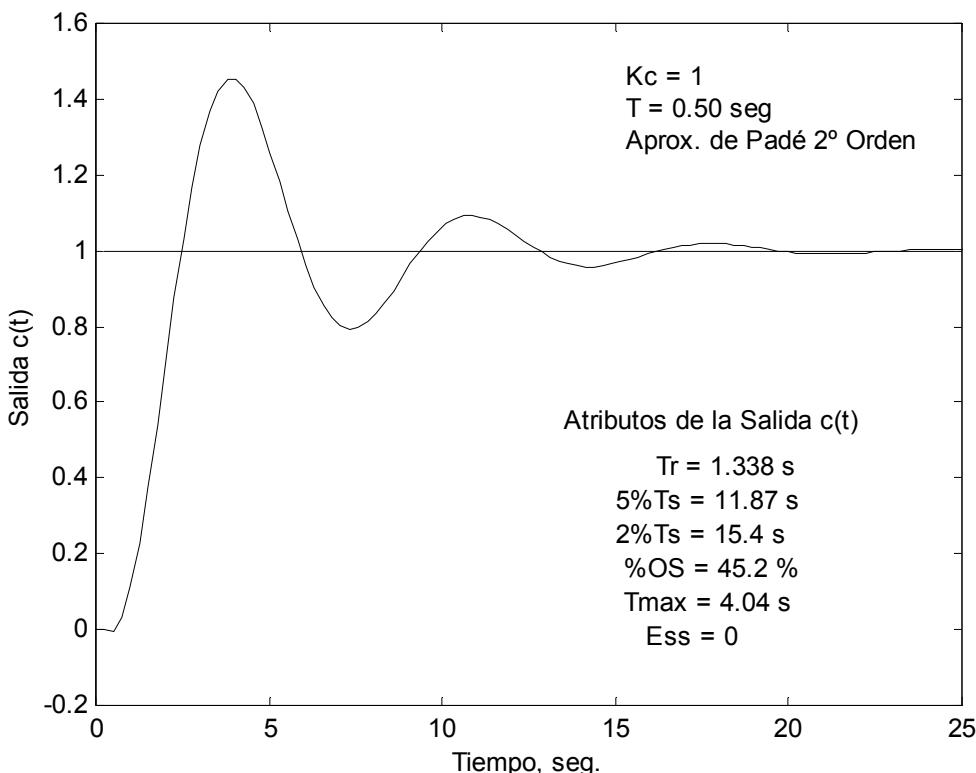


Figura 23

Si se empleara la aproximación de 3º orden los resultados serían prácticamente los mismos, por ende para este sistema con $T=0.5$ seg. la aproximación de 2º orden esta bien.

También se pueden usar un diagrama de simulink, usando el bloque "Transport Delay", para simular el retardo, ingresando el T correspondiente.

O usar el programa FRTOOL, que usa como base el Matlab, pues el Rltool no se puede usar.

Si el Retardo esta en $H(s)$ se puede usar, cualquier programa de los ya enumerados, menos el Pidesign que es para realimentación unitaria.

Un diagrama con simulink seria el indicado en la figura 24, el mismo permite ubicar al retardo en $G(s)$ o $H(s)$, como se puede ver.-

Las respuestas temporales para $P(s)=0$, y $r(t)=u_s(t)$, con el retardo en $G(s)$ y en $H(s)$ se pueden obtener del mismo.

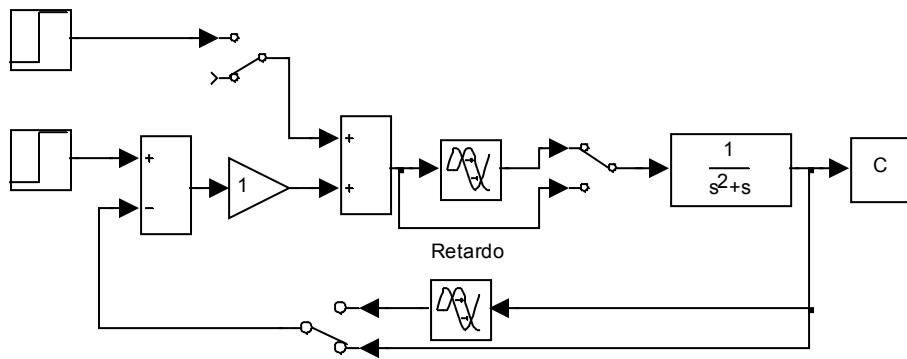


Figura 24

También se puede usar Tfplot del Csad, utilizando las funciones de transferencias del sistema, aproximando los retardos por funciones de Padé, si estas son de segundo orden las respuestas serían las indicadas en la figura 25.

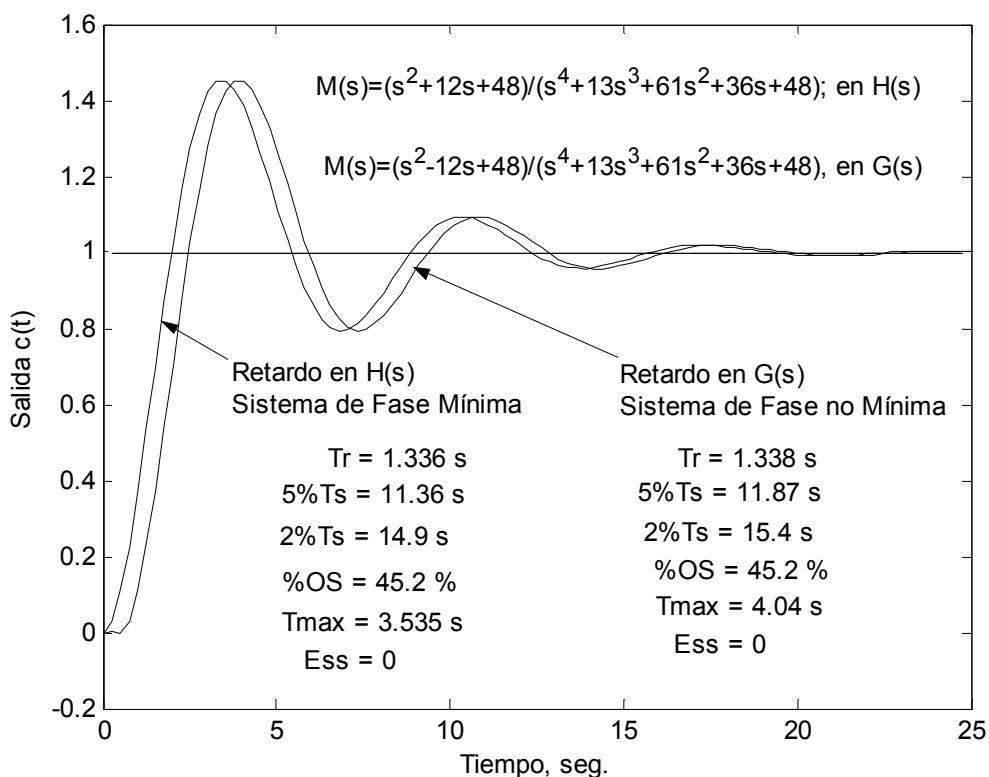


Figura 25

Situación Regional de las Raíces de la Ecuación Característica

Puede encontrarse la ubicación aproximada de las raíces de la ecuación característica $F(s)=0$ desplazando el origen del plano s y aplicando el criterio de Routh-Hurwitz. Por ejemplo las raíces de $F(s)$ se sitúan en el plano s , como se indica en la figura 26.

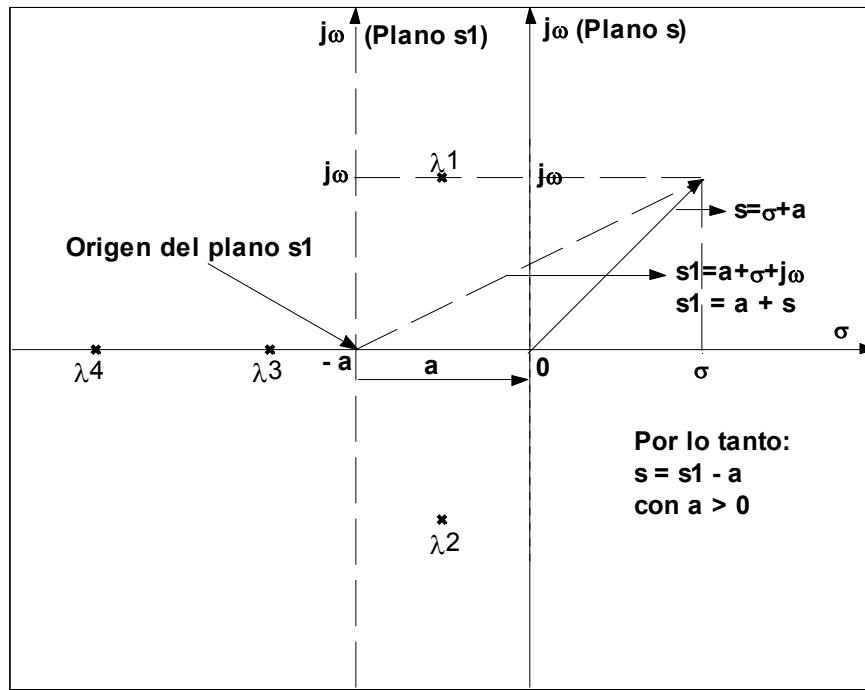


Figura 26

El arreglo de Routh mostraría que no hay raíces de $F(s)=0$ en el semiplano derecho del plano s . Si el origen se desplaza hacia la izquierda al valor $-a$, habrá dos raíces en el semiplano derecho del nuevo plano s_1 . Esta información se puede obtener con el criterio de Routh una vez hecha la sustitución de variable, lo que requiere que:
 $s_1=s+a$ o bien $s=s_1-a$ con $a>0$.

Así se reemplazara s por s_1-a en $F(s)$, aunque este procedimiento se vuelve muy tedioso al crecer el orden del sistema.

Ejemplo 39:

Un sistema tiene la siguiente función de transferencia del lazo,

$$L(s) = \frac{70s + 75}{s^2(s^2 + 10s + 36)}, \text{ la ecuación característica es:}$$

$$s^4 + 10s^3 + 36s^2 + 70s + 75 = 0$$

Las raíces de la misma son: $\lambda_{1-2} = -1 \pm j2$; $\lambda_3 = -3$ y $\lambda_4 = -5$.

El arreglo de Routh mostraría que no hay raíces de $F(s)=0$ en el semiplano derecho del plano s , por lo tanto el sistema será estable.

Desplazando el eje jw a $s=-2$, ($a=2$), o sea $s=s_1-2$, se obtendrá:

$$(s_1 - 2)^4 + 10(s_1 - 2)^3 + 36(s_1 - 2)^2 + 70(s_1 - 2) + 75 = 0, \text{ operando quedará:}$$

$$s_1^4 + 2s_1^3 + 0s_1^2 + 14s_1 + 15 = 0$$

Como falta el coeficiente de s_1^2 , el sistema tendrá al menos un polo en el semiplano derecho del plano s_1 . Aplicando el criterio de Routh se puede ver que hay dos cambios de signo en la primera columna, por lo tanto hay dos raíces de $F(s)$ entre -2 y el origen del plano s .

s_1^4	1	0	15	
s_1^3	2	14	0	
s_1^2	-7	15	0	; Z=2, dos raíces entre -2 y el origen del plano s.
s_1^1	128/7	0	0	
s_1^0	15	0	0	

Desplazando el eje jw a la derecha de $s=-2$, se ubicaran las raíces de un modo mas preciso. El trabajo tedioso de desarrollar la expresión $F(s_1)$ se puede hacer por un método mas simple aplicando Ruffini, o usando el comando pmake del Csad/Matlab, por ejemplo:

```
>> F=pmake(2,2,2,2,'+',10*pmake(2,2,2),'+',36*pmake(2,2),'+',70*[1 - 2],'+',[0 75])
```

F =

```
1.0000 2.0000 -0.0000 14.0000 15.0000
```

>> Routh(F)

Some coefficients in D are zero.

There is at least one root in the right half plane.

S^4 Row: 1.0000e+000 0 1.5000e+001

S^3 Row: 2.0000e+000 1.4000e+001 0

S^2 Row: -7.0000e+000 1.5000e+001 0

S^1 Row: 1.8286e+001 0

S^0 Row: 1.5000e+001

Press any key to continue...

First column is:

S^4 1

S^3 2

S^2 -7

S^1 18.29

S^0 15

Number of sign changes in the first column is 2

The computed roots of D(s) are:

-3.0000e+000

1.0000e+000 +2.0000e+000i

1.0000e+000 -2.0000e+000i

-1.0000e+000

Si se desplaza el eje jw a $s=-1$, ($a=1$), o sea $s=s_1-1$, $F_1(s)$ tendría un par imaginario en $\pm j2$, usando el Csad nos queda:

```

» p1=pmake(1,1,1,1);
» p2=10*pmake(1,1,1);
» p3=36*pmake(1,1);
» p4=70*[1 -1];
» p5=[0 75];
» F=padd(p1,p2,p3,p4,p5)
F =

```

1 6 12 24 32

```

» Routh(F)

```

S^4 Row: 1 12 32

S^3 Row: 6 24 0

S^2 Row: 8 32 0

The next row contains all zeros.

Replacing row using derivative of auxiliary equation.

Warning: Input arguments must be scalar.

S^1 Row: 16 0

S^0 Row: 32

Press any key to continue...

First column is:

S^4 1

S^3 6

S^2 8

S^1 16

S^0 32

Number of sign changes in the first column is 0

The computed roots of D(s) are:

-4.0000e+000

+2.0000e+000i

-2.0000e+000i

-2.0000e+000

Se verifica lo ya dicho.-

Ejemplo 40:

Si se tiene un sistema con realimentación unitaria y la G(s) es:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \text{ con } K>0 \text{ y } p>0.$$

Demarcar en el plano K=f (p), la zona que hace que se cumplan las especificaciones siguientes:

$$1. \quad t_E(2\%) \leq n \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\sigma} \leq n \quad \Rightarrow \quad |\sigma| \geq \frac{4}{n} \quad \Rightarrow \quad |\sigma| \geq a$$

$$2. \quad Mp(%) \leq 5\% \quad \Rightarrow \quad Mp_U \leq 0.05$$

$$3. \quad \text{Que } \delta < 1. -$$

Para que se cumpla la 2. :

$$\text{Como } \delta \geq \sqrt{\frac{(\ln Mp_U)^2}{\pi^2 + (\ln Mp_U)^2}} \Rightarrow \delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0.05)^2}{\pi^2 + (\ln 0.05)^2}} \Rightarrow \delta \geq 0.69$$

Se puede tomar como rango posible para δ , para que se cumplan 2. y 3. el siguiente:

$$0.707 \leq \delta < 1 .-$$

En este caso como, $s=s_1-a$, con $a>0$, la ecuación característica es:

$$s(s+p)+K=0 \Rightarrow s^2 + ps + K = 0$$

Reemplazando $s=s_1-a$, nos queda:

$$(s_1 - a)^2 + p(s_1 - a) + K = 0, \text{ operando:}$$

$$s_1^2 + (p - 2a)s_1 + (a^2 - pa + K) = 0$$

Para que se cumpla la 1., deberá ser:

$$p - 2a > 0 \Rightarrow p > 2a, (1), \text{ la recta vertical mostrada en la figura 27.}$$

y $(a^2 - pa + K) > 0 \Rightarrow K > -a^2 + pa, (2)$, una recta con pendiente a , y ordenada al origen $-a^2$, figura 27.-

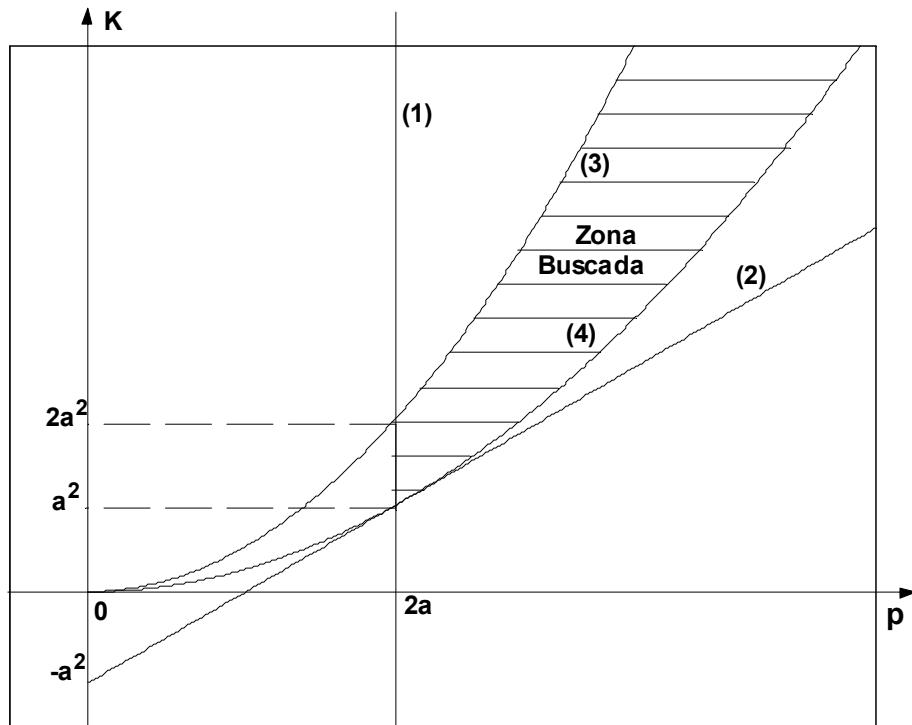


Figura 27

Para que se cumpla la 2:

En general la ecuación característica es: $s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

Como la del sistema es: $s^2 + ps + K = 0$

En consecuencia:

$$\begin{cases} p = 2\delta\omega_n \\ K = \omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} p &= 2\delta\sqrt{K} \\ \omega_n &\sqrt{K} \end{aligned} \Rightarrow \delta = \frac{p}{2\sqrt{K}}$$

$$\text{Como se requiere: } \frac{p}{2\sqrt{K}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow K \leq \frac{1}{2} p^2 \quad (3)$$

Para la 3:

$$\frac{p}{2\sqrt{K}} < 1 \Rightarrow p < 2\sqrt{K} \Rightarrow K < \frac{1}{4} p^2 \quad (4)$$

En consecuencia la zona en donde se cumplen todas las especificaciones de funcionamiento del sistema de control es la marcada en la figura 28.-

CONTROL II

Tema:

CRITERIO DE ESTABILIDAD

DE NYQUIST

Prof. Ing. Carlos F. Martín

Año: 2009

Introducción:

El criterio de Nyquist es un método gráfico analítico que determina la estabilidad de un sistema en lazo cerrado, al investigar las propiedades de la traza de Nyquist en el dominio de la frecuencia de la función de transferencia del lazo $L(s)$. Específicamente, la traza de Nyquist de $L(s)$ es una gráfica de $L(jw)$ en coordenadas polares, o sea, $\text{Im}[L(jw)]$ en función de $\text{Re}[L(jw)]$ cuando la frecuencia w varía desde infinito a cero.

Este es otro ejemplo de la utilización de las propiedades de la función de transferencia del lazo para encontrar el desempeño del sistema en lazo cerrado.

El criterio de Nyquist tiene las características siguientes que lo hacen un método alternativo atractivo para el análisis y diseño de los sistemas de control.

1. Además de proveer la estabilidad absoluta, como el criterio de Routh-Hurwitz, también de información sobre la estabilidad relativa de un sistema estable y el grado de inestabilidad de un sistema inestable. También da una indicación de cómo se puede mejorar la estabilidad del sistema, si es necesario.
2. La traza de Nyquist de $L(s)$ es muy fácil de obtener, específicamente utilizando una computadora, o a falta de ella con la ayuda de un bosquejo del diagrama de Bode de $L(jw)$, sobre todo de la fase.
3. La traza de Nyquist de $L(jw)$ de información tales como, máximo de resonancia M_R , frecuencia de resonancia W_R , ancho de banda W_{A-B} y otras, del sistema en lazo cerrado, con mucha facilidad.
4. La traza de Nyquist es útil para sistemas con retardos de transporte que no se pueden tratar con el criterio de Routh, y que son difíciles de analizar por cualquier otro método, como por ejemplo con la técnica del lugar de las raíces de la ecuación característica.

Problema de Estabilidad:

El criterio de Nyquist representa un método para determinar la localización de las raíces de la ecuación característica con respecto a los semiplanos izquierdo y derecho del plano s . A diferencia del método del lugar de las raíces, el criterio de Nyquist no da la localización exacta de dichas raíces.

Definiciones de Rodeado e Incluido:

Ya que el criterio de Nyquist es un método gráfico analítico, se necesita establecer los conceptos de rodeado e incluido, los cuales son útiles para la interpretación de las trazas de Nyquist para la estabilidad.

Rodeo o Encierro:

Un punto o una región en un plano de una función compleja se dice que

está rodeado o encerrado por una trayectoria cerrada si está dentro de la misma. Por ejemplo el punto A de la figura 1 está rodeado por la trayectoria γ , ya que A está *dentro* de la trayectoria cerrada.

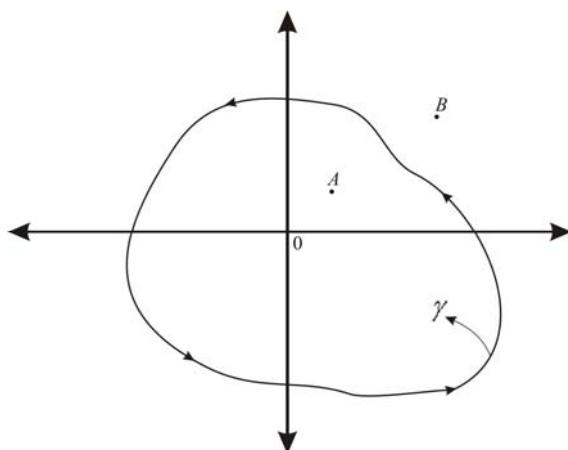


Figura 1:

El punto B no está rodeado por γ , ya que está *fueras* de γ . Además cuando γ tiene una dirección asignada a ella, el rodeo o encierro, si se hace, puede hacerse en el sentido de las manecillas del reloj (SMR) o en sentido contrario (SCMR). Como muestra la figura 1, el punto A está rodeado por γ en dirección SCMR. Se puede decir que la región *dentro* de γ está rodeada o encerrada en la dirección prescripta, y la región *fueras* de γ no está rodeada.

Inclusión:

Un punto o región se dice que está incluido o comprendido por una trayectoria cerrada si esta rodeado en la dirección (SCMR), o el punto o región esta a la izquierda de γ cuando esta se recorre en la dirección prescripta. El concepto de inclusión es particularmente útil si solo una porción de la traza es dibujada. Por ejemplo, las regiones sombreadas en la figura 2, están consideradas como incluidas por la trayectoria cerrada.

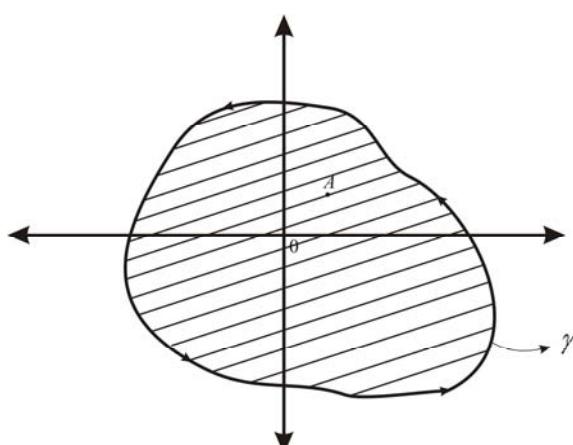


Figura 2a

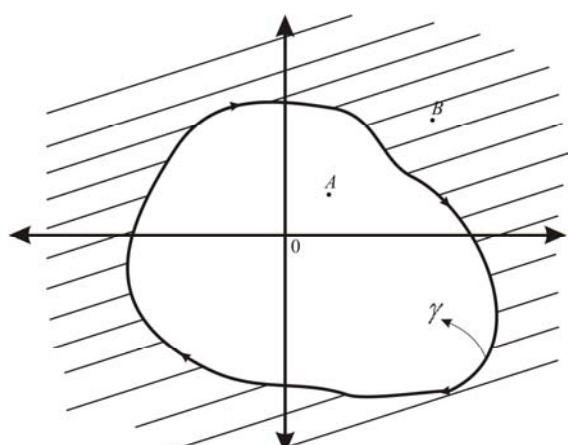


Figura 2b

En otras palabras, el punto A de la figura 2a, está incluido por γ , pero el A en la figura 2b no lo está. Sin embargo, el punto B y todos los puntos de la región sombreada fuera de γ en la figura 2b, están incluidos.

Número de Rodeos o Inclusiones:

Cuando un punto está rodeado por una trayectoria cerrada γ , un número N se puede asignar al número de veces que el mismo está encerrado o rodeado. La magnitud de N se puede determinar al dibujar una flecha desde el punto a cualquier punto arbitrario s_1 sobre la trayectoria cerrada γ y entonces hacer que s_1 siga la trayectoria en la dirección prescripta hasta que regrese al punto inicial. El número neto de vueltas realizadas por esta flecha es N, o el ángulo neto girado por la misma de $360xN$ grados. Por ejemplo, el punto A en la figura 3a está rodeado una vez o 360° por γ y el punto B esta rodeado dos veces o 720° , todos en la dirección SMR.

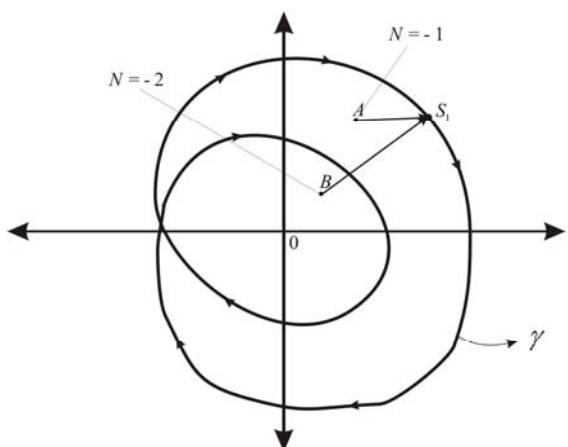


Figura 3a

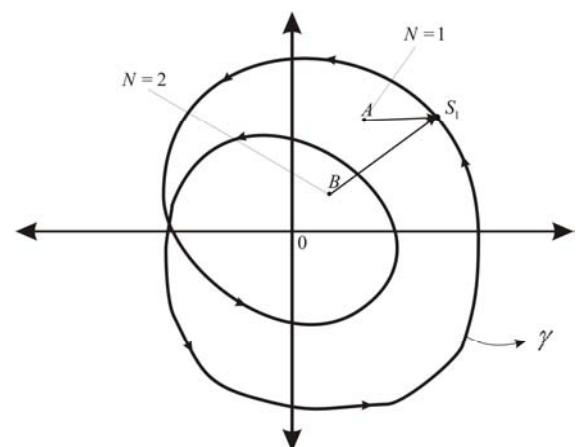


Figura 3b

En la figura 3b, el punto A está rodeado una vez y el B dos veces por γ . Por definición, N es positivo para rodeos en el SCMR y negativo para rodeos en el SMR. Una forma conveniente y práctica de determinar N con respecto a cualquier punto del plano complejo, es dibujar una línea desde el punto en cuestión en cualquier dirección a un punto tan lejos como sea necesario, el número neto de intersecciones de esta línea con el lugar geométrico γ nos dará la magnitud y el signo de N. En la figura 3a para los puntos A y B, N=-1 y N=-2 respectivamente. En la figura 3b para el punto A, N=1 y para el B, N=2.-

Teorema de Cauchy, (Principio del Argumento)

Ya se demostró que en un sistema estable ninguna de las raíces de la ecuación característica:

$$F(s)=1+L(s)=0 \quad (1)$$

Puede estar en el semiplano s positivo o sobre el eje jw.

Suponiendo que:

$$L(s) = G(s)H(s) = K_1 \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \times K_2 \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = K_1 K_2 \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} = K \frac{N(s)}{D(s)} . \text{ Por lo tanto:}$$

$$F(s) = 1 + \frac{KN(s)}{D(s)} \Rightarrow F(s) = \frac{D(s) + KN(s)}{D(s)} \quad (2)$$

Puede redactarse la condición de estabilidad así:

En un sistema estable ninguno de los ceros de $F(s)$ puede estar en el semiplano s positivo o en el eje imaginario. Como se aprecia los polos de la función de transferencia del lazo $L(s)$ son también los polos de $F(s)$. Como se verá el criterio de estabilidad de Nyquist relaciona el número de ceros y de polos de $F(s)$ que están ubicados en el semiplano derecho del plano s , con la condición de estabilidad del sistema.

Como ya se sabe, debido a la naturaleza física de los sistemas realimentados de control, el orden del denominador $D(s)$, es igual o mayor que el orden del numerador $N_1(s)N_2(s)$ de la función de transferencia del lazo $L(s)$. Matemáticamente, esto significa que $\lim_{s \rightarrow \infty} L(s) = 0$ o una constante.

La demostración matemática del criterio de Nyquist requiere el empleo de la teoría de funciones de variable compleja. No es propósito de este texto la explicación rigurosa del mismo. Afortunadamente, el resultado de la teoría es muy sencillo y de fácil aplicación.

Se presentará aquí una explicación cualitativa y para aquellos casos en que $F(s)$ sea una fracción racional. La función $F(s)$ está dada por la ecuación (2) y racionalizada y factorizada toma la forma:

$$F(s) = \frac{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) \dots (s - \lambda_n)}{(s - P_1)(s - P_2)(s - P_3) \dots (s - P_n)} \quad (3)$$

En la que:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, son los ceros y $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, los polos de la misma.

El módulo y la fase serán:

$$|F(s)| = \frac{|(s - \lambda_1)| |(s - \lambda_2)| \dots |(s - \lambda_n)|}{|(s - P_1)| |(s - P_2)| \dots |(s - P_n)|} \quad (4)$$

$$\angle F(s) = \sum_{j=1}^n \angle(s - \lambda_j) - \sum_{j=1}^n \angle(s - P_j)$$

En la figura 4, se han dibujado arbitrariamente en el plano s los polos y ceros de la función $F(s)$, se a supuesto $n=6$.

También se dibuja una curva γ_s cerrada, arbitraria en el semiplano s positivo que rodea a los ceros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_5 , así como los polos P_5 y P_6 .

Desde todos los polos y ceros se trazan segmentos dirigidos hasta un punto s_1 de coordenadas $s = \sigma + j\omega$. Las longitudes de estos segmentos dirigidos vienen dadas por: $|s_1 - \lambda_1|, |s_1 - \lambda_2|, \dots, |s_1 - P_1|$, ect.

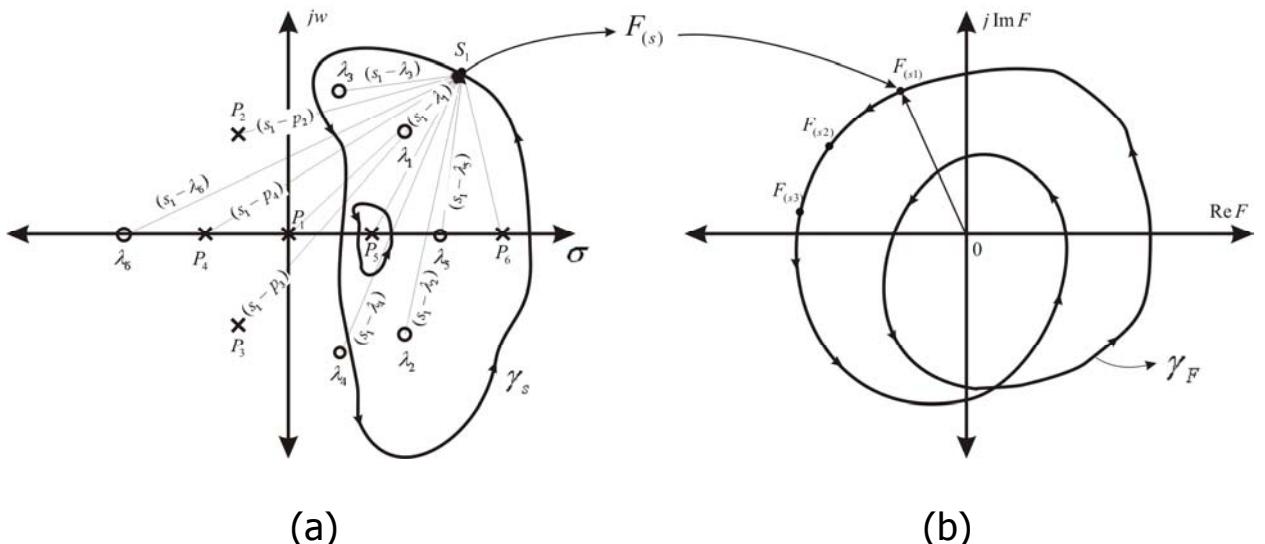


Figura 4

Al moverse el punto s_1 de la curva γ_s en la dirección contraria a las manecillas del reloj, (SCMR), cada segmento dirigido desde un polo o cero rodeado por γ_s girará un ángulo neto de 360° . Como la rotación angular debida a los polos se aplica al denominador de la $F(s)$, la rotación angular neta que sufre la ecuación (3) debe ser igual, a la rotación neta debida a los ceros rodeados por γ_s *menos* la rotación neta debida a los polos rodeados por γ_s . En otras palabras, la rotación angular neta experimentada por el vector $F(s)$ será:

$$4(360^\circ) - 2(360^\circ) = (4-2)(360^\circ) = 2(360^\circ) = 720^\circ$$

Como es fácil entender para cualquier contorno cerrado γ_s que pueda elegirse en el semiplano s positivo, todos los polos y ceros exteriores, (no rodeados), al contorno contribuirán con una rotación neta de 0° para $F(s)$, al desplazarse el punto s_1 sobre el contorno en un recorrido completo. Por tanto, en este caso puede establecerse que el número total de rotaciones netas N que experimenta el vector $F(s)$ debidas al movimiento en SMCR del punto s_1 en una vuelta completa al contorno cerrado γ_s es de $+2$, es decir, en general:

$$N = (Z - P) \quad \Rightarrow \quad Z = P + N$$

donde: Z : Número de ceros de $F(s)$ rodeados por la trayectoria cerrada γ_s en el plano s .

P : Número de polos de $F(s)$ rodeados por la trayectoria cerrada γ_s en el plano s .

Si N es positivo, ($Z > P$), la rotación neta es en sentido antihorario, SCMR.

Si N es negativo, ($Z < P$), la rotación neta es en sentido horario, SMR.

Si N es cero, ($Z = P$), la rotación neta es nula.

Nótese que en este caso si el contorno γ_s rodea solo el polo P_s , $F(s)$ sufrirá una rotación, ($N = -1$), en el SMR, en tanto s_1 se mueva a lo largo del contorno cerrado γ_s en el SCMR.

Trayectoria de Nyquist

Nyquist consideró a γ_s tal que encierre a todo el semiplano s positivo, rodeando e incluyendo con ello a todos los ceros y polos de $F(s)$ que tengan la parte real positiva. Según la teoría de funciones de variable compleja, necesaria para obtener esta generalización, es preciso que el contorno cerrado γ_s no pase sobre ningún cero o polo de $F(s)$. Por lo tanto la trayectoria de Nyquist es la indicada en la figura 5.

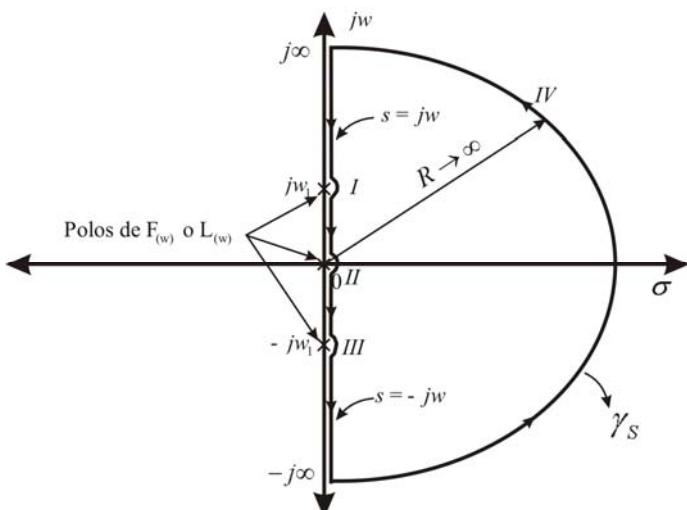


Figura 5

Esta trayectoria γ_s se selecciona para el criterio de Nyquist en el SCMR ya que en matemáticas el SCMR es tradicionalmente definido para el sentido positivo.

Se puede elegir en el SMR y en este caso se tendrá que:

$$N = P - Z \quad \Rightarrow \quad Z = P - N$$

Criterio de Estabilidad y la Trazada de L(s)

En principio, una vez que se especifica la trayectoria de Nyquist, la estabilidad del sistema se puede determinar al graficar el lugar geométrico de $F(s) = 1 + L(s)$ cuando s toma valores a lo largo de la trayectoria de Nyquist, e investigar el comportamiento de la traza de $F(s)$ con respecto al *punto critico*, que en este caso es el origen del plano $F(s)$.

Ya que la función $L(s)$ es la conocida, se puede decir:

Como es más fácil construir la traza de $L(s)$ que corresponde a la trayectoria de Nyquist, la misma conclusión sobre la estabilidad del sistema se puede obtener al observar el comportamiento de la traza de $L(s)$ con respecto al punto $(-1, j0)$ en el plano $L(s)$.

Esto es cierto pues el origen del plano $F(s) = 1 + L(s)$ corresponde al punto $(-1, j0)$ en el plano $L(s)$. Por tanto el punto $(-1, j0)$ en el plano $L(s)$ será el *punto crítico* para determinar la estabilidad del sistema, como lo indican las figuras 6a y 6b.

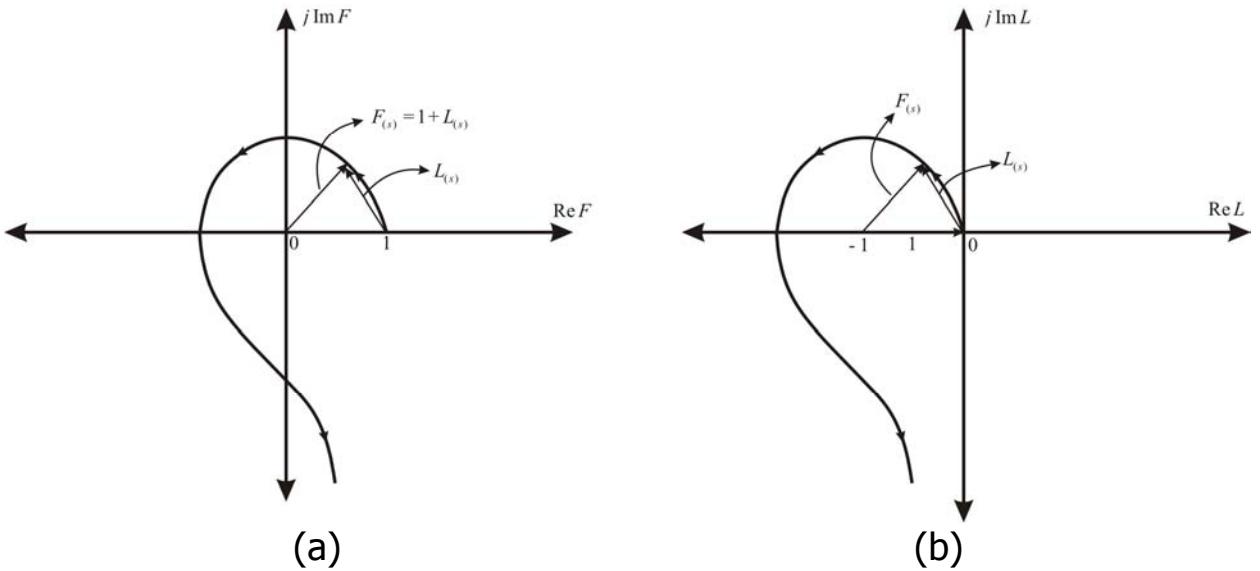


Figura 6

Este criterio es otro ejemplo de utilizar las propiedades de la función de transferencia del lazo $L(s)$ para encontrar el comportamiento del sistema de control de lazo cerrado.

En consecuencia una vez determinado P , (ya sea por simple inspección de $L(s)$ o aplicando el criterio de Routh a su denominador, P será el número de cambios de signo de la primera columna), y N , (siempre será un número *entero* positivo o negativo), se aplicara:

$$Z = P + N$$

Si $Z = 0$, el sistema será estable, de otra manera será inestable.

Por lo tanto en un sistema estable el criterio de Nyquist se puede expresar:
 $N = -P$, esto es:

Para que un sistema sea estable, la traza de $L(s)$ deberá rodear al punto critico $(-1, j0)$ un número de veces igual a la cantidad de polos de $L(s)$ que están en el semiplano derecho del plano s , y los rodeos, si los hay, deben ser hechos en dirección SMR, (si γ_s está definida en sentido SCMR).

Criterio de Nyquist para Sistemas con $L(s)$ de Fase Mínima

Resumiendo, la propiedad más importante de una función de transferencia de fase mínima es la siguiente:

La misma no tiene polos o ceros en el semiplano derecho del plano s o sobre el eje jw, excepto en el origen del plano s, (integradores).-

Ya que la mayoría de los sistemas cumplen con esta propiedad, será prudente investigar la aplicación del criterio de Nyquist a esta clase de sistemas. Cuando $L(s)$ es de fase mínima, deberá ser $P = 0$, (los polos de $F(s)$ son los mismos). Por tanto el criterio de Nyquist se reducirá a:

$$N = Z$$

Si el sistema es estable: $N = 0$

Por tanto, el criterio de Nyquist se puede enunciar como:

Para un sistema con una $L(s)$ de fase mínima, el mismo será estable si la traza de $L(s)$ que corresponde a la trayectoria de Nyquist *no rodea* en forma neta al punto crítico $(-1, j0)$ en el plano L(s).

Si el sistema fuera inestable $Z > 0$, por ende $N > 0$ y el punto crítico estaría rodeado en forma neta en dirección SCMR.

Ya que la región que está *incluida o comprendida* por la trayectoria de Nyquist es definida por la que está a la izquierda cuando la trayectoria γ_s se recorre en el SCMR, el criterio de Nyquist se puede simplemente verificar al graficar el segmento de $L(jw)$ desde $\omega = \infty$ a 0, (los puntos sobre el eje jw positivo). Esto simplifica el procedimiento de forma considerable, ya que la traza se puede hacer fácilmente por ejemplo con una computadora. El único inconveniente de este método es que la traza que corresponde al eje jw dice solo si el punto crítico está incluido o no, y si lo está no dice cuantas veces. Por lo tanto, si el sistema es inestable, $Z \neq 0$, este procedimiento no nos da el valor de Z. Sin embargo en la práctica esta información no es vital.

De acá en mas se definirá la traza de $L(jw)$ que corresponde al eje jw positivo en el plano s como la *Traza de Nyquist de $L(s)$* , (o la respuesta frecuencial del lazo en forma polar).-

Se verán algunos ejemplos simples de aplicación del criterio de Nyquist.

Ejemplo A:

Sea la función de transferencia del lazo de un sistema de control la siguiente:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Determinar aplicando Nyquist el rango del parámetro K dentro del cual el sistema es estable. En el rango de inestabilidad del mismo averiguar el número de raíces de la ecuación característica en el semiplano derecho del plano s.

$$\text{Llamaremos } Ko = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) = \frac{K}{2} \quad \text{y como } n > w, \quad F(s) = \frac{1(s^3 + 3s^2 + 2s + K)}{s(s+1)(s+2)}$$

En la figura 7, se muestran los diagramas de Bode y Nyquist.

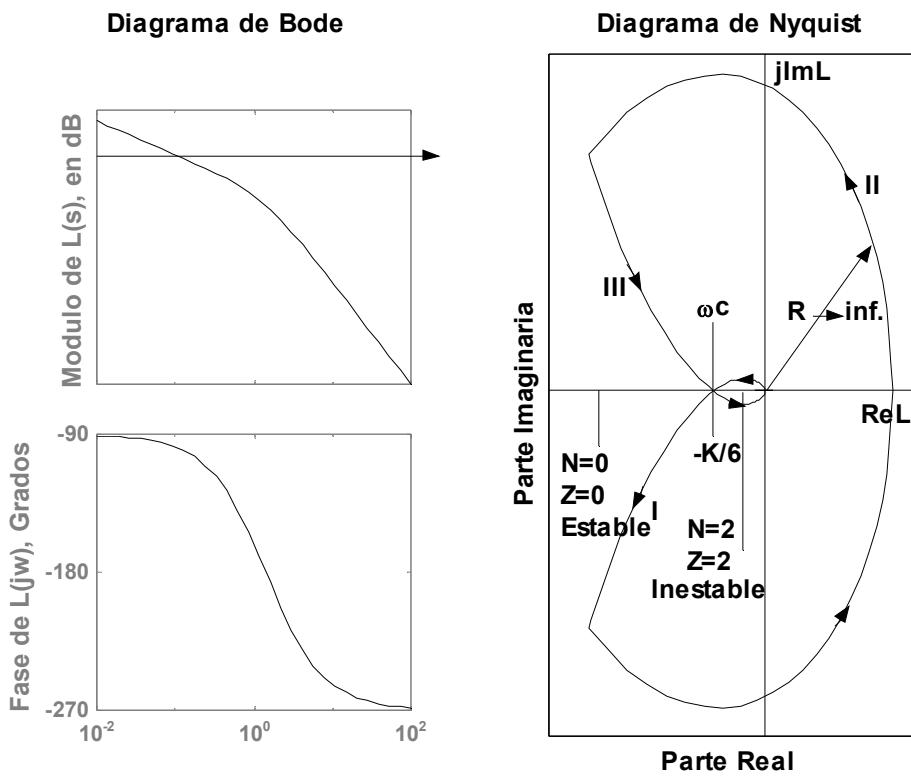


Figura 7

Como se aprecia en la figura 7, se ve que el sistema será estable si; $K > 0$ y $L(j\omega_c) > -1$. La ω_c se determinara de: Parte Imaginaria de $[L(j\omega)] = 0$.

$$L(j\omega_c) = K \frac{1+j0}{-e\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)} \quad P.I. = 0 \quad \text{si} \quad \rightarrow \quad 2 - \omega_c^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_c = \sqrt{2} \text{ rad/seg.}$$

$$L(j\omega_c) = K \frac{1}{-3\omega_c^2} = \frac{-K}{6} > -1 \quad \rightarrow \quad \frac{K}{6} < 1 \quad \Rightarrow \quad K < 6$$

Por lo tanto el rango pedido de K será:

$$0 < K < 6$$

Si $K = 6$, el sistema será marginalmente estable.-

Si $K > 6$ el sistema será Inestable y $Z = N = 2$.-

Ejemplo B:

Sea la función de transferencia del lazo de un sistema de control la siguiente:

$$L(s) = \frac{K(s+1)(s+2)}{s(s+4)} \quad \text{para } K > 0.$$

Determinar aplicando Nyquist el rango del parámetro K dentro del cual el sistema es estable. En el rango de inestabilidad del mismo averiguar el número de raíces de la ecuación característica en el semiplano derecho del plano s .

$$\text{Llamaremos } Ko = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) = \frac{K}{2} \text{ y como } n = w, \quad F(s) = \frac{(1+K)s^2 + (4+3K)s + 2K}{s(s+4)}$$

En la figura 8, se muestran los diagramas de Bode y Nyquist.

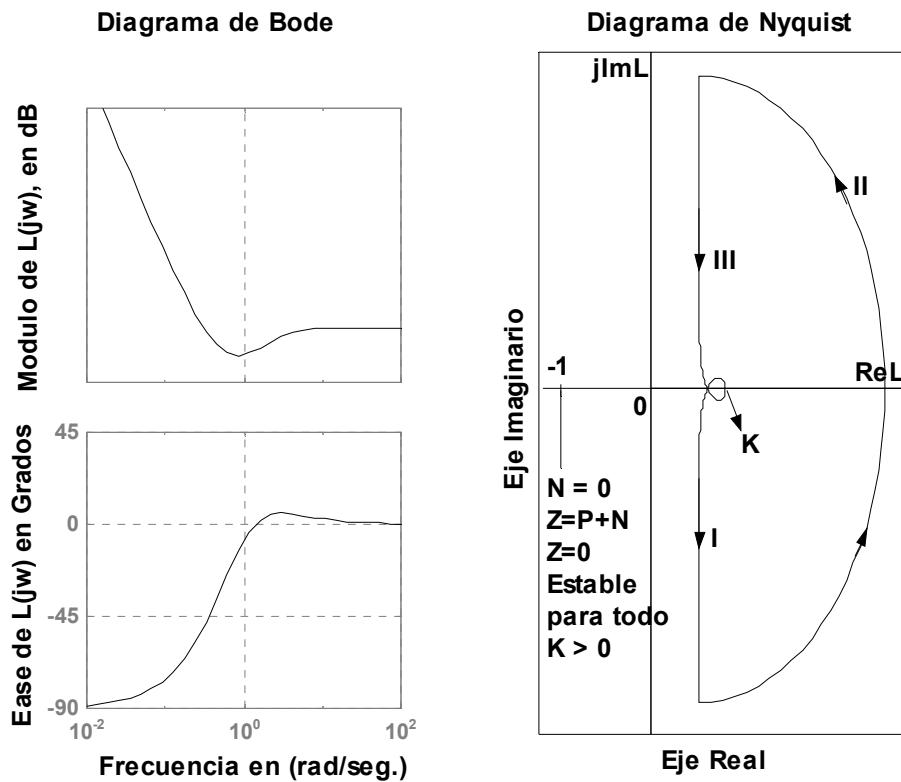


Figura 8

Como se aprecia es estable para todo $K>0$, pues $N=0 \Rightarrow Z=N=0$. También se llega a la misma conclusión al no estar incluido el punto critico por la traza de Nyquist, pues $L(s)$ es de fase mínima.

Ejemplo C:

Sea la función de transferencia del lazo de un sistema de control la siguiente:

$$L(s) = \frac{-0.5Kc}{(s+2)(s^2-s+4)} ; \text{ para } K>0$$

Determinar aplicando Nyquist el rango del parámetro K dentro del cual el sistema es estable. En el rango de inestabilidad del mismo averiguar el número de raíces de la ecuación característica en el semiplano derecho del plano s .

$$\text{En este caso } Ko = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \frac{-K}{16}$$

La figura 9 muestra los diagramas de Bode y Nyquist.

Para que el sistema sea estable, como $P=2$, N deberá ser: $N=-2$ para que $Z=0$. La figura muestra donde debe estar el punto crítico en este caso.

Entre $L(jw_c)$ y $-Kc/16$.

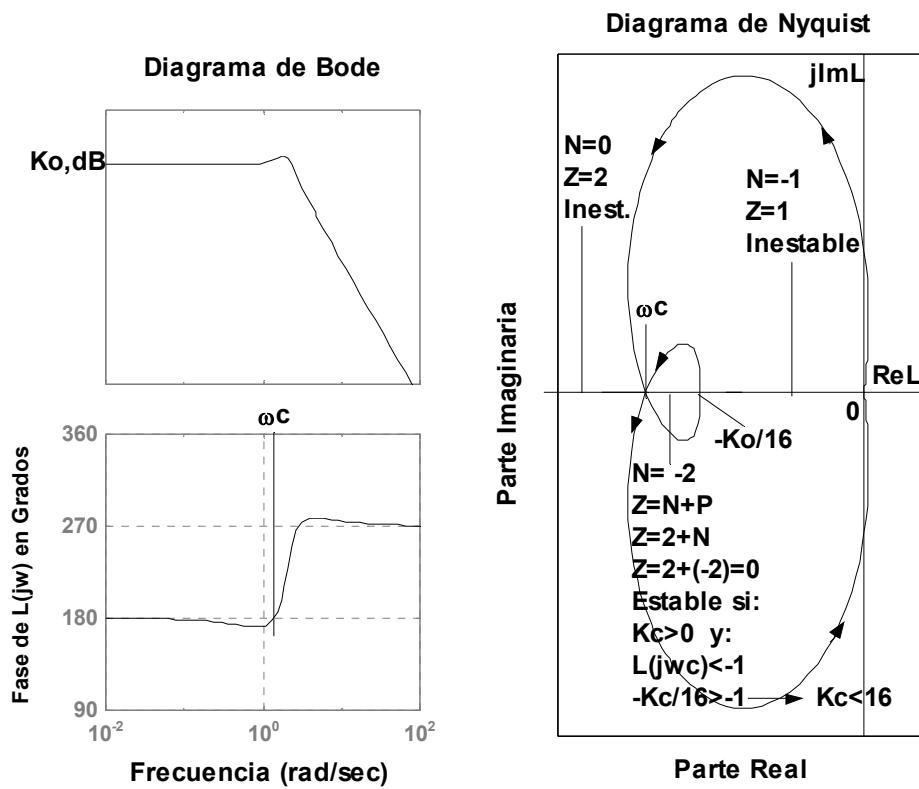


Figura 9

$$L(j\omega) = -0.5K_c \frac{1 + j0}{(8 - \omega^2) + j\omega(2 - \omega^2)}$$

Parte Imaginaria igual cero si: $2 - \omega_C^2 = 0 \Rightarrow \omega_C = \sqrt{2} \text{ rad / seg.}$

Por lo tanto como ω_C es finita y real, la traza de $L(jw)$ cruza al eje real del plano de Nyquist.

$$L(j\omega) = -0.5K_c \frac{1}{8 - \omega_C^2} = \frac{-K_c}{12} < -1 \Rightarrow K_c > 12$$

Por lo tanto el rango total de K_c para que el sistema sea estable será:

$$12 < K_c < 16$$

Para $0 < K_c < 12$, el sistema es Inestable y $Z=2$.

Para $16 < K_c < \infty$, el sistema es Inestable y $Z=1$.

Veremos a continuación que con la traza de $L(jw)$ para $w>0$, se podrá determinar si el sistema es estable. O en caso de ser inestable, solamente con $L(jw)$ sea de fase mínima o no, se podrá obtener el valor de Z .

Criterio General de Nyquist Simplificado, para Sistemas con $L(s)$ de Fase Mínima y no Mínima

Este criterio evita tener que graficar las trazas conformes de los tramos I, II y III, de la trayectoria de Nyquist y contar los rodeos del vector $F(s)$ respecto al punto critico $(-1, j0)$ del plano $L(s)$.

Este criterio utiliza solo $L(jw)$ para $Q>0$ y sin los circulitos para esquivar los polos de $L(s)$ en el eje jw si los hubiera.

El comportamiento de esta traza con respecto al punto critico (-1, j0) nos dará la condición de estabilidad del sistema de control.

Para tal propósito consideremos las dos trayectorias mostradas en la figura 10.

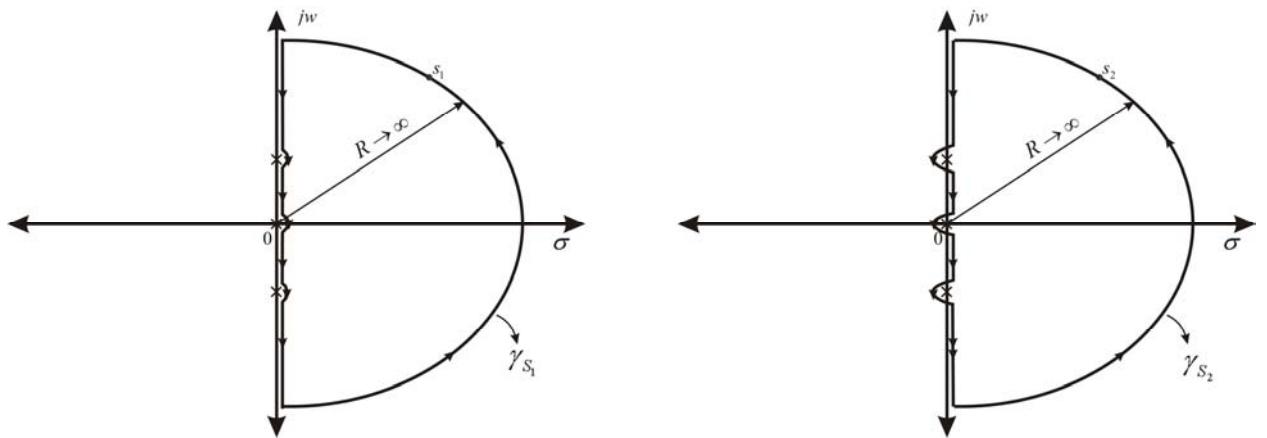


Figura 10

Es claro que la trayectoria de Nyquist γ_{S1} en la primera figura es la original ya vista, mientras que la segunda trayectoria γ_{S2} rodea o incluye no solo al semiplano derecho del plano s, sino también los polos de $F(s)$, (o de $L(s)$), sobre el eje jw , si es que existen.

Se definirán las siguientes cantidades:

Z = número de ceros de $F(s)$ que están en el semiplano derecho del plano s
 P = número de polos de $F(s)$ que están en el semiplano derecho del plano s
 P_w = número de polos de $F(s)$ que están sobre el eje jw del plano s
 incluyendo los que están en el origen del mismo.

N_1 = Número de vueltas netas del vector $F(s)$ alrededor del punto critico (-1, j0) del plano $L(s)$ cuando se recorre la traza de Nyquist correspondiente a la trayectoria γ_{S1} .

N_2 = Número de vueltas netas del vector $F(s)$ alrededor del punto critico (-1, j0) del plano $L(s)$ cuando se recorre la traza de Nyquist correspondiente a la trayectoria γ_{S2} .

Aplicando el teorema de Cauchy a ambas trayectorias se tendrá:

$$N_1 = Z - P \quad \text{y} \quad N_2 = Z - (P + P_w) = Z - P - P_w$$

En lugar de contar vueltas se podrá determinar el giro o rotación en grados del vector $F(s)$, (o sea el vector que apoyado en el punto critico (-1, j0) del plano $L(s)$), recorre los diagramas de Nyquist correspondientes. Llamando a los mismos Φ_1 y Φ_2 se tendrá:

$$\Phi_1 = N_1 \times 360^\circ = (Z - P) 360^\circ \quad (1)$$

$$\Phi_2 = N_2 \times 360^\circ = (Z - P - P_w) 360^\circ \quad (2)$$

Se considerara que cada trayectoria de Nyquist γ_{S1} y γ_{S2} está compuesta de tres porciones, a saber:

1. La porción a lo largo del eje jw , excluyendo los pequeños semicírculos.-
2. Todos los pequeños semicírculos sobre el eje jw .-
3. La porción desde $s = -j\infty$ hasta $s = +j\infty$ a lo largo del semicírculo con radio infinito.-

Ya que las trayectorias de Nyquist γ_{s1} y γ_{s2} son simétricas con respecto al eje real en el plano s , los ángulos girados por el vector $F(s)$ en los diagramas de Nyquist son idénticos para valores positivos o negativos de w . Por tanto Φ_1 y Φ_2 se podrán escribir como:

$$\Phi_1 = 2\Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{13} \quad (3)$$

$$\Phi_2 = 2\Phi_{11} - \Phi_{12} + \Phi_{13} \quad (4)$$

Donde:

Φ_{11} = Ángulo que gira el vector $F(s)$ al recorrer la traza de Nyquist con respecto al punto crítico $(-1, j0)$, correspondiente al eje jw positivo, (o al negativo) del plano s , excluyendo los pequeños semicírculos.

Φ_{12} = Ángulo que gira el vector $F(s)$ al recorrer la traza de Nyquist con respecto al punto crítico $(-1, j0)$, correspondiente a los pequeños semicírculos sobre el eje jw de la trayectoria γ_{s1} . [Como las direcciones de los pequeños semicírculos de la trayectoria γ_{s2} son opuestos a los de γ_{s1} el signo de Φ_{12} en la ecuación (4) es negativo].

Φ_{13} = Ángulo que gira el vector $F(s)$ al recorrer la traza de Nyquist con respecto al punto crítico $(-1, j0)$, correspondiente al semicírculo con radio infinito en las trayectorias de Nyquist.

Cuando $L(s)$ tiene más polos que ceros, la traza de Nyquist de $L(s)$ que corresponde al semicírculo de radio infinito, deber ser un punto sobre el eje real, (si $n = w$) ejemplo B, o una trayectoria alrededor del origen del plano $L(s)$, (si $n > w$) ejemplo A.

Por tanto, el giro Φ_{13} recorrido por el vector $F(s)$ con respecto al punto crítico $(-1, j0)$ del plano $L(s)$, (conforme de tramo IV de las trayectorias de Nyquist en el plano s), será nulo, por lo tanto $\Phi_{13} = 0^\circ$.

Ahora al sumar las ecuaciones (3) y (4) se tendrá:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 4\Phi_{11} \quad (5)$$

Reemplazando Φ_1 y Φ_2 dados por las ecuaciones (1) y (2) nos queda:

$$(Z - P)360^\circ + (Z - P - P_\sigma)360^\circ = 4\Phi_{11}$$

$$4\Phi_{11} = (2Z - 2P - P_\sigma)360^\circ$$

Por ende despejando Φ_{11} se obtendrá:

$\Phi_{11R} = (Z - P - 0.5P_\sigma)180^\circ \quad (6)$

Y también:

$$Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 0.5P_\sigma + P \quad (7)$$

La ecuación (6) establece que:

El ángulo total girado por el vector $F(s)$, en el plano $L(s)$ que corresponde a la porción del eje jw positivo del plano s , excluyendo los pequeños semicírculos, si existen, es igual a:

$[(\text{Número de ceros de } F(s) \text{ en el semiplano derecho del plano } s) - (\text{Número de polos de } L(s) \text{ en el semiplano derecho del plano } s) - (0.5 \times \text{Número de polos de } L(s) \text{ sobre el eje } jw \text{ del plano } s)] \times 180^\circ.$

Por lo tanto, el *criterio de estabilidad de Nyquist se puede llevar a cabo sólo mediante la construcción de la traza de Nyquist que corresponde a la porción desde $s = j\infty$ hasta $s = 0$ de la trayectoria de Nyquist.*

Aún más, si el sistema es inestable, al conocer los valores de Φ_{11} , P_σ y P , la ecuación (7) da el número de raíces de la ecuación característica que están en el semiplano derecho del plano s .

Para que el sistema sea estable, $Z = 0$. Por tanto, este criterio de Nyquist para que el sistema sea estable establece que, el giro Φ_{11} del vector $F(s)$ con respecto al punto crítico $(-1, j0)$ del plano $L(s)$, correspondiente a la traza de Nyquist para w positivas deberá ser:

$$\Phi_{11E} = -(0.5P_\sigma + P)180^\circ \quad (8)$$

Por ende al determinar Φ_{11R} , si este valor coincide con el Φ_{11E} correspondiente el sistema será estable, de otra manera no.

Ya que P y P_w no pueden ser negativos, la ecuación (8) indica que Φ_{11E} deberá ser siempre negativo, o sea giro neto del vector $F(s)$ horarios.

También hay que tener claro que, $\Phi_{11} = -270^\circ$ no es lo mismo que $\Phi_{11} = +90^\circ$, pues son giros de $F(s)$ y no simplemente ángulos.-

Cuando el giro de $F(s)$ es positivo, corresponde a que el punto $(-1, j0)$ este incluido, por tanto la condición de que la traza de Nyquist de $L(jw)$ no incluya al punto crítico $(-1, j0)$ es una condición solo necesaria para la estabilidad del sistema con $L(s)$ de fase no mínima.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema con $L(s)$ de fase no mínima sea estable es que:

$$\Phi_{11R} < 0 \quad y \quad \Phi_{11R} \equiv \Phi_{11E}.$$

Sistemas con Funciones de Transferencia del Lazo de Fase Mínima

Si $L(s)$ es de fase no mínima, $P = 0$ y P_w indica el número de polos de $L(s)$ que están en el origen del plano s , la ecuación (6) se convierte en:

$$\Phi_{11R} = (Z - 0.5P_\sigma)180^\circ \quad (9)$$

Si el sistema es estable, $Z = 0$, y la ecuación (9) se puede colocar:

$$\Phi_{11E} = -90^\circ \times P_w$$

(10)

Ya que P_w denota el número de polos de $L(s)$ que están en el origen del plano s , se puede ver fácilmente que si el punto crítico $(-1, j0)$ no está incluido por la traza de Nyquist de $L(s)$, Φ_{11R} siempre estará dado por la ecuación (10). Por tanto, cuando $L(s)$ es de *fase mínima*, la condición de que el punto crítico $(-1, j0)$, *no este incluido* por la traza de Nyquist será una condición *necesaria y suficiente* para que el sistema sea estable.- En consecuencia si $L(s)$ es de *fase no mínima* la condición de no *inclusión del punto crítico* $(-1, j0)$ del plano $L(s)$ es solo *necesaria pero no suficiente, además, deberá cumplirse que*: $\Phi_{11R} = \Phi_{11E}$.-

Cuando se cambia el signo de la ganancia del lazo K , el punto critico será el $(+1, j0)$, pero pensado como $(-1, j0)$.-

Por ende los puntos de interés de la traza de Nyquist serán las intersecciones con el eje real del plano $L(s)$, o sea cuando la parte imaginaria de $L(jw)$ es nula:

$$\text{Im}L(jw)=0 \quad (11)$$

Con esta ecuación se determinarán las frecuencias w_c , si ellas existen, si las soluciones de la ecuación (11) son complejas significa que la traza de Nyquist no corta al eje real del plano $L(s)$.

Resumen del Procedimiento para el Análisis de Estabilidad por Nyquist

Los pasos a seguir para encontrar los rangos de estabilidad de la ganancia del lazo serán los siguientes:

1. Hacer un bosquejo de la traza de Nyquist correspondiente.
Si la función $L(s)$ es de fase mínima sin dinámica en el numerador, el bosquejo es inmediato, si no es así se puede usar previamente un esquema de Bode de $L(s)$ para tal fin. También se puede usar cualquier programa de computación, por ejemplo el Plrplot del Csad/Matlab.
2. Encontrar, si es posible, la ubicación de los puntos críticos para $K>0$ y $K<0$, en los cuales se debe cumplir que $\Phi_{11R} = \Phi_{11E}$.-
3. Si en el punto 2 se lograron ubicar donde deberían estar los puntos críticos para que el sistema sea estable, ahora se determinan la o las frecuencias w_c , empleando la ecuación (11). Recordar que esto se puede hacer en la forma siguiente:

Si $L(s) = \frac{KN(s)}{D(s)}$, se reemplaza s por jw :

$$\begin{aligned}
 L(jw) &= K \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{a(w) + jb(w)}{c(w) + jd(w)} \times \frac{c(w) - jb(w)}{c(w) - jd(w)} = \\
 &= K \frac{[a(w)c(w) + b(w)d(w)] + j[a(w)d(w) - b(w)c(w)]}{[c^2(w) + d^2(w)]}
 \end{aligned}$$

Si la parte imaginaria es nula se deberá cumplir:

$a(w)d(w) = b(w)c(w)$

(12)

Con la ecuación (12), se encuentra la/las w_c si existen.

4. Se determina el rango del parámetro variable dentro del cual el sistema será estable, usando:

$$L(j\omega_c) = K \frac{a(\omega_c)}{c(\omega_c)} \quad \text{o} \quad \text{según convenga} \quad L(j\omega_c) = K \frac{b(\omega_c)}{d(\omega_c)}$$

Estas expresiones deberán ser mayores o menores que -1, según se obtuvo en el punto 2). Operando con estas desigualdades se determinara el rango buscado.

Ejemplo 1:

Retomando el sistema del ejemplo A, se tiene que:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \text{ la traza de Nyquist era la indicada en la figura 11.}$$

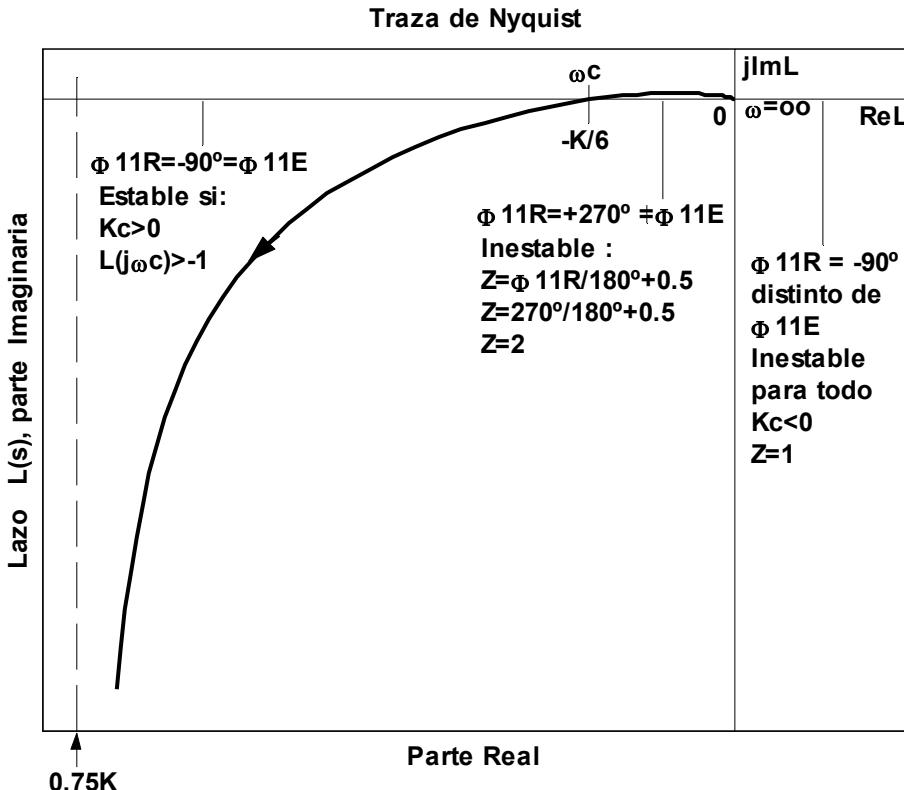


Figura 11

Como $P_w = 1$ y $P = 0$, será: $\Phi_{11E} = -90^\circ$.

Siguiendo los pasos ya indicados se determinó la ubicación del punto crítico y resultó que:

$$\omega_c = \sqrt{2} \text{ rad / seg} \quad y \quad L(j\omega_c) = \frac{-Kc}{6} > -1 \quad \Rightarrow \quad Kc < 6$$

Por ende el rango total será: $0 < Kc < 6$

En los rangos de Inestabilidad el valor de Z es:

$$\text{Si } 6 < Kc < \infty \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{270^\circ}{180^\circ} + 0.5 = 2 \quad \Rightarrow \quad Z = 2$$

$$\text{Si } -\infty < Kc < 0 \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{90^\circ}{180^\circ} + 0.5 = 1 \quad \Rightarrow \quad Z = 1$$

Como se puede apreciar los resultados son iguales a los ya obtenidos en el ejemplo A.

Cuando $\omega \rightarrow 0$, la traza es asintótica a la recta vertical de abscisa $-0.75Kc$.

$$L(j0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} Kc \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} = -0.75Kc$$

Ejemplo 2:

Para el sistema del ejemplo B se tenía:

$$L(s) = \frac{K(s+1)(s+2)}{s(s+4)}, \text{ la traza de Nyquist resultó ser la indicada en la fig. 12a:}$$

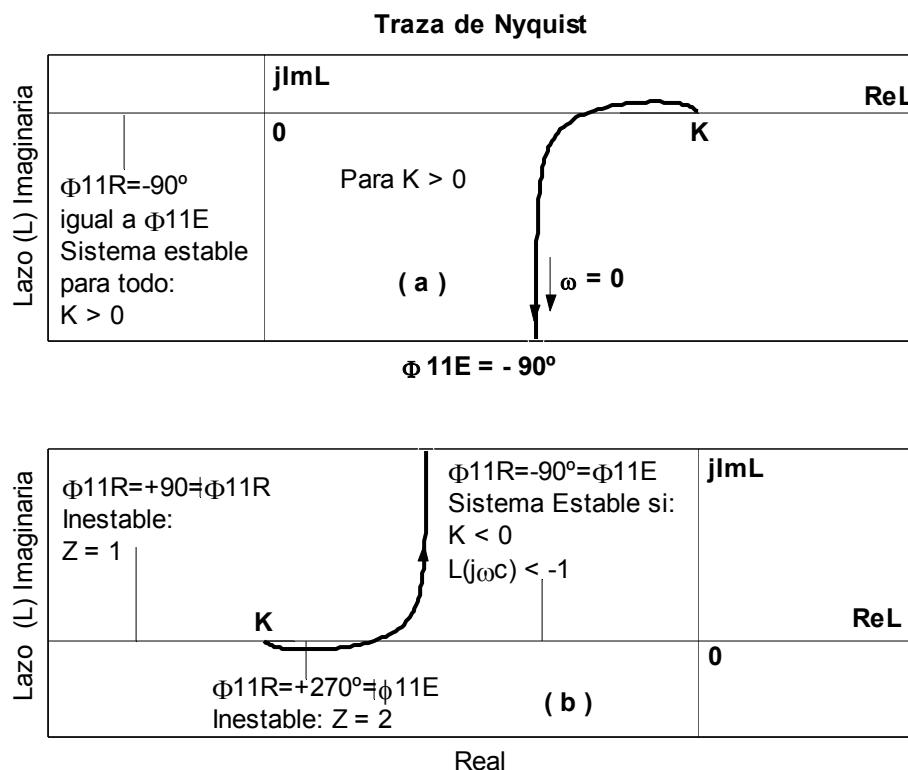


Figura 12

$$\text{Como } P_w=1 \text{ y } P=0, \text{ será: } \Phi_{11E} = -90^\circ \quad \text{y} \quad Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 0.5 =$$

Como se puede apreciar el rango de estabilidad para $K>0$ es:

$$0 < K < \infty.$$

Si $K < 0$, la traza será la indicada en la figura 12b, de la misma surge que para que el sistema sea estable se deberá cumplir que:

Si $K < 0$; $L(j\omega) < -1$.

A este mismo resultado se llegaría usando la traza de Nyquist de la figura 12a, (para $K > 0$), pero usando el punto $(+1, j0)$ pensado como $(-1, j0)$ como el punto crítico. El rango negativo de K buscado será:

$$L(j\omega) = K \frac{(2 - \omega^2) + j3\omega}{(-\omega^2) + j4\omega} \Rightarrow P.I. = 0 \text{ si } 4\omega_c(2 - \omega_c^2) = 3\omega_c(-\omega_c^2)$$

Resolviendo la última ecuación resulta:

$$\omega_c = \sqrt{8} \text{ rad/seg.}, \text{ luego se tendrá que:}$$

$$L(j\omega_c) = K \frac{3\omega_c}{4\omega_c} < -1 \Rightarrow K < -\frac{4}{3}$$

En este caso particular no hace falta calcular ω_c . En consecuencia el rango negativo del parámetro K será: $-\infty < K < -\frac{4}{3}$.

Ejemplo 3:

Para el ejemplo C, se tenía: $L(s) = \frac{-0.5Kc}{(s+2)(s^2-s+4)}$, la traza de Nyquist de la misma es la indicada en la figura 13.

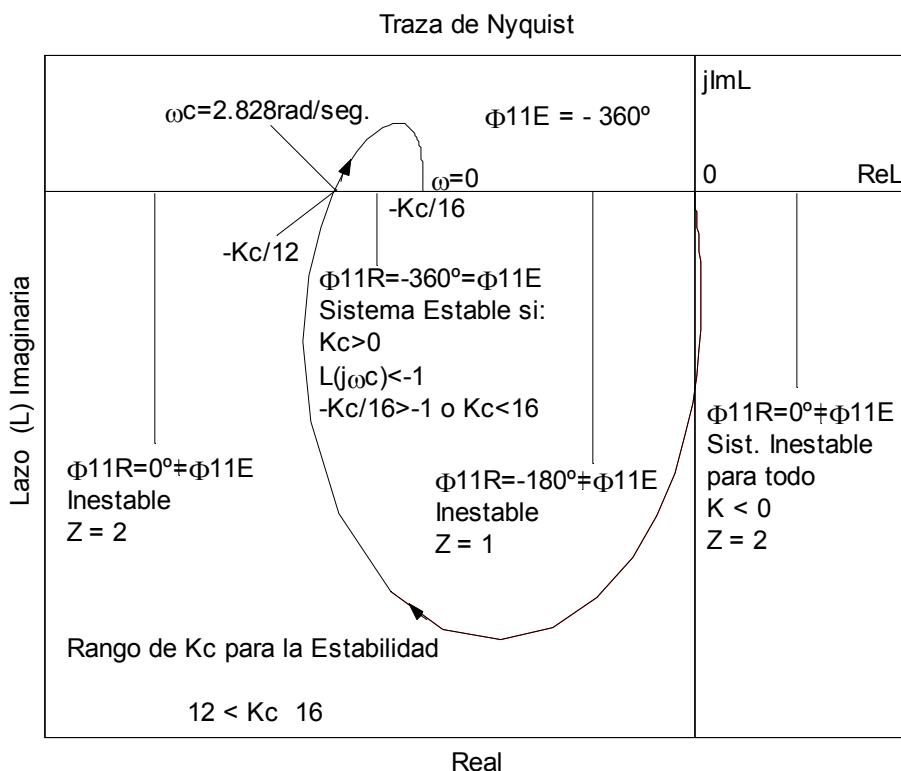


Figura 13

Como $P_w=0$ y $P=2$, será: $\Phi_{11E} = -360^\circ$. - y $Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 2$. -

Como se aprecia en la figura 13, el sistema será estable solo si:

$$\begin{cases} Kc > 0 \\ L(j\omega_c) < -1 \\ \frac{-Kc}{16} > -1 \Rightarrow Kc < 16 \end{cases}$$

En el ejemplo C se determinó que: $\omega_c = \sqrt{8} \text{ rad/seg.}$, además,

$L(j\omega_c) = \frac{-Kc}{12} < -1 \Rightarrow Kc > 12$. - por ende el rango total será:

$$12 < Kc < 16$$

El valor de Z en los rangos de Inestabilidad se indica en la figura 13.-

Ejemplo 4:

Un sistema de control tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$L(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{s(s-1)}$, el diagrama de Bode y la traza de Nyquist se indican en la figura 14.

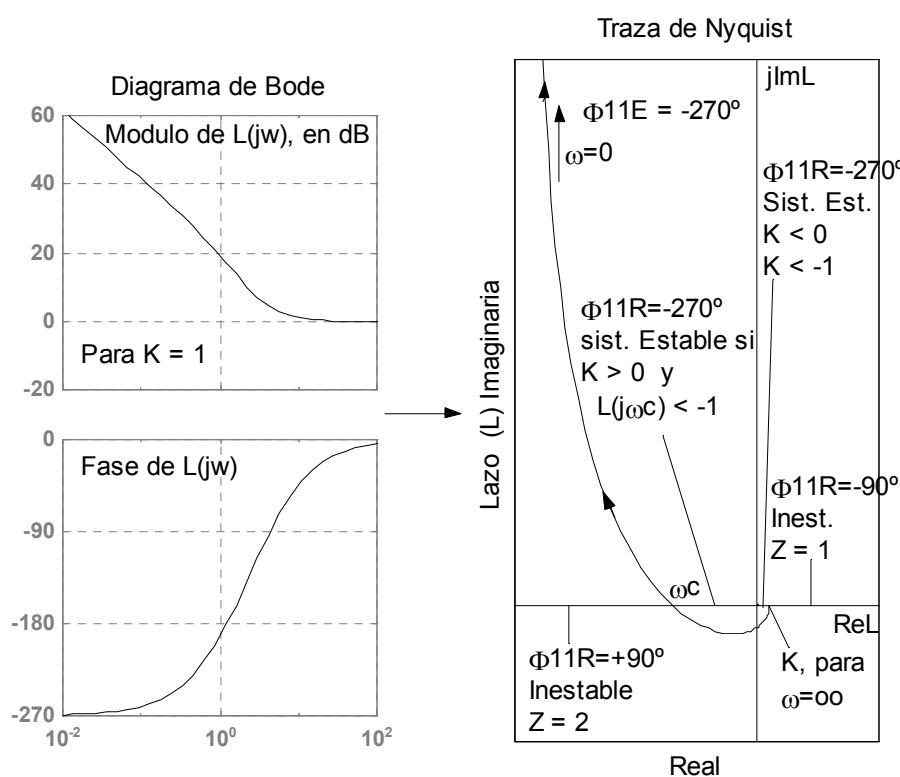


Figura 14

Como $P_w=1$ y $P=1$, será: $\Phi_{11E} = -270^\circ$. - y $Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 1.50$

Como se ve en la figura 14, el sistema será estable si se cumple que:

Para $K>0$ si: $L(j\omega_c) < -1$, y para $K<0$ si: $K < -1$.

$$L(j\omega) = K \frac{(12 - \omega^2) + j7\omega}{(-\omega^2) - j\omega} \Rightarrow P.I. = 0 \quad \text{si: } -\omega_c(12 - \omega_c^2) = -7\omega_c^3$$

Resolviendo: $\omega_c = \sqrt{1.5} \text{ rad/seg.}$

$$L(j\omega_c) = K \frac{7\omega_c}{-\omega_c} = -7K < -1 \Rightarrow 7K < 1 \Rightarrow K > \frac{1}{7}$$

Por ende los rangos en los que el sistema es estable son:

Rango negativo: $-\infty < K < -1$

Rango positivo: $\frac{1}{7} < K < \infty$.

Un grafico del movimiento de los ceros de $F(s)$ con el valor de K , (lugar de las Raíces), es el indicado por la figura 15.

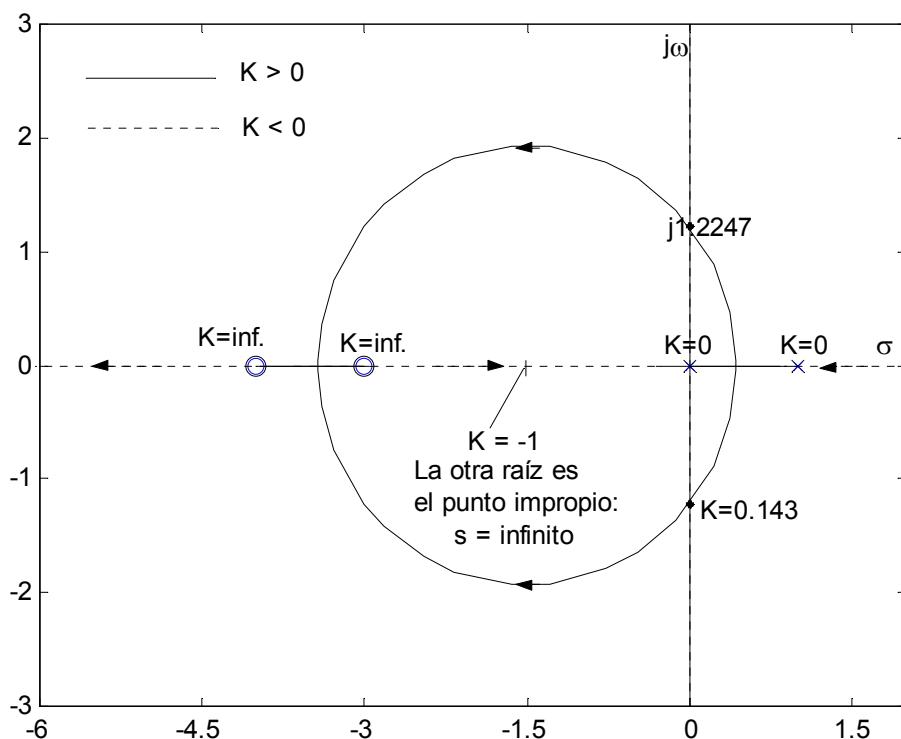


Figura 15

Ejemplo 5:

Un sistema de control tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K(s+2)(s+5)}{s(s-1)(s+10)},$$

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se indican en la figura 16.

$$\text{Como } P_w=1 \text{ y } P=1, \text{ será: } \Phi_{11E} = -270^\circ \text{ y } Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 1.50$$

Como se ve en la figura correspondiente, el sistema será estable solo para $K>0$ si se cumple que: $L(j\omega_c) < -1$.

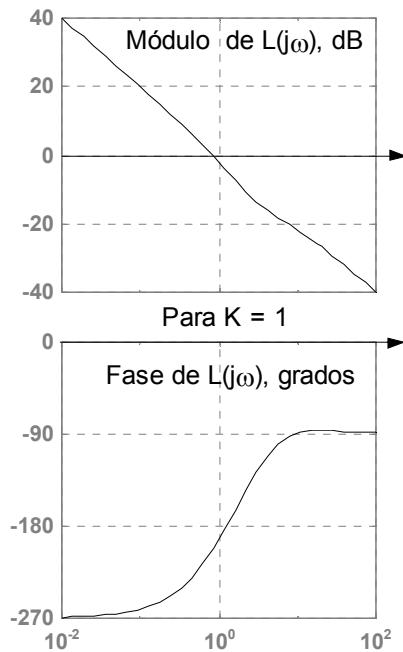
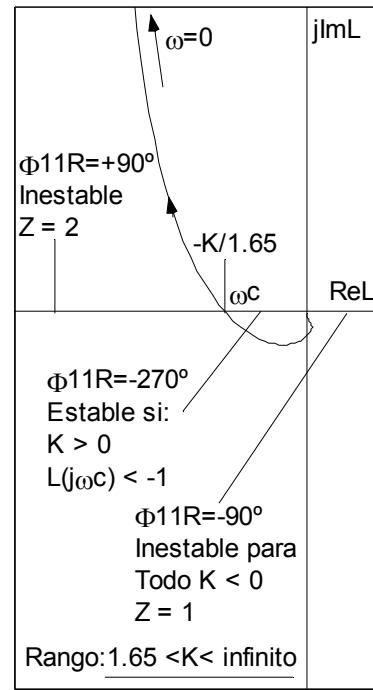
Diagrama de Bode de $L(s)$ Trazo de Nyquist de $L(s)$ 

Figura 16

$$L(j\omega) = K \frac{(10 - \omega^2) + j7\omega}{(-9\omega^2) - j\omega(10 + \omega^2)} \Rightarrow P.I. = 0 \quad \text{si: } -\omega_c(10 + \omega_c^2)(10 - \omega_c^2) = -63\omega_c^3$$

Resolviendo para ω_c : $\omega_c^4 + 63\omega_c^2 - 100 = 0$

Las raíces de la última ecuación son: $\pm j8.0343$ y ± 1.2447 , por ende la solución buscada es:

$$\omega_c = 1.2447 \text{ rar/seg.}$$

Por lo tanto:

$$L(j\omega_c) = K \frac{7\omega_c}{-\omega_c(10 + \omega_c^2)} = \frac{-K}{1.64989} \approx \frac{-K}{1.65} < -1 \Rightarrow K > 1.65$$

El rango total buscado es:

$$1.65 > K < \infty .-$$

Los valores de Z en los rangos de inestabilidad están indicados en la figura.

Para $0 < K < 1.65$ $Z = 2$.- Para $-\infty < K < 0$ $Z = 1$

Ejemplo 6:

Un sistema de control tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K(s^2 - 2s + 9)}{s(s-1)(s-5)},$$

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se indican en la figura 17.

Como $P_w=1$ y $P=2$, será: $\Phi_{11E} = -450^\circ .-$ y $Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 2.50$

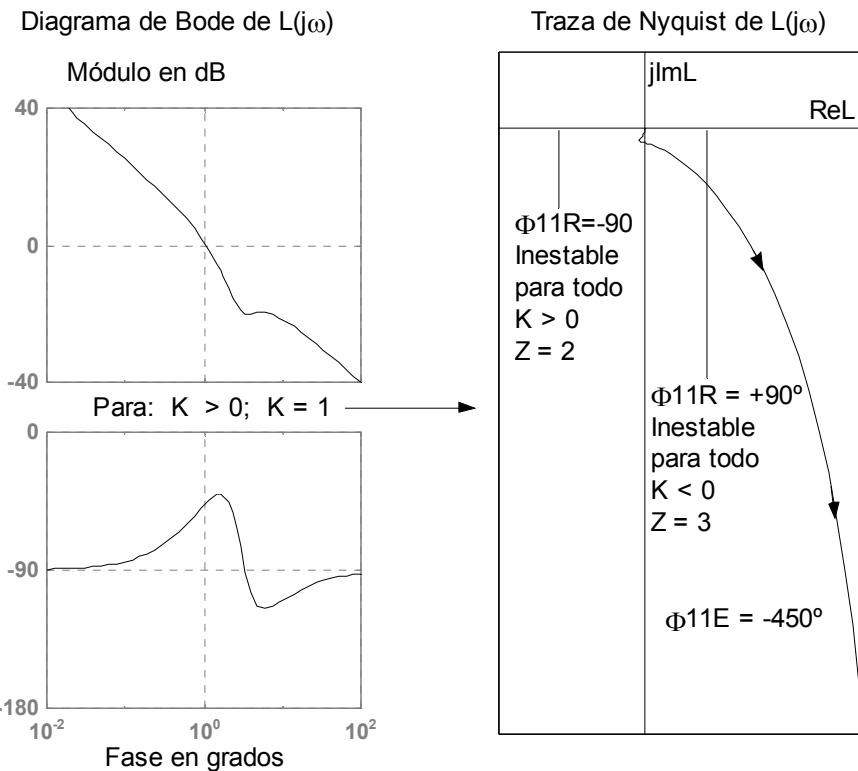


Figura 17

Como se puede apreciar para $K > 0$, el punto crítico no está incluido por la traza de Nyquist y sin embargo el sistema es inestable pues $\Phi_{11R} \neq \Phi_{11E}$.-

Para $K < 0$, también $\Phi_{11R} \neq \Phi_{11E}$, sistema inestable.-

Los valores de Z para $K > 0$: $Z = 2$.- Para $K < 0$: $Z = 3$

Ejemplo 7:

Un sistema de control tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K(s^2 - 2s + 2)}{s(s^2 - 6s + 30)},$$

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se indican en la figura 18.

$$\text{Como } P_w = 1 \text{ y } P = 2, \text{ será: } \Phi_{11E} = -450^\circ \text{. y } Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 2.50$$

Como se ve en la figura correspondiente, el sistema será estable solo para $K > 0$ si se cumple que:

$$\begin{cases} Leq(j\omega_{C2}) > -1 \\ Leq(j\omega_{C1}) < -1 \end{cases}$$

$$L(j\omega) = K \frac{(2 - \omega^2) - j2\omega}{6\omega^2 + j\omega(30 - \omega^2)}$$

P.I.=0 si:

$$(2 - \omega_C^2)\omega_C(30 - \omega_C^2) = -12\omega_C^3$$

Resolviendo para ω_c : $\omega_c^4 - 20\omega_c^2 + 60 = 0$

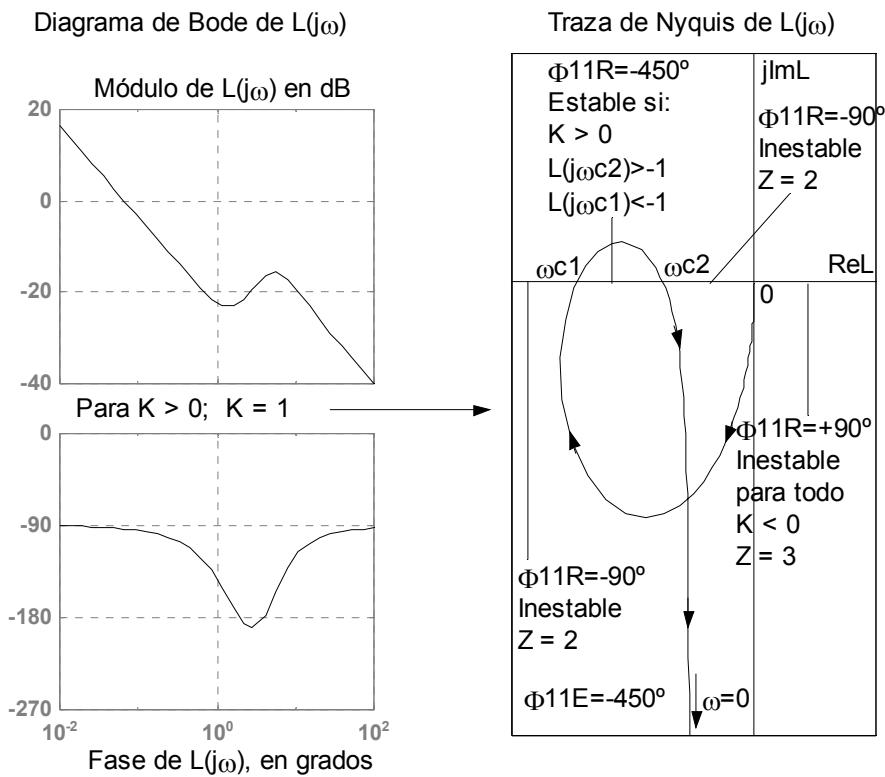


Figura 18

Las raíces de la última ecuación son: ± 4.0404 y ± 1.9171 , por ende las soluciones buscadas son:

$$\omega_{c1} = 4.0404 \text{ rad/seg} \quad y \quad \omega_{c2} = 1.9171 \text{ rad/seg..}$$

Por lo tanto:

$$L(j\omega_{c1}) = K \frac{-2}{(30 - \omega_{c1}^2)} = \frac{-K}{6.838} < -1 \Rightarrow K > 6.838$$

$$L(j\omega_{c2}) = K \frac{-2}{(30 - \omega_{c2}^2)} = \frac{-K}{13.1623} > -1 \Rightarrow K < 13.1623$$

El rango total buscado es:

$$6.838 > K < 13.1623$$

Los valores de Z en los rangos de inestabilidad están indicados en la figura.

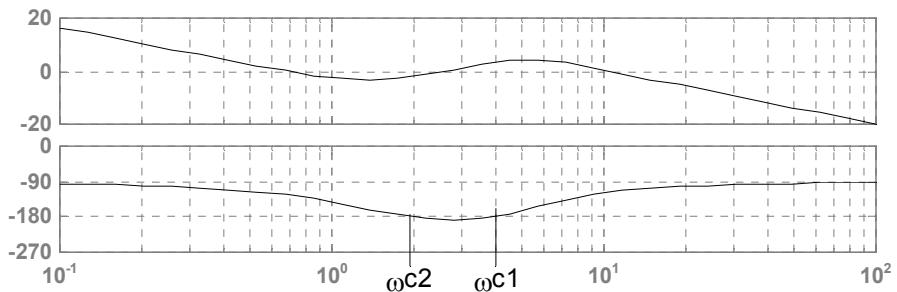
Para: $0 < K < 6.838$; $Z = 2$.-

Para: $13.1623 < K < \infty$ $Z = 2$.-

Y para $-\infty < K < 0$ $Z = 3$.-

Con la función Plrplot del Csad/Matlab se grafico la traza de Nyquist para $K=10$, la misma se muestra en la figura 19, con las conclusiones correspondientes.-

Diagrama de Bode de $L(j\omega)$; para $K = 10$



Traza de Nyquist de $L(j\omega)$, para $K = 10$

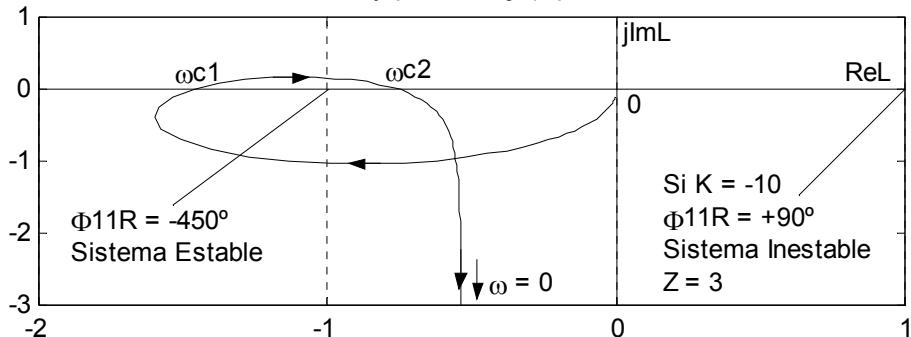


Figura 19

Función de Transferencia del Lazo Equivalente $L_{equiv.}(s)$

Cuando el parámetro variable de $L(s)$ no está en su numerador como factor multiplicativo, se puede obtener la llamada función de transferencia del lazo equivalente, $L_{equiv.}(s)$. Con ella se podrá aplicar el último criterio de Nyquist para determinar el rango del parámetro variable en cuestión, que haga el sistema estable. Se parte de la ecuación característica, luego se agrupan todos los términos que no contengan al parámetro variable $d(s)$, y en otro a los que si lo contienen, $n(s)$, si suponemos que el parámetro variable es k , se tendrá la ecuación característica:

$$d(s) + k n(s) = 0$$

Luego se divide miembro a miembro por $d(s)$ y quedará:

$$1 + k \frac{n(s)}{d(s)} = 0$$

Por ende, la $L_{equiv.}(s)$ será:

$$L_{equiv.}(s) = k \frac{n(s)}{d(s)}$$

En la misma k está como factor multiplicativo del numerador de $L_{equiv.}(s)$ y con ella se podrá aplicar el criterio de Nyquist.

Como la $L_{equiv.}(s)$, no es la función de un sistema real, puede en algunos casos ser una función impropia, (mas ceros que polos), y no se podrá aplicar el último criterio de Nyquist determinando el Φ_{11R} ya que se

requiere que la $L_{equiv}(s)$ empleada sea propia o estrictamente propia para tal fin.

Si se tiene: $1 + L_{equiv}(s) = 0$, donde $L_{equiv}(s)$ es impropia se puede escribir así:

$$\frac{1}{L_{equiv}(s)} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + [L_{equiv}(s)]^{-1} = 0$$

Ahora la $[L_{equiv}(s)]^{-1}$ será estrictamente propia y entonces se podrá aplicar el criterio de Nyquist determinando el Φ_{11R} , y comparándolo con el Φ_{11E} obtener el rango del parámetro variable para que el sistema es estable.-

Ejemplo 8:

Consideremos el sistema de posicionamiento de una carga inercial, (ya estudiado por Routh), la función de transferencia del lazo era:

$L(s) = \frac{1500\alpha(s+1/3\alpha)}{s(s+0.05)(s+10)}$. Determinar el rango del parámetro α para que el sistema sea estable.

Como α no está como factor multiplicativo en su numerador hay que determinar la $L_{equiv}(s)$, la misma será la siguiente:

$$L_{equiv}(s) = \frac{1500\alpha s}{s(s+0.05)(s+10)+500} = \frac{1500\alpha s}{s^3 + 10.05s^2 + 0.5s + 500}$$

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se muestran en la figura 20.

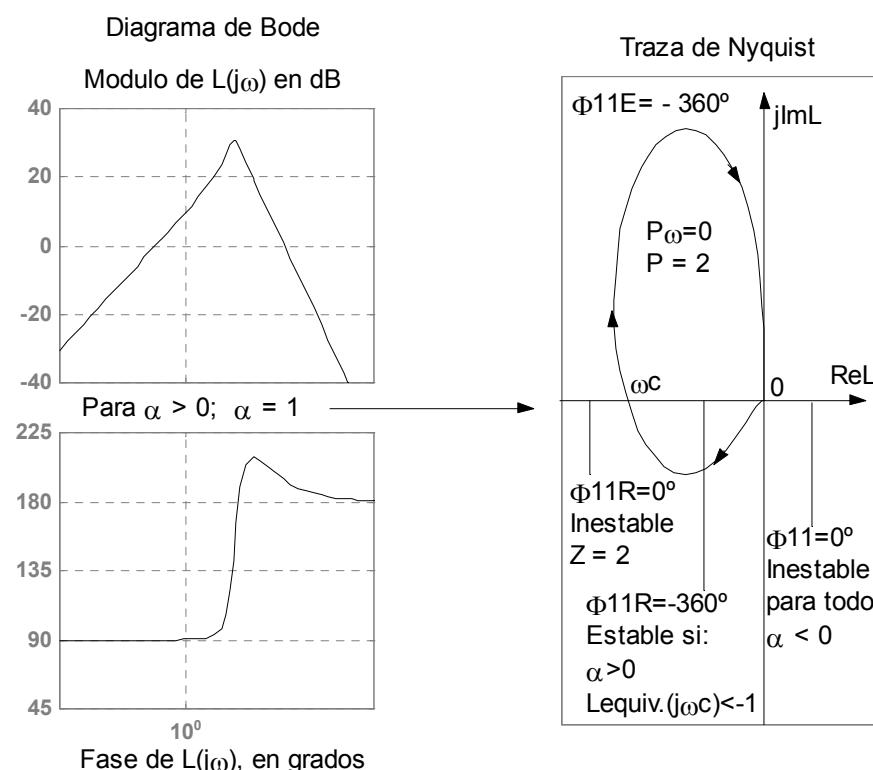


Figura 20

Como $P_w=0$ y $P=2$, será: $\Phi_{11E} = -360^\circ$. - y $Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 2$

Como se ve en la figura correspondiente, el sistema será estable solo para $\alpha > 0$ si se cumple que:

$$L_{equiv}(j\omega_C) < -1$$

$$L_{equiv}(s) = 1500 \alpha \frac{0 + j\omega}{(500 - 10.05\omega^2) + j\omega(0.5 - \omega^2)}$$

$$\text{La P.I.}=0 \text{ si } \Rightarrow 500 - 10.05\omega_C^2 = 0 \Rightarrow \omega_C \cong 7.053 \text{ rad / seg.}$$

$$L(j\omega_C) = 1500 \alpha \frac{1}{(0.5 - \omega_C^2)} = \frac{-\alpha}{0.03283} < -1 \Rightarrow \alpha > 0.03283$$

Por ende el rango práctico real de α para que el sistema sea estable será el siguiente, aunque matemáticamente pueda ser hasta infinito.-

$$0.03283 < \alpha < 1$$

Ejemplo 9:

$$\text{Un sistema tiene: } L(s) = \frac{Kc}{s[s^2 + (6 + Ka)s + (11 - Ka)]}$$

Si $Kc = 6$, determinar el rango de Ka para que el sistema sea estable, aplicando el criterio de Nyquist. La ecuación característica será:

$$s^3 + (6 + Ka)s^2 + (11 - Ka)s + Kc = 0, \text{ o también:}$$

$$[s^3 + 6s^2 + 11s + 6] + [Ka s^2 - Ka s] = 0, \text{ la } L_{equiv}(s) \text{ será: } L_{equiv}(s) = \frac{Ka s(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se muestran en la figura 21.

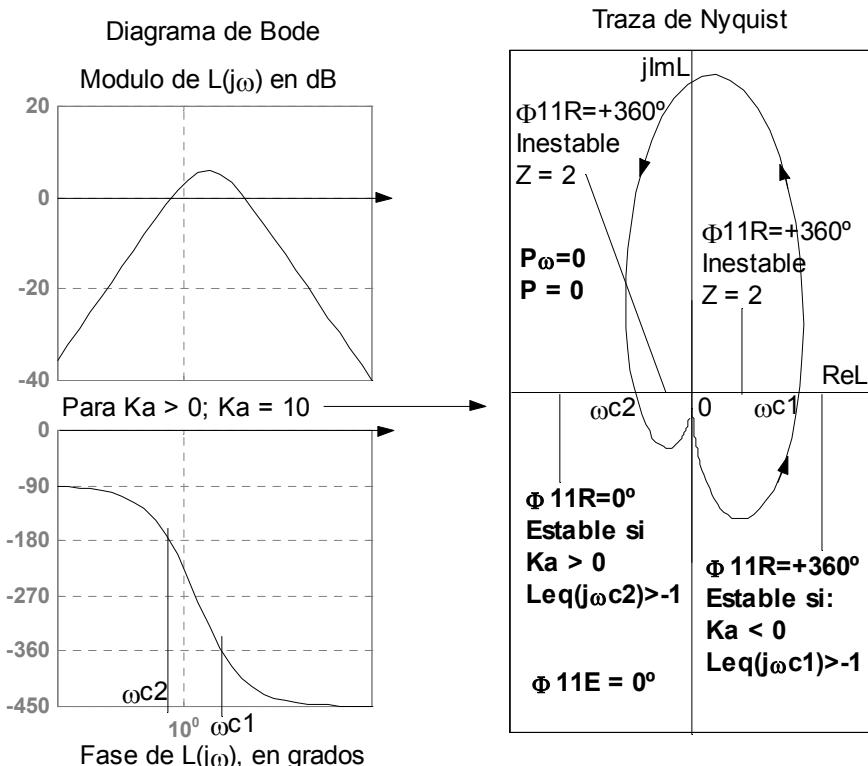


Figura 21

Como $P_w=0$ y $P=0$, será: $\Phi_{11E} = 0^\circ$. - y $Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ}$.

Como se ve en la figura correspondiente, el sistema será estable para $Ka > 0$ si se cumple que: $L_{equiv}(j\omega_{C2}) > -1$

Y para $Ka < 0$ si: $L_{equiv}(j\omega_{C1}) > -1$

En la figura también se indican los valores de Z en los rangos de inestabilidad.

$$L_{equiv}(j\omega) = Ka \frac{-\omega^2 - j\omega}{(6 - 6\omega^2) + j\omega(11 - \omega^2)}, \text{ P.I. } = 0, \text{ si } \Rightarrow -\omega_c^3(11 - \omega_c^2) = -\omega_c(6 - \omega_c^2)$$

Operando se llega a:

$\omega_c^4 - 17\omega_c^2 + 6 = 0$ las soluciones son: ± 4.0791 y ± 0.6005 , por lo tanto:
 $\omega_{C1} = 4.079 rad / seg.$ y $\omega_{C2} = 0.6005 rad / seg.$

Por lo tanto para el rango negativo de Ka , se tendrá:

$$L_{equiv}(j\omega_{C1}) = Ka \frac{-\omega_{C1}}{\omega_{C1}(11 - \omega_{C1}^2)} = \frac{Ka}{5.6394} > -1 \Rightarrow Ka > -5.6394$$

Para el rango positivo de Ka :

$$L_{equiv}(j\omega_{C2}) = Ka \frac{-\omega_{C2}}{\omega_{C2}(11 - \omega_{C2}^2)} = \frac{-Ka}{10.6394} > -1 \Rightarrow Ka < 10.6394$$

El rango total del parámetro Ka será: $-5.6394 < Ka < 10.6394$

Usando Plrplot del Csad para $Ka=8$ se muestra la traza en la figura 22.

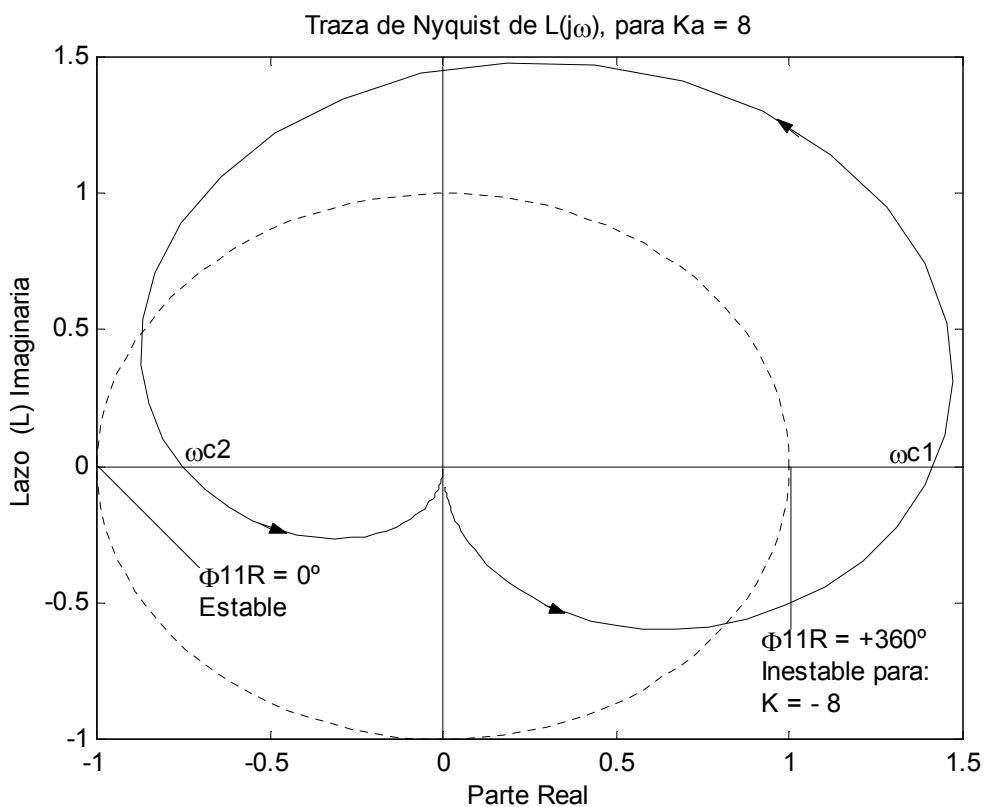


Figura 22

Ejemplo 10:

Un sistema de control tiene la ecuación característica siguiente:

$$As^3 + (1+3A)s^2 + (3+2A)s + (K+11) = 0$$

Para $K=11$ determinar el rango total del parámetro A para que el sistema sea estable, y en sus rangos de inestabilidad el número de polos del sistema que están en el semiplano derecho del plano s. Aplicar Nyquist.

La ecuación característica se puede arreglar así.

$$[s^2 + 3s + 22] + As[s^2 + 3s + 2] = 0$$

Por ende:

$$L_{equiv}(s) = \frac{As(s^2 + 3s + 2)}{(s^2 + 3s + 22)};$$

como $n < w$!!, se procederá así:

$$[L_{equiv}(s)]^{-1} = \frac{1}{A} \frac{(s^2 + 3s + 22)}{s(s+1)(s+2)} ; \quad Ko = \frac{11}{A}$$

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se muestran en la figura 23

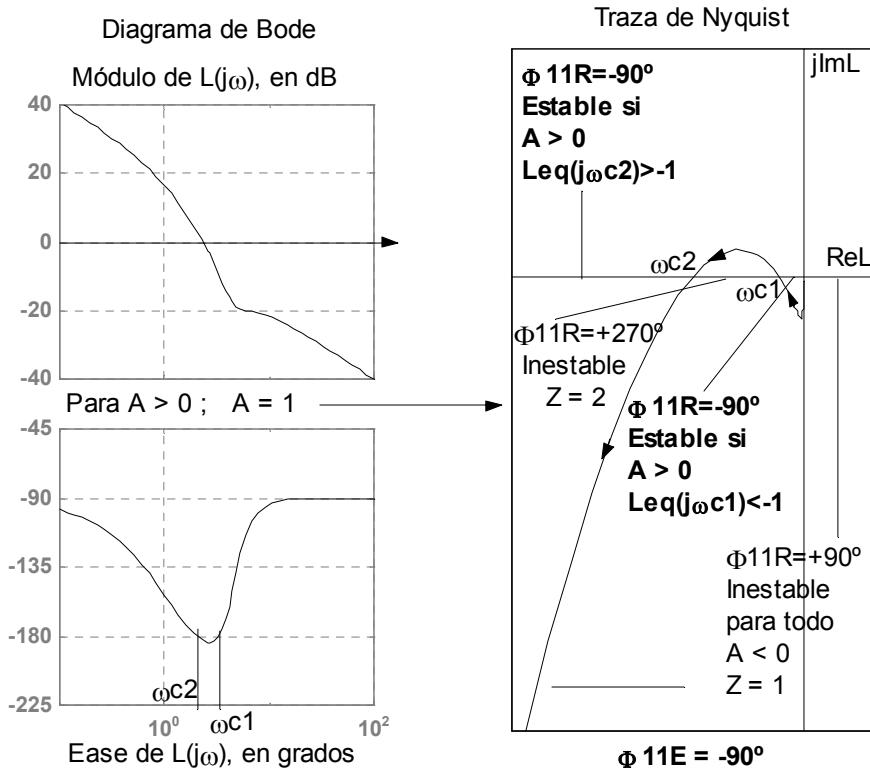


Figura 23

Como $P_w=1$ y $P=0$, será: $\Phi_{11E} = -90^\circ$ y $Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 0.50$.

Como se ve en la figura correspondiente, el sistema será estable para $A > 0$, para dos posiciones del punto crítico (-1, j0), en ellas se cumple que:

$$L_{equiv}(j\omega_{c1}) < -1 \text{ y } L_{equiv}(j\omega_{c2}) > -1.$$

En la figura también se indican los valores de Z en los rangos de inestabilidad del parámetro A.-

$$[L_{equiv}(j\omega)]^{-1} = \frac{1}{A - 3\omega^2 + j\omega(2 - \omega^2)} \quad P.I. = 0 \text{ si se cumple:}$$

$\omega_c(2 - \omega_c^2)(22 - \omega_c^2) = -6\omega_c^3$, operando se llega a:

$\omega_c^4 - 15\omega_c^2 + 44 = 0$; las soluciones son: $\pm\sqrt{11}$ y ± 2 , por ende:

$$\omega_{c1} = \sqrt{11} \text{ rad/seg.} \quad y \quad \omega_{c2} = 2 \text{ rad/seg.}$$

En consecuencia:

$$[L_{equiv}(j\omega_{c1})]^{-1} = \frac{1}{A(2 - \omega_{c1}^2)} = \frac{-1}{3A} < -1 \Rightarrow A < 1/3$$

$$[L_{equiv}(j\omega_{c2})]^{-1} = \frac{1}{A(2 - \omega_{c2}^2)} = \frac{-1.5}{A} > -1 \Rightarrow A > 1.50$$

Los rangos del parámetro A serán: $0 < A < 1/3$ y $1.50 < A < \infty$

Si ahora $K = \sqrt{72} = 8.4985$, en lugar de 11, la figura 24 muestra las trazas de Nyquist para tres valores de A. Las nuevas w_c serían iguales, o sea:

$\omega_{c1} = \omega_{c2} = \sqrt{2 + 3\sqrt{2}} \approx 2.4985 \text{ rad/seg.}$. Por ende las trazas serán tangentes al eje real negativo, para cualquier valor de A, con abscisa:

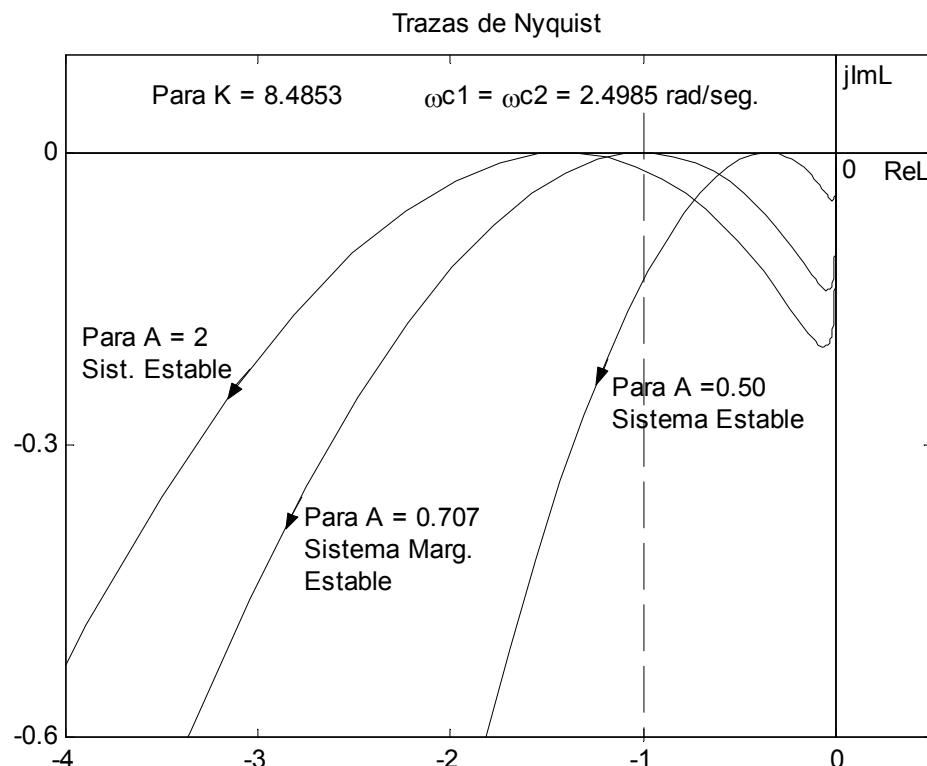


Figura 24

$$[L_{equiv}(j\omega_c)]^{-1} = \frac{1}{A[2 - (2 + 3\sqrt{2})]} = \frac{-1}{\sqrt{2}A} > -1 \text{ o } < -1$$

Para que el sistema sea estable A deberá ser distinto de 0.707, o sea para cualquier valor de:

$A \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$, se cumplirá que $\Phi_{11R} = \Phi_{11E} = -90^\circ$.

Casos en los cuales la L(s) tiene Polos Imaginarios:

Si la $L(s)$ tiene polos imaginarios, al aplicar el criterio de Nyquist en la forma original, se tendría que definir la trayectoria de Nyquist con pequeñas circunferencias alrededor de dichos polos sobre el eje jw . En lugar de construir la traza de Nyquist completa, *solo la porción* que corresponde al giro Φ_{11} del vector $F(s)$ en el plano $L(s)$ será la que se construirá y luego comparar Φ_{11R} con Φ_{11E} para analizar la estabilidad.

Ejemplo 11:

Sea la siguiente $L(s) = \frac{K}{s^2 + 4} \quad Ko = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \frac{K}{4}$

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se muestran en la figura 25.

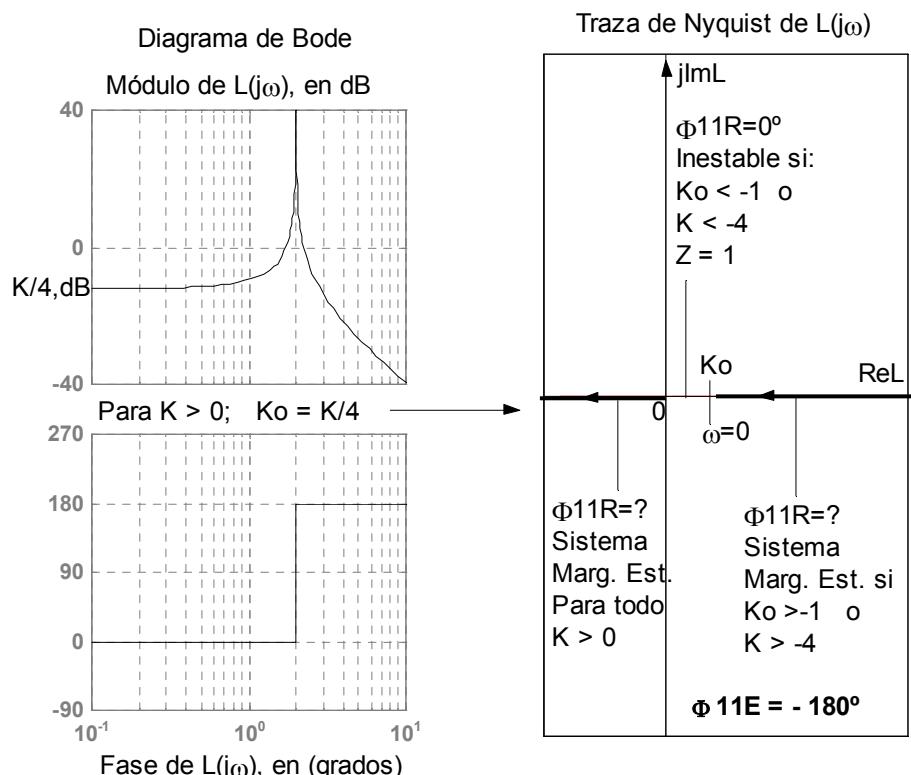


Figura 25

Como $P_w=2$ y $P=0$, será: $\Phi_{11E} = -180^\circ$. - y $Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 1$. -

Como se indica en la figura para $K>0$, el sistema será siempre marginalmente estable, pues la traza pasa por el punto crítico.

Para $K<0$, el sistema será marginalmente estable, si $K>-4$ e inestable si $K<-4$, con $Z = 1$. -

Ejemplo 12:

Si se agrega un cero al sistema del ejemplo anterior se estabilizara para todo $K>0$. Si se agrega el cero en -2, se tendrá.

$$L(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2 + 4)} \quad Ko = \frac{K}{2}$$

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se muestran en la figura 26.

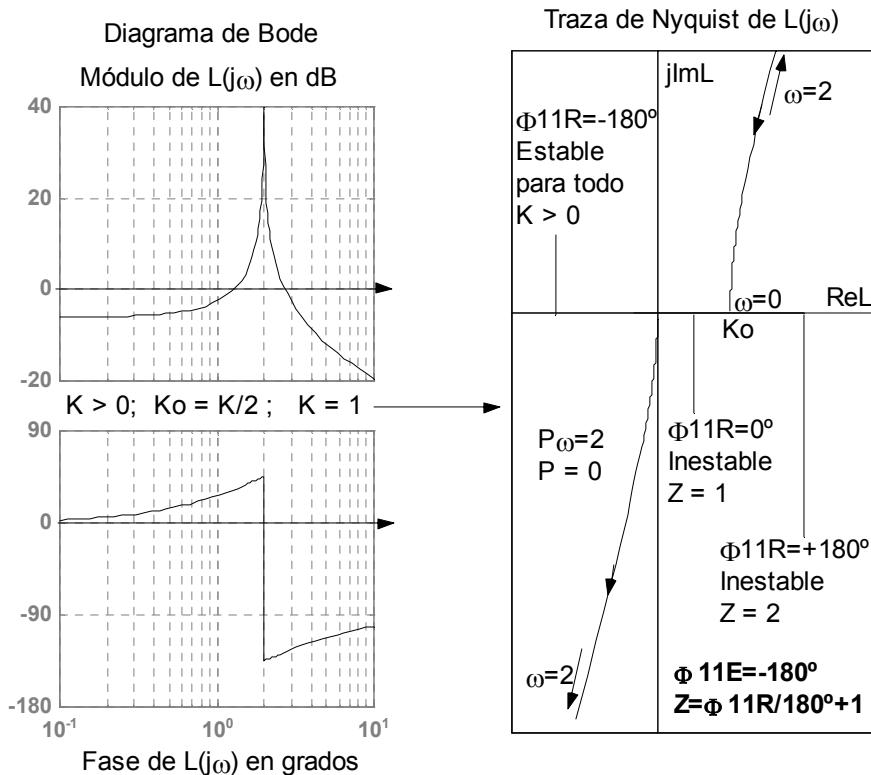


Figura 26

Como se puede apreciar el sistema será estable solo para: $0 < K < \infty$.

Ejemplo 13:

Si ahora se agrega un polo al sistema original el mismo será inestable para todo $K > 0$, antes era marginalmente estable.

$$L(s) = \frac{K}{(s+2)(s^2 + 4)} ; Ko = \frac{K}{8}$$

En cambio para $K < 0$, el sistema será estable solo si se cumple que:

$K > -8$, pues el $\Phi_{11R} = -180^\circ \equiv \Phi_{11E,-}$

Para $K > -8$ el sistema será inestable pues tendrá una raíz la ecuación característica en el semiplano derecho del plano s, $Z = 1$.

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se muestran en la figura 27
Por ende el rango total de K para que el sistema sea estable es:

$$-8 < K < 0$$

Usando el comando `Plot` del Csd/Matlab se puede graficar las dos partes de la traza de Nyquist, como lo muestra la figura 28 para $K = 4$.

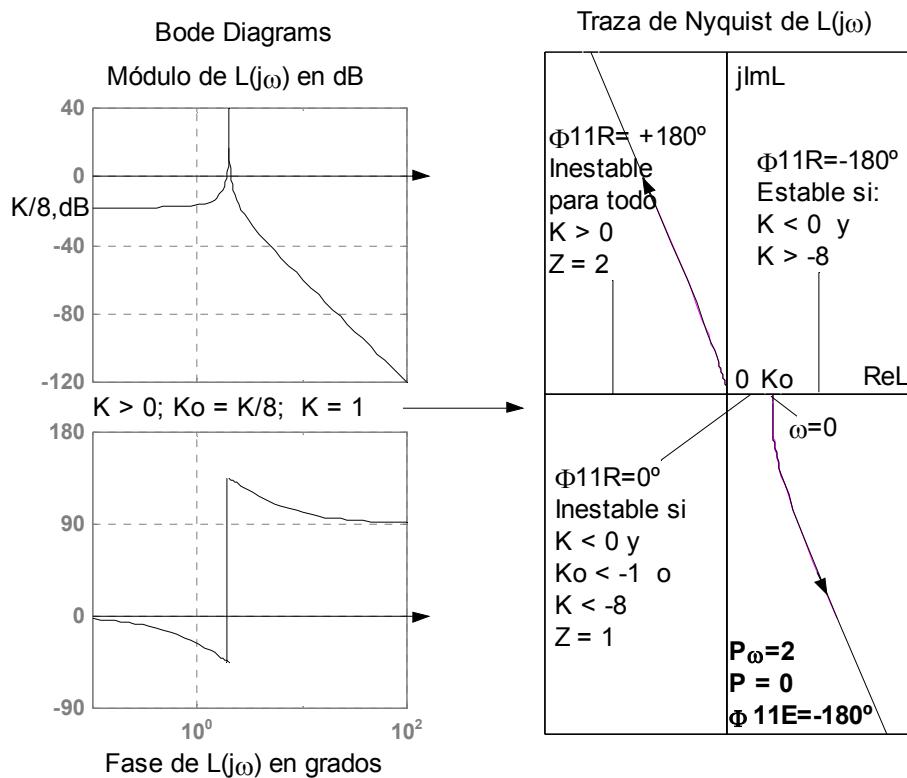


Figura 27

Se uso el comando hold y los rangos de frecuencia 2.10 a 100 y 0.1 a 1.90.

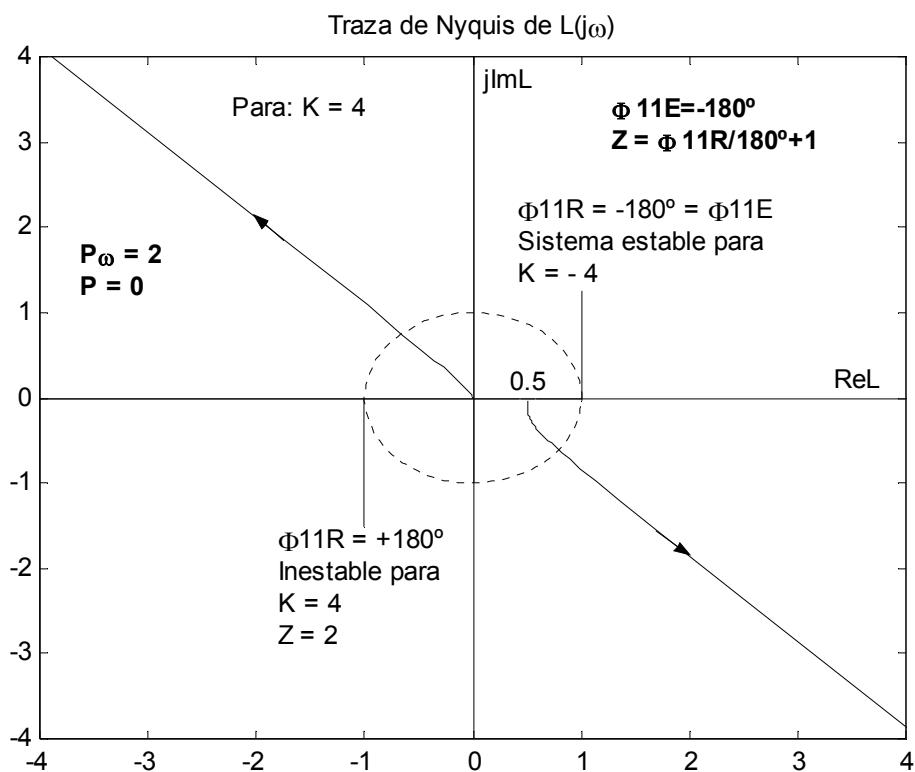


Figura 28

Ejemplo 14:

Si al sistema original se le agrega un cero y un polo, con la condición de que el cero esté más cerca del origen del plano s , nos quedaría:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{(s+2)(s^2 + 4)} \quad Ko = \frac{K}{8}$$

El sistema tendrá un rango positivo de K para la estabilidad, esto es general si como se dijo el cero está más cerca del origen que el polo. El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se muestran en la figura 29

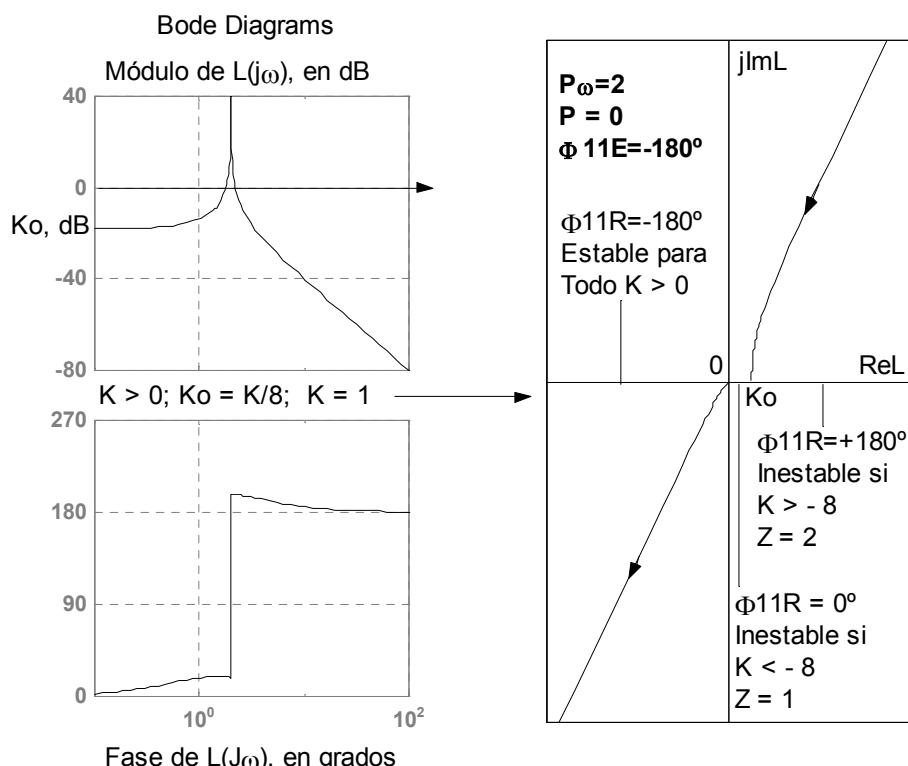


Figura 29

Como $P_w=2$ y $P=0$, será: $\Phi_{11E} = -180^\circ$. - y $Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 1$. -

Como se aprecia en la figura solo en todo el rango positivo de K .

Para $K < 0$:

Si $K < -8$: $Z = 1$; si $K > -8$: $Z = 2$

Ejemplo 15:

Si el polo es el que está más cerca del origen, por ejemplo:

$$L(s) = \frac{K(s+4)}{(s+2)(s^2 + 4)} \quad Ko = \frac{K}{2}$$

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se muestran en la figura 30.

Como $P_w=2$ y $P=0$, será: $\Phi_{11E} = -180^\circ$. - y $Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 1$. -

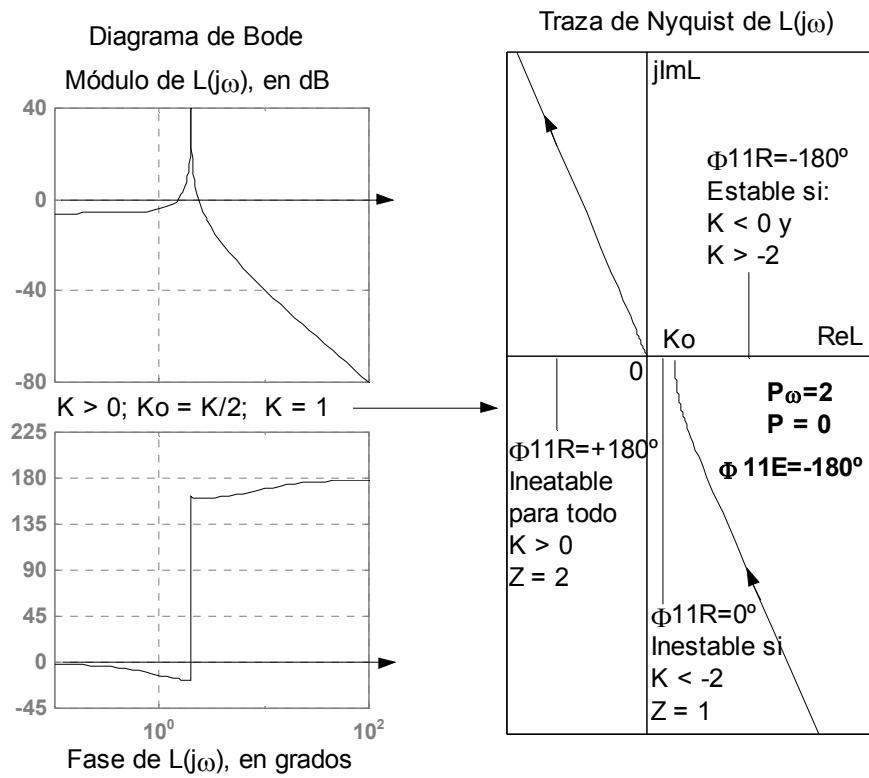


Figura 30

Como se aprecia en la figura 30, el rango de K para la estabilidad es: $-2 < K < 0$. Si $K < -2$; $Z = 1$, y para $K > 0$; $Z = 2$.

Ejemplo 16:

$$\text{Si } L(s) = \frac{(s-2)(s-3)}{s(s+1)(s^2+4)} \quad Ko = 1.5K$$

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se muestran en la figura 31.

$$\text{Como } P_w=3 \text{ y } P=0, \text{ será: } \Phi_{11E} = -270^\circ \text{ y } Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 1.50$$

El sistema será estable solo para $K > 0$, si se cumple que:

$$L(j\omega_{C2}) > -1$$

$$L(j\omega) = K \frac{(6-\omega^2) - j5\omega}{\omega^2(\omega^2-4) + j\omega(4-\omega^2)}$$

La parte imaginaria será nula si: $(6-\omega_{C2}^2)\omega_{C2}(4-\omega_{C2}^2) = -5\omega_{C2}^3(\omega_{C2}^2 - 4)$

$$\text{Operando se llega a: } \omega_{C2}^4 - 5\omega_{C2}^2 + 4 = 0$$

Las soluciones son: ± 2 y ± 1 , la solución no trivial será: $\omega_{C2} = 1 \text{ rad/seg}$.

Por lo tanto:

$$L(j\omega_{C2}) = K \frac{-5}{4 - \omega_{C2}^2} = \frac{-5K}{3} > -1 \Rightarrow K < 0.60$$

El rango total para la estabilidad será:

$$0 < K < 0.60$$

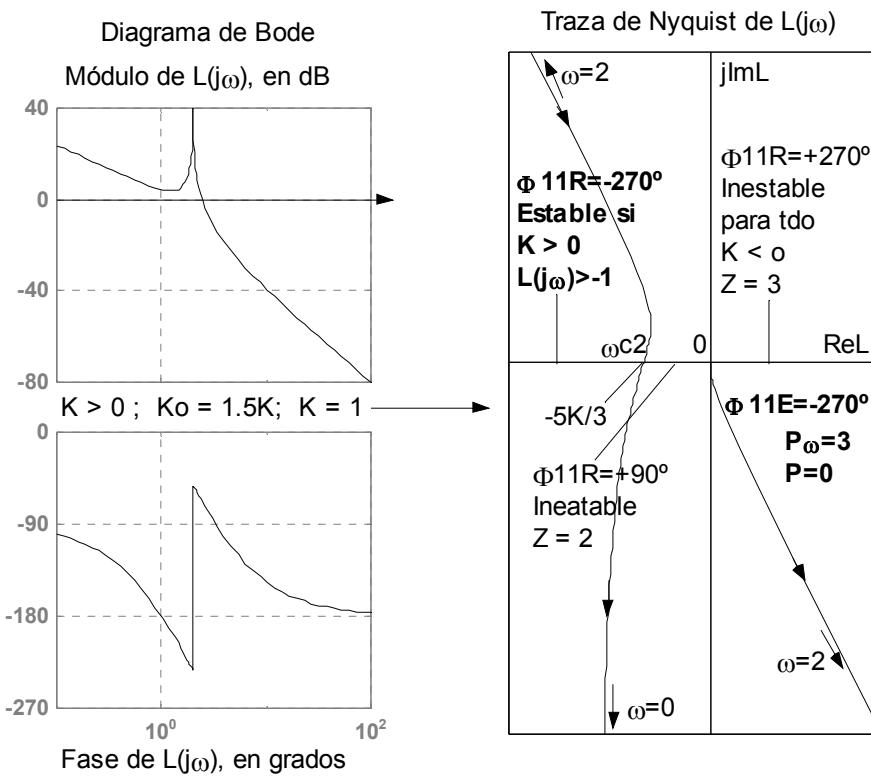


Figura 31

Con la computadora se grafica la traza de Nyquist Para $K = 1$, (figura 32). Para $K < 0$, el mismo será siempre inestable con tres polos de la función de transferencia del sistema en el semiplano derecho del planos.

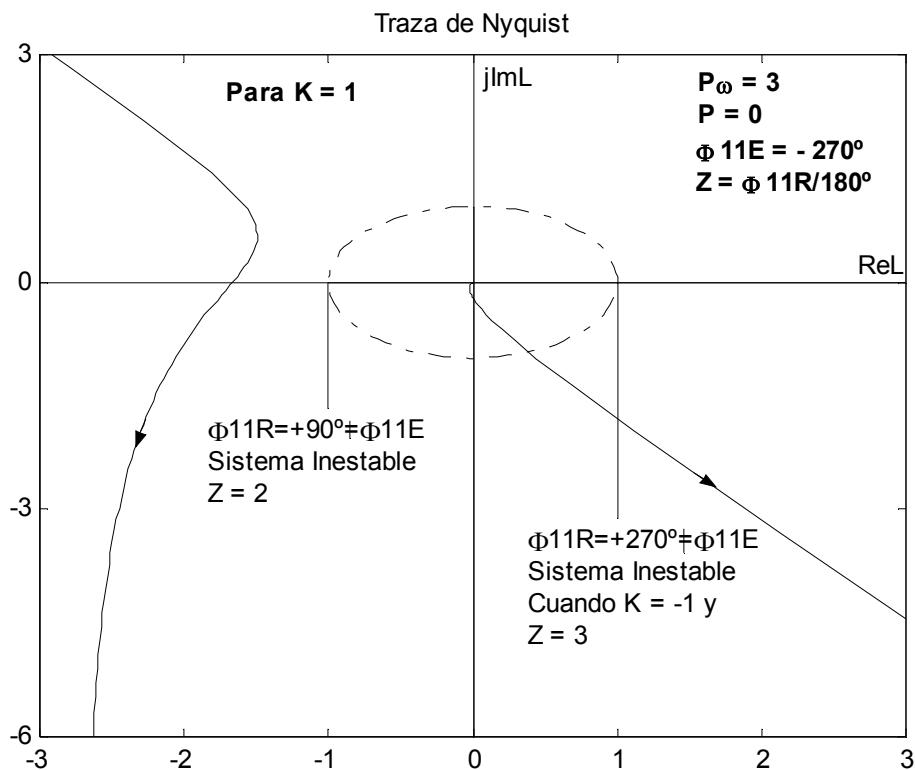


Figura 32

Para $K=0.30$, sistema estable, y si $K=-0.3$ sistema inestable, Figura 33.

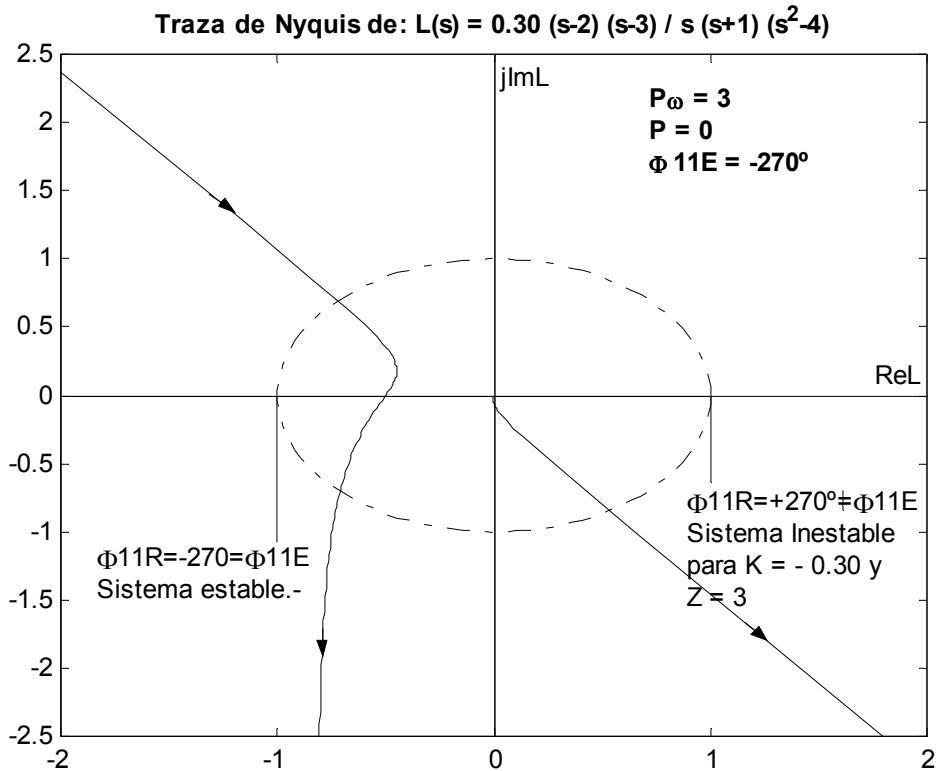


Figura 33

Ejemplo 18: Un sistema tiene la ecuación característica siguiente:

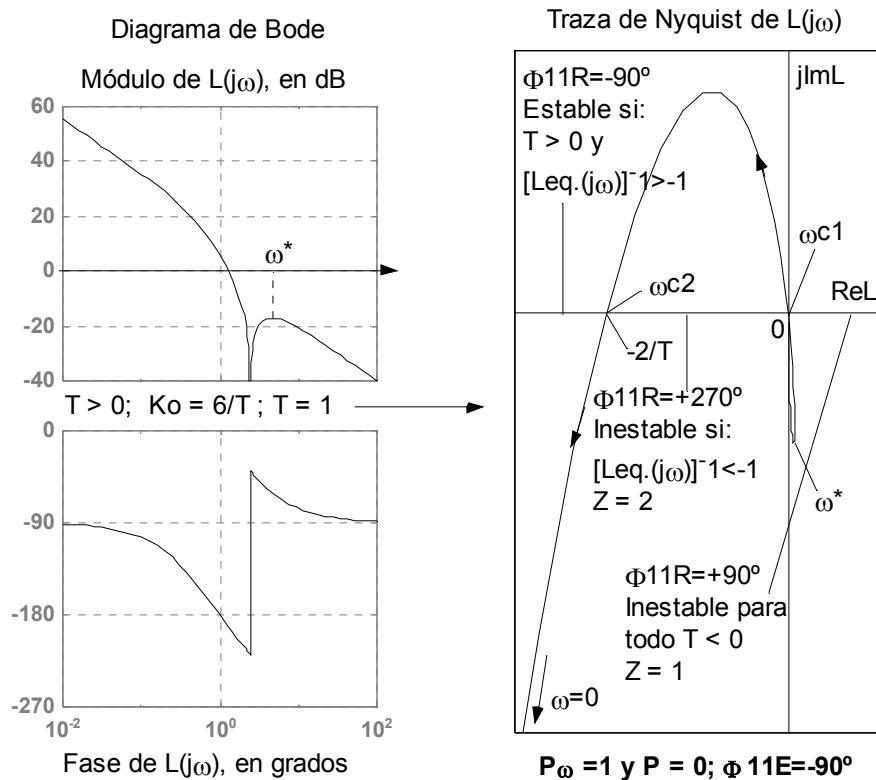


Figura 34

$$Ts^3 + (1 + 2.5T)s^2 + Ts + 6 = 0$$

Determinar por Nyquist el rango del parámetro T para que el sistema sea estable. La función de transferencia del lazo equivalente será:

$$[Ts(s^2 + 2.5s + 1)] + [s^2 + 6] = 0$$

$$L_{equiv}(s) = \frac{Ts(s + 0.5)(s + 2)}{(s^2 + 6)} ; \text{ como es impropia } n < w, \text{ se trabajará con:}$$

$$[L_{equiv}(s)]^{-1} = \frac{1}{T} \frac{(s^2 + 6)}{s(s + 0.5)(s + 2)} \quad Ko = \frac{6}{T}$$

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se muestran en la figura 34. De la misma, el sistema será estable solo para $T > 0$, si se cumple que:

$$[L(j\omega_{C2})]^{-1} > -1 ; \quad [L(j\omega)]^{-1} = \frac{1}{T} \frac{(6 - \omega^2) + j0}{(-2.5\omega^2) + j\omega(1 - \omega^2)}$$

La parte imaginaria será nula si: $\omega_{C2}(1 - \omega_{C2}^2)(6 - \omega_{C2}^2) = 0$

Las soluciones son: $\pm\sqrt{6}$ y ± 1 , la solución no trivial será: $\omega_{C2} = 1 \text{ rad/seg.}$

$$\text{Por lo tanto: } [L(j\omega_{C2})]^{-1} = \frac{1}{T} \frac{6 - \omega_{C2}^2}{-2.5\omega_{C2}^2} = \frac{-2}{T} > -1 \Rightarrow T > 2$$

El rango total para la estabilidad será:

$$2 < T < \infty$$

La figura 35, muestra la traza para $T=1$, usando Plrplot del Csad.

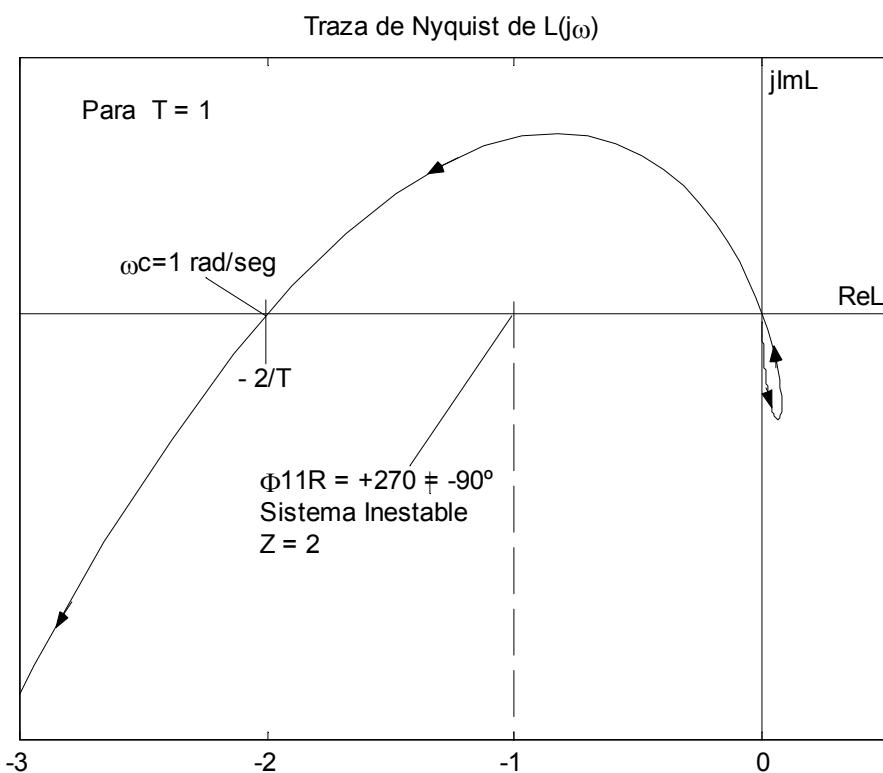


Figura 35

Ejemplo 18:

La función de transferencia del lazo de un sistema de control es:

$$L(s) = \frac{K(s^2 + 1)}{s(s+1)(s^2 + 4)} \quad Ko = \frac{K}{4}$$

Determinar el rango del parámetro K para que el sistema sea estable. El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se muestran en la figura 36.

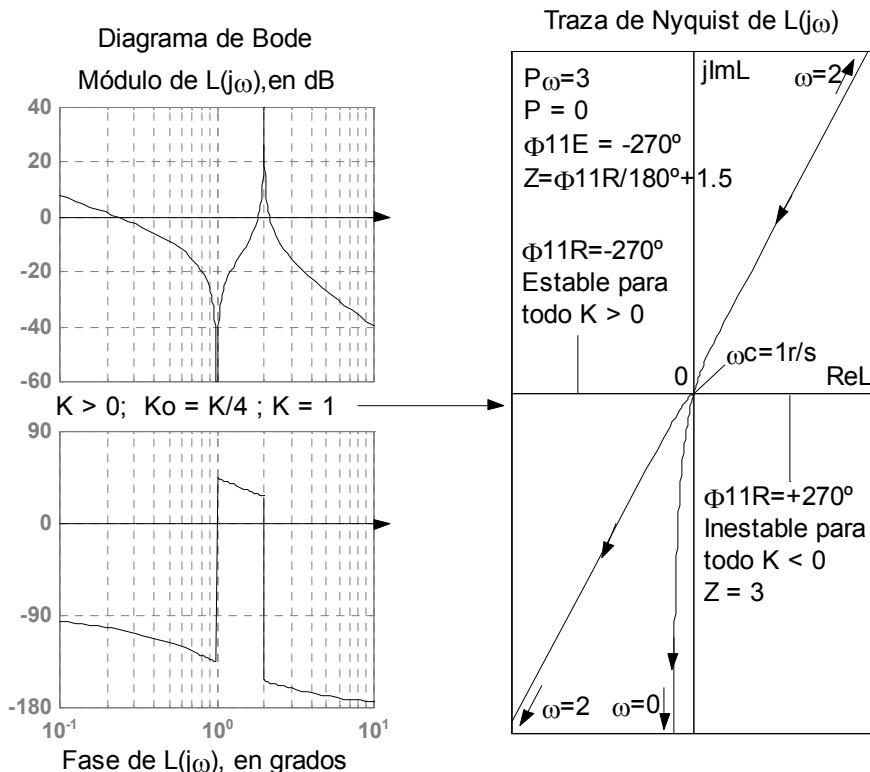


Figura 36

Como $P_w=3$ y $P=0$, será: $\Phi_{11E} = -270^\circ$ y $Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 1.50$.

El sistema será estable solo para todo $K>0$, pues se cumple que $\Phi_{11R} \equiv \Phi_{11E} = -270^\circ$. Para $K<0$, siempre será $Z=3$.

Ejemplo 19:

Un sistema de control tiene la función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{Kc(s-1.6)}{s[a s^2 + (1+2.5a)s + a]}$$

Si $Kc=-3.75$, determinar el rango del parámetro "a", para que el sistema sea estable, en los rangos de inestabilidad del mismo el número de polos del sistema que se ubican en el semiplano derecho del plano s.

La ecuación característica será:

$as^3 + (1+2.5a)s^2 + as - 3.75(s-1.6) = 0$, la cual se puede colocar:

$$[s^2 - 3.75s + 6] + as[s^2 + 2.5s + 1] = 0$$

Por lo tanto la función de transferencia del lazo equivalente será:

$L_{equiv}(s) = \frac{as(s^2 + 2.5s + 1)}{(s^2 - 3.75s + 6)}$, como es una función impropia se obtendrá:

$$[L_{equiv}(s)]^{-1} = \frac{1}{a} \frac{(s^2 - 3.75s + 6)}{s(s + 0.5)(s + 2)} \quad Ko = \frac{6}{a}$$

El diagrama de Bode y la traza de Nyquist se muestran en la figura 37.

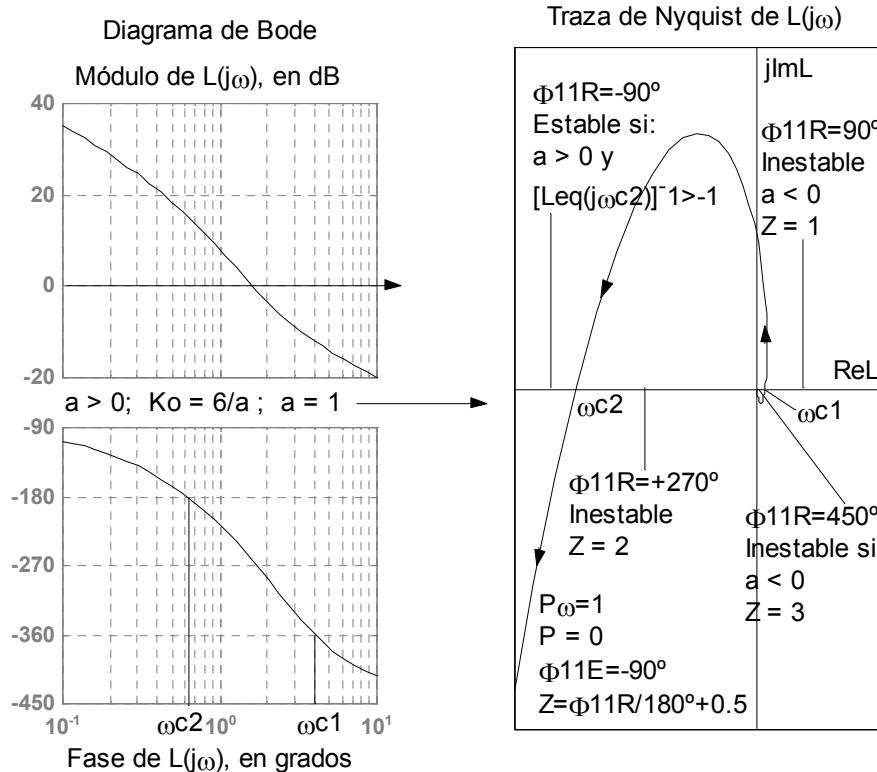


Figura 37

Como $P_w=1$ y $P=0$, será: $\Phi_{11E} = -90^\circ$. - y $Z = \frac{\Phi_{11R}}{180^\circ} + 0.50$. -

El sistema será estable solo para $a > 0$, pues se cumple que

$\Phi_{11R} \equiv \Phi_{11E} = -90^\circ$. Esto sucede si:

$$[L_{equiv}(j\omega_{C2})]^{-1} > -1$$

$$[L_{equiv}(j\omega)]^{-1} = \frac{1}{a} \frac{(6 - \omega^2) - j3.75\omega}{-2.5\omega^2 + j\omega(1 - \omega^2)}$$

La parte imaginaria será nula si: $\omega_{C2}(1 - \omega_{C2}^2)(6 - \omega_{C2}^2) = 9.375\omega_{C2}^3$

Operando se llega a: $\omega_{C2}^4 - 16.375\omega_{C2}^2 + 6 = 0$; las soluciones de la misma son:

± 4 y ± 0.6124 , en consecuencia se tiene que:

$$\omega_{C1} = 4 \text{ rad/seg} \quad y \quad \omega_{C2} = 0.6124 \text{ rad/seg}$$

$$[L_{equiv}(j\omega_{C2})]^{-1} = \frac{1}{a} \frac{-3.75}{(1 - \omega_{C2}^2)} = \frac{-6}{a} > -1 \quad \Rightarrow \quad a > 6$$

El rango total para que el sistema sea estable será:

$$6 < a < \infty$$

En la figura 38 se muestra la traza de Nyquist para $a=10$.

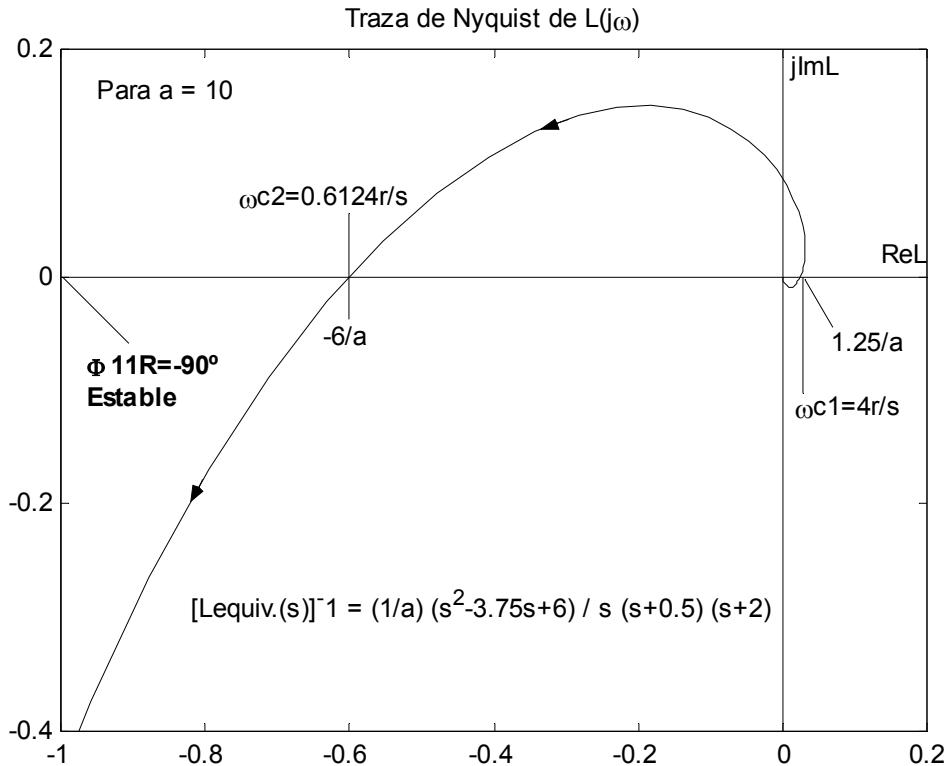


Figura 38

Efectos del Agregado de Polos y Ceros a $L(s)$ en la Forma de la Trazas de Nyquist de la Misma:

Puesto que el comportamiento y la estabilidad de un sistema de control realimentado son a menudo influenciados por el agregado y movimiento de los polos y ceros de las funciones de transferencias de los controladores usados, éste estudio ilustrara como es afectada la traza de Nyquist cuando se agregan polos y ceros a una típica función de transferencia del lazo $L(s)$. Esta investigación también será de ayuda para ganar mas comprensión sobre la construcción rápida de un bosquejo de la traza de Nyquist de una función de transferencia $L(s)$ dada.

Supongamos tener la función de transferencia de primer orden:

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{K_o}{1 + T_1 s} \equiv \frac{(K_o/T_1)}{(s + 1/T_1)} = \frac{K}{(s + 1/T_1)} \quad (1)$$

La traza de Nyquist de $L(s)$ para el rango de frecuencias ($0 < \omega < \infty$), es una circunferencia como se muestra en la figura 39.

Traza de Nyquist

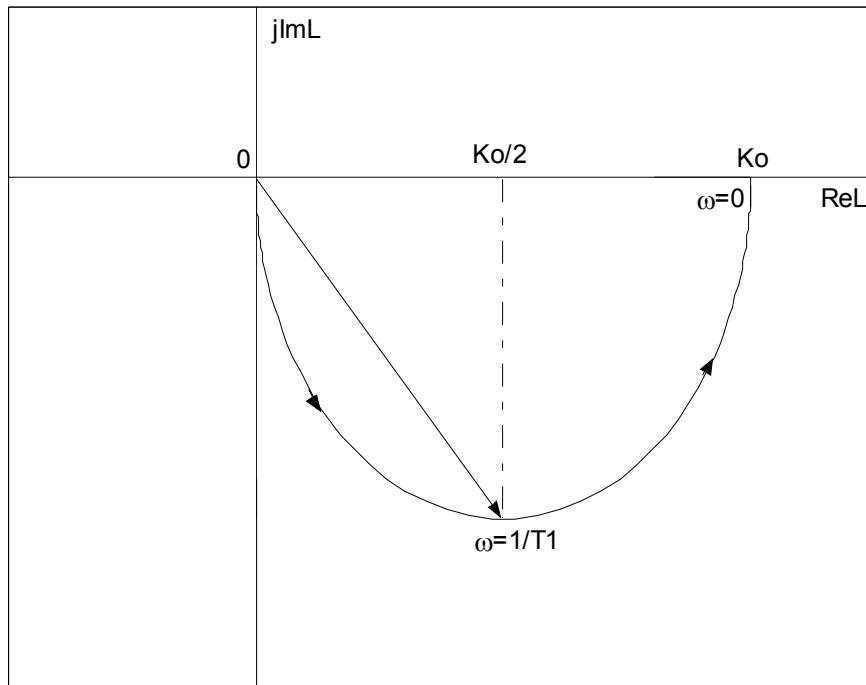


Figura 39

Agregado de Polos en $s = 0$

Consideremos que un polo en $s = 0$ se agrega a la función de transferencia (1), luego se tendrá:

Traza de Nyquist

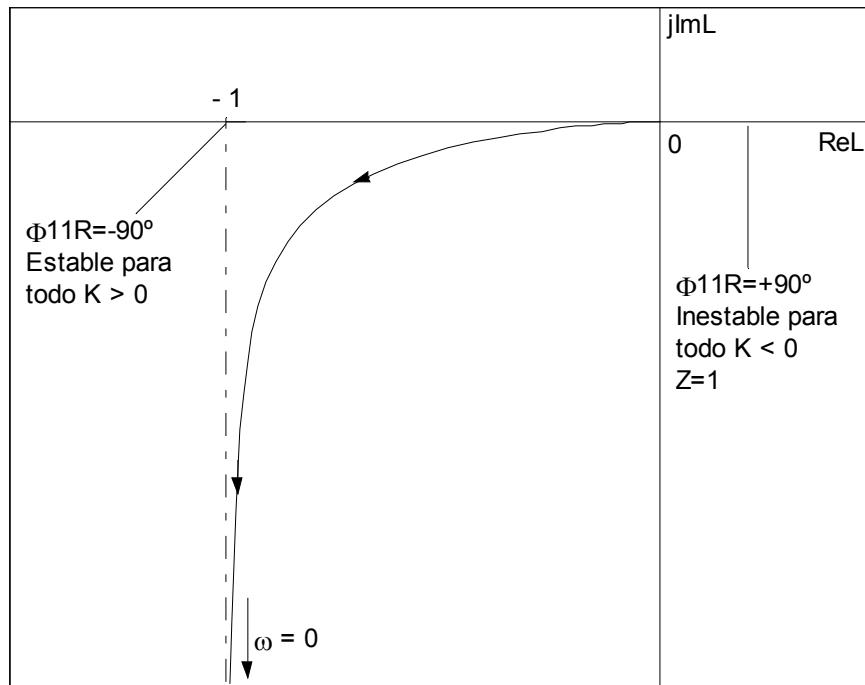


Figura 40

$$L(s) = \frac{K_o}{s(1+T_1s)} \equiv \frac{(K_o/T_1)}{s(s+1/T_1)} = \frac{K}{s(s+1/T_1)} \quad (2)$$

El efecto de agregar este polo es que la fase de L (jw) se atrasa 90°, para todas las frecuencias. En otras palabras, la traza girara 90° en el sentido de las agujas del reloj como se muestra en la figura 40.

Además la magnitud de L(jw) en w = 0 se vuelve infinita. En general, agregando un polo de multiplicidad u en s = 0 a la función de trasferencia (1) dará las siguientes propiedades a la traza de Nyquist de L(s):

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle L(j\omega) = -(1+u)90^\circ \quad ; \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle L(j\omega) = -u90^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L(j\omega)| = 0 \quad ; \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)| = \infty$$

La figura 41, ilustra las trazas de Nyquist de:

$$L(s) = \frac{K_o}{s^2(1+T_1s)} \quad (3) \quad L(s) = \frac{K_o}{s^3(1+T_1s)} \quad (4)$$

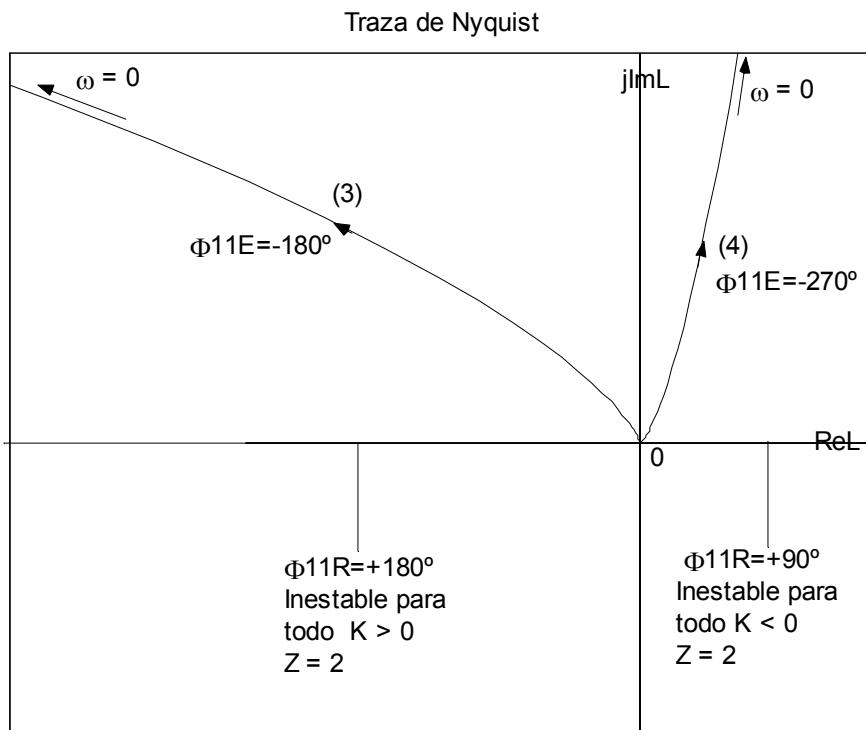


Figura 41

En vista de estas ilustraciones es evidente que el agregado de polos en el origen del plano s, afectara adversamente la estabilidad, por esta razón los sistemas de control con una función de transferencia del lazo con mas de dos o tres polos en s = 0 en la misma, serán probablemente inestables.

Agregado de Polos Finitos

Cuando un polo en $s=1/T_2$, es agregado a la función L(s) (1), se tendrá:

$$L(s) = \frac{K_o}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad (5)$$

La traza de Nyquist de $L(j\omega)$ en $\omega=0$ no es afectada por el agregado del polo, pues $\lim_{\omega \rightarrow 0} L(j\omega) = Ko$.

La traza de Nyquist en $\omega \rightarrow \infty$ tendrá: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} L(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{-Ko}{T_1 T_2 \omega^2} = 0 \angle -180^\circ$

Por tanto el efecto de agregar un polo en $s=-1/T_2$ a la $L(s)$ (1), es atrasar la fase de la traza de Nyquist en 90° en $\omega \rightarrow \infty$. Como se muestra en la figura 42. La figura también muestra la traza de Nyquist de:

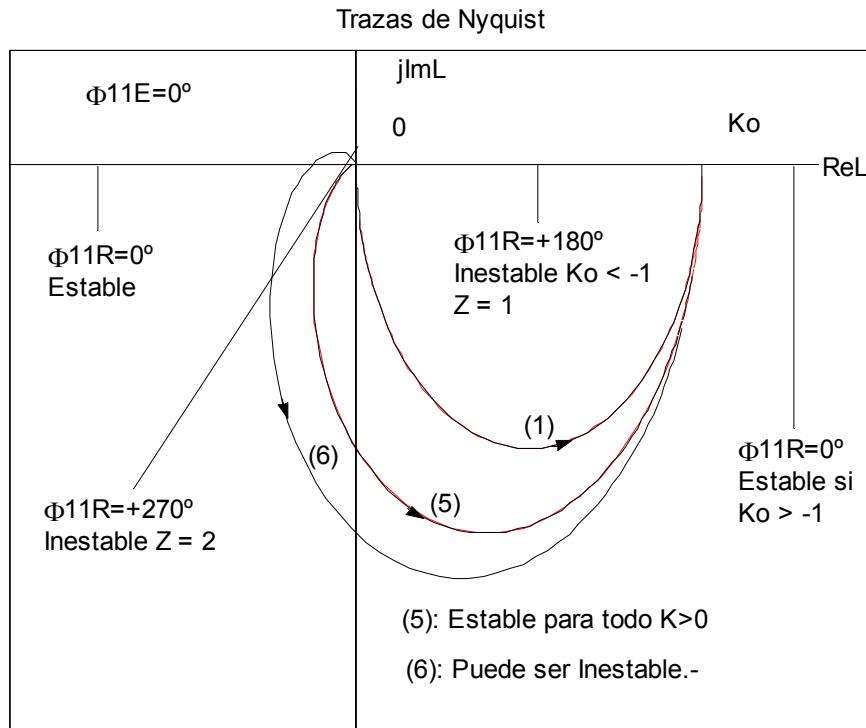


Figura 42

$$L(s) = \frac{Ko}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)} \quad (6)$$

La figura 42 confirma los efectos adversos sobre la estabilidad que resultan del agregado de polos a la función $L(s)$. Como se puede ver las trazas ocupan tantos cuadrantes del plano $L(s)$ como constantes de tiempo en el denominador tengan las funciones $L(s)$. Si se les agrega un polo en el origen seguirán ocupando el mismo número de cuadrantes pero las trazas giraran -90° .

Por ejemplo si a la $L(s)$ (6), se le agrega un polo en el origen:

$$L(s) = \frac{Ko}{s(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)} \quad (7)$$

La raza será la indicada en la figuras 43a b y c.

De la misma se puede ver que la traza tiende a infinito cuando $\omega \rightarrow 0$ y es asintótica respecto a una recta vertical, (-90°), la misma se puede determinar encontrando la parte real cuando $\omega \rightarrow 0$. $Ro = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[L(j\omega)]$.

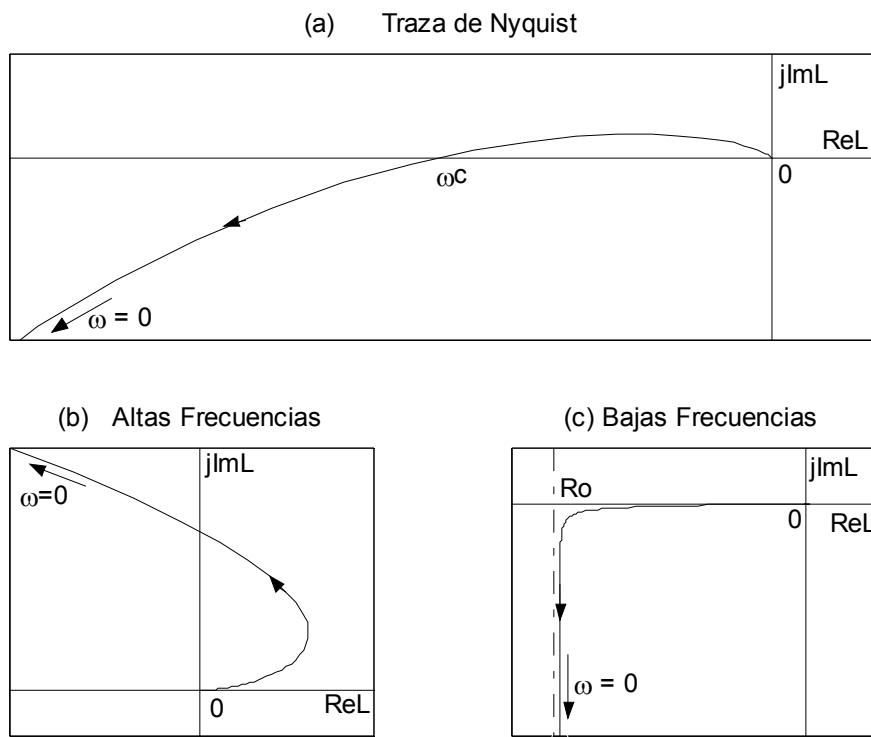


Figura 43

Para esta función $L(s)$ particular es:

$$Ro = -Ko(T_1 + T_2 + T_3) \quad (8)$$

La ecuación (8) indica que la magnitud de $L(jw)$ tiende a infinito asintóticamente a una línea vertical, cuya intersección con el eje real es igual a Ro , como lo indica la figura 43c.

La frecuencia w_c es para la cual la parte imaginaria de $L(jw)$ es cero, así:

$$\text{Im}[L(j\omega)] = 0$$

Y para este ejemplo será:

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3}} \quad \text{rad / seg. -}$$

Como la $L(s)$ también se puede escribir:

$$L(s) = \frac{K}{s(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)} \quad \text{con} \quad K = \frac{Ko}{T_1 T_2 T_3} \quad y \quad p_i = \frac{1}{T_i}$$

Por lo tanto w_c será:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p_1 + p_2 + p_3}} \quad \text{rad / seg.} \quad (9)$$

Si a la función $L(s)$ (5), se les agregan dos polos en el origen se tendrá.

$$L(s) = \frac{Ko}{s^2 (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (10)$$

La traza de Nyquist correspondiente es la indicada en la Figura 44.

Como se aprecia el sistema se vuelve inestable para cualquier valor de Ko , más adelante se tratará de estabilizar al mismo.

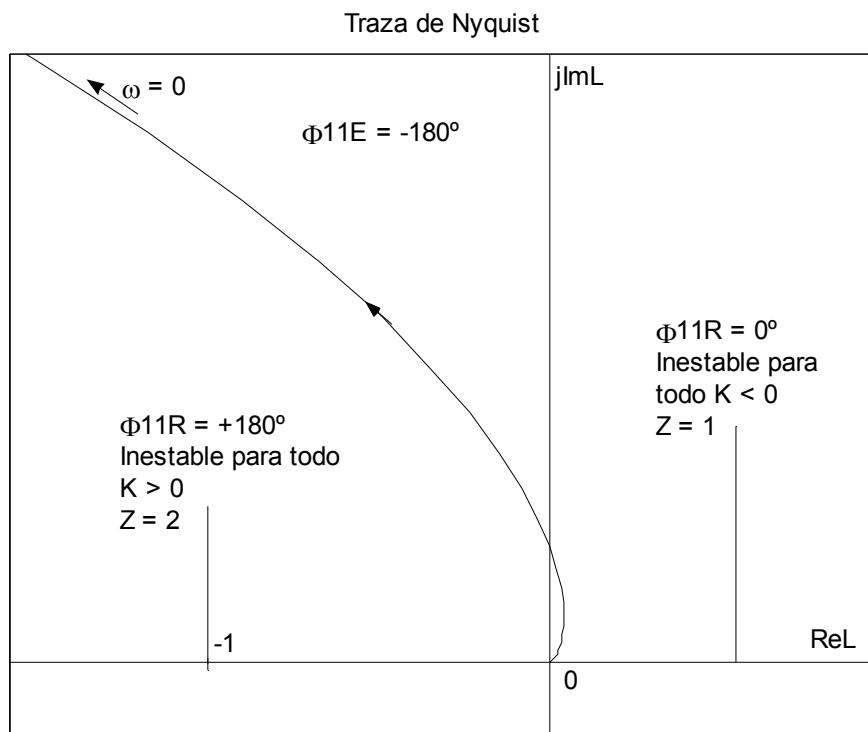


Figura 44

Todo lo visto ayuda a graficar las trazas de Nyquist. Sin embargo la regla no se aplica si las $L(s)$ tienen ceros, (factores $(1+Ts)$ en el numerador).

Agregado de Ceros a $L(s)$:

Se conoce que el agregado de ceros, en una forma adecuada, a $L(s)$ tiene el efecto de reducir la sobreelongación y el efecto general de estabilización. En términos del criterio de Nyquist este efecto de estabilización se demuestra fácilmente ya que la multiplicación por el término $(1+Ts)$ o $(s+Z)$ a $L(s)$ incrementa la fase de la misma en $+90^\circ$ cuando $\omega \rightarrow \infty$. El ejemplo siguiente muestra el efecto sobre la estabilidad al añadir un cero en $(-1/T_a)$ a la función de transferencia del lazo.

Si tenemos:

$$L(s) = \frac{K_o}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

Se puede mostrar que el sistema es estable para:

$$0 < K_o < \frac{(T_1 + T_2)}{T_1 T_2}$$

Suponga que un cero en $s = -1/T_a$, ($T_a > 0$), se añade a $L(s)$, entonces:

$$L(s) = \frac{K_o(1+T_a s)}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

Ahora el rango de K_o para la estabilidad será:

$$0 < K_o < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 - T_a(T_1 + T_2)}$$

Como se ve para T_a y K_o positivos el límite superior de K_o es mayor que sin el cero agregado. Además el módulo $|L(j\omega_c)|$ es menor, por lo que la intersección de la traza de Nyquist con el eje real negativo se corre hacia la derecha del punto crítico, haciendo el sistema más estable, Figura 45.

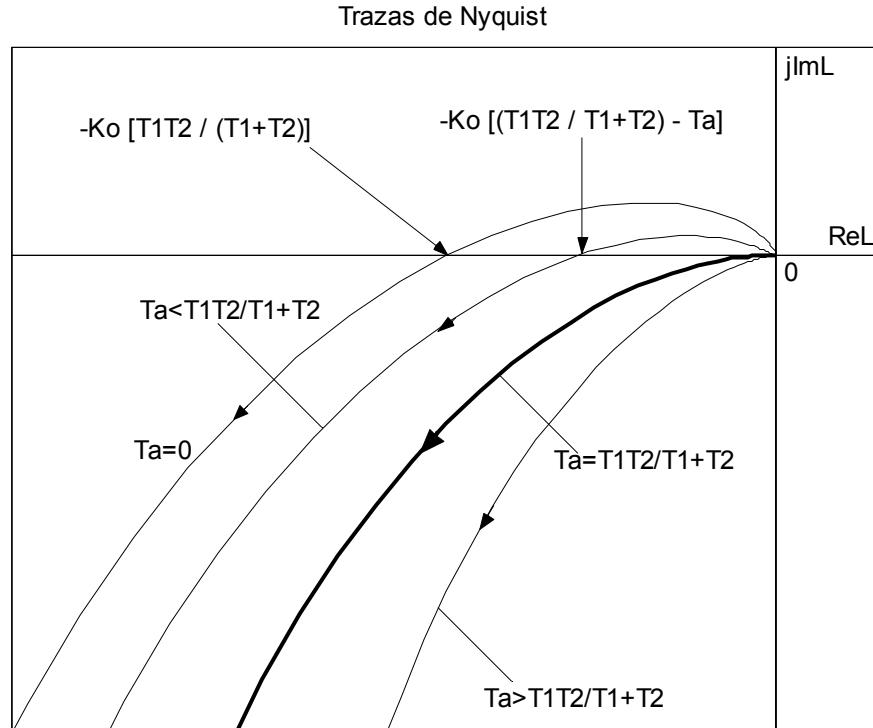


Figura 45

Esto último se puede demostrar así:

Si se multiplica al $|L(j\omega_c)|$, de cualquier $L(s)$ para que el sistema sea marginalmente estable, llamando "a" a este número se tendrá:
 $a \times |L(j\omega_c)| = 1$, o también, $a \times K_o = K_o_{\text{Límite}}$, por lo tanto se tiene:

$$|L(j\omega_c)| = 1/a ; \quad 1/a = K_o / K_o_{\text{Límite}}$$

En consecuencia:

$$|L(j\omega_c)| = \frac{K_o}{K_o_{\text{Límite}}}$$

Como $K_o_{\text{Límite}}$ para la $L(s)$ con el cero es mayor que sin el mismo, el $|L(j\omega_c)|$ será menor, la frecuencia de cruce de fase se corre a la derecha, como resultado, el sistema con el cero en $L(s)$ tendrá un margen de ganancia mayor que si él.

Cuando se cumple que:

$$Ta \geq \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}, \text{ el } |L(j\omega_c)| \rightarrow 0 \text{ cuando } \omega \rightarrow \infty .-$$

Como: $T_a = 1/Z_a$, $T_1 = 1/p_1$, $T_2 = 1/p_2$, la última condición se puede expresar:
 $Z_a \leq p_1 + p_2$

$$\text{Por ejemplo si } L(s) = \frac{0.30(1+Ta s)}{s(1+2s)(1+8s)} \equiv \frac{(0.01875/Za)(s+Za)}{s(s+0.5s)(s+0.125)}$$

El valor de mínimo de Ta o el máximo de Za será:

$$Ta \geq 16/10, \quad Ta \geq 1.6, \quad \text{o} \quad Za \leq 0.5 + 0.125, \quad Za \leq 0.625$$

Un sistema que sea inherentemente inestable, para cualquier valor de la ganancia del lazo K, puede ser estabilizado agregando al menos un cero a L(s), si:

$$L(s) = \frac{10(1+Ta s)}{s^2(1+0.5s)} \equiv \frac{20Ta(s+Za)}{s(s+2)}$$

Si $Ta > 0.5$ el sistema será estable para cualquier K.

Para diferentes valores de Ta o (Za=1/Ta), las trazas de Nyquist se indican en la figura 46, y confirman todo lo dicho.

Traza de Nyquist de: $L(s) = 10 (1+Tas) / s^2 (1+0.5s)$

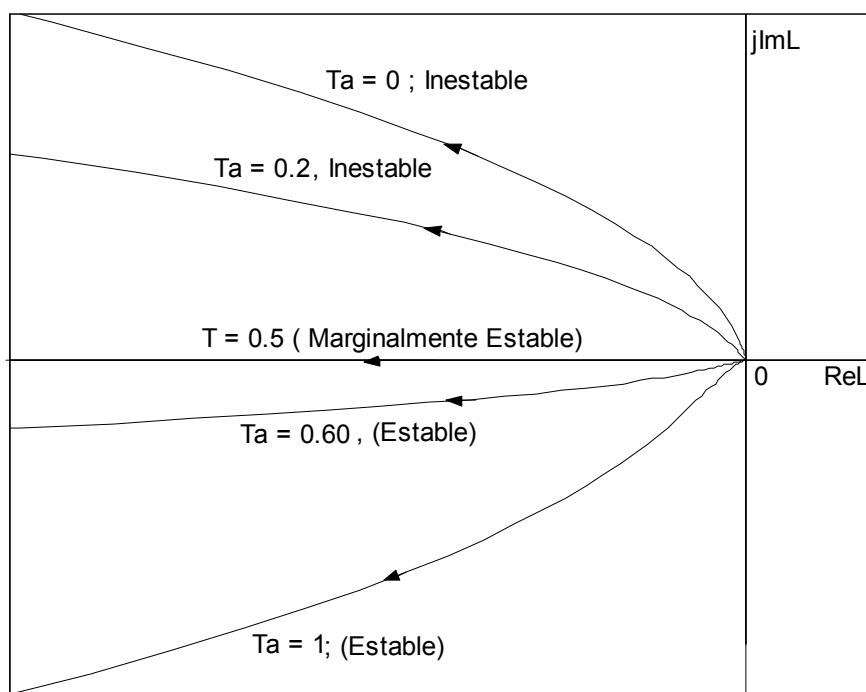


Figura 46

Retomando la $L(s)$ (10), si se agrega un cero y un polo con la condición que $Ta > Tb$:

$$L(s) = \frac{Ko(1+Ta s)}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+Tb s)}$$

Puede obtenerse la traza de Nyquist, del diagrama cero-polo de la figura 47a. Cuando $s=jw=j0^+$ el ángulo de cada vector es cero, salvo para el polo doble en el origen. El ángulo para $w=0$ es, por tanto, -180° . Al crecer w desde cero el ángulo de $(1/Ta+jw)$ crece más deprisa que los ángulos desde los polos. De hecho, y en bajas frecuencias, el ángulo debido a un cero es mayor que la suma de los ángulos correspondientes a los polos

situados a la izquierda del cero. Esto se indica cualitativamente a la frecuencia w_1 en la figura 47b.

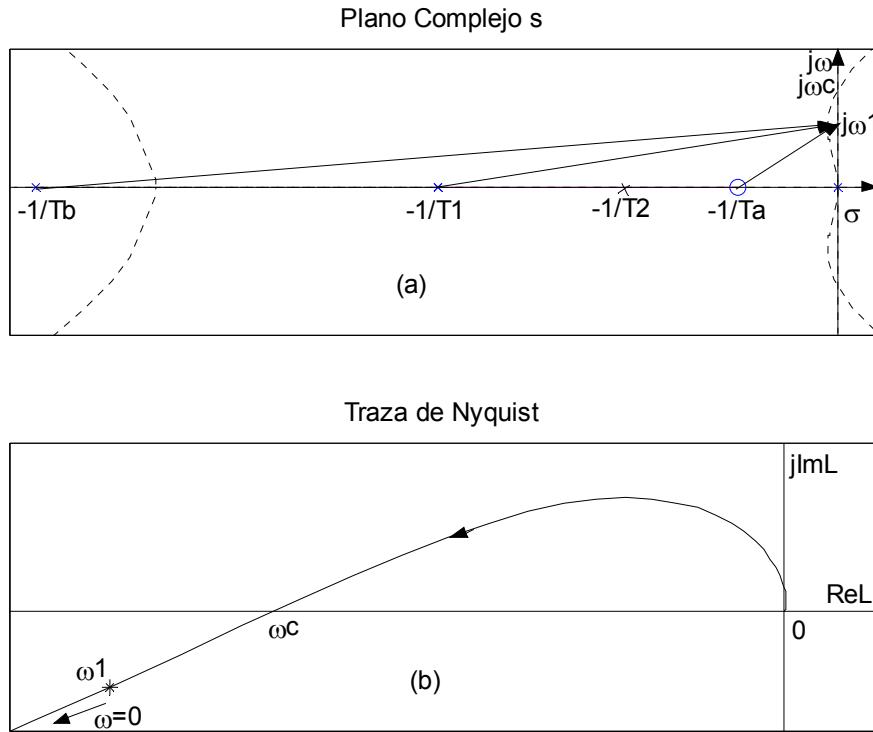


Figura 47

Por tanto, el ángulo de $L(jw)$ en bajas frecuencias es mayor que -180° . Al crecer la frecuencia a el valor w_c la suma de los ángulos correspondientes para $L(jw)$ es -180° y la traza de Nyquist cruza el eje real como lo indica la figura 47b. Si se incrementa la frecuencia w se producirá un pequeño aumento de la fase de $(1/T_a+jw)$, pero los ángulos de los vectores desde los polos crecen rápidamente. En el límite, cuando $\omega \rightarrow \infty$, los ángulos de $(1/T_a+jw)$ y $(1/T_b+jw)$ serán iguales y opuestos de signo, de manera que el ángulo de $L(jw)$ tiende a -360° . La figura 47b indica la traza polar de Nyquist de $L(jw)$ completa. Comparando las figuras 44 y 47b, se ve que ambas tienden a -180° cuando $\omega \rightarrow 0$, la diferencia es que para la primera el sistema es inestable y en la segunda puede ser estable, dependiendo del valor de la ganancia K_o . Puede demostrarse que cuando $\omega \rightarrow 0$, la traza de Nyquist, si $L(s)$ tiene dos polos en el origen, estará por debajo del eje real si la diferencia,

$$\sum(T_{numerador}) - \sum(T_{denominador})$$

Es positiva, y por encima del eje real si la misma es negativa.

Así en el ejemplo, la condición necesaria para que el sistema pueda ser estable es:

$$T_a > (T_1 + T_2 + T_b)$$

El sistema será estable si, $L(jw_c) > -1$, y dependerá como se dijo del valor de la ganancia K_o .

Demostración:

Si

$$L(s) = \frac{K_o(1+T_a s)}{s^2 (1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_b s)};$$

Operando:

$$L(s) = \frac{K_o(1+T_a s)}{T_1 T_2 T_b s^5 + (T_1 T_2 + T_1 T_b + T_2 T_b) s^4 + (T_1 + T_2 + T_b) s^3 + s^2}$$

Reemplazando $s = j\omega$:

$$L(j\omega) = K_o \frac{(1+j\omega T_a)}{\omega^2 [(T_1 T_2 + T_1 T_b + T_2 T_b) \omega^2 - 1] + j\omega^3 [(T_1 T_2 T_b) \omega^2 - (T_1 + T_2 + T_b)]}$$

La parte imaginaria será cero si:

$$\omega_c^3 T_a [(T_1 T_2 + T_1 T_b + T_2 T_b) \omega_c^2 - 1] = \omega_c^3 [(T_1 T_2 T_b) \omega_c^2 - (T_1 + T_2 + T_b)]$$

Despejando ω_c :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{T_a - (T_1 + T_2 + T_b)}{T_a(T_1 T_2 + T_1 T_b + T_2 T_b) - (T_1 T_2 T_b)}} \quad \text{rad / seg. -}$$

Como $T_a > T_b$, el denominador del radicando será siempre positivo, por ende su numerador deberá ser también positivo para que ω_c sea finita y real, para que la traza cruce el eje real negativo del plano $L(s)$, por ende:

$$T_a - (T_1 + T_2 + T_b) > 0, \text{ o}$$

$T_a > (T_1 + T_2 + T_b)$, como se quería demostrar.-

Ejemplo 20:

Si un sistema tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K(s+Z)}{s^2 (s+5)^2 (s+10)};$$

$T_b = 0.1$, por lo tanto $P_b = 1/T_b = 10$ y $K = K_o T_a / T_1 T_2 T_b$

La ganancia del lazo será: $K = 250 K_o T_a$

a) Demarcar en el plano $K=f(Z)$ la región para la cual el sistema sea estable.

b) Graficar la traza de Nyquist para $T_a = 0.80$ seg.

a) La ecuación característica del sistema será:

$$s^2 (s+5)^2 (s+10) + K(s+Z) = 0$$

Operando:

$$s^5 + 20s^4 + 125s^3 + 250s^2 + Ks + KZ = 0$$

Llamaremos: $Z = a$ y $K = k$, para usar el programa Routh

Realizando el arreglo de Routh, se tendrá:

» srouth

Variables posibles de utilizar: kp kd ki t a k

Ingrese el polinomio como vector > [1 20 125 250 k k*a]

Las variables que se encuentran presentes en el polinomio son: a, k.

Ingrese como vector las variables que desee

reemplazar por un valor constante [kp,ki,kd,t,a,k] >

Se optó por dejar todas como elementos variables.

El polinomio ingresado es:

$$s^5 + 20s^4 + 125s^3 + 250s^2 + ks + ka$$

La tabla de Routh es:

[s^5]	1	125	k]
[s^4]	20	250	k*a]
[s^3]	225/2	k-1/20*k*a	0]
[s^2]	250-8/45*k+2/225*k*a	k*a	0]
[s]	k-1/20*k*a-225/2*k*a/(250-8/45*k+2/225*k*a)	0	0]
[1]	k*a	0	0]

Las siguientes expresiones deben ser mayores que cero para que el sistema sea estable.

$$250 - 8/45 k + 2/225 k a$$

$$\frac{k a}{k - 1/20 k a - 225/2} \quad \frac{250 - 8/45 k + 2/225 k a}{}$$

$$k a$$

¿Qué variable desea despejar? kp(p),ki(i),kd(d),t,a,k > k
K

$$\begin{bmatrix} 25 \\ -\frac{25}{20+a} \\ -20+a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2+a \\ \frac{-281250}{(-20+a)} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c} 28125 \\ - \\ \hline -20 + a \end{array} \right]$$

Las restricciones serán, (con los símbolos originales):

1º) $K Z > 0$, primer o tercer cuadrante del plano $K = f(Z)$.-

$$2º) \text{ Si } Z > 20: K > \frac{-28125}{(Z-20)}$$

$$\text{Si } Z < 20: K < \frac{-28125}{(Z-20)}$$

$$3º) \text{ Si } Z > 0, K > 0: K < \frac{-281250(Z-2)}{(Z-20)^2}$$

$$\text{Si } Z < 0, K < 0: K > \frac{-281250(Z-2)}{(Z-20)^2}$$

La figura 48, indica la zona buscada.

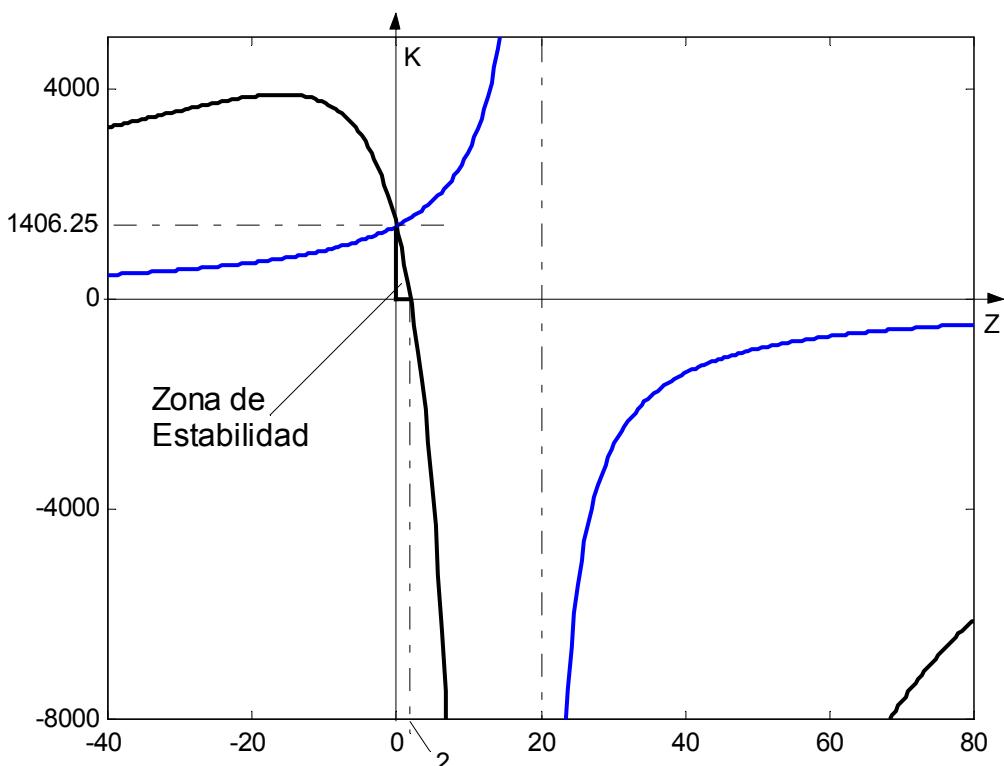


Figura 48

Para $Z = 0$, (un derivador), se tendrá que el K_{\max} será:

$$K = \frac{-28125}{-20} = 1406.25 .-$$

O

$$K = \frac{-281250(-2)}{(-20)^2} = 1406.25 .-$$

La zona ampliada se muestra en la figura 49.

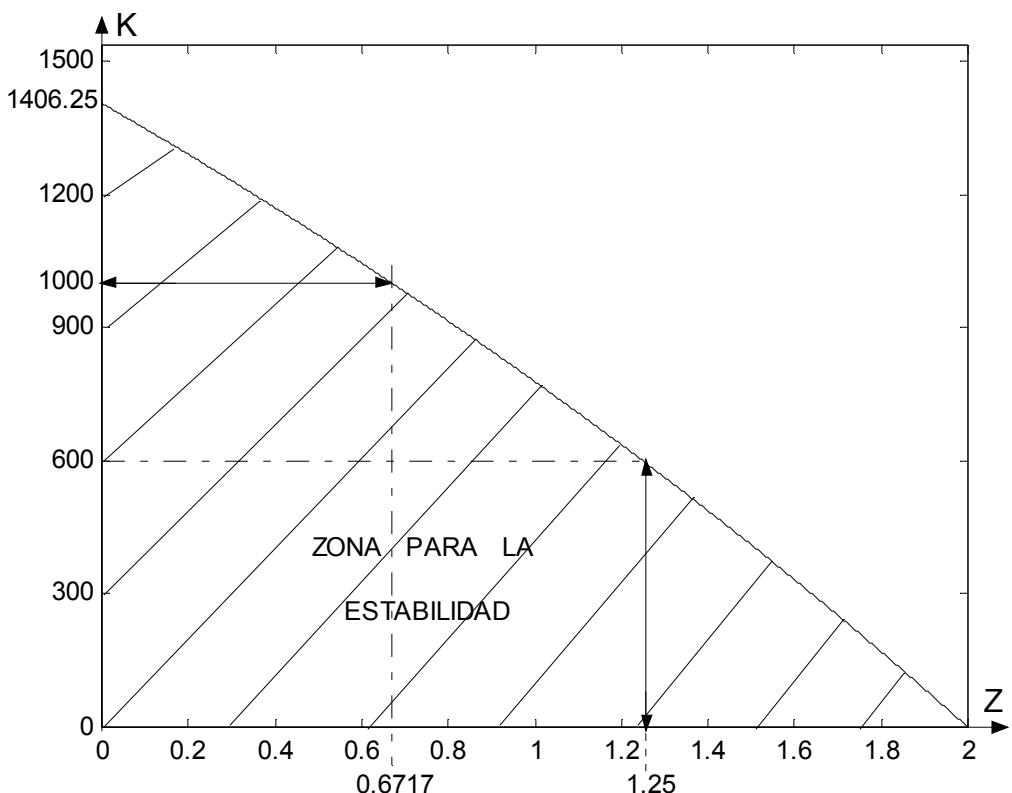


Figura 49

Si $T_a = 0.8$ seg. ;

$$Z=1/T_a=1/0.80=1.25$$

y el rango de K es: $0 < K < 600$.-

Si $K=1000$, el rango de Z para la estabilidad será: $0 < Z < 0.6717$.

b) Si, $T_a > 0.2 + 0.2 + 0.1 = 0.5$; $T_a > 0.50$.

La traza de Nyquist empezará a cruzar el eje real negativo del plano $L(s)$.

Por ende se tendrá:

$$L(s) = \frac{250K_0 T_a (s + 1/T_a)}{s^2 (s + 5)^2 (s + 10)}$$

Si se elige $T_a = 0.8$ seg.

$$L(s) = \frac{200K_0 (s + 1.25)}{s^2 (s + 5)^2 (s + 10)}$$

Donde $K = 250K_0 T_a = 200K_0$.

También se puede decir que como $T_a = 1/Z > 0.50$, deberá ser:

$Z < 2$, acá $Z = 1.25 < 2$, se cumple.-

Del la figura 49, surge que el rango de la ganancia del lazo K para que el sistema sea estable es:

$$0 < K < 6000$$

O

$$0 < K_0 < 3$$

La figura 50, muestra la traza de Nyquist para varios valores de Z con la ganancia del lazo $K = 600 = \text{constante}$.-

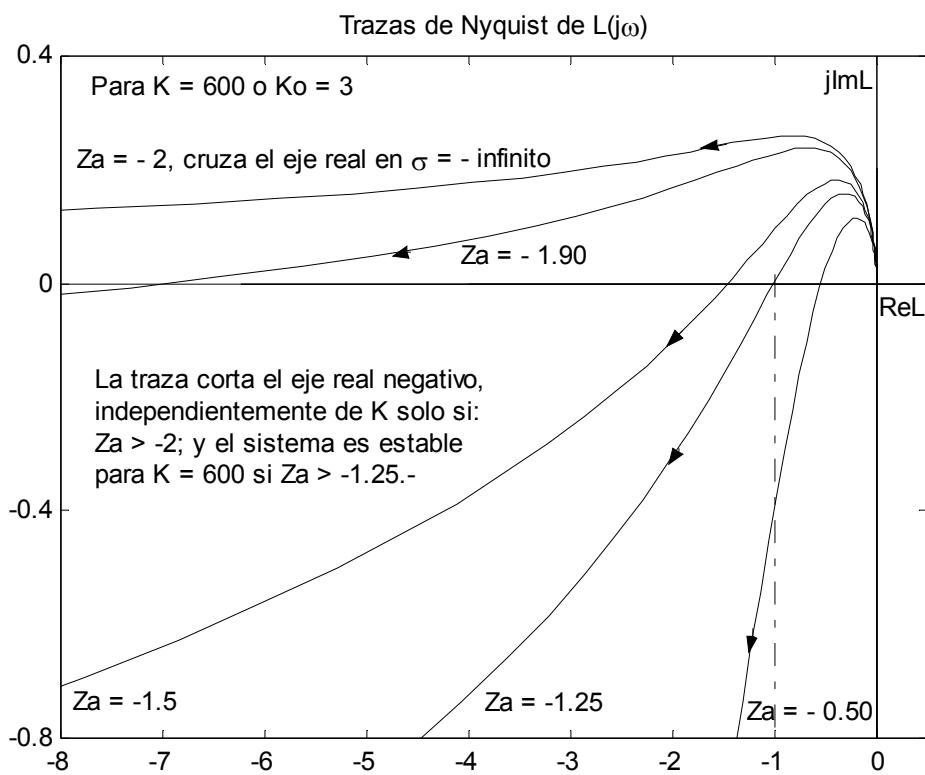


Figura 50

Como se mueven las raíces de la ecuación característica en el plano s para $Z = 1.25$ y $K > 0$, se indica en la figura 51.

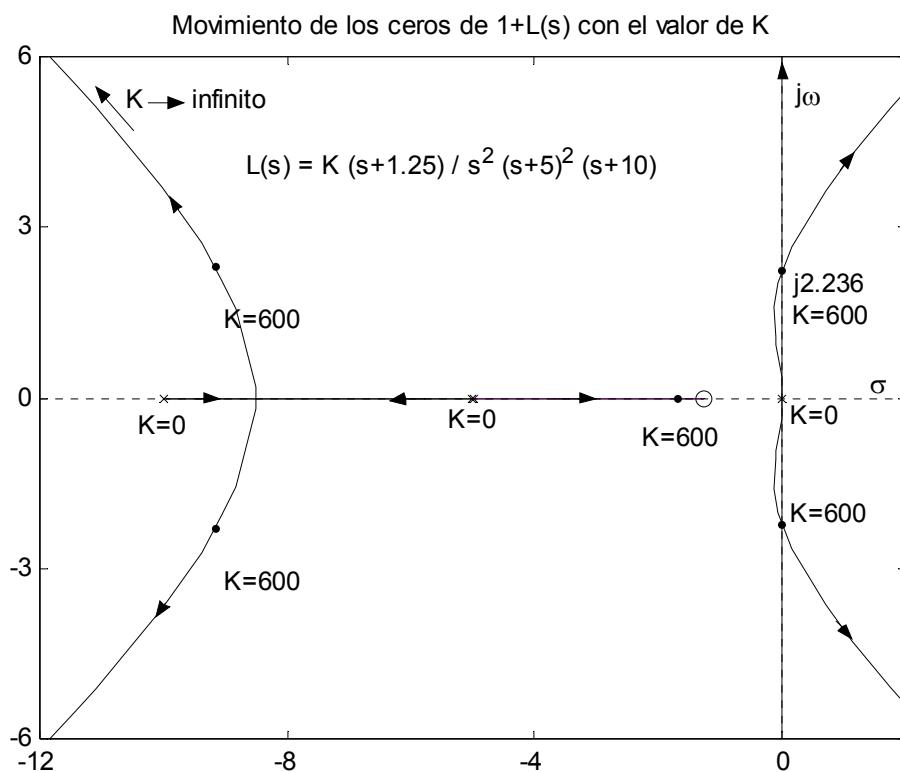


Figura 51

Análisis de Estabilidad de Sistemas Multilazos

En los análisis de estabilidad vistos hasta aquí están todos dirigidos hacia la función de transferencia $L(s)$. No importa si el sistema tiene un solo lazo o lazos múltiples, ya que una vez que se obtiene $L(s)$ el análisis se puede conducir empleando ya sea el criterio de Routh Hurwitz, el de Nyquist o el lugar geométrico de las raíces. Para sistemas realimentados de varios lazos, es *ventajoso* analizar la estabilidad de los sistemas al trabajar desde el lazo más interno hacia el lazo externo o primario, uno a la vez. De ésta forma se *gana más visión* sobre la estabilidad de los lazos individuales del sistema. El ejemplo siguiente ilustrará este enfoque.

Ejemplo 21:

El diagrama de bloque de un sistema que controla la posición de la torreta del cañón de un tanque, se muestra en la figura 52.

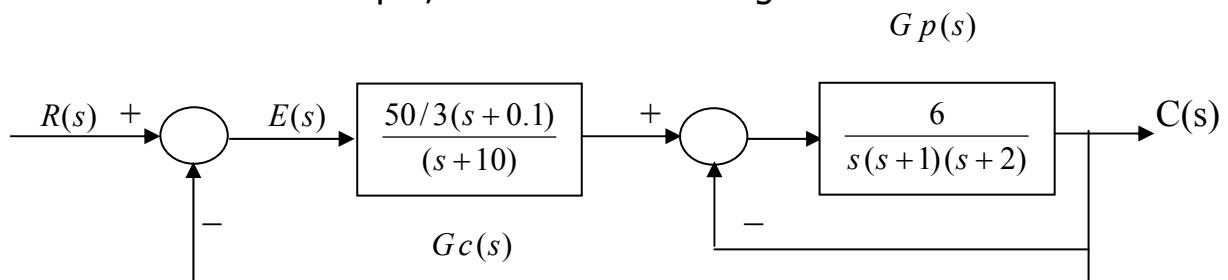


Figura 52

Durante el servicio en el sistema de control de la torreta, el mecánico en forma accidental abrió el lazo externo del sistema. Con la alimentación de energía, la torreta quedó fuera de control y por último quedó inoperante. El propósito de este ejemplo es mostrar que es inadecuado investigar solo la estabilidad del sistema global. En general, para un sistema de control de lazos múltiples, uno debe conducir un análisis sistemático de estabilidad de todos los lazos internos del sistema. Es admisible tener lazos internos inestables, siempre y cuando el sistema completo sea estable. Sin embargo, si tal situación existiese, es importante prever y tomar las precauciones necesarias para prevenir la apertura de los lazos durante la operación.

La función de transferencia del lazo interno es:

$$L(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

La traza de Nyquist de $L(s)$ se muestra en la Figura 53a, ya que la misma pasa por el punto crítico $(-1, j0)$, para $\omega_c = \sqrt{2} \text{ rad/seg}$. el lazo interno será marginalmente estable. Por tanto si el lazo externo del sistema se abre, la torreta oscilará de manera continua con una frecuencia de $\sqrt{2} \text{ rad/seg}$, y no se tomaron precauciones y no se corta la energía el sistema quedara inútil. La función del lazo del sistema global es:

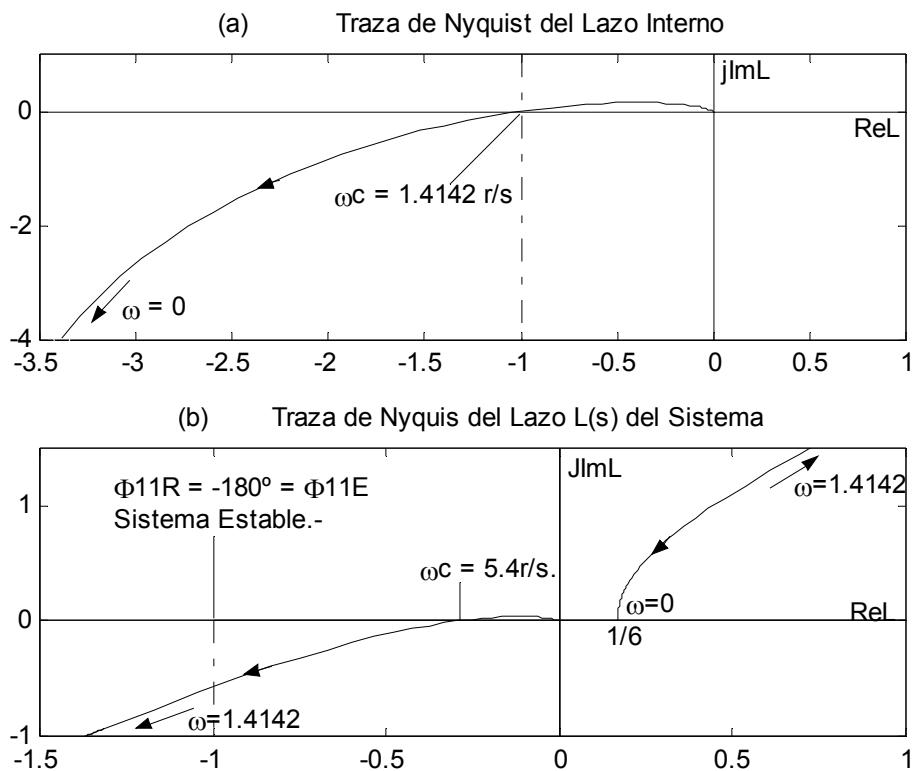


Figura 53

$$L(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{100(s+0.1)}{(s+10)(s^3 + 3s^2 + 2s + 6)}$$

Ya que $P_w = 2$ y $P = 0$, la $L(s)$ es del tipo de fase no mínima, (polos imaginarios), por lo tanto:

$$\Phi_{11E} = -(0.5P_\omega + P)180^\circ = -(1+0)180^\circ \Rightarrow \Phi_{11E} = -180^\circ$$

La traza de Nyquist se muestra en la figura 53b.

Como se cumple que $\Phi_{11R} = \Phi_{11E}$, el sistema será estable.

En general cuando mas de dos lazos están involucrados la forma correcta es empezar analizando la estabilidad del lazo más interno mediante la apertura de los lazos externos y entonces añadir un lazo por vez hasta que el lazo más externo, o primario, sea cerrado.-

Estabilidad de los Sistemas de Control Lineales con Retardos Puros

Los sistemas con retardos de transporte en los lazos por lo general estarán sujetos a mayores problemas de estabilidad que los sistemas sin retardos.

Ya que un retardo puro T_d está modelado por la función de transferencia $[e^{-T_d s}]$, la ecuación característica del sistema ya no será algebraica de coeficientes constantes. Por tanto, el criterio de *Routh no es aplicable*. Sin embargo se verá en lo que sigue que el *criterio de Nyquist se puede aplicar* en forma confiable a un sistema con un retardo puro en el lazo.

Considere que la función de transferencia del lazo de un sistema está de control con un retardo puro está expresada en una forma similar a:

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{K(1+T_1' s)(1+T_2' s)\dots(1+T_v')}{s''(1+T_1 s)(1+T_2 s)\dots(1+T_v s)} e^{-T_d s}, \text{ o también si:}$$

$$L_1(s) = G_1(s)H_1(s)e^{-T_d s}, \text{ se puede expresar:}$$

$$L(s) = L_1(s) \times e^{-T_d s}$$

Donde $L_1(s)$ es una función racional de s con coeficientes constantes, y T_d es el tiempo del retardo puro en segundos. Que el retardo ocurra en $G(s)$ o en $H(s)$ es indistinto a los efectos del estudio de la estabilidad.

La estabilidad de un sistema puede ser investigada al construir la traza de Nyquist de $L(jw)$ y observar su comportamiento con respecto al punto critico $(-1, j0)$ del plano $L(s)$. El efecto del término exponencial es que rota el favor $L_1(jw)$ en cada w , un ángulo (wT_d) radianes en el sentido de las agujas del reloj. La amplitud de $L_1(jw)$ no se afecta por el retardo ya que la amplitud de $[e^{-jT w}]$ es unitaria para todas las frecuencias.

Como en la mayoría de los sistemas de control, reales, la magnitud de $L_1(jw)$ usualmente tiende a cero cuando w se aproxima a infinito. Por lo que la traza de Nyquist de $L(jw)$ a menudo es una espiral hacia el origen en el sentido de las agujas de un reloj cuando w tiende a infinito, por tanto existirá un número infinito de intersecciones con el eje real del plano $L(jw)$. Una vez que se construye la traza de Nyquist de $L(jw)$, la estabilidad del sistema se determina en la forma usual, por ejemplo investigando el ángulo de giro Φ_{11} , o la no inclusión del punto critico $(-1, j0)$, si la $L_1(s)$ es de fase mínima.

Trayectoria Crítica

Hasta ahora se ha utilizado ya sea el punto $(-1, j0)$ o el $(+1, j0)$ del plano $L(jw)$ como el punto critico para analizar la estabilidad cuando la ganancia K es positiva o negativa respectivamente. Bajo ciertas condiciones, se puede ampliar la idea del punto critico al extenderlo a una *trayectoria crítica*.

Si se tiene $L(s) = L_1(s) \times e^{-T_d s}$, se reconoce que las raíces de la ecuación característica deben satisfacer a:

$$1 + L_1(s) e^{-T_d s} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_1(s) e^{-T_d s} = -1 \quad (1)$$

El segundo miembro de esta ecuación señala el hecho de que $(-1, j0)$ es el punto crítico para el análisis de estabilidad del sistema de control. La ecuación (1) se puede escribir como:

$$L_1(s) = \frac{-1}{e^{-T_d s}} \Rightarrow L_1(s) = -e^{-T_d s} \quad (2)$$

Cuando se construye la traza de Nyquist de $L_1(jw)$, *sin el retardo*, $s=jw$ (tramo I), está representada por el primer miembro de la ecuación (2). El término exponencial en la ecuación (2), tiene una magnitud unitaria para cualquier valor de w , y su fase será: $[-\pi + \omega T_d]$ radianes, o midiendo a partir del semieje real negativo ωT_d radianes.

Por lo que el segundo miembro de la ecuación (2), describe una *Trayectoria Crítica*, que es una circunferencia con radio unitario y centrada en el origen del plano $L_1(jw)$. Cuando $T_d = 0$ segundos, la trayectoria comienza en el punto $(-1, j0)$ y conforme T_d se incrementa, el punto crítico se desplaza en una circunferencia con radio unitario en SCMR.-

Si se recorre el tramo I de la trayectoria de Nyquist, el primer miembro de la ecuación (2), representara la traza de Nyquist sin el retardo, o sea, $L_1(jw)$. El módulo de la misma vale la unidad cuando $w=w_g$, por ende: $|L_1(j\omega_g)|=1$. El segundo miembro, la trayectoria crítica, para esa misma w , será:

$-e^{j\omega_g T_{d \text{ máx}}}$, donde (T_d máx.) será el máximo permitido, Figura 54.

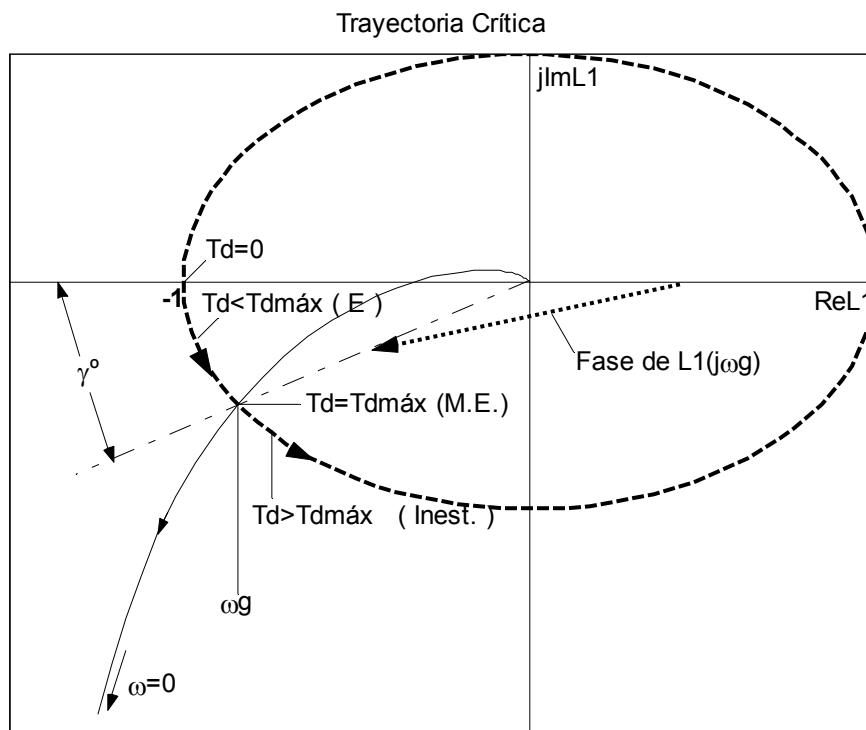


Figura 54

En consecuencia el sistema con el retardo será marginalmente estable si:

$$L_1(j\omega_g) = -e^{j\omega_g T_{d \text{ máx}}}$$

$$\angle L_1(j\omega_g) = \angle -e^{j\omega_g T_{d \text{ máx}}}$$

$$-\pi + \gamma(\text{rad}) = -\pi + \omega_g T_{d \text{ máx.}} \Rightarrow \gamma(\text{rad}) = \omega_g T_{d \text{ máx.}}$$

Por lo tanto:

$$T_{d \text{ máx.}} = \frac{\gamma^\circ \times \pi(\text{rad})}{\omega_g (\text{rad / seg.}) \times 180^\circ} \quad (\text{seg.}) \quad (3)$$

Donde:

$$\gamma^\circ = 180^\circ + \angle L_1(j\omega_g), \quad \text{con} \quad \angle L_1(j\omega_g) < 0 \text{ en grados. -}$$

Dada la función de transferencia del lazo, con $K=\text{cte}$, y T_d variable, la frecuencia ω_g llamada frecuencia de cruce de ganancia que fijada.-

Cuando:

$T_d < T_{d \text{ máx.}}$: el sistema será estable pues, el punto crítico situado en la trayectoria crítica correspondiente no estará incluido por la traza $L_1(jw)$.-

Si, $T_d = T_{d \text{ máx.}}$: el sistema será marginalmente estable pues, la traza de Nyquist sin el retardo pasa por el punto crítico situado en la trayectoria correspondiente.

Si $T_d > T_{d \text{ máx.}}$: el sistema será inestable pues, el punto crítico situado en la trayectoria crítica correspondiente estará incluido por la traza $L_1(jw)$.-

En consecuencia los pasos a seguir para obtener el tiempo de retardo máximo son los siguientes:

1. Determinar ω_g , haciendo $|L_1(j\omega_g)| = 1$.
2. Determinar la fase de $L_1(j\omega_g)$.
3. Determinar $\gamma^\circ = 180^\circ + \angle L_1(j\omega_g)$.
4. Determinar $T_{d \text{ máx.}}$, con la expresión (3).

Ejemplo 22:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = L_1(s) e^{-T_d s} = \frac{K e^{-T_d s}}{s(s+1)(s+2)}$$

Para $K=1$, determinar el $T_{d \text{ máx.}}$.

Para $T_d=0$, el rango de K para que el sistema sea estable es $0 < K < 6$.-

El problema es encontrar el valor máximo del tiempo de retardo T_d , para que el sistema sea marginalmente estable.

La Figura 55, muestra la traza de Nyquist de $L_1(jw)$, junto con la trayectoria crítica $-e^{j\omega T_d}$.

La frecuencia en para la cual la traza de $L_1(jw)$ intercepta la trayectoria crítica, se encuentra al hacer la magnitud de $|L_1(j\omega_g)| = 1$, o sea:

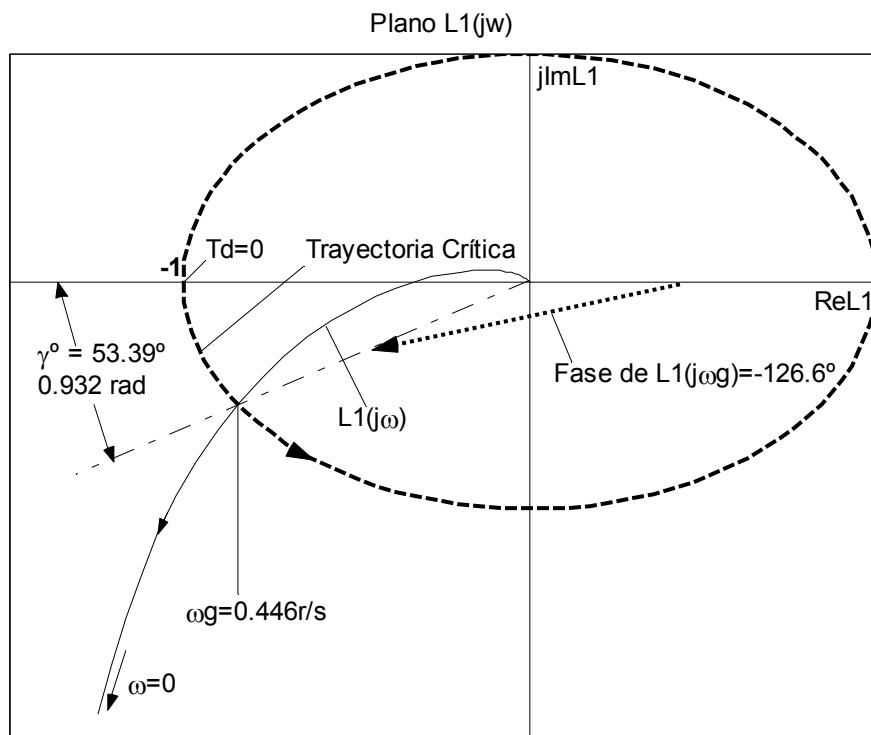


Figura 55

$$|L_1(j\omega_g)| = \frac{K}{\omega_g \sqrt{1 + \omega_g^2} \sqrt{4 + \omega_g^2}} = 1$$

$\omega_g^2 (1 + \omega_g^2)(4 + \omega_g^2) = K^2 = 1$, operando se llega a:

$$\omega_g^6 + 5\omega_g^4 + 4\omega_g^2 - 1 = 0$$

Ya se conoce, por Routh, que un polinomio de orden par, con potencias alternadas, las raíces serán pares simétricos respecto al origen, en este caso tres pares, la solución será la raíz positiva del par real.

Las mismas son: $\pm j1.9779$; $\pm j1.1342$ y ± 0.446 : en consecuencia:

1. $\omega_g = 0.446 \text{ rad / seg.}$ –
2. $\angle L_1(j\omega_g) = -[90^\circ + \tan^{-1} \omega_g + \tan^{-1} \omega_g / 2] = -126.608^\circ$
3. $\gamma^\circ = 180^\circ + (-126.608^\circ) = 53.392^\circ$
4. $T_{d \text{ máx.}} = \frac{53.392^\circ \times \pi}{0.446 \times 180} \Rightarrow T_{d \text{ máx.}} = 2.09 \text{ seg.}$ –

Para que el sistema sea estable el rango de T_d deberá ser:

$0 \text{ seg.} < T_d < 2.09 \text{ seg}$

La figura 56 muestra las trazas de Nyquist para $K=1$, con:

$T_d = 0$; 0.8 ; 2.09 y 4 seg.- Se puede apreciar el deterioro de la estabilidad con el aumento del tiempo de retardo. Cuando $T_d = 2.09$ seg la traza pasa por el punto crítico y el sistema será Marginalmente Estable. El sistema es

inestable cuando $T_d > 2.09$ seg puesto que el punto critico estará incluido o el $\Phi_{11R} = +270^\circ \neq \Phi_{11E} = -90^\circ$.

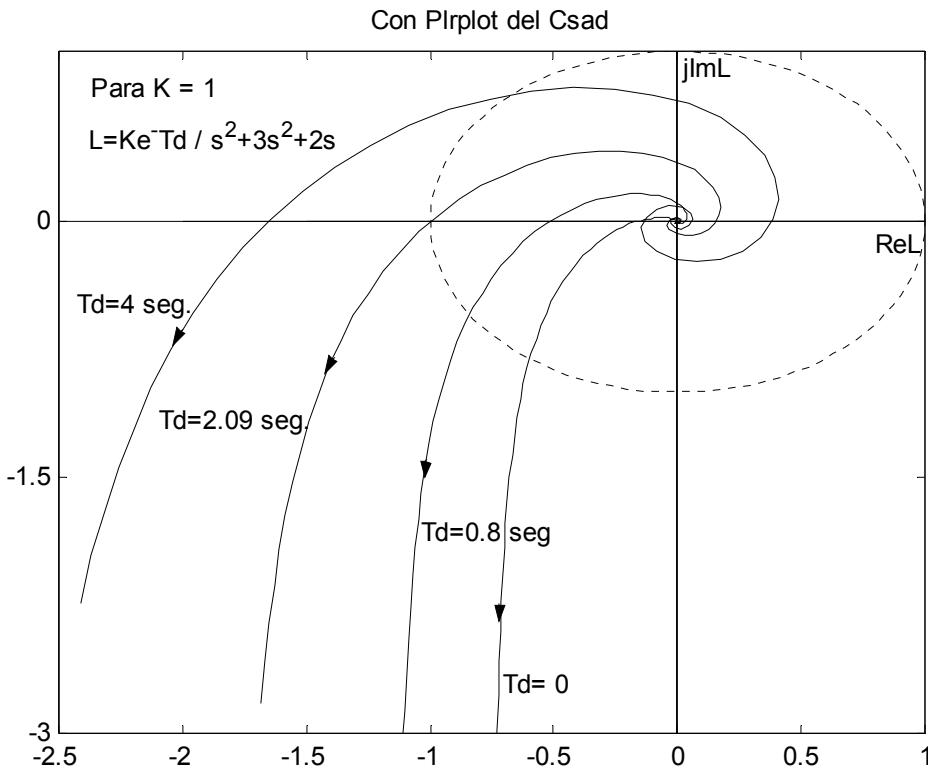


Figura 56

Ahora se tratará el problema siguiente: dado un tiempo de retardo T_d fijo, determinar el rango de la ganancia del lazo para que el sistema sea estable.

La solución analítica de las intersecciones de la traza de Nyquist con el eje real del plano $L(jw)$ ya *no será trivial*, (como lo era para funciones $L(s)$ racionales), ya que las ecuaciones que gobiernan las intersecciones ya no serán algebraicas.

Para demostrar esto se verá el mismo sistema del ejemplo 22, pero ahora con T_d fijo y se determinará el rango de K para la estabilidad.

Ejemplo 23:

La función de transferencia del lazo era:

$$L(s) = \frac{K e^{-T_d s}}{s(s+1)(s+2)} = K \frac{e^{-T_d s}}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

Como: $e^{-j\omega T_d} = \cos(\omega T_d) - j \sin(\omega T_d)$, se tendrá:

$$L(j\omega) = K \left[\frac{(\cos \omega T_d - j \sin \omega T_d)}{-3\omega^2 + j\omega(2 - \omega^2)} \right]$$

La parte imaginaria será nula si:

$$3\omega_c^2 \sin \omega_c T_d = \omega_c (2 - \omega_c^2) \cos \omega_c T_d$$

Operando se llega a:

$$tag(\omega_c T_d) = \frac{(2 - \omega_c^2)}{3\omega_c}; \quad \text{si definimos: } \omega_c T_d = x_c \Rightarrow \omega_c = \frac{x_c}{T_d}$$

$$tag(\omega_c T_d) = \frac{2 \frac{T_d^2}{T_d^2} - \omega_c^2 \frac{T_d^2}{T_d^2}}{3\omega_c \frac{T_d}{T_d}} \Rightarrow tag(x_c) = \frac{2T_d^2 - x_c^2}{3T_d x_c}$$

Si se define: $y = tag(x)$ e $y' = \frac{2T_d^2 - x_c^2}{3T_d x}$, cuando: $x = x_c$; $y = y'$

Una vez obtenido x_c , en rad., se puede aplicar: $\omega_c = \frac{x_c}{T_d}$ para obtener ω_c .

Por ejemplo si $T_d=2.09$ seg., quedará: $tag(x_c) = \frac{8.7362 - x_c^2}{6.27 x_c}$, la figura 57,

muestra la obtención gráfica de x_c , (la menor), y en consecuencia ω_c .

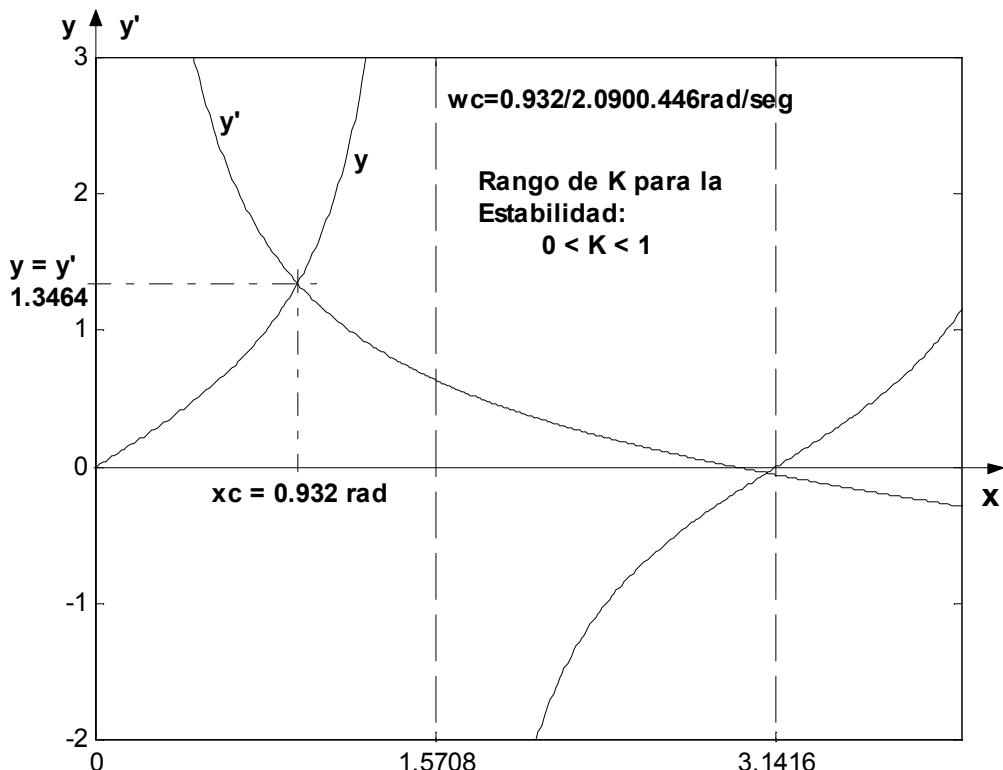


Figura 57

El rango del parámetro K , para la estabilidad del sistema será:

$$L(j\omega_c) = K \frac{\cos x_c}{-3\omega_c^2} = K \frac{\cos(0.932)}{-3(0.446)^2} = -K > -1 \Rightarrow K < 1$$

Por lo tanto el rango buscado es:

$$0 < K < 1$$

Si en el mismo sistema el tiempo de retardo se aumenta a $T_d=4$ seg., se

Tendrá, procediendo de la misma manera:

$$tag(x_c) = \frac{32 - x_c^2}{12x_c}; \text{ la primera solución es: } x_c = 1.1486 \text{ rad.} \Rightarrow \omega_c = \frac{x_c}{T_d} = 0.287 \text{ r/s}$$

En consecuencia:

$$L(j\omega_c) = K \frac{\cos x_c}{-3\omega_c^2} = K \frac{\cos(1.1486)}{-3(0.287)^2} = \frac{-K}{0.6037} > -1 \Rightarrow K < 0.6037$$

Como era lógico bajo el valor máximo de K.

$$0 < K < 0.6037$$

Todo lo visto hasta aquí se puede estudiar haciendo uso de la computadora, con programas ya conocidos, por ejemplo, entre otros:

1. El Plrplot: del Csad/Matlab
2. Con el lenguaje Simbólico en Matlab
3. Usando: L=tf(n,d,'inputdelay ',Td) con Nyquist en Matlab.

1. Con el Plrplot:

» plrplot

Default transfer function:

2

s^1 + 0.5

Enter numerator [n] > 1

Enter denominator [d] > [1 3 2 0]

G=Open-Loop T=Closed-Loop S=Sensitivity

G=T/(1-T) T=G/(1+G) S=1/(1+G)=1-T

Is entered TF G, T, S?, [g] >

- PLR PLOT OPTIONS -

Plot Freq range

Units Time delay

Zoom New TF

Grid Choose data

Hold Display TF

Label Attributes

w/f point Roots

View data

Quit Interpolate

PLR PLOT > t

Enter time delay in G (sec) [0] > 2.09

PLR PLOT > P

Se grafica la traza de Nyquist., como se puede ver en la figura 58 el sistema es marginal ente estable. Para $T_d = 4$ seg., se procede en forma

similar, la traza también se indica en la figura 58, para $K=1$, el sistema sería inestable como se puede apreciar.

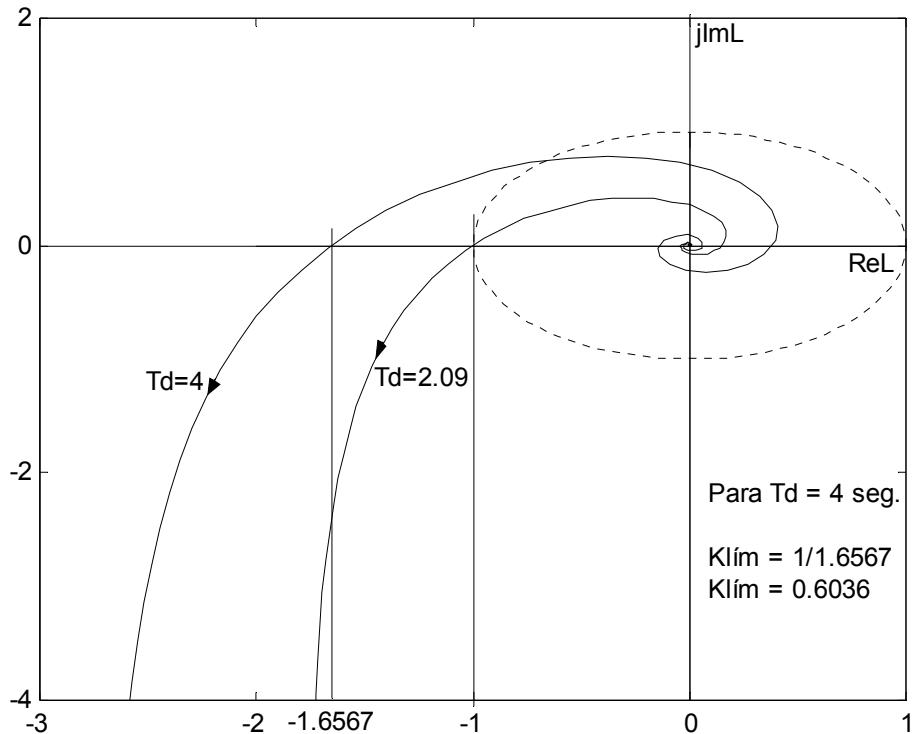


Figura 58

Luego, para $T_d = 4$ seg, con $K = 1$, la parte real es:

PLR PLOT > i

Search given Real, Imag or Freq? [r] > i

Max value allowed is 0.7877

Min value allowed is -4.237

Enter Imag > 0 (tomando solo el primer cruce, se tiene)

Interpolated Data Points are:

Frequency	Real	Imag
0.2871	-1.6567	0

Luego:

$$K_L = \frac{1}{1.6567} = 0.6036$$

El rango para la estabilidad será:

$$0 < K < 0.6036$$

2. Con el Lenguaje Simbólico.

Supongamos que $T_d=4$ seg.

» syms x

» y=tan(x);

» y1=(32-x^2)/(12*x);

» ezplot(y,0,6)

Se grafica $y=\tan(x)$, figura 59.

```

» hold on
» ezplot(y1,0,6)
Se grafica y1, figura 59

```

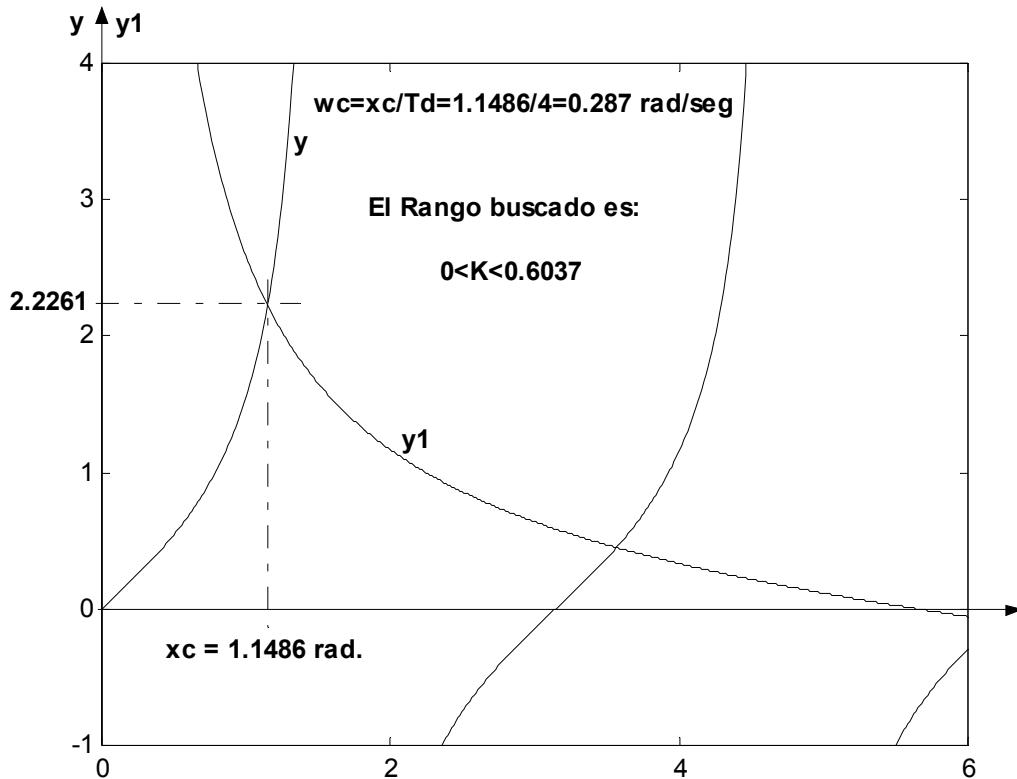


Figura 59

3. Funciones con un retardo en Matlab:

```

» L=tf(1,[1 3 2 0],'inputdelay',4)

```

Transfer function:

$$\frac{1}{\exp(-4s) * \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{s^3 + 3s^2 + 2s}}$$

```

» [re,im,w]=nyquist(L);
» plot(re(:,im(:,k-))

```

Se puede arreglar con la función zoom, el resultado se muestra en la Figura 60.

Con la función ginput, se determina el módulo $|L(j\omega_c)|$:

```

» ginput
ans =
-1.6567 -0.0000

```

Por lo tanto: $K_L = \frac{1}{1.6567} = 0.6036$, no hubo necesidad de calcular wc.

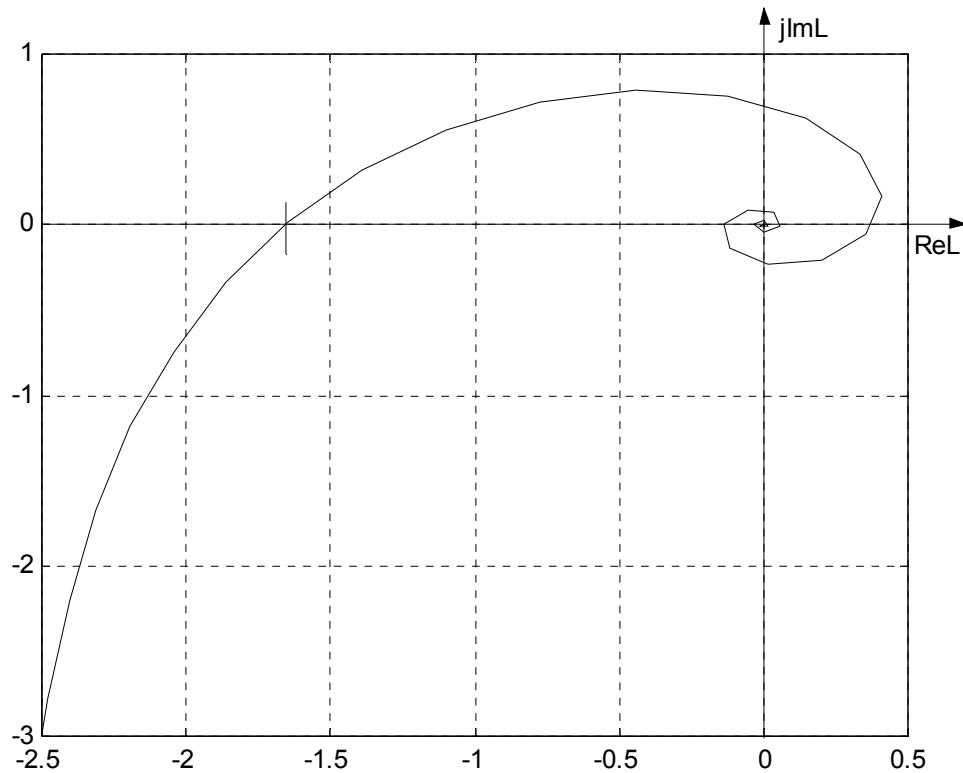


Figura 60

Ejemplo 24:

Un sistema tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K(s+2)e^{-0.1s}}{(s^2 + 4)},$$

Ya se estudio, en el ejemplo 12, que sin el retardo el rango de K para la estabilidad era: $0 < K < \infty$.

Se verá como se reduce el K_{\max} , con un tiempo de retardo de apenas una décima de segundo, $T_d = 0.10$ seg.

$$L(j\omega) = K \frac{(2 + j\omega)[\cos(\omega Td) - j\sin(\omega Td)]}{(4 - \omega^2) + j0}, \text{ o también}$$

$$L(j\omega) = \frac{K}{(4 - \omega^2)} \frac{[2\cos(\omega Td) + \omega \sin(\omega Td)] + j[\omega \cos(\omega Td) - 2\sin(\omega Td)]}{1 + j0}$$

La parte imaginaria será nula si:

$$\omega_c \cos(\omega_c Td) = 2 \sin(\omega_c Td)$$

$$\operatorname{tag}(\omega_c Td) = \frac{\omega_c}{2} \times \frac{Td}{Td} = \frac{x_c}{2Td}; \quad \text{con } x_c = \omega_c Td \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{x_c}{Td}$$

Como $T_d=0.1$ seg, se tendrá:

$$\operatorname{tag}(x_c) = 5 x_c$$

Llamando:

$$y = \operatorname{tag}(x)$$

$$y_1 = 5x$$

Cuando $x=x_c$, $y=y_1$, como se muestra en la figura 61.

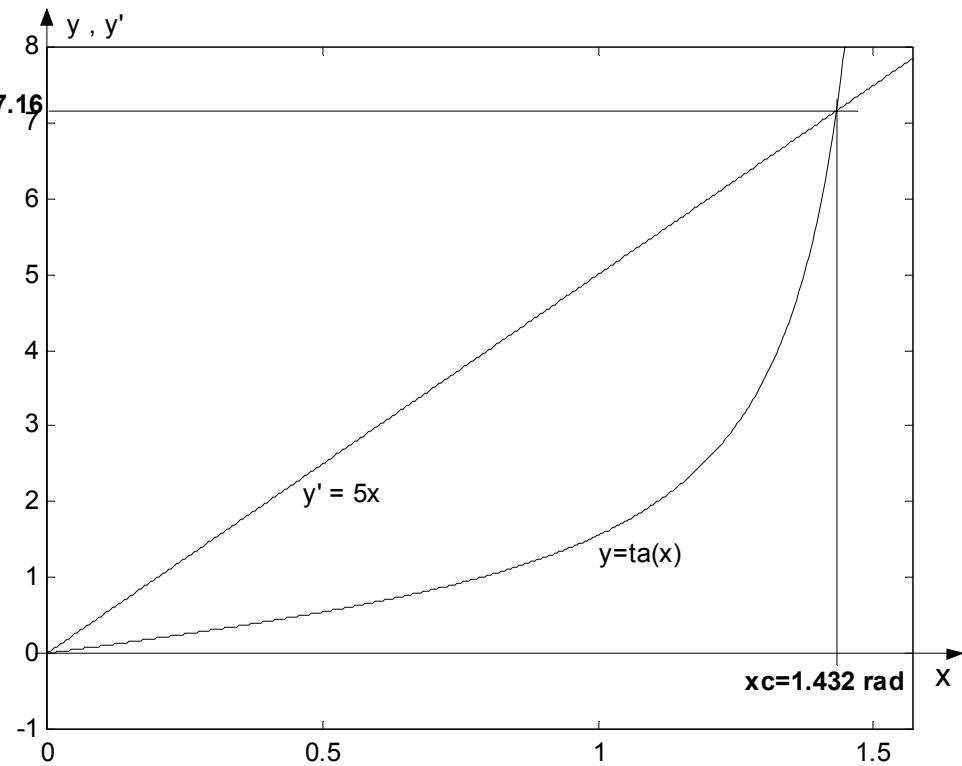


Figura 61

De la misma se ve que:

$$\omega_c = \frac{1.432}{0.1} \Rightarrow \omega_c = 14.32 \text{ rad/seg.}, \text{esta frecuencia depende solo de } T_d.$$

En consecuencia se tendrá:

$$L(j\omega_c) = \frac{K}{(4 - \omega_c^2)} [2 \cos(x_c) + \omega_c \operatorname{sen}(x_c)] = -0.0719K > -1$$

$$\text{Por lo tanto: } 0.0719K < 1 \Rightarrow K < 13.908$$

De infinito bajo a 13.908, el rango total para la estabilidad será:

$$0 < K < 13.908$$

Para $K = 1$ con T_d variable, se puede determinar el T_d máx.

Se grafica la traza de Nyquist Pata $T_d = 0$ seg. y se obtiene la *mayor* frecuencia donde el módulo de $L(jw_g)$ sea la unidad.

$$L_1(s) = \frac{(s+2)}{(s^2+4)} \Rightarrow \text{se reemplaza } s \text{ por } jw_g \text{ y el módulo será:}$$

$$|L_1(j\omega_g)| = \frac{\sqrt{4 + \omega_g^2}}{(4 - \omega_g^2)} = 1 \Rightarrow \omega_g^4 - 9\omega_g^2 + 12 = 0$$

La solución mayor, real y positiva es:

$$\omega_g = 2.715 \text{ rad/seg.}$$

La fase de $L_1(jw_g)$ será: $\angle L_1(j\omega_g) = \operatorname{tag}^{-1}(\omega_g/2) - (180^\circ) = -126.37^\circ$

En consecuencia: $\gamma^\circ = 180^\circ - 126.37^\circ = 53.63^\circ$

$$\text{El tiempo de retardo m\'aximo ser\'a: } Td_{m\'ax.} = \frac{53.63^\circ \times \pi}{2.715 \times 180} \Rightarrow Td_{m\'ax.} = 0.345 \text{ seg.}$$

La figura 62, muestra las trazas de Nyquist sin el retardo y con el T_d m\'aximo.

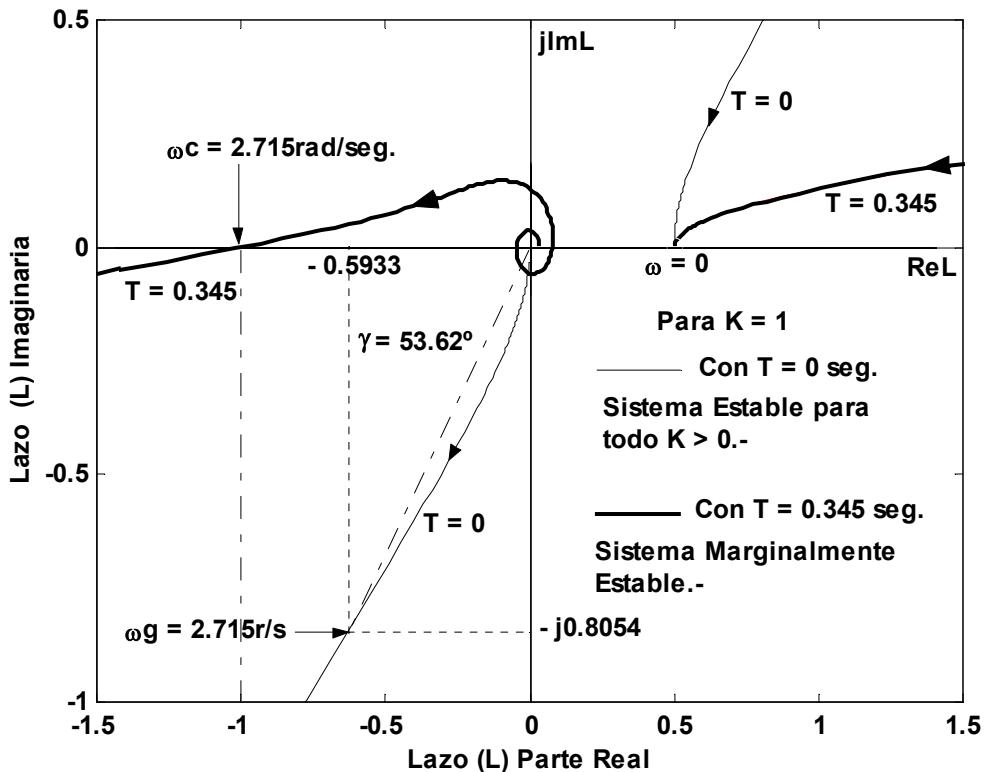


Figura 62

Ejemplo 25:

Retomemos la $L(s)$ del ejemplo 14 en el cual el rango de K para la estabilidad era tambi\'en $0 < K < \infty$. Se ver\'a como con un retardo de una d\'ecima de segundo se reduce considerablemente el $K_{\text{L\'imite}}$.

$$L(s) = \frac{K(s^2 + 1)e^{-0.1s}}{s(s+1)(s^2 + 4)}$$

$$L(j\omega) = \frac{K(1 - \omega^2)}{\omega(4 - \omega^2)} \times \frac{\cos(\omega Td) - j \sin(\omega Td)}{-\omega + j}$$

La parte imaginaria ser\'a nula si:

$$\omega_c \sin(\omega_c Td) = \cos(\omega_c Td)$$

$$\operatorname{tag}(\omega_c Td) = \frac{1}{\omega_c} \times \frac{Td}{Td} = \frac{Td}{(\omega_c Td)}; \quad \text{con } x_c = \omega_c Td \Rightarrow \omega_c = \frac{x_c}{Td}, \text{ y } T_d = 0.1 \text{ seg.}$$

$$\operatorname{tag}(x_c) = \frac{0.10}{x_c};$$

Llamando:

$$y = \operatorname{tag}(x)$$

$$y_1 = \frac{0.10}{x}$$

Cuando $x=x_C$, $y=y_1$, como se muestra en la figura 63.

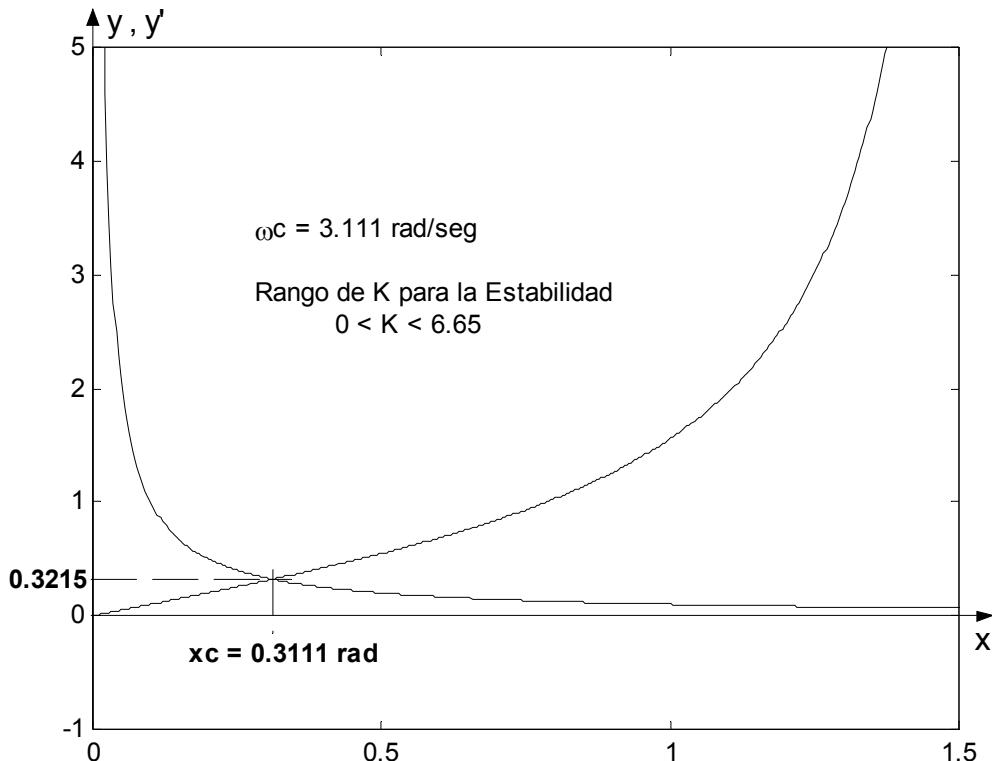


Figura 63

De la misma se obtiene,

$\omega_c = 3.111 \text{ rad/seg.}$, recordar que esta frecuencia es si $T_d = 0.1 \text{ seg.}$ -

Por lo tanto:

$$L(j\omega_c) = \frac{K(1-\omega_c^2)}{(4-\omega_c^2)} \times \frac{-\operatorname{sen}(x_c)}{\omega_c} = -0.15038K < -1 \Rightarrow K < 6.6498$$

El rango buscado será:

$$0 < K < 6.65$$

Con $K = 1$, se puede encontrar el tiempo de retardo máximo permitido por el sistema. Se sigue el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior.

$$\left| L_1(j\omega_g) \right| = \frac{|K(1-\omega_g^2)|}{|\omega_g(4-\omega_g^2)|\sqrt{1+\omega_g^2}} = 1, \text{ operando se llega a:}$$

$$\omega_g^8 - 7\omega_g^6 + 7\omega_g^4 + 18\omega_g^2 - 1 = 0$$

Cuyas soluciones son: ± 2.1716 ; ± 1.8388 ; ± 0.2334 y $\pm j1.0731$

La solución positiva real y *mayor* es:

$$\omega_g = 2.172 \text{ rad/seg.}$$

$$\angle L_1(j\omega_g) = -\operatorname{tag}^{-1}[1/(-\omega_g)] = -[180^\circ - \operatorname{tag}(1/\omega_g)] = -(180^\circ - 24.755^\circ) = -155.274^\circ$$

Por lo tanto: $\gamma^\circ = 180^\circ - 155.755^\circ = 24.725$

En consecuencia:

$$Td_{máx} = \frac{24.725 \times \pi}{2.1716 \times 180} \Rightarrow Td_{máx} = 0.1987 \text{ seg. -}$$

La figura 64, muestra las trazas para $Td=0$ y $Td_{máx}$ con $K = 1$.

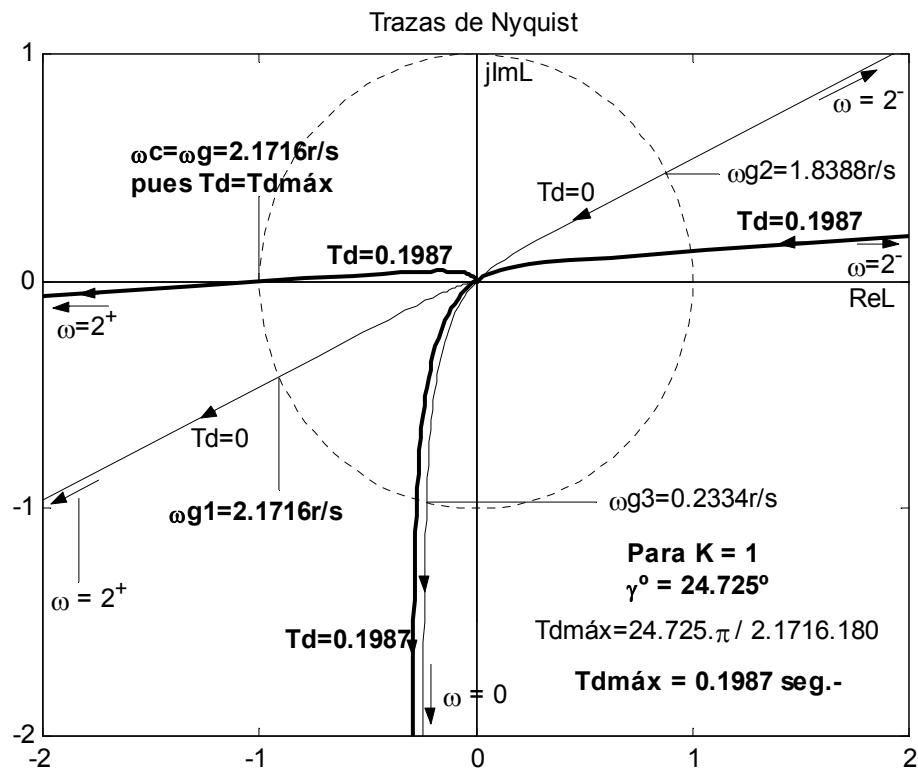


Figura 64

CONTROL II (Elo y Bio)

Tema:

Técnica del Lugar Geométrico
de las Raíces de la Ecuación
Característica de un Sistema
de Control Lineal.

Prof. Ing. Carlos F. Martín

Año: 2010

Introducción:

Se sabe de la importancia del conocimiento de los polos y ceros de la función de transferencia de un sistema de control lineal, sobre el desempeño dinámico del mismo. Las raíces de la ecuación característica, las cuales son los polos de la función de transferencia de lazo cerrado, determinan la estabilidad relativa y absoluta de un sistema lineal.

Se debe tener en mente, que las propiedades del transitorio de un sistema también dependen de los ceros de la función de transferencia del sistema. Un estudio importante en los sistemas de control lineales es la investigación de las trayectorias de cada una de las raíces de la ecuación característica, (o simplemente, *lugar geométrico de las raíces*) cuando algún parámetro del sistema varía en todo su rango de $-\infty \text{ a } +\infty$.

En este capítulo presentaremos varios ejemplos que ilustran la utilidad del lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica en el estudio de los sistemas de control lineales. Además se mostrara como construir un bosquejo rápido de estos lugares geométricos mediante el seguimiento de algunas simples reglas. Para dibujar el lugar geométrico de las raíces en forma exacta, se puede emplear algún programa del lugar geométrico de las raíces con una computadora digital. Por ejemplo, los programas: *rplot* de la caja de herramientas del Csad/Matlab, *rlocus*, en Matlab, *root locus* en el programa CC, solo por nombrar algunos. Todos ellos se basan en el conocimiento de la función de transferencia del lazo, para generar los datos y las gráficas de los lugares geométricos de las raíces.

Sin embargo, es importante aprender las propiedades las bases del Lugar Geométrico de las Raíces, sus propiedades, así como la forma de interpretar los datos proporcionados por el mismo para fines de análisis y diseño de los sistemas de control. Como un ingeniero inteligente, se debe saber si los datos provistos por el lugar geométrico de las raíces son en realidad correctos, y ser capaz de obtener información vital del lugar.

El material en este capítulo está preparado con estos objetivos en mente. La técnica del lugar de las raíces no está confinada solo al estudio de los sistemas de control. La ecuación bajo estudio no necesariamente tiene que ser una ecuación característica de un sistema lineal. En general la técnica puede ser aplicada al estudio del comportamiento de las raíces de cualquier ecuación algebraica de elevado orden.

El problema general del Lugar de las Raíces puede ser formulado partiendo de la siguiente ecuación de la variable compleja s:

$$F(s) = P(s) + K Q(s) = 0 \quad (1)$$

Donde $P(s)$ es un polinomio de orden "n" de s:

$$P(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0 \quad (2)$$

Y $Q(s)$ un polinomio de orden w-ésimo de s; n y w son enteros positivos.

$$Q(s) = s^w + q_{w-1}s^{w-1} + \dots + q_1s + q_0 \quad (3)$$

K es una constante real la cual puede variar de $-\infty$ a $+\infty$.

Los coeficientes $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_0, q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_0$ se considera que son constantes, pueden ser reales o complejos aunque nuestro principal interés aquí es con coeficientes reales.

El Lugar de las Raíces de múltiples parámetros variables puede ser tratado variando un parámetro por vez. Las trayectorias resultantes son llamadas Lugar Generalizado de las Raíces o Contorno de la Raíces.

Aunque el Lugar de las Raíces de la ecuación (1), cuando K varía entre $-\infty$ y $+\infty$ es referido en la literatura de los sistemas de control como El Lugar de la Raíz, para propósitos de identificación, definiremos las siguientes categorías de los lugares geométricos de las raíces basándonos en el signo del parámetro K :

1º) Lugar de las Raíces (L.R.): Es la porción del lugar geométrico de las raíces donde K es positiva: $0 \leq K < \infty$.

2º) Lugar de las Raíces Complementario o Inverso: (LRC o LRI): Es la porción del lugar geométrico de las raíces donde K es negativo: $-\infty < K \leq 0$

3º) Lugar Geométrico Completo de las Raíces: Se refiere al lugar geométrico de las raíces para el rango total de la ganancia: $-\infty < K < +\infty$.

4º) Contorno de las Raíces (CR.): Lugar de las raíces cuando varía más de un parámetro del sistema.

Propiedades Básicas del Lugar Geométrico de las Raíces:

- Como nuestro principal interés son los sistemas de control, se considera la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema de un solo lazo

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4)$$

Manteniendo en mente que la función de transferencia de sistemas de una entrada y una salida con múltiples lazos también se puede expresar en forma similar.

- La ecuación característica del sistema en lazo cerrado se obtiene al igualar a cero el polinomio denominador de $\frac{C(s)}{R(s)}$.

Por lo tanto, las raíces de la ecuación característica deben satisfacer:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (5)$$

Si fuese de lazos múltiples sería: $1 + L(s) = 0$

Supongamos que $G(s)H(s)$ contiene un solo parámetro variable K como un factor multiplicativo, de forma que la función racional de lazo se pueda expresar como:

$$G(s)H(s) = \frac{KQ(s)}{P(s)} \quad (6)$$

Donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios como los definidos en las ecuaciones (2) y (3) respectivamente. Por lo tanto la ecuación (5) será:

$$1 + \frac{KQ(s)}{P(s)} = \frac{P(s) + KQ(s)}{P(s)} = 0 \quad (7)$$

Es fácil ver que el polinomio numerador de la ecuación (7) es idéntico a la ecuación (1).

- Cuando el parámetro variable K no aparece como un factor multiplicativo de $G(s)H(s)$, se podrá siempre llegar a escribir las ecuaciones características con la forma de la ecuación (1).

Un ejemplo de esta situación sería si el parámetro variable es Ka y:

$$G(s)H(s) = \frac{s^2 + (3 + 2Ka)s + 5}{s(s+1)(s+2)} \quad (8)$$

La ecuación característica del sistema de lazo cerrado es:

$$s(s+1)(s+2) + [s^2 + (3 + 2Ka)s + 5] = 0 \quad (9)$$

$$[s(s+1)(s+2) + s^2 + 3s + 5] + [2Ka s] = 0$$

Dividiendo ambos miembros por los términos que no contienen al parámetro variable Ka :

$$1 + \frac{2Ka s}{s(s+1)(s+2) + s^2 + 3s + 5} = 1 + \frac{2Ka s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 5} = 0 \quad (10)$$

La cual es de la forma general de la ecuación (7) con:

$$K = 2Ka$$

$$Q(s) = s \quad (11)$$

$$P(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 5 \quad (12)$$

La conclusión es que, dada cualquier función de transferencia de lazo $G(s)H(s)$ con un parámetro variable cualquiera K involucrado en ella, podemos siempre encontrar la ecuación característica igualando el polinomio $1 + G(s)H(s)$ como en el paso de la ecuación (8) a la ecuación (9).

Para aislar el parámetro variable K , primero agrupamos los términos de la ecuación característica que contienen a K , también agrupamos a los términos sin K ; por lo tanto quedan determinados los polinomios $P(s)$ y $Q(s)$ como en la ecuación (1). Finalmente, dividimos ambos miembros de la ecuación característica por $P(s)$ que contiene a los términos sin K . Este último paso es esencial pues de él se obtiene lo que se denomina la Función de Transferencia del Lazo Equivalente y en base a ella construir el lugar de las raíces, pues se verá que todas las propiedades del Lugar de las Raíces de la ecuación (1) son derivadas de las características de la función $Q(s)/P(s)$.

- Ahora estamos listos para investigar las condiciones bajo las cuales la ecuación (5) o (7) son satisfechas.

Supongamos expresar a $G(s)H(s)$ como:

$$G(s)H(s) = KG_1(s)H_1(s) \quad (13)$$

Donde $G_1(s)H_1(s)$ es igual a $Q(s)/P(s)$ y no contiene el parámetro variable K .

Luego, la ecuación (5) se puede escribir:

$$\boxed{1 + KG_1(s)H_1(s) = 0} \quad (14)$$

$$\boxed{G_1(s)H_1(s) = -\frac{1}{K}}$$

Para satisfacer la última ecuación, las dos condiciones siguientes deben ser mantenidas simultáneamente:

Condición de Magnitud:

$$|G_1(s)H_1(s)| = \left| \frac{1}{K} \right| \quad -\infty < K < \infty \quad (15)$$

Condición Angular:

$$\boxed{\begin{aligned} G_1(s)H_1(s) &= (2k+1)\pi \quad o \quad = m180^\circ \quad (K \geq 0) \\ &= \text{Multiplo impar de } 180^\circ \end{aligned}} \quad (16)$$

$$\boxed{\begin{aligned} G_1(s)H_1(s) &= 2k\pi \quad o \quad = m'180^\circ \quad (K \leq 0) \\ &= \text{Multiplo par de } 180^\circ \end{aligned}} \quad (17)$$

Donde:

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (*cualquier entero*)

o

$m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ (*cualquier impar*)

$m' = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ (*cualquier par*)

En la práctica las condiciones establecidas en las ecuaciones (15), (16) y (17) juegan diferentes roles en la construcción del lugar geométrico de las raíces.

- Las condiciones angulares de las ecuaciones (16) y (17) se emplean para determinar las trayectorias del lugar geométrico de las raíces en el plano s , (o sea el gráfico propiamente dicho).-
- Una vez que se dibujó el L.G.R, los valores de K sobre el mismo se determina mediante el empleo de las condiciones de magnitud de la ecuación (15).

La construcción del L.G.R. es básicamente un problema gráfico, aunque alguna de sus propiedades sea de aplicación analítica.

El punto de partida de la construcción gráfica del L.G.R. se basa en el conocimiento de los polos y ceros del lazo $G(s)H(s)$. En otras palabras, $G(s)H(s)$ se debe escribir primero como:

$$G(s) \cdot H(s) = K \cdot G_1(s) \cdot H_1(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_w)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (18)$$

Donde los ceros y los polos de $G(s) \cdot H(s)$ son reales o en pares complejos conjugados.

Usando los requerimientos de magnitud y de ángulo:

$$|G_1(s) \cdot H_1(s)| = \frac{\prod_{i=1}^w |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} = \frac{1}{|K|}, \quad -\infty < K < \infty \quad (19)$$

y

$$\underline{|G_1(s) \cdot H_1(s)|} = \sum_{i=1}^w \underline{|(s + z_i)|} - \sum_{j=1}^n \underline{|(s + p_j)|} = mx180^\circ ; (m = \pm 1, \pm 3, \dots) \text{ si } 0 \leq K < \infty \quad (\text{L.R.D.})$$

$$\underline{|G_1(s) \cdot H_1(s)|} = \sum_{i=1}^w \underline{|(s + z_i)|} - \sum_{j=1}^n \underline{|(s + p_j)|} = mx180^\circ ; (m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots) \text{ si } -\infty < K \leq 0 \quad (\text{L.R.I.})$$

Las últimas ecuaciones se pueden abbreviar como:

$$\sum \phi_z - \sum \phi_p = mx180^\circ \begin{cases} LR : m = \pm 1, \pm 3, \dots \\ LRI : m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases} \quad (20)$$

La interpretación de la última ecuación es que cualquier punto s_1 sobre el lugar de las raíces o sobre el L.R.I. debe satisfacer la condición siguiente:

La diferencia entre las sumas de los ángulos de los vectores dibujados desde los ceros del lazo al punto s_1 y desde los polos del lazo al mismo punto, debe ser un múltiplo impar de 180° (LRD) o un múltiplo par de 180° , (o cero) (LRI).

Una vez que el L.G.R. se ha construido, los valores de K a lo largo del mismo se pueden determinar al escribir la ecuación (19) como:

$$|K| = \frac{\prod_{j=1}^n |s + p_j|}{\prod_{i=1}^w |s + z_i|} \quad (21)$$

El valor de K en cualquier punto s_1 sobre el L.G.R. se obtiene al sustituir el valor de s_1 en la ecuación (21).

En forma gráfica, el numerador de la ecuación (21), representa el producto de las longitudes (módulos) de los vectores dibujados desde los polos de $G(s) \cdot H(s)$ a s_1 , y el denominador representa el producto de las longitudes de los vectores dibujados desde los ceros de $G(s) \cdot H(s)$ a s_1 .

Si el punto está sobre el LR, K es positiva, si está sobre LRC, entonces K es negativa.

Para ilustrar el empleo de las ecuaciones de los requerimientos, para la construcción del L.G.R., se considera la función:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{(2k_c)(s + z_1)}{s(s + p_2)(s + p_3)} ; \quad K = 2k_c$$

La figura 1 aclara la aplicación de los requerimientos:

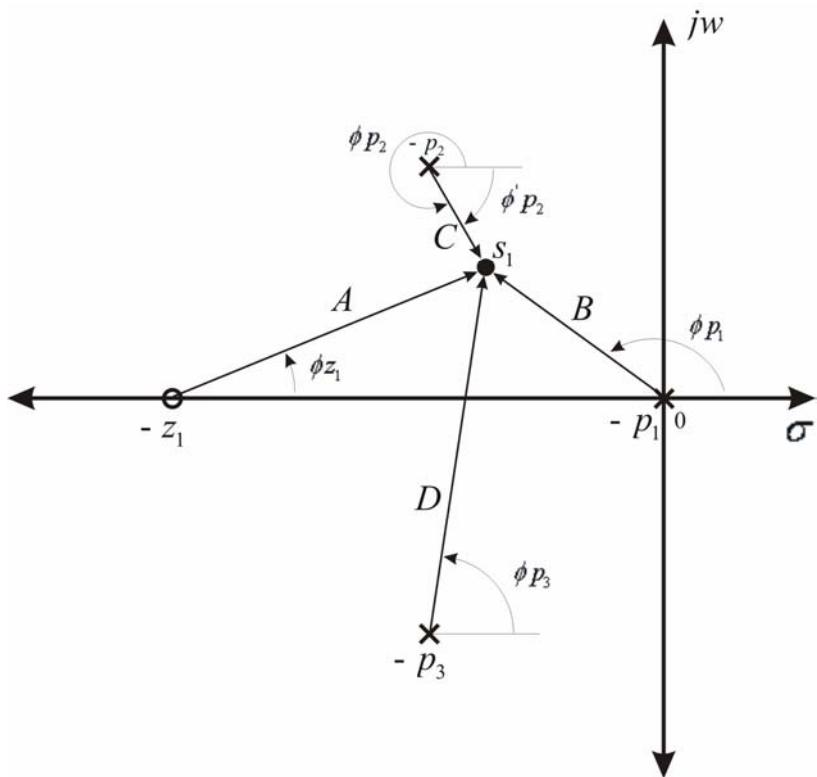


Figura 1

$$\Phi = \phi z_1 - (\phi p_1 + \phi p_2 + \phi p_3) = m \cdot 180^\circ$$

Si s_1 está sobre LRD: $m = \pm 1; \dots$

Si s_1 está sobre LRI: $m = 0; \pm 2; \dots$

Si no está en el L.G.R. $\Phi \neq m \cdot 180^\circ$

Si s_1 está sobre L.G.R., el valor de K en dicho punto valdrá:

$$|K| = \frac{|s_1||s_1 + p_2||s_1 + p_3|}{|s_1 + z_1|} = \frac{BCD}{A} = \# \rightarrow k_c = \frac{\#}{2}$$

El signo dependerá de si s_1 está en el LR o en el LRI.

La tabla siguiente muestra los símbolos, gráficos y matemáticos, a emplear en el presente estudio de la técnica del lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica de un sistema de control automático.-

Símbolos a Usar	Gráfico	Matemático
Ceros de $G(s) \cdot H(s)$ ($L(s)$)	o	Z
Polos de $G(s) \cdot H(s)$ ($L(s)$)	x	P
Ceros de $F(s) = 1 + G(s) \cdot H(s)$ (polos del sistema)	□	λ
Cuando el Sistema es marginalmente estable	▽	λ_L
Ceros de M(s) (ceros del sistema)	•	Z

Antes de ver las propiedades del L.G.R, consideremos unos ejemplos muy simples en donde solo se aplicará el requerimiento angular y el de magnitud para dibujar y parametrar el lugar.

Luego se verán las propiedades del L.G.R. para que el ingeniero tenga una comprensión profunda de las mismas y sea capaz de bosquejar rápidamente en forma manual lugares geométricos de las raíces de sistemas simples y moderadamente complejos e interpretar los resultados de la computadora de forma correcta, cuando se usa esta técnica para el análisis y diseño de los sistemas de control lineales.

Veremos tres ejemplos, aplicando los requerimientos de ángulo y módulo.

Ejemplo 1:

Un sistema de segundo orden tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{(s+2)^2}$$

Al aplicar el requerimiento angular se tendrá:

$$\sum \Phi_Z - \sum \Phi_P = 0 - 2\alpha = m180^\circ \Rightarrow \alpha = m \times 90^\circ$$

Para el lugar de las raíces directo: $\pm \times 90^\circ = \pm 90^\circ$

Para el lugar de las raíces inverso: $0 \times 90^\circ = 0^\circ$ y $2 \times 90^\circ = 180^\circ$

El lugar sería el indicado en la figura 2.

En la misma se ha parametrado el lugar para varios puntos del mismo usando el requerimiento de magnitud.-

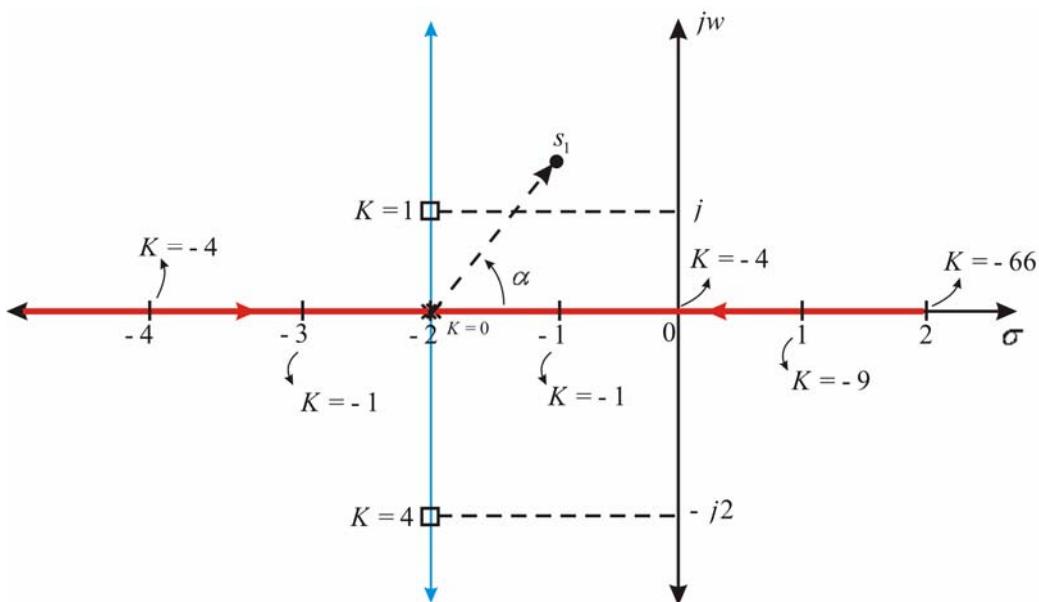


Figura 2

Ejemplo 2:

Un sistema de segundo orden tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$G(s)H(s) = L(s) = \frac{(2Kc)}{s(s+2)} ; \quad K = 2Kc$$

Al aplicar el requerimiento angular se tendrá:

$$\sum \Phi_z - \sum \Phi_p = 0 - (\alpha + \beta) = m \times 180^\circ \Rightarrow 0 - [(180^\circ - \theta) + \beta] = m \times 180^\circ$$

$$0 - 180^\circ + \theta - \beta = m \times 180^\circ, \text{ por lo tanto deberá ser: } \underline{(\theta - \beta) = (m + 1) \times 180^\circ}$$

Para el lugar de las raíces directo con, ($m = \pm 1$):

$(\theta - \beta) = 360^\circ \equiv 0^\circ \Rightarrow$ por lo tanto θ y β son los dos ceros o los dos iguales.

Para el lugar de las raíces inverso con, ($m = 0$ y $m = -2$):

$(\theta - \beta) = 180^\circ \Rightarrow$ por lo tanto $\beta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$

$(\theta - \beta) = -180^\circ \Rightarrow$ por lo tanto $\beta = 180^\circ$ y $\theta = 0^\circ$

El lugar sería el indicado en la figura 3. En la misma se ha parametrado el lugar para varios puntos del mismo usando el requerimiento de magnitud.-

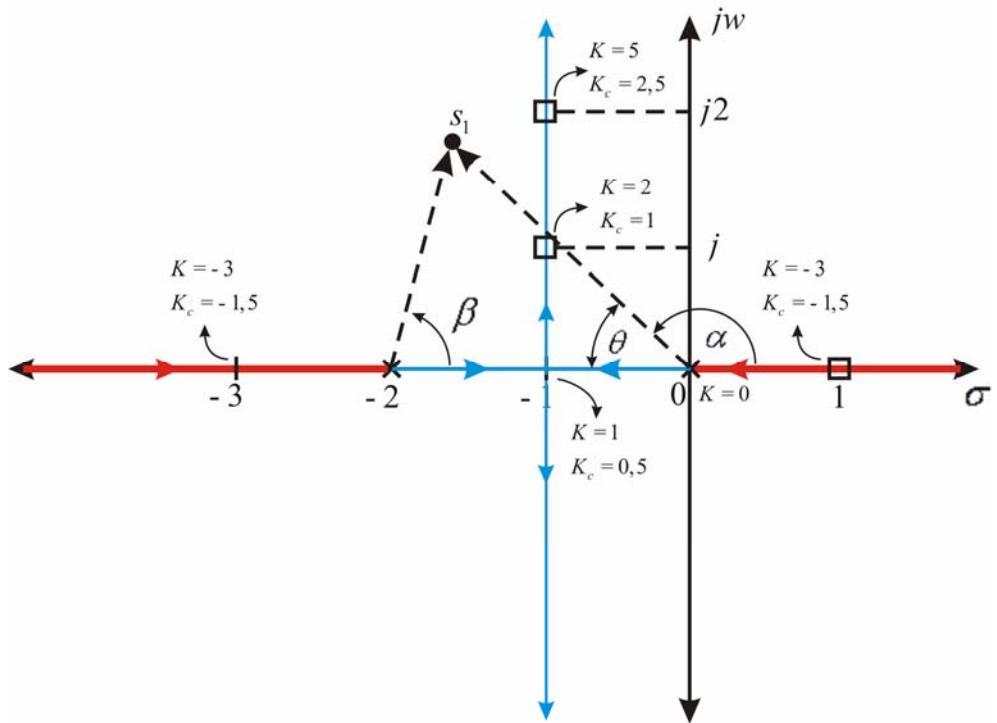


Figura 3

Ejemplo 3:

Un sistema de segundo orden tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{(0.5 K_c)}{s^2 + 4s + 5} ; \quad K = (0.50 K_c)$$

Al aplicar el requerimiento angular se tendrá:

$$\sum \Phi_z - \sum \Phi_p = m \times 180^\circ \Rightarrow -(\alpha + \beta) = m \times 180^\circ \Rightarrow (\alpha + \beta) = m \times 180^\circ . -$$

Para el lugar directo de las raíces con, ($m = \pm 1$):

$$(\theta + \beta) = 180^\circ \Rightarrow (90^\circ + 90^\circ) . -$$

$$0, (\theta + \beta) = -180^\circ \Rightarrow (-90^\circ + (-90^\circ)) . -$$

Para el lugar inverso de las raíces con, ($m = 0$ y $m = 2$):

$$(\theta + \beta) = 0^\circ \Rightarrow (-90^\circ + 90^\circ) = 0^\circ . -$$

$$(\theta + \beta) = 360^\circ \equiv 0^\circ \Rightarrow \text{Todo el eje real.} -$$

El lugar sería el indicado en la figura 4.

En la misma se ha parametrizado el lugar para varios puntos del mismo usando el requerimiento de magnitud.-

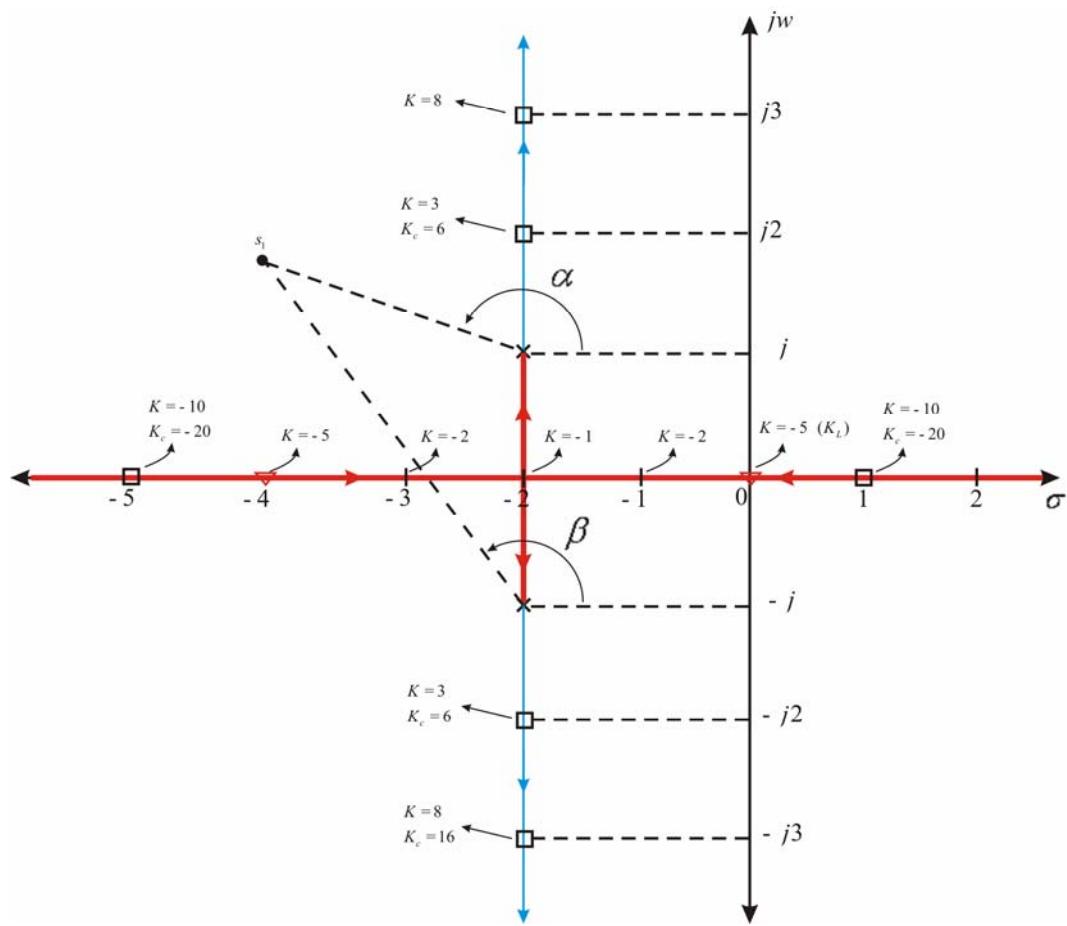


Figura 4

Ejemplo 4:

Un sistema de segundo orden tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K(s+2)^2}{(s+5)^2}$$

Al aplicar el requerimiento angular se tendrá:

$$\sum \Phi_z - \sum \Phi_p = m \times 180^\circ \Rightarrow 2(180^\circ - \alpha) - 2\beta = m \times 180^\circ$$

$$180 - \alpha - \beta = m \times 90^\circ \Rightarrow (\alpha + \beta) = (2 - m) 90^\circ$$

Además se cumple que, figura 5:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

Para el lugar directo de las raíces con, ($m=1$):

$$(\alpha + \beta) = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

Por lo tanto es un arco de circunferencia con centro en -3.5 y radio 1.50 .

La otra rama es el otro arco de circunferencia conjugado del anterior.-

Para el lugar inverso de las raíces con, ($m=0$):

$$(\alpha + \beta) = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 0^\circ$$

Lo cumple las partes del eje real entre, $(-\infty \text{ y } -5)$ y $(-2 \text{ e } +\infty)$.-

Si $m=2 \Rightarrow (\alpha + \beta) = 0^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ$.-

Lo cumple la parte del eje real entre, $(-5 \text{ y } -2)$. –

Por ende todo el eje real pertenece al lugar inverso de las raíces.

Todo esto está indicado en la figura 5, en la misma se ha parametrizado el lugar para varios puntos del mismo usando el requerimiento de magnitud. –

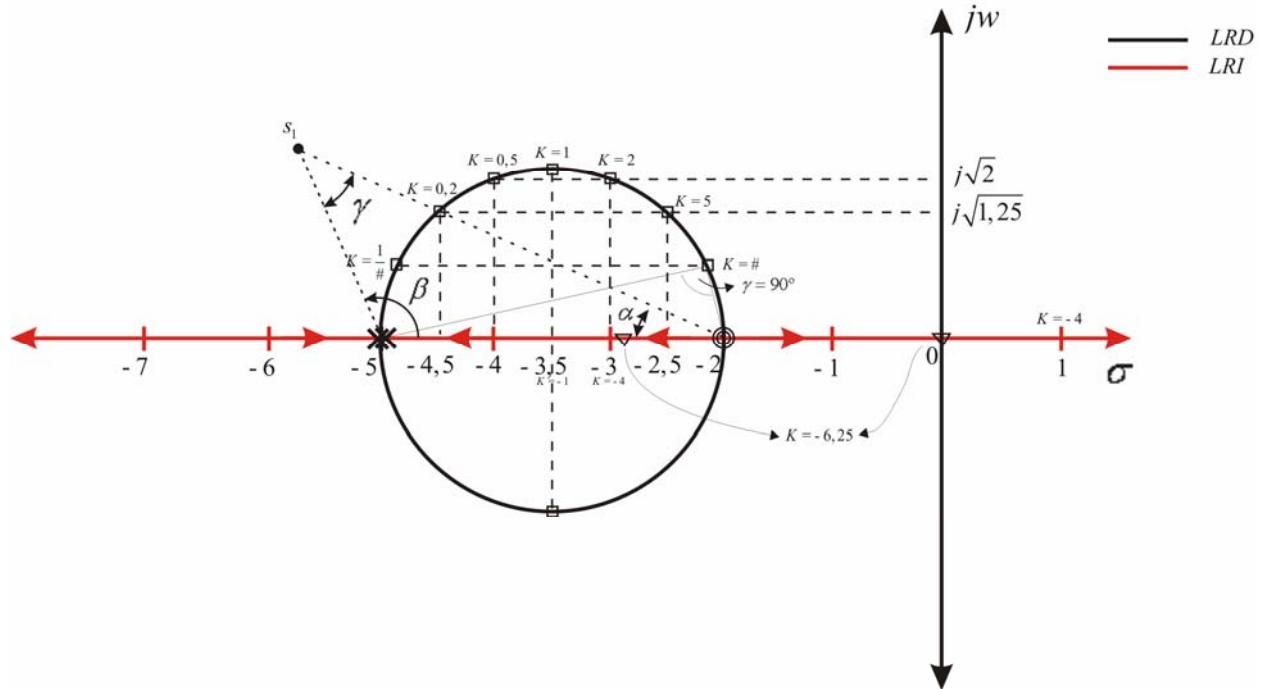


Figura 5

Ejemplo 5:

Un sistema de segundo orden tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\sum \Phi_Z - \sum \Phi_P = m \times 180^\circ \Rightarrow -(\alpha + \beta + \gamma) = m \times 180^\circ, \quad \text{o} \quad \Phi = (\alpha + \beta + \gamma) = m \times 180^\circ$$

Para las partes reales:

Para el lugar directo de las raíces con, ($m=1$): $\Phi = 180^\circ$. –

Para el lugar inverso de las raíces con, ($m=0$): $\Phi = 0^\circ$. –

Las mismas están indicadas en la figura 6.

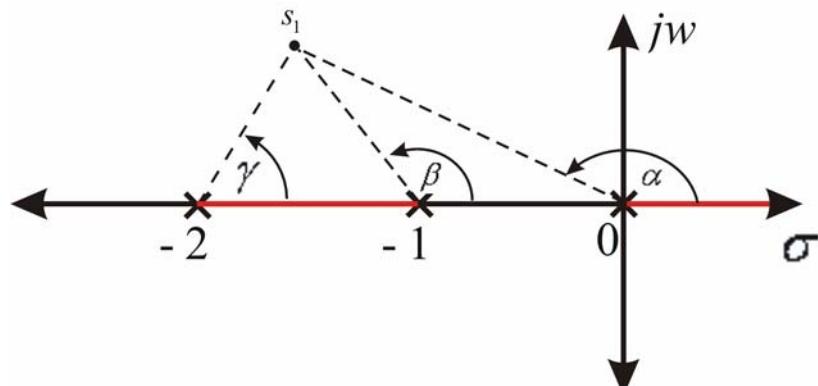


Figura 6

Para las partes complejas ya no es tan evidente como en los ejemplos anteriores, por lo tanto se tendrá que recurrir a las propiedades o reglas de construcción del lugar de las raíces de la ecuación característica.

Pasos para Construir un Bosquejo del Lugar Completo de las Raíces

Hay siete pasos a seguir:

- Primer Paso: Dibujar los polos y ceros de $L(s)$, (Reglas 1 y 2).-
 - Segundo Paso: Marcar las partes del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real, (Regla 3).-
 - Tercer Paso: Determinar el llamado centroide y bosquejar las asíntotas del lugar, (Reglas 4 y 5).-
 - Cuarto Paso: Determinar los ángulos de salida/llegada, de los polos o ceros complejos conjugados, (Regla 6).-
 - Quinto Paso: Determinar los cruces con el eje imaginario, (Regla 7).-
 - Sexto Paso: Determinar los puntos de ruptura del lugar, (Regla 8).-
 - Séptimo Paso: Bosquejar el resto del lugar geométrico de las raíces, (Reglas 9, 10, 11 y 12).-
-

Construcción del Lugar Completo de las Raíces.

Las siguientes reglas de construcción son desarrolladas desde la relación entre los polos y ceros de $G(s)H(s)$ y desde la relación de $1+G(s)H(s)$. Estas reglas serán utilizadas solo como ayuda para la construcción del L.R. y del L.R.I., pues ellas no dan las gráficas exactas.

1º Paso: Reglas 1 y 2:

1) Puntos de K=0

Los puntos para $K=0$ sobre el L.G.R. están en los polos de $G(s)H(s)$, ($L(s)$).

Demostración: desde la ecuación $|G_1(s)H(s)| = \frac{\prod_{i=1}^w |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = \frac{1}{|K|}$ (0)

Cuando K se aproxima a cero, la magnitud de $|G(s)_1 H(s)_1| \rightarrow \infty$ y, correspondientemente, s se aproxima a los polos de $G'(s)H'(s)$ o de $G(s)H(s)$, o sea, $s \rightarrow p_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Es evidente que esta propiedad se aplica tanto al L.R. como al L.R. Inverso, pues el signo de K no tiene ingerencia en la ecuación (0).

Ejemplo 6: Consideremos la siguiente ecuación.

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0 \quad (1)$$

Cuando $K = 0$, las tres raíces de la ecuación están en $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = -3$. Estos tres puntos son también los polos de la función $G(s)H(s)$, pues si se divide miembro a miembro la ecuación (1) por los términos que no contienen K y establecemos la relación:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0 \quad (2)$$

$$\text{será: } G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \quad (3)$$

Los tres puntos de $K = 0$ sobre el L.R.C. se muestran en la figura 7.

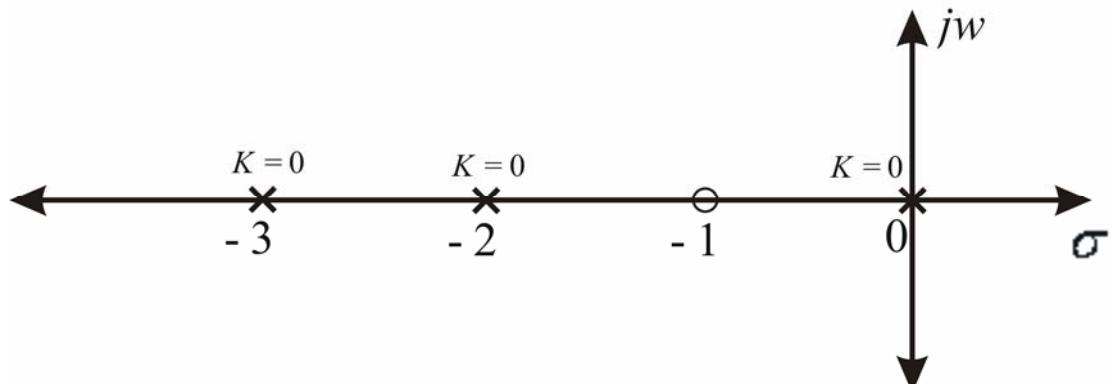


Figura 7

2) Puntos para $K = \pm\infty$

Los puntos para $K = \pm\infty$ sobre el L.R.C. están en los ceros de $G(s)H(s)$.

Demostración: Refiriéndonos de nuevo a la ecuación (0), cuando $K \rightarrow \pm\infty$, la ecuación se approxima a cero. Esto corresponde a que s tiende a los ceros de $G(s)H(s)$; o sea, $s \rightarrow z_i$ ($i = 1, 2, \dots, w$).

Ejemplo 7: Consideremos de nuevo la ecuación.

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0 \quad (4)$$

Es evidente que cuando K es muy grande, la ecuación puede ser aproximada por: $K(s+1) = 0$ (5)

La cual tiene la raíz $s = -1$. Notar que también es el cero de $G(s)H(s)$ en la ecuación (3). Por lo tanto, la figura 8, muestra el punto $s = -1$ en el cual $K \rightarrow \pm\infty$.

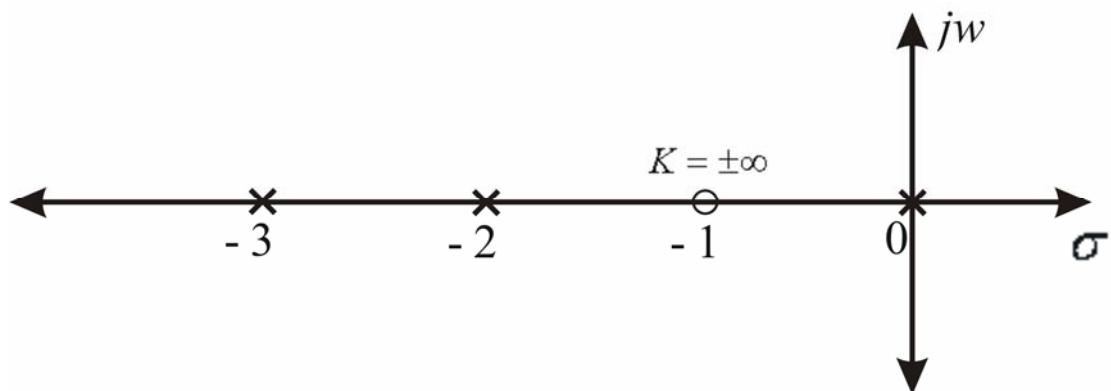


Figura 8

Sin embargo, $G(s)H(s)$ en éste caso también tiene otros dos ceros localizados en infinito, pues para una función racional, el numero total de polos y de ceros debe ser igual si los polos y ceros en el infinito son incluidos. Por lo tanto, para la ecuación (4), los puntos para $K \rightarrow \pm\infty$ están en $s = -1, \infty$ e ∞ . "Es útil considerar que ∞ en el plano s es un punto conceptual. Se puede visualizar que el plano finito s es solo una pequeña superficie sobre una esfera, la cual tiene un radio infinito. Luego, infinito en el plano s es un punto sobre el lado opuesto de la esfera al que se dibuja". Figura 9.-

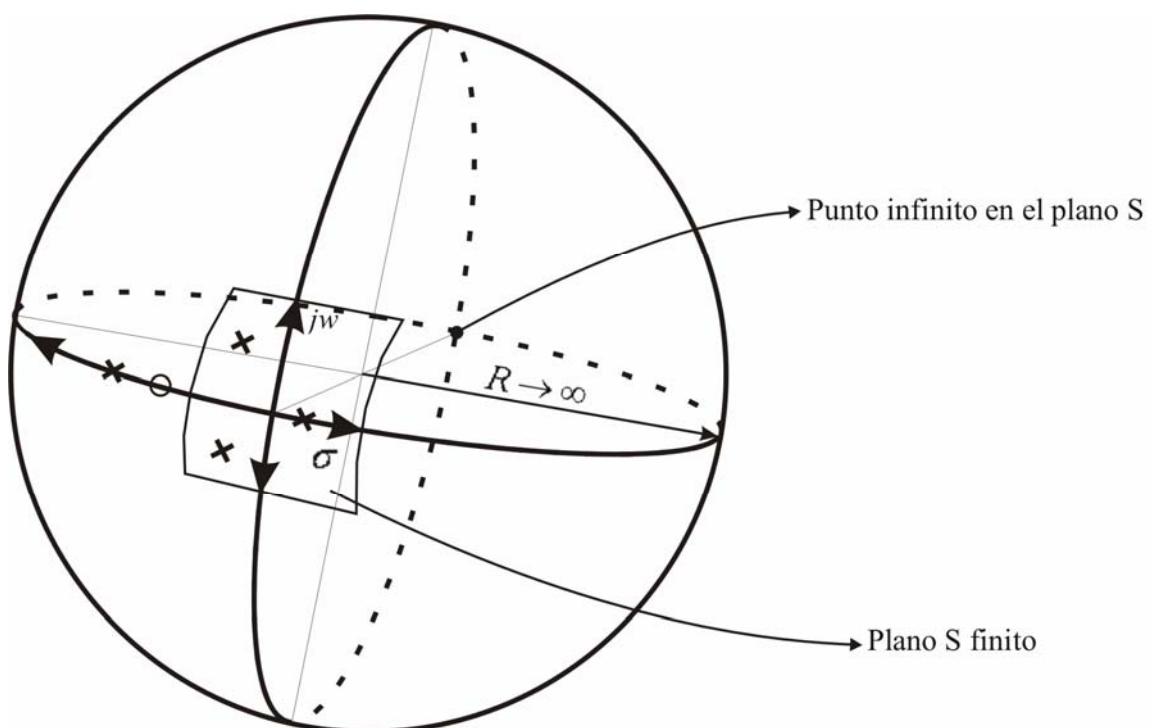


Figura 9

2º Paso: Regla 3:

3) Lugar de la Raíz sobre el eje Real.

a) Lugar de la Raíz Directo: Una sección dada del eje real pertenecerá al L.R.D. ($K \geq 0$) solamente si el número total de polos y ceros reales de $G(s)H(s)$ a la derecha es impar.

b) Lugar de la Raíz Inverso: Ídem a) solo que cambiando la palabra impar por par. A la derecha del último polo o cero de $G(s)H(s)$ siempre pertenecerá al L.R.I.

Alternativamente se puede decir que L.R.I. se encontrará en las secciones del eje real no ocupadas por el L.R.D. En todos los casos los polos y ceros complejos no afectan a la existencia del L.R. sobre el eje real.

Demostración:

1. En un punto cualquiera (por ejemplo, s_1) sobre el eje real la suma de los ángulos de los vectores dibujados desde los polos y ceros complejos conjugados de $G(s)H(s)$ a dicho punto es cero. Por lo tanto solamente contribuyen a las condiciones angulares los polos y ceros reales de $G(s)H(s)$
2. Solamente los polos y ceros reales de $G(s)H(s)$ que están ubicados a la derecha del punto s_1 pueden contribuir a los requerimientos angulares, puesto que los situados a la izquierda de s_1 tienen un ángulo cero.
3. Cada polo real de $G(s)H(s)$ a la derecha del punto s_1 contribuye con (-180°) y cada cero a la derecha del punto contribuye con 180° a la condición angular. La última observación muestra que para que s_1 sea un punto del L.R. debe haber un número impar de polos y ceros de $G(s)H(s)$ a la derecha de s_1 , y para que s_1 sea un punto del L.R.C. ese número deberá ser par. Los siguientes ejemplos ilustran las propiedades del L.G.R. sobre el eje real del plano s.

$$\sum \phi_{Z_{RD}} - \sum \phi_{P_{RD}} = \pm z180^\circ \mp p180^\circ = \pm m \times 180^\circ \Rightarrow \boxed{z + p = m}$$

La Figura 10 muestra dos ejemplos de aplicación de esta regla:

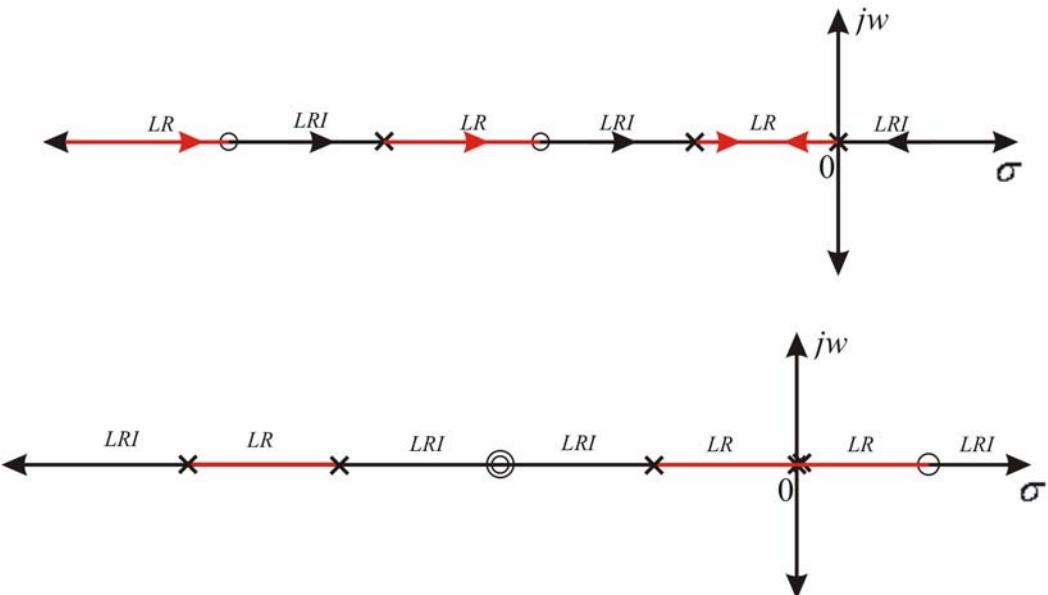


Figura 10

3º Paso: Reglas 4 y 5:

4) Número de Asintotas: En sistemas con $n \neq w$ el número de asintotas será para los dos lugares, en general:

$$N^{\circ} \text{ de Asintotas} = 2|n - w|$$

($|n - w|$ Para el L.R.D. y $|n - w|$ para el L.R.I.).- ($n - w$) → orden relativo

Las asintotas indican a donde tenderán las raíces de la ecuación característica a medida que la ganancia tiende a infinito, si $n > w$, hacia los ceros impropios para el L.R.D. y desde donde vienen las ramas hacia los polos cuando $K \rightarrow 0$, en el L.R.I.

En algunos sistemas no hay asintotas, cuando el grado relativo es cero, toda rama termina en un cero finito (L.R.D.) o parte de un cero finito (L.R.I.). Las asintotas son simétricas respecto al eje real, parten de un punto σ_0 definidos por las magnitudes relativas de los polos y ceros de la función de transferencia del lazo, $L(s)$.-

Este punto es el centroide y se obtiene de la siguiente expresión:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^w z_i}{n - w} = \frac{\sum p_0 - \sum z_0}{n - w}$$

$\sum p_0 \rightarrow$ Suma de los polos finitos de $L(s)$

$\sum z_0 \rightarrow$ Suma de los ceros finitos de $L(s)$

$n \rightarrow$ Número de polos finitos de $L(s)$

$w \rightarrow$ Número de ceros finitos de $L(s)$

Como se puede apreciar p_0 es siempre un número real. También se puede expresar:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{partes reales de los polos de } L(s) - \sum \text{partes reales de los ceros de } L(s)}{n - w}$$

5) Inclinación de las Asíntotas: Los ángulos de las asíntotas se obtiene de:

$$\alpha = \frac{m \cdot 180^\circ}{n - w} \begin{cases} L.R.: m = \pm 1; \pm 3; \dots \\ L.R.I.: m = 0; \pm 2; \pm 4 \dots \end{cases}$$

Demostración:

Aplicando el requerimiento de magnitud a la configuración de polos y ceros de la figura 11

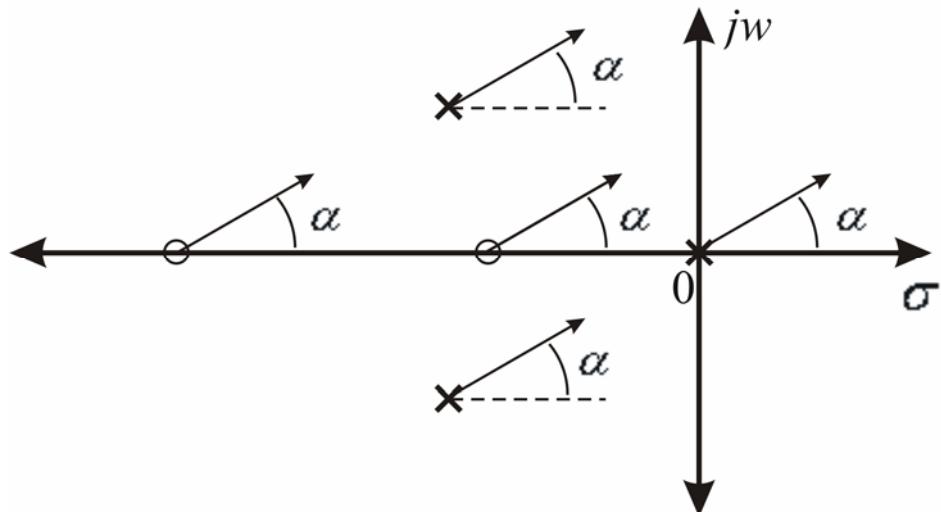


Figura 11

$$\sum \phi_z - \sum \phi_p = w\alpha - n\alpha = m180^\circ$$

$$\alpha(w - n) = m180^\circ$$

$$0 \quad \boxed{\alpha = \frac{m180^\circ}{w - n} \equiv \frac{m180^\circ}{n - w}} \quad \begin{cases} L.R.: m = \pm 1; \pm 3; \dots \\ L.R.I.: m = 0; \pm 2; \pm 4 \dots \end{cases}$$

Cabe puntualizar que el L.G.R. puede cruzar su propia asíntota.

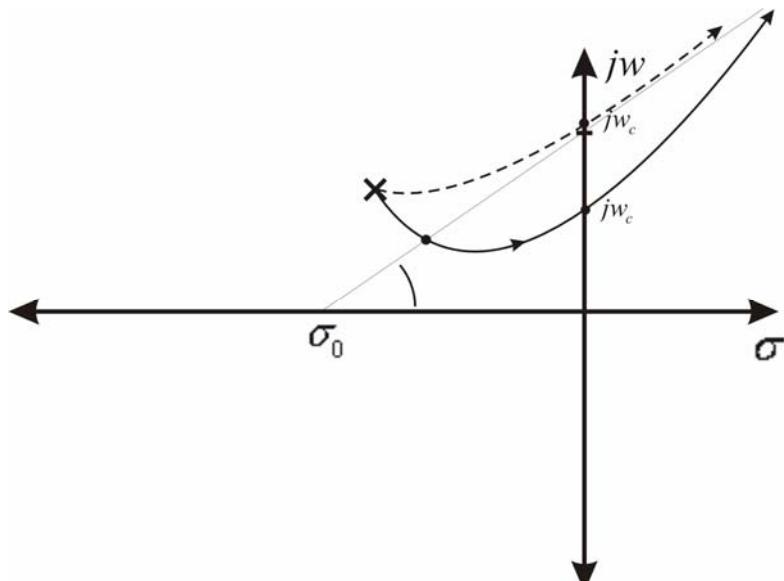


Figura 12

Ejemplo 8:

$$\text{Si } n-w=1; \quad L(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)}$$

$N^o A = 2 - 1 = 1, \sigma_0 \rightarrow \text{No tiene aplicación}, \alpha = m180^\circ \begin{cases} L.R. = 180^\circ \\ L.R.I. = 0^\circ \end{cases}$

Las asintotas se muestran Figura 13.-

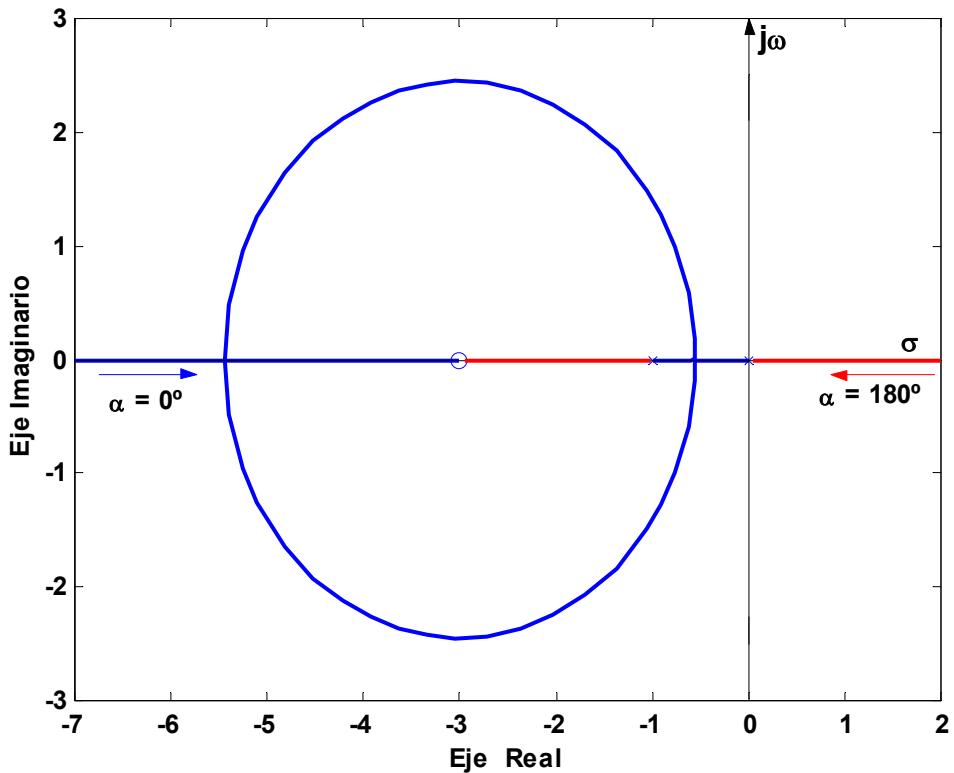


Figura 13

Ejemplo 9:

$$\text{Si } n-w=2; \quad L(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)^2}$$

$$N^o \text{ de Asintotas} = 3 - I = 2; \quad s_0 = \frac{-2 - (-3)}{2} = 0,5, \quad \alpha = m90^\circ \begin{cases} L.R. = \pm 90^\circ \\ L.R.I. = 0^\circ, 180^\circ \end{cases};$$

Las asintotas se muestran Figura 14

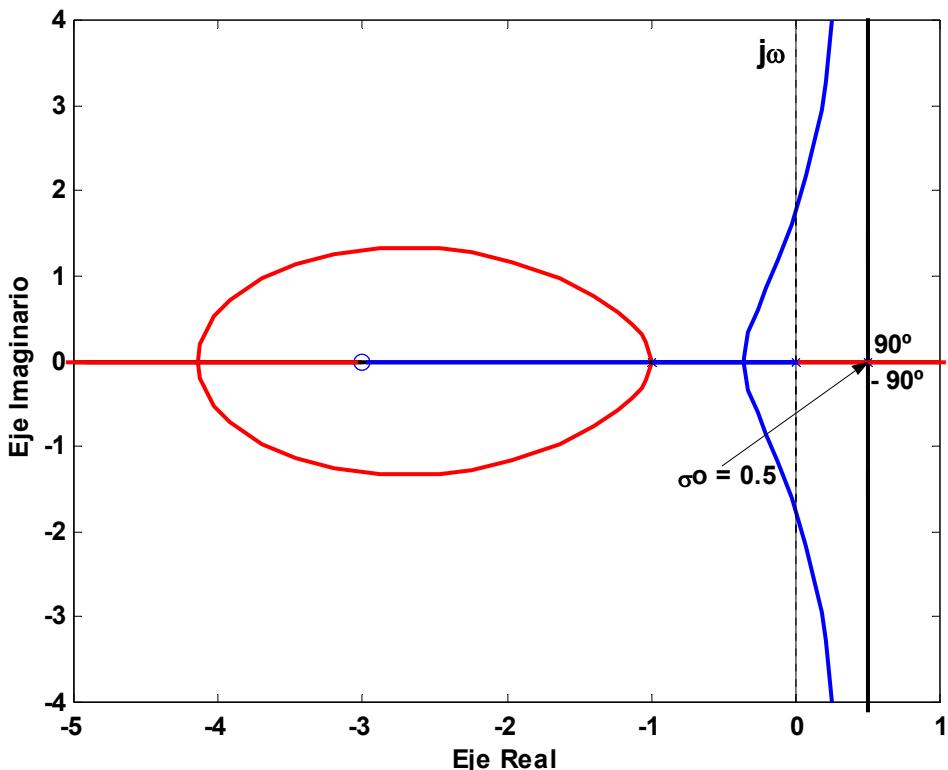


Figura 14

Ejemplo 10:

$$\text{Si } n - \omega = 3; \quad L(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$N^{\circ} \text{ de As\'itotas} = 4 - 1 = 3; \quad \sigma_0 = \frac{-6 + 4}{3} = -2/3; \quad \alpha = m \times 60^{\circ} \quad \begin{cases} \text{L.R. } \alpha = \pm 60^{\circ} \text{ y } 180^{\circ} \\ \text{L.R.I. } \alpha = 0^{\circ} \text{ y } \pm 120^{\circ} \end{cases}$$

Las asintotas se muestran en la Figura 15.-

Ejemplo 11:

$$\text{Si, } n - \omega = 4; \quad L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$$N^{\circ} \text{ de As\'itotas} = 4 - 0 = 4; \quad \sigma_0 = \frac{-8 - 0}{4} = -2; \quad \alpha = m \times 45^{\circ}$$

$$\begin{cases} \text{L.R. } \alpha = \pm 45^{\circ} \text{ y } \alpha = \pm 135^{\circ} \\ \text{L.R.I. } \alpha = 0^{\circ}; \quad \alpha = \pm 90^{\circ} \text{ y } \alpha = 180^{\circ} \end{cases}$$

Las asintotas se muestran en la Figura 16.-

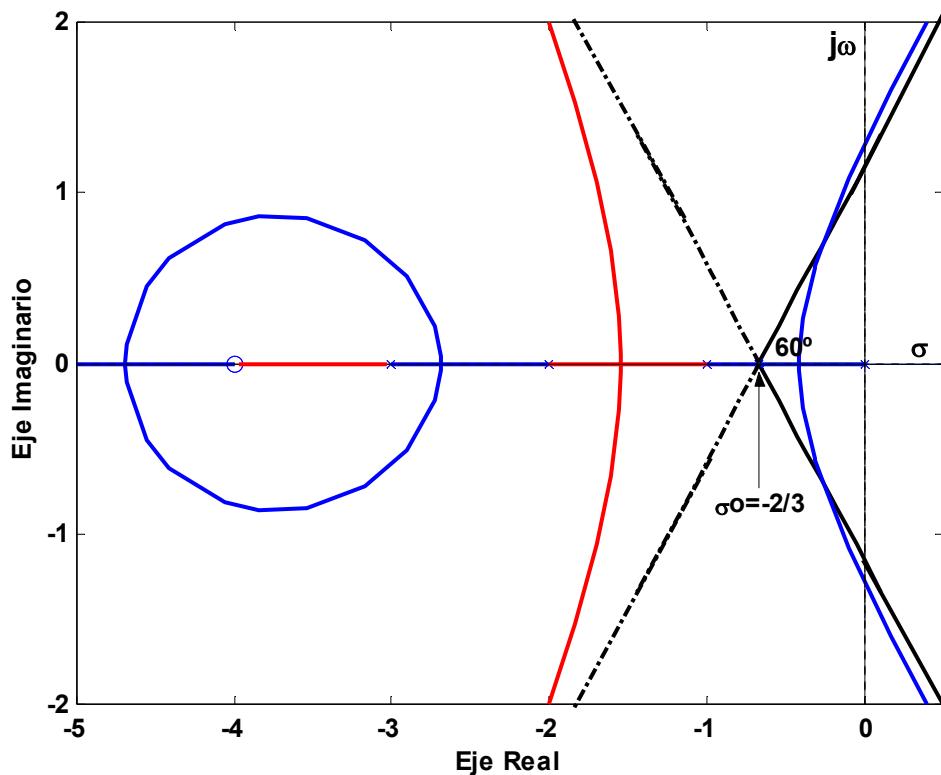


Figura 15

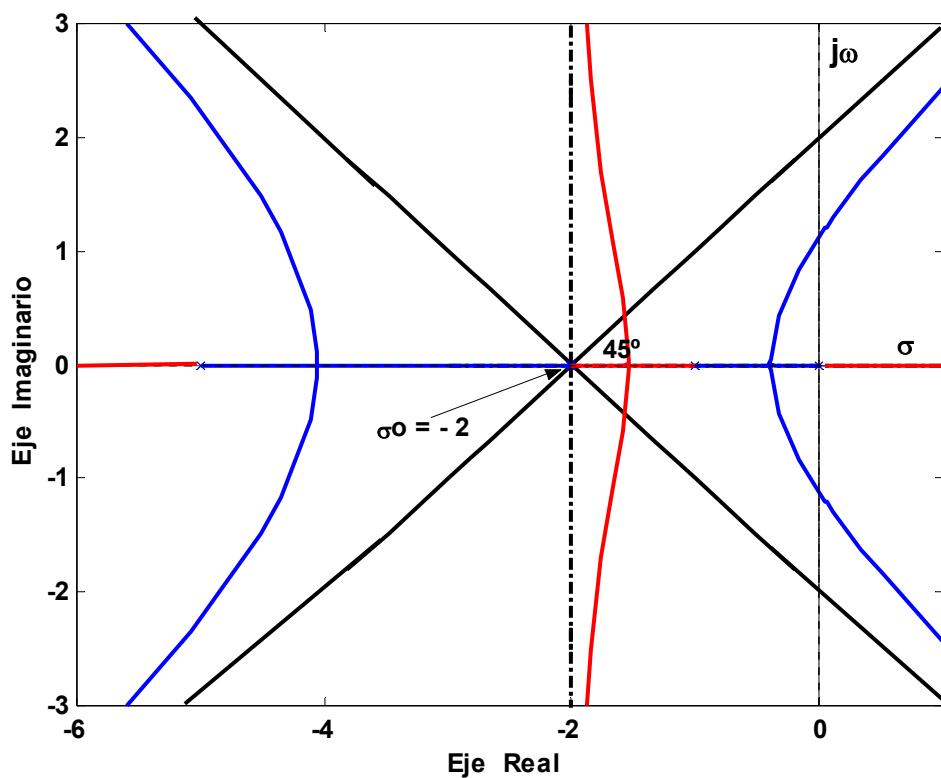


Figura 16

Ejemplo 12:

Si: $n - \omega = 5$; $L(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 6s + 10)}$ $\alpha = m \times 36^\circ$ $\begin{cases} L.R. \pm 36^\circ; \pm 108^\circ \text{ y } 180^\circ \\ L.R.I. 0^\circ; \pm 72^\circ \text{ y } \pm 144^\circ \end{cases}$

Las asintotas se muestran en la Figura 17.-

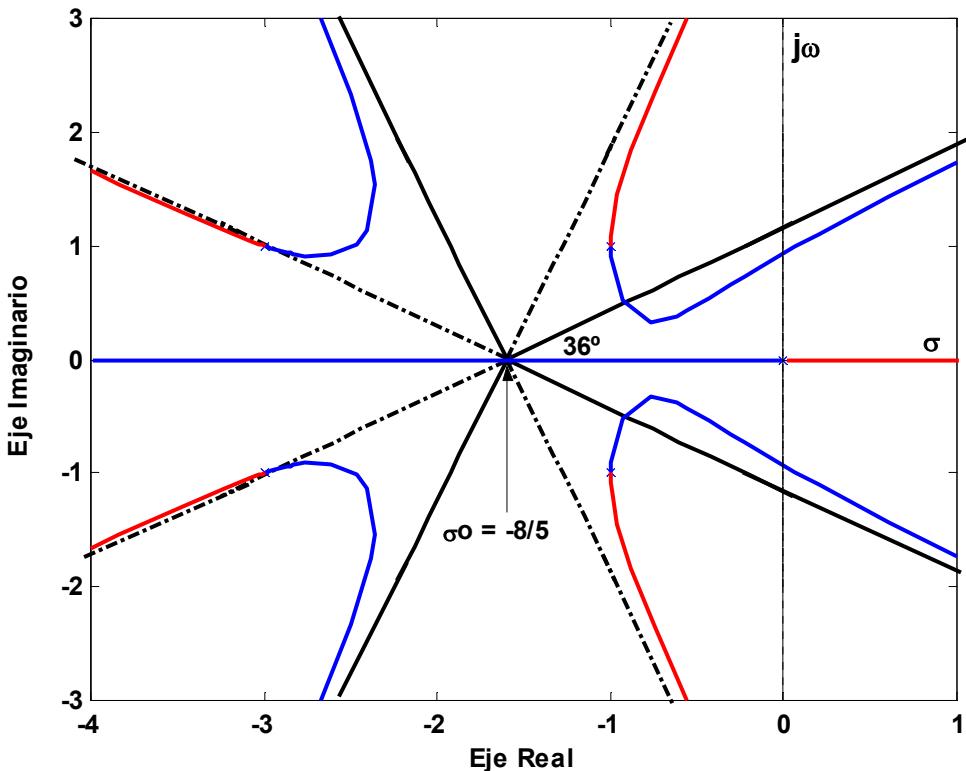


Figura 17

Ejemplo 13:

Se aplicarán las reglas vistas hasta el momento en el siguiente ejemplo.

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2 + 2s + 2)}$$

1º) $K = 0$: Los puntos de $K = 0$ sobre el L.G.R. están en los polos de $L(s)$:

$S = 0$; $S = -4$; $s = -1+j$ y $S = -1-j$.

2º) $K = \pm\infty$: Los puntos de $K = \pm\infty$ sobre el L.G.R. están en los ceros de $L(s)$: $s = -1$, $s = \infty$, $s = -\infty$ y $s = \infty$.

3º) Puesto que la ecuación característica es de cuarto orden habrá cuatro ramas en el lugar. Para el L.R.D. las partes del eje real están entre: (-1 y 0) y entre ($-\infty$ y -4). Y las del L.R.I. entre: (-4 y -1).

4º) Para grandes valores de s , el L.R.D. será asintótico a tres líneas rectas con ángulos medidos desde el eje real.

$$\text{Para L.R.D. } m = \pm 1, 3 \Rightarrow \alpha = \frac{\pm 180^\circ}{3} = \pm 60^\circ \text{ y } \alpha = 180^\circ.$$

$$\text{Para el L.R.I. } m = 0, \pm 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pm 2 \times 180^\circ}{3} = \pm 120^\circ \text{ y } \alpha = 0^\circ.$$

5º) El centroide está en: $\sigma_0 = \frac{\sum P_0 - \sum Z_0}{n - \omega} = -5/3 \Rightarrow \sigma_0 = -5/3$

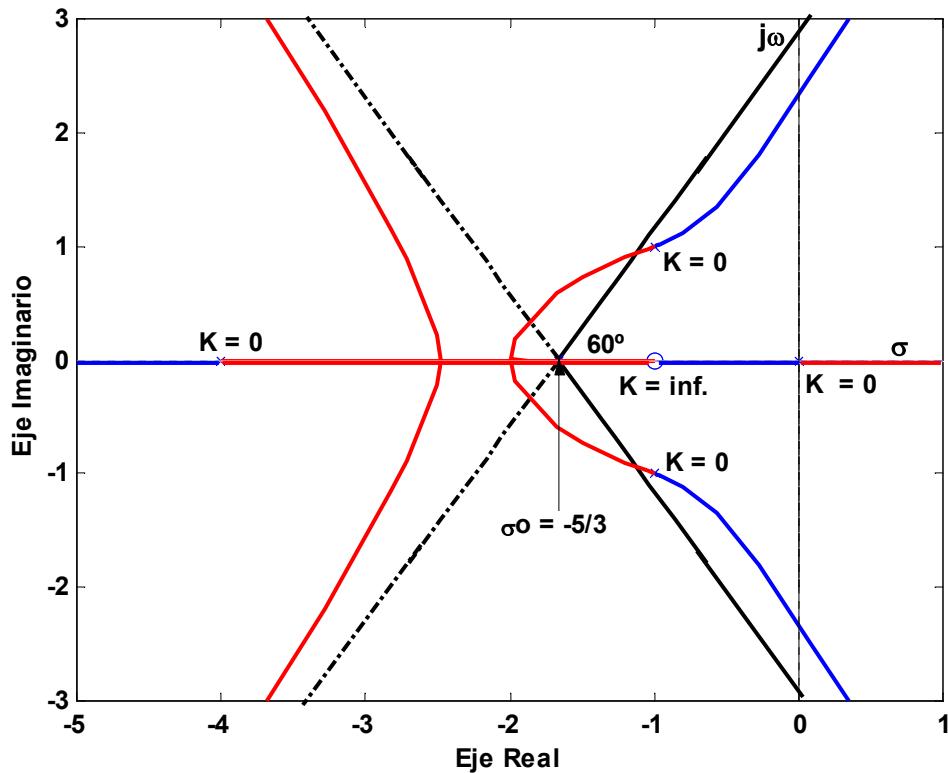


Figura 18

4º Paso: Regla 6:

Ángulos de Salida/Llegada (L.R.D./L.R.I.) de los Polos Complejos de L(s).-
El L.G.R. cerca de los polos complejos del lazo se puede dibujar con mayor precisión si se conocen los ángulos de salida de los mismos, (para el L.R.D.) o de llegada a ellos, (para el L.R.I.). Los ángulos de salida/llegada, de *polos reales simples*, siempre serán 0° o 180° .

Consideremos un polo del lazo complejo de orden de multiplicidad "r" y un punto s_1 en una de las "r" ramas que parten del L.R.D. o llegan del L.R.I., de manera que se cumpla el requerimiento angular, figura 19.

Al hacer tender s_1 al polo, la contribución angular del mismo a la $\sum \phi_p$ será de $(r\phi_r)$, o sea:

$$\sum \phi_z - (\sum * \phi_p + r\phi_r) = m180^\circ$$

$$\phi_r = \frac{-m180^\circ + \sum \phi_z - \sum * \phi_p}{r}$$

Por lo tanto:

$$\phi_r \begin{cases} \phi_p(LR) \rightarrow m = \pm 1; \pm 3; \dots \\ \phi_{LL}(LRI) \rightarrow m = 0; \pm 2; \dots \end{cases}$$

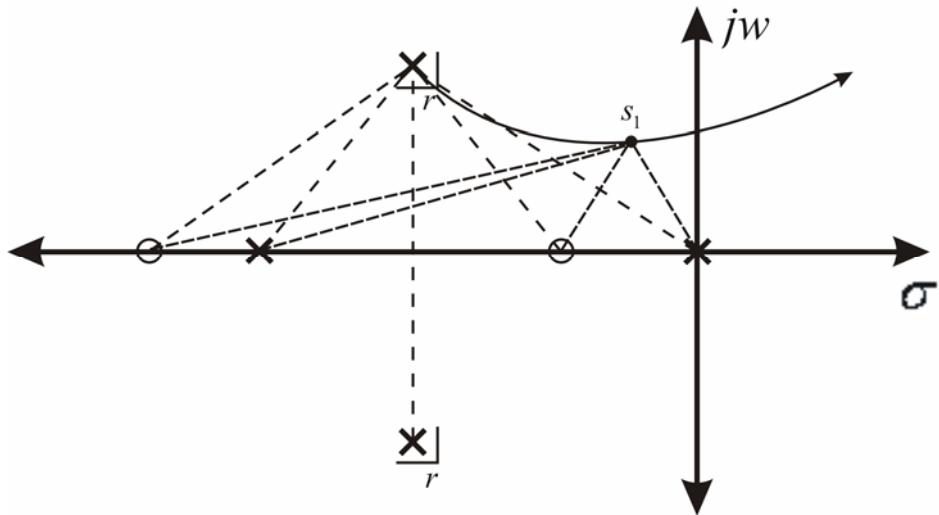


Figura 19.

Expresión que nos da los $2r$ ángulos de salida/llegada.

Por ende el ángulo entre dos rectas tangentes a dos ramas adyacentes del L.R.D. y del L.R.I. será:

$$\frac{360^\circ}{2r} \rightarrow \left(\frac{180}{r} \right)^\circ$$

Si el polo es *simple* será ($r=1$ y $m=1$ para L.R. o $m=0$ para L.R.I.)

$$\begin{aligned}\phi_p(L.R.) &= 180^\circ + \sum \phi_z - \sum * \phi_p \\ \phi_{LL}(L.R.I.) &= \sum \phi_z - \sum * \phi_p\end{aligned}$$

Ángulos de Llegada/Salida, (L.R.D./L.R.I.) de los Ceros Complejos de L(s).-

Se llega en forma similar:

$$\phi_r = \frac{m180^\circ + \sum \phi_p - \sum * \phi_z}{r}$$

$$\phi_r \begin{cases} \phi_{LL}(LR) \rightarrow m = \pm 1; \pm 3; \dots \\ \phi_P(LRI) \rightarrow m = 0; \pm 2; \dots \end{cases}$$

Si $r=1$ ($m=1$ para L.R.D. o $m=0$ para L.R.I.)

$$\begin{aligned}\phi_{LL}(L.R.) &= 180^\circ + \sum \phi_p - \sum * \phi_z \\ \phi_P(L.R.I.) &= \sum \phi_p - \sum * \phi_z\end{aligned}$$

Cuando el polo o el cero es uno real, se tendrá:

Si $z = N^o ZRD$ del polo o el cero y $p = N^o PRD$ del polo o el cero

$$\therefore \sum \phi_z = \sum \phi_{ZRD} = \pm z180^\circ \text{ y } \sum * \phi_p = \pm p180^\circ$$

$$(\text{Polos o ceros}) \rightarrow \phi_r = \frac{\pm m180^\circ \pm z180^\circ \mp p180^\circ}{r} = (z + p + m) \frac{180^\circ}{r}$$

$$\phi_r = (z + p + m) \frac{180^\circ}{r} \rightarrow \phi_{P,LL} \begin{cases} (L.R.) \rightarrow m = \pm 1; \pm 3; \dots \\ (L.R.I.) \rightarrow m = 0; \pm 2; \dots \end{cases}$$

Ejemplo 14: Si la función de transferencia del lazo de un sistema es:
 $G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)^3}$. Hallar los ángulos de partida y de llegada en el polo triple en -1. Aplicando lo visto se tendrá para los ángulos de partida:

$$\phi_p = (p+z+m) \frac{180^\circ}{3} = (1+0+m)60^\circ$$

$$\phi_p = (1+m)60^\circ \begin{cases} m = -1 \rightarrow = 0^\circ \\ m = 1 \rightarrow = 120^\circ \\ m = -3 \rightarrow = -120^\circ \end{cases}$$

Y para los ángulos de llegada:

$$\phi_{LL} = (1+m)60^\circ \begin{cases} m = 0 \rightarrow = 60^\circ \\ m = 2 \rightarrow = 180^\circ \\ m = -2 \rightarrow = -60^\circ \end{cases}$$

El lugar completo se muestra en la figura 20.

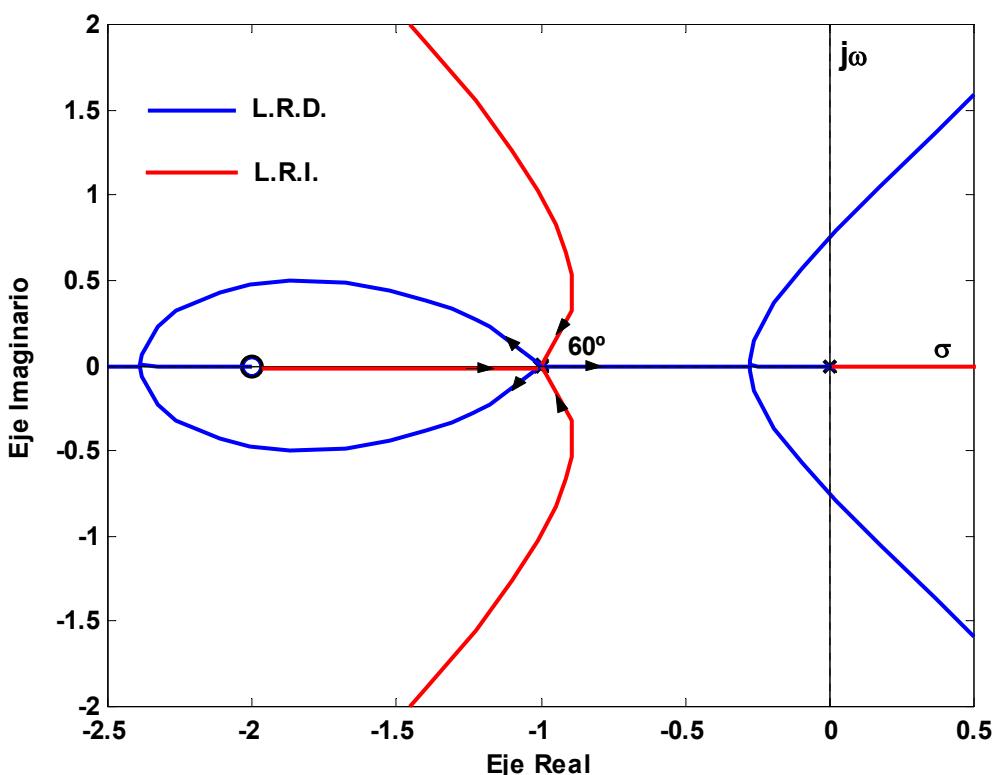


Figura 20

Además: $\sigma_0 = -1/3$ $\alpha(LR) \begin{cases} \pm 60^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$ $\alpha(LRI) \begin{cases} 0^\circ \\ \pm 120^\circ \end{cases}$

Ejemplo 15: Si la función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+4)}{s(s^2 + 4s + 8)}$$

Hallar los ángulos de partida y de llegada en los polos complejos conjugados. Aplicando las expresiones vistas, se tendrá:

$$\phi_p = 180^\circ + \sum \phi_z - \sum * \phi_p = 180^\circ + \overbrace{(45^\circ) - (135^\circ + 90^\circ)}^{180^\circ} = 0^\circ$$

$$\phi_{LL} = \sum \phi_z - \sum * \phi_p = (45^\circ) - (135^\circ + 90^\circ) = -180^\circ$$

Además se tiene que: $\sigma_0 = \frac{-4 - (-4)}{2} = 0$ $\therefore MG \rightarrow \infty$

El lugar de las raíces se muestra en la figura 21.

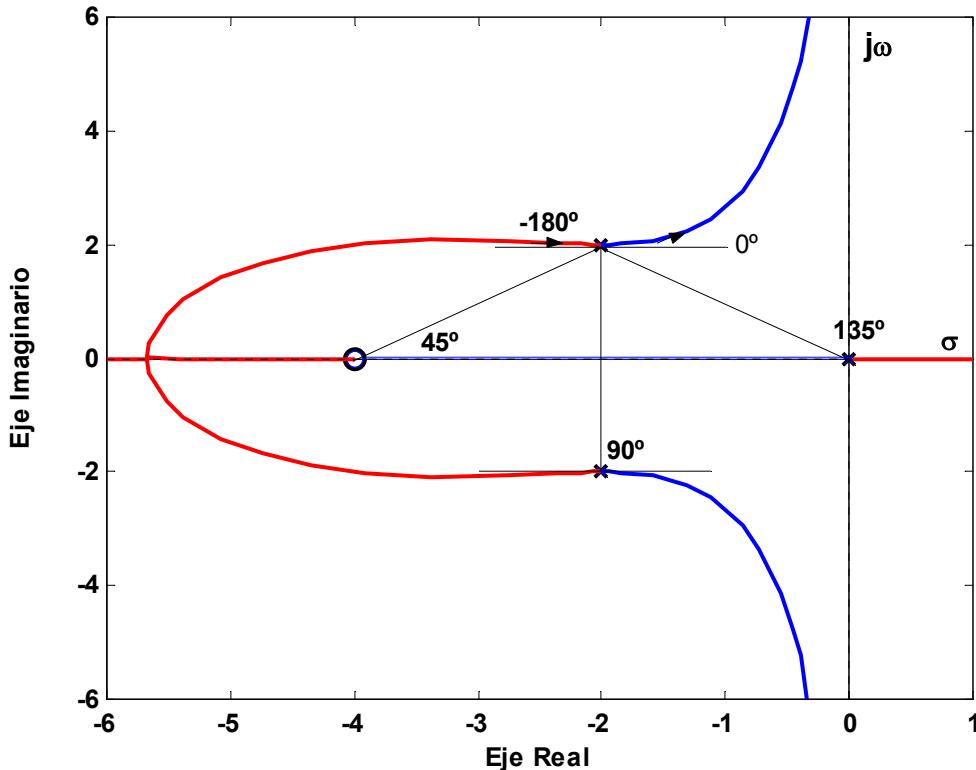


Figura 21

Ejemplo 16:

Si la función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

Hallar los ángulos de partida y de llegada en los polos complejos conjugados. Aplicando las expresiones vistas, se tendrá:

$$\phi_p = 180^\circ + (0^\circ) - (26,6^\circ + 90^\circ + 135^\circ)$$

$$\underline{\phi_p = -71,6^\circ}$$

$$\phi_{LL} = -\sum * \phi_p = -(26,6^\circ + 90^\circ + 135^\circ)$$

$$\underline{\phi_{LL} = -251,6^\circ} \quad o \quad \underline{\phi_{LL} = +108,4^\circ}$$

Además, $\sigma_0 = -5/4 = -1,25$.

El lugar de las raíces se muestra en la figura 22.

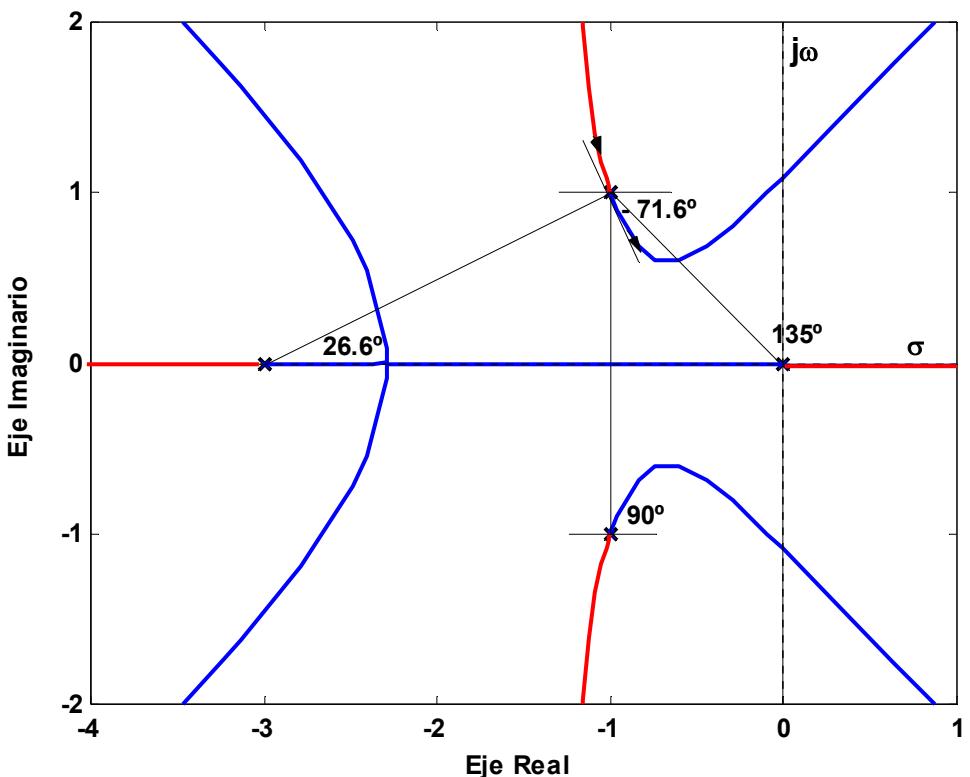


Figura 22.

Ejemplo 17:

Si la función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^2 + 4s + 8)}{s(s+2)}.$$

Hallar los ángulos de partida y de llegada en los ceros complejos conjugados. Aplicando las expresiones vistas, se tendrá:

$$\phi_{LL} = 180^\circ + \sum \phi_p - \sum * \phi_z = 180^\circ + (90^\circ + 135^\circ) - (90^\circ)$$

$$\underline{\phi_{LL} = 315^\circ = -45^\circ}$$

$$\phi_P = \sum \phi_p - \sum * \phi_z = 135^\circ$$

$$\underline{\phi_p = 135^\circ}$$

El lugar de las raíces se muestra en la figura 23

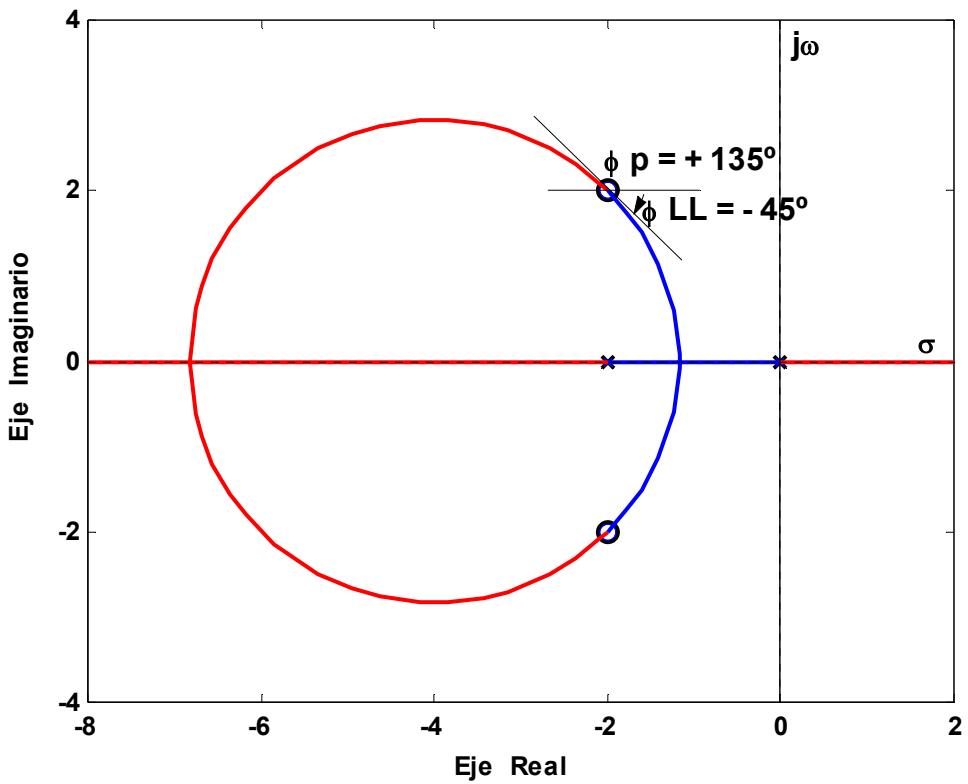


Figura 23.

Ejemplo 18:

Si la función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^2 + 4s + 8)}{s(s+2)^2}$$

Hallar los ángulos de partida y de llegada en los ceros complejos conjugados. Aplicando las expresiones vistas, se tendrá:

$$\phi_{LL} = 180^\circ + \sum \phi_p - \sum * \phi_z = 180^\circ + (2 \times 90^\circ + 135^\circ) - (90^\circ)$$

$$\underline{\phi_{LL} = 405^\circ = 45^\circ}$$

$$\phi_p = \sum \phi_p - \sum * \phi_z = 225^\circ$$

$$\underline{\phi_p = -135^\circ}$$

$$\phi_r = (z + p + m)90^\circ = (1 + m)90^\circ \begin{cases} LR \\ LRI \end{cases} \begin{cases} m = +1 \rightarrow \phi_r = 180^\circ \\ m = -1 \rightarrow \phi_r = 0^\circ \\ m = 0 \rightarrow \phi_r = 90^\circ \\ m = -2 \rightarrow \phi_r = -90^\circ \end{cases}$$

El lugar se muestra en la figura 24.-

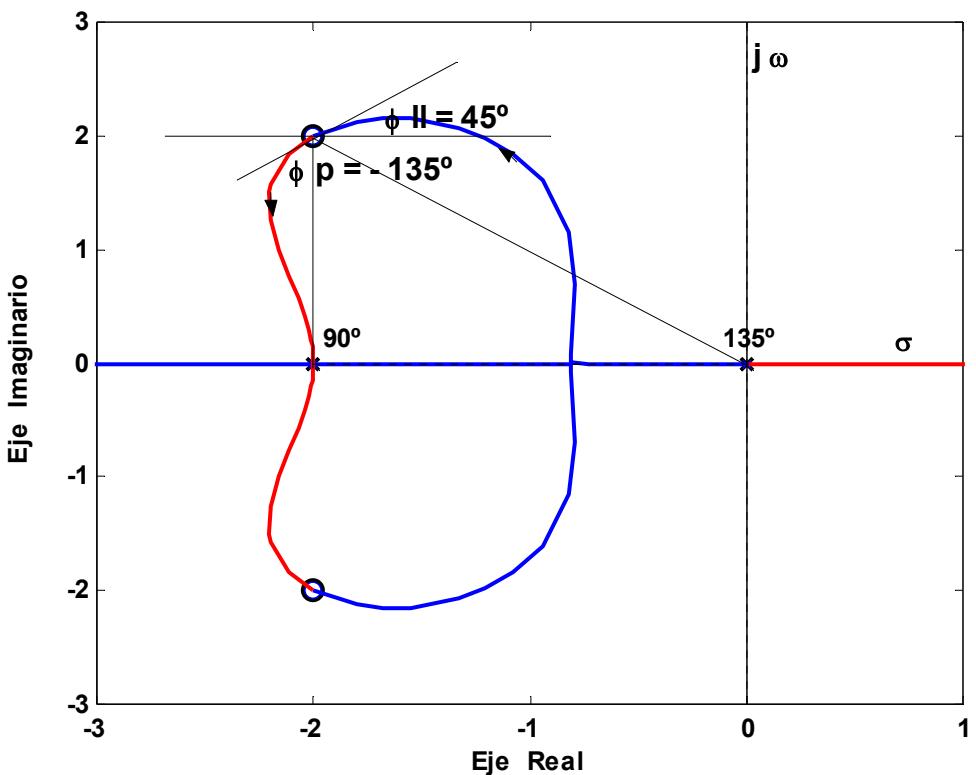


Figura 24.

Ejemplo 19:

Si la función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2 + 2s + 2)^2} = \frac{K(s+2)}{s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 8s + 4}$$

Hallar los ángulos de partida y de llegada en los ceros complejos conjugados. Aplicando las expresiones vistas, se tendrá:

$$\sigma_0 = -2/3 \quad \alpha = m60^\circ \begin{cases} L.R. \rightarrow \pm 60^\circ \text{ y } 180^\circ \\ L.R.I. \rightarrow 0^\circ \text{ y } \pm 120^\circ \end{cases}; \text{ figura 25}$$

Aplicando Routh:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 8 & 4+2K \\
 s^4 & 4 & 8+K & 0 \\
 s^3 & 24-K & 16+8K & 0 \\
 s^2 & -K^2-16K+128 & 0 & 0 \\
 s^1 & 24-K & 0 & 0 \\
 s^0 & 16+8K & 0 & 0
 \end{array}
 \quad \left\{
 \begin{array}{l}
 K > 24 \\
 K > -2 \\
 (K+21,8564)(K-5,8564) < 0 \\
 -2 < K < 5,8564
 \end{array}
 \right.$$

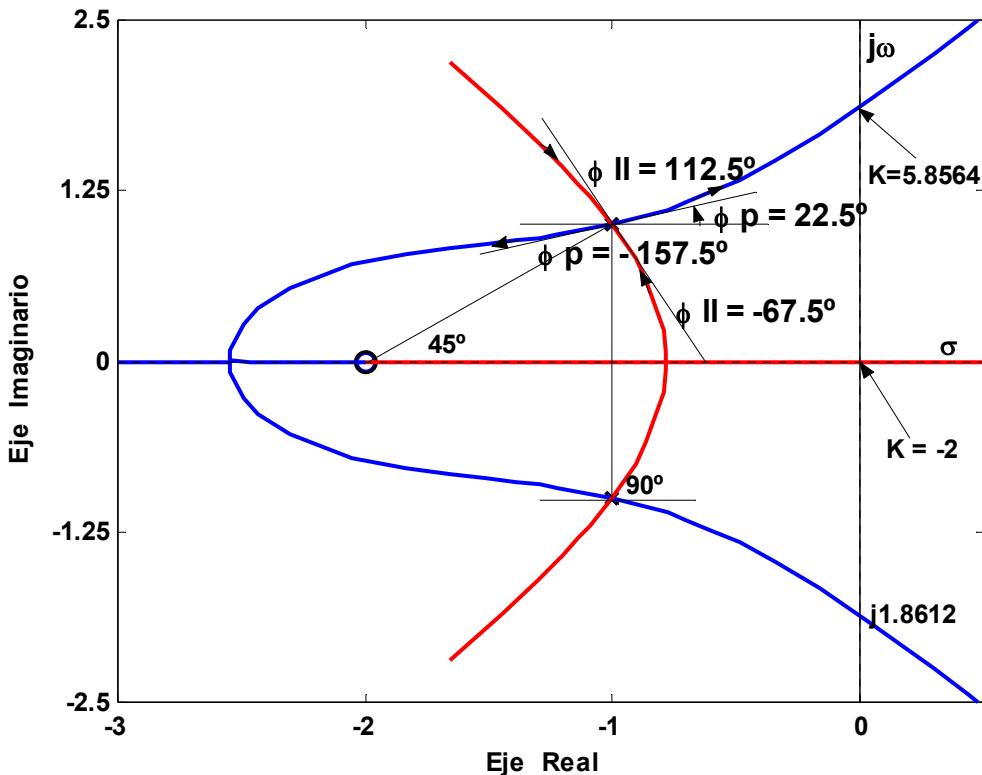


Figura 25.

Hallar los ángulos de partida y de llegada en los ceros complejos conjugados. Aplicando las expresiones vistas, se tendrá:

$$\phi_r = \frac{m180^\circ + \sum \phi_z - \sum * \phi_p}{q} = \frac{m180^\circ - 135^\circ}{2} = \underline{m90^\circ - 67,5^\circ}$$

$$L.R.D, r \equiv P; \phi_p = \begin{cases} m = 1 \rightarrow \phi_p = [22,5^\circ] \\ m = -1 \rightarrow \phi_p = -157,5^\circ \end{cases}$$

$$L.R.I, r \equiv LL; \phi_{LL} = \begin{cases} m = 0 \rightarrow \phi_{LL} = -67,5^\circ \\ m = 2 \rightarrow \phi_{LL} = 112,5^\circ \end{cases}$$

Puntos de Ruptura, (la regla y significado se verán más adelante).-

$$N \frac{d}{ds} L_1(s) = 0 \Rightarrow 3s^4 + 16s^3 + 32s^2 + 32s + 12 = 0$$

Como $s_{1-2} = -1 \pm j$ son puntos de ruptura para $K = 0$, dividiendo el polinomio anterior por $(s^2 + 2s + 2)$ el resto será exacto y el cociente es:

$3s^2 + 10s + 6 = 0$, cuyas raíces son: -2.5486 y -0.7848 que serán los puntos de ruptura reales, como se aprecia en la figura 25.-

5º Paso: Regla 7

Intersección del L.G.R. con el eje Imaginario:

Los puntos donde el lugar de las raíces cruza al eje imaginario del plano s, (si existen), y los valores correspondientes de la ganancia K se pueden determinar de varias maneras a saber:

1º) Interceptar el eje imaginario con la ecuación característica:

$$\begin{cases} F(s) = 0 \\ s = j\omega \end{cases} \Rightarrow F(j\omega) = PR(j\omega) + jPI(j\omega) = 0 \Rightarrow \begin{cases} PR(j\omega) = 0 \\ PI(j\omega) = 0 \end{cases}$$

Se tendrá un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, (ω_c y K_L).-

2º) Criterio de Routh-Hurwitz:

Como se sabe el elemento de la penúltima fila del arreglo de Routh, se debe igualar a cero para obtener la o las ganancias límites. Y de la ecuación auxiliar se determinan la o las frecuencias correspondientes, ω_c . - El último elemento de la primera columna, si esta en función de la ganancia K, dará la ganancia que provoca que el sistema tenga un polo en el origen, un integrador, para dicha ganancia. Sería una rama que se desplaza por el eje real.

3º) Método de Nyquist:

Si se tiene que;

$$G(s)H(s) = K \frac{R_N + I_N}{R_D + I_D} \quad \text{Donde: } \begin{cases} R_N \ y \ R_D : \text{Términos con potencias pares de } s. \\ I_N \ y \ I_D : \text{Términos con potencias impares de } s \end{cases}$$

Por lo tanto para que la parte imaginaria sea cero se deberá cumplir:

$$R_N I_D = R_D I_N$$

Reemplazando s por $j\omega$, se pueden obtener las ω_c correspondientes.

Y como:

$$G(s)H(s) \Big|_{s=j\omega_c} = K_L \frac{R_N}{R_D} \Big|_{s=j\omega_c} \equiv K_L \frac{I_N}{I_D} \Big|_{s=j\omega_c} = -1$$

En consecuencia las ganancias límites se obtiene a partir de:

$$K_L = -\frac{R_D}{R_N} \Big|_{s=j\omega_c} \quad o \quad K_L = -\frac{I_D}{I_N} \Big|_{s=j\omega_c}$$

Ejemplo 20:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = L(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)^3}$$

Hallar los puntos de cruce con el eje imaginario.

1º) La ecuación característica es:

$$s(s+1)^3 + K(s+2) = 0$$

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + (1+K)s + 2K = 0$$

Reemplazando s por $j\omega$, nos queda:

$$(\omega_c^4 - 3\omega_c^2 + 2K_L) + j\omega_c(1 + K_L - 3\omega_c^2) = 0$$

Por ende:

$$\begin{cases} \omega_c^4 - 3\omega_c^2 + 2K_L = 0 \\ \omega_c(1 + K_L - 3\omega_c^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\omega_c^2 = 1 + K_L \Rightarrow K_L = 3\omega_c^2 - 1$$

$$\omega_c^4 - 3\omega_c^2 + 6\omega_c^2 - 2 = 0 \Rightarrow \omega_c^4 + 3\omega_c^2 - 2 = 0$$

Si se hace: $\omega_c^2 = x \Rightarrow \omega_c = \sqrt{x}$ quedará:

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

Cuyas raíces son:

$$-3.56 \text{ y } 0.5615, \text{ por lo tanto } \omega_c^2 = 0.5615, \Rightarrow \omega_c \cong 0.7494 \text{ rad / seg. -}$$

En consecuencia la ganancia límite será:

$$K_L = 3 \times \omega_c^2 - 1 = 3 \times 0.5615 - 1 = 0.6845 \Rightarrow K_L \cong 0.6845$$

2º) Por Routh-Hurwitz

La tabla de Routh es:

s^4	1	3	2K	0]
s^3	3	1+K	0	0]
s^2	8/3-1/3K	2K	0	0]
s	(11K-8+K ²)/(K-8)	0	0	0]
1	2K	0	0	0]

Como se aprecia para que el sistema sea estable $K > 0$.

El numerador del elemento de la fila s^1 , es:

$$K^2 + 11K - 8 = 0 \Rightarrow (K + 11.6845)(K - 0.6845) = 0 \Rightarrow K_L = 0.6845.$$

La ecuación auxiliar es:

$$(8 - K_L)s^2 + 6K_L = 0$$

Reemplazando K_L :

$$7.3153s^2 + 4.1079 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j0.7494$$

En consecuencia: $\omega_c = 0.7494 \text{ rad / seg. -}$

3º) Método de Nyquist:

$$L(s) = K \frac{s+2}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s} = K \frac{[2] + [s]}{[s^4 + 3s^3] + [3s^2 + s]}$$

$$2(3s^3 + s) = (s^4 + 3s^2)s \Rightarrow s^4 - 3s^2 - 2 = 0$$

Reemplazando s por $j\omega$, quedará:

$$\omega_c^4 + 3\omega_c^2 - 2 = 0, \text{ como se ve se llega a lo mismo y la } K_L \text{ será:}$$

$$K_L = -\frac{s(3s^2 + 1)}{s} \Big|_{s=j\omega_C} = 3\omega_C^2 - 1 = 3(0.7494)^2 - 1 = 0.6845. -$$

Si se emplea:

$$K_L = -\frac{I_D}{I_N} \Big|_{s=j\omega_C} = -\frac{3s^3 + s}{s} \Big|_{s=j\omega_C} = -\frac{(3\omega_C^2 + 1)}{1} = 3\omega_C^2 - 1$$

Como se aprecia se llega a lo mismo.-

Ejemplo 21:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{(s-5)(s+2)^2} = K \frac{(s+1)}{(s^3 - s^2 - 16s - 20)}$$

$$R_N = 1 \quad R_D = -(s^2 + 20) \quad I_N = s \quad e \quad I_D = s^3 - 16s$$

$(s^3 - 16s) = -s^3 - 20s$, operando:

$$s^2 = -2 \quad \Rightarrow \quad -\omega_C^2 = -2 \quad \Rightarrow \quad \omega_C = \sqrt{2} \text{ rad / seg. -}$$

$$K = -\frac{R_D}{R_N} \Big|_{s=j\omega_C} = \frac{(-\omega_C^2 + 20)}{1} \quad \Rightarrow \quad K = 20 - 2 = 18 \quad \Rightarrow \quad K = 18. -$$

En este caso para $K = 18$, el sistema es Inestable pues hay un polo en +1. El lugar se muestra en la figura 26.

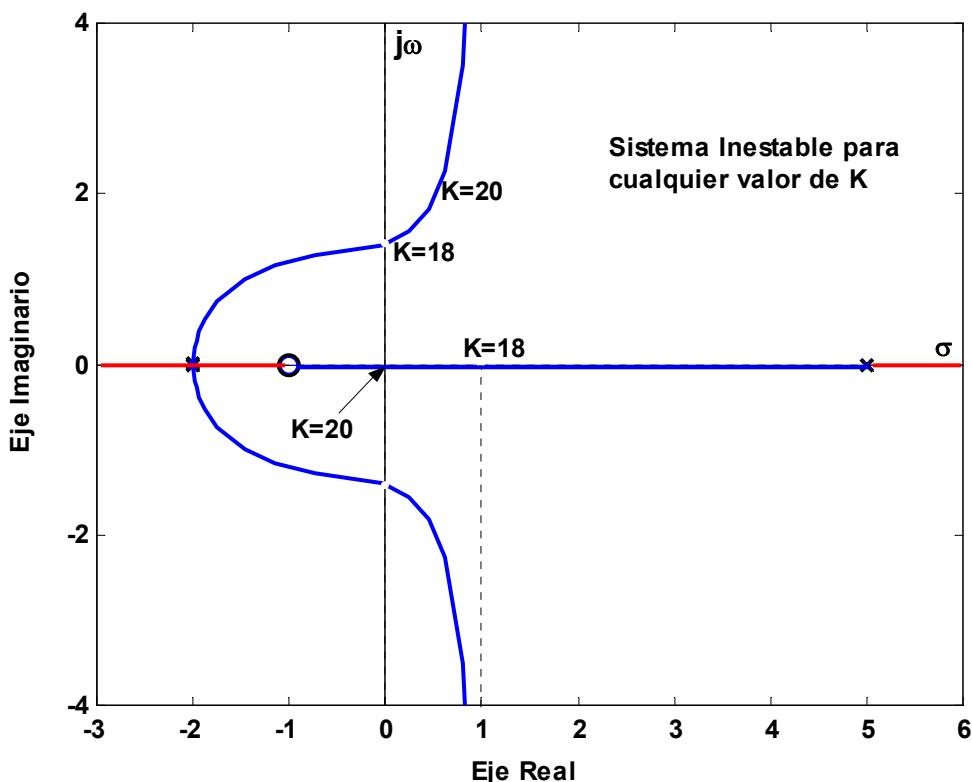


Figura 26

Ejemplo 22:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{(-0.2Kc)}{(s+1)(s+2)(s+3)} ; \quad K = -0.2Kc$$

$$L(s) = -0.2Kc \frac{1+j0}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \Rightarrow R_N = 1; I_N = 0; R_D = 6 + 6s^2; I_D = 11s + s^3$$

$$R_N I_D = R_D I_N \Rightarrow 1 \times (11s + s^3) = (6 + 6s^2) \times 0 = 0$$

Por ende:

$$s(s^2 + 11) = 0 \Rightarrow s^2 + 11 = 0; \text{ Remplazando } s \text{ por } j\omega_c, \text{ nos queda:}$$

$$-\omega_c^2 + 11 = 0 \Rightarrow \omega_c^2 = 11 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{11} \text{ rad/seg.}$$

$$L(s) = -0.2Kc \frac{1}{6 + 6s^2} \Rightarrow \text{Remplazando } s \text{ por } j\omega_c:$$

$$L(j\omega_c) = \frac{-0.2Kc_L}{6 - 6\omega_c^2} = \frac{-0.2Kc_L}{-60} = \frac{Kc_L}{300} = -1$$

En consecuencia $Kc_L = -300$, esto se muestra en la figura 27.

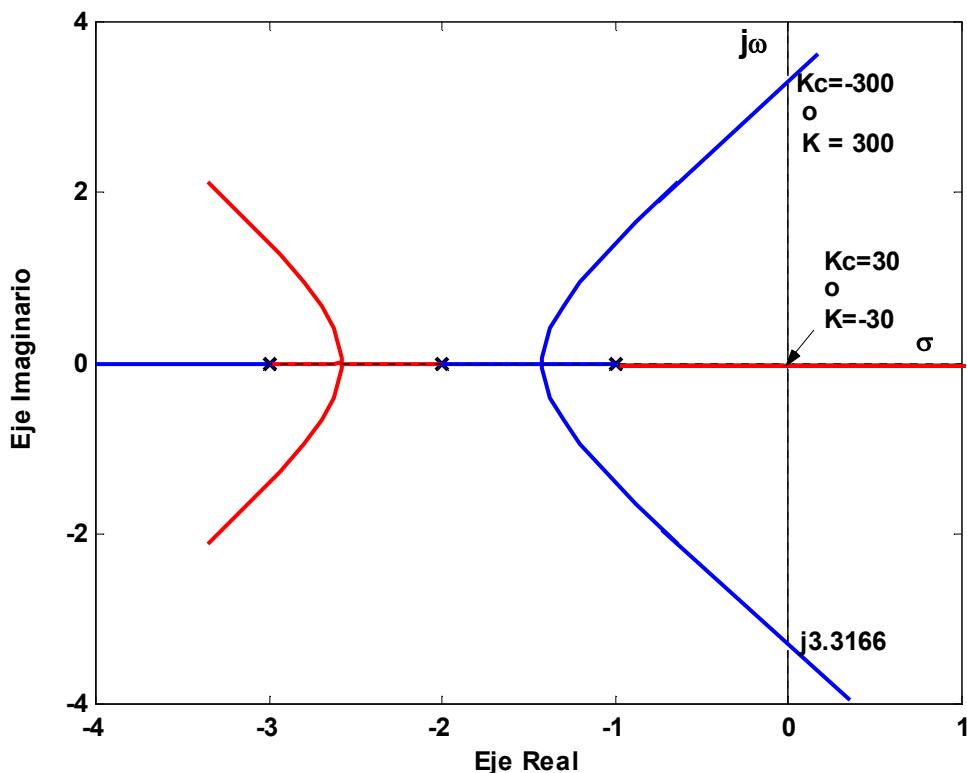


Figura 27

6º Paso: Regla 8.

Puntos de Ruptura sobre el L.G.R.

"Los puntos de ruptura sobre el L.G.R. de una ecuación característica corresponden a raíces de orden de multiplicidad mayor a uno de las mismas"

Por ende, serán los puntos donde se "tocan" 2 o más ramas del lugar. En la figura 28a se ve un caso en que dos ramas del L.R. se juntan en un punto de ruptura sobre el eje real y después parten desde el eje en direcciones opuestas. En éste caso, el punto de ruptura representa una raíz doble de la ecuación característica, cuando se asigna el valor K correspondiente al punto.

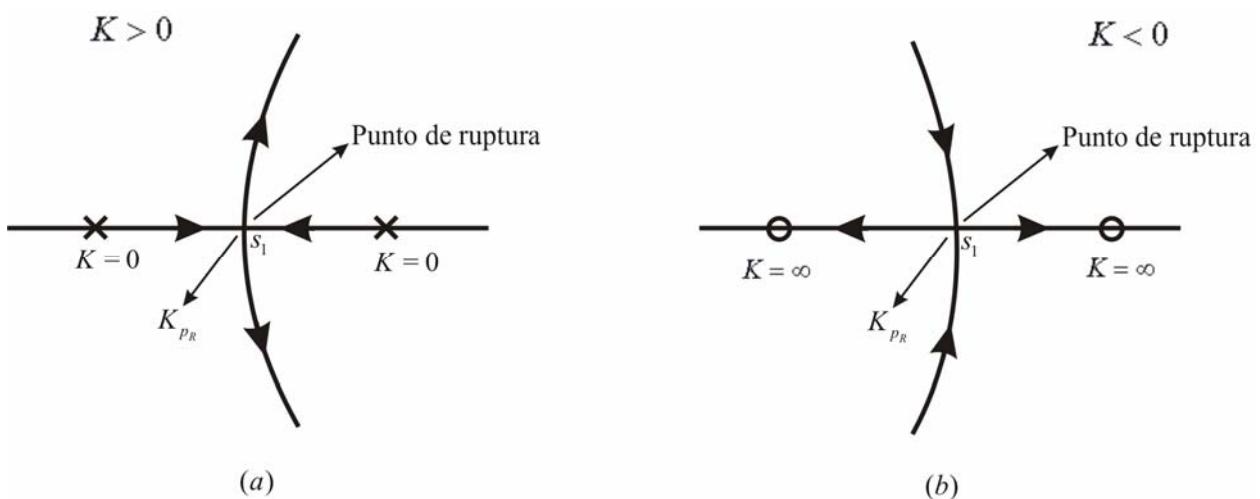


Figura 28

La figura 28b, muestra otra situación, como cuando dos ramas complejas conjugadas se aproximan al eje real, se encuentran en un punto de ruptura y después parten en dimensiones opuestas sobre el mismo.

En general, un punto de ruptura puede involucrar más de dos ramas, e incluso ser pares de complejos conjugados.

Además, un L.G.R. puede tener varios puntos de ruptura.

Los puntos de ruptura sobre el L.G.R. deben satisfacer:

$$\boxed{\frac{\partial L_1(s)}{\partial s} = 0} \quad (1)$$

ó $\boxed{\frac{\partial K(s)}{\partial s} = 0} \quad (2)}$

Se puede demostrar que (1) es igual a (2):

Como $1 + K \cdot L_1(s) = 0 \rightarrow \boxed{K = \frac{-1}{L_1(s)}}$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = \frac{\left[0 - \frac{\partial L_1(s)}{\partial s} \right]}{\left[L_1(s) \right]^2} = \frac{\frac{\partial L_1(s)}{\partial s}}{\left[L_1(s) \right]^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L_1(s)}{\partial s} = 0}$$

$$\therefore \boxed{\text{numerador} \left[\frac{\partial K(s)}{\partial s} \right] = \text{numerador} \left[\frac{\partial L_1(s)}{\partial s} \right] = 0} \quad (3)$$

Es importante apuntar que esta condición es necesaria pero no suficiente. En otras palabras, todos los puntos de ruptura del L.R. deben satisfacerla pero no todas las soluciones complejas son puntos de ruptura. Para que sea un punto de ruptura, las soluciones de la ecuación (3) deberán satisfacer la ecuación característica para un K real o lo que es lo mismo, cumplir con el requerimiento angular.

Ecuación característica: $1 + L(s) = 0 \rightarrow L(s) = -1$

$$\text{Si } L(s) = K \frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow K \frac{N(s)}{D(s)} = -1 \Rightarrow \boxed{K = -\frac{D(s)}{N(s)}}$$

$$\text{Num} \left[\frac{\partial K(s)}{\partial s} \right] = \frac{-[N'(s)D(s) - D'(s)N(s)]}{[N(s)]^2} = 0 \Rightarrow \boxed{N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0}$$

Si $L(s)$ no tiene ceros finitos: $N(s) = 1 \rightarrow N'(s) = 0$ por ende quedará:

$$\boxed{D'(s) = 0}$$

Los puntos de ruptura se pueden calcular fácilmente para una configuración de polos y ceros de $L(s)$ que de como resultado un polinomio de segundo orden para: $\text{Num} \left[\frac{\partial K(s)}{\partial s} \right]$

Ejemplo 23:

$$\text{Si, } L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

Derivando el denominador, pues no hay ceros finitos:

$$\therefore D'(s) = 3s^2 + 6s + 2 = 0 \begin{cases} s_1 = -0,4226 & (\text{L.R.}) \rightarrow K > 0 \\ s_2 = -1,5774 & (\text{L.R.I.}) \rightarrow K < 0 \end{cases}$$

Los valores de K sobre los mismos se podrán calcular con el requerimiento de magnitud o sustituyendo s_1 o s_2 en $K = f(s)$.

Como la ecuación característica es: $\rightarrow (s^3 + 3s^2 + 2s) + K = 0$

Despejando K y remplazando s por sus valores:

$$K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

El resultado es: $K(LR) \cong 0,385$ y $K(LRI) \cong -0,385$

La figura 29 muestra gráficamente el tema:

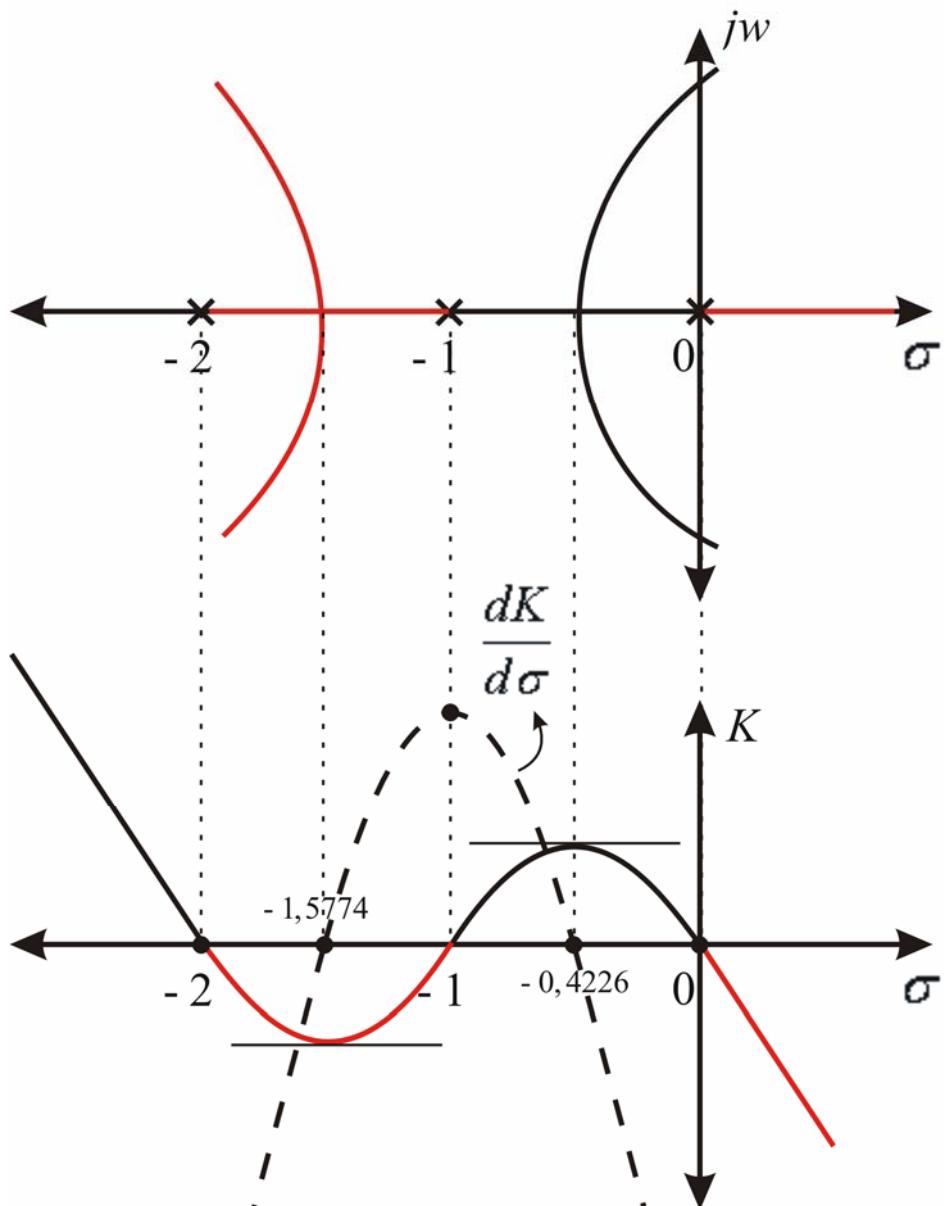


Figura 29

En general, las siguientes conclusiones se pueden hacer al obtener las soluciones de la ecuación: Numerador $\left[\frac{\partial L_1(s)}{\partial s} \right] = 0$ (*)

- 1º) Todas las soluciones REALES son puntos de ruptura (esto es evidente por la regla 3).-
- 2º) Las soluciones complejas conjugadas serán puntos de ruptura solo si satisfacen la ecuación característica, para un K real.
- 3º) El orden de multiplicidad de las soluciones de (*), que sean puntos de ruptura, determina lo que se denomina el *Orden del Punto de Ruptura*, [y].

Este orden determina el *número de ramas* que se juntan en el punto de ruptura, o sea el orden de multiplicidad de la raíz de la ecuación característica o del polo del sistema, que llamaremos [q].-

Se cumple que:

$$q = y + 1, \quad \text{o} \quad y = q - 1.$$

El orden del punto de ruptura, y, también coincide con el mayor orden de derivación nulo de $K(s)$ o $L_1(s)$ en el punto. O sea:

Si las primeras "y" derivadas, $\frac{d^j K}{ds^j}$ para $j(1,2,3,\dots,y)$ son nulas en el punto, el orden del mismo es "y".

Por ejemplo si $\frac{dK}{ds} \neq 0$, no es un punto de ruptura, o $y = 0$, ($q = 1$), o sea por el punto pasa una sola rama del lugar.

Si $\frac{dK}{ds} = 0$ y $\frac{d^2 K}{ds^2} \neq 0$, hay un máximo o un mínimo en la función $K = f(s)$, por lo tanto: $y = 1$ y por ende; $q = 2$, llegan y salen dos ramas del lugar.

Si $\frac{dK}{ds} = 0$; $\frac{d^2 K}{ds^2} = 0$ y $\frac{d^3 K}{ds^3} \neq 0$, hay un punto de inflexión en la función $K=f(s)$. por lo tanto: $y = 2$ y por ende; $q = 3$, llegan y salen tres ramas del lugar.

4º) Cuando ya se tienen individualizados todos los puntos de ruptura y sus ordenes, solo falta determinar los ángulos que forman en el punto las rectas tangentes a las ramas del lugar.

El ángulo entre dos rectas tangentes en el punto a dos ramas mas próximas que llegan o salen está dado por:

$$\beta = \frac{360^\circ}{q}$$

El ángulo entre dos rectas tangentes en el punto a dos ramas adyacentes una que llega y la otra que sale está dado por:

$$\gamma = \frac{\beta}{2} = \frac{180^\circ}{q}$$

Nos referiremos primero a los puntos de ruptura sobre el eje real, (que son los más comunes).

A) En los polos y/o ceros múltiples del lazo: ($K=0$ y/o $K=\infty$).

En un polo de orden de multiplicidad r , $y=r-1$, pues $q=y+1=r$, ($K=0$).

En un cero de orden de multiplicidad r , $y=r-1$, pues $q=y+1=r$, ($K=\infty$).

Ejemplo 24:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)^3};$$

Los puntos de ruptura serán:

$$N \frac{d}{ds}(L_1(s)) = 0 \Rightarrow d(s) = 3s^4 + 14s^3 + 21s^2 + 12s + 2 = 0$$

Por lo dicho dos raíces del polinomio $d(s)$ deberán ser: $s_{1-2}=-1$, para $K=0$, las otras dos serán las raíces del polinomio cociente:

$$\frac{d(s)}{(s+1)^2} = 3s^2 + 8s + 2 = 0 \Rightarrow s_3 = -0.2792 \quad y \quad s_4 = -2.387,$$

que serán los otros puntos de ruptura del lugar de las raíces directo, para $K=0.06076$ y $K=16.46$ respectivamente.

El lugar es el mostrado en la figura 20.

B) Entre dos Polos o dos Ceros en el Eje Real

En el último caso un cero puede ser impropio.

B₁) Si hay un solo punto de ruptura:

El orden deberá ser impar, generalmente de orden uno. ($y=1$; $q=2$).-

En el ejemplo 24, entre (-1 y 0) y entre (-infinito y -3), en los dos casos:

$$\beta = 180^\circ \quad y \quad \gamma = 90^\circ .-$$

Ejemplo 25:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s^2 + 6s + 10)} = K \frac{1}{s^4 + 12s^3 + 54s^2 + 108s + 80}$$

Los puntos de ruptura serán:

$$L(s) = KL_1(s) = K \frac{1}{D(s)} = -1 \Rightarrow K = -D(s)$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d(-D(s))}{ds} = 0 \Rightarrow s^3 + 9s^2 + 27s + 27 = (s+3)^3,$$

por lo tanto: $s_{1-2-3}=-3$.

En consecuencia $y=3$, (impar), $q=4$ para $K=1$.- $\beta = 90^\circ$ y $\gamma = 45^\circ$.-

El lugar es el mostrado en la figura 30.

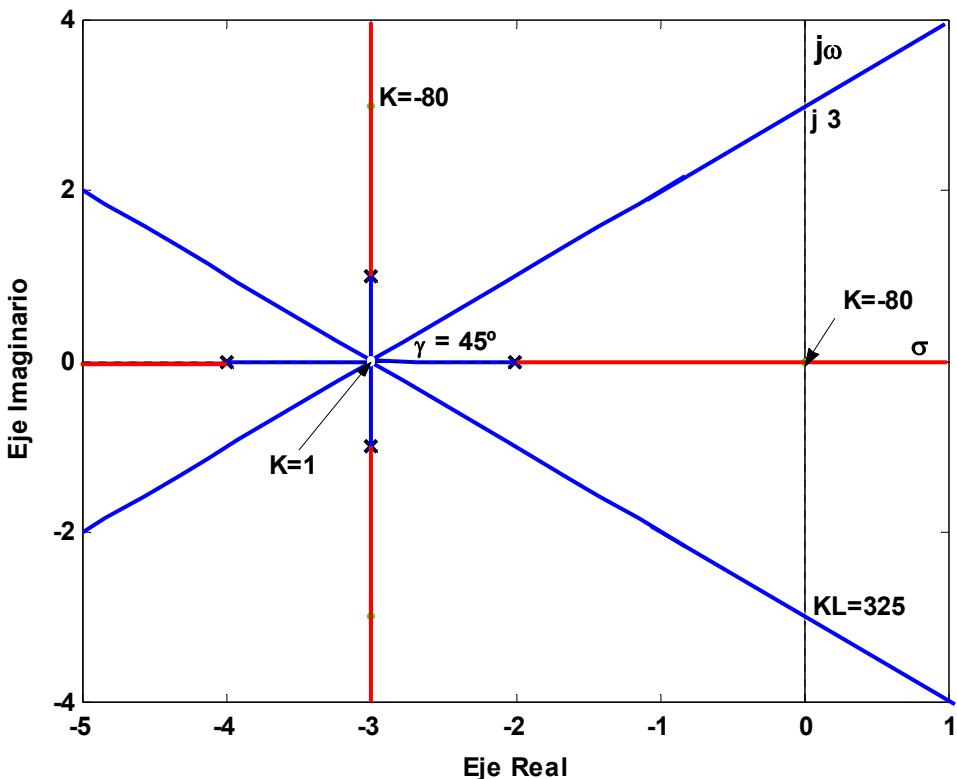


Figura 30

B₂) Cuando hay más de un Punto de Ruptura entre los dos Polos o ceros:
En estos casos la suma de los órdenes de cada uno deberá ser un número impar: $\sum y = N^o \text{ impar}$

Ejemplo 26:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{2Kc(s+3)}{(s-0.5)(s+p)(s^2+4s+5)}$$

Para tres posiciones del polo del lazo $p=-2.5$; $p=-2.689913$ y $p=-2.80$

Si p=2.50:

Hay un solo punto de Ruptura entre los dos polos en $s_1=-0.5593$, $y=1$, $q=2$

Hay un solo punto de Ruptura entre los dos ceros en $s_2=-3.443$, $y=1$, $q=2$

En los dos casos $\beta = 180^\circ$ y $\gamma = 90^\circ$.

Si p=2.689913.. :

Hay dos puntos de Ruptura entre los dos polos en:

$s_1=-0.516$, $y=1$, $q=2$, $\beta = 180^\circ$ y $\gamma = 90^\circ$.

$s_2=-2.118$, $y=2$, $q=3$, $\beta = 120^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$. - $\sum y = 3$ (impar). -

Hay un solo punto de Ruptura entre los dos ceros en $s_3=-3.374$, $y=1$, $q=2$

Si p=2.80:

Hay tres puntos de Ruptura entre los dos polos en:

$s_1=-0.535$, $s_2=-1.888$ y $s_3=-2.462$, para todos, $y=1$, $q=2$, $\beta = 180^\circ$ y $\gamma = 90^\circ$

Como se ve $\sum y = 3$ (impar). -

Además un solo punto de Ruptura entre los dos ceros en: $s_4=-3.316$, $y=1$, $q=2$, $\beta=180^\circ$ y $\gamma=90^\circ$. -

En la figura 31 se muestran los tres lugares directos solamente:

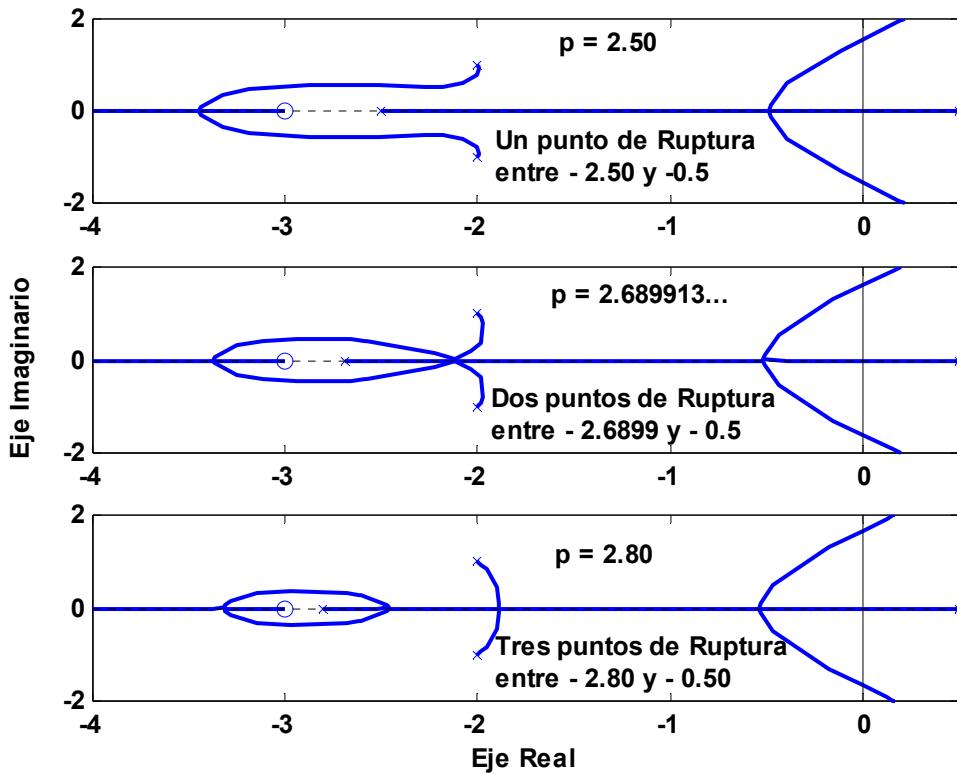


Figura 31

C) Entre un Polo y un Cero en el Eje Real.

C₁) Que no hayan puntos de ruptura: ($y=0$, $q=1$)

Es el caso más común.

C₂) Que hayan puntos de ruptura:

En estos casos se debe cumplir que la suma de los órdenes de todos los puntos de ruptura siempre sea un número par.-

$$\sum y = N^o \text{ Par}$$

Ejemplo 27:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+p)} = K \frac{(s+1)}{(s^3 + ps^2)}$$

Los puntos de ruptura serán:

$$N \frac{dL_1(s)}{ds} = 0 \Rightarrow s[2s^2 + (p+3)s + (2p)] = 0$$

Si $p=8$ $\Rightarrow s[2s^2 + 11s + 16] = 0$, los puntos de ruptura serán:

$s_1=0$, $y=1$, $q=2$, para $K=0$.-

$s_{2-3} = -2.75 \pm j\sqrt{7}/2$, no satisfacen la ecuación característica para un K real, por lo tanto no son puntos de ruptura, solo para un K complejo e igual a: $K = 22.6250 + j 0.3307$.-

En la figura 32 se muestran los lugares directos solamente:

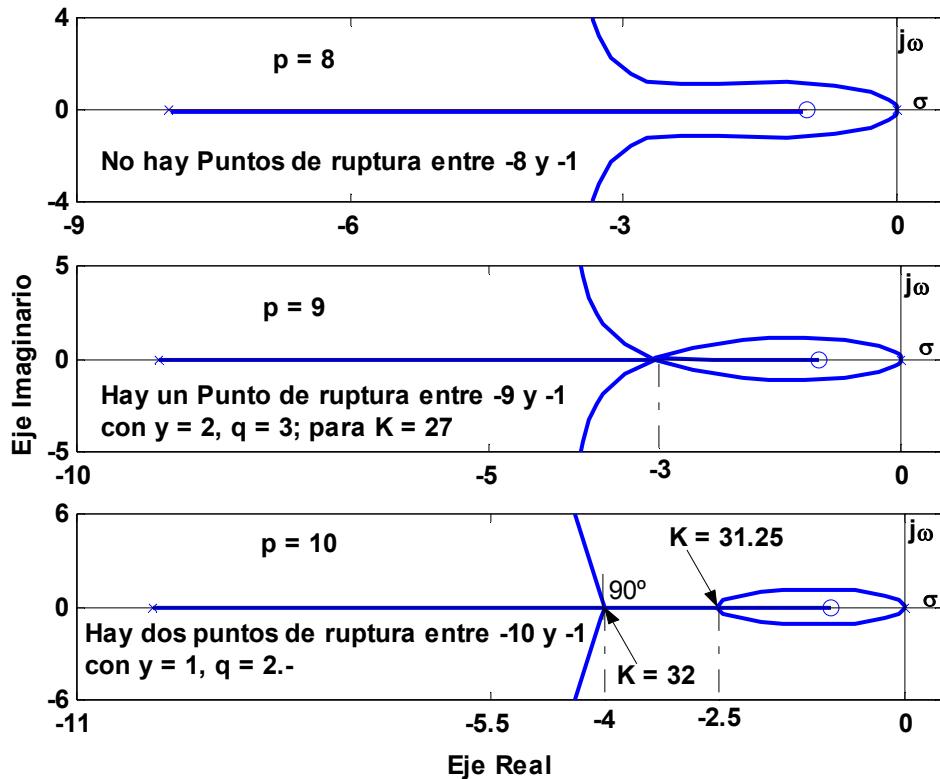


Figura 32

Si $p = 9$:

El polinomio numerador de: $N \frac{dL_1(s)}{ds}$ será: $s[2s^2 + 12s + 18] = s(s+3)^2 = 0$

los puntos de ruptura serán:

$s_1=0$, para $K=0$, $y=1$, $q=2$.-

$s_2=-3$, $y=2$, $q=3$, para $K=27$. Orden par.

Si $P = 10$:

El polinomio numerador de: $N \frac{dL_1(s)}{ds}$ será: $s[2s^2 + 13s + 20] = s(s+2.5)(s+4) = 0$

los puntos de ruptura serán:

$s_1=0$, para $K=0$, $y=1$, $q=2$.-

$s_2=-2.5$, $y=1$, $q=2$, para $K=31.25$

$s_3=-4$, $y=1$, $q=2$, para $K=32$. La suma de los órdenes es par.-

En la figura 32 se muestran los lugares directos.-

D) Puntos de Ruptura Complejos Conjugados

D₁) Estarán en los polos o ceros complejos conjugados de la función de transferencia del lazo, de orden de multiplicad mayor que uno. Si ese orden es en general, "r", se tendrá en esos casos que:

y=r-1, pues q=r.- Para K=0 o K= infinito según sean polos o ceros de L(s). En el ejemplo 29, figura 25 es una aplicación de esto.-

D₂) Puntos de Ruptura en el Plano s en General:

Por lo general no hay, pero si los hubiera además de cumplir que:

$N \frac{dL_1(s)}{ds} = 0$, deberán satisfacer la ecuación característica para un K real, positivo, o negativo, (L.R.D. o L.R.I.).

Ejemplo 28:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^3 + 2s^2 + 3s + 1)}$$

Los puntos de ruptura serán:

$$N \frac{dL_1(s)}{ds} = 0 \Rightarrow 3s^4 + 8s^3 + 9s^2 + 6s + 1 = 0, \text{ las raíces son:}$$

$$s_1 = -0.2324; \quad s_2 = -1.4343 \quad y \quad s_{3-4} = -0.50 \pm j\sqrt{3}/2.$$

Los cuatro pertenecen al lugar directo, pues para el par complejo:

$$K = \frac{-(s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s)}{(s+1)} = \frac{0.5 + j\sqrt{3}/2}{0.5 + j\sqrt{3}/2} \Rightarrow K = 1.$$

Por lo tanto el par complejo también son puntos de ruptura para K=1. Ose que para K=1, el sistema tiene un par complejo doble en:

$$s_{3-4} = -0.50 \pm j\sqrt{3}/2.$$

El centroide esta en: $\sigma_0 = -1/3$ $\alpha = \pm 60^\circ$ y 180° (LR) $\alpha = 0^\circ$ y $\pm 120^\circ$ (LRI)

Los ángulos de partida y de llegada: $\varphi_P \cong -55.5^\circ$ y $\varphi_{LL} \cong +124.5^\circ$

En la intersección con el eje imaginario:

$$\omega_C \cong 1.722 \text{ rad/seg.} \quad y \quad K_L = \sqrt{5}$$

En la figura 33 se muestra el lugar directo solamente.

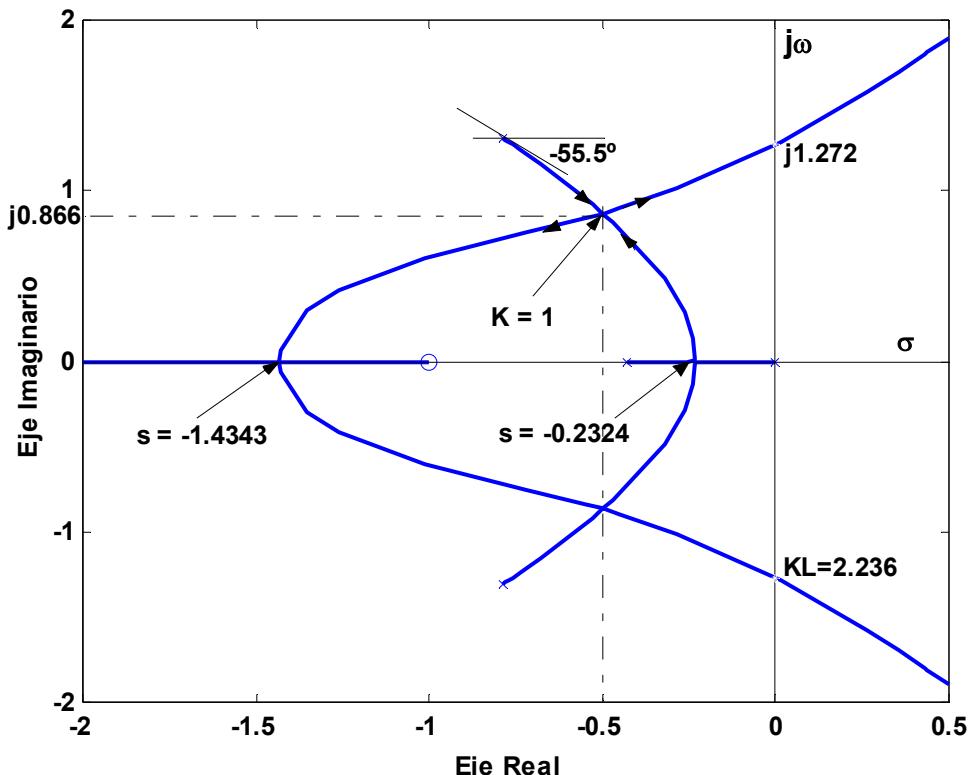


Figura 33

Ejemplo 29:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K}{s(s^2 + 3s + a)}$$

Los puntos de ruptura serán:

$$N \frac{dL_1(s)}{ds} = 0 \Rightarrow 3s^2 + 6s + a = 0$$

Para a=4: $\Rightarrow 3s^2 + 6s + 4 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = -1 \pm j 0.5774$

No satisfacen la ecuación característica para un K real, no son puntos de ruptura.

Para a=3: $\Rightarrow 3(s^2 + 2s + 1) = (s+1)^2 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = -1$

Hay un punto de ruptura en $s=-1$, con $y=2$, (par), $q=3$, para $K=1$.

Para a=2.50: $\Rightarrow 3s^2 + 6s + 2.50 = 0 \Rightarrow s_1 = -0.5918$ y $s_2 = -1.4082$

Hay dos puntos de Ruptura con $y=1$, $q=2$, en s_1 y s_2 , para $K=0.6361$ y $K=0.3639$ respectivamente.

Los lugares se muestran en la figura 34.

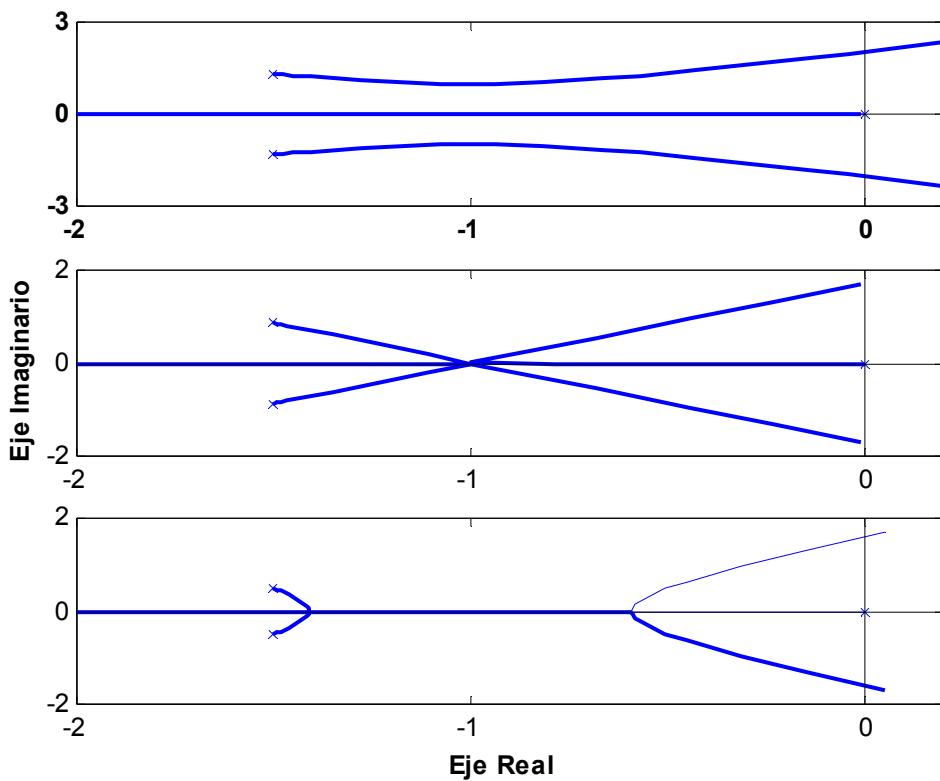


Figura 34

Paso 7: Reglas 9 y 10, (Bosquejar el resto del Lugar de las Raíces)

Para finalizar el L.G.R. comenzamos de los polos del lazo conectando las porciones en el eje real, los puntos de ruptura, los cruces del eje imaginario, terminando en los ceros del lazo finito o bien hacia los impropios siguiendo las asintotas.

Dos reglas también ayudan a esto:

Regla 9: Número de ramas sobre el Lugar Geométricos de las Raíces.

Una Rama del L.G.R. es el lugar de una raíz cuando K toma valores entre $-\infty$ y ∞ . Como el número de ramas del L.G.R. debe ser igual al número de raíces de la ecuación características resulta el siguiente enunciado:

El número de ramas del L.G.R. es igual al más grande de los números n y w de la $L_{equiv}(s)$ "En general si se trata de una $L(s)$ real, $n > w$, por ende el orden será n .

Ejemplo 30: La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

El número de ramas es 3, pues $n=3$ y $w=1$.

Regla 10: Simetría del L.G.R.

"El L.G.R. es simétrico con respecto a los ejes de simetría de la configuración de ceros y polos de $G(s)H(s)$ "

El eje real cumple que es simétrico respecto a la configuración de polos y ceros de $L(s)$. Por lo tanto el Lugar Geométrico de las Raíces será simétrico respecto al eje real.

Esto además es evidente pues para coeficientes reales en la ecuación característica las raíces deben ser reales o estar en pares complejos conjugados.

La primera afirmación es también simple de ver puesto que si los polos y ceros de $L(s)$ a un eje además del real, se puede considerar a este eje de simetría como si fuera el real de un nuevo plano complejo obtenido a través de una transformación lineal.

Ejemplo 31:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

El lugar de las raíces es el mostrado en la figura 35.

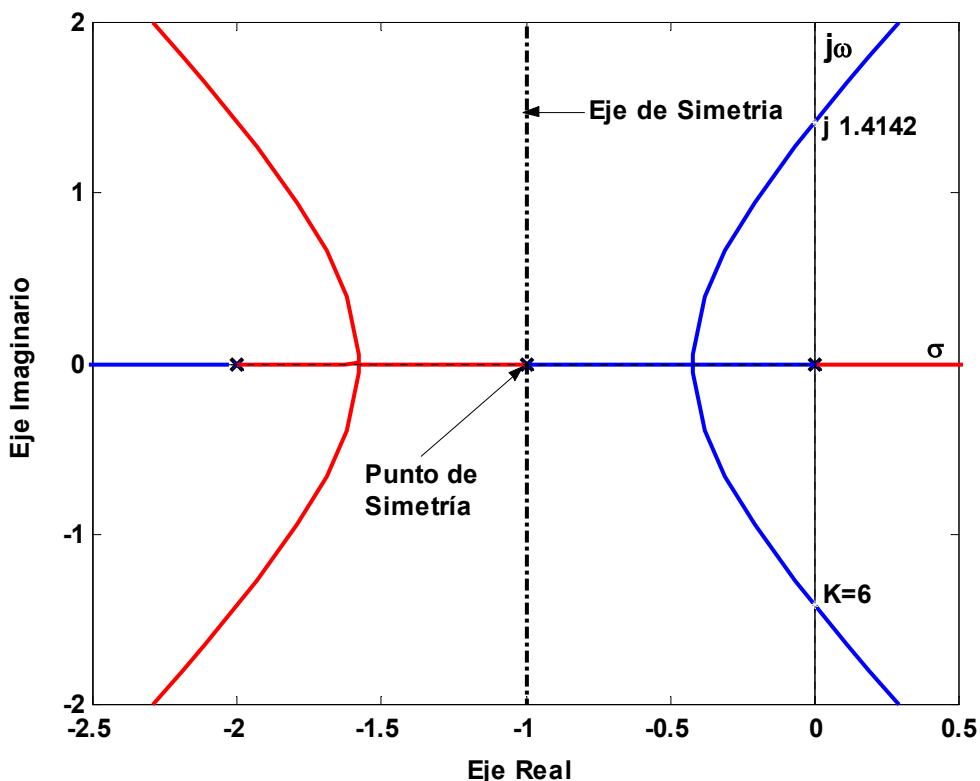


Figura 35

Ejemplo 32:

Cuando la configuración de polos y ceros es simétrica respecto a un punto del plano s , el L.G.R. Completo también será simétrico a dicho punto.

$$\text{Si } L(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

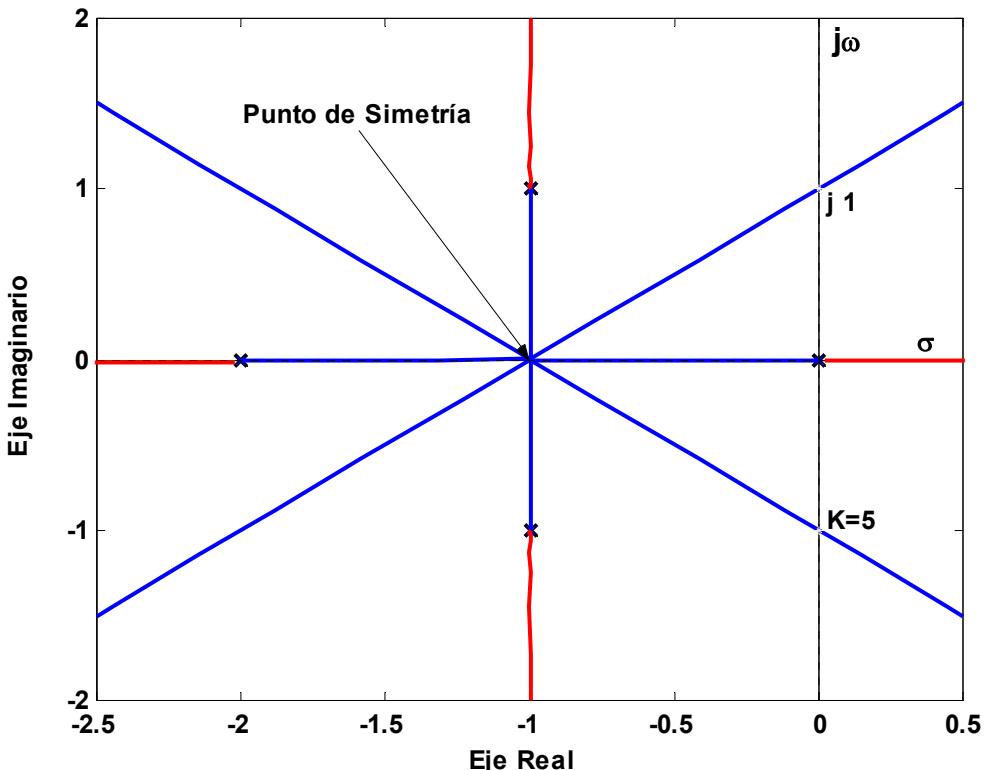


Figura 36

Como se ve cumple que el punto de ruptura tiene $y=3$ (Impar), pues $q=4$.

Regla 11: Cálculo de K sobre el L.G.R.

Una vez que el L.R. ha sido construido, el valor de K en cualquier punto s_1 sobre el lugar puede ser determinado usando el requerimiento de magnitud, o sea: $1 + K \cdot G'(s)H'(s) = 0 \rightarrow |K| = \frac{1}{|G'(s)H'(s)|} \quad -\infty < K < \infty$

$$\text{ó } |K| = \frac{\prod_{j=1}^n |(s_1 - p_j)|}{\prod_{i=1}^w |(s_1 - p_i)|} \quad -\infty < K < \infty$$

Estas ecuaciones pueden evaluarse en forma "gráfica" o analítica. Usualmente si el gráfico está ya dibujado con precisión el método gráfico es más conveniente.

Por ejemplo, el L.R. de la ecuación:

$s^2 + 2s + 2 + K(s + 2) = 0 \rightarrow L(s) = \frac{K(s + 2)}{s^2 + 2s + 2}$ se muestra en la figura 37. El valor de K en el punto s_1 está dado por: $K = \frac{A \times B}{C}$ y en s_2 por: $K = -\left(\frac{A' \times B'}{C'}\right)$

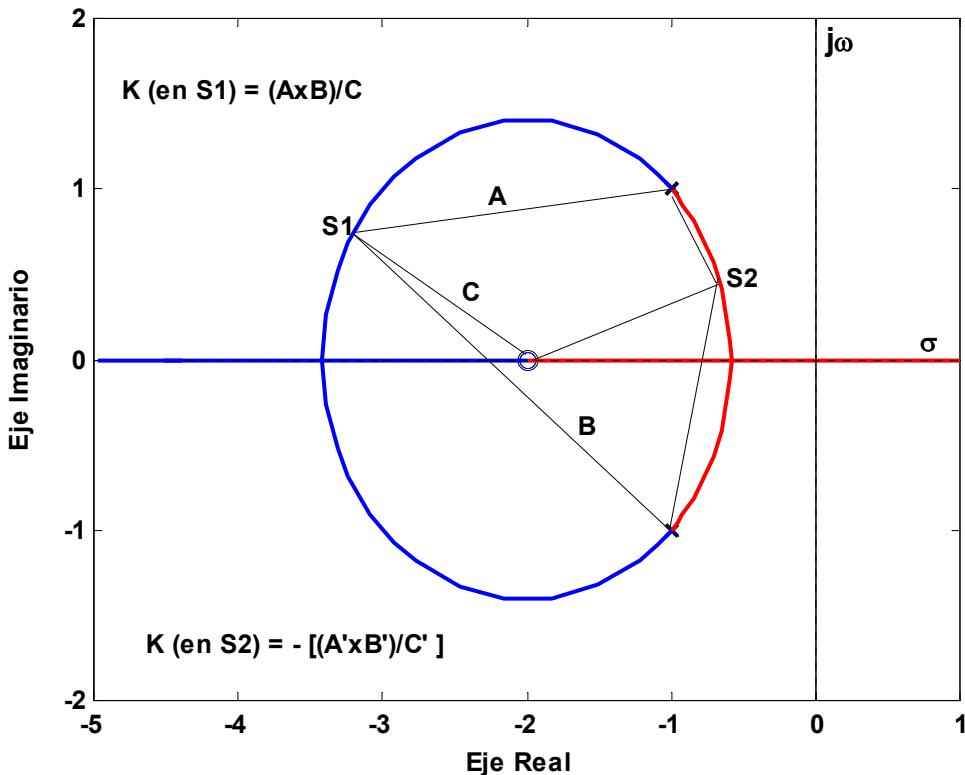


Figura 37

En el caso presentado, s_1 está sobre el L.R. por ende K es positivo. Si s_1 es un punto sobre el L.R.C. K debe tener signo negativo.

Para localizar raíces en el lugar o para hallar el valor de K sobre las ramas del lugar, se pueden aplicar dos propiedades del álgebra a saber:

Regla 11-a:

Se basa en la simetría de las raíces de un polinomio de grado n es igual al coeficiente de grado $(n-1)$ cambiando de signo. O sea:

$$1s^1 + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

$$\boxed{\sum (\text{raíces}) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j) = -a_{n-1}} \quad \text{Expresión general}$$

Para aquellos sistemas donde: $(n \geq w+2)$ a_{n-1} es una constante

independiente de K y es igual a $\left[-\sum_{j=1}^n (p_j) \right]$

$$\therefore \sum_{j=1}^n (\lambda_j) = \sum_{j=1}^n (P_j) = Cte. \text{ si } (n \geq w+2)$$

Esto revela que para $(n \geq w+2)$ al variar K, la suma de las raíces de la ecuación característica permanece constante. En otras palabras cuando el L.G.R. tiene varias ramas que van hacia infinito, las direcciones de las mismas serán tales que la suma de las raíces sea una constante. Una rama que vaga hacia la derecha requiere que exista otra u otras que vayan hacia la izquierda para que se mantenga el cambio y hacer la $\sum(\lambda_j) = Cte.$

Dos ejemplos de aplicación serían:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)} \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = -2 \rightarrow 2\sigma = -2 \rightarrow \underline{\underline{\sigma = -1}}$$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)} \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -6 \rightarrow \underline{\underline{2\sigma + \lambda_3 = -6}}$$

Regla 11-b: El producto de las raíces de la ecuación característica es:

$$\prod_{j=1}^n (\lambda_j) = (-1)^n a_0 \quad \text{General}$$

Para los sistemas con uno o más polos en el origen en $G(s)H(s)$,

$$a_0 = K \prod_{i=1}^w (-z_i) \text{ si hay ceros en } G(s)H(s) \text{ o } a_n = K \text{ si no hay ceros en } G(s)H(s).$$

$$\prod_{j=1}^n (\lambda_j) = (-1)^n K \prod_{i=1}^w (-z_i) \quad \text{o} \quad \prod_{j=1}^n (\lambda_j) = (-1)^n K$$

Ejemplo 33:

Un sistema tiene el diagrama de bloques indicado en la figura 38,

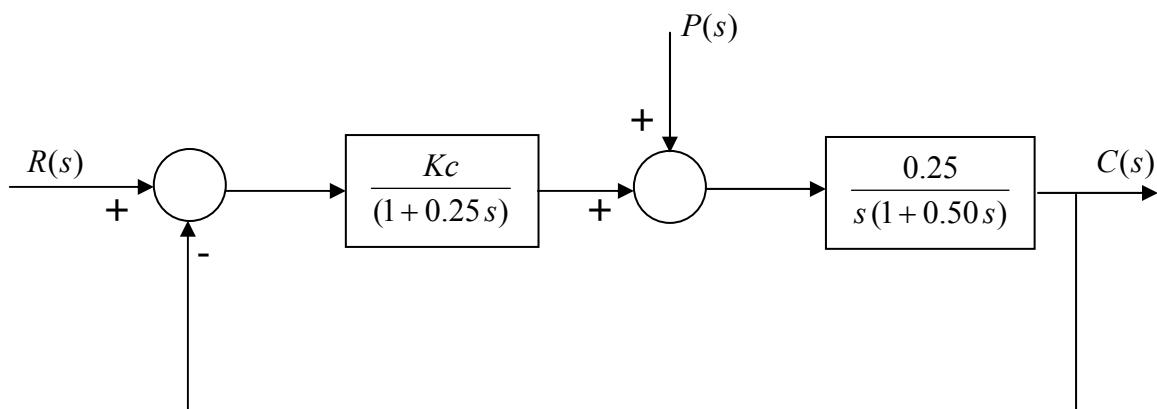


Figura 38

Luego de bosquejar el lugar de las raíces del sistema, si se sabe que el polo real está en $\lambda_3 = -5$, determinar los polos complejos conjugados y el

valor de la ganancia de los sistemas seguidor y regulador.

La función de transferencia del lazo en la forma factorizada será:

$$L(s) = G(s) = \frac{2Kc}{s(s+2)(s+4)}; \quad \text{donde: } K = 2Kc \quad o \quad Kc = \frac{K}{2}$$

Aplicando las reglas el lugar es el mostrado en la figura 39.

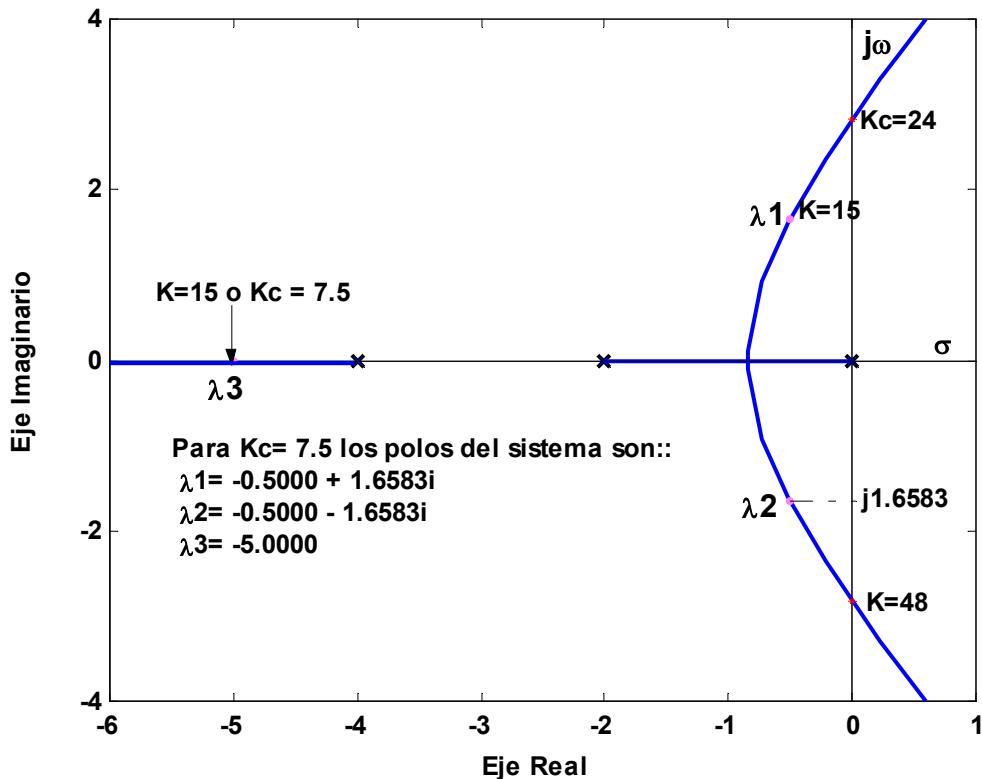


Figura 39

R11a)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_{n-1} = -6$$

$$2\sigma + \lambda_3 = -6 \Rightarrow \sigma = \frac{-6 - \lambda_3}{2} = \frac{-6 + 5}{2} \Rightarrow \sigma = -0.50$$

$$K|_{\lambda_3} = 1 \times 3 \times 5 = 15 \Rightarrow Kc = 7.50$$

R11b)

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -a_0 \Rightarrow (\omega_d^2 + \sigma^2) \lambda_3 = -K \Rightarrow \omega_d = \sqrt{\frac{-K}{\lambda_3} - \sigma^2} = \sqrt{\frac{-15}{-5} - (-0.5)^2} = \sqrt{11}/2$$

Como Seguidor:

$$K_S = 2Kc = 15$$

$$\lambda_{1-2} = -0.50 \pm j1.6583$$

$$\lambda_3 = -5$$

No hay ceros.

Como Regulador

$$K_R = 0.50$$

$$\lambda_{1-2} = -0.50 \pm j1.6583$$

$$\lambda_3 = -5$$

$$Z_1 = -4$$

Regla 12: Ubicación de los Ceros del Sistema.

Es la única propiedad o regla que requiere individualizar a $G(s)$ y $H(s)$ por separado ya que:

Los ceros del sistema (\mathbb{Z}) son, en general, los ceros de la función de transferencia del camino directo $G(s)$ y los polos de la función del camino de realimentación $H(s)$.-

Un diagrama de bloques de un sistema en general es el indicado en la figura 40.

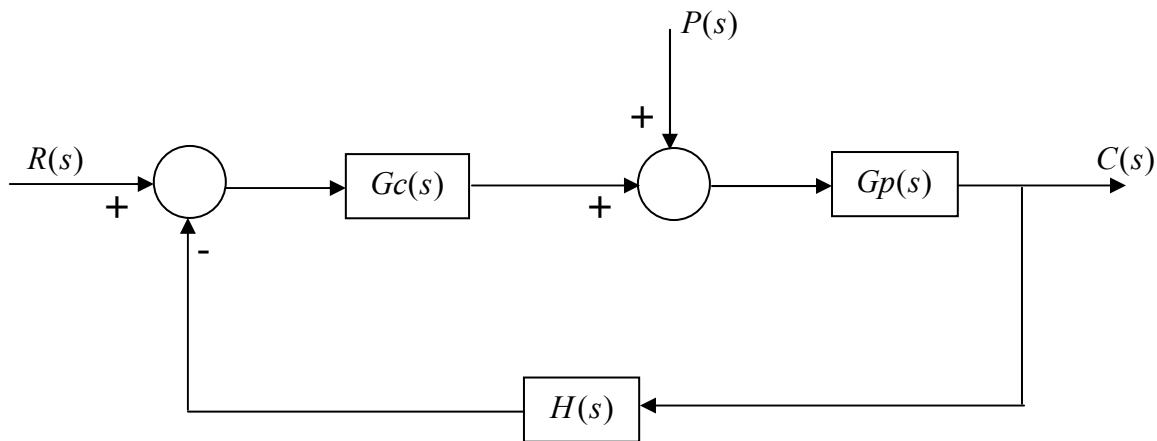


Figura 40

Trabajando como Seguidor:

Los ceros del sistema son los ceros de la función $G(s)=G_c(s).G_p(s)$ y los polos de $H(s)$.-

La ganancia es la ganancia de $G(s)=G_c(s).G_p(s)$ o sea $K_s = K_c.K_p$.-

Trabajando como Regulador:

Los ceros del sistema son los ceros de $G_p(s)$ y los polos de $G_c(s).H(s)$.-

La ganancia es la ganancia de $G_p(s)$ o sea $K_R = K_p$.-

Uso de la Computadora para Graficar los Lugares de las Raíces:

Para graficar el lugar de las raíces de un sistema de control se puede utilizar algunos comandos del Matlab, una vez ingresada la función de transferencia del lazo, por ejemplo los siguientes:

1) `>> rlocus (n, d)`

Este comando grafica el L.R.D. con cada rama de distinto color.

2) `>> rlocus (-n, d)`

Este comando grafica el L.R.I. con cada rama de distinto color.

3) `>>rlocfind (n, d)`

Con este comando si se selecciona con el mouse un punto del lugar sobre una rama del mismo y haciendo clik nos da el valor de la raíz de la ecuación característica λ y la ganancia del lazo correspondiente K .-

4) `>> [K,P]=rlocfind(n,d)`

Se señala un punto sobre una rama con el mouse y con un clik nos da la ganancia del lazo correspondiente y la ubicación todos los polos del sistema para dicha ganancia del lazo.-

5) `>> [K,P]=rlocfind(n,d,P)`

Con este comando se define un vector P con distintas ubicaciones de una de las raíces y devuelve las ganancias para cada uno de las localizaciones K. Además computa la ubicación de las otras raíces, para cada raíz elegida.

6) `>> sgrid`

Este comando grafica un mapa de líneas de factor de amortiguamiento constante (δ) y frecuencia natural constante (W_n).-

7) `>> sgrid(δ, ω_n)`

Este comando grafica solo las dos líneas de δ y ω_n constantes.-

El programa del Csad rlplot, se puede usar para graficar y obtener toda la información del mismo.

RLPLOT:

Objetivo:

Graficar el lugar de las raíces de la ecuación característica de un sistema.

Sinopsis:

rlplot: Computa y grafica el lugar de las raíces de la ecuación característica de sistemas de tiempo continuo, dada la ecuación característica de la forma $1 + K n(s) / d(s) = 0$. -

rlplot: Propone al usuario el ingreso de los polinomios numerador y denominador, n y d, respectivamente, de la ecuación característica deseada.-

rlplot: Usa a n y d como polinomios numerador y denominador respectivamente.-

rlplot : Considera solamente sistemas en los cuales el orden del polinomio $n(s)$ es menor o igual al del polinomio $d(s)$.-

El usuario interactúa con **rlplot** entrando la primera letra de la opción deseada cuando la lista siguiente de opciones es presentada:

```
-- RL PLOT    OPTIONS --
K values          Constant Zeta
Single K          Wn circle
Find K           Rule info
jw axis           New TF
Zoom              Display TF
Erase             Label
Grid              To rltool
Quit
RL PLOT >
```

La primera letra es tipeada en la parte inferior, y luego se presiona la tecla enter. La acción realizada por cada opción del menú principal es la siguiente:

K: Propone al usuario el rango deseado de los valores de K , para construir el lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema en estudio. Cualquier vector de MATLAB es válido como entrada. Por defecto es: `logspace(-2,4,1000)`, computa el lugar de las raíces para 1000 puntos logarítmicamente espaciados, comenzando en $K=10^{-2}$ y finalizando en $K=10^4 = 10000$. Entrando `linspace(0,100,200)` computa el lugar de las raíces para 200 puntos linealmente espaciados entre 0 y 100. Entrando `10:5:100`, computa el lugar de las raíces comenzando en 10 y finalizando en 100, con un incremento lineal de 5, o sea:

`[10 15 20 25 3090 95 100]`. Entrando `[-20 -10 -2 -6 10 25 50]`, computa el lugar de las raíces en los valores específicos señalados. Si se desea agregar mas puntos, la opción **K values**, puede ser seleccionada otra vez y adicionar el nuevo rango de K .

S: Encuentra y muestra las raíces de la ecuación característica para un simple valor de K , elegido por el usuario. Además los muestra en la pantalla y los puede marcar o no en el gráfico, a elección.

F: Propone al usuario identificar un punto en el gráfico del lugar de las raíces del sistema (con ayuda del mouse), para el cual se desea averiguar el valor de K . Todas las raíces son mostradas en la pantalla, indicando además los coeficientes de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural sin amortiguación de las complejas conjugadas. Opcionalmente se pueden marcar en el gráfico del lugar ya construido.

j: Encuentra el valor de K donde el lugar de las raíces cruza el eje jw . El programa tiene, por defecto, un valor de K = 0,001, para la zona de estabilidad y K = 1000 para la zona de inestabilidad. Esto, según sea el sistema, se puede cambiar con la ayuda de la opción F del menú principal. Además, luego muestra en la pantalla todas las raíces para el K límite. Opcionalmente se pueden marcar en el gráfico del lugar.

Z: Cambia el límite de los ejes basada en la elección del usuario: in (ampliar), out (contraer), auto (restaura la elección automática del límite de los ejes), o none (no cambia nada). Esta función no cambia los gráficos futuros, a menos que el grafico actual haya sido mantenido (hold) después de usar el zoom.

E: Borra e inicializa el gráfico.

G: Se dibuja la grilla sobre el gráfico actual y si esta dibujada la retira.

Q: Sale de la función.

C: Propone al usuario elegir el valor del coeficiente de amortiguación relativo y dibuja la línea de $\delta = cte$ sobre el gráfico actual.-

W: Propone al usuario elegir el valor de la frecuencia natural no amortiguada y dibuja la circunferencia de $\omega_n = cte$ sobre el lugar de las raíces ya construido.-

R: Muestra toda la información referida a las reglas o propiedades para la construcción rápida de un bosquejo del lugar de las raíces.-

N: Propone al usuario ingresar una nueva función de transferencia del modelo en estudio. Por defecto mantiene la función de transferencia actual, entrada con anterioridad.-

D: Muestra la función de transferencia actual, ingresada con anterioridad.-

L: Propone al usuario colocar un título en la parte superior de la figura.

T: Se llama al programa rltool de MATLAB, tomando a la función de transferencia ya entrada como la de la planta, la función de transferencia del controlador igual a uno, y la función de transferencia del camino de realimentación unitaria.-

Hay cinco opciones que no se muestran y que también pueden usarse, a saber:

@ Propone al usuario seleccionar y ubicar un texto determinado sobre el gráfico actual. Con la ayuda del mouse se ubica el margen izquierdo del texto a colocar.-

Da las coordenadas de un punto del gráfico elegido por el usuario con el mouse y el botón del mismo.-

- Dibuja una línea horizontal, vertical o inclinada sobre el gráfico actual. Si es una línea inclinada, la que se elige, el usuario deberá elegir los dos puntos extremos con ayuda del mouse. Si la elegida es la línea horizontal

o vertical, primero se seleccionan (con el mouse) dos puntos que fijan la ubicación de una línea recta, (sin marcarla) y luego un tercer punto adicional, y entre este punto y el segundo se marca la recta.

^ Permite al usuario seleccionar:

Tipo de línea y color para el lugar de las raíces directo.-

Tipo de línea y color para el lugar de las raíces inverso.-

Color para las líneas de $\delta = cte$ y $\omega_n = cte$. -

Tipo de línea y color para los ejes real e imaginario.-

! Todo el texto siguiente al símbolo de exclamación, es evaluado y ejecutado por MATLAB o por otra función del Csad inclusive. Este comando permite acceder a las variables internas de la función (por ejemplo: n,d), y a cualquier otro comando del MATLAB, como por ejemplo, ! who, !Bode(n,d) o ! rlocus(n,d), etc.-

Ejemplo 34:

Algunas aplicaciones de rlplot se verán con la función de transferencia del lazo siguiente:

$$L(s) = K \frac{n(s)}{d(s)} = K \frac{(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2 + 2s + 2)}, \text{ donde: } L(s) = G(s)H(s). -$$

Después de entrar los polinomios numerador y denominador de $L(s)$, el programa mostrara en el plano s la configuración de polos y ceros de la misma. Presionando enter se mostrara el menú principal de rlplot.-

Si se selecciona Rule info, la función retorna todas las propiedades del lugar de las raíces:

K=inf point: -3 + 0i

K=0 point: 0 + 0i

K=0 point: -6 + 0i

K=0 point: -5 + 0i

K=0 point: -1 + 1i

K=0 point: -1 - 1i

K>0 asymptote angles: 45 135 225 315

K<0 asymptote angles: 0 90 180 270

Asymptote intersection: -2.5

Press any key to continue...

K>0 real axis locus: (0 to -3), (-5 to -6)

K>0 Departure angle = -43.78 degrees at Pole: -1 + 1i

For $|K| = 11.72$ a Breakaway point appears at: -5.526 + 0i

Press any key to continue...

Eligiendo la opción K values, después de tipar K, la función responde con:

Default input is logspace(-2,4,1000)

Enter K values >

Se puede aceptar ese rango de K, o ingresar otro, por ejemplo:

> logspace(-2,2,1000), al pulsar enter se mostrara el lugar requerido. La propiedad zoom, es particularmente útil para mostrar detalles de ciertos puntos de lugar. Por ejemplo si se desea encontrar el valor de K del lugar, en la intercepción de la línea de $\delta = 0,50$, no se tendría una resolución adecuada en el gráfico original al usar el mouse. Por tal motivo se empleara la opción zoom, para ver en detalle la parte superior del semiplano izquierdo como se muestra en la figura 41. Luego con la opción Find K, y la ayuda del mouse este valor es encontrado y ubicado en el gráfico. Con jw axis, se calcula el $K_{\text{Límite}}$ --

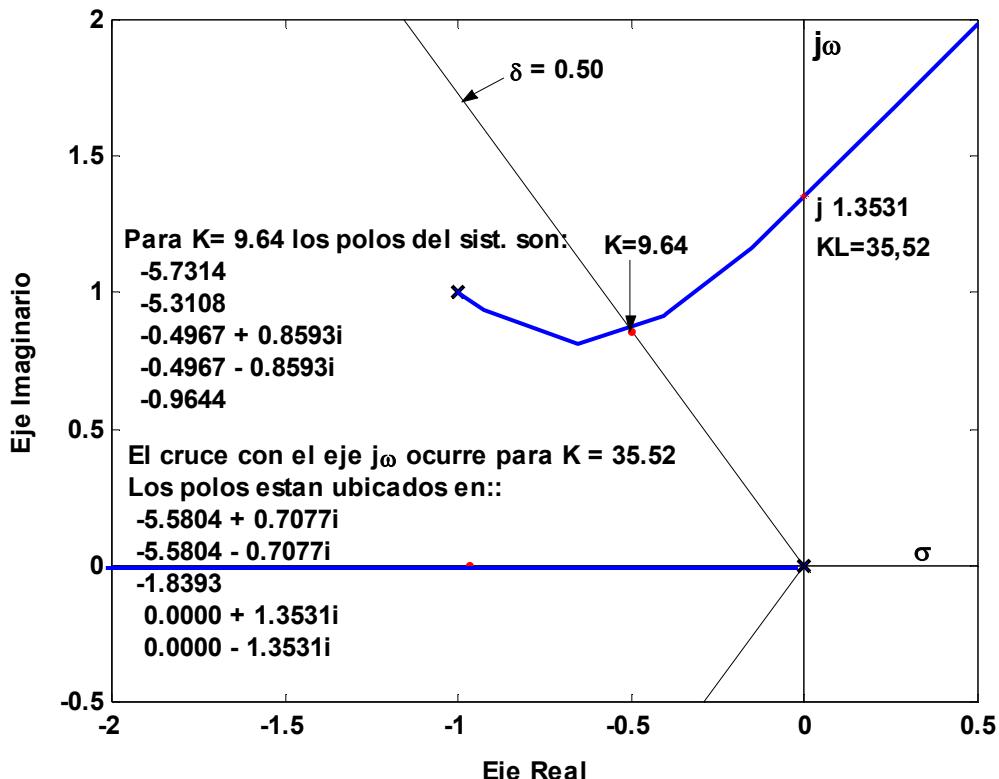


Figura 41

Efecto de la Variación de un Parámetro sobre los Puntos de Ruptura:

Se estudiará este tema con un ejemplo muy simple, a saber:

Se tiene un sistema con el diagrama de bloques indicado en la figura 42.

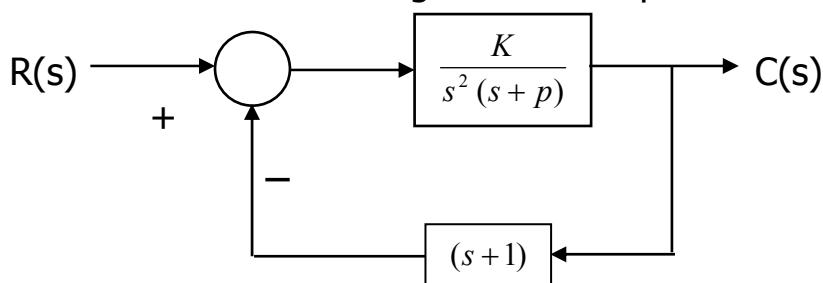


Figura 42

La función de transferencia del sistema será:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^3 + ps^2 + Ks + K}$$

La función de transferencia del lazo es:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+p)}$$

Se vera el efecto que tiene sobre los puntos de ruptura, la variación de la posición del polo del lazo $-p$.

Los mismos se encuentran aplicando:

$$N \frac{d}{ds} L_1(s) = 0$$

Operando y ordenando se tendrá:

$$(2s^3 + 3s^2) + (ps^2 + 2ps) = 0$$

$$s[2s(s+1.5) + p(s+2)] = 0$$

Como se sabe hay un punto de ruptura en el origen para $K = 0$. Los otros dos serán función de p . Se puede construir el lugar de los mismos cuando varía p , encontrando la función de trasferencia equivalente siguiente:

$$G_{equiv.}(s) = \frac{(0.5p)(s+2)}{s(s+1.5)}$$

Por ende los posibles puntos de ruptura, del L.R. del sistema variaran según sea el valor de p de la forma indicada en la figura 43.

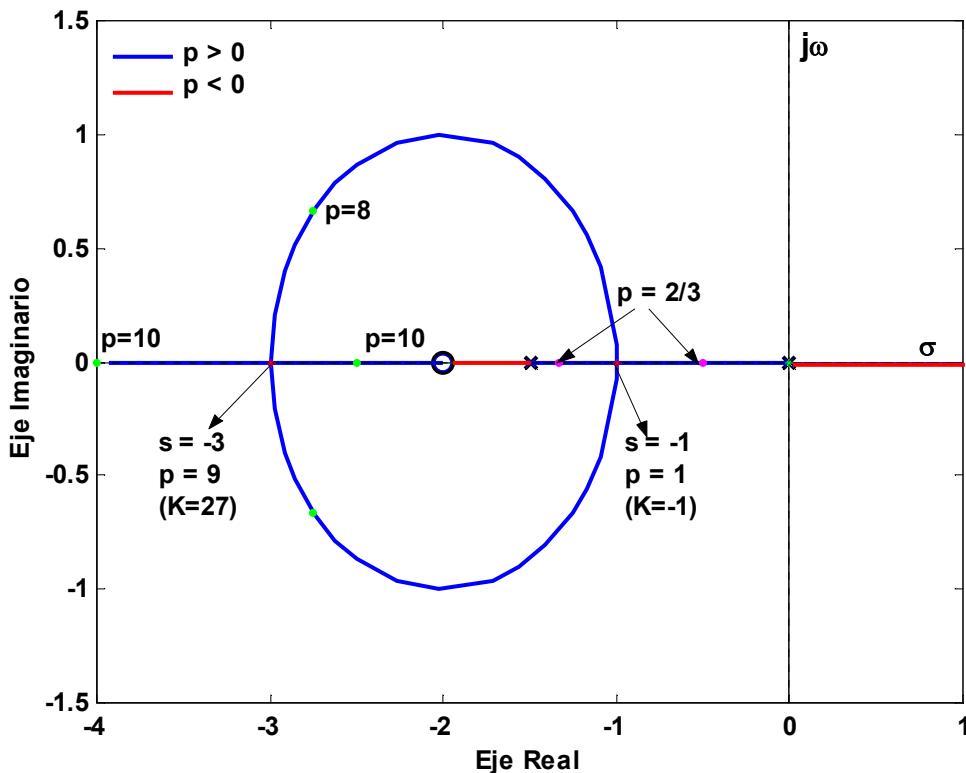


Figura 43

Los puntos de ruptura del lugar de la figura 43, se determinan como se sabe:

$$N \frac{d}{ds} G_1 \text{equiv.}(s) = 0$$

$$(2s+1.5)(s+2) - s^2 - 1.5s = 0 \Rightarrow s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3) = 0$$

O sea serán: $s_1=-1$ y $s_2=-3$.

Para hallar los valores de p, se puede hacer aplicando el requerimiento de magnitud o usando la función $p=f(s)$ en la cual se reemplaza s por:

-1 y -3. Se tiene que:

$$1 + G_{\text{equiv.}}(s) = 0 \Rightarrow G_{\text{equiv.}}(s) = -1 \Rightarrow \frac{0.5 p(s+2)}{s(s+1.5)} = -1, \text{ despejando } p:$$

$$p = \frac{-(s^2 + 1.5s)}{0.5(s+2)}; \text{ Para } s=-1 \text{ y } s=-3 \text{ resulta: } p=1 \text{ y } p=9 \text{ respectivamente.}$$

Comentarios y Conclusiones:

De la figura 43 se puede concluir que:

- Como se ve para $p < 0$, siempre hay dos puntos de ruptura con $y=1$, ($q=2$) variables según sea el valor de p, uno en el semiplano derecho y otro en el izquierdo entre -2 y -1.5, además el del origen fijo con $y=1$, ($q=2$).- Como se puede demostrar estos puntos pertenecen al lugar directo de las raíces, $K>0$, o al inverso o asea cuando $K<0$. Por ejemplo si $p=-0.80$, los puntos de ruptura del lugar serán: $s_1=0$, $s_2=-1.60$ y $s_3=+0.50$. Los mismos corresponderán a los valores de K siguientes: $K=0$, $K=-10.24$ y $K=0.05$ respectivamente.-
- Para $p=0$ se tendrá:
Un punto de ruptura en $s=-1.5$ con $y=1$, ($q=2$), para $K=-6.75$.-
Un punto de ruptura en el origen con $y=2$, ($q=3$), para $K=0$.-
- Para el intervalo de p entre $0 < p < 1$, se tendrá:
Dos puntos de ruptura cada uno con $y=1$, ($q=2$), para $K<0$.-
Un punto de ruptura en el origen con $y=1$, ($q=2$), para $K=0$.-
Por ejemplo para $p=2/3$, los mismos serán:
 $s_1=0$, para $K=0$; $s_2=-0.5$, para $K=-0.08333$ y $s_3=-4/3$, para $K=-3.556$.-
- Para $p=1$, se tendrá:
Es un caso especial pues la ecuación característica es: $(s+1)(s^2 + K) = 0$
O sea hay un polo fijo en -1 y un par imaginario si $K>0$.
Un polo fijo en -1 y un par real simétrico respecto al origen para $K<0$.
Si $K=-1$, la ecuación característica será: $(s+1)(s^2 - 1) = (s+1)^2(s-1) = 0$
Por lo tanto habrá un polo doble en -1 para $p=1$, con $K=-1$. En el lugar de las raíces con la $L(s)$ reducida no habrán puntos de ruptura, solo se pudo apreciar el punto de ruptura en el origen para $K=0$.-
- Para el intervalo de p entre $1 < p < 9$, se tendrá:
Como el sistema es de tercer orden los lugares de las raíces no podrán tener puntos de ruptura complejos conjugados, solo estará el del origen con $y=1$, ($q=2$) para $K=0$.-

- Para $p=9$, se tendrá:
 - Un punto de ruptura en el origen con $y=1$, ($q=2$) para $K=0.-$
 - Un punto de ruptura en $s=-3$ con $y=2$, ($q=3$) para $K=27.-$
- Para el intervalo de p entre $9 < p < \infty$, se tendrá:
 - Un punto de ruptura en el origen con $y=1$, ($q=2$) para $K=0.-$
 - Dos puntos de ruptura reales, uno entre -3 y -2 y el otro entre $-\infty$ y -3 , con $y=1$, ($q=2$) los dos para $K>0.-$
 - Por ejemplo, si $p=10$, los mismos serán:
 $s_1=0$, para $K=0$; $s_2=-2.5$, para $K=31.25$ y $s_3=-4$, para $K=32.-$

Ejemplo 35:

Construir el L.G.R. para $p=10$, y verificar lo dicho anteriormente. La función de transferencia del lazo será:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+10)} ; \text{ aplicando las reglas de construcción el lugar se muestra en}$$

la figura 44.

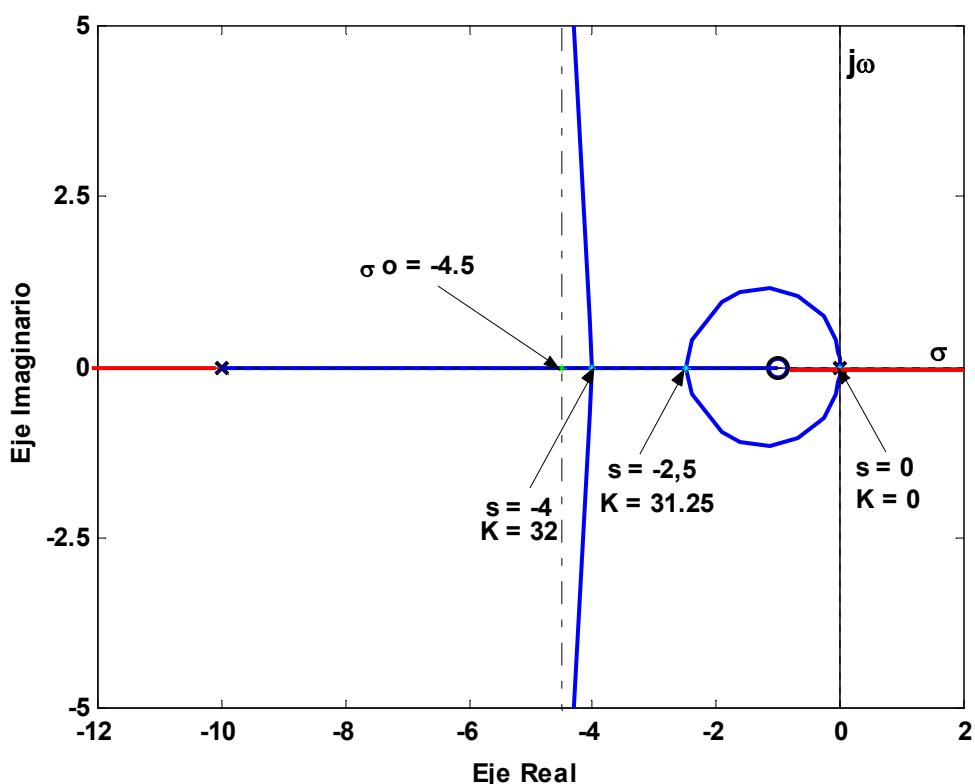


Figura 44

Para las propiedades se puede usar la opción, Rule info del menú principal de rlplot del Csad/Matlab, los resultados son los siguientes:

```
RLPLOT > r
K=inf point: -1 + 0i
K=0 point: 0 + 0i
```

K=0 point: 0 + 0i

K=0 point: -10 + 0i

K>0 asymptote angles: 90 270

K<0 asymptote angles: 0 180

Asymptote intersection: -4.5

Press any key to continue...

K>0 real axis locus: (0 to 0), (-1 to -10)

Only trivial angles of departure/arrival exist.

For $|K| = 0$ a Breakaway point appears at: 0 + 0i

For $|K| = 32$ a Breakaway point appears at: -4 + 0i

For $|K| = 31.25$ a Breakaway point appears at: -2.5 + 0i

Press any key to continue...

Lugar de las Raíces Cuando el Parámetro Variable es Distinto de K

Hasta ahora se han estudiado los sistemas donde la ecuación característica es de la forma:

$$1 + L(s) = 1 + K L_1(s) = 0$$

El problema que se verá a continuación es como estudiar el caso en que la ganancia del lazo K está definida y en $L_1(s)$ hay un parámetro que puede variar de cero a infinito, o en algún rango preestablecido.

Es decir se estudiara el caso en que la ecuación característica se puede escribir de la manera siguiente:

$$1 + K L_1(s, \alpha) = 0$$

Donde α es el parámetro variable. Ordenando la ecuación característica de manera de obtener:

$$1 + \alpha L_1 \text{equiv.}(s, K) = 0$$

Donde $L_1 \text{equiv.}(s, K)$ es una función de transferencia equivalente con un K dado, (fijo). Naturalmente en $L \text{equiv.}(s, K) = \alpha L_1 \text{equiv.}(s, K)$ se podrán usar todas las reglas ya vistas para la construcción del lugar.

Ejemplo 36:

La función de transferencia del lazo de un sistema es la siguiente:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^3 + 2s^2 + \alpha s + 1)},$$

Graficar el L.R. con α como parámetro variable para $K = 1$

Ordenando la ecuación característica como se comentó:

$$[s^4 + 2s^3 + 2s + 1] + [\alpha s^2] = 0$$

$$1 + \frac{\alpha s^2}{(s^4 + 2s^3 + 2s + 1)} = 0 \Rightarrow 1 + \alpha L_1 \text{equiv.}(s, 1) = 0 \Rightarrow 1 + L \text{equiv.}(s) = 0$$

$$L \text{equiv.}(s) = \frac{\alpha s^2}{(s^4 + 2s^3 + 2s + 1)} \cong \frac{\alpha s^2}{(s^2 - 0.73s + 1)(s + 0.435)(s + 2.296)}$$

Función a la se pueden aplicar todas las reglas ya vistas.

Usando rlplot se obtiene:

RLPLOT > r

K=inf point: $0 + 0i$

K=inf point: $0 + 0i$

K=0 point: $-2.297 + 0i$

K=0 point: $0.366 + 0.9306i$

K=0 point: $0.366 - 0.9306i$

K=0 point: $-0.4354 + 0i$

K>0 asymptote angles: 90 270

K<0 asymptote angles: 0 180

Asymptote intersection: -1

Press any key to continue...

K>0 real axis locus: (0 to 0), (-0.435 to -2.3)

K>0 Departure angle = 158.5 degrees at Pole: $0.366 + 0.9306i$

For $|K| = 6$ a Breakaway point appears at: $1 + 0i$

For $|K| = 3$ a Breakaway point appears at: $-0.5 + 0.866i$

For $|K| = 3$ a Breakaway point appears at: $-0.5 - 0.866i$

For $|K| = 2$ a Breakaway point appears at: $-1 + 0i$

Press any key to continue...

El lugar es el mostrado en la figura 45.

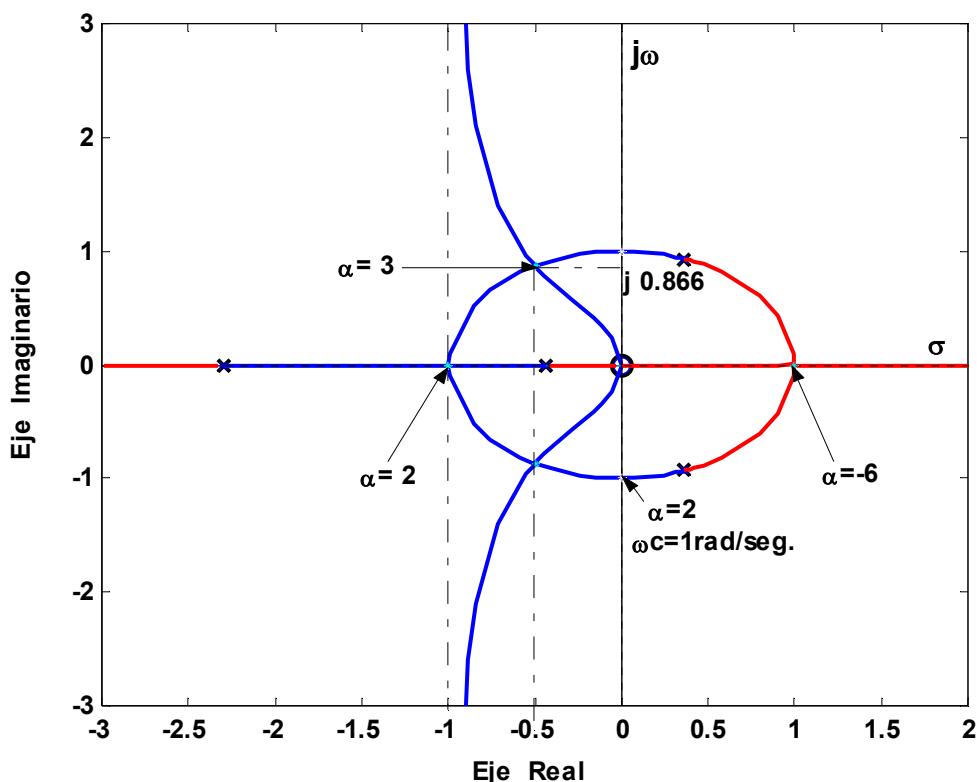


Figura 45

Como se puede apreciar en este caso hay un punto de ruptura complejo conjugado en $s = -0.5 + j0.866$ y $s = -0.5 - j0.866$, para $\alpha = 3$.

Ejemplo 37:

Un sistema tiene el diagrama de bloques de la figura 46.

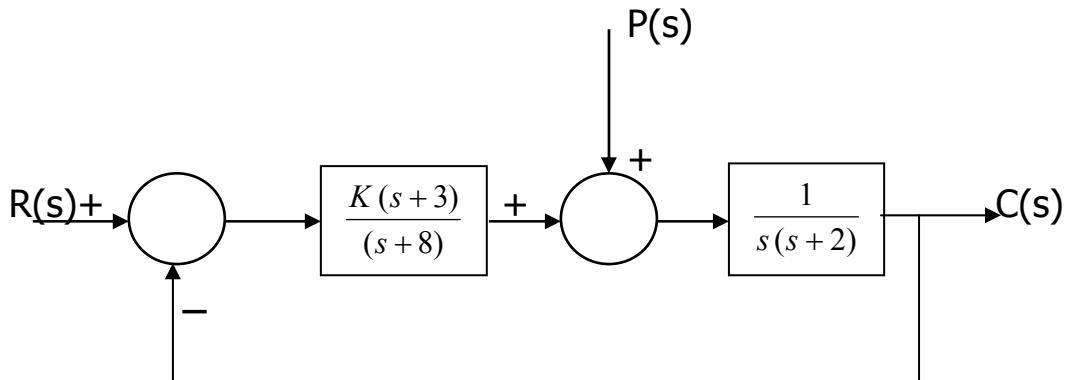


Figura 46

Construir el lugar de las raíces, con K como parámetro variable. Si se sabe que un polo está en $\lambda_3 = -6$, determinar los otros dos y el valor de la ganancia K correspondiente. Además, la ganancia y los ceros del sistema trabajando como seguidor y regulador.

Aplicando las reglas ya vistas el lugar resulta el mostrado en la figura 47.

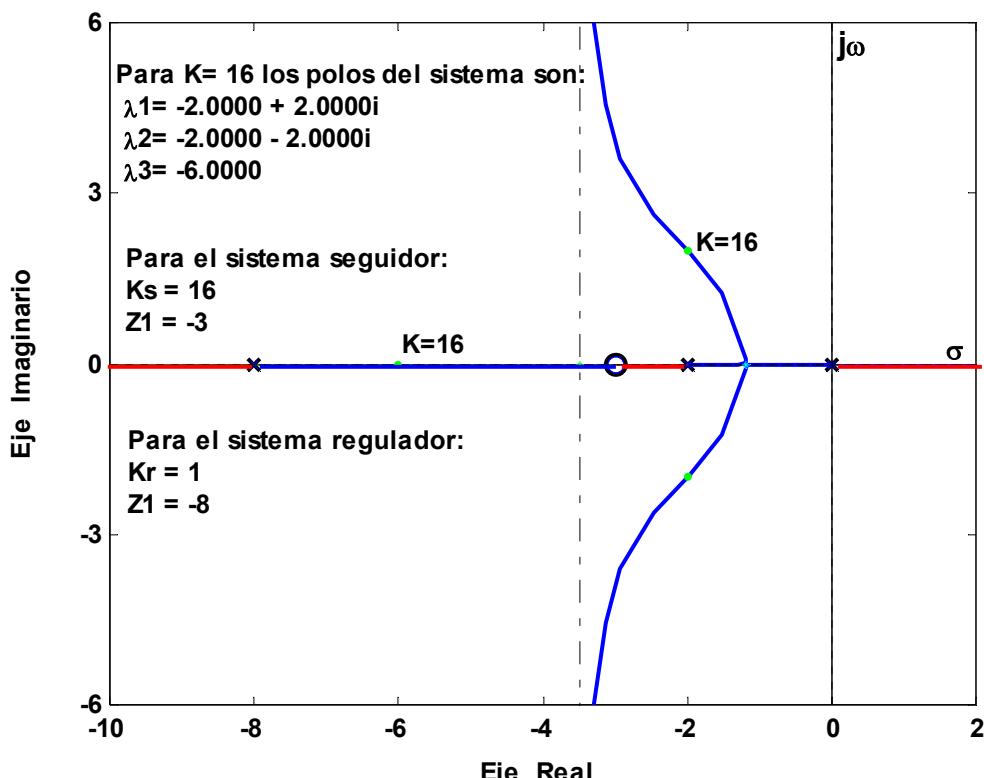


Figura 47

Determinación de K , se puede aplicar el requerimiento de magnitud:

$$K \Big|_{\lambda_3} = \frac{2 \times 4 \times 6}{3} = 16 \quad \Rightarrow \quad K = 16$$

Determinación del par complejo:

Se sabe que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_{n-1} \Rightarrow 2\sigma + \lambda_3 = -10 \Rightarrow \sigma = -2$$

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = -a_0 \Rightarrow (\omega_d^2 + \sigma^2) \lambda_3 = -3K \Rightarrow (\omega_d^2 + \sigma^2) = 8$$

Por lo tanto: $\omega_d = \sqrt{8 - (-2)^2} = 2 \quad \omega_d = 2$

En consecuencia el par complejo será: $\lambda_{1-2} = -2 \pm j2$

La ganancia del sistema seguidor es la ganancia de $L(s)$, por ende $K_s = 16$.

Y el cero es el cero de $G_c(s)$, o sea $Z = -3$.

La ganancia del sistema regulador es la ganancia de $G_p(s)$, por ende $K_r = 1$

Y el cero es el polo de $G_c(s)$, $Z = -8$.

Ejemplo 38:

En el ejemplo anterior para $K = 16$, se supondrá que el polo en -8 del controlador puede variar en torno a su valor nominal. El análisis es interesante pues permitirá conocer la sensibilidad del sistema respecto a este parámetro. Por lo tanto se tendrá:

$$L(s) = \frac{16(s+3)}{s(s+2)(s+\beta)} \text{ donde: } \beta = \beta_0 + \Delta\beta \quad \text{con} \quad \beta_0 = -8$$

Estudiaremos los efectos sobre el funcionamiento del sistema debido a las variaciones de $\Delta\beta$ en mas y en menos, (+ o -).

La ecuación característica es:

$$s(s+2)(s+8+\Delta\beta) + 16(s+3) = 0$$

$$[s(s+2)(s+8) + 16(s+3)] + [\Delta\beta s(s+2)] = 0$$

En consecuencia la función del lazo equivalente será:

$$Lequiv.(s) = \frac{\Delta\beta s(s+2)}{s^3 + 10s^2 + 32s + 48} = \frac{\Delta\beta s(s+2)}{(s+6)(s^2 + 4s + 8)}$$

Los polos de la $Lequiv.(s)$ son los mismos que los del sistema cuando $\Delta\beta = 0$ y $K=16$, como se podía deducir.-

Aplicando las reglas necesarias se llega al lugar de la figura 48.

Usando rlplot se obtiene:

RLPLOT > r

K=inf point: 0 + 0i

K=inf point: -2 + 0i

K=0 point: -6 + 0i

K=0 point: -2 + 2i

K=0 point: -2 - 2i

K>0 asymptote angles: 180

K<0 asymptote angles: 0

Asymptote intersection: 0

Press any key to continue...

K>0 real axis locus: (0 to -2), (-6 to -Inf)

K>0 Departure angle = -71.57 degrees at Pole: -2 + 2i

For $|K| = 16.6$ a Breakaway point appears at: $4.491 + 0i$
 For $|K| = 23.12$ a Breakaway point appears at: $-1.252 + 0i$
 Press any key to continue...

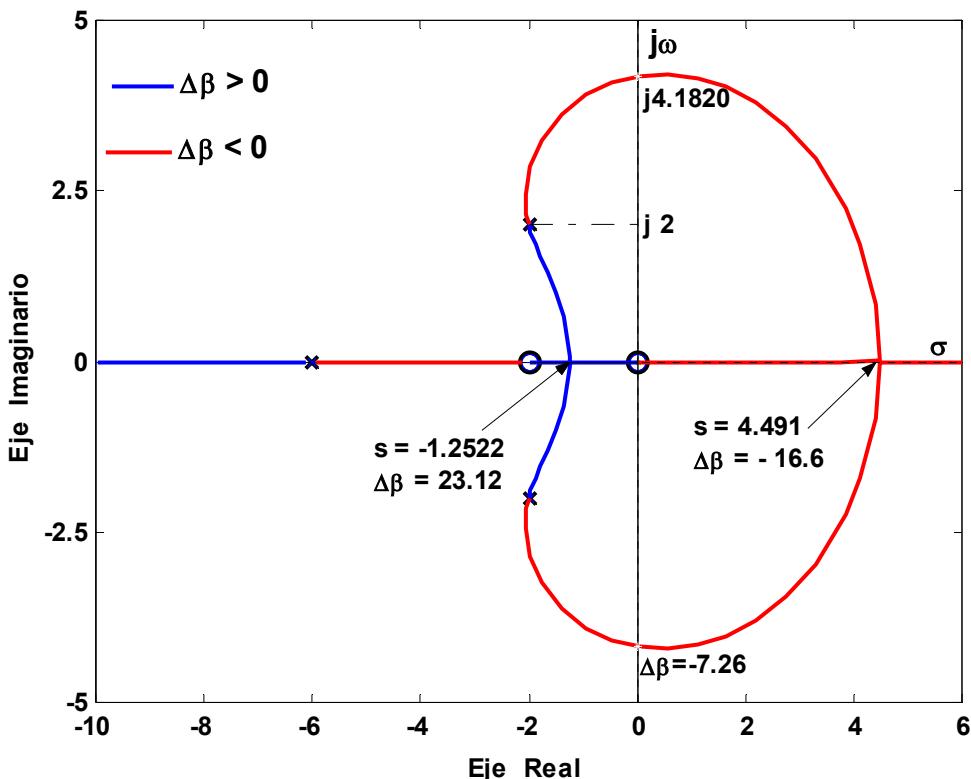


Figura 48

Lugar Generalizado de las Raíces o Contorno de las Raíces.

Esta denominación se aplica cuando hay más de un parámetro variable. La técnica del lugar de las raíces ya discutida esta restringida a un solo parámetro variable. Sin embargo en muchos problemas de control de sistemas, los efectos de la variación de varios parámetros del mismo deben ser estudiados. Por ejemplo, cuando se diseña un controlador, el cual está representado por una función de transferencia $G_c(s)$ con polos y ceros, por ende será necesario investigar los efectos sobre el funcionamiento del sistema debido a la variación de estos polos y ceros.-

Ya se estudio la construcción de varios lugares de las raíces de ecuaciones con mas de un parámetro variable, (dos), pero asignamos valores diferentes a uno de ellos, variando el otro en todo su rango.

Ahora el problema multípara metros será investigado por medio de un método mas sistemático, cuando mas de un parámetro varia continuamente desde $-\infty$ a $+\infty$. El lugar obtenido se denominará Contorno de las Raíces.

Se podrán aplicar, al contorno de las raíces, las mismas propiedades o reglas del lugar de las raíces común.-

El principio del contorno de las raíces puede ser ilustrado considerando la ecuación característica:

$$F(s) = 1 + L(s) = 0$$

La cual supondremos que tiene dos parámetros variables, K_1 y K_2 , la misma se podrá escribir de la siguiente manera:

$$F(s) = D(s) + K_2 N_2(s) + K_1 N_1(s) = 0$$

Donde K_1 y K_2 son los parámetros variables, y $D(s)$, $N_2(s)$ y $N_1(s)$ polinomios en s .

Si K_1 es variable y K_2 fijo, el lugar de las raíces se puede obtener de:

$$G_1(s) = \frac{K_1 N_1(s)}{D(s) + K_2 N_2(s)} \quad (1)$$

Si K_2 es variable y K_1 fijo, el lugar de las raíces se puede obtener de:

$$G_2(s) = \frac{K_2 N_2(s)}{D(s) + K_1 N_1(s)} \quad (2)$$

¿Qué relación hay entre $G_1(s)$ y $G_2(s)$?

Los polos del lazo de cada una de ellas, puntos de iniciación de los contornos correspondientes, son los polos del "sistema reducido" representado por la otra cuando el parámetro del denominador es cero.

Por ejemplo, los polos del lazo de $G_2(s)$, son los ceros de: $D(s) + K_1 N_1(s) = 0$

Que a su vez son los polos del "sistema reducido", que se obtienen graficando el lugar para $G_1(s)$ cuando $K_2 = 0$.

En otras palabras, los puntos de iniciación de los contornos de $G_2(s)$, que serían para $K_2 = 0$, variando K_1 en forma continua se obtienen a partir de:

$$G_3(s) = \frac{K_1 N_1(s)}{D(s)} \quad (3)$$

Y los puntos de iniciación de los contornos de $G_1(s)$, que serían para $K_1 = 0$, variando K_2 en forma continua se obtienen a partir de:

$$G_4(s) = \frac{K_2 N_2(s)}{D(s)} \quad (4)$$

En consecuencia los contornos de las raíces graficados con ($G_2(s)$ o $G_1(s)$) deberán todos empezar, para ($K_2 = 0$ o $K_1 = 0$), en los puntos ubicados sobre el lugar obtenido con ($G_3(s)$ o $G_4(s)$), para diferentes valores de (K_1 o K_2).-

El procedimiento puede ser extendido a más de dos parámetros variables en el sistema de control.

Ejemplo 39:

La función de transferencia del lazo del ejemplo 35 pero con $K = K_1$ y $p = K_2$, los parámetros variables solo en todo el rango positivo, será:

$$L(s) = \frac{K_1(s+1)}{s^2(s+K_2)}$$

El polinomio característico $F(s)$ es:

$$F(s) = s^2(s + K_2) + K_1(s + 1) = 0$$

$$\text{Por ende: } F(s) = s^3 + K_2 s^2 + K_1(s + 1) = 0$$

$$\text{Donde: } D(s) = s^3; \quad N_2(s) = s^2 \quad y \quad N_1(s) = (s + 1)$$

Las funciones $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ y $G_4(s)$ serán en este ejemplo:

$$G_1(s) = \frac{K_1(s + 1)}{s^2(s + K_2)} \Rightarrow G_4(s) = \frac{K_2 s^2}{s^3} \rightarrow \frac{K_2}{s}$$

La $G_4(s)$ indica que los puntos de iniciación de los diferentes contornos graficados a partir de $G_1(s)$, para $K_1=0$, serán 2 fijos en el origen y uno variando por el eje real según sea el valor de K_2 .

$$G_2(s) = \frac{K_2 s^2}{s^3 + K_1(s + 1)} \Rightarrow G_3(s) = \frac{K_1(s + 1)}{s^3}$$

En cambio la $G_3(s)$ indica que los puntos de iniciación de los diferentes contornos graficados a partir de $G_2(s)$, para $K_2=0$, son los tres variables según sea el valor de K_1 , como se indica en la figura 49.

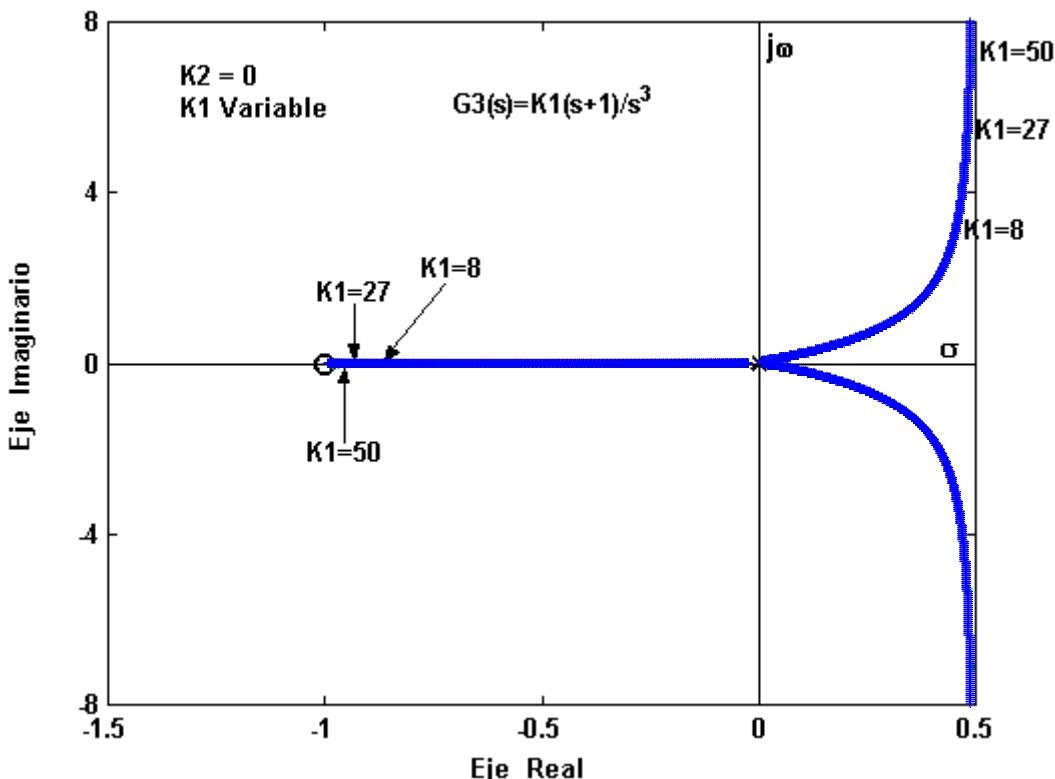


Figura 49

Por lo tanto los contorno de las raíces cuando K_2 varia, con $K_1 = \text{constante}$ pueden ser dibujados desde.

$$G_2(s) = \frac{K_2 s^2}{s^3 + K_1 s + K_1}$$

Los polos de la misma son los ceros de $1 + G_2(s)$ que ya fueron graficados en el lugar de la figura 49, por ende todos los contornos de las raíces cuando K_2 varía con K_1 constante partirán del lugar anterior. Todos los

contornos cualquiera sea K_1 , con K_2 variable cortan al eje imaginario para $K_2 = 1$ y $\omega_c = \sqrt{K_1}$ rad / seg., pues la ecuación característica es:

$$s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + K_1 = 0 \Rightarrow K_{2\text{Limite}} \times K_1 = K_1 \Rightarrow K_{2\text{Limite}} = 1$$

La ecuación auxiliar es: $K_{2\text{Limite}} s^2 + K_1 = 0 \Rightarrow s^2 + K_1 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j\sqrt{K_1}$

Por ende: $\omega_c = \sqrt{K_1}$ rad / seg.

Ahora se puede investigar el efecto que tendrá sobre los puntos de ruptura de los contornos graficados en base a $G_2(s)$, la variación del parámetro K_1 . ¿Cuánto deberá valer K_1 para que en el contorno correspondiente haya un punto de ruptura de orden dos, y=2, (q=3)? Como se sabe:

$$N \frac{d}{ds} G_2(s) = 0 \Rightarrow (3s^2 + K_1)s^2 - 2s(s^3 + K_1s + K_1) = 0, \text{ operando se llega a:}$$

$$s(s^3 - K_1s - 2K_1) = 0$$

Como era de esperar hay un punto de ruptura fijo de orden uno y=1, (q=2), para K_2 igual a infinito. La ubicación de los otros tres está en función de K_1 . Como se mueven en el plano s estos puntos se pueden determinar, para $K_1 > 0$, de la manera siguiente. El polinomio cuyos ceros son los puntos de ruptura, se puede colocar:

$$s^3 - K_1(s+2) = 0$$

Por lo tanto el gráfico de los posibles puntos de ruptura de los contornos correspondientes a $G_2(s)$ en función del valor de $K_1 > 0$, se pueden obtener teniendo como base a la función de transferencia siguiente:

$$G'(s) = \frac{(-K_1)(s+2)}{s^3}$$

El lugar comentado sería el indicado en la figura 50.

Como $K_1 > 0$, y $K=(-K_1)$ se deberá construir el lugar inverso de las raíces. Observando a $G_2(s)$, la rama en el semiplano derecho corresponderá a un punto de ruptura en el contorno correspondiente, para $K_2 < 0$, por ende no interesa. Por lo tanto los otros dos se mueven en la forma indicada en la figura 50. La parte de las ramas complejas no pueden ser puntos de ruptura pues el sistema debería ser de cuarto orden como mínimo. En consecuencia habrá un valor de $K_1 = K_1^*$ para el cual el punto de ruptura será de orden 2, y=2, (q=3), y de ese valor en adelante los contornos estudiados tendrán dos puntos de ruptura de orden uno, y=1, (q=2).

El valor de K_1^* se puede determinar así:

$$N \frac{d}{ds} G'(s) = 0 \Rightarrow 3s^2(s+2) - s^3 = 0 \Rightarrow 2s^2(s+3) = 0$$

$s_{1-2}=0$ es evidente, el otro es: $s_3 = \sigma^* = -3$

El valor de K_1^* se puede obtener con el requerimiento de magnitud o reemplazando s por -3 en la función, $K_1=f(s)$.-

$$\text{Como } K_1 = \frac{s^3}{(s+2)} = \frac{(-3)^3}{-3+2} = 27 \Rightarrow K_1^* = 27.-$$

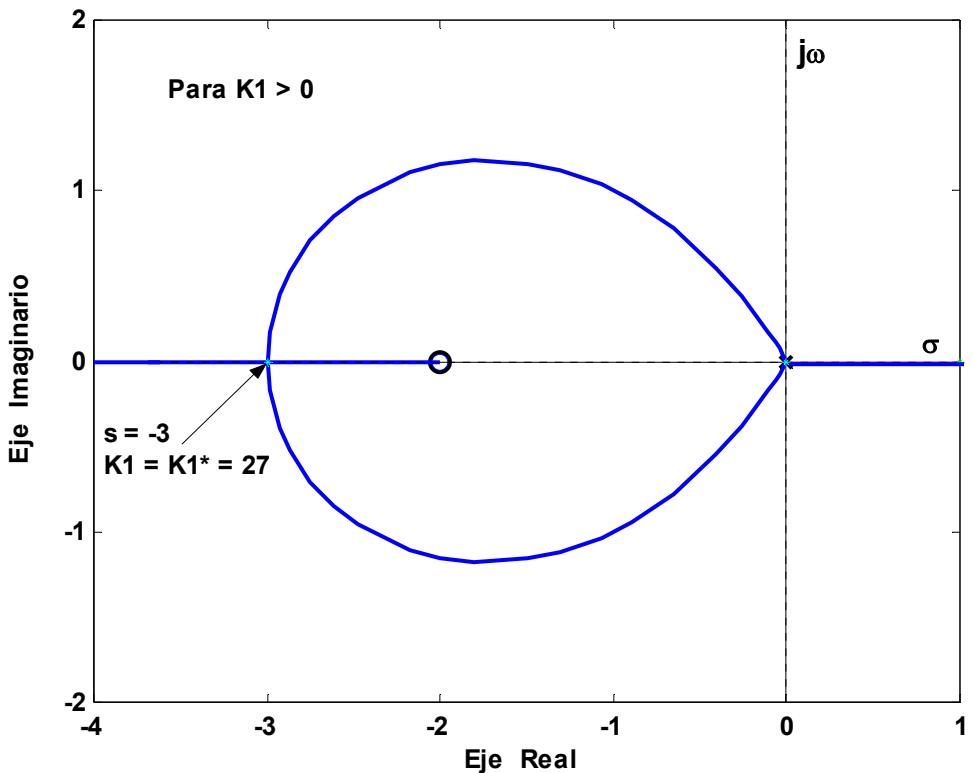


Figura 50

En consecuencia, (resumen):

- Para $K_1 < 27$, no hay puntos de ruptura en el contorno bajo estudio.
- Para $K_1 = K_1^* = 27$ hay un punto de ruptura en $s = -3$ de orden 2, ($q = 3$).
- Para $K_1 > 27$ hay dos puntos de ruptura de orden uno, ($q = 2$), uno se mueve, (según K_1), entre -3 y -2 y el otro entre -3 e $-\infty$.

Si $K_1 = 27$, el punto de ruptura en -3 tendrá el valor de K_2 siguiente:

$$K_2 = \frac{-(s^3 + 27s + 27)}{s^2} = \frac{-(-27 - 81 + 27)}{9} = 9 \Rightarrow K_2^* = 9.-$$

Todo esto se puede apreciar en los contornos para $K_1 = 10, 27$ y 50 en la figura 51.

Si en los contornos de la figura 51 se unen los puntos de igual K_2 , por ejemplo para $K_2 = 8, 9$ y 10 , se tendría 3 contornos de las raíces para esos valores de K_2 con K_1 variando en forma continua. Dichos contornos serían los obtenidos empleando la función de transferencia $G_1(s)$.

Esto ya se hizo en el ejemplo de la figura 42, para el cual ahora $K = K_1$ y $p = K_2$. Como se mueven en el plano s los posibles puntos de ruptura de los contornos se mostraron en la figura 43. Para la misma se demostró que:

$$\sigma^* = -3; \quad K_2^* = 9 \quad y \quad K_1^* = 27.-$$

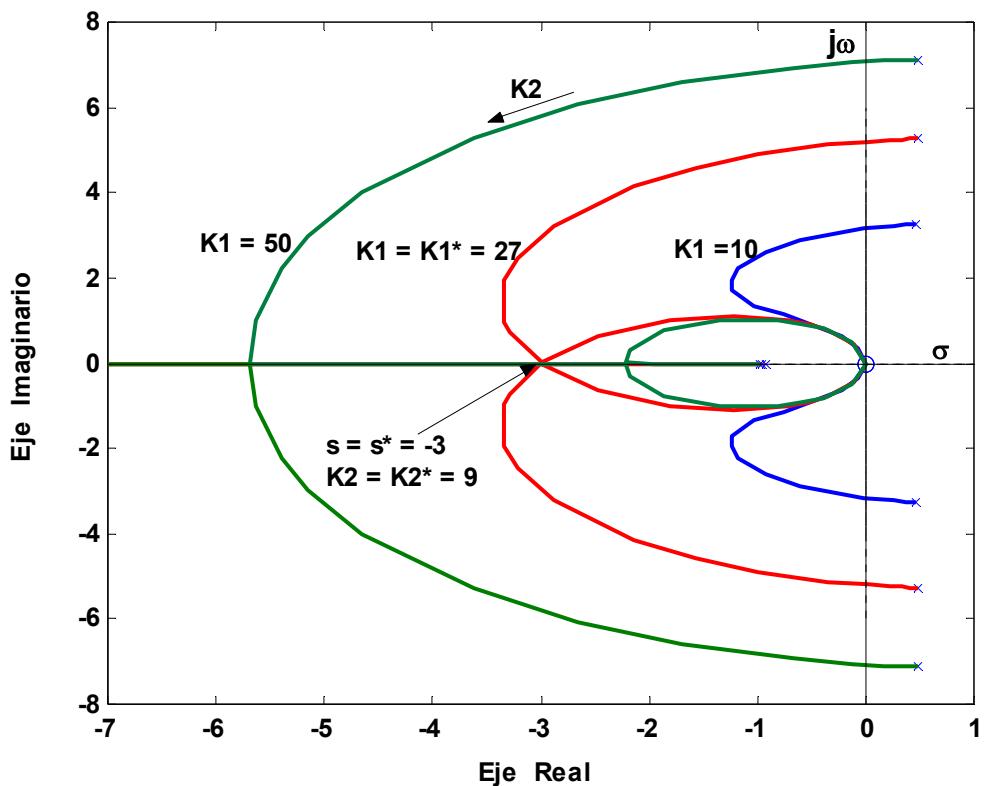


Figura 51

En la figura 52 se han graficado tres contornos basados en la función de transferencia $G_1(s)$ para tres valores diferentes del parámetro K_2 : $K_2=8$, $K_2=9$ y $K_2=10$, variando K_1 en forma continua.-

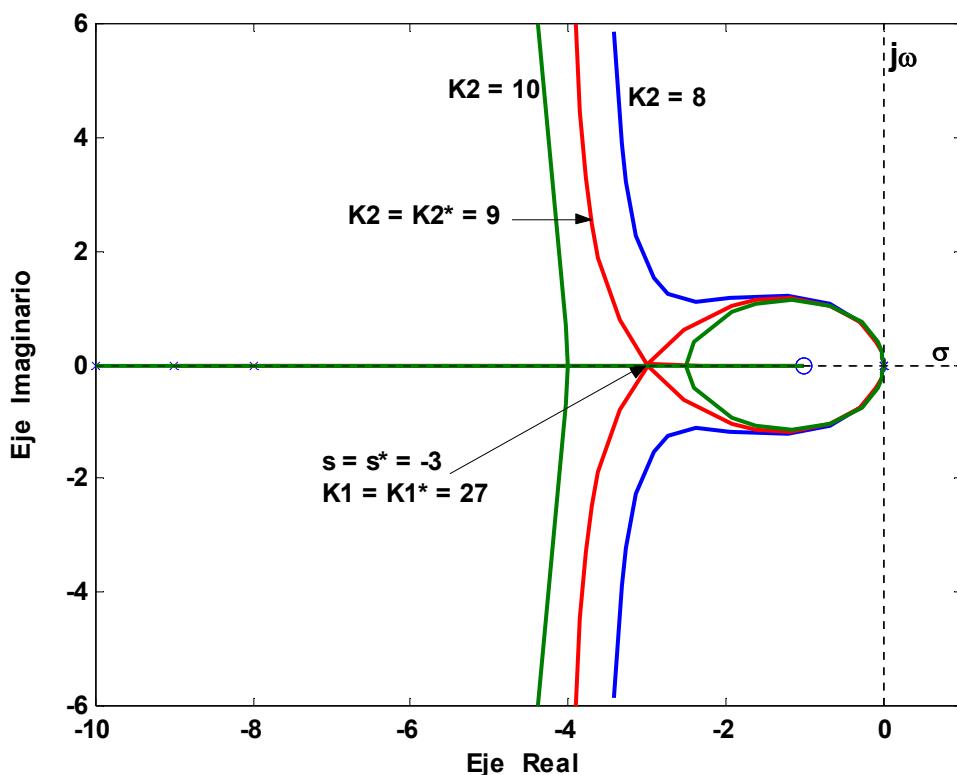


Figura 52

Ejemplo 40:

Un sistema de control automático tiene el diagrama de bloques indicado en la figura 53.

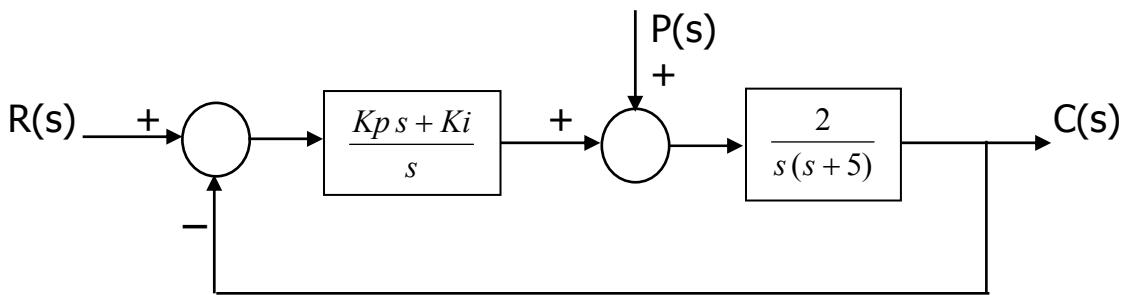


Figura 53

Construir algunos contornos de las raíces al variar los parámetros del controlador K_p y K_i .

La función de transferencia del lazo del sistema es:

$$L(s) = \frac{2(K_p s + K_i)}{s^2 (s + 5)}$$

Si K_i es variable con K_p fijo:

$$G_1(s) = \frac{2K_i}{s^2 (s + 5) + 2K_p s} \Rightarrow G_1(s) = \frac{2K_i}{s(s^2 + 5s + 2K_p)}$$

Si K_p es variable con K_i fijo:

$$G_2(s) = \frac{2K_p s}{s^2 (s + 5) + 2K_i} \Rightarrow G_2(s) = \frac{2K_p s}{(s^3 + 5s^2 + 2K_i)}$$

Los polos de $G_2(s)$ serán las raíces de $1+L(s)=0$ cuando $K_p = 0$, o sea se pueden graficar de la función de transferencia:

$$G_3(s) = \frac{2K_i}{s^2 (s + 5)}$$

Los polos de $G_1(s)$ serán las raíces de $1+L(s)=0$ cuando $K_i = 0$, o sea se pueden graficar de la función de transferencia:

$$G_4(s) = \frac{2K_i s}{s^2 (s + 5)}$$

un polo fijo en el origen y los otros dos varían según:

$$G_4(s) = \frac{2K_p}{s(s + 5)}$$

Trazaremos los contornos determinados por $G_2(s)$. Los puntos de partida de los mismos están indicados en el lugar de la figura 54, los mismos son determinados por la función de transferencia $G_3(s)$.

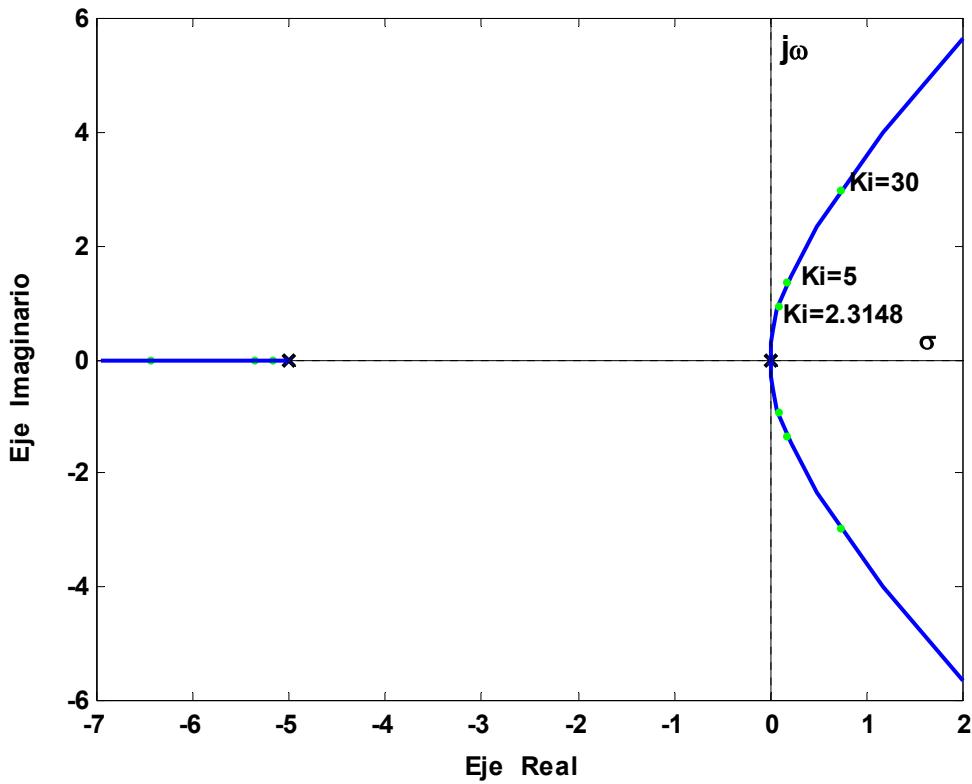


Figura 54

Para los contornos, dados por $G_2(s)$, se tendrá:

$$\sigma_0 = \frac{-5}{2} = -2.5$$

La intersección de los mismos con el eje imaginario será:

La ecuación característica es: $s^3 + 5s^2 + 2Kps + 2Ki = 0$

Por lo tanto: $5 \times 2Kp_{\text{Límite}} = 2Ki \Rightarrow Kp_{\text{Límite}} = 0.20 Ki$

La ecuación auxiliar es:

$$5s^2 + 2Ki = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j\sqrt{0.4Ki} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{0.4Ki} \text{ rad / seg.}$$

Los puntos de ruptura determinados por $G_2(s)$ en función de Ki serán:

$$N \frac{d}{ds} G_2(s) = 0 \Rightarrow (3s^2 + 10)s - (s^3 + 5s^2 + 2Ki) = 0$$

Ordenando el polinomio, la función que nos permitirá graficar el movimiento de los posibles puntos de ruptura será la siguiente:

$$G'(s) = \frac{(-Ki)}{s^2(s+2.5)} ; \text{ para } Ki > 0 \text{ por en ser\'a el lugar inverso.}$$

El lugar se indica en la figura 55.

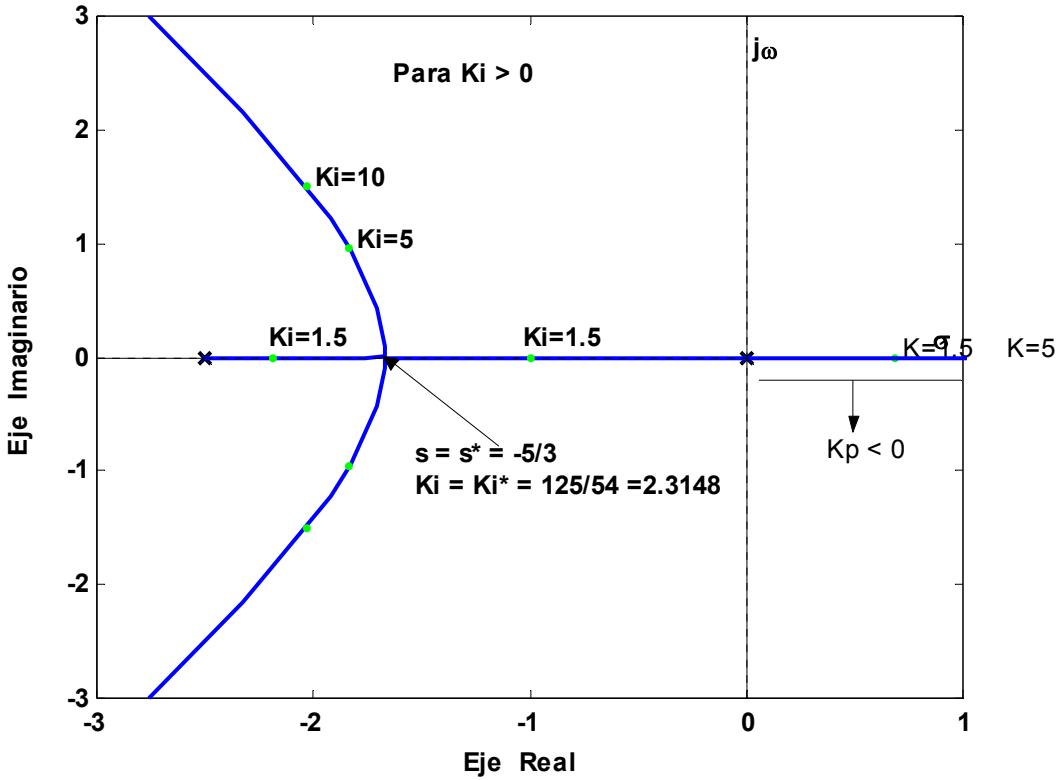


Figura 55

Como se puede ver el punto de ruptura que esta en el semiplano derecho evidentemente corresponderá cuando $K_p < 0$, (ver $G_2(s)$). Además no pueden haber puntos de ruptura complejos, para $K_i > K_i^*$, pues el sistema es de tercer orden solamente. Por consiguiente hay un punto de ruptura en σ^* , para $K_i = K_i^*$, de orden 2, $y=2$, ($q=3$), o hay dos puntos de ruptura de orden uno, $y=1$, ($q=2$), para $K_i < K_i^*$.-

Determinemos los valores de σ^* y K_i^* .-

$$1 + G'(s) = 1 + \frac{-Ki}{s^2(s+2.5)} = 0 \Rightarrow Ki = s^3 + 2.5s^2$$

$$\frac{dKi}{ds} = 0 \Rightarrow 3s^2 + 5s = 0 \Rightarrow 3s(s + 5/3) = 0 \Rightarrow \sigma^* = -5/3$$

$$\text{Por ende: } Ki^* = (-5/3)^3 + 2.5(-5/3)^2 = 125/24 \approx 2.3148. -$$

El valor de K_p resultante en el contorno, dado por $G_2(s)$, será:

$$K_p^* = \frac{-(s^3 + 5s^2 + 2Ki^*)}{2s} = \frac{-(-125/27 + 125/9 + 125/27)}{-10/3} = 25/6 \Rightarrow K_p^* = 25/6 \approx 4.166. -$$

Los contornos para tres valores de K_i , ($K_i=2$; 2.3148 y 3), variando K_p se indican en la figura 56.

Si en los contornos de la figura 56 se unen los puntos de igual K_p , por ejemplo para $K_p=4$, $25/6$ y 5 , se tendría 3 contornos de las raíces para esos valores de K_p con K_i variando en forma continua. Dichos contornos serían los obtenidos empleando la función de transferencia $G_1(s)$.

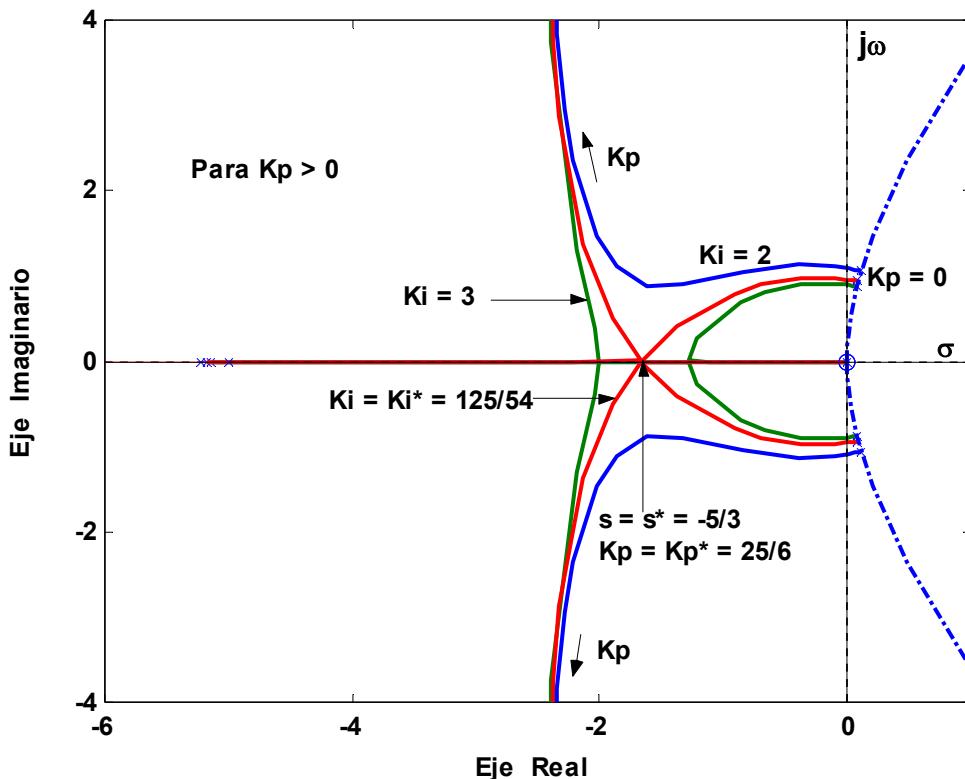


Figura 56

Los puntos de iniciación de estos contornos, a parte del que está en el origen, están determinados por la función $G_4(s)$ e indicados en la figura 57.

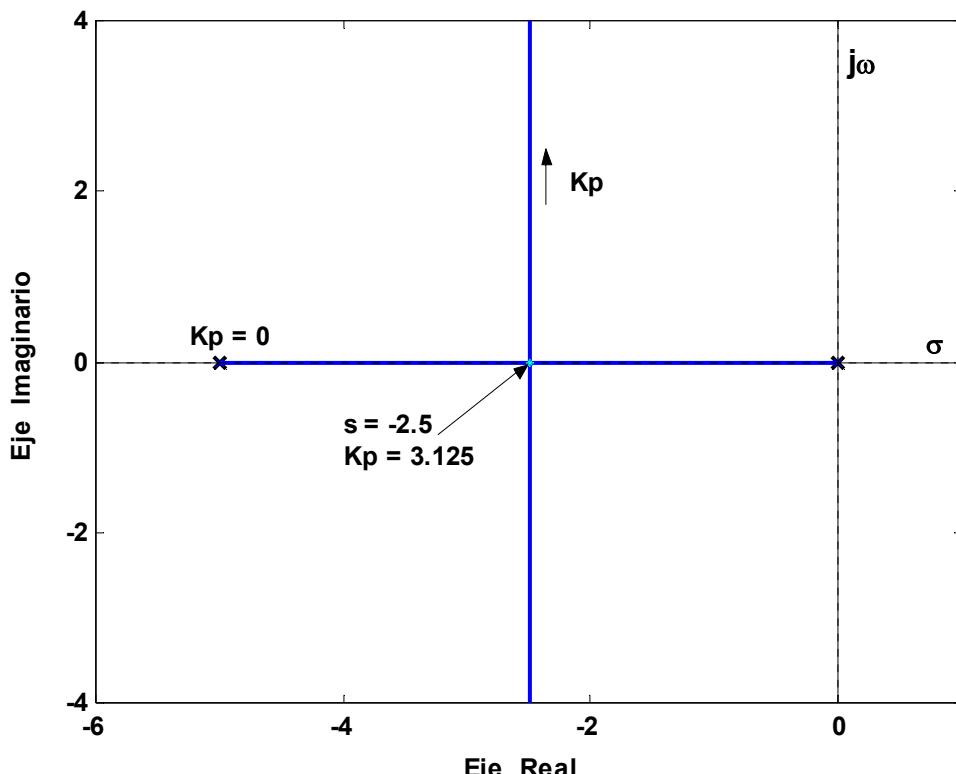


Figura 57

Para los contornos determinados por $G_1(s)$ se tendrá:

$$\sigma_0 = -\frac{5}{3}$$

La intersección de los mismos con el eje imaginario será:

La ecuación característica es: $s^3 + 5s^2 + 2Kps + 2Ki = 0$

Por lo tanto: $5 \times 2Kp = 2Ki_{Límite} \Rightarrow Ki_{Límite} = 5Kp$

La ecuación auxiliar es:

$$5s^2 + 2Ki_{Límite} = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j\sqrt{0.4Ki_{Límite}} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{0.4Ki_{Límite}} \text{ rad / seg.}$$

Los puntos de ruptura determinados por $G_1(s)$ en función de Kp serán:

$$N \frac{d}{ds} G_1(s) = 0 \Rightarrow (3s^2 + 10s + 2Kp) = 0$$

Ordenando el polinomio, la función que nos permitirá graficar el movimiento de los posibles puntos de ruptura será la siguiente:

$$G'(s) = \frac{(2/3)Kp}{s(s+10/3)} ; \text{ para } Kp > 0 \text{ por en ser\'a el lugar directo.-}$$

El lugar se indica en la figura 58.

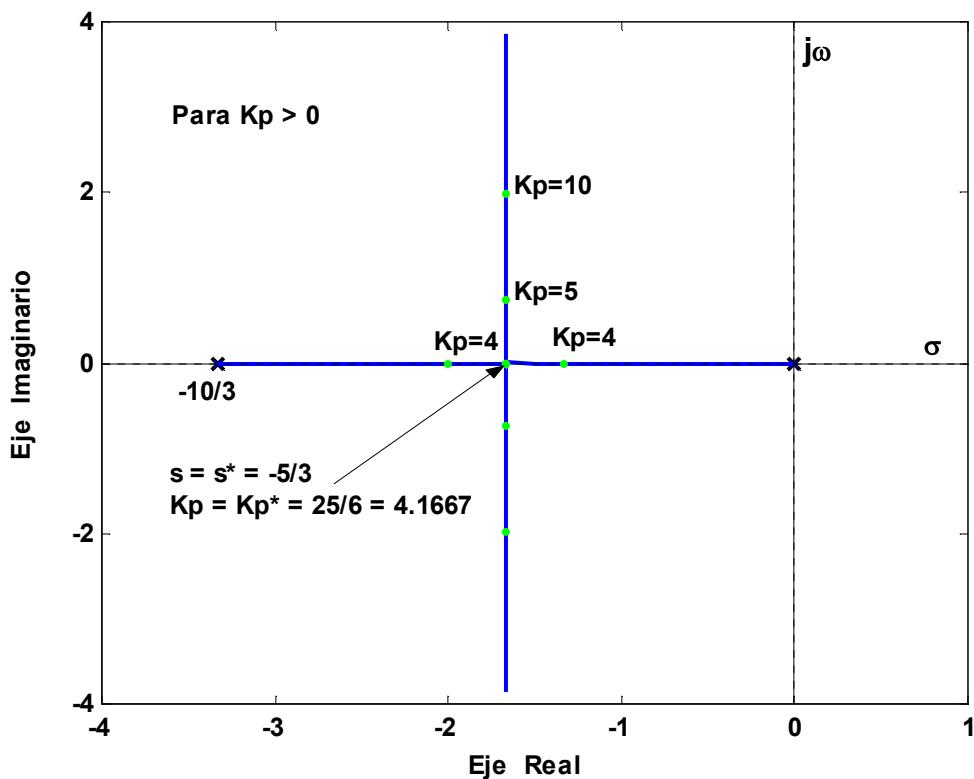


Figura 58

No pueden haber puntos de ruptura complejos, para $Kp > Kp^*$, pues el sistema es de tercer orden solamente. Por consiguiente: o hay un punto de ruptura en σ^* , para $Kp = Kp^*$, de orden 2, $y=2$, ($q=3$), o hay dos puntos de ruptura de orden uno, $y=1$, ($q=2$), para $Kp < Kp^*$.-

Determinemos los valores de σ^* y Kp^* .-

$$1 + G'(s) = 1 + \frac{(2/3)K_p}{s(s+10/3)} = 0 \Rightarrow K_p = -1.5(s^2 + (10/3)s) = -1.5s^2 - 5s$$

$$\frac{dK_p}{ds} = 0 \Rightarrow -(3s+5) = 0 \Rightarrow 3(s+5/3) = 0 \Rightarrow \sigma^* = -5/3$$

$$\text{Por ende: } K_p^* = -1.5 \times (25/9) - 5 \times (-5/3) = 37.5/9 \Rightarrow K_p^* = 25/6.$$

El valor de K_i resultante en el contorno determinado por $G_1(s)$, será:

$$K_i^* = \frac{-(s^3 + 5s^2 + 2K_p^* s)}{2} = \frac{-(125/27 + 125/9 - 250/18)}{2} = 125/54$$

$$\Rightarrow K_p^* = 125/54 \approx 2.3148$$

Los contornos para tres valores de K_i , variando K_p se indican en la figura 59.

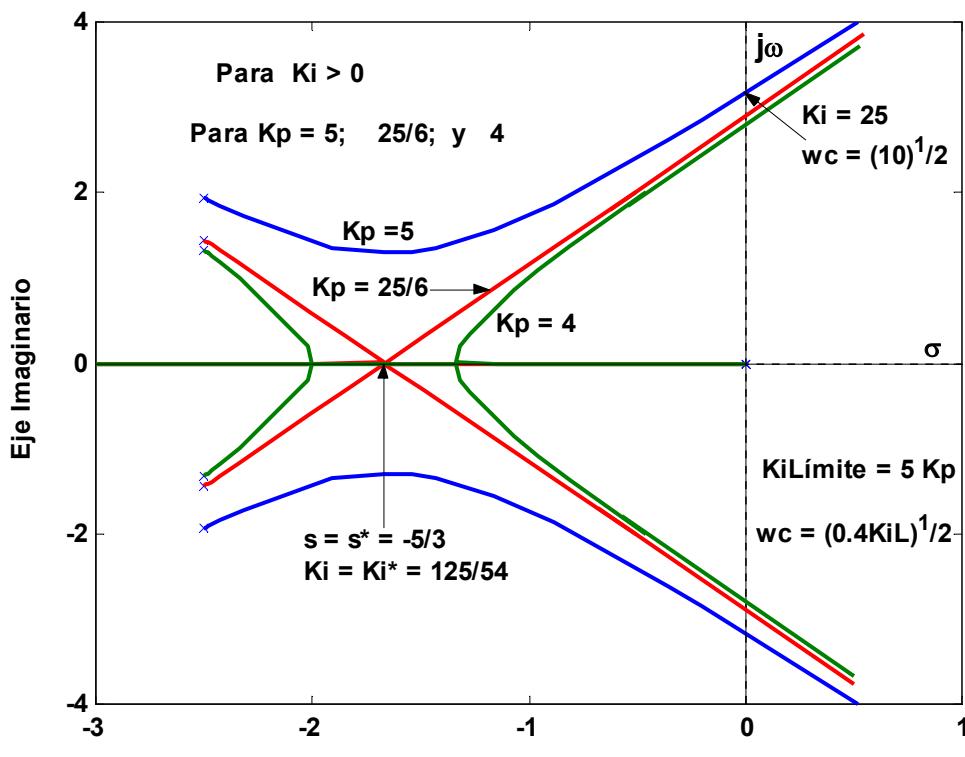


Figura 59

Ejemplo 41:

El sistema de control con realimentación unitaria de una planta típica de segundo orden tiene un controlador serie que puede ser de adelanto o de atraso de fase según sea el valor del parámetro a , se muestra en la figura 60. Si se pide que $K_v = 10 \text{ seg}^{-1}$. Trazar los diferentes contornos de las raíces con los parámetros variables a y T .

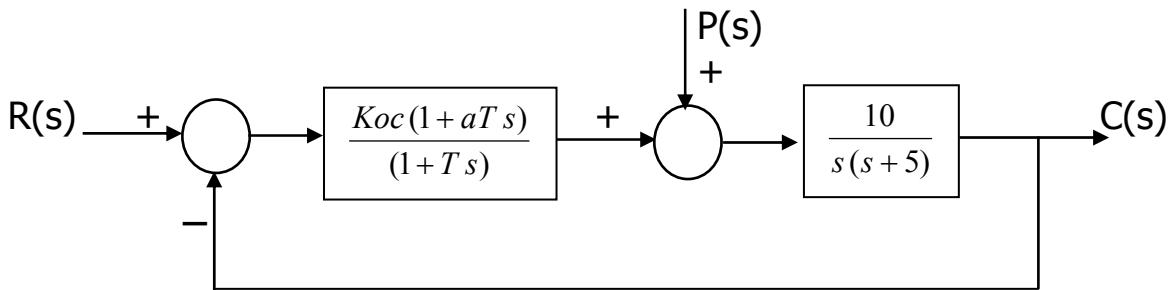


Figura 60

Como se sabe todos los parámetros, (Koc, a y T), son positivos.

Koc deberá ser: $K_v = 10Koc/5 = 10$, por ende, $Koc = 5 \text{ seg}^{-1}$.-

En consecuencia la función de transferencia del lazo será:

$$L(s) = \frac{50(1+aTs)}{s(s+5)(1+Ts)}$$

Con el control proporcional solo, $G_c(s) = Koc = 5$, el sistema tendrá el régimen permanente solicitado pero con un muy mal transitorio al escalón, pues la ecuación característica sería: $s^2 + 5s + 50 = 0$, lo cual daría un coeficiente de amortiguamiento relativo de $\delta = 0.354$, $M_p(\%) = 30.45\%$, ect.-

Por ende se intentara estudiar el efecto sobre los polos del sistema al variar los parámetros a y T del controlador a emplear.

Con a = Cte. y T variando en forma continua:

La $G_1(s)$ sería la siguiente:

$$G_1(s) = \frac{Ts(s^2 + 5s + 50a)}{s^2 + 5s + 50}$$

Como es una función impropia para trabajar con la computadora se usara la inversa o sea:

$$\{G_1(s)\}^{-1} = \frac{(1/T)(s^2 + 5s + 50)}{s(s^2 + 50s + 50a)}$$

Con T = Cte. y a variando en forma continua:

La $G_2(s)$ sería la siguiente:

$$G_2(s) = \frac{(50T)as}{s(s+5)(1+Ts) + 50} \Rightarrow G_2(s) = \frac{50as}{s^3 + ((1+5T)/T)s^2 + (5/T)s + (50/T)}$$

Los polos de $G_2(s)$, se obtienen de $G_1(s)$ para a = 0, por lo tanto:

$$G_3(s) = \frac{Ts^2(s+5)}{(s^2 + 5s + 50)} \Rightarrow \{G_3(s)\}^{-1} = \frac{(1/T)(s^2 + 5s + 50)}{s^2(s+5)}$$

Los polos de $G_1(s)$, se obtienen de $G_2(s)$ para $T = 0$, por lo tanto serán dos polos fijo en las raíces de: $(s^2 + 5s + 50 = 0)$, o sea los mismos puntos de los polos del sistema solo con el control proporcional solamente, o sea en

$$s_{1-2} = -2.5 \pm j\sqrt{43.75}$$

Trazaremos los contornos determinados por $G_2(s)$. Los puntos de partida de los mismos, solo para $T > 0$, están indicados en el lugar de la figura 61, los mismos son determinados por la función de transferencia $G_3(s)$ o por la $[G_3(s)]^{-1}$ si se usa la computadora como se hizo:

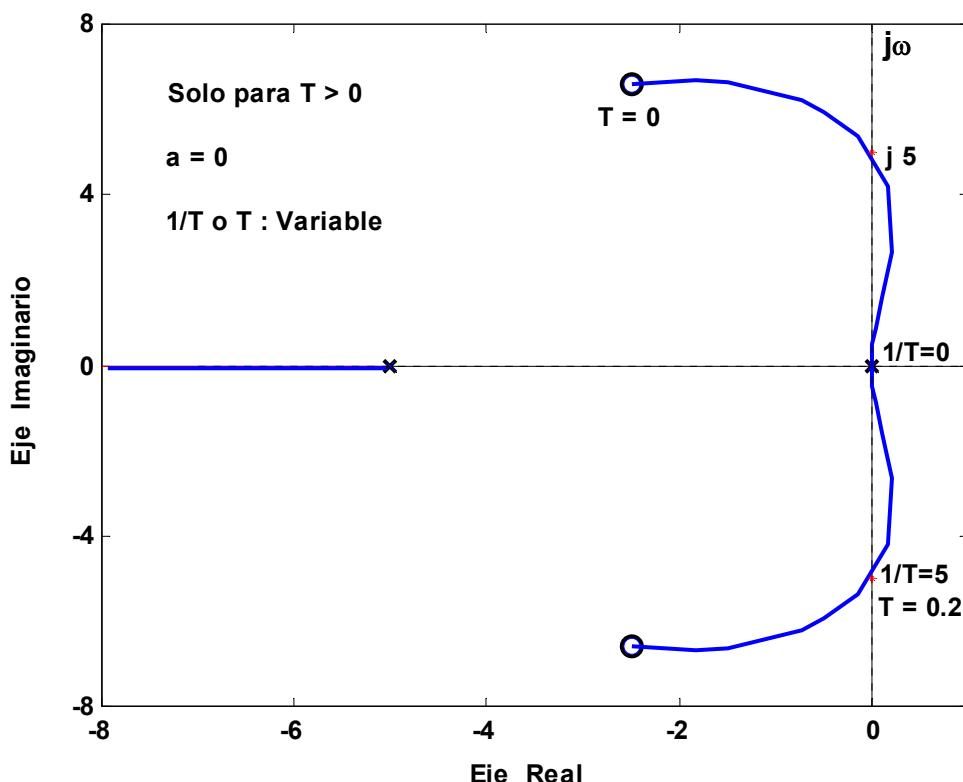


Figura 61

Para $T > 0$, en el grafico de la figura 61 no hay puntos de ruptura salvo el que esta en el origen para $1/T = 0$, o $T = \text{infinito}$. Como $G_2(s)$ tiene un cero en el origen, el baricentro para los diferentes contornos será una función de T :

$$\sigma_0 = \frac{\sum P_0 - \sum Z_0}{2} = \frac{\sum P_0}{2} = \frac{-(1+5T)/T}{2} \Rightarrow \sigma_0 = -(2.5 + 1/2T)$$

A medida que aumenta T , el baricentro se desplaza hacia la derecha, desde $\sigma_0 = -\infty$, para $T = 0$, a $\sigma_0 = -2.5$ para $T \rightarrow \infty$.

Los puntos de ruptura de los contornos construidos a partir de $G_2(s)$, serán función de T . Se pueden graficar su movimiento con:

$$N \frac{d}{ds} G_2(s) = 0 \Rightarrow 2Ts^3 + (1+5T)s^2 - 50 = 0 \Rightarrow (s^2 - 50) + 2Ts^2(s + 2.5) = 0$$

Por ende: $G'(s) = \frac{2Ts^2(s + 2.5)}{(s + \sqrt{50})(s - \sqrt{50})}$

$$\{G'(s)\}^{-1} = \frac{(1/2T)(s + \sqrt{50})(s - \sqrt{50})}{s^2(s + 2.5)}$$

El movimiento de los posibles puntos de ruptura, solo para $T > 0$, se indican en la figura 62.

El que se mueve en el semiplano derecho es para $a < 0$, no interesa.

Como se puede ver los puntos de ruptura para $T > 0$, están entre, $-\infty$ y $-\sqrt{50}$ uno y entre -2.5 y 0 el otro.

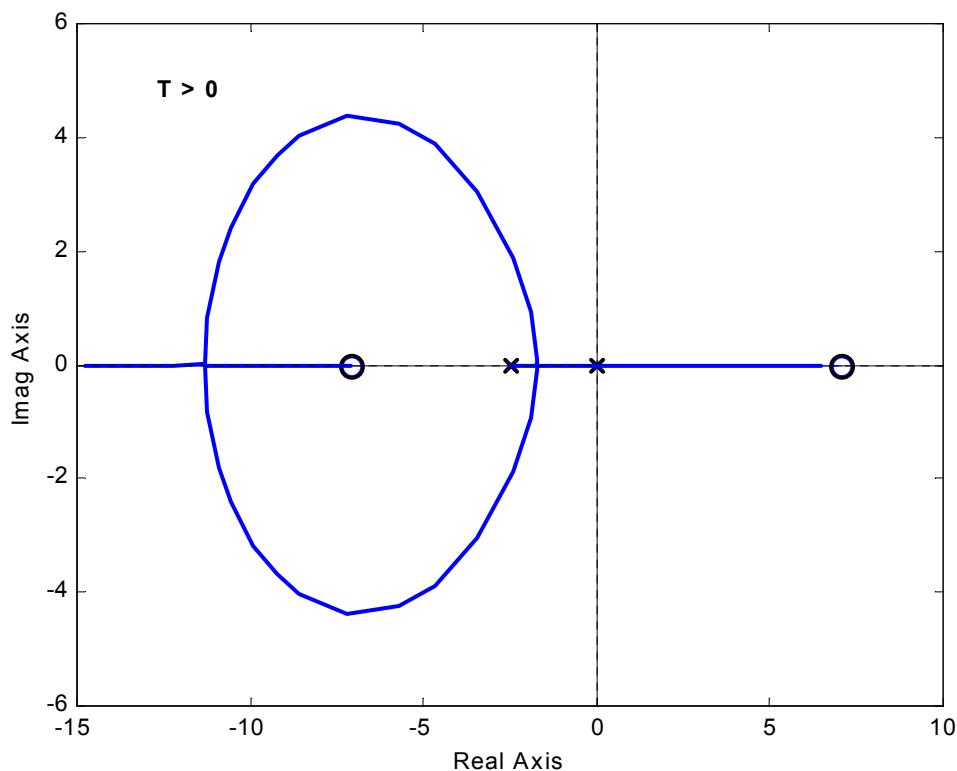


Figura 62

Los puntos de ruptura del lugar de la figura 62, se determinan así:

$$N \frac{d}{ds} \{G'(s)\}^{-1} = 0 \Rightarrow s(s^3 - 150s - 250) = 0$$

$s_1 = 0$, para $T = \infty$

$s_2 = +13.01$ para $T < 0$ y también se puede ver para $a < 0$, no interesa.-

$s_3 = -1.699$ para $T > 0$ y $a < 1$ se puede determinar, (atraso de fase).-

$s_4 = -11.31$ para $T < 0$ y $a > 1$ se puede determinar, (adelanto de fase).-

Los dos últimos son los que nos interesan el valor de T de los mismos será:

$$T = \frac{-(s^2 - 50)}{2s^3 + 5s^2}, \text{ reemplazando } s \text{ por } s_3 \text{ y } s_4, \text{ resulta:}$$

para s_3 el valor de T es: $T = 10.188$

para s_4 el valor de T es: $T = 0.03456$

Por lo tanto un resumen seria el siguiente:

Para el rango: $0 < T < 0.03456$, hay dos puntos de ruptura con $y=1$.-

Para: $T = 0.03456$, hay un punto de ruptura con $y=2$, ($q=3$).-

Para el rango: $0.03456 < T < 10.188$, no hay puntos de ruptura.

Para el rango: $10.188 < T < \text{infinito}$, hay dos puntos de ruptura con $y=1$.-

El valor de "a" en los contornos para $T = 0.03456$ y $T = 10.188$ será:

$$\text{Reemplazando } s \text{ por } s_3 \text{ y } s_4 \text{ en: } a = \frac{-\{s^3 + ((1+5T)/T)s^2 + (5/T)s + (50/T)\}}{50s}$$

Los valores son: $a = 0.1635$, (atraso) y $a = 4.78$, (adelanto), respectivamente.

Todos los contornos para $a = 1$, deberán pasar por los polos del sistema con el controlador proporcional solamente, o sea por: $s = -2.5 \pm j 6.614$.

Las figuras 63 y 64 muestran los contornos para 4 valores de T con $a > 1$ y $a < 1$ respectivamente.

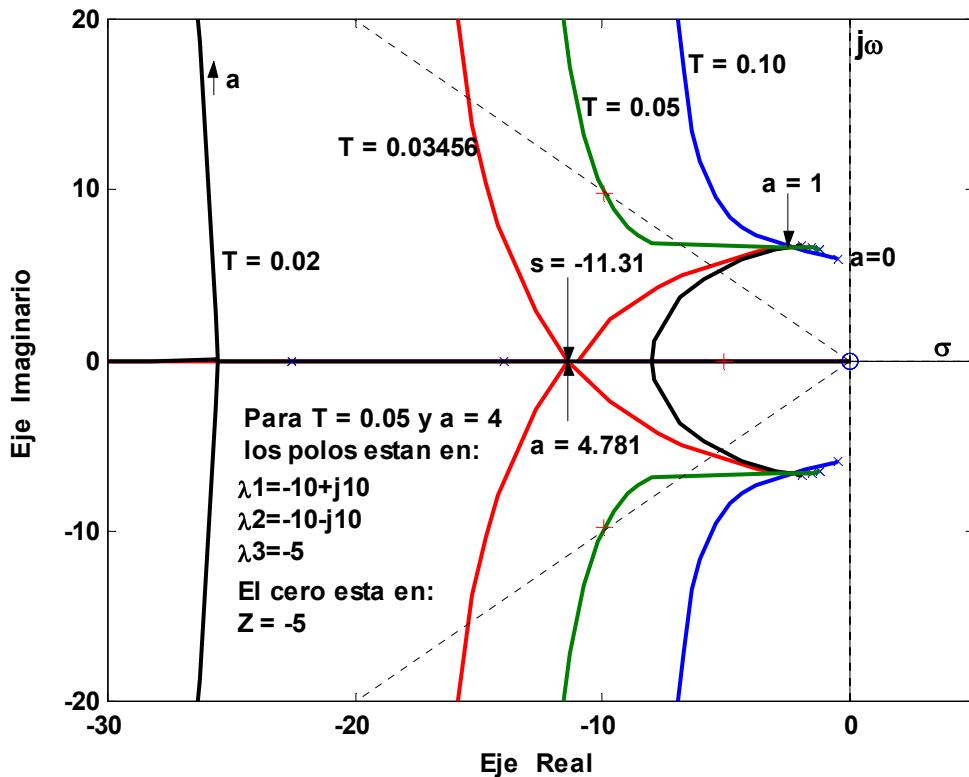


Figura 63

Para T bajas, (décimas o centésimas), vemos que el diseño puede ser efectivo solo para $a > 1$, adelanto de fase, pues los polos se desplazan hacia la izquierda, en el plano s, haciendo la respuesta al escalón mas veloz y con un $M_p(\%)$ adecuado.-

Para T altas, (unidades, decenas o centenas), puede ser útil si $a < 1$, atraso de fase.

Las figuras 63 y 64 se han construido con rlocus(n,d) de Matlab.

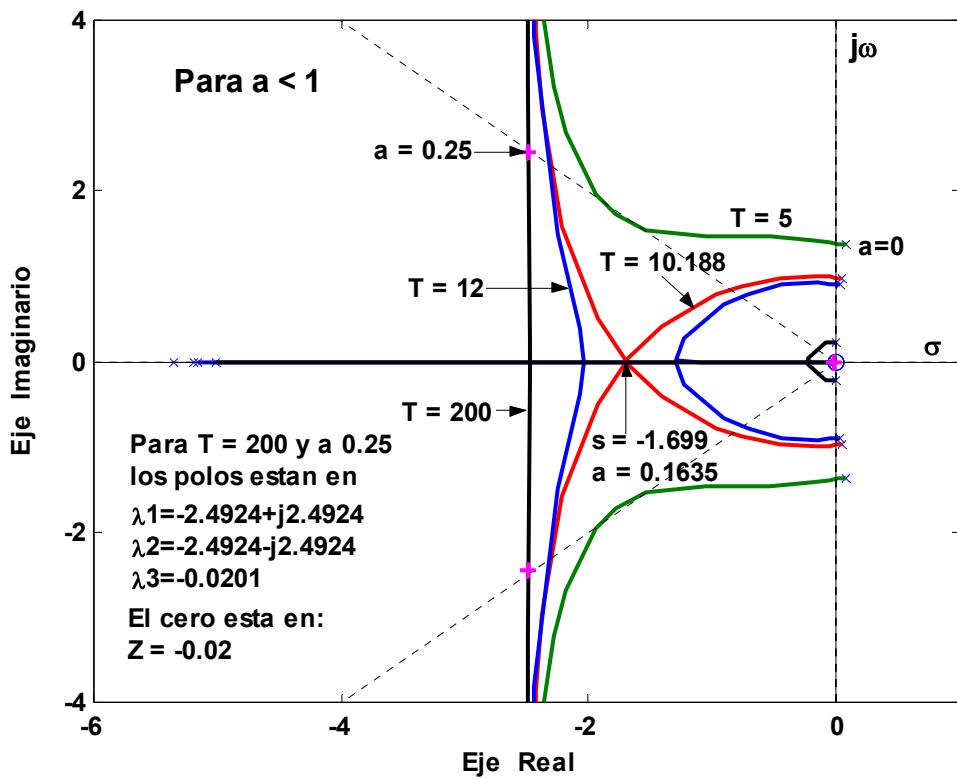


Figura 64

En la figura 65 se muestran las respuestas al escalón unitario del sistema

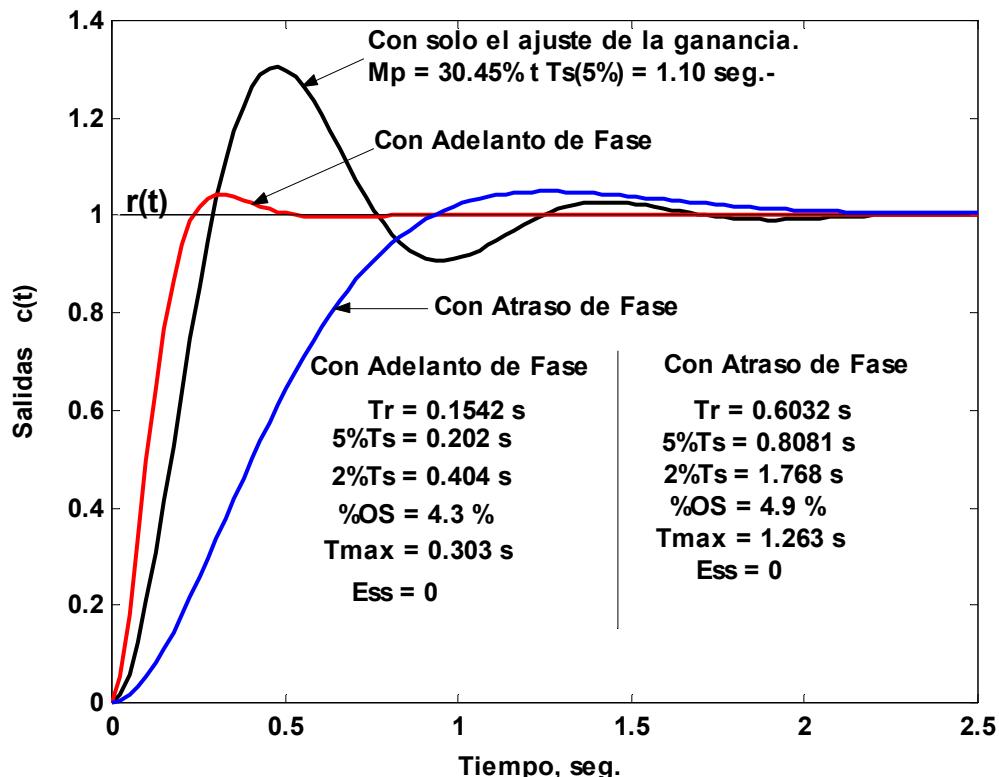


Figura 65

ajustado solo en ganancia, con un controlador de adelanto y otro de atraso, en las dos últimas respuestas el coeficiente de amortiguamiento relativo de los polos complejos conjugados se mantiene en $\delta = 0.707$. Con el adelanto como el cero está en -5 , el sistema resulta uno típico de segundo orden.

Con el atraso como el cero está en $-1/aT = -0.02$, prácticamente en el mismo lugar en donde está el tercer polo, por ende el sistema también resulta ser uno típico de segundo orden.

La diferencia esta en los tiempos de establecimiento, con el adelanto son menores o sea mas rápido.-

Ahora si en los contornos encontrados unimos los puntos de igual "a", se tendrían los contornos para $a = \text{Cte}$ con T variando en todo su rango positivo. Estos contornos se pueden graficar con la función de transferencia $G_1(s)$ o $[G_1(s)]^{-1}$, ya determinada con anterioridad o sea con:

$$\{G_1(s)\}^{-1} = \frac{(1/T)(s^2 + 5s + 50)}{s(s^2 + 5s + 50a)} \quad K = 1/T \quad T = 1/K.$$

Siguiendo el mismo procedimiento ya delineado para los contornos de $G_2(s)$ se pueden obtener los mismos para $[G_1(s)]^{-1}$ con: $a > 1$, adelanto de fase, y $a < 1$, atraso de fase, con $1/T$ variable, mostrados en las figuras 66 y 67 respectivamente.

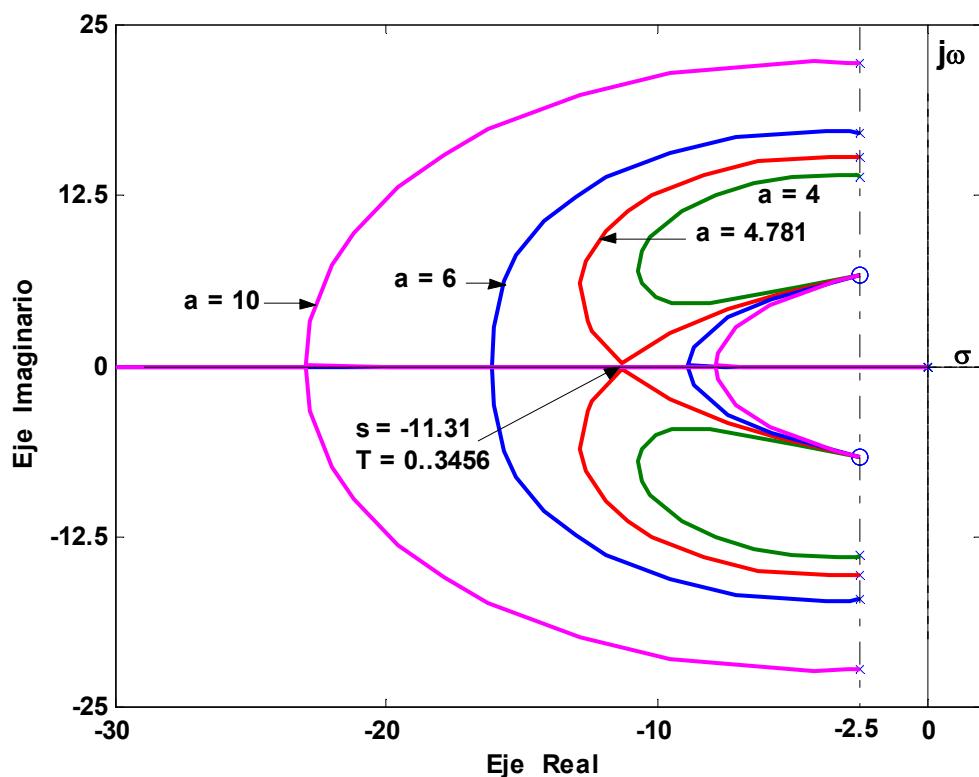


Figura 66

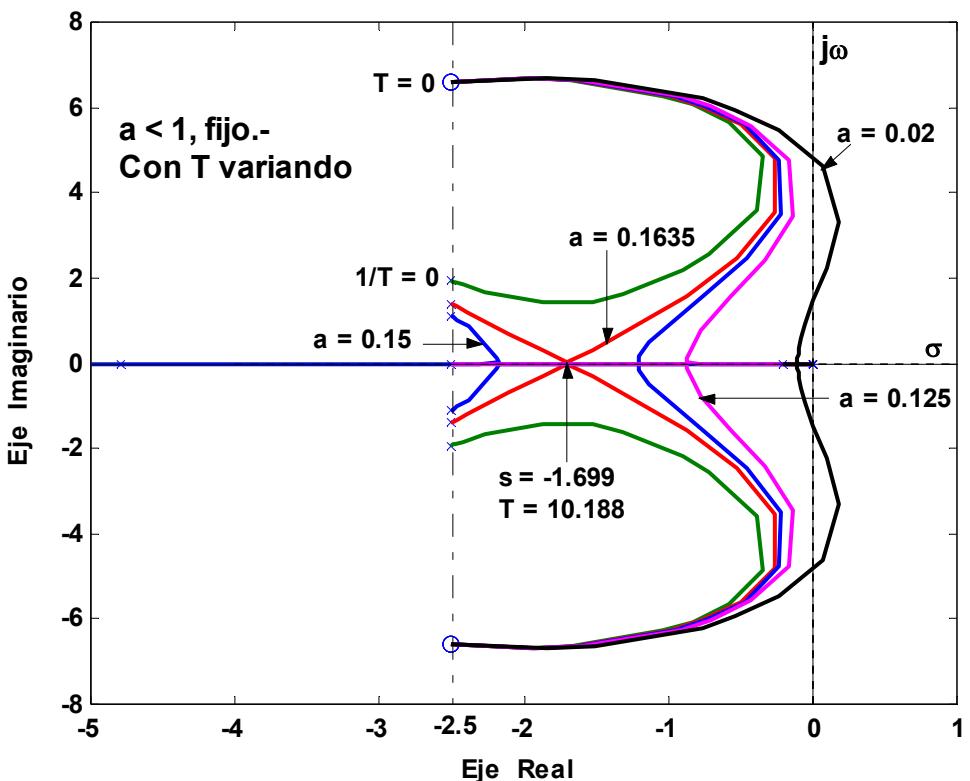


Figura 67

Los pasos del procedimiento se dejan como ejercicio para el lector.

Técnica Generalizada del Lugar de las Raíces, (Contorno de las Raíces), en Sistemas de Control Realimentados con Lazos Múltiples.

Las principales dificultades que se encuentran para aplicar la técnica convencional del lugar de las raíces a los sistemas con lazos múltiples son las siguientes:

- La función de transferencia del lazo tiene generalmente la forma siguiente:

$$G(s) = \frac{K P(s)}{Q(s) + K U(s)}$$

donde $P(s)$, $Q(s)$ y $U(s)$ son polinomios en s . La ganancia K aparece tanto en el numerador como en el denominador de $G(s)$. En consecuencia la técnica convencional no puede aplicarse directamente.

- Puede haber diversos parámetros variables distintos de K , cuyos valores adecuados se deberán determinar en un problema de diseño, por ende la técnica clásica tampoco tendrá aplicación directa.

En el primer caso, la ecuación característica será:

$$Q(s) + K U(s) + K P(s) = 0$$

$$o \quad 1 + \frac{K [U(s) + P(s)]}{Q(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + G_{equiv.}(s) = 0$$

Como en la ultima ecuación el parámetro K solo aparece como factor multiplicativo en el numerador, puede construirse el trazo del lugar de las raíces directamente de la configuración de polos y ceros de:

$$G_{equiv.}(s) = \frac{K [P(s) + U(s)]}{Q(s)}$$

En el segundo caso deben construirse los contorno de las raíces para distintos parámetros diferentes de K. El procedimiento general para construcción de los contornos de las raíces es semejante al que se emplea cuando un cero y un polo de función de transferencia de lazo son los parámetros variables, que ya fue descripto.

Especificamente, se tratan primero los lugares de las raíces sin ningún controlador de compensación y entonces el sistema es de un solo lazo con realimentación unitaria generalmente. Los pasos siguientes consisten en construir los contornos de las raíces añadiendo los controladores de compensación de uno en uno.

En general, es muy común introducir controladores de compensación y elementos en las trayectorias de realimentación de un sistema de control. Una aplicación típica de este tipo de compensación es la de un sistema con realimentación tacométrica, en la que se emplea el tacómetro para realimentar una señal proporcional a la primera derivada de la variable de salida.-

Ejemplo 42:

Sea el sistema indicado en la figura 68.

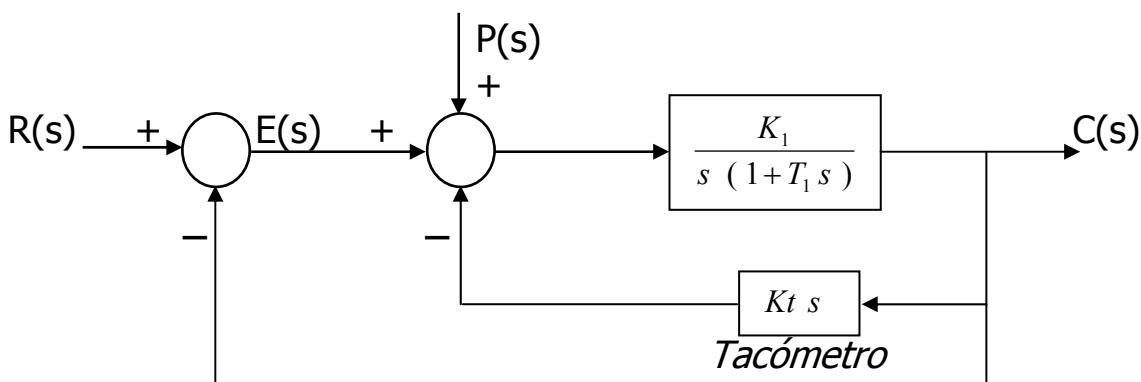


Figura 68

La función de transferencia de la trayectoria directa, (en este caso igual a la del lazo), del sistema, se expresa como:

$$G(s) = \frac{\frac{K_1}{s(1+T_1 s)}}{1 + \frac{K_1 Kt s}{s(1+T_1 s)}} = \frac{K_1}{s(1+T_1 s) + K_1 Kt s}$$

Para demostrar el primer caso: se supone que la constante del tacómetro se mantiene constante y solo se varía la ganancia K_1 . La Gequiv.(s) será:

$$s(1+T_1 s) + K_1 Kt s + K_1 = 0$$

$$1 + \frac{K_1 (1 + Kt s)}{s(1+T_1 s)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\text{Gequiv.}(s) = \frac{(K_1 Kt / T_1)(s + 1/Kt)}{s(s + 1/T_1)} = \frac{K(s + 1/Kt)}{s(s + 1/T_1)} \quad \text{con} \quad \begin{cases} K = K_1 Kt / T_1 \\ T_1 \text{ y } Kt \text{ fijos.} \end{cases}$$

Los L.G.R. se muestran en la figura 69, para $Kt > T_1$ y $Kt < T_1$.

Cuando $Kt > T_1$, la ecuación característica tiene dos raíces reales negativas para todos los valores positivos de K_1 . Cuando $Kt < T_1$, las raíces son complejas para el rango de K_1 : $K_1' < K_1 < K_1''$.

Estos lugares comprueban el hecho bien conocido que la realimentación tacométrica mejora la estabilidad de un sistema de control realimentado.

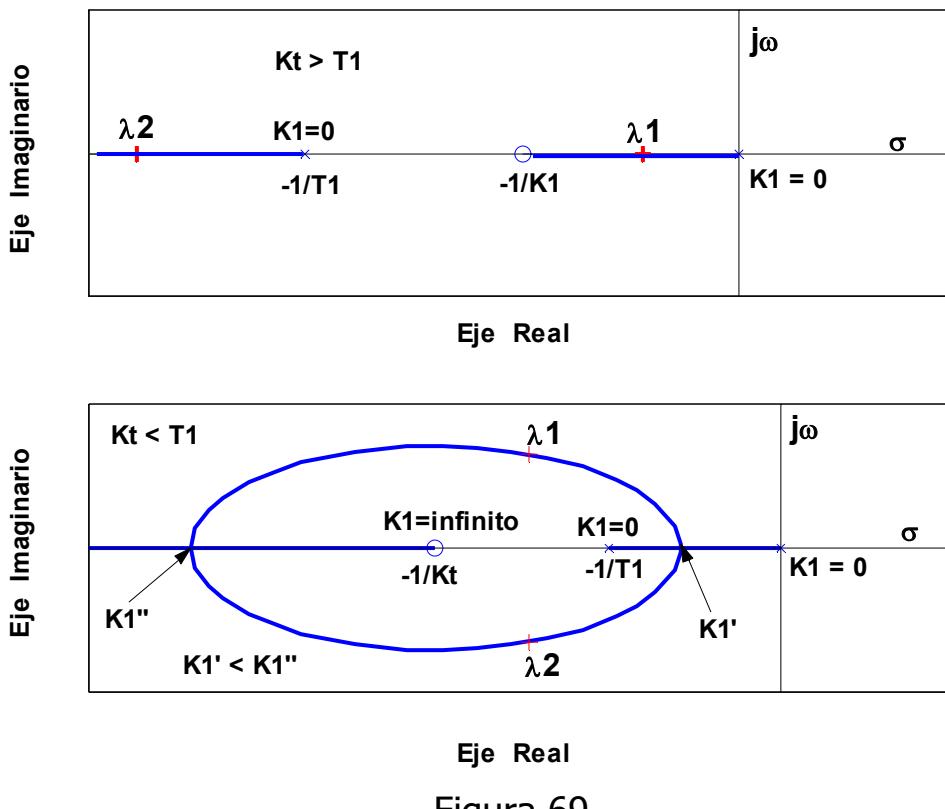


Figura 69

Cuando el valor de Kt es elevado, ($Kt > T_1$), el sistema tiene una gran amortiguación, ($\delta > 1$). La figura 70 muestra el efecto de la realimentación tacométrica en la respuesta transitoria del sistema.

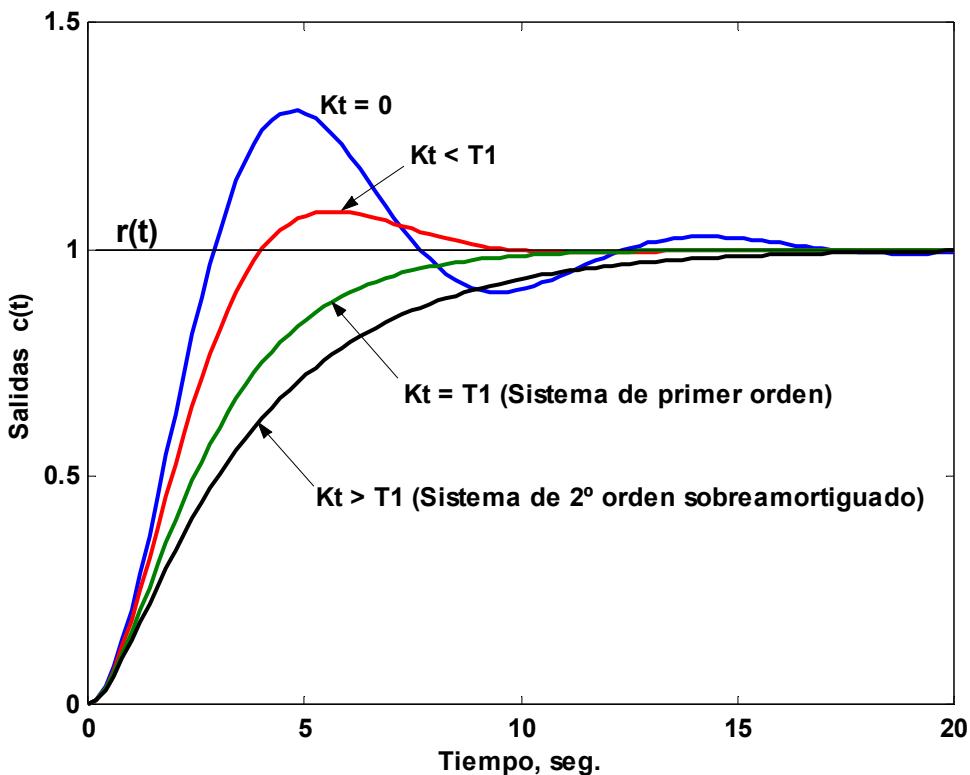


Figura 70

Para explicar el problema descripto en segundo término:

Se supone que K_1 y K_t son parámetros variables. Este es un problema más práctico ya que normalmente se escoge un tacómetro con función de transferencia, por ejemplo, de $K_t s$, para producir un funcionamiento satisfactorio del sistema. El primer paso para la construcción de los contornos de las raíces consiste en considerar el sistema sin el tacómetro. La ecuación característica del sistema descompensado es, con $K_t=0$:

$$s(1 + T_1 s) + K_1 = 0$$

En otras palabras, la última ecuación representa la ecuación característica del sistema, con el lazo interno abierto, ($K_t=0$). El lugar de las raíces con T_1 fijo y $K_t=0$ será el indicado en la figura 71.

El siguiente paso consiste en cerrar la trayectoria de realimentación tacométrica, y entonces queda en rigor la ecuación característica:

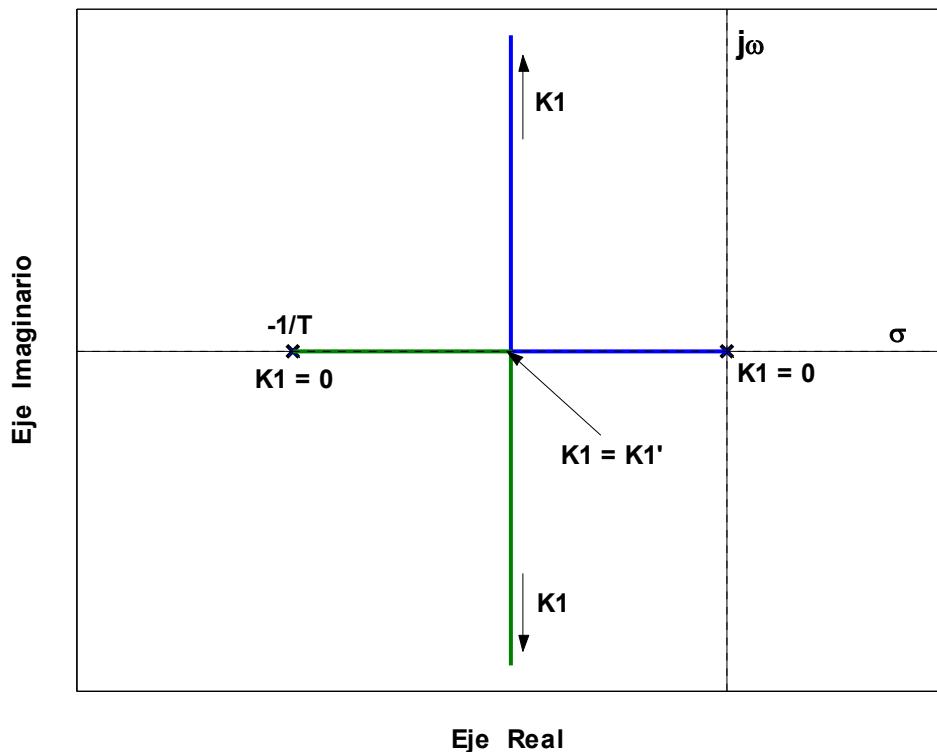
$$s(1 + T_1 s) + K_1 K_t s + K_1 = 0$$

Los diferentes contornos de las raíces cuando K_t es el parámetro variable, (para diferentes valores de K_1), pueden obtenerse a partir de la siguiente función:

$$G_1(s) = \frac{(K_1 K_t)s}{s(1 + T_1 s) + K_1}$$

Se reconoce que el denominador del segundo miembro es en realidad la ecuación característica del sistema cuando $K_t=0$, por lo tanto, los

contornos de las raíces cuando varía K_t , deben empezar en los puntos dados en la figura 71.



Eje Real

Figura 71

Cuatro contornos de las raíces se muestran en la figura 72 para cuatro

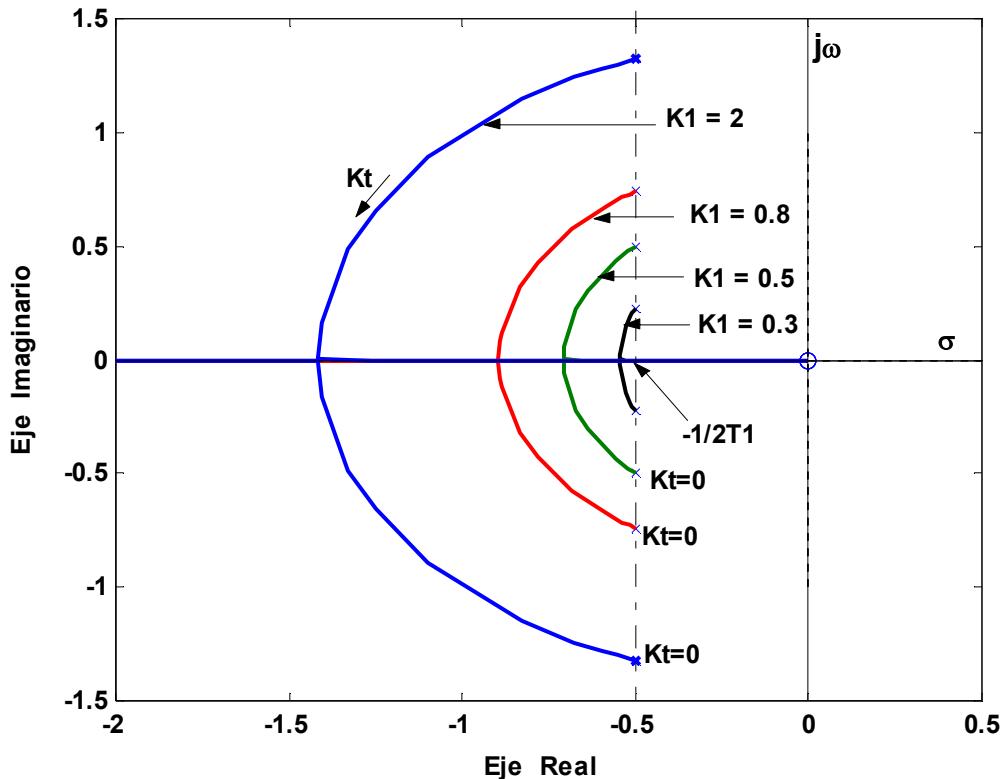


Figura 72

valores de fijos de $K_1 > K_1'$, con K_t variable.-

En los mismos se puede ver el efecto estabilizador de la compensación tacométrica, los polos se mueven hacia la izquierda en el plano s y aumentando el coeficiente de amortiguamiento relativo.

El concepto del contorno de las raíces puede extenderse a sistemas que tengan más de dos parámetros variables.

El ejemplo siguiente el comportamiento del sistema puede llevarse la salida del tacómetro a la entrada de un filtro R-C, como se verá.

Ejemplo 43:

Un sistema de control de posición con los controladores en un lazo secundario se muestra en la figura 73.

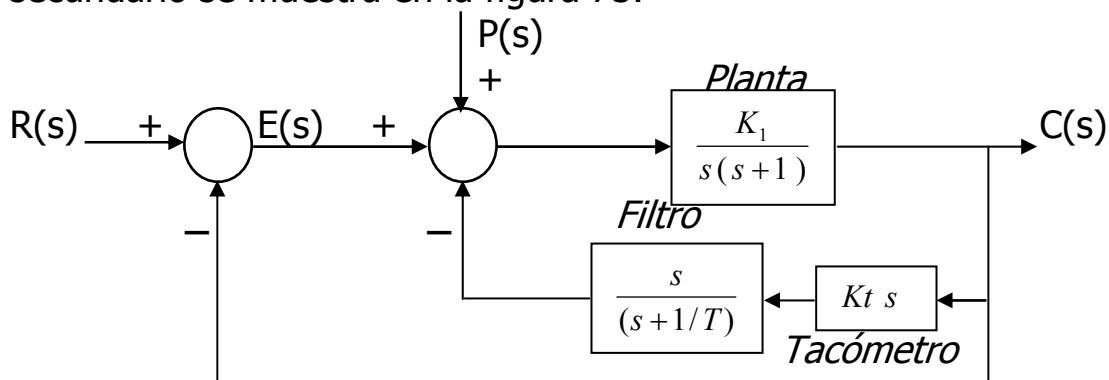


Figura 73

El filtro pasa alto R-C es el indicado en la figura 74.

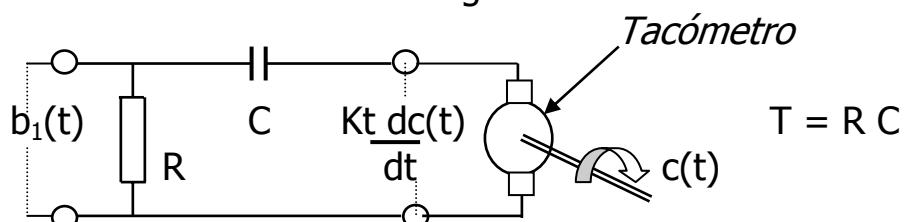


Figura 74

El empleo de este filtro pasa-alto dará lugar a un mayor coeficiente de error K_v , como se vera:

$$\text{Sin el filtro: } G(s) = \frac{K_1}{s(s+1) + K_1 K_t s} \quad \Rightarrow \quad K_v = \frac{K_1}{1 + K_1 K_t}$$

$$\text{Con el filtro: } G(s) = \frac{K_1 (s+1/T)}{s \{(s+1)(s+1/T) + K_1 K_t s\}} \quad \Rightarrow \quad K_v = K_1$$

Como se puede apreciar se mejora el K_v . Fijado K_1 y con valores adecuados de K_t y T se puede tener aproximadamente el mismo transitorio al escalón que sin el filtro, como se vera a continuación.

Si se especifica $K_v = 20 \text{ seg}^{-1}$, para una entrada rampa de pendiente unitaria, $r(t) = t \mu_s(t)$.

Por lo tanto K_1 deberá ser: $K_1 = 20$

La función del lazo del sistema será:

$$G(s) = \frac{20(s+1/T)}{s(s+1)(s+1/T)+20Kts^2}$$

Los contornos de las raíces con Kt y T como parámetros variables se construirán siguiendo los procedimientos de discutidos con anterioridad.

Con Kt variable y T = Cte. o (1/T) = Cte.:

$$G_1(s) = \frac{20Kts^2}{(s+1/T)(s^2+s+20)}$$

Con T o (1/T) variable y Kt = Cte.:

$$G_2(s) = \frac{(1/T)(s^2+s+20)}{s\{s^2+(1+20Kt)s+20\}}$$

Para (1/T) = 0, o T tendiendo a infinito con Kt variable:

$$G_3(s) = \frac{20Kts^2}{s(s^2+s+20)} \Rightarrow G_3(s) = \frac{20Kts}{(s^2+s+20)}$$

Por ende los puntos de iniciación de los contornos determinados por $G_2(s)$, son: uno está en el origen, y los otros dos varían con Kt según lo indicara la función $G_3(s)$.-

Para Kt = 0, con T o (1/T) variable:

$$G_4(s) = \frac{(1/T)(s^2+s+20)}{s(s^2+s+20)} \Rightarrow G_4(s) = \frac{(1/T)}{s}$$

En consecuencia los puntos de iniciación de los contornos determinados por $G_1(s)$, son: 2 fijos en, $s_{1-2} = -0.5 \pm j\sqrt{19.25}$ y el otro varia según sea el valor de T, indicado por la función $G_4(s)$, o sea en $-1/T$.

Contornos determinados por $G_2(s)$:

El lugar de los dos puntos de iniciación variables con el valor de Kt, el otro esta siempre en el origen, es el indicado por la $G_3(s)$, y mostrado en la figura 75.

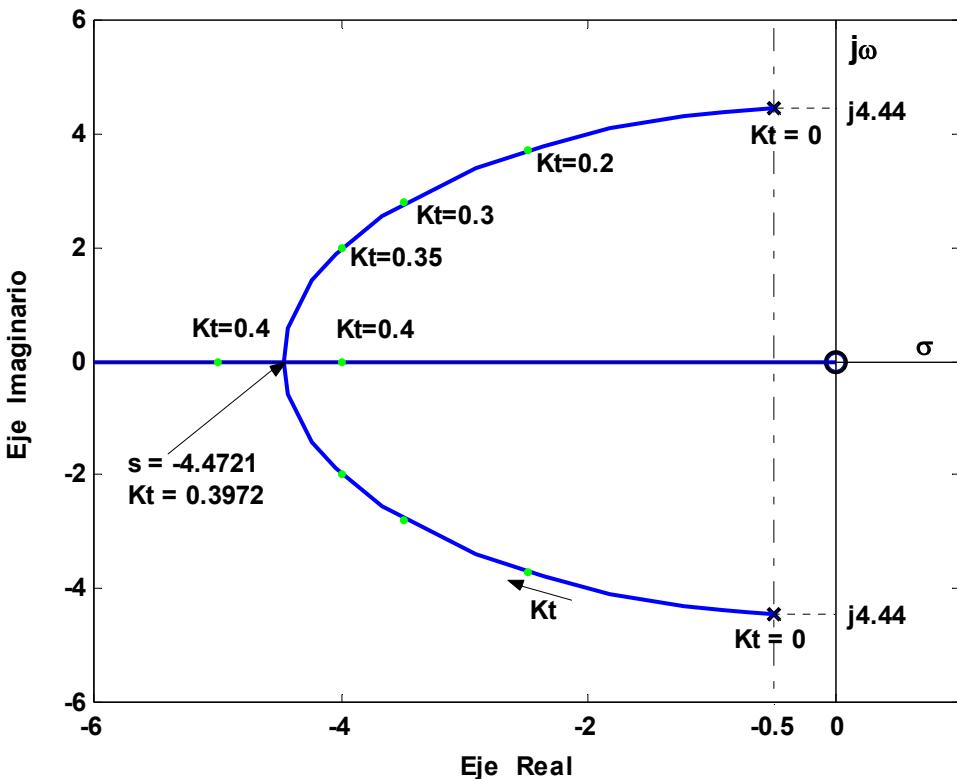


Figura 75

El punto de ruptura del lugar de la figura 75 es, para $Kt > 0$:

$$N \frac{d}{ds} G_3(s) = 0 \Rightarrow s^2 - 20 = 0 \quad s_1 = \sqrt{20} \approx 4.472$$

El valor de Kt en s_1 será:

$$Kt = \frac{-(s_1^2 + s_1 + 20)}{20 s_1} = \frac{-(20 - \sqrt{20} + 20)}{20(-\sqrt{20})} \Rightarrow Kt \approx 0.3972$$

Para determinar como se mueven los posibles puntos de ruptura de los contornos, delineados por $G_2(s)$, en función del parámetro Kt se hace:

$$N \frac{d}{ds} G_2(s) = 0 \Rightarrow (s^2 + s + 20)^2 + 20Kt s(s + 40) = 0$$

Por ende:

$$G'(s) = \frac{20Kt s(s + 40)}{(s^2 + s + 20)^2}$$

El lugar se muestra en la figura 76, solo para $Kt > 0$.

Un resumen seria:

Si Kt varia en el rango: $0 < Kt < 0.30$ no hay puntos de ruptura.-

Si $Kt = 0.30$: hay un punto de ruptura en -2.641 de orden 2, $y=2$, ($q=3$).-

Si Kt varia en el rango: $0.30 < Kt < 0.3972$ hay dos puntos de ruptura de orden 1, $y=1$, ($q=2$).

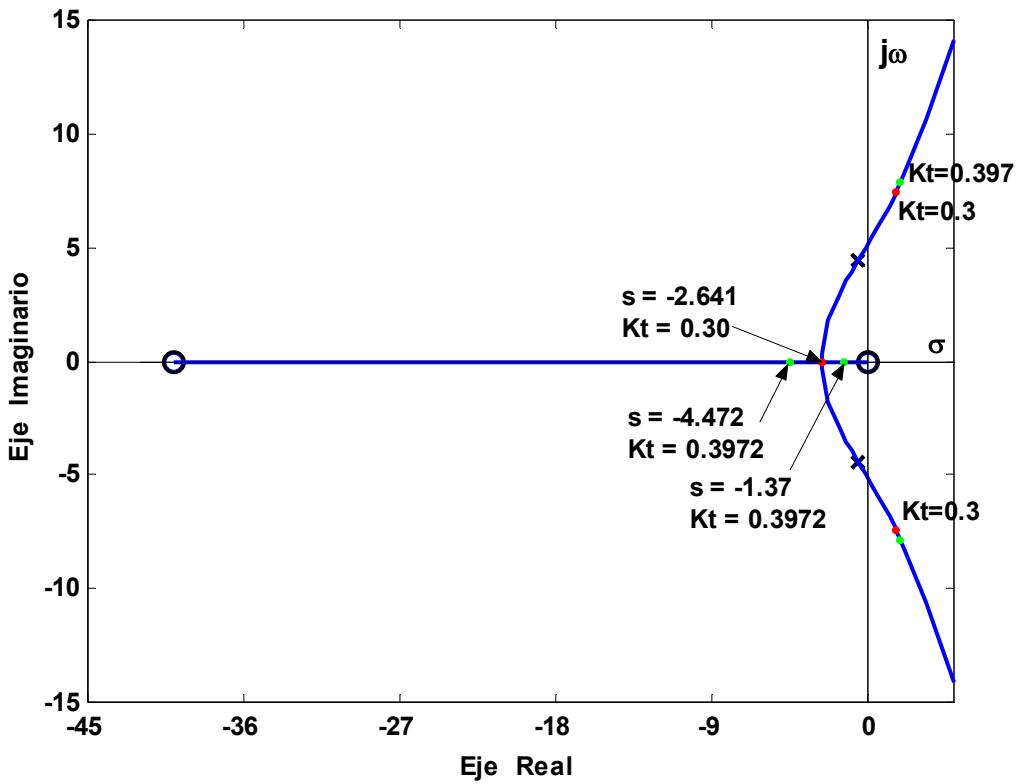


Figura 76

Si $K_t = 0.3972$: hay un punto de ruptura en -4.472 (para $1/T=0$), o T tendiendo a infinito. Y otro en -1.37 , para $T = 1.5555$, ambos de orden uno $y=1$, ($q=2$).-

Si $K_t = 0.3972$: hay un punto de ruptura entre -1.37 y el origen, (para $T>0$) y el origen de orden 1, $y=1$, ($q=2$).-

Los valores de $1/T$ 0 T en los contornos se pueden determinar con el requerimiento de magnitud, o reemplazar en $1/t=f(s)$ o $T=f(s)$, por el valor correspondientes de los puntos.

$$T = \frac{-(s^2 + s + 20)}{s\{s^2 + (1 + 20K_t)s + 20\}}$$

Por ejemplo en el punto de ruptura de orden 2, en $s^*=-2.641$, para $K_t^*=0.3001$, T^* será

$$T^* = \frac{-((-2.641)^2 + (-2.641) + 20)}{-2.641\{(-2.641)^2 + (1 + 20 \times 0.30)(-2.641) + 20\}} \Rightarrow T^* = 1.086.-$$

Los contornos para 8 valores de K_t , variando $1/T$ o T en forma continua se muestran en la figura 77. Por ejemplo para $K_t=0.5$ y $T>0$, el punto de ruptura esta en $s=-1.03$ y el valor de $1/T = 0.5004$ o $T = 1.9984$.-

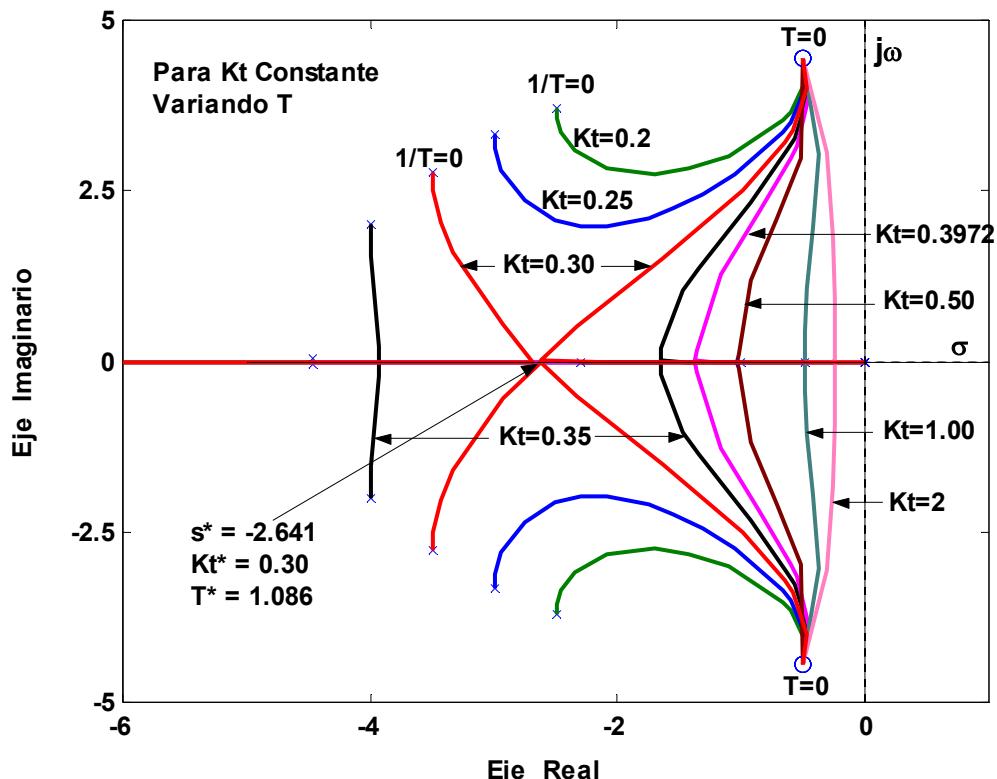


Figura 77

Para graficar los contornos determinados por $G_1(s)$, para $T = \text{Cte.}$ Con K_t variable en todo su rango positivo, se puede seguir el mismo procedimiento que para los contornos dados por $G_2(s)$. El lector puede desarrollarlo como un ejercicio propuesto. Al mismo resultado se tiene que llegar si en los contornos de la figura 77 se unen los puntos de igual T .

Recordar que:

$$G_1(s) = \frac{20 K_t s^2}{(s + 1/T)(s^2 + s + 20)}$$

Los puntos de inicio de los contornos serán: dos fijos en $-0.5 \pm j\sqrt{1975}$ y uno que varía con T , en $-1/T$.

En la figura 78, se muestran ocho contornos con K_t variable para $T = 0.80; 1.0; 1.086; 1.5; 10.0; 2.0$ e infinito.-

Como se puede apreciar cuando T es grande, la posición de los polos del sistema es prácticamente la misma a la que tenían sin el filtro, similares a las indicadas por la figura 75 ($T \rightarrow \infty$).

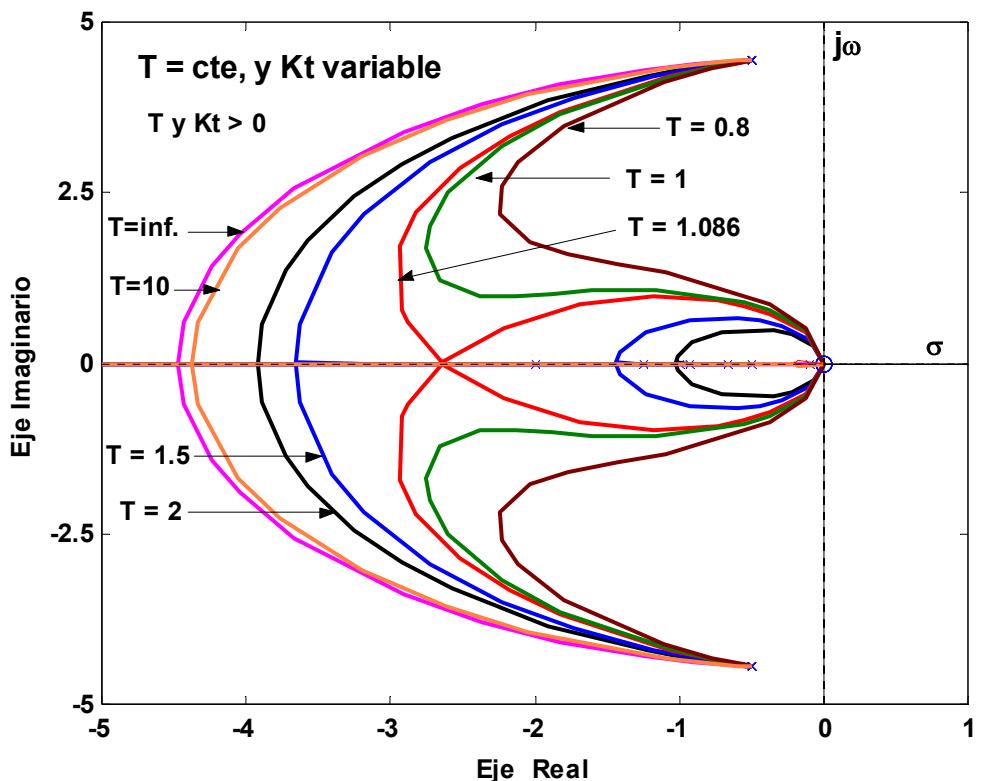


Figura 78

Si se superponen los contornos dados por $G_1(s)$ y $G_2(s)$ nos quedará el gráfico de la figura 79.-

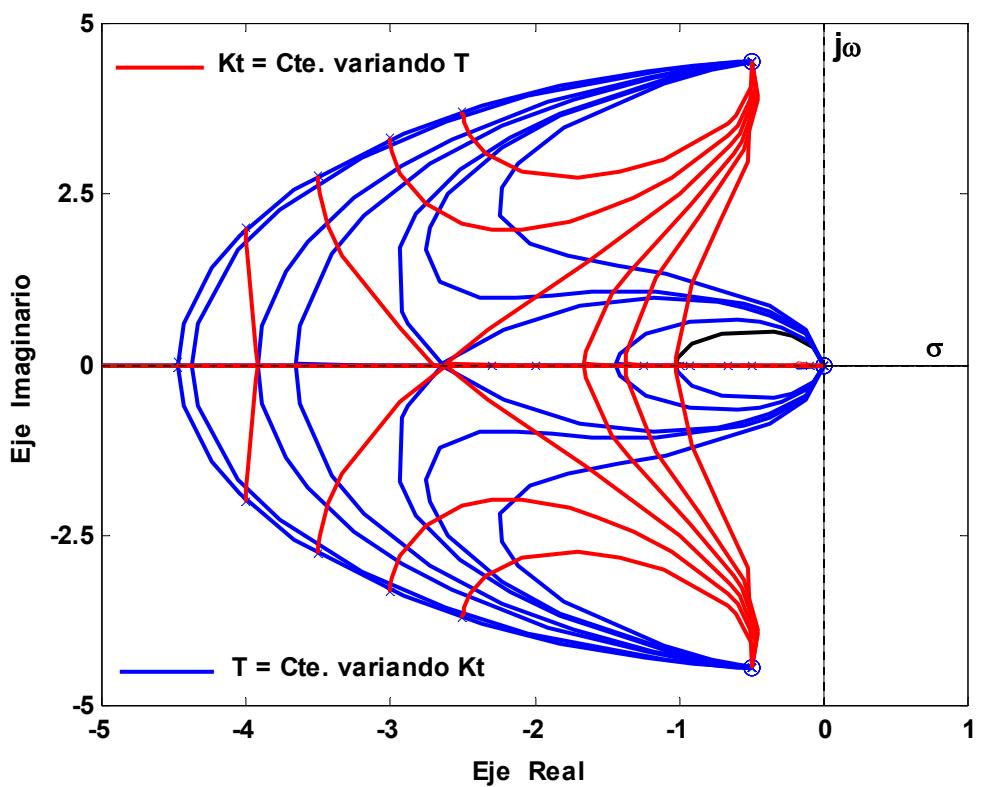


Figura 79

Como se dijo si T es grande, (por ejemplo $T>10$), se obtiene casi la misma configuración de polos y ceros que sin el filtro pero con el coeficiente de error Kv mucho mayor.

Por ejemplo:

Si $K_1 = 20$ y $Kt = 0.30$, sin el filtro:

$$Kv = \frac{K_1}{1 + K_1 Kt} = \frac{20}{1 + 6} = \frac{20}{7} \approx 2.857 \text{ seg}^{-1}$$

Y la configuración de polos y ceros del sistema será:

$$\begin{cases} \lambda_{1-2} = -3.5 \pm j2.784 \\ Z \text{ no hay.} \end{cases}$$

Si $K_1 = 20$ y $Kt = 0.30$, pero con el filtro:

$$Kv = K_1 = 20 \text{ seg}^{-1}.- \text{ para } T = 10 \text{ seg.}$$

La configuración de polos y ceros del sistema será:

$$\begin{cases} \lambda_{1-2} = -3.4984 \pm j2.672 \\ \lambda_3 = -0.1032 \\ Z = -0.100 \end{cases}$$

En la figura 80 se muestran las respuestas, en los dos casos.

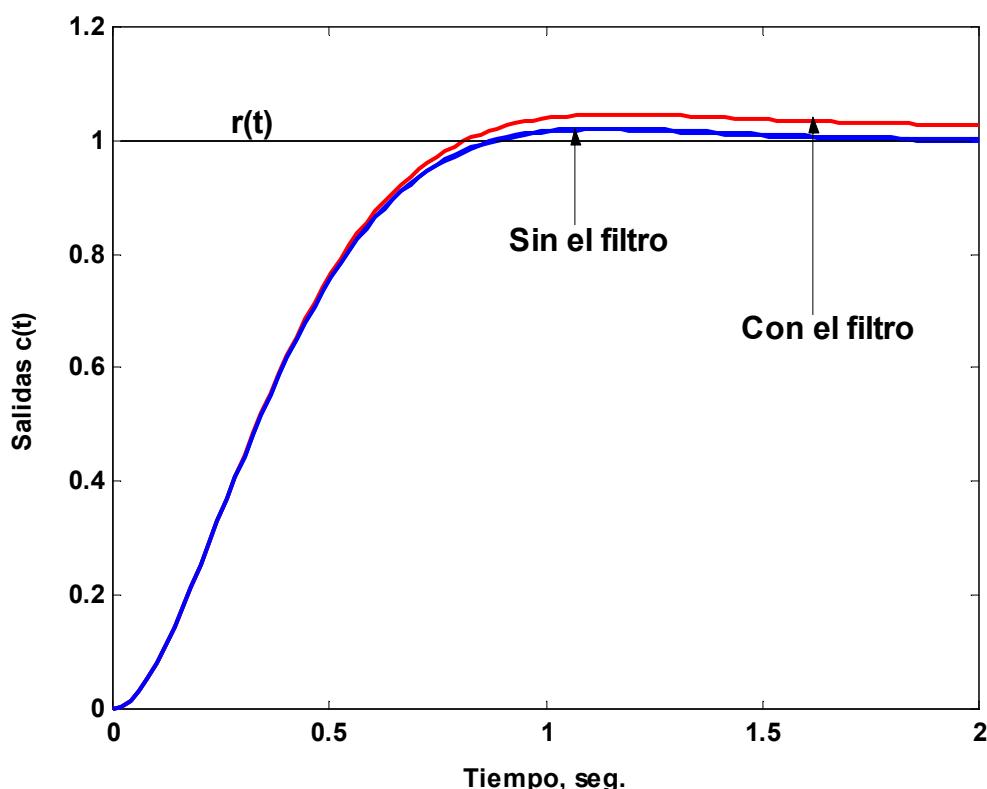


Figura 80

Lugar de las Raíces de Sistemas con retardos Puros.

Existen varios sistemas de control en los cuales se pueden producir demoras, (tiempos muertos), ya sea en la medición, en la acción de control, en la operación del actuador etc. Estas demoras se denominan retardos puros de tiempo. La entrada y la salida de un retardo puro están relacionadas por;

$y(t) = x(t-T)$ e $y(T) = x(0)$, donde: $y(t)$ es la salida y $x(t)$ es la entrada. - T en segundos es el tiempo de retardo puro.

La función de transferencia del mismo, como se sabe, está dada por el término exponencial siguiente:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-Ts}$$

Un ejemplo de un sistema con un retardo puro en el lazo, es el indicado en el diagrama esquemático de figura 81, el cual es de un proceso de laminado de planchas de acero, junto con un diagrama de bloques:

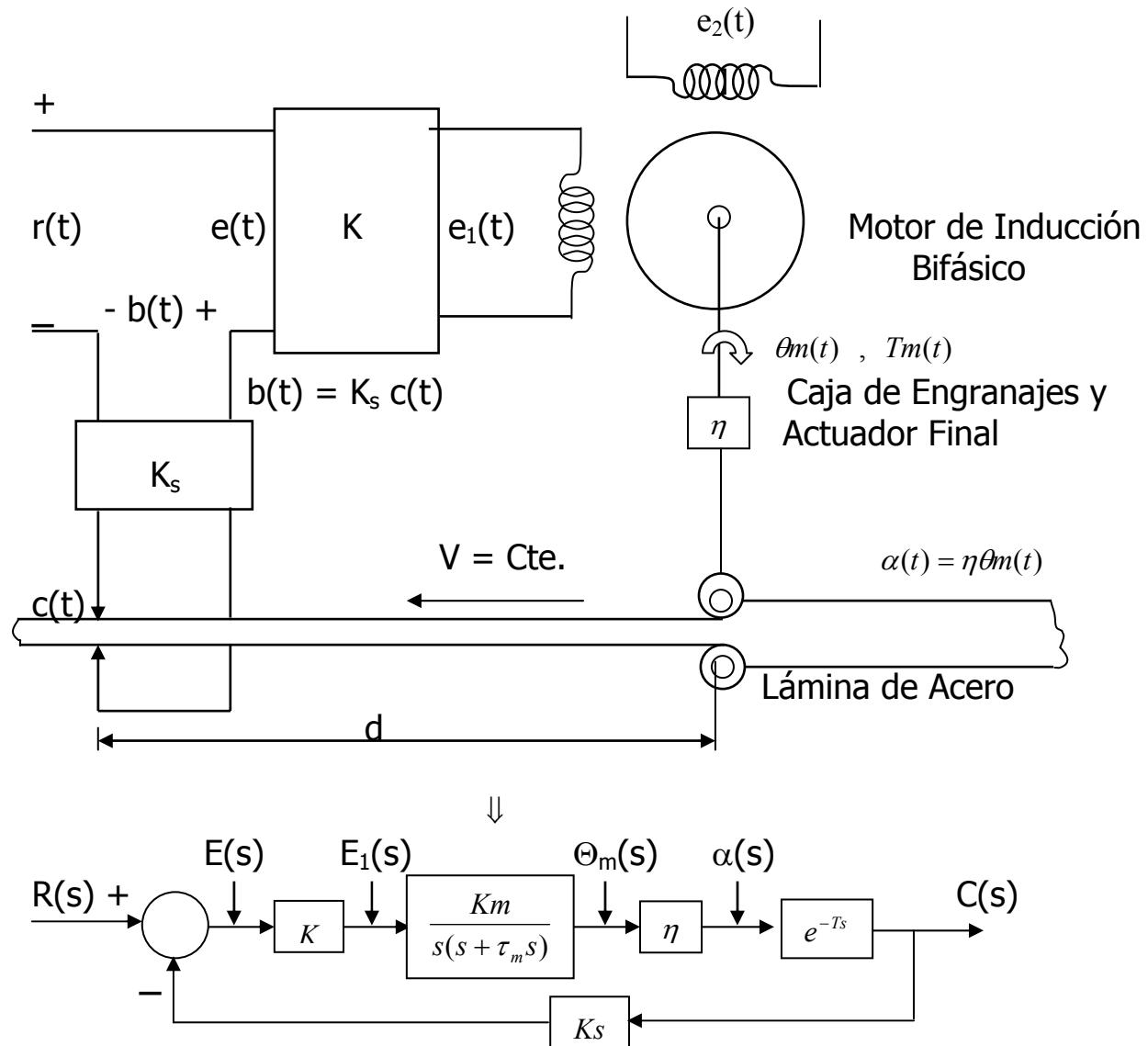


Figura 81

$$\text{Por lo tanto: } G(s)H(s) = \frac{(KKm\eta Ks)e^{-Ts}}{s(1+\tau_m s)} \equiv \frac{K^* e^{-Ts}}{s(s+1/\tau_m)} \quad \begin{cases} K^* = KKm\eta Ks / \tau_m \\ d/v = T \text{ (seg.)} \end{cases}$$

La ecuación característica del sistema será:

$$s(s+1) + K^* e^{-s} = 0$$

En general se supondrá que la ecuación característica de un sistema típico con un retardo de tiempo puro puede ser escrita:

$$Q(s) + KP(s)e^{-Ts} = 0 \quad (1)$$

Donde $Q(s)$ y $P(s)$ son polinomios de s . Una forma alternativa de la ecuación (1) será:

$$1 + \frac{KP(s)e^{-Ts}}{Q(s)} = 0, \text{ o también:}$$

$$1 + KG_1(s)H_1(s)e^{-Ts} = 0 \quad (2)$$

$$\text{donde: } G_1(s)H_1(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (3)$$

Las condiciones de módulo y argumento que deben ser satisfechas serán:

$$KG_1(s)H_1(s)e^{-Ts} = -1$$

Requerimiento de Magnitud:

$$|KG_1(s)H_1(s)e^{-Ts}| = 1 \Rightarrow |K| \cdot |G_1(s)H_1(s)| \cdot |e^{-Ts}| = 1$$

$$\text{Como: } e^{-Ts} = e^{-T(\sigma+j\omega)} = e^{-T\sigma} \cdot e^{-j\omega T} \Rightarrow |e^{-Ts}| = e^{-T\sigma}$$

En consecuencia:

$$|K| = \frac{1}{|G_1(s)H_1(s)| \cdot e^{-T\sigma}} \Rightarrow |K| = \frac{e^{T\sigma} \cdot \left| \prod_{j=1}^n (s - P_j) \right|}{\left| \prod_{i=1}^{\omega} (s - Z_i) \right|} \quad (-\infty < K < \infty) \quad (4)$$

y como $\angle e^{-Ts} = -\omega T$, el Requerimiento Angular será:

$$\angle G_1(s)H_1(s) = (m\pi + \omega T) \text{ en radianes, } o \equiv m180^\circ + (\omega T)180^\circ / \pi$$

$$\text{donde: Si } m = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (K \geq 0) \quad (5)$$

$$\text{y Si } m = 0; \pm 2; \pm 4, \dots \quad (K \leq 0) \quad (6)$$

Notar que la condición para que un punto $s = s_1$, del plano s sea un punto del lugar completo de las raíces está dado por las condiciones (5) y (6), las cuales difieren de las condiciones para un lugar común en el término (wT). Cuando $T = 0$, las ecuaciones (5) y (6) se convierten en las mismas que para el lugar de las raíces común. Como w es una variable en el plano s , las condiciones angulares no son constantes a lo largo del plano s , pues dependen de donde este esté ubicado el punto el cual es una raíz de la ecuación (2). Viendo el problema desde otro punto de vista, se sabe que si $T = 0$, dado un valor de K , hay solo n puntos en el plano s que satisfacen

las ecuaciones (5) o (6), para todos los valores posibles de m , donde n es el mayor orden de $P(s)$ o $Q(s)$. Sin embargo para $T \neq 0$, las condiciones angulares de las ecuaciones (5) y (6) dependen de w , que varía a lo largo de un eje vertical en el plano s . Por lo tanto para un K dado, los puntos pueden ser más que n , los que satisfacen las condiciones angulares en el plano s , cuando m toma todos los valores enteros posibles. En efecto, hay un número infinito de estos puntos ya que la ecuación (2) es trascendental, es conocido que tiene un número infinito de raíces.

La dificultad que tiene la construcción del lugar de las raíces de la ecuación (2) es que muchas de las reglas de construcción desarrolladas originalmente para sistemas sin retardo de tiempo puro no serán todas válidas para el presente caso. Es de interés investigar como algunas de las reglas de construcción ya vistas para lugares comunes pueden ser modificadas para aplicarlas en el caso bajo estudio.

1) Puntos de $K = 0$:

Los puntos de $K = 0$ sobre el lugar completo de las raíces de la ecuación característica están en los polos de $G_1(s)H_1(s)$ y además cuando $\sigma = -\infty$.

Demostración: La condición de módulo se puede poner de la manera siguiente:

$$e^{-T\sigma} |G_1(s)H_1(s)| = \frac{1}{|K|}$$

Por lo tanto, si $K = 0$, $e^{-T\sigma} |G_1(s)H_1(s)| \rightarrow \infty$, por ende s tenderá a los polos de $G_1(s)H_1(s)$, o si σ , que es la parte real de s , tiende a $-\infty$.

2) Puntos de $K = \pm\infty$:

Los puntos de $K = \pm\infty$ sobre el lugar completo de las raíces de la ecuación característica están en los ceros de $G_1(s)H_1(s)$ y en $\sigma = +\infty$.

Demostración:

Por lo tanto, si $K = \pm\infty$, $e^{-T\sigma} |G_1(s)H_1(s)| \rightarrow 0$, por ende s tiende a los ceros de $G_1(s)H_1(s)$, o si σ , que es la parte real de s , tiende a $+\infty$.

3) Número de Ramas del Lugar Completo de las Raíces:

El número de ramas sobre el lugar de las raíces de la ecuación característica es infinito, pues la ecuación tiene infinitas raíces.

4) Simetría del Lugar Completo de las Raíces:

El lugar completo de las raíces es simétrico con respecto al eje real del plano s . Esto se explica expandiendo e^{-Ts} en una serie infinita, luego la ecuación característica se transforma en un polinomio con coeficientes reales pero con orden infinito.

5) Asíntotas del Lugar Completo de las Raíces:

Las asíntotas del lugar de las raíces de la ecuación característica son infinitas en número y todas paralelas al eje real del plano s . Las intersecciones de las mismas con el eje imaginario están dadas por:

$$N = \frac{N\pi}{T}$$

Donde N está tabulado en la tabla siguiente para todas las condiciones indicadas.

n = Número de polos finitos de $G_1(s)H_1(s)$.-

w = Número de ceros finitos de $G_1(s)H_1(s)$.-

Demostración:

Cuando s tiende a infinito sobre el lugar de las raíces, K se aproxima a cero o a $\pm\infty$, ya vimos que las asíntotas están en $\sigma = \infty$ ($K = \pm\infty$) y $\sigma = -\infty$ ($K = 0$). Las intersecciones de las asíntotas con el eje jw y las condiciones dadas en la tabla se obtienen usando las ecuaciones (5) y (6).

K	n-w	K=0 (Asíntotas)	K= $\pm\infty$ (Asíntotas)
≥ 0	impar	N = entero pares $= 0; \pm 2; \pm 4; \dots$	N = entero impares $= \pm 1; \pm 3; \pm 5; \dots$
≥ 0	par	N = entero impares $= \pm 1; \pm 3; \pm 5; \dots$	N = entero impares $= \pm 1; \pm 3; \pm 5; \dots$
≤ 0	impar	N = entero impares $= \pm 1; \pm 3; \pm 5; \dots$	N = entero pares $= 0; \pm 2; \pm 4; \dots$
≤ 0	par	N = entero pares $= 0; \pm 2; \pm 4; \dots$	N = entero pares $= 0; \pm 2; \pm 4; \dots$

6) Lugar de las Raíces sobre el eje Real:

Demostración:

La propiedad del lugar de las raíces de la ecuación característica sobre el eje real es la misma que para el lugar común, pues en el eje real w = 0, y las condiciones angulares de las ecuaciones (5) y (6) serán las mismas que para los lugares comunes.

7) Ángulos de Partida y de Llegada:

Estos ángulos son determinados por el uso de las ecuaciones (5) y (6).-

8) Intersección del Lugar de las Raíces con el eje Imaginario:

Como la ecuación característica no es algebraica en s, la intersección del lugar con el eje jw no puede ser determinada usando el criterio de Routh-Hurwitz. La determinación de los puntos de intersección del lugar con el eje jw es una tarea difícil, pues el lugar tiene un número infinito de ramas. Sin embargo, se mostrará mas adelante que solo las intersecciones próximas al eje real son de interés para los estudios de estabilidad.

9) Puntos de Ruptura:

Los puntos de ruptura del lugar completo de las raíces deben satisfacer a:

$$\frac{d G_1(s)H_1(s)e^{-Ts}}{ds} = 0$$

10) Determinación de los Valores de K sobre el Lugar de las Raíces:

El valor de K en cualquier punto $s = s_1$ sobre el lugar de las raíces se determina empleando:

$$|K| = \frac{e^{T\sigma_1} \cdot \left| \prod_{j=1}^n (s_1 - P_j) \right|}{\left| \prod_{i=1}^{\omega} (s_1 - Z_i) \right|} \quad (-\infty < K < \infty)$$

Donde σ_1 es la parte real de $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ y P_j, Z_i : los polos y ceros del lazo.

Ejemplo 44:

Consideremos el sistema visto al principio de este estudio, la función de transferencia del lazo era, si $T = 1$ seg.:

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{Ke^{-s}}{s(s+1)}$$

Graficaremos el lugar completo de las raíces de la ecuación característica:

$$s^2 + s + Ke^{-Ts} = 0$$

1) Puntos de $K = 0$:

Están en: $s = 0$; $s = -1$ y además en $\sigma = -\infty$.

2) Puntos de $K = \pm\infty$:

Están todos en $\sigma = \infty$.

3) Número de Ramas del Lugar.

El número de ramas es infinito. (Se dibujaran las ramas mas dominantes).

4) Simetría del Lugar:

El lugar es simétrico respecto al eje real.-

5) Asíntotas del Lugar, (intersección con el eje imaginario):

Para $K \geq 0$, (L.R.D.), cuando $K \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow -\infty$, y como $(n - w) = (2 - 0) = 2$, (par) se tendrá que: $N =$ entero impar, por lo tanto, estas asíntotas

interceptan el eje jw en: $\omega = \frac{N\pi}{T} = N\pi = \pm\pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi; \dots$.-

Para $K \geq 0$, (L.R.D.), cuando $K \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow +\infty$, y como $(n - w) = (2 - 0) = 2$, (par) se tendrá que: $N =$ entero impar, por lo tanto, estas asíntotas

interceptan el eje jw también en: $\omega = \frac{N\pi}{T} = N\pi = \pm\pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi; \dots$.-

Para $K \leq 0$, (L.R.I.), cuando $K \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow -\infty$, y como $(n - w) = (2 - 0) = 2$, (par) se tendrá que: $N =$ entero par, por lo tanto, estas asíntotas

interceptan el eje jw en: $\omega = \frac{N\pi}{T} = N\pi = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi; \dots$..

Para $K \leq 0$, (L.R.I.), cuando $K \rightarrow -\infty$, $\sigma \rightarrow +\infty$, y como $(n - w) = (2 - 0) = 2$, (par) se tendrá que: $N =$ entero par, por lo tanto, estas asíntotas

interceptan el eje jw en: $\omega = \frac{N\pi}{T} = N\pi = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi; \dots$..

6) Lugar de las raíces sobre el eje real:

El L.R.D. ($K > 0$) ocupa la región entre $s = 0$ y $s = -1$ sobre el eje real.
El resto del eje real es ocupado por el L.R.I. ($K < 0$).-

7) Ángulos de partida y de llegada:

Esta regla no tiene aplicación pues no hay polos/ceros complejos.

8) Intersección del lugar con el eje imaginario:

$$G(jw)H(jw) = K \frac{\cos(wT) - j\sin(wT)}{-w^2 + jw}, \text{ pues } e^{-jwT} = \cos(wT) - j\sin(wT).$$

Las intersecciones con el eje imaginario se producen, como se sabe, si:

$$w_c^2 \sin(w_c T) = w_c \cos(w_c T) \Rightarrow \operatorname{tag}(w_c T) = 1/w_c \equiv T/(w_c T), \text{ si } w_c T = x_c :$$

$\operatorname{tag}(x_c) = 1/x_c$, Llamando: $y = \operatorname{tag}(x)$, e $y_1 = 1/x$, cuando y e y_1 tengan puntos comunes ellos será las soluciones buscadas:

Empleando Matlab se tendrá:

```
» syms x
» y=tan(x);
» y1=1/x;
» ezplot(y,0,10)
» hold on
» ezplot(y1,0,10)
```

El grafico resultante es el indicado en la figura 82.

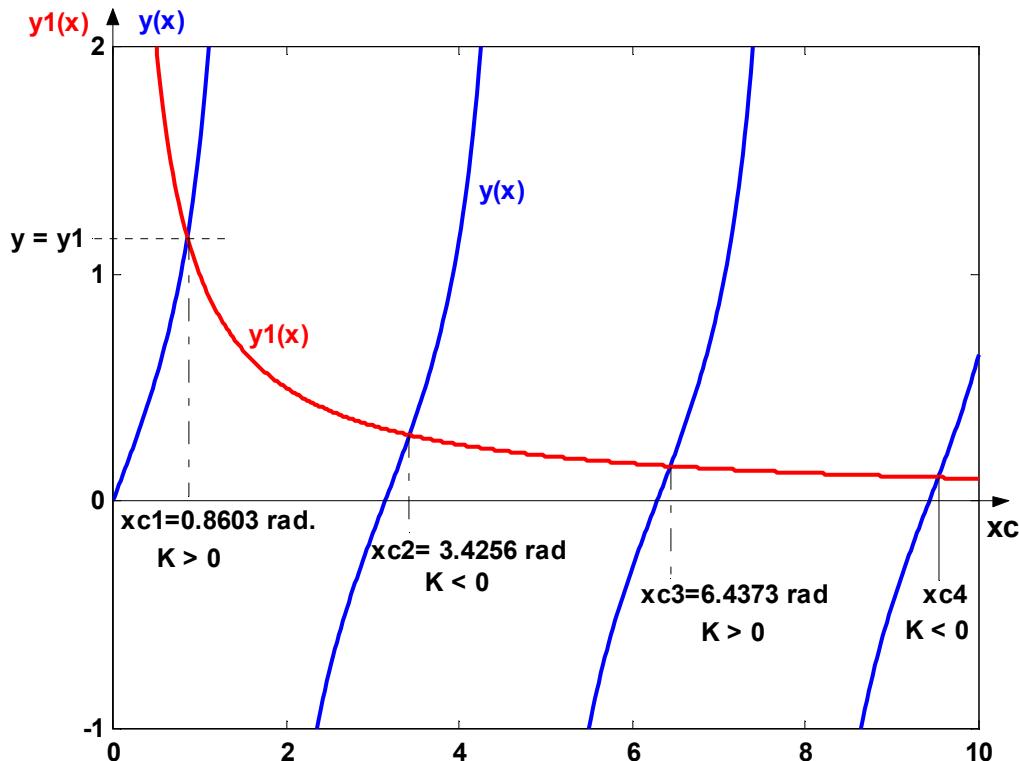


Figura 82

Como $w_{c1} = x_{c1} / T \equiv x_{c1} = 0.8603 \text{ rad/seg.}$

$w_{c2} = x_{c2} / T \equiv x_{c2} = 3.4256 \text{ rad/seg.}$

$w_{c3} = x_{c3} / T \equiv x_{c3} = 6.4373 \text{ rad/seg. , etc.}$

Por lo tanto el valor de las ganancias en las intersecciones será:

$$L(jw_C) = K_{CL} \frac{-\operatorname{sen}(x_C)}{w_C} = -1 \Rightarrow K_{CL} = \frac{w_C}{\operatorname{sen}(x_C)}, \text{ las primeras tres intercepciones:}$$

$$K_{CL} = 1.1349; (LRD) \quad K_{CL} = -12.225; (LRI) \quad y \quad K_{CL} = 41.935; (LRD)$$

La figura 83 muestra el lugar de las raíces del sistema:

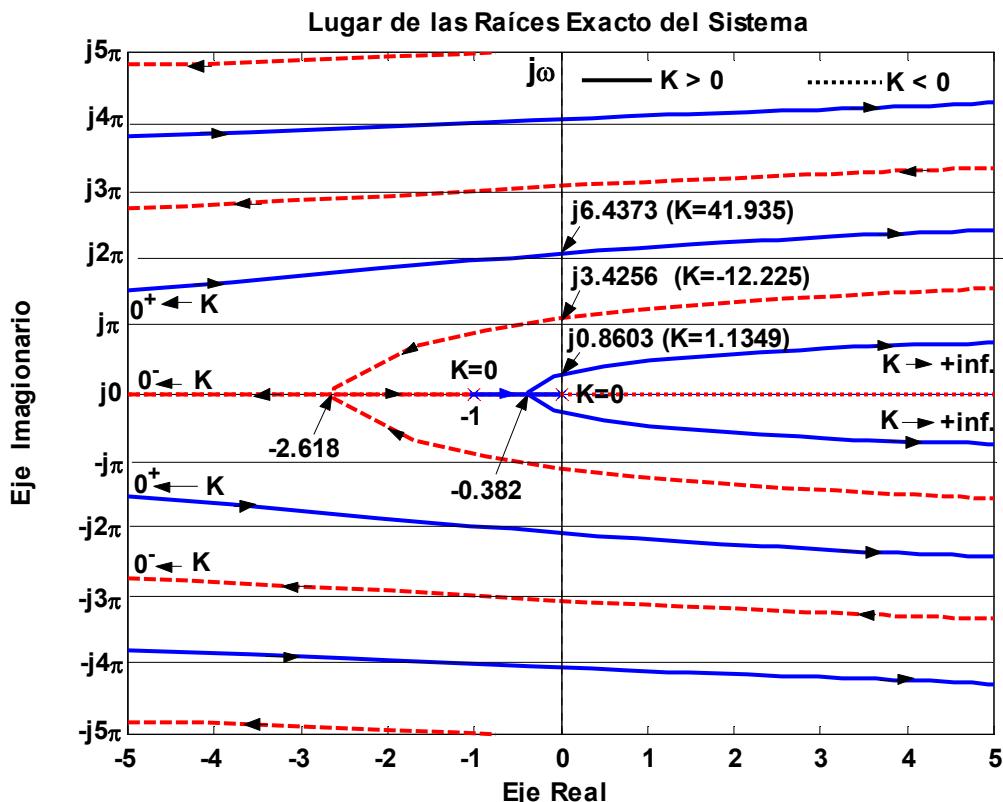


Figura 83

9) Puntos de Ruptura:

Se obtienen de :

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{e^{-Ts}}{s(s+1)} \right] = 0 \Rightarrow \frac{-Te^{-Ts} s(s+1) - e^{-Ts} (2s+1)}{[s(s+1)]^2} = 0$$

Operando se llega a:

$$Ts^2 + (T+2)s + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2T} \left[-(T+2) \pm \sqrt{T^2 + 4} \right]$$

Para $T = 1$ seg. Los dos puntos de ruptura están en:

$$s_1 = -0.382 \quad y \quad s_2 = -2.618$$

Donde es fácilmente verificable que uno pertenece al L.R.D. ($K > 0$) y el otro al L.R.I. ($K < 0$).-

Notar que desde el punto de vista del análisis del sistema, solo la parte del lugar de las raíces que está ubicada entre $w = \pi$ y $w = -\pi$, ramas primarias, para $K > 0$, son de relevancia. El sistema de lazo cerrado es estable para: $0 < K < 1.1349$.-

Como se puede apreciar, graficar el lugar de las raíces **exacto**, de un sistema con un retraso en el lazo, utilizando un método sistemático para la

construcción del mismo, en general para la mayoría de los sistemas de control el problema resulta muy tediosa. Por ende se investigaran diferentes formas de aproximar el término del retardo puro, por un polinomio o una función racional de s . Un primer método de aproximar e^{-Ts} sería como sigue:

$$e^{-Ts} \approx \frac{1}{[1 + (Ts/n)]^n} \quad (*)$$

Como se sabe e^{-Ts} tiene un número infinito de polos, la aproximación es perfecta cuando n tiende a infinito. Si la ecuación (*) se usa para la aproximación, solo las llamadas *ramas primarias o dominantes* del lugar serán las construidas, se sabe que realmente son infinitas.

Sin embargo, esto será adecuado para la gran mayoría de los problemas prácticos, pues solo las ramas primarias contendrán los polos dominantes del sistema.

Supongamos que se desea aproximar el término exponencial de la función de transferencia simple del lazo siguiente:

$$L(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s} \approx \frac{K \times 1}{s \left[1 + \frac{Ts}{n} \right]^n}$$

La figura 84, ilustra las raíces dominantes del lugar aproximado, para $n=2$, $n=3$ y $n=4$, cuando $T = 1$. Si n tiende a infinito las ramas dominantes aproximadas se van aproximando a las reales.

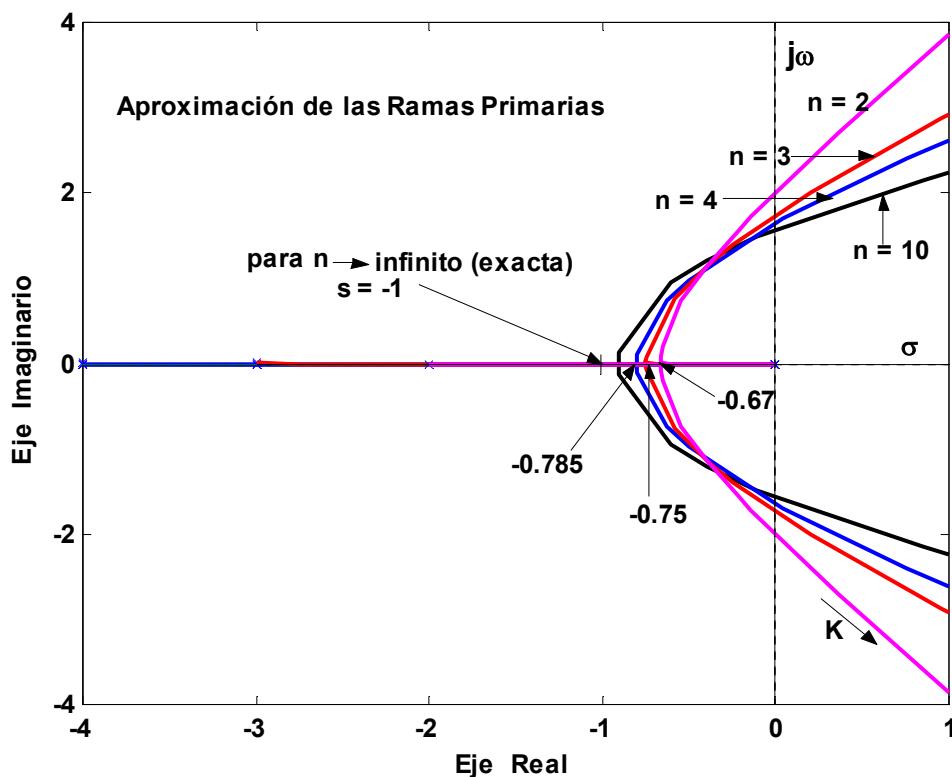


Figura 84

Otra forma de aproximar la función de transferencia del retardo puro, es usar una serie de potencias, serie de Taylor, o las llamadas aproximaciones de Padé. La diferencia entre estas aproximaciones y la dada por la ecuación (*), es que en ésta la precisión mejora haciendo "n" mas grande, mientras que en las dos últimas formas, la validez de la aproximación depende de el valor de T, mientras mas chico sea T mejor. Una técnica para aproximar la función de transferencia del retardo es expresar la misma con una expansión en serie de Taylor:

$$e^{-Ts} = 1 - Ts + \frac{T^2}{2!} s^2 - \frac{T^3}{3!} s^3 + \dots$$

Si solo se consideran los primeros dos términos, se tendrá como una primera aproximación:

$$e^{-Ts} \approx 1 - Ts$$

Una forma muy conveniente para evaluar una aproximación tal es comparar su diagrama de respuesta de frecuencia, Bode, con la de e^{-Ts} .

Recordar que la respuesta de frecuencia de e^{-Ts} es:

Ganancia = 1, o 0 dB.

Angulo de Fase = $\Phi = -\omega T$ (rad)

En un diagrama de Bode, la curva de ganancia es constante igual a 0dB, (o sea 1), mientras que el ángulo de fase decrece linealmente con la frecuencia para un T dado. En la aproximación la respuesta de frecuencia de $(1-Ts)$ es:

$$\text{Ganancia} = \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad y \quad \text{Angulo de Fase} = \phi = \tan^{-1}(-\omega T) = -\tan^{-1}(\omega T)$$

La figura 85 muestra la respuesta de frecuencia de e^{-Ts} y de las aproximaciones para compararlas. Notar que en el grafico en lugar de w, está en función de (wT), en radianes y la escala es lineal.

Se puede ver inmediatamente que la ganancia de la aproximación no es constante e igual a uno como es requerido por e^{-Ts} , y que el ángulo de fase se aproxima solo para valores de (wT) muy pequeños.-

Si e^{-Ts} se escribe como: $1/e^{Ts}$ y el denominador es expandido en una serie de Taylor, el resultado es:

$$e^{-Ts} = \frac{1}{e^{Ts}} = \frac{1}{1 + Ts - \frac{T^2}{2!} s^2 + \frac{T^3}{3!} s^3 + \dots}$$

Si se toman solo los dos primeros términos del denominador se tendrá:

$$e^{-Ts} = \frac{1}{e^{Ts}} \approx \frac{1}{1 + Ts} \equiv (1 + Ts)^{-1}$$

La respuesta de frecuencia para esta aproximación es:

$$\text{Ganancia} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad y \quad \phi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

y también se muestra en la figura 85.

Como se puede ver esta aproximación *no es mejor* que (1-Ts), (solo varía la curva de ganancia).-

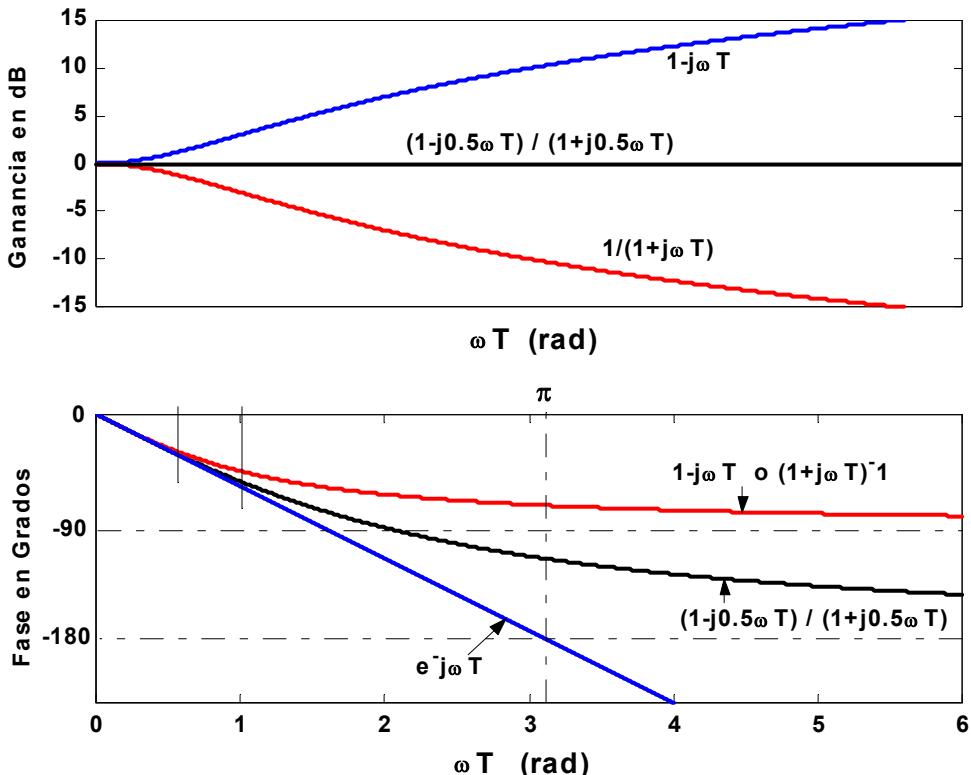


Figura 85

Otra forma de aproximar el retardo sería, escribiendo:

$e^{-Ts} = \frac{e^{-(T/2)s}}{e^{(T/2)s}}$, expandiendo numerador y denominador de esta expresión en serie de Taylor y tomando solo los términos de primer orden, tendremos:

$$e^{-Ts} \cong \frac{1 - (T/2)s}{1 + (T/2)s}$$

La respuesta de frecuencia para esta aproximación es:

$$\text{Ganancia} = 1 \text{ y } \varphi = \tan^{-1}(-\omega T/2) - \tan^{-1}(\omega T/2) = -\tan^{-1}(\omega T/2) - \tan^{-1}(\omega T/2)$$

$$\phi = -2\tan^{-1}(\omega T/2)$$

la cual también se muestra en la figura 85.

Esta aproximación provee la ganancia correcta, pero la curva de fase coincide con la curva verdadera solo para pequeños valores de (ωT). Sin embargo esta aproximación es *mejor* que las dos anteriores. Para un T dado mientras más chico sea, mayor será el rango de ω para el cual la aproximación es válida.-

La otra aproximación que se estudiará, la cual es en general más usada que las anteriores es, como se dijo, la de Padé de diferentes órdenes:

$$e^{-x} = \lim_{(u+v) \rightarrow \infty} \frac{F_{u,v}(x)}{G_{u,v}(x)} \quad \text{con: } x = T s$$

donde:

$$F_{u,v} = 1 - \frac{vx}{(u+v)} + \frac{v(v-1)x^2}{(u+v)(u+v-1)2!} - \dots + \frac{(-1)^v v(v-1)\dots 2 \times 1 x^v}{(u+v)(u+v-1)\dots(u+1)v!}$$

$$G_{u,v} = 1 + \frac{ux}{v+u} + \frac{u(u-1)x^2}{(v+u)(v+u-1)2!} + \dots + \frac{u(u-1)\dots 2 \times 1 x^u}{(v+u)(v+u-1)\dots(v+1)u!}$$

Para $u = v = 1$, se obtiene la aproximación de *Padé de primer orden*:

$$e^{-Ts} \approx \frac{1 - (T/2)s}{1 + (T/2)s} \equiv \frac{-(s - 2/T)}{(s + 2/T)}$$

la cual es idéntica a la expansión de Taylor ya vista.

Para $u = v = 2$, se obtiene la aproximación de *Padé de segundo orden*:

$$e^{-Ts} \approx \frac{1 - (T/2)s + (T^2/12)s^2}{1 + (T/2)s + (T^2/12)s^2} \equiv \frac{T^2s^2 - 6Ts + 12}{T^2s^2 + 6Ts + 12} \equiv \frac{s^2 - (6/T)s + (12/T^2)}{s^2 + (6/T)s + (12/T^2)}$$

Cuya respuesta de frecuencia es:

Ganancia = 1

$$\text{La fase: } \phi = -2 \tan^{-1} \frac{6\omega T}{12 - (\omega T)^2}$$

El diagrama de Bode de la fase es mostrado en la figura 86.

Notar que el ángulo de fase es correcto hasta $\omega T = 2$ radianes.

Como se ve se produce un considerable mejoramiento sobre las aproximaciones con series de Taylor de la figura 85.

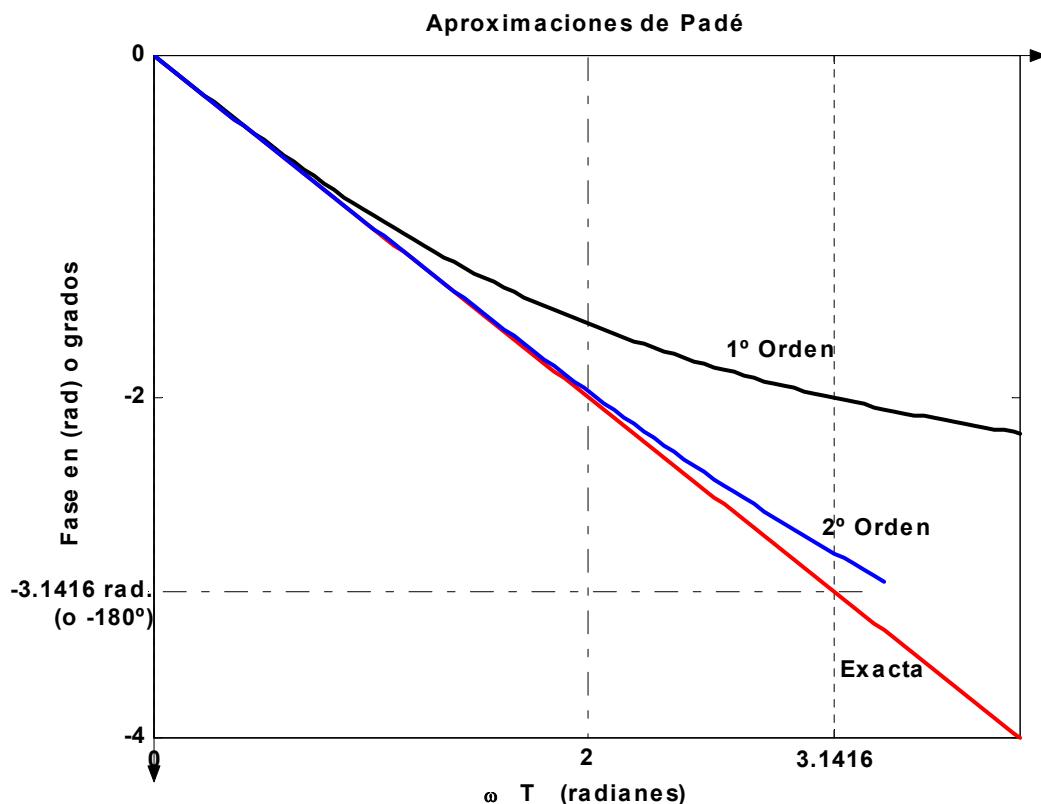


Figura 86

Para la aproximación de *Padé de tercer orden*, se tendrá:

$$e^{-Ts} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{3 \times 2 \times x^2}{6 \times 5 \times 2!} - \frac{3 \times 2 \times 1 \times x^3}{6 \times 5 \times 4 \times 3!}}{G_{uv(x)}} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{120}}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{120}}$$

$$\text{como } x = Ts;$$

$$e^{-Ts} \approx \frac{-\{s^3 - (12/T)s^2 + (60/T^2)s - (120/T^3)\}}{\{s^3 + (12/T)s^2 + (60/T^2)s + (120/T^3)\}}$$

Si por ejemplo $T = 1$ seg., las aproximaciones vistas serían:

- De 1º Orden: $e^{-2s} \approx \frac{-(s-2)}{(s+2)}$
- De 2º Orden: $e^{-2s} \approx \frac{(s^3 - 6s + 12)}{(s^3 + 6s + 12)}$
- De 3º Orden: $e^{-2s} \approx \frac{-(s^3 - 12s^2 + 60s - 120)}{(s^3 + 12s^2 + 60s + 120)}$

Ejemplo 45:

El sistema con realimentación unitaria, $K_s = 1$, ya visto al principio tenía la siguiente función de transferencia del camino directo:

$$G(s) = \frac{K_c e^{-Ts}}{s(s+1)} \text{ Para } T = 1 \text{ seg. , (y llamamos } K_c \text{ a } K^* \text{).-}$$

1. Determinar el rango verdadero de K_c para que el sistema sea estable.
2. Graficar el lugar de las raíces aproximado del sistema, determinando el K_c Límite, w_c , además los polos y ceros del sistema si $K = 5/12$.
3. Graficar la respuesta temporal verdadera del mismo a una entrada escalón unitario, se puede usar Frtool.-
4. Graficar la respuesta temporal aproximada del sistema de control a una entrada escalón unitario.

-
1. Aplicando el criterio de Nyquist, como ya se determinó:
 K_c Límite = 1.1349 y w_c = 0.8603 rad(seg).

2. Con una aproximación de primer orden se tendrá:

$$G(s) = \frac{-K_c(s-2)}{s(s+1)(s+2)}, \text{ el lugar aproximado es el indicado en la figura 87.}$$

- 3) Para graficar la respuesta exacta del sistema a un escalón unitario en la señal de entrada se puede usar el programa Frtool, no es de Matlab, que usa el Matlab 5.3 como base. El procedimiento sería el siguiente:

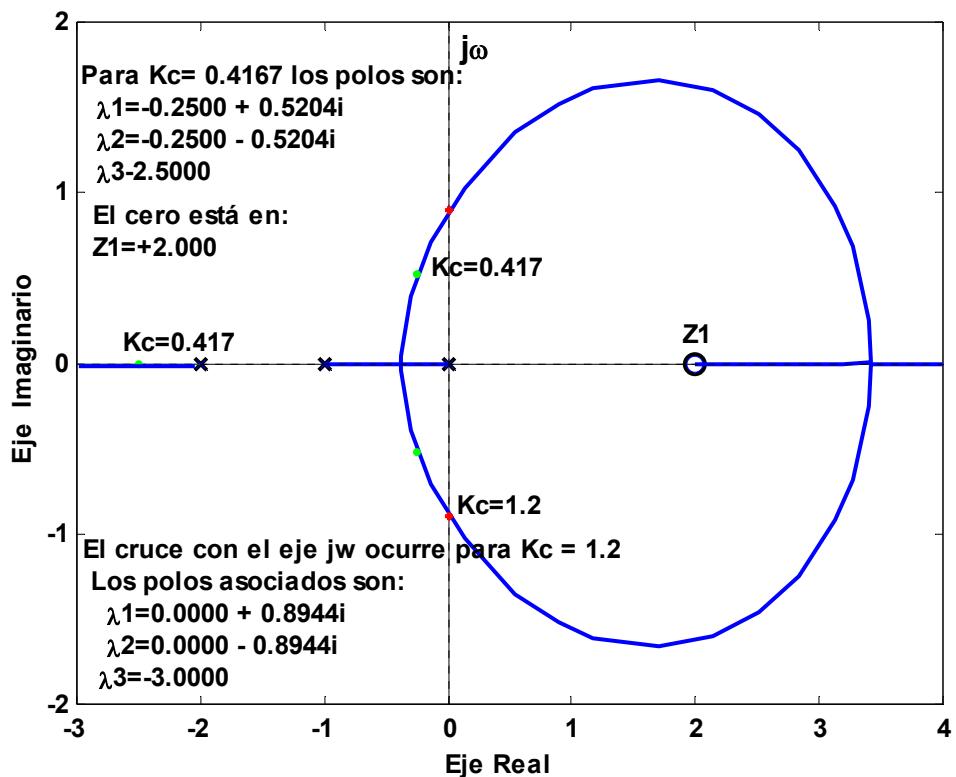


Figura 87

```
» G=tf(5/12,[1 1 0],'inputdelay',1)
```

Transfer function:

$$\frac{0.4167}{\exp(-1*s) * s^2 + s}$$

Llamando a Frtool e importando G y siguiendo correctamente los pasos correspondientes se puede graficar la respuesta pedida.-

4) Para graficar la respuesta aproximada del sistema a un escalón unitario en la señal de entrada se puede usar el programa Pidesign del Csad.

» pidesign

Enter numerator [n] > 5/12

Enter denominator [d] > [1 1 0]

Enter controller type (p,pi,pd,pid,other) [pid] > p

PIDESIGN > k

Enter Kp [1] >

PIDESIGN > I

Time Delay [0] > 1

Enter the order Pade approximation: [3] > 1

PIDESIGN DELAY > T

Choose output variable: Y,E,U [y] >

TFTPLOT > f

Enter desired final time [26.4] > 25

TFTPLOT > p

La respuesta con sus atributos se muestra en la figura 88.

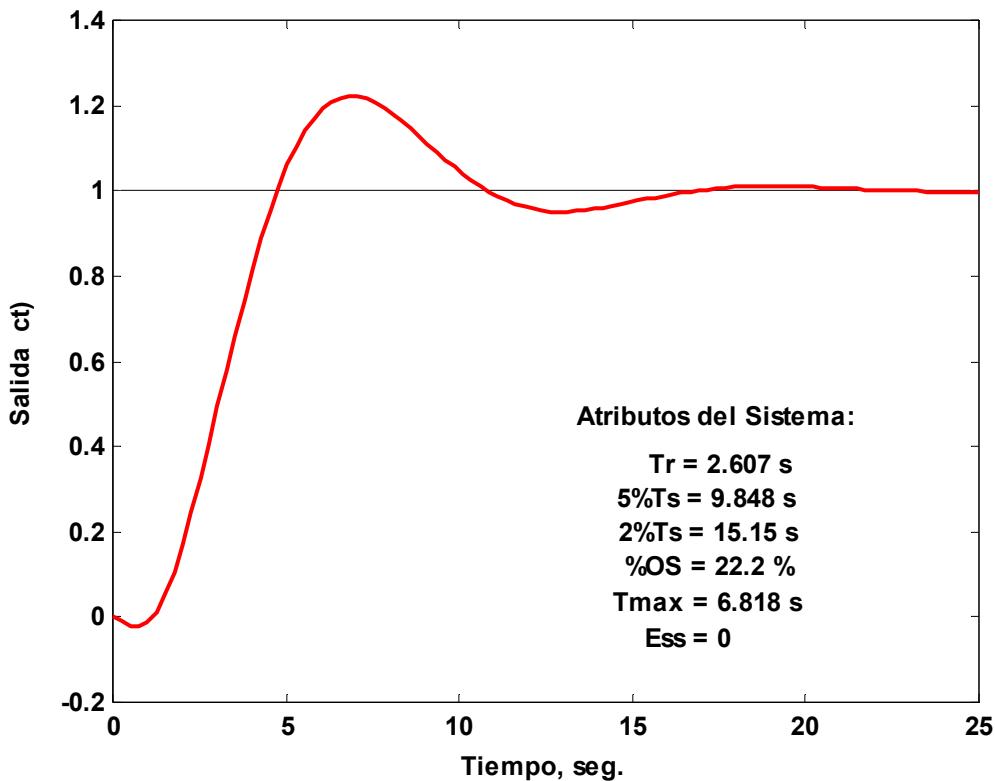


Figura 88

Repetiremos los puntos 2) y 4), con aproximaciones de Padé de 2º y 3º

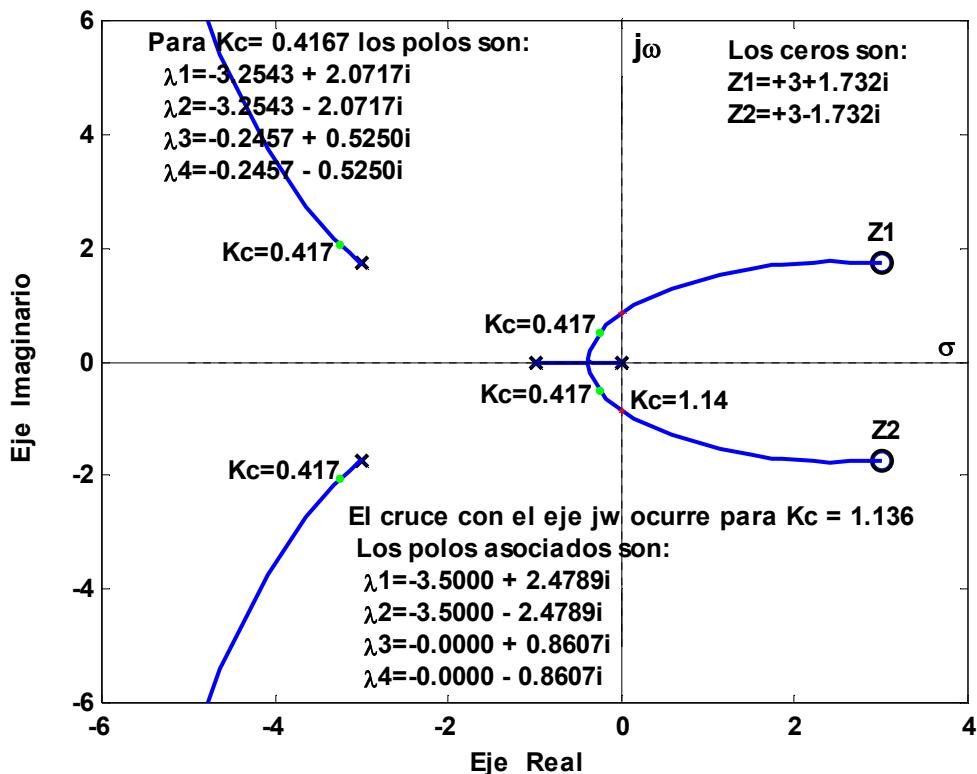


Figura 89

orden.

2) y 4): La función de transferencia del lazo aproximada del sistema para Padé de 2º orden es:

$$G(s) = \frac{Kc(s^2 - 6s + 12)}{s(s+1)(s^2 + 6s + 12)}$$

el L.R. en la figura 89 y la c(t) en la 90.

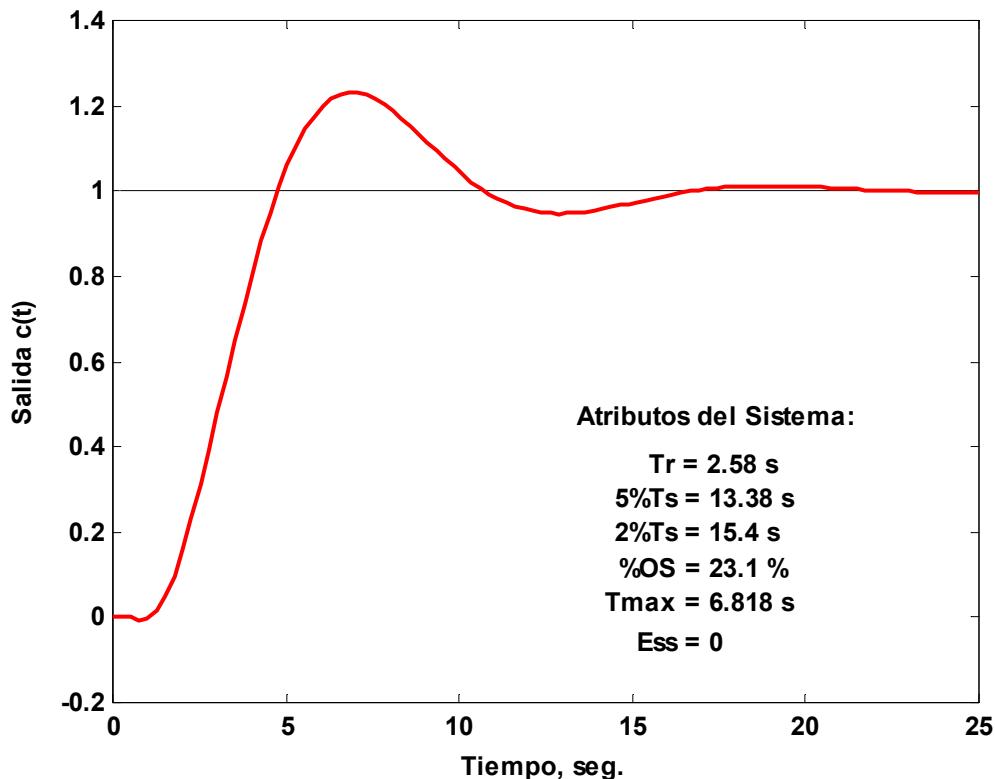


Figura 90

2) y 4) La función de transferencia del lazo aproximada del sistema para Padé de 3º orden será:

$$G(s) = \frac{-Kc(s^3 - 12s^2 + 60s - 120)}{s(s+1)(s^3 + 12s^2 + 60s + 120)}$$

El Lugar de las raíces y la respuesta temporal al escalón unitario en la entrada c(t) se muestran en las figuras 91 y 92 respectivamente.

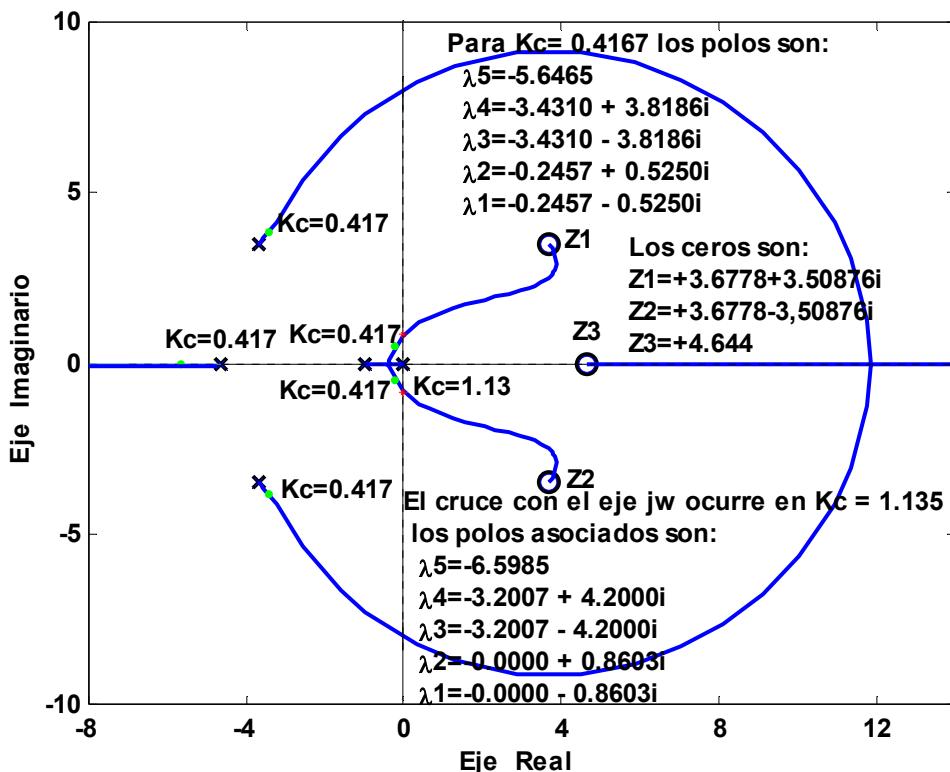


Figura 91

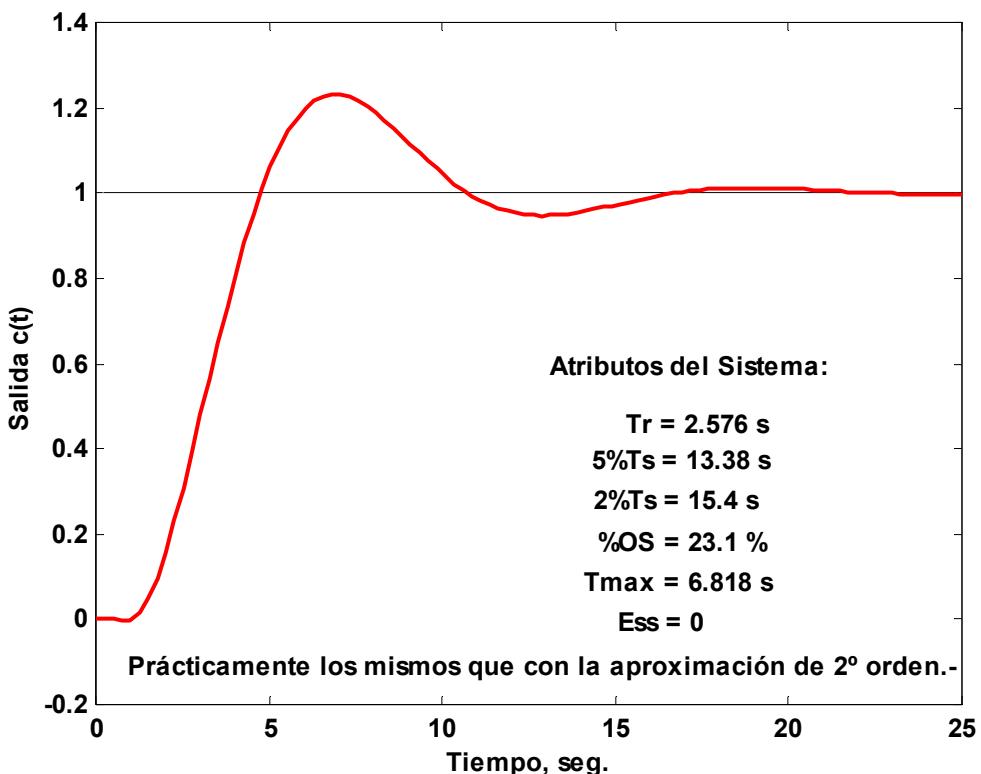


Figura 92

Sensibilidad de las Raíces. Sistemas Robustos

En el diseño de los sistemas de control, no sólo es importante llegar a sistemas que tengan una característica deseada, sino también es importante que el sistema deba ser en lo posible insensible a la variación de algunos parámetros del mismo. Por ejemplo, un sistema que pueda funcionar satisfactoriamente con una cierta ganancia del lazo K, pero si es muy sensible a la variación de K pueda llegar a una región, los polos en el plano s, de funcionamiento indeseable o volverse inestable si K varía solo en una pequeña cantidad. En la terminología formal de los sistemas de control, un sistema que es insensible a la variación de los parámetros del mismo se llama un *Sistema Robusto*. Por tanto, el estudio del lugar geométrico de las raíces de sistemas de control debe involucrar no sólo la forma del lugar geométrico de las raíces con respecto al parámetro variable, K por ejemplo, sino también *como las raíces a lo largo del lugar geométrico se mueven con la variación de parámetro variable*.

Se definirá la *sensibilidad de las raíces de la ecuación característica*, simplemente como la *sensibilidad de las raíces* con respecto a la variación del algún parámetro tal como la ganancia del lazo K. Específicamente la *sensibilidad de las raíces* con respecto a K se define así:

$$S_K \equiv \frac{\Delta s / s}{\Delta K / K} \quad \Rightarrow \quad S_K = \frac{ds / s}{dK / K} = \frac{ds}{dK} \frac{K}{s} \quad \Rightarrow \quad S_K = \frac{1}{dK / ds} \frac{K}{s}$$

En término del lugar de las raíces de la ecuación característica la sensibilidad de las mismas sería, la variación porcentual del cambio de las mismas, a lo largo del lugar, dividida por la variación porcentual del cambio producido en la ganancia del lazo K.

Como se puede apreciar *la sensibilidad de las raíces de los puntos de ruptura es infinita*. Desde el punto de vista de la *sensibilidad de las raíces*, se deberá evitar seleccionar valores de K que operan sobre puntos de ruptura, que como se sabe corresponden a raíces de orden múltiple de la ecuación característica.

La figura 93, muestra el lugar geométrico de las raíces de:

$$s^2(s+1)^2 + K(s+2) = 0$$

El mismo a sido construido con el programa Rlplot del Csad/Matlab.

La ganancia K se incrementa uniformemente en el lugar completo de la manera siguiente:

Para el L. R. D. ($K > 0$), `linspace(0,50,50).-`

Para el L. R. I. ($K < 0$), `linspace(0,-50,50).-`

Cada marca + sobre la gráfica del lugar geométrico de las raíces representa una raíz para un valor de K. Por tanto, se ve que la sensibilidad

de las raíces se incrementa cuando las raíces se aproximan a los puntos de ruptura en $s = 0$, $s = -0.543$, $s = -1$ y $S = -2.457$.

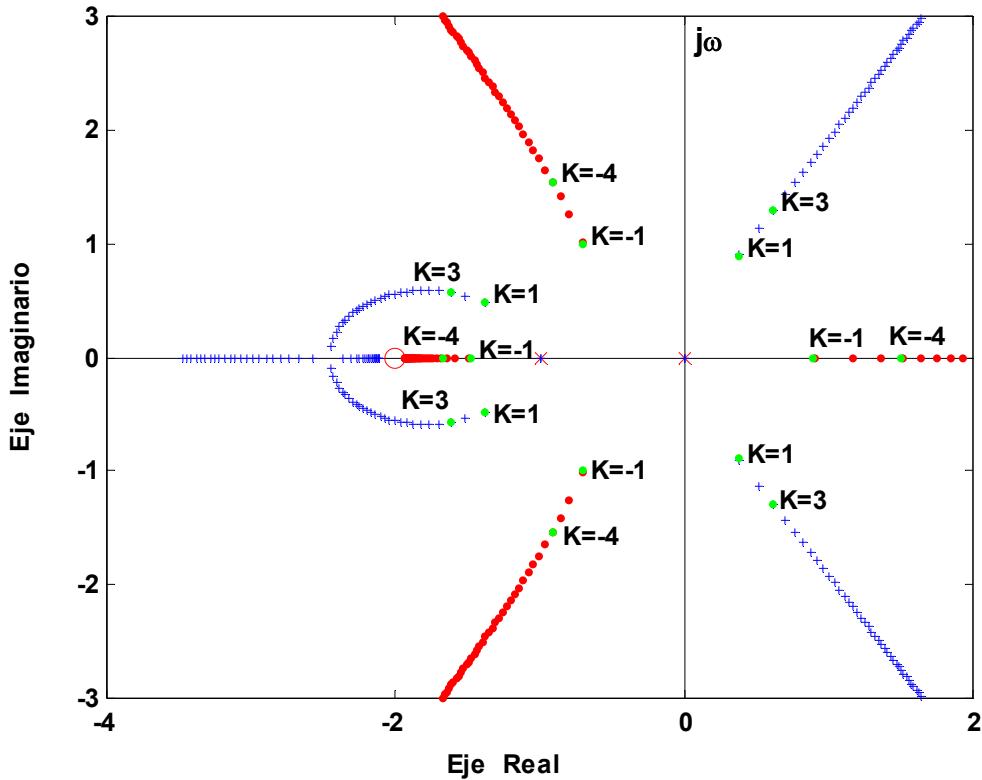


Figura 93

Una expresión analítica de la sensibilidad de las raíces es difícil de obtener para un caso general. Para el sistema de segundo orden que tiene:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

La ecuación característica es: $s(s+1)+K=0$

Por lo tanto:

$$K = -s(s+1) = -(s^2 + s) \quad \text{en consecuencia: } \frac{dK}{ds} = -(2s+1)$$

$$\text{y además: } \frac{K}{s} = -(s+1)$$

La sensibilidad S_K , será:

$$S_K = \frac{K}{s} \frac{1}{dK/ds} = -(s+1) \frac{1}{-(2s+1)} \Rightarrow \boxed{S_K = \frac{(s+1)}{(2s+1)}}$$

En donde $s = \sigma + j\omega$, y s debe tomar valores sobre el lugar geométrico de las raíces. Para las raíces sobre el eje real, $w = 0$, por lo tanto:

$$|S_K|_{\omega=0} = \left| \frac{\sigma+1}{2\sigma+1} \right| \quad (**)$$

En esta expresión se ve que en el punto de ruptura $K = 0.25$, $\sigma = -0.50$, la sensibilidad de las raíces tiende a infinito.-

Cuando las dos raíces son complejas, $\sigma = -0.50$ para todos los valores de ω , por ende:

$$|S_K|_{\sigma=-0.5} = \frac{\sqrt{(0.25 + \omega^2)}}{2\omega}$$

De esta última ecuación es claro que la sensibilidad de las raíces en pares complejos conjugados es la misma, ya que ω aparece solo como ω^2 en la ecuación. La ecuación (**), indica que la sensibilidad de las dos raíces reales son diferentes para un valor dado de la ganancia K. La razón también se puede ver ya que las raíces reales no son simétricas respecto al eje imaginario del plano s.

La tabla siguiente da las magnitudes de la sensibilidad de las dos raíces de la ecuación característica para diferentes valores de K, donde $|S_{K1}|$, denota la sensibilidad de la primera raíz y $|S_{K2}|$ para la segunda raíz. Estos valores indican que aunque las dos raíces reales alcanzan $\sigma = -0.50$ para el mismo valor de $K = 0.25$, y cada raíz viaja la misma distancia desde $s = 0$ y $s = -1$, respectivamente, la sensibilidad de las dos raíces reales no es la misma.-

K	Raíz 1	$ S_{K1} $	Raíz 2	$ S_{K2} $
0	0	1.000	-1.000	0
0.04	-0.042	1.045	-0.958	0.454
0.16	-0.200	1.333	-0.800	0.333
0.24	-0.400	3.000	-0.600	2.000
0.25	-0.500	Infinito	-0.500	Infinito
0.28	-0.5 + j 0.173	1.527	-0.5 - j 0.173	1.527
0.40	-0.5 + j 0.387	0.817	-0.5 - j 0.387	0.817
1.20	-0.5 + 0.975	0.562	-0.5 - j 0.975	0.562
4	-0.5 + j 1.937	0.516	-0.5 - j 1.937	0.516
infinito	-0.5 + j infinito	0.500	-0.5 - j infinito	0.500

CONTROL II

Tema:

Diseño de Controladores
Analógicos con Técnicas del
Control Clásico.
(en el Dominio Temporal).

Prof. Ing. Carlos F. Martín

Año: 2011

Introducción:

Todos los fundamentos y Técnicas de análisis que se han estudiado hasta ahora, llevan al objetivo final que es el diseño de los sistemas de control. Al comenzar con la planta o el proceso a controlar que se muestra en el diagrama de la figura 1, el diseño de los sistemas de control involucra los tres pasos siguientes:



Figura 1: Proceso Controlado

1. Determinar que debe hacer el sistema y como hacerlo, (especificaciones de diseño o de funcionamiento).
2. Determinar la configuración del controlador o compensador, donde él o los controladores del sistema completo *serán ubicados* con respecto al proceso controlado
3. Determinar los *valores de los parámetros* del o los controladores, para alcanzar los objetivos del diseño.

Especificaciones de Funcionamiento o de Diseño:

A menudo se emplean especificaciones de diseño para describir que debe hacer el sistema de control a diseñar y como hacerlo.

Estas especificaciones únicas para cada caso individual y con frecuencia incluyen especificaciones como: estabilidad relativa, precisión de estado estable, (error), respuesta transitoria y a veces algunas características de la respuesta a la frecuencia del sistema.

En algunas aplicaciones puede haber especificaciones adicionales sobre la sensibilidad a variaciones de algunos parámetros, (robustez o rechazo a perturbaciones).-

El diseño se puede realizar en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia. Por ejemplo la precisión en estado estable a menudo se especifica con respecto a una señal de referencia escalón unitario, rampa unitaria o a una señal de referencia parabólica, y el diseño para cumplir ciertos requisitos de los transitorios, o respuestas del sistema, es más convenientes realizarlo generalmente en el dominio del tiempo.

Otras especificaciones como el *sobrepasso máximo, tiempo de Levantamiento y tiempo de establecimiento*, están definidas para una entrada escalón unitaria, y por lo tanto, se emplean en el diseño en el dominio del tiempo.

Se ha aprendido que la estabilidad relativa también se mide en términos del *margen de ganancia, margen de fase y M_R (máximo de resonancia)* y estas son especificaciones típicas del dominio de la frecuencia y deben emplearse junto con herramientas como la traza de Bode, la traza de Nyquist, la traza de ganancia-fase y la Carta de Nichols.

Se sabe que para el sistema prototipo de segundo orden, existen relaciones analíticas simples entre estas especificaciones, en los dominios del tiempo y de la frecuencia. Sin embargo, para sistemas de orden superior, la correlación entre las especificaciones entre los dominios el tiempo y la frecuencia son difíciles de establecer analíticamente.

Como se señaló anteriormente, el análisis y diseño de sistemas de control no es más que un ejercicio de selección entre varios métodos alternativos para resolver el mismo problema. Por lo tanto la selección de si el diseño se debe realizar en el dominio del tiempo o de la frecuencia depende de la preferencia del diseñador.

Sin embargo, se debe señalar que, en la mayoría de los casos, las especificaciones en el dominio del tiempo tales como: *sobrepasso máximo, tiempo de levantamiento y tiempo de establecimiento* se emplean normalmente como la medida final del desempeño del sistema.

Para un diseñador sin experiencia, es difícil comprender la conexión física entre las especificaciones en el dominio de la frecuencia tales como márgenes de ganancia, de fase y pico de resonancia, con el desempeño real del sistema. Por ejemplo: ¿Un MG= 20dB, garantiza un sobrepasso máximo menor del 10%?

Para un diseñador tiene más sentido especificar, por ejemplo, un sobrepasso máximo menor al 10% y un tiempo de establecimiento menor que 0.1 segundos.

Es menos obvio que, por ejemplo, un MF=60º y un $M_R < 1.1$ lleven al desempeño correcto del sistema.

Los comentarios siguientes pueden clasificar y explicar las razones para emplear las especificaciones en el dominio temporal *contra* las especificaciones en el dominio de la frecuencia.

1º) Históricamente, el diseño de sistemas de control lineal fue desarrollado con una gran cantidad de herramientas gráficas tales como las trazas de Bode, la traza de Nyquist, la traza de ganancia-fase y la carta de Nichols, que se realizan en el dominio de la frecuencia. Las ventajas de estas herramientas es que se pueden bosquejar mediante métodos aproximados

sin realizar una gráfica detallada. En consecuencia, el diseñador puede realizar diseños empleando especificaciones en el dominio de la frecuencia tales como margen de ganancia, margen de fase, M_R , etc.

Los sistemas de orden superior no presentan mayores problemas. Para ciertos tipos de controladores, existen procedimientos de diseño en la frecuencia que reducen el esfuerzo de prueba y error a un mínimo.

2º) El diseño en el dominio del tiempo que emplea especificaciones de diseño tales como *tiempo de levantamiento*, *tiempo de retardo*, *tiempo de establecimiento*, *sobrepasso máximo*, etc. es factible analíticamente solo para sistemas de segundo orden o sistemas que se puedan aproximar mediante sistemas de segundo orden. Los procedimientos generales de diseño que emplean especificaciones en el dominio del tiempo son difíciles de establecer para sistemas de orden superior al segundo.

El desarrollo y la disponibilidad de programas de computadora, poderosos y sencillos, han cambiado rápidamente la práctica del diseño de sistemas de control que hasta hace poco había estado dictado por el desarrollo histórico. Con herramientas de software modernas, el diseñador puede probar, en unos pocos minutos un gran número de diseños empleando especificaciones en el dominio del tiempo. Esto disminuye considerablemente la ventaja histórica del diseño en el dominio de la frecuencia, el cual está basado en la conveniencia de realizar el diseño gráfico en forma manual. Además, generalmente es difícil, excepto para el diseñador experimentado, seleccionar un conjunto coherente de especificaciones en el dominio de la frecuencia que correspondan a requisitos de desempeño en el dominio del tiempo.

Por ejemplo, especificar un margen de fase de 60° tendrá sentido si se sabe que corresponde a un cierto sobrepasso máximo. En general, para controlar el sobrepasso máximo, se tiene que especificar al menos el margen de fase y el máximo de resonancia M_r .

Eventualmente, el establecer un conjunto coherente de especificaciones en el dominio de la frecuencia se convierte en un proceso de prueba y error que precede al diseño real, el cual, a menudo, también es un esfuerzo de prueba y error. Si embargo, los métodos en el dominio de la frecuencia aún son valiosos al interpretarse el rechazo al ruido y propiedades de sensibilidad del sistema, y la mayoría de ellos ofrecen otra perspectiva al proceso de diseño.

Por lo anterior, en esta unidad, las técnicas de diseño en los dominios del tiempo y de la frecuencia son tratadas de manera estrecha, para que se pueda realizar una comparación y una referencia cruzada entre los métodos alternativos.

Configuraciones de los Controladores

El objetivo de diseño es que las variables controladas, representadas por la variable de salida $c(t)$, se comporten en cierta forma deseada. El problema esencialmente involucra el determinar la señal de control $u(t)$ dentro de un intervalo prescrito para que todos los objetivos de diseño sean satisfechos. La mayoría de los métodos de diseño de sistemas de control convencionales se basan en el *diseño de una configuración fija*, en el que en un principio el diseñador decide la configuración básica del sistema diseñado completo y el o los lugares donde el o los controladores estarán ubicados e relación con el proceso o planta a controlar. Entonces, el problema involucra el diseño de los parámetros de los controladores. Debido a que la mayoría de los esfuerzos de control involucran la modificación o compensación de las características de desempeño del sistema básico, el diseño general que emplea una configuración fija también es llamado *compensación*.

La figura 2, ilustra varias configuraciones comúnmente empleadas en la práctica, las cuales se describen brevemente a continuación:

- Compensación Serie o en Cascada

La figura 2(a) muestra la configuración del sistema comúnmente más empleada, con el controlador colocado en serie con el proceso controlado, y la configuración es llamada *compensación en serie o en cascada*. -

- Compensación mediante Realimentación

En la figura 2(b) el controlador está colocado en un lazo interno de realimentación y el esquema es llamado, *compensación mediante realimentación*. -

- Compensación Mediante la Realimentación de los Estados

La figura 2(c) muestra un sistema que genera la señal de control $u(t)$, mediante la realimentación de las llamadas variables de estado a través de ganancias constantes reales, (los elementos de la matriz de realimentación K), y el esquema se conoce como *realimentación de los estados*. -

El problema con este control es que para sistemas de orden superior, el gran número de variables de estado involucradas requeriría una gran cantidad de transductores para detectar las variables de estado para la realimentación. Por tanto, esto sería muy costoso y algunos casos impráctico. Aun para sistemas de bajo orden, a menudo no todas las variables de estado son asequibles directamente, y puede ser necesario crear un *observador o estimador* que estime a las mismas a partir de la

acción de control y las mediciones de las variables de salida. Esto será estudiado con más profundidad al final del curso.-

Los esquemas de compensación mostrados en las Figs. 2(a), (b) y (c) tienen *un grado* de libertad ya que solo hay un controlador en cada sistema, aún cuando el controlador pueda tener más de un parámetro que pueda variar. La desventaja con un controlador de un grado de libertad es que las especificaciones de funcionamiento que pueden conseguirse están algo limitadas. Por ejemplo, si un sistema es diseñado para alcanzar un cierto grado de estabilidad relativa, puede tener alta sensibilidad a las variaciones de los parámetros del sistema. O si las raíces de la ecuación característica se seleccionan para proporcionar una cierta cantidad de amortiguamiento relativo, el sobrepaso máximo de la respuesta al escalón puede ser excesivo, debido a los ceros de la función de transferencia de lazo cerrado del sistema. Los esquemas de compensación mostrados en las Figs. 2(d), (e) y (f) tienen dos grados de libertad, (dos controladores).-

- Compensación Serie – Realimentada

La figura 2(d), muestra la compensación serie-realimentada para la cual se emplea un controlador en serie y otro en la realimentación interna.

- Compensación Directa-Serie:

En la figura 2(e), un controlador se coloca en serie con en el sistema en lazo cerrado, que tiene un controlador en serie $G_c(s)$ en la trayectoria directa. Los polos y ceros de $G_{cf}(s)$ se pueden usar para mover o cancelar los ceros y polos del sistema con la $G_c(s)$ solamente.

- Compensación en Realimentación-Serie

En la figura 2(f) el controlador llamado prealimentado está conectado en paralelo con la trayectoria directa, más otro en serie con la misma. La clave de la compensación prealimentada es que el controlador $G_{cf}(s)$ no está en el lazo del sistema, por lo tanto no afecta a las raíces de la ecuación característica del sistema obtenida con el controlador serie solo.

Uno de los controladores más ampliamente usados en estos esquemas de compensación es el controlador PID, el cual aplica una señal de proceso que es una combinación proporcional, integral y derivativa de la señal de error.

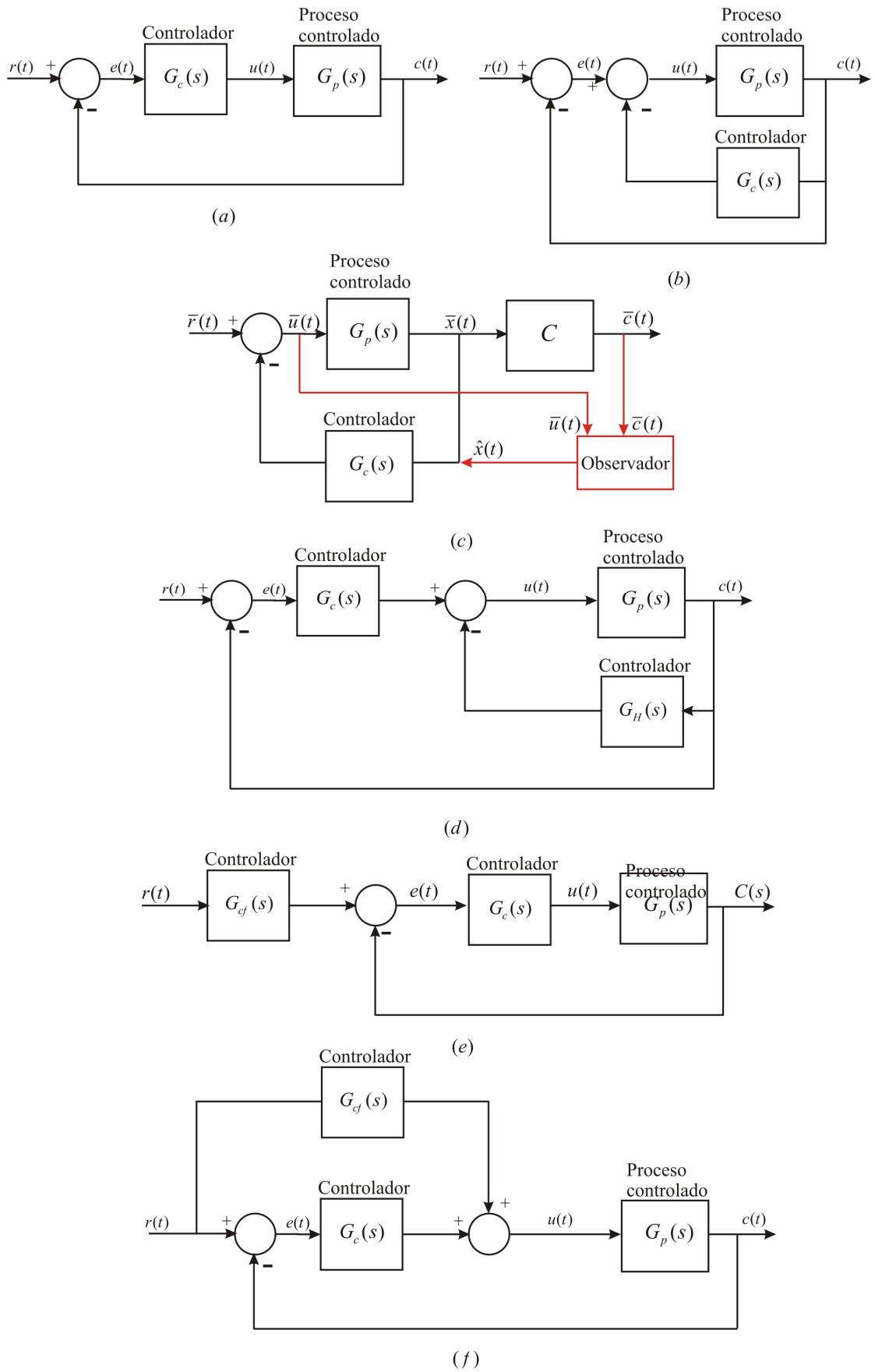


Figura 2

Debido a que estos componentes de la señal de control se pueden realizar y visualizar con facilidad en el dominio del tiempo, los controladores PID se diseñan comúnmente empleando métodos en el dominio del tiempo.

Además de los controladores tipo PID los controladores de Atraso, Adelanto, Adelanto-Atraso y de muesca también se emplean frecuentemente. Los nombres de estos controladores provienen de sus respectivas características en el dominio de la frecuencia. Como resultado, estos controladores se diseñan a menudo empleando conceptos del dominio de la frecuencia.

No obstante, estas tendencias de diseño, todos los diseños de sistemas de control se benefician al observar los diseños resultantes desde ambos puntos de vista, en los dominios de la frecuencia y del tiempo.

Por ende ambos métodos se emplean ampliamente en ésta unidad.

Se debe señalar que la lista de esquemas de compensación no es exhaustiva, pero si los mas comúnmente empleados.

Principios Fundamentales de Diseño.

Después que se ha escogido una configuración y el/los tipo/s de los controladores, el diseñador deberá satisfacer todos las especificaciones de diseño con una buena elección de los parámetros de los controladores.

Los tipos de controladores disponibles para el diseño de sistemas de control están limitados solo por la imaginación. Los ingenieros prácticos normalmente establecen que uno debe elegir el controlador *más simple* que cumpla con todas las especificaciones de diseño. En la mayoría de los casos, mientras más complejo sea un controlador, es más costoso, menos confiable y más difícil de diseñar. El elegir un controlador determinado para una aplicación específica se basa a menudo en la experiencia del diseñador y algunas veces en la intuición e involucra inevitablemente tanto *arte* como *ciencia*. Como resultado, el alumno como novato puede encontrar difícil, al principio, realizar una selección inteligente de controladores con cierta confianza. Al entender que la confianza se adquiere solo a través de la experiencia, esta unidad de aprendizaje provee experiencias guiadas que ilustran los elementos básicos del diseño de sistemas de control.

Una vez elegido el controlador, la tarea siguiente es determinar como se dijeron los valores de los parámetros del mismo. Estos parámetros son generalmente coeficientes de los polinomios de una o mas funciones de transferencia de las cuales se compone el controlador diseñado.

El enfoque básico del diseño es emplear las herramientas de análisis ya discutidas en las unidades anteriores para determinar de que manera los valores de los parámetros individuales afectan las especificaciones de diseño y finalmente desempeño del sistema.

Con base en ésta información se determinan los valores de los parámetros del controlador para que se cumplan todas las especificaciones de diseño. Mientras algunas veces éste proceso es directo, generalmente no lo es pues involucra muchas iteraciones de diseño, ya que normalmente los parámetros del controlador interactúan unos con otros y afectan las especificaciones de funcionamiento en forma conflictiva. Por ejemplo, el valor de un parámetro en particular se puede seleccionar para que el sobrepaso máximo sea satisfecho, pero en el proceso de variar el valor de otro parámetro en un intento por cumplir el requisito del tiempo de establecimiento o de subida, la especificación de sobrepaso máximo, puede ya no cumplirse!. Es claro que mientras mas especificaciones de funcionamiento y mas parámetros haya, el proceso de diseño se volverá mas complicado.

Al realizar el diseño ya sea en el dominio del tiempo o de la frecuencia, es importante establecer algunas guías básicas o reglas de diseño.

Se debe tener en mente que el diseño en el dominio del tiempo normalmente se basa fuertemente en el plano complejo s y en el lugar geométrico de las raíces o el contorno de las raíces.

El diseño en el dominio de la frecuencia está basado en la manipulación de la ganancia y de la fase de la función de transferencia del lazo para que se cumplan las especificaciones del sistema en lazo cerrado.

En general es útil resumir las características en el dominio de la frecuencia y del tiempo para que se puedan emplear como guías en el proceso de diseño, las mismas son las siguientes:

- Los polos complejos conjugados de la función de transferencia del sistema $M(s)$, producen una respuesta al escalón unitario que es sub-amortiguada. Si todos los polos son reales (sin ceros), la respuesta al escalón unitario es sobre amortiguada. Sin embargo, los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado pueden causar un sobrepaso aun si todos los polos son reales (cero dominante).
- La respuesta de un sistema está dominada por aquellos polos más cercanos al origen del plano s. Los transitorios debido a los polos a la izquierda del plano s decaen rápidamente.
- Mientras más alejados a la izquierda en el plano s estén los polos dominantes el sistema, el mismo responderá más rápido y mayor será el ancho de banda.
- Mientras más alejados a la izquierda en el plano s estén los polos dominantes el sistema, mas grandes serán sus señales internas (mas caro). Aunque esto se puede justificar en forma analítica, es obvio que golpear más fuerte un clavo con un martillo hará que el

clavo entre más rápido pero requiere mas energía por golpe. En forma similar, un auto de carreras puede acelerar más rápido pero emplea más combustible que un auto común.

- Cuando un polo y un cero de una función de transferencia se acercan entre si, la porción de la respuesta del sistema asociada con el polo tendrá una magnitud, (residuo), más chica.
- Las especificaciones en el dominio del tiempo y la frecuencia están asociadas en general *vagamente*. El tiempo de subida y el ancho de banda son inversamente proporcionales. El MF, el MG, el M_r y el amortiguamiento son inversamente proporcionales.

Es muy probable que un conjunto de especificaciones de diseño no puedan ser alcanzadas por un sistema físicamente realizable (debido a la inconsistencia ya mencionada). Por contrapartida, y esto explica la popularidad de esta técnica, si el conjunto de especificaciones de funcionamiento es consistente, ningún otro método dará una solución aceptable con menor esfuerzo analítico.

La figura 3 es una representación en diagrama de flujo de este método de diseño por prueba y error.

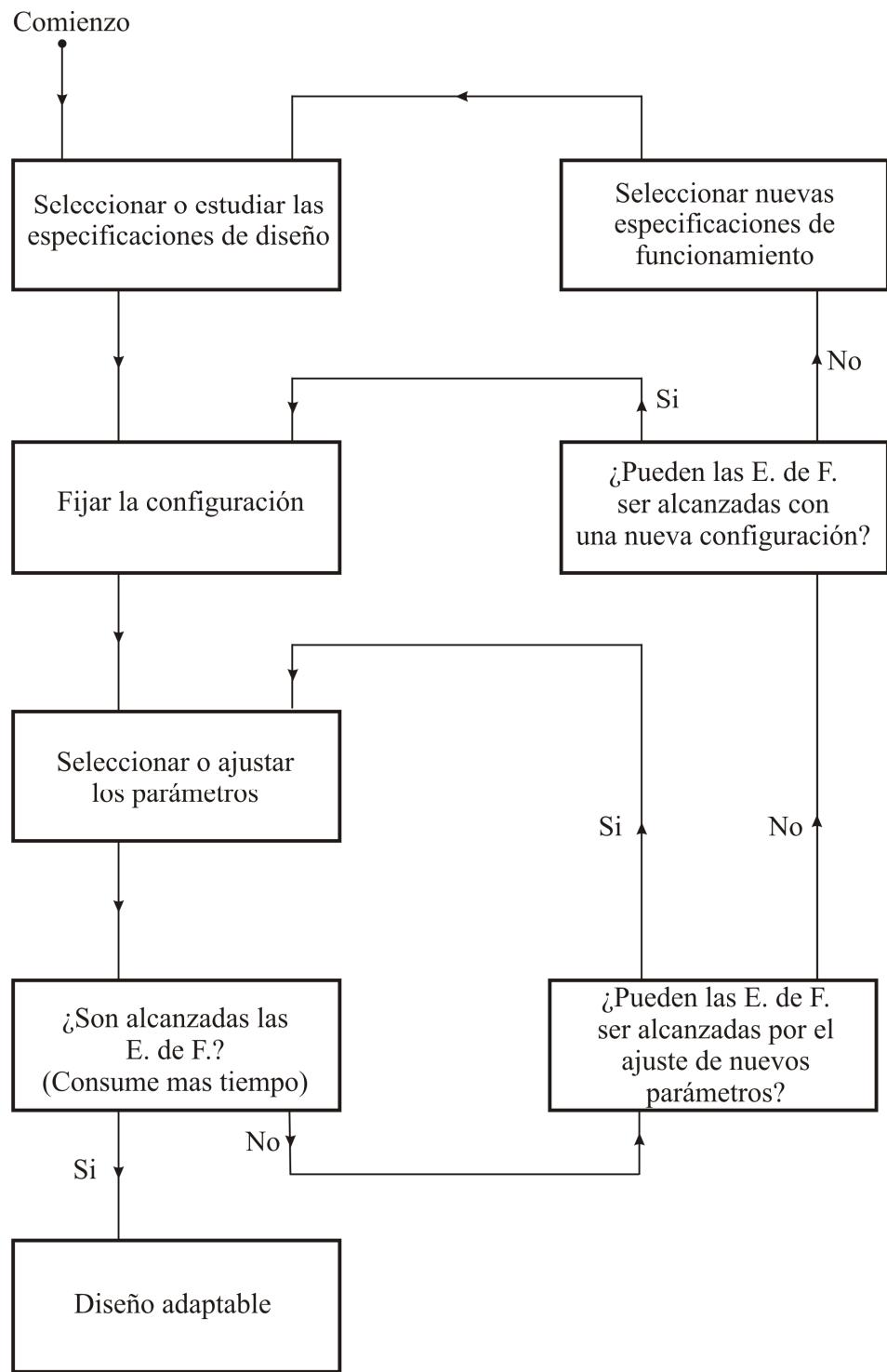


Figura 3: Diagrama de Flujo del método de diseño por prueba y error.

Se intentará en lo que sigue, por lo general, pero no siempre, realizar diseños en donde se pueda llegar a una configuración de polos y ceros del sistema diseñado que presente un par de polos complejos conjugados dominantes, por ende se podrán hacer en forma analítica.- En otra publicación se empleara la computadora para el diseño de sistemas en general, no necesariamente con un par de polos complejos conjugados dominantes.-

Especificaciones de Diseño:

Si el sistema diseñado, tiene un par de polos complejos conjugados dominantes, su dinámica se asemeja a la de un típico sistema de 2^{do} orden. Para el mismo la respuesta a un escalón es la indicada en la figura 4.

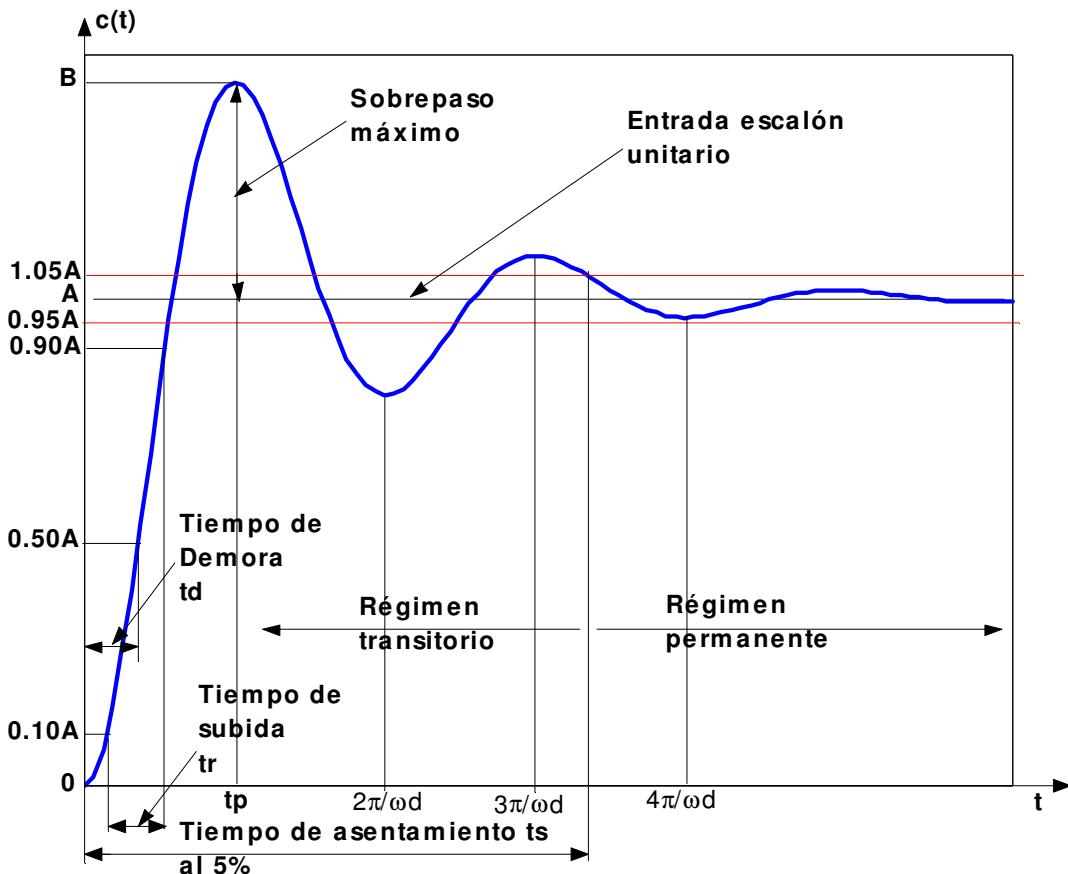


Figura 4

Las fórmulas útiles son las siguientes:

$$0 < \delta < 0.707 \begin{cases} Mr = \frac{I}{2\delta\sqrt{I-\delta^2}} \Rightarrow \text{Pico de Resonancia} \\ \omega_r = \omega_n \sqrt{I-2\delta^2} \Rightarrow \text{Frecuencia de Resonancia} \end{cases}$$

$$O \quad \delta = \sqrt{\frac{(\ln M_{pu})^2}{\pi^2 + (\ln M_{pu})^2}}$$

Sobre elongación:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\omega}{\sqrt{I-\delta^2}}} \cdot 100[\%] = e^{\frac{-\pi\sigma}{\omega_d}} \cdot 100[\%] = e^{-\pi \cot \theta} \cdot 100[\%] = \frac{B-A}{A} \cdot 100[\%]$$

Tiempo de Subida:

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

Tiempo de Pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Tiempo de Establecimiento:

$$t_s(5\%) \cong \frac{\pi}{\delta \sigma_n} = \frac{\pi}{|\sigma|} \Rightarrow \text{Para } \delta \leq 0.707 \quad \text{y} \quad t_s(5\%) \cong \frac{4.5\delta}{\sigma_n} = \frac{4.5\delta^2}{|\sigma|} \Rightarrow \text{Para } \delta > 0.707$$

$$t_s(2\%) \cong \frac{4}{\delta \sigma_n} = \frac{4}{|\sigma|} \Rightarrow \text{Para todos los coeficientes } \delta \leq 0.80.$$

Tiempo de Retardo o de Demora:

$$t_d \cong \frac{I + \frac{\delta}{\sqrt{2}}}{\sigma_n}$$

En los procesos de diseño, especificado M_p (%), se elegirá el coeficiente δ . Solicitado un máximo t_s , se determinara por ejemplo σ , del par complejo conjugado dominante. Si se especifica el tiempo de pico, se elegirá σ_d .

De esta forma quedara delimitada la zona del plano complejo s donde se cumplen las especificaciones solicitadas si el par de polos complejos conjugados dominantes están en ella, esto se muestra en la figura 5.

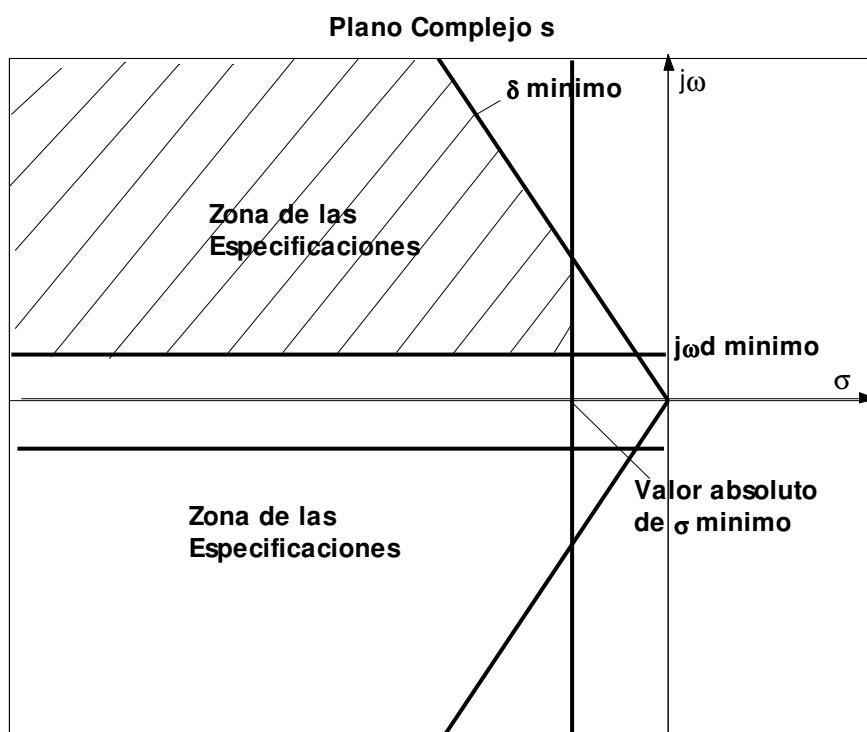


Figura 5:

Obtención en Forma Analítica de los Atributos de la Respuesta Temporal Para diseños de sistemas de orden elevado pero con un par de polos complejos conjugados dominantes.

De tal forma que la respuesta a una entrada escalón sea la indicada en la figura 4. En estos casos la contribución al régimen transitorio de los otros

polos deberá ser pequeña. Las condiciones necesarias para que la respuesta temporal esté dominada por un par de polos complejos requieren una distribución cero-polo, como la de la figura 6 y tener las siguientes características:

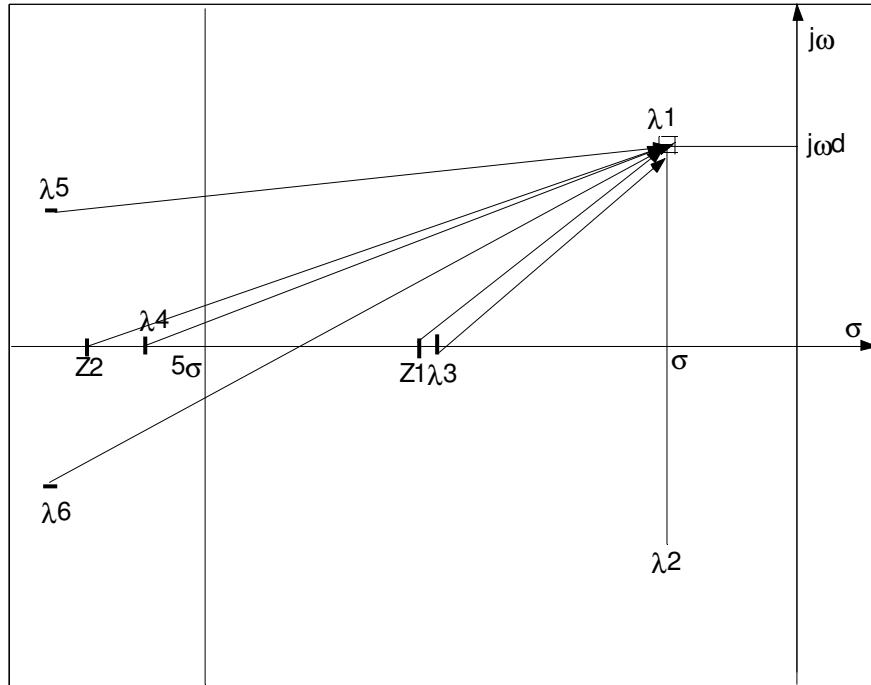


Figura 6

1. Los otros polos deben estar alejados y a la izquierda de los polos dominantes de manera que los transitorios debidos a ellos sean de *pequeña amplitud* y se extingan rápidamente.-
2. Cualquier otro polo que no esté alejado a la izquierda de los polos complejos dominantes *debe estar próximo a un cero* de manera que la magnitud del término transitorio originado por tal polo sea pequeña.-

Cumpliéndose estas condiciones las expresiones que se empleen más adelante serán de mucha aplicación en el chequeo de las especificaciones dadas en un diseño.

La función de transferencia del sistema diseñado se puede colocar:

$$M(s) = \frac{K_1 \prod_{i=1}^m (s - Z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - \lambda_j)}$$

Para una entrada escalón se puede demostrar que con lo supuesto se puede despreciar los términos transitorios debidos a los otros polos no así el efecto que ellos producen en la determinación de los residuos de los polos dominantes. El tiempo de pico T_p , se podrá obtener con la expresión aproximada siguiente:

$$T_p \cong \frac{1}{\omega_d} \left[90^\circ - \sum_{i=1}^m \angle(\lambda_i - Z_i) + \sum_{j=2}^n \angle(\lambda_j - \lambda_j) \right] \frac{\pi}{180^\circ} ; \text{ en segundos. -}$$

- Como se puede apreciar el T_p disminuye con la presencia de ceros de $M(s)$, mientras aumenta con los polos de la misma.-
- El T_p también puede disminuir desplazando los ceros hacia la derecha o los polos no dominantes hacia la izquierda.-

Si no hay ceros:

$$\left[\sum_{i=1}^m \angle(\lambda_i - Z_i) \right] = 0^\circ$$

Para un sistema típico de segundo orden, se tendrá:

$$T_p = \frac{1}{\omega_d} [90^\circ + 90^\circ] \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow T_p = \frac{\pi}{\omega_d}; \text{ seg. -}$$

Para un sistema de segundo orden con un cero en $Z = \sigma$, se tiene;

$$T_p = \frac{1}{\omega_d} [90^\circ - 90^\circ + 90^\circ] \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow T_p = \frac{\pi}{2\omega_d} \text{ en seg.}$$

Por lo tanto es la mitad que la del típico.-

Por ejemplo si $\delta = 0.707$, será: $|\sigma| = \omega_d$, en consecuencia:

$$Tp(\text{típico}) = \pi = 3.1416 \text{ seg}$$

$$Tp(\text{no típico}) = \pi/2 = 1.5708 \text{ seg}$$

Además se puede demostrar que la sobre elongación porcentual sería:

$$Mp(\%) \cong \frac{\left| \prod_{j=3}^n (-\lambda_j) \right|}{\left| \prod_{j=3}^n (\lambda_j - \lambda_j) \right|} \times \frac{\left| \prod_{i=1}^m (\lambda_i - Z_i) \right|}{\left| \prod_{i=1}^m (-Z_i) \right|} \times e^{\sigma T_p} \times 100$$

Para un sistema típico de segundo orden: $Mp(\%) = e^{\sigma T_p} \times 100$

Expresión que muestra que cuando mayor sea el valor de T_p , menor es el valor de M_p debido a que $e^{\sigma T_p}$ disminuye, (pues $\sigma < 0$).-

Como $\sigma = -\delta \omega_n$ y $T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$, se obtiene como ya se sabe:

$$Mp(\%) = e^{\frac{-\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

Para un sistema Típico de segundo orden, si $\delta = 0.707$:

$$Mp(\%) = 4.32\%$$

Si el sistema tiene un cero en $Z = \sigma$ y $|\sigma| = \omega_d = 1$, será:

$$Mp(\%) = e^{-T_p} \times 100 = e^{-\pi/2} \times 100 = 20.80\%$$

Si el cero está en -0.50: $Mp(\%) = 73.9\%$

Si el cero está en -0.20: $M_p(\%) = 261.36\%$

Veremos primero *tres ejemplos introductorios* de Diseño, para una planta.-

Ejemplo 1:

Sea el sistema de control indicado en la figura 7.-

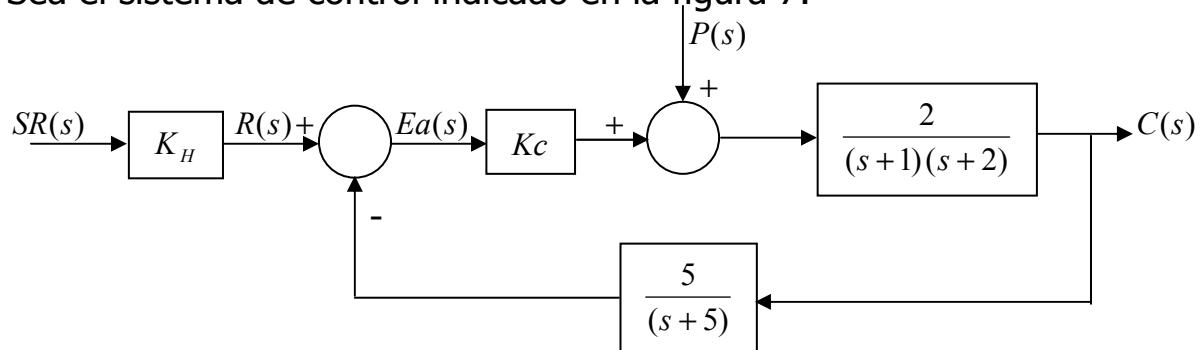


Figura 7:

Se desea que el tiempo de establecimiento al 2% sea aproximadamente de 4 segundos.

1. Determinar: σ , λ_3 , ω_d y K_c .
 2. Si se puede T_p y $M_p(\%)$.
- La figura 8 muestra el lugar de las raíces del sistema.-

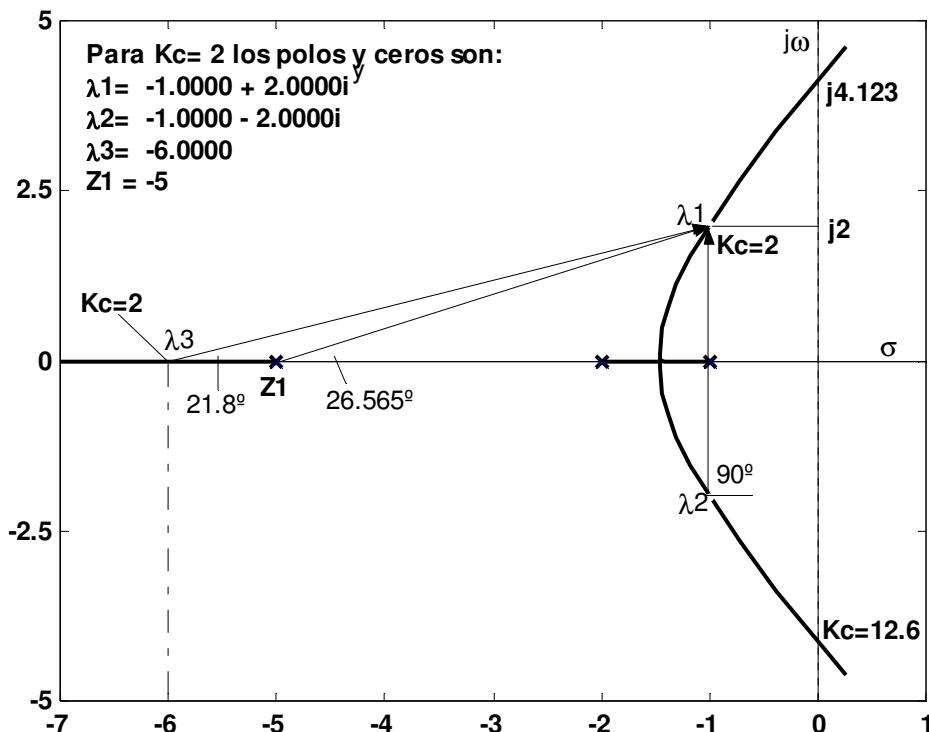


Figura 8

La parte real del par de polos dominantes deberá ser:

$$t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \approx 4 \text{ seg.} \Rightarrow |\sigma| \approx 1, \text{ se tomará: } \underline{\sigma = -1.00}$$

El tercer polo estará en:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_{n-1} = -8 \Rightarrow 2\sigma + \lambda_3 = -8 \Rightarrow \underline{\lambda_3 = -6}$$

La ganancia del controlador proporcional será:

$$K = 10K_c = 1 \times 4 \times 5 = 20 \Rightarrow K_c = 2.00$$

La parte imaginaria de los polos complejos es en consecuencia:

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = (-1)^3 a_o = -(10 + 10K_c) = -30$$

$$(\sigma^2 + \omega_d^2)\lambda_3 = -30 \Rightarrow \omega_d = \sqrt{\frac{-30}{-6} - (-1)^2} \Rightarrow \omega_d = 2.00$$

Por ende la configuración de polos y ceros será:

$$K_c = 2 \begin{cases} \lambda_{1-2} = -1 \pm j2 \\ \lambda_3 = -6 \\ Z_1 = -5 \end{cases}$$

Como se puede ver los polos complejos son DOMINANTES:

Los tiempos de establecimientos aproximados serán:

$$\delta = \cos(\tan^{-1} 2) = 0.447; \text{ Menor que } 0.69.-$$

$$t_E(5\%) \cong \frac{3}{|\sigma|} \Rightarrow t_E(5\%) \cong 3 \text{ seg},$$

$$t_E(2\%) \cong \frac{4}{|\sigma|} \Rightarrow t_E(2\%) \cong 4 \text{ seg},$$

El tiempo de pico es:

$$T_p \cong \frac{1}{2} [90^\circ - \tan^{-1}(2/4) + (90^\circ + \tan^{-1}(2/5))] \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow T_p \cong 1.534 \text{ seg. -}$$

La sobre elongación porcentual:

$$Mp(\%) \cong \frac{|(-\lambda_3)|}{|(\lambda_1 - \lambda_3)|} \times \frac{|(\lambda_1 - Z_1)|}{|(-Z_1)|} \times e^{\sigma T_p} \times 100 = \frac{6}{\sqrt{29}} \times \frac{\sqrt{20}}{5} \times e^{-1 \times 1.53} \times 100$$

$$\underline{Mp(\%) \cong 21.578\%}$$

El error de estado estable para señales de referencia escalones unitarios se puede determinar de la siguiente manera:

Como $K_H=1$, la $G_{equiv}(s)$ será:

$$G_{equiv}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)[H(s) - 1]}, \text{ reemplazando se llega:}$$

$$G_{equiv}(s) = \frac{4(s+5)}{s^3 + 8s^2 + 135s + 10} \Rightarrow K_p = 2$$

En consecuencia el error al escalón será:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} \Rightarrow e(\infty) = 1/3$$

O también:

$$M'(s) = M(s) = \frac{C(s)}{SR(s)} = \frac{4(s+5)}{(s+6)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{4s + 20}{s^3 + 8s^2 + 17s + 30}$$

$$e(\infty) = \frac{\alpha_o - b_o}{\alpha_o} = \frac{30 - 20}{30} = \frac{1}{3} \Rightarrow e(\infty) = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 2:

Para el mismo sistema del ejemplo 1, si se desea bajar el Mp (%), por ejemplo que $M_p (\%) < 5.5\%$, y también el tiempo de establecimiento al 2(%) a la mitad aproximadamente, $T_E (2\%) \approx 2$ segundos.

Evidentemente el controlador deberá ser otro, por ejemplo se elegirá uno con un polo y un cero cuya función de transferencia sea:

$G_c(s) = \frac{A(s + Z_c)}{(s + P_c)}$, el cero deberá estar más cerca del origen que el polo así

predominara el efecto estabilizador del mismo. Este tipo de controlador se denomina de adelanto de fase. Por simplicidad se puede elegir en -2 para que cancele el polo de la planta, por ende quedará:

$G_c(s) = \frac{A(s + 2)}{(s + P_c)}$, Habrá que determinar los parámetros P_c y A .

Se intentará ubicar un par de polos complejos conjugados, λ_{1-2} , para que sean dominantes y cumplan las especificaciones pedidas. Los mismos deben estar ubicados en:

$$t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 2 \text{ seg} \Rightarrow |\sigma| \geq 2, \text{ se puede elegir } \underline{\sigma = -2}$$

$$M_p(\%) \leq 5.5 \Rightarrow \delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0.055)^2}{\pi^2 + (\ln 0.055)^2}} \Rightarrow \delta \geq 0.678, \text{ se elegirá: } \underline{\delta = 0.707}$$

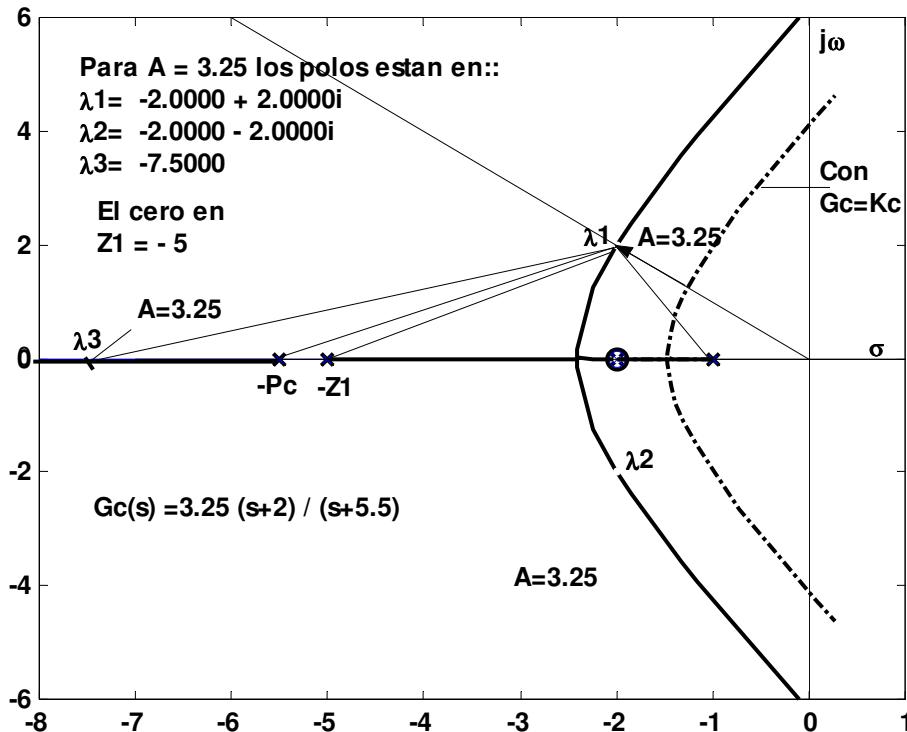


Figura 9

Por lo tanto el par de polos dominantes elegido será:

$$\underline{\lambda_{1-2} = -2 \pm j2}$$

La ubicación del polo de $G_c(s)$, se determinara para que el lugar pase por los mismos, aplicando el requerimiento angular:

$$\sum \phi_z - \sum \phi_p = -180^\circ$$

$$0 - (\text{tag}^{-1} 2/3) + \text{tag}^{-1}(2/(pc-2)) + 180^\circ - \text{tag}^{-1} 2 = -180^\circ, \text{ operando se obtiene:}$$

$$pc = \frac{2}{\text{tag}(29.7448^\circ)} + 2 = 3.5 + 2 \Rightarrow pc = 5.5$$

Por ende la $G_c(s)$ será: $G_c(s) = \frac{A(s+2)}{(s+5.5)}$ y la función de transferencia del

$$\text{lazo final es: } L(s) = \frac{10A}{(s+1)(s+5)(s+5.5)}$$

La ubicación del tercer polo se determina: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_{n-1}$,

$$2\sigma + \lambda_3 = -11.5 \Rightarrow \lambda_3 = -7.5$$

En consecuencia la distribución cero-polo del sistema indica que los polos complejos son realmente dominantes. La ganancia A de $G_c(s)$ se obtiene aplicando el requerimiento de magnitud:

$$K = 10A = 2 \times 2.5 \times 6.5 = 32.5 \Rightarrow A = 3.25$$

Como el par λ_{1-2} es dominante se tendrá:

$$Tp \approx \frac{1}{2}[90^\circ - 33.69^\circ + 90^\circ + 19.983^\circ] \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow Tp \approx 1.45 \text{ seg.}$$

Y en consecuencia:

$$Mp(\%) \approx \frac{7.5}{\sqrt{34.25}} \times \frac{\sqrt{13}}{5} \times e^{-2 \times 1.45} \times 100 \Rightarrow Mp(\%) \approx 5.07\% < 5.50\%$$

Veamos que paso con el error al escalón:

$$M'(s) = \frac{6.5(s+5)}{(s+7.5)(s^2 + 4s + 8)} = \frac{6.5s + 32.5}{s^3 + 11.5s^2 + 38s + 60}$$

$$e(\infty) = \frac{\alpha_o - b_o'}{\alpha_o} = \frac{60 - 32.5}{60} \approx 0.46, \text{ Como se aprecia aumento.-}$$

O también:

$$G_{equiv}(s) = \frac{6.5(s+5)}{s^3 + 11.5s^2 + 31.5s + 27.5} \text{ Tipo "0"}$$

$$Kp = \lim_{s \rightarrow 0} G_{equiv}(s) = \frac{6.5 \times 5}{27.5} = \frac{13}{11}$$

Por lo tanto:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + Kp} = \frac{1}{1 + 11/13} = \frac{11}{24} \approx 0.46$$

Como aumento, esto sucederá muy a menudo si se mejora el transitorio generalmente se empeora el régimen permanente, si se quiere bajar el error si alterar sustancialmente el transitorio conseguido, se puede proceder por ejemplo agregando un controlador serie de atraso de fase adecuado como se estudiara mas adelante.-

La figura 10 muestra la respuesta de los dos diseños, Ejemplos 1 y 2.-

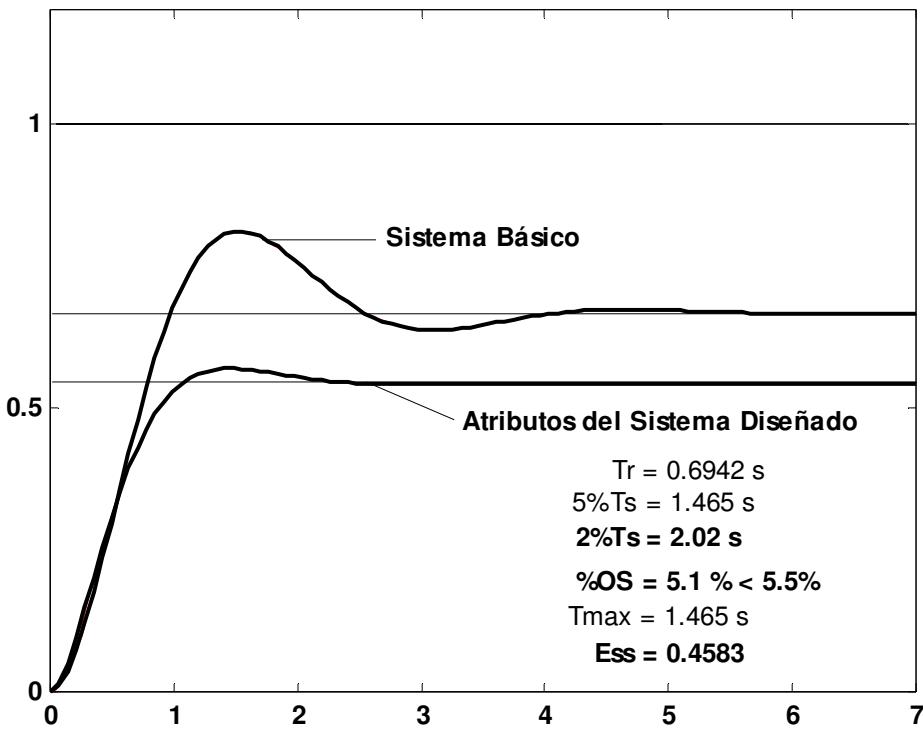


Figura 10

Ejemplo 3:

Con la misma planta y el elemento de medición de la salida, $G_p(s)$ y $H(s)$, del sistema de los ejemplos 1 y 2, se tratará de diseñar un controlador serie $G_c(s)$ adecuado para que se cumplan las especificaciones siguientes:

- 1º) $T_E(2\%) \leq 5.25 \text{ seg.}$
- 2º) $M_p(\%) \leq 8\%$
- 3º) $e(\infty), \text{al escalón unitario}, = 0$
- 4º) $e(\infty), \text{a la rampa unitaria}, \leq 1.25$

Se probará con un controlador serie PI, por la especificación 3º), con la función de transferencia: $G_c(s) = \frac{K_p s + K_i}{s}$ por lo tanto las funciones de transferencia serán:

$$G(s) = \frac{2(K_p s + K_i)}{s(s+1)(s+2)} \quad y \quad H(s) = \frac{5}{(s+5)} \quad \Rightarrow \quad L(s) = \frac{10(K_p s + K_i)}{s(s+1)(s+2)(s+5)}$$

Como la realimentación no es unitaria, la $G_{equiv}(s)$ será:

$$G_{equiv}(s) = \frac{K_H G(s)}{1 + G(s)[H(s) - K_H]}, \text{ reemplazando las funciones correspondientes:}$$

$$G_{equiv}(s) = \frac{2(K_p s + K_i)(s+5)}{s[s^3 + 8s^2 + (17 - 2K_p)s + (10 - 2K_i)]}; \text{ Sistema Tipo "1"}$$

El coeficiente de error será:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{equiv}(s) = \frac{5K_i}{5 - K_i}, \text{ por ende el error será:}$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{5 - K_i}{5K_i} \leq 1.25 \quad \Rightarrow \quad K_i \geq 0.689$$

Por ende si se adopta $K_i = 0.80$, se cumplirá la especificación 3^{a)} y 4^{a)}. Ahora hay que tratar de ajustar K_p para que se cumplan las especificaciones restantes del transitorio al escalón en la señal de referencia.-

La ecuación característica del sistema será:

$$s(s+1)(s+2)(s+5) + 10(K_p s + 0.8) = 0 ; \quad s^4 + 8s^3 + 17s^2 + 10s + 10K_p s + 8 = 0$$

Para ver el movimiento de los polos del sistema al variar K_p con $K_i=0.8$ se obtendrá la $L_{equiv}(s)$ como ya se conoce:

$$L_{equiv}(s) = \frac{10K_p s}{s^4 + 8s^3 + 17s^2 + 10s + 8} \cong \frac{10K_p s}{(s + 2.74)(s + 4.85)(s^2 + 0.4086s + 0.6017)}$$

El lugar de las raíces sería el indicado en la figura 11.

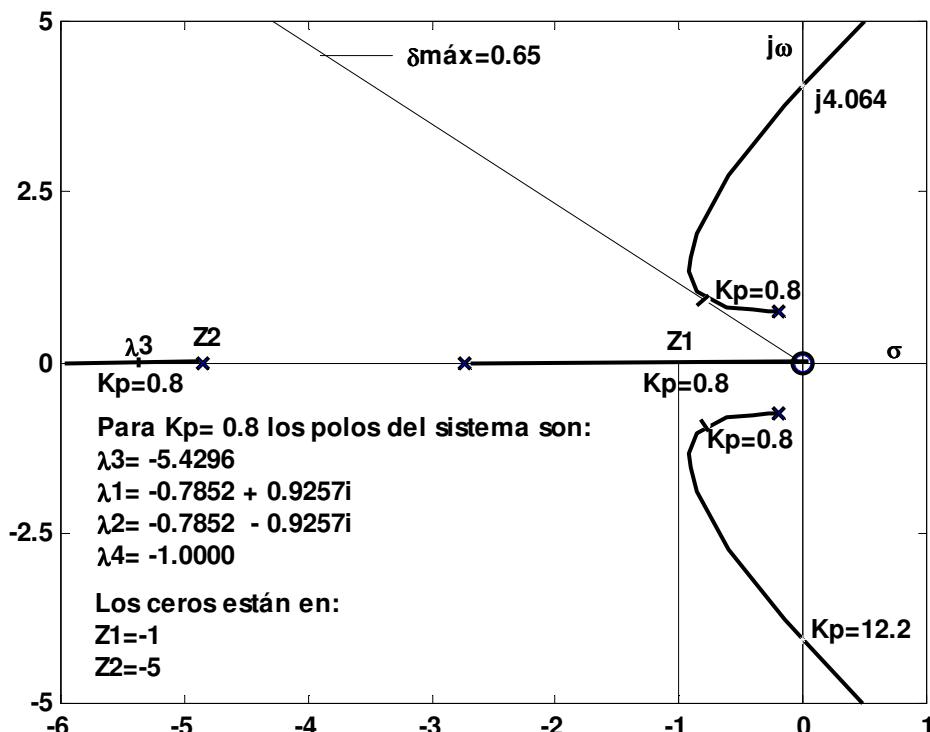


Figura 11

En ella se puede ver que para que el coeficiente de amortiguación de los polos dominantes sea máximo el valor de K_p deberá ser: $K_p = 0.80$, obtenido con la función Rlplot del Csad.- La configuración de polos y ceros está indicada en la figura y la misma es tal que sistema es de tercer orden con el polo real y el cero alejados hacia la izquierda. Pues el cero agregado por el controlador se cancela con el polo de la planta en -1 ya que:

$$Z_c = \frac{-K_i}{K_p} = \frac{-0.8}{0.8} = -1$$

A pesar de utilizar la computadora para determinar K_p , y darnos cuenta que los polos complejos son dominantes, la verificación del cumplimiento de las especificaciones pedidas se puede hacer también en forma analítica.

La función de transferencia del sistema así diseñado será:

$$M(s) = M'(s) = \frac{1.60(s+5)}{s^3 + 7s^2 + 10s + 8} = \frac{1.60s + 8}{s^3 + 7s_2 + 10s + 8}$$

El error a rampa será como se sabe menor que el máximo permitido:

$$e(\infty), a la rampa unitaria = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{10 - 1.60}{8} = 1.05 < 1.25. -$$

Calculemos el T_p y la sobre elongación porcentual M_p (%):

$$T_p = \frac{1}{0.926} [90^\circ - 12.39^\circ + (11.274^\circ + 90^\circ)] \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow T_p = 3.37 \text{ seg.}$$

$$M_p(%) \cong \frac{5.43}{4.736} \times \frac{4.3155}{5} \times e^{-0.785 \times 3.37} \times 100 \Rightarrow M_p(%) \cong 7.014 < 8\%$$

$$T_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} = \frac{4}{0.785} = 5.095 \text{ seg.} \Rightarrow T_E(2\%) \cong 5.1 \text{ seg.} < 5.25 \text{ seg.} -$$

Cabe mencionar que este no es el único procedimiento, ni la única solución.

Otro procedimiento:

Se puede elegir primero la posición del cero, por ejemplo en -1 para que se cancele el polo de la planta en dicho valor, por ende, $K_i/K_p=1$ o $K_p=K_i$.

Por lo, tanto la función de transferencia del lazo $L(s)$ resultante será:

$$G(s)H(s) = L(s) = \frac{10K_p}{s(s+2)(s+5)} . \text{ En base a la primera especificación:}$$

$$T_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 5.25 \text{ seg.} \Rightarrow |\sigma| \geq 0.76, \text{ se elegirá por ejemplo: } \underline{\sigma = -0.80}$$

Por lo tanto los polos dominantes serán: $\lambda_{1-2} = -0.80 \pm j\omega d$

El tercer polo en consecuencia estará en ubicado en:

$$2\sigma + \lambda_3 = -a_{n-1} = -7 \Rightarrow \underline{\lambda_3 = -5.40}$$

La ganancia K_p resulta, con el requerimiento de magnitud:

$$K|_{\lambda_3} = 10K_p = 0.4 \times 3.4 \times 5.4 = 7.344 \Rightarrow K_p = K_i = 0.7344$$

$$\text{Como: } \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = (-1)^3 a_0 \Rightarrow (\sigma^2 + \omega d^2)(-5.4) = -10K_p = -7.344 \Rightarrow \underline{\omega d \cong 0.85}$$

Los polos dominantes estarán ubicados en:

$\underline{\lambda_{1-2} = -0.80 \pm j0.85}$. La función de transferencia del sistema diseñado será:

$$M(s) = \frac{11.4688(s+5)}{s(s+2)(s+5) + 7.344} = \frac{1.4688s + 7.344}{s^3 + 7s^2 + 10s + 7.344}$$

$$\text{El error a la rampa será por lo tanto: } e(\infty) = \frac{10 - 1.4688}{7.344} \Rightarrow \underline{e(\infty) = 1.16 < 1.25}$$

La sobre elongación será menor que el 8% pues:

El coeficiente de amortiguación de los polos dominantes es:

$$\underline{\delta \approx 0.685 < 0.6265}$$

Otro Forma, (Tercera), de realizar el diseño:

Para que se cumpla $M_p(%) < 8\%$, debe ser $\delta \geq 0.6265$, si se elige: $\underline{\delta = 0.707. -}$

Para que se cumpla el T_E (2%), se determinó que puede ser: $\sigma = -0.80$, la ubicación de los polos dominantes elegida puede ser: $\lambda_{1-2} = -0.80 \pm j0.80$.

Habrá que determinar la posición del cero de $G_c(s)$ para que las ramas dominantes pasen por ellos, se aplicara el requerimiento angular:

$$\sum \phi_z - \sum \phi_p = -180^\circ$$

$$\left(\operatorname{tag}^{-1} \frac{0.80}{Cc - 0.80} \right) - \left(\operatorname{tag}^{-1} \frac{0.8}{4.2} + \operatorname{tag}^1 \frac{0.8}{1.2} + \operatorname{tag}^{-1} \frac{0.8}{0.2} + 135 \right) = -180^\circ$$

$$\operatorname{tag}^{-1} \frac{0.8}{Cc - 0.8} = 75.438^\circ, \text{ en consecuencia:}$$

$$Cc = \frac{0.80}{\operatorname{tag}(75.438^\circ)} + 0.80 \quad \Rightarrow \quad Cc = \frac{K_i}{K_p} = 1.007816$$

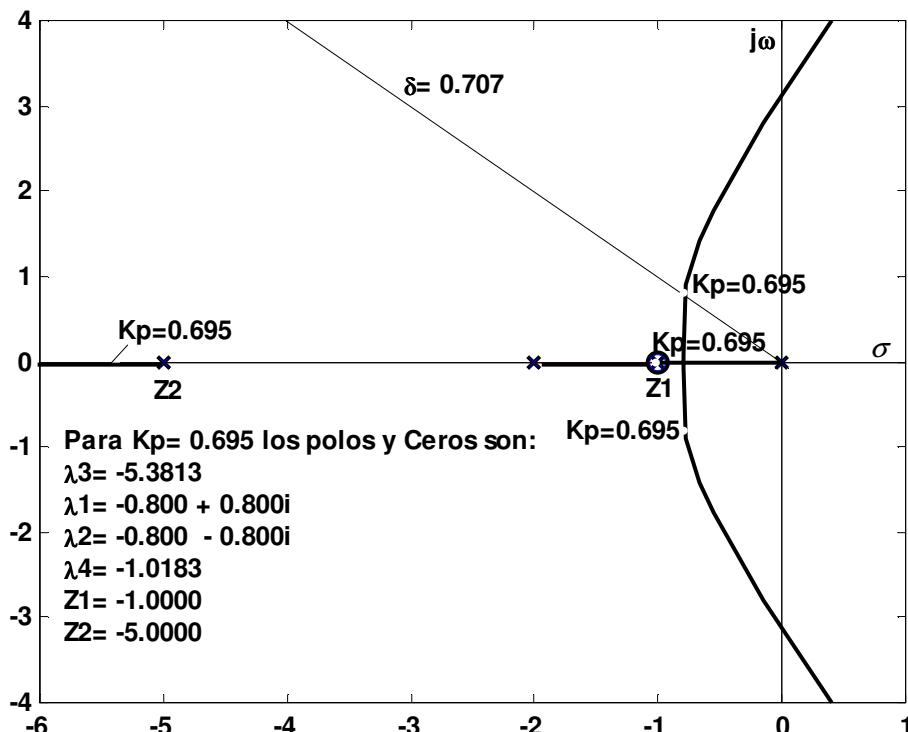


Figura 12

La figura 12 muestra el lugar de las raíces del sistema diseñado.- La función de transferencia del sistema diseñado será:

$$M(s) = \frac{1.39(s+1.007816)(s+5)}{s^4 + 8s^3 + 17s^2 + 16.45s + 7.0043212} = \frac{1.39s^2 + 8.35086424s + 7.043212}{s^4 + 8s^3 + 17s^2 + 16.95s + 7.0043212}$$

El error de estado estable a las rampas unitarias será:

$$e(\infty) = \frac{16.95 - 8.35086424}{7.0043212} \approx 1.228 \quad \Rightarrow \quad e(\infty) = 1.228 < 1.25$$

Con la función Tfplot del Csad/Matlab se grafican las respuestas temporales, y se muestran en la figura 13, las mismas verifican que se satisfacen todas las especificaciones solicitadas para el sistema de control.-

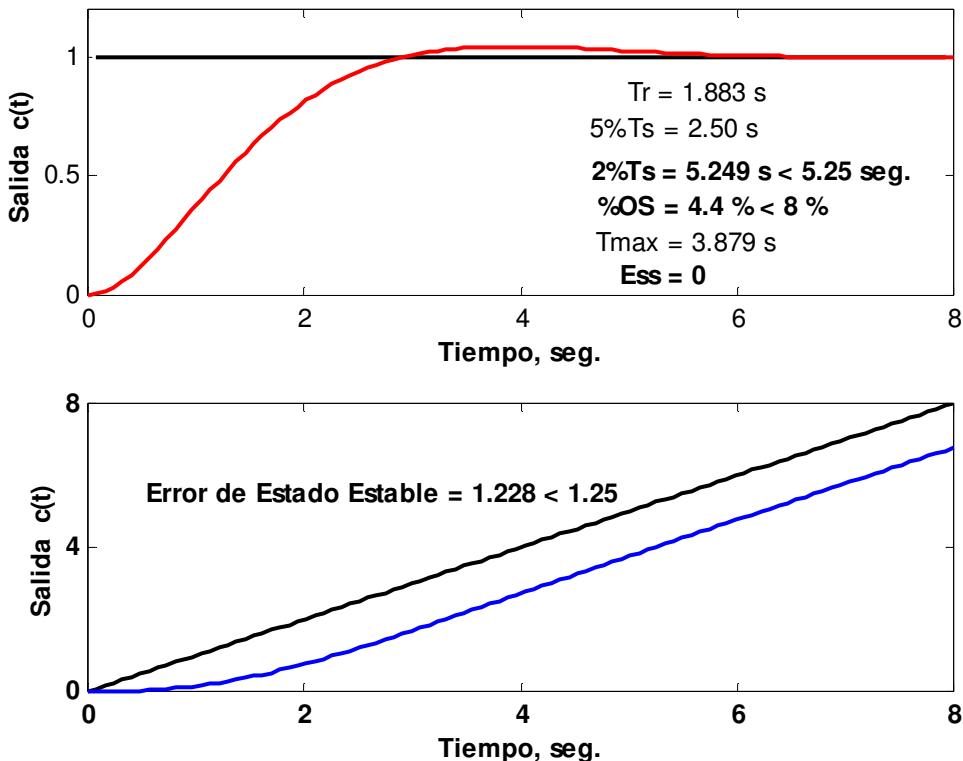


Figura 13

Este ejemplo demuestra, como ya se menciono, que la *solución no es única y tampoco el procedimiento para tratar de alcanzarlas.*-

Controladores Series (Funciones de Transferencia)
El diagrama de bloques será el indicado en la figura 14

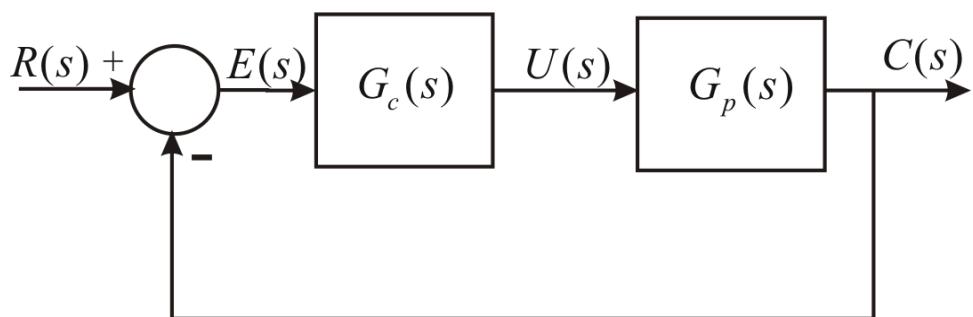


Figura 14

1º) Proporcional: Es el más sencillo de todos y se tendrá:

$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_C$ El sistema con un controlador serie solo proporcional se llamará en lo que sigue sistema básico. Generalmente no se perfecciona un sistema hasta que se ha hecho un análisis del comportamiento del sistema básico. Resultado del análisis puede ser el tener que añadir nuevos elementos para lograr el comportamiento deseado. Dadas las especificaciones de diseño, se determina la zona donde deberían estar el par de polos complejos conjugados dominantes para satisfacer lo solicitado. Si con el simple ajuste de la ganancia se logra esto, el diseño estaría terminado. Por ejemplo si $G_p(s) = \frac{k}{s(s+a)(s+b)}$ y las especificaciones son tales que resultan las siguientes restricciones: $\delta \geq \delta^*$, $|\sigma| \geq |\sigma^*|$ y $\omega_d \geq \omega_d^*$ del par de polos complejos conjugados dominantes. La zona para dicho par es la indicada en la figura 15.

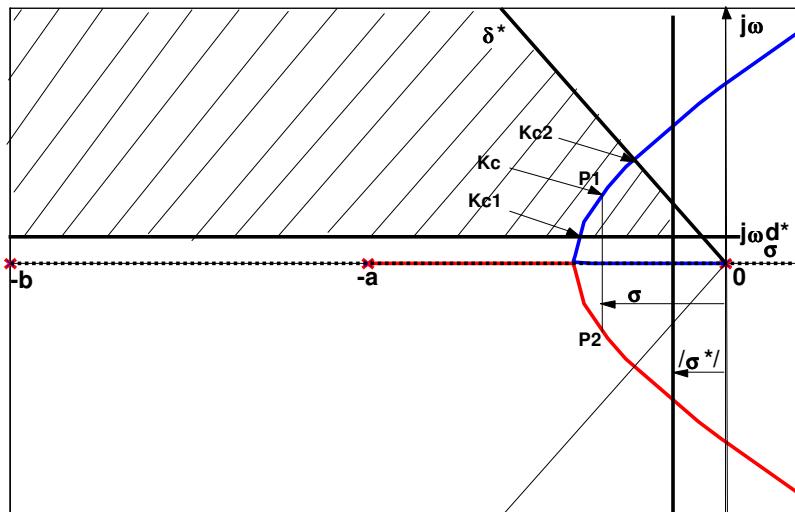


Figura 15

$$G(s) = \frac{K_C k}{s(s+a)(s+b)};$$

En consecuencia el rango de valores de K_C que satisfacen lo pedido será:

$$K_{C1} < K_C < K_{C2}$$

Siempre que $\lambda_3 \leq n\sigma$, donde $n \geq 5$ para que λ_{1-2} sean dominantes, el simple diseño estaría logrado. Veremos ejemplos donde sucede esto.

Diseño de Controladores Serie Proporcionales: $G_C(s) = K_C$

Ejemplo 4:

Dado el sistema de la figura 16.

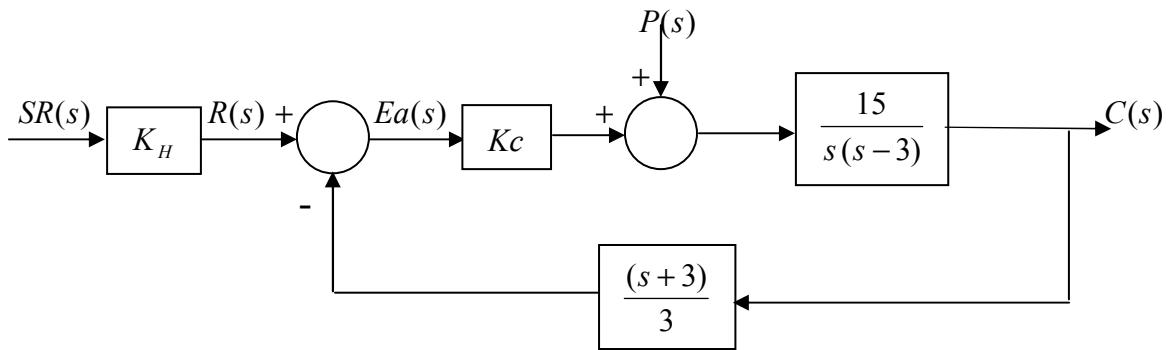


Figura 16:

a) Diseñar el controlador K_c que haga que el sistema cumpla con las siguientes especificaciones ante entradas de tipo escalón en $Sr(t)$.

1) $M_p(\%) \leq 5\%$; 2) $tp \leq \frac{\pi}{2}$ seg.; 3) $t_E(5\%) \leq 0.75$ seg. y 4) $e_{(\infty)} \leq 0.25$ entrada rampa

b) ¿Qué características tiene la respuesta del sistema $M(s)$ con el controlador calculado ante una entrada escalón unitaria (M_p , tp , régimen permanente, etc.)?

El transitorio se cumplirá si los polos están en la zona marcada en la fig.17.

1) $M_p(\%) \leq 5\% \rightarrow \delta \geq 0.69$; 2) $t_E(5\%) \leq 0.75$ seg. $\rightarrow |\sigma| \geq 3$ y 3) $tp \leq \frac{\pi}{2}$ seg. $\rightarrow \omega d \geq 2$

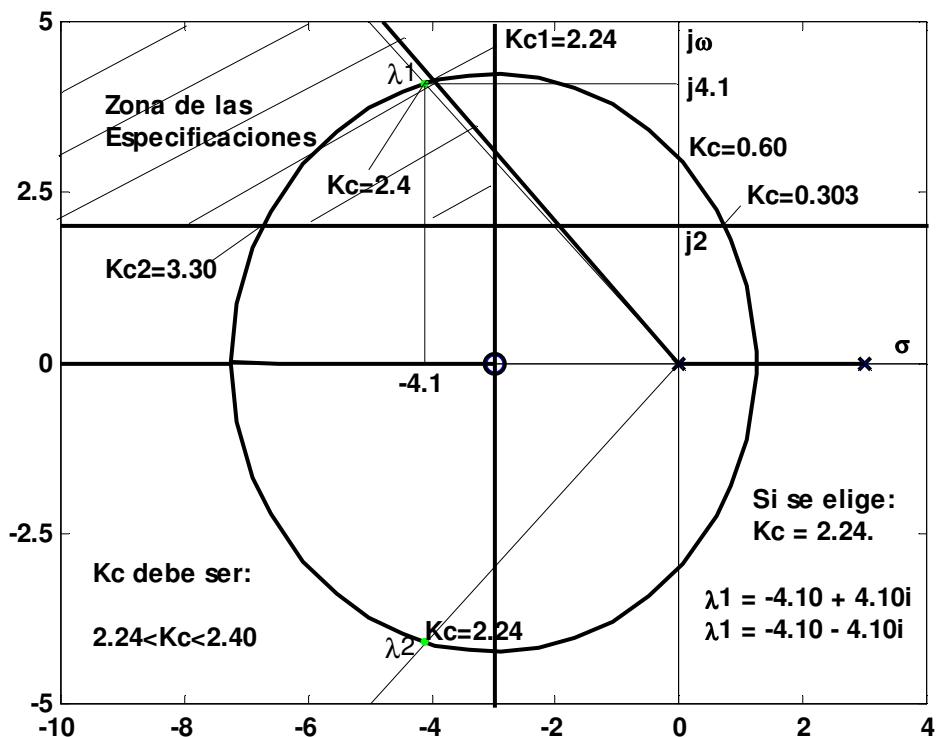


Figura 17

No podemos estar seguros de que el lugar de las raíces pase por la zona de las especificaciones, pero como las raíces de la ecuación característica son fáciles de obtener.

La ecuación característica $\rightarrow s(s-3) + 5K_C(s+3) = 0 \Rightarrow s^2 + (5K_C - 3)s + 15K_C = 0$

$$\lambda_{1-2} = \frac{(3-5K_C) \pm \sqrt{(5K_C-3)^2 - 60K_C}}{2}$$

Buscamos el corte con la horizontal por $2j$

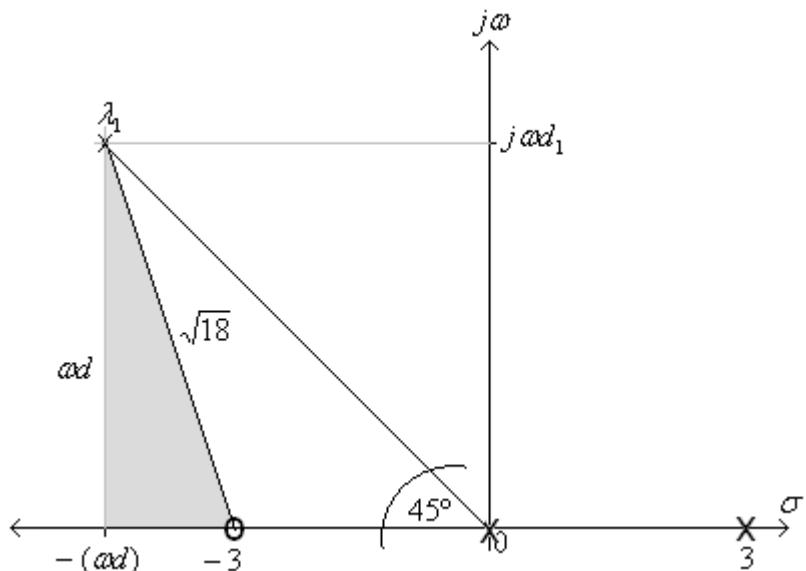
$$\text{Im } g(\lambda_1) = 2j \Rightarrow \frac{\sqrt{(5K_C-3)^2 - 60K_C}}{2} = 2j$$

Elevando al cuadrado:

$$(5K_C - 3)^2 - 60K_C = -16; \text{ operando}$$

$$K_C^2 - 3,6K_C + 1 = 0 \Rightarrow K_C = \begin{cases} K_{C1} = 0,3033 \cong 0,30 \rightarrow \text{Sistema Inestable} \\ K_{C2} = 3,2967 \cong 3,30 \end{cases}$$

Si se elige $\delta = 0,707$ se intercepta con el lugar en un punto donde $|\sigma| = \omega d$, tendremos que:



$$R = \sqrt{3 \times 6} = \sqrt{18}$$

$$(\omega d - 3)^2 + \omega d^2 = 18$$

Pues el lugar es una circunferencia con centro en el cero -3 y radio $\sqrt{18}$.

$$\omega d^2 - 6\omega d + 9 + \omega d^2 - 18 = 0$$

Operando:

$$\omega d^2 - 3\omega d - 4,5 = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega d_1 = 4,098 \cong 4,1 \\ \omega d_2 = -1,098 \rightarrow \text{Sistema Inestable} \end{cases}$$

$$\therefore \lambda_{1-2} \cong -4,1 \pm j4,1$$

El K_C se obtiene igualando la parte real a -4,1:

$$\frac{3-5K_C}{2} = -4,1 \Rightarrow K_C \cong 2,24$$

Por ende, el rango de K_C que cumple con el transitorio será: $2,24 < K_C < 3,30$

Buscando ahora que valores de K_C cumplen con las especificaciones de régimen permanente:

$$e_{(\infty)} \leq 0,25 \rightarrow e_{(\infty)} = f(K_C)$$

$$Gequiv(s) = \frac{K_H G(s)}{1 + G(s)H(s) - K_H G(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)[H(s) - 1]} \quad \text{pues } K_H = 1$$

Remplazando $G(s)$, $H(s)$ se tendrá:

$$\boxed{Gequiv(s) = \frac{15K_C}{s[s + (5K_C - 3)]}} \quad \text{Sistema tipo "1"}$$

$$Kv = \frac{15K_C}{5K_C - 3} \Rightarrow e(\infty) \text{ para } Sr(t) = t\mu_s(t) = \frac{5K_C - 3}{15K_C} \leq \frac{1}{4}$$

$$20K_C - 12 \leq 15K_C$$

$$5K_C \leq 12 \Rightarrow \underline{K_C \leq 2,40}$$

El K_{CL} para la estabilidad será:

$$5K_{CL} - 3 > 0 \Rightarrow K_{CL} = \frac{3}{5} \Rightarrow \underline{K_{CL} = 0,6}$$

El rango que cumple el régimen permanente será:

$$0,60 < K_C < 2,40$$

Y el que cumple el transitorio será:

$$2,24 < K_C < 3,30$$

Por lo tanto, el que cumple todas las especificaciones será:

$$2,24 < K_C < 2,40$$

Si se elige: $\underline{\underline{K_C = 2,24}} \rightarrow \lambda_{1-2} \cong -4,1 \pm j4,1$

$$\boxed{\therefore Geq(s) = \frac{33,6}{s(s + 8,2)} \quad \text{ó} \quad M(s) = \frac{33,6}{s^2 + 8,2s + 33,6}}$$

$$\Rightarrow e(\infty) \text{ para } Sr(t) = t\mu_s(t) = \frac{8,2}{33,6} = \underline{0,244 < 0,25}$$

En la figura 18 se muestran las respuestas al escalón y a la rampa en las cuales se comprueba que se cumple todo lo solicitado.

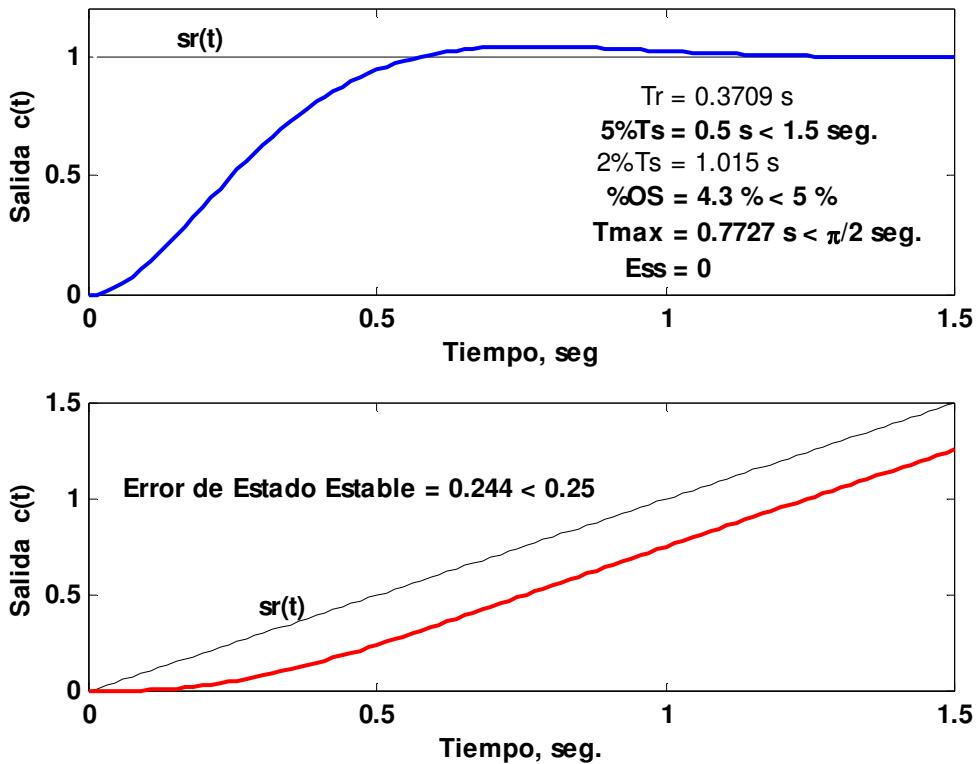


Figura 18

El sistema diseñado resulta uno de segundo orden sub-amortiguado.
En forma analítica se puede determinar los atributos del sistema diseñado:

$$\lambda_{1-2} = -4,1 \pm j4,1 \rightarrow \text{polos del sistema}$$

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega d^2} = \sqrt{4,1^2 + 4,1^2} = 5,798 \text{ rad/seg}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega d}{|\sigma|}\right) = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

$$\delta = \cos \theta = 0,707$$

$$Mp(\%) = e^{-\frac{\pi}{\tan \theta}} \times 100 = 4,32\% < 5\%$$

$$tp = \frac{\pi}{\omega d} = \frac{3,1416}{4,1} = 0,766 \text{ seg.} < \frac{\pi}{2} \text{ seg}$$

$$ts(5\%) \cong \frac{2,25}{|\sigma|} = \frac{2,25}{4,1} = 0,548 \text{ seg} < 0,75 \text{ seg}$$

Ejemplo 5:

La planta a controlar tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{2}{s(s+3)(s+6)}$$

Las especificaciones que se piden son:

$$1^\circ) Mp(\%) \leq 17\%; \quad 2^\circ) T_E(2\%) \leq 4.25 \text{ seg.}; \quad 3^\circ) Tp \leq 2 \text{ seg.} \quad 4^\circ) e(\infty), (\text{rampa}) \leq 0.70.-$$

Se probará con un controlador proporcional, sistema básico.-
Para que se cumplan las especificaciones pedidas, la zona del plano s donde deberán estar ubicados los polos complejos dominantes será:

$$1^o) \delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0.17)^2}{\pi^2 + (\ln 0.17)^2}} \Rightarrow \underline{\delta \geq 0.49}$$

$$2^o) T_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 4.25 \text{ seg.} \Rightarrow \underline{|\sigma| \geq 0.94}$$

$$3^o) T_p = \frac{\pi}{\omega d} \leq 2 \text{ seg.} \Rightarrow \underline{\omega d \geq 1.53 \text{ rad / seg.}}$$

$$4^o) e(\infty) = \frac{1}{Kv} = \frac{1}{Kc/9} = \frac{9}{Kc} \leq 0.70 \Rightarrow \underline{Kc \geq 12.857}$$

Si se elige: $\delta = 0.5 \Rightarrow \omega d = |\sigma| \sqrt{3}$

Si se adopta: $\sigma = -1$; los polos dominantes serán: $\underline{\lambda_{1-2} = -1 \pm j\sqrt{3}}$

El grafico del lugar de las raíces sería similar al de la figura 15, con:

$a = 3; b = 6; \delta^* = 0.49; \omega d^* = 1.53; \sigma^* = 0.94.$ –

El tercer polo estará ubicado en:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_{n-1} = -9 \Rightarrow \underline{\lambda_3 = -7}$$

Por lo tanto los polos complejos serán dominantes.-

Para ver que los polos complejos elegidos están sobre el lugar de las raíces se puede utilizar el requerimiento angular y el de magnitud para averiguar el Kc del controlador empleado.-

$$\sum \phi_z - \sum \phi_p = 0 - (19.11^\circ + 40.89^\circ + 120^\circ) = -180$$

Por lo tanto los polos complejos están sobre el lugar. El valor de Kc será:

$$K = 2Kc = 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{28} = 28 \Rightarrow \underline{Kc = 14}$$

Verificaremos si se cumplen las especificaciones de funcionamiento:

$$T_p \cong \frac{1}{\sqrt{3}} [90^\circ - 0^\circ + (90^\circ + 16.102^\circ)] \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \underline{T_p \cong 1.976 \text{ seg.}}$$

$$Mp(\%) \cong \frac{7}{\sqrt{39}} \times e^{-1.976} \times 100 \Rightarrow \underline{Mp(\%) \cong 15.54\% < 17\%}$$

$$e(\infty) = \frac{1}{Kv} = \frac{1}{28/18} \Rightarrow \underline{e(\infty) = 0.643 < 0.70. -}$$

Por lo tanto el diseño cumple con todo lo pedido.-

2º) 2.1) Adelanto de Fase.

2.2) Proporcional Derivativo.

Las Funciones de Transferencia son:

2.1)

$$Gc(s) = Koc \frac{(1+aTs)}{(1+Ts)} \equiv A \frac{(s + 1/aT)}{(s + 1/T)} \quad \text{con} \quad A = Koc \times a ; \quad \begin{cases} a > 1 \\ T \Rightarrow \text{relativamente grande} \end{cases}$$

$$2.2) Gc(s) = Kp + Kd \quad s = Kd \left(s + \frac{Kp}{Kd} \right) \equiv Kp \left(1 + \frac{Kd}{Kp} s \right)$$

Por ende el controlador de adelanto de fase como ya se dijo agrega un polo y un cero, el cero más cerca del origen, a la configuración de polos y ceros del lazo del sistema básico.

La figura 19, muestra dos casos de diseño para un controlador de adelanto de fase, $G_p(s)$ es de tercer orden.

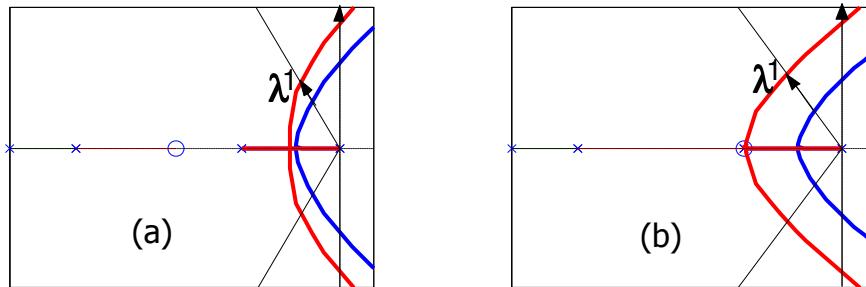


Figura 19

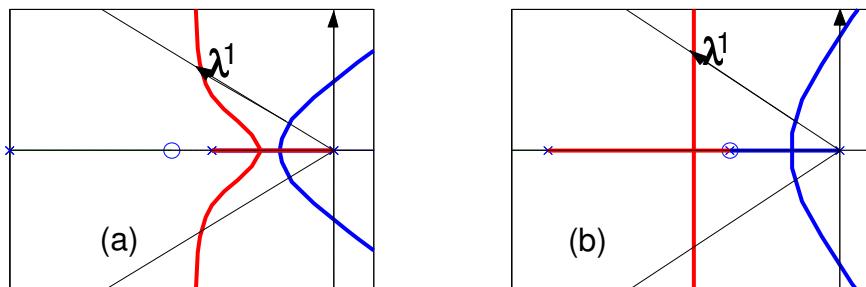


Figura 20

La figura 20 muestra como se procedería con un controlador PD serie:
En la figura 20(a), λ_3, Z_1 deberán estar próximos. Si la influencia del cero es muy alta, conviene hacer un controlador P-D (PD modificado).
En el segundo caso, figura 20(b), se ha producido una cancelación polo-cero, y el sistema diseñado será de segundo orden.

3º) 3.1) Atraso de Fase 3.2) Proporcional Integral

Si ya se consiguió el transitorio deseado, por la ubicación de los polos dominantes, pero los coeficientes de error son muy bajos, (errores grandes), se puede usar el controlador de atraso de fase para subir los coeficientes de error sin modificar sustancialmente los transitorios ya conseguidos.-

Las Funciones de Transferencia son:

3.1)

$$G_c(s) \text{ Ídem a 2.1) pero con } \begin{cases} a < 1 \quad y \quad T \rightarrow \text{relativamente grande} \\ A \cong 1 \quad \therefore \quad K_{oc} = \frac{1}{a} > 1 \end{cases}$$

$$3.2) \quad G_C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p \cdot s + K_i}{s} = \frac{K_p \left(s + \frac{K_i}{K_p} \right)}{s} = K_i \frac{\left(1 + \frac{K_p}{K_i} \cdot s \right)}{s}$$

Por ende el controlador de atraso de fase como ya se dijo agrega un cero y un polo con el polo a la derecha. En el PI, el polo es en el origen. La figura 21 muestra como se modificaría el lugar de las raíces del sistema básico:

$$G_C(s) = \frac{K}{s(s + p)}$$

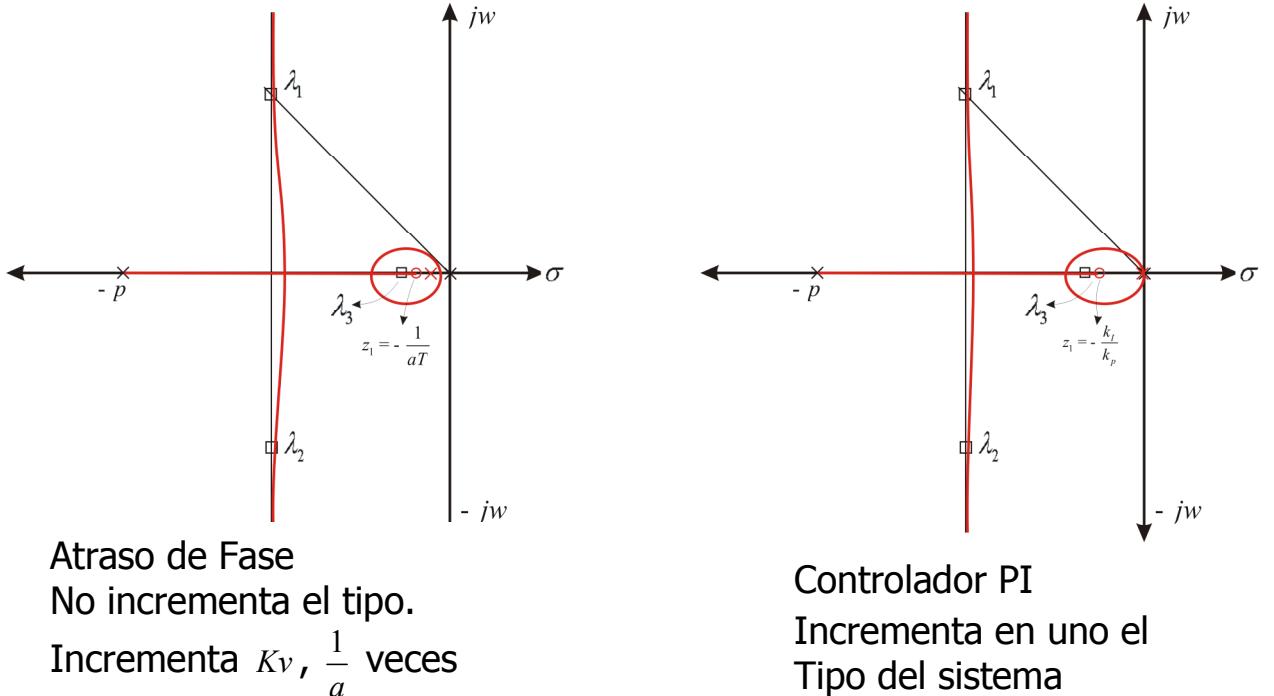


Figura 21

Como se puede apreciar si (λ_3, Z_1) están muy cerca (del orden de milésimas), el transitorio no varía sustancialmente, pero se incrementa o se lleva a infinito el coeficiente de error, en consecuencia disminuye el error de estado estacionario o lo anula, en este caso para la entrada rampa.

Hay casos de plantas con características no integrativas, donde un controlador proporcional consigue un buen transitorio pero con un error de estado estable al escalón. Si se desea anular ese error se puede usar un controlador PI, si se tolera el incremento en los tiempos de establecimiento que podría producir el control PI. (En estos casos el movimiento de los polos complejos dominantes no sería tan pequeño, pero tolerable).-

4º) 4.1) Adelanto-Atraso de fase

4.2) Proporcional Integral Derivativo (PID)

Las funciones de transferencia son:

$$4.1) \quad G_C(s) = \frac{A_1}{a_1} \frac{(1+a_1T_1s)}{(1+T_1s)} \frac{1}{a_2} \frac{(1+a_2T_2s)}{(1+T_2s)} = A_1 \frac{\left(s + \frac{1}{a_1T_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)} \frac{\left(s + \frac{1}{a_2T_2}\right)}{\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}$$

Con $a_1 > 1$; $a_2 < 1$; $T_1 \rightarrow \text{chico}$; $T_2 \rightarrow \text{grande}$

Por ende los polos y ceros que agregan a la función de transferencia del lazo están indicados en la figura 22

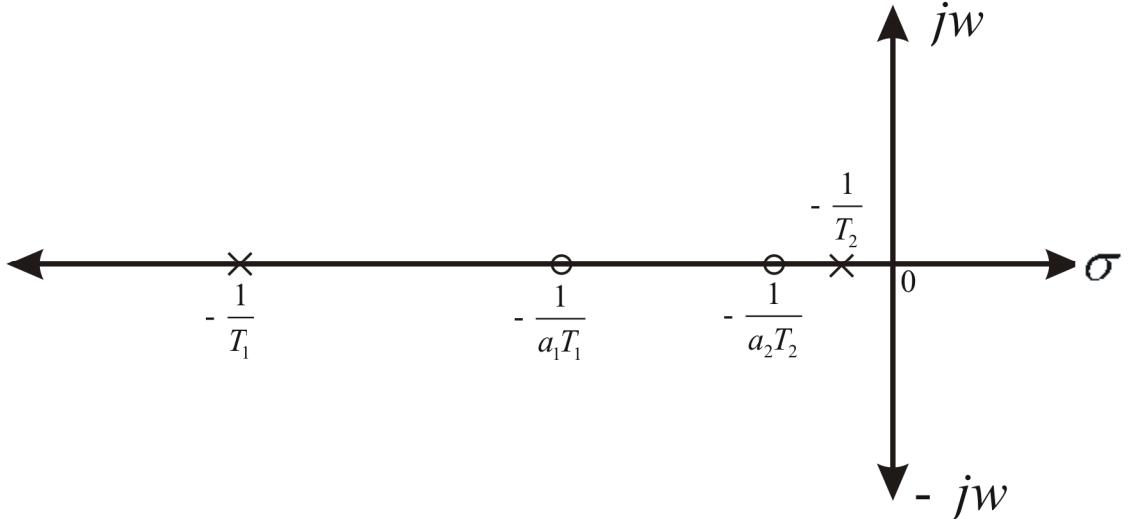


Figura 22

4.2a) Estructura Paralelo:

La función de transferencia es:

$$G_C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s = \frac{Kd \left(s^2 + \frac{K_p}{Kd} s + \frac{K_i}{Kd} \right)}{s} \Rightarrow \text{Estructura Paralelo}$$

Este tipo de controles agregan un polo en el origen y dos ceros al lazo, como se muestra en la figura 23:

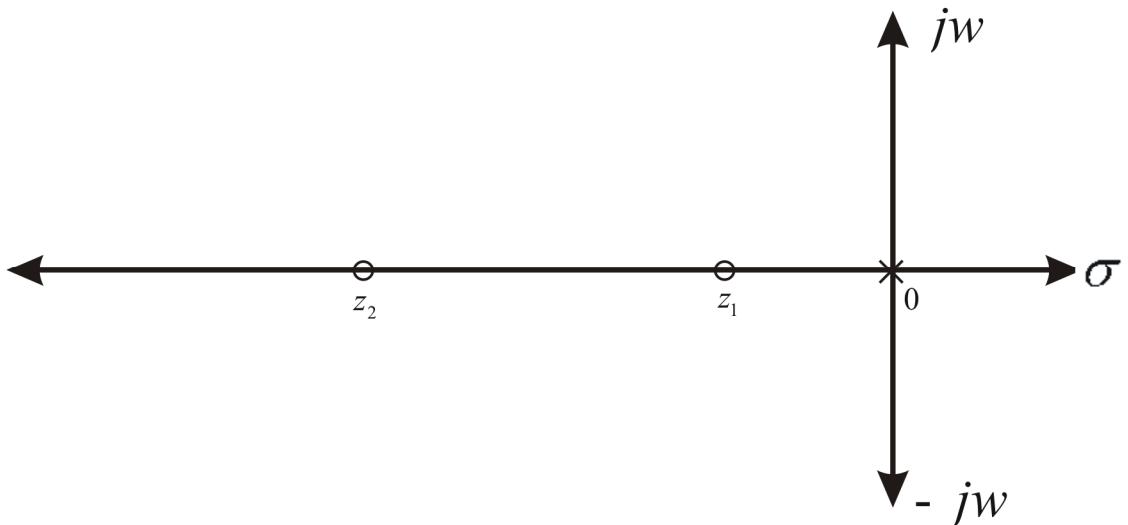


Figura 23

Por ejemplo, si la planta es: $G_p(s) = \frac{kp}{s(s+a)(s+b)}$

Y se agrega un controlador PID serie, con un cero se puede cancelar el polo en $-a$ y con el otro ubicarlo en una posición tal que el par λ_{1-2} dominante este en la posición deseada. Si el par (λ_3, Z_1) están próximos, el diseño será un éxito. Esto se muestra en la figura 24.

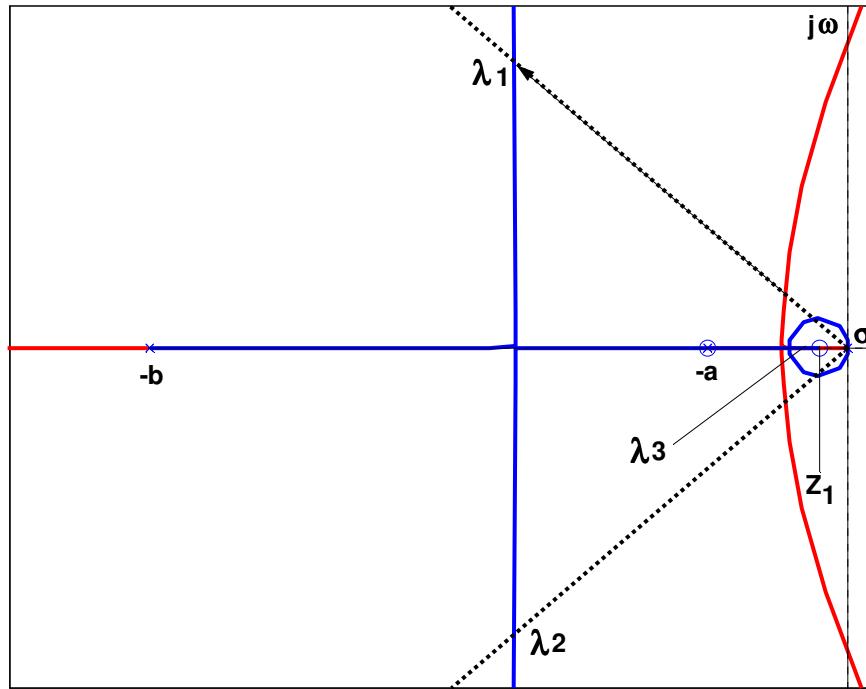


Figura 24

4.2b) Estructura Serie:

Un controlador PD en serie con un PI, o sea:

$$G_c(s) = (1 + Kd_1 s)(Kp_2 + Ki_2 / s)$$

También agrega dos ceros finitos en $Z_1 = -\frac{1}{Kd_1}$ y $Z_2 = -\frac{Ki_2}{Kp_2}$ y un polo en el origen. Con el cero $Z_1 = -\frac{1}{Kd_1}$ de la parte PD se puede cancelar el polo en $-a$ de la planta y el del PI colocarlo cerca del origen para atenuar el efecto desestabilizador del polo agregado en el origen y luego con el ajuste de Kp_2 conseguir el transitorio deseado. Si Z_1 y λ_3 están muy próximos, el par de polos complejos seguirá siendo dominante, por ende no se modifica sustancialmente el transitorio y el error al escalón se anula.-

Controladores PID Modificados:

Configuraciones Serie-Paralelo

5º Controlador P-D:

El controlador serie PD agrega un cero a $M(s)$.

El controlador P-D (PD modificado) para los mismos valores de K_p y K_d los polos son los mismos pero no agrega el cero que podría ser motivo de una sobre elongación muy pronunciada.

Supongamos que: $G_p(s) = \frac{k}{s(s+p)}$

La estructura del controlado P-D es la indicada en la figura 25:

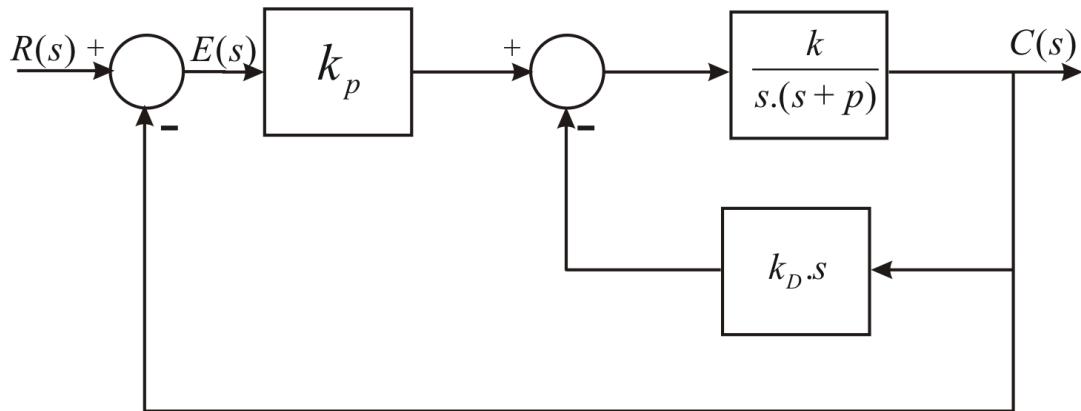


Figura 25

$$G(s) = \frac{kK_p}{s[s + (p + kK_d)]}$$

Por lo tanto, la $M(s)$ será:

$$M(s) = \frac{kK_d}{s^2 + (p + kK_d)s + kK_p} \Rightarrow \text{Sin el cero}$$

$$\text{Para el clásico PD serie sería: } M(s) = \frac{kK_d \left(s + \frac{K_p}{K_d} \right)}{s^2 + (p + kK_d)s + kK_p} \Rightarrow \text{Con el cero}$$

El lugar de las raíces se modifica como lo indica la figura 26. El efecto es, como se aprecia, corre el polo del lazo hacia la izquierda con lo cual se disminuye el tiempo de establecimiento, manteniendo la sobre elongación.- Cuando la planta es de segundo orden el diseño directo es siempre útil. Si la planta es de tercer orden el diseño directo a veces no resultara como se veremos más adelante.-

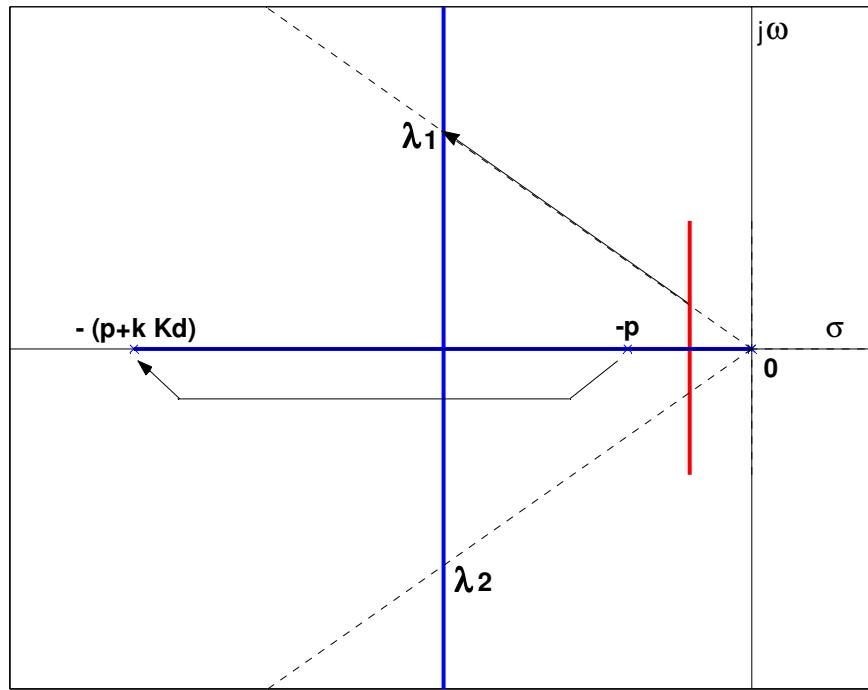


Figura 26

Diseño Directo:

Para el ejemplo que estamos viendo:

Se ubican los polos complejos conjugados dominantes, en base a las especificaciones de funcionamiento solicitadas:

Con el T_E resultará: $|\sigma| \geq \#_1$ (1)

Con el M_p (%) deberá ser: $\delta \geq \delta^*$

Con el error a la rampa unitaria: $e(\infty) = \frac{2|\sigma|}{\sigma^2 + \omega d^2} = \frac{2\delta\omega_n}{\omega_n^2} = \frac{2\delta^2}{|\sigma|} \leq \#_2$

Por lo tanto resulta: $|\sigma| \geq \frac{2\delta^2}{\#_2}$ (2)

Interceptando (1) y (2) se obtiene: $|\sigma| \geq \#_3$

En consecuencia eligiendo el coeficiente de amortiguación se ubican los polos complejos dominantes:

$$\lambda_{1-2} = \sigma \pm j\omega d$$

La ecuación característica será:

$$s^2 + 2|\sigma|s + (\sigma^2 + \omega d^2) = 0$$

La misma pero en función de los parámetros K_p y K_d es:

$$s^2 + (p + Kd)s + Kp = 0$$

Comparando las dos se obtiene los valores buscados de los parámetros de diseño:

$$\begin{cases} 2|\sigma| = p + Kd \\ \sigma^2 + \omega d^2 = Kp \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Kd \\ Kp \end{cases}$$

Para los mismos valores de Kp y Kd los polos del sistema serían los mismos que con el PD serie, pero sin el cero.-

Ejemplo 6:

Veremos el diseño de un control P-D la planta a controlar no tiene características integradoras, por lo tanto el sistema resultante será Tipo "0". Supongamos que:

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Las especificaciones son:

1º) $M_p(\%) \leq 5\%$; 2º) $T_E(5\%) \leq 0.60 \text{ seg.}$; 3º) $T_p \leq 0.90 \text{ seg.}$ y 4º) $e(\infty), (\text{escalón}) \leq 1/15$. -

Encontrar los valores de Kp y Kd adecuados para tal fin.

Se empleara la primera: La técnica del lugar de las raíces y luego un

Diseño directo.

La función de transferencia del lazo será:

$$G(s) = \frac{K_p}{(s+1)(s+2) + K_d s} = \frac{K_p}{s^2 + (3 + K_d)s + 2};$$

El sistema será Tipo "0".

Como se puede apreciar en el error al escalón solo influye Kp, por lo tanto:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + K_p/2} = \frac{2}{2 + K_p} \leq \frac{1}{15} \quad \Rightarrow \quad \underline{K_p \geq 28}$$

Si se elige $K_p = 30$, se cumplirá la especificación 4º). Entonces se tendrá que ajustar el valor de Kd para tratar de conseguir las otras especificaciones del transitorio. Se construirá primero el lugar de los polos del sistema en función de Kd, luego se verá si los polos dominantes a elegir están sobre ese lugar.

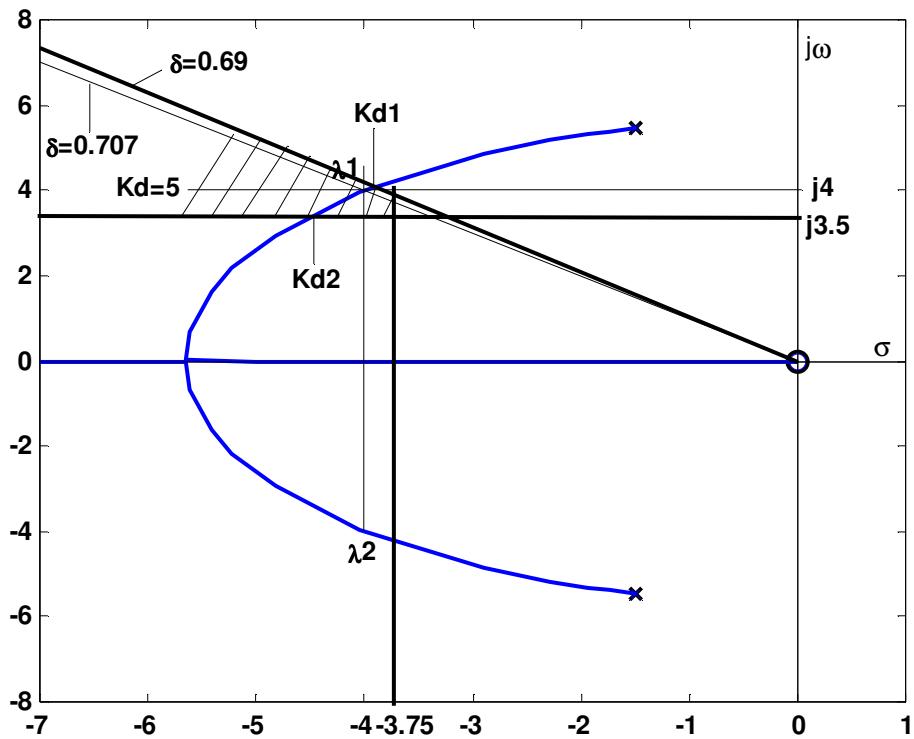


Figura 27

Veamos la zona del plano s que cumpliría con las especificaciones:

La ecuación característica es: $s^2 + (3 + Kd)s + (2 + Kp) = 0$

La $L_{equiv}(s)$ será: $L_{equiv}(s) = \frac{Kd s}{s^2 + 3s + 32}$

El lugar se muestra en la figura 24.

Para el Mp (%): $\delta \geq 0.69$ se puede elegir: $\delta = 0.707$

Para él T_E : $T_E(5\%) \cong \frac{4.5 \delta^2}{|\sigma|} = \frac{2.25}{|\sigma|} \leq 0.60$, $|\sigma| \geq 3.75 \text{ seg}$

Para el T_p : $T_p = \frac{\pi}{\omega d} \leq 0.90 \text{ seg.}$, $\omega d \geq 3.5 \text{ rseg.}$

La zona marcada en la figura 24 cumpliría con todas las especificaciones.

Como se puede ver el ajuste del valor de Kd deberá estar en el rango:

$Kd_1 < Kd < Kd_2$

La intersección de la recta de $\delta = 0.707 = Cte$, con el lugar nos da:

$$32 = \sigma^2 + \omega_d^2 = 2\omega_d^2 \Rightarrow \underline{\omega_d = 4 \text{ r/seg.}}$$

Por lo tanto el par de polos complejos conjugados será:

$$\underline{\lambda_{1-2} = -4 \pm j4}$$

El valor de Kd puede ser encontrado con el requerimiento de magnitud, o como este caso es simple, se tiene que:

$$\underline{\lambda_{1-2} = \frac{-(3 + Kd) \pm \sqrt{(3 + Kd)^2 - 128}}{2}}$$

$$PR(\lambda_{1-2}) = -4 = \frac{-(3 + Kd)}{2} \Rightarrow \underline{Kd = 5}$$

En consecuencia:

$$G(s) = \frac{30}{s^2 + 8s + 2} \Rightarrow M(s) = \frac{30}{s^2 + 8s + 32}$$

Como se ve el error será: $e(\infty), al\ escalón = \frac{1}{1+15} = \frac{1}{16} < \frac{1}{15}$

Veamos un Diseño Directo:

Como ya se determinó, para que se cumpla el error debía ser:

$Kp \geq 28$. En orden de variar si se elige $Kp = 28$

Por lo tanto: $\omega_n^2 = 2 + Kp = 30 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{30}$

Si se elige $\delta = 0.707$ será: $|\sigma| = \omega d = \sqrt{15}$, en consecuencia los polos serán:

$$\underline{\lambda_{1-2} = -\sqrt{15} \pm j\sqrt{15}}$$

La ecuación característica es: $s^2 + \sqrt{60}s + 30 = 0$

Comparándola con la general en función de Kd: $s^2 + (3 + Kd)s + 30 = 0$,

Se obtiene el valor del mismo, que resulta ser:

$$3 + Kd = \sqrt{60} \Rightarrow \underline{Kd = 4.746}$$

Recordar que Kp era: $\underline{Kp = 28}$

Como se puede apreciar son dos diseños muy similares.-

Ejemplo 7:

Veremos el diseño de un control P-D, la planta a controlar tiene características integradoras, por lo tanto el sistema resultante será Tipo "1". Supongamos que:

$$Gp(s) = \frac{10(s + 60)}{s(s + 2)} \quad \text{Las especificaciones son:}$$

1º) $Mp(\%) \leq 20\%$; 2º) $T_E(2\%) \leq 0.275 \text{ seg.}$; 3º) $T_p \leq 0.125 \text{ seg.}$ y 4º) $e(\infty), (\text{rampa}) \leq 1/60$.

Encontrar los valores de Kp y Kd adecuados para tal fin.

Diseño Directo:

La función de transferencia del lazo del sistema será:

$$G(s) = \frac{10 Kp (s + 60)}{s[(s + 2) + 10 Kd (s + 60)]}$$

La ecuación característica será:

$s(s + 2) + 10Kd s(s + 60) + 10Kp(s + 60) = 0$, Operando se llega a:

$$s^2 + \frac{(2 + 600Kd + 10Kp)}{(1 + 10Kd)} s + \frac{600Kp}{(1 + 10Kd)} = 0$$

Ahora se deberá elegir la ubicación de los polos complejos en base a las especificaciones de funcionamiento del transitorio:

$$1º) \delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0.20)^2}{\pi^2 + (\ln 0.20)^2}} \Rightarrow \underline{\delta \geq 0.456}$$

$$2^o) T_E(2\%) \cong \frac{4}{|\sigma|} \leq 0.275 \text{ seg.} \Rightarrow |\sigma| \geq 14.545$$

$$3^o) T_p = \frac{\pi}{\omega d} \leq 0.125 \text{ seg.} \Rightarrow \omega d \geq 25.133$$

Si se elige $\delta = 0.50 \Rightarrow \omega d = \sqrt{3}|\sigma|$; si además: $|\sigma| = 15; \omega d = 25.98 > 25.13$

En consecuencia los polos complejos elegidos serán:

$$\lambda_{1-2} = -15 \pm j15\sqrt{3}$$

La ecuación característica será:

$$s^2 + 2|\sigma|s + (\sigma^2 + \omega_d^2) = s^2 + 30s + 900 = 0$$

Por ende comparando las ecuaciones resulta:

$$\begin{cases} (2 + 600Kd + 10Kp = 30(1 + 10Kd)) \\ 600Kp = 900(1 + 10Kd) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 300Kd + 10Kp = 28 \\ 900Kd - 600Kp = -900 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se llega a:

$$\begin{cases} Kd = \frac{43}{450} \cong 0.0288 \\ Kp = \frac{29}{15} \cong 1.9333 \end{cases} \quad \text{Se puede verificar, analíticamente; } T_p, M_p (\%) \text{ y el error.}$$

$$T_p \cong \frac{1}{15\sqrt{3}} \left[90^\circ - \tan^{-1} \frac{15\sqrt{3}}{45} + 90^\circ \right] \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow T_p (\text{seg.}) \cong 0.10076 < 0.125 \text{ seg.} -$$

$$M_p (\%) \cong \frac{\sqrt{2700}}{60} \times e^{-15 \times 0.10076} \times 100 \Rightarrow M_p (\%) \cong 19.105\% < 20\%. -$$

Reemplazando Kp y Kd en G(s) quedará:

$$G(s) = \frac{10 \times 29/15(s+60)}{s[s+2+13/45(s+60)]} \quad \text{Operando se llega a:}$$

$$G(s) = \frac{15(s+60)}{s(s+15)} \Rightarrow M(s) = \frac{15(s+60)}{(s^2 + 30s + 900)}$$

El error a la rampa de pendiente unitaria debe ser como se sabe:

$$e(\infty) = \frac{1}{Kv} = \frac{1}{60} \quad \text{o también: } e(\infty) = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{30 - 15}{900} = \frac{1}{60}$$

Otra forma de hacer el diseño usando la Técnica del Lugar de las Raíces
De la G(s) se obtiene primero la relación entre Kp y Kd para que se cumpla la especificación del error a la rampa de pendiente unitaria.

$$Kv = \frac{600Kp}{2 + 600Kd} = \frac{300Kp}{1 + 300Kd}$$

$$\text{Por lo tanto: } e(\infty) = \frac{1 + 300Kd}{300Kp} \leq \frac{1}{60} \Rightarrow 300Kp \geq 60 + 18000Kd$$

En consecuencia la relación buscada será:

$$Kp \geq 0.20 + 60Kd \quad \text{Se puede tomar: } \underline{Kp = 0.20 + 60Kd}$$

Reemplazando en G(s) se tiene:

$$G(s) = \frac{10(0.20 + 60Kd)(s + 60)}{s[(s + 2) + 10Kd(s + 60)]}$$

La ecuación característica será la siguiente:

$$s[(s + 2) + 10Kd(s + 60)] + 10(0.20 + 60Kd)(s + 60) = 0$$

Para obtener la $G_{\text{equiv}}(s)$, con Kd como parámetro variable será:
 $[s^2 + 2s + 2(s + 60)] + 10Kd[s(s + 60) + 60(s + 60)] = 0$

$$\underline{G_{\text{equiv}}(s) = \frac{10Kd(s + 60)^2}{(s^2 + 4s + 120)}}$$

Graficando el lugar de los polos del sistema al variar el parámetro Kd, por ejemplo con Rlplot del Csad/Matlab, se obtiene el mostrado en la figura 28. Las ramas dominantes deberían pasar por la ubicación de los polos dominantes $\lambda_{1-2} = -15 \pm j15\sqrt{3}$, para el valor de $Kd=13/450=0.02888$. También esto se puede verificar aplicando el requerimiento angular a saber:

$$\sum \phi_z - \sum \phi_p = -180^\circ$$

$$\left[2 \operatorname{tag}^{-1} \frac{15\sqrt{3}}{45} \right] - \left[180^\circ - \operatorname{tag}^{-1} \frac{(15\sqrt{3} + \sqrt{116})}{13} + 180^\circ - \operatorname{tag}^{-1} \frac{(15\sqrt{3} - \sqrt{116})}{13} \right] =$$

$$(60^\circ) - (130.52^\circ + 109.48^\circ) = -180^\circ$$

Por lo tanto se verifica, y el valor del parámetro Kd será:

$$K = 10Kd = \frac{20.009 \times 38.98}{2700} = \frac{780}{2700} = \frac{13}{45} \Rightarrow \underline{Kd = \frac{13}{450} = 0.02888}$$

El valor de Kp será en consecuencia:

$$Kp = 0.20 + 60Kd = 0.20 + 60 \times \frac{13}{450} \Rightarrow \underline{Kp = \frac{29}{15} = 1.9333}$$

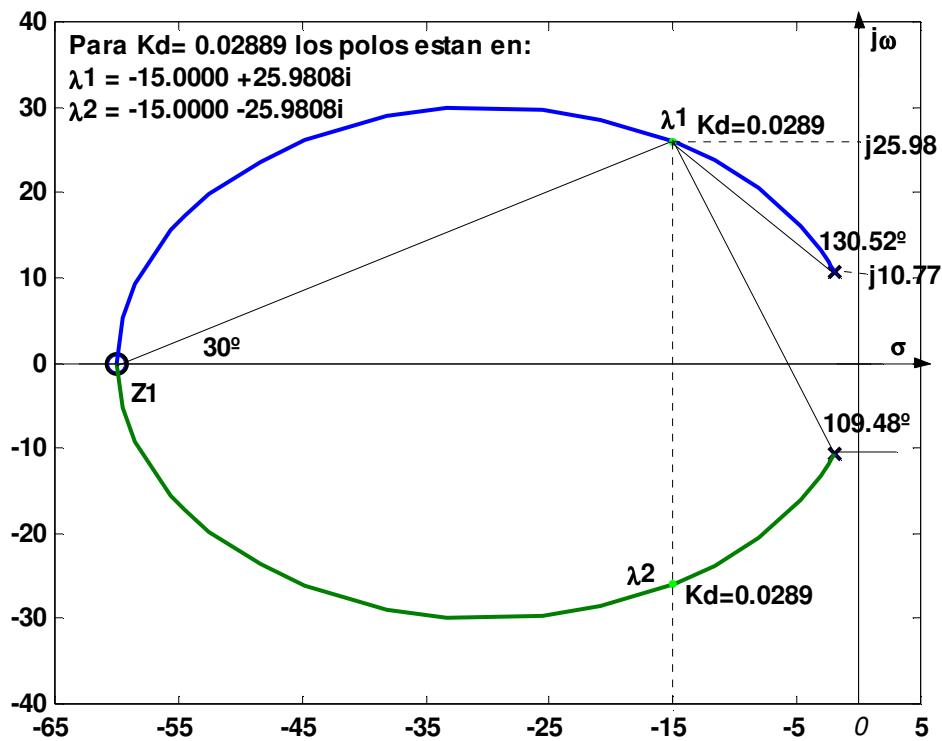


Figura 28
La respuesta al escalón del sistema diseñado se muestra en la figura 29.

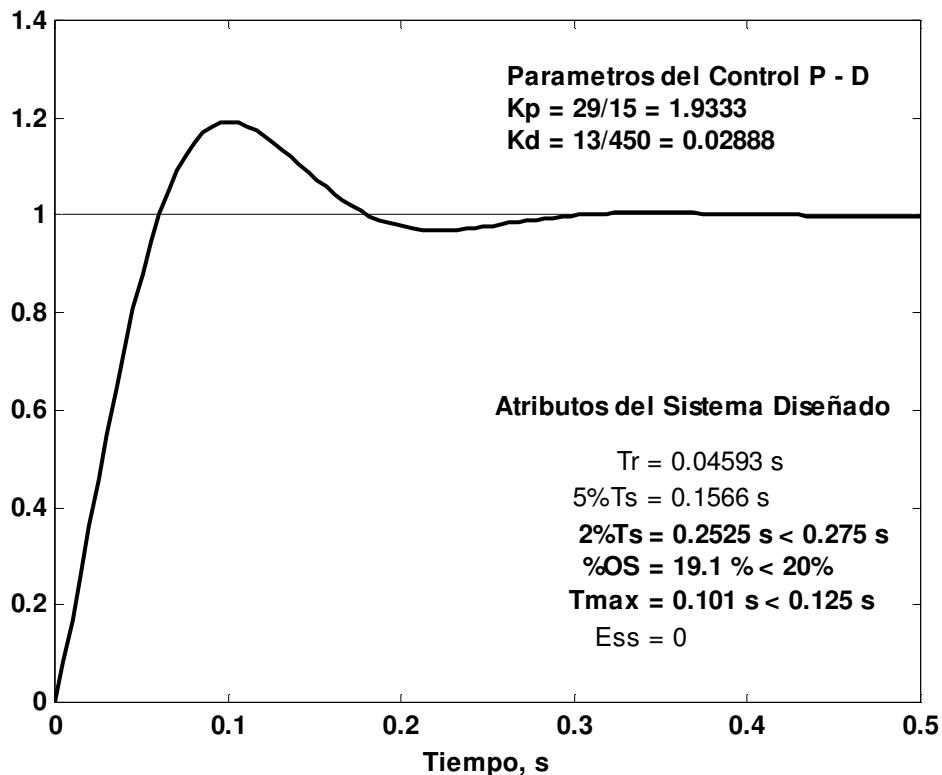


Figura 29

Ejemplo 8:

Una planta tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+5)} \quad \text{Las especificaciones son:}$$

$$1) e_{(\infty)} \leq 0 \quad \text{ante una entrada escalon} \quad 2) Mp(\%) \leq 5\% \quad 3) t_E(5\%) \leq 0,15 \text{ seg.} \quad 4) tp \leq \frac{\pi}{14} \text{ seg.}$$

Se intentará conseguir las con un control P-D.

$$\text{Reduciendo el diagrama: } G'(s) = \frac{10}{s(s+5)+10k_D s} \therefore G(s) = \frac{10k_p}{s(s+15+10k_D)}$$

$$\text{La ecuación característica es: } s^2 + (5+10k_D)s + 10k_p = 0$$

1) Se cumplirá pues el sistema será tipo 1.

$$2) Mp \% \leq 5\% \rightarrow \delta \geq \sqrt{\frac{\ln(Mp)^2}{\pi^2 + \ln(Mp)^2}} \rightarrow \delta \geq 0,69 \quad \text{Se elegirá: } \delta = 0,707$$

$$3) t_E(5\%) \square \frac{2,25}{|\sigma|} < 0,15 \rightarrow |\sigma| \geq 15 \quad 4) tp = \frac{\pi}{w_d} \leq \frac{\pi}{14} \rightarrow w_d \geq 14$$

Como $w_d = |\sigma|$, pues $\delta = 0,707$, se elige $w_d = |\sigma| = 15$

En la figura 32, se muestra la zona de las especificaciones.

Por lo tanto $\lambda_{1-2} = -15 \pm j15 \rightarrow \text{E.C.: } (s^2 + 30s + 450) = 0$

$$\begin{cases} 5+10k_D = 30 \\ 10k_p = 450 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_p = 45 \\ k_D = 2,5 \end{cases}$$

Ejemplo 9: La misma planta con otras especificaciones.- (P-D):

$$\text{Sea } G_p(s) = \frac{10}{s(s+5)} \text{ especificaciones: } \begin{cases} 1^\circ) e(\infty) \text{ ante una entr. escalón} = 0 \\ 2^\circ) Mp \% \leq 17\% \\ 3^\circ) t_E(2\%) \leq 0,275 \text{ seg.} \\ 4^\circ) tp \leq \frac{\pi}{25} \text{ seg} \end{cases}$$

Con un control P-D, se tendrá:

$$G(s) = \frac{10K_p}{s[s + (5 + 10K_D)]}$$

$$\text{La ecuación característica será: } \rightarrow s^2 + (5 + 10K_D)s + 10K_p = 0$$

1º) Se cumplirá, pues el sistema es tipo "1".

$$2^\circ) \delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0,17)^2}{\pi^2 + (\ln 0,17)^2}} \Rightarrow \underline{\delta \geq 0,49} \rightarrow \underline{\delta = 0,5} \rightarrow \underline{\omega d = \sqrt{3}|\sigma|}$$

$$3^\circ) t_E(2\%) \cong \frac{4}{|\sigma|} \leq 0,275 \rightarrow |\sigma| \geq 14,54 \rightarrow \underline{\sigma = -15}$$

$$4^\circ) tp = \frac{\pi}{\omega d} \leq \frac{\pi}{25} \rightarrow \underline{\omega d \geq 25}$$

$$\sigma = -15 \rightarrow \omega d = \sqrt{3}15 \Rightarrow \underline{\omega d = 25,98 > 25} \Rightarrow \boxed{\lambda_{1-2} = -15 \pm j15\sqrt{3}}$$

$$\lambda_{1-2} = \frac{-(5 + 10K_D) \pm \sqrt{(5 + 10K_D)^2 - 40K_p}}{2}$$

$$\text{Re } al(\lambda_1) = -15 = -\frac{(5 + 10K_D)}{2} \Rightarrow \underline{\underline{K_D = 2,5}}$$

$\therefore G(s) = \frac{10K_P}{s[s + (5 + 10K_D)]} = \frac{10K_P}{s(s + 30)}$ Se deberá fijar K_P para que $\omega d = 15\sqrt{3}$.

Aplicando el requerimiento de magnitud:

$$K^* = 10K_P = 15^2 + 3(15)^2 = 4 \times 15^2 = 900 \rightarrow \underline{\underline{K_P = 90}}$$

$$\text{y } K^* = 10K_P = 15^2 + 25^2 = 850 \rightarrow \underline{\underline{K_P = 85}}$$

Por lo tanto en el rango $\underline{\underline{85 < K_P < 90}}$ se cumplirá el transitorio pedido.

Cuando la Planta es de Tercer Orden

Ejemplo 10: $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ especificaciones: $\begin{cases} 1^\circ) Mp(\%) \leq 5\% \\ 2^\circ) T_E(2\%) \leq 1\text{seg} \\ 3^\circ) Tp \leq \pi/4 \text{ seg.} \\ 4^\circ) e(\infty), \text{rampa} \leq 0.35 \end{cases}$

Con un controlador P-D se tendrá:

$$G(s) = \frac{K_P}{s(s+1)(s+2) + K_D s} = \frac{K_P}{s[s^2 + 3s + (2 + K_D)]}$$

La ecuación característica será: $\rightarrow \underline{\underline{s^3 + 3s^2 + (2 + K_D)s + K_P = 0}} \quad (1)$

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ) Mp\% \leq 5\% \rightarrow \text{se elige } \underline{\delta = 0,707} \rightarrow \omega d = |\sigma| \\ 2^\circ) t_E(5\%) \leq 1\text{seg.} \approx \frac{4}{|\sigma|} \rightarrow |\sigma| = 4 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma = -4}} \\ 3^\circ) tp \leq \frac{\pi}{4} \text{ seg} \approx \frac{\pi}{\omega d} \rightarrow \underline{\underline{\omega d \geq 4}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda_{1-2} = -4 \pm j4 \Rightarrow (s^2 + 8s + 32) \\ \lambda_3 = -3 \end{array}$$

Las incógnitas serían λ_3 , K_P y K_D .

La ecuación característica deseada es: $\rightarrow (s - \lambda_3)(s^2 + 8s + 32) = 0$

$$\boxed{s^3 + (8 + \lambda_3)s^2 + (32 - 8\lambda_3)s + (-32\lambda_3) = 0} \quad (2)$$

Comparando (1) con (2), se tiene:

- $8 - \lambda_3 = 3 \Rightarrow \underline{\lambda_3 = +5} \Rightarrow \text{El sistema sería Inestable.}$
- $2 + K_D = (32 - 8\lambda_3) = (32 - 40) = -8 \Rightarrow \underline{\underline{K_D = -10}}$
- $K_P = -(32\lambda_3) \Rightarrow \underline{\underline{K_P = -160}}$

Los polos móviles de $G(s)$ cuando varia K_D se indican en la figura 30, el otro está fijo en $s=0$.

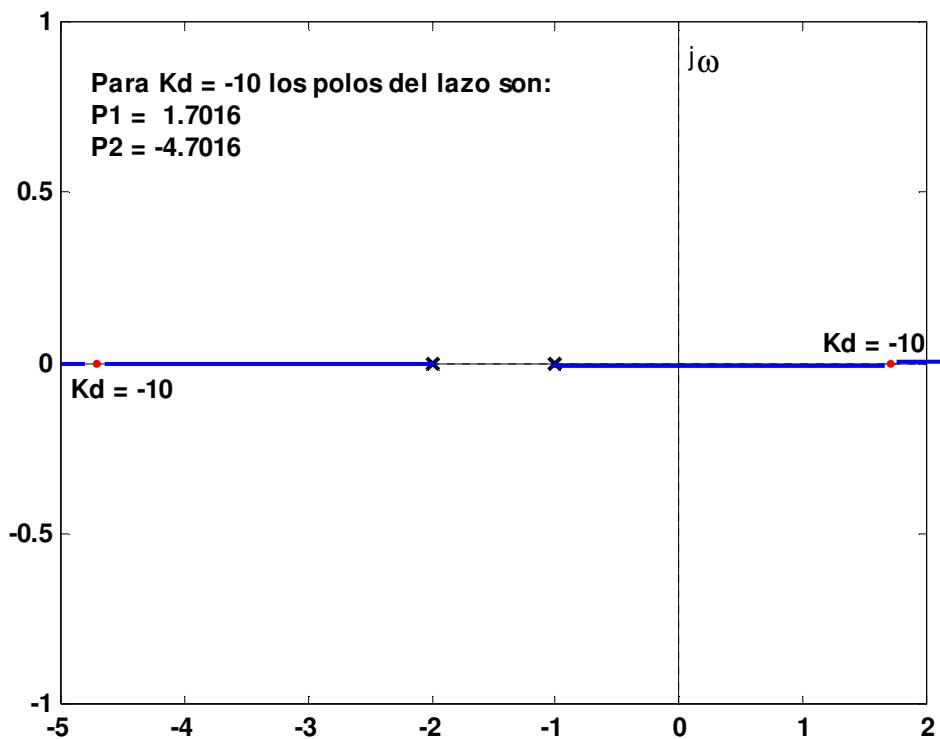


Figura 30

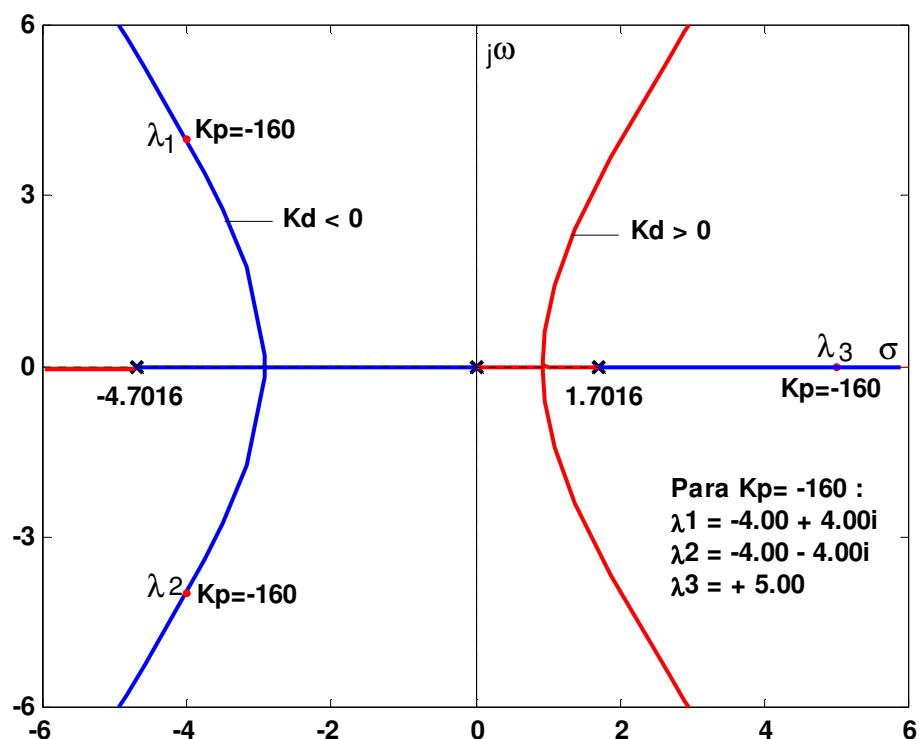


Figura 31

El Lugar de las Raíces de $G(s)$ cuándo $K_D = -10$ y $K_P < 0$, variable es el indicado en la figura 31. La misma confirma todo lo ya analizado.-

Ejemplo 11: (Continuación del Ejemplo 10)

Por lo tanto habrá que diseñar otro $G_c(s)$. Se puede intentar, (no es la única solución), con un controlador de adelanto de fase de dos etapas, con los dos polos en la misma posición, y los dos ceros que cancelen los polos de la planta en -1 y -2, solo para facilitar los cálculos. Aplicando el requerimiento angular se determinara la posición de los polos del controlador, para que los polos dominantes sean: $\lambda_{1-2} = -4 \pm j4$.

La figura 31a se usa para esto:

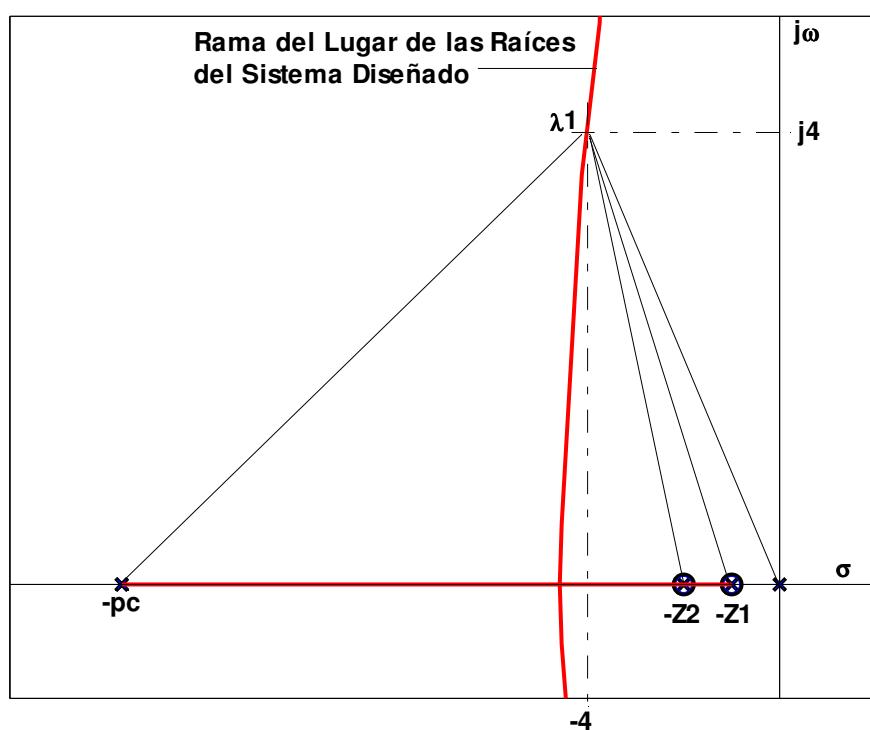


Figura 31a

$$\sum \phi_z - \sum \phi_p = -180^\circ$$

$$-\left[2\operatorname{tag}^{-1} \frac{4}{pc-4} + 135^\circ \right] = -180^\circ \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}^{-1} \frac{4}{pc-4} = 22.5^\circ$$

$$pc = \frac{4}{\operatorname{tag}(22.5^\circ)} + 4 \quad \Rightarrow \quad pc = 13.657$$

La función de transferencia del controlador será:

$$G_c(s) = \frac{A_1 A_2 (s + 1/a_1 T_1)(s + 1/a_2 T_2)}{(s + 1/T_1)(s + 1/T_2)} ;$$

Si $A = A_1 A_2$, la $G_c(s)$ será:

$$G_c(s) = \frac{A(s+1)(s+2)}{(s+13.657)^2} ; \text{ Los valores de los parámetros serán:}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{a_1 T_1} = 1 \quad y \quad \frac{1}{T_1} = 13.657 \\ \frac{1}{a_2 T_2} = 2 \quad y \quad \frac{1}{T_2} = 13.657 \end{cases} & \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 13.657 \\ T_1 = 0.0732 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} a_2 = 6.828 \\ T_2 = 0.0732 \end{cases} \end{aligned}$$

El valor de la ganancia A, se obtiene con el requerimiento de magnitud:

$$A = 109.258 \times \sqrt{32} \quad \Rightarrow \quad \underline{A = 618}$$

En consecuencia:

$$Gc(s) = \frac{618(s+1)(s+2)}{(s+13.657)^2}$$

La función de transferencia del lazo del sistema diseñado será:

$$G(s) = Gc(s) Gp(s) = \frac{618}{s(s+13.657)^2} : \text{ El tercer polo estará en:}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_{n-1} = -27.314 \quad \Rightarrow \quad -8 + \lambda_3 = -27.314 \quad \Rightarrow \quad \underline{\lambda_3 = -19.314}$$

Como se puede ver el par complejo es realmente dominante.

Verifiquemos si se cumplen las especificaciones pedidas:

$$Tp \cong \frac{1}{4} [90^\circ - 0^\circ + 90^\circ + 14.64^\circ] \frac{\pi}{180^\circ} \quad \Rightarrow \quad \underline{Tp \cong 0.849 \text{ seg. -}}$$

$$Mp(\%) \cong \frac{19.314}{15.828} \times e^{-4 \times 0.849} \times 100 \quad \Rightarrow \quad \underline{Mp(\%) \cong 4.10\% < 5\%}$$

$$e(\infty), Rampa = \frac{(13.657)^2}{618} \quad \Rightarrow \quad \underline{e(\infty) = 0.318 \leq 0.35}$$

Ejemplo 11a:

Como se verá al final del curso, cuando se estudie el diseño por realimentación de los estados, (control moderno), si se usa la forma canónica controlable de la planta a controlar:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los polos se podrán ubicar con total libertad, por ejemplo en:

$$\lambda_{1-2} = -4 \pm j4 \quad y \quad \lambda_3 = -20$$

Resulta la matriz de realimentación de los estados K, y la ganancia de pre compensación G:

$$K = \begin{bmatrix} 640 & 190 & 25 \end{bmatrix} \quad y \quad G = 640$$

Las matrices del modelo del sistema diseñado resultan:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -28 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 640 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si grafica la respuesta temporal del sistema diseñado se verifica que todas las especificaciones solicitadas se cumplen.-

Ejemplo 12:

Sea $G_p(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+15)}$ Las especificaciones solicitadas son las siguientes:

$$\begin{cases} 1^o) Mp\% \leq 5\% \\ 2^o) t_E(2\%) \leq 3 \text{ seg.} \\ 3^o) tp \leq \frac{\pi}{1,5} \approx 2,1 \text{ seg} \\ 4^o) e(\infty) \text{ ante una entr. rampa} = 0,75 \end{cases}$$

Con un control P - D se tendrá:

$$G(s) = \frac{10k_p}{s(s+1)(s+15)+10k_D s} = \frac{10k_p}{s[(s+1)(s+15)+10k_D]}$$

$$\therefore \text{E.C: } s^3 + 16s^2 + (15 + 10k_D)s + 10k_p = 0$$

$$1^o) Mp\% \leq 5\% \rightarrow \delta \geq 0,69 \rightarrow \delta = 0,707 \rightarrow w_d = |\sigma|$$

$$2^o) t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 3 \text{ seg} \rightarrow |\sigma| \geq 1,333 \rightarrow \sigma = -1,5$$

$$3^o) tp = \frac{\pi}{w_d} \leq \frac{\pi}{15} \rightarrow w_d \geq 1,5 \therefore \lambda_{1-2} = -1,5 \pm j1,5 \Rightarrow (s^2 + 3s + 4,5)$$

$$\therefore \text{E.C. } (s - \lambda_3)(s^2 + 3s + 4,5) = 0$$

$$s^3 + (3 - \lambda_3)s^2 + (4,5 - 3\lambda_3)s + (-4,5\lambda_3) = 0$$

$$\text{Como } e_{EE} \text{ ante una entrada rampa} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{4,5 - 3\lambda_3}{-4,5\lambda_3} \leq 0,75 \rightarrow \lambda_3 \leq -12 \quad (1)$$

$$\text{Y para que } \lambda_{1-2} \text{ sean dominantes} \rightarrow \lambda_3 \leq 5\sigma \rightarrow \lambda_3 \leq -7,5 \quad (2)$$

$$\text{Interceptando 1) y 2)} \rightarrow \lambda_3 \leq -12 \quad (3)$$

$$\therefore 16 = 3 - \lambda_3 \rightarrow \lambda_3 = -13 \text{ se cumple 3)}$$

$$15 + 10k_D = 4,5 - 3\lambda_3 = 43,5 \rightarrow k_D = 2,85$$

$$-4,5\lambda_3 = 10k_p \rightarrow k_p = -0,45\lambda_3 \rightarrow k_p = 5,85$$

$$\therefore \frac{58,5}{s(s^2 + 16s + 43,5)} \cong \frac{58,5}{s(s + 3,4723)(s + 12,5277)}$$

$$M(s) = \frac{58,5}{s^3 + 16s^2 + 43,5s + 58,5}$$

$$\therefore e_{EE} \text{ ent rampa} = \frac{43,5}{58,5} = 0,7436 < 0,75$$

La figura 32 muestra la ubicación de los polos del sistema diseñado:

La figura 33 muestra las respuestas al escalón y a la rampa. En ellas se comprueba que se cumple con las especificaciones solicitadas.

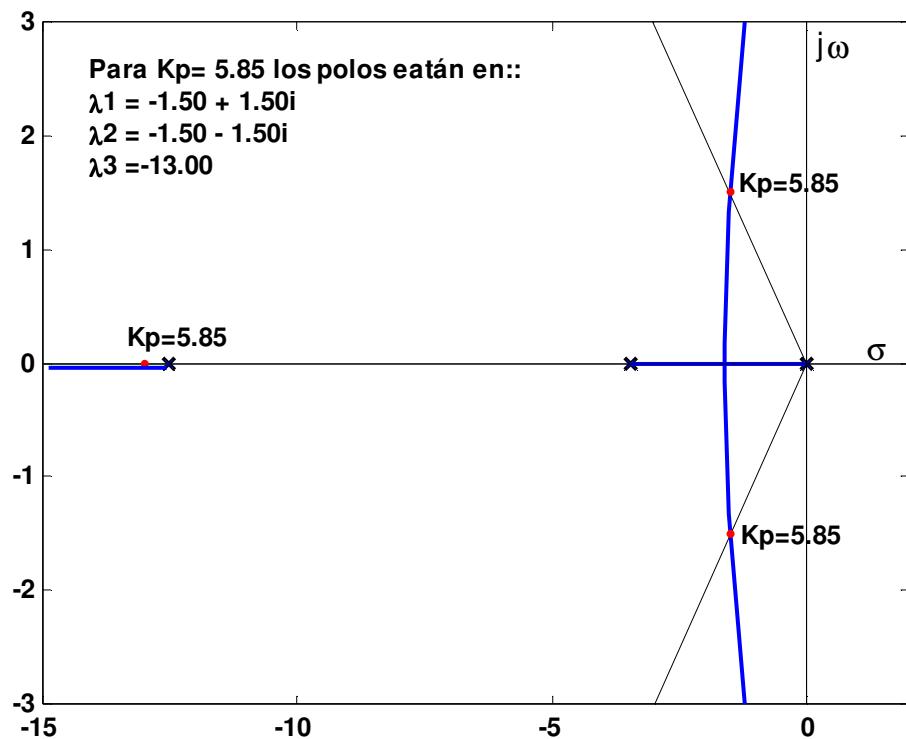


Figura 32

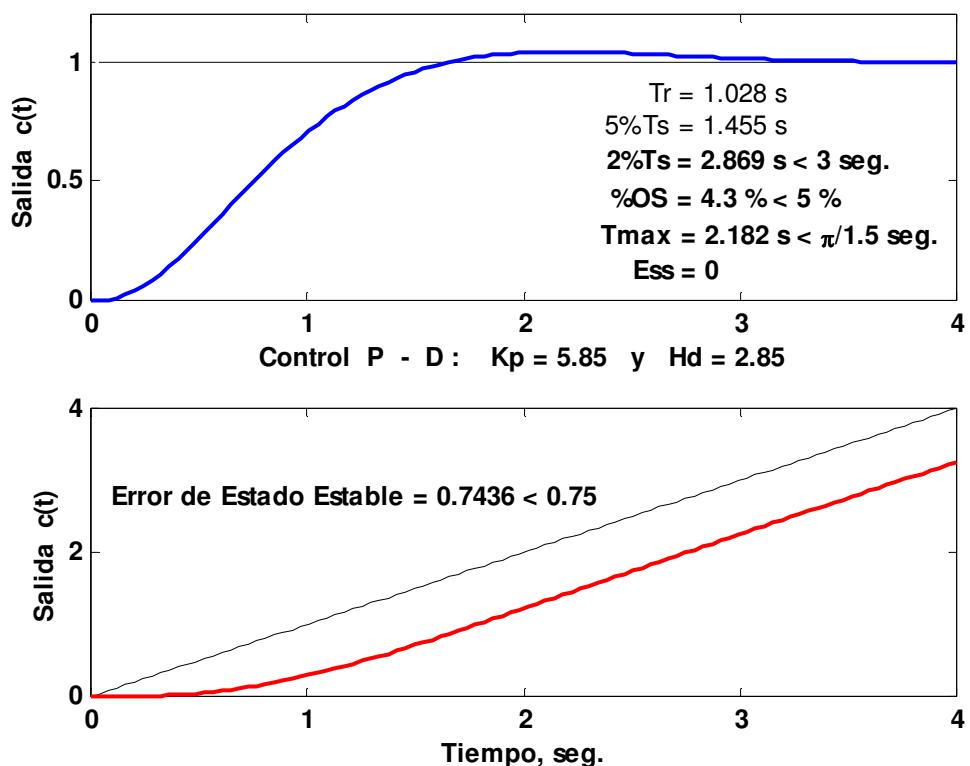


Figura 33

6º PI-D: PID Modificado:

Se elimina un cero a $M(s)$ de los que agregaría el PID serie clásico. El diagrama de bloques es el mostrado en la figura 34:

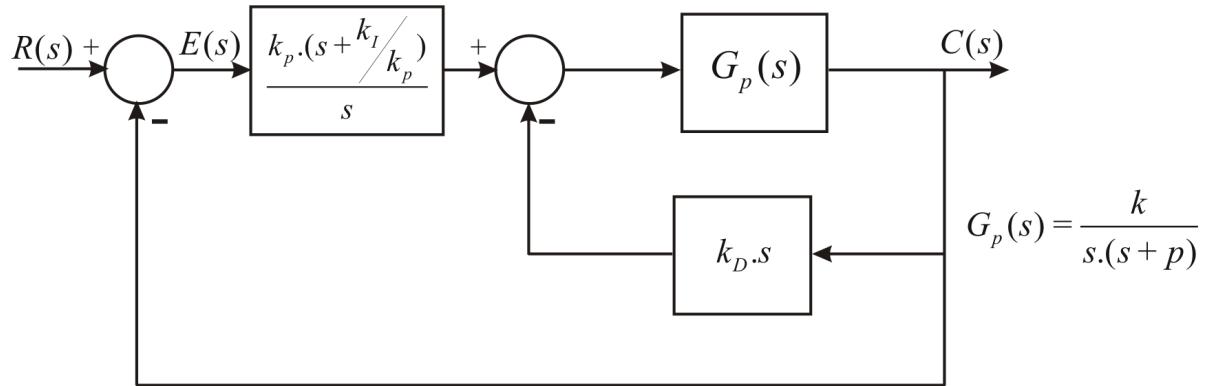


Figura 34

$$G(s) = \frac{kKp \left(s + \frac{Ki}{Kp} \right)}{s^2 [s + (p + kKd)]} \Rightarrow M(s) = \frac{kKp \left(s + \frac{Ki}{Kp} \right)}{s^3 + (p + kKd)s^2 + kKps + kKi}$$

Como se puede ver, la ecuación característica es la misma que con un controlador PID serie clásico, pero con un solo cero en lugar de dos. La figura 35 muestra como se podría modificar el lugar de las raíces del sistema.

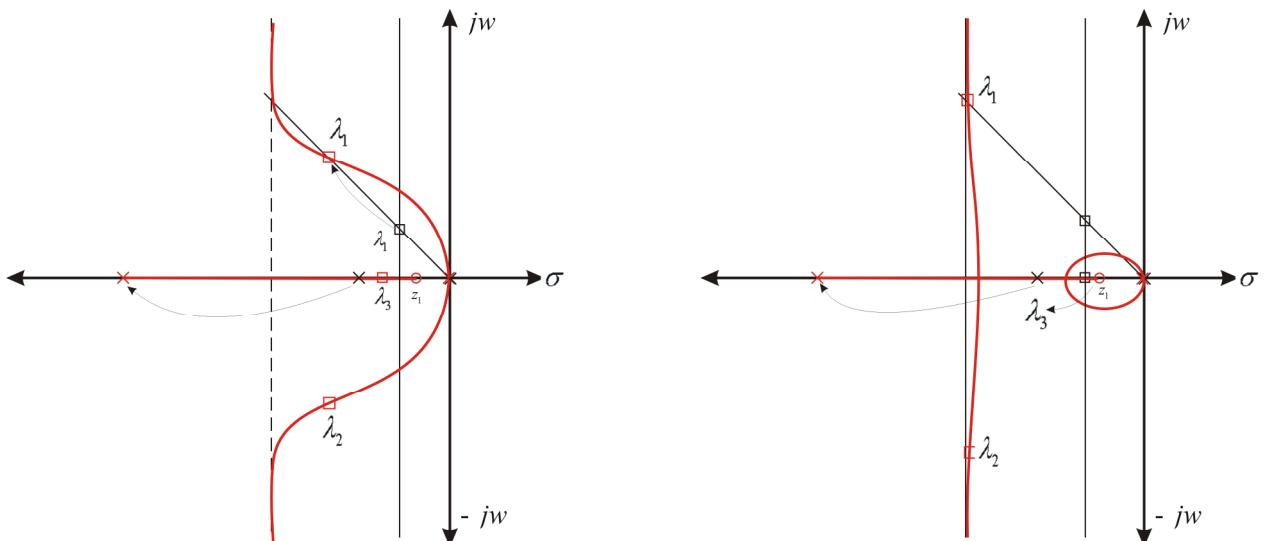


Figura 35

Si el par (λ_3, Z_1) están muy próximos, el diseño será un éxito.

El procedimiento podría ser:

- Se elige la ubicación nueva del polo del lazo $\rightarrow K_d$.

- Se elige la ubicación del cero $\rightarrow \frac{Ki}{Kp}$
- Se determina $Kpk = K$, para que λ_{1-2} estén en la posición deseada.
- Se determina Ki .

Otra forma sería se elige el par de polos complejos conjugados de acuerdo con la especificaciones y se ajusta la posición del tercer polo cerca del origen del plano s, para atenuar el efecto desestabilizador del cero del sistema agregado por el controlador PI serie. Las incógnitas serían Kp , Kd y Ki . Si el cero Z_1 y el polo λ_3 resultan muy próximos, (la separación generalmente del orden de las milésimas), el diseño será un éxito, veremos un ejemplo concreto.-

Ejemplo 13:

La planta a controlar tiene la función de transferencia:

$$Gp(s) = \frac{5}{s(s+3)}, \text{ las especificaciones solicitadas son las siguientes:}$$

$$\begin{cases} 1^{\circ}) Mp(\%) \leq 5\% \\ 2^{\circ}) T_E(2\%) \leq 1 \text{ seg.} \\ 3^{\circ}) Tp \leq 0.65 \text{ seg.} \\ 4^{\circ}) e(\infty), rampa = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\text{La función de transferencia del lazo será: } G(s) = \frac{5Kp(s + Ki/Kp)}{s^2[s + (3 + 5Kd)]}$$

Y la ecuación característica: $s^2[s + (3 + 5Kd)] + 5Kp(s + Ki/Kp) = 0$, operando:

$$s^3 + (3 + 5Kd)s^2 + 5Kp s + 5Ki = 0 \quad (1)$$

La ubicación de los polos dominante será:

$$1^{\circ}) \delta \geq 0.69 \quad 2^{\circ}) |\sigma| \geq 4.21 \quad 3^{\circ}) \omega d \geq 4.833$$

$$\text{Si se elige, } \delta = 0.707 \Rightarrow \omega d = |\sigma|$$

$$\text{Y a su vez } |\sigma| = 5 \Rightarrow \lambda_{1-2} = -5 \pm j5$$

La ecuación característica es entonces:

$$(s - \lambda_3)(s^2 + 10s + 50) = 0 \Rightarrow s^3 + (10 - \lambda_3)s^2 + 10(5 - \lambda_3)s + (-50\lambda_3) = 0$$

Ahora hay que adoptar la ubicación de λ_3 , que deberá estar muy cerca del cero del sistema en $-Z_1 = -Ki/Kp$, agregado por la parte serie PI. La proximidad entre λ_3 y Z_1 debe ser del orden de las milésimas generalmente. Se adoptó primero $\lambda_3 = -0.05$, y resultó un $Mp(\%) > 5\%$, por lo tanto se acerca más al origen por ejemplo $\lambda_3 = -0.04$ para que Mp baje.-

En consecuencia la ecuación característica será:

$$s^3 + 10.04s^2 + 50.4s + 2 = 0 \quad (2)$$

Comparando (1) y (2), resulta:

$$\begin{aligned}
 3 + 5Kd &= 10.04 & \Rightarrow & Kd = 1.408 \\
 5Kp &= 50.40 & \Rightarrow & Kp = 10.08 \\
 5Ki &= 2 & \Rightarrow & Ki = 0.40
 \end{aligned}$$

Se puede verificar que el coeficiente más sensible al cambio del tercer polo es Ki , (la parte integral).

El cero estará ubicado en:

$$-Z = -\frac{Ki}{Kp} \quad -Z = -\frac{0.40}{10.08} \quad \Rightarrow \quad -Z = -0.0397$$

Por ende la separación entre el tercer polo y el cero resultó: $\Delta = 0.0003175$

Por lo tanto el diseño será bastante bueno y el transitorio no se alterara sustancialmente con la parte serie PI.-

La función de transferencia del lazo es en consecuencia:

$$G(s) = \frac{50.4(s + 0.0397)}{s^2(s + 10.04)} \quad \Rightarrow \quad M(s) = \frac{50.4(s + 0.0397)}{s^3 + 10.04s^2 + 50.4s + 2}$$

La respuesta temporal del sistema diseñado se muestra en la figura 36.-

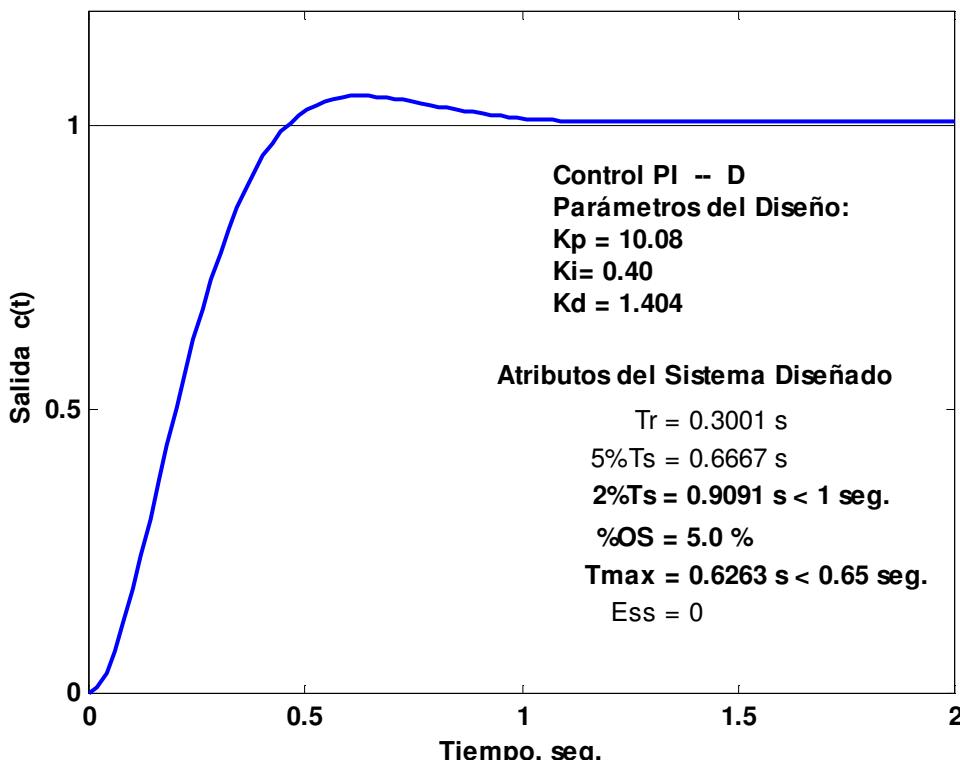


Figura 36

Como se puede apreciar se verifican todas las especificaciones solicitadas para el diseño con el control PI -- D.-

7º) I-PD: PID Modificado

El diagrama de bloques sería el mostrado en la figura 37.

Se eliminan los dos ceros que agregaría a $M(s)$ el controlador PID clásico.

Diseño Directo:

- Si la planta $G_p(s)$ no tiene ceros y es de segundo orden siempre hay una solución.
- Se podría fijar los tres polos (si $G_p(s)$ es de orden 2), λ_{1-2} deseados y $\lambda_3 \leq 5\sigma$, (si no se especifica el $e(\infty)$), sino el valor que resulte.-
- Si $n=3$ no siempre hay una solución. Se fijan λ_{1-2} , λ_3 y las incógnitas serán λ_4 , k_p , k_D y k_I . Si resulta $\lambda_4 \leq 5\sigma$ el diseño será un éxito.

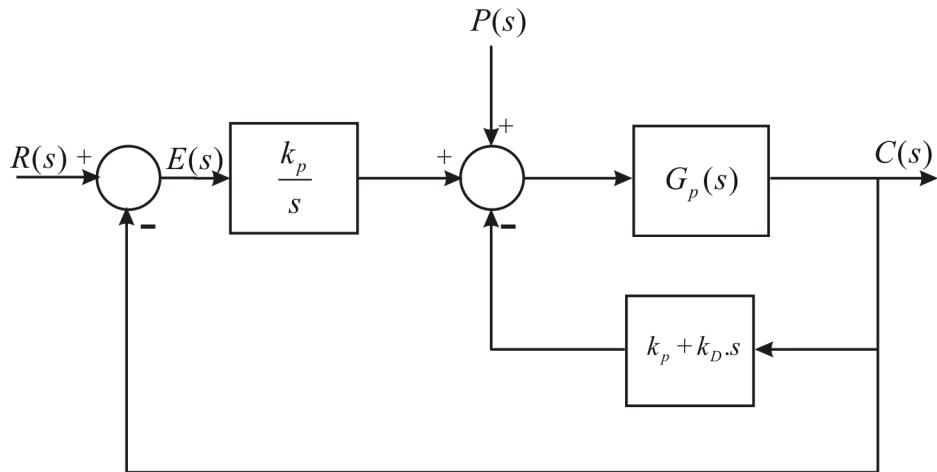


Figura 37

$$\text{Si } G_p(s) = \frac{k}{s(s+p)}$$

$$G(s) = \frac{kKi}{s[s^2 + (p + kKd)s + kKp]} \Rightarrow M(s) = \frac{kKi}{s^3 + (p + kKd)s^2 + kKps + kKi}$$

Para los mismos valores de K_p , K_i y K_d las raíces de la ecuación característica son las mismas que para el PID serie clásico. La Figura 38 indica cómo se podría modificar el lugar de las raíces del sistema. Si $\lambda_3 \leq 5\sigma$, el diseño será un éxito.

Ejemplo 14:

Sea $G_p(s) = \frac{2}{s(s+4)}$ y las especificaciones:

- $$\begin{cases} 1^\circ) Mp\% \leq 5\% \\ 2^\circ) t_E(5\%) \leq 0,575 \text{ seg.} \\ 3^\circ) tp \leq 1 \text{ seg} \\ 4^\circ) e(\infty) \text{ ante una entr. escalon} = 0 \rightarrow \text{se cumple} \\ 5^\circ) e(\infty) \text{ ante una entr. rampa} \leq 0,275 \end{cases}$$

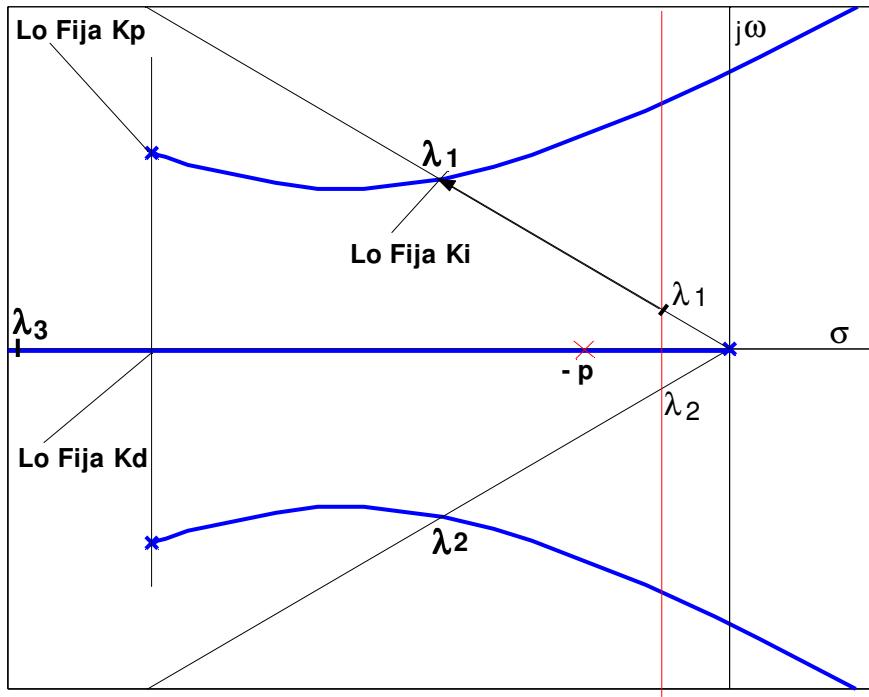


Figura 38

Para el transitorio:

$$1^{\circ}) Mp \rightarrow \delta \geq 0,69 \rightarrow \delta = 0.707$$

$$2^{\circ}) t_E \rightarrow \frac{4,5\delta^2}{|\sigma|} = \frac{2,25}{|\sigma|} \leq 0,575 \rightarrow |\sigma| \geq 3,913 \quad \Rightarrow \lambda_{1-2} = -4 \pm j4$$

$$3^{\circ}) tp = \frac{\pi}{w_d} \leq 1 \rightarrow w_d \geq \pi$$

La ecuación característica será:

$$(s - \lambda_3)(s^2 + 8s + 32) = 0$$

$$s^3 + (8 - \lambda_3)s^2 + (32 - 8\lambda_3)s + (-32\lambda_3) = 0$$

$$\text{Para que sean dominantes } \lambda_{1-2} \rightarrow \lambda_3 \leq 5\sigma \rightarrow \lambda_3 \leq -20 \quad 1)$$

Para e_{EE} ante una entrada rampa $\leq 0,275$

$$e_{EE} \text{ ante una entrada rampa} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{32 - 8\lambda_3}{-32\lambda_3} \leq 0,275 \rightarrow \lambda_3 \leq -40 \quad 2)$$

Interceptando 1) y 2) se elegirá: $\lambda_3 = -40$

$$\text{E.C. } (s + 40)(s^2 + 8s + 32) = 0$$

Las incógnitas serán K_i , K_p y K_D .

Por lo tanto elegidos: $\lambda_{1-2} = -4 \pm j4$ y $\lambda_3 = -40$ la ecuación característica será

$$(\text{la deseada}): (s + 40)(s^2 + 8s + 32) = s^3 + 48s^2 + 352s + 1280 = 0$$

La misma en función de K_i , K_p y K_D será:

$$\text{E.C.} \rightarrow s[s(s + 4) + 2(k_p + k_D s)] = 0$$

$$s^3 + (4 + 2k_D)s^2 + 2k_p s + 2k_i = 0$$

$$\therefore \begin{cases} 4 + 2k_D = 48 & k_D = 22 \\ 2k_p = 352 & \rightarrow k_p = 176 \\ 2k_I = 1280 & k_I = 640 \end{cases} \Rightarrow M(s) = \frac{1280}{s^3 + 48s^2 + 352s + 1280}$$

$$e_{EE} \text{ ante una entrada rampa} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{352}{1280} = 0,275$$

La figura 39 muestra la respuesta al escalón unitario en $r(t)$, en ella se aprecia que se cumplen todas las especificaciones de funcionamiento solicitadas.

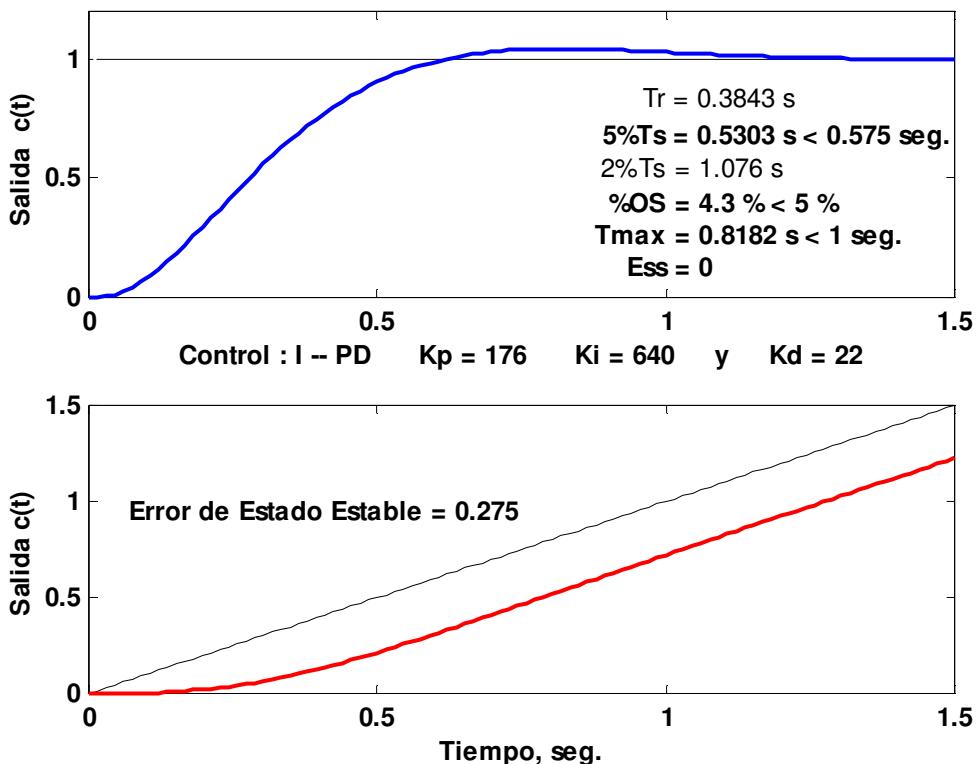


Figura 39

Diseño del control I-PD. Usando los Contornos de las Raíces y la PC.

Si la planta a controlar tiene la función de transferencia siguiente:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+p)} \Rightarrow G(s) = \frac{Ki}{s[s(s+p) + Kp + Kd s]} = \frac{Ki}{s[s^2 + (p+Kd)s + Kp]}$$

Los dos polos finitos del lazo, son funciones de Kd y Kp . Se podrían trazar para varios valores de Kd con Kp variando en forma continua diferentes contornos como ya se sabe. Para un valor de Kd determinado por ejemplo $Kd = Kd_1$ se puede averiguar el valor de $Kp = Kp^*$ que haga que el sistema tenga un polo triple en $s = \sigma^*$. Luego se podrá elegir Ki de acuerdo a las especificaciones.

$$G(s) = Ki \frac{1}{s^3 + (p + Kd_1)s^2 + Kp s} \Rightarrow N \frac{d}{ds} G(s) = 0 \Rightarrow 3s^2 + 2(p + Kd_1)s + Kp = 0$$

La planta a controlar la función que permite trazar el movimiento de los posibles puntos de ruptura será en consecuencia:

$$G'(s) = \frac{(1/3) K_p}{s[s + 2(p + Kd_1)/3]}$$

Procediendo como ya se sabe se puede determinar K_p^* y en consecuencia:

Si $K_p < K_p^*$ en el lugar de la raíces con K_i variable, habrá dos puntos de ruptura de orden uno.

Si $K_p = K_p^*$ en el lugar de la raíces con K_i variable, habrá un punto de ruptura de orden dos, ($y=2$; $q=3$).

Si $K_p > K_p^*$ en el lugar de la raíces con K_i variable no habrá puntos de ruptura. Veamos un ejemplo.-

Ejemplo 15:

La planta a controlar tiene la función de transferencia siguiente:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Las especificaciones solicitadas son:

$$\begin{cases} 1^\circ) Mp(\%) \leq 5\% \\ 2^\circ) T_E(2\%) \leq 2.25 \text{ seg.} \\ 3^\circ) e(\infty) a la rampa \leq 0.65 \end{cases}$$

En base al tiempo de establecimiento pedido el tercer polo deberá estar ubicado aproximadamente en: -8.88, o mas a la izquierda. Por lo tanto se elegirá $K_d = Kd_1 = 10$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Ki}{s^3 + 12s^2 + Kp s} \Rightarrow \\ N \frac{d}{ds} G(s) &= 0 \Rightarrow 3s^2 + 24s + Kp = 0 \\ \Rightarrow L(s) &= \frac{(1/3) Kp}{s(s+8)} \end{aligned}$$

Del lugar de $L(s)$, se puede obtener: $\underline{\sigma^* = -4}$ y $\underline{Kp^* = 48}$

Se pueden graficar tres contornos para:

$$\begin{aligned} Kp < Kp^* &\Rightarrow \underline{Kp = 40} \\ Kp = Kp^* &\Rightarrow \underline{Kp = 48} \\ Kp > Kp^* &\Rightarrow \underline{Kp = 55} \end{aligned}$$

Los tres contornos se muestran en la figura 40.

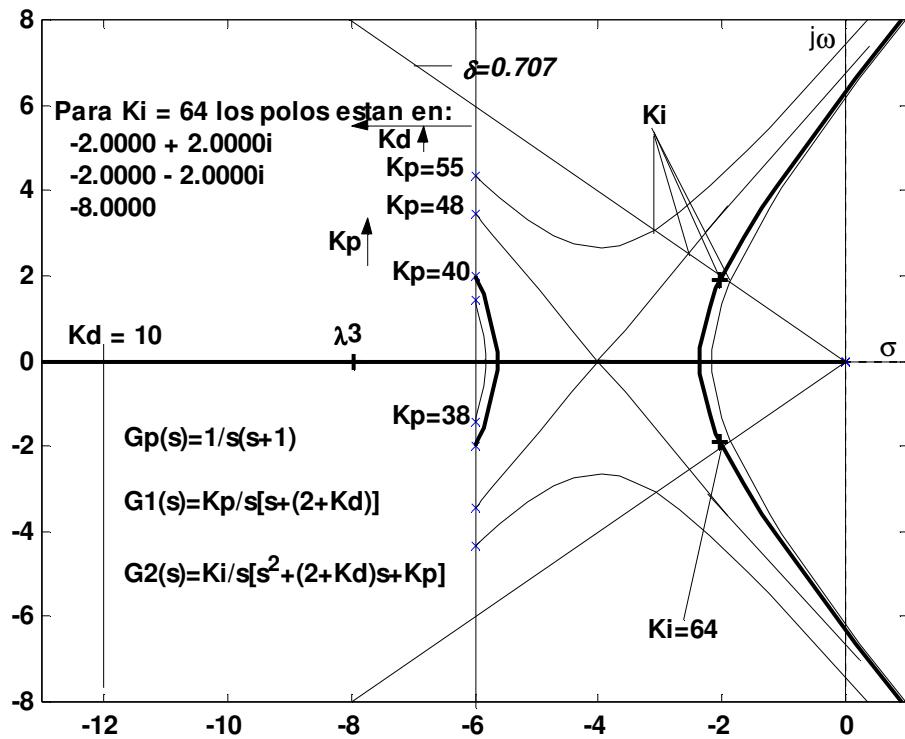


Figura 40

La tabla siguiente resume los resultados, se pueden usar diferentes programas de computación, por ejemplo el Csad/Matlab:

K_d	K_p	K_i	δ	σ	λ_3	$M_p(\%)$	$T_E(2\%)$	$e(\infty)$
10	38	58	0.707	-1.877	-8.245	4%	2.343	0.655
10	40	64	0.707	-2.00	-8.00	4%	2.21	0.625
10	48	89	0.707	-2.54	-700	3.5 %	1.786	0.539
10	55	111	0.707	-3.00	-5.83	2.6 %	1.47	0.495

El error de estado estable es: $e(\infty), rampa = \frac{K_p}{K_i} . -$

Las tres últimas serían una solución, pues el sistema diseñado cumple con todas las especificaciones de funcionamiento pedidas.-

La primera no cumpliría la especificación del error.

La fila marcada más oscura es la elegida.-

Ajuste de Controladores Mediante la Asignación de los Polos: Enfoque Polinomial

¿Dado el modelo de una planta a controlar, es posible sintetizar un controlador serie tal que los polos de lazo cerrado del sistema con realimentación unitaria tengan ubicaciones predeterminadas?

Veremos en este momento que la respuesta es afirmativa. Llamamos a estos métodos como de asignación de polos, que es una idea fundamental en la síntesis de controladores.

Las funciones de transferencia de la planta y el controlador están dadas por los cocientes de polinomios:

$$G_c(s) = N_c(s)/D_c(s) \quad y \quad G_p(s) = B_o(s)/A_o(s) \quad (1)$$

Supongamos que tenemos un *polinomio característico a lazo cerrado deseado*, dado por:

$$P_{cd}(s) = \alpha_{nc} s^{nc} + \alpha_{nc-1} s^{nc-1} + \dots + \alpha_0 \quad (2)$$

Que puede elegirse a partir de la respuesta deseada del sistema a lazo cerrado, cumpliendo, por ejemplo, con cierto tiempo de establecimiento de la respuesta al escalón, sobre elongación, etc.

Nuestro objetivo es ver si, dados los polinomios B_o y A_o que definen la planta, se pueden diseñar N_c y D_c , de modo que el *polinomio característico de lazo cerrado sea $P_{cd}(s)$* .

Vamos a ver que, bajo ciertas condiciones, esto es ciertamente posible.

Antes de entrar en la teoría general, veamos primero un problema simple para ilustrar las ideas principales.

Ejemplo A.

Sea el modelo nominal de la planta:

$$G_p(s) = B_o(s)/A_o(s) = 1/(s+1)(s+2) = 1/(s^2 + 3s + 2)$$

Consideremos un controlador con estructura atraso o adelanto

$$G_c(s) = N_c(s)/D_c(s) = (n_1 s + n_0) / (d_1 s + d_0)$$

El polinomio característico a lazo cerrado satisface la relación:

$$P_{cd}(s) = A_o(s) D_c(s) + B_o(s) N_c(s) = (s^2 + 3s + 2)(d_1 s + d_0) + 1(n_1 s + n_0) \quad (3)$$

que resulta de orden 3. Supongamos que se desea que este polinomio sea:

$$P_{cd}(s) = (s+1)^3 = (s^3 + 3s^2 + 3s + 1) \quad (4)$$

Desarrollando (3) se obtiene:

$$P_{cd}(s) = d_1 s^3 + (d_0 + 3d_1) s^2 + (3d_0 + 2d_1 + n_1) s + (2d_0 + n_0)$$

Igualando coeficientes en (3) desarrollado y (4) obtenemos la ecuación matricial lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_0 \\ n_1 \\ n_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Puede verse fácilmente que la matriz de orden (4 x 4) de esta ecuación es no singular, y así la ecuación tiene solución única, resolviendo se llega a,

(Por ejemplo con el programa Gauss/Matlab):

Este programa aplica el método de Gauss para resolver sistema de ecuaciones lineales:

>> *Gauss*

>> Ingrese matriz de coeficientes: [1 0 0 0; 3 1 0 0; 1 3 1 0; 0 2 0 1]

>> Ingrese la matriz de los términos independientes cambiados de signo:
[1; 3; 3; 1]

>> El sistema tiene solución única

>> ans =

1

0

2

1 o sea: $d_1 = 1$; $d_0 = 0$; $n_1 = 1$ y $n_0 = 1$

En conclusión, el polinomio característico de lazo cerrado deseado (4) se obtiene con el controlador

$G_c(s) = (s+1)/s$.- Resulta un PI serie.-

$$\text{Por lo tanto: } L(s) = \frac{(s+1)}{s(s^2 + 3s + 2)} \Rightarrow M(s) = \frac{(s+1)}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{(s+1)}{(s+1)^3} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

El Teorema de Sylvester

La generalización del ejemplo requiere el siguiente resultado matemático.

Teorema. [Teorema de Sylvester] Dados dos polinomios

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

$$B(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0$$

y la matriz eliminante

$$Me(A, B) = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Entonces $A(s)$ y $B(s)$ son coprimos si y sólo si el determinante de $\{Me\}$ es distinto de cero.-

Recordemos que dos polinomios son *coprimos, o relativamente primos*, si no tienen factores comunes.

El Teorema de Sylvester puede usarse para mostrar cómo la asignación de polos es posible para sistemas lineales estacionarios SISO en general.

Resumimos las condiciones en el siguiente Lema.

Lema. [Asignación de polos vía enfoque polinomial]: Sea el lazo de control SISO de un grado de libertad con controlador y modelo nominal de la planta dados por (1). Supongamos que $B_o(s)$ y $A_o(s)$ son polinomios

coprimos, y sea $Pcd(s)$ un polinomio arbitrario de grado $nc = (2n-1)$ como en (2). Entonces existen polinomios $Nc(s)$ y $Dc(s)$, de grados:

Grado $Nc = \text{grado } P_c = n-1$, tales que:

$$Ao(s) Nc(s) + Bo(s) Dc(s) = Pcd(s): \quad (6)$$

Prueba: Igualando coeficientes de igual potencia en (6) obtenemos la ecuación matricial:

$$\overline{Me}(Ao, Bo) \times \begin{bmatrix} d_{n-1} \\ \vdots \\ do \\ n_{n-1} \\ \vdots \\ no \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{2n-1} \\ \vdots \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Donde $\overline{Me}(Ao, Bo)$ es una submatriz de la matriz $Me(Ao; Bo)$, de (5), obtenida eliminando las filas y columnas 1 y $(n+2)$. La ecuación (7) tiene solución única si y sólo si \overline{Me} es no singular $\Leftrightarrow Me$ es no singular $\Leftrightarrow Ao$ y Bo son coprimos. Como vemos, la asignación de polos es posible siempre que la función de transferencia de la planta no tenga factores comunes entre numerador y denominador. Notar que el lema da una condición *suficiente*. El resultado es muy general, ya que sólo requiere que el modelo nominal de la planta sea «mínimo» (la función transferencia sin factores comunes entre numerador y denominador).

Controlador estrictamente propio.

El lema da la condición para la que existe solución asumiendo que un controlador *bipropio*. Para un controlador estrictamente propio, los grados mínimos de $Nc(s)$ y $Dc(s)$ deben ser grado $Nc = n-1$ y grado $Dc = n$ respectivamente. Así, para poder elegir arbitrariamente un polinomio a lazo cerrado deseado $Pcd(s)$, su grado debe ser $2n$.

Cancelaciones polo/cero inestables. Se evitan intrínsecamente por el método, ya que cualquier cancelación entre controlador y planta debe aparecer como factor común entre $Ao(s)$ $Dc(s)$ y $Bo(s)$ $Nc(s)$.

Por la ecuación (6), este factor también debe estar en $Pcd(s)$. Como $Pcd(s)$ se elige Hurwitz, las únicas cancelaciones admisibles son las estables.

Cómo restringir la solución

Vamos a ver cómo se restringe la solución del problema de asignación de polos para satisfacer ciertos requerimientos de diseño especiales.

Consideraremos dos casos importantes:

- *Cómo forzar un integrador en el lazo.* Permite alcanzar error estático de posición nulo en la respuesta a una referencia constante.
- *Cómo forzar una cancelación polo/cero (estable).* Permite eliminar polos estables indeseables a lazo cerrado.

Cómo forzar un integrador en el lazo

Un requerimiento estándar en el diseño de sistemas de control es que, en régimen permanente, el lazo de control debe tener error nulo en el seguimiento de referencias constantes.

Este error se suele llamar *error estático de posición*.

Una condición necesaria y suficiente para obtener error estático de posición nulo, e(t) → 0, es que el lazo nominal sea internamente estable y el controlador tenga al menos un polo en el origen. Efectivamente, si el controlador tiene al menos un polo en el origen, entonces es de la forma:

$$G_c(s) = \frac{Nc(s)}{s Dc(s)}$$

Para forzar un integrador en el lazo mediante asignación de polos simplemente elegimos

$$Nc(s) = s \bar{N}c(s)$$

Así la ecuación de lazo cerrado (6) puede reescribirse

$$\bar{A} o(s) \bar{D}(s) + B_o(s) N(s) = Pcd(s); \quad \text{donde } \bar{A} o(s) = s A_o(s).$$

La solución del problema de asignación de polos puede ahora considerarse como un problema equivalente pero con un modelo de grado $\bar{n} = (n+1)$. Con la modificación de A_o , el lema visto requeriría que $Pcd(s)$ se elija de grado mínimo $(2\bar{n}-1) = (2n+1)$. -

Sin embargo, es posible simplificar en este caso a pedir que $Pcd(s)$ sea sólo de grado $2n$.

Esto es posible porque Nc puede tener un grado mayor en 1 al de Dc , y aún obtenemos un controlador (estrictamente) propio.

Cómo forzar una cancelación polo/cero (estable)

Muchas veces es deseable forzar al controlador a cancelar polos o ceros estables del modelo nominal de la planta. Para ilustrar cómo realizarlo mediante asignación de polos, consideraremos el caso especial en que se desea cancelar un polo en $s = -p$ en el modelo nominal.

Para cancelar el factor $(s + p)$ en $A_o(s)$, el mismo factor debe estar presente en $Nc(s)$. Así, la ecuación (6) tiene solución sólo si el mismo factor está presente en $Pcd(s)$, y el factor $(s + p)$ puede eliminarse de ambos lados de (6). En conclusión, para cancelar un polo estable en $s = p$, debe incluirse el factor $(s + p)$ tanto en $Nc(s)$ como en $Pcd(s)$ y cancelarlos con el propio de $A_o(s)$ en la ecuación (6) para obtener la ecuación reducida a resolver.

Ejemplo B.

Sea el modelo nominal de segundo orden de la planta:

$$G_p(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)} \quad n = 2$$

Consideramos primero el problema de asignación de polos sin restricciones. El método requiere elegir $Pcd(s)$ de grado por lo menos $(2n-1) = 3$.

Supongamos que se desea: $Pcd(s) = (s^2 + 6s + 18)(s + 40)$

Los polinomios $Nc(s)$ y $Dc(s)$ son entonces de grado ($n - 1 = 1$).

La ecuación (6) resulta en este caso

$$(s+1)(s+3)(s+do) + 3(n1s + no) = (s^2 + 6s + 18)(s + 40)$$

$$s^3 + (do + 4)s^2 + (4do + 3 + 3n1)s + (3do + 3no) = s^3 + 46s^2 + 258s + 720;$$

que, igualando coeficientes de igual potencia, lleva a:

$$do = 42; \quad n1 = 29; \quad y \quad no = 198;$$

El controlador obtenido resulta:

$$Gc(s) = (29s + 198) / (s + 42) = 29(s + 198/29) / (s + 42), \text{ por lo tanto:}$$

$$L(s) = 87(s + 198/29) / (s + 1)(s + 3)(s + 42).-$$

$$M(s) = 83(s + 198/29) / (s^3 + 46s^2 + 258s + 720)$$

$$\underline{M(s) = 87(s + 198/29) / (s + 40)(s^2 + 6s + 18).}$$

El error al escalón unitario será de: 0.175, o sea 17.5%.-

La respuesta de la salida a un escalón unitario en la entrada será la indicada en la figura a. en ella se muestran los atributos de la misma.-

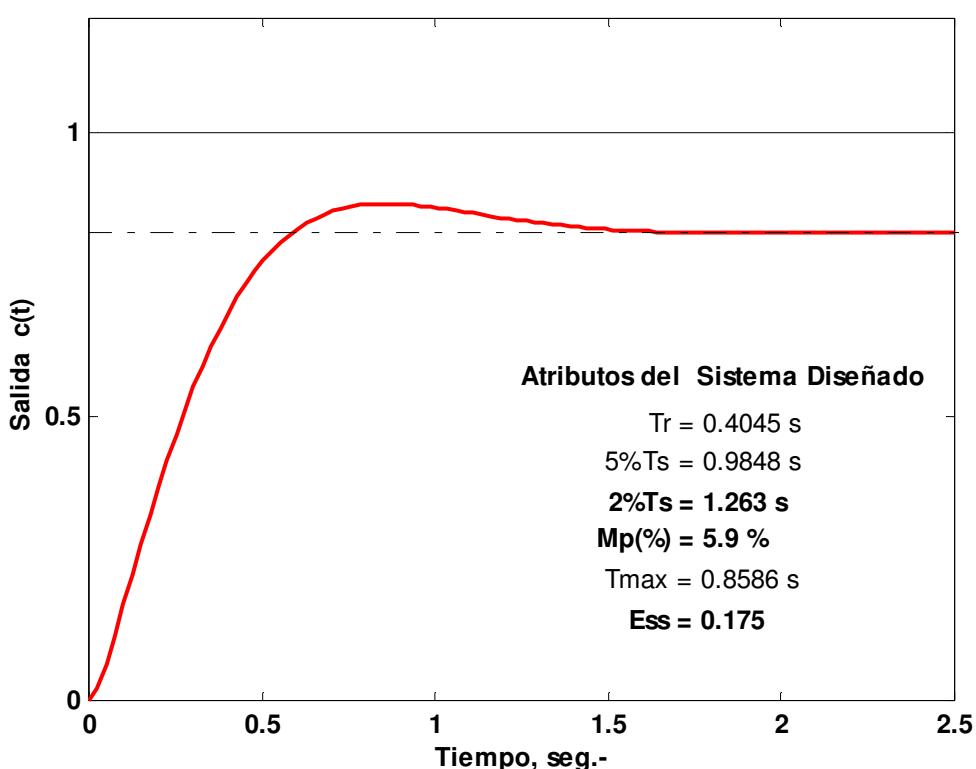


Figura a:

Notar que, *sin pérdida de generalidad*, siempre podemos tomar Ao , Pcd y $Dc(s)$ mónicos, (o sea coeficiente 1 en el término de mayor orden), como hicimos en este ejemplo.-

Ejemplo C.

Reconsideremos el problema del ejemplo anterior pero ahora restrinjamos la solución para obtener un *controlador con acción integral* (*y así poder eliminar el error estático de posición*). Para ilustrar el procedimiento, supongamos también que debemos cancelar el polo en $s = 1$ del modelo nominal de la planta. El polinomio característico deseado debe seleccionarse de orden al menos 4, ($2n=2x2$), y debe incluir el factor $(s+1)$. Con estas consideraciones, la ecuación a resolver resulta:

$$s(s+1)(s+3)(s+do) + 3(s+1)(p1s + no) = (s+1)(s^2 + 6s + 18)(s+40)$$

que cancelando $(s+1)$ en ambos lados da:

$$s(s+3)(s+do) + 3(p1s + po) = (s^2 + 6s + 18)(s+40)$$

$$s^3 + (do + 3)s^2 + (3do + 3n1)s + 3no = s^3 + 46s^2 + 258s + 720;$$

Igualando coeficientes llegamos a

$$do = 43; \quad n1 = 43; \quad no = 240 \rightarrow Gc(s) = (s+1)(43s+240)/s(s+43)$$

Por ende las funciones serán:

$$Gc(s) = \frac{(s+1)(43s+240)}{s(s+43)} \quad y \quad Gp(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow L(s) = \frac{129(s+240/43)}{s(s+3)(s+43)}$$

Por lo tanto la función de transferencia del sistema diseñado será:

$$M(s) = \frac{129(s + 5.5814)}{(s + 40)(s^2 + 6s + 18)}$$

La respuesta al escalón unitario será el indicado en la figura b:

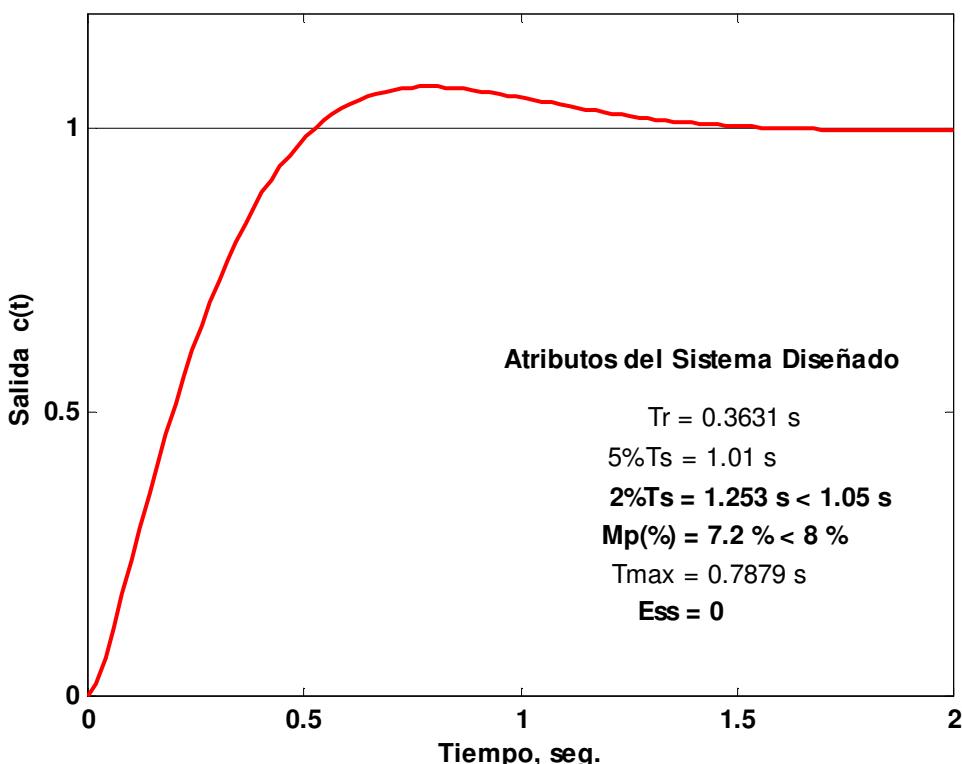


Figura b:

Implementación de los Controladores con Amplificadores Operacionales.

Controlador de Adelanto o Atraso de Fase:

En general, el diseño de controladores en sistemas de control se puede ver como un problema de diseño de filtros; entonces existe un gran número de esquemas posibles. El controlador de adelanto de fase sería un filtro pasa alto e introduce fase positiva al sistema en algún intervalo de frecuencias. El filtro pasa bajos también se conoce a menudo como un controlador de atraso de fase, ya que la fase correspondiente introducida es negativa, pero en bajas frecuencias.

La función de transferencia de un controlador de adelanto o atraso de fase sencilla se expresa como:

$$G_c(s) = A \frac{(s + z_1)}{(s + p_1)}$$

Donde el controlador es pasa altos o de adelanto de fase si $p_i > z_i$, y pasa bajos o de atraso de fase si $p_i < z_i$.

La implementación del circuito con amplificadores operacionales de la función de transferencia se muestra en la figura 41 con un amplificador inversor.

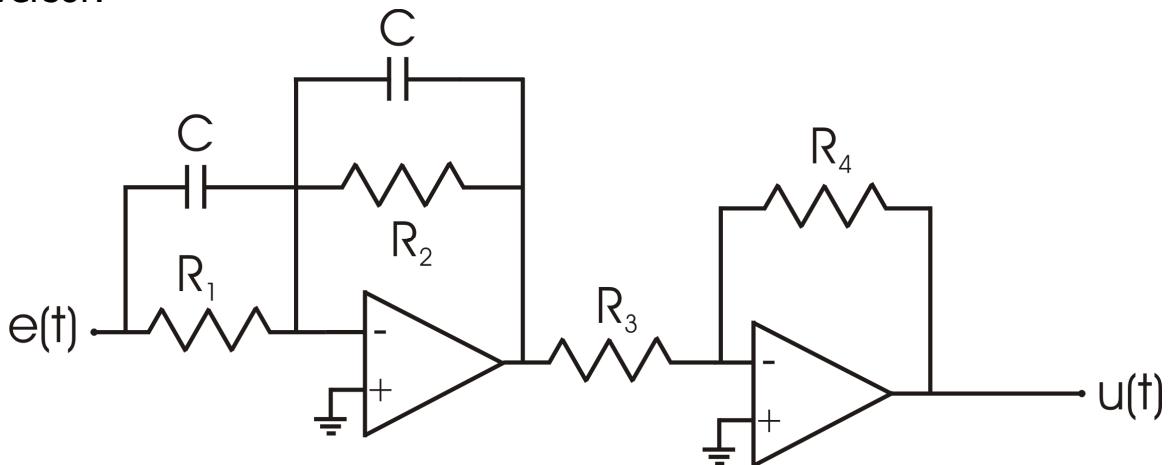


Figura 41

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = -\frac{Z_R}{Z_E} \cdot -\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_4}{R_3} \frac{\frac{R_2}{Cs} + \frac{1}{Cs}}{\frac{R_1}{Cs}} = \frac{R_4 \cdot R_2 \cdot (1 + R_1 \cdot C \cdot s)}{R_3 \cdot R_1 \cdot (1 + R_2 \cdot C \cdot s)}$$

$$\frac{R_2}{Cs}$$

$$\frac{1}{R_1 + \frac{1}{Cs}}$$

$$\text{Si llamamos: } a = \frac{R_1}{R_2} \quad A = \frac{R_4}{R_3} \quad y \quad T = R_2 \cdot C$$

Se tendrá que: $R_1.C = a.R_2.C = a.T$

$$\text{En consecuencia: } G_c(s) = \frac{A}{a} \cdot \frac{(1+a.T.s)}{(1+T.s)} \equiv k_{oc} \cdot \frac{(1+a.T.s)}{(1+T.s)} \equiv A \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{a.T}\right)}{\left(s + \frac{1}{T}\right)}$$

Si $a > 1$; adelanto de fase y si $a < 1$ atraso de fase.

$$\text{También se puede definir: } T' = R_1.C \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1} \quad A = \frac{R_4}{R_3} \rightarrow R_2.C = \alpha.R_1.C = \alpha.T'$$

Por lo tanto:

$$G_c(s) = A\alpha \frac{(1+T's)}{(1+\alpha T's)} \equiv A \frac{\left(s + \frac{1}{T'}\right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T'}\right)} \begin{cases} \text{si } \alpha > 1 & \text{Atraso} \\ \text{si } \alpha < 1 & \text{Adelanto} \end{cases}$$

Por lo tanto se agrega un cero y un polo al lazo, como se indica en la figura 42.

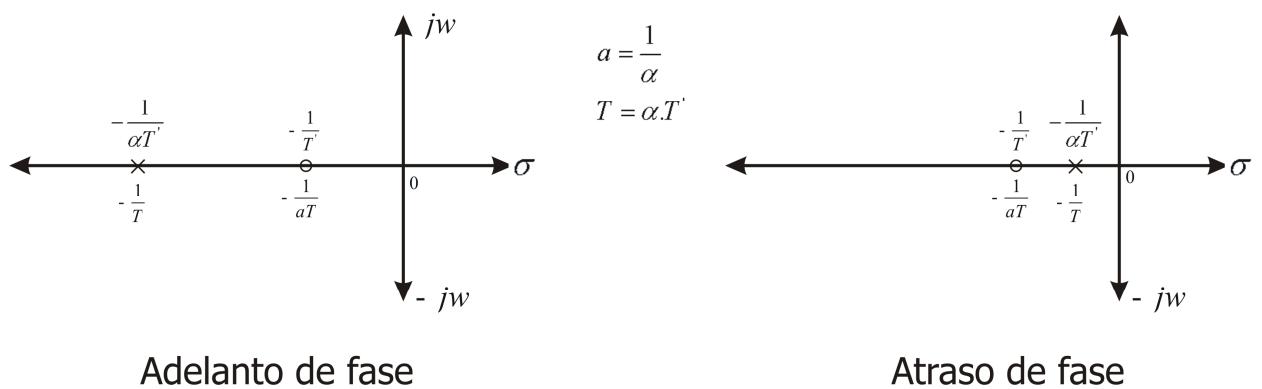
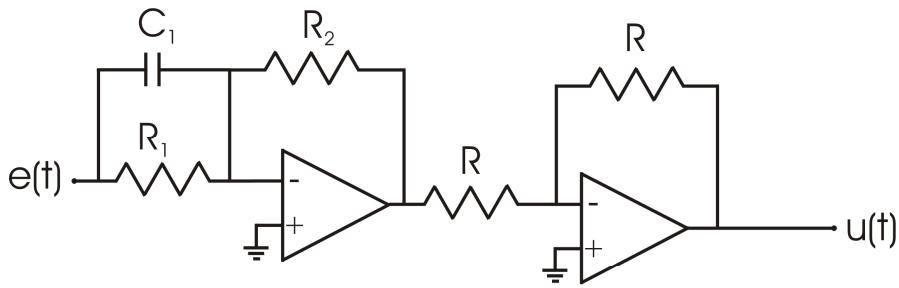


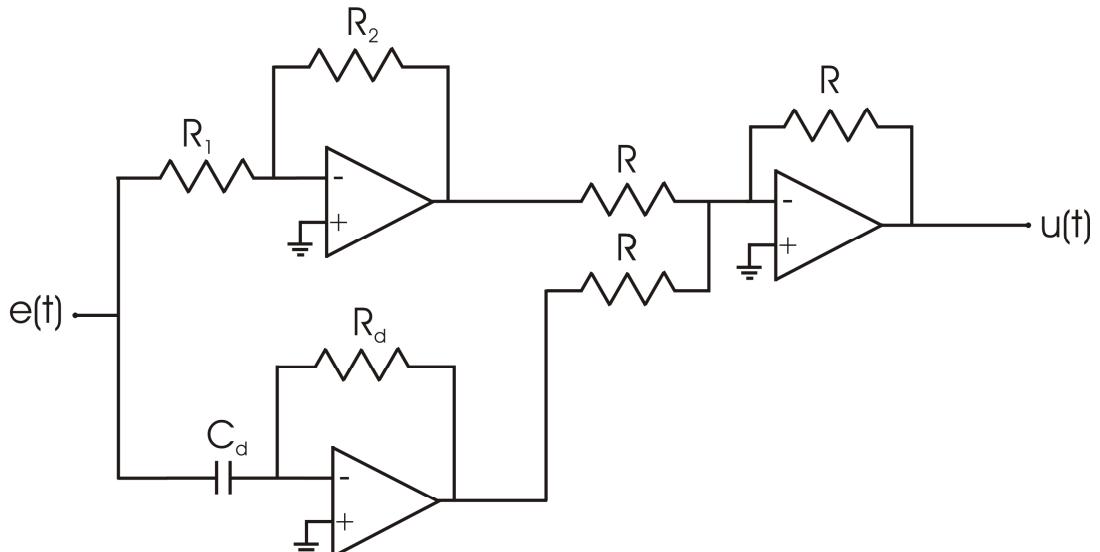
Figura 42

Controlador Serie PD:

Un circuito con amplificadores operacionales pueden ser los indicados en la figura 43.



(a)



(b)

Figura 43

La función de transferencia del circuito de la figura 43 (a) es:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_2}{R_1} + R_2 \cdot C_1 \cdot s$$

Por consiguiente será: $k_p = \frac{R_2}{R_1}$ y $k_d = R_2 \cdot C_1$

La función de transferencia del circuito de la figura 43 (b) es:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_2}{R_1} + R_d \cdot C_d \cdot s \rightarrow k_p = \frac{R_2}{R_1} \text{ y } k_d = R_d \cdot C_d$$

La ventaja del circuito de la Figura 43 (a) es que solo emplea dos amplificadores operacionales. Sin embargo, el circuito no permite una selección independiente de k_p y k_d , ya que son comúnmente dependientes de R_2 . Un hecho importante del controlador PD es que si el valor de k_d es grande, se requerirá un capacitor C_1 grande.

El circuito de la Figura 43 (b) permite que k_p y k_d sean controlados de una *Forma Independiente*. Un k_d grande se puede compensar al seleccionar un valor grande de R_d , lo que resulta en un valor realista de C_d .

Controlador Serie PI:

La implementación con dos amplificadores operacionales se muestra en la Figura 44.

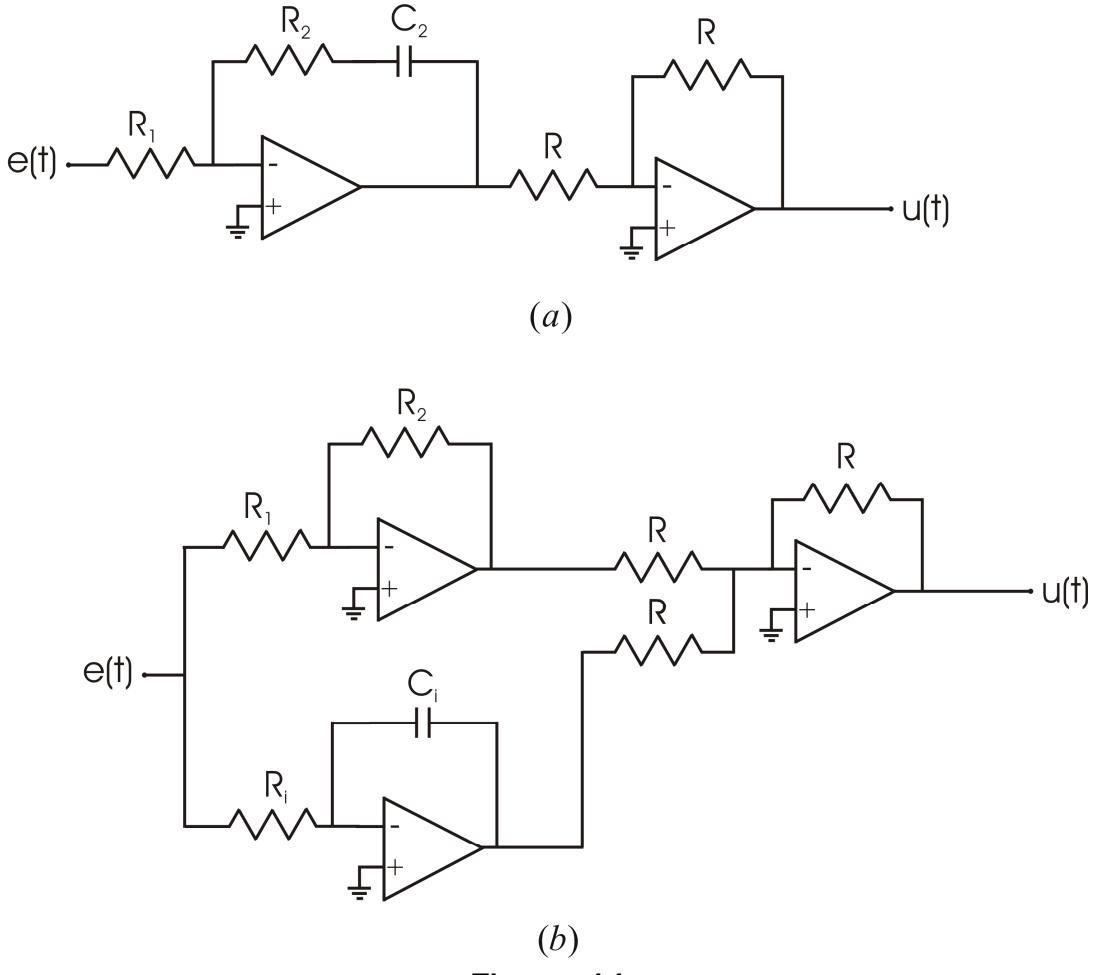


Figura 44

La función de transferencia del circuito de la figura 44 (a) es:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 C_2 s} \rightarrow k_p = \frac{R_2}{R_1} \text{ y } k_d = \frac{R_2}{R_1 C_2}$$

La función de transferencia del circuito de la figura 44 (b) es:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_i C_i s} \rightarrow k_p = \frac{R_2}{R_1} \text{ y } k_d = \frac{1}{R_i C_i}$$

La ventaja del último circuito es que los valores de k_p y k_d están relacionados de forma independiente de los parámetros del circuito. Sin embargo, k_i es necesariamente proporcional al valor del capacitor.

Desafortunadamente, los diseños efectivos del control PI resultan en valores pequeños de k_i y por tanto, se debe tener cuidado de los valores no realistas del capacitor.

Controlador Serie PID:

Se puede implementar una estructura paralelo, agregando al circuito de la

Figura 44 (b) la parte derivativa.

También se puede usar la estructura serie, un controlador PD en serie con un PI, o sea:

$$G_c(s) = k_p + k_D \cdot s + \frac{k_i}{s} = (1 + k_{D_1} \cdot s)(k_{p_2} + \frac{k_{i_2}}{s})$$

La constante proporcional de la parte PD se hace unitaria ya que solo se necesitan tres parámetros en el controlador PID. Operando se llegaría a:

$$G_c(s) = (k_{p_2} + k_{d_1} \cdot k_{i_2}) + (k_{d_1} \cdot k_{p_2}) \cdot s + \frac{k_{i_2}}{s}$$

Por comparación se obtiene que:

$$\begin{cases} k_p = k_{p_2} + k_{d_1} \cdot k_{i_2} \\ k_d = k_{d_1} \cdot k_{p_2} \\ k_i = k_{i_2} \end{cases}$$

Se diseñan las dos partes PD y PI y finalmente con las expresiones anteriores se obtendría la configuración paralelo.-

Controlador de Adelanto de Fase de Etapas Múltiples:

La Figura 45, muestra un circuito con amplificadores operacionales de un controlador de adelanto de fase de dos etapas.

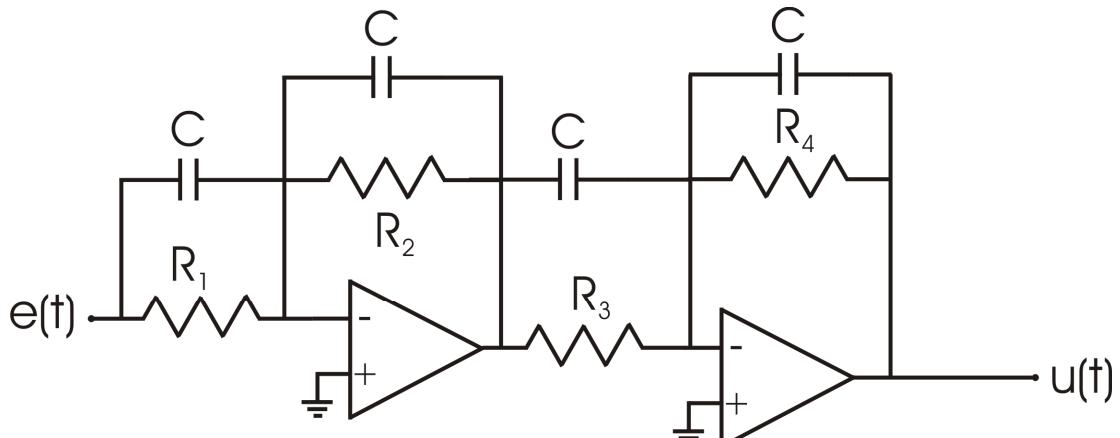


Figura 45

La $G_c(s)$ será:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_3} \cdot \frac{(1 + R_1 \cdot C \cdot s)}{(1 + R_2 \cdot C \cdot s)} \cdot \frac{(1 + R_3 \cdot C \cdot s)}{(1 + R_4 \cdot C \cdot s)}$$

Haciendo: $a_1 = \frac{R_1}{R_2}$, $a_2 = \frac{R_3}{R_4}$, $T_1 = R_2 \cdot C$ y $T_2 = R_4 \cdot C$, nos queda:

$$G_c(s) = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} \cdot \frac{(1 + a_1 \cdot T_1 \cdot s)}{(1 + T_1 \cdot s)} \cdot \frac{(1 + a_2 \cdot T_2 \cdot s)}{(1 + T_2 \cdot s)} \quad a_1 > 1 \quad a_2 > 1$$

Controlador de Adelanto-Atraso de fase:

Con este tipo de controlador primero se ajusta el transitorio deseado con la parte de adelanto y luego con la de atraso se obtiene la precisión en régimen permanente deseada.

Si en el controlador anterior $a_2 < 1$ la segunda parte será un atraso de fase, por ende se tendrá el controlador de Adelanto-Atraso de fase mencionado.

Técnica de Diseño de Controladores de Adelanto de Fase. Método General.

Se supondrá que la configuración de polos y ceros del sistema diseñado, presenta un par de polos complejos conjugados DOMINANTES, y se usara como herramienta la técnica del lugar de las raíces para llevarlo a cabo.

El procedimiento es el siguiente:

1. Traducir las especificaciones en una ubicación deseada de los polos complejos conjugados dominantes.
2. verificar si con un controlador proporcional se puede conseguir que el Lugar de las Raíces pase por la ubicación determinada en el punto 1. en caso afirmativo, determinar la constante proporcional del controlador. $G_C(s) = K_c$. Si no sucede esto, por el contrario se necesita desplazar los polos hacia el interior del plano s (para hacer al sistema más rápido) se deberá agregar un controlador de Adelanto de Fase o un PD para tal fin.
3. si se elige un controlador de Adelanto de Fase, se deberá determinar la posición del cero y el polo de $G_C(s)$ con algún criterio, como se verá. Por ende se determinará los valores de a y T .
4. calcular la ganancia del sistema compensado (del lazo, K^*) y determinar en consecuencia A del $G_C(s)$ si la configuración de polos y ceros tiene a λ_{1-2} como dominantes. Si no se especifica el e_{EE} , el diseño estaría listo. Si se especifica, se determina el mismo y si se cumple el diseño. Si no se cumple se podría optar por alguna de las siguientes soluciones:
 - a. correr el cero más a la izquierda del valor original y volver a determinar a , T y A siempre y cuando el par λ_{1-2} sea aún dominante.
 - b. Usar un controlador de atraso de fase como una segunda etapa.

- c. Hacer cumplir todas las especificaciones con una configuración de polos y ceros donde λ_{1-2} no sean necesariamente dominantes. La técnica del contorno de las raíces y la computadora digital contribuyen a lograr una solución al diseño solicitado.
5. si se consiguen las especificaciones con los valores de a , T y A , el paso siguiente es implementar el controlador. Si se fija la capacidad C , se puede calcular la resistencia R_2 , pues $T = R_2 C \rightarrow R_2 = \frac{T}{C}$.

Por ende se determina R_1 ya que: $a = \frac{R_1}{R_2} \rightarrow R_1 = a \cdot R_2$

Por último, como $A = \frac{R_4}{R_3} \rightarrow R_4 = A \cdot R_3$, se fija R_3 y se despeja R_4

Nos detendremos en el paso 3.

Con las especificaciones solicitadas se determina la posición deseada del par de polos complejos conjugados dominantes λ_{1-2} . La ubicación del cero y el polo de $G_C(s)$ no es única, se elegirá las más conveniente, (si existe), para que λ_{1-2} sean dominantes. En relación con la figura 46 se tendrá:

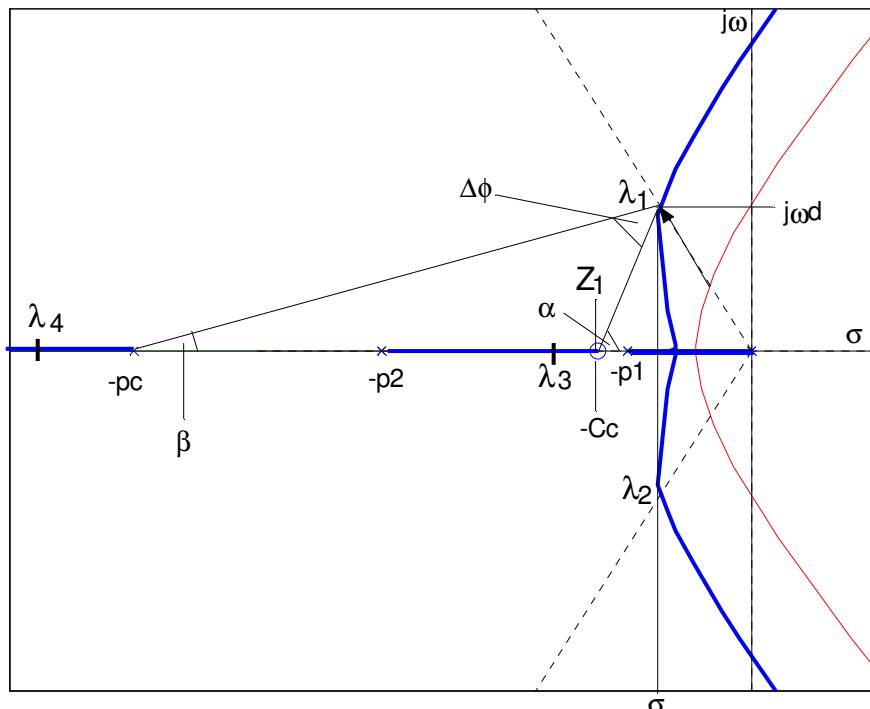


Figura 46

$$\lambda_{1-2} = \sigma \pm j\omega d$$

$$\text{Sin } G_C(s): \angle Gp(\lambda_1) = \sum \phi_Z - \sum \phi_P \neq -180^\circ$$

$$\text{Con } G_C(s): \angle G_C Gp(\lambda_1) = (\alpha + \sum \phi_Z) - (\beta + \sum \phi_P) = -180^\circ$$

Si $\alpha - \beta = \Delta\phi$: $\angle G_C Gp(\lambda_1) = \angle Gp(\lambda_1) + \Delta\phi = -180^\circ$

$$\Delta\phi = -\angle Gp(\lambda_1) - 180^\circ$$

Elegidos λ_{1-2} , se determina $\Delta\phi$, se fija la posición del cero: $z = -\frac{1}{aT}$ en consecuencia surge el ángulo α , luego se despeja $p_c = -\frac{1}{T}$ de la siguiente forma:

$$\beta + \Delta\phi + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ \rightarrow \beta = \alpha - \Delta\phi$$

$$\beta = \operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{p_c - |\sigma|} = \alpha - \Delta\phi \rightarrow \frac{\omega d}{p_c - |\sigma|} = \operatorname{tag}(\alpha - \Delta\phi)$$

$$\therefore p_c = \frac{\omega d}{\operatorname{tag}(\alpha - \Delta\phi)} + |\sigma|$$

También T , a se pueden determinar en base a las figuras 47 o 48.-

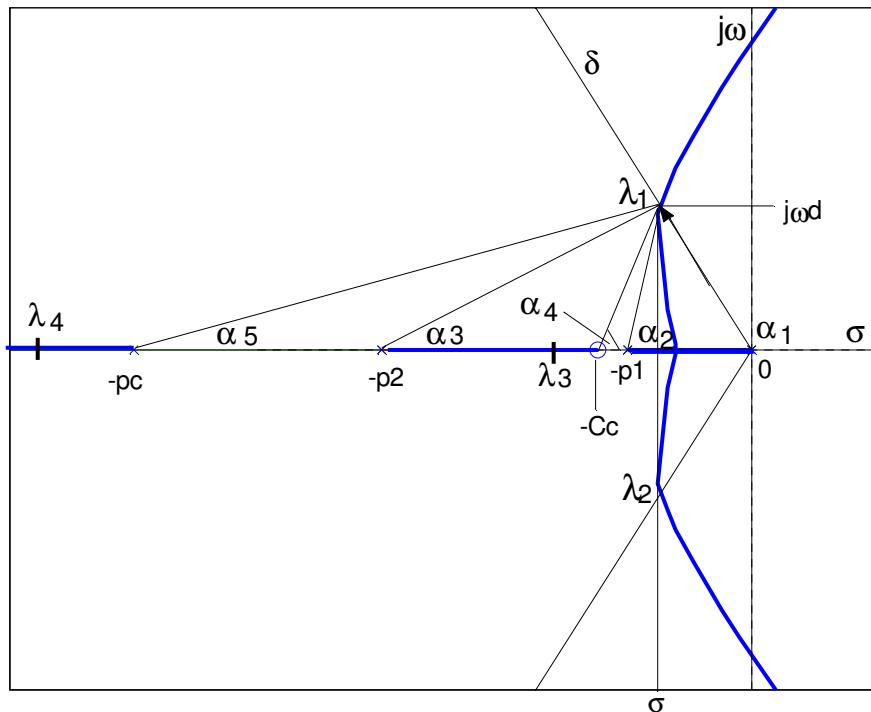


Figura 47

Aplicando el requerimiento angular: $\sum \phi_z - \sum \phi_p = -180^\circ$

$$\left[\operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{C_c - |\sigma|} \right] - \left[\left(180^\circ - \operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{|\sigma|} \right) + \left(180^\circ - \operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{|\sigma| - p_1} \right) + \operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{p_2 - |\sigma|} + \operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{p_c - |\sigma|} \right] = -180^\circ$$

Si se eligen λ_1 y C_c , la única incógnita es p_c .

$$\text{Se despeja } p_c = \frac{1}{T} \rightarrow T = \frac{1}{p_c}$$

$$\text{Y como } \frac{1}{aT} = C_c \rightarrow a = \frac{1}{TC_c}$$

Si se hubiese cancelado el polo de $Gp(s)$ en $-p_1$ con el cero de $G_c(s)$ se tendrá la situación de la figura 48. En ella:

$$-\left[\left(180^\circ - \operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{|\sigma|} \right) + \operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{p_2 - |\sigma|} + \operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{p_c - |\sigma|} \right] = -180^\circ$$

Se despeja p_c y se calculan T y a como se indicó.

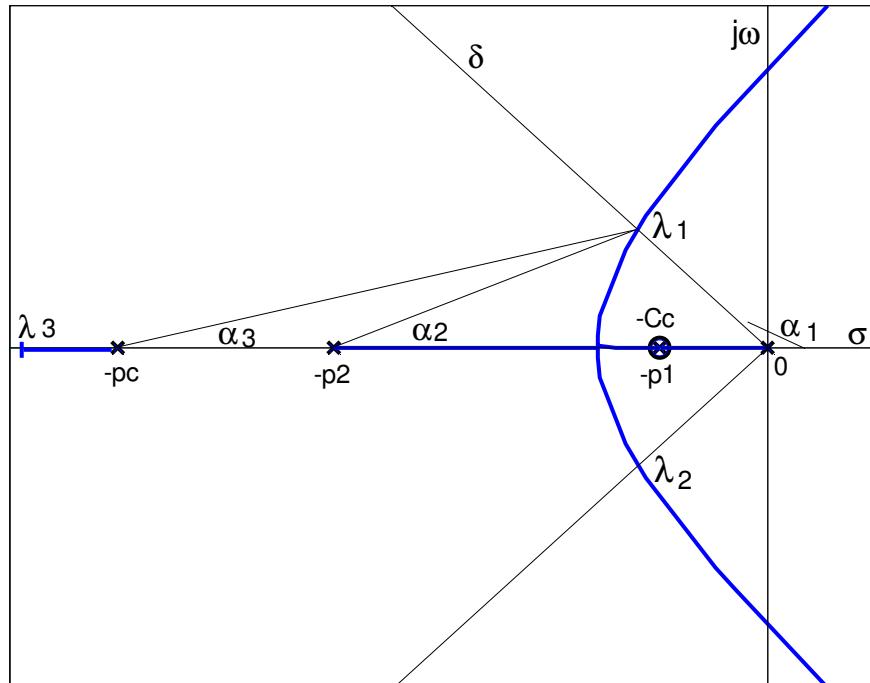


Figura 48

$$p_c = \frac{\omega d}{\operatorname{tag} \left[\operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{|\sigma|} - \operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{p_2 - |\sigma|} \right]} + |\sigma|$$

Otra forma de ubicar el cero y el polo de $G_c(s)$, es para que el valor de a sea el mínimo y como $K_{oc} = \frac{A}{a}$ por ende $A = K_{oc} \cdot a$, si K_{oc} queda fijado por el coeficiente de error, si el a es mínimo también lo será el valor de A , con

la consiguiente ventaja. El procedimiento es el indicado en la figura 49.

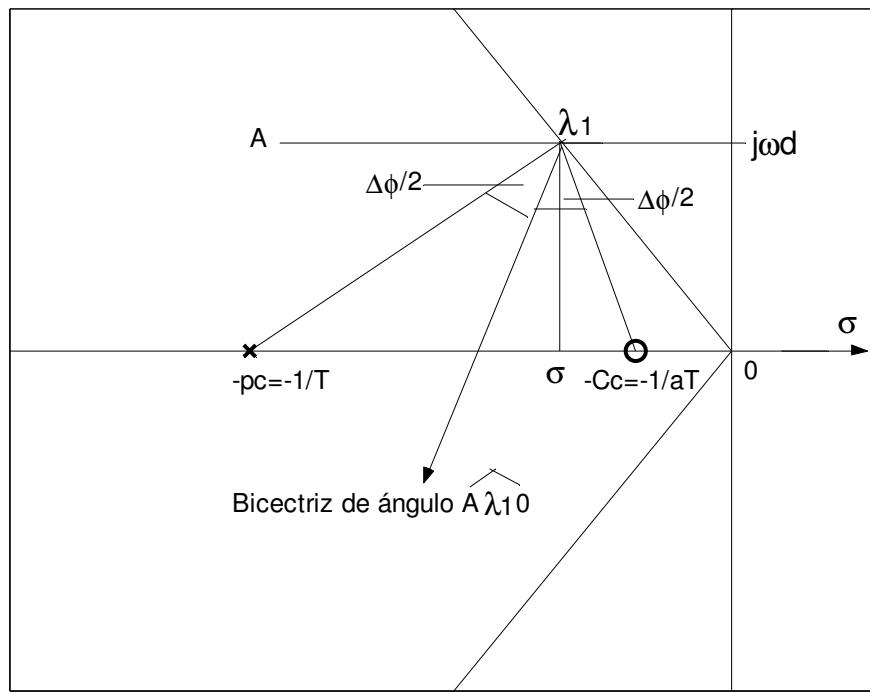


Figura 49

Ejemplo 16:

Sea la planta cuya función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{50}{s(s+5)},$$

Las especificaciones solicitadas son:

- 1º) $M_p \% \leq 5\%$
- 2º) $t_E(5\%) \leq 0.15 \text{ seg.}$
- 3º) $e_{EE}, \text{entrada rampa} \leq \frac{1}{15}$

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ) M_p \% \leq 5\% \Rightarrow \underline{\delta = 0,707} \\ 2^\circ) t_E(5\%) \leq 0.15 \text{ seg.} \Rightarrow \underline{\underline{|\sigma| \geq 15}} \end{array} \right\} \therefore \underline{\underline{\lambda_{1-2} = -15 \pm j15}}$$

La figura 50, indica la zona de las especificaciones.

Si se cancela el cero en -5 el polo se deberá colocar en $|p_c| \geq 30$

Si se ubica en $p_c = -30 = -\frac{1}{T}$

$$T = \frac{1}{30} \text{ seg.} \quad y \quad a = \frac{1}{5T} = 6 \text{ seg.}$$

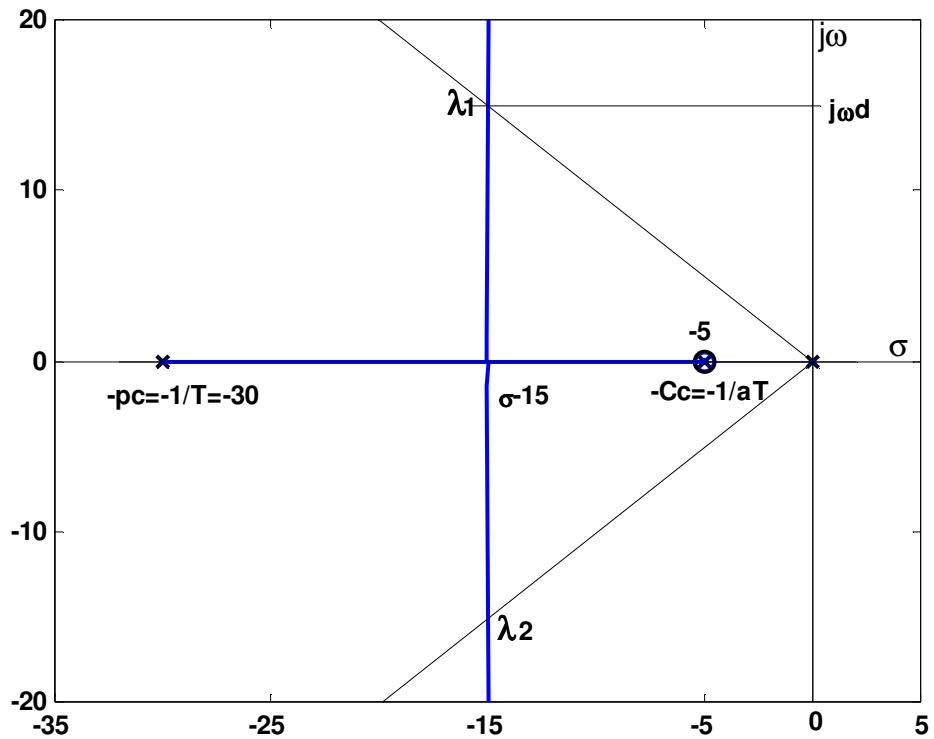


Figura 50

También se podría aplicar el procedimiento general:

$$-\left[\operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{p_c - |\sigma|} + 135^\circ \right] = -180^\circ$$

$$\operatorname{tag}^{-1} \frac{\omega d}{p_c - |\sigma|} = 45^\circ$$

$$\frac{\omega d}{p_c - |\sigma|} = 1 \rightarrow p_c - |\sigma| = \omega d = |\sigma| \quad \therefore \underline{\underline{p_c = 2|\sigma|}} \rightarrow p_c = 2 \times 15$$

$$\underline{\underline{p_c = 30}}$$

$$G(s) = G_C G_p = \frac{A(s+5)50}{s(s+30)(s+5)} = \frac{\overbrace{50A}^{K^*}}{s(s+30)}$$

$$K^* = 15^2 + 15^2 = 450 = 50A \rightarrow \underline{\underline{A = 9}}$$

$$\text{Resulta: } K_V = \frac{450}{30} = 15 \rightarrow \underline{\underline{K_V = 15 \text{ seg}^{-1}}}$$

$$K_{oc} = \frac{A}{a} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\rightarrow G_C(s) = 1.5 \frac{(1+0.2s)}{(1+0.0333s)} \equiv 9 \frac{(s+5)}{(s+30)}$$

Para implementar $G_C(s)$ con un amplificador operacional, se elige $C = 1\mu F$

$$R_2 = \frac{T}{C} = \frac{1}{30 \times 1} = 0,0333 M\Omega \rightarrow R_2 = 33,33 K\Omega$$

$$R_1 = aR_2 = 6 \times \frac{1}{30} = 0,2 M\Omega \rightarrow R_1 = 200 K\Omega$$

$$R_4 = AR_3 \rightarrow R_4 = 9R_3$$

Usando el programa "Ildesign" del Csad/Matlab, se tiene:

>> Ildesign

Default transfer function:

100

s^2 + 10s^1

Enter numerator [n] > 50

Enter denominator [d] > pmake(0,-5)

Enter Plant Time Delay [0] >

Enter controller type (lead,lag,other) [lead] >

Controller Form: K(aTs+1)/(Ts+1)

--- LLDESIGN OPTIONS ---

Controller type Time response

K,a,T values Freq response

Show K,a,T info Root locus

Help on Design Error, Ess

Goals to meet Poles/zeros

Lead/Lag math Display TF's

Interpolate New/clear TF's

View Nyquist W - Routh Td=0

Add controller Begin Rltool

Quit

LLDESIGN >h

This menu item does not always produce meaningful results. As an Engineer, you must determine whether the results have value.

This system is Type 1

and has Finite-Nonzero Ess to a Unit Ramp input

Enter desired %Ess due to this Input [1] >100/15

K must be at least 1.5 to meet desired Ess.

Enter desired K [1.5] >

Design by choosing PM,Gco, Dominant pole? [p] > d
 Enter dominant pole Zeta (0<z<1) > sqrt(0.50)
 Enter dominant pole Wn (Wn>0) > sqrt(450)
 Designed controller information:

$$K = 1.5 \Rightarrow K_{oc} = \frac{A}{a} = \frac{9}{6} = 1.5$$

a 6

T 0.03333

aT 0.2

(zero) -1/aT -5

(pole) -1/T -30

w @Max Phase 12.25

Max Phase 45.58

$20 \log_{10}(a)$ 15.56

Update Current K,a,T values? (y/n) [y] >

LLDESIGN > t

Choose output variable: Y,E,U [y] >

TFTPLOT > p

La figura 51 muestra las respuestas al escalón unitario en la señal de entrada y a la rampa de pendiente unitaria. Como se puede ver se cumplen todas las especificaciones de funcionamiento solicitadas.-

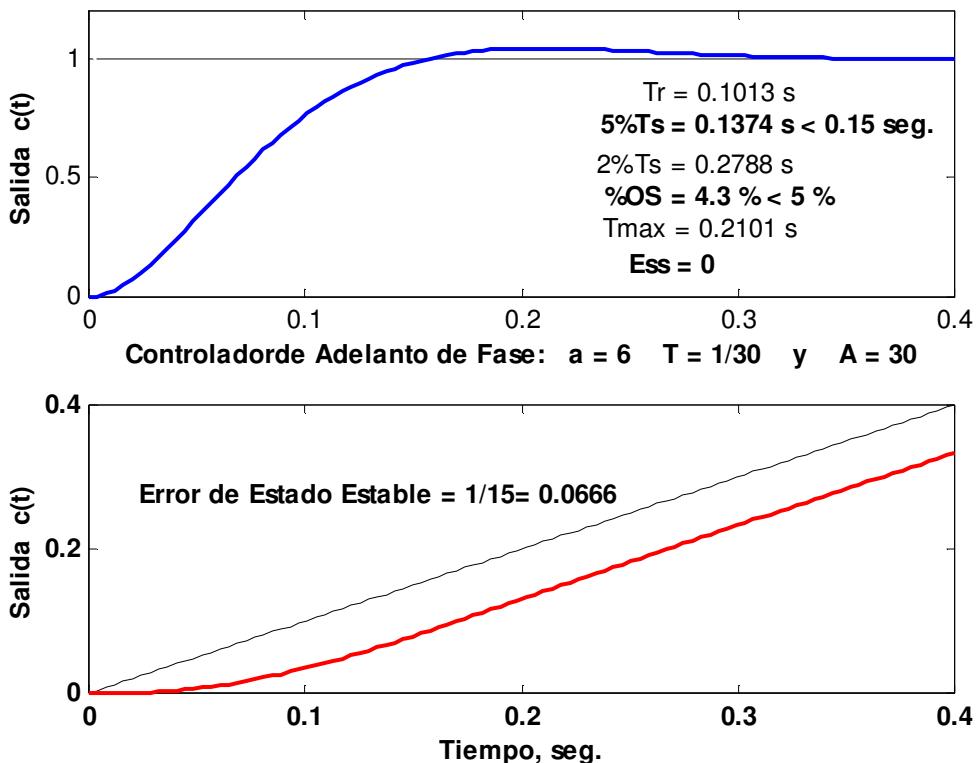


Figura 51

En la figura 52 se muestran para comparar la respuesta del sistema básico, solo con $G_c(s) = K_c = 0,25$ para conseguir la 1º especificación del $M_p(\%)$, y la del sistema finalmente diseñado.

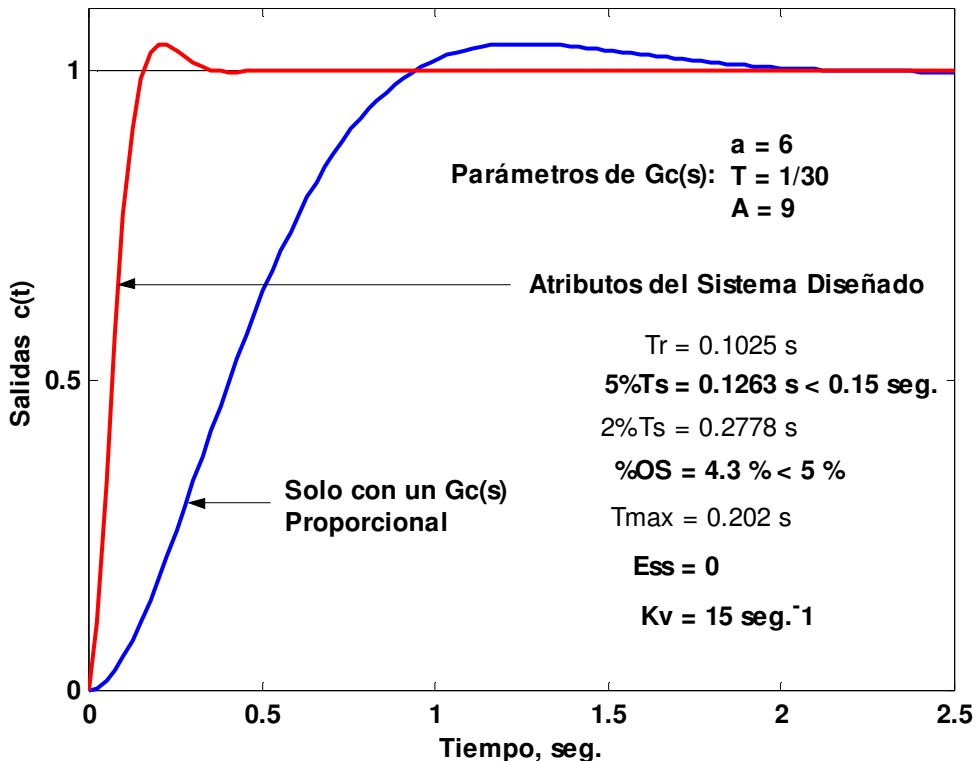


Figura 52

Si se hubiera especificado el $K_v \geq 20 \text{ seg}^{-1}$, se pueden en general intentar otras soluciones, como ya se dijo:

- 1º) Elegir otra posición del polo y el cero (con el mismo $\Delta\phi$) $\rightarrow a, T$, manteniendo el par λ_{1-2} DOMINANTE.
- 2º) Agregar una etapa de atraso de fase, sin modificar sustancialmente el transitorio.
- 3º) Hacer cumplir todas las especificaciones con una configuración de ceros y polos donde λ_{1-2} no sea necesariamente dominante. La técnica del contorno de las raíces y la computadora digital contribuirán a conseguir una solución si ella es factible.

Intentaremos la 1º):

Si se desplaza el cero hacia la izquierda, por ejemplo en $-\frac{1}{aT} = -6,5$, en lugar de -5, como se indica en la figura 53.

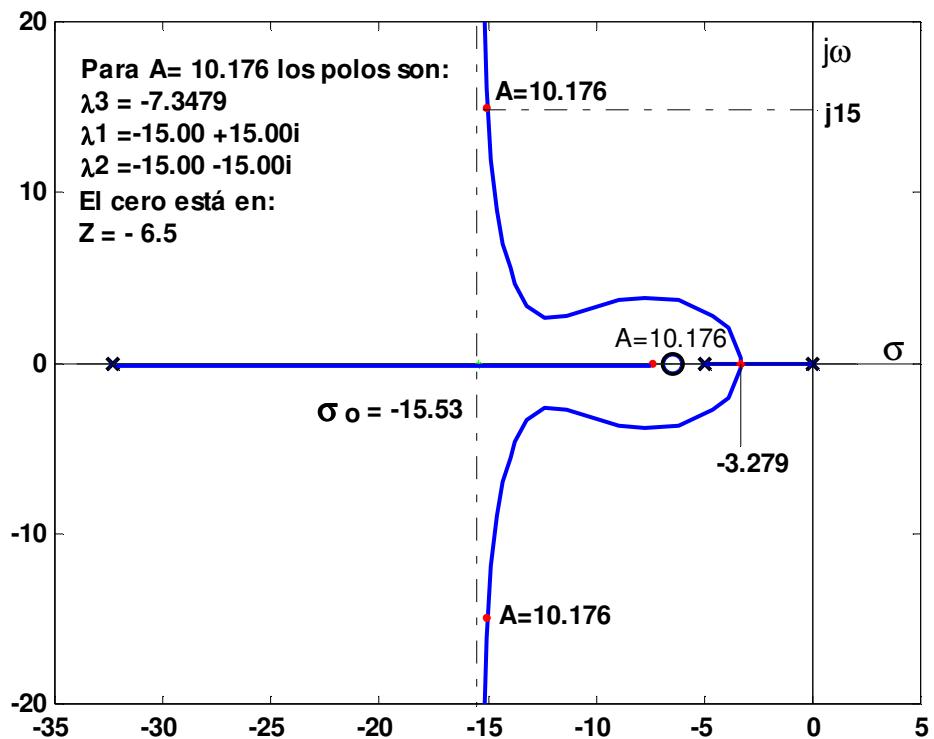


Figura 53

Procediendo, en la forma indicada, con los pasos correspondientes resulta:

$$T \approx \frac{1}{32,354}$$

$$a \approx 4,978$$

$$K^* \approx 508,8 = 50A \rightarrow A \approx 10,176$$

$K_V = 20,44 \text{ seg}^{-1} > 20 \text{ seg}^{-1}$ Se consiguió incrementar el coeficiente de error Kv pero:

$$\begin{aligned} t_E(5\%) &= 0,278 \text{ seg} \uparrow & \begin{cases} \lambda_{1-2} = -15 \pm j15 \\ \lambda_3 = -7,347 \end{cases} & ; \text{ el par } (\lambda_3, Z_1) \text{ tiene mucha influencia.} \\ Mp(\%) &= 10\% \uparrow & Z_1 &= -6,5 \end{aligned}$$

No sería una solución: pues λ_{1-2} , no son realmente dominantes

Probemos corriendo el cero a la derecha de -5:

Por ejemplo: $Z = 4,5 = \frac{-1}{aT}$ como se muestra en la figura 54.

Procediendo como se sabe, se llegaría a:

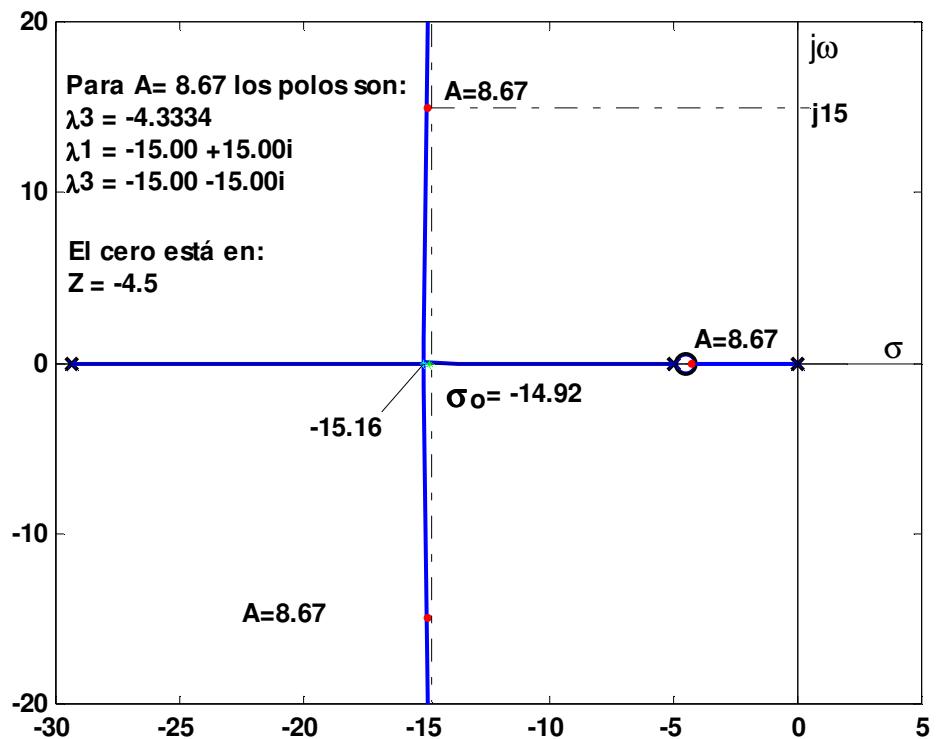


Figura 54

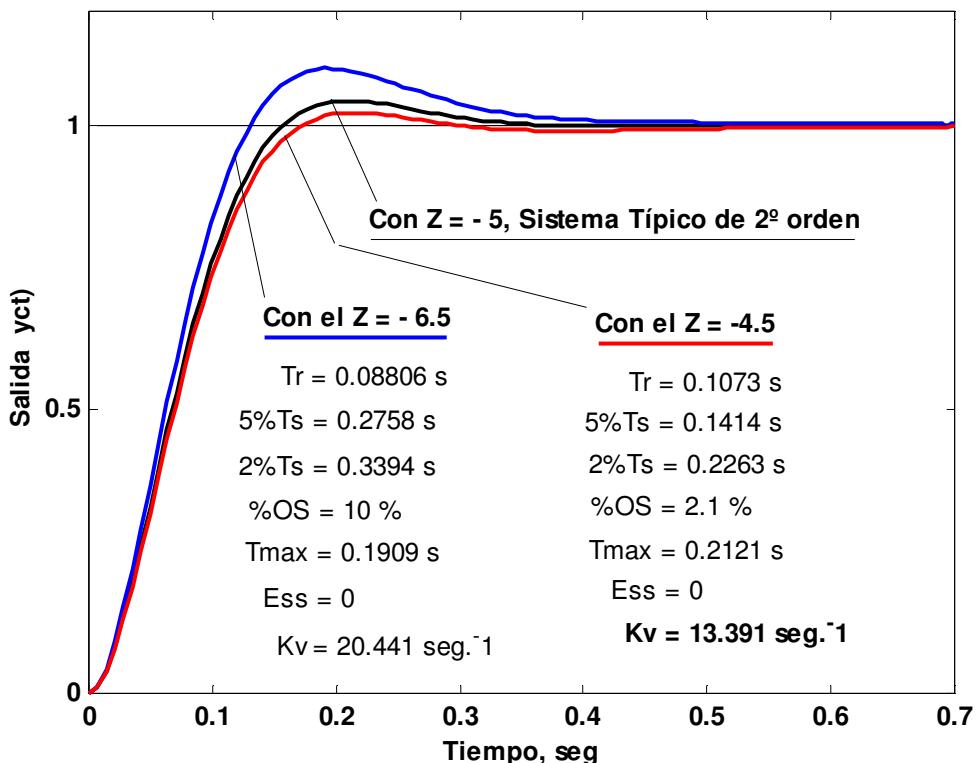


Figura 55

$$T \cong \frac{1}{29.338} \quad a \cong 6.52 \quad K^* = 433.4 = 50 A \Rightarrow A = 8.67$$

Pero $K_V = 13.29 \text{ seg}^{-1} < 20 \text{ seg}^{-1}$, bajo el valor del coeficiente de error Kv sin embargo, el transitorio al escalón se hace más rápido y el Mp (%) cae:

$$\begin{aligned} t_E(5\%) &= 0.1414 \text{ seg}, \downarrow & \lambda_{1-2} &= -15 \pm j15 \\ Mp(\%) &= 2.1\% \downarrow & \lambda_3 &= -4.333 \\ & & Z_1 &= -4.5 \end{aligned}$$

Las respuestas se muestran en la Figura 55, junto con la del sistema típico de segundo orden.

CONCLUSION:

En este ejemplo tendremos que intentar otra solución, la 2º) o la 3ª). Agregar una etapa de atraso o hacer el diseño con la computadora. Antes veremos otro ejemplo con $G_c(s)$ de adelanto o PD.

Ejemplo 17:

Dado el sistema de la figura 56, con:

$$G_p(s) = \frac{5(s+6)}{(s+1)(s+2)(s+6)} \quad y \quad H(s) = 10$$

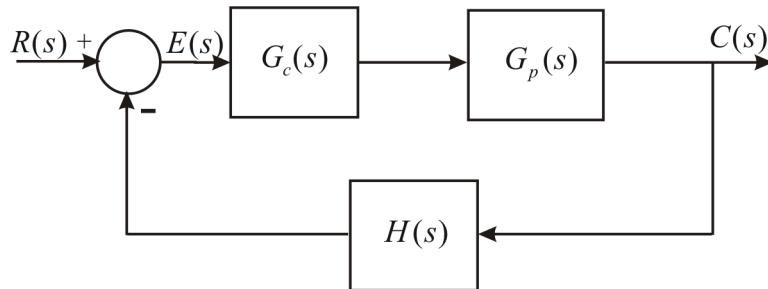


Figura 56

a) Diseñar un controlador adecuado para que el sistema de la figura 56 cumpla las especificaciones siguientes, ante señales de referencia $S_r(t)$ escalón de magnitud unitaria.

- 1º) $M_p(\%) \leq 5\%$
- 2º) $T_E(5\%) \leq 0.90 \text{ seg.}$
- 3º) $T_p \leq \frac{\pi}{2} \text{ seg.}$
- 4º) $e(\infty) (\text{para } S_r(t) = \mu_s(t)) \leq 0.30$

Las tres primeras especificaciones del transitorio imponen:

1º) $\delta \geq 0.69$

2º) Si se emplea, $T_E(5\%) \cong \frac{4.5\delta^2}{|\sigma|} \Rightarrow$ si se elige $\delta = 0.707 \Rightarrow |\sigma| \geq 2.5$

3º) $T_p = \frac{\pi}{\omega_d} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_d \geq 2 \text{ rad / seg.}$

La función de transferencia del lazo si el controlador fuera uno proporcional solamente, sería: $L(s) = K_c G_p(s) H(s) = \frac{50K_c(s+6)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$

Como se aprecia en la figura 57, se podría cumplir solo con la 1º) especificación pero no con las otras, por ende se intentara solucionar esto con un controlador de adelanto de fase, con una función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{A(s + 1/aT)}{(s + 1/T)}$$

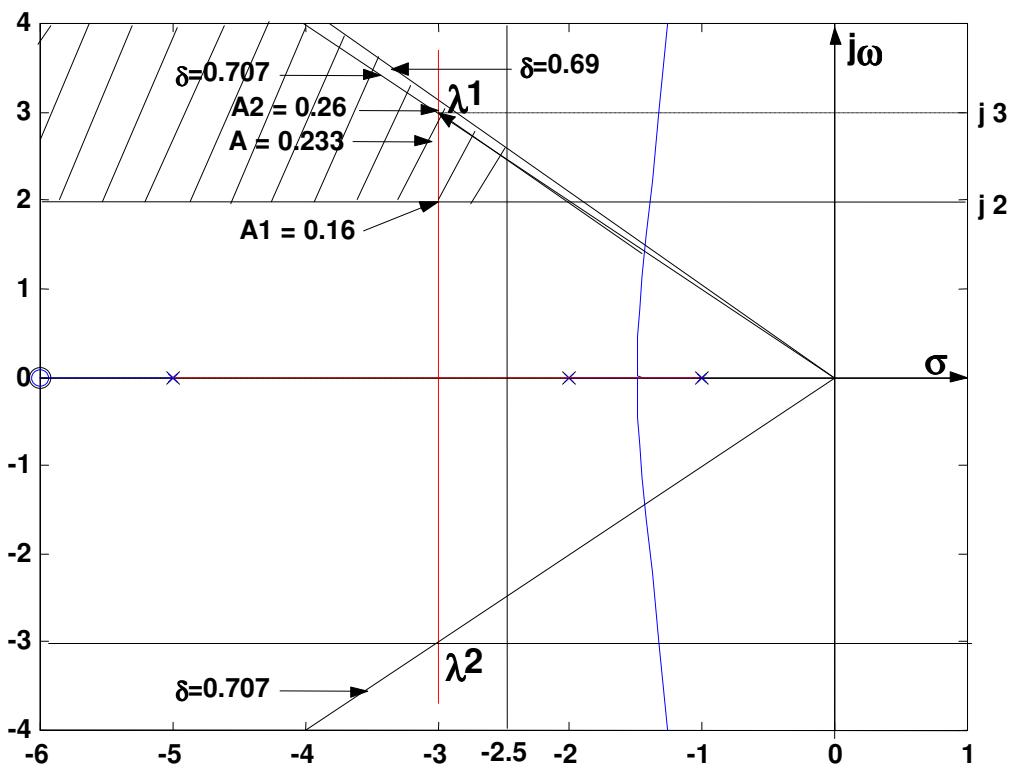


Figura 57

Si se cancela el polo de $G_p(s)$ en -2 con el cero de $G_c(s)$, se tendrá: $\frac{1}{aT} = 2$

Y además el polo de $G_c(s)$ cancela el cero de $G_p(s)$, en -6, seria: $\frac{1}{T} = 6$

El lugar de las raíces sería el indicado también en la figura 57, del mismo se puede apreciar que ajustando la ganancia A, se podrían conseguir todas las especificaciones del transitorio pretendidas, pues resulta que $|\sigma| = 3$, que es mayor que 2.5. Si se elige $\delta = 0.707 > 0.69$ se tendrá que: $\omega_d = 3$ que es mayor que 2.-

Los valores de T y a serán los siguientes:

$T = \frac{1}{6}$ seg. y $a = 3$, en consecuencia la función de transferencia del controlador será:

$$G_c(s) = \frac{A(s+2)}{(s+6)}$$

Por lo tanto la función de transferencia del lazo del sistema diseñado será:

$$L(s) = G_c(s) G_p(s) H(s) = \frac{A(s+2)}{(s+6)} \frac{5(s+6)}{(s+1)(s+2)(s+5)} 10 = \frac{50A}{(s+1)(s+5)}$$

Se tendrá que elegir el valor de la ganancia A, con el requerimiento de magnitud.

$$\text{El mínimo será: } A_1 = \frac{\sqrt{8} \sqrt{8}}{1} = 8 \Rightarrow 8 = 50A_1 \Rightarrow A_1 = 0.16$$

$$\text{El máximo: } A_2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow 13 = 50A_2 \Rightarrow A_2 = 0.26$$

El rango de A que cumple con el transitorio al escalón es:

$$0.16 < A < 0.26 \quad (1)$$

Para el régimen permanente:

$$G_{equiv}(s) = K_H G_c(s) G_p(s),$$

pues $H(s) = cte = K_H = 10$

$$G_{equiv}(s) = \frac{10 \times 5A}{(s+1)(s+5)} \Rightarrow G_{equiv}(s) = \frac{50A}{(s+1)(s+5)} \Rightarrow \text{Sistema Tipo "cero".}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_{equiv}(s) = 50A / 5 = 10A$$

El error de estado estable al escalón unitario en $S_r(t)$, debe ser:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + 10A} \leq 0.30 \Rightarrow A \geq 0.233$$

Por lo tanto el rango de A que cumplirá con el régimen permanente es:

$$0.233 < A < \infty \quad (2)$$

pues el sistema es estable aún para $A \rightarrow \infty$.

Interceptando (1) y (2) se tendrá el rango de la ganancia A que satisface el transitorio y el régimen permanente pedido.

$$0.233 \leq A \leq 0.26$$

Se elegirá $A = 0.26$, para mínimo error.-

La respuesta al escalón unitario en la señal de referencia $S_r(t)$, se muestra en la figura 58, con sus atributos.

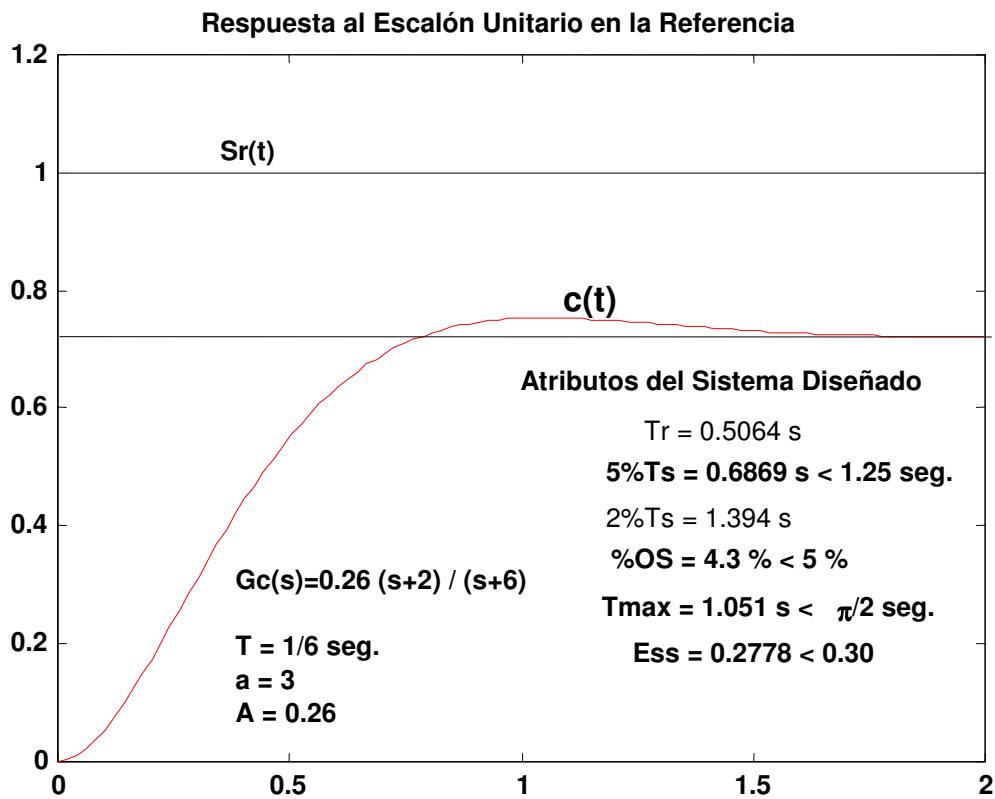


Figura 58

Como se aprecia se satisfacen todas las especificaciones pedidas. Por lo tanto ésta es una de las soluciones buscadas. Como es de suponer existen varias otras.-

Control PD Serie:

Ejemplo 18: Una planta tiene la función de transferencia siguiente:

$$G_p(s) = \frac{5}{s(s+5)^2}$$

Las especificaciones solicitadas son las siguientes:

- 1º) $M_p(\%) \leq 5\%$
- 2º) $T_E(2\%) \leq 1.5 \text{ seg.}$
- 3º) $e(\infty)$; al escalón unitario en la entrada = 0
- 4º) $e(\infty)$; a la rampa unitaria en la entrada ≤ 0.40

Usando un controlador serie PD, y una realimentación unitaria, la función de transferencia del lazo será:

$$L(s) = \frac{5(K_p + K_s s)}{s(s+5)^2} = \frac{5K_d(s + K_p/K_d)}{s(s+5)^2}$$

Las especificaciones del transitorio al escalón se cumplirán si:

- 1º) Si $\delta \geq 0.69$ se elegirá $\delta \geq 0.707$
- 2º) $T_E(2\%) \cong \frac{4}{|\sigma|} \leq 1.5 \Rightarrow |\sigma| \geq 2.666$, se elegirá: $\sigma = -3$

Por lo tanto los polos complejos conjugados, (dominantes), estarán ubicados en:

$$\lambda_{12} = -3 \pm j3$$

La tercera especificación se cumplirá pues el sistema es de Tipo "uno", la 4º) se cumplirá si:

$$Kv = Kp/5; \quad e(\infty) = 5/Kp \leq 0.4 \Rightarrow Kp \geq 12.5$$

Para que el lugar de las raíces pase por los polos λ_{1-2} , el cero de $Gc(s)$ deberá estar ubicado en:

$$\sum \phi_z - \sum \phi_p = -180^\circ$$

$$(\alpha) - (2 \times 56.31^\circ + 135^\circ) = -180 \Rightarrow \alpha = 67.62^\circ$$

$$\alpha = \text{tag}^{-1} \frac{3}{Cc - 3} \Rightarrow \text{tag}(\alpha) = \frac{3}{Cc - 3} \Rightarrow Cc - 3 = \frac{3}{\text{tag}(\alpha)}$$

$$Cc = \frac{3}{\text{tag}(\alpha)} + 3 \Rightarrow Cc \approx 4.235 = \frac{Kp}{Kd}$$

Por lo tanto:

$$G(s) = Gc(s)Gp(s) = \frac{5Kd(s + 4.235)}{s(s + 5)^2} \Rightarrow K^* = 5Kd$$

La ganancia del lazo será:

$$K^* = \frac{\sqrt{13} \sqrt{13} \sqrt{18}}{\sqrt{9 + (1.235)^2}} = 17 \Rightarrow 5Kd = 17 \Rightarrow Kd = 3.40 \quad y \quad Kp = 14.4$$

La figura 59 muestra como se modifico el lugar de las raíces.
Por ende la función de transferencia del controlador será:

$$Gc(s) = 14.4 + 3.4s = 3.4(s + 4.235)$$

El polo λ_3 estará ubicado en:

$$2\sigma + \lambda_3 = -10 \Rightarrow \lambda_3 = -4$$

Como el cero está en -4.235, el efecto del par (λ_3, Z_1) , será despreciable.
Las respuestas del sistema al escalón unitario y a la rampa de pendiente unitaria en la entrada se muestran en la figura 60, además de sus atributos, los cuales indican que se ha conseguido todo lo pedido.
Por lo tanto:

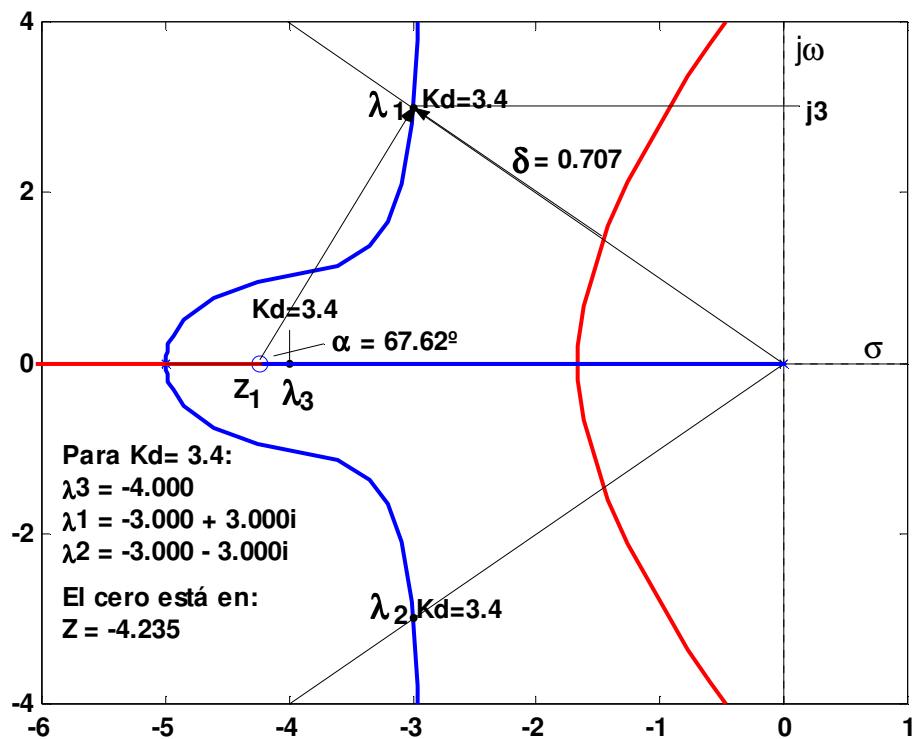


Figura 59

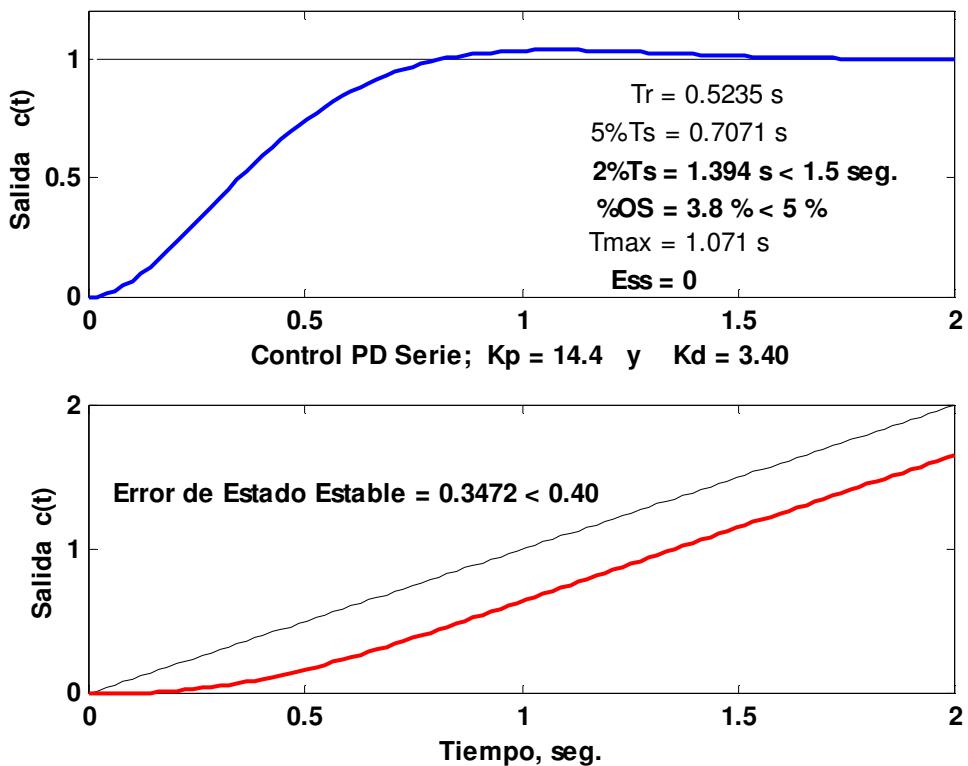


Figura 60

El error de estado estable será.

$$e(\infty) = \frac{1}{Kv} \Rightarrow e(\infty) = 0.3472 < 0.40, \text{ por ende se cumple lo pedido.}$$

Como la ecuación característica es:

$$s^3 + 10s^2 + 42s + 72 = 0$$

Para poder determinar en forma aproximada el Mp (%) de la respuesta de un sistema a una referencia escalón unitario, cuando el mismo presenta una configuración de polos y ceros, donde hay un par de polos complejos conjugados dominantes, se pueden usar como ya se estudio las expresiones siguientes:

Tiempo de Pico:

$$Tp \cong \frac{1}{\varpi_d} \left[90^\circ - \sum_{i=1}^m \text{Fase de } (\lambda_i - Z_i) + \sum_{j=2}^n \text{Fase de } (\lambda_i - \lambda_j) \right] \frac{\pi}{180^\circ} \quad \text{en seg.}$$

Y como $Mp(\%) = \frac{C_{\max} - C(\infty)}{C(\infty)} \times 100$, si $Sr(t) = \mu_s(t)$, se tendrá para Mp (%):

$$Mp(\%) \cong \frac{\prod_{j=3}^n |(-\lambda_j)|}{\prod_{j=3}^n |(\lambda_1 - \lambda_j)|} \frac{\prod_{i=1}^m |(\lambda_1 - Z_i)|}{\prod_{i=1}^m |(-Z_i)|} e^{\sigma T_p} \times 100$$

Apliquemos estas expresiones al ejemplo que estamos viendo, pues el diseño presenta un par de polos complejos conjugados dominantes.

$$Tp = \frac{1}{3} \left[90^\circ - \operatorname{tag}^{-1} \frac{3}{1.235} + 90^\circ + \operatorname{tag}^{-1} 3 \right] \frac{\pi}{180^\circ} = 1.07 \text{ seg.}$$

$$MP(\%) \cong \frac{4}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10.525}}{4.235} \times e^{-3 \times 1.07} \times 100 = 3.91\% < 5\%$$

Si los polos λ_{1-2} , estuvieran solos, (sistema típico de segundo orden), el tiempo de pico sería:

$$Tp = \frac{\pi}{\varpi_d} = \frac{\pi}{3} = 1.047 \text{ seg.}$$

Máximo Sobre impulso:

$$Mp(\%) = e^{\sigma T_p} \times 100 = e^{-3 \times 1.047} \times 100 = 4.32\%$$

El Mp(%) real da un poco menor por la influencia, muy pequeña del par polo-cero, $\lambda_3 = -4$ y $Z_1 = -4.235$ pues el polo está más cerca del eje jw.

Si se hubiese elegido cancelar un polo en -5 con el cero de Gc(s), el sistema diseñado seria uno típico de segundo orden, figura 61.

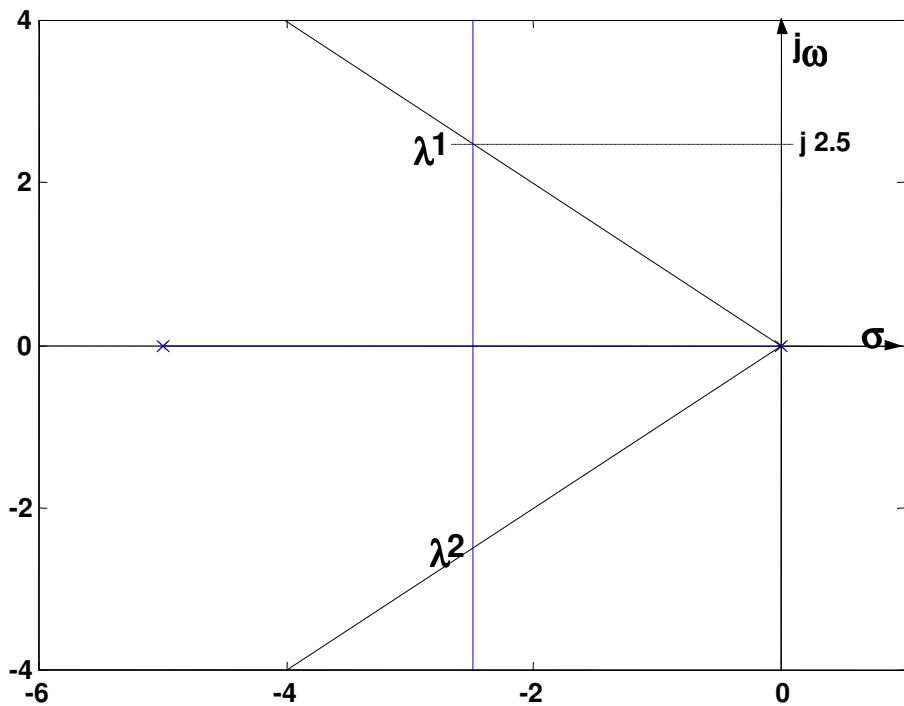


Figura 61

Ahora:

$$G(s) = \frac{5Kd}{s(s+5)}, \text{ donde } \frac{Kp}{Kd} = 5.$$

El sistema seria un poco más lento, (aumentan los T_E).

$$K^* = (2.5)^2 + (2.5)^2 = 12.5 = 5Kd \Rightarrow Kd = 2.50$$

$$\text{y } Kp = 5Kd = 5 \times 2.5 \Rightarrow Kp = 12.50$$

Por lo tanto:

$$Gc(s) = 2.5(s+5) \Rightarrow G(s) = \frac{12.5}{s(s+5)} \quad y \quad M(s) = \frac{12.5}{s^2 + 5s + 12.5}$$

La Figura 62, compara los dos diseños y se aprecia el incremento en los t_E y en $M_p(\%)$. Esto último es porque desaparecería el efecto de λ_3 y z_1 . El error $e_{EE,r(t)=t} = 0.4$. Por ende este diseño puede resultar satisfactorio.

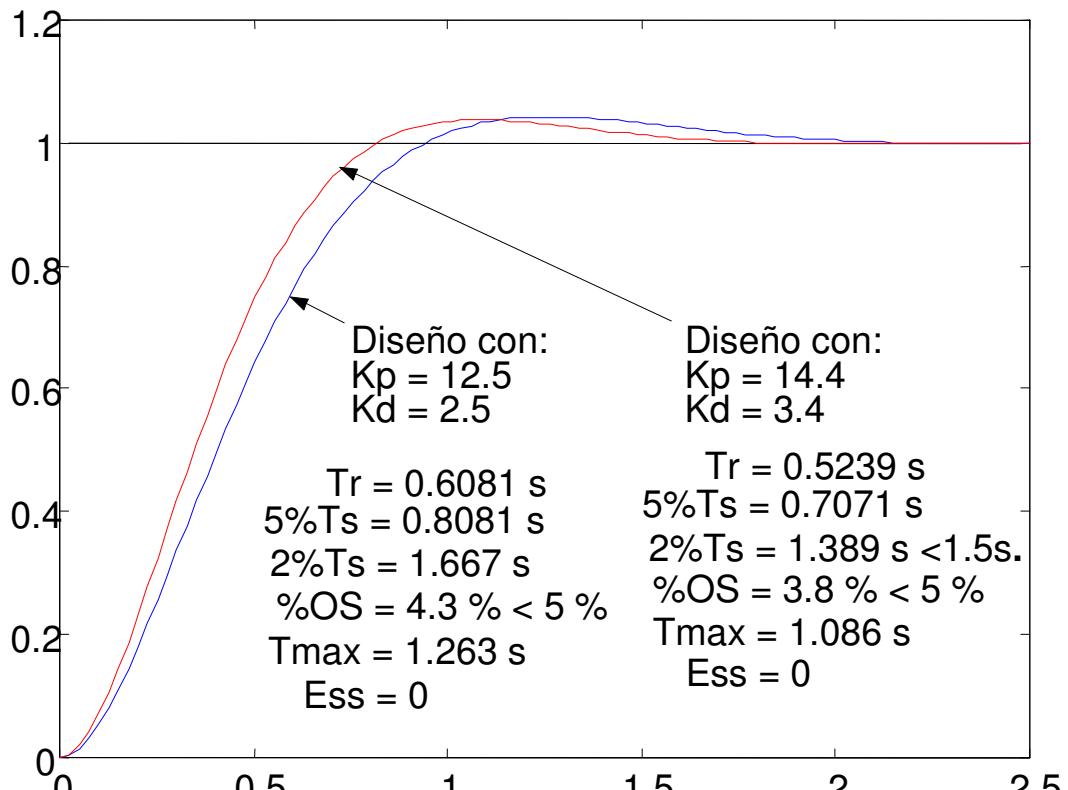


Figura 62

Ejemplo 19:

Veamos el mismo ejemplo con un controlador de Adelanto de Fase:

El cero de $G_c(s)$, $-\frac{1}{aT}$ se deberá colocar en: $C_c = -4,235$

Evidentemente si se elige $C_c = -\frac{1}{aT} = -4$ el polo resultará en, figura 63:

$$(tag^{-1}3) - \left(tag^{-1} \frac{3}{(p_c - 3)} + 2tag^{-1}1,5 + 135^\circ \right) = -180^\circ$$

$$tag^{-1} \frac{3}{(p_c - 3)} = 180^\circ - 135^\circ - 2tag^{-1}1,5 + tag^{-1}3 \cong 3.945^\circ$$

$$\frac{3}{(p_c - 3)} = tag3,945^\circ = 0,0689655 \rightarrow p_c = \frac{3}{0,0689655} + 3 \cong 46,5$$

$$\therefore p_c = \frac{1}{T} = 46,5 \rightarrow T = \frac{1}{46,5} \cong 0,0215$$

$$\text{y como } \frac{1}{aT} = 4 \rightarrow a = \frac{1}{4T} = \frac{46,5}{4} \rightarrow a = 11,625$$

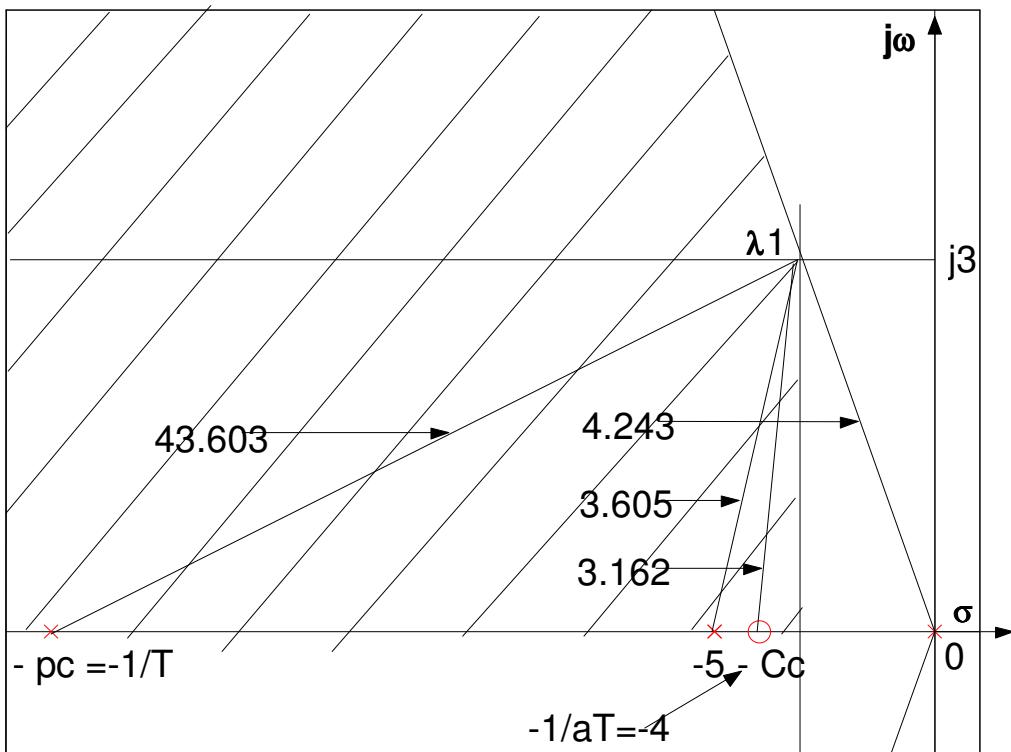


Figura 63

$$K^* = \frac{\sqrt{1901,25 \times 13 \times 13 \times 18}}{\sqrt{10}} = 760,5 \equiv 5A \rightarrow A = 152,1$$

Por lo tanto: $G_c(s) = \frac{152,1(s+4)}{(s+46,5)}$ y $G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{760,5(s+4)}{s(s+5)^2(s+46,5)}$

La ganancia estática del controlador será: $K_{oc} = \frac{A}{a} = 13,08387 \cong 13,1$

La configuración de polos y ceros del sistema diseñado es:

$$M(s) = \frac{760,5(s+4)}{s^4 + 56,5s^3 + 490s^2 + 1923s + 3042}$$

para $K_{oc} \cong 13,084$ $\begin{cases} \lambda_{1-2} = -3 \pm j3 \\ \lambda_3 = -46,8963 \\ \lambda_4 = -3,6037 \\ z_1 = -4 \end{cases}$

$$G(s) = \frac{58,125 K_{oc}(s+4)}{s(s+5)^2(s+46,5)}$$

E lugar de las raíces y la respuesta al escalón y rampa se muestran en las figuras 64 y 65 respectivamente.

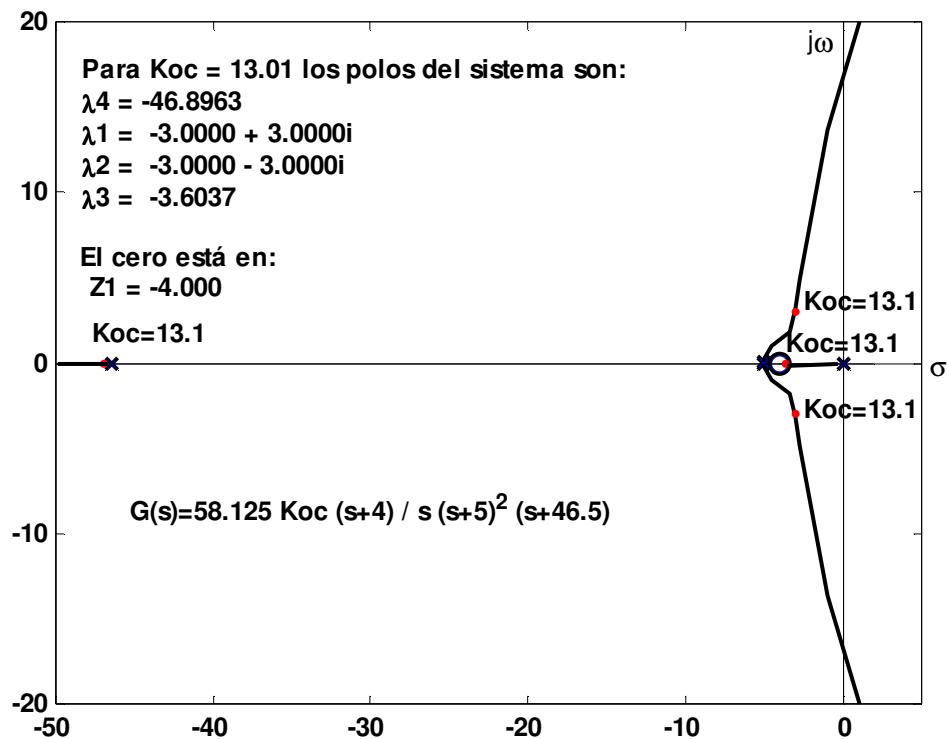


Figura 64

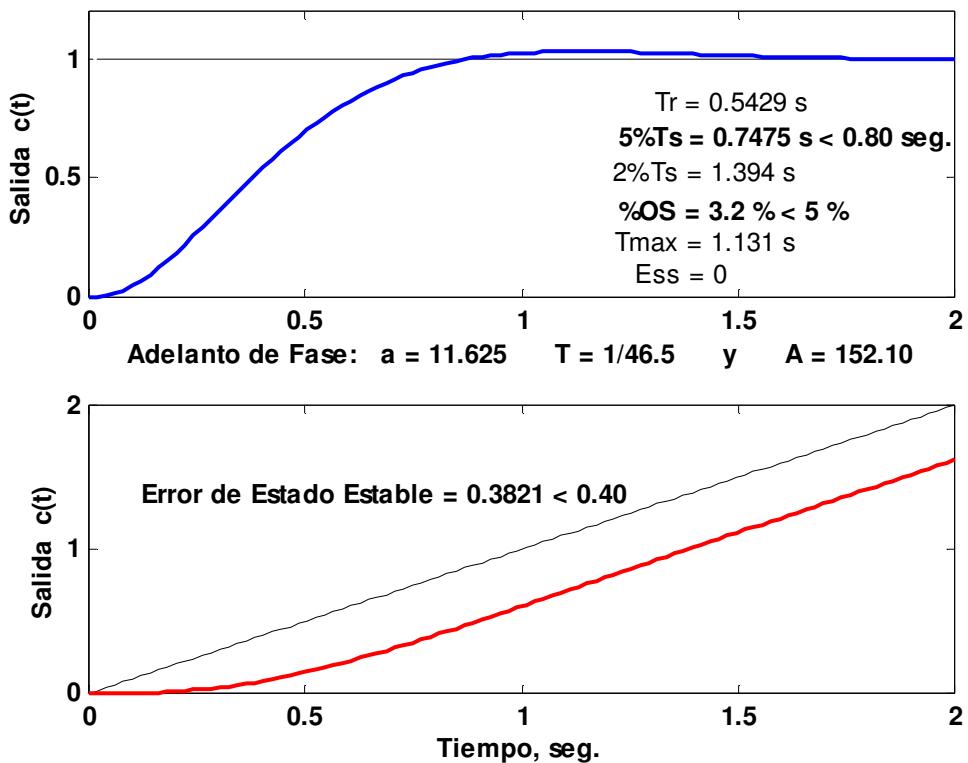


Figura 65

Usando el comando "lldesign" del Csad/Matlab, se puede proceder como se indica. Se agregará $T_E(5\%) \leq 0.80$ seg. con la relación $T_E(5\%) \cong 0.6 T_E(2\%)$ pues

el sistema diseñado puede tener una respuesta no típica de un sistema de segundo orden. Primero se ingresa la función de transferencia de la planta a controlar :

```
>> lldesign
Default transfer function:
100
-----
s^2 + 10s^1
Enter numerator [n] > 5
Enter denominator [d] > pmake(0,-5,-5)
Enter Plant Time Delay [0] >
Enter controller type (lead,lag,other) [lead] >
LLDESIGN > h    => (opción del menu: Help on Design)
This menu item does not always produce
meaningful results. As an Engineer, you must
determine whether the results have value.
This system is Type 1
and has Finite-Nonzero Ess to a Unit Ramp input
Enter desired %Ess due to this Input [1] > 40
K must be at least 12.5 to meet desired Ess.
Enter desired K [12.5] >
Design by choosing PM,Gco, Dominant pole? [p] > d
Enter dominant pole Zeta (0<z<1) > 0.707
Enter dominant pole Wn (Wn>0) > sqrt(18)
Designed controller information:
K 12.5
a 8.268
T 0.0311
aT 0.2571
(zero) -1/aT -3.889
(pole) -1/T -32.16
w @Max Phase 11.18
Max Phase 51.65
20*log10(a) 18.35
Update Current K,a,T values? (y/n) [y] >
LLDESIGN > t
Choose output variable: Y,E,U [y] > => (llama a Tfplot, por defecto se
graficara la respuesta al escalón unitario
TFTPLOT > f => (opción del menú: Final time)
Enter desired final time [2.2] > 2
TFTPLOT > !subplot(211)
```

TFTPLOT > p \Rightarrow (grafica la respuesta al escalón, figura 66)
 TFTPLOT > a \Rightarrow (se obtienen los atributos de la misma)
 TFTPLOT > !subplot(212)
 TFTPLOT > s
 Stimulus: Step,Impulse,Ramp [s] > r
 Desired amplitude [1] >
 TFTPLOT > p \Rightarrow (grafica la respuesta a la rampa, figura 66)

Por último se arreglan las graficas obtenidas con las herramientas correspondientes, las mismas luego de esto se muestran en la figura 66.

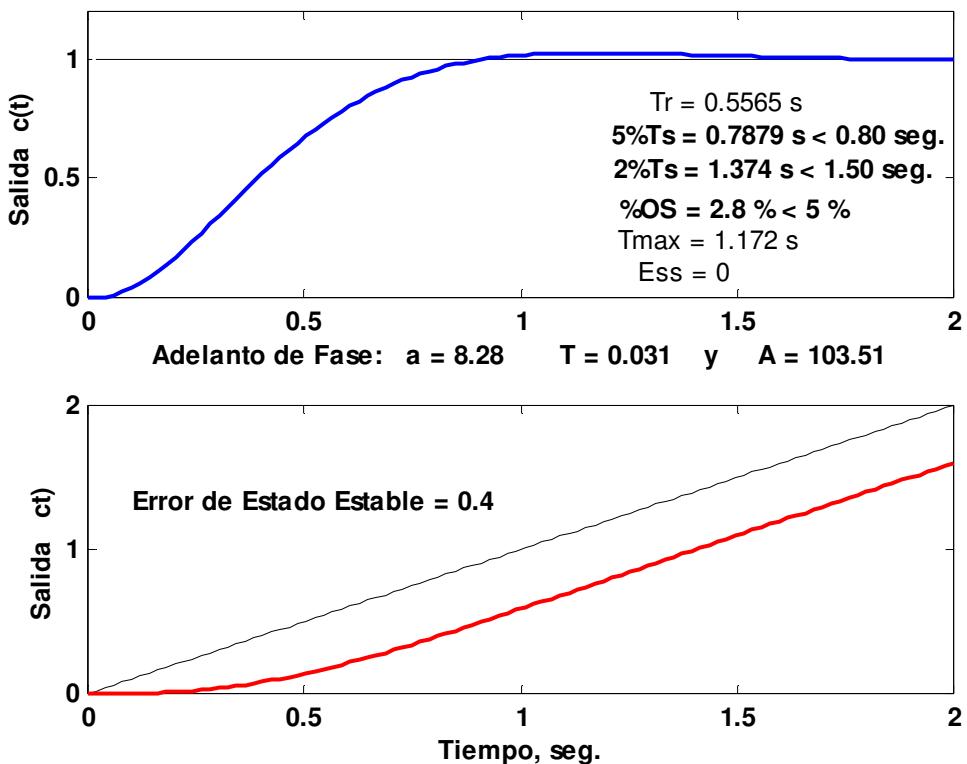


Figura 66

La configuración de polos y ceros del sistema diseñado es:

TFTPLOT > r

Zeros ----- Poles

$$\begin{array}{ll}
 Z_1 = -3.8893 & \lambda_1 = -2.9995 + 3.0005i \\
 \text{Inf} & \lambda_2 = -2.9995 - 3.0005i \\
 \text{Inf} & \lambda_3 = -3.4095 \\
 \text{Inf} & \lambda_4 = -32.7501
 \end{array}$$

Como se puede observar, sobre todo por el par cero-polo ($Z_1 - \lambda_3$), el $M_p(\%)$ baja un poco y los tiempos de establecimiento suben, con respecto al sistema típico de segundo orden con los mismos polos complejos conjugados.

Ejemplo 20:

La función de transferencia de la planta a controlar y las especificaciones de funcionamiento solicitadas son las siguientes:

$$Gp(s) = \frac{5(s+8)}{s(s+2)(s+4)}$$

Especificaciones: $\begin{cases} 1^{\circ}) Mp(\%) \leq 5\% \\ 2^{\circ}) t_E(2\%) \leq 2,25 \text{ seg.} \\ 3^{\circ}) Kv \geq 2 \text{ seg.}^{-1} \end{cases}$

Ajustado en K_c para δ :

$$K_\delta = 0,7813 \rightarrow K_c = 0,1563$$

$$\therefore \underline{Kv = 0,7813 < 2}$$

Si se cancela el polo en -2 $\rightarrow \frac{1}{aT} = 2 \Rightarrow \frac{1}{T} = ?$

$$1^{\circ}) \delta \geq 0,69 \rightarrow \underline{se elige \delta = 0,707}$$

$$2^{\circ}) t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 2,25 \rightarrow |\sigma| \geq 1,777 \rightarrow \underline{se elige \sigma = -2}$$

$$\therefore \underline{\lambda_{1-2} = -2 \pm j2}$$

$$\angle Gp(s)G_c(s) = \left(\operatorname{tag}^{-1} \frac{2}{6} \right) - \left(\operatorname{tag}^{-1} \frac{2}{p_c - 2} + 45^\circ + 135^\circ \right) = 180^\circ$$

$$\operatorname{tag}^{-1} \frac{2}{p_c - 2} = \left(\operatorname{tag}^{-1} \frac{2}{6} \right) - 180^\circ + 180^\circ = \operatorname{tag}^{-1} \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{p_c - 2} = \frac{1}{3} \rightarrow p_c - 2 = 6 \rightarrow p_c = 8 \rightarrow -\frac{1}{T} = -8$$

o con: $\Delta\phi = +71,565^\circ$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{aT} = 2 \\ \frac{1}{T} = 8 \end{array} \right\} T = 0,125; \quad a = 4 \rightarrow G_c(s) = \frac{A(s+2)}{(s+8)}, \quad A = ?$$

El lugar de las raíces se muestra en la figura 67.

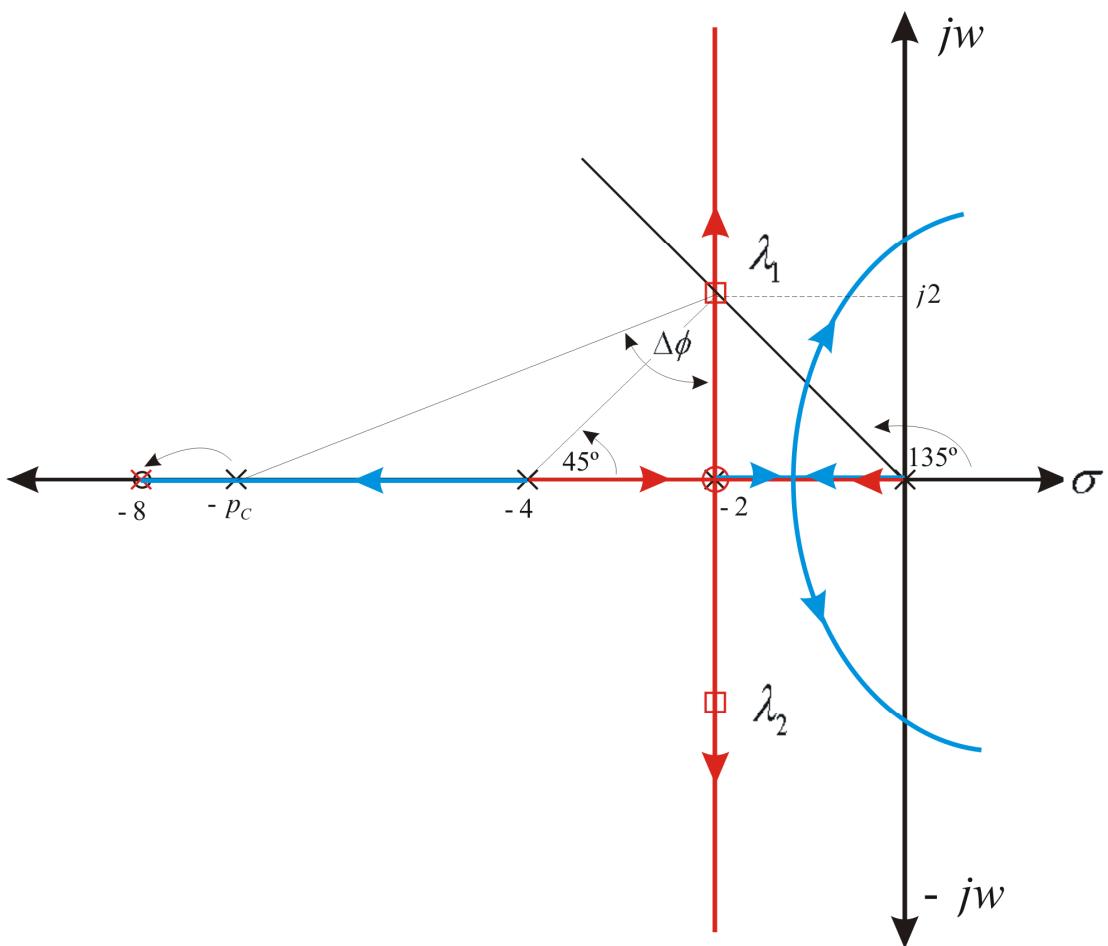


Figura 67

$$K^* = 5A = \sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8 \rightarrow A = \frac{5}{8} \rightarrow \underline{A = 1,6} \rightarrow K_{oc} = \frac{A}{a} = \frac{1.6}{4} = 0.40 \rightarrow K_v^* = 2 \text{ seg.}^{-1}$$

Si se hubiera pedido un coeficiente más alto se podría colocar además una etapa de atraso, como se verá más adelante.-

$$\therefore G_c(s) = \frac{1,6(s+2)}{(s+8)}$$

Ejemplo 21:

Un sistema tiene el diagrama en bloques de la figura 68:

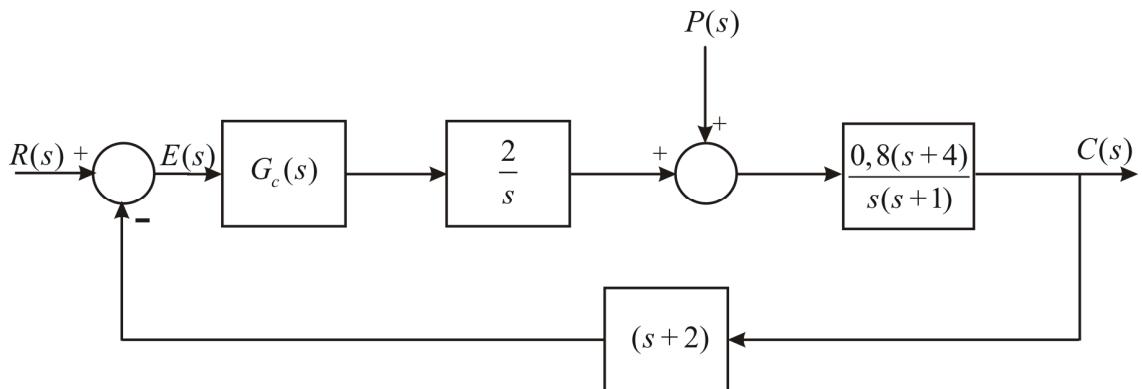


Figura 68

Diseñar un controlador adecuado para que se cumplan las siguientes especificaciones:

- 1º) $e(\infty)$ para $sr(t) = u(t) = 0$
- 2º) $e(\infty)$ para $sr(t) = t.u(t) \leq 0,50$
- 3º) Que el sistema sea insensible a variaciones en $P(t)$
- 4º) $t_E(2\%) \leq 2,00$ seg.
- 5º) $M_p(\%) \leq 5\%$

La 1º) y la 3º) se cumplen con un controlador proporcional dentro del rango de estabilidad.

La zona de las especificaciones del transitorio será:

- 5º) $M_p(\%) \leq 5\% \rightarrow \delta \geq 0,707$
- 4º) $t_E(2\%) \leq 2,00$ seg. $\rightarrow \frac{4}{|\sigma|} \leq 2 \rightarrow |\sigma| \geq -2 \rightarrow |\sigma| = -2$

Si bien se pueden ubicar los polos complejos en la zona, figura 69, no serían dominantes. El M_p bajaría debido a λ_3 y el t_E aumentaría un poco.

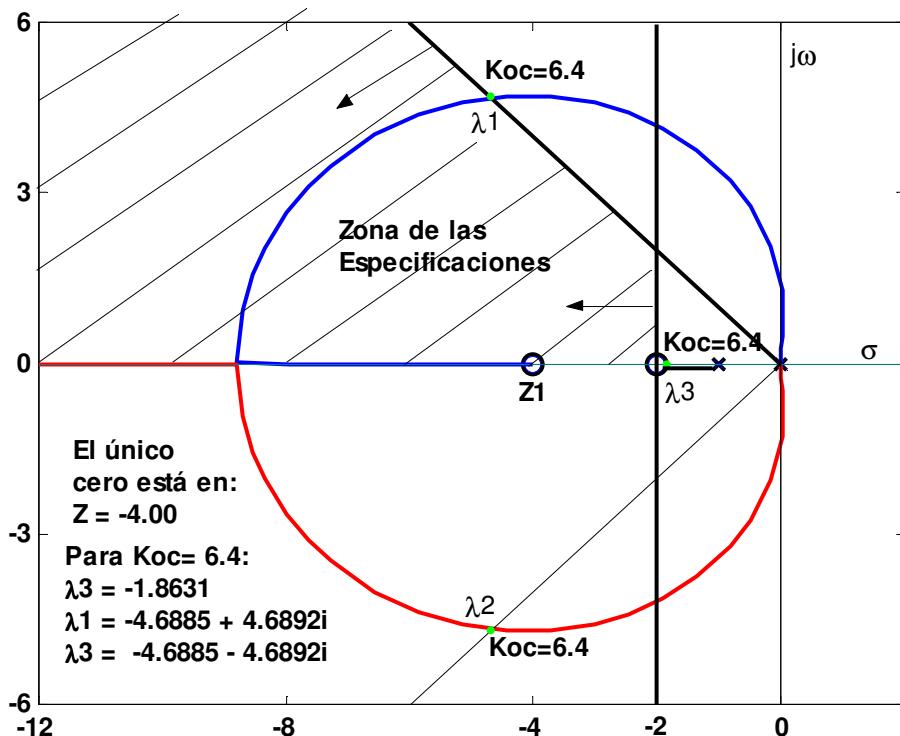


Figura 69

En cuanto al $e(\infty)$ para $sr(t) = t.u(t)$, como se verá es independiente del valor de k_c :

$$G_{eq}(s) = \frac{k_H \cdot G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s) - k_H \cdot G(s)} = \frac{3,2k_c(s+4)}{s[s^2 + (1+1,6k_c)s + 6,4k_c]} \quad \text{tipo "1"}$$

$K_V = \frac{3.2k_c \times 4}{6.4k_c} = 2$; Por lo tanto el $e(\infty) = 0.5 < 0.6$ para cualquier k_c dentro del rango de estabilidad o sea $k_c > 0.208$.

O con

$$M'(s) = \frac{3,2k_c(s+4)}{s^3 + (1+1,6k_c)s^2 + 9,6k_c s + 12,8k_c}$$

$$e(\infty) \text{ rampa} = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{9,6k_c - 3,2k_c}{12,8k_c} = \frac{6,4}{12,8} = 0,50$$

Veamos con una PC si se cumplen las especificaciones del transitorio.

$$\text{Si } k_c = 6,4 \rightarrow G_{eq}(s) = \frac{20,48(s+4)}{s(s^2 + 11,24s + 40,96)}$$

Con Pidesign:

Como se puede ver a pesar que el par λ_{1-2} tiene $\delta = 0,707$ el NO SER DOMINANTES el Mp es nulo, Mp=0%, debido a la influencia del polo λ_3 .

De todas formas se puede ver, con ayuda de la PC, que se cumplen todas las especificaciones, con $G_c(s) = k_c = 6,40$, figura 70.

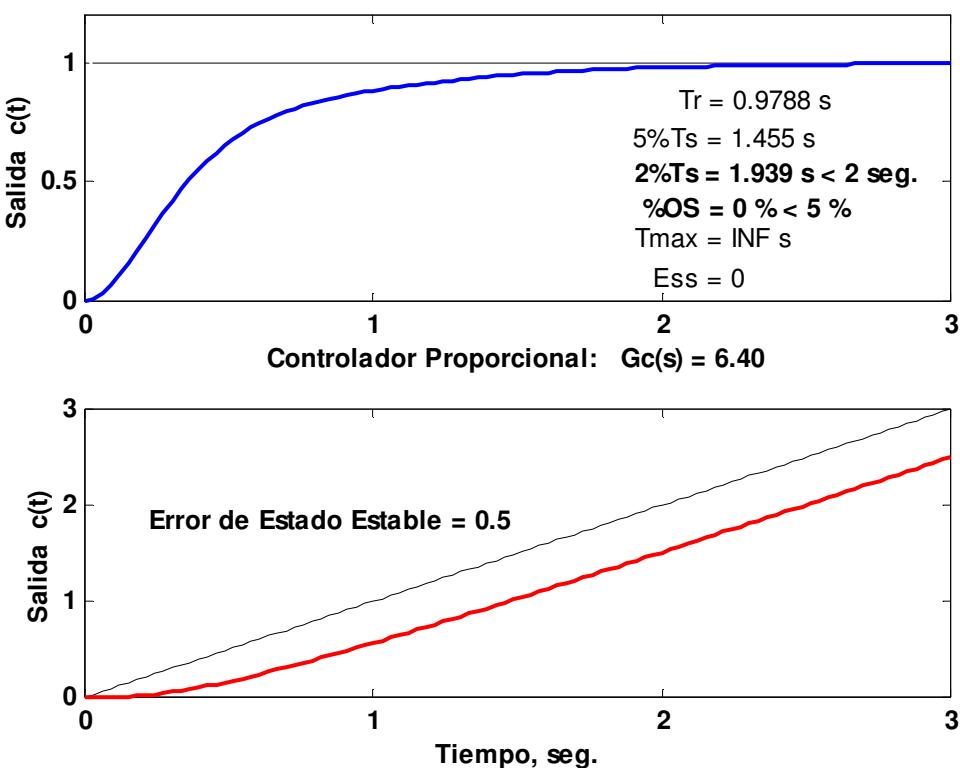


Figura 70

Veremos si usando un controlador de Adelanto de Fase se puede conseguir las especificaciones pedidas, con un par de polos complejos DOMINANTES.

Ubicaremos ese par de polos.

$$\begin{cases} 5^{\circ}) \quad Mp(\%) \leq 5\% \rightarrow \delta \geq 0,707 \\ 4^{\circ}) \quad t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 2 \rightarrow |\sigma| \geq -2 \rightarrow |\sigma| = -2 \rightarrow \lambda_{1-2} = -2 \pm j2 \end{cases}$$

Se cancelará el polo en -1, con el cero: $\frac{1}{aT} = 1$ y el polo en $\frac{1}{T}$ se ubicará, aplicando el requerimiento angular, para que el par complejo dominante este en la ubicación deseada. Haciendo esto resulta que se tiene que colocar cancelado el cero de $G_p(s)$ en -4: $\frac{1}{T} = 4 \quad \therefore \begin{cases} T = 0,25 \text{ seg} \\ a = 4 \end{cases}$

Nos quedará un típico sistema de 2º orden, pues el cero en -2 es de $H(s)$, y en consecuencia no será un cero del sistema, figura 71.

$$G(s) = \frac{A(s+1)2}{(s+4)s} \cdot \frac{0,8(s+4)}{s(s+1)} = \frac{1,6A}{s^2} \quad \text{y } H(s) = (s+2)$$

$$L(s) = \frac{1,6A(s+2)}{s^2}$$

$$k^* = 1,6A = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow A = \frac{4}{1,6} \rightarrow A = 2,5$$

$$\therefore A = 2,5 ; a = 4 \text{ y } T = 0,25$$

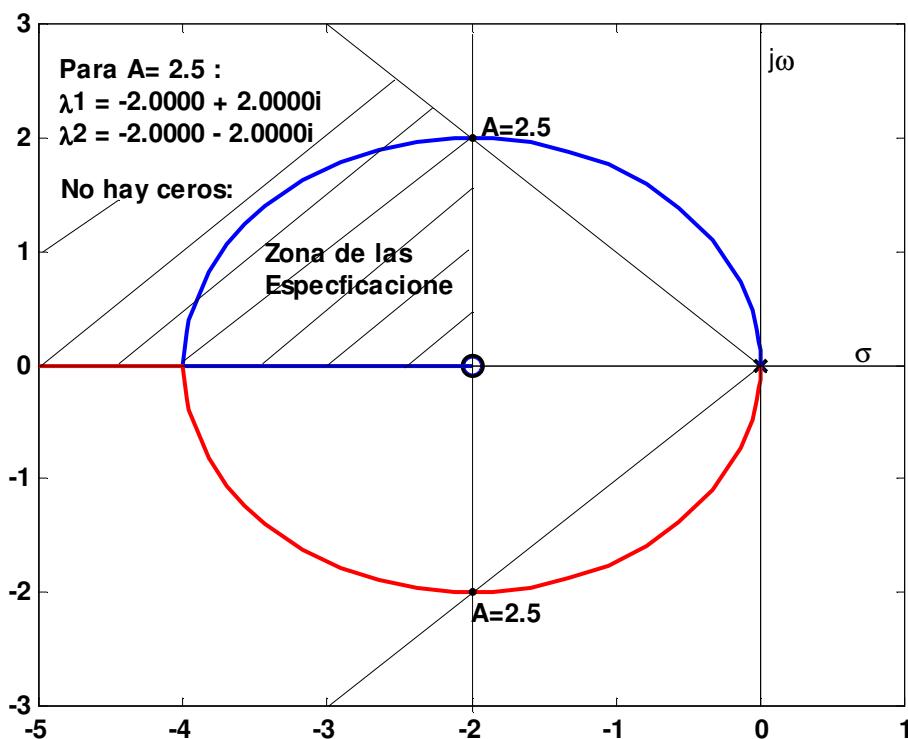


Figura 71

Las respuestas del sistema diseñado al escalón unitario y rampa de pendiente unitaria en la señal de referencia $s_r(t)$ son mostradas en la figura 72.

Como se aprecia se cumplen todas las especificaciones pedidas, como era lógico pues el sistema diseñado resultó uno típico de segundo orden.-

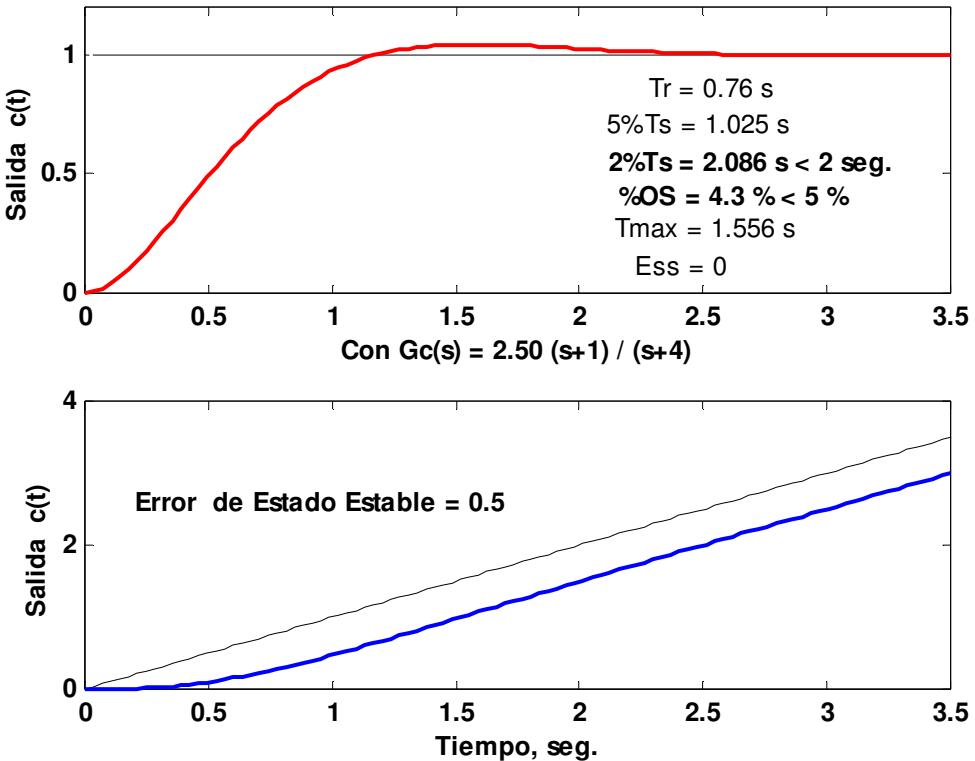


Figura 72

Ejemplo 22:

La función de transferencia de una planta a controlar es:

$$G_p(s) = \frac{0,5}{s(s+1)(s+5)} ;$$

Las especificaciones pedidas para el sistema de control a diseñar son:

$$\begin{cases} 1^o) Mp(\%) \leq 5\% \\ 2^o) t_E(2\%) \leq 2,25 \text{ seg} \\ 3^o) k_v \geq 1,5 \text{ seg} \end{cases}$$

$$1^o) \delta \geq 0,69 \rightarrow \delta \geq 0,707 \rightarrow wd = |\sigma|$$

$$4^o) t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 2,25 \rightarrow |\sigma| \geq 1,777 \rightarrow \sigma = -2$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = -2 \pm j2$$

A simple vista se ve que le simple ajuste de la ganancia no puede corregir la especificación 2º). Lo que se podría hacer cuando hay dudas es lo siguiente:

$$E.C. \rightarrow s(s+1)(s+5) + 0,5A = 0$$

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 0,5A = 0$$

Al ajustar A para que $\delta = 0,707$, se tendrá, (figura 73):

$$E.C. \rightarrow (s^2 + 2|\sigma|s + 2|\sigma|^2)(s - \lambda_3) = 0 \text{ , operando}$$

$$s^3 + (2|\sigma| - \lambda_3)s^2 + (2|\sigma|^2 - 2\lambda_3|\sigma|)s + (-2\lambda_3|\sigma|^2) = 0$$

$$\begin{cases} 2|\sigma| - \lambda_3 = 6 \\ 2|\sigma|^2 - 2\lambda_3|\sigma| = 5 \\ 0,5A = -\lambda_3 2|\sigma|^2 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, por ejemplo con Solve de Matlab, se tiene:

$$\sigma = -0,4505$$

Si $A > 0 \rightarrow \lambda_3 = -5,099 \quad \text{Sistema Estable buen Mp(\%)} \text{ pero lento.-}$

$$A = 4,1392$$

$$\sigma = -5,5495$$

Si $A < 0 \rightarrow \lambda_3 = 5,099 \quad \text{Sistema Inestable.-}$

$$A = -628,1392$$

$$\text{Para } A > 0 \text{ sería} \Rightarrow t_E(2\%) \approx \frac{4}{|0,4505|} \approx 8,8 \text{ seg} > 2,25 \text{ seg}$$

$$k_v = \frac{0,5 \cdot 4,1392}{5} \square 0,414 < 1,5$$

Por ende hay que compensar, se consigue solo el Mp(%), no así $T_E(2\%)$.

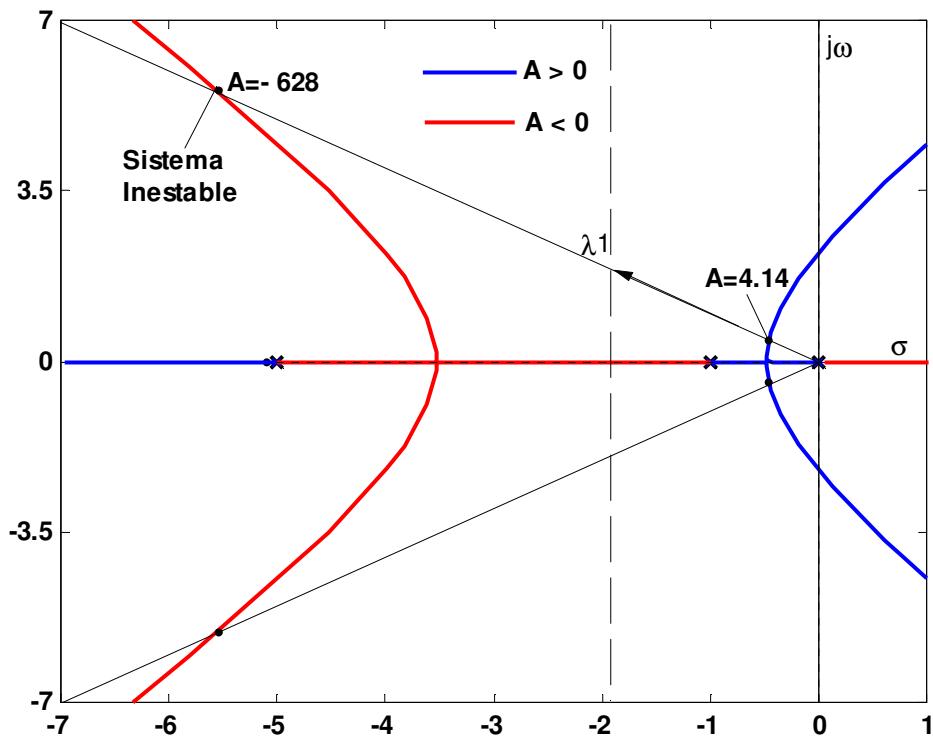


Figura 73

Se colocará un controlador: $G_c(s) = \frac{A\left(s + \frac{1}{aT}\right)}{\left(s + \frac{1}{T}\right)}$ con $a > 1$.

Se cancelará el polo de $G_p(s)$ en -1 con el cero de $G_c(s)$: $\frac{1}{aT} = 1 \rightarrow aT = 1$

El polo $(-\frac{1}{T})$ se deberá ubicar según se muestra en la figura 74, en:

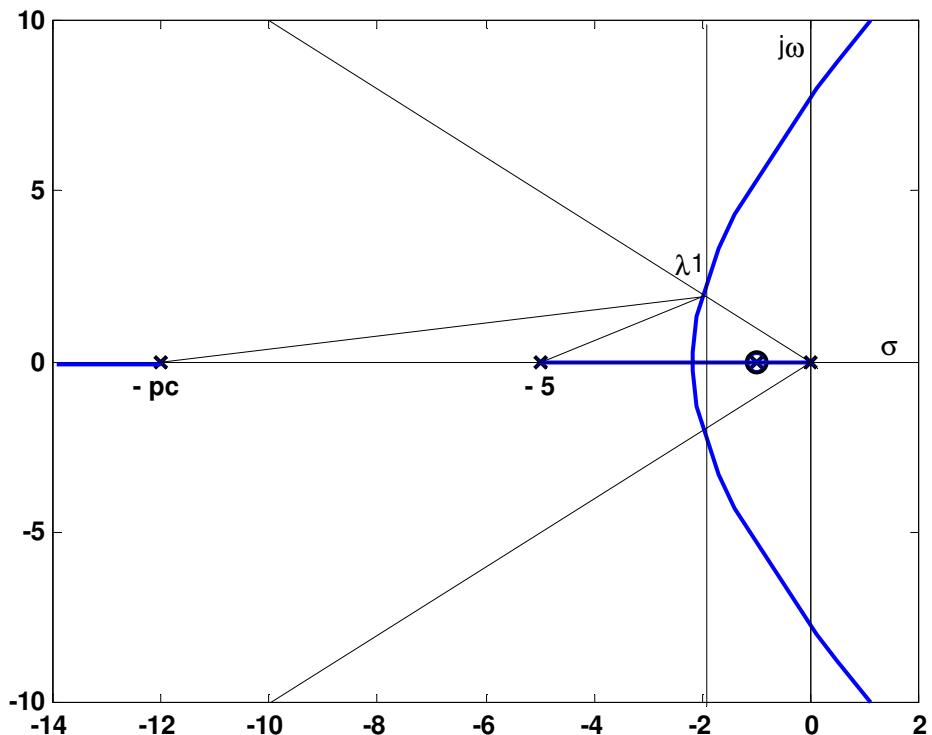


Figura 74

$$\sum \phi_z - \sum \phi_p = -180^\circ$$

$$0 - \left(\operatorname{tag}^{-1} \frac{2}{p_c - 2} + \operatorname{tag}^{-1} \frac{2}{3} + 135^\circ \right) = -180^\circ$$

$$\operatorname{tag}^{-1} \frac{2}{p_c - 2} = 180^\circ - 135^\circ - \operatorname{tag}^{-1} \frac{2}{3} \cong 11,34^\circ$$

$$\frac{2}{p_c - 2} = \operatorname{tag} 11,34^\circ \cong 0,2 \rightarrow p_c = \frac{2}{0,2} + 2 \rightarrow \boxed{p_c = 12}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{aT} = 1 \\ \frac{1}{T} = 12 \end{array} \right\} \boxed{T = \frac{1}{12} \quad y \quad a = 12}$$

$$G_C(s) = \frac{A(s+1)}{(s+12)}$$

$$G(s) = \frac{0,5A}{s(s+5)(s+12)}$$

$$K^* = \sqrt{8 \times 13 \times 104} = \sqrt{10816} = 104 \equiv 0,5A \rightarrow A = 208$$

$$Kv = \frac{104}{60} = 1,733 \text{ seg}^{-1} > 1,5 \text{ seg}^{-1}$$

Diseño satisfactorio: si λ_{1-2} son dominantes, sintetizar el $G_C(s)$:

Si:

$$\underline{C = 0,1 \mu F} \rightarrow R_2 = \frac{T}{C} = \frac{1}{12 \times 0,1} = 0,8333 M\Omega \rightarrow \underline{R_2 = 833,33 K\Omega}$$

$$R_1 = aR_2 = 12 \times 0,833 M\Omega = 10 M\Omega \rightarrow \underline{R_1 = 10000 K\Omega}$$

$$R_4 = AR_3 \Rightarrow \underline{R_4 = 208R_3}$$

El circuito con Amplificadores Operacionales se muestra en la figura 75.

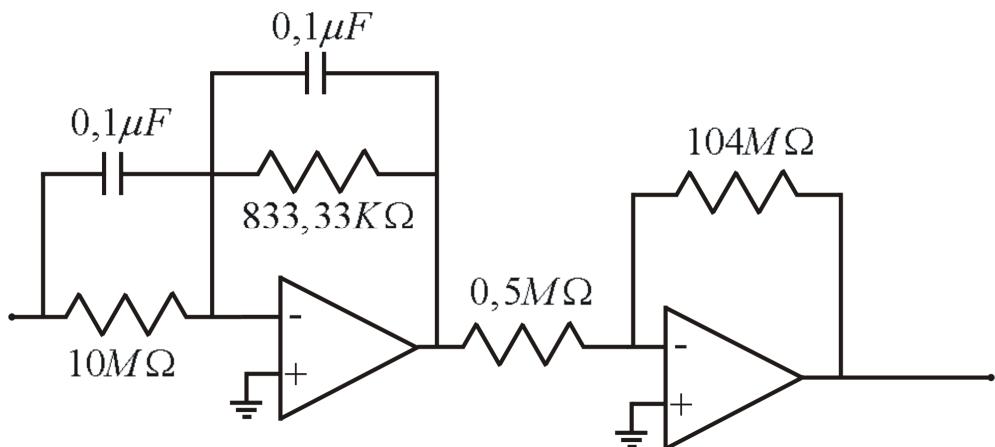


Figura 75

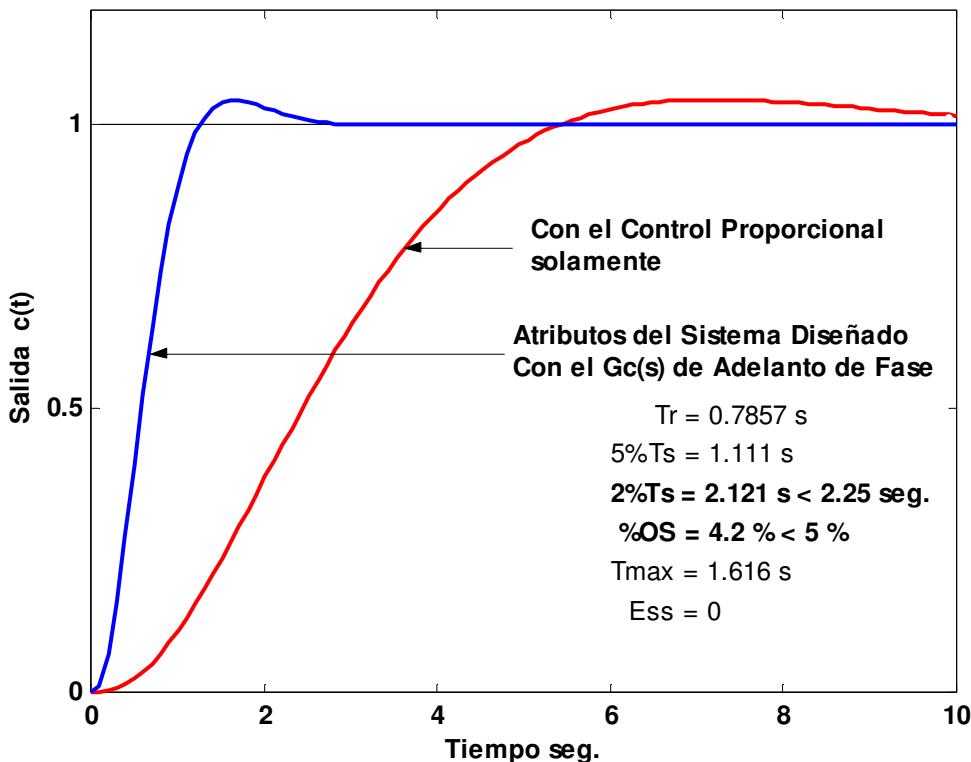
Veamos la ubicación del tercer polo:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2\sigma + \lambda_3 = -17 \rightarrow \lambda_3 = -17 + 4 \Rightarrow \underline{\lambda_3 = -13}$$

por lo tanto se tendrá:

$$\left. \begin{array}{l} a = 12 \\ T = \frac{1}{12} \\ A = 208 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{1-2} = -2 \pm j2 \\ \lambda_3 = -13 \\ z \rightarrow \text{no hay} \end{array} \right\} |\lambda_3| > 5|\sigma| \rightarrow \underline{\lambda_3 = 6,5\sigma}$$

La respuesta con ajuste de la ganancia para conseguir solo el $M_p(\%)$ y con el $G_c(s)$ diseñado se muestra en la figura 76.-



Ejemplo 23:

La función de transferencia de una planta a controlar es:

$$G_p(s) = \frac{5(s+10)}{s(s+2)(s+5)}, \text{ Las especificaciones pedidas:}$$

$$\begin{cases} 1^{\circ}) M_p(\%) \leq 5\% \\ 2^{\circ}) t_E(2\%) \leq 1.5 \text{ seg.} \\ 3^{\circ}) t_p \leq \frac{\pi}{2} (1.57 \text{ seg.}) \\ 4^{\circ}) K_v \geq 1.5 \text{ seg}^{-1} \end{cases}$$

Ajustando solo la ganancia del lazo con un controlador proporcional para que se consiga la 1º) se obtiene: $K\delta = 0.8187 = 5K_c \rightarrow K_c \approx 0.1637$ resulta muy lento, pues $t_E(2\%) = 4.824 \text{ seg.} > 2.25 \text{ seg.}$. Además: $K_v = 0.8185 \text{ seg}^{-1} < 1.5 \text{ seg}^{-1}$. Por ende hay que agregar un controlador de adelanto de fase o un PD.

$$1^{\circ}) \delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0.05)^2}{\pi^2 + (\ln 0.05)^2}} \rightarrow \delta \geq 0.69$$

$$2^{\circ}) t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 2.25 \rightarrow |\sigma| \geq 1.777$$

$$3^{\circ}) t_p = \frac{\pi}{\omega d} \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega d \geq 2$$

La zona de las especificaciones para el transitorio solicitado será la indicada en la figura 77. Si se elige $\delta = 0,707 \Rightarrow \omega d = |\sigma| = 2$, por ende: $\underline{\lambda_{1-2} = -2 \pm j2}$

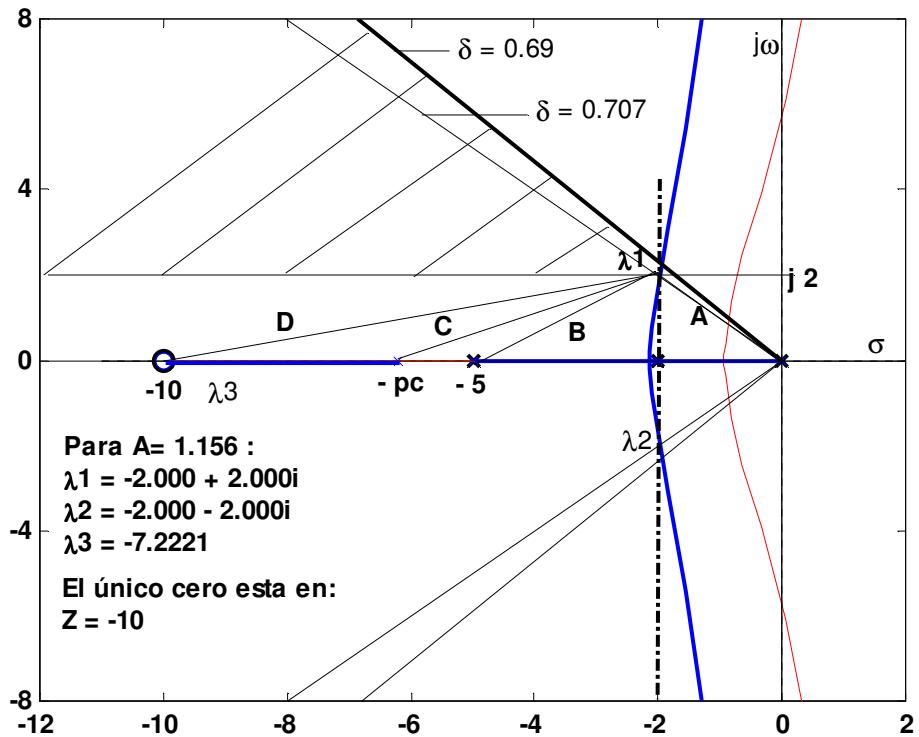


Figura 77

Se cancelará el polo en (-2) de $G_p(s)$ con el cero de $G_c(s)$: $\frac{1}{aT} = 2$

El polo resultará:

$$\left(\operatorname{tag}^{-1} \frac{2}{8} \right) - \left(135^\circ + \operatorname{tag}^{-1} \frac{2}{3} + \operatorname{tag}^{-1} \frac{2}{p_c - 2} \right) = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad -pc = -\frac{1}{T} = -6.222$$

Por lo tanto: $a = 3,111$; $T = 0,16$ y $A = ?$

$$K^* = \sqrt{\frac{A \times B \times C}{D}} = \sqrt{\frac{8 \times 13 \times 21,625}{68}} \approx 5,778 = 5A \Rightarrow \underline{A = 1,1556}$$

$$\Rightarrow G_c(s) = \frac{1,15(s+2)}{(s+6,222)}$$

$$\therefore G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{5,778(s+10)}{s(s+5)(s+6,222)}$$

$$\rightarrow -4 + \lambda_3 = +\sum p_j = -11,22 \rightarrow \underline{\lambda_3 = -7,222}$$

si $A = 1,15$ $\begin{cases} \lambda_{1-2} = -2 \pm j2 \\ \lambda_3 = -7,22 \\ z_1 = -10 \end{cases}$ entonces: λ_{1-2} son dominantes con una pequeña

influencia del polo en -7.222, cae un poco el Mp(%) y sube el t_E .

Cálculo de tp y $Mp(\%)$:

$$tp \cong \frac{1}{\omega d} \left[90^\circ - \tan^{-1} \frac{2}{8} + (\angle \lambda_1 - \lambda_3 + 90^\circ) \right] \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{1}{2} \left[90^\circ - \tan^{-1} \frac{2}{8} + \tan^{-1} \frac{2}{5,222} \right] \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\therefore \underline{tp \cong 1,6311 \text{ seg}} \rightarrow (\text{un poco mayor que } \frac{\pi}{2} \text{ seg} \cong 1,57 \text{ seg})$$

$$Mp(\%) \cong \frac{|-\lambda_3|}{|\lambda_1 - \lambda_3|} \times \frac{|(\lambda_1 - z_1)|}{|(-z_1)|} \times e^{\sigma_{tp}} \times 100 = \frac{7,222}{5,5921} \times \frac{8,2462}{10} \times e^{-2 \times 1,63} \times 100 = \underline{4,07938\%}$$

$$\therefore \underline{Mp(\%) \cong 4,08 < 5\%}$$

Veamos el régimen permanente:

$$K_{Vcc} = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \frac{5,778 \times 10}{5 \times 6,222} = 1,857 \text{ seg}^{-1}$$

$$\therefore \underline{K_{Vcc} \cong 1,857 \text{ seg}^{-1} > 1,5 \text{ seg}^{-1}}$$

Por lo tanto el diseño será correcto.

El error a $r(t) = t.u(t)$ será:

$$e(\infty) = \frac{1}{1,857} \rightarrow \underline{e(\infty)_{\text{entrada rampa}} \cong 0,5384}$$

Por ende, si $\underline{C = 0,1 \mu F}$:

$$-R_2 = \frac{T}{C} = \frac{0,16}{0,1} = 0,016 M\Omega \rightarrow \underline{R_2 = 16 K\Omega}$$

$$-R_1 = aR_2 = 3,11 \times 16 K\Omega \rightarrow \underline{R_1 = 49,76 K\Omega}$$

$$-R_4 = AR_3, \text{ si } \underline{R_3 = 1 K\Omega} \rightarrow \underline{R_4 = 1,15 K\Omega}$$

Las respuestas se muestran en la figura 78 donde se aprecia que se satisfacen todas las especificaciones.

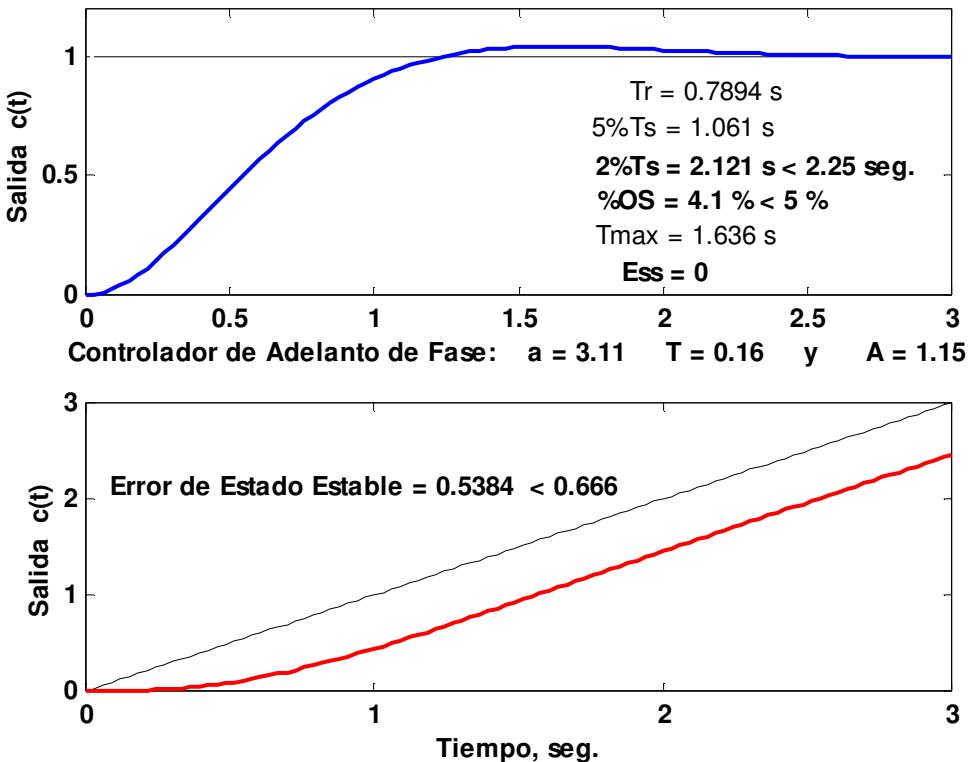


Figura 78

Si no se quiere tener ceros en el sistema diseñado:

$$G_C(s) = \frac{A\left(s + \frac{1}{aT}\right)}{\left(s + \frac{1}{T}\right)} \rightarrow \frac{1}{T} = 10 \rightarrow \boxed{T = 0,1} \quad G_C(s) = \frac{A\left(s + \frac{1}{aT}\right)}{(s+10)}$$

si se cancela el polo en -5 $\rightarrow \frac{1}{aT} = 5 \rightarrow a = 2$ pero quedaría $\sigma = -1$ y no se cumpliría que $|\sigma| > 1,777$.

Por ende, cancelando el polo en -2, $\frac{1}{aT} = 2 \rightarrow a = 5$ quedaría $\sigma = -2,5$ y se cumpliría $|\sigma| > 1,777$.

$$G(s) = G_C(s)G_p(s) = \frac{A(s+2)}{(s+10)} \times \frac{5(s+10)}{s(s+2)(s+5)} = \frac{5A}{s(s+5)}$$

$$K^* = 5A = 2 \times 2,5^2 = 12,5 \rightarrow A = \frac{K^*}{5} \rightarrow \underline{\underline{A = 2,5}}$$

$$\therefore G_C(s) = \frac{2,5(s+2)}{(s+10)} \quad \underline{K_{oc} = 0,5}$$

El sistema diseñado resulta ser un típico de segundo orden, con $\lambda_{1-2} = -2,5 \pm j2,5$. Las respuestas al escalón y rampa se muestran en la figura 79

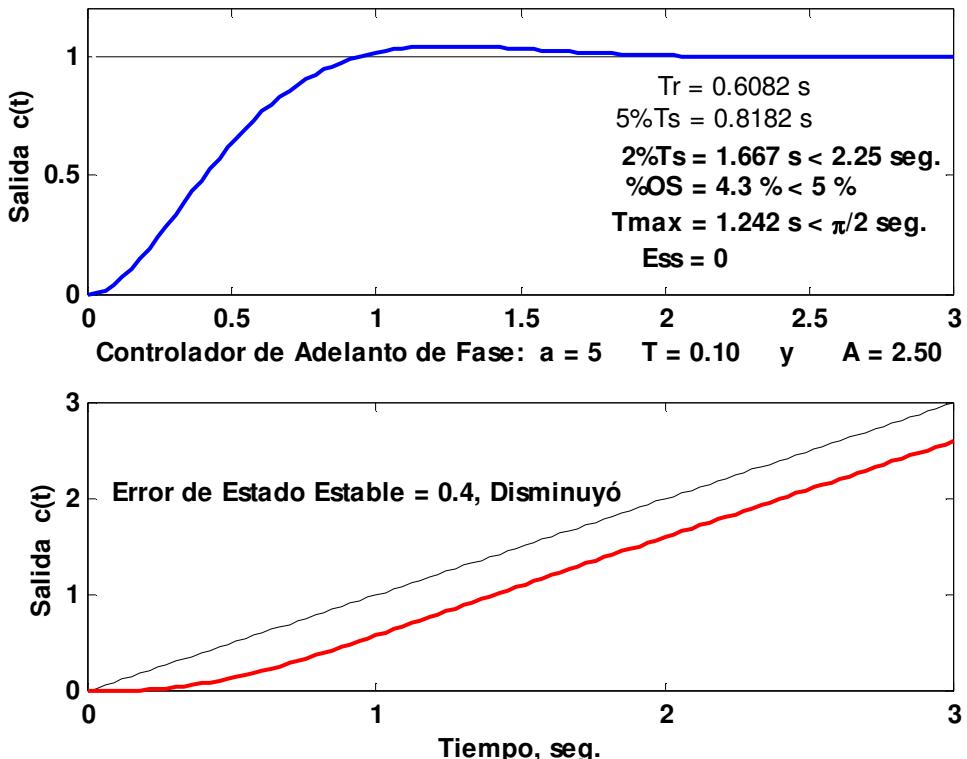


Figura 79

Diseño de los Controladores de Atraso de Fase:

Una vez que el transitorio (al escalón), se consigue con el simple ajuste de la ganancia, (controlador proporcional), o con una etapa de adelanto de fase, o un controlador PD, y se necesita mejorar el régimen permanente (disminuir o hacer nulo el error de estado estable debido a la entrada de prueba correspondiente, o aumentar los coeficientes de error), sin alterar sustancialmente el transitorio ya obtenido, se puede emplear un controlador de atraso de fase, o un PI, o sea:

$$1) \quad G_c(s) = \frac{A(1+aTs)}{a(1+Ts)} \equiv A \frac{(s+1/aT)}{(s+1/T)} \Rightarrow \text{con } a < 1 \text{ y } T \text{ relativamente grande. -}$$

$$2) \quad G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p(s + K_i/K_p)}{s} \Rightarrow \text{con valores de } K_p \text{ y } K_i \text{ relativamente pequeños.}$$

Esto expresado de otra manera sería:

Cuando los polos complejos conjugados dominantes están en la posición deseada pero los coeficientes de error son bajos.

Una forma de ver el efecto de agregar un controlador de atraso de fase sería el siguiente:

Supongamos que se ajusta la ganancia del lazo del sistema básico para conseguir el transitorio deseado, se supone que esto se consigue, si no se podría emplear una etapa de adelanto o un PD previamente diseñada para tal fin.

Si la función de transferencia de la planta a controlar es:

$$G_p(s) = \frac{kp}{s(s+p_1)(s+p_2)}; \text{ y se ajusta la ganancia del lazo con } A, \text{ llamaremos a}$$

la ganancia del lazo resultante: $K\delta = Akp$, por ende la función del lazo será:

$$G_1(s) = AGp(s) = \frac{K\delta}{s(s+p_1)(s+p_2)}$$

Se agrega ahora lo que falta del controlador o sea: $\frac{(s+1/aT)}{(s+1/T)}$. -

$$G_2(s) = G_1(s) \frac{(s+1/aT)}{(s+1/T)} = \frac{K\delta (s+1/aT)}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+1/T)} \quad (*)$$

Si se ubica el cero en $\frac{-1}{aT}$ y el polo en $\frac{-1}{T}$ muy cercanos entre si y para

sistemas tipo cero o uno muy próximos al origen del plano s. Por lo tanto el lugar de las raíces del sistema con $G_2(s)$ como función de transferencia de lazo, en la zona dominante para el transitorio se puede aproximar a:

$$G_2(s) \approx \frac{K\delta}{s(s+p_1)(s+p_2)} \approx G_1(s);$$

Por ende el lugar de las raíces en la zona dominante no se modificará sustancialmente, que era lo buscado, como lo indica la (figura 75), la misma no está a escala pues cerca del origen sería el grafico muy chico.

De (*) se ve que:

$$Kv_{cc} = \frac{K\delta}{p_1 p_2} \frac{1}{a} \equiv Kv_{sc} \frac{1}{a} \Rightarrow a \approx \frac{Kv_{sc}}{Kv_{cc}}$$

Expresión que permitirá determinar el valor del parámetro a donde:

Kv_{sc} : Coeficiente de error del sistema cuando $K = K\delta$. -

Kv_{cc} : Coeficiente especificado para el error del sistema.

Una vez determinados A y a , solo resta calcular T , que desde el punto de vista práctico no deberá ser demasiado grande ya que la ecuación $T = R_2 C$ indicaría un valor muy grande para C o R_2 .

Otra forma de ver el efecto de $G_c(s)$:

Se ajusta la ganancia de lazo del sistema básico para que el error de estado estacionario sea el deseado, su valor lo llamaremos Ke_{EE} , o sea:

$$G_1(s) = \frac{A}{a} G_p(s) = \frac{(A/a)kp}{s(s+p_1)(s+p_2)} \equiv \frac{Ke_{EE}}{s(s+p_1)(s+p_2)} \quad (**)$$

El sistema podrá llegar a inestabilizarse seguramente o ser muy oscilatorio. Ahora se añade la parte que falta del controlador que es:

$$\frac{(1+aTs)}{(1+Ts)} = \frac{a(s+1/aT)}{(s+1/T)}; \text{ que como se aprecia no modifica el coeficiente de}$$

error ya obtenido en el paso anterior.

Por ende:

$$G_2(s) = G_1(s) \frac{a(s+1/aT)}{(s+1/T)} = \frac{(A/a)kp \times a(s+1/aT)}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+1/T)} = \frac{(Ke_{EE} a)(s+1/aT)}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+1/T)}$$

En consecuencia:

$$G_2(s) = \frac{K\delta(s+1/aT)}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+1/T)}$$

Si se cumplen las condiciones ya mencionadas para el polo y el cero de $G_c(s)$ esta última función se puede simplificar a la:

$$G_2(s) \approx \frac{K\delta}{s(s+p_1)(s+p_2)} \equiv \frac{(Ke_{EE} \times a)}{s(s+p_1)(s+p_2)} \quad (***)$$

Comparando las funciones (**) y (***) se puede apreciar que el lugar de las raíces sería casi el mismo, en la zona dominante, y la ganancia se redujo de Ke_{EE} a $(Ke_{EE} \times a) \equiv K\delta$, como se pretendía. Por lo tanto será:

$$\boxed{a \approx \frac{K\delta}{Ke_{EE}}}$$

por ende $a < 1$.

Donde:

$K\delta$: Ganancia del lazo del sistema para conseguir el transitorio deseado.

Ke_{EE} : Ganancia del lazo del sistema para conseguir el error de estado estable deseado.

Cuando se ajusta $K = Ke_{EE}$ como se dije generalmente el sistema se poco estable o inestable. Por lo tanto con esta compensación sería como moverse por las ramas dominantes hacia la zona de estabilidad con el coeficiente de amortiguación deseado para los polos dominantes.

Resumen Final:

Como $a < 1$ el atraso de fase es equivalente a reducir la ganancia del lado de Ke_{EE} a $(K\delta \approx Ke_{EE} \times a)$, mientras no se afecta el coeficiente de error y por ende el error de estado estable. Además prácticamente la posición de los polos λ_{1-2} , tampoco, con lo cual el transitorio no varía sustancialmente.

En realidad los polos se mueven un poco hacia la derecha y como aparece el par $(\lambda_3; z_1)$ el M_p aumentará un poco también.

Como se dijo en la figura 80 se muestran los lugares de las raíces del sistema ajustado en ganancia solamente, $K = K\delta$, y del diseñado, (no a escala).-

A veces para reducir el valor de T y al mismo tiempo no variar mucho el $M_p(\%)$, el parámetro "a" también se debería reducir, sin embargo no tanto pues el cero en $-\frac{1}{aT}$ se aportaría muy hacia la izquierda en el eje real y

por ende del polo en $-\frac{1}{T}$.

Esto se puede ver bien en los contornos de las raíces.

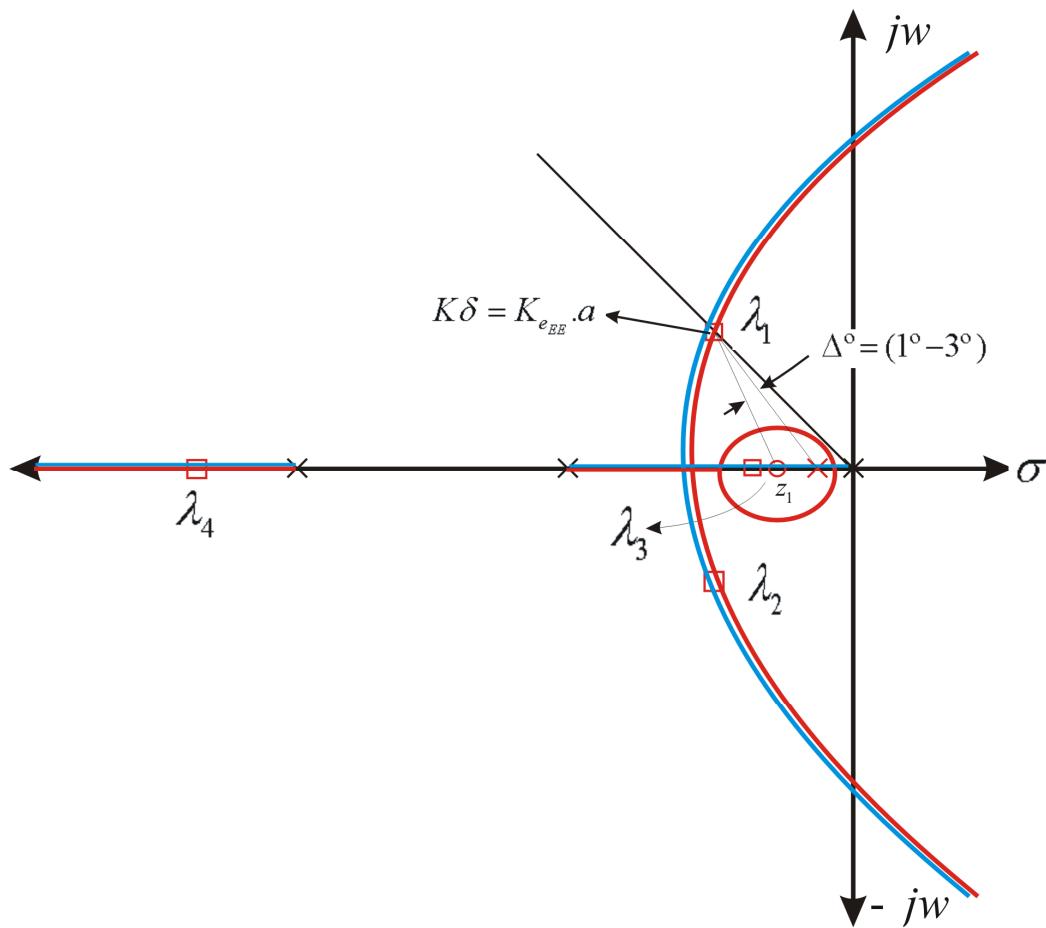


Figura 80

Procedimiento para el Diseño de un $G_c(s)$ de Atraso utilizando la técnica del Lugar de las Raíces:

El procedimiento es el siguiente:

- 1) Dibujar el L.R. para el sistema con $G_p(s)$ y la ganancia $K = Ak_p$.-
- 2) Del comportamiento transitorio determinar la ubicación deseada de los polos dominantes λ_{1-2} .
Si el lugar de las raíces del punto 1) no pasa por ellos se deberá emplear previamente un controlador por ejemplo de adelanto de fase o un PD para que esto ocurra.
- 3) Una vez que el LR pasa por λ_{1-2} , determinar el coeficiente de error y si está bajo se determinará la ganancia necesaria $K\delta$, para tener los polos en el valor deseado y en consecuencia k_{vsc} .
- 4) Si como dijimos k_{vsc} es bajo, calcular el valor de "a" con:

$$a \equiv \frac{K\delta}{Ke_{EE}} \quad o \quad a \equiv \frac{Ki \text{ sc}}{Ki \text{ cc}} ; \text{ Con } i=p, v \text{ o } a, \text{ según corresponda.}$$

5) Para asegurar que los polos λ_{1-2} no sean sustancialmente afectados por el controlador, el aporte neto en el requerimiento angular debería ser unos pocos grados, por ejemplo menor que -3° , o sea:

$$|\phi_{zcomp} - \phi_{pcomp}| < 3^\circ \rightarrow \Delta^\circ \leq 3$$

Una forma de elegir el parámetro T, (una vez determinado "a"), sería la siguiente; figura 81.

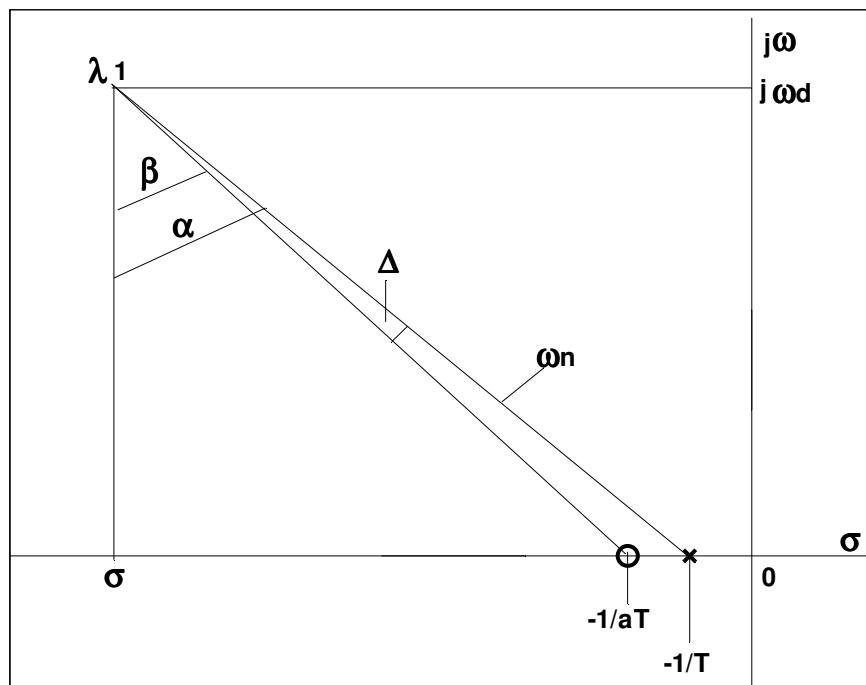


Figura 81

$$\alpha = \operatorname{tag}^{-1} \frac{|\sigma| - 1/T}{\omega d}; \beta = \operatorname{tag}^{-1} \frac{|\sigma| - 1/aT}{\omega d}; \Delta^\circ = \alpha - \beta \Rightarrow \operatorname{tag} \Delta^\circ = \frac{\operatorname{tag} \alpha - \operatorname{tag} \beta}{1 + \operatorname{tag} \alpha \operatorname{tag} \beta}$$

Reemplazando α y β por sus expresiones y operando se llega a:

$$[a(\sigma^2 + \omega d^2) \operatorname{tag} \Delta^\circ]T^2 - [|\sigma|(1+a)\operatorname{tag} \Delta^\circ + \omega d(1-a)]T + \operatorname{tag} \Delta^\circ = 0$$

Ecuación que se puede escribir así:

$$AT^2 - BT + C = 0 \quad (*)$$

Donde:

$$\begin{cases} A = a(\sigma^2 + \omega d^2) \operatorname{tag} \Delta^\circ \\ B = |\sigma|(1+a)\operatorname{tag} \Delta^\circ + \omega d(1-a) \\ C = \operatorname{tag} \Delta^\circ \end{cases}$$

Fijados $|\sigma|$, ω_d , a y Δ° , se puede determinar el valor de T con (*).

De las dos soluciones se tomará la mayor (Atraso de Fase), como ya se sabe, si se tomara la menor la sensibilidad del lazo bajaría mucho y no se

mantendría constante como se desea, (queda en aproximadamente en el valor $K\delta$), en consecuencia el coeficiente de error del sistema diseñado no aumentaría al valor deseado, sino que se mantendría prácticamente igual que el que tenía antes de introducir el controlador.-

Ejemplo 24:

Sea $G_p(s) = \frac{k_p}{s(s+1)(s+5)}$ las especificaciones son las siguientes:

$$\begin{cases} 1^{\circ}) Mp\% \leq 20\% \\ 2^{\circ}) t_E(5\%) \leq 7 \text{ seg.} \quad \text{Si } G_c(s) = K_c \Rightarrow K = k_p K_c \\ 3^{\circ}) k_v \geq 7 \text{ seg}^{-1} \end{cases}$$

Veamos la zona para que se cumpla el transitorio.

$$1^{\circ}) \delta \geq 0,456$$

$$2^{\circ}) \frac{2,25}{|\sigma|} \leq 7 \rightarrow |\sigma| \geq 0,32$$

$$\text{Para el } e_{EE} \rightarrow Kv = \frac{Ke_{EE}}{5} \geq 7 \Rightarrow Ke_{EE} = 35$$

Como $K_L = 30$, pues la ecuación característica es: $s^3 + 6s^2 + 5s + K = 0$ el sistema sería inestable.

Veremos si ajustando solo $K = K\delta = Ak_p$, se consigue que se cumpla el transitorio

La ecuación característica sería: $s^3 + 6s^2 + 5s + K\delta = 0$ (1)

Si se elige $\delta = 0,5$, será también:

$$E.C. \rightarrow (s - \lambda_3)[s^2 + 2|\sigma|s + (\sigma^2 + wd^2)] = 0, \text{ como } wd = \sqrt{3}|\sigma| \rightarrow wd^2 = 3\sigma^2$$

$$\text{Por ende: } (s - \lambda_3)[s^2 + 2|\sigma|s + 4\sigma^2] = 0$$

Desarrollando nos queda:

$$s^3 + [2|\sigma| - \lambda_3]s^2 + [4|\sigma| - 2\lambda_3]|\sigma|s + (-4\lambda_3|\sigma|^2) = 0 \quad (2)$$

Por ende (1) y (2) nos dan:

$$\begin{cases} 2|\sigma| - \lambda_3 = 6 \\ |\sigma|(4|\sigma| - 2\lambda_3) = 5 \\ -4\lambda_3|\sigma|^2 = K\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{La solución para } K\delta > 0 \text{ será: } |\sigma| = 0,41666 > 0,32 \quad \therefore \lambda_{1-2} \cong -0,416 \pm j0,7216$$

Están dentro de la zona de las especificaciones y además:

$$\lambda_3 = -5,16666 \leq 5\sigma \rightarrow -5,166 \leq -2,0833$$

Son *dominantes* por ende el transitorio será el adecuado. Sin embargo, como $K\delta \cong 3.588 < 35$ el régimen permanente no sería el correcto.

$$\text{Si } kp = 2, \quad A = \frac{K\delta}{kp} = \frac{3.588}{2} \Rightarrow A = 1.794.-$$

$$\text{Si } kp = K\delta \Rightarrow A = 1.-$$

Usando Matlab:

Llamando x_1 al valor absoluto de la parte real del par de polos complejos, x_2 al valor del tercer polo del sistema y x_3 a la ganancia del lazo.

Se puede usar la función *Solve* de Matlab de la manera siguiente:

```
>>[x1,x2,x3]=solve('2*x1-x2=6','x1*(4*x1-2*x2)=5','-4*x2*x1^2=x3')
X1=
5/12=0.41667>0.40
X2=
-31/6=-5.1667<5σ ; (polos complejos conjugados dominantes)
X3=
775/216=3.5880<35
```

Se cumplirían las dos primeras especificaciones del transitorio al escalón de entrada. Pero no se obtiene la tercera especificación del error a entradas rampas. Por consiguiente habrá que colocar un controlador de atraso de fase para conseguirla.

El K_V sin el controlador sería: $K_{V_{SC}} \cong \frac{3.588}{5} = 0.7176 < 7$

Por ende usaremos un controlador de atraso de fase.

El valor de a deberá ser:

$$a = \frac{K_{V_{SC}}}{K_{V_{CC}}} = \frac{0,7176}{7} \rightarrow a \cong 0,1025 \text{ se tomará: } \boxed{a = 0,1}$$

El valor aproximado de T , suponiendo que $Δ^{\circ}=1^{\circ}$, será:

$$A = a \left(\underbrace{\sigma^2 + \omega d^2}_{\omega n^2} \right) \operatorname{tag} \Delta^{\circ} = 0,1 \times 0,6944 \times \operatorname{tag} 1^{\circ} = \boxed{0,001212}$$

$$B = |\sigma| (1+a) \operatorname{tag} \Delta^{\circ} + \omega d (1-a) = 0,4166 \times 1,1 \times \operatorname{tag} 1^{\circ} + 0,7217 \times 0,9 = \boxed{0,6575}$$

$$C = \operatorname{tag} 1^{\circ} = \boxed{0,017455}$$

$$\therefore 0,001212 T^2 - 0,6575 T + 0,017455 = 0 \rightarrow T^2 - 542,492 T + 14,402 = 0 \begin{cases} T = 0,0265 \rightarrow \text{no} \\ T = 542,48 \end{cases}$$

Redondeando, se elige: $\boxed{T = 545 \text{ seg}}$

$$G_c(s) = A \frac{(s+1/aT)}{(s+1/T)} = \frac{(K\delta/kp)(s+0.01835)}{(s+0.001835)}$$

$$G(s) = G_c(s) G_p(s) = \frac{K\delta(s+0.01835)}{s(s+1)(s+5)(s+0.001835)}$$

Verificando en la PC nos da, para $\delta=0,50$, que la ganancia del lazo del

sistema compensado es: $K'\delta = 3.545 \approx K\delta = 3.588$. Como se ve es casi igual a la ganancia que tenía el sistema ajustado para conseguir el transitorio.

Síntesis del controlador: Si $C = 10\mu F$; $R_2 = T/C = 545/10 \Rightarrow R_2 = 54.5M\Omega$

$$R_1 = a R_2 \Rightarrow R_1 = 5.45M\Omega$$

$$\text{Si } kp = 2, \text{ como } A = \frac{K\delta}{kp} = \frac{3.588}{2} \Rightarrow A = 1.794 \Rightarrow R_4 = 1.794 R_3$$

El esquema se muestra en la figura 82.

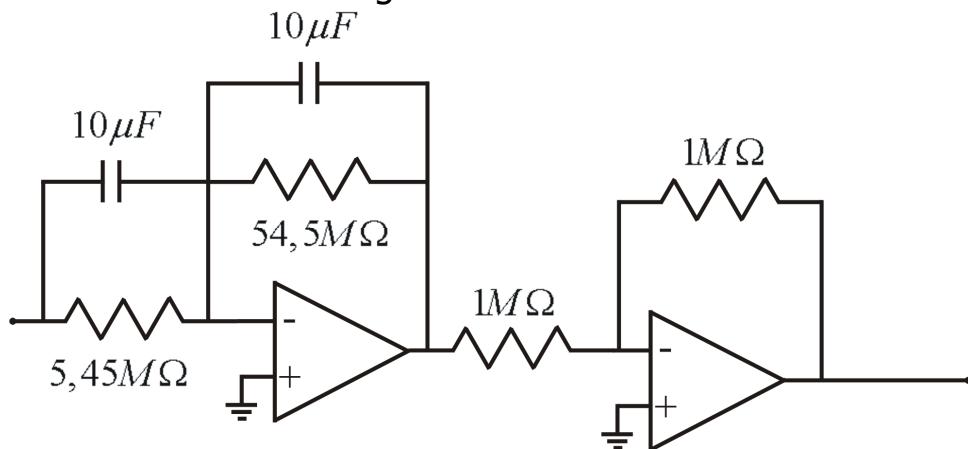


Figura 82.

La figura 83 muestra las respuestas ajustando solo en ganancia A y luego con el controlador de atraso de fase.

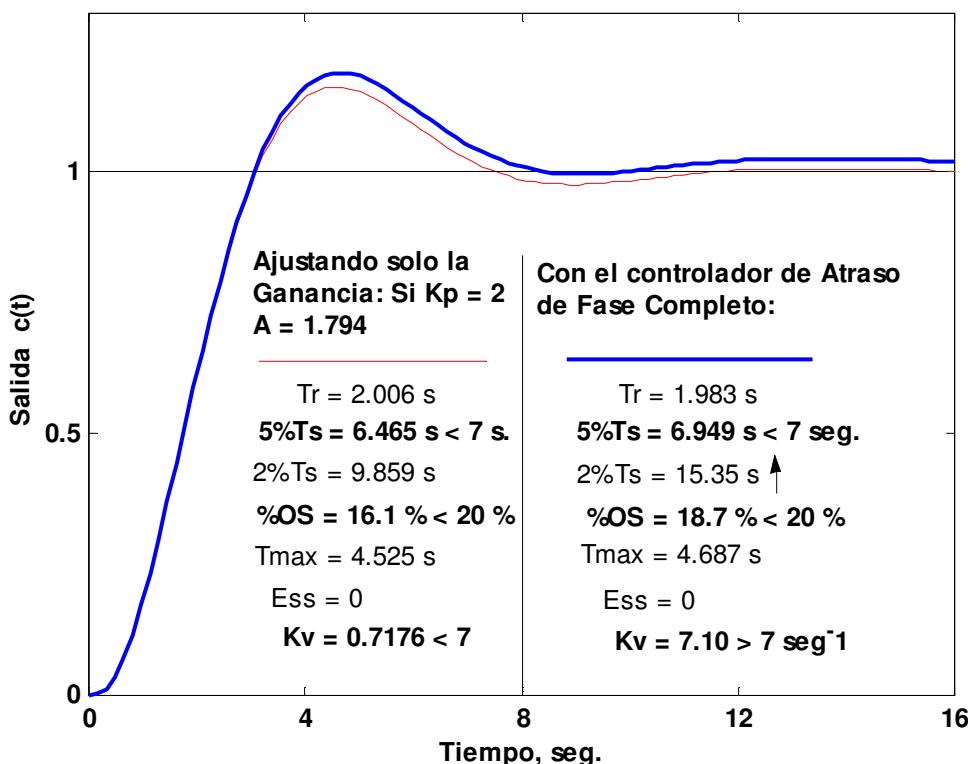


Figura 83

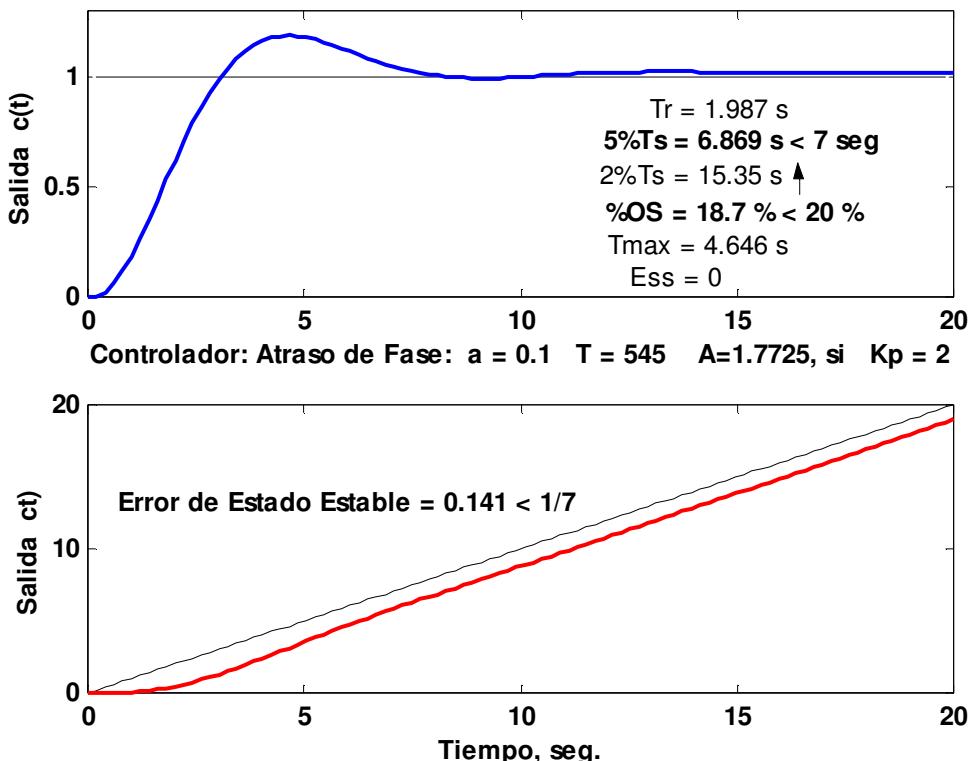


Figura 84

También se muestra, en la figura 84, las respuestas temporales del sistema diseñado. Finalmente la figura 85 muestra el lugar de las raíces del sistema

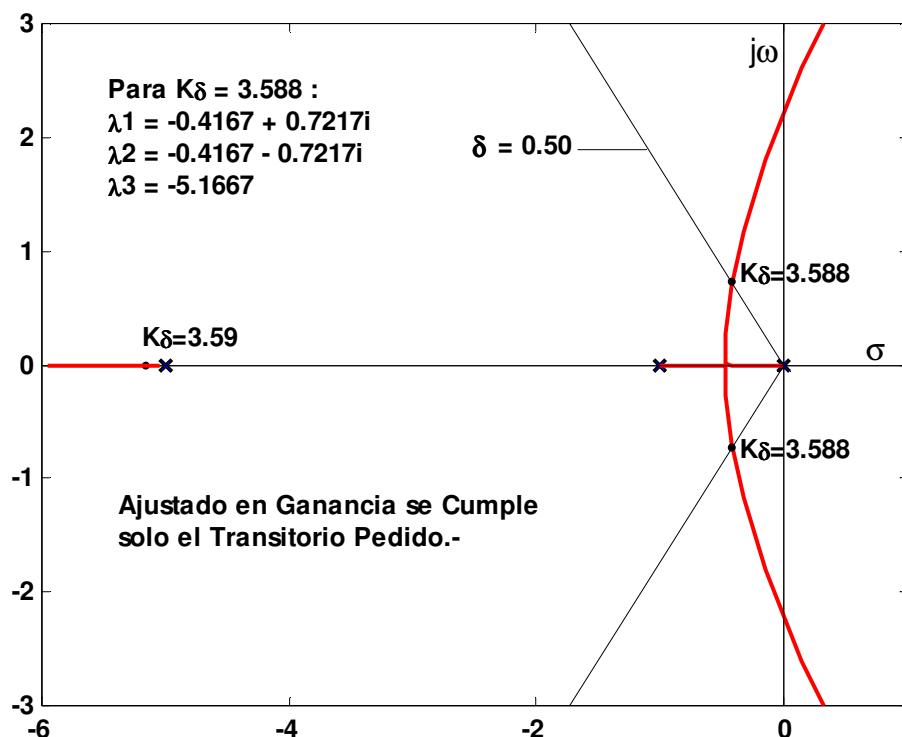


Figura 85

Solo con el ajuste de la ganancia, y la 86 la parte dominante del lugar con el controlador de atraso de fase empleado.-

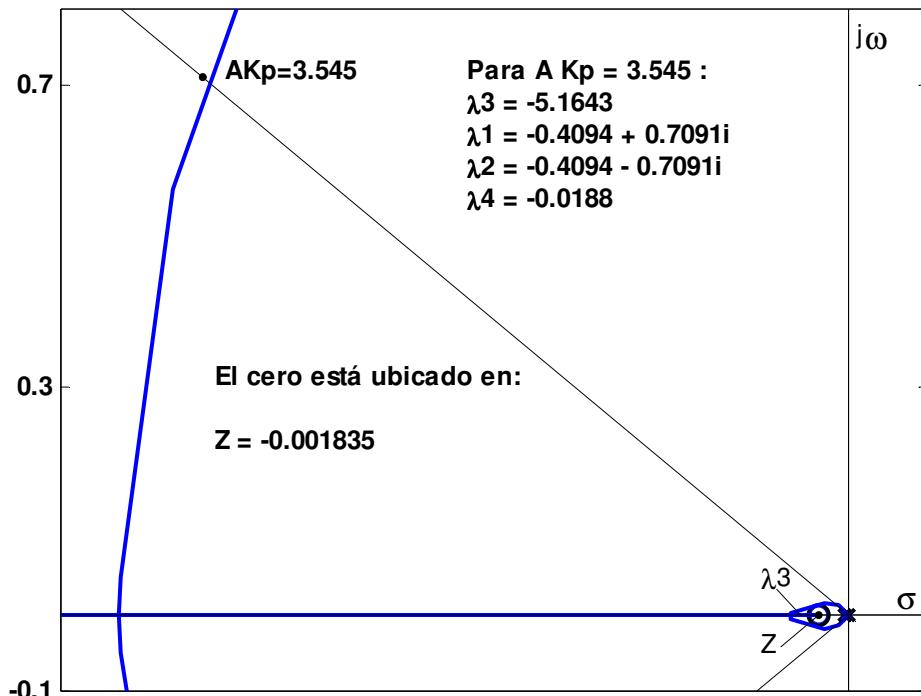


Figura 86

Adelanto-Atraso de Fase:

Ejemplo 25: $G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}$ especificaciones: $\begin{cases} 1^{\circ}) & Mp(\%) \leq 20\% \\ 2^{\circ}) & t_E(2\%) \leq 1 \text{ seg.} \\ 3^{\circ}) & Kv \geq 15 \text{ seg}^{-1} \end{cases}$

1º) Se cumple si $\delta \geq 0,455 \rightarrow \underline{\delta = 0,5} \left(\omega d = \sqrt{3} |\sigma| \right)$

$$\frac{4}{|\sigma|} \leq 1 \text{ seg.} \rightarrow |\sigma| \geq 4 \rightarrow \underline{\underline{\sigma = -4}}$$

2º) Se cumple si

$$\therefore \underline{\underline{\lambda_{1-2} = -4 \pm j4\sqrt{3} = -4 \pm j6,928}}$$

Como ajustando solo la ganancia: $\sigma = -1$ habrá que agregar una etapa de adelanto para conseguir λ_{1-2} en las posiciones deseadas.

Si se elige $\frac{1}{aT} = 2 \rightarrow \underline{aT = 0,5}$, resultaría: $\frac{1}{T} = 8 \rightarrow \boxed{T = 0,125 \text{ seg}} \therefore \boxed{a = 4}$

Aplicando el requerimiento de magnitud:

$$K^* = 16 + 8 = 64 = 4A \rightarrow \boxed{A = 16}$$

$$\therefore Gc_1(s) = \frac{16(s+2)}{(s+8)} \rightarrow G_l(s) = \frac{64}{s(s+8)}$$

El K_V será: $K_V = 8 \text{ seg}^{-1} < 15 \text{ seg}^{-1}$ hay que agregar otra etapa pero de Atraso.

Por lo tanto:

$$Gc_2(s) = \frac{(s+1/aT)}{(s+1/T)}$$

en la misma: $A = 1$ pues " $K\delta$ " = " kp " = 64. -

$$a_2 \approx \frac{K_V sc}{K_V cc} = \frac{8}{15} = 0.533$$

se elegirá: $a_2 = 0.50$

Si se adopta: $\Delta^\circ = 1^\circ$

$$A = a \omega n^2 \operatorname{tag} \Delta^\circ = 0,5 \times 64 \times \operatorname{tag} 1^\circ = \underline{0,558562}$$

$$B = |\sigma| (1+a) \operatorname{tag} \Delta^\circ + \omega d (1-a) = 4 \times 1,5 \times \operatorname{tag} 1^\circ + 4\sqrt{3} \times (1-0,5) = \underline{3,7785}$$

$$C = \operatorname{tag} 1^\circ = \underline{0,017455}$$

$$\therefore 0,558562 T^2 - 3,7785 T + 0,017455 = 0 \begin{cases} T = 0,0046 \rightarrow \text{no} \\ \underline{\underline{T = 6,76}} \end{cases}$$

Se adopta: $T = 10 \text{ seg}$ → $\Delta \approx 0,62^\circ$

$$Gc_2(s) = A \frac{(s+1/aT)}{(s+1/T)} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A \approx 1 \\ a = 0.50 \\ T = 10 \end{cases}$$

Por ende será:

$$Gc_2(s) = \frac{(s+0.2)}{(s+0.1)}$$

$$G(s) = Gc_1(s) Gc_2(s) Gp(s) = \frac{(\approx 64)(s+0.2)}{s(s+8)(s+0.1)}$$

La figura 87 nos muestra la respuesta del sistema a una entrada escalón unitaria, con sus atributos.

$$\text{El } K_V = \frac{12.8}{0.8} = 16 \text{ seg}^{-1} > 15 \text{ seg}^{-1}. -$$

Como se puede ver, se cumplen todas las especificaciones pedidas.

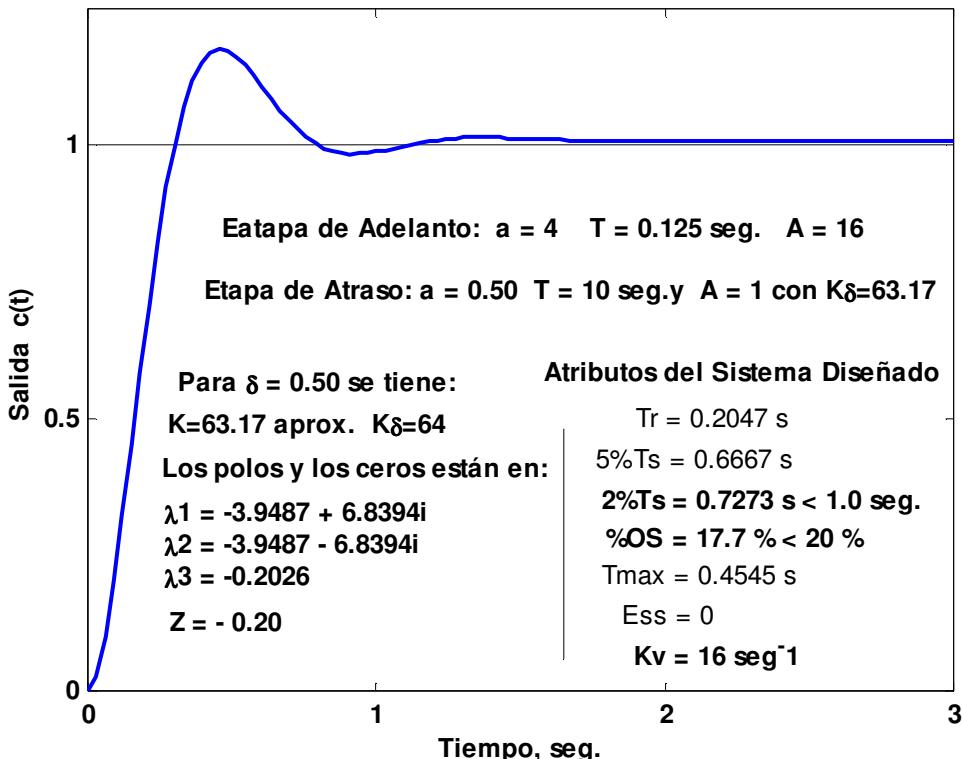


Figura 87

Ejemplo 26:

Se dispone de un sistema de control en lazo cerrado con realimentación unitaria, en el que la Función de Transferencia de la planta a controlar es:

$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$$

- a) Se desea que el sistema en lazo cerrado presente una sobre elongación máxima, a un escalón en la señal de entrada: $M_p(\%) \leq 20\%$
- b) Con un $t_E(5\%) \leq 1,3 \text{ segundos}$.
- c) El error de estado estacionario para una señal de entrada rampa debe ser:

$$e_{EE}(\infty) \leq 1,25\% \quad o \quad e_{EE}(\infty) \leq 0,0125.$$

Diseñar un controlador serie adecuado que permita conseguir las especificaciones enunciadas.

Solución:

Las especificaciones se traducen en:

$$\rightarrow M_p(\%) \leq 20\% \rightarrow \underline{\delta} \geq 0,456 \rightarrow \text{se elige } \underline{\delta} = 0,5$$

$$\rightarrow t_E(5\%) \leq 1,3 \text{ seg.} \approx \frac{3,2}{|\sigma|} \rightarrow |\sigma| \geq 2,46 \rightarrow \text{se elige } \underline{\sigma} = -2,5$$

Estas dos especificaciones se cumplen si los polos complejos conjugados están en:

$$\lambda_{1-2} = -\delta \omega n \pm j \omega n \sqrt{1-\delta^2} = -|\sigma| \pm j \sqrt{3} |\sigma| \quad \text{pues } \theta = 60^\circ$$

$$\underline{\underline{\lambda_{1-2} = -2,5 \pm j2,5\sqrt{3}}}$$

El error ante entradas rampas unitarias inferior a 0,0125 implica que:

$$e_{EE} = \frac{1}{Kv} \leq 0,0125 \rightarrow \underline{\underline{Kv \geq 80 \text{ seg}^{-1}}}$$

En primer lugar, para llevar los polos a λ_{1-2} deseado, se usará un $Gc(s)$ de: Adelanto de Fase.

Usando el método de cancelación polo-cero, figura 88.

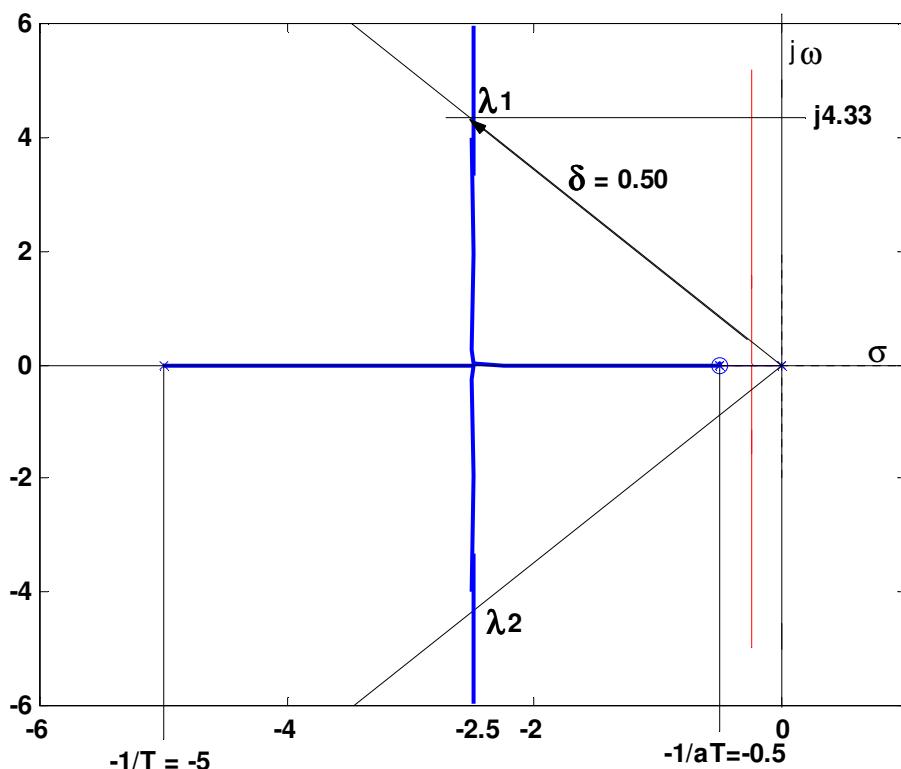


Figura 88

$$G(s) = Gc_1(s) Gp(s) = \frac{4A(s+0,5)}{(s+5)s(s+0,5)}$$

$$K^* = 4A = 2,5^2 + 4,33^2 \cong 25 \rightarrow A = \frac{25}{4} \rightarrow A = 6,25$$

$$Gc(s) = \frac{6,25(s+0,5)}{(s+5)}$$

Veamos el K_V que resultó:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{25}{5} = 5$$

$$\underline{K_V = 5 < 80}$$

Hay que llevarlo a 80 sin modificar sustancialmente el transitorio obtenido. Esto se hace con un $G_{C_2}(s)$ de Atraso de Fase.

- Calculo de a : $a \approx \frac{5}{80} \rightarrow a \approx 0,0625$ se adopta: $a = 0.06$
- Determinación de T:

$$\left. \begin{array}{l} A = a \omega n^2 \operatorname{tag} \Delta^\circ \\ B = |\sigma| (1+a) \operatorname{tag} \Delta^\circ + \omega d (1-a) \\ C = \operatorname{tag} \Delta^\circ \end{array} \right\} \rightarrow AT^2 - BT + C = 0$$

si se elige $\Delta^\circ = 10^\circ$ nos queda:

$$A = 0.0262 \quad B = 4.0703 \quad y \quad C = 0.01745$$

Reemplazando en la ecuación correspondiente nos da $T=155.35$, se elige:

$$T = 160$$

$$G_{C_2}(s) = \frac{(s + 0.104166)}{(s + 0.00625)}$$

La Función de transferencia del controlador será:

$$G_C(s) = G_{C_1}(s)G_{C_2}(s) = \frac{6.25(s + 0.5)(s + 0.104166)}{(s + 5)(s + 0.00625)}$$

Función del lazo del sistema diseñado.

$$G(s) = \frac{(\approx 25)(s + 0.104166)}{s(s + 5)(s + 0.00625)}$$

Se verifico con la PC y la ganancia del lazo del sistema diseñado para tener el mismo coeficiente de amortiguación 0.5 es: $K'\delta = 24.5 \approx 25$.

En la figura 89 se ven las respuestas con el controlador de Adelanto de Fase solo y con el de Adelanto-Atraso.

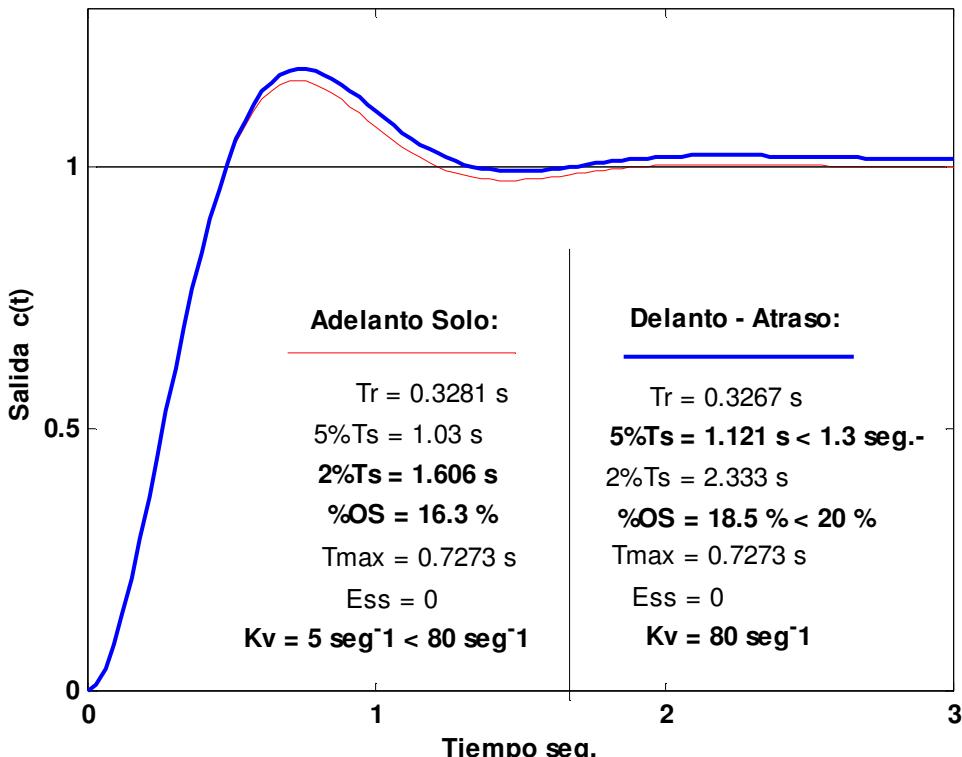


Figura 89

Controladores Series: Proporcional Integral Derivativo, P.I.D.

Ejemplo 27:

Dado el sistema de la figura 90:

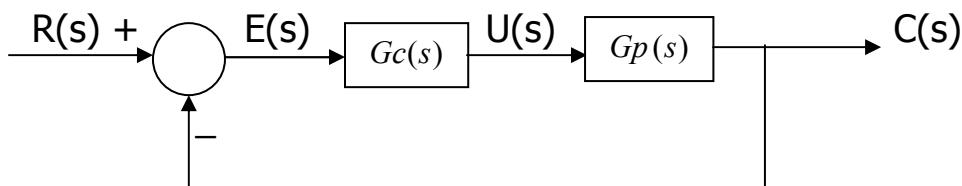


Figura 90

Donde: $G_p(s) = \frac{50}{(s+2)(s+3)}$ y $G_c(s) = ?$ (Controlador serie).

Se desea diseñar un sistema que verifique las especificaciones siguientes:

1. Error de estado estacionario al escalón nulo, $e(\infty) = 0 .-$
2. Error de estado estacionario a la rampa menor o igual a 24%.-
3. Máxima sobre elongación menor o igual a 17%, $M_p(\%) \leq 17\%. -$
4. El tiempo de establecimiento al 5% menor o igual a 2 segundos.

Para realizar este diseño se proponen los pasos siguientes:

a) Comprobar que para $G_c(s) = K_c$, control proporcional solo, no se cumplen las condiciones de error de estado estacionario, solo se podrán alcanzar las especificaciones del transitorio.-

b) Para hacer cumplir las condiciones de los errores estacionarios se introducirá un control integral:

$$G_c(s) = \frac{Ki}{s}$$

Calcular K_i para cumplir dichos errores y comprobar mediante el lugar geométrico de las raíces si se cumple la especificación 4.-

c) Introducir un control Proporcional Integral, P.I.:

$$G_c(s) = K_p + \frac{Ki}{s} = \frac{K_p s + Ki}{s} = K_p \frac{(s + Ki/K_p)}{s}$$

Fijar el cero del mismo, $Z = -\frac{Ki}{K_p}$, de manera que se cumpla la condición 4

y comprobar mediante el lugar geométrico de las raíces que para el valor de K_i que verifica las condiciones de error estacionario no se cumple la condición 3.-

d) Introducir un Control Proporcional integral derivativo, P.I.D.:

$$G_c(s) = K_p + K_d s + \frac{Ki}{s} = \frac{K_d s^2 + K_p s + Ki}{s} = \frac{K_d (s^2 + K_p / K_d s + Ki / K_d)}{s}$$

Si los ceros del controlador están en: $s_1 = -Z_1$ y $s_2 = -Z_2$ se tendrá que:

$$G_c(s) = \frac{K_d [s^2 + (Z_1 + Z_2)s + (Z_1 Z_2)]}{s} = \frac{K_d (s + Z_1)(s + Z_2)}{s}$$

Si se fija uno de los ceros del controlador en, $s_1 = -4$, ($Z_1 = 4$). Calcular la posición del cero restante para que se cumplan las condiciones 3 y 4. Hallar el valor de K_d para el cual se verifican dichas condiciones. ¿será compatible éste valor de K_d , (y en consecuencia de K_p y K_i), con las condiciones 1 y 2.-

Solución:

a) Si $G_c(s) = K_c$ el error de estado estacionario al escalón será:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{50K_c}{(s+2)(s+3)} = \frac{50K_c}{6}$$

$$e(\infty), \text{al escalón} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+50K_c/6} = \frac{3}{3+25K_c}$$

Como se puede apreciar será nulo solo si $K_c \rightarrow \infty$. Para que se cumplan las dos primeras especificaciones el rango posible de K_c es:

$0.125 < K_c < 0.4243$ y el coeficiente δ variara entre: $0.479 < \delta < 1$.-

Por ejemplo con $K_c = 0.40$, solo el transitorio al escalón estaría correcto.-

Por lo tanto será necesaria la presencia de un elemento integrador, agregado por el control, en la función de transferencia del lazo del sistema.

$$b) G_c(s) = \frac{Ki}{s} \Rightarrow G(s) = \frac{50Ki}{s(s+2)(s+3)}$$

Por lo tanto: $e(\infty)$, a escala $= 0$ y $e(\infty)$, a la rampa $= \frac{1}{Kv}$

$$Kv = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{50Ki}{6} \Rightarrow e(\infty), \text{ a la rampa} = \frac{6}{50Ki} \leq 0.24 \Rightarrow 50Ki \geq 25$$

En consecuencia deberá ser: $Ki \geq 0.50$

La condición del tiempo de establecimiento al 5% indica:

$$t_E(5\%) \approx \frac{3}{|\sigma|} \leq 2 \text{ seg.} \Rightarrow |\sigma| \geq 1.50$$

Cuando los polos dominantes del sistema, λ_{1-2} , posean $\sigma = -1.5$ el mismo responderá con $t_E(5\%) \approx 2 \text{ seg.}$ o lo que es lo mismo los polos dominantes λ_{1-2} deberán estar sobre la recta $s = -1.50$ en el plano s.-

La construcción del lugar de las raíces con:

$$G(s) = \frac{50Ki}{s(s+2)(s+3)}, \text{ será:}$$

- Asintotas:

$$\alpha = \frac{m180^\circ}{n-w} = m60^\circ \Rightarrow \pm 60^\circ \text{ y } 180^\circ$$

- Baricentro:

$$\sigma_o = \frac{\sum Po - \sum Zo}{n-w} = \frac{-5-0}{3} \Rightarrow \sigma_0 = -5/3 \approx -1.666.$$

- Puntos de Ruptura:

$$N \frac{d}{ds} G_1(s) = 0 \Rightarrow 3s^2 + 10s + 6 = 0 \Rightarrow s_1 = -0.784 (Ki > 0) \text{ y } s_2 = -2.548 (Ki < 0)$$

El valor de Ki del mismo será:

$$Ki = \frac{-s_1(s_1+2)(s_1+3)}{50} \Rightarrow Ki = 0.042$$

- Cruce con el eje imaginario:

La ecuación característica es: $s^3 + 5s^2 + 6s + 50Ki = 0$

En consecuencia el valor límite de Ki será:

$$5 \times 6 = 50Ki_{Lim} \Rightarrow Ki_{Lim} = 0.60$$

La frecuencia de cruce de fase será:

$$A(s) = 5s^2 + 50Ki_{Lim} \Rightarrow s^2 + 6 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j\sqrt{6} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{6} \approx 2.45 \text{ rad/seg.}$$

En el lugar de las raíces de la figura 91 se observa que no existe ningún valor de Ki para el cual se logre la intersección entre dicho lugar y la recta $s = -1.5$.

Por lo tanto no es posible hacer cumplir la condición del $t_E(5\%) \leq 2 \text{ seg.}$

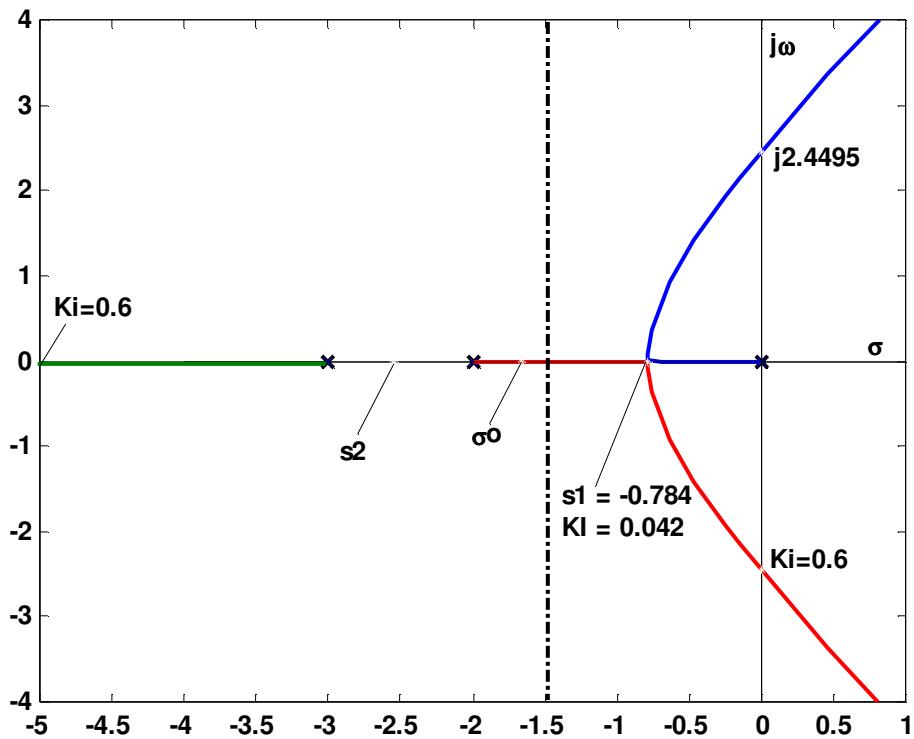


Figura 91

$$c) G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} = \frac{K_p(s + K_i/K_p)}{s}$$

Se debe mantener el valor de $K_I = 0.50$ para cumplir las condiciones de error de estado estacionario. El cero introducido por el control PI se puede situar sobre el polo de la planta en $s = -2$, lográndose, de este modo, verificar la condición de $\sigma = -1.5$, dado que este es el punto de intersección de las asíntotas con el eje real coincidiendo con el valor del punto de ruptura y el ángulo de las mismas es de 90° .

Si $K_i = 0.50$, como $K_i/K_p = 2 \Rightarrow K_p = K_i/2 \Rightarrow K_p = 0.25$, se tendrá:

$$G(s) = \frac{50K_p(s + K_i/K_p)}{s(s+2)(s+3)} = \frac{50 \times 0.25(s+2)}{s(s+2)(s+3)} = \frac{12.5}{s(s+3)}$$

El lugar está indicado en la figura 92.

Los polos de lazo cerrado estarán en:

$$E.C. \Rightarrow s^2 + 3s + 12.5 = 0 \Rightarrow -1.5 \pm j\sqrt{10.25}$$

$$\lambda_{1-2} \cong -1.5 \pm j3.2$$

$$\text{Por ende: } \theta = \tan^{-1} \frac{3.2}{1.5} = 64.8^\circ \Rightarrow \delta = \cos^{-1}(64.8^\circ) \Rightarrow \delta \cong 0.425$$

En consecuencia:

$$M_p(\%) = e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \times 100 \cong 22.88\%$$

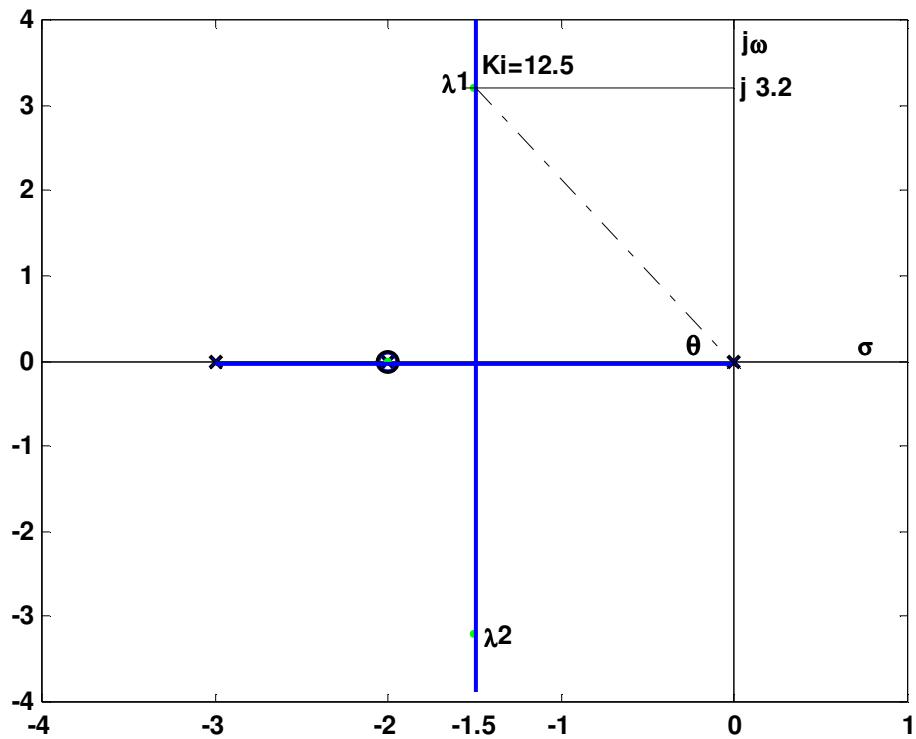


Figura 92

De donde se deduce que el Mp (%) de la respuesta del sistema al escalón es del 22.88% > 17%, lo cual implica que no verifica la condición 3.-

d) Introduciendo el control PID.

La función de transferencia del lazo será ahora:

$$G(s) = \frac{50Kd(s + Z_1)(s + Z_2)}{s(s + 2)(s + 3)}$$

donde: $Z_1 + Z_2 = K_p / K_d$ y $Z_1 Z_2 = K_i / K_d$

Si se elige $Z_1 = 4$, se determinara Z_2 , para que se cumplan las condiciones 3 y 4 por ende es necesario que el lugar de las raíces contenga, o pase, los puntos del plano s que cumplen dichas condiciones.

Calculando: si $M_p (\%) = 17\%$ el coeficiente de amortiguación mínimo será:

$$\delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0.17)^2}{\pi^2 + (\ln 0.17)^2}} \Rightarrow \delta \geq 0.49$$

Si se adopta, $\delta = 0.50$ será: $\omega d = \sqrt{3} |\sigma|$ en consecuencia:

$$\lambda_{1-2} = -1.5 \pm j1.5\sqrt{3} \approx -1.5 \pm j2.598$$

Aplicando el requerimiento angular al punto λ_1 se determinara el valor correspondiente de Z_2 , figura 93.

$$G(s) = \frac{50Kd(s + 4)(s + Z_2)}{s(s + 2)(s + 3)} ; Z_2 = ?$$

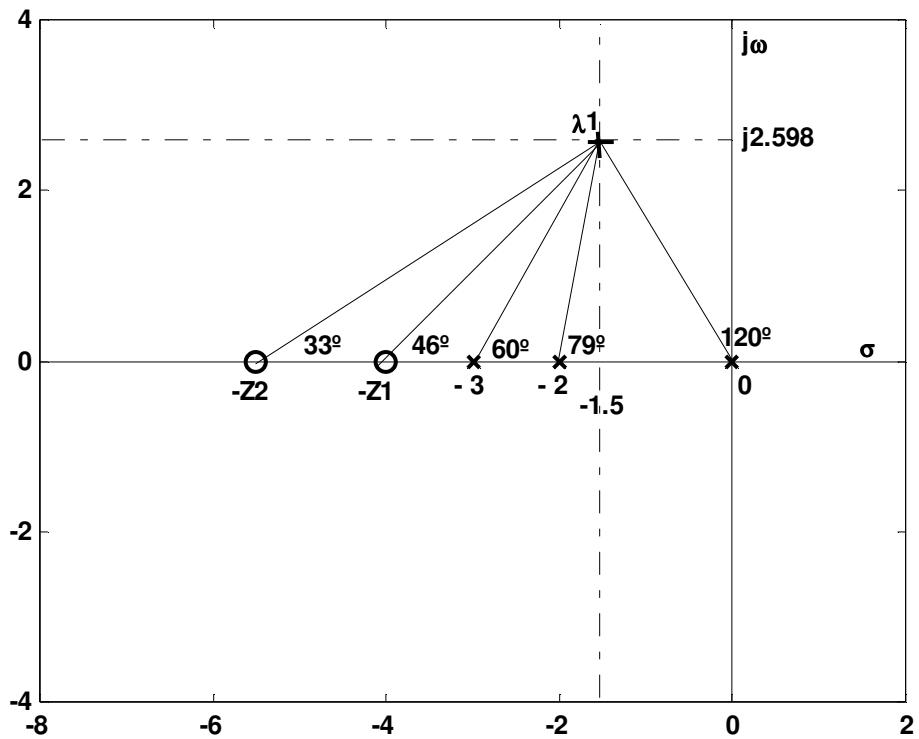


Figura 93

$$[\operatorname{tag}^{-1}1.5\sqrt{3}/Z_2 - 1.5 + \operatorname{tag}^{-1}1.5\sqrt{3}/4 - 1.5] - [\operatorname{tag}^{-1}1.5\sqrt{3}/3 - 1.5 + \operatorname{tag}^{-1}1.5\sqrt{3}/2 - 1.5 + 120^\circ] = -180^\circ$$

$$[\operatorname{tag}^{-1}1.5\sqrt{3}/(Z_2 - 1.5) + 46.1^\circ] - [60^\circ + 79.1^\circ + 120^\circ] = -180^\circ$$

$$\operatorname{tag}^{-1}1.5\sqrt{3}/(Z_2 - 1.5) = -46^\circ + 60^\circ + 79.1^\circ + 120^\circ - 180^\circ = 33^\circ$$

$$\frac{1.5\sqrt{3}}{Z_2 - 1.5} = \operatorname{tag} 33^\circ \Rightarrow Z_2 = \frac{1.5\sqrt{3}}{\operatorname{tag} 33^\circ} + 1.5 \Rightarrow Z_2 = 5.50$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = 9.5 = K_p / K_d \\ Z_1 Z_2 = 22 = K_i / K_d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_p = 9.5 K_d \\ K_i = 22 K_d \end{cases}$$

El valor de Kd se obtiene con el requerimiento de Módulo:

$$K_d = \frac{-(\lambda_1)(\lambda_1 + 2)(\lambda_1 + 3)}{50(\lambda_1 + 4)(\lambda_1 + 5.5)} \Rightarrow K_d = 0.0277$$

En consecuencia:

$$K_p = 9.5 \times 0.0277 \Rightarrow K_p = 0.2631$$

$$K_i = 22 \times 0.0277 \Rightarrow K_i = 0.6094$$

En conclusión la función de transferencia del lazo del sistema diseñado

$$\text{será: } G(s) = \frac{1.385(s+4)(s+5.5)}{s(s+2)(s+3)}$$

Dado que el valor de Ki es mayor que 0.50, (0.6094), el error de estado estacionario a la rampa será menor que el especificado, lo cual es ventajoso, [$e(\infty)$ a la Rampa = 0.1969 < 0.24].-

La respuesta del sistema de control diseñado frente a una entrada escalón unitario permite ver que el mismo es nulo, pero manteniendo la respuesta transitoria deseada, t_E y M_p .

La configuración de polos y ceros del sistema será:

Ecuación Característica:

$$s^3 + 6.385s^2 + 9.1775s + 30.47 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_{n-1} \Rightarrow -3 + \lambda_3 = -6 - 385 \Rightarrow \lambda_3 = -3.385, \text{ en consecuencia:}$$

$$\begin{cases} \lambda_{1-2} = -1.5 \pm j1.5\sqrt{3} \\ \lambda_3 = -3.385 \\ Z_1 = -4 \\ Z_2 = -5.50 \end{cases}$$

El efecto de los dos ceros esta contrarestando por el polo λ_3 , por ende el par de polos complejos conjugados λ_{1-2} será dominante y se podrá aplicar las expresiones aproximadas siguientes:

$$Tp \cong \frac{1}{\omega d} \left\{ 90^\circ - \sum_{i=1}^m \angle(\lambda_i - Z_i) + \sum_{j=2}^n \angle(\lambda_1 - \lambda_j) \right\} \times \frac{\pi}{180^\circ} \quad (\text{seg.).-}$$

$$Tp \cong \frac{1}{1.5\sqrt{3}} \{ 90^\circ - (46^\circ + 33^\circ) + (90^\circ + 54.038^\circ) \} \times \frac{\pi}{180^\circ} \quad \Rightarrow \quad Tp(\text{seg}) \cong 1.0415$$

Además:

$$Mp(\%) \cong \frac{\prod_{j=3}^n |(-\lambda_j)|}{\prod_{j=3}^n |(\lambda_1 - \lambda_j)|} \times \frac{\prod_{i=1}^m |(\lambda_1 - Z_i)|}{\prod_{i=1}^m |(-Z_i)|} \times e^{\sigma T_p} \times 100$$

$$Mp(\%) \cong \frac{|-\lambda_3|}{|\lambda_1 - \lambda_3|} \times \frac{|\lambda_1 - Z_1| |\lambda_1 - Z_2|}{|-Z_1| |-Z_2|} \times e^{\sigma T_p} \times 100$$

$$Mp(\%) \cong \frac{3.385}{3.2098} \times \frac{\sqrt{13} \sqrt{22.75}}{4 \times 5.5} \times e^{-1.0415 \times 1.5} \times 100$$

$$Mp(\%) \cong 0.8243 \times 0.2097 \times 100$$

$$Mp(\%) \cong 17.28\%$$

En consecuencia el diseño se puede considerar muy aceptable.

El diagrama del lugar de las raíces del sistema diseñado es el indicado en la figura 94.

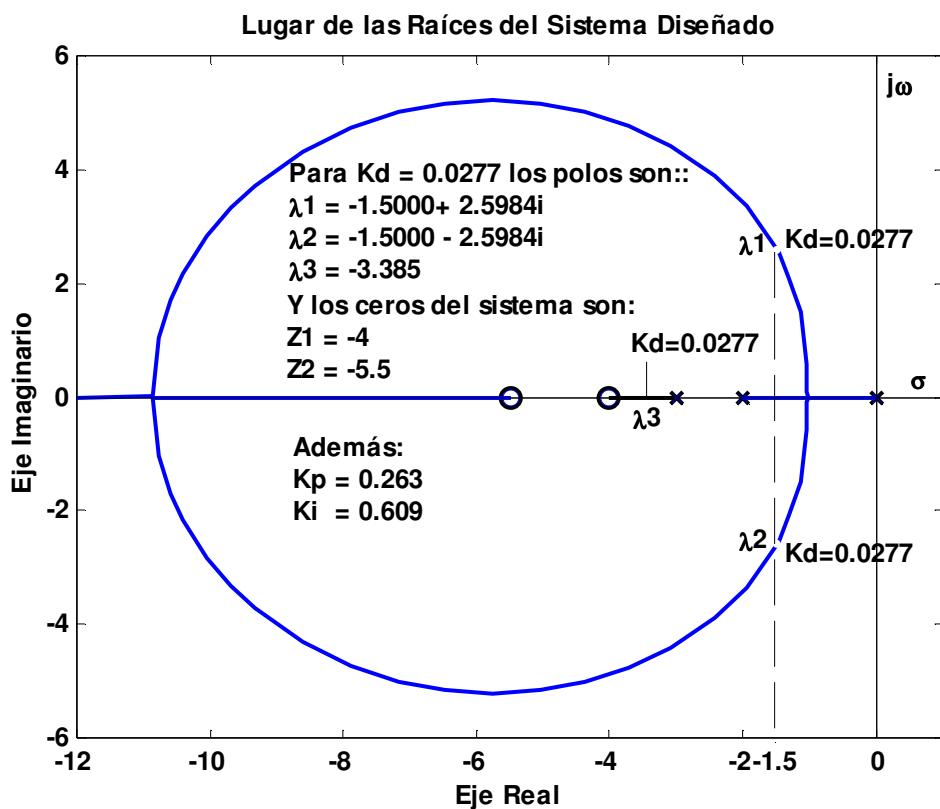


Figura 94
Las diferentes respuestas para los diseños están indicadas en la figura 95.

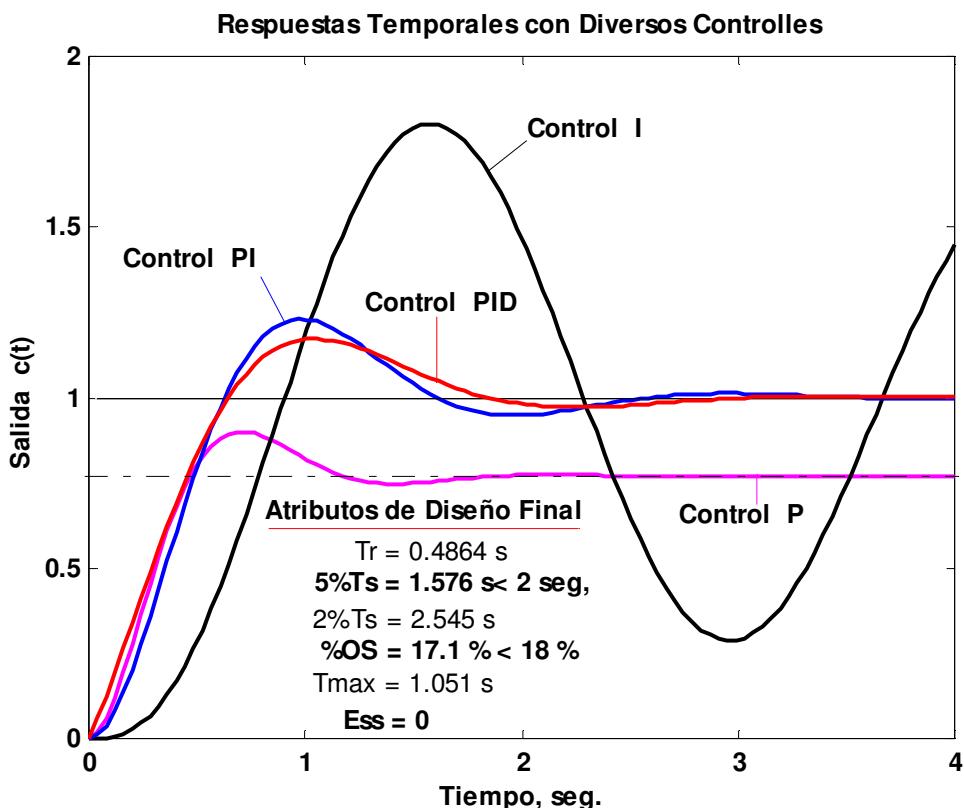


Figura 95

CONTROL II

Tema:

ESTABILIDAD RELATIVA

MARGEN DE GANANCIA

MARGEN DE FASE

Prof. Ing. Carlos F. Martín

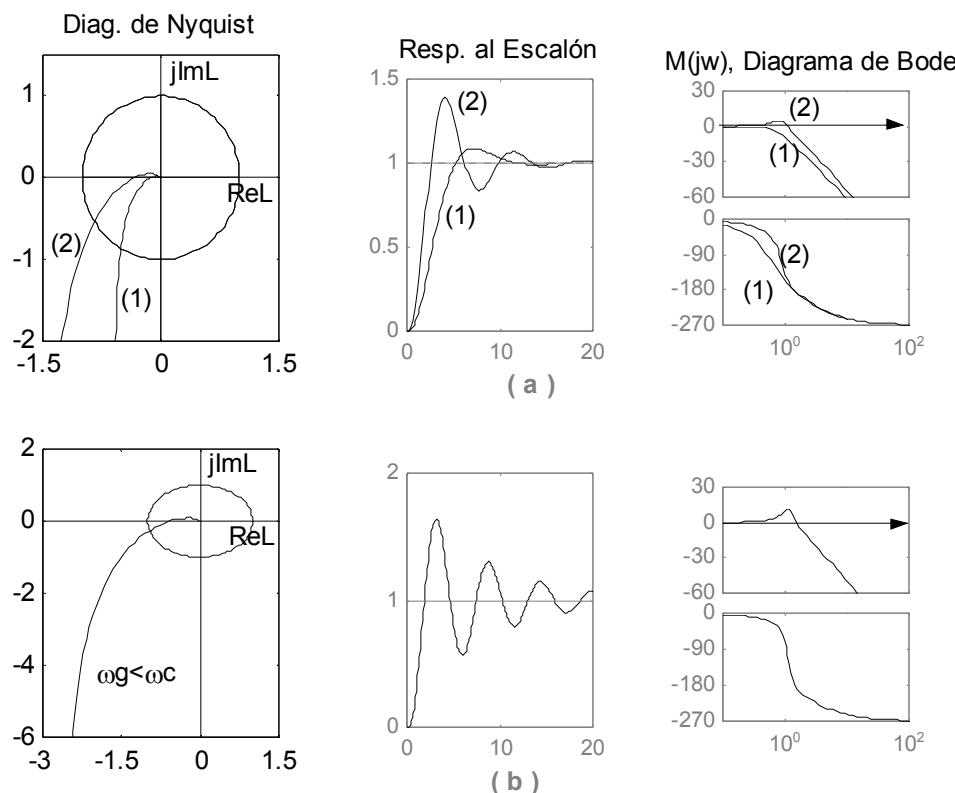
Año: 2009

Introducción

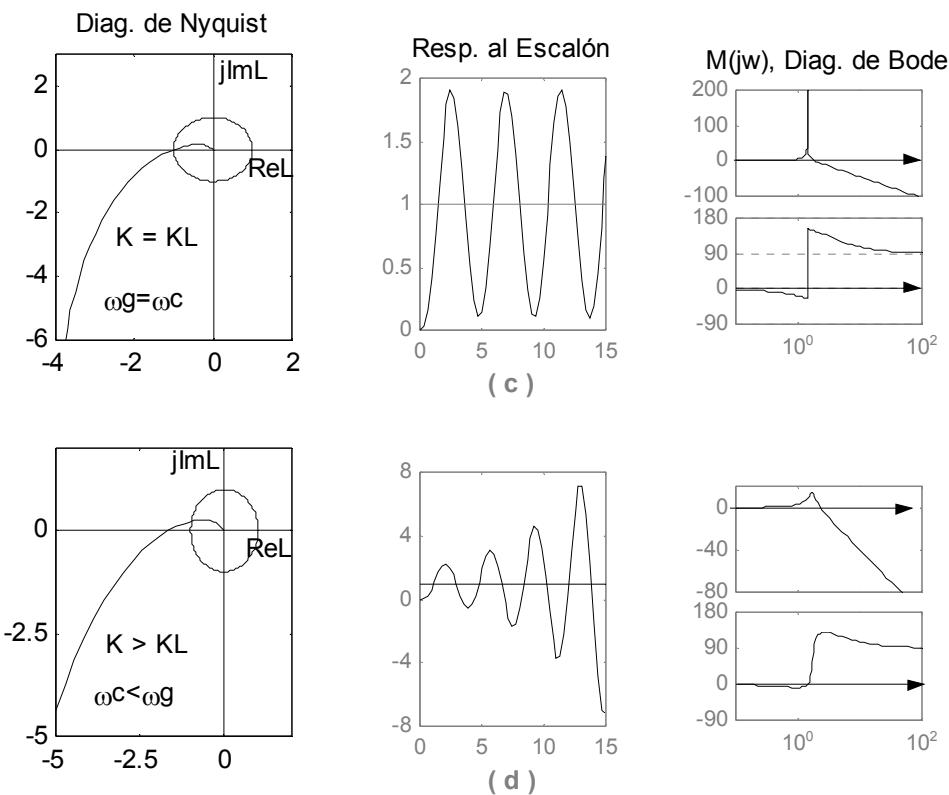
Algunas de las preguntas importantes que pueden formularse con relación a la estabilidad y al funcionamiento en general de un sistema de control realimentado son:

1. Si el sistema es estable, cuan estable es.
2. Si el sistema no es lo suficientemente estable, o inestable, como puede ser mejorada la condición de estabilidad.

La primera pregunta es un problema de análisis, mientras que la segunda es de diseño. En general, estamos no solo en sistemas estables, sino también que tengan un cierto grado de estabilidad, o estabilidad relativa. En muchas situaciones se puede usar el máximo de resonancia, M_R , o el coeficiente de amortiguamiento relativo, δ , del par de polos complejos dominantes del sistema, para indicar la estabilidad relativa de un sistema de control realimentado. Otra forma de medir la estabilidad relativa de un sistema es por medio del diagrama de Nyquist de la función de transferencia del lazo. La cercanía del lugar de $L(jw)$ a el punto crítico, $(-1, j0)$ nos da una indicación de cuan estable o inestable es el sistema bajo análisis. Para demostrar el concepto de estabilidad relativa, los gráficos de Nyquist y las correspondientes respuestas al escalón de entrada y frecuenciales de un sistema típico de tercer orden, se muestran en las figuras 1(a)-(d), para diferentes valores de la ganancia del lazo K .



Figuras 1(a) y (b)



Figuras: 1(c) y 1(d)

Para el primer caso figura 1(a), en la cual la ganancia del lazo es baja, la traza de Nyquist de $L(jw)$ intercepta el eje real negativo en un punto, (punto de cruce de fase), legos del punto crítico $(-1, j0)$. Las correspondientes respuestas al escalón son muy amortiguadas, y el M_R es bajo.

Cuando K se incrementa, figuras 1(b), el punto de cruce de fase se acerca al punto crítico $(-1, j0)$, el sistema es aún estable pero la respuesta al escalón tiene una mayor sobreelongación M_p , y un M_R también mayor. La curva de fase no nos da una buena indicación de la estabilidad relativa como M_R , acepto que la pendiente de la curva se vuelve mayor cuando la estabilidad relativa decrece.-

El diagrama de Nyquist de la figuras 1(c), pasa por el punto crítico $(-1, j0)$, el sistema es marginalmente estable, (o inestable), con una oscilación de amplitud constante, como se muestra en la respuesta al escalón, y $M_R \rightarrow \infty$. Si K se incrementa de nuevo, la traza de Nyquist incluirá el punto crítico, (se supone que $L(s)$ es de fase mínima), y el sistema será inestable con una respuesta sin amortiguación, que crece con el tiempo como se ve en la figura 1(d). En este caso la curva de magnitud $M(jw)$ carece de significado alguno, y solo el síntoma de inestabilidad desde el diagrama de Bode, es que ahora la curva de fase tiene una pendiente positiva en la frecuencia de resonancia w_R .-

Se supondrá en lo que sigue que la función $L(j\omega)$ es del tipo de *Fase Mínima Típica*, por lo que la inclusión o no del punto crítico $(-1, j0)$ es suficiente para el análisis de la estabilidad.

Margen de Ganancia

El *margen de ganancia*, (M.G.) es uno de los criterios mas empleados para medir la estabilidad relativa de un sistema de control. En el dominio de la frecuencia, el margen de ganancia se emplea para indicar la cercanía de la intersección del eje real negativo y la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ al punto crítico $(-1, j0)$. Antes de dar el significado del margen de ganancia, primero se definirá el *cruce de fase* de la traza de Nyquist y la *frecuencia de cruce de fase* (w_C).

Cruce de fase:

Un cruce de fase sobre la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ es un punto en el cual la traza se intercepta con el eje real negativo.

Frecuencia de cruce de fase:

Es la frecuencia w_C en el cruce de fase, o donde:

$$\angle L(j\omega_C) = -180^\circ ; \text{ o la parte imaginaria de } L(j\omega) \text{ es nula; } P.Im.[L(j\omega_C)] = 0$$

Recordar que la definición del Margen de Ganancia dada aquí es para funciones del lazo de *fase mínima típicas*, (donde el peligro es *aumentar la ganancia del lazo*). La traza de Nyquist de $L(j\omega)$, se muestra en la figura 2.

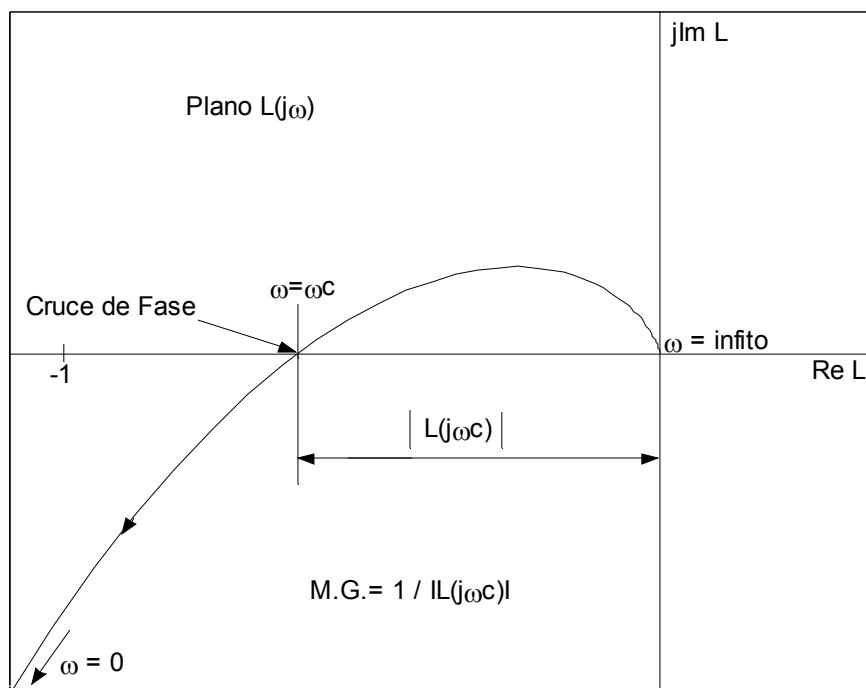


Figura 2

La frecuencia de cruce de fase se denomina w_C , y la magnitud de $|L(j\omega_C)|$ en

$w=w_C$ se designa como el valor absoluto de $|L(j\omega_C)|$. Entonces el margen de ganancia del sistema, que tiene $L(s)$ como la función de transferencia del lazo se define como:

$$M.G. = \frac{1}{|L(j\omega_C)|}$$

Por lo tanto si el M.G. es mayor que la unidad, el sistema será estable.

Si el M.G. es igual a la unidad, el sistema será marginalmente estable.

Si el M.G. es menor que la unidad, el sistema será inestable.

El M.G. también se puede expresar en decibeles:

$$M.G., dB = 20 \log \frac{1}{|L(j\omega_C)|} \Rightarrow M.G., dB = -20 \log |L(j\omega_C)|$$

Por lo tanto si el M.G. es mayor que cero, el sistema será estable.

Si el M.G. es igual a cero, el sistema será marginalmente estable.

Si el M.G. es menor que cero, el sistema será inestable.

En base a esta definición, se pueden obtener las siguientes conclusiones acerca de M.G. de un sistema, dependiendo de las propiedades de la traza de Nyquist.

1. La traza de $L(jw)$ no intercepta eje real negativo, (no hay un cruce de fase finito).-

$$|L(j\omega_C)| = 0 \Rightarrow M.G., dB = \infty dB, \text{ sistema estable para todo } K > 0.$$

2. La traza de Nyquist de $L(jw)$ intercepta eje real negativo entre 0 y el punto crítico (-1, j0):

$$0 < |L(j\omega_C)| < 1 \Rightarrow M.G., dB > 0 ; \text{ Sistema estable.}$$

3. La traza de Nyquist de $L(jw)$ pasa a través del punto crítico (-1, j0):

$$|L(j\omega_C)| = 1 \Rightarrow M.G., dB = 0 dB ; \text{ Sistema marginalmente estable.}$$

4. La traza de Nyquist de $L(jw)$ incluye al punto crítico (-1, j0), o sea el cruce de fase está a su izquierda:

$$|L(j\omega_C)| > 1 \Rightarrow M.G., dB < 0 dB ; \text{ Sistema inestable.}$$

En base a la discusión anterior, el significado físico del M. G. se puede resumir como:

"El Margen de Ganancia es la cantidad de ganancia en dB que se puede añadir al lazo del sistema antes de que el mismo se vuelva inestable".

Las siguientes conclusiones se pueden obtener de un sistema con la L(s) *típica y de fase mínima*.-

- Cuando la traza de Nyquist no intercepta al eje real negativo en una frecuencia no nula y finita, el margen de ganancia es infinito en dB, esto significa que teóricamente, el valor de la ganancia del lazo se puede incrementar al infinito antes de que el sistema se vuelva inestable.-

- Cuando la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ pasa a la derecha del punto crítico $(-1, j0)$, el margen de ganancia es positivo en dB, y la ganancia del lazo se puede incrementar en la cantidad del margen de ganancia para que el sistema sea marginalmente estable.
- Cuando la traza de Nyquist pasa a través del punto crítico $(-1, j0)$, el margen de ganancia es igual a 0 dB, lo que implica que la ganancia del lazo no podría crecer más, ya que el sistema es marginalmente estable.-
- Cuando el cruce de fase está a la izquierda del punto crítico $(-1, j0)$, el margen de ganancia es negativo en dB, y la ganancia del lazo se debe reducir para que el sistema se vuelva marginalmente inestable, (pues es inestable).-

Ejemplo 1:

Un sistema tiene:

$$L(s) = \frac{K}{(s+1/3)(s+1/2)(s+1)} \quad \text{Con } K > 0$$

Se puede demostrar que el sistema es estable para $K < 5/3$. Suponiendo que $K = 5/6$.

a) Determinar el M.G. en dB.-

b) Determinar el valor de K para que el M.G. en dB sea 20dB.-

a) Se puede determinarlo de las dos maneras siguientes:

$$1) \ M.G. = \frac{K_{Lim}}{K} = \frac{5/3}{5/6} = 2 \Rightarrow M.G. = 2 \text{ o en dB} \Rightarrow M.G., dB = 20 \log 2 = +6.02 \text{ dB}$$

$$2) \ L(j\omega) = \frac{5}{(1-11\omega^2) + j\omega(6-6\omega^2)} \Rightarrow P.Im = 0 \text{ si: } (1-\omega_c^2) = 0 \Rightarrow \omega_c = 1 \text{ rad/seg}$$

$$L(j\omega_c) = \frac{5}{1-11 \times 1} = -0.50 \Rightarrow M.G., dB = -20 \log |L(j\omega_c)|$$

Por lo tanto: $M.G., dB = +6.02 \text{ dB}$

b) Como M.G., dB=20, resulta que: M.G. = 10, por ende:

$$1) \ 10 \times K = K_{Lim.} \Rightarrow K = \frac{K_{Lim.}}{10} = \frac{5/3}{10} = \frac{5}{30} \Rightarrow K = \frac{1}{6}.$$

2) Como $M.G., dB = 20 = -20 \log |L(j\omega_c)|$

$$\log |L(j\omega_c)| = -1 \Rightarrow |L(j\omega_c)| = 0.10$$

Como la frecuencia de cruce de fase ω_c no cambia con el valor de la ganancia K , $\omega_c = 1 \text{ rad/seg}$. Por lo tanto:

$$|L(j\omega_c)| = \left| \frac{6K}{1-11\omega_c^2} \right| = \left| \frac{6K}{-10} \right| = \frac{3K}{5} = \frac{1}{10}$$

$$K = \frac{5}{30} \Rightarrow K = \frac{1}{6}.$$

Por ende si $K = 1/6$, el margen de ganancia será el solicitado de 20 dB.-

Margen de Ganancia de Sistemas con la L(s) de Fase Mínima Atípicas
 En estos sistemas el peligro para desestabilizar es la disminución de la ganancia del lazo K. Por ejemplo la traza de Nyquist de un sistema con estas características es la indicada en la figura 3.

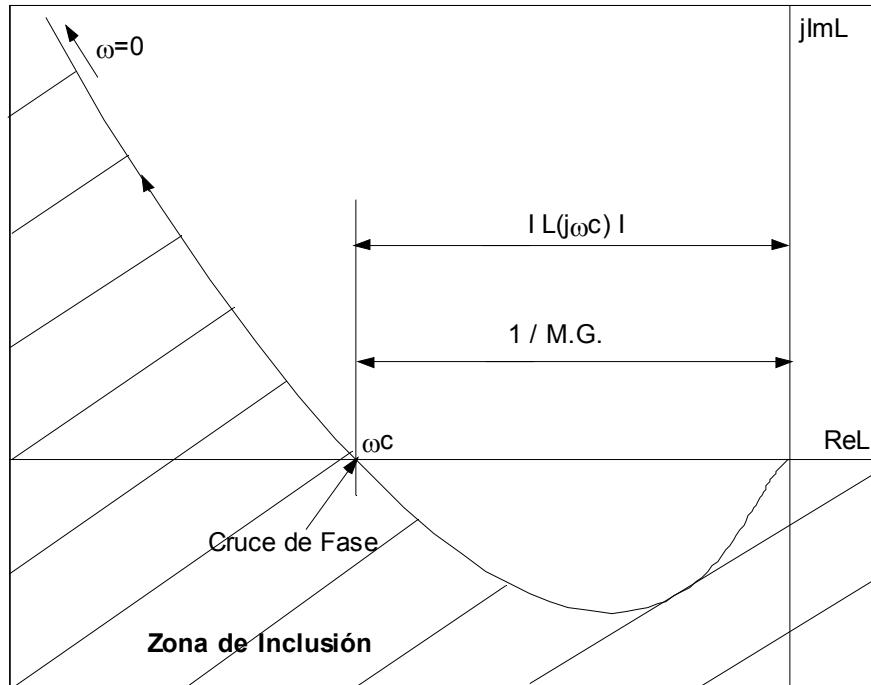


Figura 3

Como se puede ver para que el punto crítico no este incluido y el sistema sea estable, la frecuencia de cruce de fase deberá estar a la izquierda del mismo. O sea el M. G. en dB deberá ser negativo.

Ejemplo 2:

Un sistema tiene la función de transferencia del lazo siguiente:

$$L(s) = \frac{K(s+1)(s+2)}{s^3(s+9)}$$

Determinar el margen de ganancia del sistema para $K = 90$.

Como $L(s)$ es de fase mínima atípica, para que el sistema sea estable deberá tener un margen de ganancia negativo.

$$L(j\omega) = 90 \frac{(2 - \omega^2) + j3\omega}{\omega^4 - j9\omega^3}$$

Para que la parte imaginaria sea nula deberá ser:

$$3\omega_C^5 = -9\omega_C^3(2 - \omega_C^2) \Rightarrow 6\omega_C^2 = 18 \Rightarrow \omega_C = \sqrt{3} \text{ rad / seg.}$$

$$L(j\omega_C) = K \frac{3\omega_C}{-9\omega_C^3} = \frac{-K}{3\omega_C^2} = -\frac{K}{9} = -10$$

$$M.G., dB = -20 \log(10) \Rightarrow M.G., dB = -20 dB; \text{ Sistema estable.}$$

La figura 4, muestra el diagrama de Bode y la traza de Nyquist de $L(jw)$.

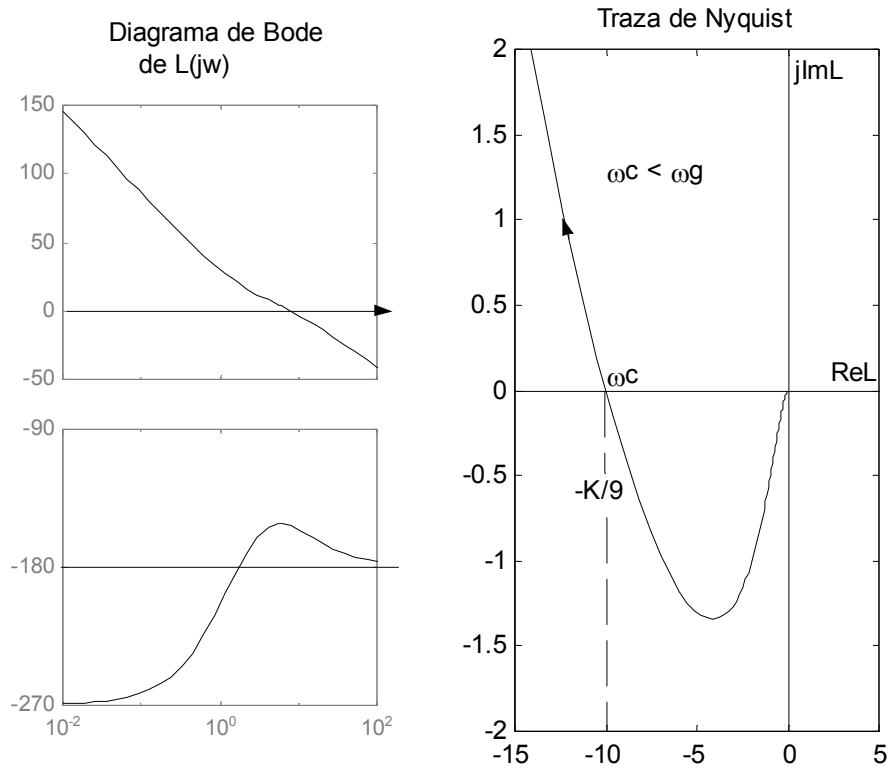


Figura 4

Sistemas Condicionalmente Estables, con $L(s)$ de Fase Mínima.

En estos sistemas existen uno o más rangos de la ganancia del lazo dentro de los cuales el sistema será estable. Por ende habrá más de una frecuencia de cruce de fase y por lo tanto más de un margen de ganancia. En la práctica es común que el sistema condicionalmente estable tenga dos M. G., los mismos pueden ser los dos positivos o los dos negativos, o uno positivo y el otro negativo y sin embargo el sistema puede ser estable. En estos casos lo que define sin duda si el sistema es estable o no es el llamado margen de fase que se tratará mas adelante, el mismo, cualquiera sea el caso, deberá ser positivo para que el sistema sea estable.-

Ejemplo 3:

Un sistema tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K(s^2 + 3s + 22)}{s(s+1)(s+2)};$$

Para $K = 6$, determinar los M. G. en dB.-

La figura 5, muestra los diagramas de Bode y la traza de Nyquist de $L(jw)$. Como se puede apreciar en este ejemplo el sistema será estable si los dos márgenes de ganancia son del mismo signo, los dos negativos o los dos positivos.

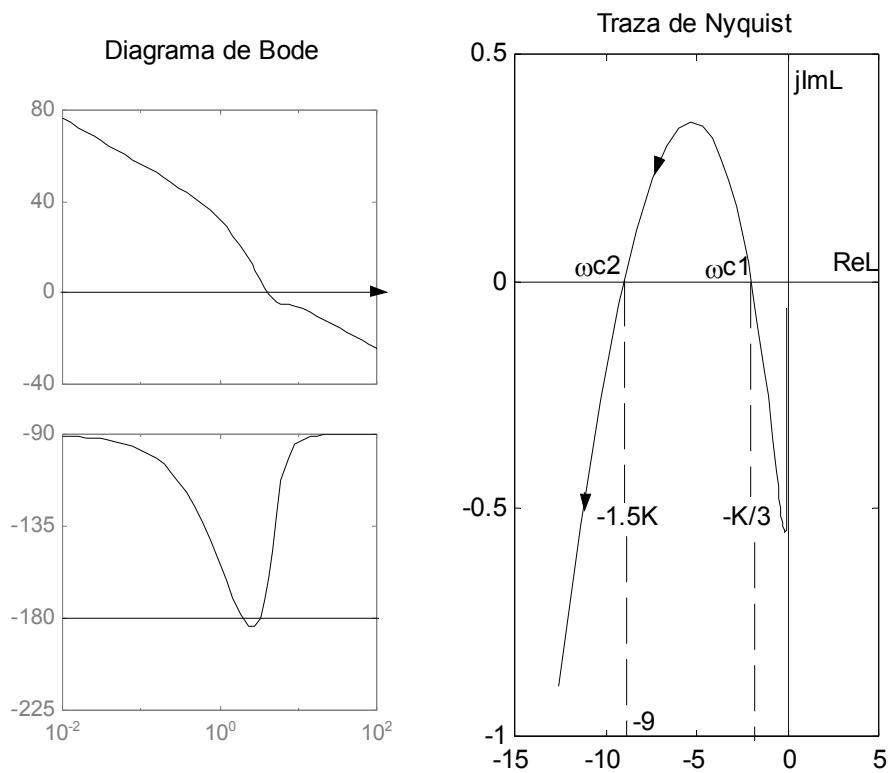


Figura 5

Procediendo como se sabe, las dos frecuencias de cruce de fase son:

$$\omega_{c1} = \sqrt{11} \text{ rad / seg.} \quad y \quad \omega_{c2} = 2 \text{ rad / seg. -}$$

$$L(j\omega_{c2}) = -1.5K \quad \Rightarrow \quad K_{Lim. 2} = 2/3$$

$$L(j\omega_{c1}) = -\frac{K}{3} \quad \Rightarrow \quad K_{Lim. 1} = 3. -$$

Como se aprecia para $K = 6$, el sistema será estable con los dos M. G. en dB negativos, a saber:

$$M.G. _1 = \frac{K_{Lim.1}}{K} = \frac{2/3}{6} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad M.G. _1 , dB = -19.085 dB$$

$$M.G. _2 = \frac{K_{Lim.2}}{K} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad M.G. _2 , dB = -6.0205 dB$$

Si se disminuyen cualquiera de esos dos valores a los dB que hay el sistema será marginalmente estable.-

Ejemplo 4:

Un sistema tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K(s^2 + s + 0.5)}{s^3 (s^2 + 14s + 40)};$$

Para $K = 150$, determinar los M. G. en dB.-

La figura 6, muestra la traza de Nyquist de $L(jw)$.

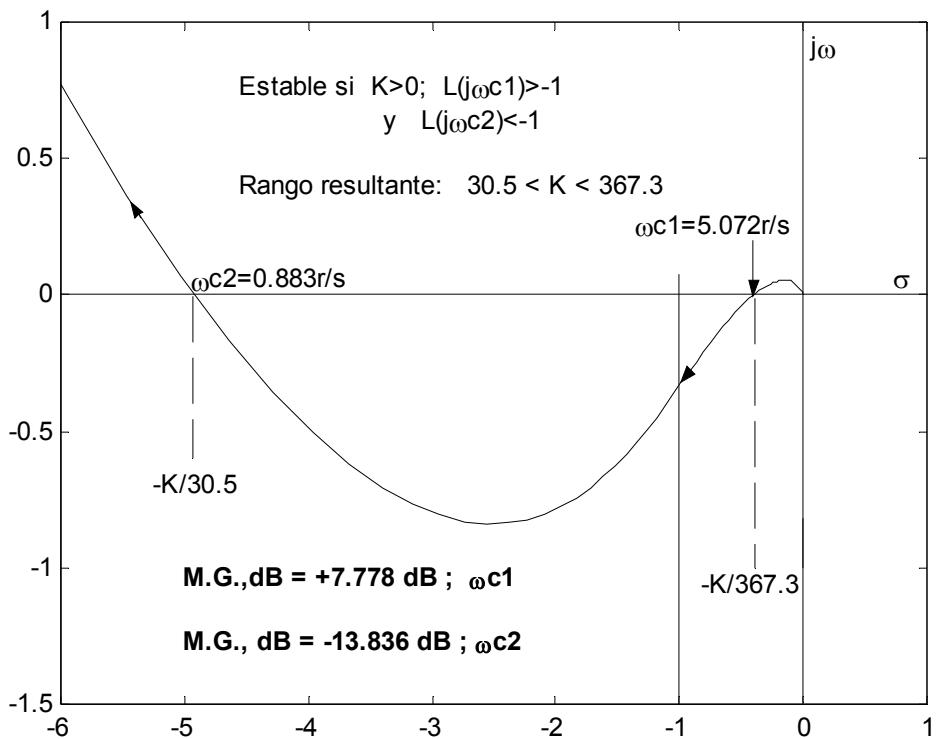


Figura 6

Como se puede apreciar en este sistema, será estable si los dos márgenes de ganancia tienen distinto signo, uno positivo y el otro negativo. Si tuvieran el mismo signo el sistema sería inestable como se puede apreciar.

Margen de Ganancia de Sistemas con la $L(s)$ de Fase no Mínima

Se debe tener cuidado al intentar extender el concepto de margen de ganancia como medida de la estabilidad relativa para sistemas con funciones de transferencias del lazo de fase no mínima. En tales sistemas, los mismos pueden ser inestables aun si el punto crítico no esta incluido por las trazas de Nyquist de $L(j\omega)$. También el punto de cruce de fase puede estar a la derecha de $(-1, j0)$, y por tanto tener un M.G. positivo y puede aún corresponder a sistemas inestables. De todas formas la cercanía del cruce de fase al punto $(-1, j0)$ todavía da información de la estabilidad relativa. El concepto de M.G. con la ayuda del criterio de Nyquist para determinar el Φ_{11E} y comparándolo con el Φ_{11R} , ver si el sistema es estable.

Ejemplo 5:

Si un sistema tiene la $L(s)$ siguiente:

$$L(s) = \frac{5(s-2)}{s(s+1)(s-1)}$$

La traza de Nyquist se muestra en la figura 7, si tuviéramos solo la traza y no tenemos más información, si $L(s)$ fuera de fase mínima tendría un M.G.

en dB infinito, o sea $M.G., dB = \infty dB$, y el sistema sería estable para cualquier valor de la ganancia del lazo K.

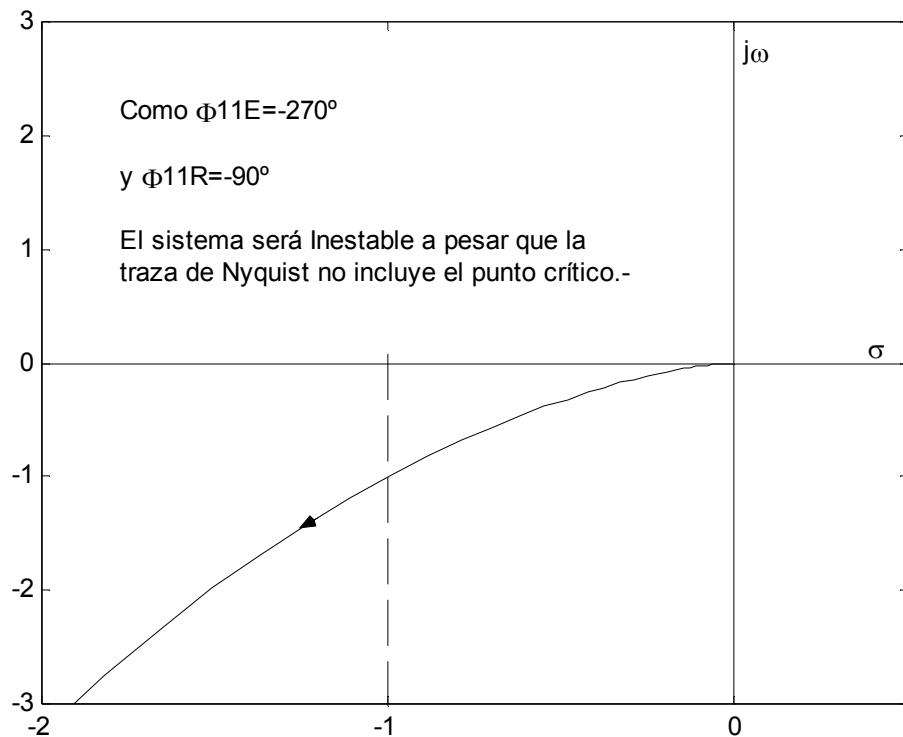


Figura 7

Sin embargo: $\Phi_{11E} = -(0.5 + 1)180^\circ = -270^\circ$

Como $\Phi_{11R} = -90^\circ$, el sistema inestable para cualquier valor de K.

Ejemplo 6:

Si un sistema tiene la L(s) siguiente:

$$L(s) = \frac{10K(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 10}; \text{ para } K = 0.8 \text{ y } 2.$$

Como: $P = 2$ y $P_w = 0$, se tiene que:

$$\Phi_{11E} = -(0 + 2)180^\circ = -360^\circ$$

Como se puede apreciar en la figura 8, donde se muestran las trazas para $K = 0.8$ y $K = 2$, el Φ_{11R} , para el primer caso es 0° , sistema es inestable y

la frecuencia de cruce de fase esta a la derecha del punto crítico $(-1, j0)$.

Para el segundo es -360° , sistema estable y la frecuencia de cruce de fase esta a la izquierda del punto crítico $(-1, j0)$.

Aplicando la definición del margen de ganancia los mismos serian:

Para el primer caso, $K = 0.8$, el margen de ganancia es de:

$$M.G., dB = +1.938 dB$$

Para el segundo caso, $K = 2$, el margen de ganancia es de:

$$M.G., dB = -6.02 dB; \text{ en } w_C = 3.1623 \text{ rad/seg.}$$

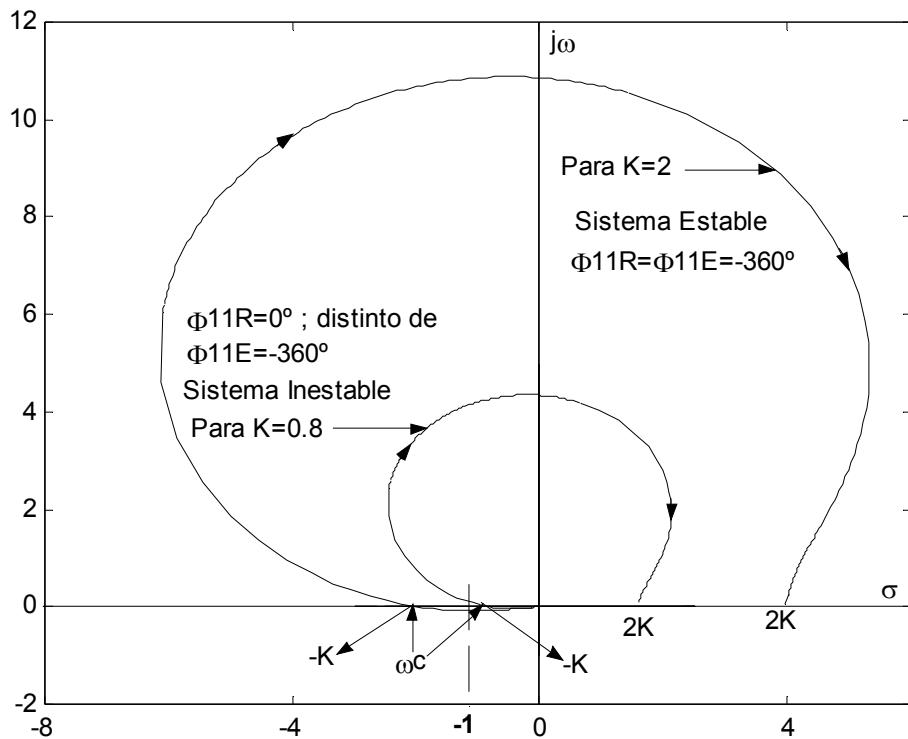


Figura 8

Ejemplo 7:

Un sistema tiene: $L(s) = \frac{K(1+4s)}{s(s-1)}$; para $K = 0.5$, M.G., dB = ?

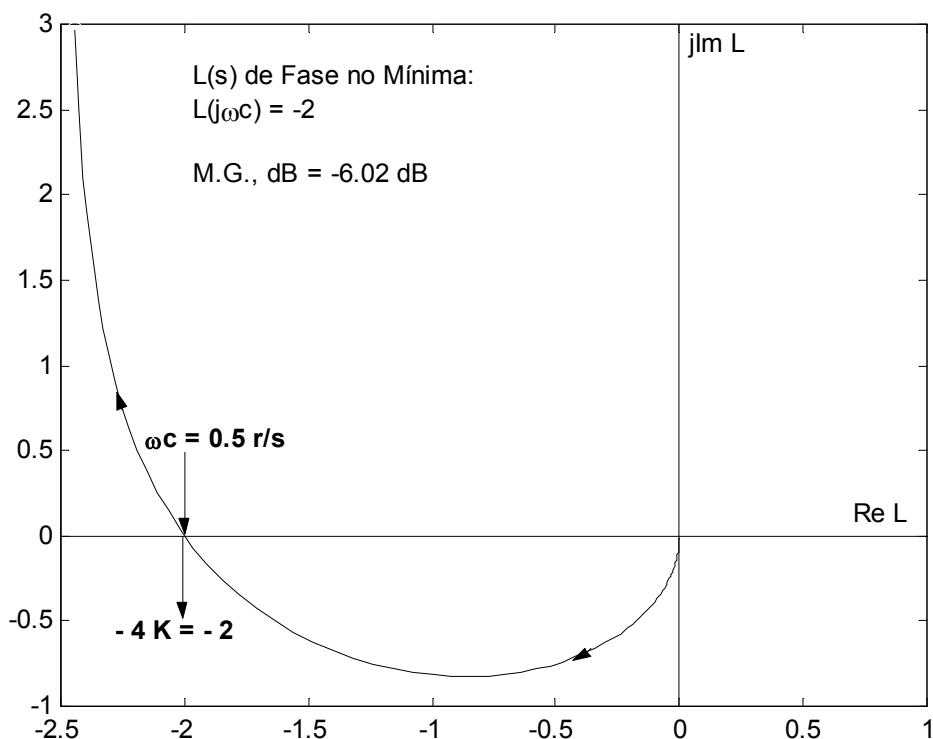


Figura 9

La traza de Nyquist para $K = 0.5$, se indica en la figura 9.

$\Phi_{11E} = -(0.5 + 1)180^\circ = -270^\circ \equiv \Phi_{11R}$, por lo tanto el *sistema es estable* y el margen de ganancia es: $M.G. = \frac{K_{Lim}}{K} = \frac{0.25}{0.50} = 0.5 \Rightarrow M.G., dB = -6.02 dB$
O también: $L(j\omega_C) = -2 \Rightarrow M.G., dB = -20 \log 2 \Rightarrow M.G., dB = -6.02 dB$.

Margen de Fase. (Para Sistemas con $L(s)$ de Fase Mínima)

Como ya vimos el margen de ganancia indica solo la influencia que tiene sobre la estabilidad de un sistema solo la variación de la ganancia del lazo. En principio uno creería que un con un margen de ganancia grande debería ser siempre mas estable que uno con un margen de ganancia pequeño, o que dos sistemas con idénticos márgenes de ganancias tendrían la misma estabilidad relativa. Sin embargo, esta afirmación *no es en general válida*, cuando *otros parámetros* del sistema *distintos* de la ganancia del lazo están sujetos a *variaciones*, por ende solamente el margen de ganancia es inadecuado para medir la estabilidad relativa en estos casos. Por ejemplo, los dos sistemas representados por las trazas de $L(jw)$ en la figura 10a en apariencia tendrían la misma estabilidad relativa, pues los márgenes de ganancia son idénticos. Sin embargo la traza del sistema A en realidad corresponde a un sistema mas estable que el B ya que cualquier cambio de algún parámetro que afecte la fase de $L(jw)$, el lugar A está mas cerca del punto crítico, y puede ser incluido con mayor facilidad. Aún más se puede

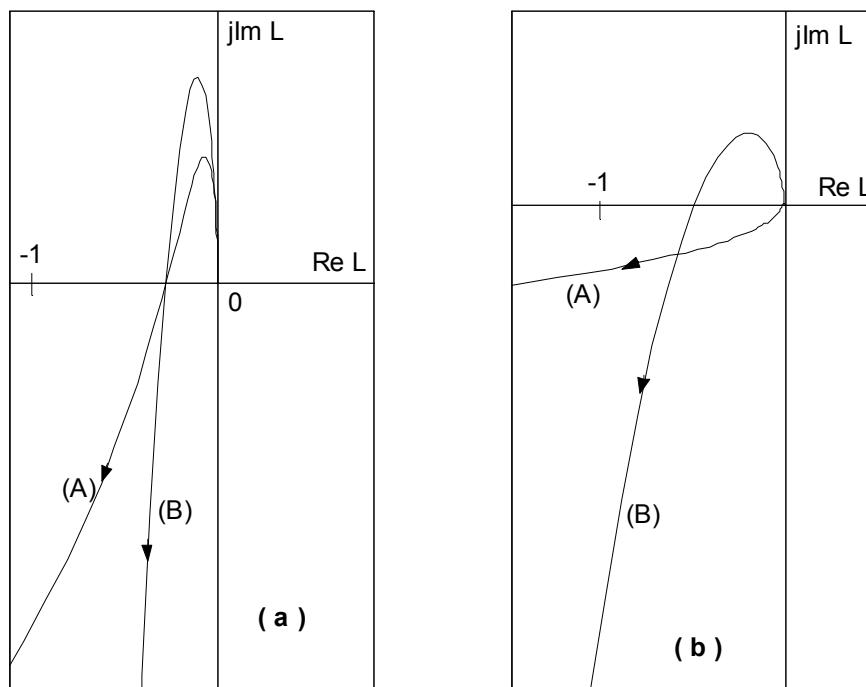


Figura 10

Demostrar que el sistema A en realidad tiene un M_R más grande que el sistema B. En la figura 10b, el sistema B tiene un margen de ganancia menor que el sistema A y sin embargo el sistema B, por las razones ya comentadas sería mas estable que el A.

Para tener en cuenta el efecto del corrimiento de la fase sobre la estabilidad relativa, (atrasos debidos a la variación de otros parámetros distintos que la ganancia del lazo), se introduce el concepto de, *Margen de Fase, (M.F.)*, el mismo requiere que se den primero las siguientes definiciones:

Cruce de Ganancia:

El cruce de ganancia es un punto sobre la traza L ($j\omega$) en el cual la magnitud de $L(j\omega)$ es igual a la unidad. Generalmente para los sistemas estables con la $L(s)$ de fase mínima, este punto está en el 3º o 4º cuadrante del plano de Nyquist.

Frecuencia del Cruce de Ganancia:

La frecuencia del cruce de ganancia, ω_g , es la frecuencia de $L(j\omega)$ en el cruce de ganancia, o donde: $|L(j\omega_g)|=1$

Para que el sistema sea estable deberá ser $\omega_g < \omega_c$.

La definición del Margen de Fase dada a continuación es para los sistemas con la función de transferencia del Lazo típica y de fase mínima.

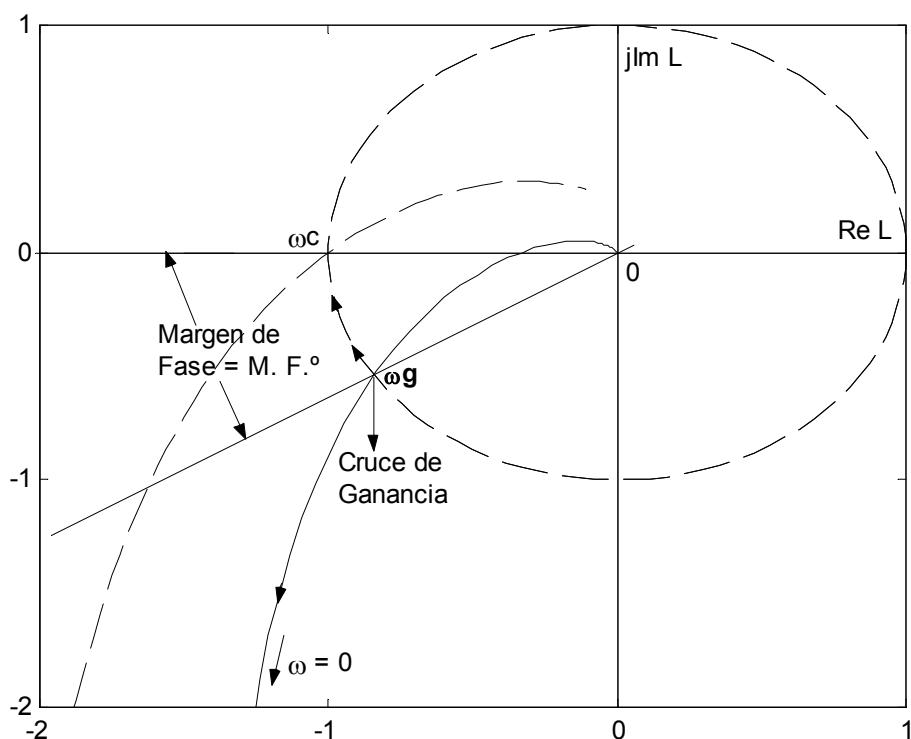


Figura 11

"El Margen de Fase (M.F.) se define como el mínimo ángulo en grados que

la traza L (jw) se debe rotar alrededor del origen, para que el cruce de ganancia pase por el punto critico (-1, j0)". Si la rotación es horaria el M.F. es positivo y el sistema es estable, admite un atraso. Si la misma es en sentido antihorario el M.F. será negativo y el sistema es inestable.

La figura 11, muestra la traza de Nyquist de una L (jw) típica de fase mínima. El margen de fase se indica como el ángulo entre la línea que partiendo del origen del plano L (jw) pasa por el punto del cruce de ganancia, y el eje real negativo del mismo plano.

En contraste al M.G., el cual da una medida de los efectos de la ganancia del lazo sobre la estabilidad relativa del sistema, el M.F. indica el efecto sobre la estabilidad, debido a cambios en los parámetros del sistema que teóricamente alteran la fase de L (jw) en una cantidad igual para todas las frecuencias.

También se puede decir que: *El margen de fase es la cantidad de retardo puro que se puede añadir al lazo, (de un sistema estable), antes de que el mismo se vuelva inestable.*

Cuando el sistema tiene una L(s) de fase mínima, la expresión analítica del margen de fase, como se observa en la figura 11, se puede expresar como:

$$\text{Si } \angle L(j\omega_g) > 0 \Rightarrow M.F. (\circ) = \angle L(j\omega_g) - 180^\circ$$

$$\text{Si } \angle L(j\omega_g) < 0 \Rightarrow M.F. (\circ) = 180^\circ + \angle L(j\omega_g)$$

En donde ω_g es la frecuencia del cruce de ganancia.-

Para los sistemas con L(s) de fase mínima, (tanto típicas, atípicas o condicionalmente inestables), si son estables el cruce de fase ocurre generalmente en el 3º cuadrante, (eventualmente el 4º), y por ende el M.F. será siempre positivo, (o sea todavía admite un retardo). Si estos sistemas son inestables este cruce ocurre generalmente en el 2º cuadrante, (eventualmente en el 1º), y por ende el M.F. será siempre negativo.

Se pueden sacar las siguientes conclusiones para los M.G. y M.F.:

- Para un sistema con la L(s) típica y de fase mínima, para que el mismo sea estable deberán ser: M.G., dB y M.F. (\circ), positivos.
- Para un sistema con la L(s) atípica y de fase mínima, para que el mismo sea estable deberán ser: M.G., dB < 0 y M.F. (\circ) > 0 .
- Para un sistema con la L(s) condicionalmente estable, para que el mismo sea estable deberá ser el M.F. (\circ), positivo.

Nota:

En una L(s) con el parámetro variable, la ganancia del lazo K, una vez fijado el valor de la misma, se puede determinar el M.G. con la L(s) real, o en una L(s) equivalente, $L_{\text{equiv.}}(s)$, si el parámetro que varía es distinto de la ganancia del lazo K.

En cambio el Margen de Fase resultante, fijado el valor del parámetro variable, sea cualquiera, *solo se deberá determinar con la L(s) real.*-

Margen de Fase de Sistemas con la L(s) de Fase no Mínima

Se debe tener cuidado si se interpreta el M.F. desde la traza de Nyquist de una función de transferencia del lazo de fase no mínima. En estos casos, el cruce de ganancia puede ocurrir en cualquier cuadrante del plano L(jw) y el sistema ser estable o inestable, según sea:

$\Phi_{11R} = \Phi_{11E}$ o $\Phi_{11R} \neq \Phi_{11E}$ respectivamente.

Por ejemplo en los ejemplos, 5, 6 y 7:

- Para el ejemplo 5: El sistema es inestable y si se aplica el concepto de M.F. el mismo daría positivo.
- Para el ejemplo 6: Para K=2, el sistema es estable y si se aplica el concepto de M.F. el mismo también daría positivo.
- Para el ejemplo 7: El sistema es estable y si se aplica el concepto de M.F. el mismo daría positivo.

El margen de fase al igual que el M.G. puede determinarse en forma analítica.

Ejemplo 8:

Un sistema tiene: $L(s) = \frac{K}{s(s+2)}$; para K=1.5 determinar :

1. El Margen de Ganancia del sistema.
2. El Margen de fase del sistema
3. El tiempo de retardo máximo permitido, $Td_{Máx.}$.-

1º) Por tratarse de un sistema típico de segundo orden,:

$$\omega_g \rightarrow \infty \Rightarrow |L(j\omega_g)| = 0 \Rightarrow M.G., dB = +\infty \text{ dB}$$

2º) Primero se determinara la frecuencia de cruce de ganancia:

$$|L(j\omega_g)| = \left| \frac{1.5}{j\omega_g(2+j\omega_g)} \right| = \frac{1.5}{\omega_g \sqrt{4+\omega_g^2}} = 1 \Rightarrow \omega_g \sqrt{4+\omega_g^2} - 1.5 = 0; \text{ operando:}$$

$$\omega_g^4 + 4\omega_g^2 - 2.25 = 0; \text{ si } x = \omega_g^2 \Rightarrow \omega_g = \sqrt{x}$$

$$x^2 + 4x - 2.25 = 0 \Rightarrow x_1 = -4.5 \text{ y } x_2 = +0.50 \Rightarrow \omega_g = \sqrt{0.50} \cong 0.707 \text{ rad / seg.}$$

Por lo tanto:

$$\angle L(j\omega_g) = -(90^\circ + \operatorname{tag}^{-1} \omega_g / 2) = -(90^\circ + 19.47^\circ) = -109.47^\circ \Rightarrow \angle L(j\omega_g) = -109.47^\circ$$

Por ende el M. F. será:

$$M.F.^{\circ} = 180^\circ - 109.47^\circ \Rightarrow M.F. ^{\circ} = +70.53^\circ$$

3º) El tiempo de retardo máximo permitido es entonces:

$$Td_{Máx.} = \frac{M.F.^{\circ} \times \pi \text{ rad } ^{\circ}}{\omega_g r/s \times 180^\circ} = \frac{70.53^\circ \times \pi}{0.707 \times 180} = 1.741 \text{ seg.} \Rightarrow Td_{Máx.} = 1.741 \text{ seg.}$$

La figura 12 muestra la traza de Nyquist de L(jw), con Td=0 y Td=Td_{MÁX.}-

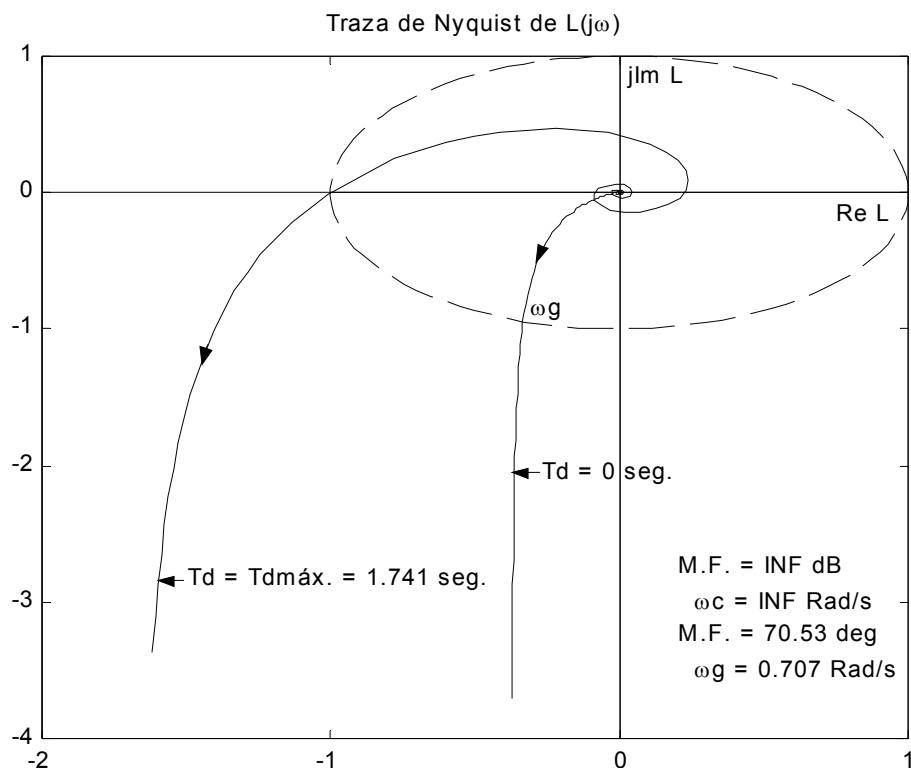


Figura 12

Ejemplo 9:

Un sistema tiene: $L(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+50)}$; para $K = 2500$ determinar :

1. El Margen de Ganancia del sistema.
2. El Margen de fase del sistema
3. El tiempo de retardo máximo permitido, $Td_{Máx.}$.

1º) La ecuación característica del sistema es:

$$s^3 + 55s^2 + 250s + K = 0 \Rightarrow K_L = 55 \times 2500 = 13750$$

por ende el M.G. será:

$$M.G. = \frac{K_{KL}}{K} = \frac{13750}{2500} \quad M.G. = 5.5 \quad \Rightarrow \quad M.G., dB = 20 \log(5.5) = +14.81 dB$$

Otra forma de hallar el M.G. es determinar la frecuencia de cruce de fase:

La misma resulta ser: $\omega_c = 15.81 \text{ rad/seg.}$, luego el módulo de $L(j\omega_c)$:

$$|L(j\omega_c)| = 2500/13750 = 0.1818 \Rightarrow M.G., dB = -20 \log |L(j\omega_c)| = -20 \log(0.1818) = +14.81 dB$$

2º) La frecuencia de cruce de ganancia se determina así:

$$|L(j\omega_g)| = \frac{2500}{\omega_g \sqrt{25 + \omega_g^2} \sqrt{2500 + \omega_g^2}} = 1$$

$6250000 = \omega_g^2 (25 + \omega_g^2)(2500 + \omega_g^2)$; operando se llega a:

$$\omega_g^6 + 2525\omega_g^4 + 62500\omega_g^2 - 6250000 = 0; \text{ las soluciones son:}$$

$\omega_{g1-2} = \pm j49.99 \quad \omega_{g3-4} = \pm j8.0423 \quad y \quad \omega_{g5-6} = \pm 6.2184$, en consecuencia la frecuencia buscada es: $\omega_g = 6.2184 \text{ rad/seg.}$ –

La fase de $L(j\omega)$ será:

$$\angle L(j\omega_g) = -(90^\circ + \tan^{-1}\omega_g/5 + \tan^{-1}\omega_g/50) = -148.3^\circ$$

Otra forma de hallar la fase de $L(j\omega)$ es:

$$L(j\omega) = \frac{2500}{-55\omega^2 + j\omega(250 - \omega^2)}; \text{ por lo tanto:}$$

$$\angle L(j\omega_g) = -\tan^{-1} \frac{250 - \omega_g^2}{-55\omega_g} = -\tan^{-1} \frac{1314.358}{-2127.862}, \text{ llamando: } \alpha = \tan^{-1} \frac{1314.358}{2127.862}, \text{ será:}$$

$$\angle L(j\omega_g) = -(180 - \alpha) = -148.28^\circ, \text{ en consecuencia: } M.F.^\circ = 180^\circ + \angle L(j\omega_g)$$

M.F. = 31.72° .

$$3^\circ) \text{ El } Td_{\max}, \text{ será: } Td_{\max} = \frac{31.72^\circ \times \pi}{6.2184 \times 180} \Rightarrow Td_{\max} = 0.0889 \text{ seg. -}$$

La figura 13 resume todo lo calculado.

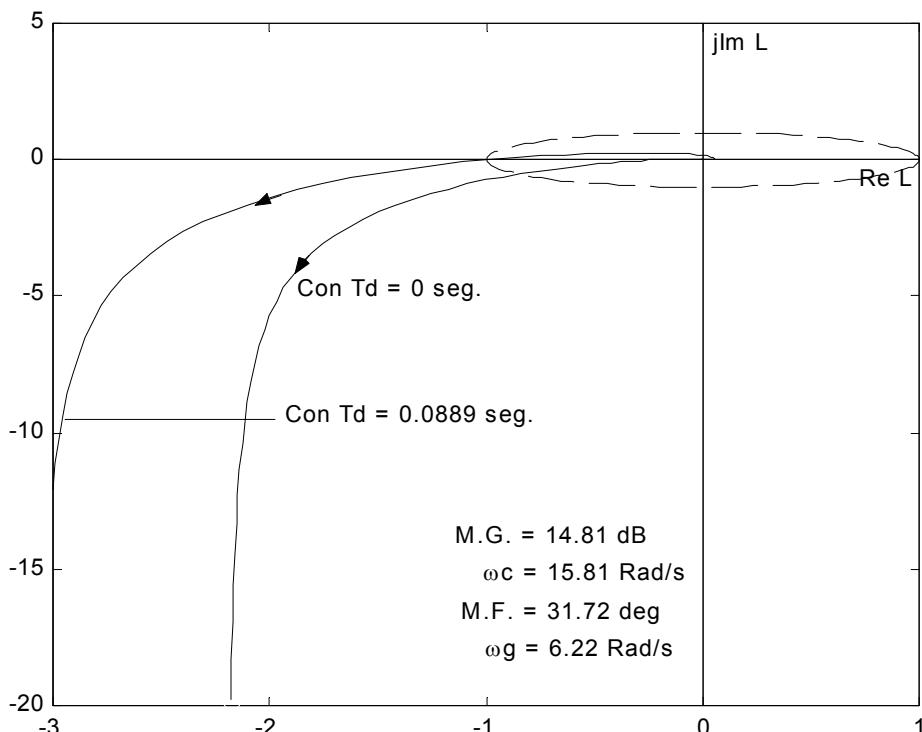


Figura 13

Ejemplo 10:

Un sistema de control tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{Ka(s+2)(s+4)}{s(s-1)(s+2)+Kt s}$$

Si $K_t = 2.1$ es constante determinar, aplicando el criterio de Nyquist.

- 1) El o los rangos de la ganancia K_a para que el sistema sea estable.
- 2) Si $K_a = 2$, el o los M.G. en dB y el M.F. en grados del sistema.

Si $K_a = 0.5$ es constante determinar, aplicando el criterio de Nyquist.

- 3) El rango de la ganancia K_t para que el sistema sea estable.
- 4) Si $K_t = 2.25$, el M.G. en dB y el M.F. en grados del sistema.

1) Si $K_t = 2.1$ constante, con K_a variable, nos queda la siguiente $L(s)$:

$$L(s) = \frac{K_a(s+2)(s+4)}{s(s^2 + s + 0.1)} ; \text{ el diagrama de Nyquist es el indicado en la figura 14.}$$

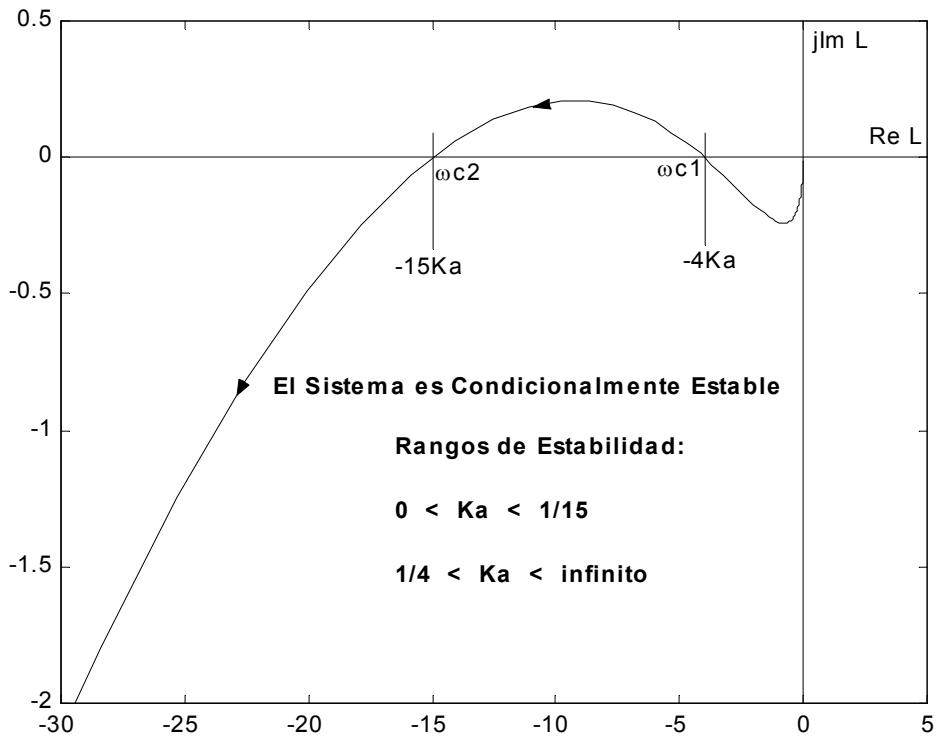


Figura 14

Como $P_w = 1$ y $P = 0$, $\Phi_{11E} = -90^\circ$, por lo tanto el sistema será estable si $K_a > 0$ y si: $L(j\omega_{c2}) > -1$, o $L(j\omega_{c1}) < -1$, así el punto critico no estará incluido por la traza de Nyquist, pues $L(s)$ es de fase mínima.

$$L(j\omega) = K_a \frac{(8 - \omega^2) + j6\omega}{(-\omega^2) + j\omega(0.1 - \omega^2)} ; \text{ la parte imaginaria sea nula si:}$$

$$\omega_c (8 - \omega_c^2)(0.1 - \omega_c^2) = -6\omega_c^3 \Rightarrow \omega_c^4 - 2.1\omega_c^2 + 0.8 = 0 \quad \text{las soluciones reales son:}$$

$$\omega_{c1} = \sqrt{1.6} \text{ rad / seg.} \quad \text{y} \quad \omega_{c2} = \sqrt{0.50} \text{ rad / seg.}$$

$$L(j\omega_{c2}) = K_a \frac{8 - \omega_{c2}^2}{-\omega_{c2}^2} = -15K_a > -1 \Rightarrow K_a < 1/15$$

$$L(j\omega_{c1}) = K_a \frac{8 - \omega_{c1}^2}{-\omega_{c1}^2} = -4K_a > -1 \Rightarrow K_a > 1/4$$

Por lo tanto los rangos pedidos son:

$$0 < K_a < 1/15 \quad \text{y} \quad 1/4 < K_a < \infty$$

2) Para $K_t = 2.1$, si se fija K_a , (el parámetro variable), en $K_a = 2$:

$$L(j\omega_{c2}) = -30 \quad \text{y} \quad L(j\omega_{c1}) = -8 ; \text{ en consecuencia los M.G. pedidos serán:}$$

$$\text{M.G.}_1, \text{dB} = -20 \log 8 = -18.06 \text{ dB}$$

$$\text{M.G.}_2, \text{dB} = -20 \log 30 = -29.54 \text{ dB}$$

El margen de fase será:

$$|L(j\omega_g)| = \frac{Ka |2 + j\omega_g| |4 + j\omega_g|}{\omega_g |(0.1 - \omega_g^2) + j\omega_g|} = 1 ; \text{ para } Ka = 2, \text{ operando se llega a:}$$

$$\omega_g^6 - 16/5\omega_g^4 - 80\omega_g^2 - 256 = 0; \text{ las soluciones son:}$$

$$\omega_{g1-2} = \pm 3.4365 \quad \omega_{g3-4} = -0.419 \pm j2.1167 \quad \text{y} \quad \omega_{g5-6} = +0.419 \pm j2.1167$$

En consecuencia la frecuencia de cruce de ganancia es la solución real y positiva: $\omega_g = 3.4365 \text{ rad/seg}$. La fase de la $L(j\omega_g)$ será:

$$\angle L(j\omega_g) = (\operatorname{arg}^{-1}(\omega_g/2) + \operatorname{arg}^{-1}(\omega_g/4) - (90^\circ + \operatorname{arg}^{-1}\omega_g/(0.1 - \omega_g^2)))$$

$$\angle L(j\omega_g) = -153.177^\circ; \text{ por lo tanto el M.F. pedido es:}$$

$$M.F. = 1890^\circ - 153.177^\circ \cdot - \Rightarrow M.F., (^\circ) = 26.823^\circ$$

3) Si $Ka = 0.50$ constante, con Kt variable nos queda:

$$L(s) = \frac{0.5(s+2)(s+4)}{s(s-1)(s+2) + Kts};$$

Como el parámetro variable no está como factor multiplicativo en el numerador, hay que hallar la función de transferencia del lazo equivalente correspondiente, la cual resulta ser de fase no mínima, pues $P = 2$:

$$L_{equiv.}(s) = \frac{Kts}{(s+2)(s^2 - 0.5s + 2)}; \text{ la traza de Nyquist se muestra en la Figura 15.}$$

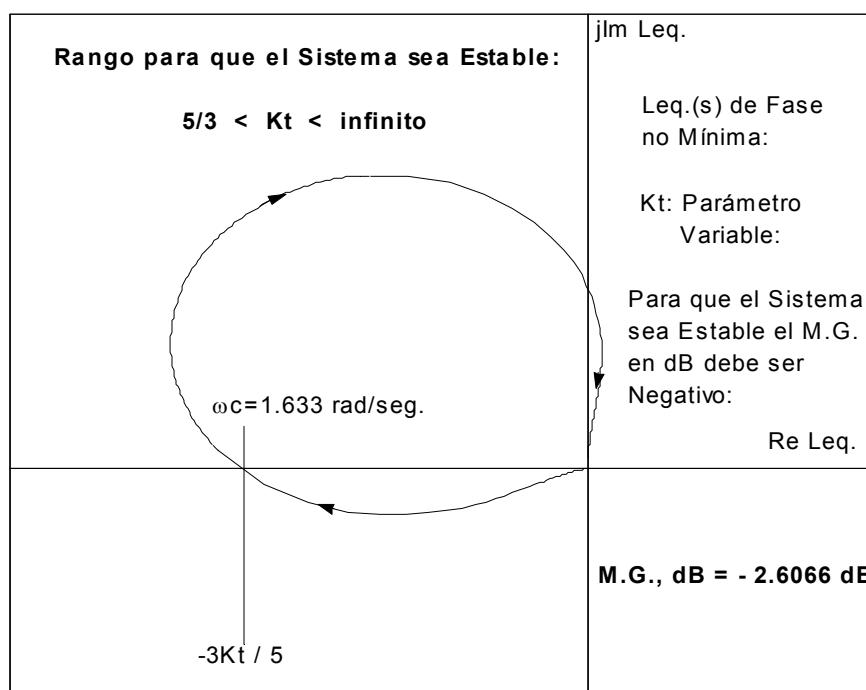


Figura 15

Como $Pw = 0$ y $P = 2$, $\Phi_{11E} = -360^\circ$, por lo tanto el sistema será estable si $Kt > 0$ y además: $L(j\omega_C) < -1$.

$$L(j\omega) = Kt \frac{j\omega}{(4 - 1.5\omega^2) + j\omega(1 - \omega^2)} ; \text{ la parte imaginaria sea nula si:}$$

$$4 - 1.5\omega_c^2 = 0 \Rightarrow \omega_c^2 = 8/3 \Rightarrow \omega_c \approx 1.633 \text{ rad / seg. -}$$

$$\text{Por lo tanto: } L(j\omega_c) = Kt \frac{1}{(1 - \omega_c^2)} = \frac{-3Kt}{5} < -1 \Rightarrow Kt > 5/3$$

En consecuencia el rango solicitado es: $5/3 < Kt < \text{infinito}$

4) Con $Ka = 0.5 = \text{Cte.}$, si se fija el parámetro variable Kt en, $Kt = 2.25$, el sistema será estable y el margen de ganancia, (recordar que la "ganancia" es Kt), deberá ser negativo, (figura 15), y su valor será:

$$M.G., dB = -20 \log(3Kt/5) = -20 \log(1.35) \Rightarrow M.G., dB = -2.6066 \text{ dB. -}$$

- Para calcular el margen de fase, se deberá utilizar la $L(s)$ real, como ya se conoce y no la función de transferencia del lazo equivalente, por

$$\text{ende: } L(s) = \frac{0.5(s+2)(s+4)}{s(s-1)(s+2) + 2.25s} \Rightarrow L(s) = \frac{0.5(s+2)(s+4)}{s(s^2 + s + 0.25)} ;$$

Es de fase mínima, y su traza de Nyquist se muestra en la Figura 16. El M.G. (con Ka Variable y $Kt=2.25$) sería como se puede ver infinito.

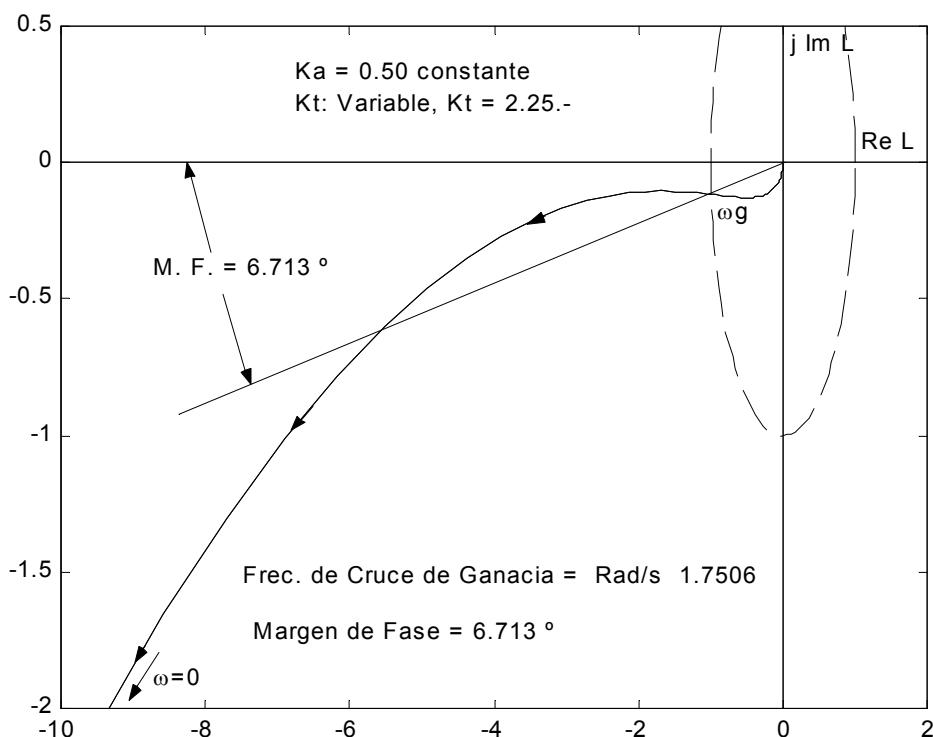


Figura 16

La frecuencia de cruce de ganancia será:

$$|L(j\omega_g)| = \frac{0.50 \times \sqrt{4 + \omega_g^2} \times \sqrt{16 + \omega_g^2}}{\omega_g \times \sqrt{(0.25 - \omega_g^2)^2 + \omega_g^2}} = 1 ; \text{ operando se llega a:}$$

$$\omega_g^6 + 0.25^4 - 4.9375\omega_g^2 - 16 = 0 ; \text{ las soluciones son:}$$

$$\omega_{g1-2} = \pm 1.7506 ; \quad \omega_{g3-4} = -0.56 \pm j1.404 \quad \text{y} \quad \omega_{g5-6} = +0.56 \pm j1.404$$

Por lo tanto la solución real y positiva es: $\omega_g = 1.7506 \text{ rad/seg.}$ –

En consecuencia la fase de $L(j\omega_g)$ será:

$$\begin{aligned}\angle L(j\omega_g) &= \{\operatorname{tag}^{-1}(\omega_g/2) + \operatorname{tag}^{-1}(\omega_g/4)\} - \{90^\circ + \operatorname{tag}^{-1}(\omega_g/0.25 - \omega_g^2)\} \\ &= (41.195^\circ + 23.636^\circ) - (90^\circ + 148.118^\circ) = -173.287^\circ\end{aligned}$$

El margen de fase buscado será:

$$M.F.(^\circ) = 180^\circ - \angle L(j\omega_g) = 180^\circ - 173.287^\circ \Rightarrow M.F.(^\circ) = +6.713^\circ$$

En Matlab, la función `[mg, MF, wg, wc]=margin(n,d)`, nos da los márgenes de ganancia, (no en dB), y de fase, y las frecuencias de cruce de fase y ganancia. Si no se coloca el argumento a la izquierda los marca en un diagrama de Bode. Para el ejemplo 9 seria:

`» n=2500`

`» d=pmake(0,-5,-50);`

`» [mg,MF,wg,wc]=margin(n,d)`

`mg =`

$$5.5000 \Rightarrow M.G., \text{dB} = 20\log(5.5) = +14.80725 \text{dB}$$

`MF =`

$$31.7124$$

`wq =`

$$15.8114$$

`WC =`

$$6.2184$$

Solo: `margin(n,d)`, el diagrama de Bode que devuelve es el de la figura 17.

Diagrama de Bode

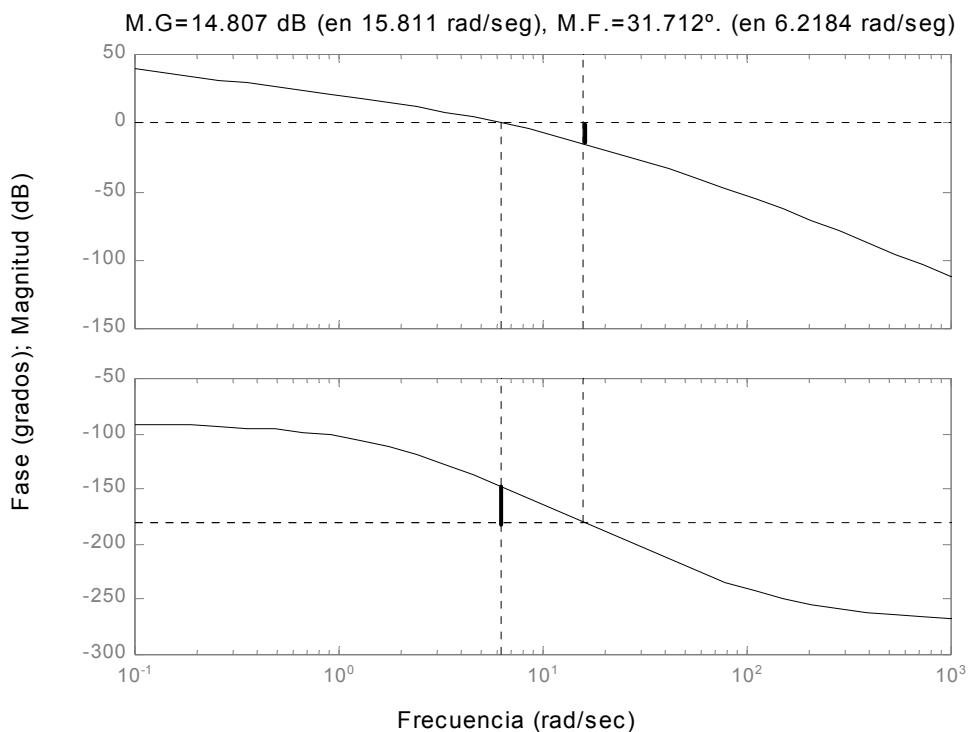


Figura 17

Si se marca en el plano $K_t = f(K_a)$, la región donde el sistema es estable, aplicando el criterio de Routh, resulta que $K_t_{\text{Límite}}$ en función de K_a resulta ser: $K_t_{\text{Límite}} = \frac{-6(Ka - 1)(Ka + 1/3)}{(Ka + 1)}$, la región del primer cuadrante que está por arriba es la zona donde el sistema es estable y está indicada en la figura 18, en ella esta señalado el punto de funcionamiento del sistema si: $K_t = 2.25$, (fijo), y K_a (variable) = 0.5.-

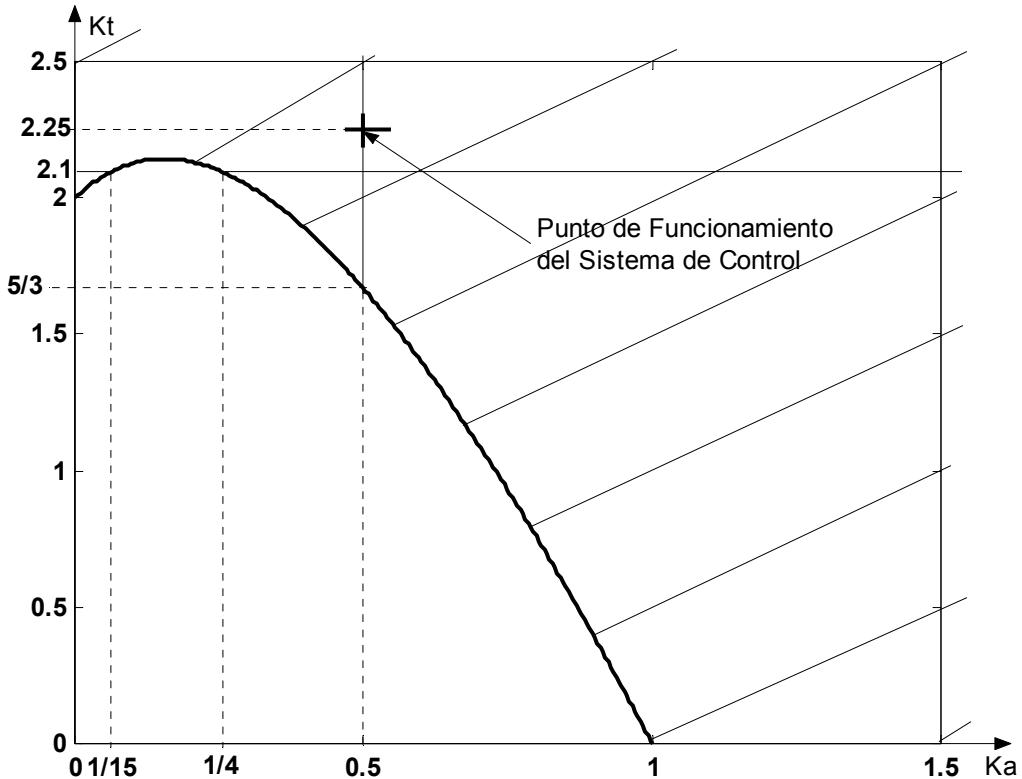


Figura 18

Análisis de Estabilidad Relativa con las Trazas de Bode de $L(s)$

Las trazas de Bode de una función de transferencia son una herramienta gráfica de suma utilidad para el análisis y diseño de los sistemas de control lineales. Antes de la aparición de las computadoras digitales, las trazas de Bode eran a menudo conocidas como "trazas asintóticas" debido a que las curvas de magnitud y de fase se podían bosquejar de sus propiedades asintóticas sin detallar las graficas. Las aplicaciones modernas de las trazas de Bode para sistemas de control se deben identificar con las siguientes ventajas y desventajas.-

Ventajas de las Trazas de Bode

1. En ausencia de una computadora, un bosquejo aproximado de las trazas de Bode se puede realizar por la aproximación de la magnitud y la fase con segmentos de líneas rectas, (las asintotas).-

2. El cruce de ganancia, el cruce de fase, el M.G. y el M.F. se determinan más fácilmente en las trazas de Bode que en las trazas de Nyquist.
3. Para propósitos de diseño, los efectos de añadir controladores y sus parámetros se visualizan con mayor facilidad sobre las trazas de Bode que sobre las de Nyquist.

Desventajas de las Trazas de Bode

La estabilidad absoluta y relativa de sistemas con $L(j\omega)$ de fase mínima se pueden determinar con las trazas de Bode solamente, *no así para sistemas con $L(j\omega)$ de fase no mínima, pues no hay forma de decir que el giro Φ_{11} para el criterio de Nyquist, esté sobre las trazas de Bode*. Por lo tanto las trazas de Bode son útiles solo para los estudios de la estabilidad de sistemas con funciones de transferencia del lazo de fase mínima, no así si las mismas son de fase no mínima.

Con referencia a las definiciones de M.G. y M.F. dadas aquí, la interpretación de estos parámetros desde las trazas de Bode, para sistemas con una $L(s)$ de fase mínima típica, se ilustran en la figura 19.

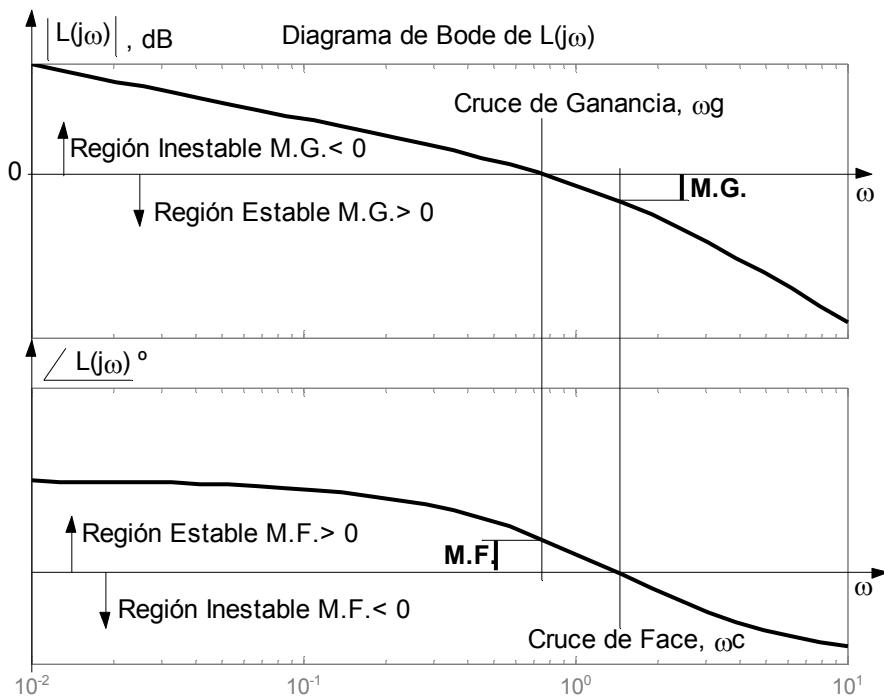


Figura 19

En la misma se indican las regiones de estabilidad $M.G.>0$ e inestabilidad $M.G.<0$, para la intersección sobre la curva de magnitud en el cruce de fase, y también las regiones de estabilidad $M.F.>0$ e inestabilidad $M.F.<0$, para la intersección sobre la curva de fase en el cruce de ganancia.-

Las observaciones siguientes se pueden hacer sobre la estabilidad del sistema con la $L(s)$ típica y de fase mínima, respecto a las propiedades de las trazas de Bode.

1. El M.G. es positivo y el sistema es estable si la magnitud de $L(j\omega)$ en el cruce de fase es negativa en dB. Esto es el M.G. se mide abajo del eje de 0 dB. Si el M.G. se mide arriba del eje de 0 dB, el M.G. es negativo en dB y el sistema es inestable.
2. El M.F. es positivo y el sistema es estable si la fase de $L(j\omega)$ es mayor que -180° en el cruce de ganancia. Esto es, el M.F. se mide arriba del eje de -180° . Si el M.F. se mide abajo del eje de -180° , el M.F. es negativo y el sistema es inestable.-
3. Para sistemas con la $L(s)$ atípicas de fase mínima, el mismo será estable, $w_c > w_g$ y las regiones de estabilidad y de inestabilidad cambian, arriba estará la región para la estabilidad.

Ejemplo 11:

Un sistema tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K(s+2)(s+4)}{s(s^2 + s + 0.25)},$$

Para $K = 0.5$ determinar el M.G. y el M.F. del sistema.

Usando el programa margin(n, d) de Matlab, los resultados se muestran en la figura 20. $L(s)$ es típica de fase mínima.

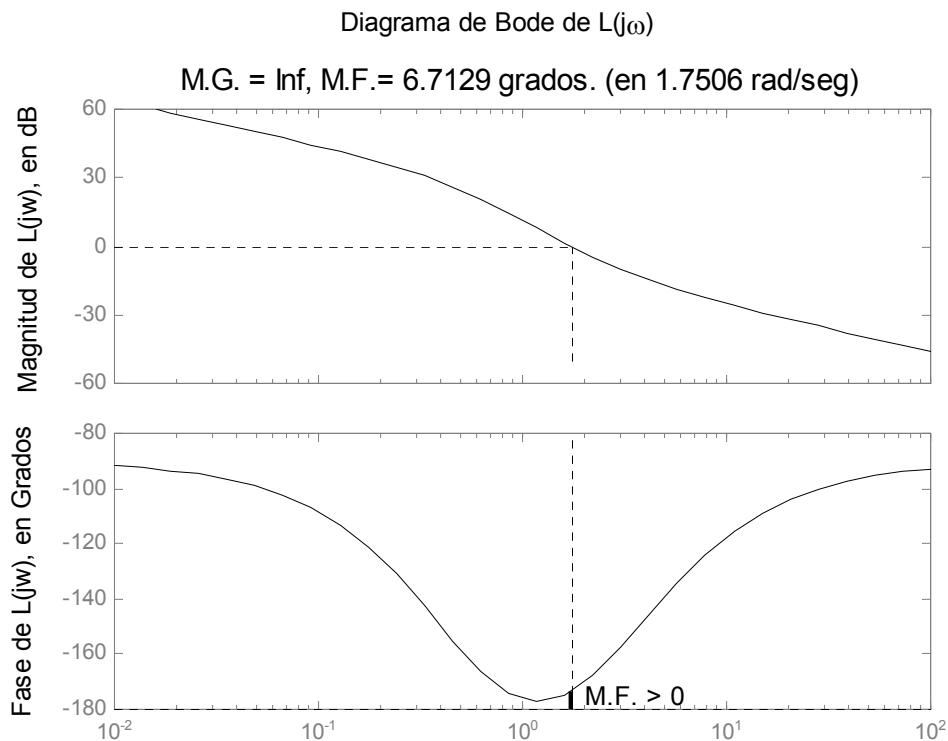


Figura 20

Ejemplo 12:

Un sistema tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K(s+1)(s+2)}{s^3(s+9)},$$

Para $K = 90$ determinar el M.G. y el M.F. del sistema.

Usando el programa margin(n, d) de Matlab, los resultados se muestran en la figura 21. $L(s)$ es atípica de fase mínima, el sistema es Estable.

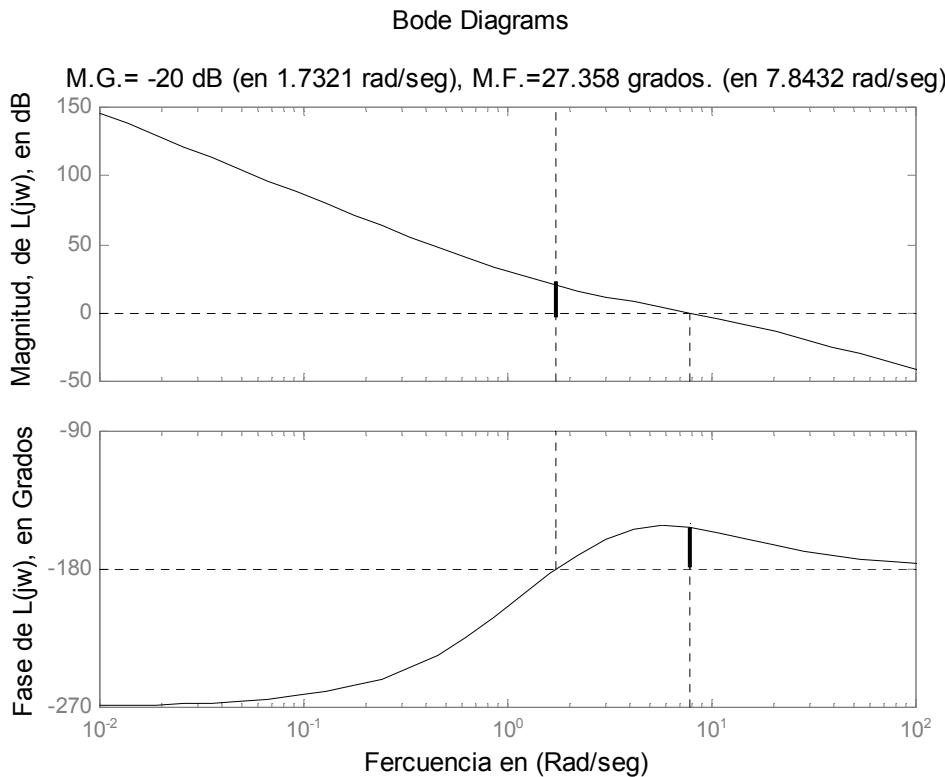


Figura 21

Ejemplo 13:

Un sistema tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K(s^2 + s + 0.5)}{s^3(s+4)(s+10)},$$

Para $K = 200$ determinar el M.G. y el M.F. del sistema.

Usando el programa margin(n, d) de Matlab, los resultados se muestran en la figura 22. La función $L(s)$ es de fase mínima y el sistema es condicionalmente estable.

```
>> n=200*[1 1 0.5]
n =
200 200 100
>> d=[1 14 40 0 0 0]
d =
1 14 40 0 0 0
```

» margin(n,d)

Diagrama de Bode de $L(jw)$

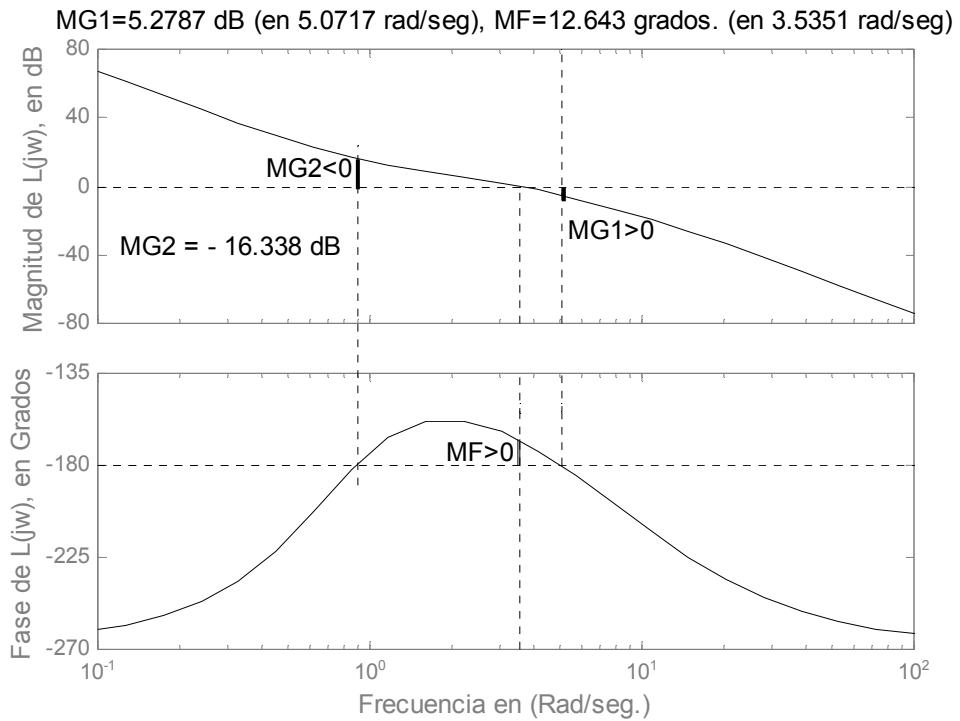


Figura 22

Como el M.F. es positivo el sistema es Estable.-

Ajuste de la Ganancia para tener un M.G. y/o un M.F. dados

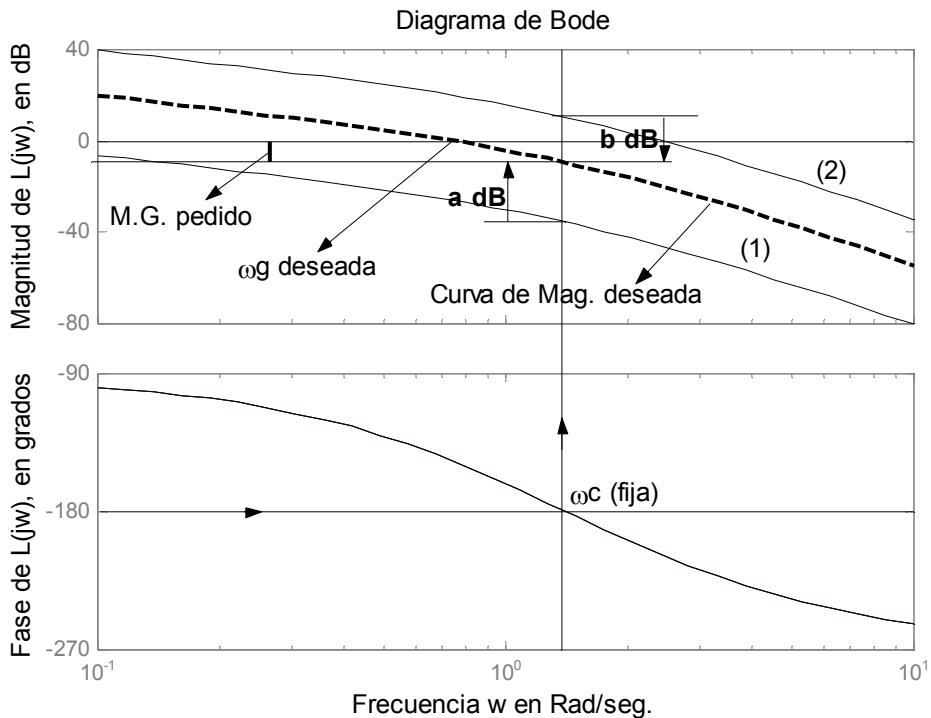


Figura 23

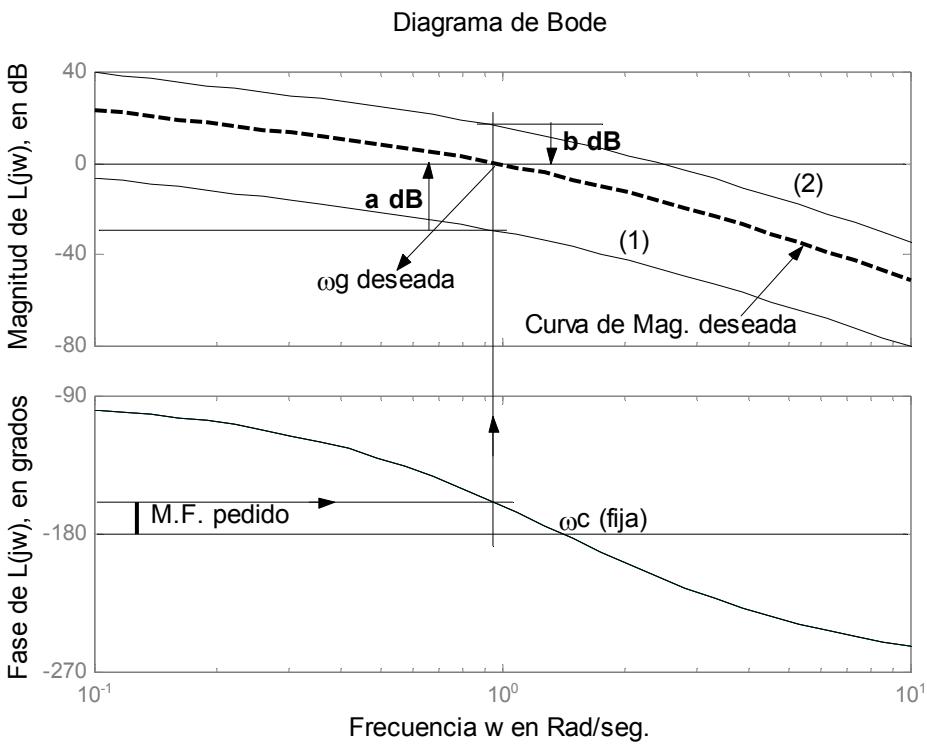


Figura 24

Las figuras 23 y 24 grafican el procedimiento de como ajustar la ganancia del lazo de un sistema de control para que tengan un M.G. en dB y un M.F. en grados solicitados, respectivamente.

Para un M.G. Pedido:

Se grafica el diagrama de Bode para $K = 1$, luego se determina para la frecuencia de cruce de fase, (que no varía con la ganancia), el modulo de $L(jw_C)$, procediendo luego a calcular el incremento o disminución de la ganancia para que el M.G. sea el pedido, Por ejemplo en la figura 23, para el sistema (1) hay que subir la ganancia en la cantidad (a dB) y para el sistema (2) hay que bajarla en el valor (b dB). Como $K = 1$, (0 dB), en el primer caso $K > 1$ y en el segundo $K < 1$, y esos serán directamente los valores de la ganancia buscada.-

Para un M.F. Pedido:

Se grafica el diagrama de Bode para $K = 1$, luego se determina la frecuencia para la cual la fase sea ($M.F. ^\circ$ (pedido)- 180°), o sea la nueva frecuencia de ganancia, w_g' , según sea el módulo de $L(jw_g')$ procediendo luego a calcular el incremento o disminución de la ganancia para que el M.F. sea el pedido. Por ejemplo en la figura 24, para el sistema (1) hay que subir la ganancia en la cantidad (a dB) y para el sistema (2) hay que bajarla en el valor (b dB). Como $K = 1$, (0 dB), en el primer caso $K > 1$ y en el segundo $K < 1$, y esos serán directamente los valores de la ganancia buscada.-

Ejemplo 14:

Un sistema de control tiene la siguiente L(s):

$$L(s) = \frac{K}{(s+3)^3};$$

- Determinar el valor de K para que el M.G. sea de 20 dB.
- Determinar el valor de K para que el M.F. sea de 45º.

Se puede usar la función Bplot del Csad:

Una vez ingresada L(s) con K = 1, y graficado el diagrama de Bode, para el rango de frecuencia de w = 1 a w = 10. Luego con el comando Interpolate se procede así:

BPLOT > i

Search given Mag, Phase or Freq? [p] > p

Max value allowed is -55.3

Min value allowed is -219.9

Enter Phase > -180

Interpolated Data Points are:

Frequency	Magnitude	Phase
5.1964	-46.6897	-180.0000

Luego a los dB que hay que subir:

$$46.6897 - 20 = 26.6897 \Rightarrow K = +26.6897 \text{ dB} \Rightarrow K = 21.60155$$

Por lo tanto con K = 21.60155, el sistema tendrá un M.G.= +20 dB.-

Luego con el comando Interpolate se procede así:

BPLOT > i

Search given Mag, Phase or Freq? [p] > p

Max value allowed is -55.3

Min value allowed is -219.9

Enter Phase > -135

Interpolated Data Points are:

Frequency	Magnitude	Phase
3.0001	-37.6588	-135.0000

Luego a los dB que hay que subir:

$$37.6588 \text{ dB} \Rightarrow K = +37.6588 \text{ dB} \Rightarrow K = 76.373$$

Por lo tanto con K = 76.373, el sistema tendrá un M.F.= +45º.-

Ejemplo 15:

Un sistema de control tiene la siguiente L(s):

$$L(s) = \frac{K e^{-s}}{s(1+0.1s+0.01s^2)};$$

- Determinar el valor de K para que el M.G. sea de 10 dB.
- Determinar el valor de K para que el M.F. sea de 45º.

También se puede usar la función Bplot del Csad:

Una vez ingresada L(s) con K = 1. Se introduce el tiempo del retardo así:

BPLOT > t

Enter time delay in G (sec) [0] > 1

BPLOT > d

Current TF with ZERO time delay is: Open-Loop (G)

100

$$s^3 + 10s^2 + 100s^1$$

Time delay in G is 1 seconds

Graficado el diagrama de Bode, para el rango de frecuencia de $w = 0.1$ a $w = 10$. Luego con el comando Interpolate se procede así:

BPLOT > i

Search given Mag, Phase or Freq? [p] > p

Max value allowed is -96.3

Min value allowed is -753

Enter Phase > -180

Interpolated Data Points are:

Frequency	Magnitude	Phase
1.4262	-2.9953	-180.000

Luego a los dB que hay que bajar serán:

$$-(10-2.9953) = -7.0047 \text{ dB} \Rightarrow K = -7.0047 \text{ dB} \Rightarrow K = 0.44644$$

Por lo tanto con $K = 0.44644$, el sistema tendrá un M.G.= +10 dB.-

Luego con el comando Interpolate se procede así:

BPLOT > i

Search given Mag, Phase or Freq? [p] > p

Max value allowed is -96.3

Min value allowed is -753

Enter Phase > -135

Interpolated Data Points are:

Frequency	Magnitude	Phase
0.7138	2.9538	-135.0000

Luego a los dB que hay que bajar:

$$-2.9538 \text{ dB} \Rightarrow K = -2.9538 \text{ dB} \Rightarrow K = 0.7117$$

Por lo tanto con $K = 0.7117$, el sistema tendrá un M.F.= +45º.-

Verifiquemos este último resultado:

BPLOT > d

Current TF with ZERO time delay is: Open-Loop (G)

71.17

$$s^3 + 10s^2 + 100s^1$$

Time delay in G is 1 seconds

La traza de Bode se muestra en la figura 25.

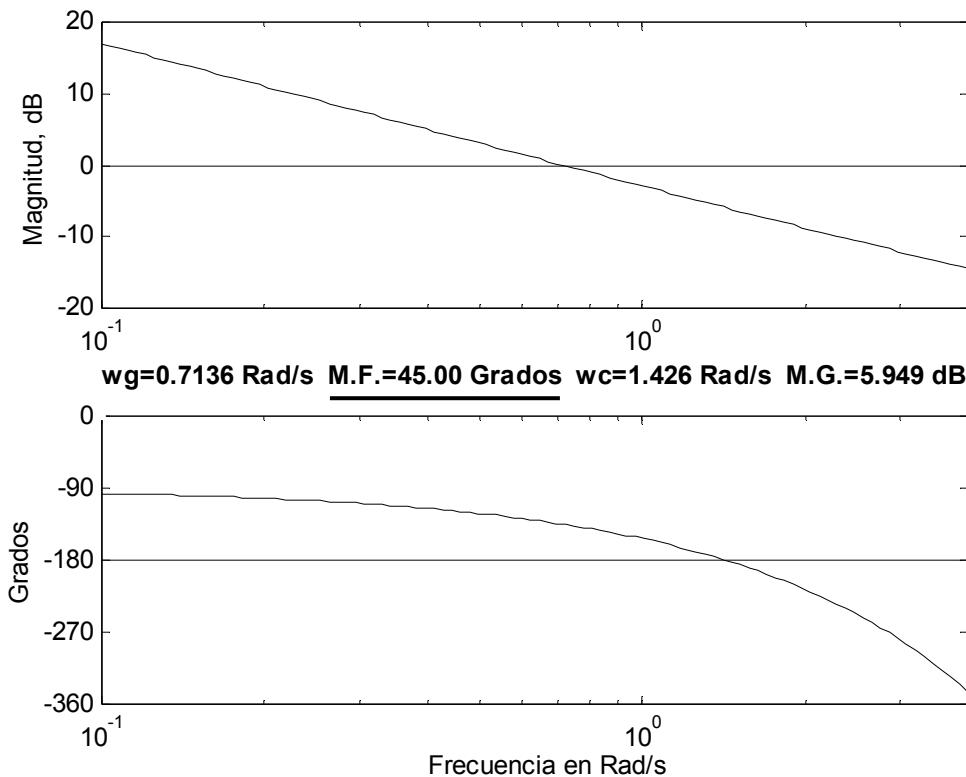


Figura 25

Estabilidad Relativa Relacionada con la Pendiente de la Curva de Magnitud de las Trazas de Bode.

Además del M.G. el M.F. y el M_R como medida de la estabilidad relativa, la pendiente de la curva de magnitud de las trazas de Bode de $L(jw)$ en el cruce de ganancia, también da una indicación cualitativa sobre la estabilidad relativa del sistema de control. Por ejemplo en la figura 17, si la ganancia del lazo disminuye desde su valor nominal $K=2500$, la curva de magnitud se correrá hacia abajo, mientras que la curva de fase permanece sin cambios. Esto causa que la frecuencia de cruce de ganancia ω_g , sea menor, y la pendiente de la curva de magnitud en esta frecuencia sea menos negativa, y el margen de fase correspondiente se incrementa. Por otra parte, si la ganancia del lazo se incrementa la frecuencia de cruce de ganancia se incrementa y la pendiente de la curva de magnitud en la nueva ω_g , es más negativa. Esto corresponde a un margen de fase más pequeño y el sistema es menos estable, (si $\omega_g < \omega_c$). Si $\omega_g = \omega_c$, el sistema será marginalmente estable y si $\omega_g > \omega_c$, inestable.-

La razón de estas evaluaciones de la estabilidad es muy simple. Para una $L(jw)$ de fase mínima la relación entre la magnitud y la fase es única. Ya que la pendiente negativa de la curva de magnitud es el resultado de tener más polos que ceros en $L(jw)$, la fase correspondiente también es negativa.

En general, mientras más pequeña es la pendiente de la curva de magnitud, (en ω_g), más pequeña será la fase. Por ende, si ω_g está en un valor donde la pendiente de la curva de magnitud es muy negativa, (-40, -60dB/dec, etc.), esto corresponderá a un M.F. que será pequeño o negativo. El ejemplo considerado no es complicado en el sentido que las pendientes de la curva de magnitud y fase decrecen monótonicamente conforme la frecuencia se incrementa.

Ejemplo 16:

Este ejemplo ilustra un sistema condicionalmente estable que pasa de condición de estable a inestable conforme la ganancia del lazo varía.

Consideremos que:

$$L(s) = \frac{100K(s+5)(s+40)}{s^3(s+100)(s+200)}$$

Las trazas de Bode de $L(jw)$ se muestran en la figura 26 para $K=1$.

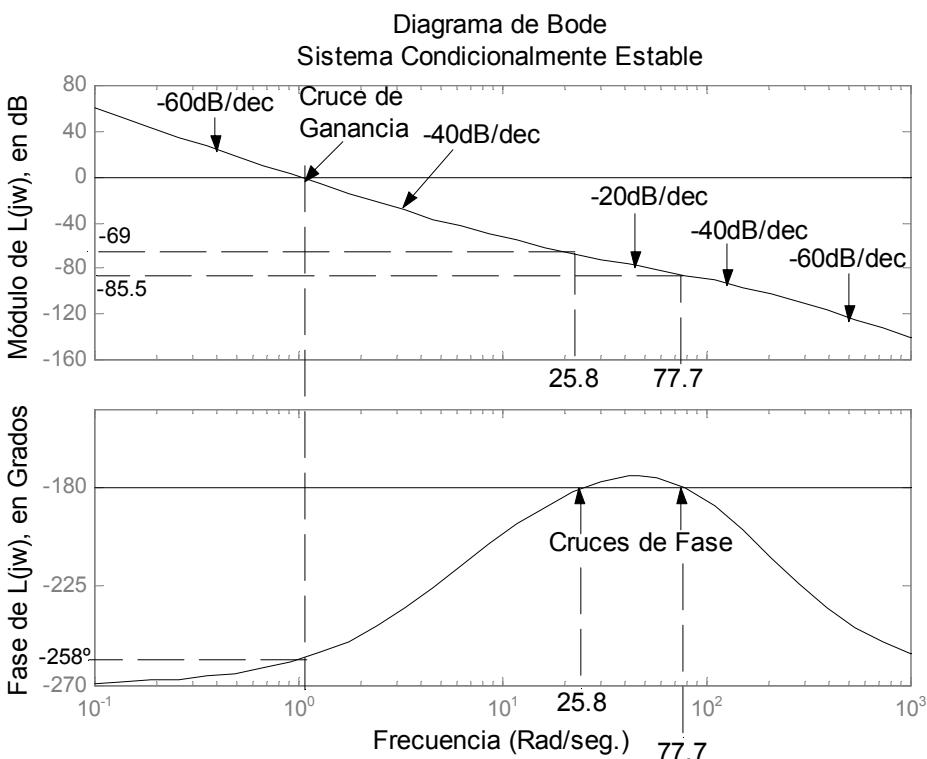


Figura 26

Se obtienen los siguientes resultados sobre la estabilidad relativa del sistema. $\omega_g = 1 \text{ rad/seg} \Rightarrow M.F. = -78^\circ$

Hay dos cruces de fase: uno en $\omega_{C2} = 25.8 \text{ rad/seg.}$ y otro en $\omega_{C1} = 77.7 \text{ rad/seg.}$

Las características de fase entre estas dos frecuencias indican que si el cruce de ganancia está en este rango, ($\omega_g = 25.8 \text{ rad/seg.} \rightarrow 77.7 \text{ rad/seg.}$), el sistema será estable. De la curva de magnitud el rango para la operación estable esta entre: 69 y 85.5 dB o ($K=2818.38 \rightarrow 18836.49$).-

Para los valores de K por arriba y por debajo de este intervalo, la fase de L (jw) es menor que -180° , y el sistema será inestable.

Este sistema sirve como un buen ejemplo de la relación entre la estabilidad relativa y la pendiente de la curva de magnitud en el cruce de ganancia.

Como se observa en la figura 26, tanto en las frecuencias altas como en las bajas, la pendiente de la curva de magnitud es de -60 dB/dec , si el cruce de ganancia (ω_g), cae en cualquiera de estas dos regiones, el

margen de fase es negativo y el sistema es inestable. Si las dos secciones de la curva de magnitud tienen una pendiente de -40 dB/dec , el sistema es estable solo si el cruce de ganancia cae alrededor del punto medio de estas dos regiones, pero aún entonces, el margen de fase es pequeño.

Si el cruce de ganancia cae en la región en donde la curva de magnitud tiene una pendiente de -20 dB/dec , el sistema es estable. En definitiva si:

"La pendiente de la curva de magnitud en el punto de cruce de ganancia debe ser más positiva que -40 dB/dec ."

La figura 27 muestra la traza de Nyquist de L (jw).

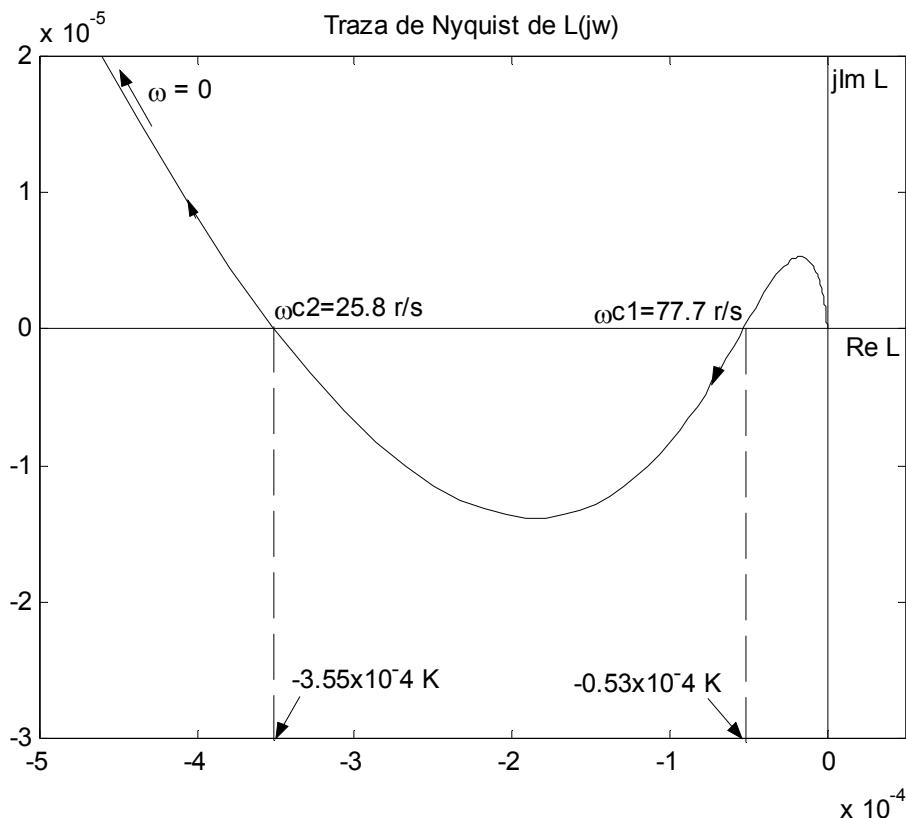


Figura 27

Y la figura 28 el lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema de control cuando varía la ganancia del lazo del sistema K, en el rango positivo.-

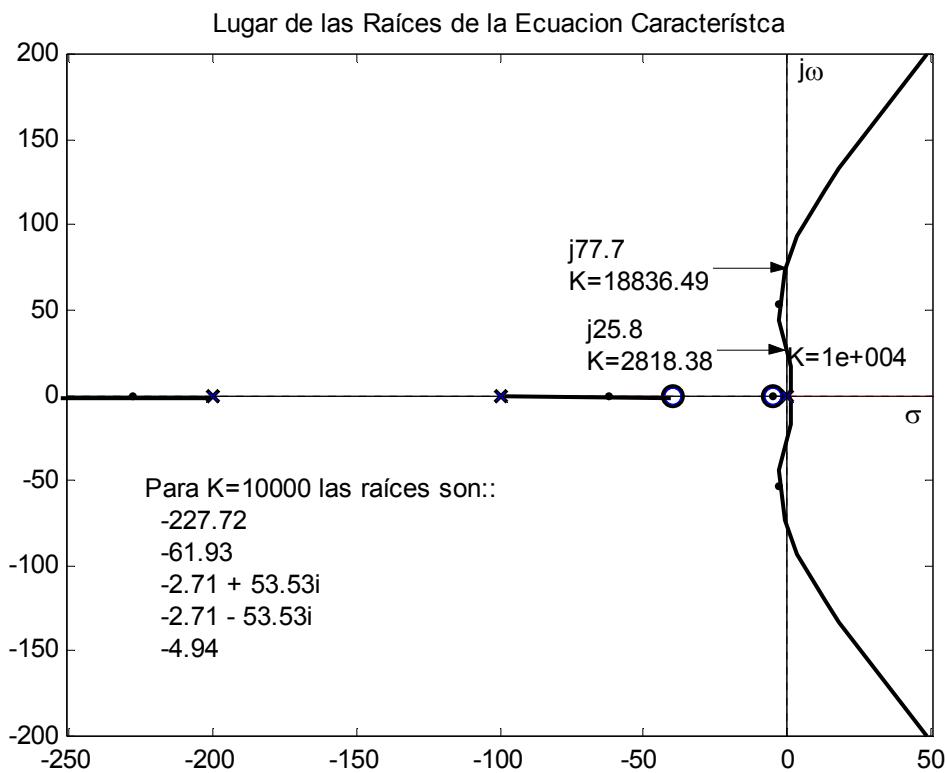


Figura 28

Análisis de la Estabilidad con la Traza de Magnitud-Fase, (Traza de Nichols)
 La traza de magnitud-fase de $L(j\omega)$, es otra forma de graficar la respuesta

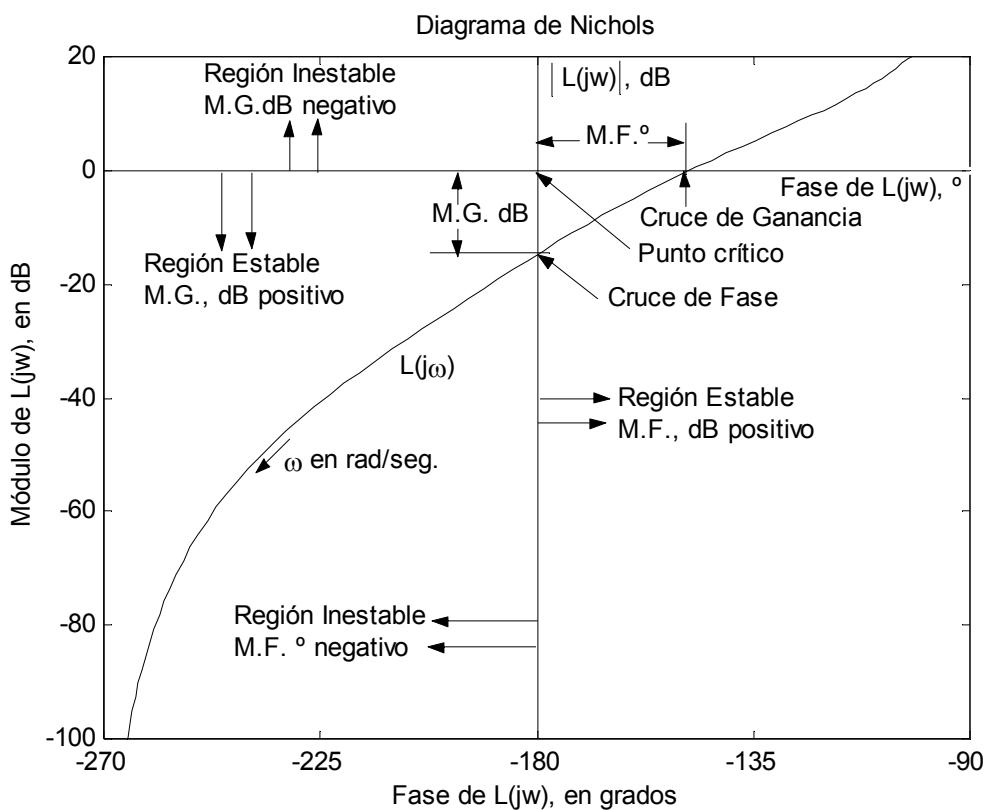


Figura 29

frecuencial del lazo, que tiene ciertas ventajas para el análisis y diseño en el dominio de la frecuencia. Se representa $|L(j\omega)|, dB = f(\angle L(j\omega)^\circ)$.

El diagrama de magnitud-fase, (también llamado de Nichols) de la función $L(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+50)}$, se muestra en la figura 29. Curva parametrada en la w.

Los cruces de ganancia y de fase y los márgenes de ganancia y de fase se indican con claridad sobre el diagrama de magnitud-fase de $L(j\omega)$.

- El punto crítico es la intersección del eje de 0dB y el eje de -180° .
- El cruce de fase es donde la curva intercepta al eje de -180° .
- El cruce de ganancia es donde la curva intercepta al eje de 0dB.
- El M.G. en dB es la distancia vertical en dB, medida del cruce de fase al punto crítico.
- El M.F. en grados es la distancia horizontal en grados, medida desde el cruce de ganancia al punto crítico.

También están indicadas las regiones en las cuales los cruces de fase y de ganancia deberán localizarse para la estabilidad. Ya que el eje vertical del modulo de $L(j\omega)$ está en dB, cuando la ganancia del lazo de $L(j\omega)$ cambia, la curva solo se corre hacia arriba o hacia abajo a lo largo del eje vertical. En forma similar, cuando una fase constante se añade a $L(j\omega)$ la curva se desplaza de manera horizontal sin distorsión de la misma.

Si $L(j\omega)$ contiene un retardo puro T_d , el efecto de éste es añadir una fase igual a $(-wT_d \times 180^\circ / \pi)$ a lo largo de la curva.

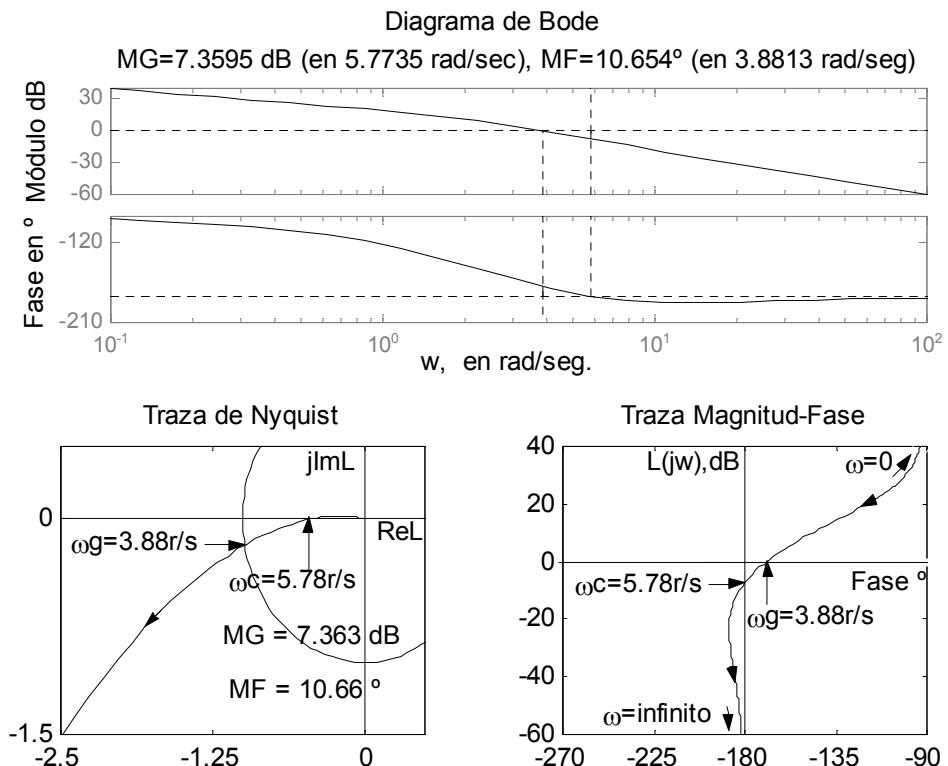


Figura 30

Como ejemplo ilustrativo la traza polar, (diagrama de Nyquist), la traza de Bode y la traza de magnitud-fase, (diagrama de Nichols) de un sistema de control con realimentación unitaria se muestran en la figura 30, la $G(s)$ es:

$$G(s) = \frac{10(s+10)}{s(s+2)(s+5)}$$

Las relaciones entre estas tres trazas son con facilidad identificadas al comparar las curvas de la figura 30.

Otra ventaja de emplear la traza de magnitud-fase es que para *sistemas con realimentación unitaria*, los parámetros del sistema de control, tales como M_R ; ω_R ; y ω_{AB} , se pueden determinar de la traza con la ayuda del lugar geométrico de M constante. Estos parámetros de desempeño del sistema no están representados en las trazas de Bode de la función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema con realimentación unitaria.

Lugar Geométrico de M Constante en el Plano G (jw)

Anteriormente se señaló que es difícil de determinar en forma analítica el pico de resonancia M_R y el ancho de banda ω_{AB} , para sistemas de orden superior, y las trazas de Bode proveen información sobre el sistema en lazo cerrado sólo en la forma de margen de ganancia y margen de fase. Se mencionará un método gráfico para la determinación de M_R ; ω_R ; y ω_{AB} , empleando la función de transferencia de la trayectoria directa $G(jw)$. Como se apreciara en el desarrollo siguiente, el método es en directo aplicable sólo a sistemas con realimentación unitaria, aún cuando con algunas modificaciones también se puede aplicar a sistemas con realimentación no unitaria. Se supondrá que $G(s)$ es la función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema con realimentación unitaria. La función de transferencia del sistema es:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Para un estado senoidal permanente, se reemplaza s por jw , y $G(jw)$ será:
 $G(jw) = Re G(jw) + j Im G(jw) = x + jy$

La magnitud de la función de transferencia del sistema se escribe:

$$|M(jw)| = \left| \frac{G(jw)}{1 + G(jw)} \right| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}}$$

En adelante, por simplicidad, se M denotará a el $|M(jw)| \equiv M$:

$$M^2 \{ (1+x)^2 + y^2 \} = x^2 + y^2 \quad (*)$$

Por lo tanto operando se puede demostrar que se llega a:

$$\left[x - \frac{M^2}{1-M^2} \right]^2 + y^2 = \left[\frac{M}{1-M^2} \right]^2 \quad \text{con} \quad M \neq 1 \quad (**)$$

Para un valor dado de M, la última ecuación representa una circunferencia con coordenadas del centro en:

$$x_0 = \frac{M^2}{1-M^2} ; \quad y_0 = 0$$

Y el radio de las mismas con valor:

$$r = \left| \frac{M}{1-M^2} \right|$$

Para M=1, la ecuación (*) nos da:

$$\{(1+x)^2 + y^2\} = x^2 + y^2 \Rightarrow 1 + 2x + x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 1 + 2x = 0 \Rightarrow x = -0.50$$

Que es la ecuación de una línea recta paralela al eje j ImG(jw) que pasa a través del punto (-0.5, j0) del plano G(jw).

Cuando M toma diferentes valores la ecuación (**), describe en el plano G (jw) una familia de circunferencias que se denominan *lugar geométrico de M constante, o circunferencias de M constante*. La figura 31 ilustra un conjunto típico de las mismas.-

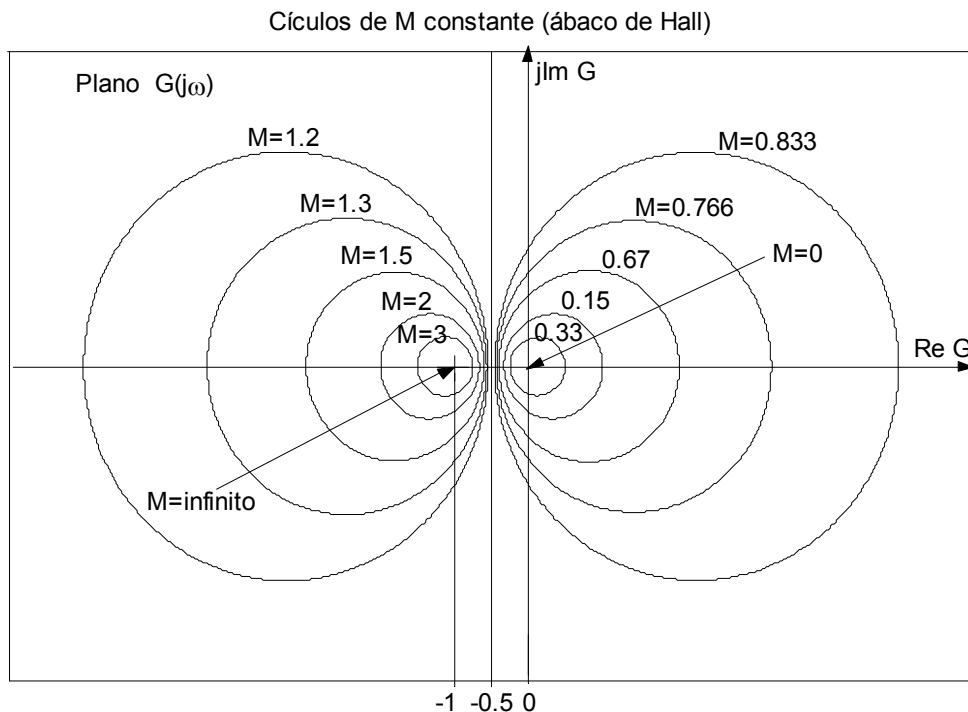


Figura 31

Estas circunferencias son simétricas respecto a la línea de M = 1 y al eje real. Las que están a la izquierda del lugar geométrica M = 1, son para M>1, y las de la derecha para M<1. Cuando M tiende a infinito, $x_0 = -1$ y $r = 0$, o sea el punto crítico.

Gráficamente, la intersección de la traza G (jw) y la circunferencia de M constante da el valor de M en la frecuencia correspondiente sobre la traza de G (jw). Si se quiere mantener el valor de M_R por debajo de un valor prefijado, la curva G (jw) no debe ser secante a la circunferencia correspondiente de ese M, y al mismo tiempo, evidentemente, no debe

incluir al punto crítico $(-1, j0)$. La circunferencia de $M = \text{constante}$ con el menor radio que es tangente a la curva $G(j\omega)$ da el valor de M_R , y la frecuencia de resonancia ω_R se lee del punto tangente sobre la curva $G(j\omega)$. La figura 32 ilustra la traza de Nyquist de $G(j\omega)$ para un sistema

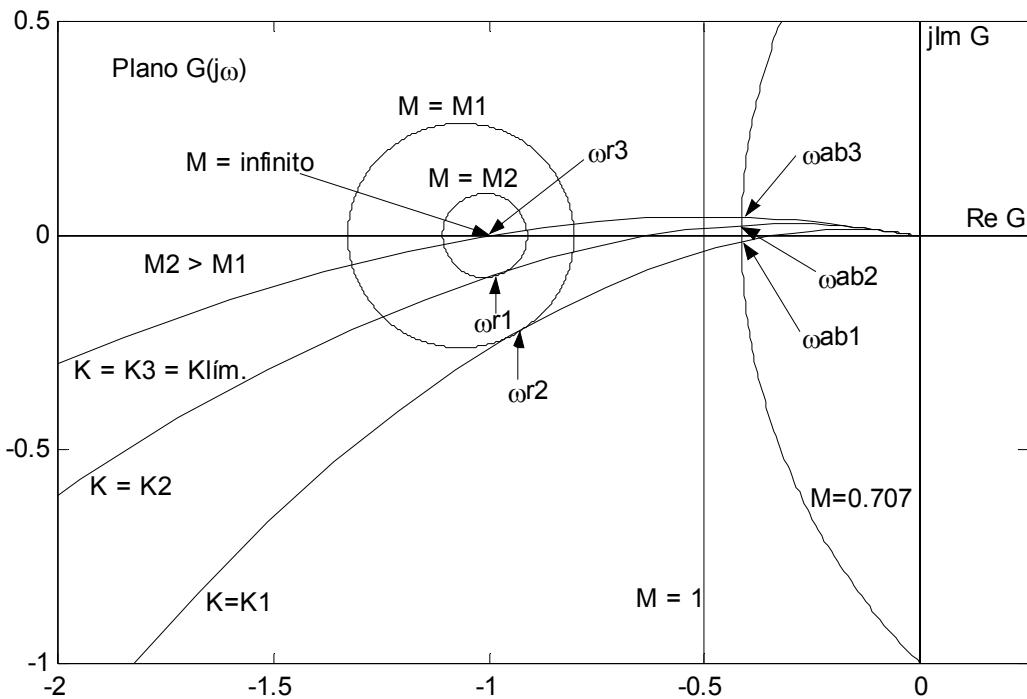


Figura 32

Diagrama de Bode de $M(j\omega)$

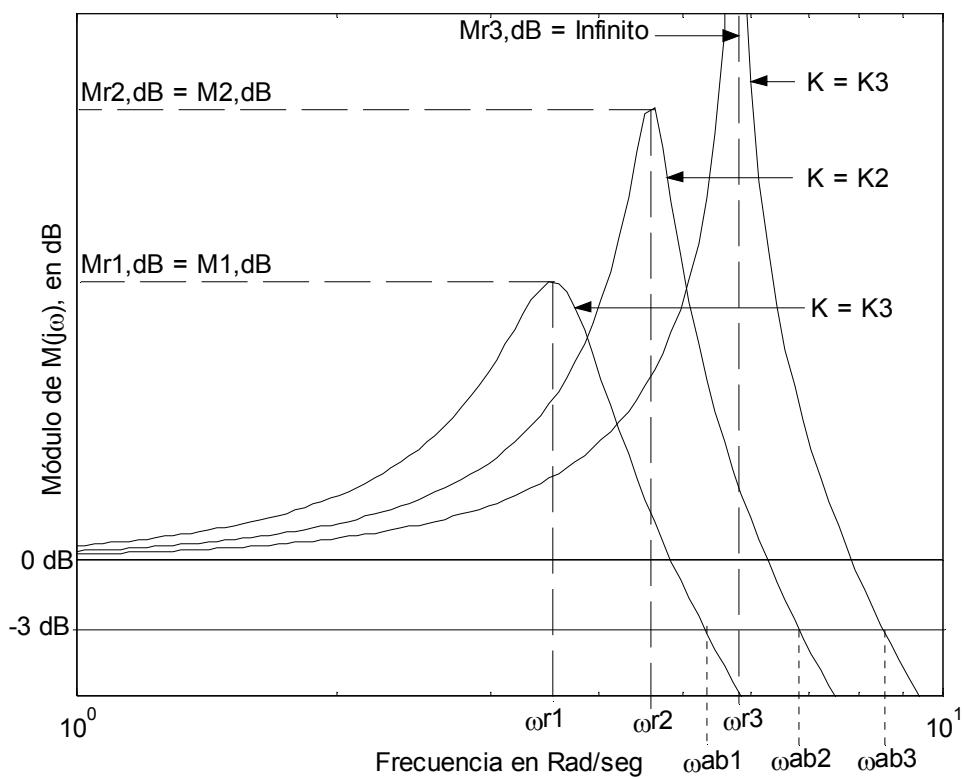


Figura 33

de control con realimentación unitaria, junto con cuatro lugares geométricos de $M = \text{Cte}$. Para una ganancia del lazo $K=K_1$, las intersecciones entre la curva $G(jw)$ y los lugares geométricos de $M=\text{Cte.}$, dan los puntos sobre la curva del módulo de $|M(jw)|=M$, en función de w .

El pico de resonancia M_R , se encuentra localizado en la circunferencia de radio más pequeño que es tangente a la curva $G(jw)$. La frecuencia de resonancia se encuentra en el punto de tangencia y se designa como w_{r1} . Si la ganancia del lazo se incrementa al valor K_2 y si el sistema es aún estable, una circunferencia de $M=\text{Cte}$ con el menor radio que corresponde a la mayor M se encuentra tangente a la curva $G(jw)$, y por lo tanto el pico de resonancia será mayor. La frecuencia de resonancia se muestra como w_{r2} , que está más cercana a la frecuencia de cruce de fase w_C que a w_{r1} . Cuando K se incrementa a K_3 , de tal forma que la curva $G(jw)$ ahora pasa a través del punto $(-1, j0)$ el sistema será marginalmente estable y M_R es infinita; w_C es ahora la misma que la frecuencia de resonancia w_{r3} .

Cuando se obtienen los puntos suficientes de intersección entre la curva $G(jw)$ y el lugar geométrico de $M=\text{Cte}$, las curvas del módulo $|M(jw)|$ en función de w se grafican como se muestra en la figura 33.

El ancho de banda del sistema se encuentra en la intersección de la curva $G(jw)$ y el lugar geométrico $M=0.707$, (-3dB). Para valores de K mayores que K_3 , el sistema es inestable, y el lugar geométrico de M constante y M_R ya no tienen sentido.

Lugar Geométrico de Fase Constante en el Plano G (jw)

El lugar geométrico de fase constante de un sistema se puede graficar en el plano $G(jw)$ a través de un método similar al usado para graficar el lugar geométrico de M constante. En general, la información de la fase del sistema rara vez se utiliza en el análisis y diseño, ya que la información sobre M_R , w_r y w_{a-b} se obtiene de la curva de magnitud. La figura 34 muestra un conjunto de lugares geométricos de fase constante que se llaman, *circunferencias de N constante*. En el plano $G(jw)$.

Si se define a N como: $N = \tan\angle M(jw)$.

Las circunferencias se describen por la ecuación siguiente:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \left(\frac{1+N^2}{4N^2}\right)$$

Donde N como se dijo es: $N = \tan\angle M(jw)$

Los centros de estas circunferencias están en:

$$\begin{cases} x_0 = -1/2 \\ y_0 = 1/2N \end{cases}$$

El radio está dado por;

$$r = \sqrt{\frac{N^2 + 1}{4N^2}}$$

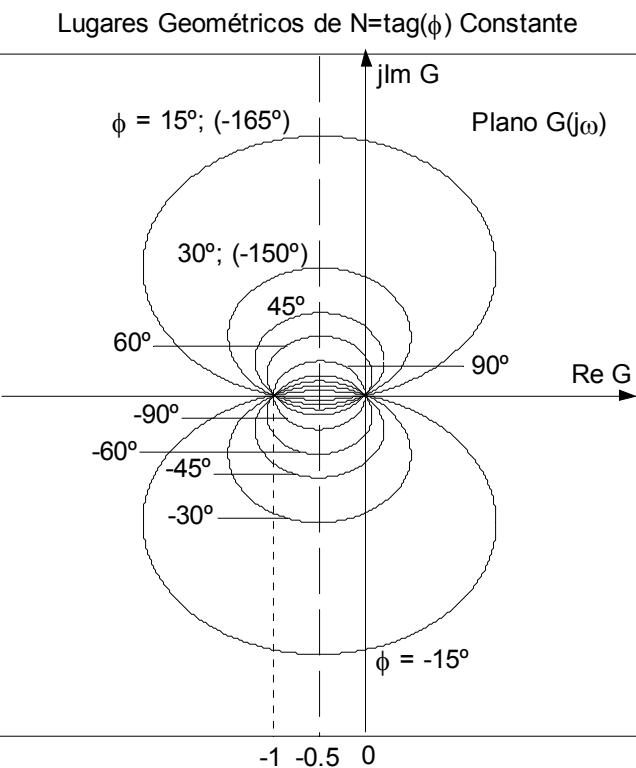


Figura 34

Si $N > 0$, tang. de ángulos del 1º y 3º cuadrante, yo también será positivo.-
Si $N < 0$, tang. de ángulos del 2º y 4º cuadrante, yo también será negativo.-

Lugar Geométrico de M Constante en el Plano Magnitud-Fase.
Carta de Nichols.

Una de las mayores desventajas al trabajar en coordenadas polares con la traza de Nyquist de $G(j\omega)$ es que la curva no retiene su forma original cuando se produce una simple modificación, por ejemplo, de la ganancia del lazo del sistema. Frecuentemente, en situaciones de diseño de los controladores del sistema, se requerirá una reconstrucción completa de la traza de Nyquist de la $G(j\omega)$ modificada. Para el trabajo de diseño que involucra a M_R y w_{a-b} como especificaciones de funcionamiento es más conveniente trabajar con la traza de magnitud-fase de $G(j\omega)$ ya que cuando la ganancia del lazo es alterada, la curva $G(j\omega)$ completa se corre hacia arriba o hacia abajo en forma vertical, sin ninguna distorsión.

También cuando las propiedades de la fase de $G(j\omega)$ se cambian en forma independiente, sin afectar la ganancia, la traza de magnitud-fase se afecta sólo en dirección horizontal.

Por la razón anterior, el lugar geométrico de M constante en las coordenadas polares se transfiere a las coordenadas magnitud-fase y el lugar geométrico resultante forma la llamada *Carta de Nichols*.

Una carta de Nichols típica y completa, lugares de M y N constante, se muestra en la figura 35.

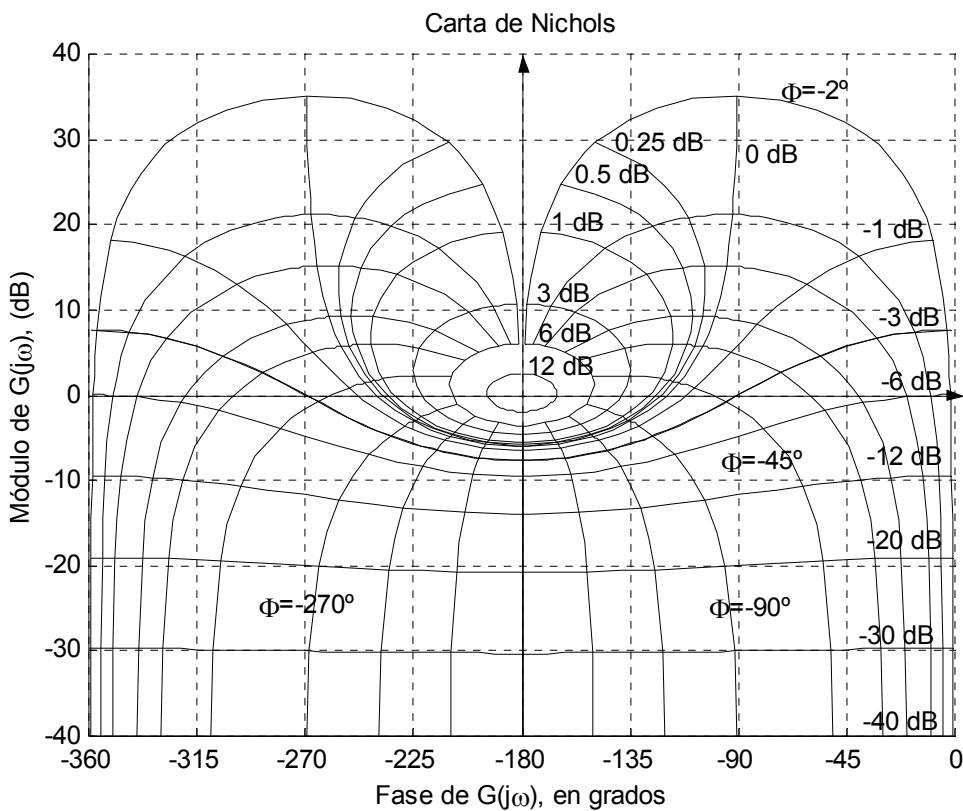


Figura 35

Una vez que la curva $G(j\omega)$ del sistema se construye en la carta de Nichols, las intersecciones entre el lugar geométrico de M constante y la traza $G(j\omega)$ dan el valor de M a las frecuencias correspondientes de $G(j\omega)$. El pico de resonancia M_R se encuentra al localizar el lugar geométrico mas pequeño de M constante ($M \geq 1$) que es tangente a la curva $G(j\omega)$. La frecuencia de resonancia es la frecuencia de $G(j\omega)$ en el punto de tangencia. *El ancho de banda del sistema w_{a-b} , es la frecuencia en la cual la traza de $G(j\omega)$ intercepta al lugar geométrico de $M=0.707$, (-3dB).*

Ejemplo 17:

La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control con realimentación unitaria es la siguiente:

$$G(s) = \frac{5K(s+1)}{s(1+0.1s)(1+0.2s)(1+0.5s)} = \frac{500K(s+1)}{s(s+2)(s+5)(s+10)} \quad \text{Donde: } K_1 = 500K$$

Grafique $G(j\omega)/K$, en coordenadas magnitud-fase de la carta de Nichols y determine lo siguiente:

1. El valor de K , y por ende el de la ganancia del lazo K_1 , de tal forma que el M.G. del sistema sea 10dB.-
2. El valor de K , y por ende el de la ganancia del lazo K_1 , de tal forma que el M.F. del sistema sea +45°.-
3. El valor de K , y por ende el de la ganancia del lazo K_1 , de tal forma que el $M_R=1.2$, (1.584dB).-

Si ahora la $G(s)$, tiene un retardo puro de 0.2 segundos determinar:

4. El valor de K , y por ende el de la ganancia del lazo K_1 , de tal forma que el M.G. del sistema sea 10dB.-
5. El valor de K , y por ende el de la ganancia del lazo K_1 , de tal forma que el M.F. del sistema sea $+45^\circ$.
6. El valor de K , y por ende el de la ganancia del lazo K_1 , de tal forma que el $M_R=1.2$, (1.584dB).

Se usará el comando Mvpplot, del Csd/Matlab para la solución.

Las trazas de $G(jw)$, y la carta de Nichols se muestran en la figura 36.

Ingresando $G(s)$ para $K=1$, (o $K_1=500$) en el programa, se determina los dB que hay que agregar para conseguir lo pedido, a saber:

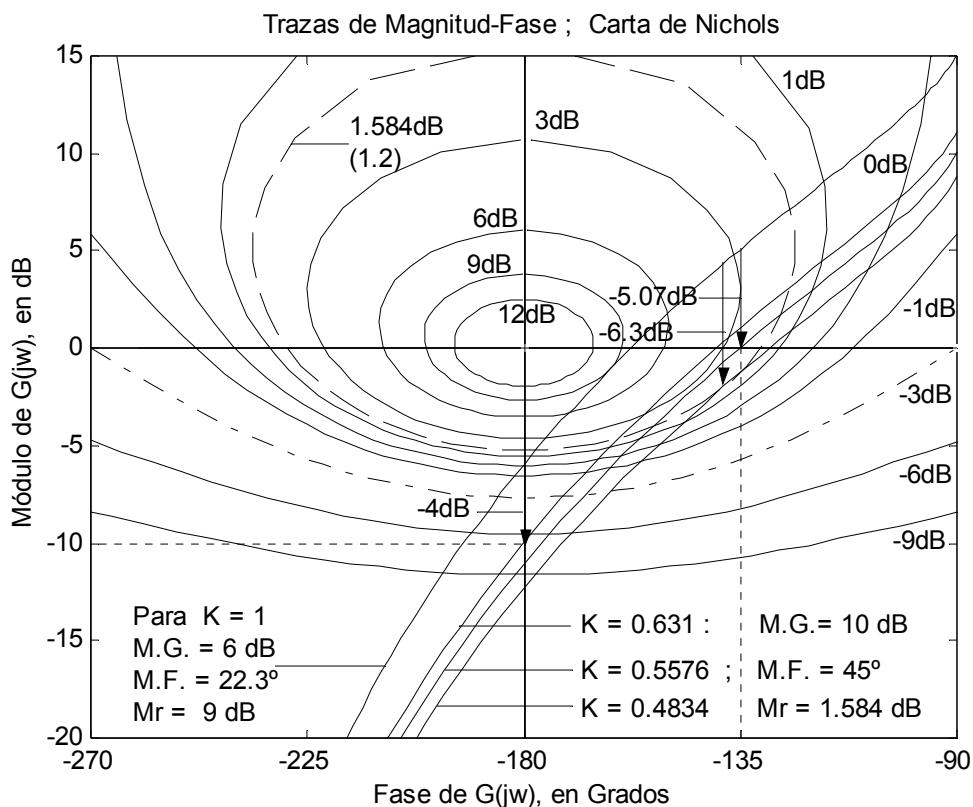


Figura 36

1. Hay que bajar 4dB, o sea -4dB por ende $K = 0.631 \Rightarrow K_1=315.5.-$
2. Hay que bajar 5.073 dB, o sea -5.073 dB por ende $K = 0.5576 \Rightarrow K_1= 278.8.-$
3. Hay que bajar 6.314 dB, o sea -6.314 dB por ende $K = 0.4834 \Rightarrow K_1= 241.7.-$

Con el retardo en $G(s)$, ingresando el mismo en el programa se observa:

Para $K = 1$, con $T = 0.2$ segundos, (el sistema es inestable):

$M.G.=-5db$; $M.F.= -41.59^\circ$, el M_R no tiene sentido físico.-

4. Hay que bajar 15 dB, o sea -15 dB por ende $K = 0.1778 \Rightarrow K_1= 88.9.-$
5. Hay que bajar 10.2 dB, o sea -10.2 dB por ende $K = 0.0309 \Rightarrow K_1= 154.5.-$

6. Hay que bajar 12.1 dB, o sea -12.10 dB por ende $K = 0.2483$

$$\Rightarrow K_1 = 124.15.$$

La figura 37 muestra las trazas en la carta de Nichols, para los tres casos.

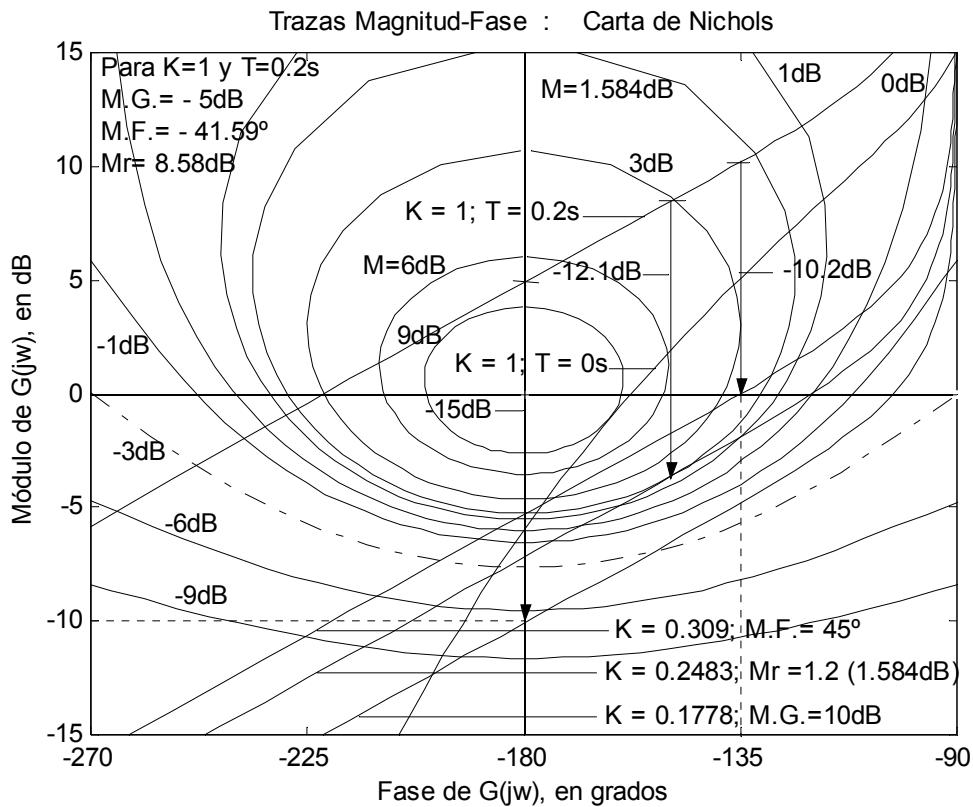


Figura 37

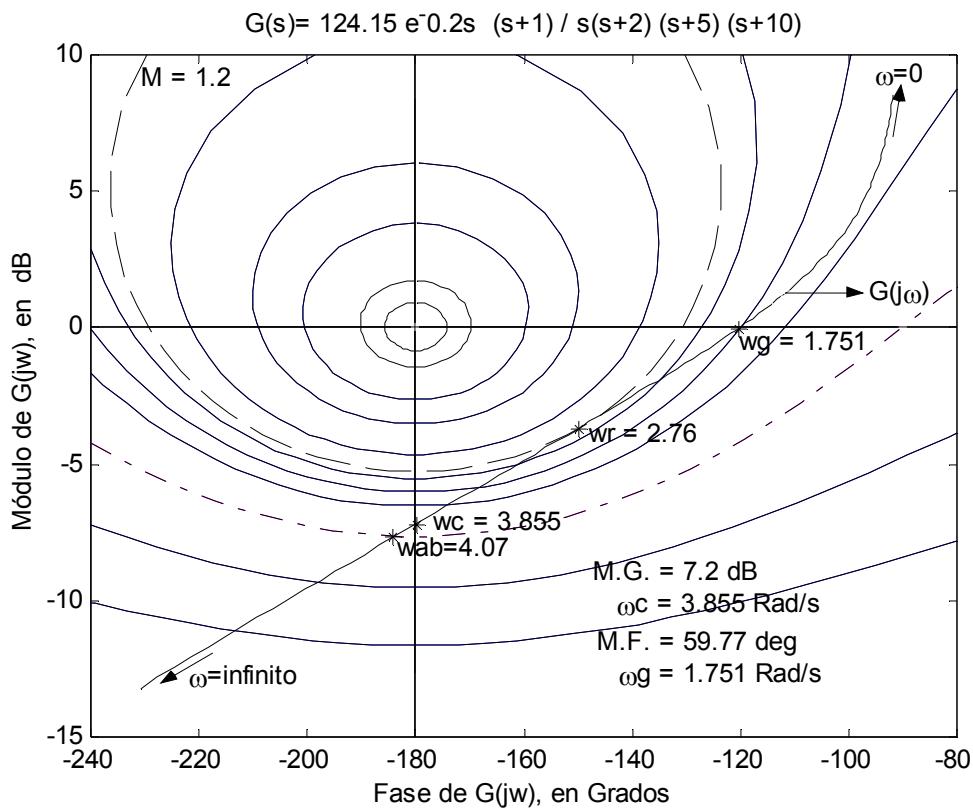


Figura 38

En la figura 38 se muestra la traza de $G(jw)$ solo para el último caso, (ajuste de la ganancia para conseguir el M_R pedido), junto con los atributos resultantes.

Tanto en las figuras 36 y 37 como en la figura 38, el lugar de $M=1.2$, se añadió con el comando de Matlab, *Nichmag*. Como estamos en la función mvpplot del Csad/Matlab, (para no salir de ella) se procedió en la forma siguiente:

```
Mvpplot>! hold on, [M,F]=nichmag(20*log10(1.2)); plot(F,M,'k-').
```

La Carta de Nichols Aplicada a Sistemas de Realimentación no Unitaria

El lugar geométrico de M constante y la carta de Nichols, que se han presentado están limitados a sistemas con realimentación unitaria. Cuya función de transferencia esta dada por:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Cuando el sistema tiene realimentación no unitaria, se tendrá que:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}; \text{ Donde } H(s) \neq 1$$

El lugar geométrico de M constante y la carta de Nichols *no pueden aplicarse directamente para obtener la respuesta en frecuencia del sistema al graficar $G(jw)H(jw)$, ya que el numerador de $M(s)$ no contiene $H(jw)$.* -

A través de una modificación adecuada, el lugar geométrico de M constante y la carta de Nichols aún se puede aplicar a sistemas con realimentación no unitaria. Al considerar la función:

$$P(s) = H(s)M(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}, \text{ y como } M(jw) \text{ se puede poner:}$$

$$M(jw) = \frac{C(jw)}{R(jw)} = \frac{1}{B(jw)/C(jw)} \times \frac{B(jw)}{R(jw)} = \frac{1}{H(jw)} \times \frac{G(jw)H(jw)}{1 + G(jw)H(jw)} = \frac{P(jw)}{H(jw)}$$

Como $G(s) H(s)$ es la función de transferencia del camino directo del sistema normalizado de realimentación unitaria, el mismo a su vez está en serie con la función $1/H(s)$. El procedimiento seria el siguiente:

La respuesta en frecuencia de $P(jw)$ se puede determinar al graficar la función $G(jw)H(jw)$ en coordenadas magnitud-fase superpuesta a la carta de Nichols. Una vez hecho esto, la información de la respuesta de frecuencia del sistema $M(jw)$ se puede obtener como sigue:

$$\text{El Módulo: } |M(jw)| = \left| \frac{P(jw)}{H(jw)} \right|$$

$$\text{Y la fase: } \Phi(jw) = \angle M(jw) = \angle P(jw) - \angle H(jw)$$

Estudio de la Sensibilidad, (Robustez), en el Dominio de la Frecuencia
 El estudio de la sensibilidad o su inversa, la robustez, en el dominio de la frecuencia de los sistemas de control lineales tiene la ventaja que los sistemas de orden superior se pueden manejar mas fácilmente que en el dominio del tiempo. *Aún más, la sensibilidad del sistema con respecto a las variaciones de sus parámetros, se pueden interpretar fácilmente empleando las trazas del dominio frecuencial.* Se demostrará como se pueden emplear las trazas de Bode, Nyquist y la carta de Nichols para el análisis y diseño de sistemas de control basados en consideraciones de sensibilidad, o Robustez.

Antes definiremos matemáticamente que es la sensibilidad.

Puesto que los componentes que integran un sistema tienen propiedades que pueden cambiar, debido a envejecimiento, deterioros, averías y otros factores, no se podrán considerar los parámetros de un sistema de control, como completamente constantes durante toda la vida útil del sistema.

Por ejemplo, la resistencia eléctrica del arrollamiento de un motor, cambia con la temperatura, (puede subir en demasiado durante su funcionamiento).

En general, un buen sistema de control debería ser diseñado para minimizar y si es posible anular los efectos de tales cambios, dicho de otra manera, ser insensible a estas variaciones.

Se considerará que "x" sea un parámetro que puede variar, la sensibilidad de otro parámetro, o de una variable del sistema, "y" a la variación de "x" se definirá como:

$$S_x^y = \frac{\frac{\Delta y}{yo}}{\frac{\Delta x}{xo}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{xo}{yo} \quad \Rightarrow \quad S_x^y = \frac{dy}{dx} \frac{xo}{yo}$$

Donde: Δy denota el cambio incremental, (absoluto), en "y", debido al cambio incremental, (absoluto), Δx en "x".

$\frac{\Delta y}{yo}$ y $\frac{\Delta x}{xo}$, son los porcentajes de cambio en "y" e "x" respectivamente.

"yo" y "xo", serían sus valores nominales.-

Se considerará un sistema de control lineal con realimentación unitaria $H(s) = 1$ y $G(s) = KG_1(s)$, descripto por la función de transferencia:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$\text{La } S_K^G = \frac{dG/G}{dK/K} = \frac{dG}{dK} \frac{K}{G} = G_1(s) \times \frac{1}{G_1(s)} \quad \Rightarrow \quad S_K^G = 1$$

La sensibilidad de $M(s)$ con respecto a la ganancia del lazo K , que es un factor multiplicativo en $G(s)$, se define como:

$$S_G^M(s) = \frac{dM(s)/M(s)}{dG(s)/G(s)} = \frac{dM(s)}{dG(s)} \frac{G(s)}{M(s)} \quad (*)$$

Como:

$$\frac{dM(s)}{dG(s)} = \frac{1 \times (1 + G(s)) - G(s) \times 1}{(1 + G(s))^2} = \frac{1}{(1 + G(s))^2} \quad y \quad \frac{G(s)}{M(s)} = (1 + G(s))$$

Remplazando en la ecuación (*), quedara:

$$S_G^M(s) = \frac{1}{1 + G(s)} \quad \Rightarrow \quad |S_G^M(jw)| = \frac{1}{|1 + G(jw)|}$$

Claramente, la función sensibilidad $S_G^M(s)$ es una función de la variable compleja s. La última expresión esta en la forma adecuada para trabajar en el plano de Nyquist. La sensibilidad $S_G^M(s)$ también se puede expresar:

$$S_G^M(s) = \frac{1/G(s)}{1 + 1/G(s)} \quad \Rightarrow \quad |S_G^M(jw)| = \frac{|1/G(jw)|}{|1 + 1/G(jw)|}$$

Expresión que está en la forma adecuada para utilizar la carta de Nichols y el plano $[G(jw)]^{-1}$. También se puede definir la función *robustez* como:

$$R_G^M(s) = Ro = \frac{1}{S_G^M(s)} = 1 + G(s)$$

En la figura 39, se muestran como varían los módulos de la sensibilidad y de la robustez con la frecuencia de un sistema con $H(s) = 1$ y:

$$G(s) = \frac{5(s+1)}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

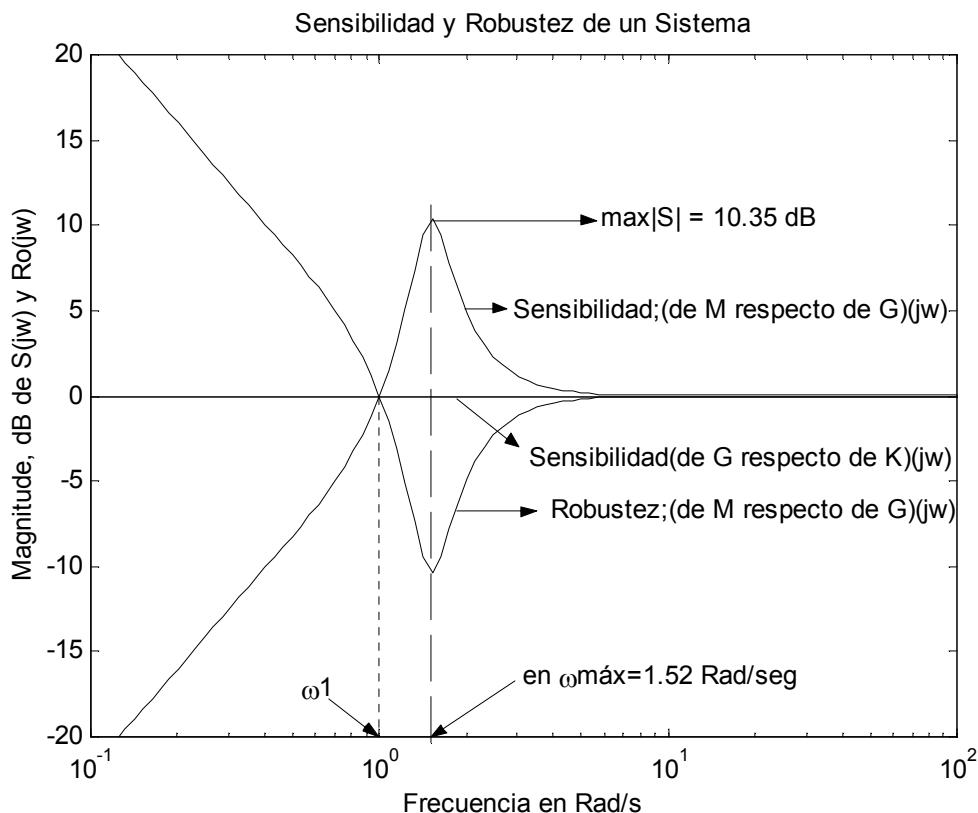


Figura 39

Es interesante observar que la $S_G^M(s)$, para $\omega < \omega_1$, es inferior a la $S_K^G(s)$ que es siempre la unidad cualquiera sea la frecuencia.-

El grafico de la figura 39 se puede obtener con cualquier comando del Csad/Matlab, ejemplo: Plrplot, Bplot, Mvpplot etc. En estos programas se emplea la letra T en lugar de la M y la S para $S_G^M(s)$.

Si se ingresa G, se puede graficar $T=f(w)$, o $S=f(w)$, por ende es:
 $T=G/1+G$ y $S=1/1+G$, o tambien se puede emplear: $S=(1-T)$, pues como:
 $G/T = (1+G)$ y por lo tanto: $S=1/(1+G)=1/G=T/G$
Como: $T+TG=G$, $T=(1-T)G$, en consecuencia: $T/G=1-T$, con lo cual que demostrado que $S=(1-T)$.

Una vez ingresada G, con la opcion *Chosse Data* se puede cambiar a T o S.
La Figura 40 muestra las curvas para un sistema donde:

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+50)} \quad y \quad H(s) = 1$$

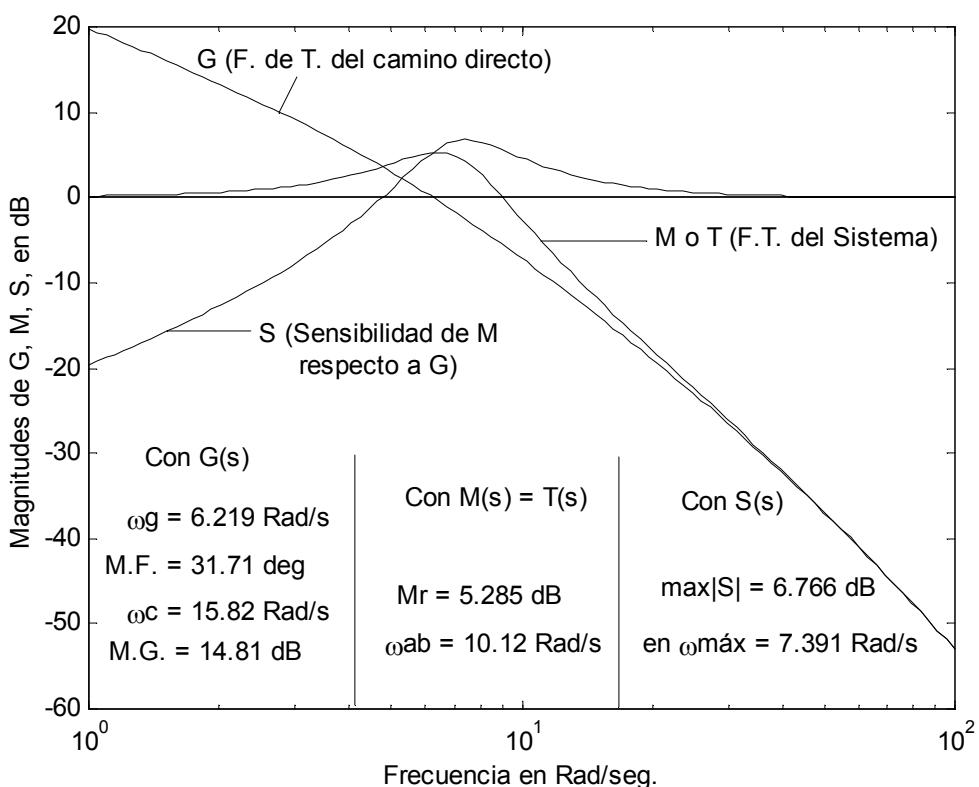


Figura 40

En general, es deseable formular un *criterio de diseño sobre la sensibilidad*. Puede hacerse de dos maneras, a saber:

1. El criterio es fijar que el módulo $|S_G^M(jw)|_{\text{máxima}} \leq k$
 Donde $|S_G^M(jw)|_{\text{máx.}}$ es un valor prefijado, (siempre mayor que la unidad).
2. El criterio es fijar una frecuencia mínima w_1 para que el Módulo $|S_G^M(jw)|$ sea menor o igual a uno, o sea $|S_G^M(jw)|_{\text{Hasta } \omega_1} \leq 1$, donde w_1 es la frecuencia mínima prefijada.

Se comentará el Criterio 1:

$$\text{El criterio establece que: } |S_G^M(j\omega_{\max})| = \frac{1}{|1+G(j\omega_{\max})|} = \frac{|1/G(j\omega_{\max})|}{|1+1/G(j\omega_{\max})|} \leq k$$

En ocasiones se puede usar, como se ya se comentó, la llamada Robustez, que es la inversa de la sensibilidad, o sea:

$$Ro = |1+G(jw)| \geq \frac{1}{k}; \text{ Donde } k \text{ es un número real de manera que: } 0 < Ro < 1$$

Por lo tanto se puede ver que la traza de Nyquist de $G(jw)$ no debe ser secante a la circunferencia de radio ($1/k$), o (Ro) con centro en el punto crítico (-1, j0). Como se indica en la figura 41.

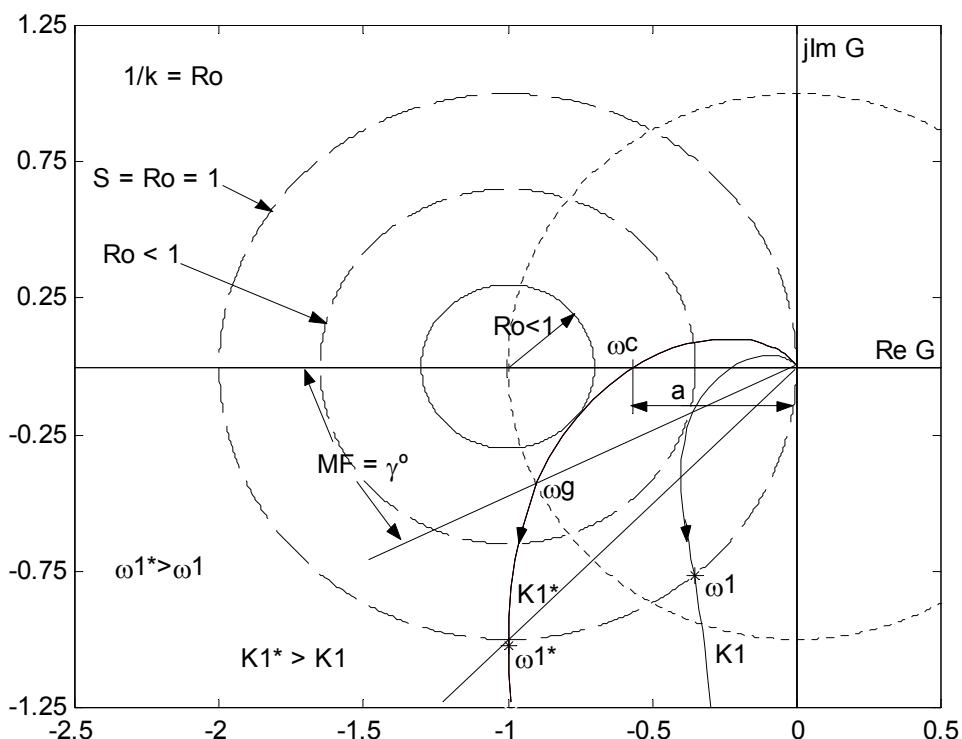


Figura 41

Este criterio como se aprecia es similar a las especificaciones de la estabilidad relativa Margen de Ganancia y Margen de Fase.

Por ejemplo si: $S_{\max} < 2.2$, o lo que es lo mismo: $R_o > 0.4545$, la ganancia de $G(s)$ debe ser tal que la traza Nyquist de la misma sea como máximo tangente a la circunferencia de radio 0.4545.

Esto sería equivalente a decir que:

$$M.G. \geq 1/a \quad y \quad M.F. \geq \gamma^{\circ}$$

Ahora se comentará el Criterio 2:

Como se puede ver en la figura 41, al aumentar la ganancia de $G(s)$ K_1 , aumenta también la frecuencia ω_1 , que es hasta la frecuencia hasta donde la sensibilidad es menor que la unidad, $|S_G^M(jw)| < 1$.

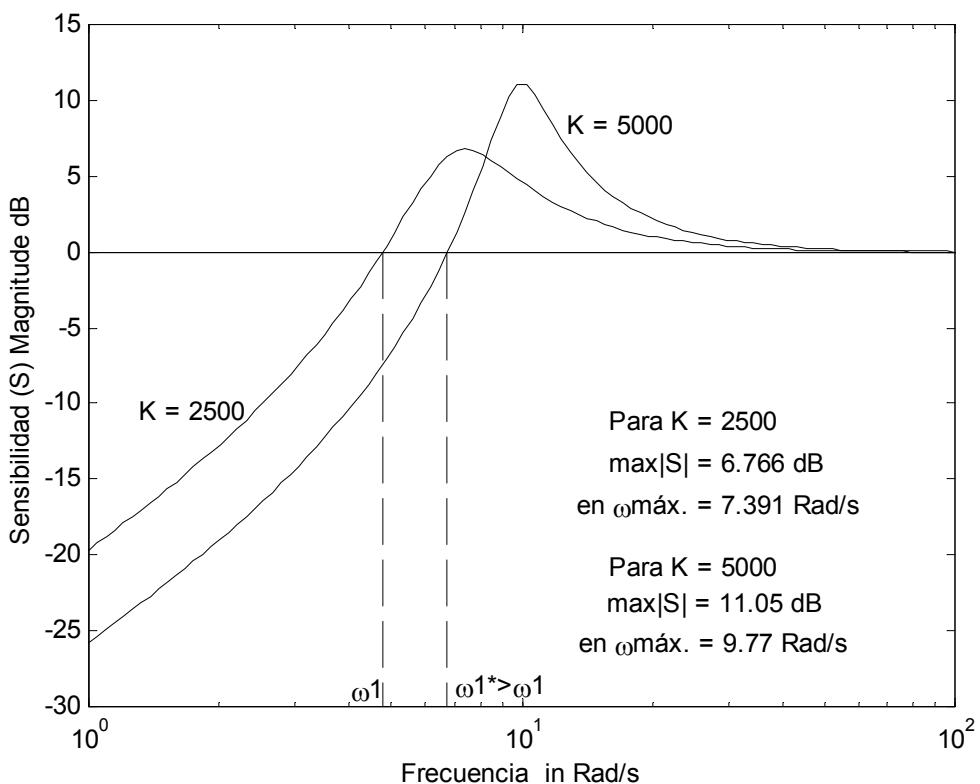
Como se puede ver lo malo es que también aumenta el valor de la sensibilidad máxima o disminuye la Robustez máxima.

En consecuencia para tener la ω_1 más grande deberá aumentar también K, pero se sabe que en general, una K alta podría causar inestabilidad.

Por tanto, el diseñador nuevamente tiene un reto al diseñar un sistema, tanto con un alto grado de estabilidad, como una baja sensibilidad o alta robustez. Por lo general no es solo el ajuste de la ganancia, (controlador proporcional), el que se debe usar para conseguir un sistema muy estable con una sensibilidad baja, (o una robustez alta).

También al aumentar K, (dentro de la zona de estabilidad), el ancho de banda aumenta y el sistema es más rápido. La figura 42 muestra la variación de la sensibilidad al variar la ganancia de $G(s)$ para un sistema

$$\text{que tiene: } G(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+50)}$$



Aunque hasta aquí el diagrama de Nyquist nos da una clara interpretación de las funciones sensibilidad o Robustez en el dominio de la frecuencia. La sensibilidad se puede analizar también usando:

$$|S_G^M(jw)| = \frac{|1/G(jw)|}{|1+1/G(jw)|}$$

La cual es análoga a la $|M(jw)|$, cambiando $G(jw)$ por $1/G(jw)$. Por tanto la función sensibilidad se puede determinar al graficar $(1/G(jw))$ en coordenadas polares, junto con el ábaco de Hall o graficar $(1/G(jw))$ en coordenadas magnitud-fase con la carta de Nichols.

La figura 43 muestra las dos trazas de $G(jw)$ y $1/G(jw)$, en el planos G y $1/G$, superpuestos para $K= 2500$ en el último sistema ya mencionado.

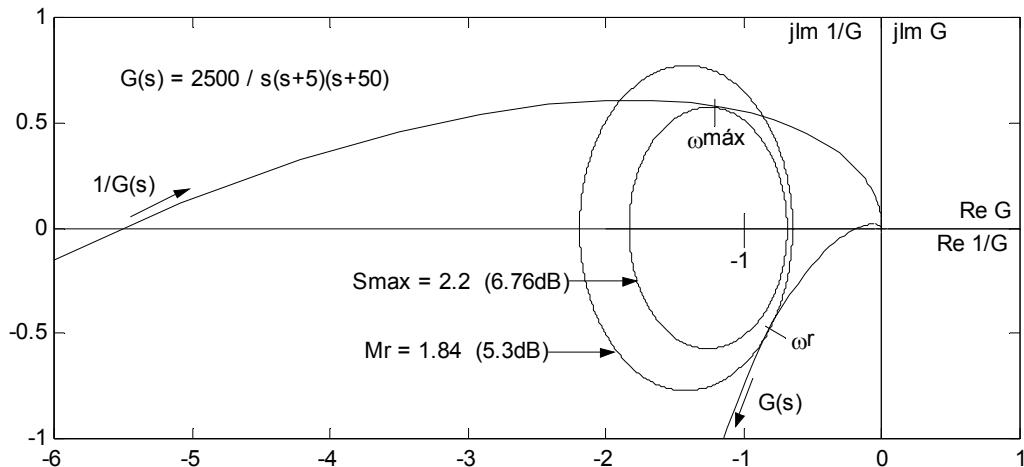


Figura 43

Aunque los gráficos polares como se ve dan una interpretación clara de la función sensibilidad en el dominio de la frecuencia, pero en general las trazas de Nyquist de $G(jw)$ o $1/G(jw)$ son muy tediosas de usar en el diseño de los sistemas de control. En estos casos las cartas de Nichols junto con las trazas de magnitud-fase de $G(jw)$ o $1/G(jw)$ son otra vez más convenientes para el propósito de análisis o diseño de un sistema de control, con una sensibilidad o robustez prefijada.

La figura 44 muestra las trazas de magnitud-fase de $G(jw)$ y $1/G(jw)$ con la carta de Nichols. Como las ordenadas del plano magnitud-fase, están en dB, la traza de $1/G(jw)$ en dicho plano se puede obtener fácilmente si ya se tiene la traza de $G(jw)$, puesto que:

$$\angle 1/G(jw) = -\angle G(jw) \equiv [-\angle G(jw)] - 360^\circ; \text{ para que } \angle 1/G(jw) < 0; \text{ pues } [-\angle G(jw)] > 0$$

Y también:

$$|1/G(jw)|, \text{dB} = -\{|G(jw)|, \text{dB}\}$$

Como ejemplo ilustrativo se tomara el mismo que estamos viendo:

$$G(jw) = \frac{2500}{jw(jw+5)(jw+50)}$$

Los resultados sustentan aquellos determinados en las trazas polares. El diseño de sistemas de control con consideraciones de sensibilidad o robustez, con métodos en el dominio de la frecuencia se discutirán en la unidad dedicada al diseño de controladores en el dominio frecuencial.

La figura 44 se obtuvo con funciones del Matlab de la manera siguiente:

```
>> ngrid
>> hold on
```

Ahora se ingresa $G(s)$

```
>> n=2500;
>> d=[1 55 250 0];
```

Ahora se grafica la traza de $1/G(s)$ de la forma siguiente:

```
» [M,F,W]=nichols(d,n);  
» M1=20*log10(M);  
» F1=F-360;  
» plot(F1,M1);
```

Ahora se grafica la traza de $G(s)$

```
» Nichols(n, d)
```

Se arregla el grafico con el zoom, por ejemplo (-40dB, 40dB) en ordenadas y (-270,-90°) en abscisas.

Se pueden agregar los lugares geométricos de $M=Cte.$, $M=5.1054$ dB y $M=6.8484$ dB para Mr y S_{\max} respectivamente.

```
» [M,F]=nichmag(5.10545);plot(F,M,'k-')  
» [M,F]=nichmag(6.84845);plot(F,M,'k-')
```

El grafico final es el de la figura 44.

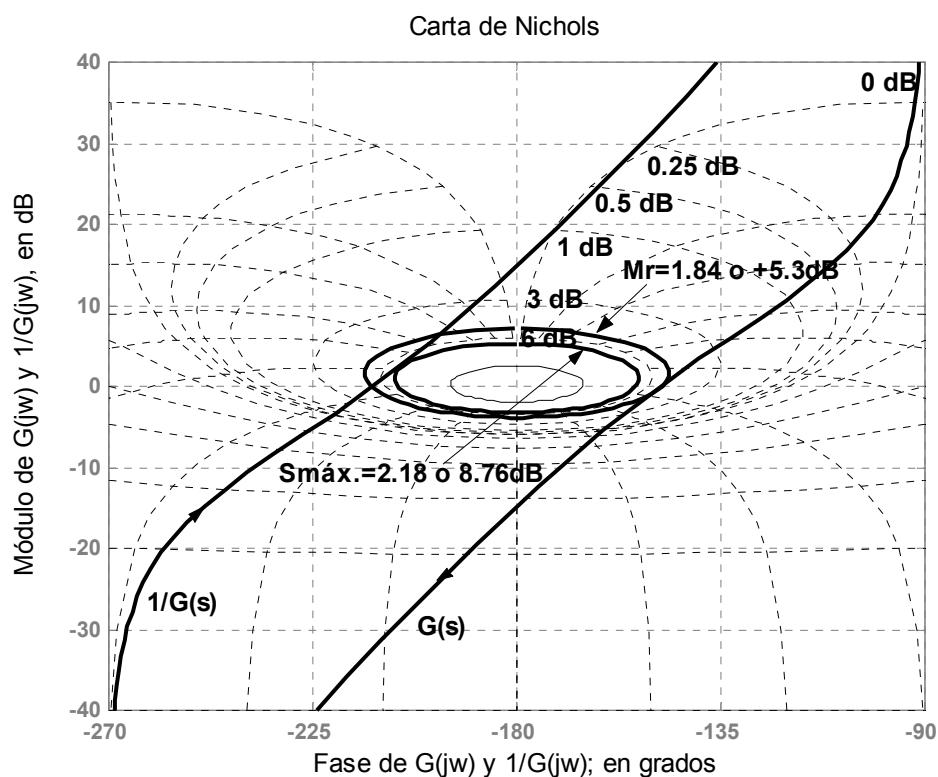


Figura 44

CONTROL II

Tema:

Diseño de Controladores
Analógicos con Técnicas del
Control Clásico.
(en el Dominio Frecuencial).

Prof. Ing. Carlos F. Martín

Año: 2008

Diseño de Sistemas de Control en el Dominio Frecuencial.

Introducción: En éste capítulo el diseño de los sistemas de control será llevado a cabo en el dominio de la frecuencia. Se emplearán técnicas que usen el diagrama de Bode, Black y polares (Nyquist) para realizarlo. Se han desarrollado métodos para mejorar la respuesta espectral de los sistemas realimentados de control empleando dichos trazados. En la unidad anterior se han presentado los factores determinantes para la selección de una red compensadora de retraso, adelanto o una combinación de ambas, así como los efectos que producen en la respuesta temporal. Se podían situar los polos y ceros del compensador propuesto, en el plano s, y determinar los polos y ceros del sistema, lo que, a su vez, permitía la evaluación de la respuesta temporal. Otro tanto puede conseguirse hallando los valores de M_R , ω_R y Kv (o Kp) por el método de la respuesta frecuencial empleando tanto trazados polares como logarítmicos. No obstante, los polos del sistema no quedan determinados explícitamente, es más, la correlación entre los parámetros de la respuesta frecuencial M_R y ω_R ; la respuesta temporal es solo cualitativa.

La presencia de raíces reales próximas a las raíces complejas dominantes altera más la correlación entre los parámetros mencionados y la respuesta temporal. Esto supone cierta desventaja del empleo de éste método basado en la respuesta frecuencial.

Trata éste capítulo de los cambios que pueden hacerse en las características de la respuesta de frecuencia empleando diferentes tipos de compensadores en cascada (en especial de atraso, adelanto y atraso – adelanto combinados). Se hará también un estudio del efecto que ejercen estos compensadores en la totalidad del sistema, describiéndose procedimientos del diseño para lograr mejorar el comportamiento del sistema.

Un ingeniero con cierta experiencia práctica puede extender y modificar estos procedimientos que están basados en la presencia de un par de raíces complejas dominantes a aquellos sistemas que tienen, además, otras raíces dominantes distintas del par complejo principal.

Se emplearan tanto los trazados logarítmicos como polares para aplicar los criterios de compensar una respuesta frecuencial dada, la elección del trazado es cuestión de preferencia personal.

Reforma del Trazado Frecuencial.

El comportamiento de un sistema puede ser descrito en función de M_R , ω_R y el coeficiente estático de error.

El valor de M_R describe indirectamente a δ y por lo tanto al valor de la sobre elongación de la respuesta transitoria.

Si se fija M_R , entonces ω_R determina ω_n , que a su vez, es un índice del tiempo de respuesta del sistema. El coeficiente de error es importante porque determina el e_{EE} a una entrada normalizada apropiada. El procedimiento de diseño se basa, generalmente, en la selección de un valor de M_R y el empleo de métodos para el ajuste de K y encontrar ω_R y Kn que se requieren. Una vez logrando esto, y sin llegar a cumplir las especificaciones deseadas del comportamiento del sistema, deben emplearse dispositivos compensadores. Estos dispositivos alteran la forma del trazado de la respuesta frecuencial tratando de cumplir las mencionadas especificaciones. En aquellos sistemas que son inestables para todo valor de la ganancia, es imperativa la inserción de una red compensadora al sistema.

Las razones para reformar el trazado de la respuesta frecuencial suelen ser debidas a uno de los cuatro casos siguientes:

- 1º) El sistema dado es estable con sus valores de M_R y C satisfactorios (y por lo tanto la respuesta transitoria), pero su e_{EE} es demasiado grande. Debe, por lo tanto, aumentarse su ganancia para reducir dicho error sin alterar apreciablemente los valores de M_R y ω_R . Se mostrará más adelante que en éste caso la porción del trazado en altas frecuencias es satisfactorio, pero no así en su extremo de bajas frecuencias (Atraso de Fase).
- 2º) Un sistema dado es estable, pero su respuesta transitoria no satisface; es decir, el valor de M_R tiene un valor satisfactorio, pero ω_R es demasiado baja. La ganancia puede ser satisfactoria o exigir un pequeño aumento. La porción del trazado en altas frecuencias debe ser alterado para aumentar ω_R (Adelanto de Fase).
- 3º) El sistema dado es estable y tiene el valor M_R deseado; pero tanto su respuesta transitoria como su régimen permanente no lo son. Por tanto deben aumentarse los valores de Kn y ω_R . La porción del trazado en las proximidades del punto $(-1+j0)$ ó $(-180^\circ, 0\text{dB})$ debe alterarse para lograr el valor deseado de ω_R y el extremo en bajas frecuencias alterado para lograr el aumento de ganancia que se desea (Adelanto-Atraso de Fase).
- 4º) El sistema dado es inestable para todo valor de la ganancia. El trazado frecuencial debe alterarse en la vecindad del punto $(-1+j0)$ ó $(-180^\circ, 0\text{dB})$ para producir un sistema estable con los valores deseados de M_R y ω_R . Por lo tanto, el objetivo de la compensación es el de reformar, por medio de un compensador, el trazado de la respuesta frecuencial del sistema

básico tratando de obtener las especificaciones el comportamiento fijadas. En las secciones que siguen se dan ejemplos adecuados.

Selección de Compensador

Consideremos.

$G_p(j\omega)$ = Función de transferencia de avance del sistema básico de control.

$G(j\omega)$ = Función de transferencia de avance que se desea para obtener la estabilidad y precisión en régimen permanente que se fijen.

El cociente entre $G(j\omega)$ y $G_p(j\omega)$ da los requerimientos necesarios del compensador:

$$G_c(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{G_p(j\omega)} \quad (1)$$

Estos simples compensadores pronto dan la mejora deseada en el comportamiento del sistema, caso contrario, es necesario sintetizar controladores más complicados. Los circuitos realizables actúan en todo el margen de frecuencias, lo que hace difícil la obtención de la función de transferencia característica dada en (1).

Esto no es realmente una limitación seria, ya que el comportamiento deseado se interpreta en función de una anchura de banda de frecuencias relativamente estrecha, pudiéndose construir un compensador que tenga las características de magnitud y fase que se precisen en dicha banda de frecuencias.

La elección de un depende de las características del sistema realimentado de control, al que debe aplicarse (sistemas básicos) y de las especificaciones dadas. Como estos compensadores deben insertarse en cascada pueden ser: 1º) del tipo PI, 2º) del tipo PD y 3º) PID.

Insistiendo para ilustrar la filosofía básica de diseño en el dominio frecuencial, consideremos el siguiente ejemplo:

Supongamos que la F. deT. Del sistema básico es:

$$G_p(s) = \frac{K_o}{s(1+s)(1+0.0125s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+80)}$$

Se considera que el sistema tiene $H(s) = 1$. Se desea que cuando una entrada rampa es aplicada al sistema, el error de estado estacionario del sistema, numéricamente no exceda el 1% de la pendiente de la entrada rampa (la cual es unitaria).

Por ende, podemos encontrar el valor mínimo de K necesario para que se cumpla el requerimiento del error:

$$e_{EE} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G_p(s)} = \frac{1}{K_o} \leq 0,01 \quad \therefore \quad \underline{\underline{K_o \geq 100}}$$

Por lo tanto K_o debe ser mayor o igual que cien.

Sin embargo, aplicando el criterio de Routh-Hurwitz a la ecuación característica del sistema de lazo cerrado, es fácil mostrar que el sistema es inestable para valores de K_o mayores que 81. Esto indica que alguna mejora en el esquema de diseño o en el controlador deberá realizarse para que el e_{EE} y el requerimiento de estabilidad relativa puedan ser alcanzados simultáneamente. Dicho de otro modo, el controlador debe ser capaz de mantener la ganancia a frecuencia cero de la función de transferencia de lazo abierto del sistema compensado efectivamente en 100, mientras mantenga un grado prescripto de estabilidad relativa. El principio del diseño en el dominio frecuencial es ilustrado mucho mejor con el gráfico de Nyquist de $G_p(s)$ mostrado en la figura 1. En la práctica, se prefiere usar el diagrama de Bode para el propósito de diseño porque es más fácil de construir, y el gráfico de Nyquist es usado generalmente en el análisis.

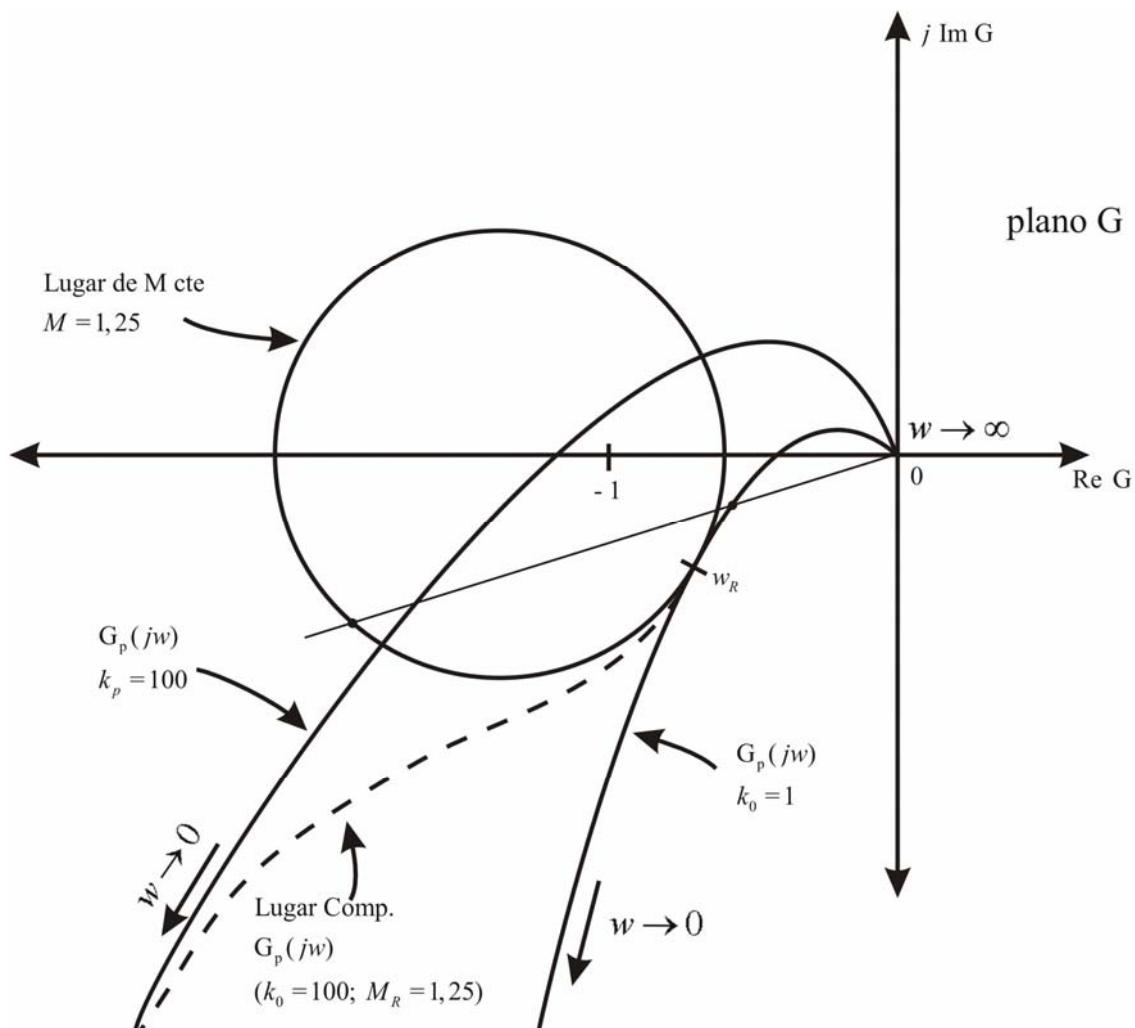


Figura 1: Lugar de Nyquist de $G_p(s) = \frac{K_o}{s(1+s)(1+0,125s)}$

Como se ve en la figura, si K_o es el único parámetro que podemos variar, cuando $K_o = 100$ el gráfico de Nyquist de $Gp(s)$ comprende el punto $(-1, j0)$, y el sistema e lazo cerrado es inestable. Supongamos que deseamos tener $M_R = 1,25$. Esto indica que el gráfico de Nyquist de $Gp(s)$ debe ser tangente al círculo de M constante para $M = 1,25$; para lo cual $K_o = 1$ pues $K_v = 1 \text{ seg}^{-1}$ y el e_{EE} no sería el requerido.

Puesto que el funcionamiento del sistema en estado estacionario esta gobernado por la característica de la función de transferencia a bajas frecuencias, y el amortiguamiento o el comportamiento transitorio del sistema esta gobernado por la característica a relativamente altas frecuencias, la figura 1 muestra que para satisfacer simultáneamente los requerimientos del transitorio y de estado permanente, el lugar de $Gp(s)$ tiene que ser modificado para que la parte de altas frecuencias del lugar este sobre la curva para $K_o = 1$ (con $K_o = 100$) y la parte de estas frecuencias este sobre la trayectoria de $K_o = 100$. El lugar del sistema compensado sería el indicado en la figura 1, el cual es tangente al círculo $M_R = 1,25$ a frecuencias relativamente altas, mientras $K_v = 100$ para satisfacer el requerimiento de e_{EE} .

Partiendo del lugar para $K_o = 100$ vemos que hay dos alternativas para lograr el lugar compensado, las cuales serían:

- 1) Modificar el lugar en la región cercana a la frecuencia de resonancia ω_R , agregando al sistema una fase positiva. Este esquema se denomina compensación por avance de fase.
- 2) Producir el mismo efecto, pero con una atenuación en esa zona. Este tipo de compensación es por atraso de fase.

En el primer método, la porción de alta frecuencia de $Gp(s)$ es desplazada en la dirección contraria a las agujas del reloj, lo cual indica que mas fase es agregada al sistema en la dirección positiva en un apropiado rango de frecuencias. Este esquema es llamado "Compensación por Adelanto de Fase" y los controladores usados para este propósito son a menudo del tipo de filtros pasa altos.

La segunda técnica produce una atenuación de la magnitud de $Gp(j\omega)$ con $K_o = 100$ en el rango de altas frecuencias. Este esquema e a menudo llamado "Compensación por Atraso de Fase", pues lo que también se hace es introducir mas atraso de fase para las bajas frecuencias. El tipo de red que se usa para este tipo de compensación son del tipo de filtros pasa bajo. Las figuras 2 y 3 ilustran la filosofía de diseño en el dominio frecuencial usando el diagrama de Bode. En este caso, la estabilidad relativa del sistema esta mejor representada por los márgenes de ganancia y de fase. En la figura 2, el gráfico de Bode de $Gp(j\omega)$ muestra

que cuando $K_o = 100$, los márgenes de ganancia y de fase son ambos negativos, y el sistema es inestable. Cuando $K_o = 1$, los márgenes de ganancia y de fase son ambos positivos y el sistema tiene un margen de seguridad muy satisfactorio. Usando la primera técnica, la compensación por adelanto de fase, como ya se dijo agregamos mas adelante de fase a $G_p(j\omega)$ para mejorar el margen de fase. Sin embargo, un inevitable corrimiento de la curva de magnitud se produce, como se puede ver en la figura 2. Si el diseño es llevado a cabo correctamente, es posible obtener una nueva mejora en la estabilidad del sistema usando esta técnica.

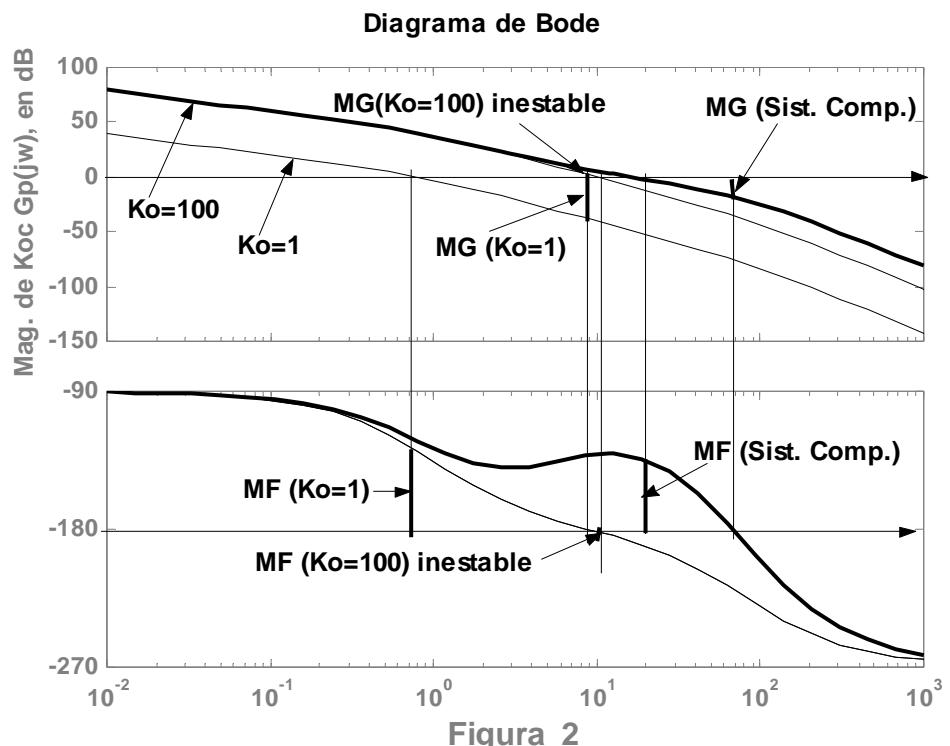


Figura 2: Diagrama de Bode de $G_p(s) = \frac{K}{s(1+s)(1+0,125s)}$ con compensación por adelante de fase.

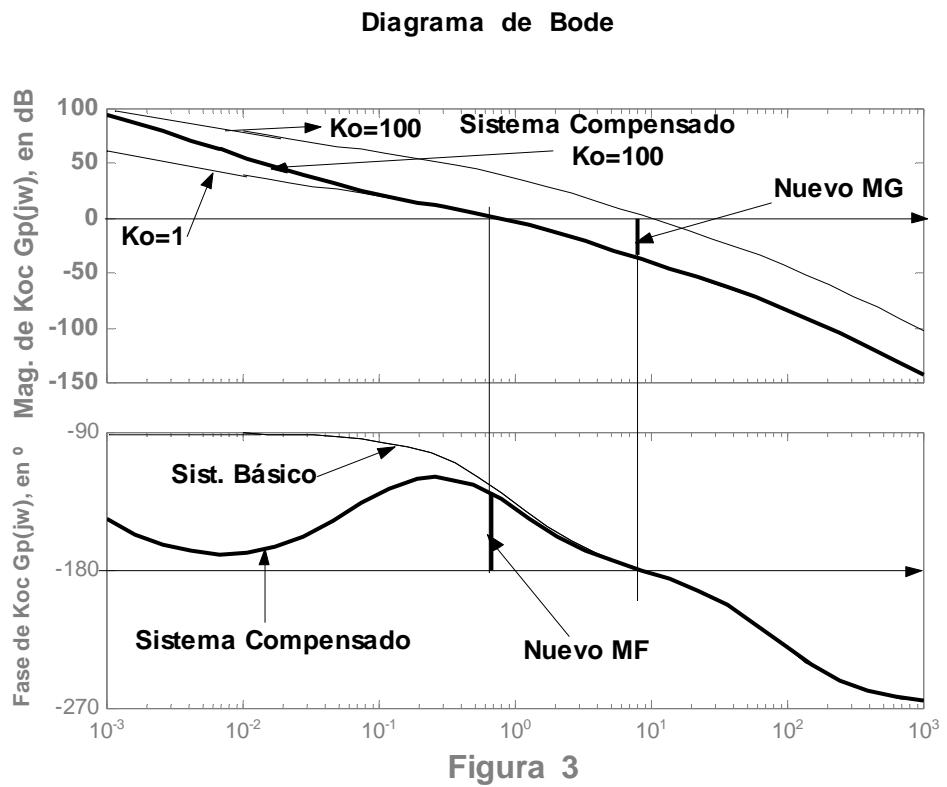


Figura 3: Diagrama de Bode de $G_p(s) = \frac{K}{s(1+s)(1+0,125s)}$ con compensación por atraso de fase.

El diagrama de bode de la figura 3 sirve para ilustrar el principio de la compensación por atraso de fase. Si en lugar de agregar mas fase positiva a $G_p(j\omega)$ en el rango de altas frecuencias como en la figura 2, atenuamos la amplitud de $G_p(j\omega)$ en el rango de altas frecuencias por medio de un filtro pasa bajo, un efecto similar de estabilización se puede alcanzar. El diagrama de Bode de la figura 3 muestra que si, la atenuación se efectúa en un rango adecuado, el corrimiento de fase debido al atraso de fase es despreciable en la frecuencia de cruce de fase, por lo tanto se mejora la estabilidad relativa del sistema.

El ejemplo dado aquí es simplemente con el propósito de ilustrar el principio de diseño de sistemas de control en el dominio de la frecuencia. No se debe sacar la conclusión de que dado un sistema siempre puede ser compensado satisfactoriamente por uno u otro de los esquemas que acabamos de citar.

Veremos que para algunos sistemas, no puede conseguirse una compensación satisfactoria mediante redes de avance de fase. Ello sin embargo, no significa que la compensación puede alcanzarse entonces utilizando redes de atraso de fase, por lo que resulta bastante común que

ningún esquema sea realizable y se precise alguna combinación de las características de adelanto y retardo (redes o controladores de adelanto-atraso o atraso-adelanto).

Desafortunadamente el método del diseño en el dominio frecuencial no da de antemano la respuesta a la pregunta siguiente: ¿Cuál es la mejor compensación para el sistema?

El diseñador debe depender considerablemente de su experiencia para decidir que tipo de compensación debe utilizar y entonces comprobarlo. Si el esquema no funciona simplemente debe probar algo distinto.

Controlador de Adelanto de Fase.

Ya se implemento el controlador con amplificadores operacionales, y se obtuvo la función de transferencia del mismo, que era:

$$G_c(s) = K_{oc} \frac{(1+aTs)}{(1+Ts)}, \text{ con } K_{oc} = \frac{A}{a}; \quad a > 1 \quad y \quad A = \frac{R_4}{R_3}$$

Diagrama Polar:

Como la ganancia $K_{oc} = \frac{A}{a}$ se ajusta primero para conseguir el régimen permanente especificando, luego se estudiara la función:

$$\frac{G_c(s)}{K_{oc}} = \frac{(1+aTs)}{(1+Ts)} \Rightarrow \frac{G_c(s)}{K_{oc}} = \frac{1+j\omega aT}{1+j\omega T}$$

el módulo y la fase serán:

$$\left| \frac{G_c(j\omega)}{K_{oc}} \right| = \frac{|1+j\omega aT|}{|1+j\omega T|} \quad y \quad \left| \frac{G_c(j\omega)}{K_{oc}} \right| = |1+j\omega aT| - |1+j\omega T|$$

los diagramas polares para diferentes valores de a serian los indicados en la figura 4.

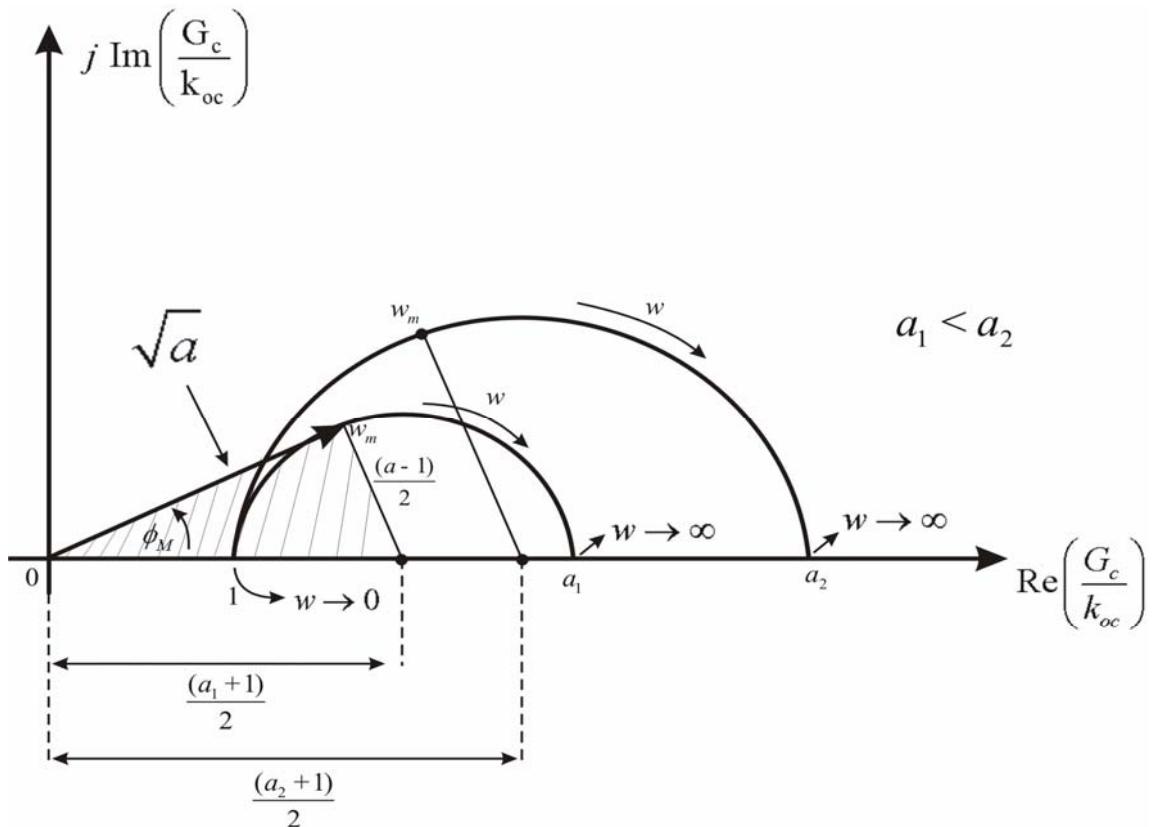


Figura 4.

Para cada valor de a , el ángulo formado por la tangente trazada desde el origen a la semicircunferencia y el eje real positivo da el máximo avance de fase ϕ_m que se puede obtener del controlador. La frecuencia en el punto de tangencia ω_m es aquella para la que se produce ϕ_m . Se ve que cuando a crece, el máximo avance de fase ϕ_m también lo hace, tendiendo a 90° cuando $a \rightarrow \infty$.

La ω_m disminuye al aumentar a con el T fijo, como se verá más adelante.

Se demostrará que ϕ_m está relacionado solo con el parámetro a del controlador. Para hallar esta relación usaremos la figura 4.

Del triángulo marcado en la figura se obtiene:

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{\frac{a-1}{2}}{\frac{a+1}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} \phi_m = \frac{a-1}{a+1}$$

Despejando a :
$$a = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi_m}{1 - \operatorname{sen} \phi_m} \quad (1)$$

Como se puede apreciar, el modulo es:

$$\left| \frac{Gc(j\omega_m)}{K_{oc}} \right| = \sqrt{a} \quad \text{o en dB: } \left[\frac{a, \text{dB}}{2} \right]$$

Ahora ω_m puede relacionarse con los parámetros del controlador a y T .

$$\left| \frac{Gc(j\omega_m)}{K_{oc}} \right| = \frac{\sqrt{1 + \omega_m^2 a^2 T^2}}{\sqrt{1 + \omega_m^2 T^2}} = \sqrt{a} \Rightarrow \frac{(1 + \omega_m^2 a^2 T^2)}{(1 + \omega_m^2 T^2)} = a$$

$$1 + \omega_m^2 a^2 T^2 = a(1 + \omega_m^2 T^2) = a + a\omega_m^2 T^2$$

$$\omega_m^2 a^2 T^2 - a\omega_m^2 T^2 = a - 1$$

$$a\omega_m^2 T^2(a - 1) = (a - 1)$$

$$a\omega_m^2 T^2 = 1 \Rightarrow \omega_m^2 = \frac{1}{aT^2} \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{1}{aT} \times \frac{1}{T}}$$

O sea ω_m es la media geométrica de las frecuencias esquina de $Gc(s)$

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son relaciones muy importantes utilizadas en el diseño de sistemas en el dominio frecuencial, (1) permite determinar a después de estimar el avance de fase máximo ϕ_m que se necesita. Y la ecuación (2) permite calcular T , una vez conocidos los parámetros a y ω_m .

Diagrama de Bode

El diagrama de Bode de $\frac{Gc(j\omega)}{K_{oc}}$ será el indicado en la figura 5.

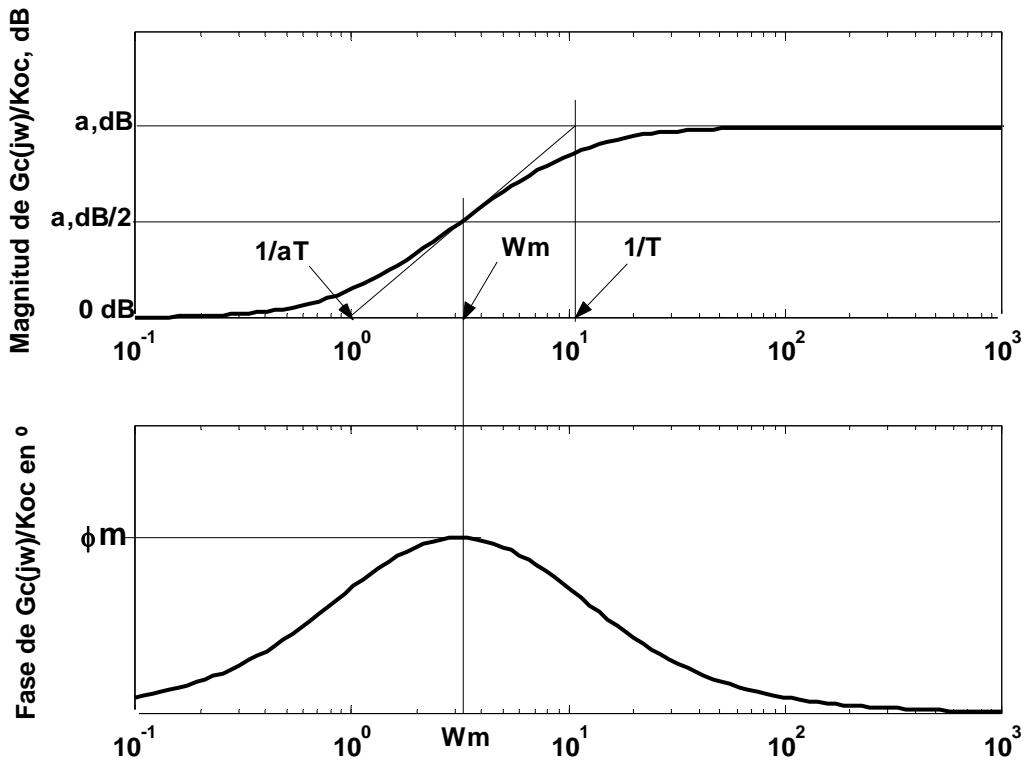


Figura 5

Ya se menciono que las características del controlador de adelanto de fase, era modificar la forma de la curva de respuesta de frecuencia, del lazo, para dar suficiente ángulo de adelanto de fase y compensar el excesivo retardo de fase asociado a los componentes del sistema sin compensar, sin $G_c(s)$.

Mejora la respuesta transitoria, del escalón, y en menor medida, también la del régimen permanente. Además incrementa en uno el orden del sistema salvo que el cero de $G(s)$ cancele un polo de $G_p(s)$ o que el polo de $G_c(s)$ cancele un cero de $G_p(s)$.

Diseño de un Controlador de Adelanto de Fase Mediante el Diagrama de Bode.

Generalmente se prefiere el diagrama de Bode para el diseño en el dominio de la frecuencia de los controladores serie, de sistemas de control realimentados, pues el efecto del controlador se obtiene fácilmente añadiendo respectivamente sus curvas de magnitud y fase a los del sistema básico. Para el diseño del controlador de adelanto de fase, del

circuito ya visto con amplificadores operacionales, los pasos generales del procedimiento de diseño son los siguientes:

- 1º) Se trazan las curvas de magnitud y fase en función de la frecuencia para $K_{oc}G(j\omega)$ del sistema básico, fijando la ganancia K_{oc} de acuerdo con las especificaciones dadas para el régimen permanente (generalmente el requisito de límite al error de estado estacionario).
- 2º) Se determina en el trazo de Bode, los márgenes de ganancia y de fase del sistema básico (ajustado solo en ganancia) y se estima el avance de fase adicional que se necesita para alcanzar el margen de fase especificado. Ordinariamente, las frecuencias esquina del $G_c(s)$ de adelanto de fase se sitúan de tal forma que ω_m (y por ende ϕ_m) coincide con la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω_g' ; pues al insertar el controlador se afecta también la curva de magnitud de Bode.

El cruce de ganancias ω_g' es mayor que el anterior ω_g . Aunque es posible ajustar las frecuencias esquinas del controlador de modo que el adelanto de fase máximo ϕ_m quede exactamente en la nueva ω_g' (por ahora desconocida), la curva original de la fase en ese punto ya no tiene el mismo ángulo de fase (generalmente menor) que el que correspondía en la anterior frecuencia de cruce de ganancias ω_g . Por lo tanto, aquí se justifica el término estimar y no calcular el ϕ_m . Por ende al estimar el valor de ϕ_m necesario, es indispensable incluir un factor de seguridad para cubrir éste fenómeno, como se indica en la figura 6.

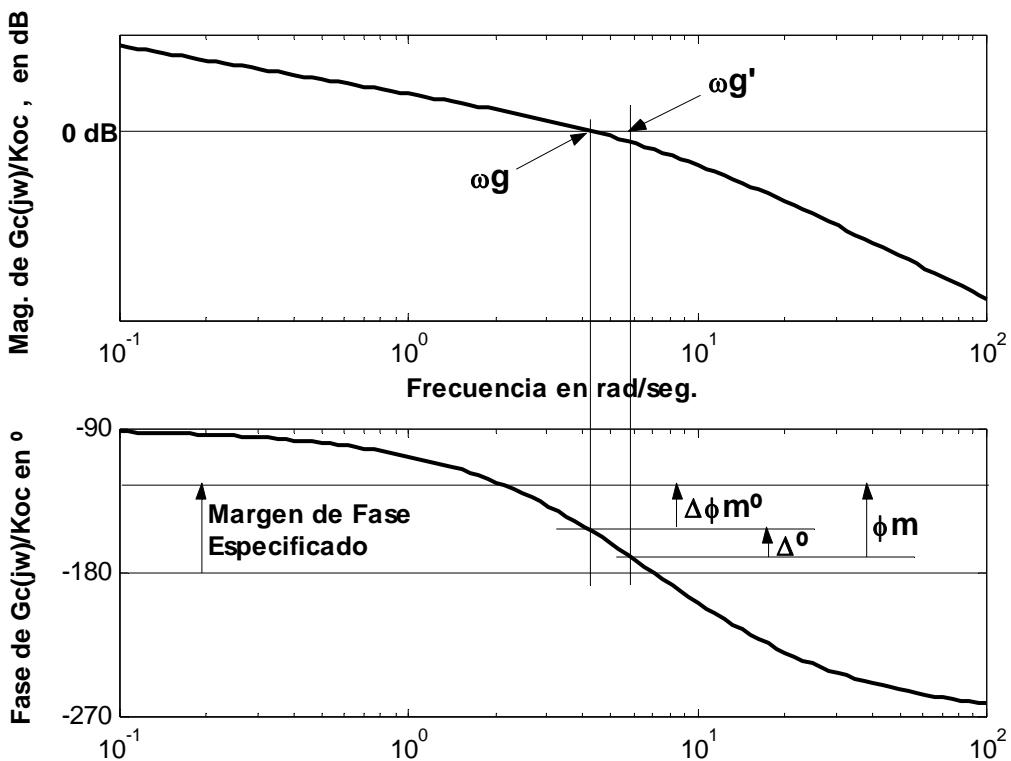


Figura 6

Por ende: $\phi_m = \Delta\phi_m + \Delta^\circ \rightarrow \Delta^\circ$ se estima

Para los sistemas de segundo orden el Δ° puede ser pequeño, del orden de 5° , no así para sistemas de mayor orden y con algunas características determinadas, por ejemplo con una gran pendiente negativa en la curva de fase.

Todo esto se puede expresar de dos formas, a saber, la primera sería: disminuir el Margen de Fase del sistema básico. La segunda sería: aumentar el Margen de Fase específico para el sistema a diseñar.

3º) Con el valor de ϕ_m ya estimado, se calcula el valor de a del controlador. Este valor de ϕ_m se hará coincidir con el $\phi_m^{\text{máx}}$ que introduce el controlador. Luego se plica la expresión ya vista anteriormente:

$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$$

4º) Determinación de $\omega_m \equiv \omega_g$.

Para determinar la localización adecuada de las dos frecuencias esquinas, $\frac{1}{aT}$ y $\frac{1}{T}$, se sabe que el adelanto de máximo ϕ_m ocurre en ω_m , pues es la media geométrica de las dos frecuencias esquina de $G_c(s)$. El ϕ_m deberá ocurrir entonces en la nueva ω_g que se desconoce. Por lo tanto, el problema consiste ahora en localizar a las dos frecuencias esquinas de $G_c(s)$ de modo que $\omega_m \equiv \omega_g$, lo que puede obtenerse como se indica en la figura 7.

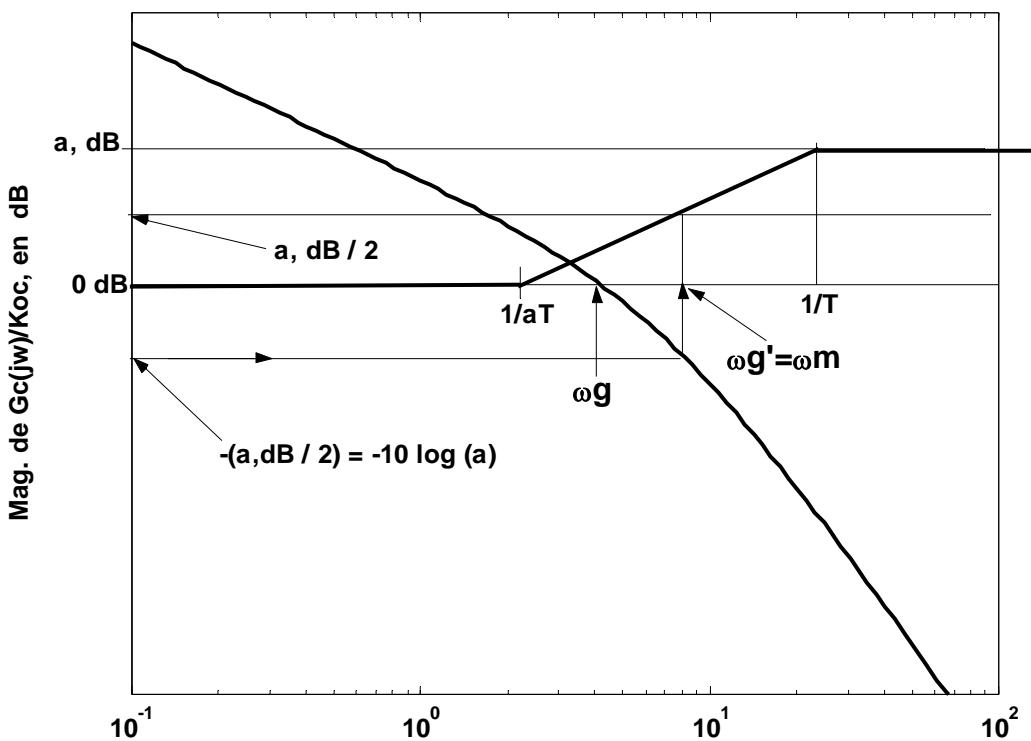


Figura 7

Como se puede observar la frecuencia para la cual el modulo en dB del sistema básico es $-10 \log a \equiv -\left(\frac{a, dB}{2}\right)$. En consecuencia, entrando con esta atenuación al diagrama del sistema básico, se determinará $\omega_m \equiv \omega_g$.

5º) Se determinará la fase del sistema básico en ω_g .

$$\angle KocGp(j\omega_g)$$

6º) Se verifica si se cumple el Margen de Fase pedido, o sea:

$$MF = 180^\circ + (\angle KocGp(j\omega_g) + \phi_m)$$

Si no se verifica, se estima otro ϕ_m mayor y se repiten los cálculos. Si se verifica se determina el valor de T .

7º) Cálculo de T , con la expresión:

$$T = \frac{1}{\omega_g \sqrt{a}}$$

8º) Se determina el valor de A con: $A = a \cdot Koc$

Los valores de A , a y T determinan la función de transferencia del controlador de adelanto de fase. La cual se puede sintetizar, eligiendo la capacidad C y calcular: $R_2 = \frac{T}{C}$ y $R_1 = aR_2$. Además, como ya se dijo,

$$A = \frac{R_4}{R_3} \rightarrow R_4 = AR_3. \text{ Se elige } R_3 \text{ y se determina } R_4.$$

Se puede resumir el procedimiento con el siguiente diagrama de flujo de la figura 8:

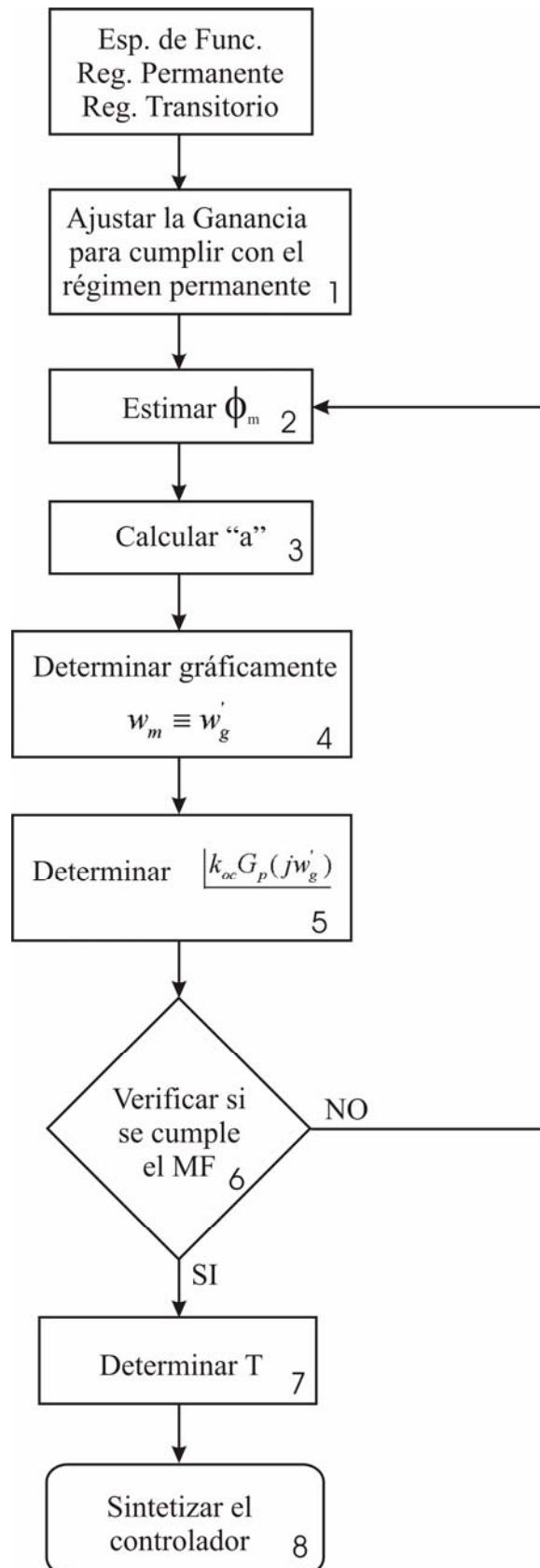


Figura 8.

Ejemplo 1: Consideremos una planta cuya función de transferencia es:

$$G_p(s) = \frac{2}{s(s+1)}, \text{ las especificaciones pedidas son las siguientes:}$$

1º) Que el Margen de Fase del sistema diseñado sea mayor o igual a 45° ($MF \geq 45^\circ$).

2º) Cuando $r(t) = t\mu(t)$, el error de estado estacionario de la salida (en posición) sea igual o menor que $0,1 \text{ rad}$. $e_{EE} \leq 0,1 \text{ rad}$.

Diseñar un controlador serie de adelanto de fase, con una realimentación unitaria.

Los pasos a seguir son:

1º) De la segunda especificación, recordando que la constante de velocidad K_v se define como:

$$K_v = \frac{R}{e_{EE}} = \frac{\text{Velocidad de salida deseada (rad/seg)}}{\text{Error de posición de estado estable (rad)}}$$

$$e_{EE} = \frac{1}{K_v} \leq \frac{1}{10} \rightarrow K_v \geq 10 \text{ seg}^{-1}$$

$$\text{Además } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K_{oc} \cdot G_p(s) = 2K_{oc} \geq 10 \quad \therefore K_{oc} \geq 5 \text{ seg}^{-1}$$

Lo que implica que para que se cumpla la segunda especificación, la ganancia K_{oc} tiene que ser mayor o igual a 5, se tomará el signo igual:

$$K_{oc} \cdot G_p(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

2º) Se traza el diagrama de Bode de $K_{oc} \cdot G_p(j\omega)$ para $K_{oc} = 5$, figura 9, del mismo se puede obtener $\omega_g \cong 3,1 \text{ rad/seg}$ y $MF \cong +18^\circ$.

Como el Margen de Fase es menor a 45° , debe añadirse mas adelanto de fase al sistema, por ende el controlador deberá proporcionar por lo menos un adelanto de fase adicional de 27° en la proximidad de la ω_g . Sin embargo, por lo ya explicado, es indispensable incluir un pequeño factor de seguridad. Por lo tanto estimaremos: $\Delta^\circ = 5^\circ$, en consecuencia:

$$\phi_m = \Delta\phi_m + \Delta^\circ = (45^\circ - 18^\circ) + 5^\circ \Rightarrow \underline{\phi_m = 32^\circ}$$

3º) Por lo tanto:

$$a = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi_m}{1 - \operatorname{sen} \phi_m} = \frac{1 + \operatorname{sen} 32^\circ}{1 - \operatorname{sen} 32^\circ} \cong \frac{1,53}{0,47} = 3,26 \Rightarrow \underline{a \cong 3,26}$$

4º) Como ya se explico, para determinar la situación correcta de las dos frecuencias esquinas del controlador, se procede así:

$$-\frac{[a, dB]}{2} = -\frac{[20 \log 3,26]}{2} = \underline{-5,13 \text{ dB}}$$

Entrando con esta atenuación al diagrama de Bode de la figura 9 se obtiene:

$$\boxed{\omega_m = \omega_g \cong 4,2 \text{ rad/seg}}$$

5º) Del mismo diagrama de Bode se obtiene:

$$\angle KocGp(j4,2) \approx -166,6^\circ$$

6º) Por lo tanto el Margen de Ganancia alcanzado sería de:

$$MF = 180^\circ + \angle KocGp(j4,2) + \phi_m = 180^\circ - 166,6^\circ + 32^\circ = 45,4^\circ$$

$$\underline{MF \approx 45,4^\circ > 45^\circ}$$

Como es mayor que 45° , no estimaremos un ϕ_m mayor.

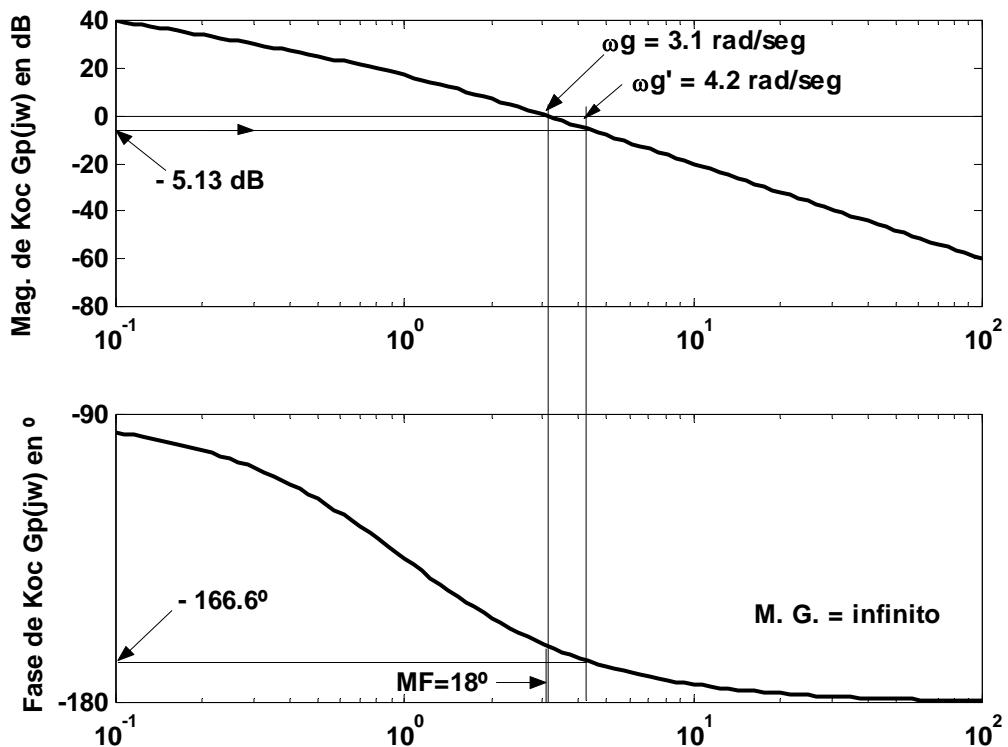


Figura 9

$$7º) T = \frac{1}{\omega_g \sqrt{a}} = \frac{1}{4,2 \times \sqrt{3,26}} \approx 0,132 \Rightarrow \underline{\underline{T = 0,132 \text{ seg}}}$$

$$8º) A = a \times Koc = 3,26 \times 5 = 16,3 \Rightarrow \underline{\underline{A = 16,3}}$$

Por lo tanto:

$$Gc(s) = Koc \frac{(1 + aTs)}{(1 + Ts)} = \frac{5(1 + 0,43s)}{(1 + 0,132s)}$$

O también:

$$Gc(s) \approx 16,3 \frac{(s + 2,33)}{(s + 7,57)}$$

Si se elige: $C = 10 \mu F$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{T}{C} = \frac{0,132}{10} = 0,0132 \Rightarrow \underline{\underline{R_2 = 13,2 K\Omega}}$$

$$\Rightarrow R_1 = aR_2 = 3,26 \times 13,2 K\Omega \Rightarrow \underline{\underline{R_1 = 43 K\Omega}}$$

Como $A = \frac{R_4}{R_3} = 16,3$ si se elige $\underline{\underline{R_3 = 1K\Omega}} \Rightarrow \underline{\underline{R_4 = 16,3 K\Omega}}$

Un esquema del circuito con amplificadores operacionales es el indicado en la figura 10.

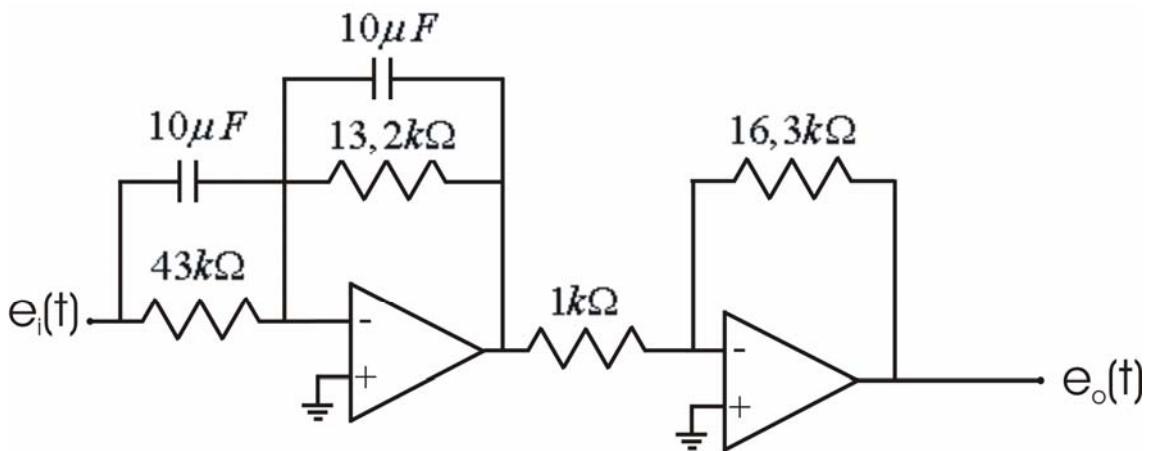


Figura 10.

Las figuras 11 y 12 muestran el diagrama de Bode. Las funciones de transferencia:

$$Gc(s) = \frac{16.3(s + 2.33)}{(s + 7.57)} \quad \Rightarrow \quad G(s) = Koc Gp(s) \times \frac{Gc(s)}{Koc} = \frac{32.6(s + 2.33)}{s(s + 1)(s + 7.57)}$$

Se determina $M_R = 2.572 dB \cong 1.34$ lo que representa una mejoría considerable de la estabilidad relativa del sistema.

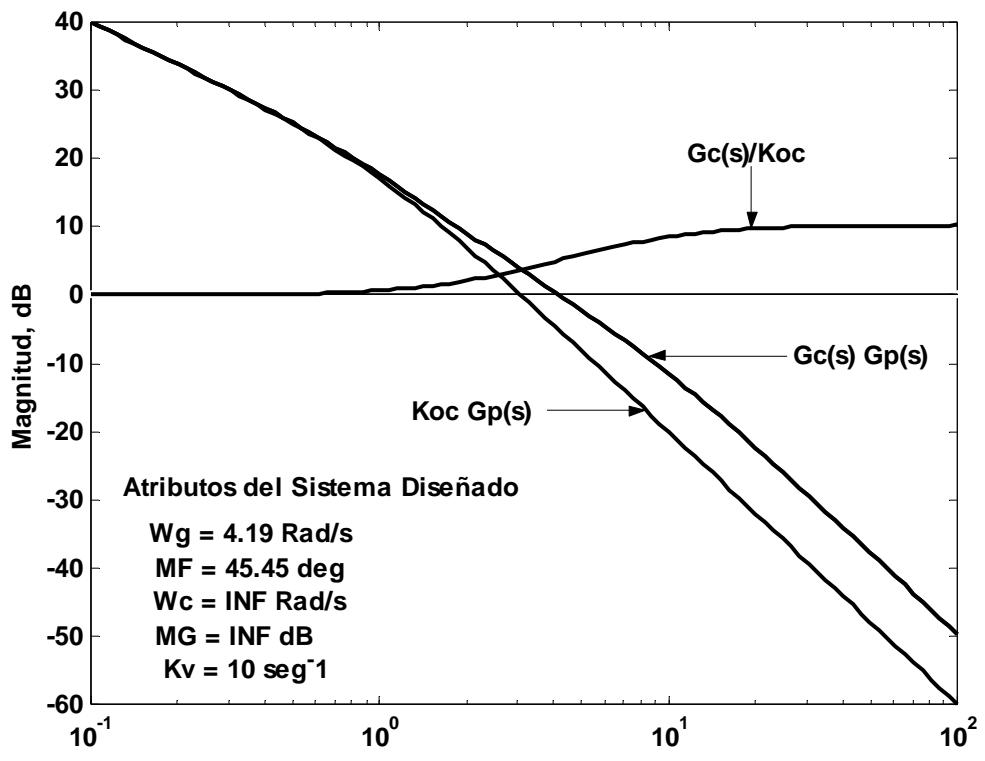


Figura 11

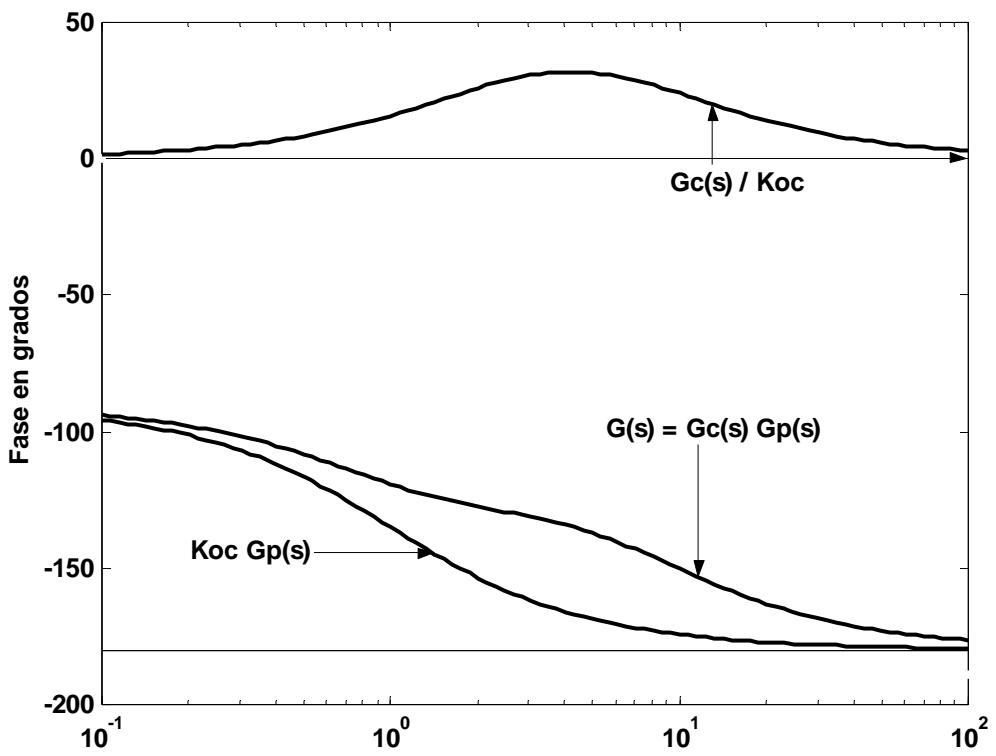


Figura 12

Otro punto importante es que la ω_R del sistema experimenta un aumento de $\omega_R = 3,08 \text{ rad/seg}$ a $\omega_R = 3,50 \text{ rad/seg}$.

Además el ancho de banda (W_{AB}) también, pues pasa de $W_{AB} \approx 4,82 \text{ rad/seg}$ a $W_{AB} \approx 6,7 \text{ rad/seg}$.

Basándonos en la relación que hay entre el tiempo de subida y el ancho de banda, se ve que el tiempo de subida disminuye (mayor velocidad de respuesta) con la compensación de adelanto de fase.

De las curvas de magnitud en función de la variación de fase y el ábaco de Nichols, se pueden obtener las respuestas frecuenciales de los sistemas básico ($K_{oc}G_p(s)$) y compensado ($G_c(s)G_p(s)$), las mismas se muestran en la figura 13.

Es también interesante investigar el efecto de la compensación de adelanto de fase en el diagrama del lugar de las raíces del sistema (estudio que ya se realizó), figura 14.

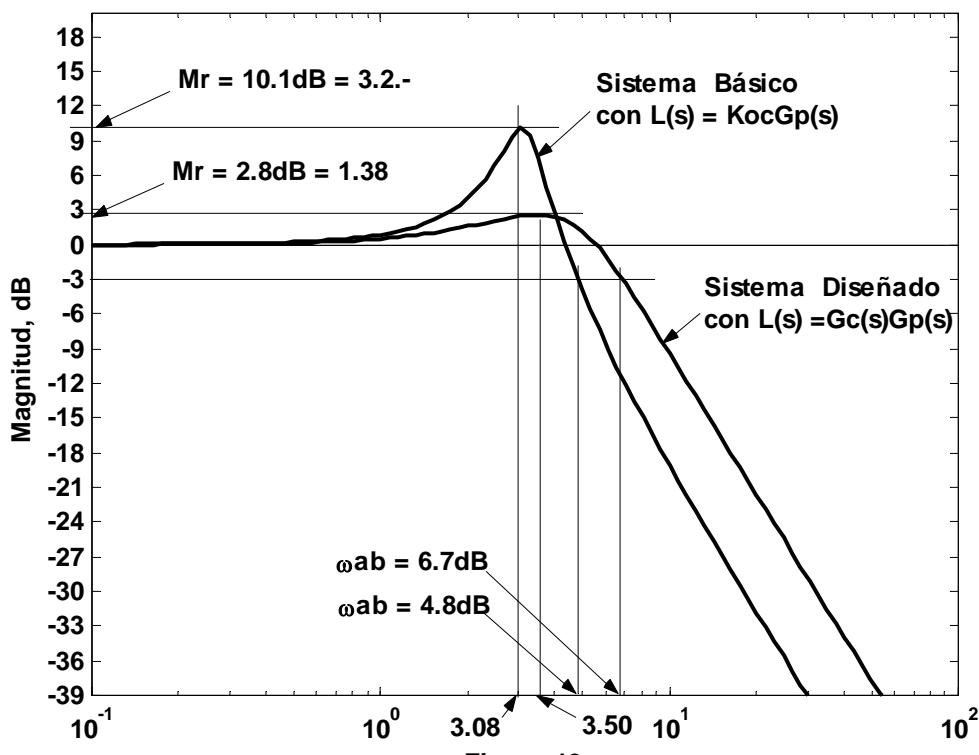


Figura 13

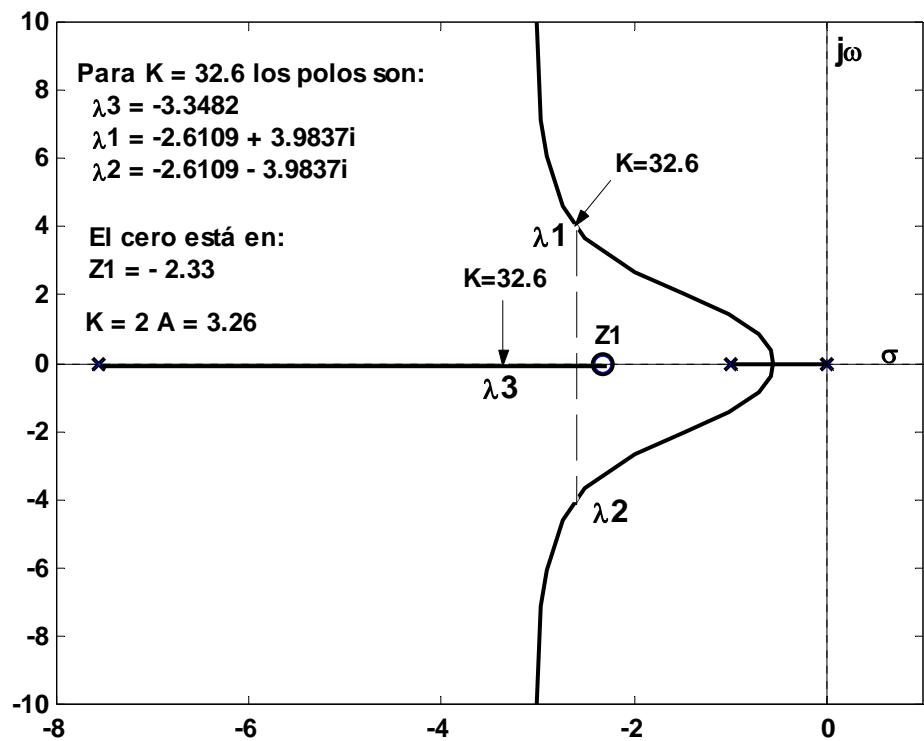


Figura 14

También se muestra en la figura 15 la respuesta temporal a una entrada escalón de los sistemas cuyas $L(s)$ son las siguientes:

- 1) $c(t)$ con $KocGp(s)$,
- 2) $c(t)$ con $G(s) = Gc(s)Gp(s)$
- 3) $c(t)$ con λ_1 y λ_2 de $G(s)$ solos, o sea, sin el cero z_1 y el polo λ_3

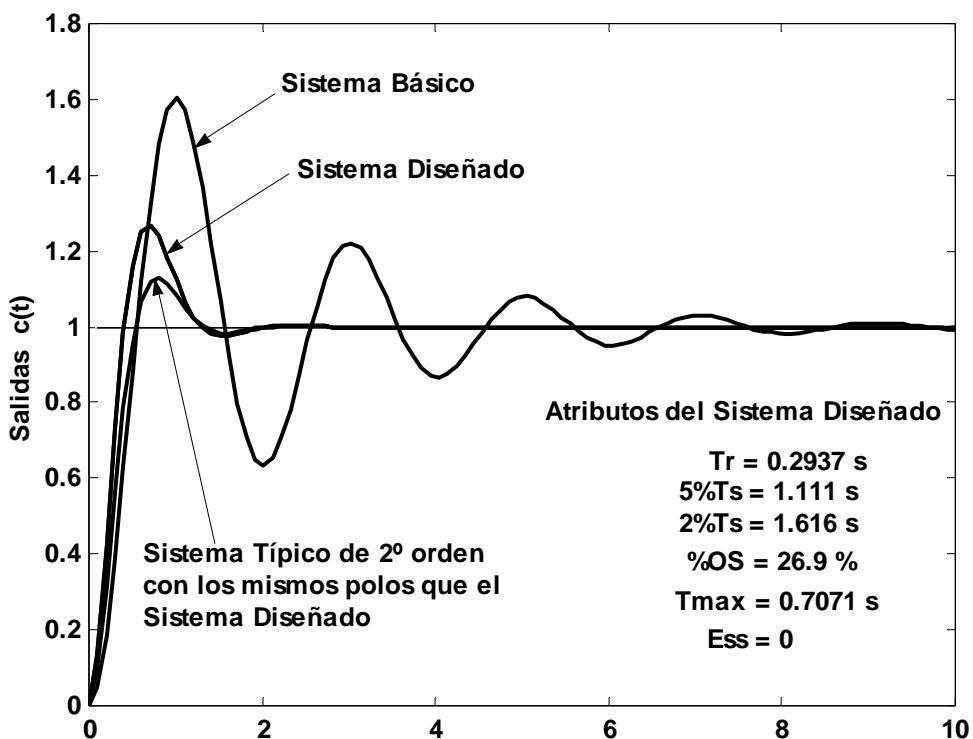


Figura 15

Ejemplo 2:

Consideremos una planta a controlar de tercer orden con la función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+8)}$$

Las especificaciones son las siguientes:

- 1º) EL Margen de Fase del sistema debe ser mayor o igual a 50° .
- 2º) Para una entrada $r(t) = t\mu_s(t)$, el error de posición en la salida de estado estacionario, debe ser menor o igual a 33,33% del valor numérico de la velocidad final de la salida deseada.

Los pasos a seguir son:

- 1º) De acuerdo con el 2º requisito, se debe cumplir que:

$$e_{EE} = \frac{R}{Kv} \rightarrow Kv \geq \frac{R}{e_{EE}} = \frac{R}{0,3333R} = \frac{1}{0,3333} \rightarrow \underline{\underline{Kv \geq 3 \text{ seg}^{-1}}}$$

o se puede hacer así:

$$e_{EE} = \frac{R}{Kv} \leq 0,3333R \rightarrow \underline{\underline{Kv \geq 3 \text{ seg}^{-1}}}$$

Por ende resulta que:

$$Kv = \frac{10Koc}{16} \geq 3 \rightarrow \underline{\underline{Koc \geq 4,8}}$$

Lo que significa que la ganancia Koc del sistema básico debe fijarse en 4,8 como mínimo para cumplir los requisitos de error de estado estacionario.

Se tomará:

$$\underline{\underline{Koc = 4,8}}$$

como la ecuación característica del sistema básico es:

$$s(s+2)(s+8)+10Koc=0 \rightarrow s^3 + 10s^2 + 16s + 10Koc = 0$$

El $Koc_L = 16$, el sistema será estable.

- 1º) Se traza el diagrama de Bode de $KocG_p(s)$ en la figura 16. el Margen de Fase obtenido en la frecuencia de cruce de ganancia $\omega_g \approx 2,04 \text{ rad/seg}$ es $MF \approx 30,2^\circ < 50^\circ$.

El ϕ_m se estimará como se sabe: $\phi_m = MFe - MFa + \Delta^\circ = \Delta\phi_m + \Delta^\circ = 19,8^\circ + \Delta^\circ = ?$

Supongamos que se toma $\Delta^\circ = 10,2^\circ$ se tendrá

$$\phi_m = 19,8^\circ + 10,2^\circ = 30^\circ \rightarrow \underline{\underline{\phi_m = 30^\circ}}$$

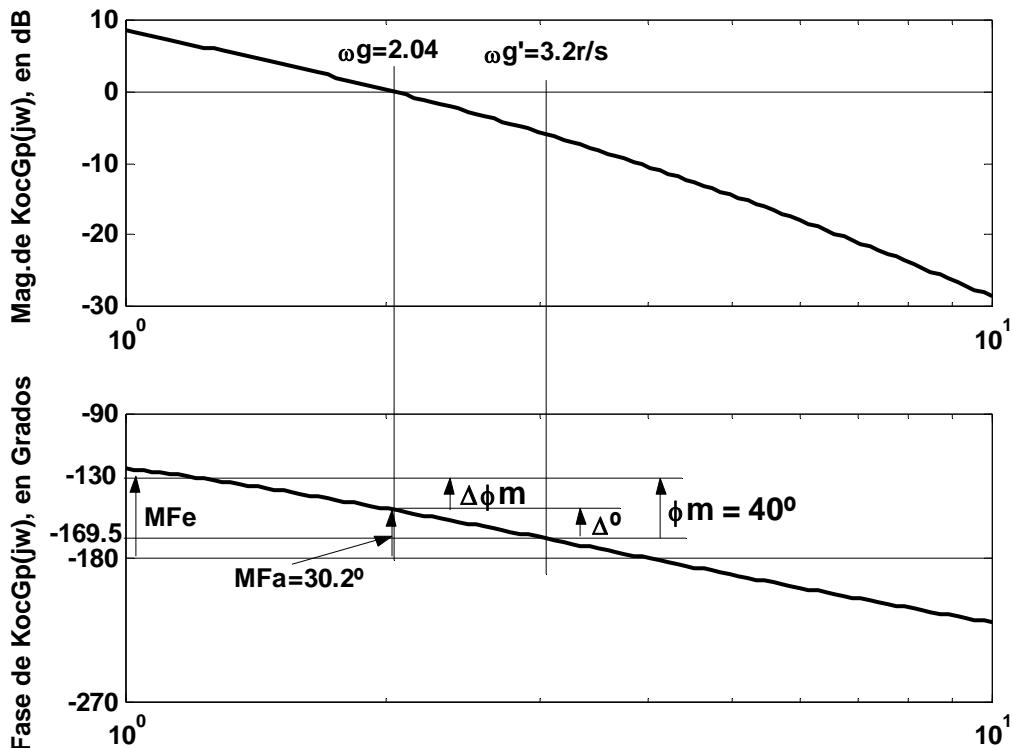


Figura 16

$$3^{\circ}) \text{ Por lo tanto: } a = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi_m}{1 - \operatorname{sen} \phi_m} = \frac{1 + \operatorname{sen} 30^{\circ}}{1 - \operatorname{sen} 30^{\circ}} = \frac{1,5}{0,5} = 3 \rightarrow \underline{a = 3}$$

$$4^{\circ}) -\left(\frac{a, dB}{2}\right) \approx -4,77 \text{ dB}$$

Según el diagrama de Bode de la figura 16, resulta $\omega_m = \omega_g \approx 2,83 \text{ rad/seg}$

5^o) De la misma figura se tiene que:

$$\boxed{|KocGp(j\omega_g)| \approx -164,2^{\circ}}$$

$$6^{\circ}) MF = 180^{\circ} - 164,2^{\circ} + 30^{\circ} = 45,8^{\circ} < 50^{\circ}$$

Hay que estimar un nuevo Δ° y en consecuencia ϕ_m .

$$\text{Si } \underline{\Delta^{\circ} = 15,2^{\circ}} \rightarrow \underline{\phi_m = 19,8^{\circ} + 15,2^{\circ} = 35^{\circ}} \rightarrow \underline{\phi_m = 35^{\circ}}$$

$$\text{Por ende } a \approx \frac{1,5735}{0,4264} \rightarrow \underline{\underline{a \approx 3,69}}$$

$$-\left(\frac{a, dB}{2}\right) \approx -5,67 \text{ dB}$$

Resulta:

$$\omega_m = \omega_g \approx 3 \text{ rad/seg}$$

$$\boxed{|KocGp(j\omega_g)| \approx -166,8^{\circ}}$$

$$MF = 180^{\circ} - 166,8^{\circ} + 35^{\circ} = 48,2^{\circ} < 50^{\circ}$$

$$\underline{\Delta^{\circ} = 20,2^{\circ}} \rightarrow \underline{\underline{\phi_m = 40^{\circ}}}$$

Acá como ω_g y las dos frecuencias esquinas de la planta están próximas entre si, el factor de seguridad Δ° no es tan pequeño (es del mismo orden que $\Delta\phi_m$). Si ω_g y las frecuencias esquinas de la planta están muy separadas, por ejemplo:

Si $\omega_g = 200 \text{ rad/seg}$ y las frecuencias esquinas de $Gp(s)$ son $\omega_l = 10 \text{ rad/seg}$ y 1000 rad/seg , Δ° puede ser pequeño.

Esto se debe a que en el primer caso la pendiente negativa de la curva de fase es muy alta y Δ° se incrementa mucho.

$$\therefore a \cong 4,6$$

$$-\left(\frac{a, \text{dB}}{2}\right) \cong -6,63 \text{ dB}$$

resulta: $\omega_g \cong 3,184 \text{ rad/seg} \rightarrow KocGp(j\omega_g) \cong -169,54^\circ$

$$MF = 180^\circ - 169,54^\circ + 40^\circ = 50,46^\circ < 50^\circ$$

7º) El parámetro T será:

$$T = \frac{1}{\omega_g \sqrt{a}} = \frac{1}{3,184 \sqrt{4,6}} \rightarrow T \cong 0,146 \text{ seg.}$$

8º) $A = aKoc = 4,6 \times 4,8 = 22,08 \rightarrow A = 22,08$

$$Gc(s) \cong \frac{22,08(s+1,5)}{(s+6,85)}$$

El $\underline{\omega_{AB} \cong 5,7 \text{ rad/seg} < 10 \text{ rad/seg}}$

Por lo tanto se puede sintetizar el controlador $Gc(s)$. –

Si se elige $C = 10 \mu F$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{T}{C} = 0,0146 M\Omega \rightarrow R_2 = 14,6 K\Omega$$

$$\Rightarrow R_1 = aR_2 = 67,16 K\Omega \rightarrow R_1 = 67,16 K\Omega$$

Si $R_3 = 1 K\Omega \rightarrow R_4 = AR_3 = 22,08 \times 1 = 22,08 K\Omega \rightarrow R_4 = 22,08 K\Omega$

La función de transferencia de lazo abierto del sistema diseñado será:

$$G(s) = Gc(s)Gp(s) = \frac{220,8(s+1,5)}{s(s+2)(s+6,85)}$$

Por ende, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema diseñado será:

$$M(s) = \frac{220,8(s+1,5)}{s(s+2)(s+6,85) + 220,8(s+1,5)}$$

Los polos del sistema diseñado se indican en el lugar de las raíces, figura 17.

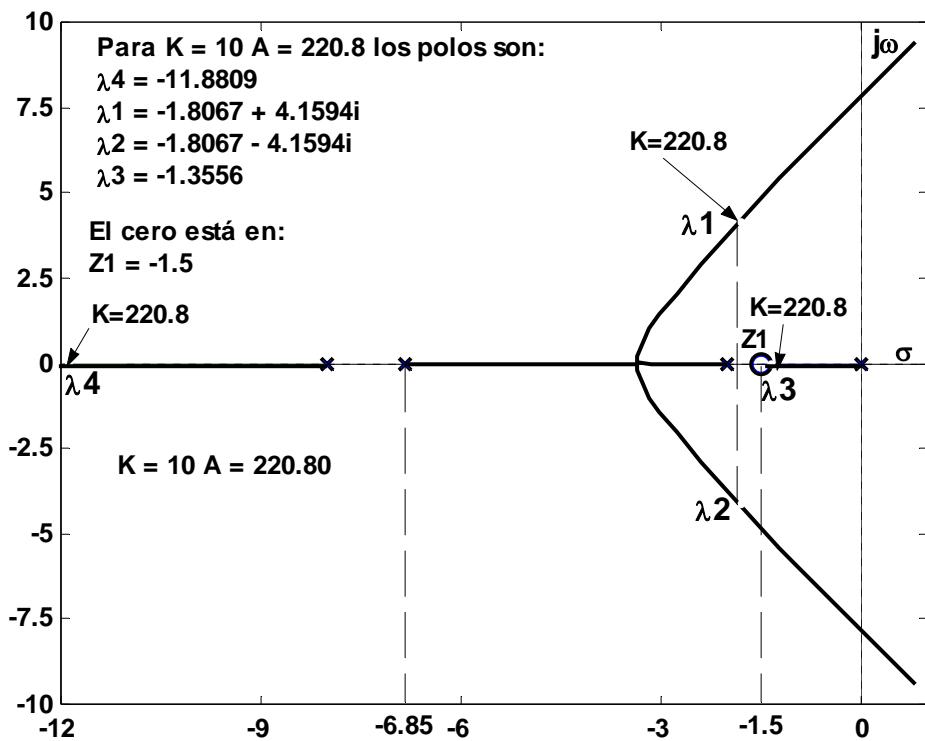


Figura 17

$$\lambda_{1-2} \approx -1.81 \pm j4.16 \quad \lambda_3 = -1.35 \quad \lambda_4 = -11.88 \quad \text{con } z_1 \approx -1.5$$

En la figura 18 se representa $|M(s)|, dB = f(\omega)$ y con la misma se obtiene:

$$\omega_R \approx 2.15 \text{ rad/seg} \quad M_R = 5.834 \text{ dB} \quad \text{y} \quad W_{AB} \approx 3.37 \text{ rad/seg} \quad (\text{Sistema básico})$$

$$\omega_R \approx 3.55 \text{ rad/seg} \quad M_R = 1.549 \text{ dB} \quad \text{y} \quad W_{AB} \approx 5.7 \text{ rad/seg} \quad (\text{Sistema diseñado})$$

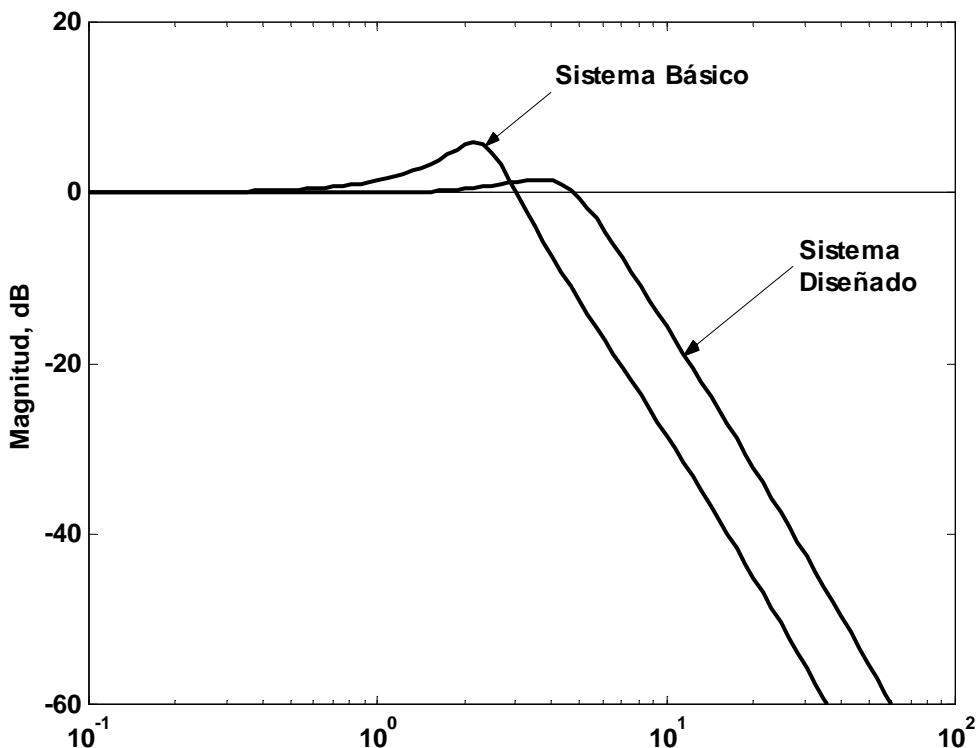


Figura 18

En la figura 19 se muestra la respuesta al escalón unitario en la entrada del sistema diseñado con sus atributos.

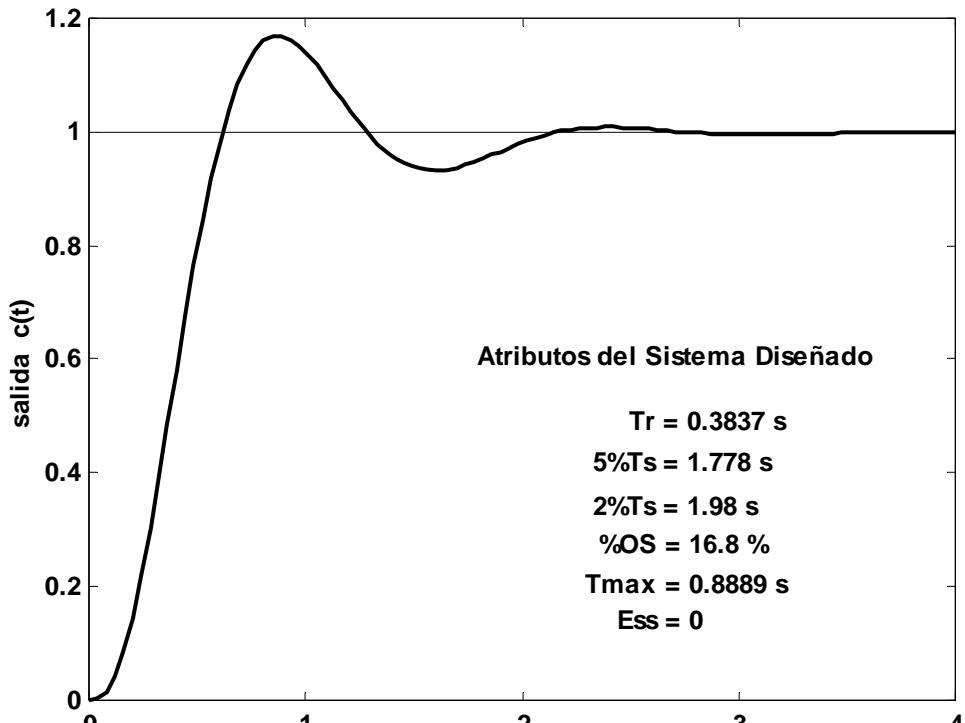


Figura 19

Para Diseñar con la Función “Ildesign” del Csad
La figura 20, aclara como se puede operar con Ildesign.

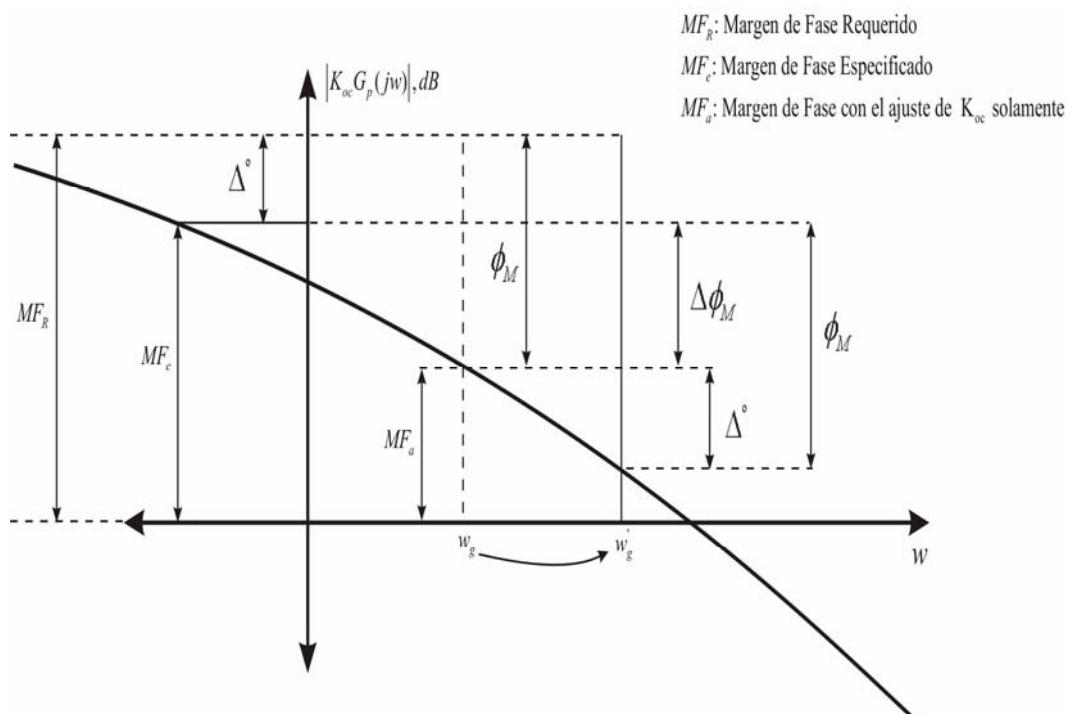


Figura 20.

Como se sabe: $\phi_m = \Delta\phi_m + \Delta^\circ$

$$\phi_m = (MFe - MFa) + \Delta^\circ = (MFe + \Delta^\circ) - MFa$$

Si llamamos: $\phi_m = MF_R = MFe + \Delta^\circ$, se tendrá que:

$$\underline{\phi_m = MF_R - MFa}$$

Por lo tanto: $\underline{\underline{MF_R = MFe + \Delta^\circ}}$

Si ω_g esta separada de las frecuencias esquinas de $Gp(s)$, $\Delta^\circ \approx 5^\circ$ eso lo agrega el programa.

Si en un ejemplo, con ω_g cerca de las frecuencias esquinas de la $Gp(s)$ y se estima $\Delta^\circ = 20^\circ$, como ya se agregan 5° , se tendrá que colocar:

$$MF_R = MFe + (20^\circ - 5^\circ) = \underline{\underline{MFe + 15^\circ}}$$

Si al ejemplo 1 lo resolvemos con "lldesign", el procedimiento sería el siguiente:

>> ll design

Default transfer function:

100

s^2 + 10s^1

Enter numerator [n] > 2

Enter denominator [d] > [1 1 0]

Enter Plant Time Delay [0] >

Enter controller type (lead,lag,other) [lead] >

Controller Form: K(aTs+1)/(Ts+1)

--- LLDESIGN OPTIONS ---

Controller type Time response

K,a,T values Freq response

Show K,a,T info Root locus

Help on Design Error, Ess

Goals to meet Poles/zeros

Lead/Lag math Display TF's

Interpolate New/clear TF's

View Nyquist W - Routh Td=0

Add controller Begin Rltool

Quit

LLDESIGN >h

This menu item does not always produce meaningful results. As an Engineer, you must determine whether the results have value.

This system is Type 1
 and has Finite-Nonzero Ess to a Unit Ramp input
 Enter desired %Ess due to this Input [1] > 10
 K must be at least 5 to meet desired Ess.
 Enter desired K [5] >
 Design by choosing PM,Gco, Dominant pole? [p] >
 Gain Crossover 3.085
 Phase Margin 17.97
 Enter Desired PM (deg) > 45
 Frequency where loop gain = -10log(a): 4.193
 Designed controller information:
 K 5
 a 3.259
 T 0.1321
 aT 0.4306
 (zero) -1/aT -2.323
 (pole) -1/T -7.569
 w @Max Phase 4.193
 Max Phase 32.03
 20*log10(a) 10.26
 Update Current K,a,T values? (y/n) [y] >
 LLDESIGN > ^
 Select plot type: Bode, Polar, Mag vs phase [b] >
 LLDESIGN > f
 Choose TF: K*plant,Loop,Contr.,Y/R, E/R, U/R [k] > l
 --- BPLOT OPTIONS ---
 Magnitude Freq range
 Phase Time delay
 Both New TF
 Units Choose data
 Zoom Display TF
 Grid Attributes
 Hold Roots
 Label View Data
 Quit Interpolate
 BPLOT > b ⇒ el gráfico está indicado en la figura 21
 BPLOT > a
 Open loop phase does not cross -180 degrees.
 Insufficient data or gain margin is infinite.
 The accuracy of these attributes depend
 on the quality of the plotted response.
 Gain Margin, dB INF

Phase Crossover, Rad/s INF
 Phase Margin, deg 45.45
 Gain Crossover, Rad/s 4.192
 Resonant Peak, dB 2.558
 3dB Bandwidth, Rad/s 6.886
 S(s) Peak, dB 3.565
 Freq @ S(s) Peak, Rad/s 5.722
 Place attributes on plot? (y/n) [n] > y

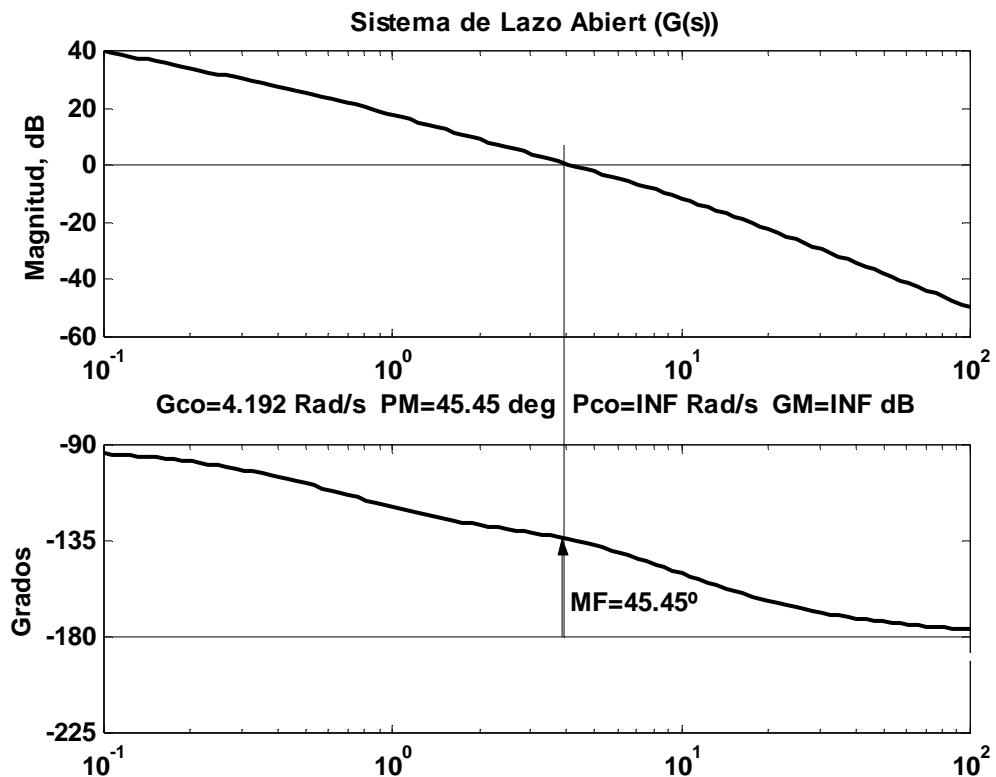


Figura 21

También se podría graficar el diagrama de Nyquist de la manera siguiente:

Controller Form: $K(aTs+1)/(Ts+1)$

--- LLDESIGN OPTIONS ---

Controller type	Time response
K,a,T values	Freq response
Show K,a,T info	Root locus
Help on Design	Error, Ess
Goals to meet	Poles/zeros
Lead/Lag math	Display TF's
Interpolate	New/clear TF's
View Nyquist	W - Routh Td=0
Add controller	Begin Rltool
Quit	

LLDESIGN > ^

 Select plot type: Bode, Polar, Mag vs phase [b] > P

 LLDESIGN > F

 Choose TF: K*plant,Loop,Contr.,Y/R, E/R, U/R [k] > L

 - PLRPLT OPTIONS -

 Plot Freq range

 Units Time delay

 Zoom New TF

 Grid Choose data

 Hold Display TF

 Label Attributes

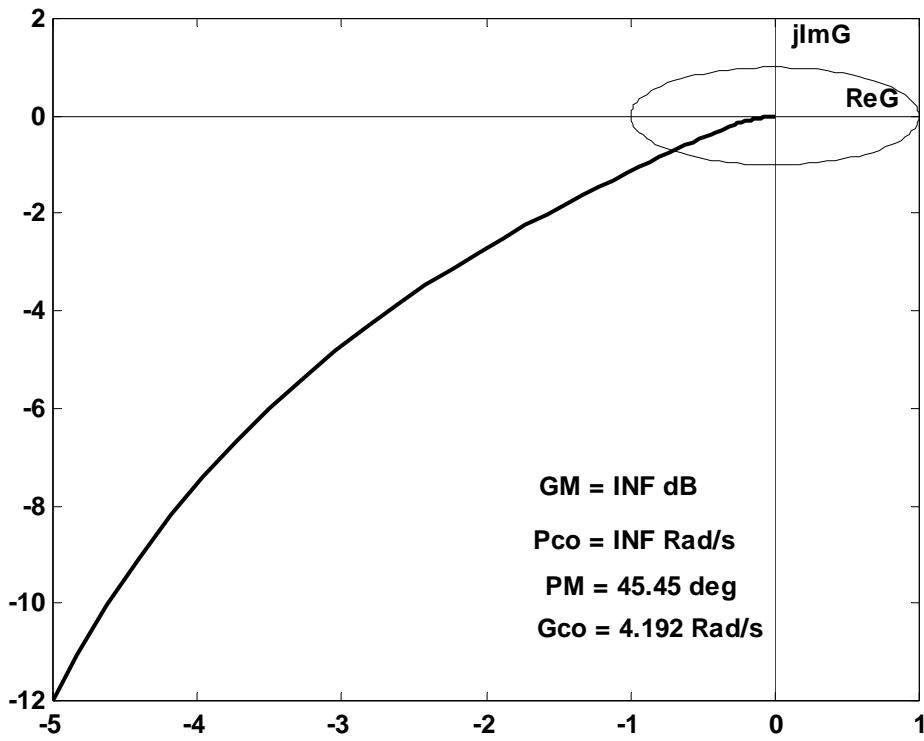
 w/f point Roots

 View data

 Quit Interpolate

 PLRPLT > p \Rightarrow Se grafica el Diagrama de Nyquist, figura 22.

 PLRPLT > a



También se puede graficar el Diagrama de Nichols:

LLDESIGN > ^

 Select plot type: Bode, Polar, Mag vs phase [b] > M

 LLDESIGN > f

 Choose TF: K*plant,Loop,Contr.,Y/R, E/R, U/R [k] > I

- MVPPLOT OPTIONS -

Plot Freq range
Units Time delay
Zoom New TF
Grid Choose data
Hold Display TF
Label Attributes
Show |T| Roots
w/f point View data
Quit Interpolate

MVPPLOT > p \Rightarrow figura 23

MVPPLOT > s

Nichol magnitude curves for 9,6,3,1,0,-1,-3,-6,-9 dB.

The -3dB curve is dash-dotted, the others are dotted.

Press any key to continue...

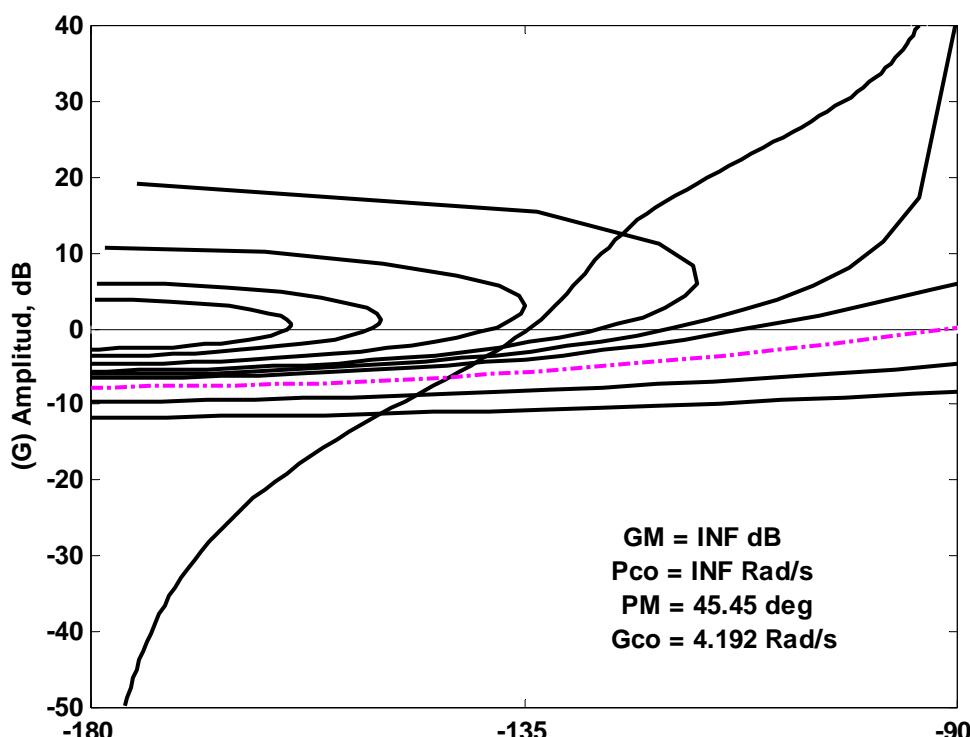


Figura 23

También se puede graficar el diagrama de Bode de; $|M(j\omega)|, dB = f(\omega)$:

Controller Form: $K(aTs+1)/(Ts+1)$

--- LLDESIGN OPTIONS ---

LLDESIGN > ^

Select plot type: Bode, Polar, Mag vs phase [b] > b

LLDESIGN > f

Choose TF: K*plant,Loop,Contr.,Y/R, E/R, U/R [k] > Y/R
B PLOT > m \Rightarrow figura 24.

B PLOT > a

Open loop phase does not cross -180 degrees.

Insufficient data or gain margin is infinite.

The accuracy of these attributes depend
on the quality of the plotted response.

Gain Margin, dB INF

Phase Crossover, Rad/s INF

Phase Margin, deg 45.45

Gain Crossover, Rad/s 4.192

Resonant Peak, dB 2.558

3dB Bandwidth, Rad/s 6.886

S(s) Peak, dB 3.565

Freq @ S(s) Peak, Rad/s 5.722

Place attributes on plot? (y/n) [n] > y

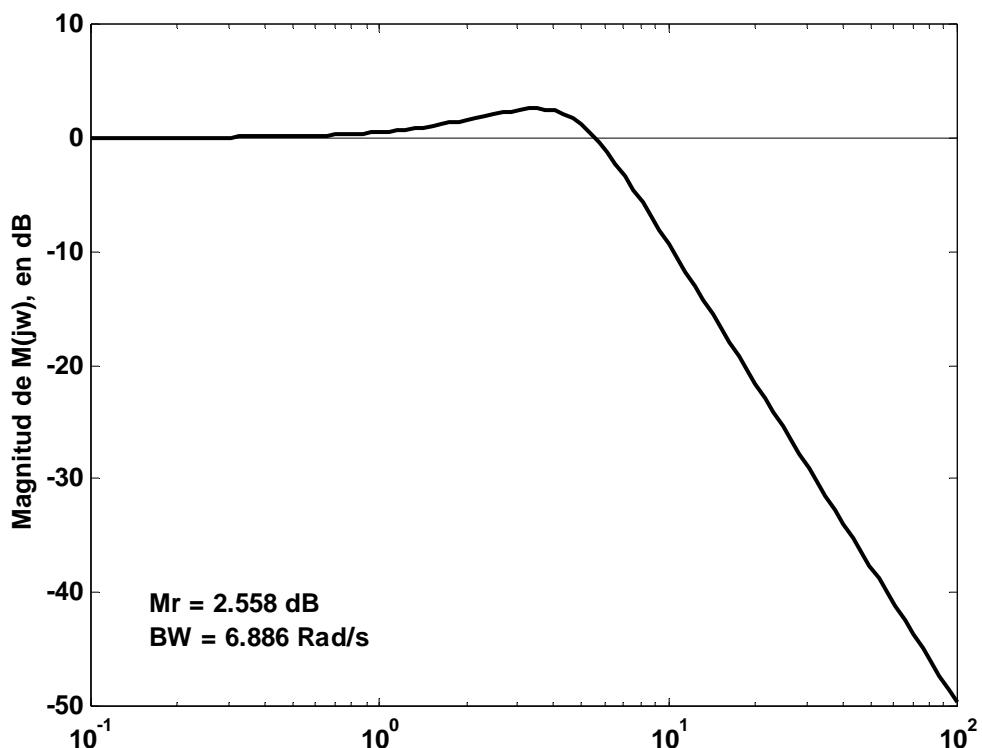


Figura 24

Diseñaremos con lldesign el ejemplo 2.-

Primer Método Eligiendo el (MF. Requerido)

» lldesign

Default transfer function:

100

s^2 + 10s^1

Enter numerator [n] > 10

Enter denominator [d] > pmake(0,-2,-8)

Enter Plant Time Delay [0] >

Enter controller type (lead,lag,other) [lead] >

--- LLDESIGN OPTIONS ---

Controller type Time response

K,a,T values Freq response

Show K,a,T info Root locus

Help on Design Error, Ess

Goals to meet Poles/zeros

Lead/Lag math Display TF's

Interpolate New/clear TF's

View Nyquist W - Routh Td=0

Add controller Begin Rltool

Quit

LLDESIGN > h

This menu item does not always produce meaningful results. As an Engineer, you must determine whether the results have value.

This system is Type 1

and has Finite-Nonzero Ess to a Unit Ramp input

Enter desired %Ess due to this Input [1] > 100/3

K must be at least 4.8 to meet desired Ess.

Enter desired K [4.8] >

Design by choosing PM,Gco, Dominant pole? [p] >

Gain Crossover 2.037

Phase Margin 30.19

Enter Desired PM (deg) > 65 \Rightarrow MF req. = (50°+15°)

Frequency where loop gain = -10log(a): 3.175

Designed controller information:

K 4.8

a 4.558

T 0.1475

aT 0.6724

(zero) -1/aT -1.487

(pole) -1/T -6.779

w @Max Phase 3.175

Max Phase 39.81

20*log10(a) 13.18

Update Current K,a,T values? (y/n) [y] > y

LLDESIGN > f

Choose TF: K*plant,Loop,Contr.,Y/R, E/R, U/R [k] > I

--- BPLOT OPTIONS ---

BPLOT > b \Rightarrow figura 25.

BPLOT > a

The accuracy of these attributes depend
on the quality of the plotted response.

Gain Margin, dB 12.51

Phase Crossover, Rad/s 7.845

Phase Margin, deg 50.39

Gain Crossover, Rad/s 3.174

Resonant Peak, dB 1.547

3dB Bandwidth, Rad/s 5.69

S(s) Peak, dB 4.789

Freq @ S(s) Peak, Rad/s 4.977

Place attributes on plot? (y/n) [n] > y

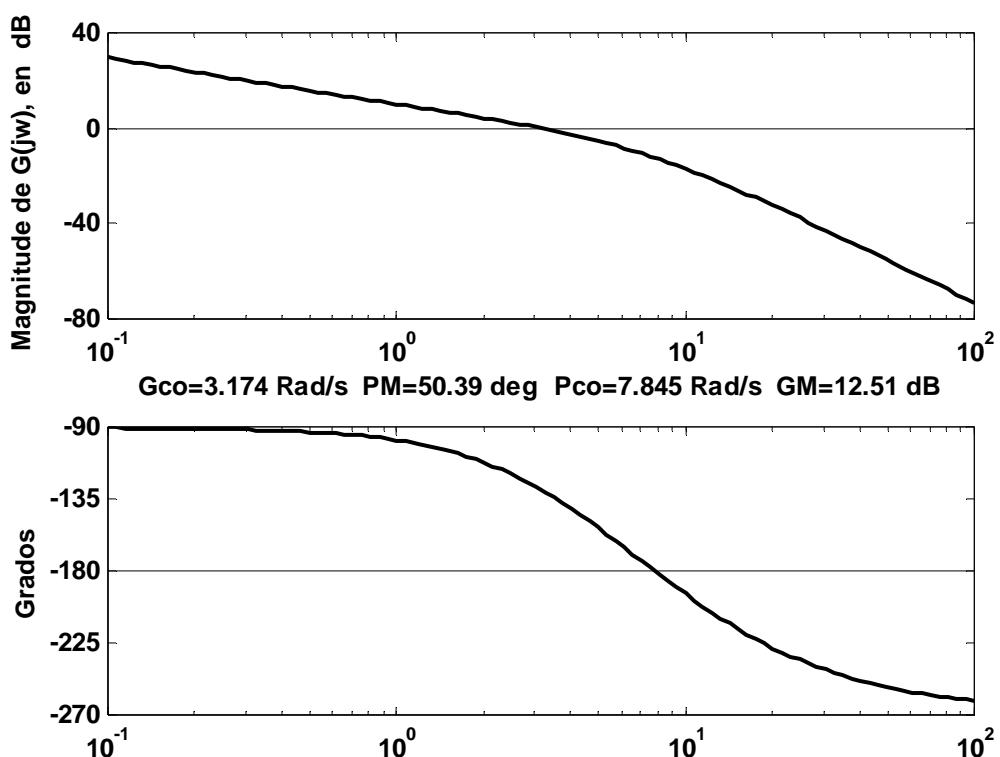


Figura 25

Con este método, el MF máximo que se puede obtener con una etapa de adelanto de fase es $MF_{MAX} = 58.36^\circ$

Esto resulta de suponer $\Delta^\circ = 50^\circ$, por lo tanto:

$$MF_R = 50^\circ + 50^\circ - 5^\circ = 95^\circ$$

Resulta:

$$a = 31,54$$

$$T = 0,03463$$

$$\omega_g = 6,78 \text{ rad/seg}$$

$$MF = 58,36^\circ$$

Si se elige $\Delta = 60^\circ$, resulta $\phi_m = 80^\circ$, $MF_R = 50^\circ + 60^\circ - 5^\circ = 105^\circ$

Los parámetros de diseño serán:

$$a = 125,7$$

$$T = 0,01278$$

$$\omega_g = 6,78 \text{ rad/seg}$$

$$MF = 54,71^\circ \text{ menor que el anterior}$$

Resumen de Formulas:

$$\phi_m = MFe - MFa + \Delta^\circ$$

$$\phi_{MAX} = MF_R - MFa$$

$$MF_R = MFe + \Delta^\circ$$

Otra Forma de Diseñar:

Elegir una Nueva Frecuencia de Cruce de Ganancia

Controller Form: K(aTs+1)/(Ts+1)

--- LLDESIGN OPTIONS ---

Controller type Time response

K,a,T values Freq response

Show K,a,T info Root locus

Help on Design Error, Ess

Goals to meet Poles/zeros

Lead/Lag math Display TF's

Interpolate New/clear TF's

View Nyquist W - Routh Td=0

Add controller Begin Rltool

Quit

LLDESIGN > h

This menu item does not always produce meaningful results. As an Engineer, you must determine whether the results have value.

This system is Type 1

and has Finite-Nonzero Ess to a Unit Ramp input

Enter desired %Ess due to this Input [1] > 100/3

K must be at least 4.8 to meet desired Ess.

Enter desired K [4.8] >

Design by choosing PM,Gco, Dominant pole? [p] > g

Gain Crossover 2.037

Phase Margin 30.19

Enter desired PM (deg) > 50 $\cong MF_R$

Enter desired Gco (>Gco above) [5.093] > 3.2 \Rightarrow (varia entre 1.5 a 2.5wg)

Designed controller information:

K 4.8

a 4.553

T 0.1499

aT 0.6827

(zero) -1/aT -1.465

(pole) -1/T -6.67

w @Max Phase 3.126

Max Phase 39.78

20*log10(a) 13.17

Update Current K,a,T values? (y/n) [y] > y

LLDESIGN > f

Choose TF: K*plant,Loop,Contr.,Y/R, E/R, U/R [k] > I

BPLOT > f

Enter START frequency in Rad/s : 10^k1, k1 = [-1] > -1

Enter END frequency in Rad/s : 10^k2, k2 = [2] > 2

BPLOT > b \Rightarrow devuelve el gráfico de Bode, figura 26

BPLOT > a

The accuracy of these attributes depend
on the quality of the plotted response.

Gain Margin, dB 12.37

Phase Crossover, Rad/s 7.803

Phase Margin, deg 50

Gain Crossover, Rad/s 3.199

Resonant Peak, dB 1.634

3dB Bandwidth, Rad/s 5.724

S(s) Peak, dB 4.872

Freq @ S(s) Peak, Rad/s 4.751

Place attributes on plot? (y/n) [n] > y \Rightarrow Ubica los atributos en la figura.

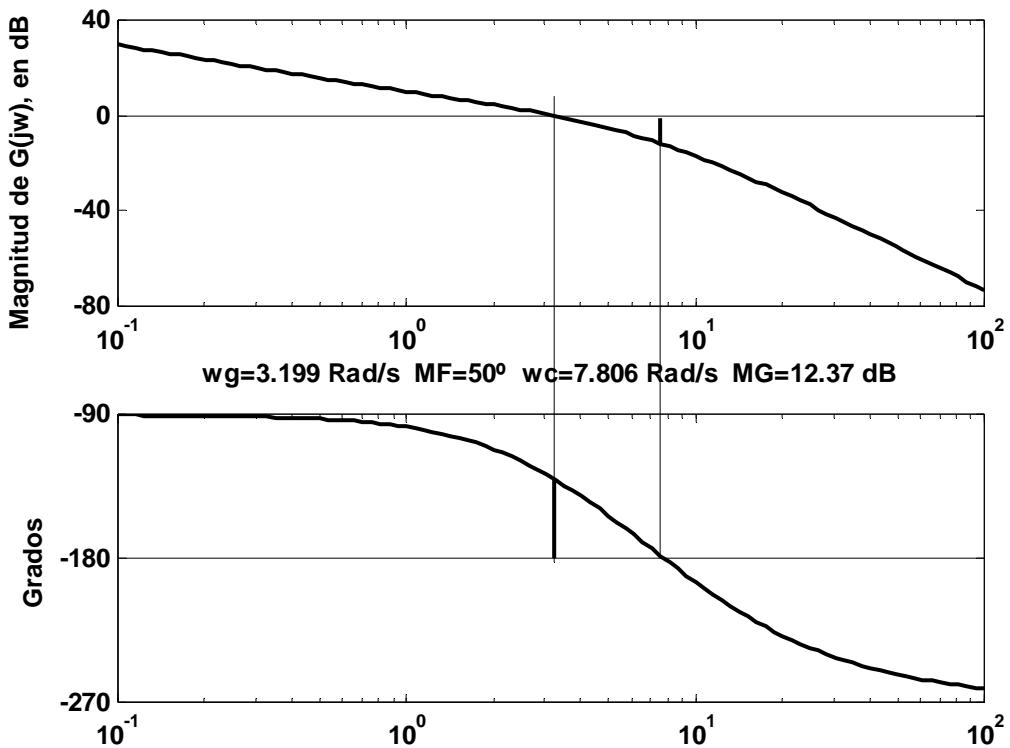


Figura 26

Con este método, si se elige $\omega_g = 5,15 \text{ rad/seg}$ ($MF = 50^\circ$)

Resulta:

$$a = 17,23$$

$$T = 0,066$$

$$MF = 50^\circ$$

Si se pretende $MF = 58,36^\circ$ (el máximo con el otro método), resulta:

Para $\omega_g = 5,15 \text{ rad/seg}$

$$a = 31,77$$

$$T = 0,0344$$

$$MF = 58,36^\circ$$

Si se hace un gráfico, para diferentes a (incrementando el mismo donde $a=1$ en adelante), con el T que resultase, para cada valor de a , en el eje de abscisas pondremos el MF resultante del sistema, se puede obtener un gráfico semejante al de la figura 27.

- Si se pide un MF_1 , el rango posible del parámetro a será:

$a_1 < a < a_2$. Si se elige $a_{\max FM}$, el MF será el máximo MF alcanzado (MF_{MAX}).

- Si se pide un MF_2 nunca se podrá obtener con una etapa de adelanto sola, las soluciones pueden ser:

1) Dos o más etapas de Adelanto

2) Una etapa de Atraso

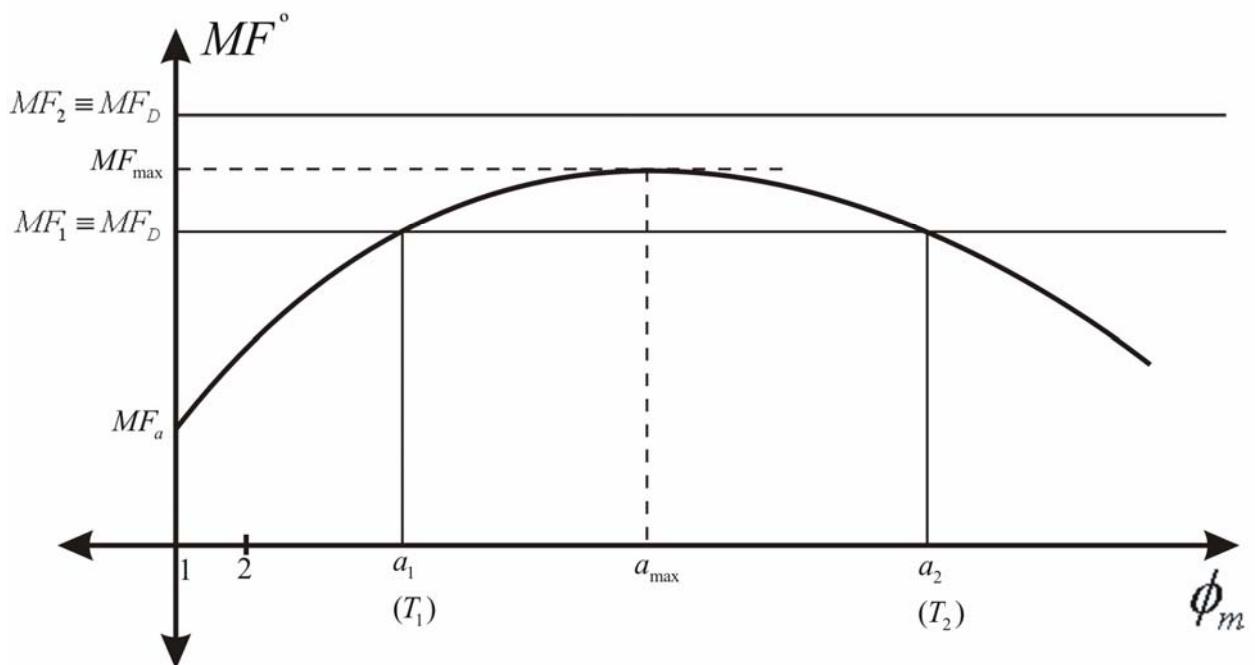


Figura 27.

Efectos y Limitaciones del Diseño por Adelanto de Fase

A partir de los resultados obtenidos en los ejemplos precedentes, se pueden resumir los efectos del diseño por avance de fase de un sistema como sigue:

- 1º) La fase de la función de transferencia de lazo abierto en la vecindad de la frecuencia de cruce de ganancia (ω_g) es incrementada, por lo tanto el margen de fase se aumenta.
- 2º) La pendiente de la curva de magnitud de la $G(j\omega)$ se reduce a la frecuencia de cruce de ganancia. Esto, usualmente, corresponde a mejorar la estabilidad relativa del sistema. En otras palabras, los márgenes de ganancia y de fase se mejoran y se reduce el M_R .
- 3º) El ancho de banda del sistema se incrementa (mas a medida que el parámetro a sea mayor).
- 4º) La sobreelongación de la respuesta al escalón se reduce.
- 5º) El tiempo de subida es menor.
- 6º) El e_{EE} del sistema básico no es afectado al agregar $\frac{(1+aTs)}{(1+Ts)}$.

Sin embargo, no siempre puede conseguirse una compensación satisfactoria mediante controladores de avance de fase. En general, la aplicación satisfactoria mediante controladores de avance de fase. En general, la aplicación con éxito de este tipo de compensación viene limitada por las siguientes condiciones:

1º) Consideraciones sobre el ancho de banda: Si el sistema original es inestable, el avance de fase necesario para obtener un margen de fase especificado es grande. Esto requiere de un gran valor de a , lo cual resulta en un W_{AB} demasiado grande y la transmisión de ruido puede ser un inconveniente. También, si el valor de " a " es demasiado grande, al emplear redes eléctricas, los valores de los elementos de la red pueden volverse desproporcionado, tales como un capacitor muy grande. Si se justifica un gran valor de a , algunas veces, dos o más controladores son conectados en serie para alcanzar el gran avance de fase.

2º) Si el sistema original es inestable o tiene bajo margen de estabilidad. El gráfico de la fase de la función de transferencia $G(s)$ tiene una pendiente muy negativa en las proximidades de la ω_g . En otras palabras, la fase decrece muy rápidamente en la vecindad del cruce de ganancia. Bajo estas condiciones, la compensación por adelanto de fase usualmente se vuelve ineficaz ya que el avance de fase adicional en el nuevo cruce de ganancia se suma a un ángulo de fase mucho menor que el anterior cruce de ganancia.

El margen de fase deseado puede conseguirse solamente tomando valores muy grandes para " a ". Sin embargo, el sistema resultante puede ser aún insatisfactorio porque una porción de la curva de fase puede todavía estar debajo del eje de -180° grados, que correspondería a un sistema condicionalmente estable.

En general, las situaciones siguientes pueden causar también un cambio rápido de la fase en la vecindad de la frecuencia de cruce de ganancia:

1º) La $G_p(s)$ tiene dos o mas polos situados uno cerca del otro y ambos próximos a la frecuencia de cruce de ganancia ω_g .

2º) La $G_p(s)$ tiene un polo real doble próximos a la frecuencia de cruce de ganancia.

3º) La $G_p(s)$ tiene uno o mas pares de polos complejos conjugados cercanos a la ω_g ($\omega_n \rightarrow \omega_g$).

El siguiente ejemplo será usado para ilustrar que bajo ciertas condiciones la compensación de adelanto de fase puede no ser efectiva.

Ejemplo 3: Una planta tiene $G_p(s) = \frac{100}{s(s+5)(s+10)}$

Las especificaciones pedidas son:

$$1^\circ) Kv \geq 30 \text{ seg}^{-1}$$

$$2^\circ) MF \geq 40^\circ$$

Si se siguen los pasos el controlador de adelanto de fase:

$$1^o) Kv = \frac{100Koc}{50} = 2Koc > 30 \rightarrow \underline{\underline{Koc \geq 15}}$$

Como $Koc_{Límite} = 7,5$ el sistema será inestable.

2º) Para $Koc = 15$ resulta $\omega_g \cong 9,77 \text{ rad/seg}$ y $MF = -17,25^\circ$

$$\Delta\phi_m = MFe - MFa = 40^\circ - (-17,25^\circ) = \underline{\underline{57,25^\circ}}$$

Si se elige $\Delta^\circ = 23^\circ$ resulta que:

$$\Delta\phi_m = \Delta\phi_m + \Delta^\circ = \underline{\underline{80,25^\circ}}$$

$$3^o) a = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi_m}{1 - \operatorname{sen} \phi_m} \cong \underline{\underline{137,45^\circ}}$$

$$4^o) -10 \log a \cong -21,38 \text{ dB} \rightarrow \dot{\omega}_g = 25,22 \text{ rad/seg}$$

$$5^o) \text{ Resulta: } \underline{\underline{Koc Gp(j\dot{\omega}_g) = -237,145^\circ}}$$

$$6^o) MF = 180^\circ - 237,145^\circ + 80,25^\circ = \underline{\underline{23,105^\circ < 40^\circ}}$$

Si:

$$\Delta^\circ = 30^\circ \rightarrow \phi_m = \Delta\phi_m + \Delta^\circ = \underline{\underline{87,25^\circ}}$$

$$\therefore a \cong 1735,7 \rightarrow -10 \log a \cong -32,4 \text{ dB} \rightarrow \dot{\omega}_g \cong 39,4 \text{ rad/seg}$$

$$\underline{\underline{Koc Gp(j\dot{\omega}_g) = -248,4^\circ}} \rightarrow MF = 180^\circ - 248,4^\circ + 87,25^\circ = \underline{\underline{18,85^\circ < 40^\circ}}$$

Como se puede ver el $MF_{Max} < MFe$ por ende hay que pensar en:

- 1º) Un controlador de dos o más etapas de Adelanto de Fase.
- 2º) Un controlador de una etapa de Atraso de Fase.
- 3º) Uso de un combinado de Adelanto-Atraso de Fase.
- 4º) Uso de un retorno auxiliar (compensación por realimentación), tal como un derivador (compensación tacométrica).

Controladores de Adelanto de Fase de Etapas Múltiples:

Cuando el diseño de un controlador de adelanto de fase requiere una fase adicional muy grande, a menudo se puede emplear un controlador de etapas múltiples. La figura 28 muestra un circuito con amplificadores operacionales de un posible controlador de adelanto de fase con dos etapas.

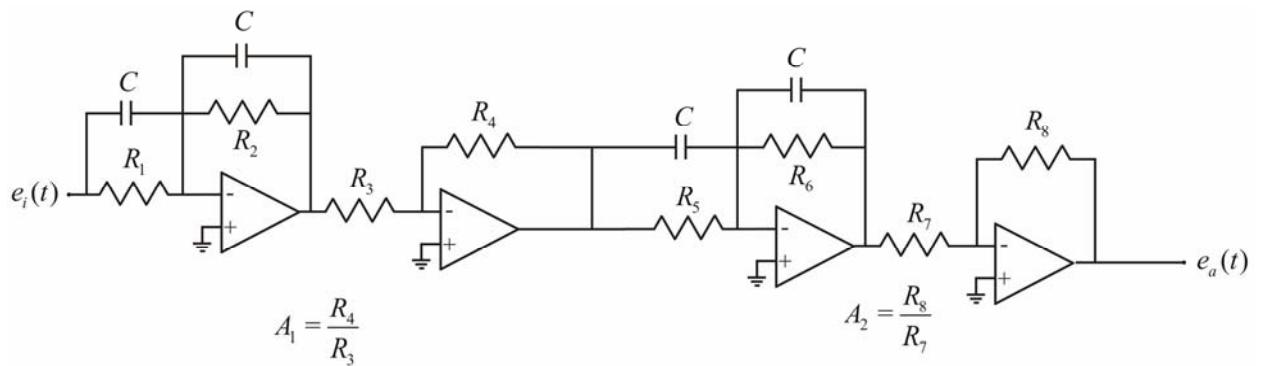


Figura 28.

También se puede usar cuando el “ a ” de una etapa es muy grande y el W_{AB} se ve muy incrementado con el consiguiente inconveniente de la transmisión de ruido.

Por lo general se emplean cuando es imposible conseguir la estabilidad relativa (MF) pedida con un controlador simple.

La función de transferencia del controlador de la figura 28 es:

$$Gc(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{A_1}{a_1} \frac{(1+a_1 T_1 s)}{(1+T_1 s)} \times \frac{A_2}{a_2} \frac{(1+a_2 T_2 s)}{(1+T_2 s)} \rightarrow \begin{cases} T_1 = R_2 C \\ T_2 = R_6 C \\ a_1 = R_1 / R_2 \\ a_2 = R_5 / R_6 \end{cases}$$

Solo para simplificar los cálculos se hacen las dos etapas idénticas en cascada, o sea:

$T_1 = T_2 = T$; $A_1 = A_2 = A$; $a_1 = a_2 = a$, con lo cual quedará:

$$Gc(s) = \frac{A^2}{a^2} \frac{(1+aTs)^2}{(1+Ts)^2} = A^2 \frac{(s+1/aT)^2}{(s+1/T)^2}$$

En consecuencia el controlador agrega un cero doble en $-1/aT$ y un polo doble en $-1/T$.

El diseño de un controlador de adelanto de fase de etapas múltiples en el dominio del tiempo se vuelve muy engorroso ya que hay más polos y ceros a colocar.

El método de los contorno de las raíces también se vuelve poco atractivo ya que hay más parámetros variables.

El diseño en el dominio de la frecuencia en este caso representa una mejor elección del método de diseño.

Por ejemplo, una forma sería, en general, para el $G_c(s)$ de dos etapas, escoger los parámetros de la primera etapa para satisfacer el requisito del Margen de Fase y entonces, la segunda etapa cubrirá los requisitos restantes.

Se trabajará acá con dos etapas idénticas.

Diagrama de Bode de $G_c(s)$:

Un diagrama de Bode de $\left| \frac{G_c(j\omega)}{K_{oc}^2} \right|, dB$ se muestra en la figura 29, si se denomina $K_{oc}^2 = \frac{A^2}{a^2}$ la ganancia estática de las dos etapas.

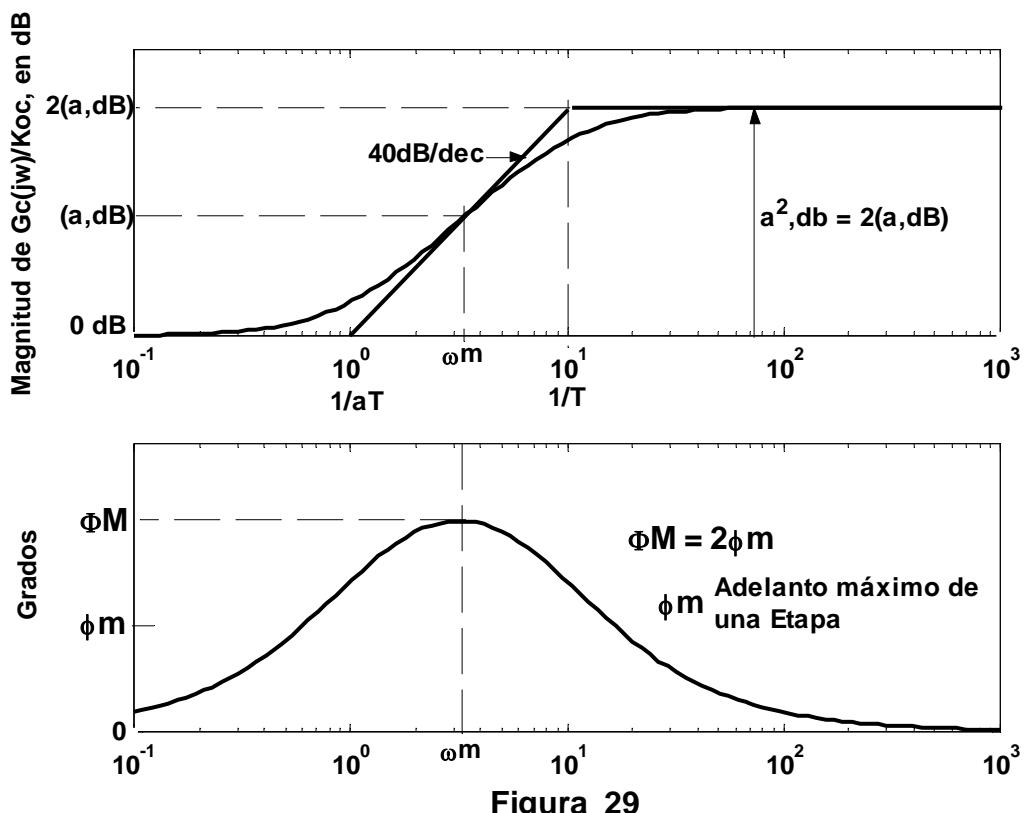


Figura 29

Si el ϕ_m (adelanto máximo de cada etapa) es mayor que 45° , el Φ_M (adelanto total) superará los 90° , con el a de cada etapa no tan grande.

Diagrama Polar

La figura 30, muestra el diagrama polar de $G_c(j\omega) / K_{oc}^2$.

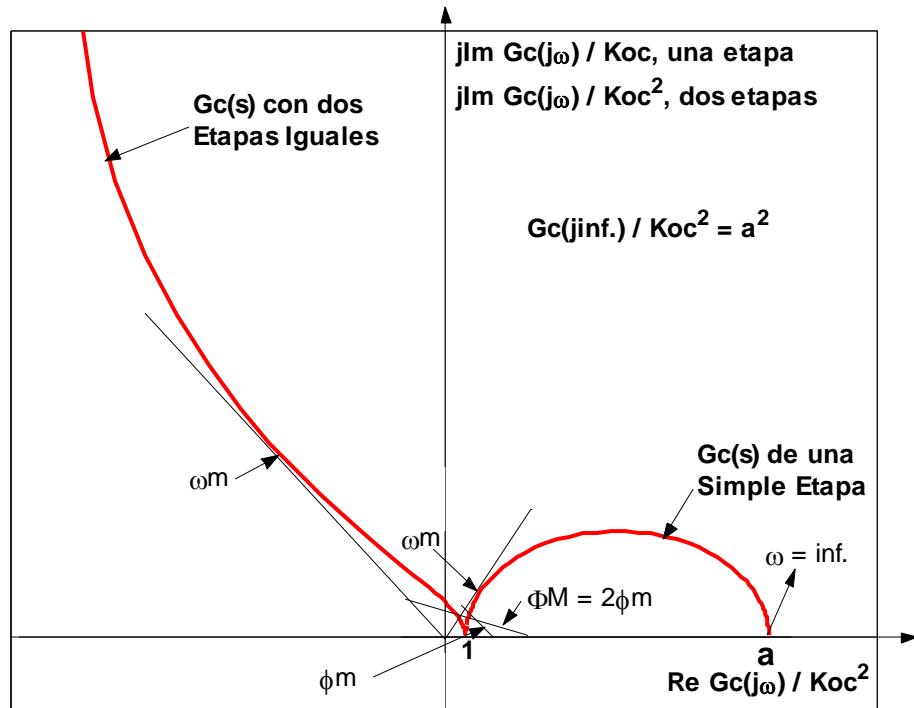


Figura 30

Para cada etapa del controlador de dos etapas se tendrá que:

$$\operatorname{sen} \phi_m = \operatorname{sen} \frac{\phi_M}{2} = \frac{a-1}{a+1} \rightarrow \boxed{a = \frac{1 + \operatorname{sen} \left(\frac{\phi_M}{2} \right)}{1 - \operatorname{sen} \left(\frac{\phi_M}{2} \right)}}$$

Expresión que nos da el “ a ” de cada etapa, estimando el ϕ_M .

Como $\omega_m \equiv \omega_M$, se tiene que:

$$\omega_M = \frac{1}{\sqrt{aT}} \rightarrow \boxed{T = \frac{1}{\omega_M \sqrt{a}}} \text{ será el } T \text{ de cada etapa.}$$

Para determinar ω_M se calculará:

$$-[20 \log a] = -(a, dB) \Rightarrow \omega_M \equiv \omega_g$$

Ejemplo 4:

Volvamos al sistema del ejemplo 3 que no tenía solución con una etapa de adelanto de fase como ya se discutió.

La función de transferencia de la planta a controlar era la siguiente:

$$Gp(s) = \frac{100}{s(s+5)(s+10)}$$

Si se cambian las especificaciones de funcionamiento y se hacen mas rigurosas, con mas razón no se podrán cumplir con una sola etapa de adelanto de fase, la modificación será:

$$\begin{cases} 1^o) Kv \geq 40 \text{ seg.}^{-1} \text{ antes era } 30 \text{ seg.}^{-1} \\ 2^o) MF \geq 55^\circ \text{ antes era } 40^\circ \end{cases}$$

Supongamos que se estima $\phi_M = 120^\circ$.

Por lo tanto:

$$a = \frac{1 + \sin 60^\circ}{1 - \sin 60^\circ} 13.93 \quad \text{se tomará} \quad a = 14$$

$$-[20 \log a] = -[20 \log 14] = 22.92 \text{ dB} \Rightarrow -23 \text{ dB}$$

En consecuencia de un diagrama de Bode de $|Koc^2 Gp(j\omega)|, \text{dB}$ en función de la frecuencia se obtiene: (ahora $Koc=20$)

$$\omega_M = \omega_g = 29.8 \text{ rad/seg} \quad \text{y} \quad |Koc^2 Gp(j\omega)| = -241.9^\circ$$

$$MF = 180^\circ - 241.9^\circ + 120^\circ = 58^\circ > 55^\circ$$

Por lo tanto:

$$T = \frac{1}{\omega_g \sqrt{a}} = \frac{1}{29.8 \sqrt{14}} \Rightarrow T = 0.009 \text{ seg.}$$

$$\text{Como } Koc^2 = \frac{A^2}{a^2} = 20 \Rightarrow A = \sqrt{20a^2} = \sqrt{20 \times (14)^2}$$

$$A = 62.6$$

Por ende la función de transferencia de $Gc(s)$ será:

$$Gc(s) = 3920 \frac{(s + 7.94)^2}{(s + 111.11)^2}$$

Este sería un diseño aceptable pues además de tener el $MF = 58^\circ > 55^\circ$, también:

$$\omega_g = 29.8 \text{ rad/seg}, M_R = 1,048, W_{AB} \cong 53,21 \text{ rad/seg} \quad \text{y} \quad MG = 16,77 \text{ dB}$$

Por lo tanto se puede sintetizar el controlador.

La respuesta temporal del sistema diseñado con sus atributos se muestra en la figura 31 y los atributos en el dominio frecuencial en las figuras 32 y 33.

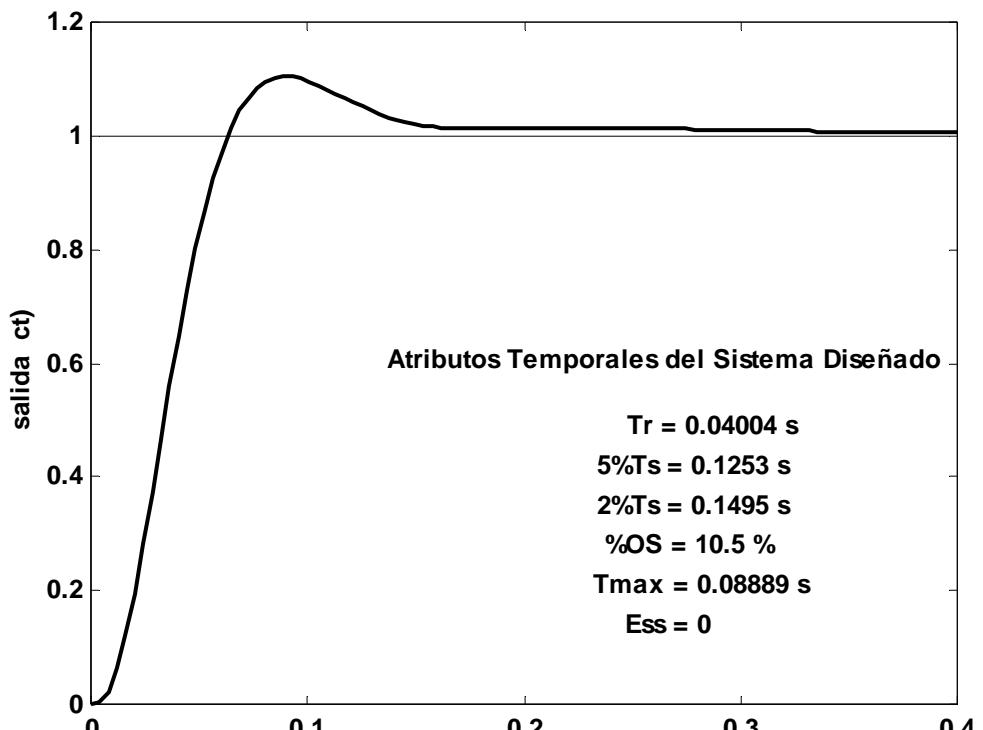


Figura 31

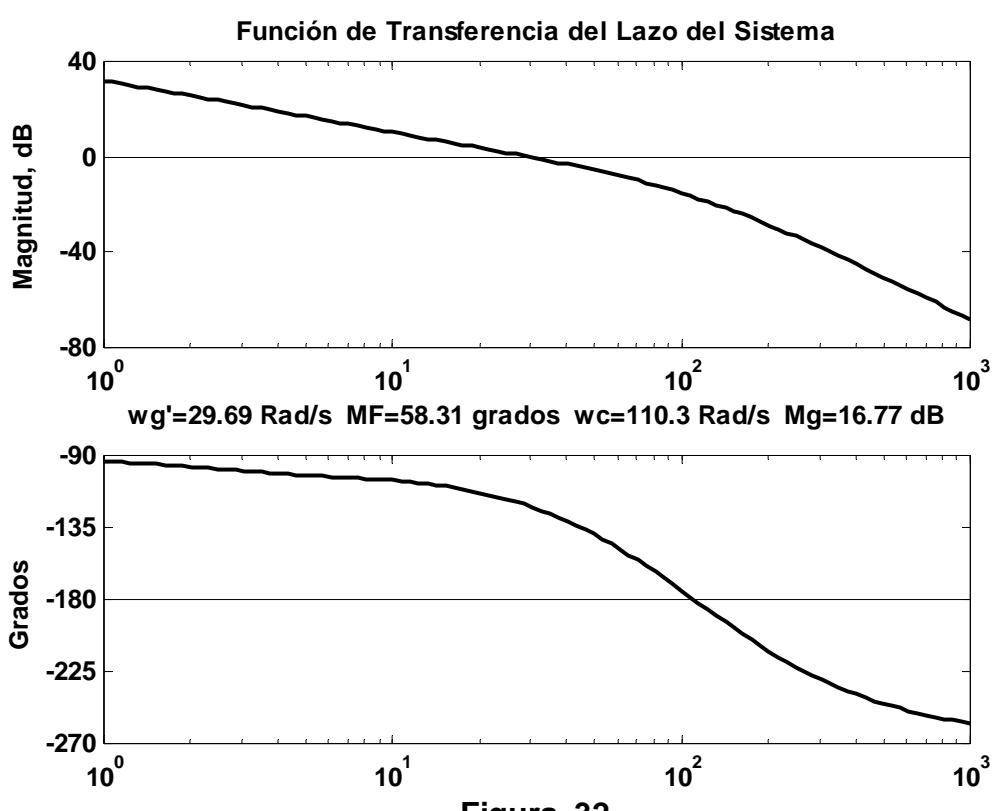


Figura 32

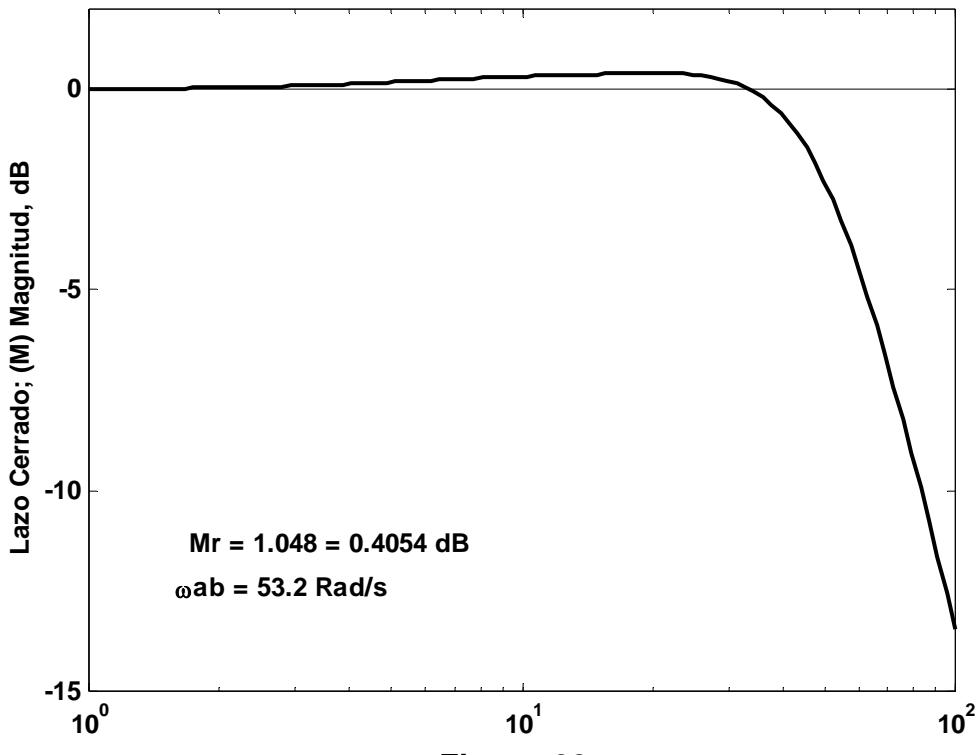


Figura 33

Controlador de Atraso de Fase.

Ya se mencionó un controlador básico con amplificadores operacionales que se utiliza muy a menudo para la compensación de sistemas por retardo de fase.

Su función de transferencia es:

$$G_c(s) = \frac{A(s + 1/aT)}{(s + 1/T)} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a < 1 \\ T \rightarrow \text{relativamente grande, (unidades, decenas, centenas, etc.)} \end{cases}$$

Por ende agregar un polo y un cero, el polo más cerca del origen del plano s , pero muy cerca entre si: La distancia entre ambos viene determinada por el valor del parámetro a .

Diagrama Polar del Controlador de Atraso de Fase.

El trazo polar de la Función de Transferencia del controlador de atraso de fase está representado en la figura 34 para dos valores distintos de a . Como en un controlador de avance de fase, para un valor de a dado, el ángulo formado por la tangente trazada al semicírculo desde el origen y el eje real positivo da el máximo retardo de fase que se puede obtener con la red. Cuando a disminuye el máximo retardo de fase aumenta, tiendiendo a -90° cuando $a \rightarrow 0$. La frecuencia ω_m disminuye al crecer a .

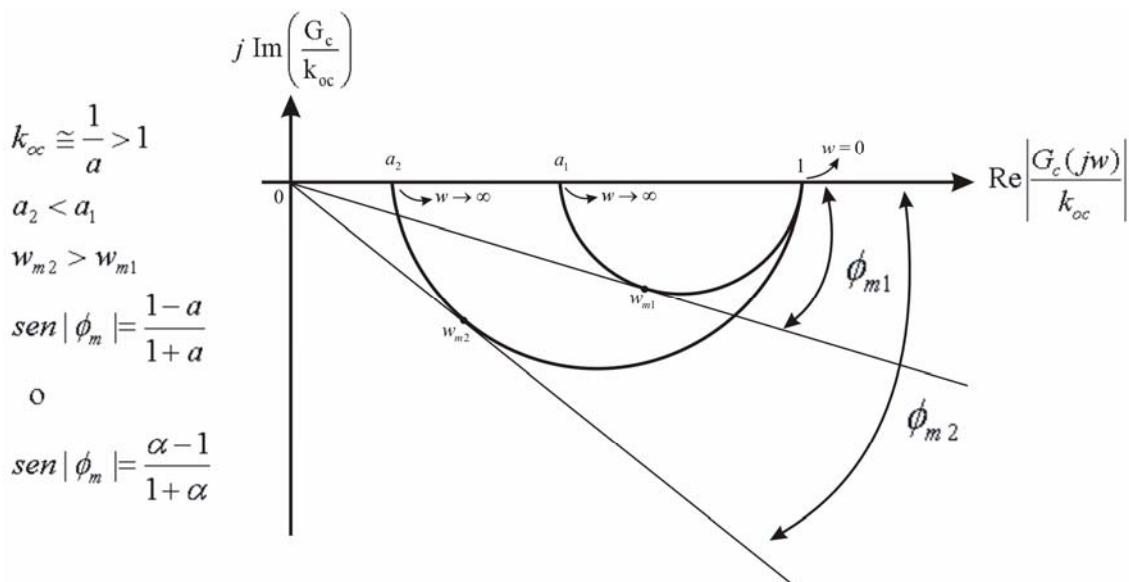


Figura 34

Lugar de Bode de un Controlador de Retardo de Fase.

El diagrama de Bode de un controlador de retardo de fase tiene dos frecuencias esquinas, una debida al cero para $\omega = \frac{1}{aT}$ y una al polo para $\omega = \frac{1}{T}$. El diagrama de Bode para $K_{oc}G_c(j\omega)$ está representado en la fig.35.

Puesto que las funciones de transferencia de los controladores de avance de fase tienen "idéntica" forma excepto por el valor del factor constante a , puede demostrarse fácilmente que el máximo retardo de fase de una red de éste tipo tiene una relación con a también idéntica a la red de avance de fase.

El proyecto de la compensación por retardo de fase de sistemas, sin embargo no se fundamenta en este máximo defasaje, mas bien utiliza la atenuación del mismo para las altas frecuencias. Se señalo que para la compensación por avance de fase, la función del controlador es aumentar la fase del sistema en las proximidades de la frecuencia de cruce de ganancia (ω_g), mientras que la curva de amplitud del lugar de Bode permanecerá "casi" sin modificar.

Pero normalmente ω_g se mueve hacia las altas frecuencias como consecuencia de este tipo de controlador.

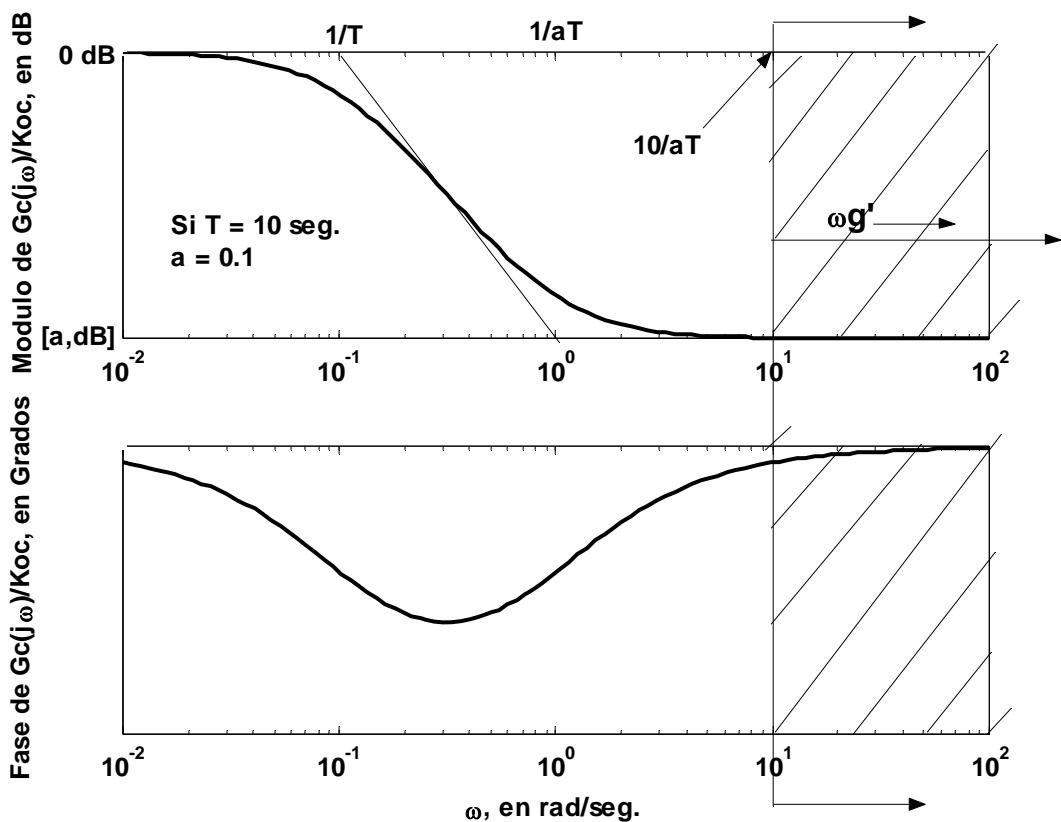


Figura 35: Lugar de Bode de un Controlador de Retardo de Fase.

En la compensación por retardo de fase, el controlador se emplea para desplazar ω_g hacia las bajas frecuencias mientras se procura que la curva de fase del lugar de Bode permanezca relativamente sin modificación. Para ω_g . Para qué pase esto se deberá intercalar la $G_c(s)$ de modo que la nueva ω_g esté en el rango $\frac{10}{aT} < \omega_g < \infty$ como se puede ver en la figura 35.

Diseño de un Controlador de Retraso de Fase Usando el Diagrama de Bode.

Del mismo modo que para el diseño de un controlador de adelanto de fase, el trazo de Bode es un medio muy útil para la síntesis de un controlador de atraso de fase en el dominio frecuencial. Como ya se discutió, la función primaria de éste controlador es brindar atenuación en el rango de altas frecuencias para dar a un sistema suficiente margen de fase. La característica de retardo de fase no tiene importancia en este caso.

Puede sintetizarse el procedimiento de diseño como sigue:

- 1º) Determinar la ganancia $K_{oc} = A/a$ del controlador tal que se satisfaga el requerimiento de coeficiente de error especificado para el régimen permanente.

2º) Con la ganancia K_{oc} así determinada trazar el diagrama de Bode del sistema básico y determinar los márgenes de fase y ganancia del mismo.
 3º) Si las especificaciones respecto a márgenes de fase y ganancia no son satisfechas, se deberá estimar la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω_g' .

Esta frecuencia estará donde el ángulo de fase de $K_{oc}G_p(s)$ es igual a -180° más el margen de fase requerido. Este margen de fase requerido es el especificado mas 5° a 10° (el agregado de 5° a 10° compensa el retardo de fase del controlador de atraso de fase). O sea la ω_g' deberá ser tal que:

$$M.F.req = M.F.esp + 5^\circ \text{ a } 10^\circ = 180^\circ + |K_{oc}G_p(j\omega_g')|$$

4º) Determinar la atenuación necesaria (a) para reducir la curva de amplitud a 0dB en la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω_g' . Notando que esta atenuación es $20\log a$, determinar el valor de " a " de la siguiente forma:

$$20\log a = -|K_{oc}G_p(j\omega_g')|, dB, \text{ por lo tanto el parámetro "a" será:}$$

$$a = 10^{\frac{-|K_{oc}G_p(j\omega_g')|, dB}{20}}$$

5º) Habiendo determinado "a", solo es necesario el valor adecuado de T, para completar el diseño. Con referencia a la característica de fase del controlador de atraso de fase ya mencionada, es evidente que si la frecuencia esquina superior del mismo ($1/aT$), se localiza mucho más abajo de ω_g' , la variación de fase en ω_g' del sistema básico no se afectará apreciablemente con el agregado del controlador de atraso de fase. Generalmente la frecuencia esquina superior ($1/aT$), se ubica a una frecuencia aproximadamente de una década por debajo del nuevo cruce de ganancia, es decir:

$$\frac{1}{aT} = \frac{\omega_g'}{10} \text{ en radianes / segundo. -}$$

De donde:

$$T = \frac{10}{\omega_g' a} \text{ en seg.}$$

6º) Se inspecciona el trazo de Bode de la función de transferencia del lazo del sistema diseñado, para ver si se cumplen las especificaciones de funcionamiento requeridas, en caso contrario se elige otra ω_g' menor, si no se sigue con el paso siguiente.

7º) Se sintetiza el controlador con los amplificadores operacionales.-

Como $R_2 = \frac{T}{C}$ y $R_1 = a R_2$ si se fija la capacidad C se obtiene R_1 y R_2 .-

Además: $A = koc \times a = \frac{R_4}{R_3} \Rightarrow R_4 = Koc \times a \times R_3$, se fija R_3 y determina R_4 .-

Veremos algunos ejemplos de diseño,

Ejemplo 5:

Consideremos el sistema visto anteriormente en el ejemplo 3, en el cual la compensación con una etapa de avance de fase resultó ineficaz. Se realizó un diseño con dos etapas de adelanto de fase que resultará satisfactorio si el incremento del ancho de banda puede ser tolerado.

Si intentará hacer un diseño con una etapa de retraso de fase.

La planta a controlar tenía la función de transferencia siguiente:

$$Gp(s) = \frac{2}{s(1+0.2s)(1+0.1s)} \equiv \frac{100}{s(s+5)(s+10)}$$

Las especificaciones eran:

$$\begin{cases} 1^{\circ}) Kv \geq 30 \text{ seg.}^{-1} \\ 2^{\circ}) MF \geq 40^{\circ} \\ 3^{\circ}) MG \geq 12 dB \end{cases}$$

Si se decide emplear un controlador de atraso de fase de una etapa, el procedimiento de diseño es el siguiente:

$$1^{\circ}) Kv = \lim_{s \rightarrow 0} sKocGp(s) = 2Koc \geq 30 \text{ seg.}^{-1} \Rightarrow Koc \geq 15$$

Con $Koc = 15$ el sistema básico satisface los requisitos de comportamiento en régimen permanente.

2º) Con $KocGp(s) = \frac{1500}{s(s+5)(s+10)}$, se traza el diagrama de Bode en magnitud

y fase, del mismo surge, como se determinó en el ejemplo 3, que:

$$\omega_g = 9.77 \text{ rad / seg.} ; \quad MF = -17^{\circ} \quad y \quad MG = -6 dB$$

Por ende el sistema básico resulta inestable.

3º) Para determinar la nueva ω_g' se supondrá que:

$$MF_R = MF_e + \Delta^{\circ} = 40^{\circ} + 6^{\circ} = 46^{\circ}$$

Los 6° son para compensar el atraso de fase adicionado por el controlador en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Por lo tanto, como:

$$MF_R = 180^{\circ} + \angle Koc Gp(j\omega_g') \Rightarrow \angle Koc Gp(j\omega_g') = 46^{\circ} - 180^{\circ} = -134^{\circ}$$

Por ende entrando con -134° se obtiene que:

$$\omega_g' = 2.74 \text{ rad / seg}$$

4º) Según la curva de módulo la ganancia de $|Koc Gp(j\omega_g')|$, en

$\omega_g = \omega_g' = 2.74 \text{ Rad / seg.}$ es de 19.35 dB , por lo tanto el controlador de atraso deberá proporcionar, al sistema básico, una atenuación de -19.35 dB , a esa frecuencia, esto se indica en la figura 36. Por lo tanto:

$$a = 10^{\frac{-|K_{oc} G_p(j\omega')|, dB}{20}} = 10^{\frac{-19.35 \text{ dB}}{20}} = 0.1077 \quad \text{por lo tanto se elige} \Rightarrow a = 0.11$$

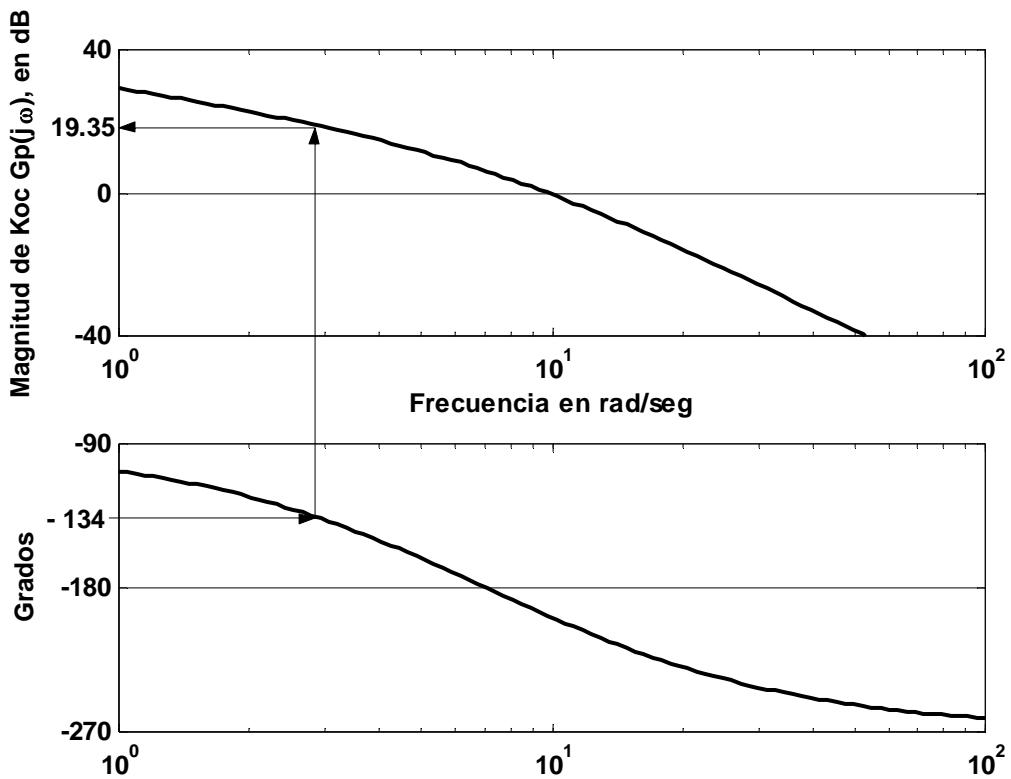


Figura 36

Como se puede apreciar, las dos frecuencias esquinas del controlador de atraso de fase deben situarse, en este ejemplo en particular, con una separación de casi una década a fin de que produzca la atenuación requerida en la frecuencia ω_g' .

5º) La frecuencia esquina superior del controlador, $1/aT$, se localizara a una frecuencia que este al menos una década más abajo que ω_g' , o sea:

$$\frac{1}{aT} = \frac{\omega_g'}{10} \Rightarrow T = \frac{10}{\omega_g' a} = \frac{10}{2.74 \times 0.11} = 33.2 \text{ seg. -}$$

$$T = 33.2 \text{ seg.}$$

$$\text{Por ende: } aT = \frac{10}{\omega_g'} = \frac{10}{2.74} = 3.65. -$$

Las frecuencias esquinas del controlador estarán en:

$$\begin{cases} \frac{1}{T} = 0.030 \text{ rad / seg. -} \\ \frac{1}{aT} = 0.274 \text{ rad / seg.} \end{cases}$$

6º) La función de transferencia del lazo del sistema diseñado será:

$$G(s) = \frac{Gc(s)}{Koc} \times Koc Gp(s) = \frac{15(1+3.65s)}{(1+33.2s)} \times \frac{2}{s(1+0.2s)(1+33.2s)}$$

$$G(s) = \frac{30(1+3.65s)}{s(1+0.2s)(1+0.1s)(1+33.2s)}$$

En la figura 37 se grafica la traza de Bode de la función de transferencia del sistema diseñado, en la cual se puede ver que se satisfacen todas las especificaciones solicitadas. Por lo cual el diseño es aceptable.

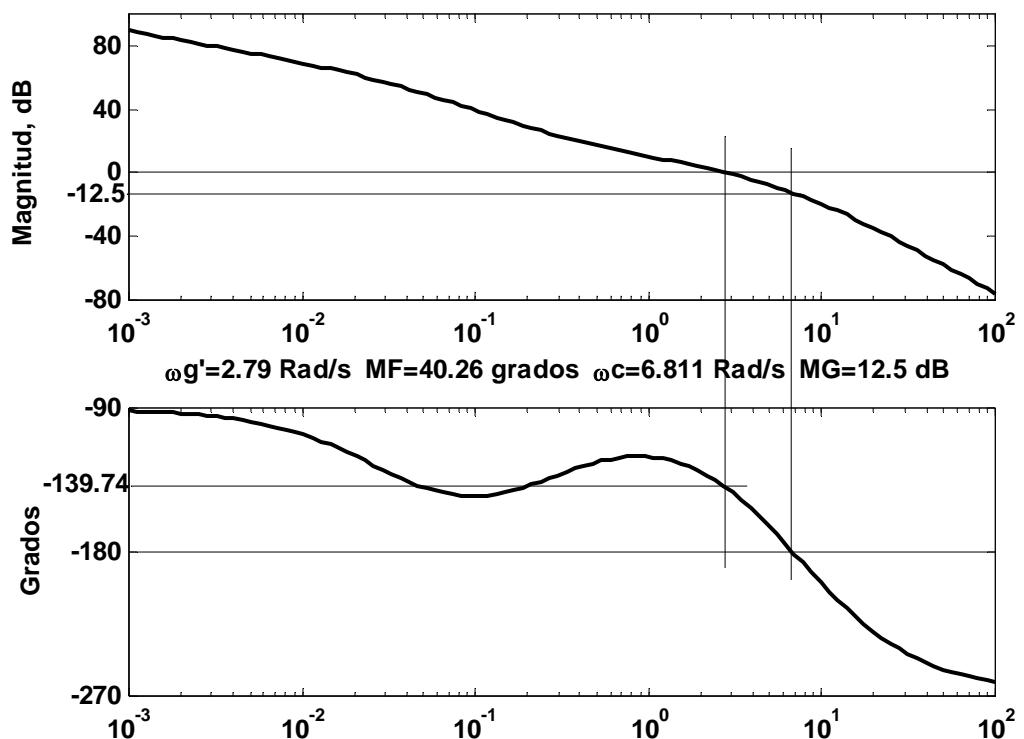


Figura 37

7º) La función de transferencia del controlador será:

$$Gc(s) = 15 \frac{(1+3.65s)}{(1+33.2s)} = 1.65 \frac{(s+0.274)}{(s+0.030)}$$

Si se elige: $C = 10\mu F$

$$R_2 = \frac{T}{C} = \frac{33.2}{10} \Rightarrow R_2 = 3320 K\Omega$$

$$R_1 = aR_2 = 0.11 \times 3320 \Rightarrow R_1 = 365.2 K\Omega$$

$$\frac{A}{a} = Koc \Rightarrow A = Koc \times a = 15 \times 0.11 \Rightarrow A = 1.65$$

$R_4 = AR_3$, se elige R_3 y surge R_4

$$\text{Si } R_3 = 1 K\Omega \Rightarrow R_4 = 1.65 K\Omega$$

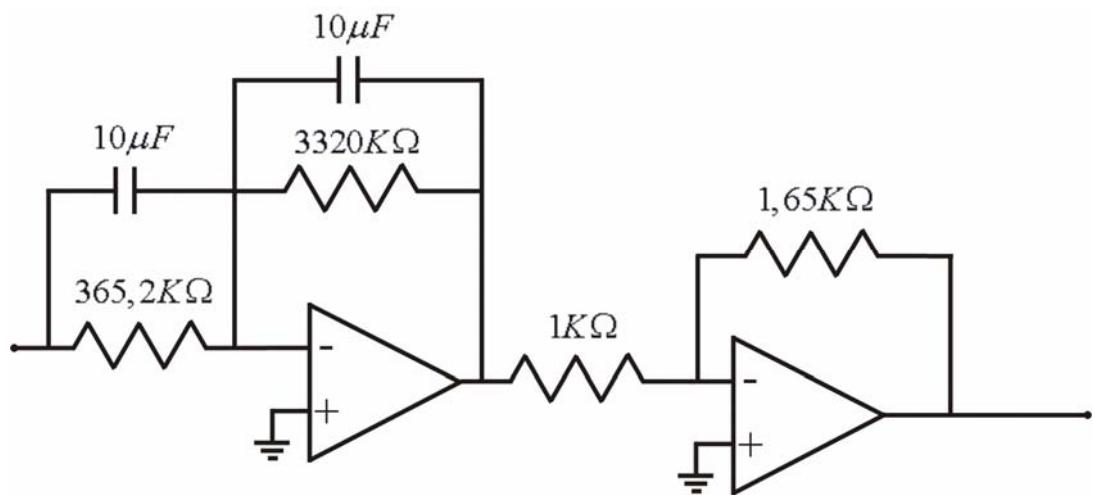


Figura 38

En la figura 38 se implemento el controlador diseñado con amplificadores operacionales.

Las figuras 39 y 40 muestran el diagrama de Bode en magnitud y fase respectivamente, de $(K_{oc} G_p(s))$, $(G_c(s)/K_{oc})$ y $G(s) = G_c(s) G_p(s)$.

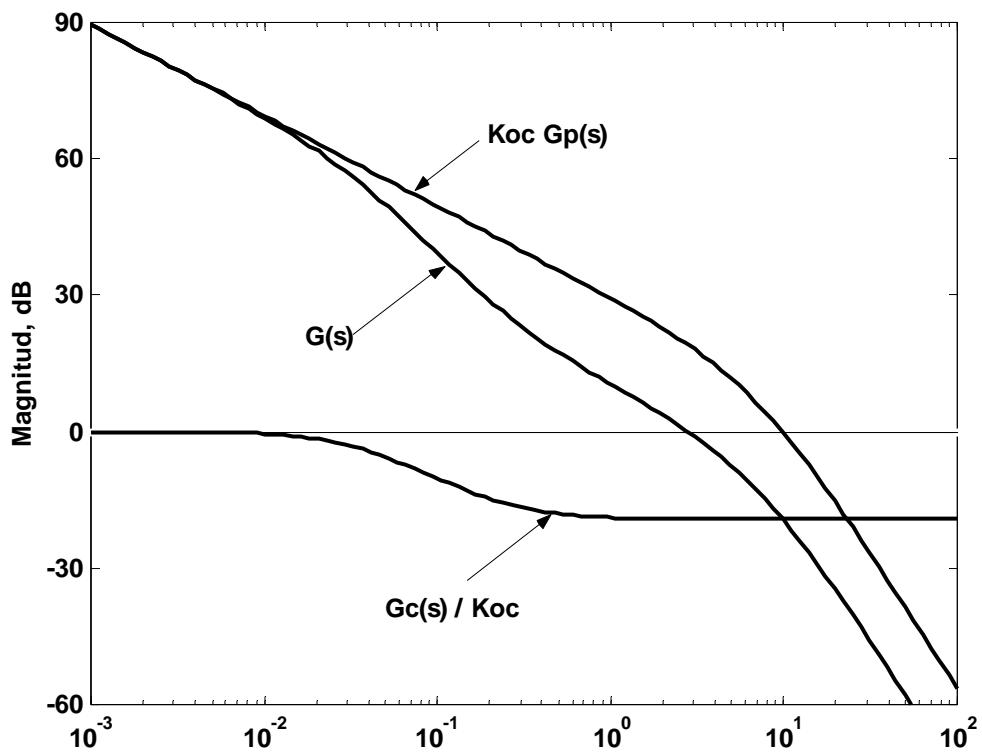


Figura 39

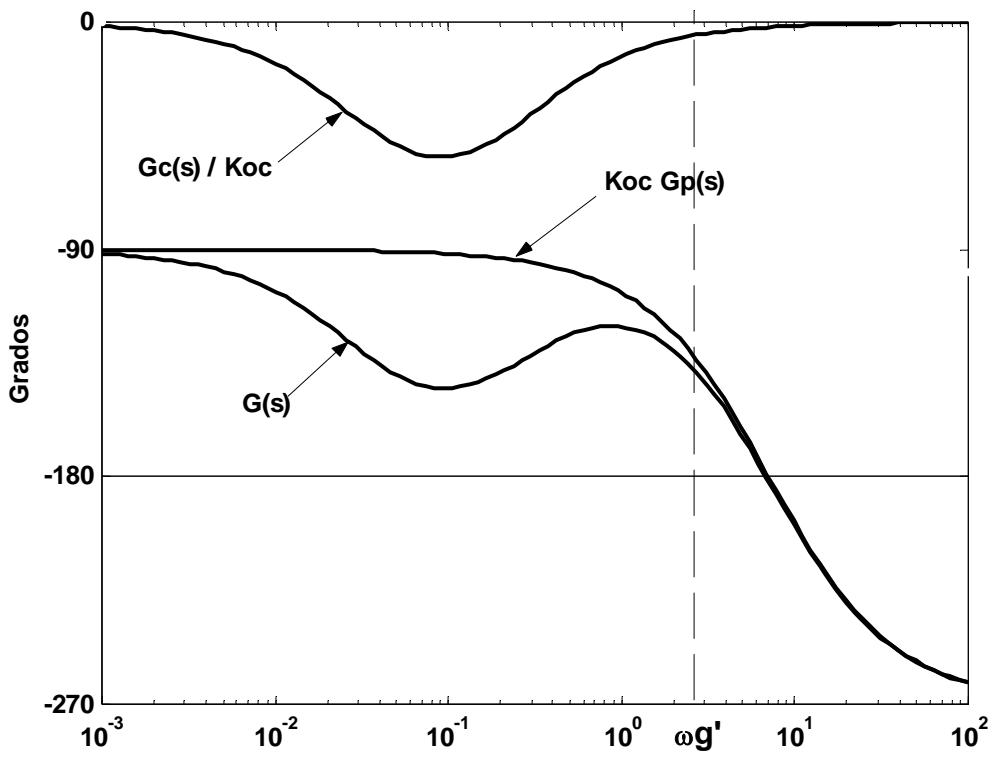


Figura 40

La curva de magnitud comparada con la variación de fase, (traza de Nichols), de la $G(s)$ del sistema diseñado, se muestra en la figura 41.

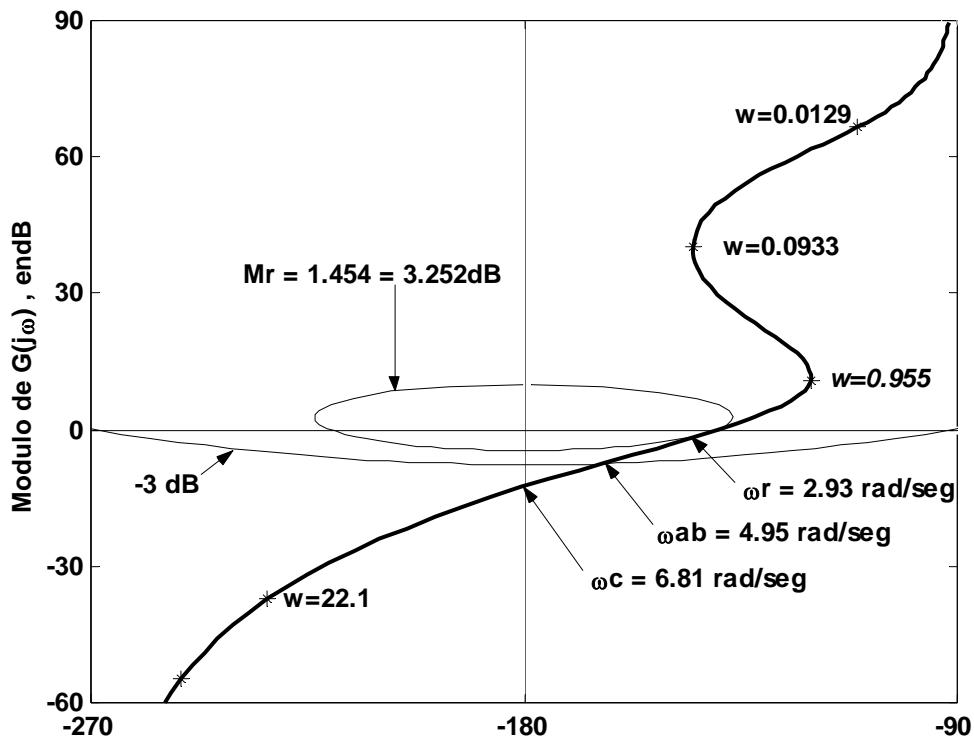


Figura 41

Puede verse que el M_R del sistema compensado es aproximadamente de

$M_R = 1.454$ o en dB de 3.252 dB.

El ancho de banda del sistema se reduce de 13.5 rad/seg. a 4.952 rad/seg.

La frecuencia de resonancia resulta ser de: 2.93 rad/seg.

También estos datos se pueden obtener con la función de transferencia del sistema de lazo cerrado $M(s)$.

$$M(s) = \frac{165(s + 0.274)}{(s + 0.30)(s + 11.94)(s^2 + 2.79s + 12.79)}$$

La configuración de polos y ceros del sistema diseñado resulta ser la siguiente:

$$\begin{cases} \lambda_{1-2} = -1.39 \pm j3.29 \\ \lambda_3 = -11.95 \\ \lambda_4 = -0.30 \\ Z_1 = -0.274 \end{cases}$$

El lugar de las raíces del sistema básico y del diseñado se muestran en la figura 42. Como se puede ver en la zona dominante son casi coincidentes como ya se mencionó oportunamente. Con este tipo de compensación se elevó el K_v a $K_v=30$ seg $^{-1}$ y se bajó la ganancia del lazo de manera que el sistema sea estable, paso de 1500 a 165.-

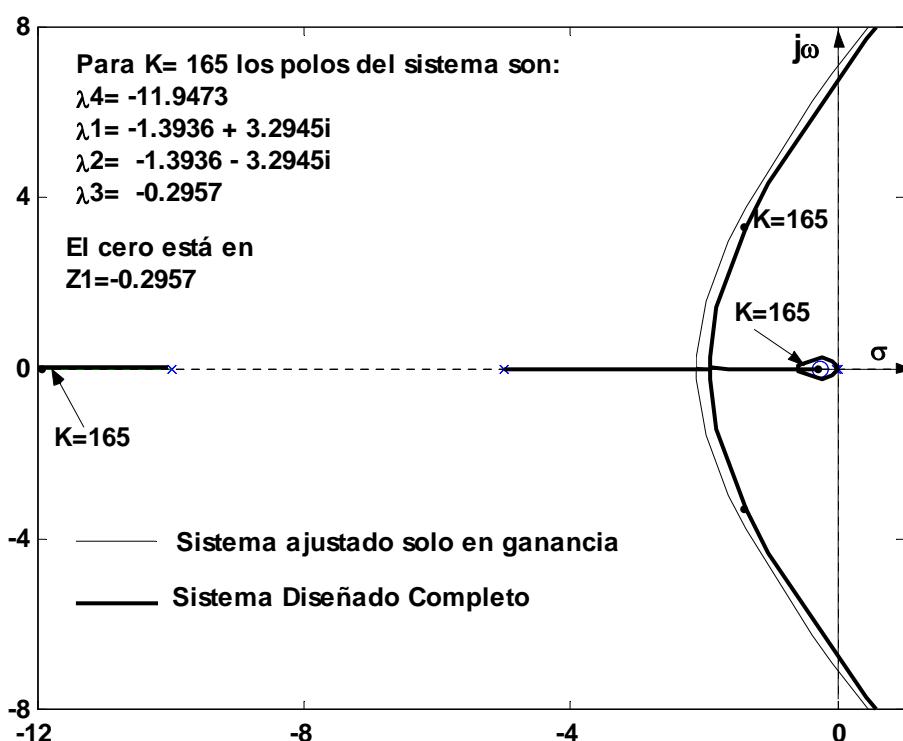


Figura 42

De acuerdo a la configuración de polos y ceros de $G(s)$, puede verse que el polo λ_4 está alejado hacia la izquierda más de (8.5σ) por ende su efecto en la respuesta es casi despreciable. El cero está muy próximo al λ_3 , separado del mismo casi 22 milésimas, uno puede pensar en principio que el efecto

de este par, en cuanto al $M_p(\%)$ es más despreciable que el efecto del polo λ_4 , pero esto no es verdad. Esto se debe a que el par, $(Z_1 - \lambda_3)$ está muy a la derecha del par de polos complejos conjugados, a pesar de la muy poca separación entre el polo y el cero, como ya se estudió en el diseño de este tipo de controladores en el dominio temporal.

En definitiva el $M_p(\%)$ se incrementa un poco respecto al que tendría solo con λ_{1-2} y el tiempo de pico también, cosa que se ve muy claro en la figura 43, donde se muestra la respuesta del sistema diseñado al escalón unitario en la señal de referencia y del sistema típico de 2º orden con los mismos polos complejos,

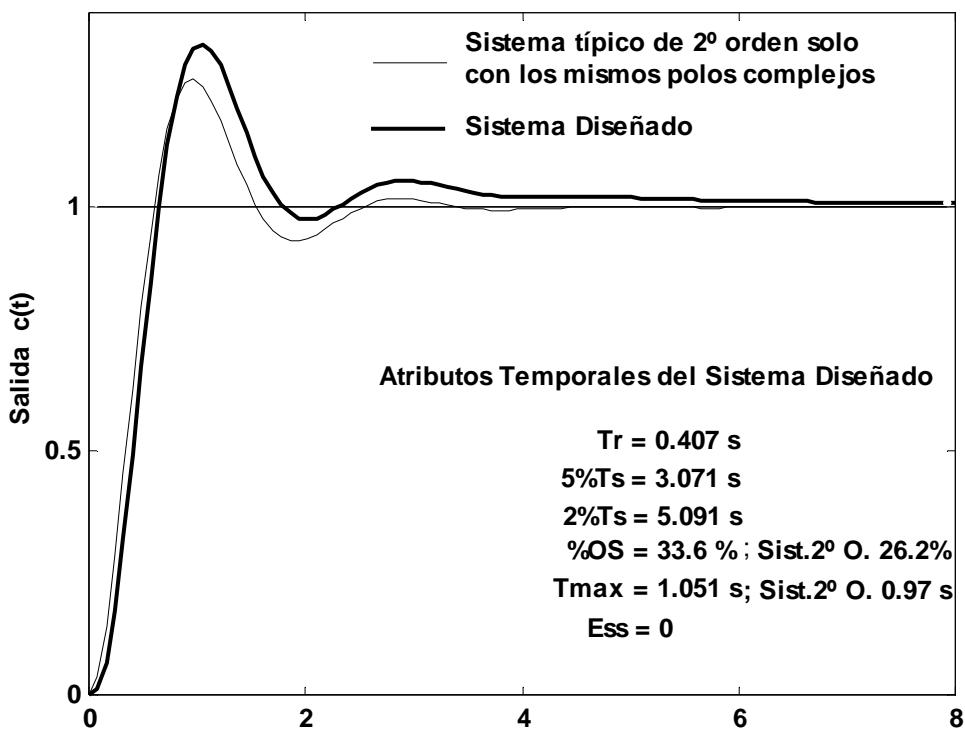


Figura 43

Ejemplo 6:

Consideremos el sistema en el cual la compensación por adelanto de fase con una etapa no era eficaz y con dos etapas podría resultar un ancho de banda muy grande, con el consiguiente problema a los ruidos. (Ejemplo 4). La función de transferencia de la planta a controlar era:

$$G_p(s) = \frac{2}{s(1+0.1s)(1+0.2s)} = \frac{100}{s(s+5)(s+10)}$$

Las especificaciones serán más exigentes en cuanto al régimen de estado permanente:

$$1^{\circ}) \quad K_v \geq 100 \text{ seg}^{-1}$$

$$2^{\circ}) \quad M_F \geq 40^\circ$$

$$3^{\circ}) \quad M_G \geq 12 \text{ dB}$$

En el ejemplo 4, la 1º era $K_v \geq 40 \text{ seg}^{-1}$

El procedimiento de diseño es el siguiente:

1º) El K_{oc} deberá valer: $K_{oc} \geq 50$, para que $K_v \geq 100 \text{ seg.}^{-1}$.

2º) El diagrama de Bode de $[K_{oc} G_p(j\omega)]$, dB con $K_{oc}=50$ está hecho en la figura 44, del mismo resulta que:

$$\omega_g = 15.93 \text{ rad/seg.}; \quad MF = -40.44^\circ \quad y \quad MG = -16.48 \text{ dB.}$$

El sistema resultó inestable como ya se sabía.

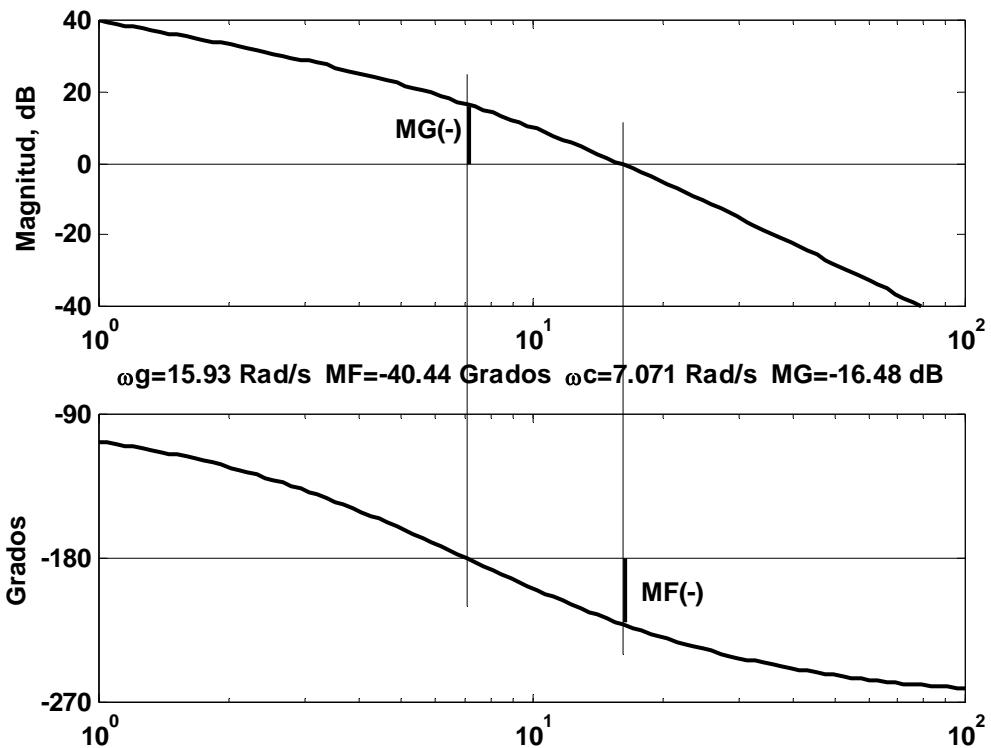


Figura 44

3º) Determinación de la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω_g'

Se tiene que: $MF_{req.} = MF_{esp.} + \Delta^\circ$, se elegirá: $\Delta^\circ = 6.5^\circ$, por lo tanto:

$MF_{req.} = 40^\circ + 6.5^\circ = 46.5^\circ$, por ende la fase de $K_{oc} G_p(j\omega)$ deberá ser :

$\angle K_{oc} G_p(j\omega_g') = -133.5^\circ$, de la figura resulta que: $\omega_g' = 2.7 \text{ rad/seg.}$

4º) Determinación del parámetro "a":

De la misma figura se determinó que:

$$|K_{oc} G_p(j\omega_g')|, \text{dB} = 29.95 \text{ dB} \Rightarrow a = 10^{\frac{-29.95 \text{ dB}}{20}} = 10^{-1.5} = 0.0318, \text{ se adoptará.}$$

$a = 0.032$

5º) Determinación de T:

$$T = \frac{10}{\omega_g' a} = \frac{10}{2.7 \times 0.032} = 115.74 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T = 115.74 \text{ seg.} \\ aT = 3.7 \end{cases}$$

6º) La función de transferencia $G_c(s)/K_{oc}$, será:

$$\frac{Gc(s)}{Koc} = \frac{(1+3.7s)}{(1+115.74s)} \Rightarrow \angle Gc(j\omega g^+) / Koc = -5.53^\circ$$

Como en valor absoluto $5.53^\circ < 6.5$, por ende se cumplirá que el MF>40°.
La función de transferencia del lazo será entonces:

$$G(s) = Gc(s) \times Gp(s) = \frac{100(1+3.7s)}{s(1+0.1s)(1+0.2s)(1+115.74s)}$$

Si se grafica el diagrama de bode de la misma se obtendría que:

$$MF = 40.72^\circ > 40^\circ \quad MG = +12.72 dB > 12 dB$$

$$\omega g^+ = 2.72 \text{ rad / seg.} \quad \omega c = 6.79 \text{ rad / seg.}$$

Se pueden obtener también los datos tales como, frecuencia de resonancia, máximo de resonancia y la frecuencia del ancho de banda.

$$\omega_R = 2.85 \text{ rad / seg.} \quad M_R = 1.44 \equiv 3.177 dB \quad y \quad \omega_{AB} = 4.822 \text{ rad / seg.}$$

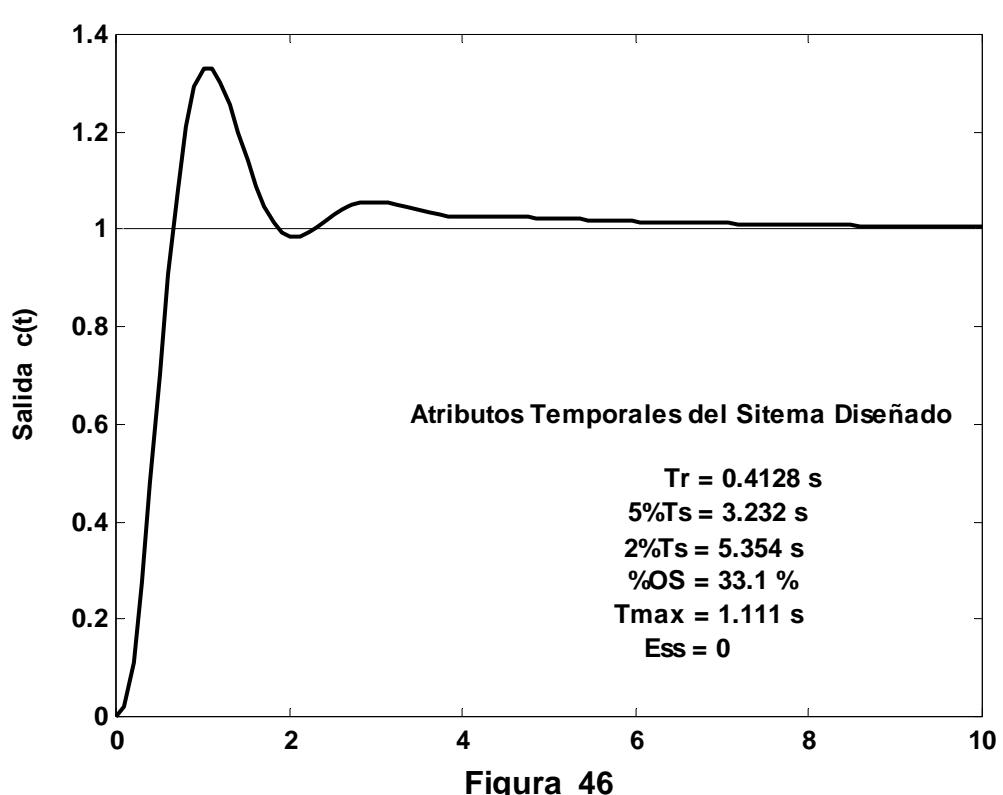
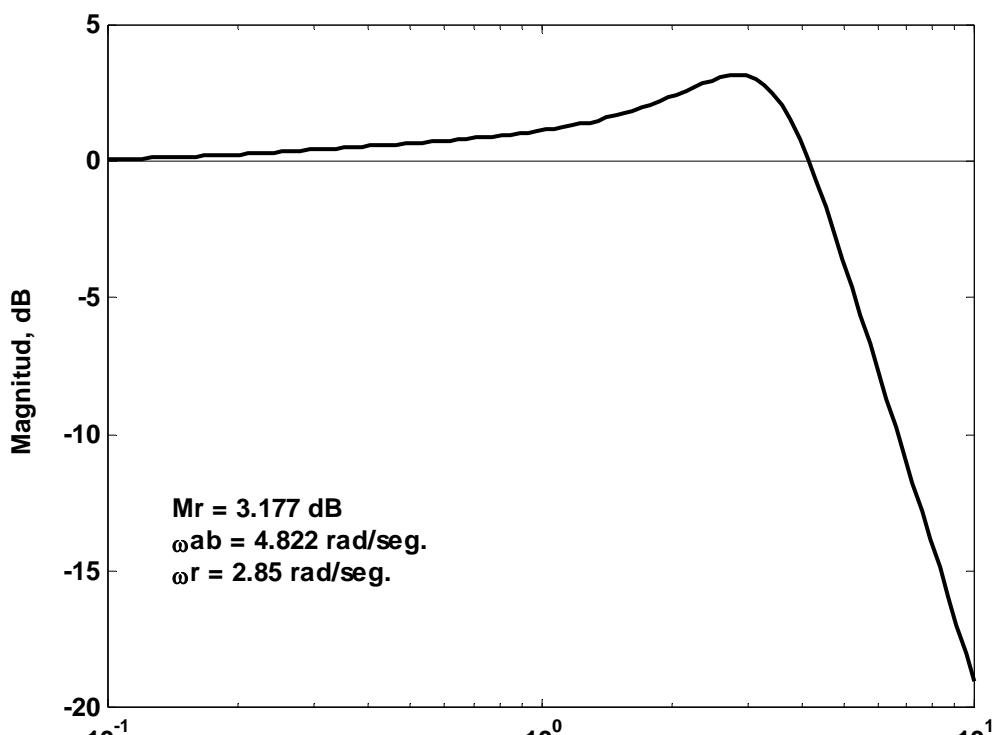
Como se puede observar comparando con la solución con dos etapas de adelanto en la cual $\omega_{AB} = 53.2 \text{ rad / seg.}$ el mismo resulta con una etapa de atraso de casi once veces menor, lo cual es beneficioso desde el punto de vista de los ruidos, pero no así desde el punto de vista de la velocidad de respuesta. Es mas lenta pues ahora $T_P=1.06 \text{ seg.}$ y antes era de $T_P=0.088 \text{ seg.}$ Además la sobreelongación resultó para esta solución de $M_p=33.1\%$. Si es muy alta se puede agregar una etapa de adelanto de fase o un PD, y hacer el sistema también un poco mas rápido.

La función de transferencia y la configuración de polos y ceros del sistema compensado son:

$$M(s) = \frac{159.8(s+0.27)}{(s^4 + 15.01s^3 + 50.13s^2 + 160.3s + 43.2)}$$

$$\begin{cases} \lambda_{1-2} = -1.406 \pm j3.218 \\ \lambda_3 = -11.9027 \\ \lambda_4 = -0.2943 \\ Z_1 = -0.2703 \end{cases}$$

El diagrama de Bode del Sistema diseñado y la respuesta temporal a un escalón de entrada en la señal de referencia se muestran en las figuras 45 y 46.



Ejercicio 7:

En este ejemplo se diseñara un controlador serie de atraso de fase, en un sistema de control de posición, con realimentación unitaria, cuya planta tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{625}{s(s+25)}$$

Las especificaciones de funcionamiento del sistema de control son:

- 1º) Que el margen de fase sea mayor o igual a 45° : $MF \geq 45^\circ$
- 2º) Que el error de estado estable a una entrada rampa unitaria sea menor o igual a 0.01 radianes. $e_{EE} \leq 0.01 \text{ rad}$.

Los pasos a seguir serán:

- 1º) Para que se cumpla que el $e_{EE} \leq 0.01 \text{ rad}$. deberá ser: $K_{oc} = 4$.
- 2º) Del diagrama de Bode de $K_{oc} G_p(j\omega) = \frac{2500}{j\omega(j\omega+25)}$, se puede determinar que: $\omega_g = 4.7 \text{ rad/seg} \Rightarrow MF = 28^\circ$

3º) Para determinar la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω_g' , se supondrá que:

$$MF_{req.} = MF_{esp.} + 5^\circ = 45^\circ + 5^\circ = 50^\circ$$

Por lo tanto entrando en el diagrama de Bode con la fase de $K_{oc} G_p(j\omega')$ igual a -130° se obtiene que:

$$\omega_g' = 21 \text{ rad/seg.}$$

4º) Según la curva de magnitud de también surge que:

$$|K_{oc} G_p(j\omega')|, dB = 11.237 \text{ dB}$$

Por lo tanto:

$$a = 10^{\frac{-11.237 \text{ dB}}{20}} = 10^{-0.56185} = 0.274 \Rightarrow a = 0.274$$

5º) Para que el controlador no afecte apreciablemente la curva de fase en la nueva ω_g' , se elige la mayor de las frecuencias esquinas del controlador, $1/aT$, por lo menos una década por debajo de $\omega_g' = 21 \text{ rad/seg.}$. Por ende:

$$\frac{1}{aT} = \frac{\omega_g'}{10} \Rightarrow T = \frac{10}{a\omega_g'} = \frac{10}{0.274 \times 21} = 1.738 \text{ seg.} \Rightarrow T = 1.738 \text{ seg.}$$

Por lo Tanto:

$$aT = 0.476; \quad \frac{1}{T} = 0.575 \text{ rad/seg.} \quad y \quad \frac{1}{aT} = 2.1 \text{ rad/seg.}$$

Por lo tanto la función de transferencia del controlador resulta:

$$G_c(s) = \frac{4(1+0.476s)}{(1+1.738s)}$$

La función de transferencia del lazo del sistema diseñado será:

$$G(s) = G_c(s) G_p(s) = \frac{2500(1+0.476s)}{s(s+25)(1+1.738s)} \cong \frac{685(s+2.10)}{s(s+25)(s+0.575)}$$

Del diagrama de Bode de $G(j\omega)$, se obtiene que:

$$\omega_g = 21 \text{ rad / seg} \quad \text{y} \quad MF = 46^\circ > 45^\circ.$$

Los datos de la respuesta frecuencial del sistema diseñado se tendrá:

$$M(s) = \frac{685(s + 2.1)}{(s^3 + 25.58s^2 + 699.1s + 1438.5)} \equiv \frac{685(s + 2.1)}{(s + 2.22)(s^2 + 23.35s + 647.97)}$$

Del lugar de las raíces se pueden obtener la configuración de polos y ceros del sistema diseñado:

$$\begin{cases} \lambda_{1-2} = -11.676 \pm j22.6 \\ \lambda_3 = -2.22 \\ Z_1 = -2.1 \end{cases}$$

Una forma de verificar que $M(s)$ está bien determinada debería ser $M(0)=1$:

$$M(0) = \frac{685 \times 2.1}{2.22 \times 647.97} \approx 1; \text{ por ende está bien.}$$

Si se grafica el diagrama de Bode de $M(j\omega)$, dB se puede obtener:

$$\omega_R = 19.45 \text{ rad / seg} \quad M_R = 1.20 \equiv 2.25 \text{ dB} \quad \text{y} \quad \omega_{AB} = 34.5 \text{ rad / seg.}$$

Las respuestas al escalón unitario en la entrada se muestran en la figura 47, del sistema básico y del diseñado, para diferentes valores de T manteniendo el parámetro "a".

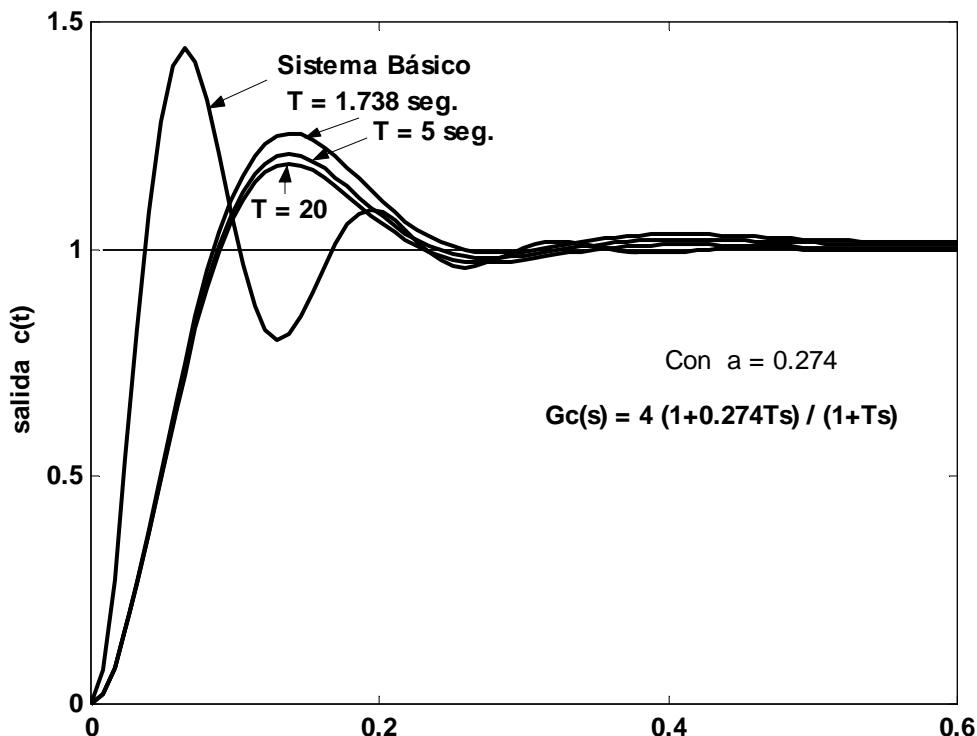


Figura 47

Se puede apreciar como se reduce la sobreelongación del sistema básico de 44.4% a 25.6%, cuando $T = 1.738$ seg, pero el tiempo de pico es incrementado notoriamente a $T_p = 0.137$ seg.

También se ve que un gran valor de T, (con el mismo "a", por ende con polo y el cero mas cerca del origen, o frecuencias esquinas del controlador mas chicas), nos da solo un ligero mejoramiento de la sobreelongación, pues como ya se sabe el valor de T no es crítico, cuando T = 5 es equivalente a fijar $(1/aT)$ aproximadamente 28 veces por debajo de la $\omega_g' = 21 \text{ rad / seg.}$. Similarmente para T = 20 corresponde fijar a $(1/aT)$ ciento diez y seis veces debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Otro efecto es la reducción del ancho de banda como se puede apreciar.

Efecto de la Compensación por atraso de Fase:

De los resultados de los ejemplos tratados, puede resumirse el efecto de la compensación por retardo de fase de la manera siguiente:

1. Para una estabilidad relativa dada, la constante de velocidad k_v aumenta (se mejora el régimen permanente).
2. la frecuencia de cruce de ganancia disminuye, es decir, el ancho de banda del sistema se reduce (hace el sistema un poco mas lento).
3. para una ganancia dada, la curva de amplitud de $G_x(j\omega)$ se atenúa, lo que permite la mejora de los márgenes de fase y de ganancia además de achicar el M_R del sistema.
4. el tiempo de respuesta es normalmente mas lento, puesto que la frecuencia ω_n y el A.B. disminuye

Compensación por Avance y Retardo de fase simultáneos:

En las secciones precedentes se ha visto que la compensación por avance de fase mejora normalmente el transitorio (tiempo de subida y rebalse), pero incrementa el A.B. del sistema. La compensación por retardo de fase mejora más la respuesta en régimen permanente que la estabilidad relativa, pero a menudo, produce un mayor tiempo de subida a causa de la disminución del A.B. del sistema. Por consiguiente los dos métodos tienen sus ventajas y desventajas. Sin embargo, hay muchos sistemas que no pueden mejorarse satisfactoriamente por el uso de uno u otro esquema. Hemos visto que hay sistemas que no pueden cumplir con las especificaciones pedidas con solo una red de avance de fase. Además especificaciones más exigentes pueden hacer inadecuado el uso tanto de la compensación por retardo de fase pura como por avance de fase, en tales casos un arreglo más práctico y versátil es el uso combinado de ambas, que presenta todas las ventajas de ambos esquemas, eliminándose algunos efectos no deseados.

Este controlador combina en consecuencia, los efectos de ambos en un solo elemento. Sin embargo el diseño de los controladores se puede realizar por separado.

La función de transferencia del controlador es:

$$G_c(s) = \frac{A_1}{a_1} \frac{(1+a_1T_1s)}{(1+T_1s)} \frac{A_2}{a_2} \frac{(1+a_2T_2s)}{(1+T_2s)} \quad \text{con} \quad a_1 > 1 \quad a_2 < 1$$

Se puede para su diseño, sintetizar la parte del atraso para conseguir en parte lo pedido y luego la de adelanto para satisfacer las especificaciones restantes.

La figura 48, muestra un posible controlador de Atraso-Adelanto.

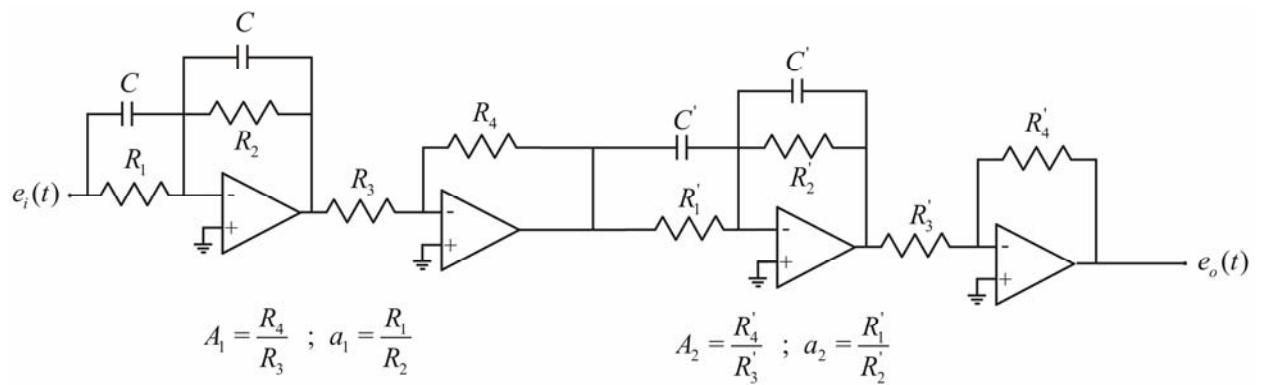


Figura 48

El método de diseño no es general, sino que depende de cada caso. Primero se puede por ejemplo diseñar la parte de atraso para conseguir el coeficiente de error determinado y algunas especificaciones a medias.

$$k_{oc2} = \frac{A_2}{a_2} = k_{oc} , \text{ parte de atraso } \frac{k_{oc}(1+a_2T_2s)}{(1+T_2s)}$$

En la parte de adelanto se puede hacer, para no alterar el coeficiente de error, $k_{oc} = 1 = \frac{A_1}{a_1}$ o sea $A_1 = a_1$ y ajustar a_1 y T_1 para completar las especificaciones pedidas.
Por ende puede poner:

$$G_c(s) = k_{oc} \frac{(1+a_2T_2s)}{(1+T_2s)} \frac{(1+a_1T_1s)}{(1+T_1s)} \quad \text{con} \quad a_2 < 1 \quad a_1 > 1$$

El sistema básico tendrá la función de transferencia del lazo:

$$k_{oc} G_p(s)$$

Habrá que diseñar:

$$\frac{Gc(s)}{K_{oc}} = \frac{(1+a_2 T_2 s)}{(1+T_2 s)} \frac{(1+a_1 T_1 s)}{(1+T_1 s)}$$

Si se quiere que la ganancia de esta parte también a altas frecuencias sea la unidad, deberá cumplirse que:

$$\frac{G(j\infty)}{k_{oc}} = a_2 \cdot a_1 = 1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{a_2}$$

El diagrama de Bode de $\frac{G(s)}{k_{oc}}$ será el de la figura 49:

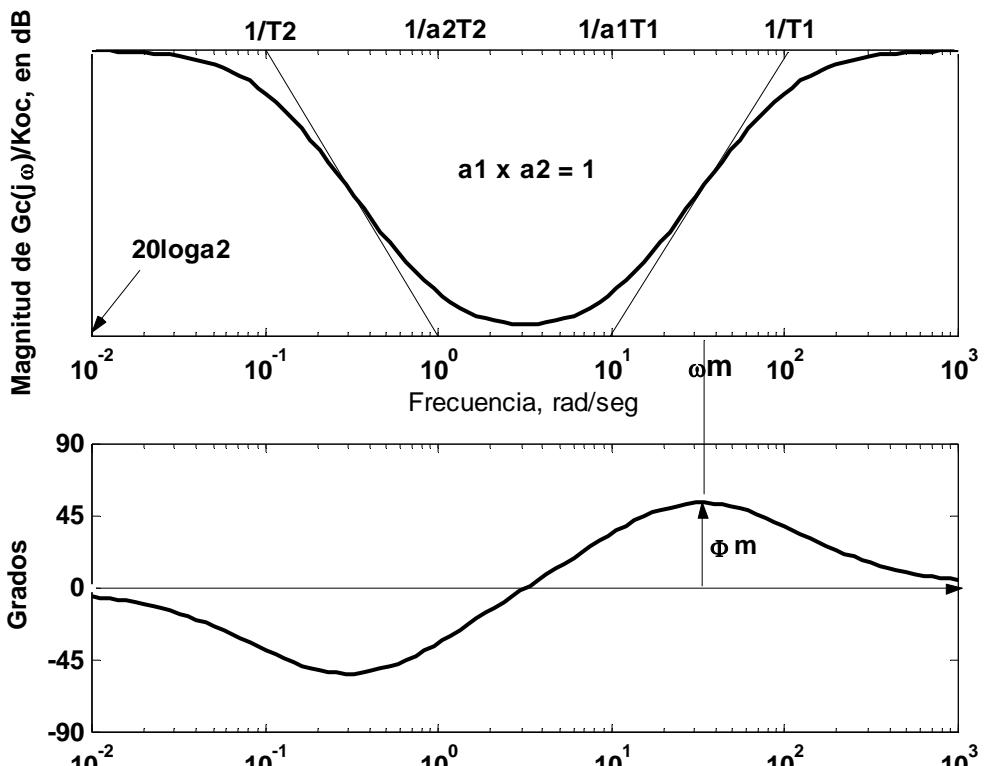


Figura 49

Como se dijo se puede diseñar primero la parte de atraso y luego la de adelanto y así conseguir que todas las especificaciones de funcionamiento del sistema sean satisfechas.

El orden podría ser a la inversa primero la de adelanto y luego la de atraso.

El siguiente ejemplo ilustra el proyecto de diseño de un controlador de avance y retardo de fase simultáneos.

Ejemplo 8:

Consideremos de nuevo el sistema en donde la compensación por avance de fase era ineficaz, (ejemplo 3). La función de transferencia de la planta a controlar era:

$$G_p(s) = \frac{2}{s(1+0.1s)(1+0.2s)} \equiv \frac{100}{s(s+5)(s+10)}$$

Las especificaciones de funcionamiento son las siguientes:

$$\begin{cases} 1^o) Kv \geq 30 \text{ seg}^{-1} \\ 2^o) MF \geq 40^\circ \\ 3^o) MG \geq 12 \text{ dB} \end{cases}$$

4º) Despues del transitorio, la amplitud del error permanente debido a entradas senoidales de 2 unidades de amplitud y hasta una frecuencia de 0.1 rad/seg., no debe exceder las 0.01 unidades.-

Como se puede ver ahora además de tratar de mejorar la precisión estática (mayor Kv), y el margen de fase, se ha añadido una cuarta condición sobre el error permanente debido a señales senoidales de entrada de baja frecuencia. Si $G(j\omega)$ es la función de transferencia frecuencial del camino directo de un sistema con realimentación unitaria y Ro la amplitud de la senoide de entrada con una frecuencia w , la amplitud del error será:

$\left| \frac{E(j\omega)}{R(j\omega)} \right| \times Ro$, la expresión de la ganancia $\left| \frac{E(j\omega)}{R(j\omega)} \right|$, es:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{E(j\omega)}{R(j\omega)} \right| = \frac{1}{|1 + G(j\omega)|}$$

Por ende la amplitud del error, (amplitud de la onda senoidal del error), para $\omega = 0.1 \text{ rad/seg.}$, será:

$$\left| \frac{E(j0.1)}{R(j0.1)} \right| \times Ro = \frac{Ro}{|1 + G(j0.1)|} \leq \frac{1}{100} \text{ unidades cuando } Ro = 2 \text{ unidades. -}$$

La curva que nos da esta amplitud en función de la frecuencia, figura 50 se puede obtener del diagrama de Nyquist, como sigue:

Diag. de Nyquist

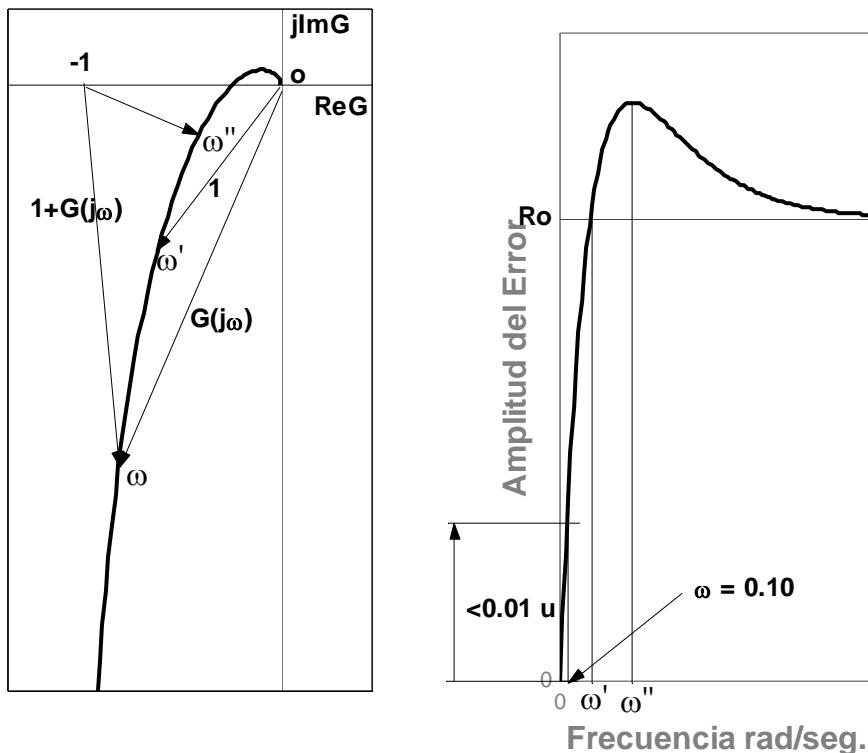


Figura 50

Para frecuencias muy bajas, el $|G(j\omega)|$ es mucho mayor que la unidad, o sea: $|G(j\omega)|_{\text{Para } \omega \text{ bajas}} \gg 1$

Por lo tanto se tendrá que: $|1+G(j\omega)| \approx |G(j\omega)|$, por ende:

$$Ro \left| \frac{E(j0.1)}{R(j0.1)} \right| \approx \frac{Ro}{|G(j0.1)|} ; \text{ en consecuencia deberá ser:}$$

$$\frac{2}{|G(j0.1)|} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow |G(j0.1)| \geq 200, \text{ o en dB:}$$

$$|G(j0.1)|, \text{dB} \geq 46 \text{ dB}$$

En el ejemplo 5, cuando se diseño un controlador de atraso de fase de una etapa, se pudo ver que:

$$|G(j0.1)| \approx 39.3 \text{ dB} < 46 \text{ dB}$$

Por lo tanto no cumpliría con la 4º especificación.

Ya se determinó que con un controlador de avance de fase con una sola etapa el diseño era ineficaz, (ejemplo 3). Por lo tanto un controlador por avance y retardo de fase simultáneos parece ser la elección siguiente.

No puede fijarse, como se mencionó, ningún procedimiento general para su diseño. Por lo general un procedimiento de prueba y error utilizando el plano de Bode, puede proporcionar un proyecto correcto.

Se determinara en primer lugar la parte de retraso de fase del controlador, seleccionando los valores apropiados para T_2 y a_2 .

Primero se ajusta la ganancia $K_{oc_2} = K_{oc}$, para cumplir el requisito del error. Por lo tanto $K_{oc} = 15$. Graficando el diagrama de Bode del sistema básico, se vería que para el $|K_{oc}G_p(j0,1)| \approx 49,54 dB$, por ende la frecuencia esquina

$\frac{1}{T_2}$ se podría colocar en 0,1. Pues, como sabemos, al bajar

aproximadamente 3 dB, quedaría en aproximadamente 46,5 dB y cumpliría con la cuarta especificación. En consecuencia: $\frac{1}{T_2} = 0,1 \Rightarrow T_2 = 10 \text{ seg}$. (Con la etapa de atraso de fase sola, ejemplo 5, $T_2 = 33,2 \text{ seg}$ y para $\omega = 0,1$ la curva de amplitud del sistema básico bajaría mucho por lo que no se cumpliría la cuarta especificación).

Por lo tanto, la atenuación que proporcionará esta parte de atraso en alta frecuencia será determinada así:

Si se elige o estima la $\omega_g = 2,50 \text{ rad/seg}$ (en el ejemplo 5 fue de $\omega_g = 2,7 \text{ rad/seg}$). Por ende, el diagrama de Bode:

$|K_{oc}G_p(j2,5)| \approx +20,35 dB \rightarrow$ Atenuación buscada $\approx -20,35 dB$.

En consecuencia a_2 resultará:

$$a_2 = 10^{\frac{|K_{oc}G_p(j2,5)|,dB}{20}} = 10^{\frac{-20,35}{20}} = 0,096 \approx 0,1$$

$$\therefore \underline{a_2 = 0,1}$$

La frecuencia esquina superior de esta parte será:

$$\frac{1}{a_2 T_2} = \frac{1}{0,1 \times 10} = 1 \text{ rad/seg}$$

La función de transferencia de la parte de atraso del controlador será:

$$15 \frac{(1+s)}{(1+10s)}$$

La parte de Adelanto $\frac{(1+a_1 T_1 s)}{(1+T_1 s)}$, puede diseñarse en forma similar a la ya

vista para la compensación por avance de fase sola.

Puesto que $a_2 = 0,10$; como se dijo, tendrá que ser $\underline{a_1 = 10}$ (si se desea que la ganancia para altas frecuencias de $\frac{G_c(s)}{K_{oc}}$ sea la unidad, o sea: $a_1 a_2 = 1$).

La magnitud a frecuencia infinita de la parte de adelanto será:

$20 \log a_1 = 20 \log 10 = +20 dB$. Por lo tanto $\left(-\frac{20 dB}{2} \right) = -10 dB$. Entrando con este

valor y buscando la curva del sistema parcialmente compensado por atraso de fase, se obtiene que:

$$\omega_m \approx 5,6 \text{ rad/seg} \rightarrow T_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1 \cdot \omega_m}} = \frac{1}{\sqrt{10} \times 5,6} \approx 0,0565$$

$$T_1 \approx 0,0565 \text{ seg}$$

$$\therefore a_1 T_1 = 0,565 \rightarrow \frac{1}{T_1} = 17,71 \text{ rad/seg} \quad y \quad \frac{1}{a_1 T_1} \approx 1,771 \text{ rad/seg}$$

Por lo tanto la función de transferencia del controlador en su parte de adelanto será:

$$\frac{(1+0,565s)}{(1+0,0565s)}$$

La función de transferencia del controlador total será:

$$G_C(s) = 15 \frac{(1+s)}{(1+10s)} \frac{(1+0,565s)}{(1+0,0565s)} \equiv \frac{15(s+1)(s+1,771)}{(s+0,1)(s+17,71)}$$

los lugares de Bode, solo de modulo, de los sistemas básicos y parcialmente compensado por atraso de fase, compensado total del controlador y el ejemplo 5 se muestran en la figura 51. De la misma figura se ve que se satisfacen todas las especificaciones de funcionamiento del sistema. La función de transferencia del lazo del sistema compensado es:

$$G(s) = G_C(s) G_p(s) = \frac{1500(s+1)(s+1,771)}{s(s+5)(s+10)(s+0,1)(s+17,71)}$$

De la misma se obtienen los siguientes datos:

$$\omega_g' = 5,6 \text{ rad/seg}; \quad MF \approx 58,32^\circ > 40^\circ; \quad \omega_c \approx 15,42 \text{ rad/seg}.$$

$$MG, dB \approx 13,3 dB > 12 dB; \quad |G(j0,1)|, dB \approx 46,59 dB > 46 dB; \quad M_R = 0,797 dB \approx 1,09$$

$$\underline{\omega_{AB} = 10,47 \text{ rad/seg}}$$

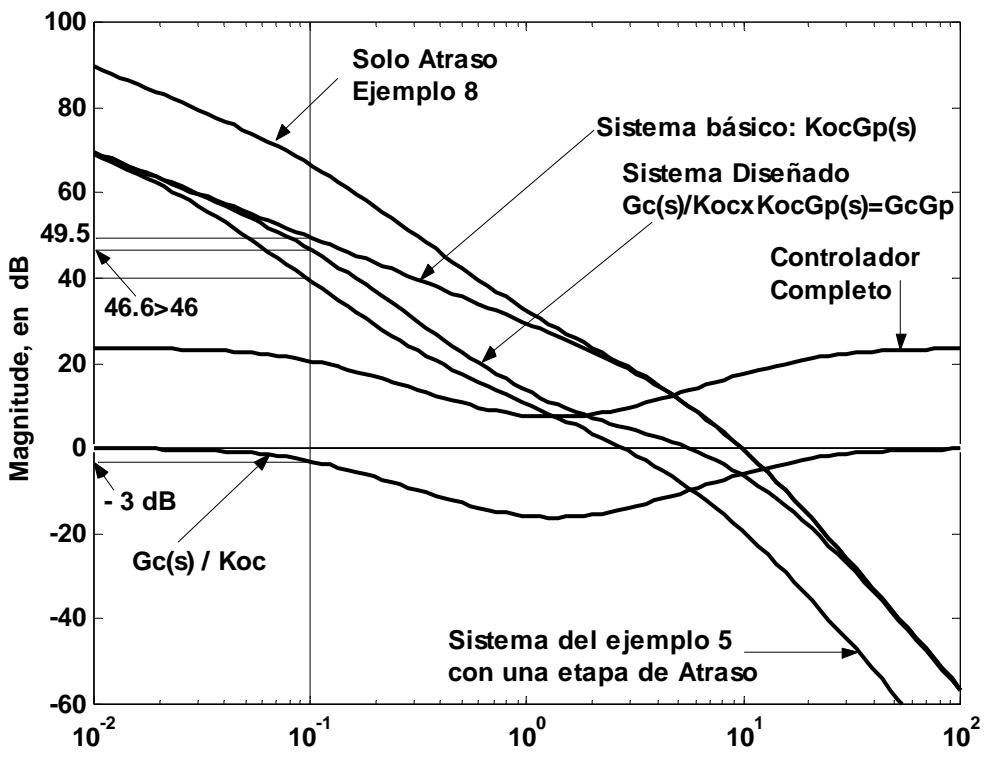


Figura 51

La función de transferencia del sistema es:

$$M(s) = \frac{1500(s+1)(s+1,771)}{(s^5 + 32,81s^4 + 318,9s^3 + 2417s^2 + 4245s + 2657)}$$

Los polos y ceros del sistema serán:

$$\begin{cases} \lambda_{1-2} \cong -1,0545 \pm j0,5761 \\ \lambda_{3-4} \cong -3,735 \pm j8,0773 \\ \lambda_5 \cong -23,231 \\ z_1 \cong -1 \\ z_2 \cong -1,771 \end{cases} \Rightarrow M(s) = \frac{1500(s+1)(s+1,771)}{(s+23,23)(s^2 + 2,109s + 66,355)(s^2 + 7,47s + 79,193)}$$

En las figuras 52 y 53 se muestran las respuestas frecuencial y temporal del sistema diseñado a un salto escalón unitario en la entrada. De las mismas se aprecia que hay dos ω_R y dos M_R (pues hay dos pares de polo complejos conjugados).

$$\omega_{R_1} = 0,954 \text{ rad/seg} \quad M_{R_1} = 0,797 \text{ dB} \rightarrow 1,09 \quad \omega_{AB} \cong 10,47 \text{ rad/seg}$$

$$\omega_{R_2} = 6,734 \text{ rad/seg} \quad M_{R_2} = 0,43 \text{ dB} \rightarrow 1,05$$

$$Mp(\%) = 11.8\% \quad \text{y} \quad Tp = 0.455 \text{ seg.}$$

Los parámetros del controlador se calculan de:

Parte de Atraso:

Si se elige C' :

Parte de Adelanto:

Si se elige C :

$$R_2' = \frac{T_1}{C}$$

$$R_2' = \frac{T_2}{C'}$$

$$R_1 = a_1 R_2$$

$$R_1' = a_2 R_2'$$

$$A_{OC1} = \frac{A_1}{a_1} = 1 \rightarrow A_1 = a_1$$

$$A_2 = \frac{R_4'}{R_3} = Koc \cdot a_2$$

$$\frac{R_4}{R_3} = a_1$$

$$R_4' = 15 \cdot a_2 \cdot R_3'$$

$$R_4 = a_1 \cdot R_3$$

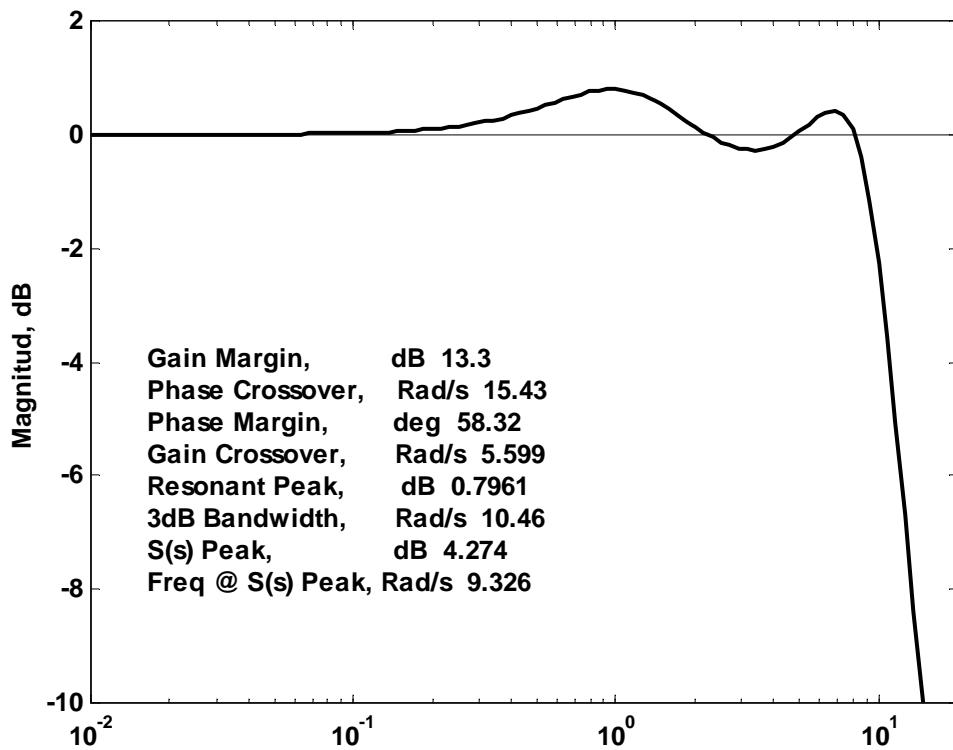


Figura 52

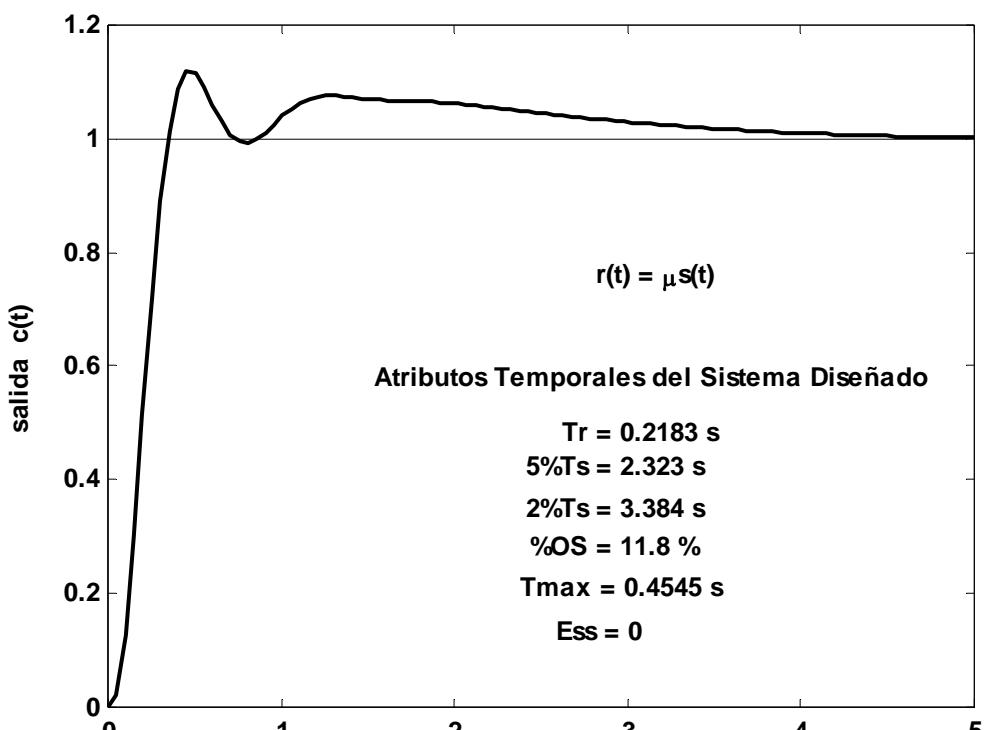


Figura 53

CONTROL II (Elo y Bio)

Tema:

Modelación Matemática de las
Plantas o Procesos a Controlar
Por Métodos de Espacio de
Estado

Prof. Ing. Carlos F. Martín

Año: 2011

Modelación Matemática de las Plantas a Controlar

Uno de los aspectos más importantes en el análisis y diseño de los sistemas de control es la modelación matemática de los mismos.

En el presente estudio se presentaran varios métodos bien conocidos de modelar sistemas lineales. Los dos métodos más comunes son: *la técnica de la función de transferencia y la de la ecuación de estado*. El método de la función de transferencia es válido solo para sistemas *lineales autónomos*, mientras las ecuaciones de estado son ecuaciones diferenciales de primer orden que pueden ser aplicadas para representar tanto a los *sistemas lineales* como a los *no lineales*. Como en realidad todos los sistemas físicos son no lineales, para usar las funciones de transferencia y las ecuaciones de estado lineales, el sistema debe ser primero linealizado, o confinar su rango de operación a un rango lineal. Aunque el análisis y diseño de sistemas lineales de control ha sido bien desarrollado, no sucede lo mismo para los sistemas no lineales cuyo análisis o diseño resulta por lo general muy complejo.

Por lo tanto los ingenieros en sistemas de control a menudo tienen el problema no solo de la determinación en forma adecuada de cómo hacer para describir matemáticamente al sistema sino que a veces, más importante aún, como hacer las suposiciones y aproximaciones adecuadas para que el sistema pueda ser caracterizado adecuadamente por un modelo matemático lineal.

Es importante puntualizar que la ingeniería de control moderna pone especial énfasis sobre la modelación matemática del sistema para que los problemas de análisis y diseño puedan adaptarse a soluciones por computadora digital. Por ende, los objetivos principales de este estudio serán:

- 1º) Aprender la modelación matemática de las plantas o procesos a controlar.
- 2º) Que el modelo resultante este en la forma adecuada para soluciones por computadora.

La modelación de varios procesos a controlar se verá en el presente estudio. Sin embargo, el énfasis será centrado sobre la técnica del problema, y no se pretenderá cubrir todos los tipos posibles de plantas encontradas en la práctica.

Puesto que gran parte del material presentado aquí está referido a la determinación de las llamadas *ecuaciones de estado* de un sistema dinámico, se introducirá primero el concepto básico de estado.

En el establecimiento del modelo matemático de las plantas nos afrontamos con un compromiso entre precisión y complejidad por un lado y aproximación y simplicidad por el otro. En cada caso se deberá juzgar sobre esto, no se puede dar una regla general.

La experiencia muestra, sin embargo, que en la mayoría de los casos podemos reducir el modelo a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y nuestra discusión se basa en la existencia de tales conjuntos.

Es posible en general reducir a tales conjuntos de ecuaciones, estas son conocidas como las ecuaciones de estado.

Colocando las ecuaciones de esta forma, se generan muchas ventajas, de las cuales enunciamos algunas:

- 1º) Todas las ecuaciones diferenciales ordinarias son de primer orden.
- 2º) Cuando las ecuaciones representan un sistema de elevado orden, o sea, varias ecuaciones diferenciales de primer orden, esta forma combinada con una notación compacta, propiedades de matrices y álgebra matricial, permite utilizar un lenguaje matemático muy convencional y elegante.
- 3º) El sistema de ecuaciones de estado está en la forma adecuada para la programación directa en una computadora digital.
- 4º) Las ecuaciones sirven como un excelente punto de partida en la definición de estado de un sistema de control.

Nomenclatura de una Planta a Controlar Multivariable.

Se tratará de determinar algún modelo matemático de una planta a controlar con "p" entradas ($u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$), "q" salidas ($y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)$). El orden de la misma será "n" ($x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$). Ver figura 1.



Figura 1

Las entradas serían las acciones de control del sistema diseñado en una forma adecuada, uno simple puede ser el mostrado en la figura 2.

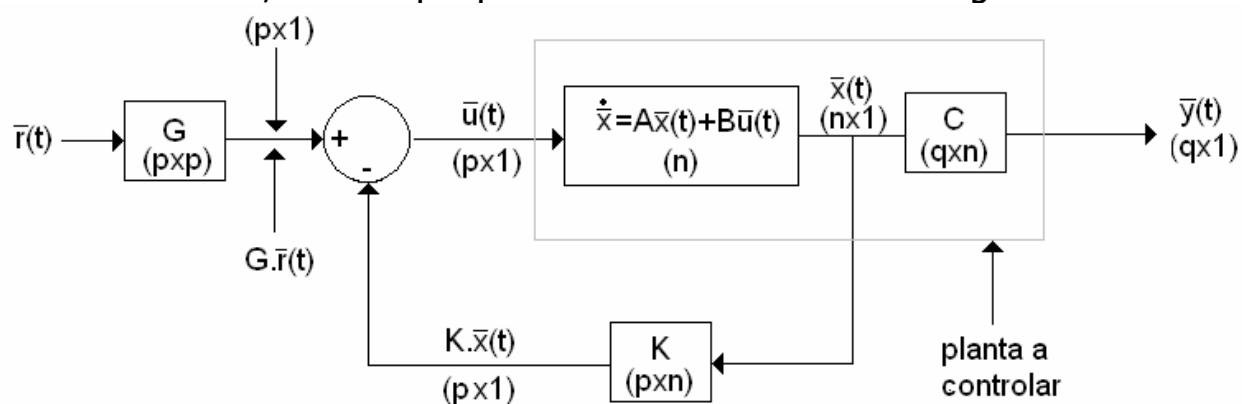


Figura 2

Si $r(t)$, $u(t)$, $y(t)$ son escalares, "G" seria una ganancia, llamada de precompensación y la matriz $K=[k_1 \dots k_n]$ de orden $(1 \times n)$, la matriz de realimentación de los estados.

Por ende en un diseño de un sistema de control, G y K serían los parámetros a seleccionar para cumplir con las especificaciones pedidas.

Reducción de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales de una planta a Controlar, al de Ecuaciones de Estado, o Forma Normal.

Presentaremos este tema trabajando con un conjunto específico de ecuaciones diferenciales, obtenidas para una planta a controlar de un sistema de control de velocidad de un motor de corriente continua. Las ecuaciones son:

$$u_1(t) = k_u u_c(t)$$

$$u_1(t) = R_i \cdot i(t) + L_i \cdot \frac{di(t)}{dt} + u_m(t)$$

$$u_m(t) = k_b \cdot w(t)$$

$$P_m(t) = k_p \cdot i'(t)$$

$$P_m(t) = P_r(t) + J \cdot \frac{dw(t)}{dt} + B \cdot w(t)$$

Las cuales operando se pueden resumir en:

$$k_u u_c(t) = R_i \cdot i'(t) + L_i \cdot \frac{di(t)}{dt} + k_b \cdot w(t)$$

$$k_p \cdot i'(t) = P_r(t) + J \cdot \frac{dw(t)}{dt} + B \cdot w(t)$$

Si llamamos a:

$$u_c(t) = u(t) \quad (\text{acción de control})$$

$$w(t) = y(t) \quad (\text{salida del sistema})$$

Y suponiendo que $P_r(t) = 0$. Operando con las dos últimas ecuaciones se llega, (eliminando la $i(t)$), a:

$$\ddot{y}(t) = -\frac{(R_i \cdot J + L_i \cdot B)}{L_i \cdot J} \cdot \dot{y} - \frac{(R_i \cdot B + k_p \cdot k_b)}{L_i \cdot J} \cdot y + \frac{(k_p \cdot k_b)}{L_i \cdot J} \cdot u(t)$$

Los valores de los parámetros se suponen los siguientes:

$$k = 5,4 \quad (\text{ganancia del rectificador})$$

$$k_b = 0,1 \quad (\text{coeficiente de la f.c.e.m. del motor})$$

$$k_p = 1,25 \quad (\text{coeficiente del par motor})$$

$$k_i = 5\Omega \quad (\text{resistencia del arrollamiento de armadura})$$

$$L_i = 0,30 \text{ Hy} \quad (\text{inductancia del mismo arrollamiento})$$

$$J = 15 \text{ Kg.m}^2 \quad (\text{momento de inercia de las masas rotantes con respecto al eje del motor})$$

$$B = 0,2 \frac{\text{N.m}}{\text{rad / seg}}$$

Por lo tanto:

$$\ddot{y}(t) = -16,68 \cdot \dot{y} - 0,25 \cdot y + 1,5 \cdot u(t)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden, (ídem de la planta), puede reemplazarse por dos de primer orden con la "introducción" de dos variables nuevas, que se llamarán $x_1(t)$ y $x_2(t)$ definidas por ejemplo de la manera siguiente:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Más adelante esta elección, que *no es única*, será justificada. En función de estas variables se podrá escribir:

$$\begin{array}{l} \text{Ecuaciones de Estado} \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -0,2501 \cdot x_1(t) - 16,68 \cdot x_2(t) + 1,5 \cdot u(t) \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{Ecuaciones de Salida} \quad \{ y(t) = x_1(t) \}$$

En una forma más compacta se puede escribir:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), u(t)) \quad ; \quad i = 1 \text{ y } 2$$

Un sistema de ecuaciones diferenciales en esta forma se dice que está reducido a una forma normal, (luego se llamarán ecuaciones de estado). Será puntualizado que esta forma *no es única*, pues es posible encontrar diferentes conjuntos de variables "x" los cuales darán distintas funciones f_i. En el ejemplo elegido, el cual es de segundo orden, fue necesario introducir *dos nuevas* variables "x".

En general, para una planta de *orden n*, será necesario definir *n nuevas variables* "x", (x₁, x₂, ..., x_n).

También mientras en el ejemplo solo tenemos una entrada a la planta (u), en un caso general, puede haber "p" entradas distintas, u₁, u₂, ..., u_p.- Ademas en general pueden existir "v" entradas de perturbación p₁(t), p₂(t), ..., p_v(t).

Por lo tanto, *sin las últimas*, se tendrá:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

En un intervalo de tiempo de t=0 a t, se tendrá; integrando la ecuación anterior:

$$x_i(t) - x_i(0) = \int_0^t f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) d\tau \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad 0$$

$$x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) d\tau \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad 1)$$

Las conclusiones importantes serán que:

Cada variable $x_i(t)$ se podrá determinar en todo momento, si y solamente si se cumplen las condiciones siguientes:

1. Cada variable es inicialmente conocida; (esto es: *si n condiciones iniciales $x_i(0)$ son especificadas*).
2. Todas las p entradas están especificadas durante *todo el intervalo de control de 0 a t*.

Concepto de Estado y Variables de Estado.

En vista de estos resultados se puede interpretar a éstas n variables "x(t)" como portadora de toda la *información* acerca del estado dinámico de la planta a controlar. En general el estado puede ser descrito por un *conjunto de variables*, incluso *algunas pueden ser de naturaleza abstracta*, o sea no se podrían medir. Debe tenerse presente que:

- Las variables de estado pueden tener o no sentido físico.
- Las variables de estado pueden o no ser medibles.
- Para un mismo sistema dinámico las variables de estado *no son únicas*; de hecho, se pueden definir *infinitos* conjuntos de variables que sirvan como variables de estado.

Inicialmente, en $t = 0$, el estado del sistema puede ser expresado por n números $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. que se pueden obtener en forma continua desde la ecuación 1). En consecuencia de esta interpretación se definirá al *estado de la planta* como el *vector n-dimensional* $\bar{x}(t)$, el cual tiene como componentes las variables de estado $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$.

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ .. \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ o más resumido } \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}$$

Aunque el símbolo "x" no lo revela directamente, cada variable de estado, por regla general, tiene un sentido físico (fuerza, presión, tensión, velocidad, temperatura, etc.). Aunque a veces algunas variables pueden ser de naturaleza abstracta como ya se mencionó.

Hay plantas donde el estado de la misma es sencillo de definir y otros no, en otras palabras no somos capaces de identificar fácilmente todas las variables de estado que caracterizan la planta y corremos el riesgo de subdimensionar o sobredimensionar las mismas. Por lo tanto se podrá definir las variables de estado de la siguiente manera:

"*Las variables de estado de una planta o proceso a controlar son definidas como el conjunto mínimo de variables "x", ($x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$), tales que su conocimiento en cualquier tiempo, más la información sobre las entradas subsiguientemente aplicadas, es suficiente para determinar el estado del sistema en cualquier tiempo $t > t_0$ ".-*

El número n de variables de estado define el *orden* o la *dimensionalidad* de la planta. No se debe confundir las variables de estado con las variables de salida. Una salida es una variable que *siempre se puede medir*, pero una variable de estado como dijimos, *no siempre*. Sin embargo una variable de salida se define usualmente como una función de las variables de estado. Algunas veces el término *Espacio de Estado* se usa para designar el espacio de "n" coordenadas.

La figura 3 describe la situación para planta a controlar de tercer orden (tridimensional). El vector de estado:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Trazará una *trayectoria de estado o de fase* en el espacio a medida que transcurre el tiempo.

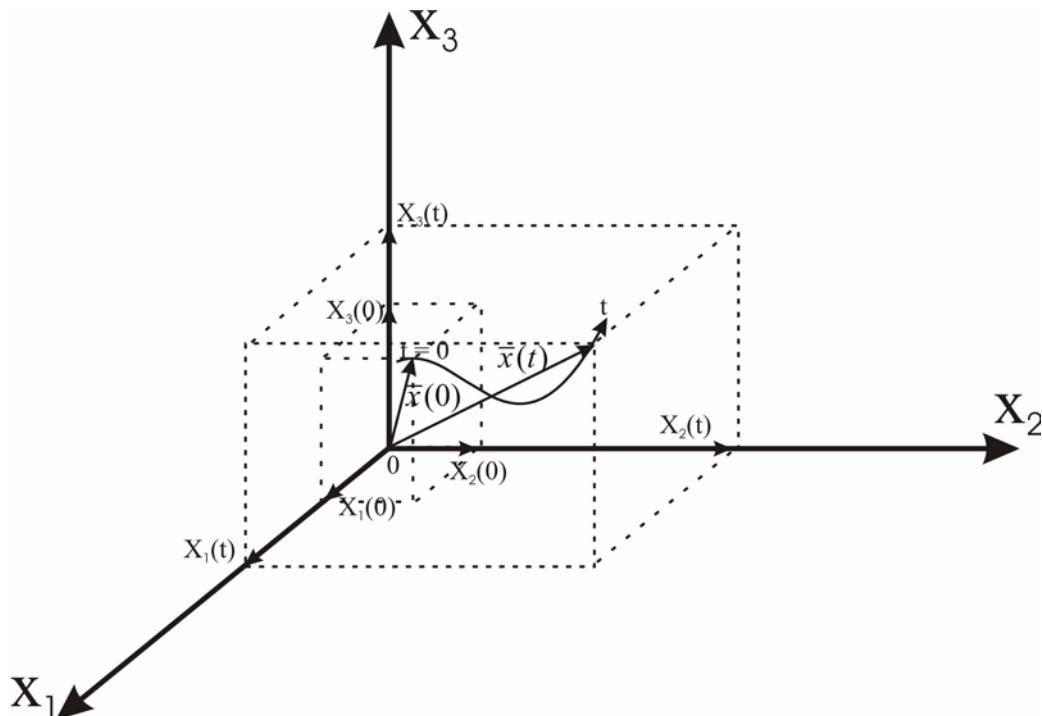


Figura 3.

Los valores instantáneos de las variables de estado son las componentes del vector de estado. En una trayectoria de este tipo, *el rol del tiempo t* ha sido reducido a *un parámetro*. En el caso bidimensional el espacio de estado se reduce a un *plano de estado*, algunas veces llamado *plano de fase o plano fásico*. Las ecuaciones de estado pueden ser escritas en forma mas compactas usando la *notación vectorial* que se verá a continuación.

Representación matricial de sistemas lineales, autónomos (invariantes en el tiempo), en el espacio de estado

Sea una planta multivariable como la indicada en la Figura 4.

Primero definimos los vectores: \bar{u} , vector de entrada o de control, el vector \bar{y} , de salida y el vector perturbación $\bar{p}(t)$. Los componentes de los mismos serán:

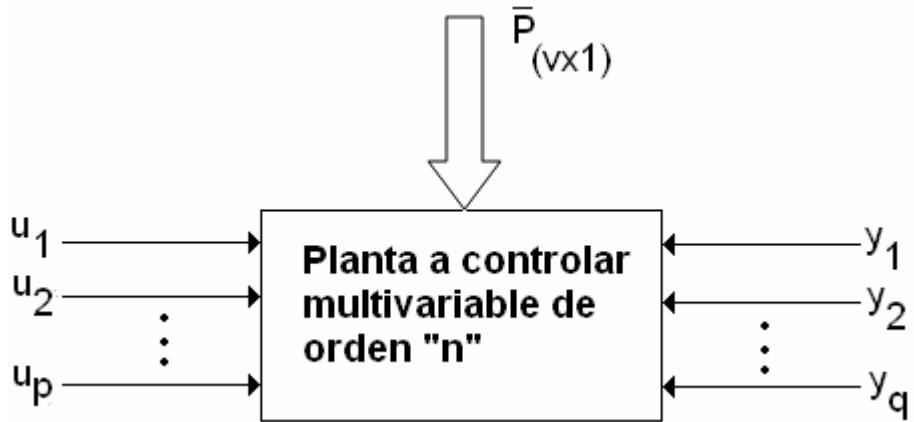


Figura 4.

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}_{(px1)}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}_{(qx1)}, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_v \end{bmatrix}_{(vx1)}$$

La planta es de n-ésimo orden: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ representan las variables de estado elegidas, $u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$ a las de entrada a la planta, $y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)$ a las de salida, $p_1(t), p_2(t), \dots, p_v(t)$ a las de perturbación.

El sistema de ecuaciones se puede plantear así, (en la forma normal):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1p}u_p + e_{11}p_1 + \dots + e_{1v}p_v \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2p}u_p + e_{21}p_1 + \dots + e_{2v}p_v \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{np}u_p + e_{n1}p_1 + \dots + e_{nv}p_v \end{cases}$$

Donde los coeficientes a_{ij} , b_{ij} , y e_{ij} son constantes en los sistemas autónomos o invariantes en el tiempo.

En términos de la notación compacta vectorial-matricial se pueden resumir las "n" ecuaciones anteriores en una sola vectorial a saber:

$$(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) + E\bar{p}(t)$$

Que es la llamada ecuación de estado. Donde las matrices son:

A: matriz característica de la planta, de orden (nxn)

B: matriz de distribución o de aplicación del control, de orden (nxp)

E: matriz de las perturbaciones, de orden (nxv)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{np} \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & \dots & \dots & e_{nv} \end{bmatrix}$$

Se pueden considerar las perturbaciones como otras "entradas" y colocar la ecuación de estado como:

$$\dot{x}_1(t) = A.\bar{x}(t) + [B \quad E] \begin{bmatrix} \bar{u}(t) \\ \bar{p}(t) \end{bmatrix} = A.\bar{x}(t) + B^*.\bar{u}^*(t)$$

Donde: $B^* = [B \quad E]$ matriz de orden $[n \times (p+v)]$

$$\bar{u}^*(t) = \begin{bmatrix} \bar{u}(t) \\ \bar{v}(t) \end{bmatrix} \text{ Vector de los } (p+v) \text{ "entradas" } [(p+v) \times 1]$$

De forma similar para las variables de salida se tendrá:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1p}u_p + h_{11}p_1 + \dots + h_{1v}p_v \\ \dots \\ \dots \\ y_q(t) = c_{q1}x_1 + \dots + c_{qn}x_n + d_{q1}u_1 + \dots + d_{qp}u_p + h_{q1}p_1 + \dots + h_{qv}p_v \end{array} \right.$$

En notación compacta:

$$\bar{y}(t) = C.\bar{x}(t) + D.\bar{u}(t) + H.\bar{p}(t)$$

Llamada ecuación de salida.

Donde:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{q1} & \dots & \dots & c_{qn} \end{bmatrix}; \text{ Matriz de salida o de medición, de orden (qxq)}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & \dots & d_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{q1} & \dots & \dots & d_{qp} \end{bmatrix}; \text{ Matriz de transición directa de orden (qxq).}$$

Generalmente en los sistemas físicos reales siempre esta matriz es nula.

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & \dots & h_{1v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{q1} & \dots & \dots & h_{qv} \end{bmatrix}; \text{ de orden (qxv)}$$

Considerando a las perturbaciones como "entradas", se tendrá:

$$\bar{y}(t) = C.\bar{x}(t) + [D \quad H] \begin{bmatrix} \bar{u}(t) \\ \bar{p}(t) \end{bmatrix}$$

Llamando $D^* = [D \quad H]$ matriz de orden $[q \times (p+v)]$, será:

$$\bar{y}(t) = C.\bar{x}(t) + D^*.\bar{u}^*(t)$$

Ecuación de salida.

Todas las matrices caracterizan totalmente la dinámica de la planta.

La figura 5 muestra una representación con un diagrama de bloques de

una planta a controlar definida por las ecuaciones de estado y de salida ya vistas. Más adelante se estudiará la representación en los llamados diagramas de estado.

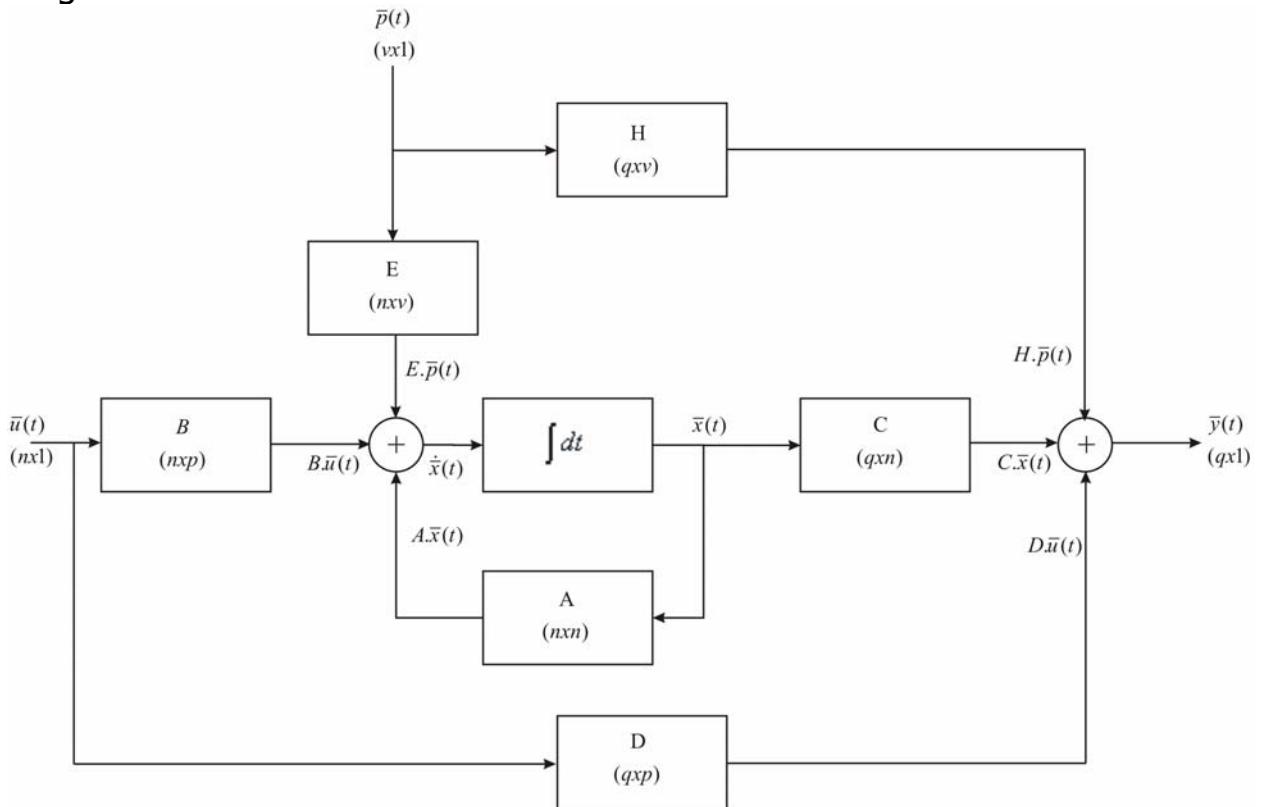


Figura 5: Planta a controlar

Con el ejemplo en estudio se consideró que $\bar{p}(t)=0$, no hace falta definir las matrices E y H y además, como pasa generalmente, la matriz D es una

matriz nula, $D = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(qxp)}$, en consecuencia se tendrá:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A.\bar{x}(t) + B.\bar{u}(t) \\ y(t) = C.\bar{x}(t) \end{cases}$$

En este caso $u(t)$ y además $y(t)$ son escalares, o sea: $p=1$ y $q=1$. Las matrices de la planta en estudio serán, reemplazando valores:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.25 & -16.68 \end{bmatrix}, (2x2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}, (2x1) \quad y \quad C = [1 \ 0], (1x2)$$

La función de transferencia $\frac{Y(s)}{U(s)}$ en éste caso será:

$$s^2 Y(s) = -16.68s.Y(s) - 0.25.Y(s) + 1.5.U(s) \Rightarrow Gp(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1.5}{s^2 + 16.68s + 0.25}$$

Métodos para seleccionar las Variables de Estado:

Primer Método:

Ahora diremos unas pocas palabras a cerca de cómo seleccionar las variables de estado de una planta a controlar.

- El número de variables de estado (dimensionalidad) será una medida de la complejidad de la misma.
¿Qué determina, en general, este orden?
Para encontrar una respuesta a esta pregunta es preciso mirar profundamente en la naturaleza física de la dinámica de los procesos. No es posible tratar todas las plantas igualmente.
- Obviamente no podemos esperar muchas similitudes entre una planta electromecánica y un proceso económico o biológico.
- Para un grupo grande de plantas, compuestas principalmente de sistemas electromecánicos, eléctricos, mecánicos y algunos químicos, es posible relacionar la *dinámica del sistema directamente con el concepto de energía*.
- Cualquier transitorio o cambio dinámico de una planta seleccionada de este grupo está causado básicamente por la redistribución de energía dentro de la misma. La energía aparece en muchas formas físicas diferentes y puede ser transformada de una forma a otra con o sin perdidas. *Realmente se puede considerar que cualquier sistema de control es un proceso de redistribución de la energía* donde la energía es transformada o transferida desde una forma almacenada a otra, de una manera *planeada*. El hecho es que estas transferencias no pueden tener lugar e forma instantánea, pues requeriría velocidades de flujo de energía infinitas y por lo tanto es físicamente imposible. En lugar de ello, todos los cambios de energía dentro del sistema tienen lugar con velocidades de flujo de energía finitas, y por lo tanto se requerirá un cierto tiempo para el proceso de redistribución, (el transitorio). Podemos decir que:
“El número de *posibilidades independientes* de almacenar energía dentro de un proceso es igual al numero de variables de estado y la complejidad o dimensionalidad está por esto directamente relacionada con este número”. Y las variables involucradas en las expresiones de las energías pueden ser las variables de estados.

Consideraremos dos sistemas mecánicos masa-resorte de las figuras 6 y 7:

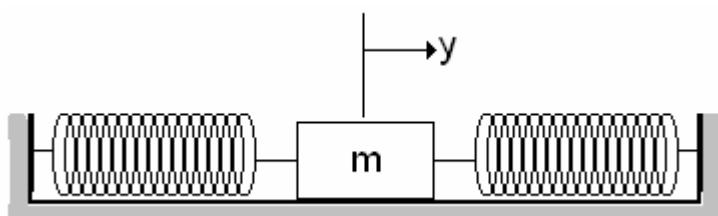


Figura 6

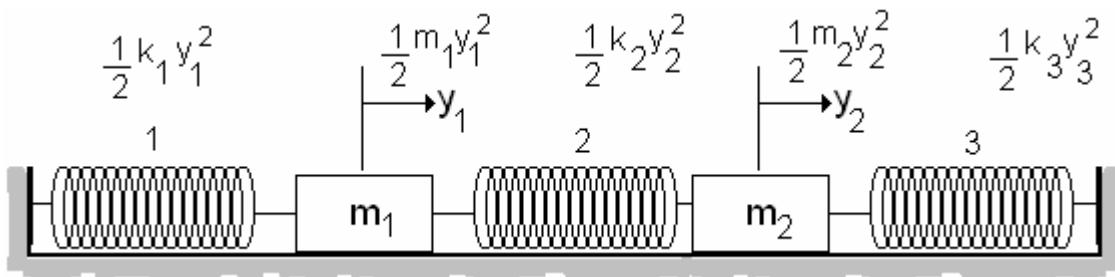


Figura 7

En el primero, la energía puede ser almacenada en *dos* formas *independientes* y además diferentes:

1. Energía potencial en los resortes: $\frac{1}{2}k.y^2(t) = K.y^2(t)$, donde k es la constante total de los resortes.
2. Energía cinética en la masa: $\frac{1}{2}m.\dot{y}^2(t)$

Por ende $n=2$ y $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$

Notar que podemos especificar “ y ” e “ \dot{y} ” completamente independientes y además que aunque tenemos *dos* resortes, solo *un* valor de energía potencial *independiente* se presenta en el sistema.

Si ahora presentamos el segundo problema, nos damos cuenta que podemos especificar independientemente *cuatro* cantidades de energía, dos cinéticas y dos potenciales. Por ende $n=4$, y el vector de estado puede ser el siguiente:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1:

Determinar las ecuaciones de estado del circuito de la figura 8.

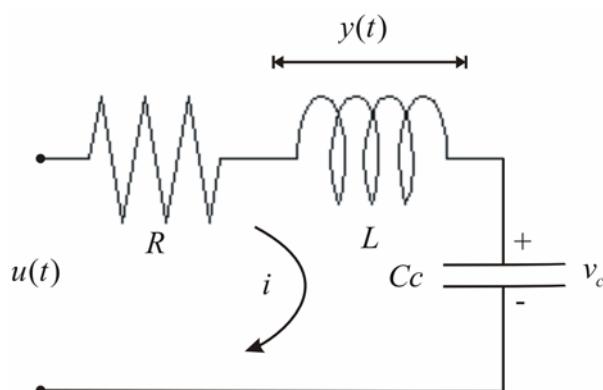


Figura 8

$$\bar{u}(t) = u(t) \leftarrow p = 1$$

$$\bar{y}(t) = y(t) \leftarrow q = 1$$

$$n = ?$$

$$\bar{x}(t) = ?$$

Energía magnética en la bobina: $\frac{1}{2}Li^2(t) \rightarrow i(t)$

Energía electroestática en el capacitor: $\frac{1}{2}C_c v_c^2(t) \rightarrow v_c(t)$, por lo tanto:

$$n = 2 ; \quad x_1(t) = i(t) ; \quad x_2(t) = v_c(t)$$

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} \quad o \quad \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + v_c(t) = R x_1(t) + L \dot{x}_1(t) + x_2(t)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \hline v_c(t) &= \int i(t) dt \Rightarrow \dot{v}_c(t) = \frac{i(t)}{C_c} \Rightarrow \dot{v}_c(t) = \frac{1}{C_c}i(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{C_c}x_1(t) \end{aligned}$$

Suponiendo que la salida sea la tensión de la bobina:

$$y(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \dot{x}_1$$

\therefore

$$y(t) = -R \cdot x_1 - x_2 + u$$

Las matrices del modelo serán:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_c} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -R & -1 \end{bmatrix} \quad D = [1]$$

Si la tensión en la resistencia fuera la salida:

$$y(t) = R \cdot i(t) = R \cdot x_1$$

$$C = [R \ 0] \quad D = [0]$$

Si la tensión en el capacitor es la salida:

$$y(t) = v_c \rightarrow y(t) = x_2$$

$$C = [0 \ 1] \quad D = [0]$$

Si la salida fueran estas dos últimas:

$$\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = R.x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

Consideremos la dinámica de la red eléctrica mostrada en la figura 9. Se puede suponer que las dos fuentes de tensión $e_1(t)$ y $e_2(t)$ pueden ser ajustadas arbitrariamente y además considerarlas como las entradas a la planta, por lo tanto:

$$\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

Con lo cual tenemos una planta cuyo estado puede ser “controlado” por dicho vector de entrada, (las acciones de control).

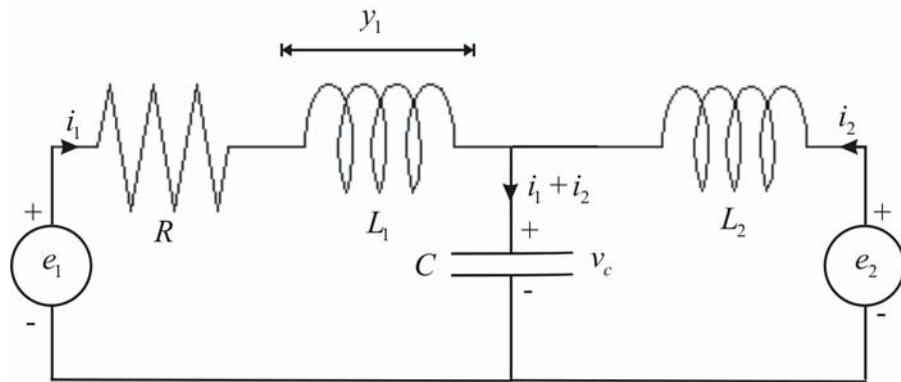


Figura 9.

El próximo paso es determinar el orden de esta “planta” y asignar un vector de estado conveniente. La energía puede ser almacenada al mismo tiempo en las dos bobinas como energía magnética, $\frac{1}{2}L_i^2(t)$ y en el capacitor como energía electrostática $\frac{1}{2}C.v^2(t)$. Además se pueden fijar *independientemente* valores arbitrarios a las corrientes a través de las dos bobinas $i_1(t)$ e $i_2(t)$ y a la tensión $v_c(t)$ a través del capacitor. Por lo tanto se puede concluir que es una planta de tercer orden ($n=3$) y preferimos elegir el vector e estado siguiente por la simple razón que todas sus variables de estado son fácilmente medibles y representan cantidades físicas muy significativas:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de las dos mallas serán:

$$e_1(t) = R.i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + v_c(t)$$

$$e_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + v_c(t)$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int (i_1(t) + i_2(t)) dt$$

Despejando los términos de mayor orden de derivación, nos queda:

$$\frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{R}{L_1} i_1(t) - \frac{1}{L_1} v_c(t) + \frac{1}{L_1} e_1(t)$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{1}{L_2} v_c(t) + \frac{1}{L_2} e_2(t)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} (i_1(t) + i_2(t)) = \frac{1}{C} i_1(t) + \frac{1}{C} i_2(t)$$

Sustituyendo las variables de estado y las entradas ya definidas, se obtienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L_1} x_1(t) - \frac{1}{L_1} x_3(t) + \frac{1}{L_1} u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{L_2} x_3(t) + \frac{1}{L_2} u_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{1}{C} x_1(t) + \frac{1}{C} x_2(t)$$

Por lo tanto las matrices A y B del modelo de la planta serán:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}_{(3x3)} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(3x2)}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(t) = A.\bar{x}(t) + B.\bar{u}(t)$$

1º) Supongamos que tenemos una sola salida y que la misma sea la tensión en la bobina L_1 , en consecuencia:

$$y_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = L_1 \dot{x}_1(t) = -R.x_1(t) - x_3(t) + u_1(t)$$

$$\text{Por lo tanto: } C = [-R \ 0 \ -1]_{(1x3)} \text{ y } D = [1 \ 0]_{(1x2)}$$

$$\Rightarrow y = C.\bar{x}(t) + D.\bar{u}(t)$$

2º) Consideremos ahora que las salidas son dos:

- la tensión en la bobina: $y_1(t) = -R.x_1(t) - x_3(t) + u_1(t)$
- la tensión en el capacitor: $y_2(t) = v_c(t) = x_3(t)$

Por lo tanto:

$$\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -R & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(2 \times 3)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{(q \times n)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(2 \times 2)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}}_{(q \times p)}$$

Ejemplo 3:

Retornemos la planta ya mencionada para el control de velocidad. En la misma hay dos formas de almacenar energía:

1º) Energía magnética en el arrollamiento de la armadura del motor:

$$\frac{1}{2} L_i i_i^2(t) . - 2º) \text{ Energía cinética de rotación: } \frac{1}{2} J \cdot w_n^2(t)$$

Por lo tanto las variables involucradas son $i_i(t)$ y $w_n(t)$ que se elegirán como las variables de estado, $n=2$.

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} w_n(t) \\ i_i(t) \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones diferenciales eran:

$$Ku_c(t) = R_i i_i(t) + L_i \frac{di_i(t)}{dt} + K_b w_n$$

$$K_p i_i(t) = P_r(t) + J \frac{dw_n(t)}{dt} + B \cdot w_n(t)$$

Despejando las derivadas $\frac{di_i(t)}{dt}$ y $\frac{dw_n(t)}{dt}$, se tendrá:

$$\frac{d i_i(t)}{dt} = -\frac{K_b}{L_i} \cdot w_n(t) - \frac{R_i}{L_i} \cdot i_i(t) + \frac{K}{L_i} u_c(t)$$

$$\frac{d \omega_m(t)}{dt} = -\frac{B}{J} \cdot w_n(t) + \frac{K_p}{J} \cdot i_i(t) - \frac{1}{J} P_r(t)$$

Por ende las ecuaciones de estado serán:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{B}{J} \cdot x_1(t) + \frac{K_p}{J} \cdot x_2(t) - \frac{1}{J} P_r(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K_b}{L_i} \cdot x_1(t) - \frac{R_i}{L_i} \cdot x_2(t) + \frac{K}{L_i} u_c(t)$$

Por lo tanto las matrices de este modelo serán:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_p}{J} \\ -\frac{K_b}{L_i} & -\frac{R_i}{L_i} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{L_i} \end{bmatrix} \quad y \quad E = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{-1}{J} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La salida es:

$$y(t) = w_n(t) \equiv x_1(t) + 0 \cdot u_c(t) + 0 \cdot P_r(t)$$

$$\Rightarrow C = [1 \ 0] ; \quad D = [0] \quad y \quad H = [0]$$

También se puede considerar, como se discutió, a la perturbación como una “*entrada*”, de la forma ya vista, o sea:

$$\ddot{x}(t) = A\ddot{x}(t) + B^* \bar{u}^*(t)$$

Donde:

$$B^* = [B \quad E] \Rightarrow B^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ K & J \\ \frac{K}{Li} & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \bar{u}^* = \begin{bmatrix} u_c(t) \\ p_{r(t)} \end{bmatrix}$$

Por ende:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B & Kp \\ \frac{J}{J} & \frac{J}{J} \\ -Kb & -Ri \\ \frac{Li}{Li} & \frac{Li}{Li} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ K & 0 \\ \frac{K}{Li} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c(t) \\ p_r(t) \end{bmatrix}$$

Y la salida

$$\bar{y}(t) = C\ddot{x}(t) + D.u_c(t) + H.p_r(t), \quad 0$$

$$\bar{y}(t) = C\ddot{x}(t) + D^* \bar{u}^*(t)$$

Donde:

$$D^* = [D \quad H] \text{ y } \bar{u}^*(t) = \begin{bmatrix} u_c(t) \\ p_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} u_c(t) \\ p_r(t) \end{bmatrix}$$

Como se verá más adelante:

$$Y(s) = G_p(s) \bar{U}^*(s)$$

Donde $G_p(s)$ será:

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} \left. \frac{Y(s)}{U_c(s)} \right|_{P_r(s)=0} & \left. \frac{Y(s)}{P_r(s)} \right|_{U_c(s)=0} \end{bmatrix}$$

Y es, con los valores de los parámetros ya mencionados:

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} & -\frac{20}{3} \left(s + \frac{50}{3} \right) \\ \frac{1,5}{s^2 + 16,68.s + 0,25} & \frac{s^2 + 16,68.s + 0,25}{s^2 + 16,68.s + 0,25} \end{bmatrix}$$

Como se ve la $G_{p11}(s)$ es la función de transferencia que ya se determinó,

$$\frac{Y(s)}{U_c(s)} \text{ con } P_r(s) = 0.$$

2º) Segundo Método:

- Se parte de un diagrama de bloques *de la planta*, en el mismo los bloques deben ser *funciones de primer orden o una constante*. En el primer caso se puede o no tener un cero, en caso afirmativo *solo si posteriormente no se requiere las derivadas de las entradas*. También el diagrama puede tener bloques: $K.s$, $(s+a)$, etc. si no se

requiere

luego las derivadas primeras respecto del tiempo de las entradas.

- Ademas no se deben producir *cancelaciones polos-ceros* al reducir algun lazo interior del diagrama. Si todo esto se cumple, *las variables de estado serán las salidas de los bloques de primer orden*.

Ejemplo 4:

Supongamos el diagrama en bloques de la planta de la figura 10:

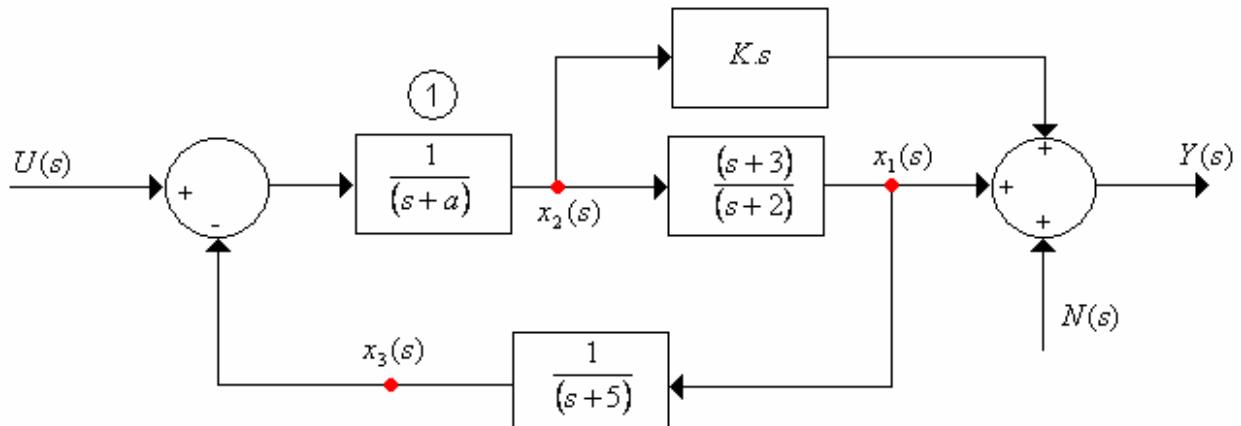


Figura 10

El bloque ① es el que no puede tener un cero, pues se requerirá luego la derivada primera de la entrada, $\dot{u}(t)$. Las ecuaciones de estado seran las siguientes:

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, u(t), n(t)).$$

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{(s+3)}{(s+2)} \rightarrow L^{-1} \rightarrow \boxed{\dot{x}_1 + 2.x_1 = \dot{x}_2 + 3.x_2}$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s) - X_3(s)} = \frac{1}{(s+a)} \rightarrow L^{-1} \rightarrow \boxed{\dot{x}_2 + a.x_2 = -x_3 + u(t)}$$

$$\frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{(s+5)} \rightarrow L^{-1} \rightarrow \boxed{\dot{x}_3 + 5.x_3 = x_1}$$

La ecuación de salida será:

$$Y(s) = X_1(s) + K.s.X_2(s) + N(s), \text{ antitransformando por Laplace:}$$

$$\rightarrow L^{-1} \rightarrow \boxed{y(t) = x_1 - a.K.x_2 - K.x_3 + K.u(t) + n(t)}$$

Por lo tanto las matrices del modelo elegido de la planta serán:

$$A_{(n \times n), (3 \times 3)} = \begin{bmatrix} -2 & (3-a) & -1 \\ 0 & -a & -1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}; B_{(n \times p), (3 \times 2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{(q \times n), (1 \times 3)} = [1 \quad -aK \quad -K] \quad y \quad D_{(q \times p), (1 \times 2)} = [K \quad 1]$$

Si $N(s) = 0 \rightarrow n(t) = \text{cte. o nula.}$

Como ahora $p=1$ solo cambiarian las matrices B y D.-

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } D = [K]$$

Como se verá:

$$G_p(s) = C \cdot \frac{[adj(sI - A)]^T}{|sI - A|} B + D = \frac{K \cdot s^3 + (1+7K)s^2 + (8+10K)s + 15}{s^3 + (7+a)s^2 + (11+7a)s + (3+10a)}$$

Ejemplo 5:

Sea la planta de la figura 11:

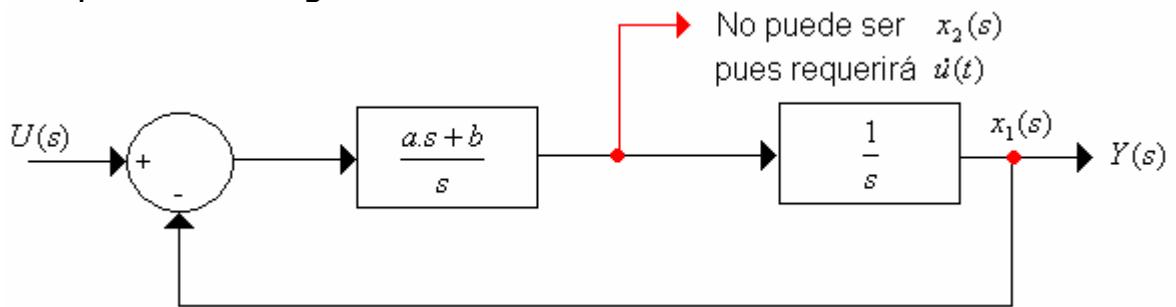


Figura 11.

$$\frac{X_2(s)}{U(s) - X_1(s)} = \frac{a.s + b}{s} \rightarrow L^{-1} \rightarrow \dot{x}_2 = -b.x_1 + a.\dot{u}(t) + b.u(t) - a\dot{x}_1(t)$$

Como se aprecia se requiere la derivada de la entrada, una forma de solucionar el problema es realizando la transformación siguiente:

$$\frac{a.s + b}{b} = a + \frac{b}{s}, \text{ entonces el diagrama será el de la figura 12:}$$

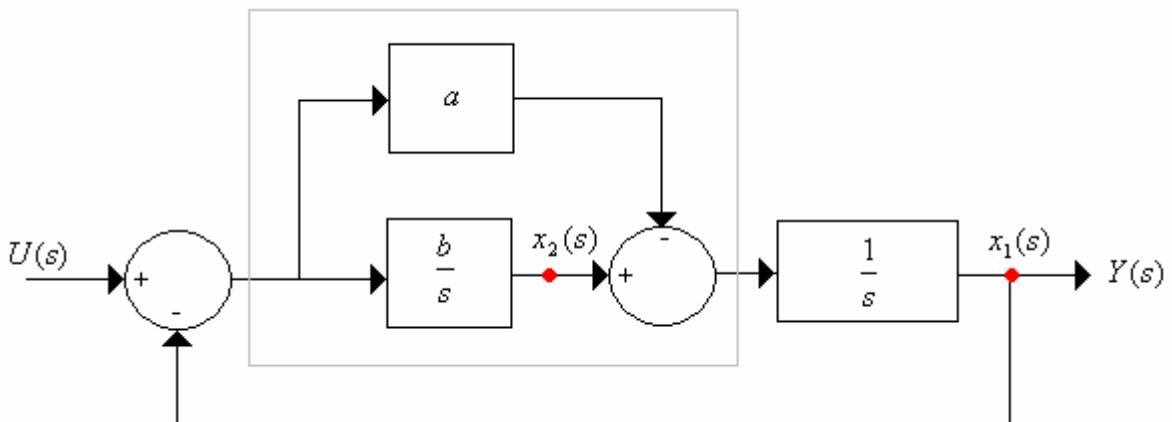


Figura 12.

Y el problema esta solucionado.

Las ecuaciones de estado y de salida serán las siguientes:

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s) + a[U(s) - X_1(s)]} = \frac{1}{s} \rightarrow L^{-1} \rightarrow \dot{x}_1 = -a.x_1 + x_2 + a.u(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s) - X_1(s)} = \frac{b}{s} \rightarrow L^{-1} \rightarrow \dot{x}_2 = -b.x_1 + b.u(t)$$

$$Y(s) = X_1(s) \rightarrow L^{-1} \rightarrow y(t) = x_1(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio Nº 6:

Sea la planta de la figura 13

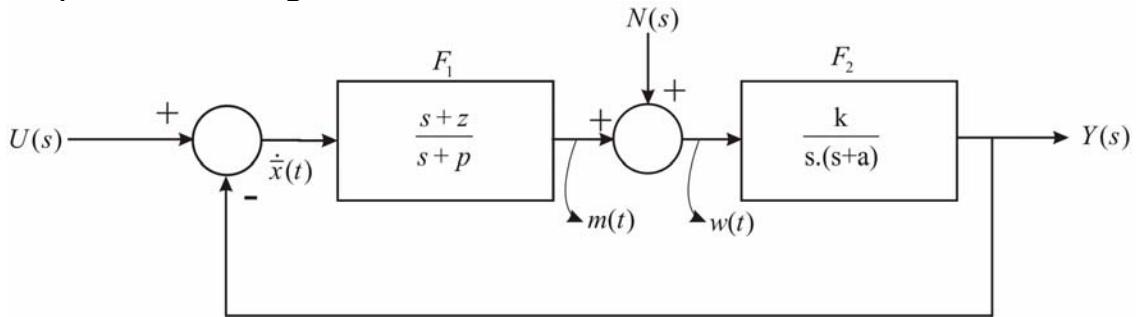


Figura13.

$m(t)$ No puede ser una variable de estado pues requeriría $\dot{u}(t)$.

$$\text{Modifiquemos } F_1 \text{ así: } \frac{s+z}{s+p} = \frac{s+p+z-p}{s+p} = 1 + \frac{(z-p)}{(s+p)}$$

$$\text{Y } F_2 \text{ así: } \frac{k}{s.(s+a)} = \frac{k}{s} \cdot \frac{1}{s+a}$$

Por ende nos queda el diagrama de la figura 14

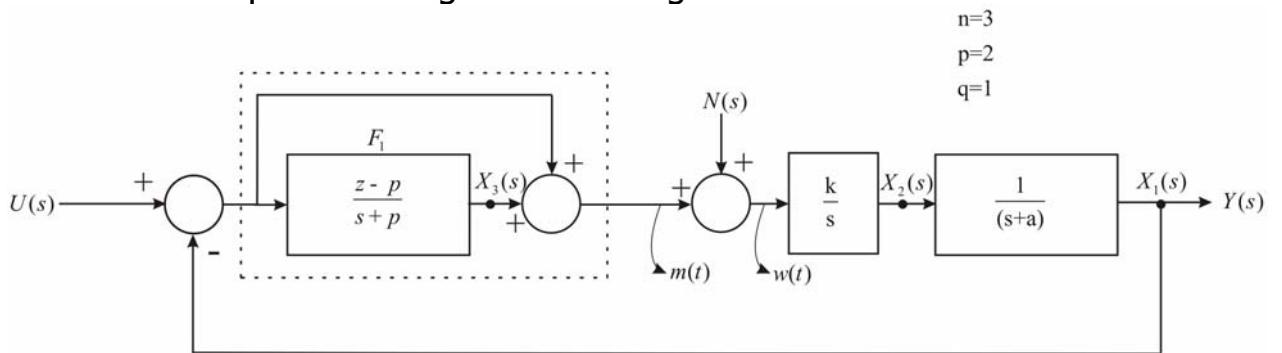


Figura14.

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{s+a} \rightarrow \text{antitransformando por Laplace} \rightarrow \dot{x}_1 = -a.x_1 + x_2$$

$$\frac{k}{s} = \frac{X_2}{W(s)} = \frac{X_2(s)}{U(s) - X_1(s) + X_3(s) + N(s)} \rightarrow \text{antitransformando} \rightarrow \dot{x}_2 = -k.x_1 + k.x_3 + k.U(t) + k.n(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s) - X_1(s)} = \frac{(z+p)}{(s+p)} \rightarrow \text{antitransformando} \rightarrow \dot{x}_3 = (p-z).x_1 - p.x_3 + (z-p).U(t)$$

$$Y(s) = X_1(s) \rightarrow \text{antitransformando} \rightarrow y(t) = x_1(t)$$

Las matrices serán:

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -k & 0 & k \\ p-z & 0 & -p \end{bmatrix}; \quad B^* = [B \quad E] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & k \\ z-p & 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]; \quad D^* = [D \quad H] = [0 \quad 0]$$

Se puede dar que la aproximación de Padé de primer orden de un retardo este a la salida del comparador, Figura 15, la cual requerirá $\dot{u}(t)$.

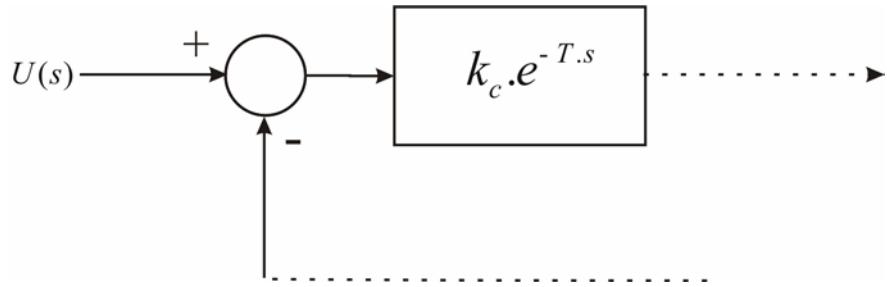


Figura15.

$$\text{Si se usa } e^{-T.s} \approx \frac{-(s - \frac{2}{T})}{(s + \frac{2}{T})} = \frac{-(s + \frac{2}{T}) - \frac{2}{T} - \frac{2}{T}}{(s + \frac{2}{T})} \approx \frac{\frac{4}{T}}{(s + \frac{2}{T})} - 1$$

El diagrama quedará como el mostrado en la figura 16

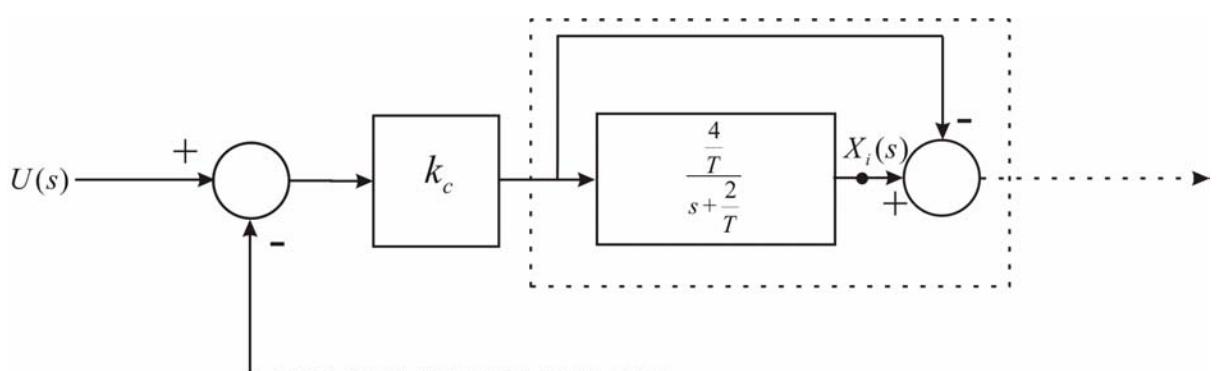


Figura16.

Si la aproximación del retardo está en otro sitio que no requiera la $\frac{d}{dt}u(t)$ no hace falta hacer esta modificación.

Ejemplo 7:

Para la planta del control de velocidad un diagrama en bloques puede ser el mostrado en la figura 17:

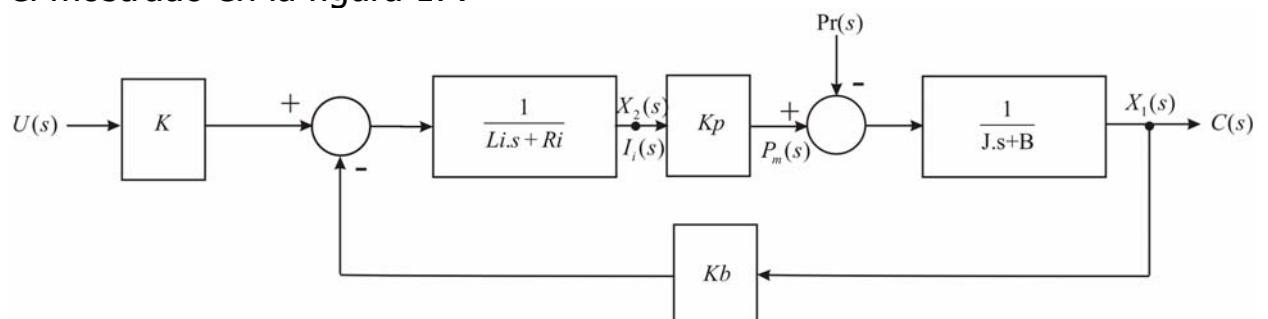


Figura17.

$$\frac{X_1(s)}{K_p \cdot X_2(s) - Pr(s)} = \frac{1}{J \cdot s + B} \rightarrow J \cdot \dot{x}_1 + B \cdot x_1 = k_p \cdot x_2 - Pt(t) \therefore \dot{x}_1 = -\frac{B}{J} \cdot x_1 + \frac{k_p}{J} \cdot x_2 - \frac{1}{J} Pt(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{k \cdot U_c(s) - k_b \cdot X_1(s)} = \frac{1}{R_i + s, L_i} \rightarrow L_i \cdot \dot{x}_2 + R_i \cdot x_2 = -k_b \cdot x_1 + k \cdot u_c \therefore \dot{x}_2 = -\frac{k_b}{L_i} \cdot x_1 - \frac{R_i}{L_i} \cdot x_2 + \frac{k}{L_i} \cdot u_c$$

La salida:

$$Y(s) = X_1(s) \rightarrow \text{antitransformando por Laplace} \rightarrow y(t) = x_1(t)$$

Como $\begin{cases} \bar{x}(t) = A \cdot \bar{x}(t) + B \cdot u_c(t) + E \cdot pr(t) \\ y(t) = C \cdot \bar{x}(t) + D \cdot u_c(t) + H \cdot pr(t) \end{cases}$

Las matrices serán:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{k_p}{J} \\ -\frac{k_b}{L_i} & -\frac{R_i}{L_i} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{L_i} \end{bmatrix} ; \quad E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \ 0] ; \quad D = [0] \text{ y } H = [0]$$

Reemplazando valores:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{75} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{50}{3} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \end{bmatrix} ; \quad E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{15} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \ 0] ; \quad D = [0] \text{ y } H = [0]$$

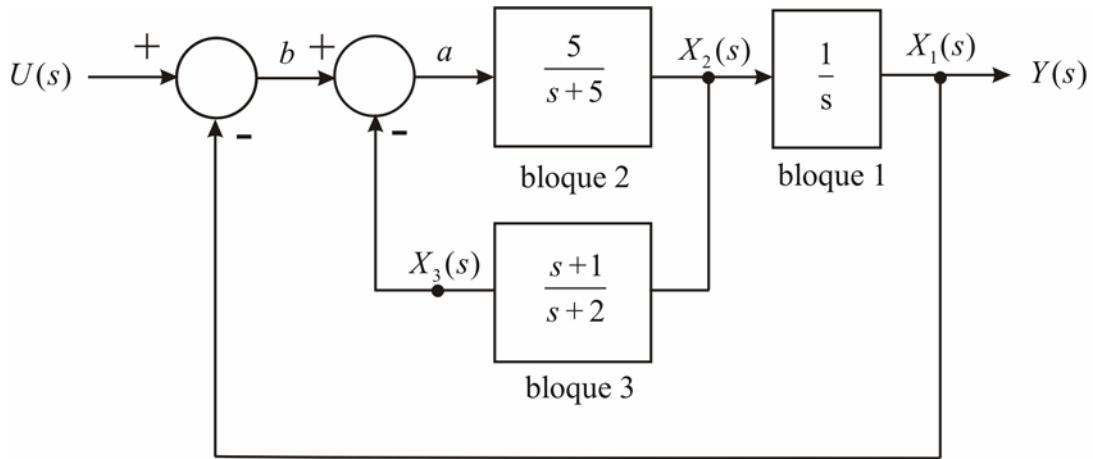
Como se puede observar son las mismas que se obtuvieron por el método que determinaba las formas distintas de almacenar energía, pues las variables de estado resultaron las mismas.

Ejemplo 8:

Encontrar las ecuaciones dinámicas de la planta mostrada en la figura 18.

1. Usando el método analítico (M2).
2. Usando las funciones *svloop* y *svseries* del CSAD/Matlab, representando cada bloque con la función *tf2ccf* del mismo programa, o con la función *tf2ss* de Matlab.

El diagrama cumple con todos los requisitos ya mencionados anteriormente.-



Ningún bloque requiere u !!!

Figura 18.

Definiendo las variables de estado como la salida elegida de cada bloque, como se indica se llega a:

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{s} \rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s) - X_1(s) - X_3(s)} = \frac{5}{s+5} \rightarrow \dot{x}_2 + 5x_2 = -5x_1 - 5x_3 + 5u \rightarrow \dot{x}_2 = -5x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 5u$$

$$\frac{X_3(s)}{X_2(s)} = \frac{s+1}{s+2} \rightarrow \dot{x}_3 + 2x_3 = \dot{x}_2 + 5x_2 \rightarrow \dot{x}_3 = -5x_1 - 4x_2 - 7x_3 + 5u ; \quad y = x_1$$

Las ecuaciones quedan:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & -5 \\ -5 & -4 & -7 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \ 0 \ 0] ; \quad D = [0]$$

Otra forma:

El sistema anterior se puede poner como el mostrado en la figura 19:

$$\frac{s+1}{s+2} = \frac{s+2-2+1}{s+2} = 1 - \frac{1}{(s+2)}$$

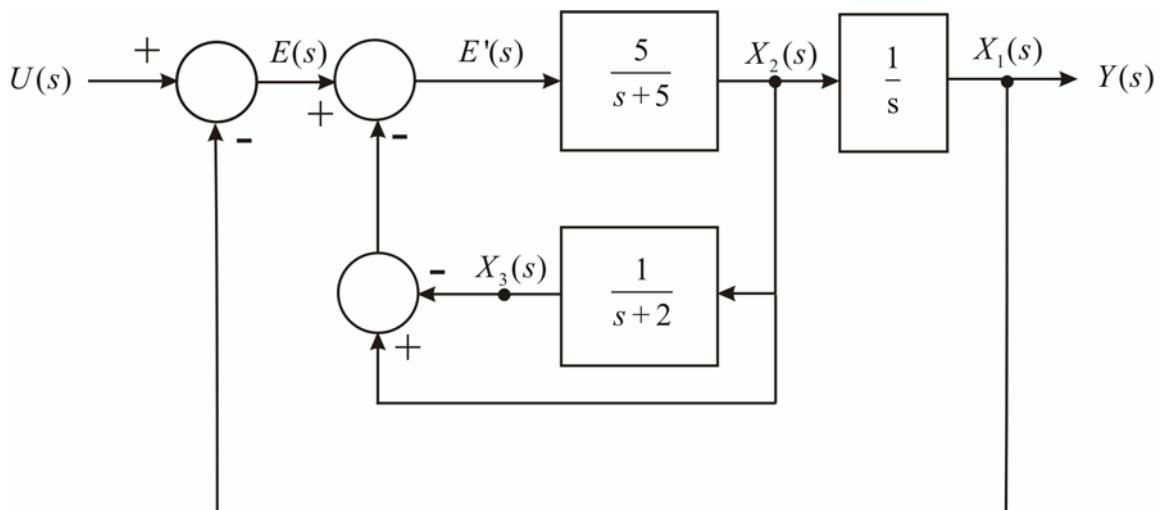


Figura 19

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{s} \rightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{X_2(s)}{E(s)} &= \frac{X_2(s)}{E(s)-B(s)} = \frac{X_2(s)}{[U(s)-X_1(s)]-[X_2(s)-X_3(s)]} = \frac{X_2(s)}{U(s)-X_1(s)-X_2(s)+X_3(s)} \\ &= \frac{5}{(s+5)} \rightarrow \dot{x}_2 + 5x_2 = 5u - 5x_1 - 5x_2 + 5x_3 \rightarrow \dot{x}_2 = -5x_1 - 10x_2 + 5x_3 + 5u\end{aligned}$$

$$\frac{X_3(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{(s+2)} \rightarrow \dot{x}_3 + 2x_3 = x_2 \rightarrow \dot{x}_3 = x_2 - 2x_3$$

$$Y(s) = X_1(s) \rightarrow y(t) = x_1(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -10 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]; \quad D = [0]$$

Usando la computadora, con el Csad se puede determinar un modelo de la planta de la siguiente forma:

```
» n1=1;
» d1=[1 0];
» n2=5;
» d2=[1 5];
» n3=[1 1];
» d3=[1 2];
» [A1,B1,C1,D1]=tf2ccf(n1,d1);
» [A2,B2,C2,D2]=tf2ccf(n2,d2);
» [A3,B3,C3,D3]=tf2ccf(n3,d3);
» [a,b,c,d]=svcloop(A2,B2,C2,D2,A3,B3,C3,D3);
» [a1,b1,c1,d1]=svseries(A1,B1,C1,D1,a,b,c,d);
» [A,B,C,D]=svcloop(a1,b1,c1,d1,1)
```

A =

$$\begin{matrix} 0 & 5 & 0 \\ -1 & -10 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{matrix}$$

B =

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

C =

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

D =

$$\begin{matrix} 0 \end{matrix}$$

Ejemplo 9:

Motor de Corriente Continua de Armadura Controlada

Un diagrama de bloques se muestra en la figura 20:

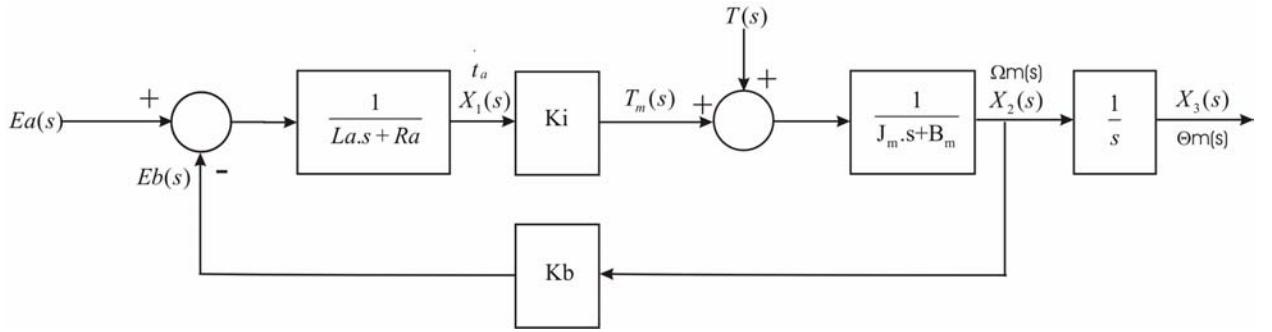


Figura 20

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_m(t) \end{bmatrix} \quad n=3; \quad p=2; \quad q=1. \quad u(t) = \begin{bmatrix} e_a(t) \\ T(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{X_1(s)}{Ea(s) - KbX_2(s)} = \frac{1}{Ra + sLa} \Rightarrow Rax_1(t) + La x_1(t) = ea(t) - Kb x_2(t)$$

$$x_1(t) = -\frac{Ra}{La}x_1(t) - \frac{Kb}{La}x_2(t) + \frac{1}{La}ea(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{T(s) + Ki X_1(s)} = \frac{1}{Jms + Bm} \Rightarrow Jmx_2(t) + Bmx_2(t) = Kix_1(t) + T(t)$$

$$x_2(t) = \frac{Ki}{Jm}x_1(t) - \frac{Bm}{Jm}x_2(t) + \frac{1}{Jm}T(t)$$

$$\frac{X_3(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{s} \Rightarrow x_3(t) = x_2(t)$$

$$Y(s) = \Theta m(s) = X_3(s) \Rightarrow y(t) = x_3(t)$$

Las matrices del modelo serán las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{Ra}{La} & -\frac{Kb}{La} & 0 \\ \frac{Ki}{Jm} & -\frac{Bm}{Jm} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (nxn) \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{La} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Jm} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (nxp) \quad C = [0 \quad 0 \quad 1] \quad (qxn) \quad D = [0 \quad 0] \quad (qxp)$$

Retardos Puros:

Si en algún diagrama de bloques de una planta a controlar hay un bloque que representa un retardo puro, primero se puede aproximar por una función de Padé de primer orden, recordando la misma es:

$$e^{-Ts} \approx \frac{-(s - 2/T)}{(s + 2/T)}, \text{ donde } T \text{ (seg.) es el tiempo de retardo. -}$$

Si el bloque está ubicado en un lugar que no requiere la derivada primera de la entrada, su salida puede ser una variable de estado, como se dijo. -

Ejemplo 10:

El diagrama de bloques de una planta se muestra en la figura 21, el segundo bloque de la cadena directa es un retardo de 0,20 seg. Su aproximación de Padé será: $e^{-0.2s} \approx \frac{-(s-10)}{(s+10)}$

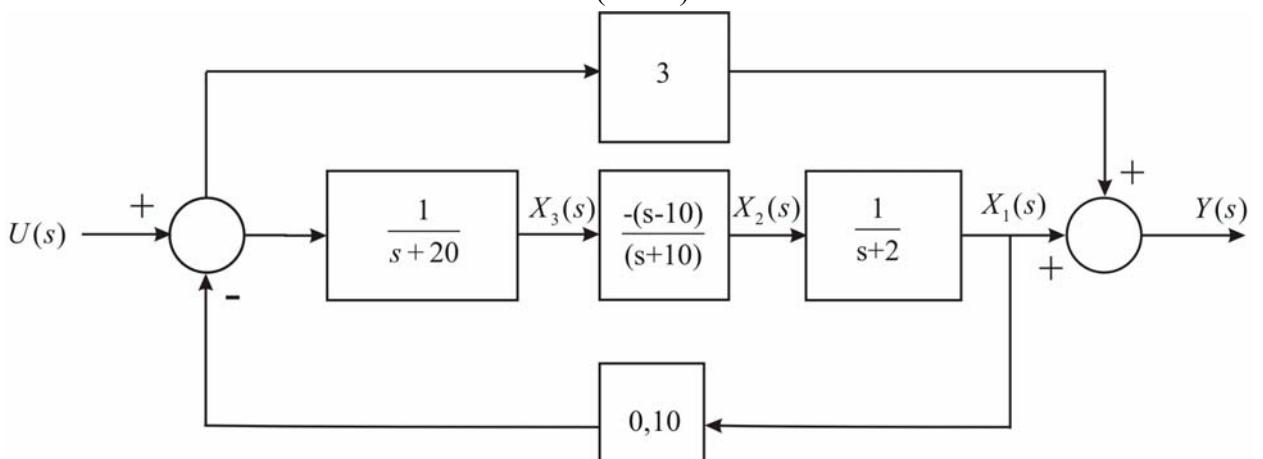


Figura 21

Las ecuaciones de la planta son a partir del diagrama las siguientes:

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{(s+2)} \Rightarrow x_1(t) + 2x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow x_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{X_3(s)} = \frac{-(s-10)}{(s+10)} \Rightarrow x_2(t) + 10x_2(t) = -x_3(t) + 10x_3(t) \Rightarrow x_2(t) = -10x_2(t) + 10x_3(t) - x_3(t)$$

$$\frac{X_3(s)}{U(s) - 0.1X_1(s)} = \frac{1}{(s+20)} \Rightarrow x_3(t) + 20x_3(t) = -0.1x_1(t) + u(t)$$

$$x_3(t) = -0.1x_1(t) - 20x_3(t) + u(t)$$

Por lo tanto, la segunda ecuación de estado será:

$$x_2(t) = -10x_2(t) + 10x_3(t) + 0.1x_1(t) + 20x_3(t) - u(t)$$

$$x_2(t) = 0.1x_1(t) - 10x_2(t) + 30x_3(t) - u(t)$$

La ecuación de salida resulta:

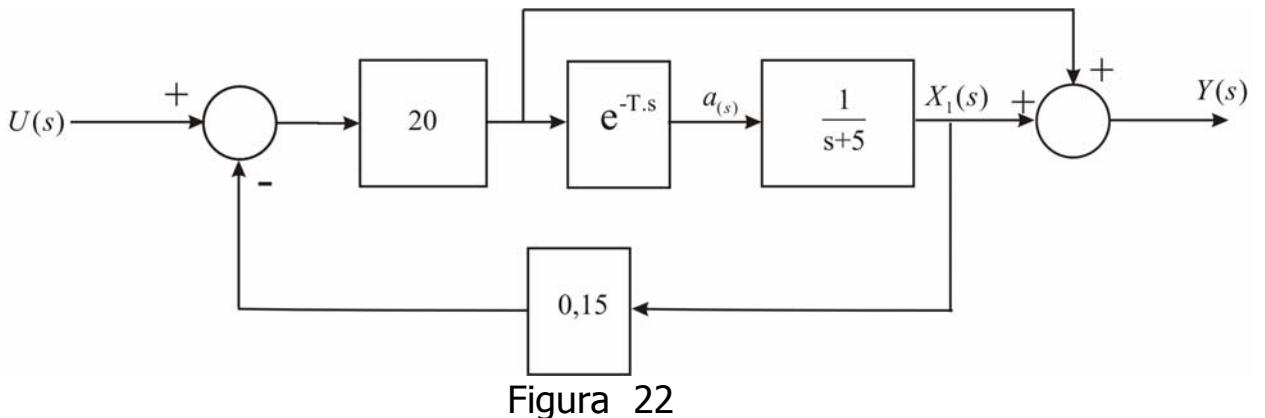
$$Y(s) = X_1(s) + 3(U(s) - 0.1X_1(s)) \Rightarrow y(t) = 0.7x_1(t) + 3u(t)$$

Las matrices del modelo resultan las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0.1 & -10 & 30 \\ -0.1 & 0 & -20 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [0.7 \quad 0 \quad 0] \quad D = [3]$$

Ejemplo 11:

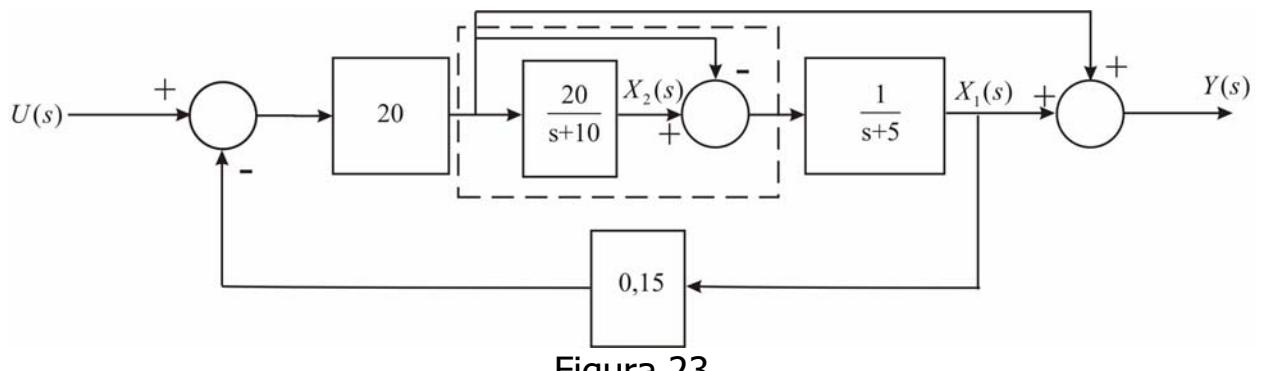
Se estudiará una planta con un retardo puro en un bloque donde si se requiera la derivada de la entrada, y por ende la salida del mismo no puede ser una variable de estado, es el mostrado en la figura 22.



Primero se transforma el bloque de la aproximación de la manera siguiente:

$$e^{-Ts} \cong \frac{-(s - 2/T)}{(s + 2/T)} = \frac{-(s + 2/T - 2/T - 2/T)}{(s + 2/T)} = \frac{-(s + 2/T - 4/T)}{(s + 2/T)} = \frac{4/T}{(s + 2/T)} - 1$$

Si $T=0.2$ seg. $e^{-0.2s} \cong \frac{20}{(s+10)} - 1$, el diagrama de bloques resultante es el que se muestra en la figura 23.



$$\frac{X_1(s)}{X_2(s) - 20[U(s) - 0.1s X_1(s)]} = \frac{1}{(s+5)} \Rightarrow x_1(t) + 5x_1(t) = x_2(t) - 20u(t) + 2x_1(t)$$

$$x_1(t) = 5x_1(t) - x_2(t) + 20u(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{20[U(s) - 0.1s X_1(s)]} = \frac{20}{(s+10)} \Rightarrow x_2(t) + 10x_2(t) = 400u(t) - 40x_1(t)$$

$$x_2(t) = -10x_2(t) + 400u(t) - 40(5x_1(t) - x_2(t) + 20u(t))$$

$$x_2(t) = -10x_2(t) + 400u(t) - 200x_1(t) + 40x_2(t) - 800u(t)$$

Finalmente:

$$x_2(t) = -200x_1(t) + 30x_2(t) - 400u(t)$$

La ecuación de salida será.

$$Y(s) = X_1(s) + 20[U(s) - 0.1s X_1(s)] \Rightarrow y(t) = x_1(t) + 20u(t) - 2x_1(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + 20u(t) - 10x_1(t) + 2x_2(t) - 40u(t)$$

Que finalmente:

$$y(t) = -9x_1(t) + 2x_2(t) - 20u(t)$$

Las matrices del modelo son en consecuencia:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -200 & 30 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 20 \\ -400 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -9 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -20 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 12:

Una planta tiene el diagrama de bloques de la figura 24.

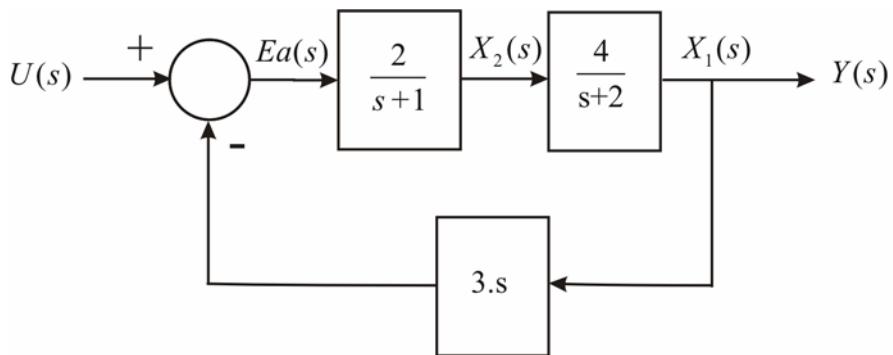


Figura 24

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{4}{(s+2)} \Rightarrow x_1(t) + 2x_1(t) = 4x_2(t) \Rightarrow x_1(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s) - 3sY(s)} = \frac{X_2(s)}{U(s) - 3sX_1(s)} = \frac{2}{(s+1)} \Rightarrow x_2(t) + x_2(t) = 2u(t) - 6x_1(t)$$

$$x_2(t) = -x_2(t) + 2u(t) + 12x_1(t) - 24x_2(t)$$

Por ende la segunda ecuación de estado será:

$$x_2(t) = 12x_1(t) - 25x_2(t) + 2u(t)$$

Como, $Y(s) = X_1(s) \Rightarrow y(t) = x_1(t)$ será la ecuación de salida.

Las matrices del modelo de la planta serán en consecuencia las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 12 & -25 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 13:

Se desea obtener el modelo matemático en el espacio de estado de la planta cuyo diagrama de bloques es el indicado en la figura 25.

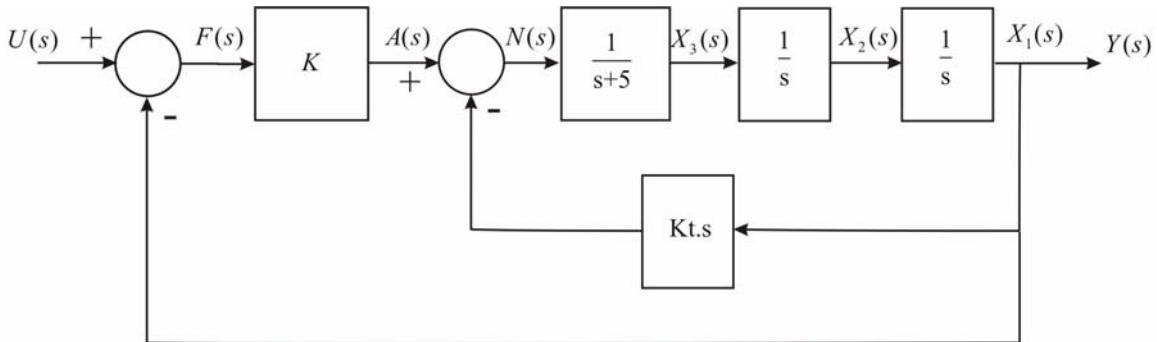


Figura 25

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{s} \Rightarrow \boxed{x_1(t) = x_2(t)}$$

$$\frac{X_2(s)}{X_3(s)} = \frac{1}{s} \Rightarrow \boxed{x_2(t) = x_3(t)}$$

$$\frac{X_3(s)}{N(s)} = \frac{X_3(s)}{A(s) - Kt s X_1(s)} = \frac{X_3(s)}{K F(s) - Kt s X_1(s)} = \frac{X_3(s)}{K[U(s) - X_1(s)] - Kt s X_1(s)} = \frac{1}{(s+5)}$$

Por lo tanto:

$$x_3(t) + 5x_3(t) = KU(s) - Kx_1(t) - Kt x_1(t)$$

La tercera ecuación de estado será la siguiente:

$$\boxed{x_3(t) = -Kx_1(t) - Kt x_2(t) - 5x_3(t) + K u(t)}$$

La ecuación de salida se puede apreciar que es:

$$\boxed{y(t) = x_1(t)}$$

Las matrices de este modelo son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K & -Kt & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D = [0]$$

Ejemplo 14:

El proceso a controlar tiene el diagrama de bloques indicado en la figura 26

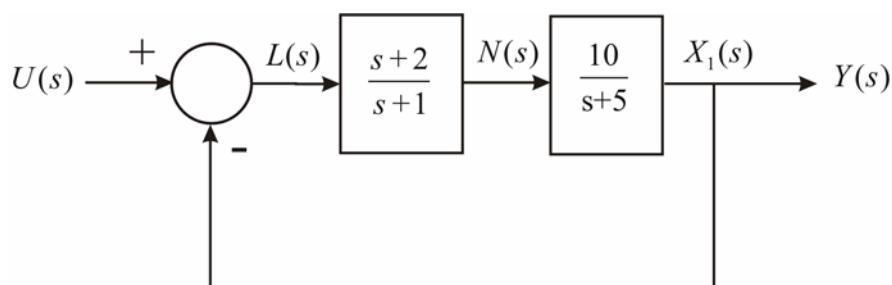


Figura 26

Como la variable $N(s)$ no puede ser una variable de estado de la planta

pues requerirá la derivada primera de la señal de control $u(t)$ ya que:

$$\frac{N(s)}{L(s)} = \frac{N(s)}{U(s) - X_1(s)} = \frac{(s+2)}{(s+1)} \Rightarrow n(t) + n(t) = -2x_1(t) + 2u(t) - x_1(t) + \frac{d}{dt}u(t).-$$

Por lo tanto se tendrá que transformar el primer bloque del diagrama de bloques para subsanar este inconveniente. La transformación de dicho bloque y el diagrama resultante se indican en la figura 27.-

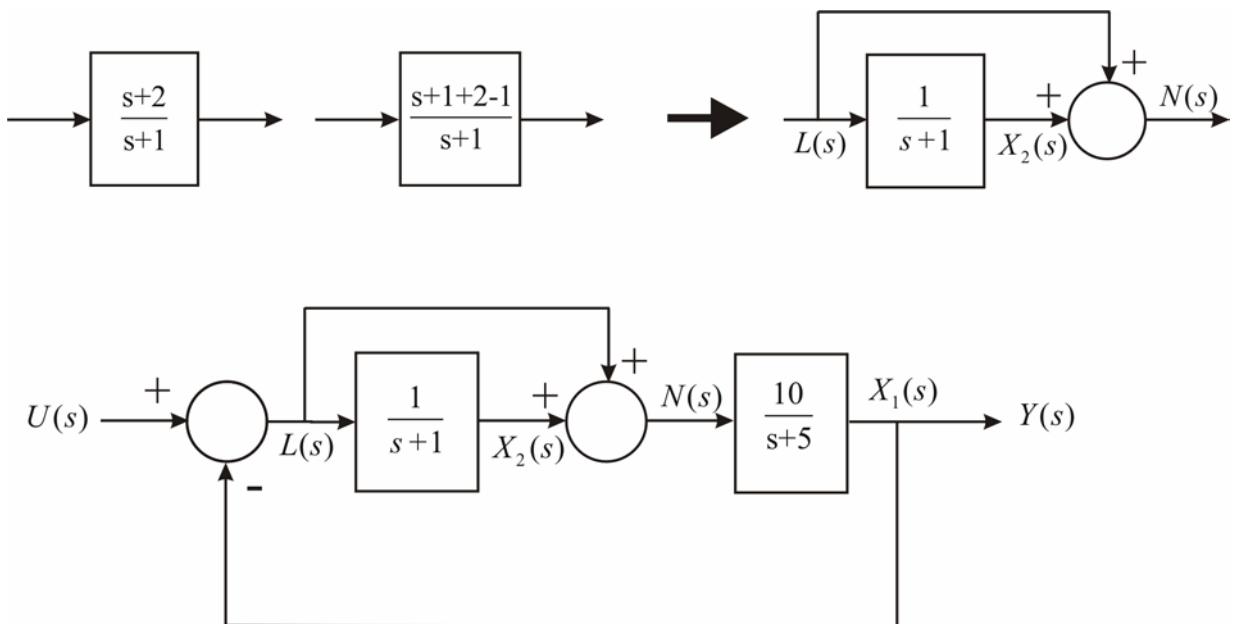


Figura 27

$$\frac{X_1(s)}{N(s)} = \frac{X_1(s)}{X_2(s) + L(s)} = \frac{X_1(s)}{X_2(s) + U(s) - X_1(s)} = \frac{10}{(s+5)}$$

Multiplicando en cruz y antitransformando por Laplace:

$$x_1(t) + 5x_1(t) = -10x_1(t) + 10x_2(t) + 10u(t)$$

La primera ecuación de estado será:

$$x_1(t) = -15x_1(t) + 10x_2(t) + 10u(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{L(s)} = \frac{X_2(s)}{U(s) - X_1(s)} = \frac{1}{(s+1)} \Rightarrow x_2(t) + x_2(t) = -x_1(t) + u(t)$$

La segunda será:

$$x_2(t) = -x_1(t) + x_2(t) + u(t)$$

Como se puede ver:

$$Y(s) = X_1(s) \Rightarrow y(t) = x_1(t)$$

Las cuatro matrices del modelo así obtenido serán:

$$A = \begin{bmatrix} -15 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \quad y \quad D = [0]$$

Ejemplo 15:

Un diagrama de bloques de una planta es el mostrado en la figura 28.

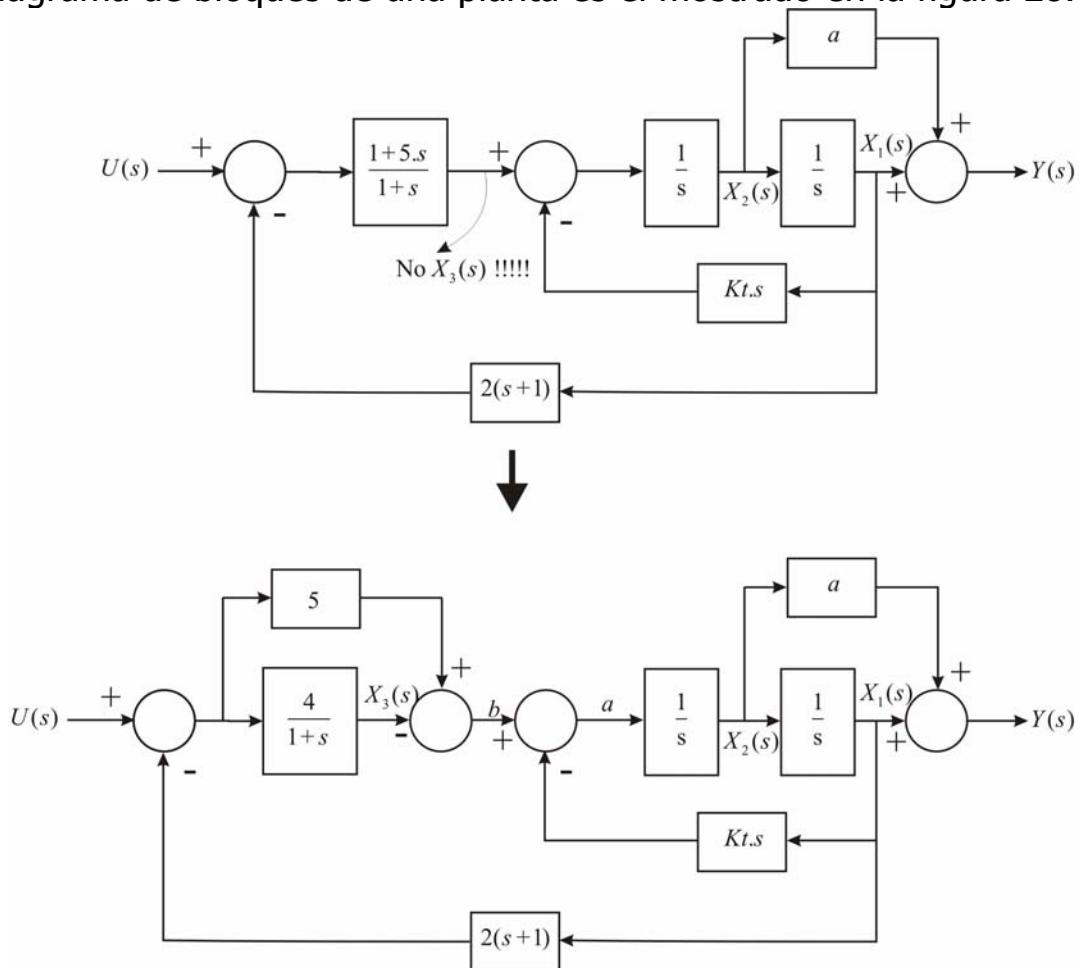


Figura 28

La transformación del primer bloque es:

$$\frac{1+5s}{1+s} = \frac{5-4+5s}{1+s} = \frac{5(1+s)-4}{(1+s)} = 5 + \frac{-4}{(1+s)},$$

Las ecuaciones obtenidas a través del diagrama arreglado serán las siguientes:

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{s} \Rightarrow \boxed{x_1(t) = x_2(t)}$$

$$\begin{aligned} \frac{X_2(s)}{a(s)} &= \frac{X_2(s)}{b(s) - kt s X_1(s)} = \frac{X_2(s)}{5e(s) - X_3(s) - kt s X_1(s)} = \frac{X_2(s)}{5[U(s) - d(s)] - X_3(s) - kt s X_1(s)} = \\ &= \frac{X_2(s)}{5U(s) - 10s X_1(s) - 10X_1(s) - X_3(s) - kt s X_1(s)} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Multiplicando en cruz y antitransformando por Laplace y ordenado la segunda ecuación de estado será:

$$\boxed{x_2(t) = -10x_1(t) - (kt + 10)x_2(t) - x_3(t) - 5u(t)}$$

$$\frac{X_3(s)}{e(s)} = \frac{X_3(s)}{U(s) - d(s)} = \frac{X_3(s)}{U(s) - 2sX_1(s) - 2X_1(s)} = \frac{4}{(s+1)}, \text{ por lo tanto:}$$

$$x_3(t) = -8x_1(t) - 8x_2(t) - x_3(t) + 4u(t)$$

La ecuación de salida: $Y(s) = X_1(s) + aX_2(s) \Rightarrow y(t) = x_1(t) + ax_2(t)$

El juego de matrices del modelo será:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & -(kt+10) & -1 \\ -8 & -8 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad a \quad 0] \quad y \quad D = [0]$$

Ejemplo 16:

Determinar el modelo matemático en variables de estado de la planta cuyo diagrama de bloques es el indicado en la figura 29.

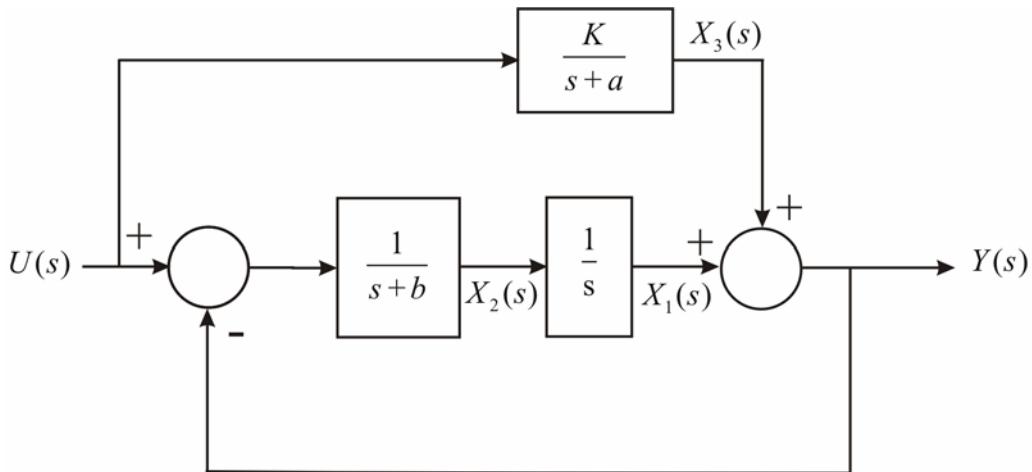


Figura 29

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{s} \Rightarrow x_1(t) = x_2(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s) - Y(s)} = \frac{X_2(s)}{U(s) - X_1(s) - X_3(s)s} = \frac{1}{(s+b)} \Rightarrow x_2(t) + bx_2(t) = -x_1(t) - x_3(t) + u(t)$$

$$x_2(t) = -x_1(t) - bx_2(t) - x_3(t) + u(t)$$

$$\frac{X_3(s)}{U(s)} = \frac{K}{(s+a)} \Rightarrow x_3(t) = -ax_3(t) + Ku(t)$$

La ecuación de salida es:

$$Y(s) = X_1(s) + X_3(s) \Rightarrow y(t) = x_1(t) + x_3(t)$$

Las matrices serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -b & -1 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ K \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 1] \quad y \quad D = [0]$$

Si en general $a \neq b$, y se obtiene la función de transferencia de la planta, $G_p(s)$, la misma resulta:

$$G_p(s) = \frac{K s(s+b)+(s+a)}{(s+a)(s^2+bs+1)}$$

Si $a = b \equiv c$, quedará.

$$G_p(s) = \frac{(K s + 1)}{(s^2 + bs + 1)}$$

Se verán dos ejemplos más donde se impondrá la necesidad de utilizar otros métodos para determinar un modelo matemático de la planta a controlar.

Ejemplo 17:

Hay que tener cuidado de no definir mas variables de estado que las mínimas necesarias. En el ejemplo siguiente, indicado en la figura 30, se podría cometer este error. En una primera impresión parecería que: $n = 5$, si se piensa así se cometería el error comentado. Pues no se cumpliría la última condición ya mencionada de la no cancelación polo – cero al reducir lazos internos del diagrama de bloques del mismo, como se puede apreciar.

Reduciendo el diagrama, la función de transferencia del camino directo del lazo mayor $G_1(s)$ será:

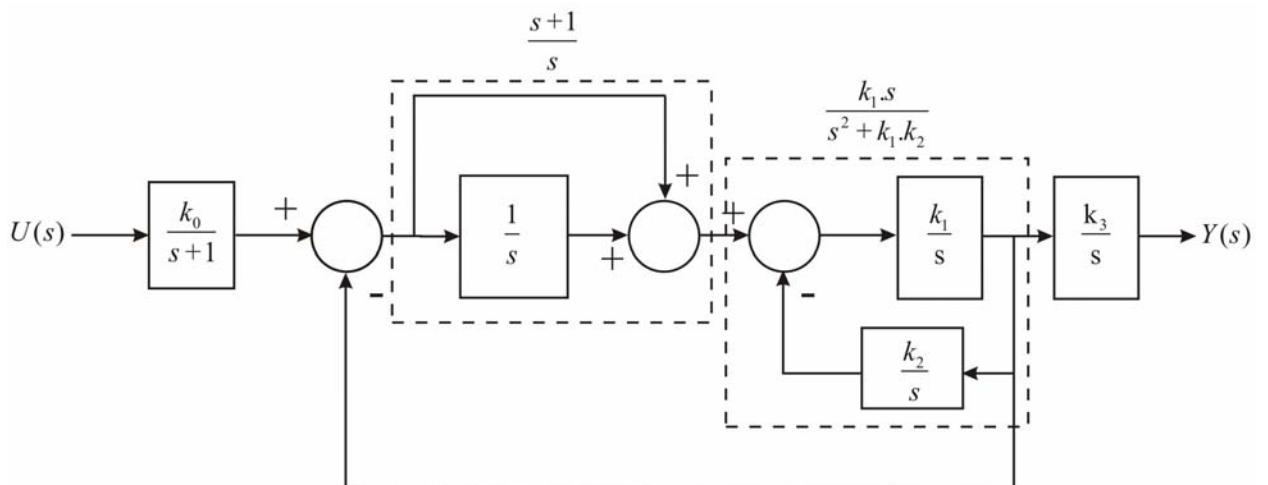


Figura 30

$$G_1(s) = \frac{k_1 s(s+1)}{s(s^2 + k_1 k_2)} = \frac{k_1(s+1)}{(s^2 + k_1 k_2)}$$

$$\text{Y la de lazo cerrado del mismo quedará: } M_1(s) = \frac{k_1(s+1)}{s^2 + k_1 s + (k_1 k_2 + k_1)}$$

Finalmente la función de transferencia de la planta queda:

$$Gp(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_0}{(s+1)} \times \frac{k_1(s+1)}{s^2 + k_1 s + k_1(1+k_2)} \times \frac{k_3}{s} = \frac{k_0 k_1 k_3}{s[s^2 + k_1 s + k_1(1+k_2)]}$$

Lo tanto la planta es de tercer orden o sea $n = 3$, y no 5 como se pudo pensar en primer momento. En consecuencia el número de variables de estado deberán ser tres.-

Este es un ejemplo que requiere otros métodos, los mismos se pueden basar en la construcción de un diagrama de estado a partir de la ecuación diferencial o por una descomposición de la función de transferencia $Gp(s)$.

Ejemplo 18:

Una planta tiene el diagrama de bloques de la figura 31.

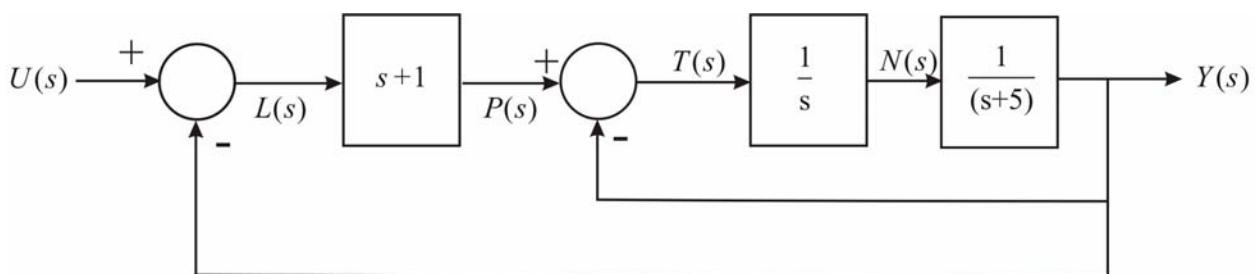


Figura 31

$y(t)$ Puede ser una variable de estado pero $n(t)$, no pues:

$$\frac{N(s)}{T(s)} = \frac{N(s)}{P(s) - Y(s)} = \frac{N(s)}{L(s)(s+1) - Y(s)} = \frac{N(s)}{(U(s) - Y(s))(s+1) - Y(s)}$$

$$= \frac{N(s)}{sU(s) - sY(s) + U(s) - 2Y(s)} = \frac{1}{s};$$

Multiplicando en cruz y Antitransformando por Laplace queda:

$$n(t) = u(t) - y(t) + u(t) - 2y(t)$$

Como se aprecia requiere $u(t)$, por ende $n(t)$ no puede ser una variable de estado. En consecuencia hay que buscar otro método. El mismo puede ser por descomposición de la función de transferencia de la planta $Gp(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$.

La misma se basa en la construcción de algún diagrama de estado.

En el ejemplo se descompondrá a $Gp(s)$.

$$Gp(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)}{(s^2 + 6s + 2)},$$

como se vera mas adelante.

Las matrices de un modelo pueden ser las siguientes:

(la llamada forma canónica controlable como se estudiará oportunamente).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad D = [0]$$

Diagramas de Estado:

En esta sección se introduce los diagramas de estado, los cuales son una extensión de las gráficas de flujo señal para describir ecuaciones de estado y ecuaciones diferenciales. El significado del diagrama de estado es que tiene una relación muy cercana entre las ecuaciones de estado, la simulación por computadora y las funciones de transferencias. Un diagrama de estado se construye siguiendo todas las reglas de las gráficas de flujo señal, (G.F.S.), utilizando la transformada de Laplace de las ecuaciones de estado.

Los elementos básicos de un diagrama de estado son similares a los de las G.F.S. convencionales, a excepción de la operación integración. Si las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ están relacionadas mediante la diferenciación de primer orden:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad (1)$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación (1) con respecto al tiempo desde el tiempo inicial t_0 , se obtiene:

$$x_1(t) = \int_{t_0}^t x_2(\tau) d\tau + x_1(t_0) \quad (2)$$

Ya que el álgebra de las G.F.S. no maneja integración en el dominio del tiempo, se debe tomar la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (2). Se obtiene:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= L\left[\int_{t_0}^t x_2(\tau) d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s} = L\left[\int_0^t x_2(\tau) d\tau - \int_0^{t_0} x_2(\tau) d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s} \\ X_1(s) &= \frac{X_2(s)}{s} - L\left[\int_0^{t_0} x_2(\tau) d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s} \end{aligned} \quad (3)$$

Ya que la historia pasada del integrador se representa mediante $x_1(t_0)$ y la transición de estado se supone que empieza en $\tau = t_0$, $x_2(\tau) = 0$ para $0 < \tau < t_0$. Por lo tanto la ecuación (3) se convierte en:

$$X_1(s) = X_2(s)s^{-1} + x_1(t_0)s^{-1} \quad (4)$$

La ecuación (4) es ahora algebraica y se puede representar mediante una G.F.S. como se muestra en la figura 32.

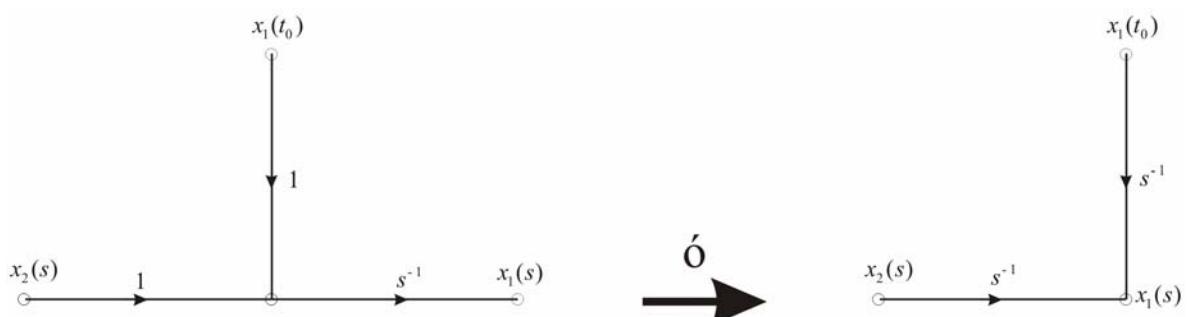


Figura 32

La última gráfica muestra que la salida del integrador es igual a s^{-1} veces la entrada, mas la condición inicial $\frac{x_1(t_0)}{s}$.

Antes de presentar varios ejemplos ilustrativos sobre la construcción de diagramas de estado, se señalaran puntos importantes en la utilización del mismo.

- 1º) Un diagrama de estado se puede construir fácilmente a partir de la ecuación diferencial de la planta (preferiblemente cuando la misma no posee derivadas de la entrada). Esto permite la determinación de las variables de estado y por ende escribir las ecuaciones de estado y de salida del modelo.
- 2º) Un diagrama de estado se puede construir a partir de la Función de Transferencia de la planta. Este paso se describe como la descomposición de las funciones de transferencia.
- 3º) El diagrama de estado se puede utilizar para la propagación del sistema en una computadora digital, (Simulink, por ejemplo).
- 4º) Las ecuaciones de estado en el dominio de la transformada de Laplace se puede obtener a partir de diagrama de estado mediante la formula de ganancia de Masson, y el principio de superposición.
- 5º) Las funciones de transferencia de las plantas se pueden determinar del diagrama de estado, utilizando la formula de Masson.
- 6º) Las ecuaciones de estado y de salida del modelo de la planta se pueden determinar del diagrama de estado, utilizando la formula de ganancia de Masson y el principio de superposición.

A continuación se presentaran los detalles de estas técnicas.

1º) De las Ecuaciones Diferenciales al Diagrama de Estado.

Cuando una planta a controlar lineal se describe a través de una ecuación diferencial de orden superior, se puede construir un diagrama de estado en forma directa a partir de dichas ecuaciones si en las mismas no aparecen las derivadas de las acciones de control ($u(t)$).

Considere la ecuación diferencial siguiente:

$$a_3\ddot{y}(t) + a_2\dot{y}(t) + a_1y(t) + a_0u(t) = b_0u(t) \quad (1)$$

Para construir un diagrama de estado utilizando esta ecuación, esta se puede arreglar de las formas siguientes:

- Dividiendo ambos miembros por a_3 y despejando $\ddot{y}(t)$.
- O dividiendo ambos miembros por b_0 y despejando $\frac{a_3}{b_0}\ddot{y}(t)$.

$$\ddot{y}(t) = -\frac{a_2}{a_3}\dot{y}(t) - \frac{a_1}{a_3}y(t) - \frac{a_0}{a_3}u(t) + \frac{b_0}{a_3}u(t) \quad (2)$$

$$0 \quad \frac{a_3}{b_0}\ddot{y}(t) = -\frac{a_2}{b_0}\dot{y}(t) - \frac{a_1}{b_0}y(t) - \frac{a_0}{b_0}u(t) + u(t) \quad (3)$$

En el primer caso los nodos que representan $U(s), s^3Y(s), s^2Y(s), sY(s)$ e $Y(s)$. Se ubican de izquierda a derecha

En el 2º caso los nodos serán: $U(s), \frac{a_3}{b_0}s^3Y(s), \frac{a_3}{b_0}s^2Y(s), \frac{a_3}{b_0}sY(s), \frac{a_3}{b_0}Y(s)$ e $Y(s)$.

El siguiente paso será conectar los nodos con ramas con ganancias adecuadas para que representen las ecuaciones (2) o (3) según sea el caso. Finalmente se insertan las ramas de los integradores con ganancia s^{-1} y las condiciones iniciales que se suman a la salida de los integradores. Los diagramas de estado completos se ilustran en las figuras 33 y 34.

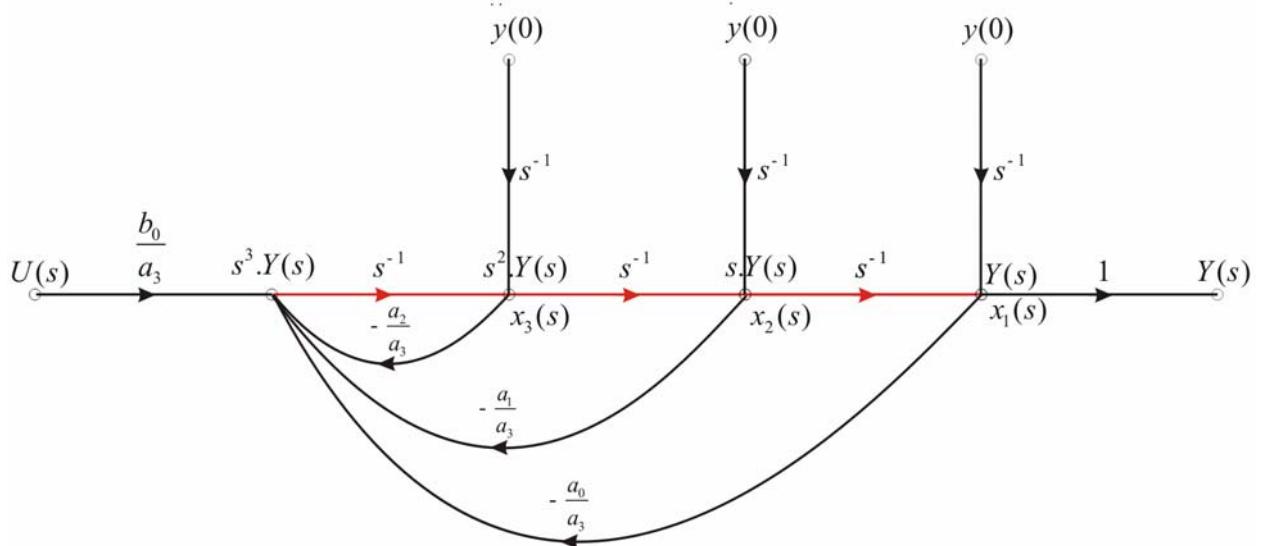


Figura 33

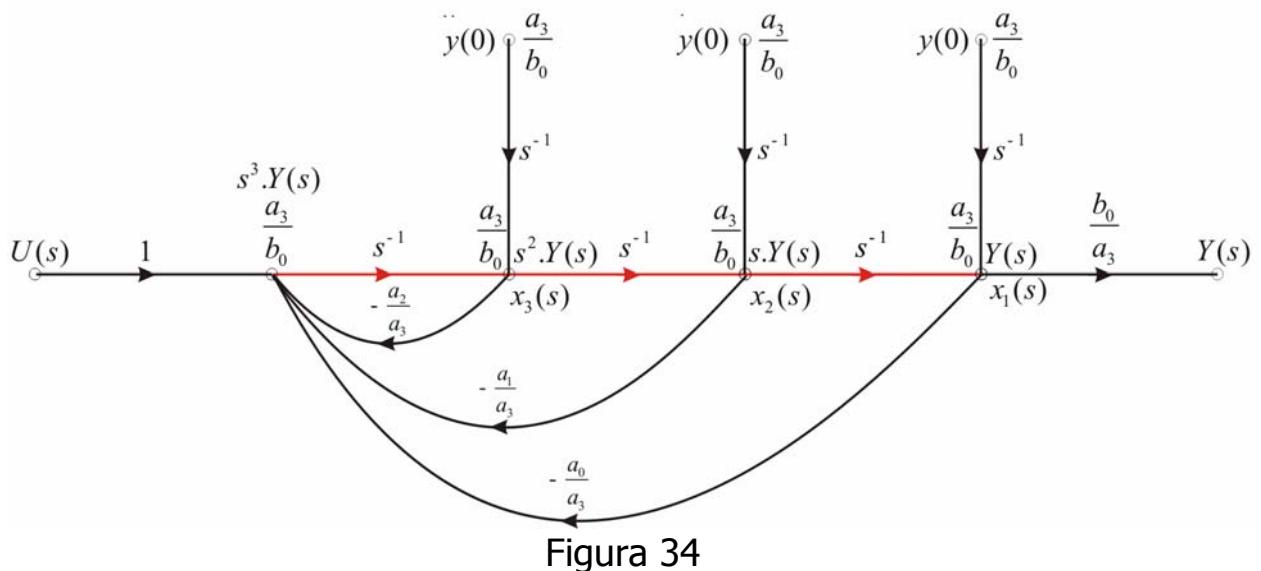


Figura 34

Las salidas de los integradores se definen como las variables de estado x_1, x_2, \dots, x_n de derecha a izquierda o viceversa. Por ende, en el primer caso, las variables de estado serán: $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$ y $x_3(t) = \ddot{y}(t)$.

Y en el segundo caso: $x_1(t) = \frac{a_3}{b_0}y(t)$, $x_2(t) = \frac{a_3}{b_0}\dot{y}(t)$ y $x_3(t) = \frac{a_3}{b_0}\ddot{y}(t)$.

El juego de las cuatro matrices, como se verá más adelante será en el primer diagrama:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_3} \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad \text{y} \quad D = [0]$$

Para el segundo diagrama de estado serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} b_0 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = [0]$$

La última forma es la que se denomina, como se verá más adelante, la forma canónica controlable. Si $a_3 = b_3$, ambos modelos coinciden como se puede apreciar.

Ejemplo 19:

Para la ecuación diferencial de la planta del sistema de control de velocidad, con $p_r(t) = 0$, teníamos:

$$\ddot{y}(t) + 16,68 \cdot \dot{y}(t) + 0,25 \cdot y(t) = 1,5 \cdot u(t)$$

En este ejemplo $a_n \equiv a_2 = 1$; $b_0 = 1,5$.

Para el primer diagrama, figura 35:

$$\ddot{y}(t) = -16,68 \cdot \dot{y}(t) - 0,25 \cdot y(t) + 1,5 \cdot u(t)$$

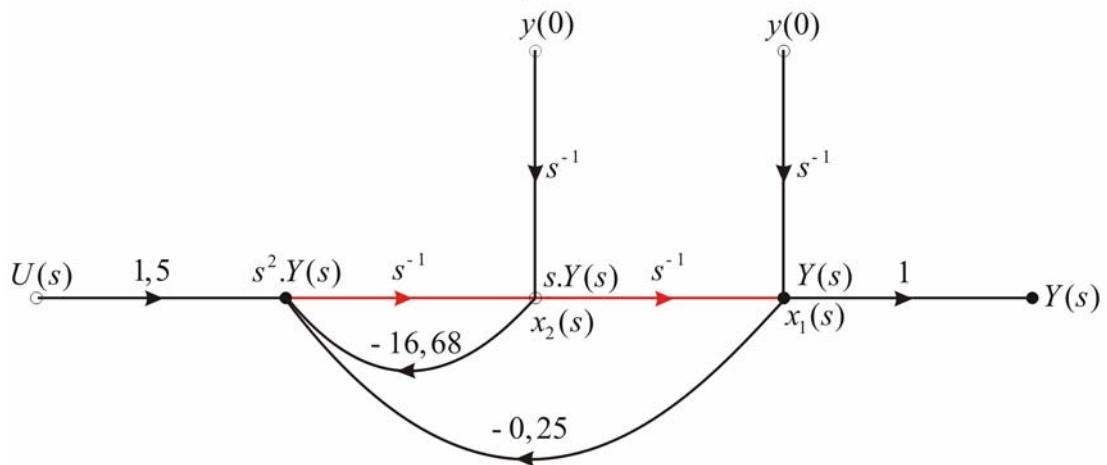


Figura 35

Para el segundo, figura 36:

$$\frac{1}{1,5} \ddot{y}(t) = -16,68 \left(\frac{\dot{y}(t)}{1,5} \right) - 0,25 \left(\frac{y(t)}{1,5} \right) + u(t)$$

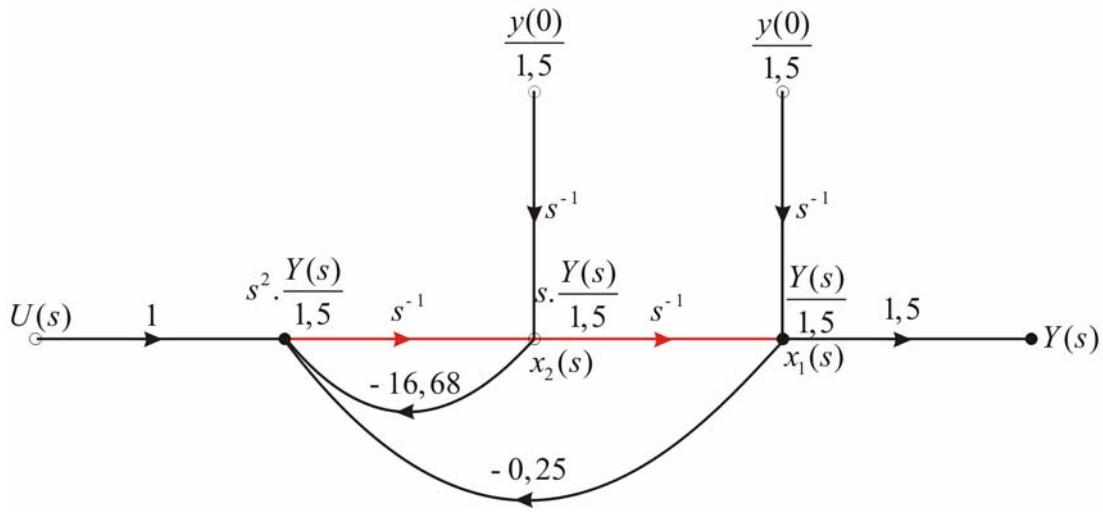


Figura 36

Ejemplo 20:

Con otro diagrama de estado de la misma planta pero teniendo en cuenta la entrada de carga $p_r(t)$. Las acciones diferenciales serán las siguientes:

$$\dot{w}(t) = -\frac{B}{J} w(t) + \frac{K_p}{J} i_i(t) - \frac{1}{J} p_r(t)$$

$$\frac{di_i(t)}{dt} = -\frac{k_p}{L_i} w(t) - \frac{R_i}{L_i} i_i(t) + \frac{k}{L_i} u_c(t)$$

Transformando por Laplace, donde $L(w(t)) = \Omega(s)$

$$s \cdot \Omega(s) = -\frac{B}{J} \Omega(s) + \frac{K_p}{J} I_i(s) - \frac{1}{J} P_r(s)$$

$$s \cdot I_i(s) = -\frac{k_p}{L_i} \Omega(s) - \frac{R_i}{L_i} I_i(s) + \frac{k}{L_i} U_c(s)$$

El diagrama de estado sería el modificado en la figura 37

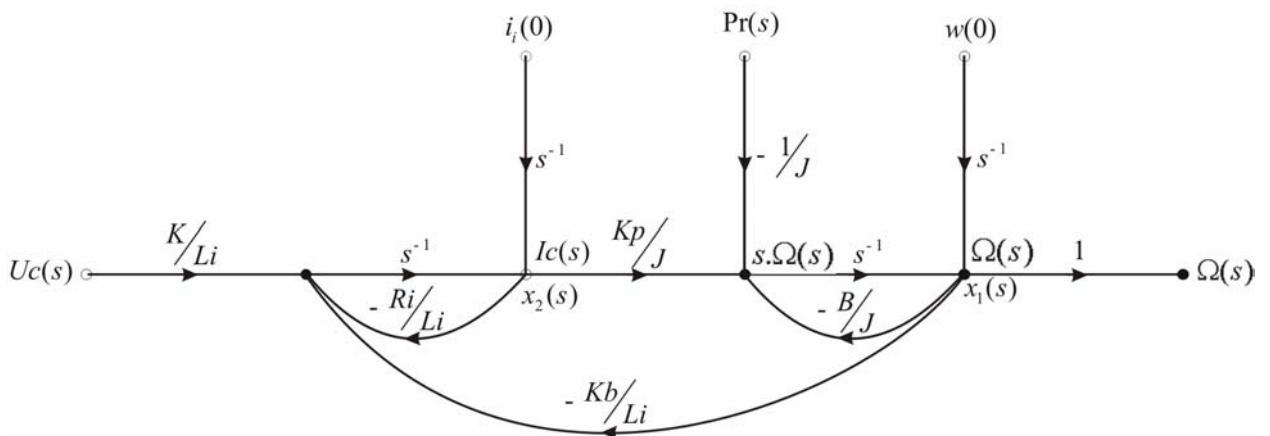


Figura 37

5º) Del Diagrama de Estado a la Función de Transferencia

La Función de Trasferencia, (F.T.), entre un nodo de salida y un nodo de entrada se obtiene a partir del diagrama de estado mediante el empleo de la fórmula de ganancia de Masson entre los mismos con los estados iniciales nulos.-

Dado un diagrama de flujo de señal (en general) con M trayectos directos entre los nodos correspondientes, L lazos, la ganancia entre el nodo de salida y e nodo de entrada es:

$$G = \frac{\text{Variable de Salida}}{\text{Variable de Entrada}} = \sum_{k=1}^N \frac{M_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

En donde:

N = número total de trayectos directos en los nodos.

M_k = ganancia de la trayectoria directa k-ésima entre los nodos.

$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \dots$ (Determinante del diagrama)

En la cual:

$\sum L_1$ = Es la suma de todas las ganancias de todos los lazos del diagrama.

$\sum L_2$ = Es la suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de los lazos que no se tocan tomadas de a dos en dos.

$\sum L_3$ = Ídem a $\sum L_2$ pero tomados de a tres los lazos disjuntos.

Δ_k = Es el coeficiente de M_k . Es el determinante de la subgráfica que queda cuando se quita el trayecto directo k .

- Debe tenerse cuidado que la fórmula se aplique entre un nodo de entrada y un nodo de salida solamente.
- Cuando se tienen *varios nodos de entrada y uno de salida*, se puede aplicar el principio de superposición para obtener *la salida debida a todas las entradas*.

Ejemplo 21:

Para el ejemplo 19, se tendrá, recordando que las condiciones iniciales deben ser nulas, el diagrama de estado de la Figura 38.

Determinar la función de transferencia: $G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = ?$

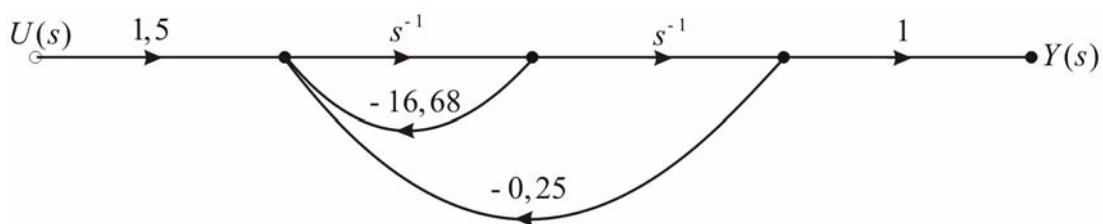


Figura 38.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{M_1}{\Delta} = \frac{1,5 \cdot s^{-2}}{1 + 16,68 \cdot s^{-1} + 0,25 \cdot s^{-2}} = \frac{1,5}{s^2 + 16,68 \cdot s + 0,25}$$

Ejemplo 22: Para el ejemplo 20, se tendrá:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Omega(s)}{U(s)} \right|_{Pr(s)=0} &= \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{M_1}{\Delta} = \frac{\frac{K K_p}{L_i J} s^{-2}}{1 + \left(\frac{R_i}{L_i} s^{-1} + \frac{B}{J} s^{-1} + \frac{K_p K_b}{J L_i} s^{-2} \right) + \left(\frac{R_i B}{L_i J} s^{-2} \right)} \\ \Rightarrow \left. \frac{\Omega(s)}{U(s)} \right|_{Pr(s)=0} &= \frac{\frac{K K_p}{L_i J} s^{-2}}{1 + \left(\frac{R_i}{L_i} + \frac{B}{J} \right) s^{-1} + \left(\frac{R_i B}{L_i J} + \frac{K_p K_b}{J L_i} \right) s^{-2}} \\ \Rightarrow \boxed{\left. \frac{\Omega(s)}{U(s)} \right|_{Pr(s)=0} = \frac{\frac{K K_p}{L_i J}}{s^2 + \left(\frac{R_i}{L_i} + \frac{B}{J} \right) s + \left(\frac{R_i B + K_p K_b}{L_i J} \right)}} &\Rightarrow \frac{1,5}{(s^2 + 16,68 \cdot s + 0,25)} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\Omega(s)}{Pr(s)} \right|_{U(s)=0} = \frac{M_1 \cdot \Delta_1}{\Delta} = \frac{\left(-\frac{1}{J} s^{-1} \right) \left(1 + \frac{R_i}{L_i} s^{-1} \right)}{\Delta} = \frac{-\frac{1}{J} s^{-1} \frac{R_i}{L_i} s^{-2}}{\Delta}$$

Finalmente:

$$\boxed{\left. \frac{\Omega(s)}{Pr(s)} \right|_{U(s)=0} = \frac{\frac{-1}{J} \left(s + \frac{R_i}{L_i} \right)}{s^2 + \left(\frac{R_i}{L_i} + \frac{B}{J} \right) s + \left(\frac{K_p K_b + R_i B}{L_i J} \right)}}$$

6º) Del Diagrama de Estado a las Ecuaciones Dinámicas (Ecuaciones de Estado y de Salida).-

Tanto las ecuaciones de estado como las de salida se pueden obtener directamente desde un diagrama de estado, utilizando la fórmula de ganancia de Masson y el principio de superposición.

El procedimiento es el siguiente:

- Eliminar los estados iniciales y las ramas de los integradores con ganancia (s^{-1}) del diagrama de estado, ya que las ecuaciones de estado y de salida no contienen el operador de Laplace s , ni los estados iniciales.
- Para las ecuaciones de estado: Se seleccionan los nodos que representan las derivadas primeras de las variables de estado, como

nodos de salida, ya que ellos aparecen en el primer miembro de las ecuaciones de estado. Las variables de estado y las entradas reales, como "variables de entrada", en el diagrama de estado ya que ellas se encuentran en el segundo miembro de las ecuaciones de estado.-

- c) Para las ecuaciones de salida: Se eligen las salidas reales $y_1(t)$, $y_2(t), \dots, y_q(t)$ como los nodos de salida y las variables de estado y las entradas como los nodos de entrada.
- d) Aplique la fórmula de Masson y el principio de superposición para obtener la "salida" debido a todas las "entradas".-

Nota: Cuando se suprimen las condiciones iniciales y las ramas con ganancias s^{-1} y no queda ningún lazo, la formula de Masson se reduce a, (ya que $\Delta = \Delta_k = 1$):

$$G = \sum_{k=1}^N M_K$$

O sea la suma de las ganancias de todos los caminos directos que hay entre el nodo de entrada y de salida.-

Ejemplo 23:

Para el ejemplo 19, figura 39.

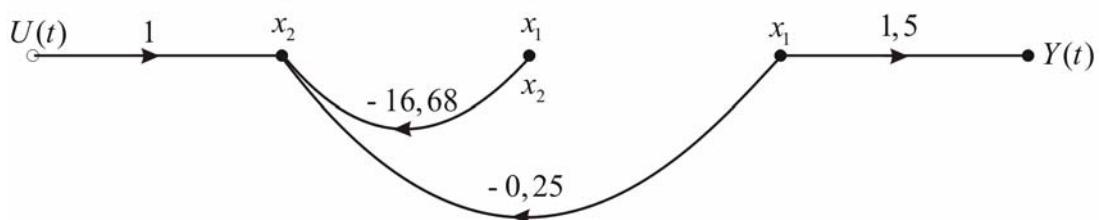


Figura 39

$$\begin{cases} x_1(t) = 0x_1(t) + 1x_2(t) + 0u(t) \\ x_2(t) = -0.25x_1(t) - 16.68x_2(t) + 1u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = 1.5x_1(t) + 0x_2(t) + 0u(t)$$

Por lo tanto las matrices serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.25 & -16.68 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D = [0]$$

Ejemplo 24:

Para el ejemplo 20, el diagrama de estado de la planta es el de la figura 40.

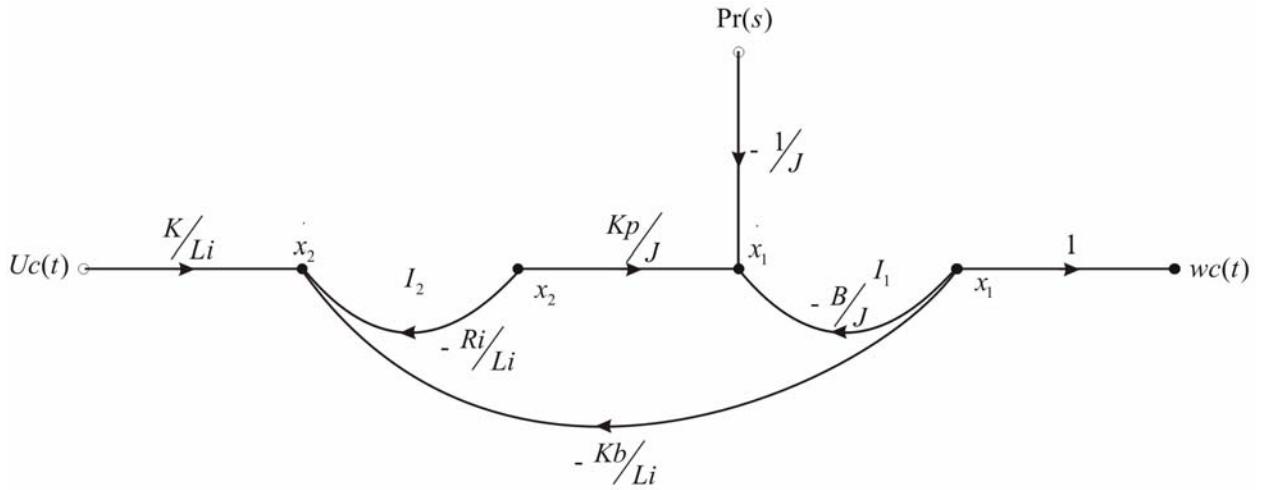


Figura 40

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{-B}{J}x_1(t) + \frac{Kp}{J}x_2(t) + 0u_C(t) + \frac{-1}{J}p_r(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{-Kb}{Li}x_1(t) + \frac{-Ri}{Li}x_2(t) + \frac{K}{Li}u_C(t) + 0p_r(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = \omega_m(t) = x_1(t) + 0x_2(t) + 0u_C(t) + 0p_r(t)$$

Las matrices son:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{Kp}{J} \\ \frac{-Kb}{Li} & \frac{-Ri}{Li} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{Li} \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad D = [0] \quad y \quad H = [0]$$

Si se considera un vector de entrada:

$u^*(t) = \begin{bmatrix} u_C(t) \\ p_R(t) \end{bmatrix}$; las matrices de esta manera serán las siguientes:

$$A^* = A \quad B^* = [B \quad E] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{J} \\ \frac{Ki}{Li} & 0 \end{bmatrix} \quad C^* = C \quad D^* = [D \quad H] = [0 \quad 0]$$

Ejemplo 25:

La misma planta con un sistema de control seguidor, se muestra en la figura 41. El diseño del sistema es por medio de la realimentación de los estados y un control integral, como se verá al final del curso.

$Pr(t)$: Par en la carga de magnitud $T_L \Rightarrow pr(t) = T_L \mu_s(t)$. $-Pr(s) = T_L / s$.

$R(t)$: Señal de referencia, un escalón unitario $\Rightarrow r(t) = \mu_s(t) \Rightarrow R(s) = 1/s$.

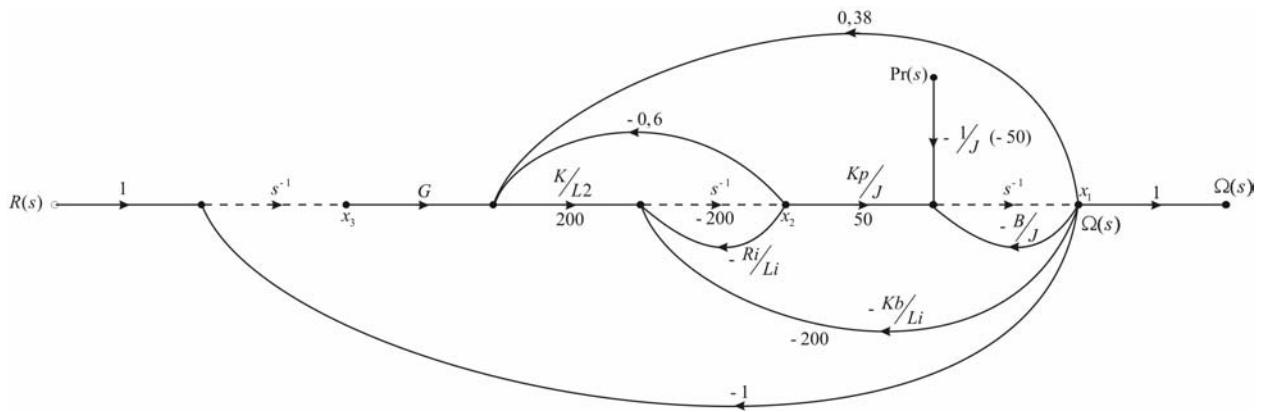


Figura 41

Se supondrá que:

$G = 6$, $K = 1$, $Li = 0.005 \text{ H}$, $Ri = 1\Omega$, $Kp = 1 \text{ N-m/A}$, $J = 0.02 \text{ N-m/rad/seg.}$,

$B = 0.001 \text{ N-m/rad/seg.}$, $Kb = 1 \text{ V/rad/seg.}$ y $B \approx 0$.

Por ende se tendrá:

$$\begin{cases} x_1(t) = 0x_1(t) + 50x_2(t) + 0x_3(t) + 0r(t) + (-50)pr(t) \\ x_2(t) = (-200 + 76)x_1(t) + (-200 - 120)x_2(t) + 1200x_3(t) + 0r(t) + 0pr(t) \\ x_3(t) = -1x_1(t) + 0x_2(t) + 0x_3(t) + 1r(t) + 0pr(t) \\ y(t) = 1x_1(t) + 0x_2(t) + 0x_3(t) + 0r(t) + 0pr(t) \end{cases}$$

En consecuencia las matrices serán las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 \\ -124 & -320 & 1200 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -50 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D = [0 \ 0]$$

Para $Pr(s) = 0$, se tendrá:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{60000}{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000}$$

Ejemplo 26:

Veremos el circuito con dos fuentes $e_1(t)$ y $e_2(t)$ ya visto por otro método. El mismo se vuelve a mostrar en la figura 42.

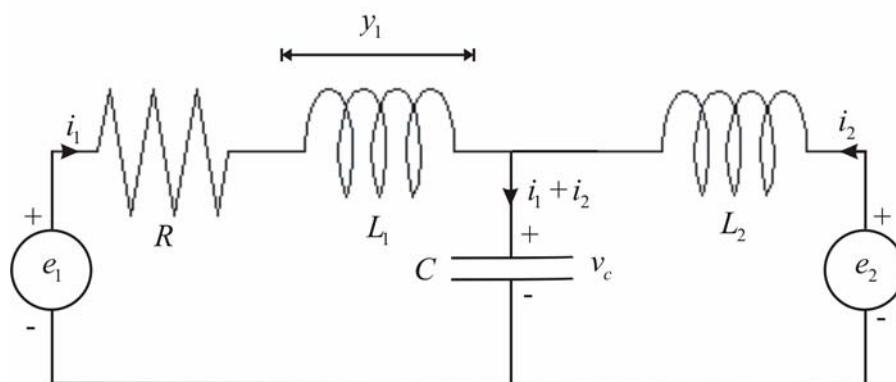


Figura 42

Como $vc(t) = \frac{1}{C} \int (i_1(t) + i_2(t)) dt$, se tendrá:

$$\begin{cases} u_1(t) = R i_1(t) + L_1 \frac{d i_1(t)}{dt} + vc(t) \\ u_2(t) = L_2 \frac{d i_2(t)}{dt} + vc(t) \\ \frac{d vc(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_1(t) + \frac{1}{C} i_2(t) \end{cases} \Rightarrow \text{Transf.} \quad \begin{cases} sI_{1(s)} = \frac{-R}{L_1} I_1(s) - \frac{1}{L_1} Vc(s) + \frac{1}{L_1} U_1(s) \\ sI_{2(s)} = -\frac{1}{L_2} Vc(s) + \frac{1}{L_2} U_2(s) \\ sVc(s) = \frac{1}{C} I_1(s) + \frac{1}{C} I_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = L_1 \frac{d i_1(t)}{dt} \\ y_2(t) = L_2 \frac{d i_2(t)}{dt} \end{cases} \quad \text{Transformando por Laplace} \Rightarrow \begin{cases} Y_1(s) = L_1 s I_1(s) \\ Y_2(s) = L_2 s I_2(s) \end{cases}$$

El diagrama de estado es el indicado en la figura 43.

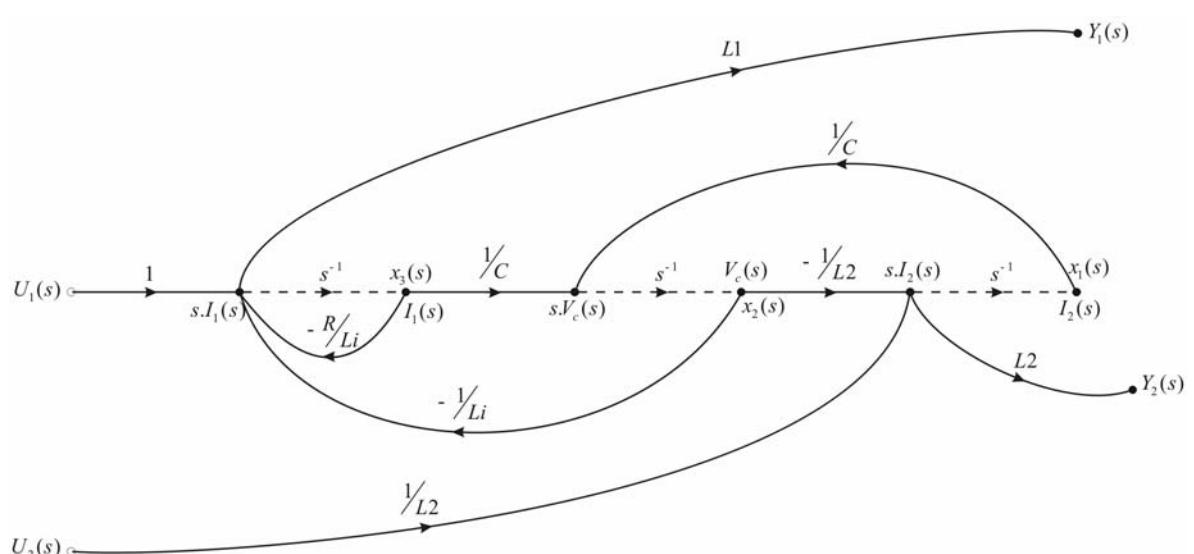


Figura 43

Resulta:

$$n = 3; \quad \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_2(t) \\ vc(t) \\ i_1(t) \end{bmatrix} \quad \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

En este ejemplo, $\Delta = 1$; $\Delta_K = 1$, en consecuencia: $G = \sum M_K$, por ende:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-1}{L_2} x_2(t) + \frac{1}{L_2} u_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C} x_1(t) + \frac{1}{C} x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{-1}{L_1} x_2(t) + \frac{-R}{L_1} x_3(t) + \frac{1}{L_1} u_1(t)$$

Además:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -x_2(t) - R x_3(t) + u_1(t) \\ y_2(t) &= -x_2(t) + u_2(t) \end{aligned}$$

En consiguiente las matrices del sistema serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{1}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -R \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula de Masson se pueden determinar las cuatro funciones de transferencia que hay entre las dos entradas y las dos salidas.

Ubicándolas como elementos de una matriz, $Gp(s)$ de orden ($q \times p$) en general, en este caso de orden (2x2), se tendrá:

$$Gp(s) = \begin{bmatrix} Gp_{11}(s) & Gp_{12}(s) \\ Gp_{21}(s) & Gp_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Mas adelante se verá como el conocimiento de las matrices A, B, C y D nos permitirá obtener la misma matriz $Gp(s)$.

La $Gp_{11}(s)$ y la $Gp_{22}(s)$, deberán tener tres ceros ya que los d_{11} y d_{22} de la matriz D no son nulos y la planta es de tercer orden. En cambio $Gp_{12}(s)$ y $Gp_{21}(s)$ podrán tener dos, uno o ningún cero ya que los elementos d_{12} y d_{21} de la matriz D son nulos.

Verifiquemos esto por Masson:

$$Gp_{11}(s) = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{1 \times \left(1 + \frac{1}{L_2 C} s^{-2}\right)}{1 + \frac{R}{L_1} s^{-1} + \frac{1}{L_1 C} s^{-2} + \frac{1}{L_2 C} s^{-2} + \frac{R}{L_1 L_2 C} s^{-3}} \times \frac{s^3}{s^3}$$

Operando:

$$Gp_{11}(s) = \frac{s \left(s^2 + \frac{1}{L_2 C} \right)}{s^3 + \frac{R}{L_1} s^2 + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) s + \frac{R}{L_1 L_2 C}}$$

Como se aprecia tiene tres ceros, $Z_1 = 0$ y $Z_{2-3} = \pm j \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$.

$$Gp_{12}(s) = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{\left(\frac{-1}{L_2 C} s^{-2} \right) \times 1}{1 + \frac{R}{L_1} s^{-1} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) s^{-2} + \frac{R}{L_1 L_2 C} s^{-3}} \times \frac{s^3}{s^3} ; \text{ finalmente:}$$

$$Gp_{12}(s) = \frac{\frac{-1}{L_2 C} s}{s^3 + \frac{R}{L_1} s^2 + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) s + \frac{R}{L_1 L_2 C}}$$

Tiene un solo cero en el origen del plano s, $Z_1 = 0$.

Ejemplo 27:

Encontrar un diagrama de estado del sistema indicado en la figura 44.

$$u(t) = f(t); \quad \bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

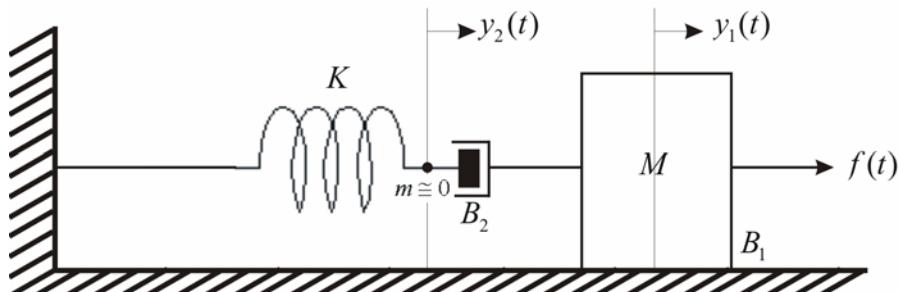


Figura 44

Los diagrama de cuerpo libre, en el cual se grafican las fuerzas actuantes son los indicados en la figura 44a

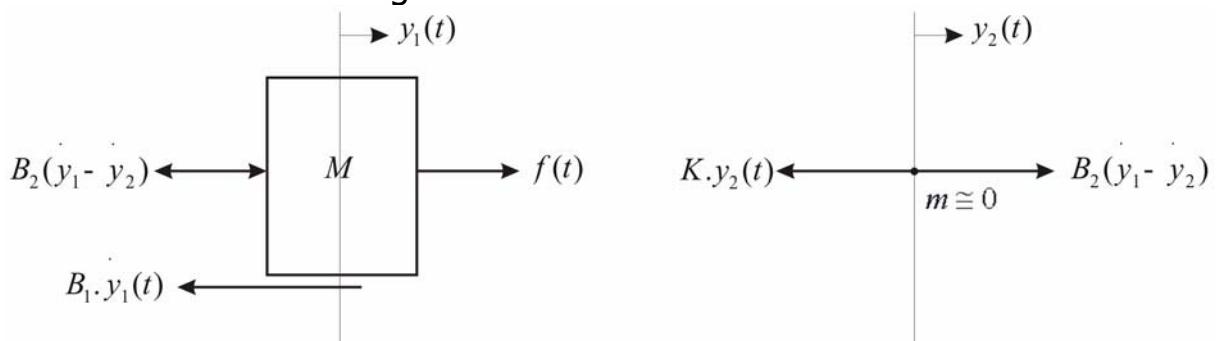


Figura 44a

Las ecuaciones derivadas de los diagramas serán:

$$f(t) - B_1 y_1(t) - B_2(y_1(t) - y_2(t)) = M y_1(t)$$

$$B_2(y_1(t) - y_2(t)) - Ky_2(t) = m y_2(t) = 0$$

$$y_1(t) = \frac{1}{M} f(t) + \frac{B_2}{M} y_2(t) - \frac{(B_1 + B_2)}{M} y_1(t)$$

$$y_2(t) = y_1(t) - \frac{K}{B_2} y_2(t)$$

Transformando por Laplace:

$$\left\{ \begin{array}{l} s^2 Y_1(s) = \frac{1}{M} F(s) + \frac{B_2}{M} s Y_2(s) - \frac{(B_1 + B_2)}{M} s Y_1(s) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s Y_2(s) = s Y_1(s) - \frac{K}{B_2} Y_2(s) \end{array} \right.$$

El diagrama de estado correspondiente se grafica en la figura 45.

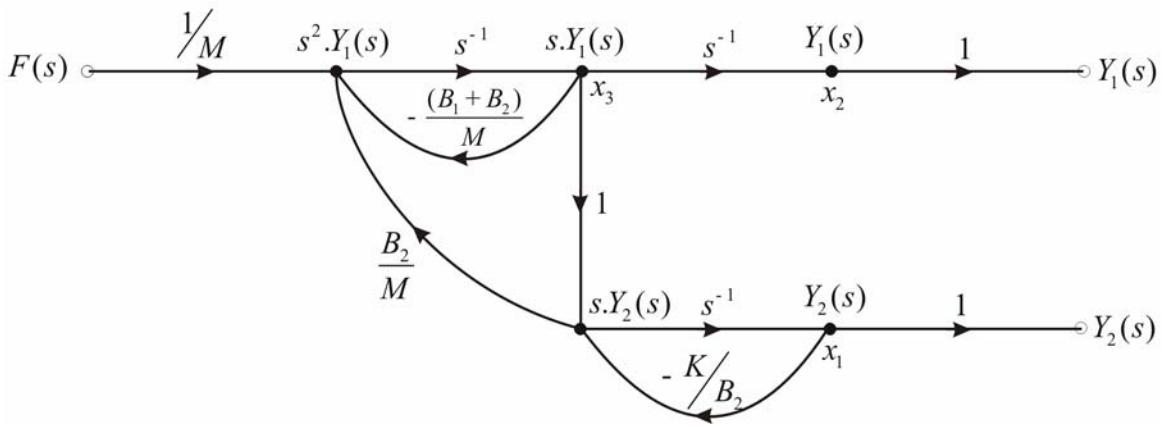


Figura 45

Las ecuaciones de estado y de salida serán:

$$x_1(t) = \frac{-K}{B_2} x_1(t) + x_3(t)$$

$$x_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{-K}{M} x_1(t) + \left[\frac{B_2}{M} - \frac{(B_1 + B_2)}{M} \right] x_3(t) + \frac{1}{M} F(s)$$

Por lo tanto:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{K}{B_2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K}{M} & 0 & \frac{-B_1}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

Además:

$y_1(t) = x_2(t)$; por lo tanto las matrices de salida y directa serán:
 $y_2(t) = x_1(t)$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se puede calcular $\frac{Y_1(s)}{F(s)}$ y daría la siguiente función:

$$\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{M} \left(s + \frac{K}{B_2} \right)}{s^2 + \left(\frac{K}{B_2} + \frac{B_1}{M} \right)s + \frac{(B_1 + B_2)}{M} \frac{K}{B_2}}$$

Ejemplo 28: La figura 46 muestra un diagrama simplificado de un sistema de control de una rueda de impresión de un procesador de textos. La rueda de impresión esta comandada por un motor de corriente continua a través y poleas. Se supondrá que la correa es rígida y las masas de las poleas despreciables.-

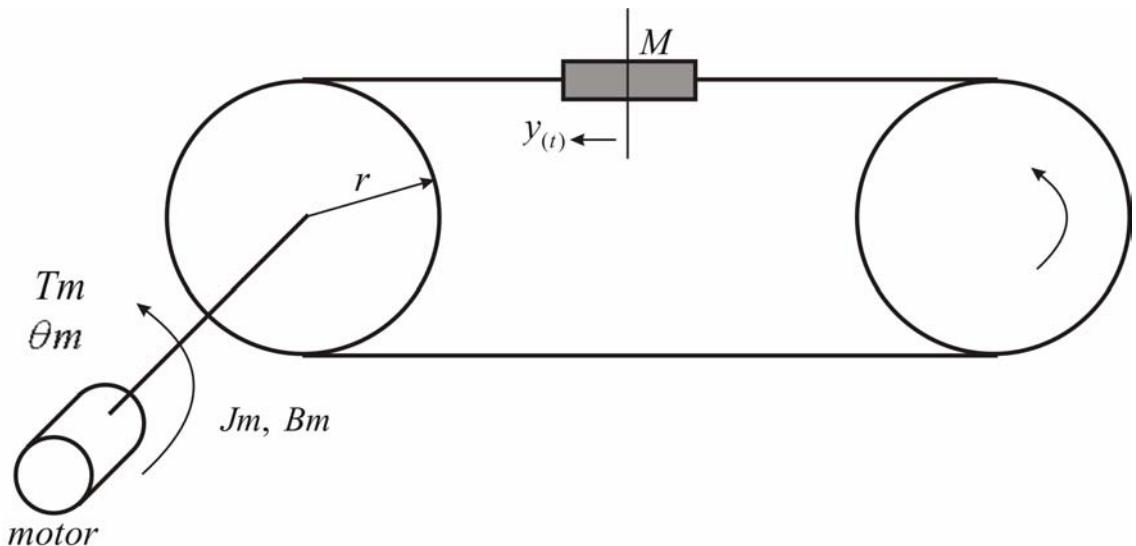


Figura 46

Obtenga:

1. La ecuación diferencial que rige la dinámica del proceso.
2. Un diagrama de estado.
3. El juego de las cuatro matrices de un modelo en variables de estado.

Los diagramas de cuerpo libre con las fuerzas actuantes será el indicado en la figura 46a.

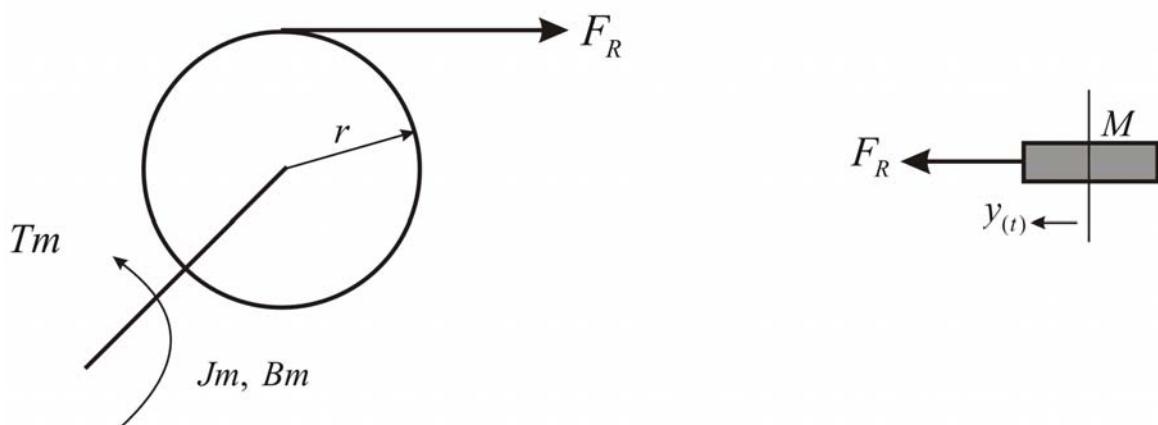


Figura 46a

$$Tm(t) - F_R(t)r - Bm \omega_m(t) = Jm \omega_m(t)$$

$$\begin{aligned} \omega_m(t).r &= \dot{y}(t) \\ \omega_m(t) &= \frac{\dot{y}(t)}{r} \end{aligned}$$

$$Tm - M \cdot \ddot{y}(t) \cdot r - \frac{Bm}{r} \dot{y}(t) = \frac{Jm}{r} \ddot{y}(t)$$

$$Tm(t) - \left(M \cdot r + \frac{Jm}{r} \right) \ddot{y}(t) - \frac{Bm}{r} \cdot \dot{y}(t) = 0 \quad \text{Multiplicando miembro a miembro por } r :$$

$$Tm(t) \cdot r - \left(M \cdot r^2 + Jm \right) \ddot{y}(t) - Bm \cdot \dot{y}(t) = 0$$

$$(M \cdot r^2 + Jm) \ddot{y}(t) = -Bm \cdot \dot{y}(t) + Tm(t) \cdot r$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{Bm}{(M.r^2 + Jm)} \cdot \dot{y}(t) + \frac{r}{(M.r^2 + Jm)} \cdot Tm(t)$$

Un diagrama de estado será el indicado en la figura 47:

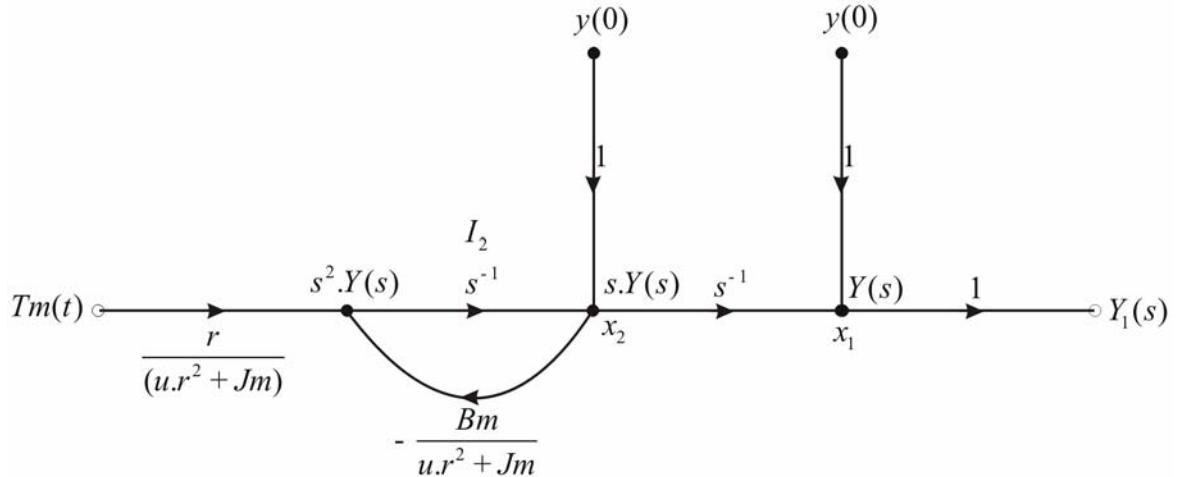


Figura 47.

El diagrama sin las C.I. y sin los integradores s^{-1} nos quedará como en la figura 48:

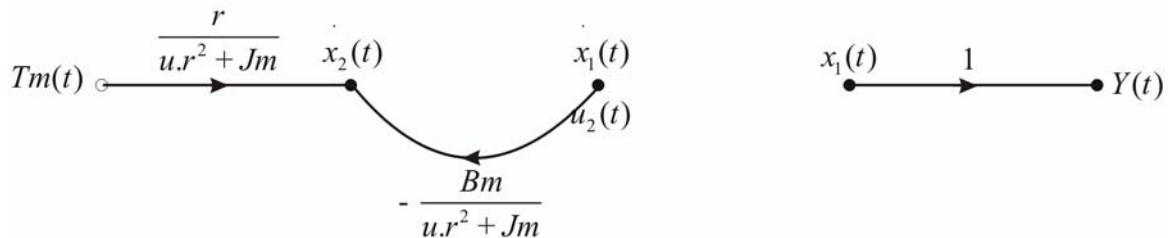


Figura 48.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 0x_1(t) + \left(-\frac{Bm}{M.r^2 + Jm}\right)x_2(t) + \frac{r}{M.r^2 + Jm} \cdot Tm(t) \end{cases}$$

$$\{y(t) = x_1(t)$$

En consecuencia las matrices del modelo serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-Bm}{M.r^2 + Jm} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r}{M.r^2 + Jm} \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0]; \quad D = [0]$$

Del diagrama anterior pero solo sin las C.I. se puede obtener la Función de Transferencia $\frac{Y(s)}{Tm(s)}$ (aplicando Masson).

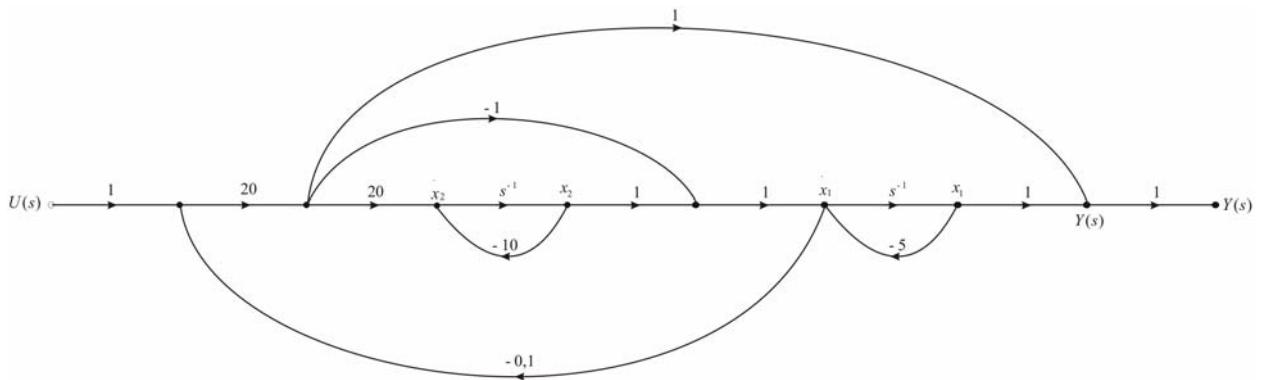
$$F.T.(s) = \frac{Y(s)}{Tm(s)} = \frac{M_1 \cdot \Delta_1}{\Delta} = \frac{M_1}{\Delta} = \frac{\frac{r}{M \cdot r^2 + Jm} s^{-2}}{1 + \frac{Bm}{M \cdot r^2 + Jm} s^{-1}} \cdot \frac{s^2}{s^2}$$

$$F.T.(s) = \frac{Y(s)}{Tm(s)} = \frac{\frac{r}{M \cdot r^2 + Jm}}{s^2 + \frac{Bm}{M \cdot r^2 + Jm} s} = \frac{r}{(Mr^2 + Jm)s^2 + Bm \cdot s}$$

Veamos dos ejemplos donde al eliminar las C.I. y las ramas con ganancias s^{-1} , queda un lazo.

Ejemplo 29: El siguiente ejemplo se resolvió anteriormente con el segundo método (diagrama de bloques).

Un diagrama de estado sería el de la figura 49:



$$\Delta = 1 - (-20, 0, 1) = 1 - 2 = -1; \quad \Delta = -1$$

Figura 49

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} x_1(t) + \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} x_2(t) + \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} u(t) = \frac{M_1}{\Delta} x_1(t) + \frac{M_1}{\Delta} x_2(t) + \frac{M_1}{\Delta} u(t) \\ \dot{x}_1(t) &= \frac{-5}{-1} x_1(t) + \frac{1}{-1} x_2(t) + \frac{-20}{-1} u(t)\end{aligned}$$

$$\dot{x}_1(t) = 5x_1(t) - x_2(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} x_1(t) + \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2}{\Delta} x_2(t) + \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} u(t); \quad \Delta_1 \equiv \Delta \text{ y } \Delta_2 = 1$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{200 \cdot 1}{-1} x_1(t) + \frac{-10 \cdot (-1) + (-40) \cdot 1}{-1} x_2(t) + \frac{400 \cdot 1}{-1} u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -200x_1(t) + 30x_2(t) - 400u(t)$$

$$y(t) = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2}{\Delta} x_1(t) + \frac{M_1\Delta_1}{\Delta} x_2(t) + \frac{M_1\Delta_1}{\Delta} u(t) ; \Delta_1 \equiv \Delta \text{ y } \Delta_2 = 1$$

$$y(t) = \frac{1.(-1) + 10.1}{-1} x_1(t) + \frac{-2.1}{-1} x_2(t) + \frac{20.1}{-1} u(t)$$

$$y(t) = -9x_1(t) + 2x_2(t) - 20u(t)$$

Las matrices serán:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -200 & 30 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 20 \\ -400 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -9 & 2 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} -20 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 30:

Supongamos que el diagrama simplificado (en el dominio temporal) es el de la figura 50.

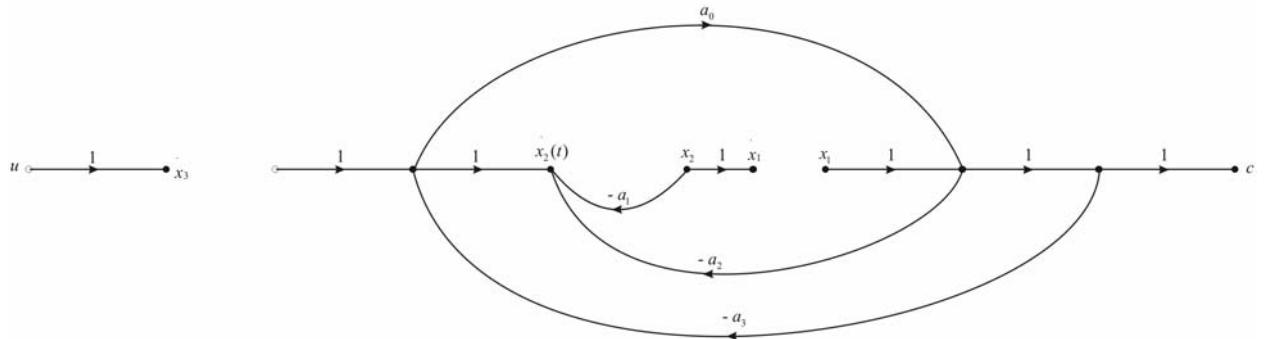


Figura 50

Como se aprecia quedo un lazo de ganancia: $-a_0a_3$

$$\Delta = 1 - (-a_0a_3) \rightarrow \underline{\Delta = 1 + a_0a_3}$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{M_1\Delta_1}{\Delta} x_2(t); \Delta_1 \equiv \Delta \text{ y } M_1 = 1$$

$$\underline{\dot{x}_1(t) = 0.x_1(t) + 1.x_2(t) + 0.x_3 + 0.u(t)}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2}{\Delta} x_1(t) + \frac{M_1\Delta_1}{\Delta} x_2(t) + \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2}{\Delta} x_3(t) + 0.u(t)$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1$$

$$\frac{M_1 + M_2}{\Delta}$$

$$M_1 = -a_2; M_2 = -a_3$$

$$M_1 = -a_1 \\ \Delta_1 \equiv \Delta$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1$$

$$\frac{M_1 + M_2}{\Delta}$$

$$M_1 = 1; M_2 = -a_0a_2$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{-(a_2 + a_3)}{(1 + a_0 a_3)} x_1(t) + (-a_1) x_2(t) + \frac{(1 - a_0 a_2)}{(1 + a_0 a_3)} x_3 + 0 \cdot u(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = 0 \cdot x_1(t) + 0 \cdot x_2(t) + 0 \cdot x_3 + \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} \cdot u(t) \rightarrow \Delta_1 \equiv \Delta = 1 + a_0 a_3 ; M_1 = 1$$

$$\dot{x}_3(t) = 0 \cdot x_1(t) + 0 \cdot x_2(t) + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot u(t)$$

$$y(t) = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} x_1(t) + 0 x_2(t) + \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} x_3(t) + 0 \cdot u(t)$$



$$M_1 = 1, \Delta_1 = 1$$

$$\Delta = 1 + a_0 a_3$$

$$M_1 = a_0, \Delta_1 = 1$$

$$\Delta = 1 + a_0 a_3$$

$$y(t) = \frac{1}{1 + a_0 a_3} x_1(t) + 0 x_2(t) + \frac{a_0}{1 + a_0 a_3} x_3(t) + 0 \cdot u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{0}{1 + a_0 a_3} \\ \frac{-(a_2 + a_3)}{1 + a_0 a_3} & -a_1 & \frac{1 - a_0 a_2}{1 + a_0 a_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \Rightarrow \text{Ecuación de Estado}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + a_0 a_3 & 0 & \frac{a_0}{1 + a_0 a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0] u(t) \Rightarrow \text{Ecuación de Salida}$$

Antes de estudiar las técnicas de descomposición de las funciones de transferencia se vera el concepto de Modelo Dual.

Todo modelo tiene su dual, si se tiene un diagrama de estado de la planta, el modelo dual del mismo se obtiene de la forma siguiente:

1. Se cambia el sentido de las flechas en todas las ramas.
2. Se cambian en consecuencia las entradas por las salidas.
3. Se mantiene el índice de los integradores y sus salidas serán, (una vez invertido el diagrama), de izquierda a derecha; $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_n(t)$.

Para el ejemplo 24, el diagrama dual del mismo tendrá una entrada y dos salidas. Siguiendo los pasos ya indicados se obtiene el diagrama de la figura 51.

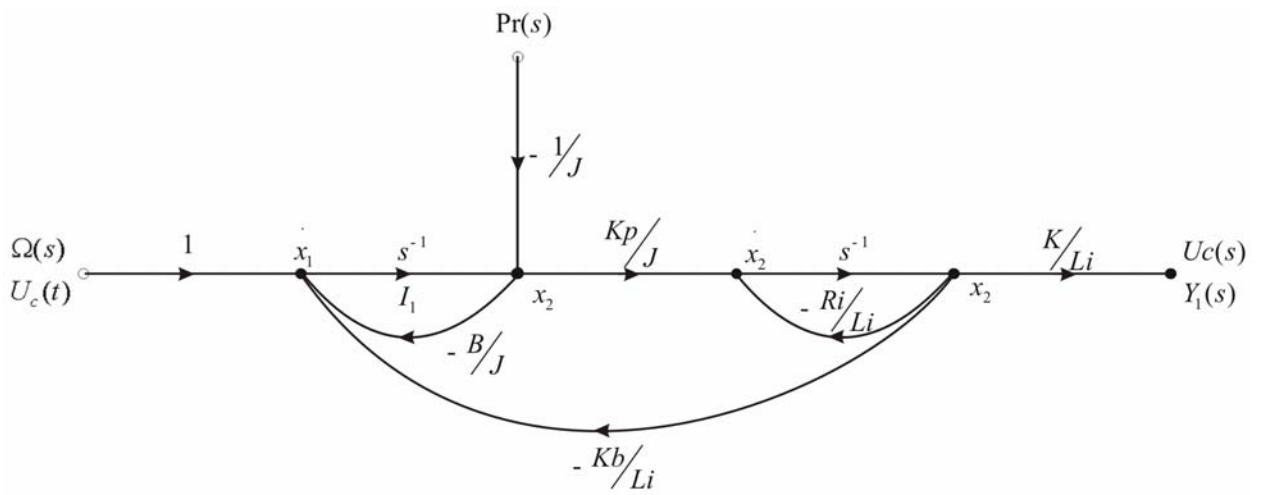


Figura 51

Las ecuaciones de estado del modelo dual serán:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{-B}{J}x_1(t) - \frac{Kb}{Li}x_2(t) + Iu_c(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{Kp}{J}x_1(t) - \frac{Ri}{Li}x_2(t) + 0u_c(t) \end{cases}$$

Y las ecuaciones de salida:

$$\begin{cases} y_1(t) = 0x_1(t) + \frac{K}{Li}x_2(t) + 0u_c(t) \\ y_2(t) = \frac{-1}{J}x_1(t) + 0x_2(t) + 0u_c(t) \end{cases}$$

Las matrices del modelo dual serán en consecuencia:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{-B}{J} & \frac{-Kb}{Li} \\ \frac{-Kp}{J} & \frac{-Ri}{Li} \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K}{Li} \\ \frac{-1}{J} & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comparándolas con las matrices del primer modelo:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-B}{J} & \frac{-Kp}{J} \\ \frac{-Kb}{Li} & \frac{-Ri}{Li} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{J} \\ \frac{K}{Li} & 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \quad y \quad D = [0 \ 0]$$

Como se puede ver comparando las matrices de los sistemas dos duales, se tendrá que:

$$A_1 = A^T \quad B_1 = C^T \quad C_1 = B^T \quad y \quad D_1 = D^T$$

Como los sistemas tienen los mismos lazos deberán tener la misma ecuación característica. Si $p_r(t) = 0$, la misma función de transferencia.-

Ejemplo 31:

Para el ejemplo 2 ya visto con dos entradas, consideremos también dos salidas $y_1(t)$ e $y_2(t)$, las tensiones de las dos bobinas. En la figura 52 se marca solo la salida $y_1(t)$.-

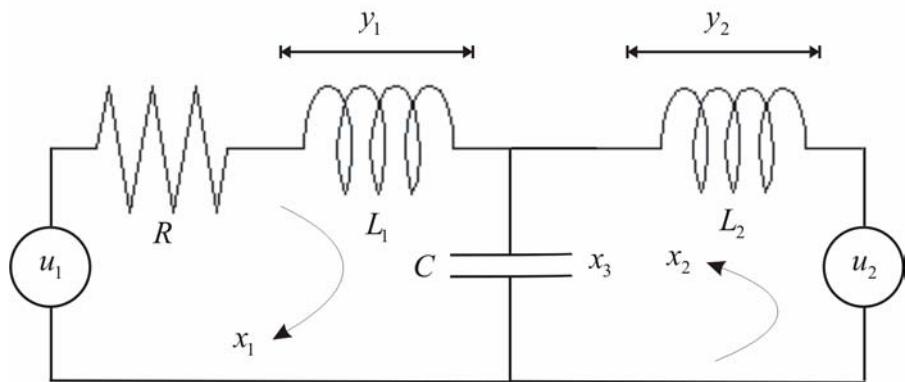


Figura 52

El vector de estado que se eligió en su oportunidad fue:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ vc(t) \end{bmatrix}. \text{ El vector de salida será: } \Rightarrow \bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Las matrices A y B, fueron:

$$A = \begin{bmatrix} -R & 0 & -1 \\ \frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las salidas serán.

$$\begin{cases} y_1(t) = L_1 x_1(t) = -Rx_1(t) - x_3(t) + u_1(t) \\ y_2(t) = L_2 x_2(t) = -x_3(t) + u_2(t) \end{cases}$$

Las matrices correspondientes son en consecuencia:

$$C = \begin{bmatrix} -R & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El modelo Dual será por ende:

$$A_1 = A^T = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L_1} & \frac{-1}{L_2} & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = C^T = \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D_1 = D^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuando la ecuación diferencial tiene derivadas de la entrada en el segundo miembro, el problema de dibujar un diagrama de estado no es tan directo como se ha ilustrado. Más adelante se mostrará que en general, primero es más conveniente obtener la función de transferencia $G_p(s)$ a partir de la ecuación diferencial y después llegar al diagrama de estado a través de una descomposición de la misma.

A continuación se verá un *método general*, cuando la ecuación diferencial tiene derivadas de la entrada.-

Si en general la función de transferencia de la planta es:

$$G_p(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Una forma adecuada de elegir las variables de estado y de salida es definir las siguientes "n" variables de estado de la planta:

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_n u \Rightarrow y(t) = x_1(t) + \beta_n u(t) \\ x_2 = \dot{y} - \beta_n \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_1 - \beta_{n-1} u \\ x_3 = \ddot{y} - \beta_n \ddot{u} - \beta_{n-1} \dot{u} - \beta_{n-2} u = \dot{x}_2 - \beta_{n-2} u \\ \dots \\ x_n = \overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{\beta_n} u - \overset{(n-1)}{\beta_{n-1}} u - \dots - \overset{(n-2)}{\beta_2} \dot{u} - \overset{(n-2)}{\beta_1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_1 u \end{cases}$$

En donde:

$$\begin{cases} \beta_n = b_n \\ \beta_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1} \beta_n \\ \beta_{n-2} = b_{n-2} - a_{n-1} \beta_{n-1} - a_{n-2} \beta_n \\ \beta_{n-3} = b_{n-3} - a_{n-1} \beta_{n-2} - a_{n-2} \beta_{n-1} - a_{n-3} \beta_n \\ \dots \\ \beta_0 = b_0 - a_{n-1} \beta_1 - \dots - a_1 \beta_{n-1} - a_0 \beta_n \end{cases}$$

Las ecuaciones de estado resultan:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_{n-2} u \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_1 u \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + \beta_0 u \end{cases}$$

En forma matricial sería:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_n u(t)$$

En esta representación las matrices A, C y D

son las mismas que en la forma canónica controlable, cuando *no hay* derivadas de la entrada en la ecuación diferencial y además $b_0=1$. La matriz B es solo la que cambia. Un diagrama de estado sería el de la fig. 53

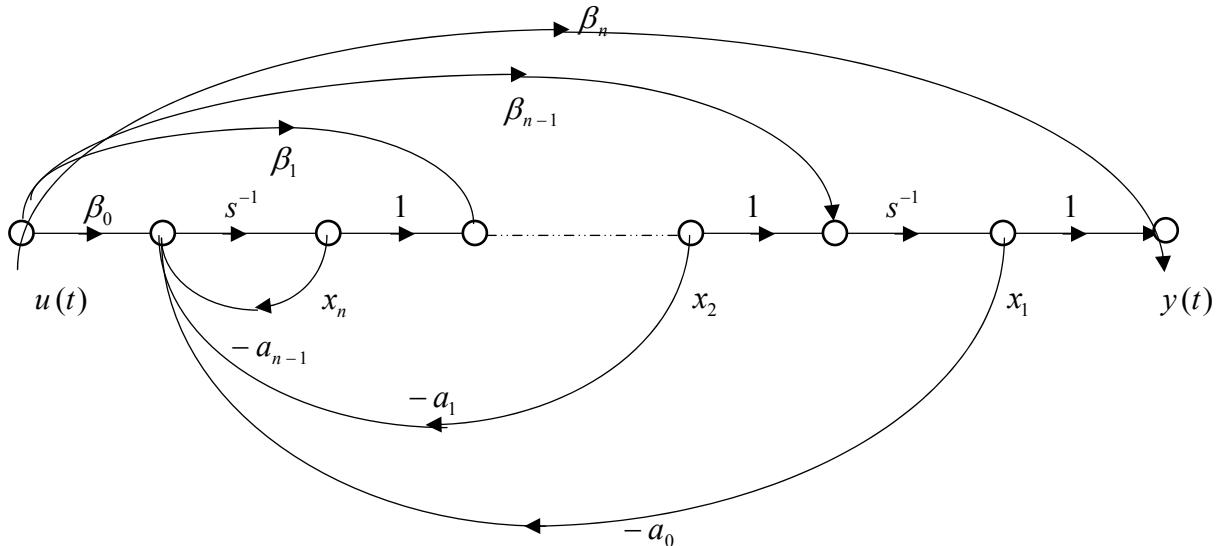


Figura 53

Ejemplo 32:

La función de transferencia de una planta es:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2.5(s^3 + 0.8s^2 + 0.6s + 0.4)}{(s^3 + 3s^2 + 0.5s + 1)}$$

Aplicar el último método para determinar un modelo matemático de la misma en el espacio de estado.

La ecuación diferencial será la siguiente:

$$\ddot{y}(t) + 3\ddot{y}(t) + 0.5\dot{y}(t) + y(t) = 2.5\ddot{u}(t) + 2\ddot{u}(t) + 1.5\dot{u}(t) + u(t)$$

En consecuencia: $a_2 = 3$; $a_1 = 0.5$; $a_0 = 1$; $b_3 = 2.5$; $b_2 = 2$; $b_1 = 1.5$ y $b_0 = 1$

Calculo de los β_i :

$$\begin{cases} \beta_3 = b_3 = 2.50 \\ \beta_2 = b_2 - a_2\beta_3 = 2 - (3 \times 2.5) = -5.50 \\ \beta_1 = b_1 - a_2\beta_2 - a_1\beta_3 = 1.5 - (3 \times -5.5) - (0.5 \times 2.5) = 16.75 \\ \beta_0 = b_0 - a_2\beta_1 - a_1\beta_2 - a_0\beta_3 = 1 - (3 \times 16.75) - (0.5 \times -5.5) - (1 \times 2.5) = -49 \end{cases}$$

Por consiguiente las matrices del modelo serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -0.5 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -0.50 \\ 16.75 \\ -49 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D = [2.50]$$

Descomposición de las Funciones de Transferencia

Hasta ahora, se han presentado varios métodos de caracterización de un proceso a controlar lineal. Será útil resumir brevemente y aunar los pensamientos en este punto antes de proseguir con los temas principales de la descomposición de las funciones de transferencia cubiertos en esta sección. Se ha demostrado que estos métodos están íntimamente relacionados. Aún más, el diagrama de estado, ya definido, será una herramienta útil que no solo puede guiarnos a las soluciones de las ecuaciones de estado, sino que también sirve como un vehículo de transformación de una forma de descripción a otras. El diagrama de bloques de la figura 54 muestra la relación entre las diferentes formas de describir un sistema lineal. La misma muestra que empezando, por ejemplo, con la ecuación diferencial de un sistema, se puede obtener la solución mediante el uso del método de la función de transferencia o el método de la ecuación de estado. El diagrama de bloques también muestra que la mayoría de las relaciones son bilaterales, de tal forma que existe una gran flexibilidad entre los métodos.

Un tema todavía está para el estudio, el cual involucra la construcción del diagrama de estado de la función de transferencia entre la entrada y la salida.

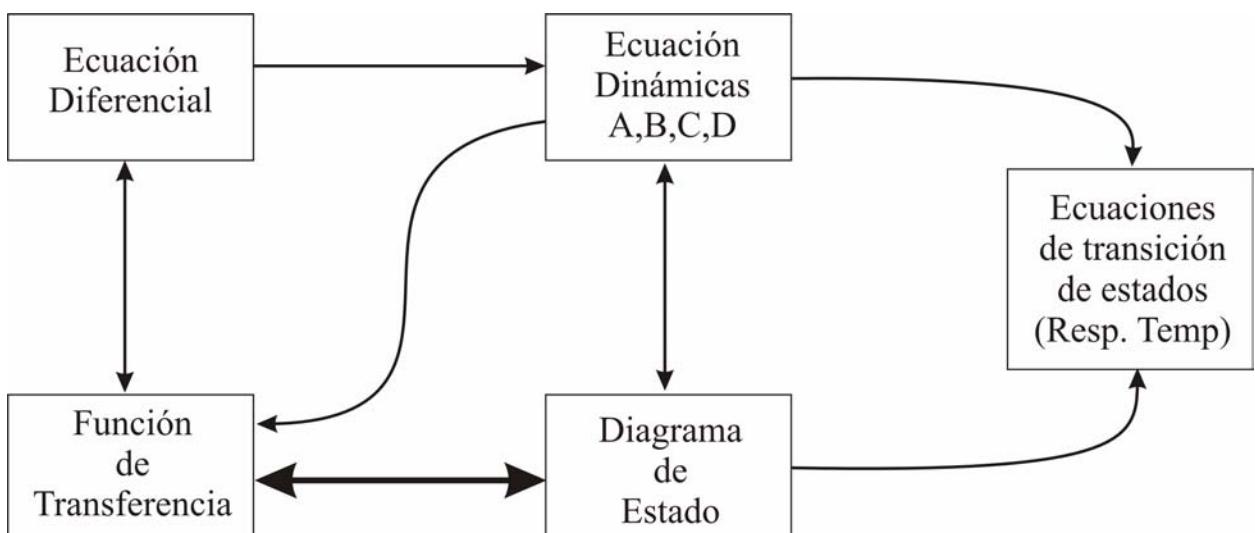


Figura 54

El proceso de ir desde la función de transferencia al diagrama de estado se conoce como descomposición de la misma, (en estos casos $q = p$).-

En general, existen tres métodos básicos de descomposición de las F. de T:

1. Descomposición directa.
2. Descomposición en cascada o serie.
3. descomposición en paralelo.

Cada una de las cuales tiene sus meritos característicos y se aplican para algún propósito en particular.

Descomposición Directa

Las descomposiciones directas se aplican a las funciones de transferencia cuyos polinomios no estén factoreadas. Se limitará el estudio, por razones de simplicidad, a una planta de tercer orden, $n = 3$. Se mostrara que la descomposición conduce a las llamadas, como se estudiara mas adelante, formas canónicas controlables y observables.

Supongamos que:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (1)$$

Para las *F.C.C.* los pasos a seguir son:

1º) Debe expresar la Función de Transferencia en potencias negativas de s , esto se logra mediante la multiplicación del numerador y del denominador de la misma por s^{-n} .

2º) Se multiplica numerador y denominador de la Función de Transferencia por una variable auxiliar $P(s)$.

Realizando estos pasos nos queda:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{b_3}{a_3} + \frac{b_2}{a_3} s^{-1} + \frac{b_1}{a_3} s^{-2} + \frac{b_0}{a_3} s^{-3}}{1 + \frac{a_2}{a_3} s^{-1} + \frac{a_1}{a_3} s^{-2} + \frac{a_0}{a_3} s^{-3}} \times \frac{P(s)}{P(s)} \quad (2)$$

3º) se igualan los numeradores y denominadores, o sea:

$$Y(s) = \frac{b_3}{a_3} P(s) + \frac{b_2}{a_3} s^{-1} P(s) + \frac{b_1}{a_3} s^{-2} P(s) + \frac{b_0}{a_3} s^{-3} P(s) \quad (3)$$

$$U(s) = P(s) + \frac{a_2}{a_3} s^{-1} P(s) + \frac{a_1}{a_3} s^{-2} P(s) + \frac{a_0}{a_3} s^{-3} P(s) \quad (4)$$

4º) Para construir un diagrama de estado empleando estas ecuaciones, primero deben estar en la relación causa y efecto apropiada. La ecuación (3) lo está pero la (4) no, pues tiene la entrada en el primer miembro de la ecuación y deberá por lo tanto arreglarse, por ende:

$$P(s) = U(s) - \frac{a_2}{a_3} s^{-1} P(s) - \frac{a_1}{a_3} s^{-2} P(s) - \frac{a_0}{a_3} s^{-3} P(s) \quad (5)$$

Con las ecuaciones (3) y (5) el diagrama de estado, (sin las condiciones iniciales), será el indicado en la figura 55.

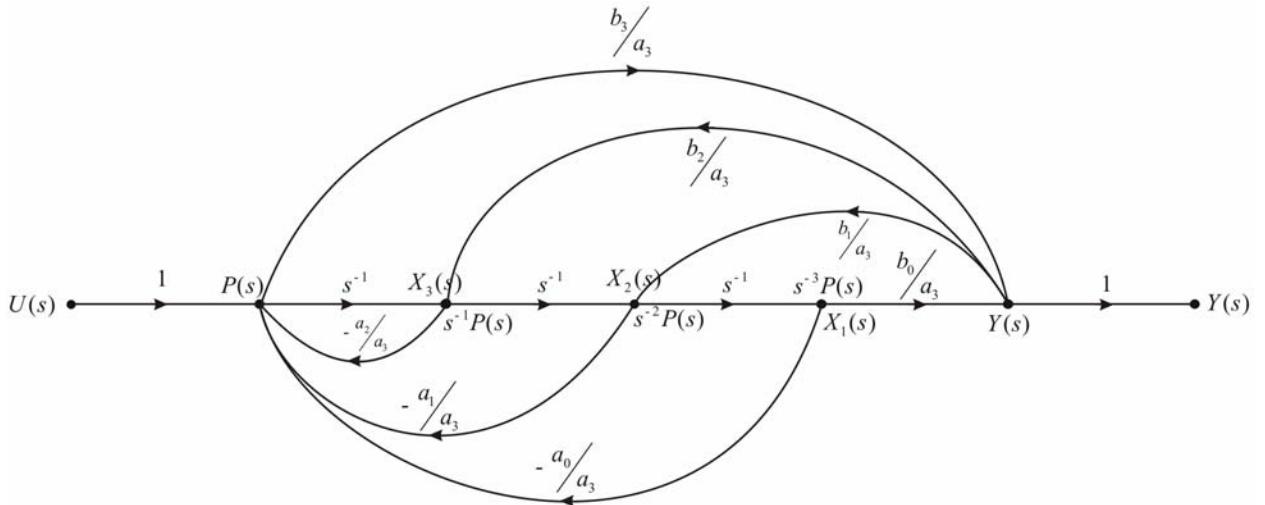


Figura 55

Las variables de estado transformadas se definen como las salidas de los integradores, si están ordenadas en forma ascendente de derecha a izquierda será la forma canónica controlable 1, (F.C.C.1), y de izquierda a derecha la forma canónica controlable 2, (F.C.C.2).

Las ecuaciones de estado se obtienen al aplicar la fórmula de ganancias de Masson y el principio de superposición, al eliminar las ramas con ganancia s^{-1} y las condiciones iniciales. Para las ecuaciones de estado serán $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$, $\dot{x}_3(t)$ los nodos de salida y $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ y $u(t)$ los de entrada.

Para la ecuación de salida se determina la misma con $y(t)$ como el nodo de salida y $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ y $u(t)$ como los de entrada. Las ecuaciones dinámicas serán:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

El diagrama de estado esta indicado en la figura 56.

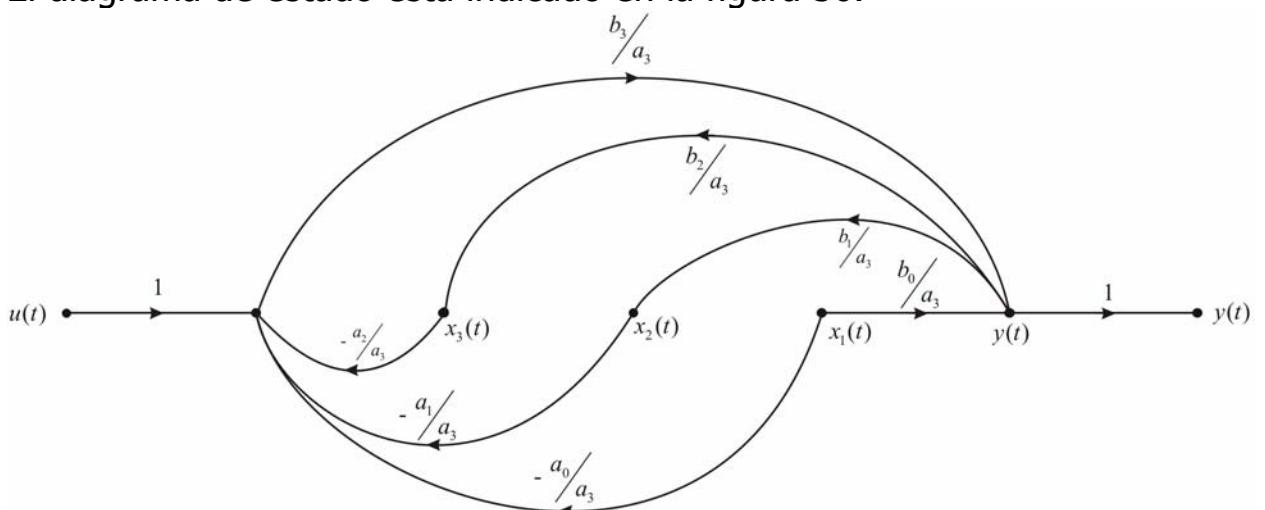


Figura 56

Como no quedan lazos:

$$\frac{\sum M_k \Delta_k}{\Delta} = \sum M_k, \text{ pues } \Delta = \Delta_k = 1$$

Para la F.C.C.1 las matrices del modelo serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{a_3 b_0 - a_0 b_3}{a_3^2} & \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_3^2} & \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_3^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{y } D = \begin{bmatrix} \frac{b_3}{a_3} \end{bmatrix}$$

Si solo hay dos ceros; ($n-1$) ceros, por lo que $b_3 = 0$ las matrices C y D serán:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{b_0}{a_3} & \frac{b_1}{a_3} & \frac{b_2}{a_3} \end{bmatrix} \quad \text{y } D = [0]$$

Como se ve las matrices se pueden escribir directamente conociendo a

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

Si no hay ceros: $b_3 = b_2 = b_1 = 0$ por ende las matrices C y D serán:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{b_0}{a_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y } D = [0]$$

En general:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{a_n b_0 - a_0 b_n}{a_n^2} & \frac{a_n b_1 - a_1 b_n}{a_n^2} & \dots & \dots & \frac{a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n}{a_n^2} \end{bmatrix} \quad \text{y } D = \begin{bmatrix} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}$$

Para la F.C.C.2 las matrices serán:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{a_2}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_0}{a_3} \\ \frac{a_3}{a_3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_3^2} & \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_3^2} & \frac{a_3 b_0 - a_0 b_3}{a_3^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{y } D = \begin{bmatrix} \frac{b_3}{a_3} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 33:

La planta del ejemplo 32 tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{(5s^3 + 4s^2 + 3s + 2)}{(2s^3 + 6s^2 + s + 2)}$$

Determinar los modelos en las formas canónicas controlables 1 y 2.

Como se puede ver: $b_3 = 5; b_2 = 4; b_1 = 3; b_0 = 2$ y $a_3 = 2; a_2 = 6; a_1 = 1; a_0 = 2$

F.C.C. 1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -0,5 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para la matriz C se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a_3 b_0 - a_0 b_3}{a_3^2} = \frac{2 \times 2 - 2 \times 5}{4} = -1,50 \\ \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_3^2} = \frac{2 \times 3 - 1 \times 5}{4} = 0,25 \\ \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_3^2} = \frac{2 \times 4 - 6 \times 5}{4} = -5,50 \end{array} \right\} \Rightarrow C = [-1,50 \quad 0,25 \quad -5,50]$$

$$\text{Y la matriz D será: } \frac{b_3}{a_3} = \frac{5}{2} = 2,5 \Rightarrow D = [2,5]$$

Descomposición Directa en las Formas Canónicas Observables.

Para obtener los diagramas de estado, una forma sería llevar a potencias negativas a la $G_p(s)$ o sea:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{b_3}{a_3}s^3 + \frac{b_2}{a_3}s^2 + \frac{b_1}{a_3}s + \frac{b_0}{a_3}}{s^3 + \frac{a_2}{a_3}s^2 + \frac{a_1}{a_3}s + \frac{a_0}{a_3}} \times \frac{s^{-3}}{s^{-3}} = \frac{\frac{b_3}{a_3} + \frac{b_2}{a_3}s^{-1} + \frac{b_1}{a_3}s^{-2} + \frac{b_0}{a_3}s^{-3}}{1 + \frac{a_2}{a_3}s^{-1} + \frac{a_1}{a_3}s^{-2} + \frac{a_0}{a_3}s^{-3}}$$

$$\text{Se puede considerar como: } \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_3\Delta_3 + M_4\Delta_4}{\Delta} = \sum_{k=1}^4 \frac{M_k\Delta_k}{\Delta}$$

Si todos los caminos directos pasan por lo menos por un nodo común, que pertenece a todos los lazos, $\Delta_k = 1$. Por ende:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4}{\Delta}$$

El diagrama de estado puede ser el indicado en la figura 57.

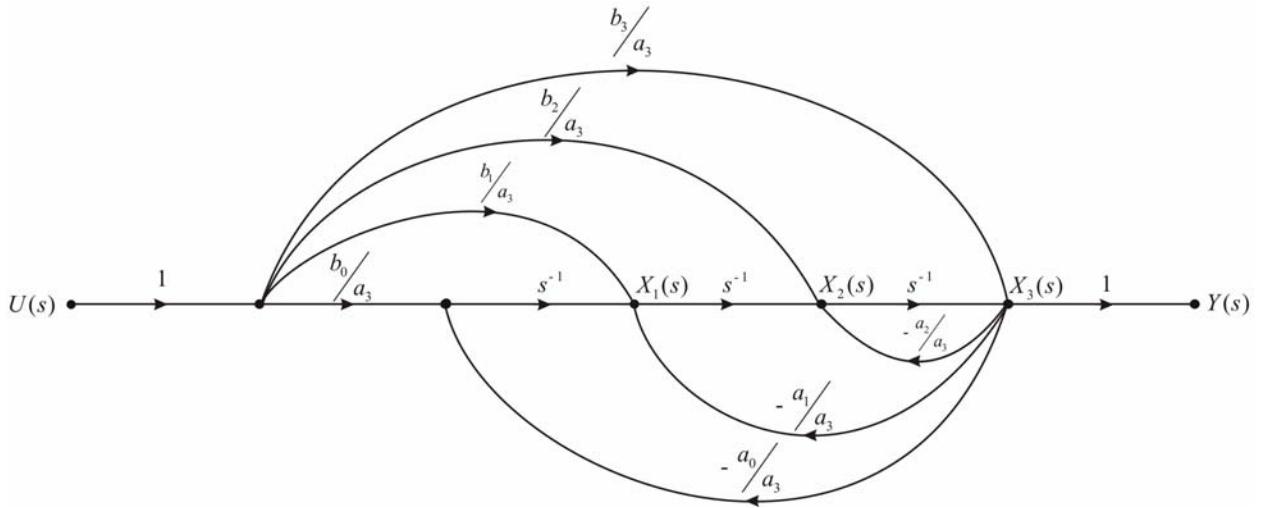


Figura 57

Para la Forma Canónica Observable 1, las variables de estado se eligen en orden creciente de izquierda a derecha y de derecha a izquierda para la Forma Canónica Observable 2.

Forma Canónica Observable 1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-a_0}{a_3} \\ 1 & 0 & \frac{-a_1}{a_3} \\ 0 & 1 & \frac{-a_2}{a_3} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{a_3b_0 - a_0b_3}{a_3^2} \\ \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_3^2} \\ \frac{a_3b_2 - a_2b_3}{a_3^2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} \frac{b_3}{a_3} \end{bmatrix}$$

Como se puede apreciar es la forma dual de la F.C.C.1.

Forma Canónica Observable 2:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-a_2}{a_3} & 1 & 0 \\ \frac{-a_1}{a_3} & 0 & 1 \\ \frac{-a_0}{a_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{a_3b_2 - a_2b_3}{a_3^2} \\ \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_3^2} \\ \frac{a_3b_0 - a_0b_3}{a_3^2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} \frac{b_3}{a_3} \end{bmatrix}$$

Que es la forma dual de la F.C.C.2

Ejemplo 34:

Si una planta tiene:

$$Gp(s) = \frac{5s^3 + 4s^2 + 3s + 2}{2s^3 + 6s^2 + s + 2}, \text{ obtener las F.C.O. 1 y 2.}$$

F.C.O. 1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.25 \\ -5.5 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 0 \ 1] \quad y \quad D = [2.5]$$

F.C.O. 2:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 0.25 \\ -1.5 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D = [2.5]$$

Soluciones por Medio de la Computadora:

Para obtener la F.C.C.1:

La caja de herramientas del Csad/Matlab, tiene maneras distintas de obtener la F.C.C.1 a partir de la $G_p(s)$. -

1. Por ejemplo la función tf2ccf:

```
>>n=[5 4 3 2];
>>d=[2 6 1 2];
>>[A,B,C,D]=tf2ccf(n,d) => devuelve la F.C.C.1
```

2. Usando la función Svddesign, se ingresa primero el numerador y el denominador de $G_p(s)$. Luego se elige la opción correspondiente.

Consideremos el ejemplo ya visto cuyos modelos en las F.C.C. se obtuvieron analíticamente.-

» svdesign

Enter TF or SV? [s] > t

Default transfer function:

2

s^2 + 2s^1 + 2

Enter numerator [n] > [5 4 3 2]

Enter denominator [d] > [2 6 1 2]

CCF or OCF form? [c] >

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit
SVDESIGN > d	

Display Current,Original,or Both Systems? [c] >

Current system is:

A matrix is:

$$\begin{matrix} 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \\ -1.0000 & -0.5000 & -3.0000 \end{matrix}$$

B matrix is:

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

C matrix is:

$$\begin{matrix} -1.5000 & 0.2500 & -5.5000 \end{matrix}$$

D matrix is:

$$2.5000$$

Para la F.C.C.2:

Una vez determinada la F.C.C.1 se procede así:

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > T

Enter Transformation: CCF,OCF,DF,Reverse [r] > R

Transformation matrix T is:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T, \quad \bar{B} = T^{-1} B, \quad \bar{C} = C T, \quad \bar{D} = D$$

Abar matrix is:

$$\begin{matrix} -3.0000 & -0.5000 & -1.0000 \\ 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 \end{matrix}$$

Bbar matrix is:

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Cbar matrix is:

$$\begin{matrix} -5.5000 & 0.2500 & -1.5000 \end{matrix}$$

Dbar matrix is:

2.5000

Update current state variable matrices? (y/n) [n] >

Que es la forma canónica controlable 2.-

Para la Forma Canónica Observable 1:

1. Con la función tf2ocf del Csad/Matlab.

>>n=[5 4 3 2];

>>d=[2 6 1 2];

>>[A,B,C,D]=tf2ocf(n,d) \Rightarrow devuelve la F.C.O.1

2. Usando la Función Svdesign:

» svdesign

Enter TF or SV? [s] > t

Default transfer function:

2

s^2 + 2s^1 + 2

Enter numerator [n] > [5 4 3 2]

Enter denominator [d] > [2 6 1 2]

CCF or OCF form? [c] > O

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots Zeros and Poles

Controllability Display System

Observability New Original Sys

Transformations Back to Original

State Feedback Estimator Design

Integral&State Feedback&Estimate

View N(s)/D(s) Quit

SVDESIGN > d

Display Current,Original,or Both Systems? [c] >

Current system is:

A matrix is:

0	0	-1.0000
1.0000	0	-0.5000
0	1.0000	-3.0000

B matrix is:

-1.5000

0.2500

-5.5000

C matrix is:

0 0 1

D matrix is:

2.5000

Que es la F.C.O.1

Para la Forma Canónica Observable 2:

Para obtener la F.C.O.2, una vez determinada la F.C.O.1, se procede así:

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > T

Enter Transformation: CCF,OCF,DF,Reverse [r] > R

Transformation matrix T is:

0	0	1
0	1	0
1	0	0

$$\bar{A} = T^{-1}AT, \quad \bar{B} = T^{-1}B, \quad \bar{C} = CT, \quad \bar{D} = D$$

Abar matrix is:

-3.0000	1.0000	0
-0.5000	0	1.0000
-1.0000	0	0

Bbar matrix is:

-5.5000
0.2500
-1.5000

Cbar matrix is:

1	0	0
---	---	---

Dbar matrix is:

2.5000

Update current state variable matrices? (y/n) [n] > y

Como se aprecia es la F.C.O.2

Si se emplea solo Matlab, la función tf2ss lleva la Gp(s) a un modelo en variables de estado, que está en la F.C.C.2

>>n=[5 4 3 2];

>>d=[2 6 1 2];

>>[A,B,C,D]=tf2ss(n,d) \Rightarrow devuelve la F.C.C.2

Si la planta tiene una sola entrada pero con "q" salidas, esta función, también nos devuelve, una vez ingresada la matriz Gp(s), la F.C.C.2

Ejemplo 35:

Una planta, de una entrada y dos salidas, tiene la matriz de las funciones

de transferencias siguiente:

$$G_p(s) = \frac{\begin{bmatrix} 3s^2 + 18s + 24 \\ s^3 + 3s^2 + 4s + 2 \\ 10s + 30 \\ s^3 + 3s^2 + 4s + 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} s^3 + 3s^2 + 4s + 2 \end{bmatrix}}; \text{ Hallar La F.C.C.2}$$

El procedimiento sería:

» n=[0 3 18 24;0 0 10 30];
 » d=[1 3 4 2];
 » [A,B,C,D]=tf2ss(n,d)

A =

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

B =

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C =

$$\begin{bmatrix} 3 & 18 & 24 \\ 0 & 10 & 30 \end{bmatrix}$$

D =

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como se aprecia el modelo de la planta esta en la F.C.C.2

Descomposición en Cascada o Serie:

La descomposición en cascada se refiere a que las funciones de transferencia que se escriben como producto de componentes simples de primer o segundo orden. Considere la siguiente función de transferencia, la cual es el producto de dos funciones de transferencia de primer orden:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = K \underbrace{\frac{(s + b_2)}{(s + a_2)}}_{SIST\ II} \underbrace{\frac{(s + b_1)}{(s + a_1)}}_{SIST\ I}$$

En donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son constantes reales. Cada una de las funciones de transferencia se descomponen mediante la descomposición directa y los diagramas de estado se conectan en serie, como se muestra en la figura 58.

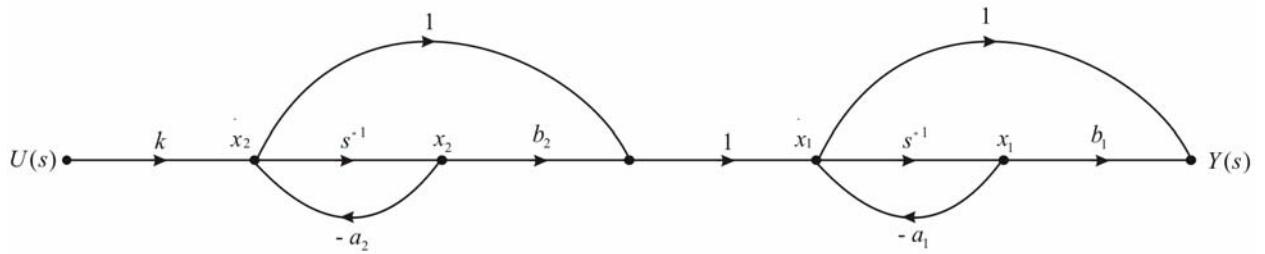


Figura 58

Las ecuaciones de estado se obtienen como ya se sabe, y resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & (b_2 - a_2) \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix} u(t)$$

Y la salida:

$$y(t) = [(b_1 - a_1) \quad (b_2 - a_2)] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [K] u(t)$$

Cuando la función de transferencia tiene polos y/o ceros complejos, los factores individuales relacionados con estos polos o ceros deben estar en la forma de segundo orden, con una descomposición directa, en la forma canónica controlable u observable. Veamos un ejemplo con un par de polos complejos conjugados en $\left(-\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$:

Ejemplo 36: consideremos la $G_p(s)$ siguiente:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+5)}{(s+2)} \frac{(s+1,5)}{(s^2 + 3s + 4)}$$

En la figura 59 se muestra el diagrama de estado de la planta con dos sub-plantas conectadas en serie:

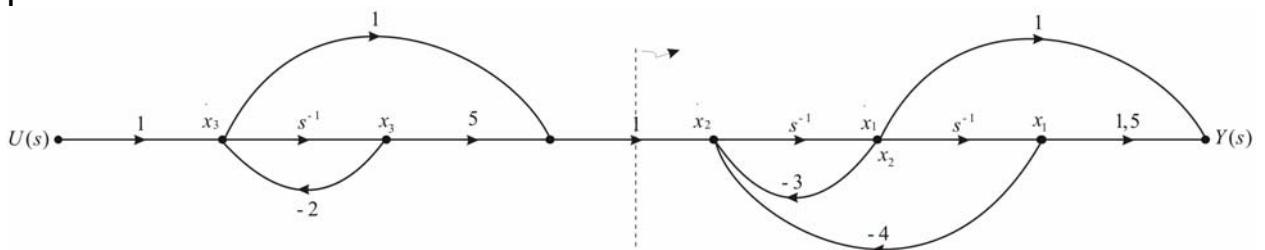


Figura 59

Las ecuaciones de estado serán:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Y la de salida:

$$y(t) = [1,5 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

También se podrían obtener determinando los modelos de las dos sub-plantas, Figura 60, y en base a ellos determinar el modelo total.

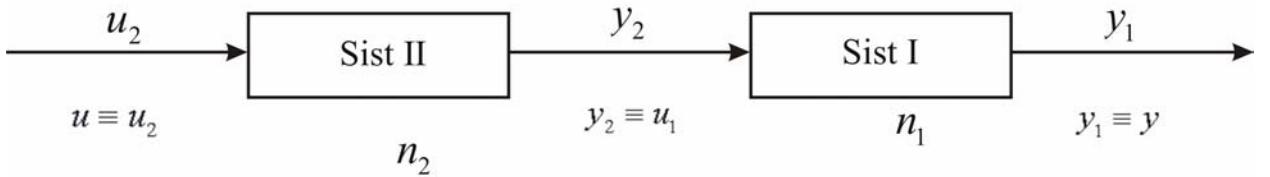


Figura 60

$$\text{Para (I)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = A_1 \bar{x}_1(t) + B_1 u_1(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Para (II)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}}_2(t) = A_2 \bar{x}_2(t) + B_2 u_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{y} \quad \begin{cases} y_1(t) = C_1 \bar{x}_1(t) + D_1 u_1(t) \\ y_2(t) = C_2 \bar{x}_2(t) + D_2 u_2(t) \end{cases} \quad (3) \quad (4)$$

Las ecuaciones de estado y de salida del sistema total serán las siguientes:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t) + B u(t) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y(t) = C \bar{x}(t) + D u(t) \end{cases} \quad (6)$$

Se ve que: $u_2 = u$, $u_1 = y_2$ e $y = y_1$ si hacemos $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = A_1 \bar{x}_1 + B_1(C_2 \bar{x}_2 + D_2 u) = A_1 \bar{x}_1 + B_1 C_2 \bar{x}_2 + B_1 D_2 u \\ \dot{\bar{x}}_2 = A_2 \bar{x}_2 + B_2 u \end{cases}$$

$$\therefore \dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 D_2 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$(1) \therefore A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 D_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Para la ecuación de salida:

$$y(t) = y_1(t) = C_1 \bar{x}_1 + D_1(C_2 \bar{x}_2 + D_2 u)$$

$$y(t) = [C_1 \quad D_1 C_2] \bar{x}(t) + D_1 D_2 u$$

$$(2) \therefore C = [C_1 \quad D_1 C_2] \quad y \quad D = D_1 D_2$$

Para la planta en estudio, ejemplo 35:

$$\text{Sub-sistema I} \rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = [1,5 \quad 1] \quad D_1 = [0]$$

$$\text{Sub-sistema II} \rightarrow A_2 = [-2] \quad B_2 = [1] \quad C_2 = [3] \quad D_2 = [1]$$

Como se puede apreciar, coinciden las matrices A, B, C y D del sistema total al aplicar (1) y (2).

Soluciones por Computadora:

La función svseries de la caja de herramientas del Csad/Matlab, sirve para esto. Para más de dos sistemas conectados en cascada simplemente reemplaza svseries en forma repetitiva.

Una vez ingresadas las ocho matrices de los dos sub-sistemas se emplea la función ya mencionada:

`>> [A,B,C,D]=svseries(A1,B1,C1,D1,A2,B2,C2,D2)` ⇒ devuelve el modelo total.

Si hubiera otro sub-sistema en serie, se ingresan ahora las cuatro matrices del mismo, A_3 , B_3 , C_3 , D_3 y luego:

$\gg [A_T, B_T, C_T, D_T] = \text{svseries}(A, B, C, D, A_3, B_3, C_3, D_3)$ y el programa nos devuelve las cuatro matrices del sistema total.

Si se trabaja solo con Matlab, la función similar es "series".-

Descomposición en Paralelo:

Cuando el denominador de la función de transferencia está en la forma factorizada la misma se puede expandir en una suma de fracciones parciales simples, previo dividir si la $G_p(s)$ es propia. El diagrama de estado resultante consistirá en sistemas simples de primer orden, (o de 2^{do} orden en los casos que los polinomios tengan raíces complejas conjugadas, para tener coeficiente reales), conectados en paralelo lo que lleva a las ecuaciones de estado a la Forma Canónica Diagonal, (F.C.D.), o en la Forma Canónica de Jordán, (F.C.J.), si hay polos repetidos.

Ejemplo 37: La planta tiene la siguiente $G_p(s)$:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^3 + 16s^2 + 30s + 8}{s^3 + 7s^2 + 10s}; \text{ realizar la descomposición en paralelo.}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = 2 + \frac{2s^2 + 10s + 8}{s^3 + 7s^2 + 10s} = 2 + \frac{2s^2 + 10s + 8}{s(s+2)(s+5)} = 2 + \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{(s+2)} + \frac{K_2}{(s+5)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = 2 + \frac{0.80}{s} + \frac{2/3}{(s+2)} + \frac{8/15}{(s+5)}$$

$$Y(s) = 2U(s) + \frac{0.80}{s}U(s) + \frac{2/3}{(s+2)}U(s) + \frac{8/15}{(s+5)}U(s)$$

El diagrama de estado resultante está indicado en la figura 61.

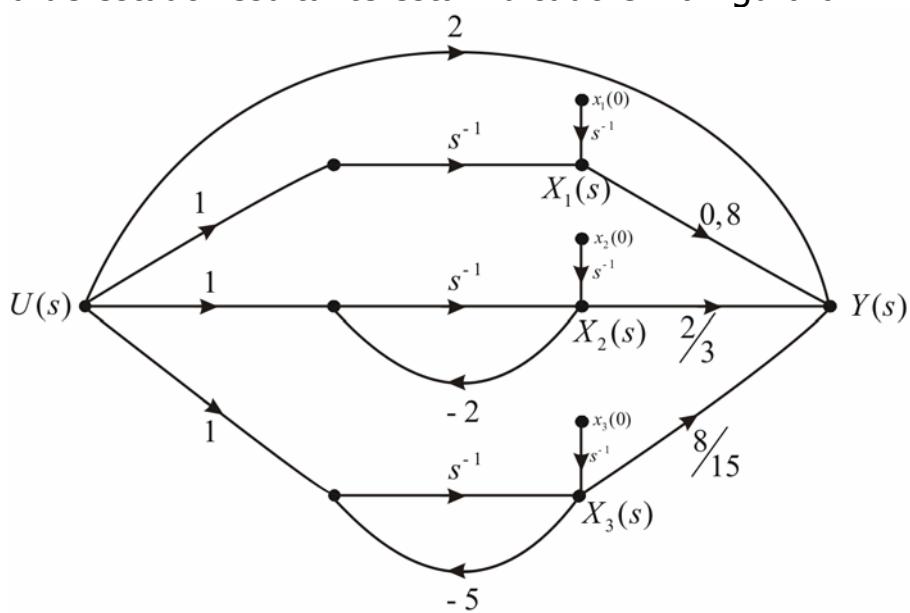


Figura 61

Las ecuaciones de estado y de salida de la planta serán las siguientes:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0.80 \quad 2/3 \quad 8/15] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + [2] u(t)$$

Resulta como se aprecia que la matriz A es diagonal y sus valores característicos en la misma.

La matriz B: Columna con "unos".

La matriz C: Fila con los residuos de los polos.

La matriz D: La ganancia directa.-

Ejemplo 38:

Ídem al problema anterior pero con $G_p(s)$ la siguiente:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s+3)}{(s^2 + 2s + 5)} = \frac{K_1}{(s+1-j2)} + \frac{K_2}{(s+1+j2)}$$

Los residuos de los polos serán:

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow \lambda_1} (s - \lambda_1) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(-1+j2)+3}{-1+j2+1+j2} = \frac{4+j4}{4j} \times \frac{j}{j} = \frac{-4+j4}{-4} = (1-j)$$

Por lo tanto: $K_1 = (1-j)$ y $K_2 = (1+j)$, deben ser conjugados.-

En Matlab hay una función que hace esto, y es:

`>>[R,P,K]=residue(n,d)`

Devuelve los residuos de los polos, los polos y la ganancia directa.

Las matrices del modelo serían:

$$A = \begin{bmatrix} -1+j2 & 0 \\ 0 & -1-j2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [(1-j) \quad (1+j)] \quad y \quad D = [0]$$

Si se desea que las ganancias del diagrama de estado, y en consecuencia los elementos de las matrices, sean números reales, la forma ya no será la forma canónica diagonal. Veamos un ejemplo en este sentido.

Ejemplo 39:

Obtener una descomposición en paralelo de una planta con $G_p(s)$:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{20}{(s+1)(s^2 + 6s + 25)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2 s + K_3}{(s^2 + 6s + 25)}$$

$$\text{El residuo } K_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) G_p(s) = \frac{20}{1-6+25} = 1$$

Restando $\frac{K_1}{(s+1)}$; de $G_p(s)$ quedará:

$$\frac{20}{(s+1)(s^2 + 6s + 25)} - \frac{1}{(s+1)} = \frac{-(s^2 + 6s + 25)}{(s+1)(s^2 + 6s + 25)} \equiv \frac{K_2 s + K_3}{(s^2 + 6s + 25)}$$

$$= \frac{-(s+1)(s+5)}{(s+1)(s^2 + 6s + 25)} = \frac{-s-5}{(s^2 + 6s + 25)}$$

Por lo tanto resulta: $K_2 = -1$ y $K_3 = -5$

En consecuencia:

$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)} + \frac{-s-5}{(s^2 + 6s + 25)}$ y por una descomposición directa de cada una de las fracciones el diagrama de estado será el indicado en la figura 62.

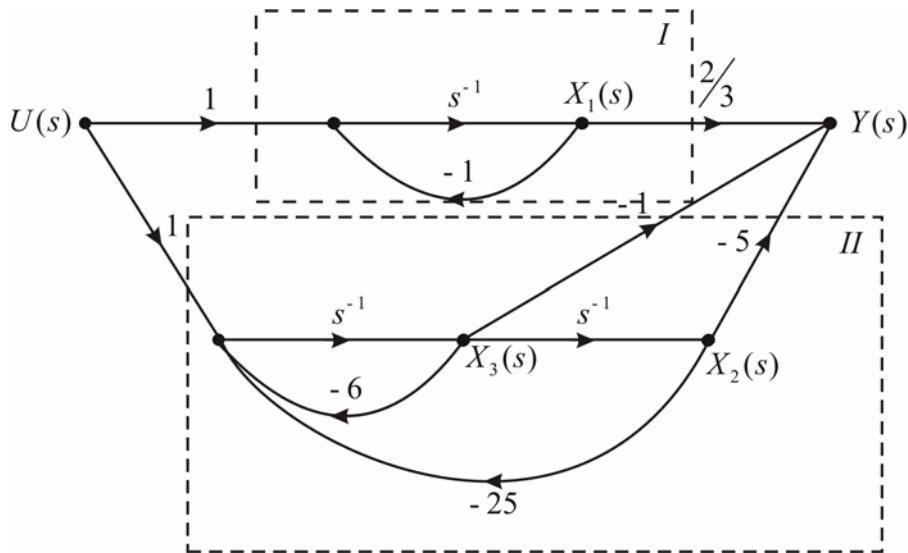


Figura 62

Las matrices del modelo resultan las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -25 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Como se puede apreciar no está en la forma canónica diagonal, pero los coeficientes de las matrices son números reales.-

Ejemplo 40: Ídem al ejemplo anterior pero con;

$$Gp(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+5)(s^2 + 2s + 2)}$$

Realizar una descomposición en paralelo para que las ganancias de todas las ramas del diagrama de estado correspondientes sean números reales.

$$Gp(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+5)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+5)} + \frac{K_3 s + K_4}{(s^2 + 2s + 2)}$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+5)(s^2 + 2s + 2)} = 0,1 \Rightarrow K_1 = 0,1$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow -5} \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = -\frac{1}{85} \Rightarrow K_2 = -\frac{1}{85}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{s(s+5)(s^2+2s+2)} - \frac{0,1}{s} - \frac{\frac{1}{85}}{(s+5)} = \frac{-\frac{15}{170}s^3 - \frac{115}{170}s^2 - \frac{20}{170}s}{s(s+5)(s^2+2s+2)} = \frac{\left(-\frac{15}{170}\right)s\left(s^2 + \frac{23}{3}s + \frac{40}{3}\right)}{s(s+5)(s^2+2s+2)} = \\
& = \frac{-\frac{115}{170}(s+5)\left(s + \frac{8}{3}\right)}{(s+5)(s^2+2s+2)} = \frac{-\frac{15}{170}s - \frac{4}{17}}{(s^2+2s+2)} \\
\therefore K_3 &= -\frac{15}{170} \quad y \quad K_4 = -\frac{4}{17}
\end{aligned}$$

El diagrama de estado será el indicado en la figura 63.

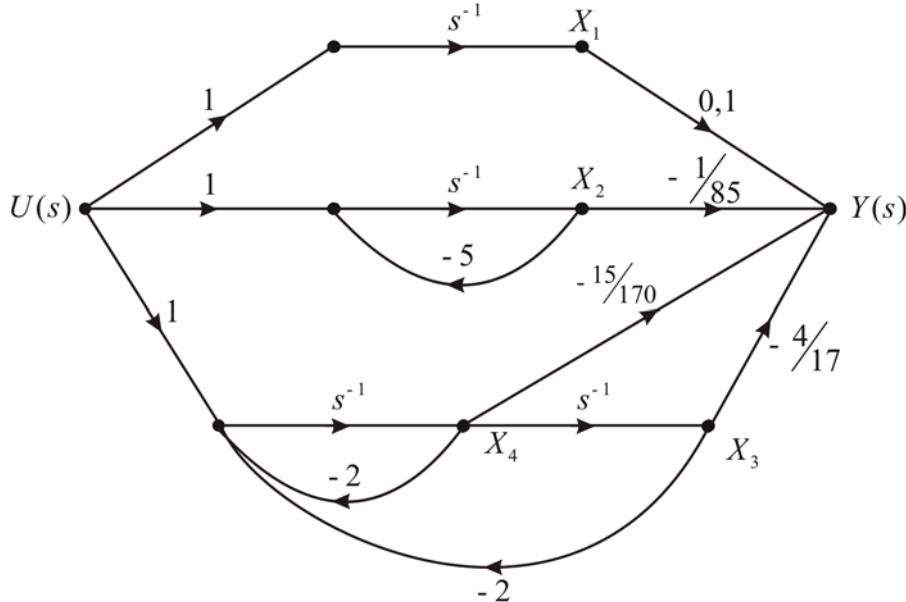


Figura 63

Las matrices de la planta resultan:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0,1 & -\frac{1}{85} & -\frac{15}{170} & -\frac{4}{17} \end{bmatrix}; \quad D = [0]$$

NO es la Forma Canónica Diagonal.

Obtención del modelo de estado de dos sistemas conectados en paralelo.
La figura 64 muestra dos sistemas conectados en paralelo:

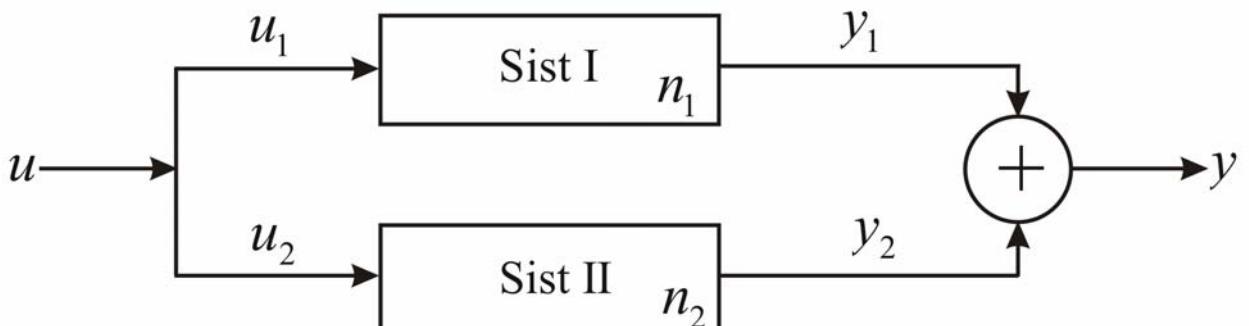


Figura 64

Las ecuaciones dinámicas de cada sistema son las ecuaciones (1) a (4) ya vistas. Las ecuaciones de estado y salida de la combinación (5) y (6).-

De la figura se ve que:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_2(t) = u(t) \\ y(t) = y_1(t) + y_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= A_1 \bar{x}_1 + B_1 u \Rightarrow \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}_{(n1+n2) \times (n1+n2)} \quad B_T = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}_{(n1+n2) \times 1}$$

$$y = y_1 + y_2 = C_1 \bar{x}_1 + D_1 u + C_2 \bar{x}_2 + D_2 u = [C_1 \quad C_2] \bar{x}(t) + [D_1 + D_2] u(t)$$

$$y(t) = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2] u(t) \quad C_T = [C_1 \quad C_2]_{1 \times (n1+n2)} \quad D_T = [D_1 + D_2]; \text{ escalar}$$

Ejemplo 41:

$$\text{Sistema 1} \rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad C_1 = [1 \quad -1] \quad y \quad D_1 = 0$$

$$\text{Sistema 2} \rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad C_1 = [0 \quad -2] \quad y \quad D_1 = 0$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad B_T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C_T = [1 \quad -1 \quad 0 \quad -2] \quad D_T = 0$$

En el CSAD la función "svparall" da el mismo resultado:

Aplicando la función, svparall, al ejemplo 39, resultará:

```
>> A1=-1;
>> B1=1;
>> C1=1;
>> D1=0;
>> A2=[0 1;-25 -6];
>> B2=[0;1];
>> C2=[-5 -1];
>> D2=0;
>> [AT,BT,CT,DT]=svparall(A1,B1,C1,D1,A2,B2,C2,D2)
```

AT =

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -25 & -6 \end{matrix}$$

BT =

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

CT =

$$1 \quad -5 \quad -1$$

DT =

$$0$$

Como se aprecia se llega al mismo resultado que el obtenido analíticamente.

Funciones de Transferencia con Polos Múltiples.

Forma Canónica de Jordan.

En general, cuando la función de transferencia de la planta $G_p(s)$ tiene polos múltiples, no se puede llegar a la forma canónica diagonal. Sin embargo se puede obtener la llamada *forma canónica de Jordan*.

Se supondrá que para los polos repetidos hay siempre un solo bloque de Jordan asociado con ellos, de (2x2), (3x3), etc. Por ejemplo, para una $G_p(s)$ de cuarto orden los polos pueden ser:

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \Rightarrow A_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$ un bloque de Jordan de (4x4).

Si $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\lambda_3 = \lambda_4 \Rightarrow A_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$ dos bloques de Jordan de (2x2).

Si $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \Rightarrow A_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$ un bloque de Jordan de (3x3).

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\lambda_3 = \lambda_4 \Rightarrow A_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$ un bloques de Jordan de (2x2).

En general las propiedades de la matriz A_J de la F.T.J. son las siguientes:

1º) Los elementos de la diagonal principal son los polos de $G_p(s)$ o, como se vera, los valores característicos de A_J .

2º) Todos los elementos bajo dicha diagonal son nulos.

3º) Algunos de los elementos inmediatamente arriba de los polos de orden múltiple sobre la diagonal principal son números unos.

4º) Los números unos, junto a los polos múltiples, forman bloques típicos, llamados bloques de Jordán. En los ejemplos dados se muestran encerrados por líneas punteadas.

Ejemplo 42: Si tenemos que $G_p(s) = \frac{12(s+1)}{s(s+3)(s+2)^2}$. Hallar la F.C.J.

correspondiente.

Se descompone a $G_p(s)$ en suma de fracciones parciales simples:

$$\frac{12(s+1)}{s(s+3)(s+2)^2} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{(s+3)} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{(s+2)}$$

Donde:

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s.G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{12(s+1)}{(s+3)(s+2)^2} = \frac{12}{12} = 1 \Rightarrow K_0 = 1$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3).G_p(s) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{12(s+1)}{s(s+2)^2} = \frac{-24}{-3} = 8 \Rightarrow K_1 = 8$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^2.G_p(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{12(s+1)}{s(s+3)} = \frac{-12}{-2} = 6 \Rightarrow K_2 = 6$$

$$K_3 = \frac{\partial}{\partial s} \left[\lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^2.G_p(s) \right] = \frac{\partial}{\partial s} \left[\lim_{s \rightarrow -2} \frac{12(s+1)}{s(s+3)} \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{12(s^2 + 3s) - (2s+3)(12s+12)}{(s^2 + 3s)^2} = -9$$

$$\Rightarrow K_3 = -9$$

Por lo tanto:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} + \frac{8}{(s+3)} + \frac{6}{(s+2)^2} + \frac{-9}{(s+2)}$$

Un diagrama de estado será el mostrado en la figura 65.

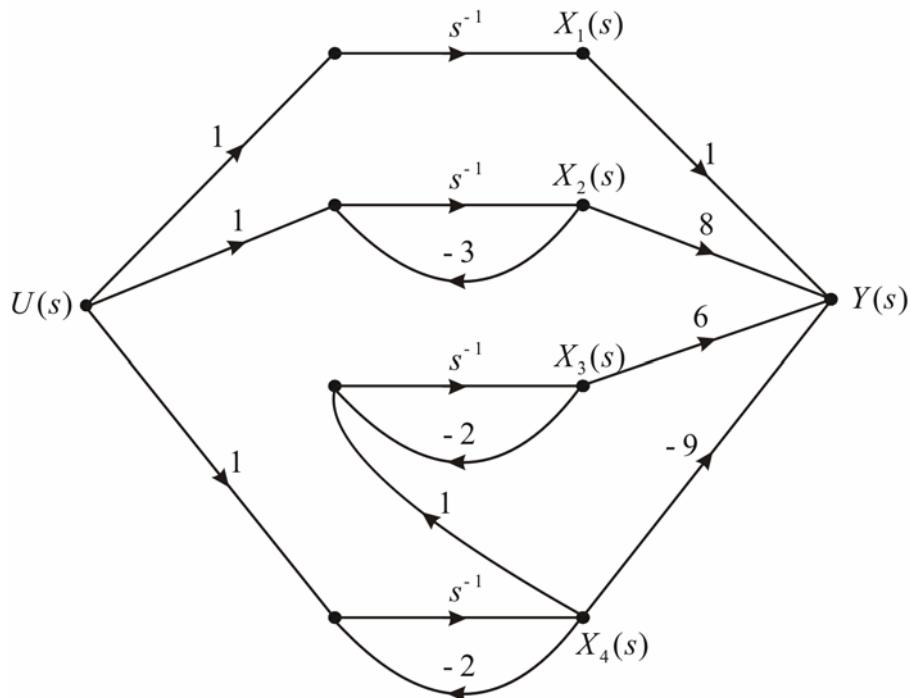


Figura 65

Las matrices de la planta serán las siguientes:

$$A_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 8 \ 6 \ -9] \quad D = 0$$

El programa CSAD/MatLab, no trata ésta forma canónica de Jordan, pero MatLab si. Por ejemplo, se procederá así:

```
>> n=12*[1 1];
>> d=pmake(0,-3,-2,-2);
>> [a,b,c,d]=tf2ss(n,d);
>> % el modelo a, b, c, d están en la Forma Canónica Controlable 2
>> [T, Aj]=jordan(a);
>> %T es una matriz para una transformación lineal
>> [A,B,C,D]=ss2ss(a,b,c,d,inv(T))
A =
 0.0000  0.0000  0.0000   0
    0   -3.0000    0     0
    0   -0.0000  -2.0000  1.0000
  -0.0000   0.0000   0.0000  -2.0000
B =
 1.0000
 1.0000
 -0.0000
 1.0000
C =
 1.0000  8.0000  6.0000  -9.0000
D =
 0
```

El cual es el modelo de la forma Canónica de Jordan buscado.

Obtención del Modelo de Estado de dos Sistemas Conectados en un Lazo de Realimentación

Con realimentación negativa será, figura 66:

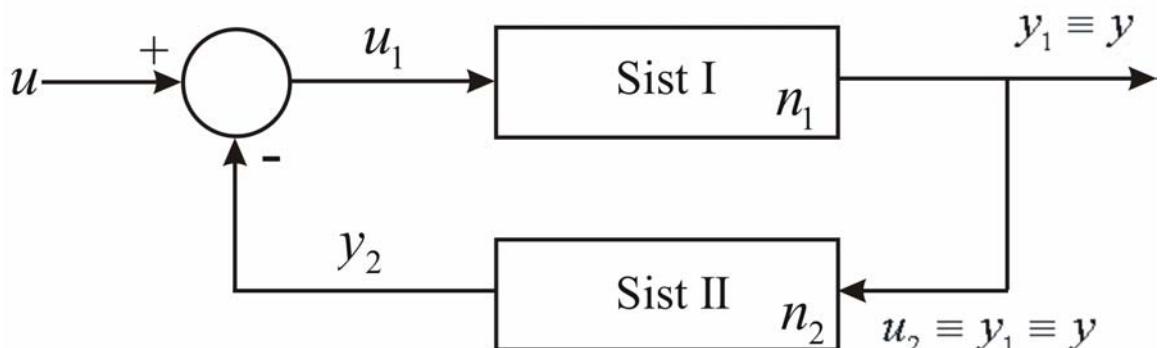


Figura 66

Se puede demostrar que:

$$A_T = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (A_1\Delta - B_1D_2C_1) & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & (A_2\Delta - B_2D_1C_2) \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\Delta = 1 + D_1D_2$$

$$B_T = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} ; \quad C_T = \frac{1}{\Delta} [C_1 \quad -D_1C_2] \quad y \quad D_T = \frac{1}{\Delta} D_1$$

Como se sabe generalmente $D_1 = D_2 = 0$, por ende $\Delta = 1$, se tendrá:

$$A_T = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} ; \quad B_T = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad C_T = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D_T = 0$$

La función Svcloop del Csad/Matlab se puede usar para esto.

Ejemplo 43:

Determinar el modelo del sistema que resulta de colocar la planta 2 en realimentación negativa con la 1.

Planta 1: $A_1 = -2$; $B_1 = 1$; $C_1 = 1$ y $D_1 = 1$

Planta 2: $A_2 = -3$; $B_2 = 1$; $C_2 = 1$ y $D_2 = 1$

Acá: $\Delta = 1 + 1 = 2$.

Para usar Svcloop se procede así:

```
» A1=-2;
» B1=1;
» C1=1;
» D1=1;
» A2=-3;
» B2=1;
» C2=1;
» D2=1;
» [AT,BT,CT,DT]=svcloop(A1,B1,C1,D1,A2,B2,C2,D2)
```

AT =

$$\begin{bmatrix} -2.5000 & -0.5000 \\ 0.5000 & -3.5000 \end{bmatrix}$$

BT =

$$\begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.5000 \end{bmatrix}$$

CT =

$$\begin{bmatrix} 0.5000 & -0.5000 \end{bmatrix}$$

DT =

$$\begin{bmatrix} 0.5000 \end{bmatrix}$$

Para los sistemas siguientes, encontrar las matrices del modelo total:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad D_1 = 0$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \quad y \quad D_2 = 0$$

En este caso: $\Delta = 1 + D_1 D_2 = 1 + 0 \times 0 = 1$, por lo tanto:

$$-B_1 C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad y \quad B_2 C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Las matrices pedidas serán:

$$A_T = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_T = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_T = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C_T = [1 \ -1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D_T = 0$$

Si el sistema 2 es una constante, realimentación constante, figura 67.

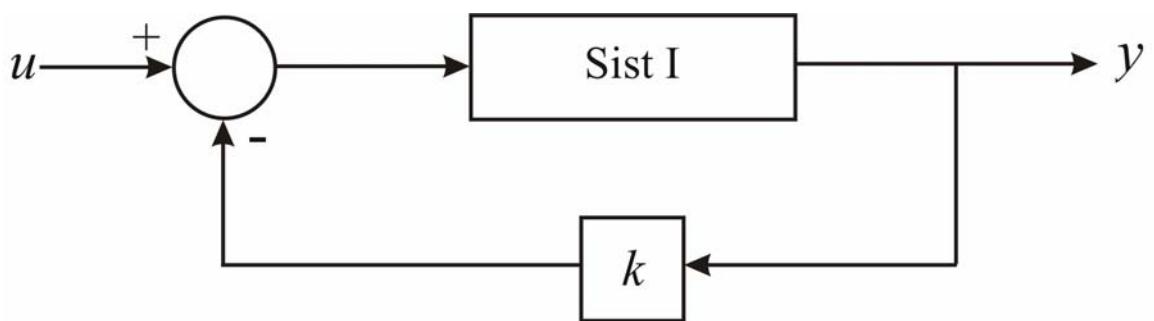


Figura 67

No hay necesidad de entrar, $A_2 = 0$; $B_2 = 0$; $C_2 = 0$ y $D_2 = k$; se puede proceder, para abreviar, el comando Svcloop de la manera siguiente:
`>>[AT,BT,CT,DT]=Svcloop(A1,B1,C1,D1,k);`

Sistemas de Lazos Múltiples:

Las funciones svseries, svarall y svcloop pueden ser aplicadas repetitivamente al analizar sistemas con lazos múltiples, o combinaciones más complejas.

Sería muy similar a usar, con las funciones de transferencias, las tfseries, tfparall y tfcloop, para reducir un diagrama de bloques de un sistema más complejo de control.-

Relación entre las Ecuaciones de Estado y las Matrices de las Funciones de Transferencias, Gp(s), de una Planta.

Se investigara la relación entre las dos representaciones ya vistas para describir una planta lineal autónoma.

Ya se definieron las funciones de transferencia en términos de los coeficientes de la ecuación diferencial, ahora se definirán para las plantas multivariadas, "p" entradas y "q" salidas, la matriz de las funciones de transferencia.

Se supondrá que un modelo de la planta es:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{x}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) + E\bar{p}(t) \Rightarrow o & A\bar{x}(t) + B^* \bar{u}^*(t) \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) + H\bar{p}(t) \Rightarrow o & C\bar{x}(t) + D^* \bar{u}^*(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) + H\bar{p}(t) \Rightarrow o & C\bar{x}(t) + D^* \bar{u}^*(t) \end{cases} \quad (2)$$

Donde, $\bar{p}(t)$, es una entrada de perturbación

$$\bar{u}^*(t) = \begin{bmatrix} \bar{u}(t) \\ \bar{p}(t) \end{bmatrix}; \quad B^* = [B \quad E] \quad \text{y} \quad D^* = [D \quad H]$$

Transformando la ecuación (1) con las condiciones iniciales nulas, $\bar{x}(0) = \bar{0}$, se tendrá:

$$s\bar{X}(s) = A\bar{X}(s) + B\bar{U}(s) + E\bar{P}(s)$$

Despejando $\bar{X}(s)$ se tendrá:

$$\begin{aligned} s\bar{X}(s) - A\bar{X}(s) &= B\bar{U}(s) + E\bar{P}(s) \Rightarrow (sI - A)\bar{X}(s) = B\bar{U}(s) + E\bar{P}(s) \\ \bar{X}(s) &= (sI - A)^{-1}B\bar{U}(s) + (sI - A)^{-1}E\bar{P}(s) \end{aligned} \quad (3)$$

Transformando por Laplace la (2):

$$\bar{Y}(s) = C\bar{X}(s) + D\bar{U}(s) + H\bar{P}(s) \quad (4)$$

Reemplazando (3) en (4) tenemos:

$$\bar{Y}(s) = C(sI - A)^{-1}B\bar{U}(s) + C(sI - A)^{-1}E\bar{P}(s) + D\bar{U}(s) + H\bar{P}(s)$$

$$\bar{Y}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]\bar{U}(s) + [C(sI - A)^{-1}E + H]\bar{P}(s)$$

$$\text{Llamando: } G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \quad \text{matriz (qxp)} \quad (6)$$

$$G_v(s) = C(sI - A)^{-1}E + H; \quad \text{matriz (qxv)} \quad (7)$$

La (6) y la (7) son las expresiones buscadas para las matrices de transferencia de la planta a controlar.

$$\therefore Y(s) = G_p(s)\bar{U}(s) + G_v(s)\bar{P}(s) \quad (8)$$

Si se hubiera trabajado con B^* y D^* se llegaría a:

$$(9) \quad \bar{Y}(s) = [C(sI - A)^{-1}B^* + D^*]\bar{U}^*(s) \quad \text{matriz [qx(p+v)]}$$

Volviendo a la matriz (6):

$$G_p(s) = C \frac{[Adj(sI - A)]^T}{|sI - A|} B + D;$$

Como en general la matriz D es la matriz nula:

$$G_p(s) = C \frac{(sI - A)^+}{|sI - A|} B \quad (\text{qxp}) \quad ; \quad \text{donde: } (sI - A)^+ = [Adj(sI - A)]^T$$

La ecuación característica será:

$$| (sI - A) | = 0$$

Expresión que coincide con los llamados valores característicos de la matriz de la planta A.

Veamos ahora un repaso de algunos conceptos sobre matrices.-

Matriz de Vandermonde

Se usará más adelante en una transformación de semejanza cuando la razón en cada columna sean los valores propios.

Una *Matriz de Vandermonde* es una que presenta una progresión geométrica en cada fila o en cada columna, siendo el primer elemento igual 1, por ejemplo:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

Método de Sarrus

El *método de Sarrus* es de mucha utilidad para calcular *determinantes de orden 3*.

Los términos con *signo* (+) están formados por los productos de los elementos de la *diagonal principal* y los de las *diagonales paralelas* con su correspondiente *vértice opuesto*.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Los términos con *signo* (-) están formados por los productos de los elementos de la *diagonal secundaria* y los de las *diagonales paralelas* con su correspondiente *vértice opuesto*.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$| A | = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.1.5 + 2.(-1).2 + 3.1.0 - 3.1.2 - 2.1.5 - 1.0.(-1) = 5 - 4 + 0 - 6 - 10 + 0 = -15$$

Matriz adjunta

La matriz adjunta es aquella en la que *cada elemento* se sustituye por su adjunto. *Se llama adjunto del elemento* a_{ij} *a su menor complementario pero anteponiendo*:

El signo + si (i+j) es par.

El signo - si (i+j) es impar.

Por ejemplo, el adjunto del elemento a_{21} , en la matriz siguiente es el indicado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow a_{21} = -(4 - 6) \Rightarrow a_{21} = 2$$

Ejemplo: Hallar la matriz adjunta de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz adjunta la denominaremos A^* , por lo tanto:

$$A^* = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

El producto de una matriz por su inversa es igual a la matriz identidad:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Puede calcularse la matriz inversa con los métodos siguientes:

Matriz Inversa a Través de la matriz de los Adjuntos

Uno de los métodos para determinar la inversa de una matriz es:

Dada una matriz A , *primero* determinamos la matriz de los adjuntos de su traspuesta, o la traspuesta de la matriz de sus adjuntos y luego multiplicamos esa matriz por $1/|A|$ y se obtiene la matriz inversa de A :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^T) \quad o \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} [\text{Adj}(A)]^T = \frac{1}{|A|} (A^*)^T = \frac{(A^*)^T}{|A|} = \frac{A^+}{|A|}$$

donde:

$$\begin{array}{ll} A^{-1} & \text{Matriz inversa} \\ |A| & \text{Determinante de la matriz} \\ A^* & \text{Matriz adjunta} \\ (A^*)^T \text{ o } A^+ & \text{Matriz traspuesta de la adjunta} \end{array}$$

Ejemplo:

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \text{ Determinar su inversa:}$$

1. Calculamos el determinante de la matriz, en el caso que el *determinante sea nulo la matriz no tendrá inversa.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \text{ en consecuencia tendrá inversa.}$$

2. Hallamos la matriz adjunta, que es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto.

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ -0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Calculamos la traspuesta de la matriz adjunta, A^+ :

$$(A^*)^T = A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. La matriz inversa de A es igual a la matriz traspuesta de su adjunta dividida por el valor de su determinante.-

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^+ = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \text{ es la matriz pedida. -}$$

Otro método puede ser aplicando el Teorema de Cayley – Hamilton:

El teorema dice: toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir, si $p(\lambda) = 0$ es la ecuación característica de A, entonces $p(A) = 0$, (igual a la matriz nula).-

En algunas situaciones el teorema de Cayley-Hamilton es útil para calcular la inversa de una matriz. Si existe A^{-1} y $p(A) = 0$, entonces $A^{-1} p(A) = 0$. Para ilustrar esto, si: $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, entonces la matriz:

$$p(A) = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0, \quad \text{y}$$

$$A^{-1} p(A) = A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_2 A + a_1 I + a_0 A^{-1} = 0, \quad \text{así:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-a_0} [A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_2 A + a_1 I] ; \text{ Se sabe que: } \prod_{i=1}^n \lambda_i = |A| = (-1)^n a_0$$

Observe que $a_0 \neq 0$ porque: $|A| = (-1)^n a_0$ y se supuso que A era invertible.

Ejemplo:

Aplicación del teorema de Cayley-Hamilton para calcular A^{-1} . Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces: $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$; $|A| = (-1)^3 6 = -6$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = 3$;

Aquí: $n = 3$, $a_2 = -2$, $a_1 = -5$ y $a_0 = 6$, por lo tanto será:

$$A^{-1} = (1/-6) (A^2 - 2A - 5I)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \left(\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 11 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -6 & -4 & 2 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 1 & -9 & 13 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & -0.5 & 7/6 \\ -1/6 & 1.5 & -13/6 \\ 1/6 & 0.5 & -5/6 \end{bmatrix}$$

Observe que se calculó A^{-1} haciendo sólo una división y calculando sólo un determinante (al encontrar $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$). Este método en ocasiones es muy eficiente en una computadora.

Ejemplo 44:

Una planta tiene el siguiente juego de matrices en su modelo:

$$1^o) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -14 \\ 69 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D = 0 ,$$

o también:

$$2^o) \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D = 0$$

Obtener $G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = ?$

$$1^o) \quad (sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 1 & s+5 \end{bmatrix} \Rightarrow |(sI - A)| = s^2(s+5) + 2 + s = s^3 + 5s^2 + s + 2$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -14 \\ 69 \end{bmatrix}$$

$$C \times (sI - A)^+ \times B = [1 \ 0 \ 0] [a_{11} \ a_{21} \ a_{31}] [3a_{11} - 14a_{21} + 69a_{31}]$$

Los adjuntos requeridos son:

$$\begin{cases} a_{11} = s(s+5)+1 = s^2 + 5s + 1 \\ a_{21} = (s+5) \\ a_{31} = 1 \end{cases}$$

Resulta:

$$C \times (sI - A)^+ \times B = 3s^2 + 15s + 3 - 14s - 70 + 69 = 3s^2 + s + 2$$

Por lo tanto:

$$Gp(s) = \frac{3s^2 + s + 2}{s^3 + 5s^2 + s + 2}$$

$$20) \quad (sI - A) = \begin{bmatrix} s+5 & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -3 & 1 & s \end{bmatrix} \Rightarrow |(sI - A)| = s^2(s+5) - 3 + (s+5) = s^3 + 5s^2 + s + 2$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C \times (sI - A)^+ \times B = [1 \ 0 \ 0] [a_{11} \ a_{21} \ a_{31}] [3a_{11} + a_{21} - a_{31}]$$

Como:

$$\begin{cases} a_{11} = s^2 + 1 \\ a_{21} = s \\ a_{31} = 1 \end{cases}$$

Resulta:

$$C \times (sI - A)^+ \times B = 3(s^2 + 1) + s - 1 = 3s^2 + s + 2$$

Por lo tanto:

$$Gp(s) = \frac{3s^2 + s + 2}{s^3 + 5s^2 + s + 2}$$

Como se ve la Gp(s) de la planta es la misma, a pesar que los vectores de estado son diferentes.

Para hacer esto en la computadora, con el Csad/Matlab se procede así:

» A=[-5 1 0;0 0 1;3 -1 0];

» B=[3;1;-1];

» C=[1 0 0];

» D=0;

» [n,d]=sv2tf(A,B,C,D)

n =

3.0000 1.0000 2.0000

d =

1.0000 5.0000 1.0000 2.0000

Ejemplo 45:

Un modelo de una planta a controlar tiene las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se aprecia es una planta con dos entradas y dos salidas, determinar la matriz de las funciones de transferencia $G_p(s)$.

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+4 & -3 \\ 1 & 1 & s+2 \end{bmatrix} \Rightarrow |sI - A| = s^3 + 6s^2 + 11s + 3$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C \times (sI - A)^+ \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s+2) & 3 \\ -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la $G_p(s)$ será:

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s+2)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} & \frac{3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \\ \frac{-(s+1)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} & \frac{s(s+4)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \end{bmatrix}$$

Todo esto se puede hacer con Matlab, de la manera siguiente:

» A=[0 1 0;0 -4 3;-1 -1 -2];

» B=[0 0;1 0;0 1];

» C=[1 0 0;0 0 1];

» D=[0 0;0 0];

» [n,d]=ss2tf(A,B,C,D,1) ⇒ Entrada 1, (primera columna)

n =

$$0 \quad -0.0000 \quad 1.0000 \quad 2.0000$$

$$0 \quad 0.0000 \quad -1.0000 \quad -1.0000$$

d =

$$1.0000 \quad 6.0000 \quad 11.0000 \quad 3.0000$$

» [n,d]=ss2tf(A,B,C,D,2) ⇒ Entrada 2, (segunda columna)

n =

$$0 \quad -0.0000 \quad 0 \quad 3.0000$$

$$0 \quad 1.0000 \quad 4.0000 \quad -0.0000$$

d =

$$1.0000 \quad 6.0000 \quad 11.0000 \quad 3.0000$$

También con el lenguaje simbólico, de Matlab, se puede proceder de la manera siguiente:

```

» syms s
» Gp=simplify(C*inv(s*eye(3)-A)*B+D)

```

Gp =

$$\begin{bmatrix} (s+2)/(s^3+6s^2+11s+3), & 3/(s^3+6s^2+11s+3) \\ -(s+1)/(s^3+6s^2+11s+3), & s*(s+4)/(s^3+6s^2+11s+3) \end{bmatrix}$$

» pretty(Gp)

$$\begin{bmatrix} s + 2 & 3 \\ \hline \frac{\cdot}{\cdot} & \frac{\cdot}{\cdot} \\ \%1 & \%1 \\ \hline s + 1 & s(s + 4) \\ \hline -\frac{\cdot}{\cdot} & \frac{\cdot}{\cdot} \\ \%1 & \%1 \end{bmatrix} \text{ donde:}$$

$(\%1) = s^3 + 6s^2 + 11s + 3$; es la ecuación característica de la planta.

Obtención de un Modelo Matemático en el Espacio de Estado a partir de la Matriz de Transferencia en Plantas de "p" entradas y "q" salidas.

Cuando una planta tiene una entrada simple y una salida también simple, su orden es igual a la mayor potencia de s en la $G_p(s)$, (después de haber simplificado los factores comunes del numerador y denominador de la misma). El número de variables de estado es también igual al orden de la planta.

Sin embargo para una planta multivariable, la relación entre la matriz de transferencia y el orden de la planta no es tan clara.

En este caso, es necesario determinar el número mínimo de integradores en un diagrama de estado que describa la planta multivariable.

El número de variables de estado, o el orden de la planta será igual a ese número mínimo de integradores.

La determinación de este número mínimo de integradores puede ilustrarse simplemente mediante la planta de una entrada y dos salidas de la figura 68, donde:

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) \\ G_{12}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

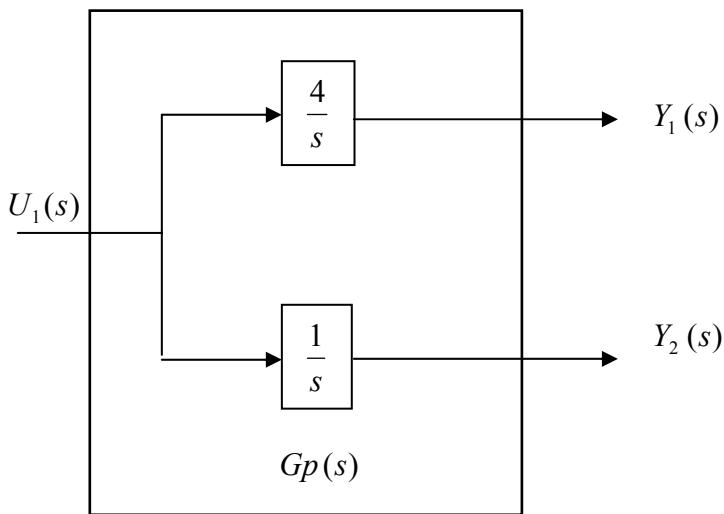


Figura 68

La ecuación matricial de transferencia es:

$$\bar{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = Gp(s)U_1(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} U_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} U_1(s) \quad (*)$$

A primera vista parece que se necesitan dos integradores en un diagrama de estado, como se indica en la figura 69.

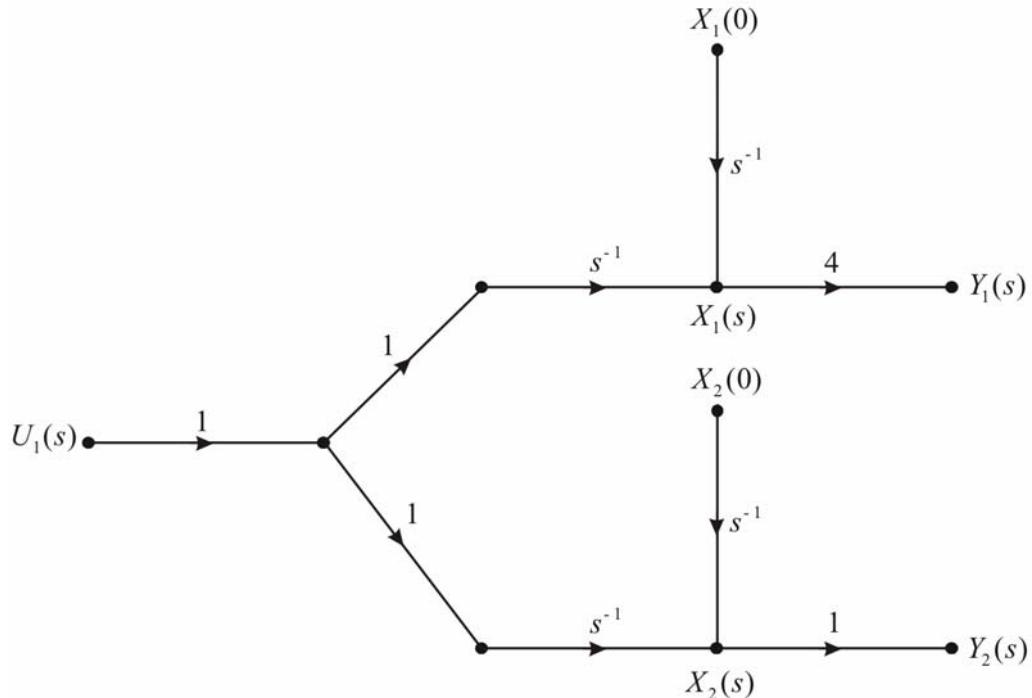


Figura 69

Sin embargo se ve fácilmente que éste caso se puede materializar la relación de transferencia utilizando solo un integrador, como se indica en la figura 70. Por lo tanto la planta será de primer orden, y solo será necesaria una variable de estado.

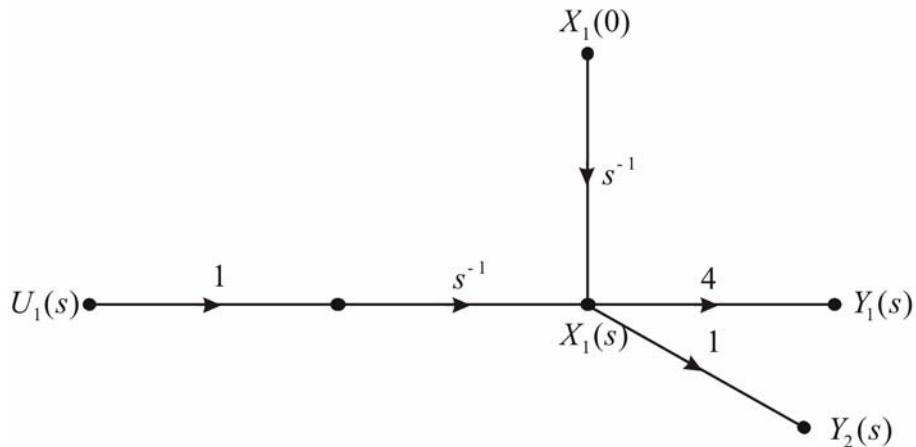


Figura 70

En este caso los dos caminos directos del diagrama participan del mismo integrador.

Método General

Se basa en la descomposición en fracciones parciales simples de las funciones de transferencia de la matriz $Gp(s)$.

Se supondrá que $Gp(s)$ es una función matricial de transferencia racional, cuyos elementos, $G_{ij}(s)$ tienen un número finito de polos *simples* en $s = P_i$ para $i = 1, 2, \dots, N$, en el plano s .

La descomposición en fracciones simples de $Gp(s)$ será:

$$\boxed{Gp(s) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{(s - P_i)} + R \quad \text{Donde :}} \\ K_i = \lim_{s \rightarrow P_i} (s - P_i) Gp(s) \quad y \\ R = \lim_{s \rightarrow \infty} Gp(s) \equiv D}$$

El rango del polo i -enésimo P_i , es r_i , y se define como el rango de la matriz K_i . Entonces el orden mínimo de $Gp(s)$ viene dado por:

$$\text{Rango Total} = \sum_{i=1}^N r_i = \text{Número de Variables de Estado} = \text{Número de Integradores} \equiv n$$

El rango de una matriz es el orden máximo del determinante no nulo que puede formarse con los elementos de la matriz.

Apliquemos esto a la planta del principio. Como $Gp(s)$ tiene un solo polo en el origen del plano s , $i = 1$, $N = 1 \Rightarrow P_1 = 0$ se puede escribir:

$$Gp(s) = \frac{K_1}{s} + R$$

Donde: $K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s Gp(s) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $R = \lim_{s \rightarrow \infty} Gp(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv D$

Por ende: $Gp(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Como K_1 tiene el rango igual a la unidad, se comprueba que solo se necesita un integrador para realizar el diagrama de estado de la planta multivariable en estudio

Ejemplo 46:

La matriz de transferencia de una planta es la indicada a continuación, determinar el orden de la misma con un diagrama de estado.

$$Gp(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s(s+2)} & 10 \\ \frac{5}{s} & \frac{1}{(s+1)} \end{bmatrix}$$

Como se aprecia la planta tiene dos entradas y dos salidas.

$$n = ?$$

$$Gp(s) = \sum_{i=1}^3 \frac{K_i}{(s - p_i)} + R, \text{ pues } s_1 = 0 ; s_2 = -1 ; s_3 = -2$$

$$G_p(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+1)} + \frac{K_3}{(s+2)} + D \Rightarrow K_i \text{ y } D \Rightarrow (q \times p) = 2 \times 2$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_p(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}; \quad K_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \cdot G_p(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \cdot G_p(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \lim_{s \rightarrow \infty} G_p(s) = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_p(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+2)} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ r_1 = 1 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = 1$$

$$\sum \text{Rango} = N^{\circ} \text{ de } \int = N^{\circ} \text{ de variables de estado} = n = 3$$

El diagrama de estado será el indicado en la figura 71.

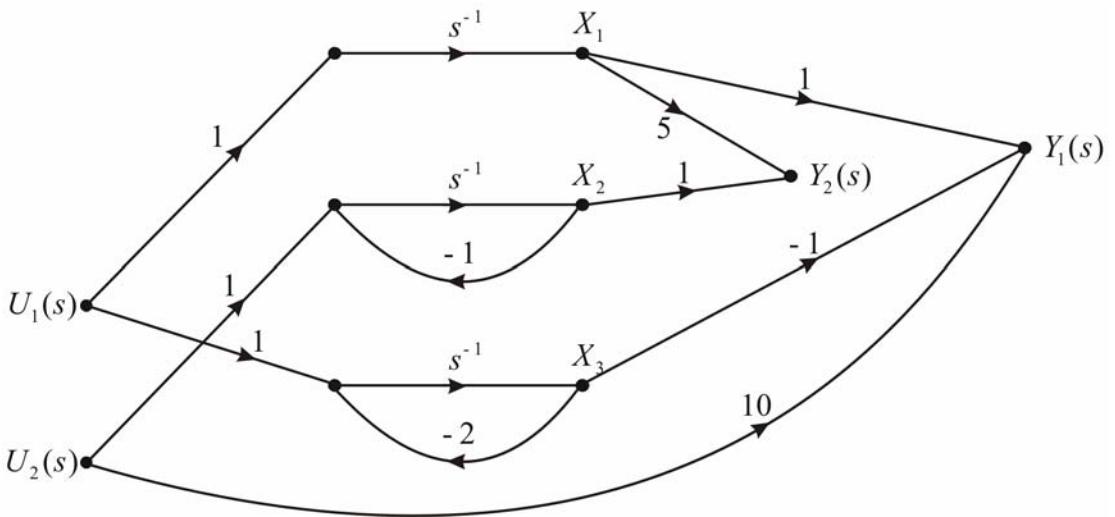


Figura 71

Las ecuaciones de estado y de salida serán:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \rightarrow F.C.D$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Se debería verificar que: $G_p(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$

Veamos un ejemplo usando la PC:

```
>> A=[0 0 0;0 -2 0;0 0 -1];
>> B=[1 0;1 0;0 1];
>> C=[1 -1 0;5 0 1];
>> D=[0 10;0 0];
>> [n,d]=ss2tf(A,B,C,D,1)
```

$n =$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 15 & 10 \end{array} \Rightarrow 2(s+1) \quad \Rightarrow 5(s+1)(s+2)$$

$d =$

$$1 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \quad \Rightarrow s(s+1)(s+2)$$

```
>> [n,d]=ss2tf(A,B,C,D,2)
```

$n =$

$$\begin{array}{cccc} 10 & 30 & 20 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow 10s(s+1)(s+2) \quad \Rightarrow s(s+2)$$

$d =$

$$1 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \quad \Rightarrow s(s+1)(s+2)$$

O también de la siguiente manera.

(Ingresando primero las matrices de la planta a controlar).

```

>> I=eye(size(A));
>> syms s
>> E=s*I;
>> F=E-A;
>> Gp=simplify(C*inv(F)*B+D)
Gp =
[ 2/s/(s+2),    10   ]
[      5/s,    1/(s+1)]
>> pretty(Gp)
[ 2
 [-----      10 ]
 [s (s + 2) ]
 [      ]
 [      1 ]
 [ 5/s      ----- ]
 [           s + 1 ]

```

Ejemplo 47: Un sistema tiene la siguiente $G_p(s)$. Determinar un modelo matemático en el espacio de estado.

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s+2)}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)} \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{(s+1)} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} p(\text{entrada}) = 2 \\ q(\text{salidas}) = 2 \\ n(\text{orden}) = ? \end{array}$$

Descomposición de los elementos de $G_p(s)$:

$$\frac{(s+2)}{(s+1)^2} = \frac{K_1}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{(s+1)} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+2) = 1 \\ K_2 = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s+2) \right] = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{(-!)}{(s+1)}$$

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+1)} \\ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+1)} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$r=1 \qquad r=2 \qquad r=1$

$$n = \sum_i r_i = 1 + 2 + 1 = 4 \Rightarrow 4 \text{ Integradores} \Rightarrow \underline{n = 4}$$

El diagrama de estado será el mostrado en la figura 72.

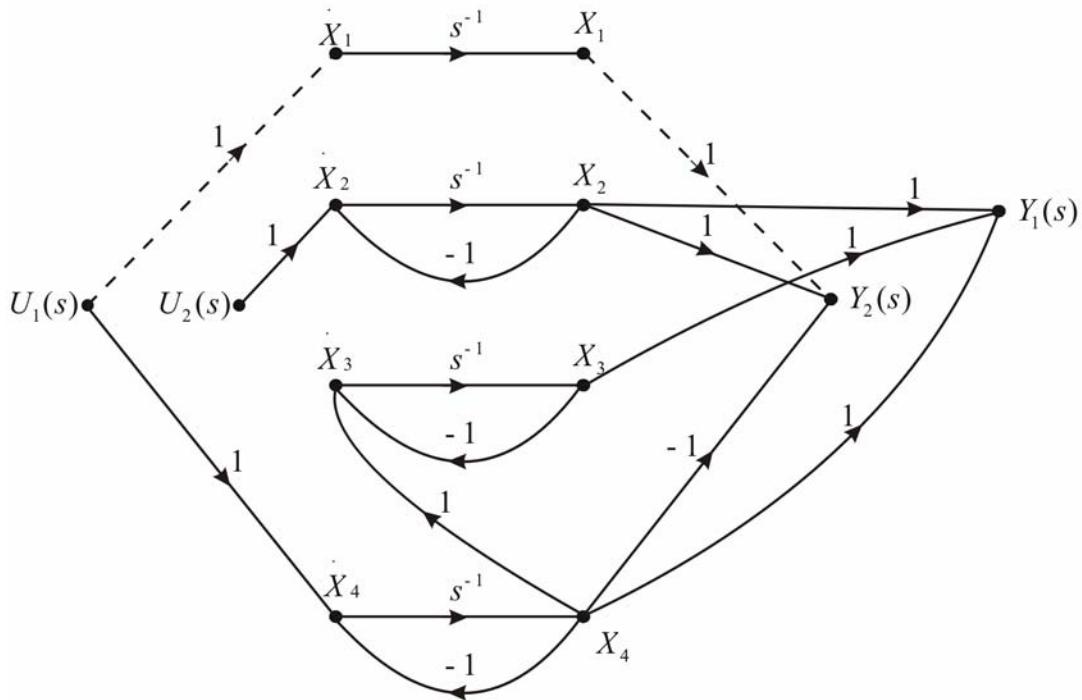


Figura 72

Las matrices del sistema serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow F.C.J. \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se deberá verificar que: $G_n(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

Se puede usar la computadora, de la manera siguiente:

Con el Matlab

```

>> A=[0 0 0 0;0 -1 0 0;0 0 -1 1 1;0 0 0 -1];
>> B=[1 0;0 1;0 0;1 0];
>> C=[0 1 1 1;1 1 0 -1];
>> D=[0 0;0 0];
>> syms s
>> I=eye(size(A));
>> E=s*I;
>> F=E-A;
>> Gp=C*inv(F)*B+D
Gp =

```

$$\begin{bmatrix} 1/(s+1)^2 + 1/(s+1), & 1/(s+1) \\ 1/s - 1/(s+1), & 1/(s+1) \end{bmatrix}$$

Como vemos entrega la matriz de la planta descompuesta en la suma de fracciones simples.

Dados los datos A, B, C, D y generada la variable s, el comando unificado sería:

```
>> Gp=C*inv(s*eye(size(A))-A)*B+D
```

Gp =

$$\begin{bmatrix} 1/(s+1)^2 + 1/(s+1), & 1/(s+1) \\ 1/s - 1/(s+1), & 1/(s+1) \end{bmatrix}$$

Ecuación Característica y Valores Característicos:

La ecuación característica juega un rol muy importante en el análisis y diseño de los sistemas lineales. La misma puede ser definida sobre las siguientes bases:

- 1º) Sobre la ecuación diferencial.
- 2º) Con la función de transferencia.
- 3º) En base a las ecuaciones de estado (matriz A)

- 1º) Un sistema lineal, autónomo esta descrito por la ecuación diferencial siguiente:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_nu^{(n)}(t) + b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + b_0u(t)$$

Luego, la ecuación característica de la planta se define como:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (1)$$

Que se obtiene igualando a cero la parte homogénea de la transformada de Laplace de la ecuación diferencial.

- 2º) La función de transferencia de la planta es:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

La ecuación característica se obtiene igualando a cero el denominador de la función de transferencia, $G_p(s)$.

- 3º) Desde la técnica de las variables de estado se puede escribir $G_p(s)$ como:

$$G_p(s) = \frac{C(sI - A)^+ B + |sI - A|D}{|sI - A|}$$

Igualando a cero el denominador de $G_p(s)$ se obtiene la ecuación característica expresada como:

$$|sI - A| = 0$$

La cual es una forma alternativa de la ecuación (1). Si los coeficientes de la matriz A son reales los coeficientes del polinomio $|sI - A|$ también serán reales.

Solución por computadora:

En MatLab se puede usar:

```
>> A=[-----];
>> p=poly(A)
p =
    1    a_{n-1}    a_{n-2}    .....    a_1    a_0
```

Valores Característicos:

Los ceros de la ecuación característica son también llamados valores característicos de la matriz A. Es interesante notar que si las ecuaciones de estado están en la F.C.C. o en la F.C.O., los coeficientes de la ecuación característica son los elementos de la última fila o columna de la matriz A de la planta respectivamente. Por ende conociendo la matriz A, la ecuación característica se puede escribir rápidamente. Como se verá mas adelante otra propiedad importante es que la ecuación característica y los valores característicos son invariantes bajo una transformación lineal o de semejanza. Algunas propiedades de los valores característicos son:

- Si los coeficientes de A son reales, sus valores característicos, P_1, P_2, \dots, P_n , son reales o en pares de complejos conjugados.
- La traza de la matriz A es la suma de los valores característicos:

$$\text{traza}(A) = \sum_{j=1}^n P_j \equiv -a_{n-1}$$

- Si P_j , para $j = 1, 2, 3, \dots, n$, es un valor característico de la matriz A, también será un valor característico de la transpuesta A^T .
- Si A es no singular, ($|A| \neq 0$), con valores característicos P_1, P_2, \dots, P_n

Entonces, $\frac{1}{P_j}; j = 1, 2, \dots, n$ serán los valores característicos de la matriz inversa de A, $(A)^{-1}$.

Soluciones por Computadora:

```
>>A= [-----];
>>eig(A)    ⇒ devuelve los valores característicos de la matriz A
ans =
P1
P2
.
.
.
Pn
```

O también:

>>A=[-----];

>>P=poly(A);

>>roots(P) \Rightarrow devuelve los valores característicos de la matriz A

ans =

P₁

P₂

.

.

P_n

La multiplicidad algebraica de un valor propio λ de A es el orden de λ como cero del polinomio característico de A ; en otras palabras, si λ es una de las raíces del polinomio, es el número de factores $(s - \lambda)$ en el polinomio característico tras la factorización. Una matriz A de orden $n \times n$ tiene n valores propios, contados de acuerdo con su multiplicidad algebraica, ya que su polinomio característico tiene grado n . Un valor propio de multiplicidad algebraica 1 recibe el nombre de "valor propio simple". Por ejemplo, se pueden encontrar exposiciones como la siguiente en artículos de teoría de matrices: "los valores propios de una matriz A son 4,4,3,3,3,2,2,1", lo que significa que la multiplicidad algebraica de 4 es dos, la de 3 es tres, la de 2 es dos y la de 1 es uno. También se puede definir así:

Definición: (Multiplicidad algebraica). Si λ_0 es una raíz de multiplicidad α de la ecuación característica de A , se dirá que λ_0 es un auto valor de orden α de A . A α se le llama multiplicidad algebraica de λ , y se suele notar $ma(\lambda)$.

Vectores Característicos:

Los vectores característicos, o auto vectores, son útiles en muchos temas del control moderno, uno de los cuales son las transformaciones lineales de semejanza o similitud que serán estudiadas mas adelante.

Por definición: Un vector característico es cualquier vector \bar{p}_j , distinto de cero, que satisface la ecuación matricial siguiente:

$$\lambda_j \bar{p}_j = A \bar{p}_j \quad o \quad \Rightarrow (\lambda_j I - A) \bar{p}_j = \bar{0}, \quad (1)$$

donde λ_j es el j-ésimo valor característico de la matriz A.

$$\text{y } \bar{p}_j = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} \text{ con } j = (1, 2, \dots, n),$$

es un vector característico de A asociado con el valor característico $\lambda_{j,-}$

Si A tiene valores característicos distintos, los vectores característicos se pueden obtener directamente de la ecuación de definición de los mismos como se puede ver en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 48:

Si una planta tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 2] \quad y \quad D = [0]$$

La ecuación característica de A es:

$$|sI - A| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} (s-1) & 1 \\ 0 & (s+1) \end{bmatrix} \right| = (s-1)(s+1) = 0$$

Los valores característicos serán:

$$\lambda_1 = 1 \quad y \quad \lambda_2 = -1$$

Los vectores característicos se escriben como:

$$\bar{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{p}_2 = \begin{bmatrix} \bar{p}_{12} \\ \bar{p}_{22} \end{bmatrix}, \text{ asociados con } \lambda_1 \text{ y } \lambda_2 \text{ respectivamente.}$$

Será: $(\lambda_1 I - A) \bar{p}_1 = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el rango de la matriz $(\lambda_1 I - A)$ es la unidad, habrá infinitas soluciones.

Se deberá cumplir que:

$$0 \times p_{11} + p_{21} = 0 \Rightarrow p_{21} = k_1, \text{ cualquier valor y } p_{11} = 0$$

Por ende se tendrá que:

$$\bar{p}_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ si } k_1 = 1 \Rightarrow \bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = -1$; $\bar{p}_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2p_{12} + p_{22} = 0 \Rightarrow p_{22} = 2p_{12}$$

$$\text{Si } p_{12} = k_2 \Rightarrow p_{22} = 2k_2$$

En consecuencia:

$$\bar{p}_2 = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{si } k_2 = 1 \Rightarrow \bar{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la llamada matriz de los vectores propios será:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vectores Característicos Normalizados:

Son aquellos que tienen el módulo igual a la unidad. Los identificaremos así:

$$\hat{p}_j = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} \quad \text{con } j = (1, 2, \dots, n)$$

$$\left| \hat{p}_j \right| = 1 = \sqrt{{p_{1j}}^2 + {p_{2j}}^2 + \dots + {p_{nj}}^2}$$

En el ejemplo que acabamos de ver:

$$\left| \hat{p}_2 \right| = 1 = \sqrt{{k_2}^2 + 4{k_2}^2} = \sqrt{5{k_2}^2} = \sqrt{5} k_2 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

De los infinitos valores que puede tomar k_2 , si $k_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ resulta el vector característico normalizado asociado con el auto valor λ_2 .

$$\left| \hat{p}_1 \right| = 1 = \sqrt{{k_1}^2 + 0^2} = k_1$$

En consecuencia los vectores característicos normalizados y la matriz de los mismos serán:

$$\hat{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{p}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad y \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Espacio Propio: Es el espacio formado por todos los vectores propios asociados al mismo valor propio, además del vector nulo, que no es un vector propio.

La multiplicidad geométrica de un valor propio como ya se menciono es la dimensión del *espacio propio* asociado, por lo tanto coincide con el número de vectores propios linealmente independientes asociados con el valor propio correspondiente. También se puede definir así:

Definición: (Multiplicidad geométrica). *Se llama multiplicidad geométrica de λ al número de auto vectores linealmente independientes asociados con él.* Se suele notar como: mg (λ).

Soluciones por computadora: (cuando los valores propios son distintos)

```
» A= [1 -1; 0 -1];
» eig (A)
ans =
  1
 -1
```

Los valores propios son distintos, por ende se puede emplear:

```
» [T,Ad]=eig(A)
```

$$T = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.4472 \\ 0 & 0.8944 \end{bmatrix}$$

$$Ad = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vectores Característicos Generalizados:

Si A tiene valores característicos de orden múltiple y no es simétrica, no todos los vectores característicos se pueden encontrar utilizando la ecuación (1). Suponiendo que entre los n valores característicos de A, "q" ($>n$) son distintos. Los vectores característicos que corresponden a los q valores característicos distintos se pueden determinar usando la expresión ya vista: $(\lambda_j I - A) \bar{p}_j = \bar{0}$

En donde λ_j denota el j-ésimo valor característico entre los q distintos, o sea para: $j=1, 2, \dots, q$.

Para los $(n-q)$ valores característicos restantes, que se supondrán todos iguales, los vectores característicos correspondientes, son los llamados vectores característicos generalizados. Estos se determinan de las $(n-q)$ ecuaciones vectoriales siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda_{q+1} I - A) \bar{p}_{q+1} = \bar{0} \\ (\lambda_{q+2} I - A) \bar{p}_{q+2} = -\bar{p}_{q+1} \\ (\lambda_{q+3} I - A) \bar{p}_{q+3} = -\bar{p}_{q+2} \\ \dots \\ \dots \\ (\lambda_{n-1} I - A) \bar{p}_{n-1} = -\bar{p}_{n-2} \\ (\lambda_n I - A) \bar{p}_n = -\bar{p}_{n-1} \end{array} \right.$$

o también:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A - \lambda_{q+1}) \bar{p}_{q+1} = \bar{0} \\ (A - \lambda_{q+2}) \bar{p}_{q+2} = \bar{p}_{q+1} \\ (A - \lambda_{q+3}) \bar{p}_{q+3} = \bar{p}_{q+2} \\ \dots \\ \dots \\ (A - \lambda_{n-1}) \bar{p}_{n-1} = \bar{p}_{n-2} \\ (A - \lambda_n) \bar{p}_n = \bar{p}_{n-1} \end{array} \right.$$

La matriz de los vectores característicos y generalizados será:

$$T = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & : & : & \bar{p}_q & \bar{p}_{q+1} & \bar{p}_{q+2} & : & : & \bar{p}_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 49: Dada la matriz A de una planta, determinar la matriz de los vectores propios y generalizados.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Los valores característicos de A son:

$$|sI - A| = s^3 - 4s^2 + 5s - 2 = 0;$$

Resulta: $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 1$

Por lo que la matriz A tiene un valor característico de segundo orden en 1. Un vector característico que está asociado con λ_2 , (\bar{p}_1), se determina como ya se sabe:

$$(\lambda_1 I - A) \bar{p}_1 = (2I - A) \bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2p_{11} - 6p_{21} + 5p_{31} = 0 \\ -p_{11} + 2p_{21} - 2p_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{si se elige arbitrariamente: } p_{11} = -8, \text{ quedará:}$$

$$\begin{cases} -6p_{21} + 5p_{31} = 16 \\ 2p_{21} - 2p_{31} = -8 \end{cases} \Rightarrow p_{21} = 4 \text{ y } p_{31} = 8, \text{ por ende el auto vector será:}$$

$$\bar{p}_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Para los vectores característicos generalizados que están asociados con el auto valor de segundo orden, se sustituye $\lambda_2 = 1$ en la ecuación siguiente:

$$(\lambda_2 I - A) \bar{p}_2 = (I - A) \bar{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_{12} - 6p_{22} + 5p_{32} = 0 \\ -p_{12} + p_{22} - 2p_{32} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{si se elige en forma arbitraria: } p_{12} = 7$$

$$\begin{cases} -6p_{22} + 5p_{32} = -7 \\ p_{22} - 2p_{32} = 7 \end{cases} \Rightarrow p_{22} = -3 \text{ y } p_{32} = -5, \text{ por ende el auto vector será:}$$

$$\bar{p}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $\lambda_3 = 1$ en la ecuación:

$$(\lambda_3 I - A) \bar{p}_3 = (I - A) \bar{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = -\bar{p}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_{13} - 6p_{23} + 5p_{33} = -7 \\ -p_{13} + p_{23} - 2p_{33} = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{si se elige en forma arbitraria: } p_{13} = 9$$

$$\begin{cases} -6p_{23} + 5p_{33} = -16 \\ p_{23} - 2p_{33} = 12 \end{cases} \Rightarrow p_{23} = -4 \text{ y } p_{33} = -8 \Rightarrow \bar{p}_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

La matriz pedida será la siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} -8 & 7 & 9 \\ 4 & -3 & -4 \\ 8 & -5 & -8 \end{bmatrix};$$

Como se vera a continuación esta matriz lleva el modelo a la Forma Canónica de Jordán.-

Soluciones por Computadora;

» A=[0 6 -5;1 0 2;3 2 4];

» eig(A)

ans =

2.0000

1.0000 + 0.0000i

1.0000 - 0.0000i

» [T,Aj]=jordan(A)

T =

-8 7 9

4 -3 -4

8 -5 -8

Aj =

2 0 0

0 1 1

0 0 1

Transformaciones de Semejanza o de Similitud en Modelos de Plantas de una Entrada y una salida.-

Dadas las ecuaciones dinámicas de una planta, con $p=q=1$, en la forma siguiente, ($y(t)$ y $u(t)$ serán escalares):

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\bar{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1)$$

Cuando se realiza el análisis o el diseño en el espacio de estado, con frecuencia es ventajoso transformar estas ecuaciones en Formas Particulares. Por ejemplo, como se verá más adelante, las F.C.C. tienen propiedades interesantes que la hacen útil para las pruebas de la controlabilidad, en el diseño mediante la realimentación de los estados. Consideremos que las ecuaciones (1) son transformadas en otras mediante la siguiente relación en las variables de estado de los dos modelos:

$$\bar{x}(t) = P\bar{x}_1(t) \quad (2)$$

En donde P es una matriz de transformación no singular ($|P| \neq 0$) de orden ($n \times n$), por lo que también:

$$P^{-1}\bar{x}(t) = \bar{x}_1(t) \quad (3)$$

Las ecuaciones del modelo transformado serán:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = A_1 \bar{x}_1(t) + B_1 u(t) \\ y(t) = C_1 \bar{x}_1(t) + D_1 u(t) \end{cases} \quad (4)$$

Derivando la ecuación (3) con respecto al tiempo, quedaría:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1(t) &= P^{-1} \dot{\bar{x}}(t) = P^{-1} [A P \bar{x}_1(t) + B u(t)] \\ \therefore \dot{\bar{x}}_1(t) &= (P^{-1} A P) \bar{x}_1(t) + (P^{-1} B) u(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Por ende las nuevas matrices serán:

$$A_1 = P^{-1} A P \quad y \quad B_1 = P^{-1} B \quad (6)$$

Para la ecuación de salida:

$$y(t) = (C P) \bar{x}_1(t) + D u(t) \text{ por lo tanto:}$$

$$C_1 = C P \quad y \quad D_1 \equiv D \quad (7)$$

Esta transformación se conoce con el nombre de Transformación de Semejanza y en el sistema transformado, las propiedades como: ecuación característica, valores característicos, vectores característicos, y las funciones de transferencia se CONSERVARAN en la transformación.

Ahora veremos como obtener la matriz de transformación para pasar a las siguientes formas: F.C.C, F.C.O, F.C.D y F.C.J. las llamaremos P, Q, T y T respectivamente.

Propiedades Invariantes de las Transformaciones de Semejanza.

Una de las propiedades importantes de las transformaciones de semejanza es que:

- La ecuación característica.
- Los valores característicos.
- Los vectores característicos.
- Las funciones de transferencia

Son Invariantes (o sea, no cambian, siguen siendo los mismos).

Ecuación Característica, Valores y Vectores Característicos.

La ecuación característica del sistema transformado es:

$$|(sI - A^*)| = |(sI - P^{-1} A P)| = |(sP^{-1}P - P^{-1} A P)| = |(P^{-1})(sI - A)(P)|$$

Ya que el determinante del producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrizes, se tendrá:

$$|(sI - A^*)| = |P^{-1}| \cdot |(sI - A)| \cdot |P| \equiv |sI - A| ; \text{ por que } |P^{-1}| \cdot |P| = 1$$

Por lo que la ecuación característica se mantiene, lo que lleva naturalmente a los mismos valores y vectores característicos.

Matriz de las Funciones de Transferencia.

La matriz de la función de transferencia del sistema transformado será:

$$\begin{aligned}
 G_p^*(s) &= C^*(sI - A)^{-1}B^* + D^* \\
 &= CP(sP^{-1}P - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D \\
 &= CP[P^{-1}(sI - A)P]^{-1}P^{-1}B + D; \text{ como } (NH)^{-1} = H^{-1}N^{-1} \\
 &= CPP^{-1}[P^{-1}(sI - A)]^{-1}P^{-1}B + D \\
 &= CPP^{-1}(sI - A)^{-1}PP^{-1}B + D
 \end{aligned}$$

$$\therefore G_p^*(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = G_p(s)$$

Transformación a la Forma Canónica Controlable, (F.C.C.1)

Solo se trata el caso que la planta tiene una entrada y una salida, (SISO)

Las ecuaciones dinámicas de un a planta, se transforman a la F.C.C 1 mediante la transformación lineal:

$$\bar{x}(t) = P\bar{x}^*(t) \Rightarrow \bar{x}^*(t) = P^{-1}\bar{x}(t)$$

La matriz de transformación P es:

$$P = S \cdot M \Rightarrow P^{-1} = (S \cdot M)^{-1} = M^{-1}S^{-1}$$

En donde:

$S = [B \ AB \ A^2B \ : \ : \ A^{n-1}B]$; en general de orden $[n \times (n \ p)]$ como $p=1$, la misma será cuadrada de orden $(n \times n)$.

La ecuación característica de la planta es:

$$\begin{aligned}
 |sI - A| &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \\
 &= s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} s^{n-2} + \dots + \frac{a_2}{a_n} s^2 + \frac{a_1}{a_n} s + \frac{a_0}{a_n} = 0 \\
 &= s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + a'_{n-2} s^{n-2} + \dots + a'_2 s^2 + a'_1 s + a'_0 = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Con: } a'_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}; \quad a'_{n-2} = \frac{a_{n-2}}{a_n}; \dots, \quad a'_1 = \frac{a_1}{a_n} \quad y \quad a'_0 = \frac{a_0}{a_n}$$

La matriz M ($n \times n$) se define en base a los coeficientes de la ecuación característica $a'_i \Rightarrow (i = 0, 1, 2, \dots, (n-1))$:

$$M = \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 & : & : & a'_{n-1} & 1 \\ a'_2 & a'_3 & a'_4 & : & : & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n-2} & a'_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es una matriz triangular superior, con "unos" 1, en la diagonal secundaria. Entonces se tendrá:

$$A^* = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & : & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & : & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 1 \\ -a'_0 & -a'_1 & -a'_2 & : & : & a'_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B^* = P^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C^* = CP \quad y \quad D^* = D$$

Las matrices C^* y D^* no siguen ningún patrón en particular.

La transformación a la F.C.C. 1 requerirá que P^{-1} exista, lo que implica que $P^{-1} = (SM)^{-1} = M^{-1}S^{-1}$, la matriz S deberá tener inversa, ya que la matriz M, al ser triangular con "unos" en la diagonal secundaria, tendrá su determinante distinto de cero $|M| \neq 0$, pues es: ($|M| = +1$ o -1), y en consecuencia siempre existirá su inversa.

Por lo tanto deberá ser $|S| \neq 0$, o rango de S = n.-

La matriz S se denomina Matriz de la Controlabilidad.

Ejemplo 50:

Si planta tiene las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 2 \ 0] \quad y \quad D = [10]$$

- Hallar la F.C.C. 1 y la función de transferencia de la planta.

La ecuación característica será:

$$|sI - A| = \begin{bmatrix} s-1 & -2 & -1 \\ 0 & s-1 & -3 \\ -1 & -1 & s-1 \end{bmatrix} = s^3 - 3s^2 - s - 3 = 0$$

Por ende:

$$a_0 = -3; \quad a_1 = -1; \quad a_2 = -3 \quad y \quad a_3 = 1$$

En consecuencia: $a'_0 = -3; \quad a'_1 = -1 \quad y \quad a'_2 = -3 \quad pues \quad a_3 = 1$

Por lo tanto:

$$Gp(s) = \frac{10N(s)}{(s^3 - 3s^2 - s - 3)} \quad \text{ya que: } b_3 = 10 \equiv D \quad N(s) = ?$$

La matriz M será:

$$M = \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & 1 \\ a'_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |M| = -1$$

La matriz S será:

$$S = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |S| = -9 \Rightarrow \text{rango}(S) = n = 3$$

Por ende existirá S^{-1} y en consecuencia también P^{-1} .

El modelo se podrá llevar a la F.C.C. 1:

$$P = SM = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^* = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^* = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C^* = CP = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^* = D = \left[\frac{b_3}{a_3} \right] = [b_3] = [10]$$

Determinación de N(s).

$$10N(s) = 10(s^3 + \frac{b_2}{10}s^2 + \frac{b_1}{10}s + \frac{b_0}{10})$$

Como $a_3 = 1$, en este ejemplo, se tendrá que:

$$\begin{cases} b_0 - a_0b_3 = 3 \\ b_1 - a_1b_3 = 5 \\ b_2 - a_2b_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ pues } C^* = [3 \ 5 \ 1]$$

$$\begin{cases} b_0 = 3 + a_0b_3 = 3 + (-3 \times 10) = 3 - 30 = -27 \\ b_1 = 5 + a_1b_3 = 5 + (-1 \times 10) = 5 - 10 = -5 \\ b_2 = 1 + a_2b_3 = 1 + (-3 \times 10) = 1 - 30 = -29 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} b_0 = -27 & \\ b_1 = -5 & \\ b_2 = -29 & \end{array}$$

En consecuencia:

$$10N(s) = 10(s^3 - 2.9s^2 - 0.5s - 2.7)$$

$$N(s) = s^3 - 2.9s^2 - 0.5s - 2.7$$

La Función de transferencia de la planta será:

$$Gp(s) = \frac{10(s^3 - 2.9s^2 - 0.5s - 2.7)}{(s^3 - 3s^2 - s - 3)}$$

La Gp(s) también se puede obtener en base a las matrices de algún modelo de la planta, como ya se determinó, aplicando:

$$Gp(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Formas de Obtener la Matriz de Transformación P, usando la computadora:
En Matlab:

```

» A=[1 2 1;0 1 3;1 1 1];
» B=[1;0;1];
» S=[B A*B A^2*B]

```

S =

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \end{matrix}$$

o también:

```

» S=ctrb(A,B);
» EC=Poly(A)

```

EC =

$$1.0000 -3.0000 -1.0000 -3.0000$$

```

» M= [-1 -3 1;-3 1 0;1 0 0]

```

M =

$$\begin{matrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

```

» P=S*M

```

P =

$$\begin{matrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}$$

También se puede hacer lo siguiente:

```

» syms s
» EC=det(s*eye(size(A))-A)

```

EC =

$$s^3-3*s^2-3*s$$

```

» M=[-1 -3 1;-3 1 0;1 0 0]

```

M =

$$\begin{matrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

```

» S=[B A*B A^2*B];

```

```

» P=S*M

```

P =

$$\begin{matrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}$$

Con el Csad/Matlab:

```

» A=[1 2 1;0 1 3;1 1 1];
» B=[1;0;1];
» P=tr2ccf(A,B)

```

P =

3.0000	-1.0000	1.0000
0.0000	3.0000	0
0.0000	-1.0000	1.0000

Para encontrar S, se puede usar:

» S=cmatrix(A,B)

S =

1	2	10
0	3	9
1	2	7

También se puede emplear la función Svdesign del Csad/Matlab; con la opción Transformación para realizar todo esto.

Primero se ingresa el modelo de la planta y se siguen los pasos indicados:

» Svdesign

Enter TF or SV? [s] >

Enter number of state variables [2] > 3

Enter (3x3) A matrix one row at a time:

Row 1 > [1 2 1]

Enter (3x3) A matrix one row at a time:

Row 2 > [0 1 3]

Enter (3x3) A matrix one row at a time:

Row 3 > [1 1 1]

The B matrix is a column vector

but you can enter it as a row.

Enter B (3x1) > [1 0 1]

Enter C (1x3) > [1 2 0]

Enter D [0] > 10

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots Zeros and Poles

Controllability Display System

Observability New Original Sys

Transformations Back to Original

State Feedback Estimator Design

Integral&State Feedback&Estimate

View N(s)/D(s) Quit

SVDESIGN > T

Enter Transformation: CCF,OCF,DF,Reverse [r] > C

Transformation matrix T is:

3.0000	-1.0000	1.0000
0.0000	3.0000	0
0.0000	-1.0000	1.0000

$$\bar{A} = T^{-1} A T, \quad \bar{B} = T^{-1} B, \quad \bar{C} = C T, \quad \bar{D} = D$$

Abar matrix is:

$$\begin{matrix} 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 1.0000 \\ 3.0000 & 1.0000 & 3.0000 \end{matrix}$$

Bbar matrix is:

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Cbar matrix is:

$$3.0000 \quad 5.0000 \quad 1.0000$$

Dbar matrix is:

$$10$$

Update current state variable matrices? (y/n) [n] > y

----- SVDESIGN OPTIONS -----

- | | |
|-----------------|-------------------|
| Response Plots | Zeros and Poles |
| Controllability | Display System |
| Observability | New Original Sys |
| Transformations | Back to Original |
| State Feedback | Estimator Design |
| Integral&State | Feedback&Estimate |
| View N(s)/D(s) | Quit |

SVDESIGN > d

Display Current,Original,or Both Systems? [c] >

Current system is:

A matrix is:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

B matrix is:

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

C matrix is:

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \end{matrix}$$

D matrix is:

$$10$$

Tomando como base a la FCC1, se puede obtener la FCC2, de la forma siguiente:

SVDESIGN > T

Enter Transformation: CCF,OCF,DF,Reverse [r] >

Transformation matrix T is:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1}AT, \quad \bar{B} = T^{-1}B, \quad \bar{C} = CT, \quad \bar{D} = D$$

Abar matrix is:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Bbar matrix is:

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Cbar matrix is:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

Dbar matrix is:

$$\begin{matrix} 10 \end{matrix}$$

Update current state variable matrices? (y/n) [n] > y

Transformación a la Forma Canónica Observable:

Un modelo matemático de una planta a controlar cualquiera se puede llevar a la F.C.O.1 mediante la transformación lineal:

$$\bar{x}(t) = Q\bar{x}^*(t) \quad \Rightarrow \quad \bar{x}^*(t) = Q^{-1}\bar{x}(t)$$

Y resultan las matrices siguientes:

$$A^* = Q^{-1}AQ \quad ; \quad B^* = Q^{-1}B \quad ; \quad C^* = CQ \quad y \quad D^* = D$$

Donde:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & : & : & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & : & : & 0 & -a_1 \\ : & : & : & : & : & : \\ : & : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & : & : & 0 & 1 \\ 0 & 0 & : & : & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad y \quad C^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & : & : & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los elementos de las matrices B^* y C^* no están restringidos a ninguna forma. Observe que A^* y C^* son las transpuestas de la A y B de la F.C.O.1, (y $B^* = C^T$; $D^* = D^T$).

La matriz Q de transformación está dada por:

$$Q = (M V)^{-1} = V^{-1} M^{-1}$$

En donde M ya se definió para la F.C.C y la V es:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (n \times n); \text{ Esta matriz es la llamada } \underline{\text{Matriz de la Observabilidad}}.$$

Para que exista Q, V deberá tener inversa pues M^{-1} , siempre existe.

Ejemplo 51:

Si tenemos la planta ya vista en el ejemplo 49:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 2 \ 0] \quad y \quad D = [10]$$

Encontrar la forma canónica observable 1.

Ya se determinó la matriz M, la cual era:

$$M = \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & 1 \\ a'_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 8 & 13 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow |V| = 61 \neq 0, \text{ por ende existe } V^{-1}.$$

$$MV = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 8 & 13 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \text{ Por lo tanto la matriz de}$$

transformación será la siguiente:

$$Q = (MV)^{-1} = \frac{Adj(MV)}{|MV|} = \frac{1}{-61} \begin{bmatrix} -14 & -2 & -9 \\ 7 & 1 & -26 \\ -2 & -9 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 14/61 & 2/61 & 9/61 \\ -7/61 & -1/61 & 26/61 \\ 2/61 & 9/61 & 10/61 \end{bmatrix}$$

En consecuencia:

$$A^* = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad C^* = C Q = [0 \ 0 \ 1]; \text{ evidentes.}$$

$$B^* = Q^{-1} B = M V B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad D^* = D = [10]$$

Como se puede apreciar es la forma dual de la F.C.C.1

Soluciones por Computadora:

1º) Para obtener la matriz de la observabilidad V:

En Matlab, luego de entrar las matrices A y C de la planta:

>>V=obsv(A,C)

O también

>>V=[C; C*A; C*A^2]

En el Csad/Matlab:

V=omatrix(A,C)

2º) Para hallar la matriz Q:

En el Csad/Matlab

>>Q=tr2ocf(A,C)

En Matlab:

Luego de ingresar A y C y obtener M y V, se aplica:

>>Q=inv(M*V)

3º) Para encontrar el juego de las 4 matrices de la F.C.O.

En Csad/Matlab:

Luego de entrar las matrices A, B, C, D y obtener Q, se aplica:

>>[A₁,B₁,C₁,D₁]=sv2sv(A,B,C,D,Q)

En Matlab, luego de entrar las matrices A, B, C, D y obtener Q, se aplica:

>>[A₁,B₁,C₁,D₁]=ss2ss(A,B,C,D,Q)

Nos da la F.C.O.2 y

>>[A₁,B₁,C₁,D₁]=sv2sv(A,B,C,D,inv(Q))

Nos da la F.C.O.1.-

También se puede usar la función Svdesign del Csad, empleando la opción Transformations del menú y siguiendo las instrucciones.

Por ejemplo para obtener las F.C.O.1 y 2 se procede así:

(para la planta en estudio)

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots Zeros and Poles

Controllability Display System

Observability New Original Sys

Transformations Back to Original

State Feedback Estimator Design

Integral&State Feedback&Estimate

View N(s)/D(s) Quit

SVDESIGN > t

Enter Transformation: CCF,OCF,DF,Reverse [r] > O \Rightarrow F.C.O.1

Transformation matrix T is:

0.2295 0.0328 0.1475

-0.1148 -0.0164 0.4262

0.0328 0.1475 0.1639

$$\bar{A} = T^{-1}AT, \quad \bar{B} = T^{-1}BT, \quad \bar{C} = CT, \quad \bar{D} = D$$

Abar matrix is:

$$\begin{matrix} 0.0000 & 0.0000 & 3.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ -0.0000 & 1.0000 & 3.0000 \end{matrix}$$

Bbar matrix is:

$$\begin{matrix} 3.0000 \\ 5.0000 \\ 1.0000 \end{matrix}$$

Cbar matrix is:

$$0 \quad 0.0000 \quad 1.0000$$

Dbar matrix is:

$$10$$

Update current state variable matrices? (y/n) [n] > y

Teniendo como base la F.C.O.1, se vuelve a usar la opción Tranformations

SVDESIGN > t

Enter Transformation: CCF,OCF,DF,Reverse [r] > r

Transformation matrix T is:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1}AT, \quad \bar{B} = T^{-1}BT, \quad \bar{C} = CT, \quad \bar{D} = D$$

Abar matrix is:

$$\begin{matrix} 3.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 3.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{matrix}$$

Bbar matrix is:

$$\begin{matrix} 1.0000 \\ 5.0000 \\ 3.0000 \end{matrix}$$

Cbar matrix is:

$$1.0000 \quad 0.0000 \quad 0$$

Dbar matrix is:

$$10$$

Update current state variable matrices? (y/n) [n] > y

Como se ve resulta la F.C.O.2.-

Diagonalización de Matrices:

La condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable es:

a) que el polinomio característico se pueda factorizar.-
 b) que la multiplicidad de cada auto valor λ sea igual a la dimensión del sub espacio propio asociado A_λ , es decir, que las multiplicidades algebraica y geométrica coincidan $ma(\lambda) = mg(\lambda)$. Una matriz es matriz diagonalizable si y sólo si las multiplicidades geométrica y algebraica coinciden para todos sus valores propios. En particular una matriz $n \times n$ que tiene n valores propios diferentes es *siempre diagonalizable*, o sea se puede llevarlo a la forma canónica diagonal, no así si tiene valores propios repetidos. La multiplicidad geométrica es siempre menor o igual a la algebraica.-

Transformación a la Forma Canónica Diagonal

Una transformación lineal extremadamente interesante y útil se obtiene si para la matriz de transformación T , se elige la matriz de los vectores característicos:

$$\bar{x}(t) = T x^*(t).$$

Una de las motivaciones para usar esta transformación con:

$$T = [\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2 \quad \dots \quad \bar{p}_n]$$

es que si los valores característicos de A son distintos, la nueva matriz A^* del sistema resultará diagonal (las B^* , C^* y D^* no siguen ningún formato en particular) y en ella los λ_i están ubicados en la diagonal principal.

Como se verá más adelante en los estudios de la controlabilidad y la observabilidad de un sistema, esta forma será una alternativa para analizar y diseñar un control por realimentación del estado.

Si los autovalores o valores característicos no fueron distintos se llegará, como se verá luego, a la Forma Canónica de Jordan.

El problema puede ser planteado así, dado un sistema lineal:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t) + B \bar{u}(t) \quad (1)$$

Con los valores característicos de A distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; se desea encontrar una trasformación lineal de semejanza con la matriz de transformación T tal que la transformación:

$$\bar{x}(t) = T \bar{x}^*(t) \quad (2)$$

Transforme a la ecuación (1) en:

$$\dot{\bar{x}}^*(t) = A^* \bar{x}^*(t) + B^* \bar{u}(t) \quad (3)$$

Donde: $A^* = T^{-1}AT$ sea diagonal y $B^* = T^{-1}B$.

Como T está formada por vectores (columnas) linealmente independientes, la transformación realmente existe, pues $|T| \neq 0$.

Consideremos la expresión:

$$\lambda_j \bar{p}_j = A \bar{p}_j.$$

Escribiendo esta ecuación para $i = 1, \dots, n$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \bar{p}_1 &= A \bar{p}_1 \\ \lambda_2 \bar{p}_2 &= A \bar{p}_2 \\ &\dots \\ \lambda_n \bar{p}_n &= A \bar{p}_n\end{aligned}\tag{4}$$

Definiendo la matriz diagonal $A_{d(n \times n)}$, como:

$$A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{5} \quad y \quad T = [\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2 \quad \dots \quad \bar{p}_n] \text{ con } \lambda_j \neq 0$$

Notamos que:

$$T A_d = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \dots & \dots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \dots & \dots & \lambda_n p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 p_{n1} & \dots & \dots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Usando las relaciones (4), formamos ahora la siguiente matriz:

$$\begin{aligned}T A_d &= [\lambda_1 \bar{p}_1 \quad \lambda_2 \bar{p}_2 \quad \dots \quad \lambda_n \bar{p}_n] = [A \bar{p}_1 \quad A \bar{p}_2 \quad \dots \quad A \bar{p}_n] = A [\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2 \quad \dots \quad \bar{p}_n] = A T \\ T A_d &= A T\end{aligned}\tag{7}$$

Por lo tanto $\boxed{A_d = T^{-1} A T \equiv A^*} \tag{8}$

La ecuación (3) puede por lo tanto ser escrita:

$$\dot{\bar{x}}^*(t) = A_d \bar{x}^*(t) + B_d u(t) \Rightarrow \boxed{B_d = T^{-1} B} \tag{9}$$

Si escribimos esta ecuación vectorial en la forma de componentes, se tendrá:

$$\boxed{C_d = CT}$$

$$\boxed{D_d = D}$$

$$(10) \quad \dot{x}_i^* = \lambda_i x_i + \text{componente } i - \text{enesima de } [B_d u(t)] \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

La utilidad de este asunto es que en el sistema diagonalizado, las variables de estado están completamente desacopladas unas de otras. Las nuevas variables de estado $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, obtenidas a través de esta transformación, son llamadas coordenadas canónicas.

Ejemplo 52:

Realizar la transformación Canónica Diagonal del siguiente sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1] \quad y \quad D = 0$$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s-2 & 0 \\ 1 & s-1 \end{vmatrix} = (s-2)(s-1) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Los λ_j son distintos, por ende la F.C.D se puede obtener:

$$T = [\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2] \rightarrow \bar{p}_1 = ? \rightarrow \lambda_1 ; (\lambda_1 I - A) \bar{p}_1 = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -p_{12} + 0p_{22} = 0 \\ p_{22} \rightarrow \text{cualquier valor} \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = [\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; |T| = 1 \rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifiquemos:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_d = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_d = CT = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; D_d = 0$$

Por ende el modelo en la F.C.D será:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + 0 u(t) \end{cases}$$

Ejemplo 53:

Dadas las matrices de un sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 2 \quad 0] \quad y \quad D = [0]$$

Se podría demostrar que la $G_p(s)$ del mismo es:

$$G_p(s) = \frac{2(s^2 + s + 0.5)}{(s+1)(s+2)(s+3)} ; \text{ Se desea encontrar, si es posible, una matriz de transformación } T \text{ no singular que lleve el modelo a la forma canónica diagonal, tal que: } A_d = T^{-1}AT.$$

Como A no está en la F.C.C. no se puede usar la matriz de Vandermonde, como se vera mas adelante, por ende se aplicara el método general.

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 1 \\ 5 & (s+11) & -6 \\ 6 & 11 & (s-5) \end{vmatrix} = s(s+11)(s-5) + 36 + 66 - 6(s+11) + 66s + 6(s-5) = 0$$

$$|sI - A| = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 ; \lambda_2 = -2 \quad y \quad \lambda_3 = -3$$

Como los valores propios son distintos la T, existirá.

$$\bar{p}_1 = ? \Rightarrow \lambda_1 \Rightarrow (\lambda_1 I - A) \bar{p}_1 = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 6 & 10 & -6 \\ 6 & 11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -p_{11} - p_{21} + p_{31} = 0 \\ 6p_{11} + 10p_{21} - 6p_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{si se elige } p_{11} = 1$$

quedará:

$$\begin{cases} -p_{21} + p_{31} = 1 \\ 10p_{21} - 6p_{31} = -6 \end{cases} \Rightarrow p_{12} = 0 \quad y \quad p_{31} = 1$$

En consecuencia el vector propio asociado con λ_1 será:

$$\bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para los otros dos valores propios, procediendo igual y eligiendo:

$$p_{12} = 1 \quad y \quad p_{13} = 1, \text{ se llega a:}$$

$$\bar{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix};$$

la matriz de los vectores propios resultará:

$$T = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}};$$

es la matriz de transformación buscada.

Las matrices del nuevo modelo se obtienen de la manera siguiente:

$$T^{-1} = \frac{T^+}{|T|} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -6 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & -6 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & 1.5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_d = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B_d = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$C_d = CT = [1 \ 5 \ 13] \quad y \quad D_d = D = [0]$$

Ejemplo 54:

Ídem al anterior pero con las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 1 \ 1] \quad y \quad D = [0]$$

La función de transferencia, Gp(s), será::

$$Gp(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Encontrar T, y las matrices del modelo diagonal.

$$|(sI - A)| = \begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2)(s+3) \rightarrow \neq \lambda_j$$

$$T = [\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2 \quad \bar{p}_3]$$

$$\bar{p}_1 = ?$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 0p_{11} + p_{21} + 0p_{31} = 0 \\ 0p_{11} - p_{21} + 0p_{31} = 0 \end{array}$$

p_{11} y p_{31} pueden tomar cualquier valor, pero $p_{21} = 0$. Si $p_{11} = 1$ y $p_{31} = 0$.

$$\bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_2 = ?$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -p_{12} - p_{22} + 0p_{32} = 0 \rightarrow p_{12} = -p_{22} \\ 0p_{12} + 0p_{22} + p_{32} = 0 \rightarrow p_{32} = 0 \end{array}$$

$$\text{Si } p_{12} = -1, p_{22} = 1 \text{ y } p_{32} = 0 \rightarrow \bar{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_3 = ?$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -2p_{13} - p_{23} + 0p_{33} = 0 \rightarrow p_{23} = -2p_{13} \\ 0p_{13} - p_{23} + 0p_{33} = 0 \rightarrow p_{23} = 0 \end{array}$$

$$\text{Si } p_{13} = 0 \rightarrow p_{23} = 0 \text{ y } p_{33} = \text{cualquiera} = 1 \rightarrow \bar{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = [\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2 \quad \bar{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; |T| = 1 \rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_d = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; B_d = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_d = CT = [1 \quad 0 \quad 1] \quad y \quad D_d = D = 0$$

Soluciones por computadora para hallar T y A_d.

En Matlab:

```
>> A = [-----];
>> [T, Ad] = eig(A) → para los  $\lambda_j \neq$ 
T =
 $\hat{p}_1 \quad \hat{p}_2 \quad \dots \quad \hat{p}_n$ 
```

$Ad =$

$$\begin{matrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{matrix}$$

En el Csad

```
>> T = tr2df(A)
T =
 $\hat{p}_1 \quad \hat{p}_2 \quad \dots \quad \hat{p}_n$ 
>> [Ad, Bd, Cd, Dd] = sv2sv(A, B, C, D, T)
o en Matlab:
>> [Ad, Bd, Cd, Dd] = sv2sv(A, B, C, inv(T))
```

Ejemplo:

```
» A=[0 1 -1;-6 -11 6;-6 -11 5];
» B=[0;1;1];
» C=[1 0 1];
» D=0;
» eig(A)
ans =
-1.0000
-2.0000
-3.0000
```

también puede ser:

```
» roots(poly(A))
ans =
-3.0000
-2.0000
-1.0000
» T=tr2df(A)
T =
0.7071 -0.2182 -0.0921
0.0000 -0.4364 -0.5523
0.7071 -0.8729 -0.8285
» [Ad,Bd,Cd,Dd]=sv2sv(A,B,C,D,T)
```

Ad =
-1.0000 -0.0000 -0.0000
0.0000 -2.0000 -0.0000
-0.0000 0.0000 -3.0000

Bd =
0.7071
4.5826
-5.4314

Cd =
1.4142 -1.0911 -0.9206

Dd =
0

Usando Svdesign se procede como se indica a continuación.

----- SVDESIGN OPTIONS -----
Response Plots Zeros and Poles
Controllability Display System
Observability New Original Sys
Transformations Back to Original
State Feedback Estimator Design
Integral&State Feedback&Estimate
View N(s)/D(s) Quit
SVDESIGN >! a,b,c,d

a =
0 1 -1
-6 -11 6
-6 -11 5

b =
0
1
1

c =
1 0 1

d =
0

Press any key to continue...

SVDESIGN > t

Enter Transformation: CCF, OCF, DF, Reverse [r] > d

Transformation matrix T is: (Es la que tiene los vectores característicos normalizados)

0.7071 -0.2182 -0.0921
0.0000 -0.4364 -0.5523
0.7071 -0.8729 -0.8285

$$\bar{A} = T^{-1} A T, \quad \bar{B} = T^{-1} B, \quad \bar{C} = C T, \quad \bar{D} = D$$

Abar matrix is:

$$\begin{matrix} -1.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -2.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -3.0000 \end{matrix}$$

Bbar matrix is:

$$\begin{matrix} 0.7071 \\ 4.5826 \\ -5.4314 \end{matrix}$$

Cbar matrix is:

$$1.4142 \quad -1.0911 \quad -0.9206$$

Como se aprecia el modelo está en la F.C.D.

Si los valores característicos son algunos complejos conjugados:

----- SVDESIGN OPTIONS -----
 Response Plots Zeros and Poles
 Controllability Display System
 Observability New Original Sys
 Transformations Back to Original
 State Feedback Estimator Design
 Integral&State Feedback&Estimate
 View N(s)/D(s) Quit
 SVDESIGN > d

Display Current,Original,or Both Systems? [c] >

Current system is:

A matrix is:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -9 & -4 \end{matrix} \rightarrow \lambda_1 = -2; \quad \lambda_{3-4} = -1 \pm j2$$

B matrix is:

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

C matrix is:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

SVDESIGN > t

Enter Transformation: CCF,OCF,DF,Reverse [r] > d

Transformation matrix T is:

$$\begin{matrix} 0.2182 & 0.0001 + 0.1796i & 0.0001 - 0.1796i \\ -0.4364 & -0.3593 - 0.1794i & -0.3593 + 0.1794i \\ 0.8729 & 0.7180 - 0.5393i & 0.7180 + 0.5393i \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} T = [\hat{p}_1 \quad \hat{p}_2 \quad \hat{p}_3] \\ |\hat{p}_i| = 1 \end{cases}$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T, \quad \bar{B} = T^{-1} B, \quad \bar{C} = C T, \quad \bar{D} = D$$

Abar matrix is:

$$\begin{array}{ccc} -2.0000 - 0.0000i & 0.0000 - 0.0000i & 0.0000 + 0.0000i \\ -0.0000 - 0.0000i & -1.0000 + 2.0000i & -0.0000 - 0.0000i \\ -0.0000 + 0.0000i & -0.0000 + 0.0000i & -1.0000 - 2.0000i \end{array}$$

Bbar matrix is:

$$\begin{array}{c} 0.9165 \\ -0.2788 + 0.5566i \\ -0.2788 - 0.5566i \end{array}$$

Cbar matrix is:

$$\begin{array}{ccc} -0.2182 & -0.3592 + 0.0003i & -0.3592 - 0.0003i \end{array}$$

Update current state variable matrices? (y/n) [n] > y

Matriz de Vandermonde

Si la matriz A de un modelo cualquiera está en la forma canónica controlable y los valores propios son distintos, se puede demostrar que la matriz de transformación de los vectores propios que diagonaliza a la matriz A es la llamada Matriz de Vandermonde, donde cada columna es una progresión geométrica de razón igual al valor propio correspondiente.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & : & 1 & : & : & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & : & : & \lambda_i & : & : & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & : & : & \lambda_i^2 & : & : & \lambda_n^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & : & : & \lambda_i^3 & : & : & \lambda_n^3 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & : & : & \lambda_i^{n-1} & : & : & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, son los autovalores simples de la matriz A.

Como ha sido probado que La matriz T tiene como columnas los autovectores de A, se mostrara ahora que la columna i-enésima de la matriz (11) es un autovector de A que está asociado con el autovalor λ_i , para $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$. Se sabe que el i-enésimo autovector de A es:

$$\bar{p}_i = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{Luego: } (\lambda_i I - A) \bar{p}_i = \bar{0} \quad (13)$$

Expresión que se puede colocar así:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & -1 & 0 & 0 & : & : & : & : & : & 0 \\ 0 & \lambda_i & -1 & 0 & : & : & : & : & : & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & -1 & 0 & : & : & : & : & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & : & 0 & \lambda_i & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_i + a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \\ \vdots \\ p_{(n-1)i} \\ p_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Esta ecuación implica que:

$$\begin{cases} \lambda_i p_{1i} - p_{2i} = 0 \\ \lambda_i p_{2i} - p_{3i} = 0 \\ \dots \\ \lambda_i p_{(n-1)i} - p_{ni} = 0 \\ a_1 p_{1i} + a_2 p_{2i} + \dots + (\lambda_i + a_n) p_{ni} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Si se elige arbitrariamente $p_{1i} = 1$, la ecuación (15) quedara:

$$\begin{cases} p_{2i} = \lambda_i \\ p_{3i} = \lambda_i p_{2i} = \lambda_i^2 \\ \dots \\ p_{(n-1)i} = \lambda_i^{(n-2)} \\ p_{ni} = \lambda_i^{(n-1)} \end{cases} \quad (16)$$

que son los otros elementos de la i -enésima columna, \bar{p}_i , de la matriz T.

La sustitución de estos elementos de \bar{p}_i en la última ecuación de (15), simplemente prueba que la ecuación característica se satisface:

$$a_1 1 + a_2 \lambda_i + \dots + (\lambda_i + a_n) \lambda_i^{(n-1)} = 0$$

Operando queda:

$$\lambda_i^n + a_n \lambda_i^{(n-1)} + \dots + a_2 \lambda_i + a_1 = 0 \Rightarrow \text{Ecuación característica}$$

Ejemplo 55:

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

La cual tiene la forma del modelo en la F.C.C., por ende se puede emplear la matriz de transformación de Vandermonde para diagonalizar.

Los autovalores serán:

$$|(sI - A)| = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{bmatrix} = s^2(s+6) + 6 + 11s = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s+1)(s+2)(s+3)$$

Por lo tanto los autovalores son distintos y valen:

$$\lambda_1 = -1 ; \quad \lambda_2 = -2 \quad y \quad \lambda_3 = -3$$

La matriz de transformación será:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Como se puede apreciar se verifica que el modelo es la F.C.D.

Matrices con valores propios repetidos

Al intentar efectuar la diagonalización de una matriz A que tenga valores propios repetidos puede encontrarse un tropiezo debido a que los vectores propios no necesariamente son linealmente independientes; de hecho, lo usual es que no lo sean aunque existen casos en que lo son.

Al no contar con un número suficiente de vectores propios linealmente independientes no es posible construir una base que diagonalice la matriz. No será posible obtener T^{-1} y no se podrá calcular $\Delta = T^{-1}AT$. Pese a ello, siempre se podrá obtener una diagonalización por bloques.

Dada una transformación lineal A de orden nxn, de valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, se define la degeneracidad del valor propio λ_i , denotada por d_i , como el número de vectores propios de linealmente independientes asociados a un valor propio λ_i , y se calcula así:

$$d_i = n - \rho(\lambda_i I - A);$$

donde $\rho(\lambda_i I - A)$ es el rango ($\lambda_i I - A$) y equivale al número de columnas (o filas) linealmente independientes de la matriz ($\lambda_i I - A$), también es el número de bloques de Jordan asociados al valor característico λ_i .

Ejemplo 55a:

Obtener los valores y vectores propios de la matriz A y diagonalizarla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Construimos la matriz ($\lambda I - A$) y hallamos su determinante:

$$\begin{aligned} (\lambda I - A) &= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda - 1) & -2 \\ 2 & (\lambda - 5) \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 5) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 \end{aligned}$$

Los valores propios de A serán las raíces del polinomio característico:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$$

La degeneracidad de $\lambda = 3$ se obtiene así:

$$d_1 = 2 - \rho(3\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

$$d_1 = 2 - \rho \begin{pmatrix} 3-1 & -2 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} = 2 - \rho \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Lo anterior significa que aunque λ tiene multiplicidad 2, solo es posible encontrar un vector linealmente independiente, (con un solo bloque de Jordan de 2x2). Este se obtiene como ya sabemos y resulta ser:

$$\bar{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} \quad \text{con } p_{11} = p_{21} \quad \text{Por ejemplo} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

No es posible construir una base para el espacio de dimensión 2 con un solo vector, por lo tanto no es posible diagonalizar A.

Transformación a la Forma Canónica de Jordán

Hasta ahora hemos visto cuando una matriz es diagonalizable. Hemos dado condiciones en las cuales una matriz cuadrada A era semejante a una matriz diagonal. Ahora bien, ese resultado no es siempre posible (basta encontrar autovalores múltiples cuya multiplicidad algebraica no coincide con su multiplicidad geométrica).

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sólo tiene un valor propio $\lambda = 1$. El polinomio característico es $(\lambda - 1)^2$, así que este valor propio tiene *multiplicidad algebraica 2*. Sin embargo, el espacio propio asociado es el eje, que normalmente recibe el nombre de eje x , generado por el vector unitario $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, así que la multiplicidad

geométrica es 1. El único bloque de Jordán que existe pues:

$d_i = n - \rho(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2 - 1 = 1$, tiene solo un vector propio asociado con él, por ende el bloque de Jordán es de dimensión 2x2.-

Ejemplo 55b:

Dada la matriz A de un modelo matemático en el espacio de estado de un sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a & -a \end{bmatrix}$$

Calcular, según los valores de a , las diferentes formas de Jordán semejantes a la matriz A.

Primero calculamos el polinomio característico:

$$|A - sI| = (s-1)^2(s+1)(s+a)$$

Sus raíces son los valores característicos de A. Vemos que la multiplicidad algebraica de los autovalores 1 y -1 depende del valor de a .

Por lo tanto se distinguen tres casos, a saber:

- $a = 1$. Entonces el polinomio característico queda:

$$|A - sI| = (s-1)^2(s+1)^2$$

Los autovalores son:

$\lambda_1 = 1$ Con multiplicidad algebraica 2

$\lambda_2 = -1$ Con multiplicidad algebraica 2

Calculamos las multiplicidades geométricas de cada auto valor:

$$m.g.(1) = 4 - \text{rango}(A - I) = 4 - \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Por lo tanto habrá 2 bloques de Jordán asociados al auto valor 1, evidentemente de dimensión (1x1).

$$m.g.(-1) = 4 - \text{rango}(A + I) = 4 - \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4 - 3 = 1$$

Por lo tanto hay una solo bloque de Jordán, de dimensión (2x2) asociado al auto valor -1.

La forma de Jordán queda:

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- $a = -1$. Entonces el polinomio característico queda:

$$|A - sI| = (s-1)^3(s+1)$$

Los autovalores son:

$\lambda_1 = 1$ Con multiplicidad algebraica 3

$\lambda_2 = -1$ Con multiplicidad algebraica 1

Calculamos las multiplicidades geométricas del auto valor 1:

$$m.g.(1) = 4 - \text{rango}(A - I) = 4 - \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 = m.a.(1). -$$

Por lo tanto habrá 3 bloques de Jordán asociados al auto valor 1, evidentemente de dimensión (1x1).

Por otra parte como $m.a.(-1) = 1$, su multiplicidad geométrica necesariamente es también 1:

Vemos que las multiplicidades geométricas coinciden con las algebraicas y así la matriz A es diagonalizable por semejanza. La forma de Jordán es:

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- $a \neq -1, 1$. Entonces el polinomio característico queda:

$$|A - sI| = (s-1)^2(s+1)(s+a)$$

Los autovalores son:

$$\lambda_1 = 1 \text{ Con multiplicidad algebraica 2}$$

$$\lambda_2 = -1 \text{ Con multiplicidad algebraica 1}$$

$$\lambda_3 = -a \text{ Con multiplicidad algebraica 1}$$

Calculamos la multiplicidad geométrica del auto valor $\lambda_1 = 1$:

$$m.g.(1) = 4 - \text{rango}(A - I) = 4 - \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a-1 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2 = m.a.(1).$$

Por lo tanto habrá 2 bloques de Jordán asociados al auto valor 1, evidentemente de dimensión (1x1).

Por otra parte, como los otros dos autovalores tienen multiplicidad algebraica 1, sus multiplicidades geométricas necesariamente son también iguales a 1.

Vemos que las multiplicidades geométricas coinciden con las algebraicas y así la matriz A es diagonalizable por semejanza.

La forma de Jordán es:

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 55c:

Obtener *los valores y vectores propios de la matriz A* de una planta cuyo modelo tiene las matrices siguientes y *diagonalizarla* si se puede:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Construimos $(\lambda I - A)$:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} (\lambda - 3) & 0 & 1 \\ -1 & (\lambda - 2) & 1 \\ 1 & 0 & (\lambda - 3) \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico resulta ser

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16$$

Las raíces del polinomio son: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$.

Para determinar la mg (λ_1), también llamada degeneración de λ_1 , o número de bloques de Jordán asociados con λ_1 calculamos:

$$d_1 = \text{mg}(\lambda_1) = n - \text{rango}(\lambda I - A) \Rightarrow d_1 = \text{mg}(\lambda_1) = 3 - 1 = 2$$

Lo anterior significa que existen dos vectores propios linealmente independientes asociados a λ_1 , también 2 bloques de Jordán, uno de 1×1 y otro de 2×2 . Estos dos vectores junto con el vector propio asociado a $\lambda_3 = 4$ pueden formar una base y por tanto es posible diagonalizar a la matriz A . Para obtener los tres vectores propios empleamos:

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$$

$$\text{Para } \lambda_1: \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} \quad \text{y para } \lambda_3: \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix}$$

Se originan los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 3p_{11} - p_{31} = 2p_{11} \\ p_{11} + 2p_{21} - p_{31} = 2p_{21} \\ -p_{11} + 3p_{31} = 2p_{31} \end{cases}; \quad \begin{cases} 3p_{12} - p_{32} = 2p_{12} \\ p_{12} + 2p_{22} - p_{32} = 2p_{22} \\ -p_{12} + 3p_{32} = 2p_{32} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 3p_{13} - p_{33} = 4p_{13} \\ p_{13} + 2p_{23} - p_{33} = 4p_{23} \\ -p_{13} + 3p_{33} = 4p_{33} \end{cases}$$

Que se convierten en:

Para $\lambda_1 \Rightarrow p_{11} = p_{31}$ y p_{21} cualquiera y $p_{12} = p_{32}$ y p_{22} cualquiera

Para $\lambda_3 \Rightarrow p_{13} = p_{23} = -p_{33}$

Podemos construir dos vectores linealmente independientes \bar{p}_1 y \bar{p}_2 que satisfacen lo indicado, y un tercero \bar{p}_3 que también satisface lo indicado,

por ejemplo: Si $p_{11} = p_{31} = 0$ y $p_{21} = 1$; $p_{12} = p_{32} = 1$ y $p_{22} = 0$ $p_{13} = p_{23} = 1$ y $p_{33} = -1$

$$\bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{La matriz de transformación será: } P = [\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2 \quad \bar{p}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

En la base $\{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3\}$ la transformación de A se representa por A_J :

$$A_J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_J = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Las matrices B_J y C_J en el nuevo modelo serán:

$$B_J = P^{-1} B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad C_J = C P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia de la planta será:

$$Gp(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{C(sI - A)^+ B}{|sI - A|} = \frac{2(s-2)}{(s-2)^2(s-4)}$$

Como se aprecia hay una cancelación polo-cero y además las matrices B_J y C_J no tiene elementos nulos, pero como se verá luego la planta no es controlable ni observable, (esto se debe a que hay más de un bloque de Jordán, dos en este caso, asociados con el valor repetido $\lambda = 2$).-

$$S = [B \ AB \ A^2 B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}; |S| = 0 \Rightarrow \text{rango}(S) = 2: \text{Planta no controlable}$$

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ -16 & -4 & 12 \end{bmatrix}; |V| = 0 \Rightarrow \text{rango}(V) = 2: \text{Planta no Observable}$$

En general la matriz A_J de la F.C.J tiene las propiedades siguientes:

1. Los elementos de la diagonal principal son los valores característicos.
2. Todos los elementos debajo de la diagonal principal son ceros.
3. Algunos de los elementos inmediatamente arriba de los valores característicos de orden múltiple sobre la diagonal principal son números uno como se puede ver.
4. Los número uno, junto con los valores característicos forman bloques típicos llamados *bloques de Jordan*.
5. Cuando la matriz A tiene valores característicos de orden múltiple todos sus vectores característicos no son linealmente independientes. Para una A de (nxn) existen solamente r ($r < n$) vectores característicos linealmente independientes.
6. El número de bloques de Jordán es igual al número r de vectores característicos linealmente independientes. Como ya se mencionó existe un solo vector característico linealmente independiente asociado con cada bloque de Jordán.

Cuando no se puede encontrar un conjunto de vectores propios linealmente independiente lo suficientemente grande para diagonalizar la matriz, debe acudirse al concepto de *vectores propios generalizados* para lograr una diagonalización por bloques.

El concepto de vector propio generalizado, y la forma de calcularlos se sale del ámbito de este texto. No obstante, es posible determinar en forma sencilla cual es la forma de la matriz diagonalizada por bloques, o forma canónica de Jordán de una matriz, según se explica a continuación.

En general, se representa la forma canónica de Jordán de la matriz A por J, y es de la forma:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & J_2 & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - & - & J_r \end{bmatrix}$$

en donde cada término J_i , ($i=1,2,\dots,r$), es una submatriz cuadrada (un *bloque de Jordán*) de la forma:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{bmatrix}$$

Cada bloque de Jordán está asociado a un valor propio de la matriz A. Para conocer la forma exacta de la matriz J es necesario responder estas preguntas:

- Cuántos bloques tiene asociados cada valor propio no repetido de la matriz A?
- Cuántos bloques tiene asociados cada valor propio repetido de la matriz A?
- De qué tamaño es cada uno de los bloques de Jordán asociados a cada valor propio no repetido de la matriz A?
- De qué tamaño es cada uno de los bloques de Jordán asociados a cada valor propio repetido de la matriz A?

La respuesta a la primera y la tercera es: 1 y (1x1).-

Para la segunda y la tercera el siguiente algoritmo permite obtener las respuestas.

Resumen del Procedimiento para Encontrar la Matriz T de Transformación Cuando hay valores Característicos Múltiples. Método de Caros

Se verá el método de Caros para determinar la forma de la matriz de Jordán, A_J , por ende obtener cuantos bloques de Jordán están asociados con cada valor propio repetido, (hay varios métodos de obtener lo mismo), se supondrá que los valores propios de la matriz del sistema son reales.

Los pasos son los siguientes: $A_J = T^{-1}AT \Rightarrow T = ?$

- El dato es la matriz A del modelo original.
- Encontrar los valores característicos de A, los λ_j con sus multiplicidades algebraicas correspondientes $ma(\lambda_1), ma(\lambda_2), \dots, ma(\lambda_n)$.
- Para cada auto valor λ de multiplicidad algebraica $ma(\lambda)$ se calculan los rangos de las matrices $(\lambda I - A)^P$, (a lo sumo habría que calcular hasta la potencia $P = ma(\lambda_j)$).

$$\begin{aligned} rango(\lambda I - A) = r_1 &\Rightarrow x_1 = n - r_1 & \rightarrow && \text{si } x_1 < ma(\lambda) \text{ seguimos} \\ rango(\lambda I - A)^2 = r_2 &\Rightarrow x_2 = r_1 - r_2 & \rightarrow && \text{si } x_1 + x_2 < ma(\lambda) \text{ seguimos} \end{aligned}$$

.....

.....

$$rango(\lambda I - A)^P = r_p \Rightarrow x_p = r_{p-1} - r_p \rightarrow \text{si } x_1 + x_2 + \dots + x_p = ma(\lambda) \text{ FIN : } _-$$

Al valor propio repetido λ le corresponden:

$x_1 - x_2$: Bloques de Jordán de orden 1x1

$x_2 - x_3$: Bloques de Jordán de orden 2x2

$x_3 - x_4$: Bloques de Jordán de orden 3x3

.....

.....

$x_{p-1} - x_p$: Bloques de Jordán de orden $(p-1) \times (p-1)$

x_p : Bloques de Jordán de orden $p \times p$

Con lo cual queda determinada la forma de la matriz de Jordán A_J .

Aplicaremos este método al ejemplo siguiente, aunque para el mismo, se ve que hay un solo bloque de Jordán asociado con el valor propio repetido:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -16 & -7 \end{bmatrix}; \text{ los valores característicos son: } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -2 \text{ y } \lambda_3 = -3$$

El método de Caros para determinar los bloques de Jordán asociados con λ_2 , sería el siguiente, (aunque en este caso no habría ninguna duda pues como hay un bloque de Jordán asociado con λ , seria uno de (2×2)):

$$rango(-2I - A) = r_1 = 2 \Rightarrow x_1 = n - r_1 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \text{como } x_1 < ma(-2); 1 < 2, \text{ se sigue:}$$

$$rango(-2I - A)^2 = r_2 = 1 \Rightarrow x_2 = r_1 - r_2 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \text{como } x_1 + x_2 = ma(-2) = 2 \text{ FIN. -}$$

Al valor propio $\lambda = -2$, le corresponden:

$x_1 - x_2 = 1 - 1 = 0$; No hay bloques de Jordán de 1x1.-

$x_p = x_2 = 1$; Hay un bloque de Jordán de 2x2.-

Como para el valor propio λ_3 , (simple), hay siempre un bloque de 1x1, las formas posibles de A_j serán:

$$A_j = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad o \quad A_j = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

En general para el cálculo de la matriz de transformación T:

- Se determinan los q vectores característicos correspondientes a la expresión:
 $(\lambda_j I - A) \bar{p}_j = \bar{0}$ o $(A - \lambda_j I) \bar{p}_j = \bar{0} \Rightarrow \bar{p}_j \Rightarrow$ Vectores característicos.-
- Se calculan los vectores característicos generalizados, con las expresiones siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda_{q+1} I - A) \bar{p}_{q+1} = \bar{0} \\ (\lambda_{q+2} I - A) \bar{p}_{q+2} = -\bar{p}_{q+1} \\ (\lambda_{q+3} I - A) \bar{p}_{q+3} = -\bar{p}_{q+2} \\ \dots \\ (\lambda_{q+m} I - A) \bar{p}_{q+m=n} = -\bar{p}_{q+m-1=n-1} \end{array} \right. \quad \text{o también:} \quad \left\{ \begin{array}{l} (A - \lambda_{q+1} I) \bar{p}_{q+1} = \bar{0} \\ (A - \lambda_{q+2} I) \bar{p}_{q+2} = \bar{p}_{q+1} \\ (A - \lambda_{q+3} I) \bar{p}_{q+3} = \bar{p}_{q+2} \\ \dots \\ (A - \lambda_{q+m} I) \bar{p}_{q+m=n} = \bar{p}_{q+m-1=n-1} \end{array} \right.$$

- Se forma la matriz de transformación T.

$$T = \boxed{\begin{bmatrix} \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & : & : & \bar{p}_n \end{bmatrix}}$$

Ejemplo 56:

Dado el modelo matemático de una planta, con autovalores repetidos, llevarlo a la F.C.J., por medio de la matriz T de transformación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1º) se tiene la matriz A.-

2º) $\lambda_j = ?$

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -6 & 5 \\ -1 & s & -2 \\ -3 & -2 & (s-4) \end{bmatrix} = s^3 - 4s^2 + 5s - 2 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 2 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 1 \end{aligned}$$

3º) Para el valor propio $\lambda_1 = 2$, habrá un bloque de Jordán de 1x1.-

Para el valor propio $\lambda_{2-3} = 1$, se tendrá, aplicando el método de Caros:

$$\text{rango}(\lambda I - A) = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} = r_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 3 - 2 = 1 < 2; \text{ se sigue}$$

$$\text{rango}(\lambda I - A)^2 = \text{rango} \begin{bmatrix} -8 & -22 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 8 & 22 & -2 \end{bmatrix} = r_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 2 - 1 = 1$$

Como $x_1 + x_2 = 2 \equiv \text{ma}(\lambda_{2-3}) \Rightarrow \text{fin.}$

$x_1 - x_2 = 1 - 1 = 0$. Por lo tanto no habrá un bloque de Jordán de orden 1x1.-

Como $p=2$, $x_p \equiv x_2 = 1 \Rightarrow$ En consecuencia de acuerdo al algoritmo de Caros habrá un solo bloque de Jordán de orden 2x2, asociado con $\lambda_{2-3} = 1$ por lo tanto la matriz de Jordán será por ejemplo:

$$A_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4º) El vector característico asociado con $\lambda_1 = 2$ será:

$$(2I - A)\bar{p}_1 = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2p_{11} - 6p_{21} + 5p_{31} = 0 \\ -p_{11} + 2p_{21} - 2p_{31} = 0 \end{cases}$$

Si se fija en forma arbitraria $p_{11} = -8$ se tendrá dos ecuaciones con dos incógnitas con una única solución.

$$\begin{cases} -6p_{21} + 5p_{31} = 16 \\ 2p_{21} - 2p_{31} = -8 \end{cases} \rightarrow p_{21} = 4 \quad y \quad p_{31} = 8$$

$$\therefore \bar{p}_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

5º) se determinan los valores característicos generalizados asociados al valor característico $\lambda = 1$

$$(I - A)\bar{p}_2 = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} p_{12} - 6p_{22} + 5p_{32} = 0 \\ -p_{12} + p_{22} - 2p_{32} = 0 \end{cases}$$

Si se elige $p_{12} = 7$ nos queda:

$$\begin{cases} -6p_{22} + 5p_{32} = -7 \\ p_{22} - 2p_{32} = 7 \end{cases} \rightarrow p_{22} = -3 \quad y \quad p_{32} = -5$$

$$\therefore \bar{p}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}; \text{ y para } \bar{p}_3 = ?$$

$(I - A)\bar{p}_3 = -\bar{p}_2$, tambien puede ser: $(I - A)\bar{p}_3 = \bar{p}_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} p_{13} - 6p_{23} + 5p_{33} = -7 \\ -p_{13} + p_{23} - 2p_{33} = 3 \end{cases}$$

Si se elige $p_{13} = 9$ nos queda:

$$\begin{cases} -6p_{23} + 5p_{33} = -16 \\ p_{23} - 2p_{33} = 12 \end{cases} \rightarrow p_{23} = -4 \quad y \quad p_{33} = -8 \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones se puede resolver por MatLab:

```
>>syms p23 p33
>>[p23,p33]=solve('-6*p23+5*p33=-16','p23-2*p33=12')
p23= - 4
p33= - 8
```

6º) por ende la matriz de transformación a la Forma de Jordán será:

$$T = [\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2 \quad \bar{p}_3] = \begin{bmatrix} -8 & 7 & 9 \\ 4 & -3 & -4 \\ 8 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

Si, además: $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $C = [1 \ 0 \ 1]$ como se dijo.

Encontramos las matrices del modelo en la F.C.J.:

$$B_J = T^{-1}B; \quad C_J = CT \quad y \quad D_J = D$$

$$B_J = \frac{T^+}{|T|} B = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 11 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 4 & 16 & -4 \end{bmatrix}}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B_J = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \neq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Controlable como se verá} \\ \text{como se verá} \end{array} \right\}$$

$$C_J = [1 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} -8 & 7 & 9 \\ 4 & -3 & -4 \\ 8 & -5 & -8 \end{bmatrix} = [0 \ 2 \ 1]$$

$$\Rightarrow C_J = [0 \ 2 \ 1]$$

La primera columna = 0 → No Observable como se estudiará más adelante.

$$D_J = D = [0]$$

Si se hace:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 2.75 & -0.25 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 7 & 9 \\ 4 & -3 & -4 \\ 8 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{Se verifica}$$

Utilizando la función "Jordán(A)" de MatLab, si estamos utilizando el Csad, y ya se han ingresado las matrices de la planta.

----- SVDESIGN OPTIONS -----
Response Plots Zeros and Poles
Controllability Display System
Observability New Original Sys
Transformations Back to Original
State Feedback Estimator Design
Integral&State Feedback&Estimate
View N(s)/D(s) Quit
SVDESIGN > ! a, b, c, d

a =

$$\begin{matrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{matrix}$$

b =

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

c =

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

d =

$$\begin{matrix} 0 \end{matrix}$$

SVDESIGN>! [T, Aj]=Jordan(a), Bj=inv (T)*b, Cj=c*T, Dj=d

T =

$$\begin{matrix} -8 & 7 & 9 \\ 4 & -3 & -4 \\ 8 & -5 & -8 \end{matrix}$$

Aj =

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Bj =

$$\begin{matrix} 2.5000 \\ -1.0000 \\ 3.0000 \end{matrix}$$

Cj =

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Dj =

$$\begin{matrix} 0 \end{matrix}$$

Press any key to continue.....

Como se ve el conjunto de matrices está en la F.C.J. y es el mismo ya encontrado en forma manual pues se eligió: $p_{11} = -8$, $p_{12} = 7$ y $p_{13} = 9$.

Ejemplo 57:

Encontrar la F.C.J. de la siguiente planta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 1 \ 0] \quad D = 0$$

Empleando la computadora digital, Con Matlab:

```
>> A=[0 1 0;0 0 1;1 -3 3];
>> B=[1;0;2];
>> C=[1 1 0];
>> D=0;
>> [T,Aj]=jordan(A)
```

T =

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Aj =

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Luego usando el Csad:

```
>> [Aj, Bj, Cj, Dj]=sv2sv(A,B,C,D,T)
```

Aj =

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Bj =

$$\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Cj =

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \end{matrix}$$

Dj =

0 .- También puede ser, usando MatLab:

```
>> [Aj,Bj,Cj,Dj]=ss2ss(A,B,C,D,inv(T))
```

Aj =

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Bj =

$$\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$C_j = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Ejemplo 58:

Obtener la forma de Jordán, y una matriz de transformación T, asociada a la matriz original siguiente, (aquí si hace falta usar el método de Caros):

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Lo primero que hay que hacer es calcular sus autovalores:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^4 - 12\lambda^3 + 54\lambda^2 - 108\lambda + 81 = (\lambda - 3)^4$$

Se concluye por tanto que hay un único autovalor, $\lambda = 3$, y de multiplicidad algebraica $m_a(3) = 4$. Por el algoritmo de Caros debemos hallar el rango de $(3I - A)$, y sus sucesivas potencias hasta que sea necesario. Lo detallamos a continuación:

$$r_1 = \text{rango}(3I - A) = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2, \quad N^o BJ = 4 - 2 = 2 \quad \begin{cases} (1x1) y (3x3) \\ o \\ (2x2) y (2x2) \end{cases} ?$$

La duda la disipa el método de Caros:

De modo que $x_1 = n - r_1 = 4 - 2 = 2$. Como $x_1 < 4$, debemos continuar.-

$$r_2 = \text{rango}(3I - A)^2 = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Así que $x_2 = r_1 - r_2 = 2 - 1 = 1$. Como $x_1 + x_2 = 2 + 1 = 3 < 4$, debemos continuar

$$r_3 = \text{rango}(3I - A)^3 = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Esto significa que $x_3 = r_2 - r_3 = 1 - 0 = 1$. Como ahora si sucede que:

$x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 1 + 1 = 4 \equiv ma(3)$, se puede concluir, por el algoritmo de Caros, que hay : $x_1 - x_2 = 2 - 1 = 1$. Un bloque o caja de Jordán de orden 1x1,

$x_2 - x_3 = 1 - 1 = 0$ Ningún bloque de Jordán de 2×2 , y finalmente como $x_3 = 1$, habrá un bloque de Jordán de 3×3 . Así, la forma de Jordán asociada a la matriz original A puede tener alguna de las dos formas siguientes:

$$1^o) A_J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad o \quad \text{también } 2^o) A_J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para obtener una matriz de transformación T se procederá como ya se explico anteriormente. Se elegirá la forma 1^o), en consecuencia la matriz T de transformación será:

$$T = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \bar{p}_3 & \bar{p}_4 \end{bmatrix}$$

Donde \bar{p}_1 y \bar{p}_2 , son dos vectores propios y \bar{p}_3 y \bar{p}_4 los vectores propios generalizados asociados con el autovalor repetido λ .

Calculo de $\bar{p}_1 = ?$

$$(3I - A)\bar{p}_1 = \bar{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \\ p_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

o también: $(A - 3I)\bar{p}_1 = \bar{0}$

$$\Rightarrow \text{Como el Rango de la matriz } (3I - A) \text{ es } 2 \Rightarrow \begin{cases} -p_{11} - p_{31} = 0 \\ 2p_{21} + p_{41} = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto: $p_{11} = -p_{31}$ y $p_{21} = -0.5p_{41}$

$$\text{Si se elige: } p_{31} = 0 \text{ y } p_{41} = -2, \text{ resultará: } \bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Calculo de $\bar{p}_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \\ p_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -p_{12} - p_{32} = 0 \\ 2p_{22} + p_{42} = 0 \end{cases} \Rightarrow p_{12} = -p_{32} \text{ y } p_{22} = -0.5p_{42}$$

$$\text{Si se elige: } p_{32} = -1 \text{ y } p_{42} = 0, \text{ resultará: } \bar{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculo de $\bar{p}_3 = ? \Rightarrow (3I - A)\bar{p}_3 = -\bar{p}_2 \text{ o } (A - 3I)\bar{p}_3 = \bar{p}_2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \\ p_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -p_{13} - p_{33} = -1 \\ 2p_{23} + p_{43} = 1 \end{cases} \Rightarrow p_{13} = 1 - p_{33} \quad y \quad p_{23} = 0.5(1 - p_{43})$$

Si se elige: $p_{33} = 0$ y $p_{43} = -1$, resultará: $\bar{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Calculo de $\bar{p}_4 = ?$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{14} \\ p_{24} \\ p_{34} \\ p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -p_{14} - p_{34} = -1 \\ 2p_{24} + p_{44} = 1 \end{cases} \Rightarrow p_{14} = 1 - p_{34} \quad y \quad p_{24} = -0.5 p_{44}$$

Si se elige: $p_{34} = 0$ y $p_{44} = 0$

Resultará:

$$\bar{p}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

En consecuencia por la forma que se eligió A_J , una matriz de transformación puede ser entonces la siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

Se puede comprobar que su inversa es:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

Pues $|T| = 1$

Finalmente se puede ver también, con lo que concluye el ejercicio que:

$$A_J = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para la otra forma de A_J , (la 2º), una matriz de transformación puede ser:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Como $|T| = -1$, resultará:

$$A_J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vamos un ejemplo donde la matriz A si se puede diagonalizar:

Ejemplo 58a: Obtener la forma de Jordán, y una matriz de transformación T, asosiada a la matriz original siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los valores característicos son las raíces del polinomio característico:

$$s^3 - 12s^2 + 21s - 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad y \quad \lambda_3 = 10$$

Usando el método de Caros se determina la matriz A_J :

$$\text{rango } (\lambda_1 I - A)^\dagger = \text{rango } \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = r_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 3 - 1 = 2 = \text{ma}(\lambda); FIN$$

En consecuencia La matriz A_J , tendrá 2 bloques de Jordan, ($x_1=2$), de 1×1 . La matriz A_J puede tener la forma siguiente:

$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, se diagonalizo, esto se debe a que la matriz A tiene coeficientes constantes y es simétrica.-

Siguiendo el procedimiento indicado se puede encontrar una matriz T de transformación, la misma puede ser, (no es la única como se sabe):

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Las nuevas matrices del sistema serán:

$$A_J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B_J = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.222 \\ 0.111 \end{bmatrix}$$

$$C_J = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La $G_p(s)$ seguirá siendo la misma:

$$G_p(s) = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2(s-10)}$$

Matlab y la Forma Escalonada Reducida por Filas de una Matriz:

Para plantas o sistemas de mayor orden, se deberá invertir mucho tiempo en resolver sistemas de ecuaciones lineales a mano, pues el procedimiento será largo y con tendencia a que se produzcan errores. Cuando la matriz de los coeficientes es de tamaño igual o mayor a 5×5 , lo más probable es que nos equivoquemos en el resultado. Vamos a ver como Matlab puede ayudarnos en el proceso.

En primer lugar, recordemos algunas definiciones. El primer elemento no nulo en cada fila de una matriz se denomina *pivote*. Una matriz se dice que está en la forma *escalonada* por filas si:

- Las filas de ceros aparecen en la parte inferior de la matriz.
- Cada pivote es 1.
- Cada pivote aparece en una columna estrictamente a la derecha del pivote de la fila anterior.

Se dice que una matriz está en la forma *reducida por filas* si satisface además la siguiente propiedad:

- Cada pivote es el *único elemento no nulo en su columna*.

Se sabe que toda matriz es equivalente a una matriz reducida por filas, es decir, que mediante operaciones elementales, (por filas), toda matriz se puede convertir en una matriz reducida por filas.-

El comando $R=rref(F)$ de Matlab calcula la forma reducida por filas de una matriz F. El comando $rrefmovie(F)$ de Matlab nos muestra paso a paso cómo ha obtenido la forma reducida por filas.

Apliquemos esto a la solución del problema N° 57 visto anteriormente.

Ya se obtuvo la forma de la matriz A_J la cual era:

$$A_J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ una matriz de transformación buscada será:}$$

$$T = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \bar{p}_3 & \bar{p}_4 \end{bmatrix}$$

Para los dos autovectores \bar{p}_1 y \bar{p}_2 se puede proceder así:

Se ingresa la matriz A:

» $A=[4\ 0\ 1\ 0; 1\ 1\ 1\ -1; 0\ -2\ 3\ -1; -1\ 2\ -1\ 4];$

» $eig(A)$

$ans =$

$$3.0000 + 0.0000i$$

```

3.0000 - 0.0000i
3.0000
3.0000
» I=eye(4);
» % La matriz de los coeficientes en este caso es:
» A1=(3*I-A); (también se puede usar (A-3*I)), como sabemos.
» % Llamando E al vector nulo
» E=[0;0;0;0];
» % La matriz ampliada será
» F=[A1 E];
» % la forma reducida de la misma sera
» rref(F)
ans =

```

$$\begin{matrix} 1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

De la misma surgen las ecuaciones siguientes:

$$p_{11} + p_{31} = 0 \quad y \quad p_{21} + 0.5p_{41} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_{11} = -p_{31} \\ p_{21} = -0.5p_{41} \end{cases}$$

Para \bar{p}_1 , si se elige: $p_{31} = 0$ y $p_{41} = 2$, resulta: $\bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Para \bar{p}_2 , $\begin{cases} p_{12} = -p_{32} \\ p_{22} = -0.5p_{42} \end{cases} \Rightarrow$ si se elige: $p_{32} = -1$ y $p_{42} = 0$, resulta: $\bar{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para \bar{p}_3 , llamando $-\bar{p}_2 = v$

```

» v=[-1;0;1;0];
» % formado la matriz ampliada, que llamaremos G
» G=[A1 v];
» rref(G)
ans =

```

$$\begin{matrix} 1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$p_{13} + p_{33} = 1 \quad y \quad p_{23} + 0.5p_{43} = 0.50 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_{13} = 1 - p_{33} \\ p_{23} = 0.5(1 - p_{43}) \end{cases}$$

Si se elige: $p_{33} = 0$ y $p_{43} = -1$, resulta: $\bar{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Para \bar{p}_4 , llamando $-\bar{p}_3 = u$

» $u = [-1; -1; 0; 1];$

» % formado la matriz ampliada, que llamaremos H

» $H = [A1 \ u];$

» rref(H)

ans =

$$\begin{array}{ccccc} 1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$p_{14} + p_{34} = 1 \quad y \quad p_{24} + 0.5p_{44} = 0$$

En consecuencia: $\begin{cases} p_{14} = 1 - p_{34} \\ p_{24} = -0.5p_{44} \end{cases}$

Si se elige: $p_{34} = 0$ y $p_{44} = 0$, resulta: $\bar{p}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

La matriz de transformación elegida será:

$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; Se puede comprobar que la inversa de T es:

$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ y finalmente se puede verificar también que:

» $Aj = inv(T) * A * T$

Aj =

$$\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

Ejercicio 59:

Sea la matriz A del modelo matemático de una planta la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- 1) Hallar los autovalores de la misma.
- 2) Hallar una matriz A_J para la forma canónica de Jordán
- 3) Hallar los autovectores y autovectores generalizados.-
- 4) Hallar la matriz de transformación T tal que $TA_J=AT$.-

1)

» $A=[-2\ 1\ 0;-2\ 1\ -1;-1\ 1\ -2];$

» $\text{eig}(A)$

$\text{ans} =$

-1.0000 + 0.0000i

-1.0000 - 0.0000i

-1.0000

El autovalor $\lambda = -1$, es de orden de multiplicidad algebraica 3.

2)

» $r1=\text{rank}(A+\text{eye}(3))$

$r1 =$

2

» % Por lo tanto: $x_1=n-r_1=3-2=1<3$, hay que continuar

» $r2=\text{rank}((A+\text{eye}(3))^2)$

$r2 =$

1

» % Por lo tanto: $x_2=r_1-r_2=2-1=1$; como: $x_1+x_2=2<3$, hay que continuar

» $r3=\text{rank}((A+\text{eye}(3))^3)$

$r3 =$

0

» % Por lo tanto: $x_3=r_2-r_3=1-0=1$; como: $x_1+x_2+x_3=1+1+1=3$, FIN

En consecuencia:

Hay $(x_1-x_2)=1-1=0$, bloques de Jordan de 1×1 .

Hay $(x_2-x_3)=1-1=0$, bloques de Jordan de 2×2 .

Y hay $x_3=1$, bloques de Jordan de 3×3 .

Por lo tanto la matriz A_J será:

$$A_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3) El único autovector de A, que llamaremos $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, y los Autovectores

$$\text{Generalizados } v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad y \quad w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Determinación del autovector u:

El espacio nulo de $(A - (-1)I) = A1$ sera:

» $A1 = (A - (-1)*eye(3))$

$A1 =$

$$\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

>> rref(A1)

ans =

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

>> % $E(-1) = \{(x, y, z) / x-y = 0, z=0\} = \text{se genera: } (1, 1, 0)$

>> u = [1 1 0]'

u =

$$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Calculo de los 2 vectores característicos generalizados, v y w.-

Calculo de v:

rref([A1 u])

ans =

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

» % Solución del sistema no Homogeneo: $x-y=-1, z=1$: genera:

» v = [0 1 1]'

v =

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

Calculo de w:

» rref([A1 v])

ans =

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

» % Solución del sistema no Homogeneo: $x-y=0, z=-1$: genera:

» w = [1 1 -1]'

```

w =
1
1
-1
» % una matriz de transformación será:
» T= [u v w]
T =
1   0   1
1   1   1
0   1  -1
» % Se puede verificar que:
» Aj=inv (T)*A*T
Aj =
-1   1   0
0  -1   1
0   0  -1    Con lo cual concluye el ejercicio.-
```

Ejercicio 60:

Encontrar una forma Canónica de Jordan de la matriz original siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \text{ Solución:}$$

Definimos la matriz A:

```

» A=[1 0 0;1 0 1;0 1 0];
» % Los autovalores serán:
» eig(A)
```

ans =

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = -1$ (simple).-

Para $\lambda_2 = -1$ hay un bloque de Jordan de 1×1 . Veremos el o los bloques para el autovalor repetido $\lambda_1 = 1$. Apliquemos el algoritmo de Caros, por ende se deberá hallar el rango de $(A - \lambda_1 I)$, y sus sucesivas potencias hasta que sea necesario.

```

» ax1=(A+eye(3));
» x1=3-rank(ax1)
x1 =
1
» % Como x1 < 3 se continua
» r2=rank (ax1^2)
```

```
r2 =  
    1  
» x2=r1-r2  
x2 =  
    1
```

Como $x_1+x_2=1+1=2=ma$ (1), fin.-

En consecuencia una matriz A_j pude ser:

```
» AJ= [1 1 0; 0 1 0; 0 0 -1]
```

```
AJ =
```

```
1   1   0  
0   1   0  
0   0   -1
```

» % Una matriz de transformación puede ser la siguiente:

```
T = [v1 v2 v3]
```

Cálculo de v1: Solución del sistema homogeneo. Espacio nulo de $(A-1I)$

```
» A1=rref(ax1)
```

```
A1 =
```

```
1   0   0  
0   1   -1  
0   0   0
```

» % $E(-1)=\{(x,y,z)/x=0, y-z=0\}$ Se genera:

```
» v1= [0 1 1]'
```

```
v1 =
```

```
0  
1  
1
```

Cálculo de v2:

```
» H= [ax1 v1];
```

```
» rref(H)
```

```
ans =
```

```
1   0   0   2  
0   1   -1   1  
0   0   0   0
```

Solución del sistema no homogeneo:

$x=2, y-z=1$. Se genera:

```
» v2=[2 1 0]'
```

```
v2 =
```

```
2  
1  
0
```

Cálculo de v3: (Un autovector asociado con el autovalor en -1)

```
» ax2=(A-(-1)*eye(3));
```

```
» rref(ax2)
```

```
ans =  
1 0 0  
0 1 1  
0 0 0
```

Solución del sistema homogéneo: $x=0$, $y+z=0$. Se genera:

```
» v3= [0 1 -1]'
```

```
v3 =  
0  
1  
-1
```

» % Una matriz T posible será:

```
» T= [v1 v2 v3]
```

```
T =  
0 2 0  
1 1 1  
1 0 -1
```

» % Se puede verificar que:

```
» Aj=inv (T)*A*T
```

```
Aj =  
1 1 0  
0 1 0  
0 0 -1
```

» % Se podría haber usado también:

```
» Jordan(A)
```

```
ans =  
-1 0 0  
0 1 1  
0 0 1
```

» % O también:

```
» [T, Aj]=Jordan(A)
```

```
T =  
0 0 1.0000  
-0.2500 0.5000 0.2500  
0.2500 0.5000 -0.2500
```

```
Aj =  
-1 0 0  
0 1 1  
0 0 1
```

» % Que sería otra solución del ejercicio.

Control II (Elo y Bio)

Obtención de las Respuestas

Temporales de Sistemas de

Control Automáticos Lineales

Empleando los Modelos

Matemáticos de Estado de los
Mismos.-

Año: 2010

Prof. Ing. Carlos F. Martín

Solución Temporal de las Ecuaciones de Estado y de Salida.

En el proceso de diseño de un sistema de control lineal invariante con el tiempo, se disponen de las ecuaciones de estado y de salida del modelo tentativo del mismo. Ellas permitirán al resolverlas chequear si para un estado inicial $\bar{x}_0(t)$, una señal de referencia, (si se trata de un seguidor), $u(t)$, y de alguna entrada de perturbación si la hubiera, $p(t)$, se cumplen todas las especificaciones de funcionamiento solicitadas en el proyecto.-

La ecuación de salida es en general:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) + Ep(t) \equiv A\bar{x}(t) + B^*\bar{u}^*(t) \quad (1)$$

donde:

$$B^* = [B \quad E] \quad y \quad \bar{u}^*(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ p(t) \end{bmatrix}.$$

El primer término del segundo miembro de (1), es la parte homogénea y el otro representa la respuesta forzada. La suma de las dos será la solución total.-

Se empezará estudiando métodos para determinar la solución homogénea:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) \quad \text{con} \quad \bar{x}_0(t) = \bar{x}_0. \quad (\text{Sistemas Reguladores}).$$

Los métodos que se estudiaran son los siguientes:

A) Usando los llamados Modos Naturales, cuando los valores propios del sistema son distintos.-

B1) Usando la llamada Matriz Exponencial, e^{-At} . -

B2) Usando la llamada Matriz de Transición de Estado, $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1}$. -

B3) Empleando la forma Canónica Diagonal para $\Phi(t)$ si los valores característicos del sistema son distintos.-

B4) Usando algún Diagrama de Estado del sistema.-

C) Usando la computadora personal para Graficar las respuestas del sistema.-

A) Modos Naturales:

Como se dijo se supondrá que los valores característicos del sistema son distintos. Además se tratará solo sistema SISO, ($p = q = 1$). Se tiene que:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) \quad \text{con} \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (2)$$

Esta solución estará compuesta, en general, por los términos exponenciales, $e^{\lambda_j t}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = p_{11}e^{\lambda_1 t} + p_{12}e^{\lambda_2 t} + \dots + p_{1n}e^{\lambda_n t} \\ x_2(t) = p_{21}e^{\lambda_1 t} + p_{22}e^{\lambda_2 t} + \dots + p_{2n}e^{\lambda_n t} \\ \dots \\ x_n(t) = p_{n1}e^{\lambda_1 t} + p_{n2}e^{\lambda_2 t} + \dots + p_{nn}e^{\lambda_n t} \end{array} \right. \quad (3)$$

Donde los coeficientes p_{ij} indican la contribución de cada término exponencial.

Como la solución de la ecuación vectorial n dimensional (2), depende de las n

condiciones iniciales $\bar{x}(o)$, especificadas en forma independiente, significa que en efecto hay solamente **n grados de libertad** para los n^2 elementos p_{ij} , pues para $t = 0$:

$$\begin{cases} x_1(o) = p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1n} \\ x_2(o) = p_{21} + p_{22} + \dots + p_{2n} \\ \dots \\ x_n(o) = p_{n1} + p_{n2} + \dots + p_{nn} \end{cases} \quad (4)$$

Por lo tanto habrá infinitas soluciones.

Si es posible por lo tanto, encontrar entre los n^2 elementos n grupos, (de n elementos), linealmente independientes, luego será posible expresar la solución homogénea $\bar{x}_h(t)$ en función de estos n grupos. Por ende hay un número infinito de formas de elegir estos grupos en forma aceptable.

Un conjunto de grupos particularmente interesantes, se obtiene si en cada grupo los elementos p_{ij} tiene **igual el segundo subíndice**. Estos n grupos, o n vectores, se llamarán en lo que sigue, los **vectores característicos**, $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$, (ya definidos cuando se determinó la matriz de transformación a la forma canónica diagonal), en consecuencia será:

$$\bar{p}_j = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ p_{3j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix}; \text{ Para } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

A partir de las ecuaciones (3), se observa que cada vector característico \bar{p}_j , está asociado con **uno y solamente un valor característico** λ_j .

Por lo tanto la solución homogénea se puede escribir de la manera siguiente:

$$\bar{x}(t) = \bar{p}_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{p}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \bar{p}_j e^{\lambda_j t} + \dots + \bar{p}_n e^{\lambda_n t}. - \quad (6)$$

Los \bar{p}_j , para: $j = 1, 2, 3, \dots, n$, dependerán de las condiciones iniciales.

Cada término $[\bar{p}_j e^{\lambda_j t}]$ se denomina modo natural asociado con λ_j .

La ecuación (6), también se puede escribir así:

$$\bar{x}(t) = \alpha_1 \hat{p}_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 \hat{p}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha_j \hat{p}_j e^{\lambda_j t} + \dots + \alpha_n \hat{p}_n e^{\lambda_n t}. - \quad (7)$$

Pero ahora los coeficientes escalares α_j , dependerán de las condiciones iniciales.

Los vectores característicos se pueden determinar fácilmente si se tiene en cuenta que, $\bar{p}_j e^{\lambda_j t}$, debe ser una solución de la ecuación (2), pues si la (6) lo es, ciertamente cada término debe también satisfacerla, por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}(\bar{p}_j e^{\lambda_j t}) = A(\bar{p}_j e^{\lambda_j t}); \text{ Para } j = 1, 2, 3, \dots, n. -$$

$$\lambda_j \bar{p}_j e^{\lambda_j t} = A \bar{p}_j e^{\lambda_j t}$$

$$\lambda_j \bar{p}_j = A \bar{p}_j ; \text{ o también:}$$

$$(\lambda_j I - A) = \bar{0}$$

Expresión que ya se utilizó en las transformaciones lineales a la FCD, la cual permitía calcular los vectores propios \bar{p}_j , si los mismos eran diferentes.

Ejemplo N° 1:

Supongamos que un sistema regulador diseñado tiene las matrices siguientes:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -12 \end{bmatrix} \quad Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Cc = [20 \quad 0] \quad Dc = [0]$$

Los valores característicos elegidos para el diseño serán:

$$|sI - Ac| = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 20 & s+12 \end{bmatrix} = s(s+12) + 20 = s^2 + 12s + 20$$

$$|sI - Ac| = (s+2)(s+10) \Rightarrow \lambda_1 = -2 \quad y \quad \lambda_2 = -10$$

Los vectores característicos normalizados serán:

$$\hat{p}_1 = ? \quad (\lambda_1 I - Ac) \bar{p}_1 = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2p_{11} - p_{21} = 0 \rightarrow p_{21} = -2p_{11}$$

$$\text{Si } p_{11} = k_1 \Rightarrow \bar{p}_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$|\hat{p}_1| = 1 = \sqrt{k_1^2 + 4k_1^2} = \sqrt{5}k_1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Por lo tanto:

$$\hat{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Operando en forma similar para \hat{p}_2 , se llega a:

$$\hat{p}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{101}} \\ \frac{10}{\sqrt{101}} \end{bmatrix}$$

por ende la solución homogénea será:

$$\bar{x}(t) = \alpha_1 \hat{p}_1 e^{-2t} + \alpha_2 \hat{p}_2 e^{-10t}$$

$$\text{Si se supone que: } \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}}{-2} \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{101}} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{101}}{-2} \\ \frac{10}{\sqrt{101}} \end{bmatrix} \text{ para } t=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{101}} = 1 \\ -\frac{2\alpha_1}{\sqrt{5}} + \frac{10\alpha_2}{\sqrt{101}} = -1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones con dos incógnitas resulta:

$$\alpha_1 = \frac{9\sqrt{5}}{8} \quad y \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{101}}{8}$$

$$\bar{x}(t) = \frac{9\sqrt{5}}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}}{-2} \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{101}} \end{bmatrix} e^{-2t} + \frac{\sqrt{101}}{8} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{101}}{-2} \\ \frac{10}{\sqrt{101}} \end{bmatrix} e^{-10t}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{9}{8}e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-10t} \\ x_2(t) = \frac{-9}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-10t} \end{cases}$$

$$y(t) = Cc \bar{x}(t) \Rightarrow y(t) = [20 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 20x_1(t)$$

Finalmente:

$$y(t) = 22.5e^{-2t} - 2.5e^{-10t}$$

Que será la salida homogénea buscada.-

Las respuestas se pueden graficar en MatLab con el lenguaje simbólico:

```

» syms t
» x1=9/8*exp(-2*t)-1/8*exp(-10*t)
x1 =
9/8*exp(-2*t)-1/8*exp(-10*t)
» x2=-9/4*exp(-2*t)+5/4*exp(-10*t)
x2 =
-9/4*exp(-2*t)+5/4*exp(-10*t)
» subplot(211)
» ezplot(x1,0,4)
» hold on
» ezplot(x2,0,4)
» grid
» y=45/2*exp(-2*t)-5/2*exp(-10*t)
y =
45/2*exp(-2*t)-5/2*exp(-10*t)
» ezplot(y,0,4)

```

La respuesta es la mostrada en la figura 1.-

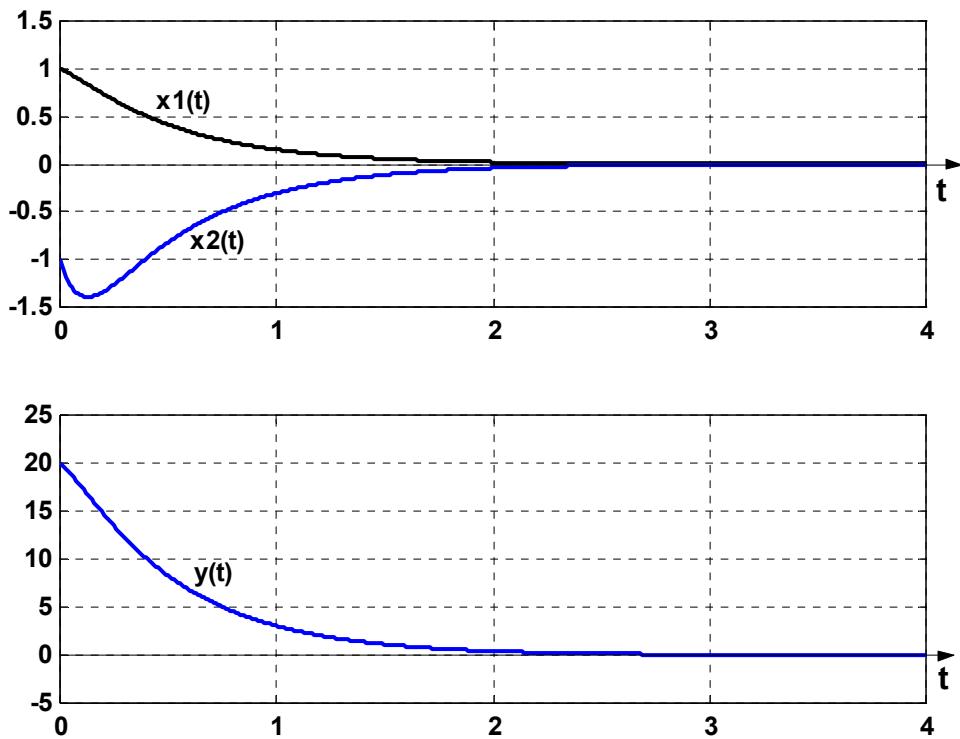


Figura 1

Nota: Se puede “filtrar” un modo natural forzando a ser: $\alpha_1 = 0$, o $\alpha_2 = 0$.- Lo primero sucede si la condición inicial $\bar{x}(o)$ es proporcional al vector característico \bar{p}_1 y lo segundo si $\bar{x}(o)$ es proporcional a \bar{p}_2 .

Si $\bar{x}(o) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$; se tendría:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{101}} = 1 \\ \frac{-2\alpha_1}{\sqrt{5}} + \frac{10\alpha_2}{\sqrt{101}} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{5} \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{x}(t) = \alpha_1 \hat{p}_1 e^{-2t} = \sqrt{5} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = C \bar{x}(t) = [20 \quad 0] \bar{x}(t) = 20 x_1(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{y(t) = 20 e^{-2t}.}$$

Si $\bar{x}(o) = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \end{bmatrix}$; resultará:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} -e^{-10t} \\ 10e^{-10t} \end{bmatrix} \text{ y en consecuencia:}$$

$$\underline{y(t) = -20 e^{-10t}}$$

Ejemplo N° 2:

Un sistema regulador diseñado tiene las siguientes matrices:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Cc = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad Dc = [0]$$

Los valores característicos serán los elegidos en el diseño: $\lambda_{1-2} = -1 \pm j$.

Lo comprobaremos:

$$|sI - Ac| = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} = s(s+2) + 2 = s^2 + 2s + 2 \Rightarrow \underline{\lambda_{1-2} = -1 \pm j}$$

$$\Rightarrow \hat{p}_1 = ? \rightarrow \lambda_1 = -1 + j$$

$$\begin{bmatrix} -1+j & -1 \\ 2 & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (-1+j)p_{11} - p_{21} = 0 \Rightarrow p_{21} = (-1+j)p_{11}$$

$$\text{Si } \underline{p_{11} = a + jb} \rightarrow p_{21} = (-1+j)(a+jb) \Rightarrow \underline{p_{21} = -(a+b) + j(a-b)}$$

Si se elige $a = 1$ y $b = -1$, nos queda:

$$p_{11} = 1 - j \quad y \quad p_{21} = j2$$

Por lo tanto:

$$\bar{p}_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1-j \\ j2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{p}_2 \text{ Será el conjugado o sea: } \bar{p}_2 = \begin{bmatrix} 1+j \\ -j2 \end{bmatrix}$$

$$|\hat{p}_1| = 1 = \sqrt{2k_1^2 + 4k_1^2} = \sqrt{6}k_1 \rightarrow k_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \hat{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} - j\frac{1}{\sqrt{6}} \\ j\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\text{Por ende: } \hat{p}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} + j\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -j\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

La solución homogénea será:

$$\bar{x}(t) = \alpha_1 \hat{p}_1 e^{(-1+j)t} + \alpha_2 \hat{p}_2 e^{(-1-j)t} \quad (*)$$

$$\text{Si } \bar{x}(o) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} - j\frac{1}{\sqrt{6}} \\ j\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} + j\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -j\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (1-j)\frac{\alpha_1}{\sqrt{6}} + (1+j)\frac{\alpha_2}{\sqrt{6}} = 1 \\ \frac{j2\alpha_1}{\sqrt{6}} - \frac{j2\alpha_2}{\sqrt{6}} = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Resolviendo:}$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{6}}{4} + j\frac{\sqrt{6}}{4} \quad y \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{6}}{4} - j\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Reemplazando α_1 y α_2 en (*) quedará:

$$\bar{x}(t) = \frac{\sqrt{6}}{4}(1+j)\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}(1-j) \\ j\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} e^{(-1+j)t} + \frac{\sqrt{6}}{4}(1-j)\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}(1+j) \\ -j\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} e^{(-1-j)t}$$

$$x_1(t) = 0.25(1+j)(1-j)e^{(-1+j)t} + 0.25(1-j)(1+j)e^{(-1-j)t}$$

$$x_1(t) = 0.5e^{(-1+j)t} + 0.5e^{(-1-j)t} = 0.5(e^{-t}e^{jt} + e^{-t}e^{-jt}) = 0.5e^{-t}(e^{jt} + e^{-jt})$$

Pero como:

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \quad y \quad \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$x_1(t) = 0.5e^{-t} 2\cos(t), \text{ finalmente:}$$

$$\underline{x_1(t) = e^{-t} \cos(t)}$$

Operando en forma similar se llegaría a:

$$\underline{x_2(t) = -e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t)}$$

$$\text{Como } y(t) = C\bar{x}(t) = [2 \quad 0]\bar{x}(t) \Rightarrow y(t) = 2x_1(t)$$

$$\underline{y(t) = 2e^{-t} \cos(t)}$$

Se puede graficar $x_1(t)$; $x_2(t)$ e $y(t)$, con Matlab, usando las expresiones encontradas para las mismas.

```

» syms t
» x1=exp(-t)*cos(t);
» x2=-exp(-t)*cos(t)-exp(-t)*sin(t);
» y=2*x1;
» ezplot(x1,0,5)
» hold on
» ezplot(x2,0,5)
» ezplot(y,0,5)

```

Se arreglan los límites de los ejes, y las respuestas se muestran en la figura 2.-

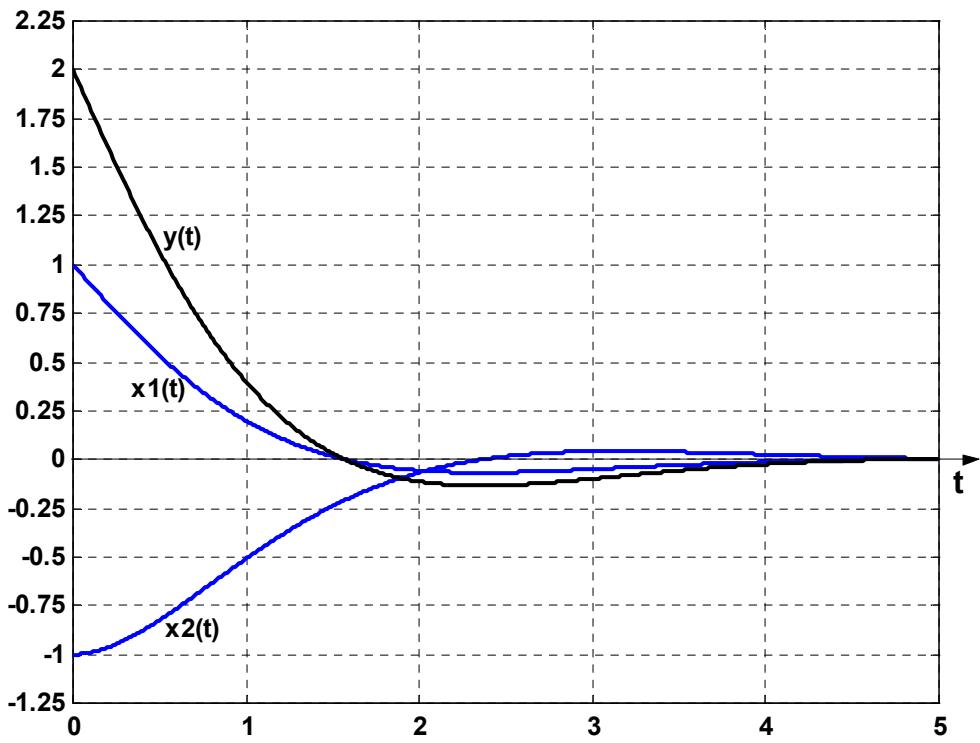


Figura 2

B1) Uso de la Matriz Exponencial e^{-At} .

Dado el sistema definido por:

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\bar{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Se comenzará por resolver la ecuación de estado a partir de un instante inicial $\bar{x}(t_0) = \bar{x}(0)$, de forma que la solución, si existe, ha de ser válida para cualquier instante de tiempo t . Aplicando la transformada de Laplace a la primera ecuación del sistema, se tendrá que:

$$s\bar{X}(s) - \bar{x}(0) = A\bar{X}(s) + BU(s), \text{ o bien:}$$

$$(sI - A)\bar{X}(s) = \bar{x}(0) + BU(s), \text{ Esto es:}$$

$$\bar{X}(s) = (sI - A)^{-1}\bar{x}(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Con lo cual:

$$\bar{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}\bar{x}(0)] + \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)] \quad (**)$$

La matriz $\mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1}$ se denomina matriz de transición de estado y se denota por $\Phi(t)$, y representa, como se puede apreciar en la ecuación anterior, el paso del sistema del estado inicial $\bar{x}(0)$ al final $\bar{x}(t)$.

Por lo tanto teniendo en cuenta la integral de convolución:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

La ecuación $(**)$ puede ser escrita en función de la matriz de transición de estado como:

$$\bar{x}(t) = \underline{\Phi(t)} \bar{x}(o) + \int_0^t \Phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau \quad (***)$$

Se intentara una solución alternativa para resolver la ecuación de estado, la cual es muy intuitiva.

Si la señal de entrada $u(t)$ del sistema es nula, la ecuación de estado será la homogénea de la forma:

$\dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t)$; y su solución será según (***):

$$\boxed{\bar{x}(t) = \Phi(t) \bar{x}(o)}$$

Esto es, la derivada primera de $\Phi(t)$ debe ser igual a $A\Phi(t)$, o sea: $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$. Además como es evidente: $\Phi(o) = I$, por ende $\Phi(t)$ satisface la ecuación lineal homogénea.-

$$\dot{\Phi}(t) \bar{x}(o) = A \bar{x}(t) = A\Phi(t) \bar{x}(o) \Rightarrow \underline{\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)}$$

$$\text{y además: si } t = 0 \Rightarrow \bar{x}(o) = \Phi(o) \bar{x}(o) \Rightarrow \underline{\Phi(o) = I}$$

Inmediatamente se deduce que una solución a ensayar es la función matriz exponencial e^{At} , en efecto:

$$\bar{x}(t) = e^{At} \bar{x}(o)$$

será una solución de la ecuación homogénea, ya que para la $\bar{x}(t)$ dada en la última expresión, se cumple que:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A e^{At} \bar{x}(o) = A \bar{x}(t).$$

Se ve pues que la matriz exponencial e^{At} , constituye una expresión válida para la matriz de transición de estado, con lo cual la solución general será también:

$$\boxed{\bar{x}(t) = e^{At} \bar{x}(o) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau}$$

También e^{At} representa la siguiente serie de potencias, (una función matricial):

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

Otra propiedad de $\Phi(t)$ es que: $\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$.-

La demostración seria:

$$\Phi(t) = e^{At} \Rightarrow \Phi(t)e^{-At} = e^{At}e^{-At} = e^{0t} = I, \text{ por lo tanto:}$$

$$e^{-At} = \Phi^{-1}(t) \Rightarrow \Phi^{-1}(t) \equiv \Phi(-t)$$

Un resultado interesante de esta propiedad de $\Phi(t)$ es que la ecuación:

$\bar{x}(t) = \Phi(t) \bar{x}(o)$, se puede colocar como:

$$\Phi(-t) \bar{x}(t) = \bar{x}(o)$$

Lo que significa que el proceso de transición de estado se puede considerar como bilateral en el tiempo. Esto es, la transición en el tiempo se puede dar en cualquier dirección.-

La Función Expm de Matlab se puede emplear para calcular e^{At} .-
Veremos algunos ejemplos.

Primero se definen las matrices A y C.

1)

» A=[0 1 0;0 0 1;-160 -56 -14];

» C=[1 0 1];

» % Se define el vector de estado inicial

» xo=[1;-1;2];

» % Se define la variable independiente t, (tiempo)

» syms t

» % Se obtiene la matriz exponencial

» ME=simplify(expm(A*t));

» % Se obtiene la solución homogénea de la ecuación de estado del sistema

» xh=ME*xo

xh =

[7/38*exp(-10*t)+31/38*exp(-2*t)*cos(2*t*3^(1/2))+47/114*3^(1/2)*exp(-2*t)*sin(2*t*3^(1/2))]
[-140/57*3^(1/2)*exp(-2*t)*sin(2*t*3^(1/2))+16/19*exp(-2*t)*cos(2*t*3^(1/2))-35/19*exp(-10*t)]
[184/57*3^(1/2)*exp(-2*t)*sin(2*t*3^(1/2))-312/19*exp(-2*t)*cos(2*t*3^(1/2))+350/19*exp(-10*t)]

» % La salida homogénea será

» yh=simplify(C*xh)

yh =

$\frac{707}{38} \exp(-10t) - \frac{593}{38} \exp(-2t) \cos(2t \cdot 3^{1/2}) + \frac{415}{114} \exp(-2t) \sin(2t \cdot 3^{1/2})$

» % Esta expresión se puede visualizar mejor así:

» pretty(yh)

$$\frac{707}{38} \exp(-10t) - \frac{593}{38} \exp(-2t) \cos(2t \cdot 3^{1/2})$$

$$+ \frac{415}{114} 3^{1/2} \exp(-2t) \sin(2t \cdot 3^{1/2})$$

2) Veamos los dos primeros ejemplos ya vistos:

```
» A=[0 1;-20 -12];
» C=[20 0];
» syms t
» ME=expm(A*t)
ME =
[ 5/4*exp(-2*t)-1/4*exp(-10*t), -1/8*exp(-10*t)+1/8*exp(-2*t)]
[ 5/2*exp(-10*t)-5/2*exp(-2*t), -1/4*exp(-2*t)+5/4*exp(-10*t)]
» xo=[1;-1];
» xh=ME*xo
xh =
[ 9/8*exp(-2*t)-1/8*exp(-10*t)]
[ 5/4*exp(-10*t)-9/4*exp(-2*t)]
» yh=C*xh
yh =
45/2*exp(-2*t)-5/2*exp(-10*t)

» pretty(yh)
```

$$45/2 \exp(-2t) - 5/2 \exp(-10t)$$

```
» A=[0 1;-2 -2];
» C=[2 0];
» xo=[1;-1];
» ME=expm(A*t)

ME =
[ exp(-t)*cos(t)+exp(-t)*sin(t),           exp(-t)*sin(t)      ]
[          -2*exp(-t)*sin(t),       exp(-t)*cos(t)-exp(-t)*sin(t) ]

» xh=ME*xo
xh =
[           exp(-t)*cos(t)      ]
[ -exp(-t)*sin(t)-exp(-t)*cos(t) ]
» yh=C*xh
yh =
2*exp(-t)*cos(t)

» pretty(yh)
```

$$2 \exp(-t) \cos(t)$$

B2) Usando la Matriz de Transición de Estado, $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1}$.

Si $U(s) = 0$, en la ecuación (***) resultará:

$$\bar{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \bar{x}(o) = \Phi(t) \bar{x}(o), \text{ por lo tanto:}$$

$$\boxed{\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]}$$

Veamos el primer ejemplo, en forma analítica, recordar que:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -12 \end{bmatrix} \quad Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Cc = [20 \quad 0] \quad y \quad Dc = [0]$$

$$\text{Hallar la solución homogénea: } \bar{x}(t) = ? \quad e \quad y(t) = ? \quad \text{si} \quad \bar{x}(o) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|sI - Ac| = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 20 & s+12 \end{bmatrix} = s(s+12) + 20 = s^2 + 12s + 20$$

$$(sI - Ac)^{-1} = \frac{Adj(sI - Ac)}{|sI - Ac|} = \frac{\begin{bmatrix} s+12 & 1 \\ -20 & s \end{bmatrix}}{(s+2)(s+10)}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+2)(s+10)} & \frac{-1}{(s+2)(s+10)} \\ \frac{20}{(s+2)(s+10)} & \frac{s+12}{(s+2)(s+10)} \end{bmatrix} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{5/4}{(s+2)} + \frac{-1/4}{(s+10)} & \frac{1/8}{(s+2)} + \frac{-1/8}{(s+10)} \\ \frac{-5/2}{(s+2)} + \frac{5/2}{(s+10)} & \frac{-1/4}{(s+2)} + \frac{5/4}{(s+10)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-10t} & \frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-10t} \\ \frac{-5}{2}e^{-2t} + \frac{5}{2}e^{-10t} & \frac{-1}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-10t} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\bar{x}(t) = \Phi(t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8}e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-10t} \\ -\frac{9}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-10t} \end{bmatrix}$$

En consecuencia:

$$y(t) = Cc \bar{x}(t) = [20 \quad 0] \bar{x}(t)$$

$$y(t) = 22.5e^{-2t} + 2.5e^{-10t}$$

Usando la computadora y Matlab, con la función Ilaplace se puede llegar a lo mismo, veamos:

```

» A=[0 1;-20 -12];
» C=[20 0];
» xo=[1;-1];
» syms s
» I=eye(2);
» FI=simplify(ilaplace(inv(s*I-A)))
FI =
[ 5/4*exp(-2*t)-1/4*exp(-10*t), -1/8*exp(-10*t)+1/8*exp(-2*t)]
[ 5/2*exp(-10*t)-5/2*exp(-2*t), -1/4*exp(-2*t)+5/4*exp(-10*t)]
» x=simplify(FI*xo)
x =
[ 9/8*exp(-2*t)-1/8*exp(-10*t)]
[ 5/4*exp(-10*t)-9/4*exp(-2*t)]
» y=C*x
y =
45/2*exp(-2*t)-5/2*exp(-10*t)

» pretty(y)
45/2 exp(-2 t) - 5/2 exp(-10 t)

```

```

» A=[0 1;-2 -2];
» C=[2 0];
» xo=[1;-1];
» syms s
» I=eye(2);
» FI=simplify(ilaplace(inv(s*I-A)))
FI =
[ exp(-t)*cos(t)+exp(-t)*sin(t), 1/2*i*(-exp((-1+i)*t)+exp((-1-i)*t))]
[ -i*(-exp((-1+i)*t)+exp((-1-i)*t)), exp(-t)*cos(t)-exp(-t)*sin(t)]

» x=simplify(FI*xo)
x =
[ -1/2*i*(i*exp((-1+i)*t)+i*exp((-1-i)*t)) ]
[ 1/2*i*(exp((-1+i)*t)-exp((-1-i)*t)+i*exp((-1+i)*t)+i*exp((-1-i)*t)) ]
» y=simple(C*x)
y = exp(-t+i*t)+exp(-t-i*t)
» pretty(y)
exp(-t + i t) + exp(-t - i t) = exp(-t) * exp(i * t) + exp(-t) * exp(-i * t) =
= exp(-t)[exp(i * t) + exp(-i * t)] = exp(-t) * 2 * cos(t)

```

$$y(t) = 2 e^{-t} \cos(t)$$

B3) Empleando la Forma Canónica Diagonal del Modelo del Sistema.

Si los valores característicos son distintos se puede transformar el modelo a la forma canónica diagonal, la matriz de transición de estado será también diagonal:

$$\Phi(t) = \Phi_d(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} = e^{A_d t}$$

Como se sabe:

$$\bar{x}(t) = T \bar{x}^*(t) \Rightarrow \bar{x}^*(t) = T^{-1} \bar{x}(t) \Rightarrow \bar{x}^*(o) = T^{-1} \bar{x}(o)$$

Como el modelo es diagonal, se tendrá:

$$\bar{x}^*(t) = \Phi_d(t) \bar{x}^*(o)$$

$$T^{-1} \bar{x}(t) = \Phi_d(t) T^{-1} \bar{x}(o)$$

$\bar{x}(t) = [T \Phi_d(t) T^{-1}] \bar{x}(o)$, por lo tanto se obtendrá:

$$\boxed{\Phi(t) = [T \Phi_d(t) T^{-1}]}$$

La salida será:

$$y(t) = C \bar{x}(t) = C \Phi(t) \bar{x}(o)$$

$$\boxed{y(t) = C [T \Phi_d(t) T^{-1}] \bar{x}(o)}$$

Como se puede apreciar conociendo los valores característicos, el problema se reduce a determinar las matrices T y T^{-1} .

Ejemplo: Continuando con el primer sistema regulador, el cual tenía:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -12 \end{bmatrix} \quad Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Cc = \begin{bmatrix} 20 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad Dc = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Determinar la solución homogénea, $\bar{x}(t) = ?$ $y(t) = ?$ con $\bar{x}(o) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Como se sabe:

$$|sI - Ac| = (s + 2)(s + 10) \Rightarrow \lambda_1 = -2 \quad y \quad \lambda_2 = -10$$

Cálculo de T:

Como el modelo del sistema está en la forma canónica controlable, se puede usar la matriz de Vandermonde:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} \quad |T| = -8$$

$$T^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -10 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Como:

$\Phi_d(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-10t} \end{bmatrix}$; la matriz de transición de estado será:

$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-10t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4 & 1/8 \\ -1/4 & -1/8 \end{bmatrix}$; en consecuencia:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-10t} & \frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-10t} \\ \frac{-5}{2}e^{-2t} + \frac{5}{2}e^{-10t} & \frac{-1}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-10t} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}(t) = \Phi(t) \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} \frac{9}{8}e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-10t} \\ -\frac{9}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-10t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = C \bar{x}(t) = [20 \ 0] \bar{x}(t)$$

$$y(t) = 20(1.125e^{-2t} - 0.125e^{-10t})$$

finalmente:

$$y(t) = \frac{45}{2}e^{-2t} - \frac{5}{2}e^{-10t}$$

Idéntica a la obtenida por los métodos anteriores.

Esto se puede solucionar con Matlab, de la manera siguiente:

Se ingresan las matrices

» A=[0 1;-20 -12];

» B=[0;1];

» C=[20 0];

» D=0;

» eig(A)

ans =

-2

-10

» % Como son distintos se puede aplicar el método

» [T,Ad]=eig(A)

```
T =  
0.4472 -0.0995  
-0.8944 0.9950
```

```
Ad =  
-2 0  
0 -10  
» syms t
```

```
» FI=[exp(-2*t) 0;0 exp(-10*t)]
```

```
FI =  
[ exp(-2*t), 0 ]  
[ 0, exp(-10*t)]
```

```
» ME=T*FI*inv(T)
```

```
ME =
```

```
[ 5/4*exp(-2*t)-1/4*exp(-10*t), 1/8*exp(-2*t)-1/8*exp(-10*t) ]  
[ -5/2*exp(-2*t)+5/2*exp(-10*t), -1/4*exp(-2*t)+5/4*exp(-10*t)]
```

```
» xo=[1;-1];
```

```
» x=simplify(ME*xo)
```

```
x =
```

```
[ 9/8*exp(-2*t)-1/8*exp(-10*t)]  
[ -9/4*exp(-2*t)+5/4*exp(-10*t)]
```

```
» y=C*x
```

```
y =
```

```
45/2*exp(-2*t)-5/2*exp(-10*t)
```

```
» pretty(y)
```

```
45/2 exp(-2 t) - 5/2 exp(-10 t)
```

B4) Usando Algún Diagrama de Estado del Sistema.-

Se verá el método con un ejemplo:

Si el sistema de control regulador, tiene el diagrama de estado indicado en la figura 3.

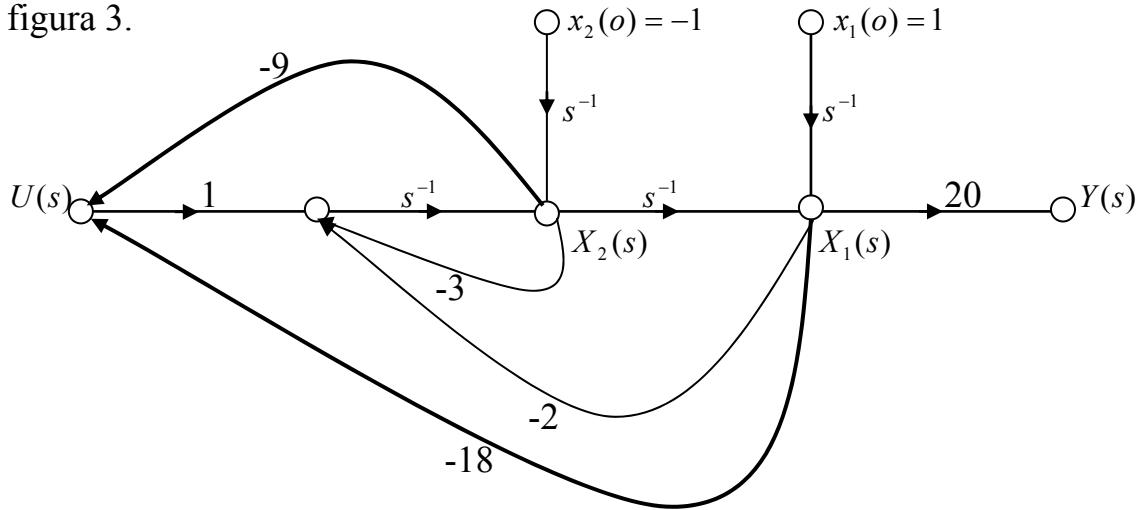


Figura 3

Los polos de la planta están en $P_1 = -2$ y $P_2 = -1$, y se llevaron a $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -10$.

$$\text{Para la planta: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [20 \ 0] \quad D = [0]$$

$$\text{Para el sistema regulador: } Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -12 \end{bmatrix} \quad Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Cc = [20 \ 0] \quad Dc = [0]$$

La ecuación característica del sistema es:

$$\Delta(s) = 1 + 3s^{-1} + 2s^{-2} + 9s^{-1} + 18s^{-2} = 1 + 12s^{-1} + 20s^{-2}.$$

Por lo tanto:

$$X_1(s) = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} x_{10} + \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} x_{20} = \frac{s^{-1}(1+12s^{-1})}{\Delta} x_{10} + \frac{s^{-2}}{\Delta} x_{20}$$

$$X_2(s) = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2}{\Delta} x_{10} + \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} x_{20} = \frac{-20s^{-2}}{\Delta} + \frac{s^{-1}}{\Delta} x_{20}$$

Por ende:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s^{-1}(1+12s^{-1}) & s^{-2} \\ -20s^{-2} & s^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+12}{(s+2)(s+10)} & \frac{1}{(s+2)(s+10)} \\ \frac{-20}{(s+2)(s+10)} & \frac{s}{(s+2)(s+10)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

La respuesta homogénea será:

$$\bar{x}(t) = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{5/4}{(s+2)} + \frac{-1/4}{(s+10)} & \frac{1/8}{(s+2)} + \frac{-1/8}{(s+10)} \\ \frac{-5/2}{(s+2)} + \frac{5/2}{(s+10)} & \frac{-1/4}{(s+2)} + \frac{5/4}{(s+10)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estado será:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1.25e^{-2t} - 0.25e^{-10t} & 0.125e^{-2t} - 0.125e^{-10t} \\ -2.5e^{-2t} + 2.5e^{-10t} & -0.25e^{-2t} + 1.25e^{-10t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8}e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-10t} \\ \frac{-9}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-10t} \end{bmatrix}$$

La respuesta de salida es:

$$y(t) = Cc \bar{x}(t) = [20 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 20x_1(t)$$

$$y(t) = 20(1.125e^{-2t} - 0.125e^{-10t})$$

Finalmente:

$$y(t) = \frac{45}{2}e^{-2t} - \frac{5}{2}e^{-10t}$$

Además la acción de control será:

$$u(t) = -K \bar{x}(t) = -[18 \quad 9] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -18x_1(t) - 9x_2(t)$$

$$u(t) = -9e^{-10t}$$

$x_1(t)$; $x_2(t)$; $y(t)$ y $u(t)$, se pueden obtener, (graficar), con el programa Simulink de Matlab, por ejemplo.

Se colocan las condiciones iniciales en los integradores, 1 y -1.

El sistema es el representado en la figura 4.-

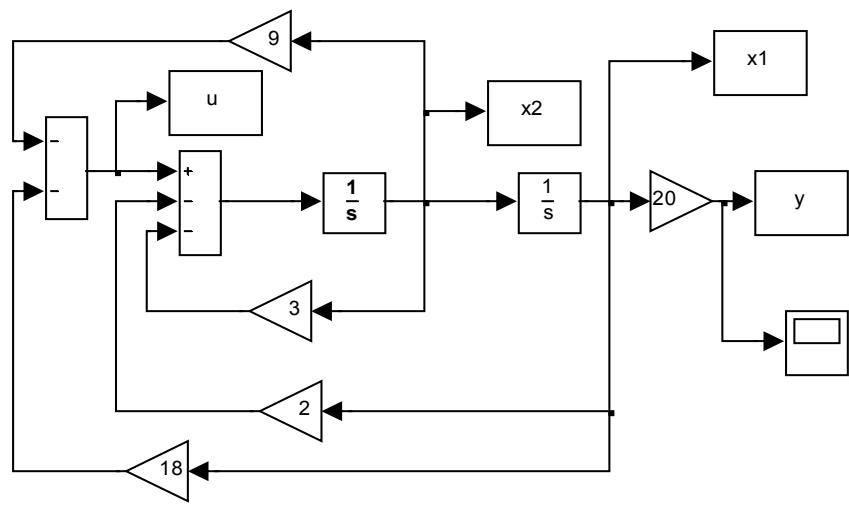


Figura 4

Las respuestas temporales son graficadas en la figura 5, como se puede ver todas ellas tienden a cero cuando t tiende a infinito.-

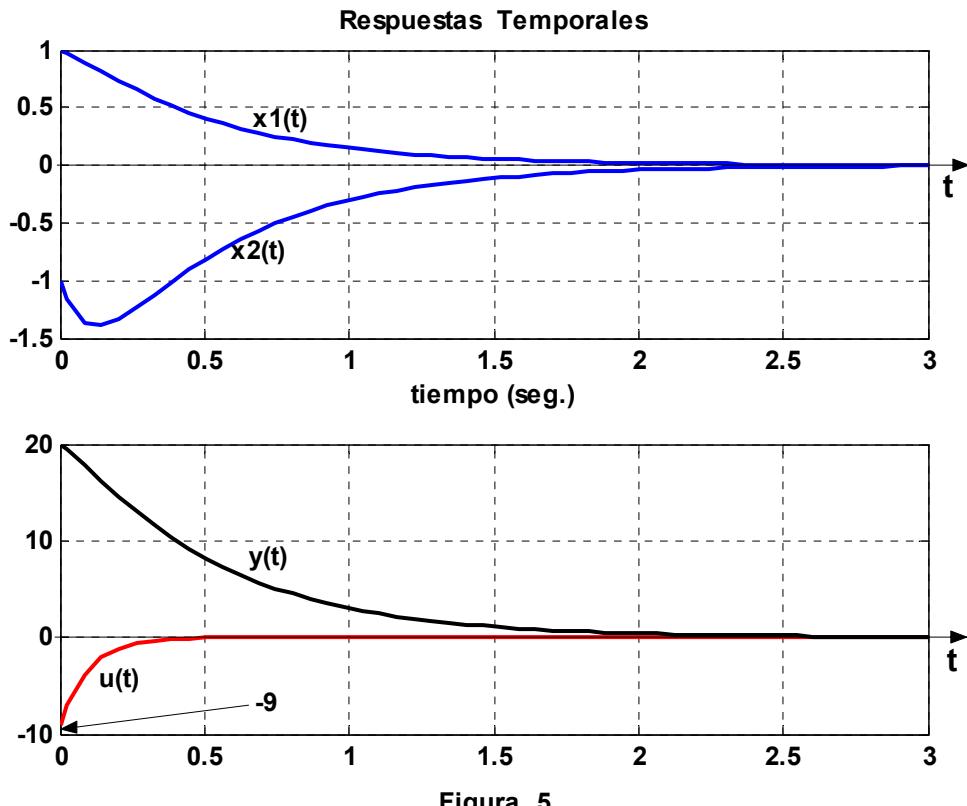


Figura 5

C) Usando la Computadora para Graficar las Respuestas del Sistema.-

Hay varios modos de graficar las respuestas del sistema, se verán algunas de ellas.

Se puede utilizar la función Step de Matlab, para graficar las respuestas de la solución homogénea: $\bar{x}(t)$ e $y(t)$ con $u(t) = 0$ y $\bar{x}(0)$. -

Sea el sistema en estudio el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= A\bar{x}(t) \quad (1) \\ y(t) &= C\bar{x}(t)\end{aligned}$$

Con $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$

Transformando por Laplace la ecuación (1), se tendrá:

$$s\bar{X}(s) - \bar{x}(0) = A\bar{X}(s) \Rightarrow s\bar{X}(s) = A\bar{X}(s) + \bar{x}(0)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + \bar{x}_0 \delta(t) \quad (2)$$

Donde $\delta(t)$ es la función impulso unitario.-

Definiremos un vector de estado auxiliar, ($\bar{z}(t)$), de tal forma que su derivada primera sea igual al vector de estado real, o sea:

$$\dot{\bar{z}}(t) = \bar{x}(t) \quad (3)$$

Reemplazando en (2), quedará:

$$\ddot{\bar{z}}(t) = A\dot{\bar{z}}(t) + \bar{x}(0)\delta(t) ; \text{ integrando:}$$

$$\dot{\bar{z}}(t) = A\bar{z}(t) + \bar{x}(0)\mu_s(t)$$

Donde $\mu_s(t)$ es la función escalón unitario.

Si se llama a $\bar{x}(0) = B$, y a $\mu_s(t) = u(t)$, la última expresión quedará:

$$\boxed{\dot{\bar{z}}(t) = A\bar{z}(t) + Bu(t)} \quad (4) \quad \text{Ecuación de estado auxiliar.}$$

La ecuación de salida del modelo auxiliar teniendo en cuenta la ecuación (3), puede ser:

$$\boxed{\bar{x}(t) = A\bar{z}(t) + Bu(t)} \quad (5)$$

Como se puede ver la respuesta de salida del modelo auxiliar, $\bar{x}(t)$, a una entrada escalón unitario $u(t) = \mu_s(t)$, es la respuesta homogénea del vector de estado real con $\bar{x}(0)$ como condiciones iniciales.

Usando el modelo auxiliar con:

Aaux. = A ; Baux. = $B \equiv \bar{x}(0)$; Caux. = A y Daux. = $B = \bar{x}(0)$; se podrá en consecuencia obtener la respuesta del vector de estado homogénea.

Una vez obtenida $\bar{x}(t)$, la salida real homogénea $y(t)$, se obtiene así:

$$y(t) = C\bar{x}(t)$$

Donde C es la matriz de salida del sistema real bajo estudio.

También para graficar la salida real homogénea $y(t)$, se puede usar el procedimiento siguiente:

Como se sabe $\bar{x}(t) = \bar{A}\bar{x}(t)$; $y(t) = C\bar{x}(t)$ y $\bar{x}(t) = \bar{z}(t)$

Por tanto:

$$y(t) = C\bar{z}(t) \quad (6)$$

Como:

$$\bar{z}(t) = \bar{A}\bar{z}(t) + Bu(t) ; \text{ remplazando en (6):}$$

$$y(t) = (CA)\bar{z}(t) + (CB)u(t)$$

Llamando $A_{aux.} = A$; $B_{aux.} = \bar{x}(o)$; $C_{aux.} = CA$ y $D_{aux.} = CB$

Se puede graficar la respuesta homogénea de salida: $y(t)$. -

Ejemplo:

Sea un sistema regulador con las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 1] \quad y \quad \bar{x}(o) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En Matlab la función Step con argumento en el miembro izquierdo es [vector de salida, vector tiempo, vector de estado] = Step (M); donde M es el modelo del sistema auxiliar que se ingresa así:

```
» A=[0 1;-10 -5];
» B=[2;1];
» M=ss(A,B,A,B);
» [x,T,z]=step(M); » plot(T,x) , grid
```

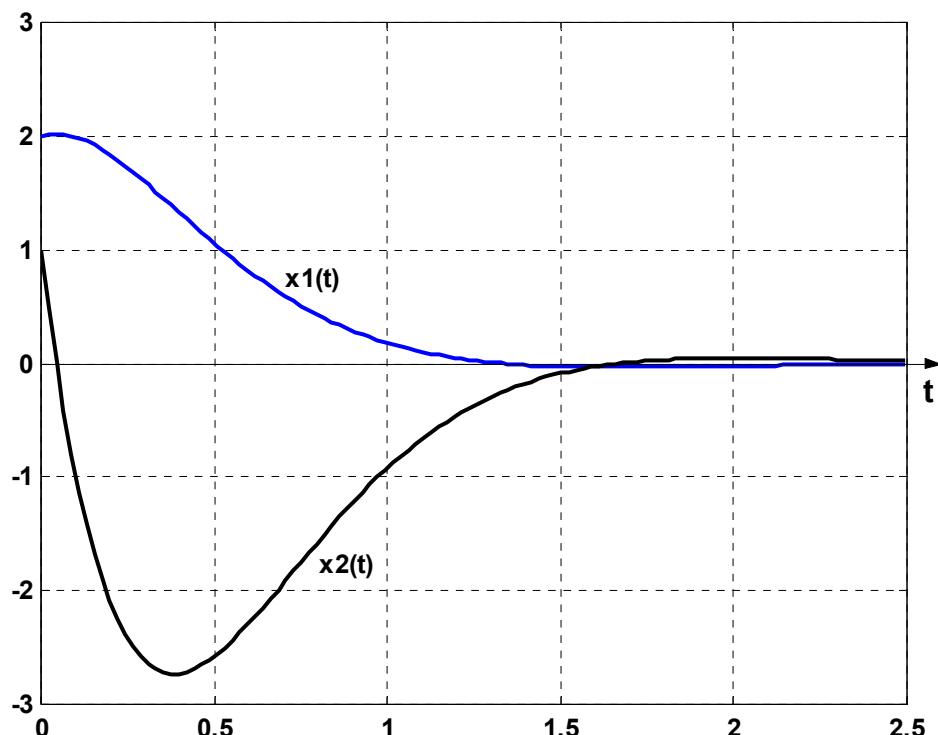


Figura 6

La figura 6 muestra las respuestas homogéneas del vector de estado.-
También se pueden graficar los estados por separado:

Como: $x = [x_1 \ x_2]$; $x^T = x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \equiv \bar{x}(t)$, se podrá escribir:

```
» A=[0 1;-10 -5];
» B=[2;1];
» M=ss(A,B,A,B);
» [x,T,z]=step(M);
» x1=[1 0]*x';
» x2=[0 1]*x';
» subplot(211),plot(T,x1),grid
» subplot(212),plot(T,x2),gris
```

Las respuestas se muestran en la figura 7.

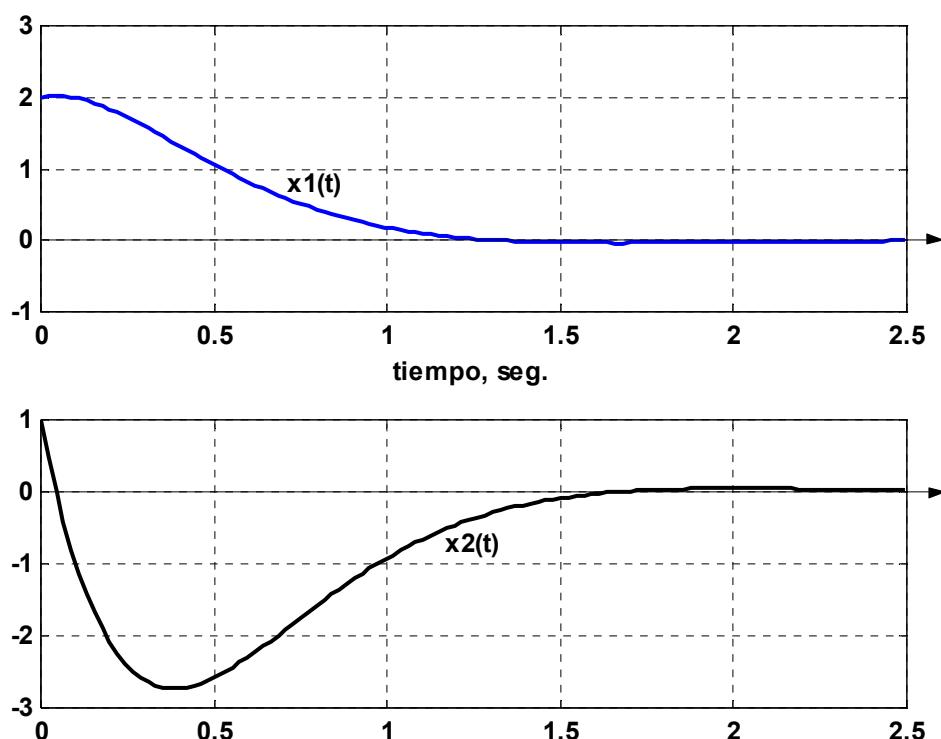


Figura 7

También se puede graficar, además de $x_1(t)$ y $x_2(t)$, los “estados” del modelo auxiliar $z_1(t)$ y $z_2(t)$, por curiosidad académica nada más.

También la salida real del sistema bajo estudio $y(t)$.

```
» subplot(221),plot(T,x1)
» subplot(222),plot(T,x2)
» C=[1 1];
» y=C*x';
» subplot(223),plot(T,y)
» subplot(224),plot(T,z)
```

Estas respuestas se muestran en la figura 8.

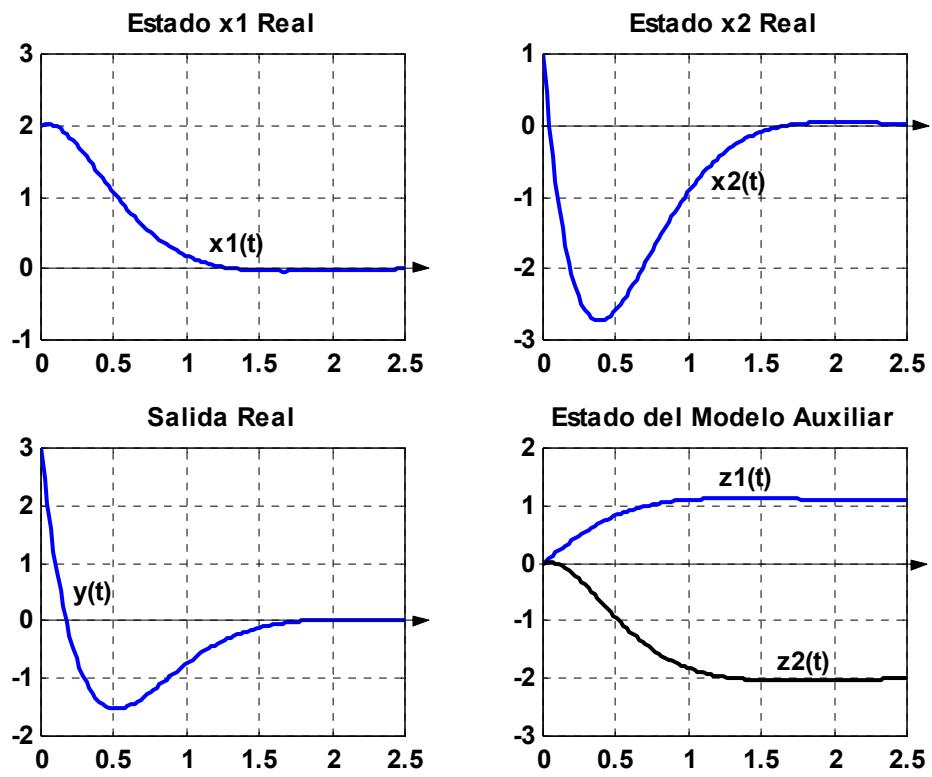


Figura 8

La última forma que se estudio era:

- » $M = ss(A, B, C^*A, C^*B)$;
- » $[y, T, z] = step(M)$;
- » $plot(T, y)$, gris

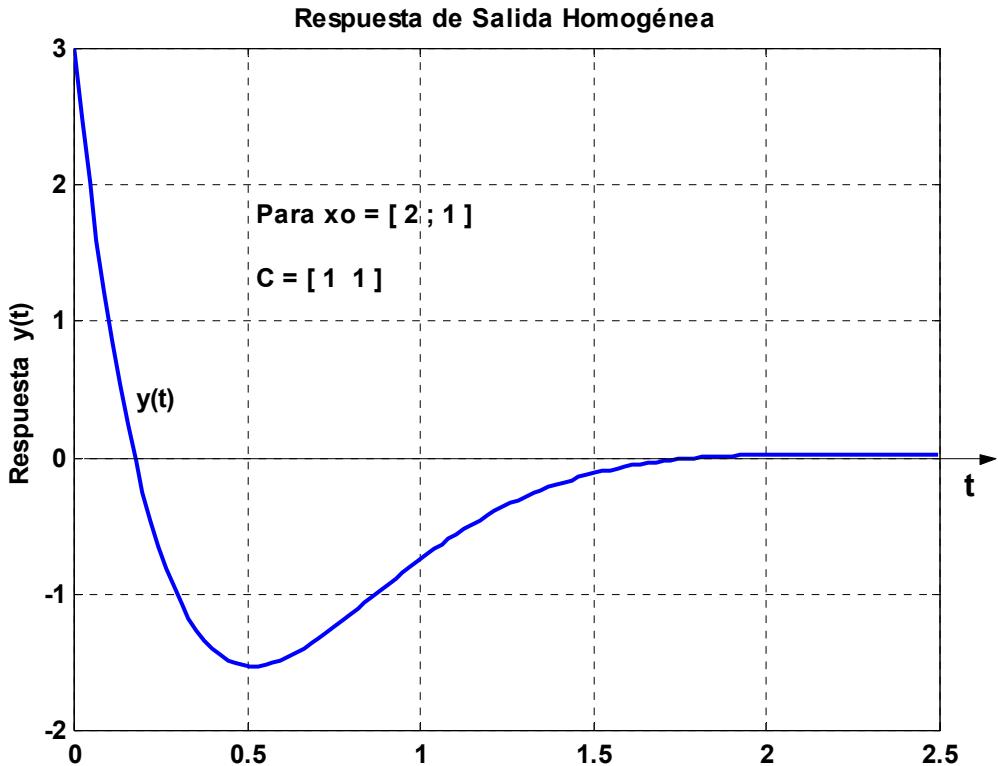


Figura 9

La figura 9 muestra la respuesta de salida.

Otras Funciones Usadas por Matlab para Graficar la Solución Homogénea.

Primero se crea el modelo del sistema en estudio con:

1º) $S = ss(A,B,C,D)$.-

Luego se usa la función **INITIAL** : La misma obtiene la respuesta homogénea, en el espacio de estado, para una condición inicial determinada.-

2º) Initial (S,xo): Grafica la respuesta homogénea $y(t)$ del sistema con el modelo en el espacio de estado S , y las condiciones iniciales de los estados $x(0)$. El valor del tiempo final y el número de puntos se eligen automáticamente.-

3º) Initial (S,xo,Tfinal): Se establece el tiempo final previamente para $y(t)$.

4º) Initial (S,xo,T): Se especifica con anterioridad el vector del tiempo que se empleará. El mismo es de la forma: $[0; \Delta(t); T_f]$, donde $\Delta(t)$ es el intervalo de tiempo deseado entre muestra y muestra.-

Veremos cuando está involucrado un argumento en el miembro izquierdo:

5º) $[Y,T,X] = Initial (S,xo,T)$ o simplemente : $[Y,T,X] = Initial (S,xo)$:

Entrega el vector de la respuesta de salida $y(t) = Y$, el vector del tiempo T , (si no se pone el programa lo elige), y las respuestas temporales del vector de estado $\bar{x}(t)=X$. No se dibuja ningún grafico en la pantalla.

Luego con la función **plot** se grafica lo que se desea.-

Veamos un ejemplo:

```
» A=[0 1 0;0 0 1;-160 -56 -14];
» B=[0;0;160];
» C=[1 0 1];
» D=0;
» xo=[1;-1;2];
» T=[0:0.01:2.5];
» S=ss(A,B,C,D);
» [Y,T,X]=initial(S,xo,T);
» plot(T,X)
» grid, hold on
» plot(T,Y,'k-')
```

En la figura 10, se muestran las respuestas requeridas.-

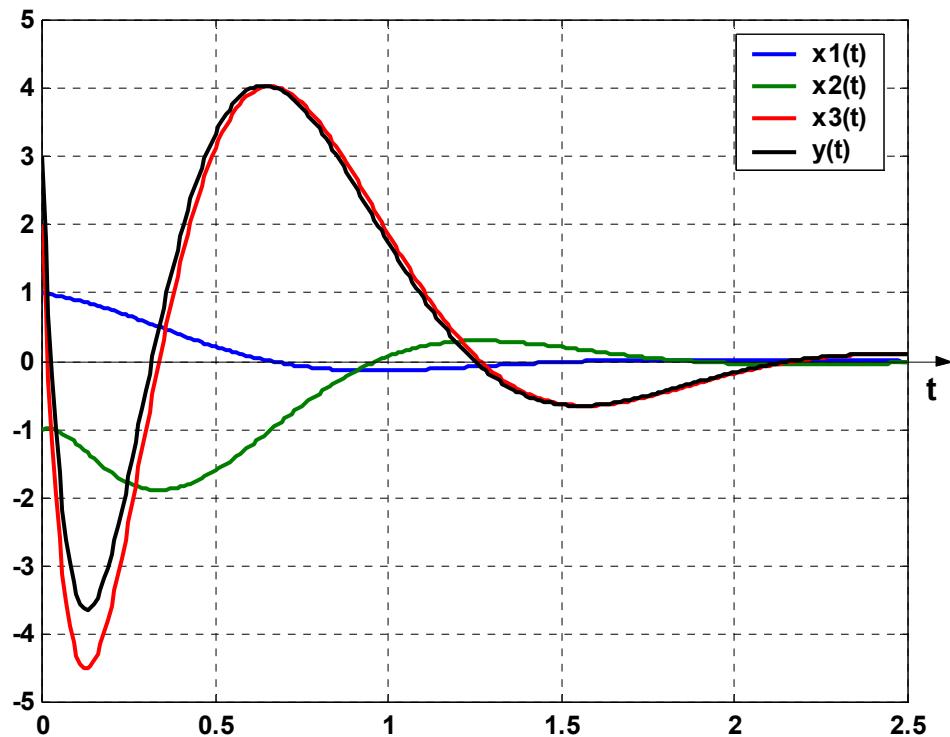


Figura 10

También se pueden graficar por separado, de la forma siguiente, (una vez ingresado el sistema, la condición inicial y el vector del tiempo):

```

» A=[0 1 0;0 0 1;-160 -56 -14];
» B=[0;0;160];
» C=[1 0 1];
» D=0;

» S=ss(A,B,C,D);

» xo=[1;-1;2];

» T=[0:0.01:2.5];

» [Y,T,X]=initial(S,xo,T);

» x1=[1 0 0]*X';
» x2=[0 1 0]*X';
» x3=[0 0 1]*X';
» subplot(221),plot(T,x1)
» subplot(222),plot(T,x2)
» subplot(223),plot(T,x3)
» subplot(224),plot(T,Y)

```

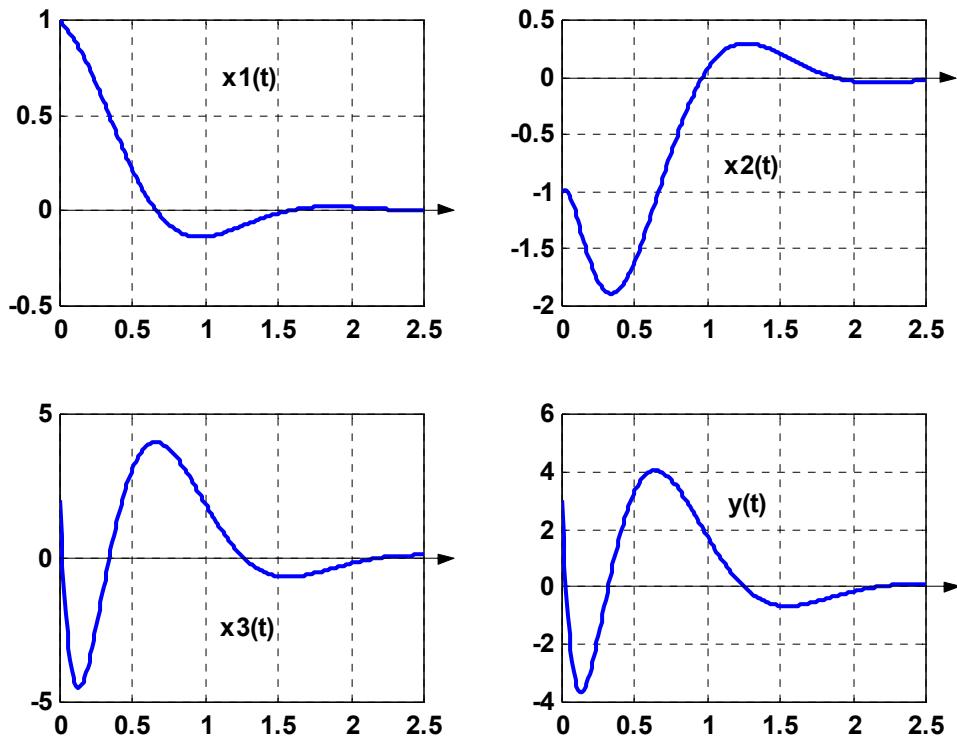


Figura 11

Con el programa Csad se pueden usar las funciones:
Svplot o Svdesign.-

En el Matlab 5.3 para que las mismas funcionen bien hay que hacer lo siguiente:
Como en Matlab 5.3 tiene un programa que también se llama Svplot, hay que ubicarlo y cambiarle de nombre. La ubicación es:

C :\ MatlabR11 \ toolbox \ control \ ctrlgui \ @svplot

En la carpeta @svplot, está Svplot, se pide cambiar, por ejemplo a: Ssvplot.-
Para el programa Svplot; una vez ingresado el modelo del sistema aparece un menú con varias opciones, (indicadas más adelante).-

Para la Svdesign, se puede entrar el modelo del sistema como :

- 1) La función de transferencia.
- 2) En variables de estado, las matrices A, B, C y D.-

Las opciones del menú principal se indicarán más adelante.

Para mayor información sobre estos programas, hay una publicación en la página Web de la cátedra, o en la fotocopiadora de la Facultad.-

Para el Matlab 6.5, no hace falta hacer ningún arreglo.-

Funciones del Csad para Graficar las Respuestas Homogéneas del Sistema, en Variables de Estado:

1º) Svpplot: Encuentra la respuesta de un sistema después de ingresar el usuario las matrices del modelo en variable de estado.

2º) Svpplot(A, B, C, D): Encuentra la respuesta del tiempo dada las matrices variables del modelo en variables de estado.

La respuesta al escalón unidad esta por defecto. Las respuestas al escalón, del impulso y de la rampa con amplitudes arbitrarias son opcionales.

3º) Svdesign: Es una función conducida por un menú que realiza un numero de tareas para el análisis de modelos en variables de estado de SISO para después de solicitar al usuario que ingrese las matrices del modelo en variable de estado o la función de transferencia.

4º) Svdesign(A, B, C, D): Utiliza las matrices en variables de estado A, B, C, D, ingresadas en la línea de comandos del programa MatLab.

5º) Svdesign(N, D): Convierte la función de transferencia $\frac{N(s)}{D(s)}$ a la forma de variables de estado, y después ofrece el menú a disposición del usuario.

Veamos la función **Svpplot:** las operaciones del menú principal, una vez entrado el modelo del sistema ya tratado con la función Step de Matlab, son:

- SVPLOT OPTIONS -

Plot Stimulus
X Resp Final time
Zoom New A,B,C,D
Grid Display Sys
Hold Attributes
Label Eigenvalues
View data
Quit Interpolate

SVPLOT > s

Stimulus: Step,Impulse,Ramp,Zero-input [s] > z (para la solución homogénea)
Enter I.C. vector (1x3) > [1;-1;2]

Initial condition vector is:

1
-1
2

Luego:

SVPLOT > f

Enter desired final time [3.257] > 2.5

Luego:

SVPLOT > p (grafica la salida $Y_p(t)$, de color rojo)

Luego:

SVPLOT > H (la ventana del grafico será mantenida)

Luego:

SVPLOT > X

Enter state to plot: 1 to 3 > 1 (grafica $X_1 p(t)$, de color azul)

Luego:

SVPLOT > X

Enter state to plot: 1 to 3 > 2 (grafica $X_2 p(t)$, de color azul)

Luego:

SVPLOT > X

Enter state to plot: 1 to 3 > 3 (grafica $X_3 p(t)$, de color azul)

Las respuestas obtenidas se muestran en la figura 12

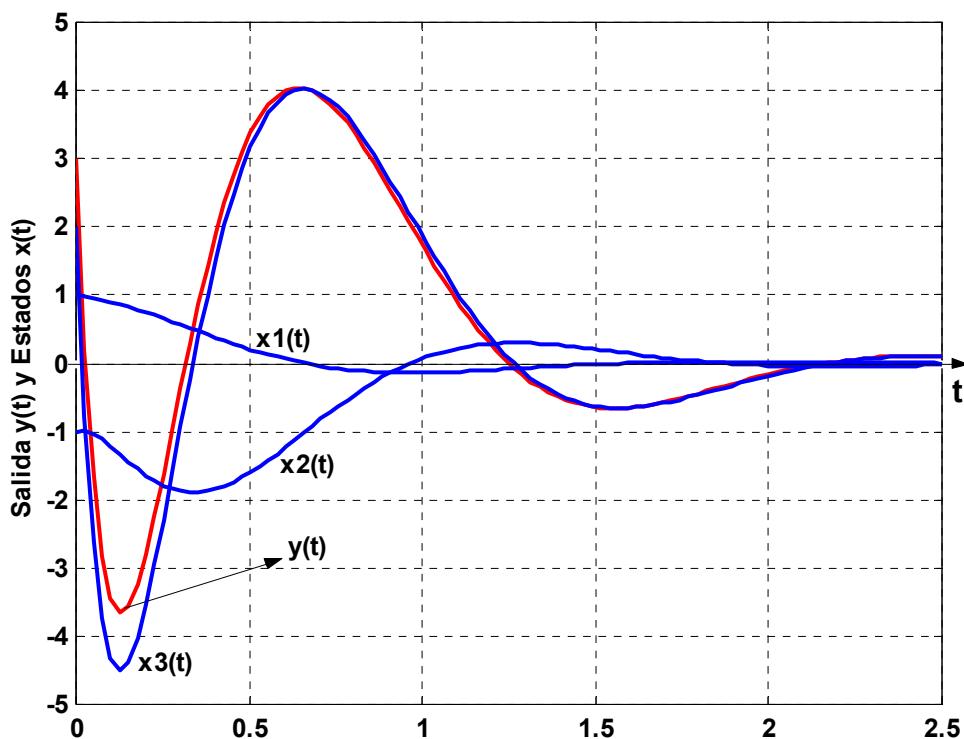


Figura 12

Programa SVDESIGN del Csad.

Una vez ingresadas las matrices del sistema en estudio, se puede proceder así:

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN >d

Display Current,Original,or Both Systems? [c] >

Current system is:

A matrix is:

0	1	0
1	0	1
-156	-56	-14

B matrix is:

0
0
160

C matrix is:

1	0	1
---	---	---

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > r, (llama a la función Svpplot)

- SVPLOT OPTIONS -

Plot	Stimulus
X Resp	Final time
Zoom	New A,B,C,D
Grid	Display Sys
Hold	Attributes
Label	Eigenvalues
	View data
Quit	Interpolate

SVPLOT >

Que nos permite obtener la solución homogénea, para unas condiciones iniciales dadas. También la particular para diferentes entradas: escalón, rampa e impulso, como ya se comentó.

Veamos el mismo sistema pero con otras condiciones iniciales:

SVPLOT > s

Stimulus: Step,Impulse,Ramp,Zero-input [z] > z

Enter I.C. vector (1x3) > [1 1 1]

Initial condition vector is:

1

1

1

Para graficar $x_1(t)$, se procede así:

SVPLOT > x

Enter state to plot: 1 to 3 > 1

Y se grafica $x_1(t)$

Para mantener la ventana, (el mismo grafico)

SVPLOT > h

Current plot held

Se grafican además las otras dos variables de estado y la salida $y(t)$ con plot.

Las mismas se muestran en la figura 13.

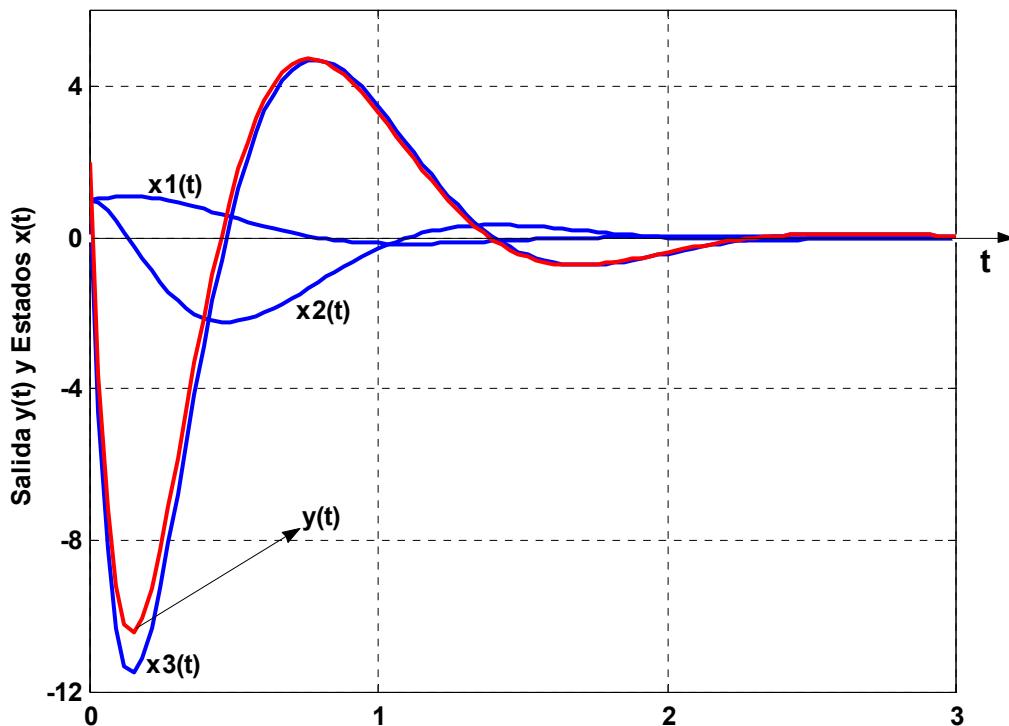


Figura 13

Solución Particular o Forzada:

Sería la evolución temporal de los estados $\bar{x}(t)$ y de la salida $y(t)$, para las condiciones iniciales nulas $\bar{x}(0) = \bar{0}$.

Veremos tres formas para obtenerlas:

1º) Aplicando la transformada de Laplace.-

2º) Usando algún diagrama de estado del sistema.

3º) Empleando programas de computación para obtener las gráficas de las mismas. También se puede usar el Simulink de Matlab.

1º) Si tenemos:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\bar{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\bar{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2)$$

Transformando por Laplace la ecuación (1), con $\bar{x}(0) = \bar{0}$;

$$s\bar{X}(s) = A\bar{X}(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)\bar{X}(s) = BU(s)$$

Por lo tanto:

$$\bar{X}(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

Anti transformando quedará:

$$\boxed{\bar{x}_p(t) = L^{-1} [(sI - A)^{-1} BU(s)]}$$

y la señal de salida será:

$$y(t) = C L^{-1} [(sI - A)^{-1} BU(s)] + DU(s)$$

$$\boxed{y(t) = C \{L^{-1} [(sI - A)^{-1} B] + D\}U(s)}$$

Veamos un ejemplo.

Se verá el primer ejemplo que ya se determinó la solución homogénea, ahora se determinará la forzada o particular:

Ejemplo:

Las matrices del sistema eran:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = [0]$$

Se supondrá que la señal de entrada es un escalón unitario, $u(t) = \mu_s(t)$, cuya transformada de Laplace es, $U(s) = \frac{1}{s}$.

Determinar $\bar{x}_p(t) = ?$ e $y_p(t) = ?$.

$\bar{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1} BU(s)]$; la ecuación característica es:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) = 0$$

Los valores característicos serán:

$$\lambda_1 = -1 \quad y \quad \lambda_2 = -2$$

Por lo tanto:

$$\bar{x}_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \right] =$$

$$\bar{x}_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\begin{bmatrix} \frac{0.5}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{0.5}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Por ende:
$$\begin{cases} x_1 p(t) = 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ x_2 p(t) = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

La salida será:

$$y_p(t) = C \bar{x}_p(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 p(t) \\ x_2 p(t) \end{bmatrix} = x_1 p(t)$$

$$y_p(t) = 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t}$$

2º) Usando un Diagrama de Estado:

Así como la homogénea, la solución forzada puede obtenerse a partir de un diagrama de estado del sistema en estudio, usando además la fórmula de ganancia de Masson y el principio de superposición.

Los nodos de salida serán las variables de estado $X_i(s)$, y las entradas $u_j(t)$ como los de entrada. El siguiente ejemplo ilustra éste método. El mismo consiste en un sistema de control con la realimentación de los estados más un control integral, sistema que tiene una entrada de perturbación además de la señal de referencia. Un diagrama de estado del sistema de control de la velocidad de un motor de corriente continua es el mostrado en la figura 14.

Se supone que el coeficiente de fricción viscosa es despreciable, $B \approx 0$.

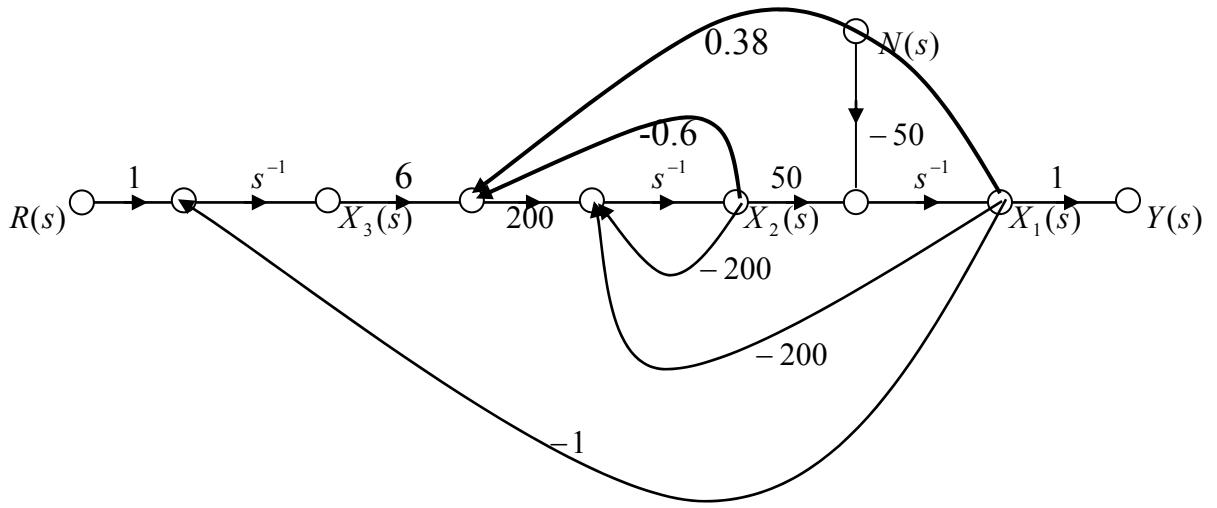


Figura 14

Las variables de estado son:

$$\begin{cases} x_1(t) = \omega(t); \text{Velocidad Angular del Motor} \\ x_2(t) = i_a(t); \text{Corriente de Armadura del Motor} \end{cases}$$

El polinomio característico será:

$$\Delta(s) = 1 - (-200s^{-1} - 10000s^{-2} - 60000s^{-3} - 120s^{-1} + 3800s^{-2})$$

$$\Delta(s) = 1 + 60000s^{-3} + 6200s^{-2} + 320s^{-1}.$$

Las variables de estado que interesan son solo $x_1(t) = \omega(t)$ y $x_2(t) = i_a(t)$:

$$X_1(s) = \frac{M_1\Delta_1}{\Delta(s)}R(s) + \frac{M_1\Delta_1}{\Delta(s)}N(s) = \frac{60000s^{-3}}{\Delta(s)}R(s) + \frac{-50s(1+320s^{-1})}{\Delta(s)}N(s)$$

$$X_1(s) = \frac{60000}{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000}R(s) + \frac{-50s(s+320)}{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000}N(s)$$

De igual manera para $X_2(s)$ se tendrá:

$$X_2(s) = \frac{M_1\Delta_1}{\Delta(s)}R(s) + \frac{M_1 + M_2 + M_3}{\Delta(s)}N(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1200s^{-2}}{\Delta(s)}R(s) + \frac{6200s^{-2} + 60000s^{-3}}{\Delta(s)}$$

$$X_2(s) = \frac{1200s}{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000}R(s) + \frac{6200s + 60000}{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000}N(s)$$

$$\text{Si } n(t) = T_L \mu_s(t) \Rightarrow N(s) = \frac{T_L}{s}$$

$$\text{y } r(t) = \mu_s(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$$

Se puede colocar en forma matricial, y se tendrá:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50s(s+320) & 60000 \\ \frac{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000}{(6200s + 60000)} & \frac{1200s}{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000} \\ \frac{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000}{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000} & \frac{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000}{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ \frac{s}{s} \\ 1 \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

o sea:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-50T_L(s+320)}{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000} + \frac{60000}{s^4 + 320s^3 + 6200s^2 + 60000s} \\ \frac{T_L(6200s + 60000)}{s^4 + 320s^3 + 6200s^2 + 60000s} + \frac{1200}{s^3 + 320s^2 + 6200s + 60000} \end{bmatrix}$$

Si $T_L = 0.5$, o sea, $n(t) = 0.5\mu_S(t)$.-

Descomponiendo las funciones de transferencia en suma de fracciones parciales simples, y aplicando la transformada inversa de Laplace, el resultado es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.0083e^{-300t} - 0.992e^{-10t} \cos(10t) - 3.741e^{-10t} \sin(10t) \\ 0.5 + 0.0499e^{-300t} - 0.5498e^{-10t} \cos(10t) - 0.9466e^{-10t} \sin(10t) \end{bmatrix} \quad (*)$$

Para $t = 0 \Rightarrow x_1(0) = 0 \Rightarrow \omega(0) = 0$.-

Para $t \rightarrow \infty \Rightarrow x_1(\infty) = 1 \Rightarrow \omega(\infty) = 1$

Para $t = 0 \Rightarrow x_2(0) = 0$

Para $t \rightarrow \infty \Rightarrow x_2(\infty) = 0.50 \equiv T_L$

Para graficar la variación temporal de los estados $x_1(t)$ y $x_2(t)$, expresiones (*), en Matlab, se puede usar como ya se estudio, el lenguaje simbólico, las mismas están indicadas en la figura 15.

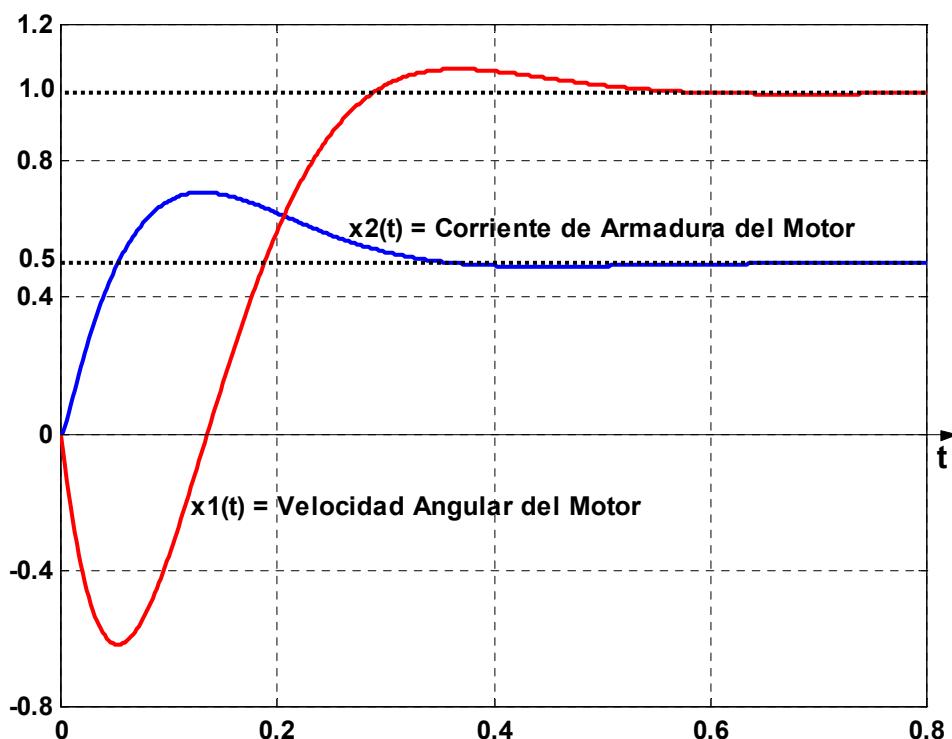


Figura 15

Los comandos del Matlab serian:

```
» syms t  
» x1=1-0.0083*exp(-300*t)-0.991662*exp(-10*t)*cos(10*t)-3.741*exp(-10*t)*sin(10*t);  
» x2=0.5+0.04988*exp(-300*t)-0.54985*exp(-10*t)*cos(10*t)+0.9466*exp(-10*t)*sin(10*t);  
» ezplot(x1,0,0.8)  
» grid  
» hold on  
» ezplot(x2,0,0.8)
```

También se puede usar un esquema de Simulink para graficar las respuestas temporales, como se verá mas adelante.-

Esto se puede obtener también con los siguientes comandos de Matlab:

```
>> A=[0 50 0;-124 -320 1200;-1 0 0]  
A =  
    0      50      0  
   -124    -320    1200  
    -1      0      0  
>> B=[0;0;1]  
B =  
    0  
    0  
    1  
>> E=[-25;0;0]  
E =      →          Matriz del par perturbador.  
    -25  
     0  
     0  
>> C=[1 0 0]  
C =  
    1    0    0  
>> T=[0:0.01:0.8];  
>> S1=ss(A,B,C,0)  
a =  
    x1    x2    x3  
x1    0    50    0  
x2   -124   -320   1200  
x3    -1    0    0
```

b =

	u1
x1	0
x2	0
x3	1

c =

	x1	x2	x3
y1	1	0	0

d =

	u1
y1	0

Continuous-time model.

>> S2=ss(A,E,C,0)

a =

	x1	x2	x3
x1	0	50	0
x2	-124	-320	1200
x3	-1	0	0

b =

	u1
x1	-25
x2	0
x3	0

$\Rightarrow \text{ pues } n(t) = 0.5 \mu_s(t)$

c =

	x1	x2	x3
y1	1	0	0

d =

	u1
y1	0

Continuous-time model.

>> [Y1,T,X1]=step(S1,T);

>> [Y2,T,X2]=step(S2,T);

>> X=X1+X2;

>> plot(T,X)

>> grid

La Respuesta del vector del vector de estado se muestra en la figura 15 a.-

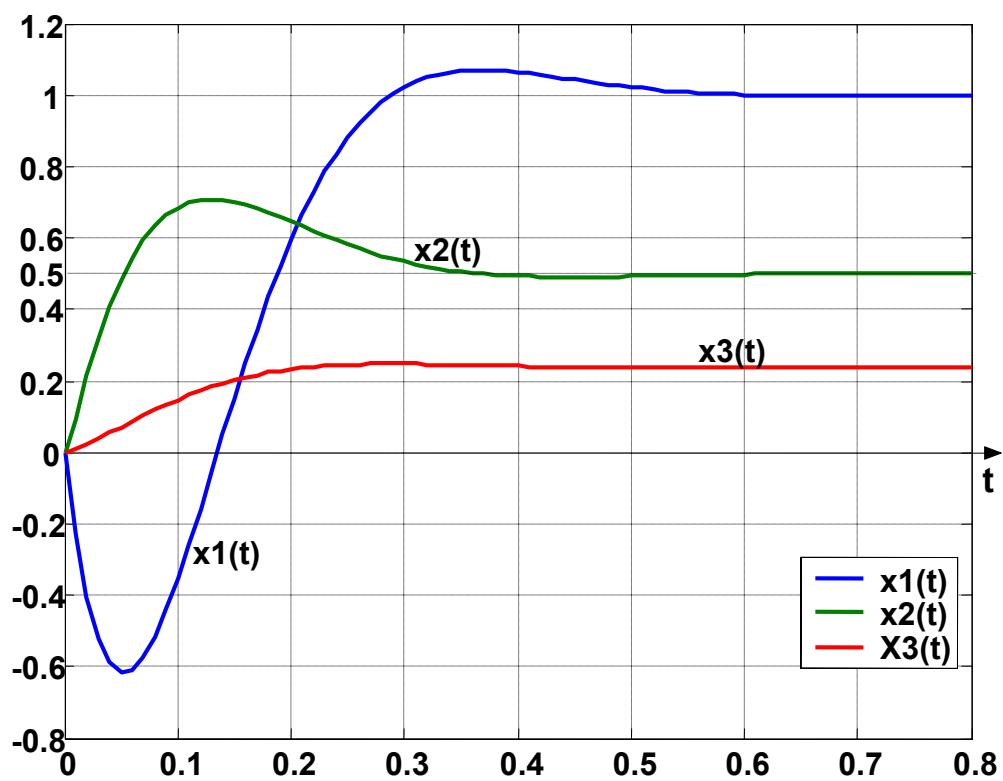


Figura 15a

3º) Usando Programas de Computación para Graficar las Respuestas:

Se mencionaran primero las funciones de Matlab.

Primero se crea el modelo del sistema:

S = ss (A,B,C,D): se crea un modelo en el espacio de estado de tiempo continuo, S, con las matrices A, B, C y D. La salida S es un objeto. Se puede fijar D = 0 para indicar cualquier matriz nula de las dimensiones apropiadas. La función para obtener la respuesta a un escalón de entrada es:

STEP: Respuesta al escalón de entrada en los modelos LTI, con las condiciones iniciales nulas.

1º) Step(S): Traza la respuesta al escalón unitario del sistema LTI, (creados con ss), **solo grafica la salida y(t).**-

2º) Step(S, Tfinal): Simula la respuesta al escalón desde T = 0 al tiempo final Tfinal definido por el usuario.-

3º) Step(S, T): Utiliza el vector T del tiempo para la simulación, previamente definido por el usuario.

4º) Step(S1,S2,S3,.....,T): Grafica la respuesta al escalón unitario de múltiples modelos S1, S2, S3, etc. en un solo gráfico. El vector T del tiempo es opcional. Se puede también especificar un color, un estilo de línea, etc. Por ejemplo:

Step(S1,'r-‘,S2,’y-‘,S3,?g*?).-

Cuando la Función Involucra un Argumento en el Miembro de la Izquierda

5º) [Y,T]=Step(S): Vuelve el **vector** de la respuesta de la salida $y(t)$, y el vector del tiempo T usado para la simulación, el mismo lo fija el programa.-

Para los modelos en el espacio de estado:

6º) [Y,T,X]=Step(S), o [Y,T,X]=Step(S,T): También vuelve además el vector de estado $\bar{x}(t)'=[x_1(t) \ x_2(t) \x_n(t)]$, el vector de salida junto con el vector del rango del tiempo, en el primer caso fijado por el programa y en el segundo por el usuario.-

Luego se puede usar la función PLOT para grafica lo que se deseé:

$$y(t) = f(T) \quad o \quad \bar{x}(t) = f(T).-$$

Veamos un Ejemplo:

```
» A=[0 1 0;0 0 1;-160 -56 -14];
» B=[0;0;160];
» C=[1 0 1];
» D=0;
» T=[0:0.01:3];
» S=ss(A,B,C,D);
» [Yp,T,Xp]=step(S,T);
» plot(T,Xp)
» grid
» Hold on
» plot(T,Yp,'k-')
```

Las respuestas forzadas o particulares se muestran en la figura 16.-

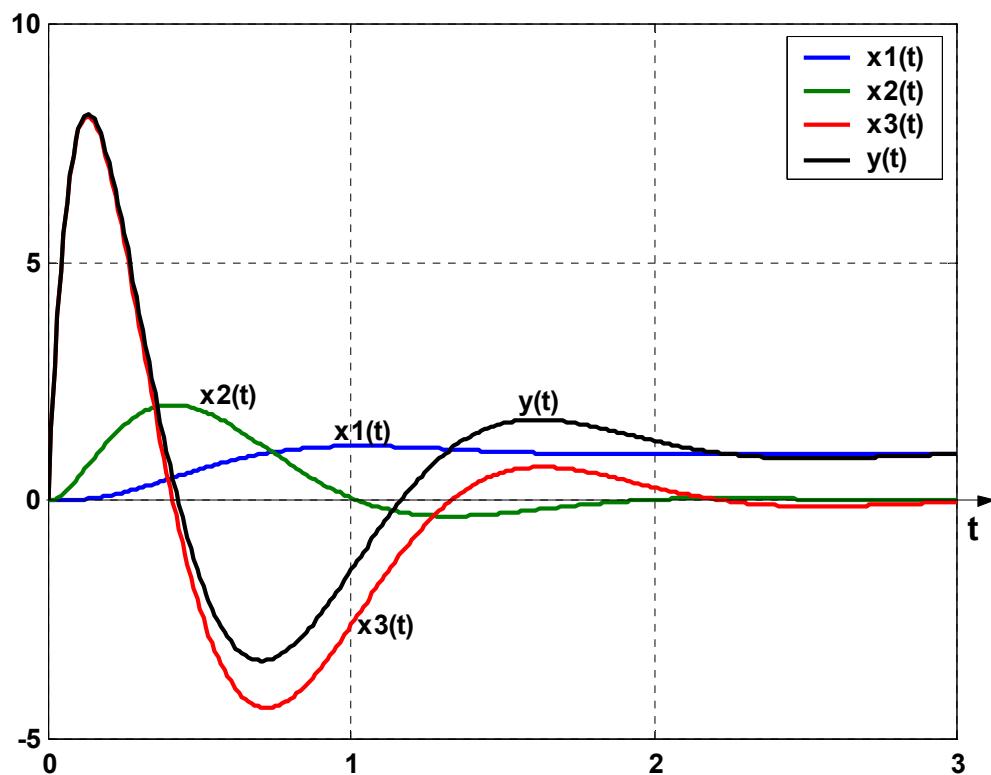


Figura 16

Para Graficar por Separado las Cuatro Respuestas se Puede Proceder Así:

```
» A=[0 1 0;0 0 1;-160 -56 -14];
» B=[0;0;160];
» C=[1 0 1];
» D=0;
» T=[0:0.01:3];
» S=ss(A,B,C,D);
» [Yp,T,Xp]=step(S,T);
» x1=[1 0 0]*Xp';
» x2=[0 1 0]*Xp';
» x3=[0 0 1]*Xp';
» subplot(221)
» plot(T,x1), grid
» subplot(222)
» plot(T,x2), grid
» subplot(223)
» plot(T,x3), grid
» subplot(224)
» plot(T,Yp), gris
```

Las respuestas se muestran en la figura 17.-

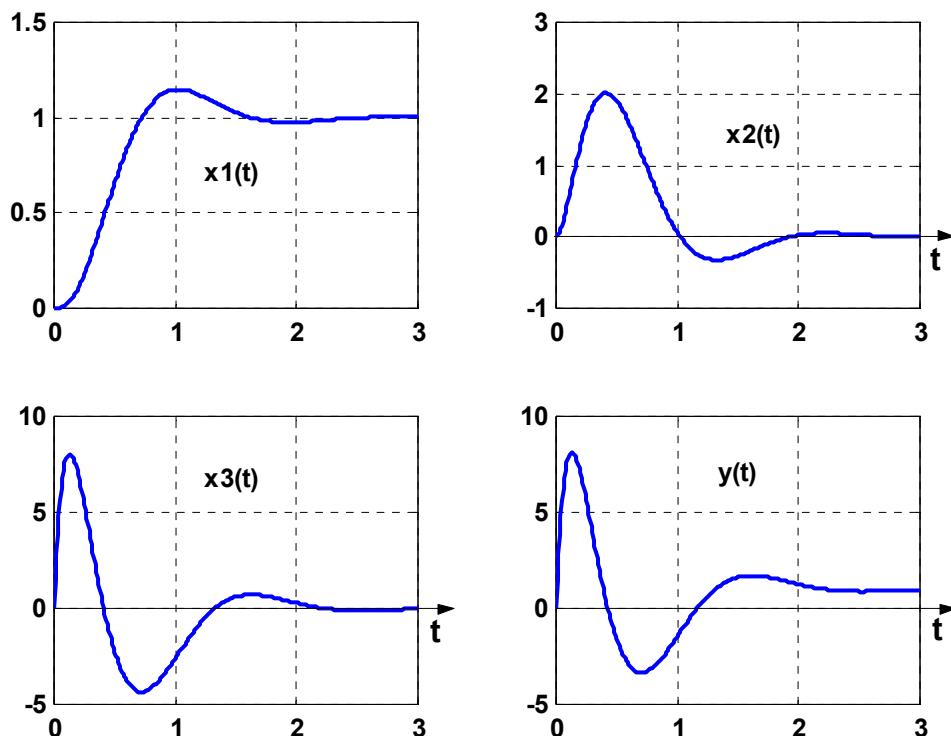


Figura 17

Funciones del Csad para Graficar las Respuestas Particulares o Forzadas de Sistemas en Variables de Estado, con Diferentes Señales de Entrada:

Veamos la función Svplot, ya sea en forma directa o llamada por Svdesign.-

Las opciones del menú principal, una vez ingresado el modelo del sistema tratado únicamente, son las siguientes:

```
» A=[0 1 0;0 0 1;-160 -56 -14];
» B=[0;0;160];
» C=[1 0 1];
» D=0;
» svplot(A,B,C,D)
```

- SVPLOT OPTIONS -

Plot	Stimulus
X Resp	Final time
Zoom	New A,B,C,D
Grid	Display Sys
Hold	Attributes
Label	Eigenvalues
	View data
Quit	Interpolate

SVPLOT > s

Stimulus: Step,Impulse,Ramp,Zero-input [s] > (Entrada Escalón)
Desired Amplitude [1] > (se elige la amplitud del mismo)

SVPLOT > f

Enter desired final time [3.3] > 3 (se elige el tiempo final)

SVPLOT > P (grafica la salida $y_p(t)$, de color rojo)

SVPLOT > h (mantiene la misma ventana para las respuestas siguientes)

SVPLOT > x

Enter state to plot: 1 to 3 > 1 (grafica $x_{1P}(t)$, de color azul)

SVPLOT > x

Enter state to plot: 1 to 3 > 2 (grafica $x_{2P}(t)$, de color azul)

SVPLOT > x

Enter state to plot: 1 to 3 > 3 (grafica $x_{3P}(t)$, de color azul)

La grafica será la misma que se obtuvo con la función Step del Matlab.-

La misma está indicada en la figura 18.

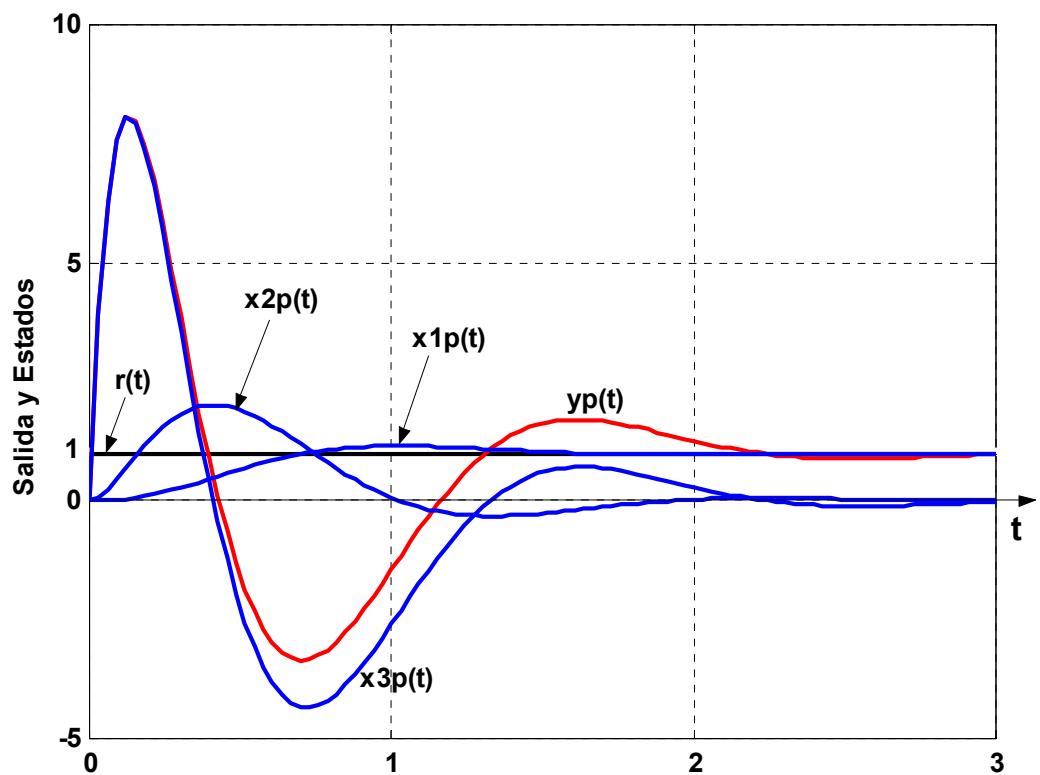


Figura 18

Cuando la entrada es una rampa de pendiente unitaria las mismas respuestas están indicadas en la figura 19.-

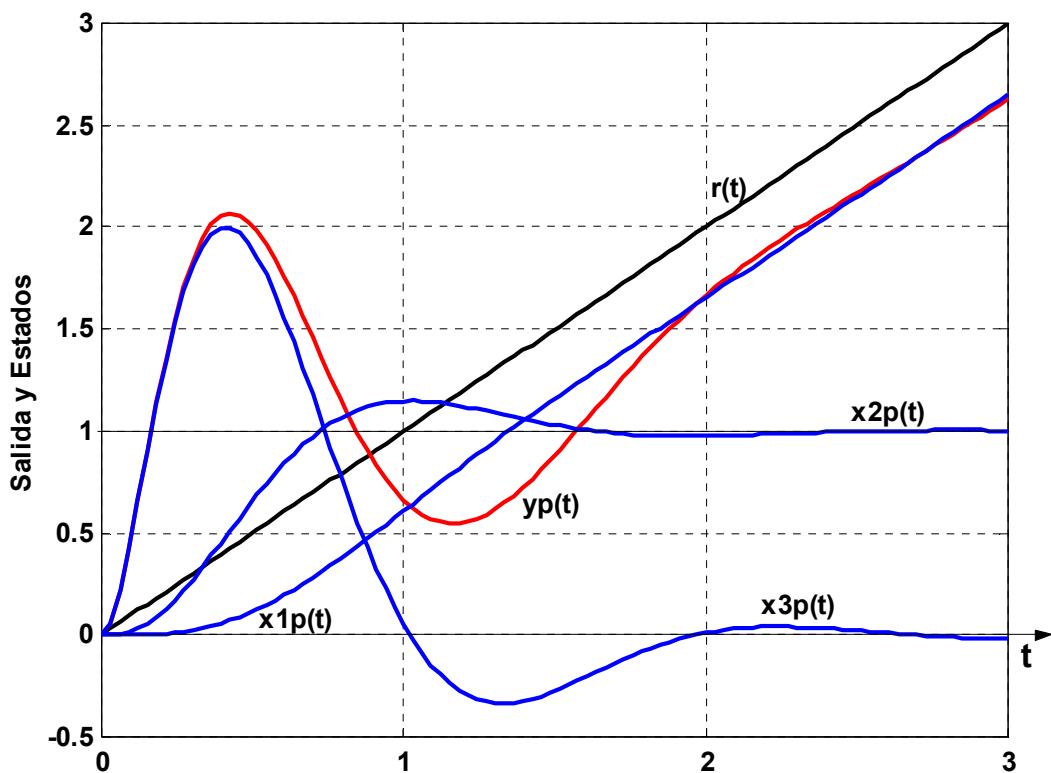


Figura 19

Si la entrada es la función Impulso unitario, procediendo en forma similar las respuestas son las indicadas en la figura 20.-

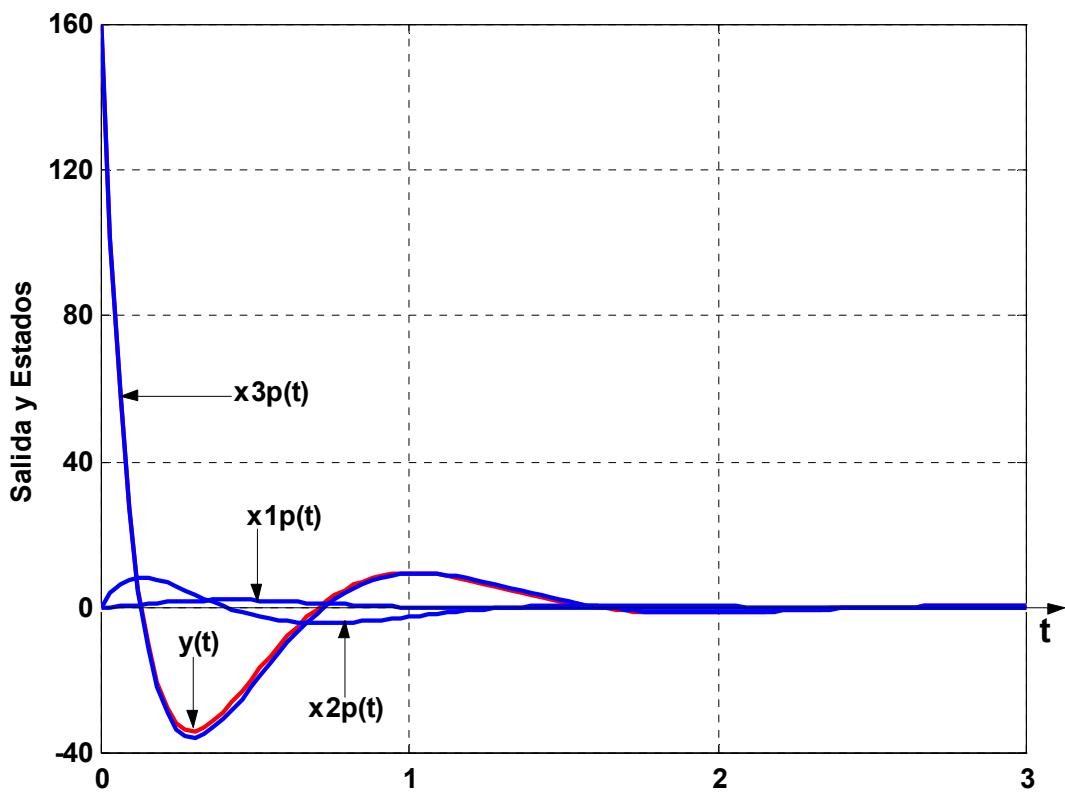


Figura 20

Se puede usar **Simulink** para resolver el problema ya visto del sistema de control de la velocidad angular de un motor de corriente continua.

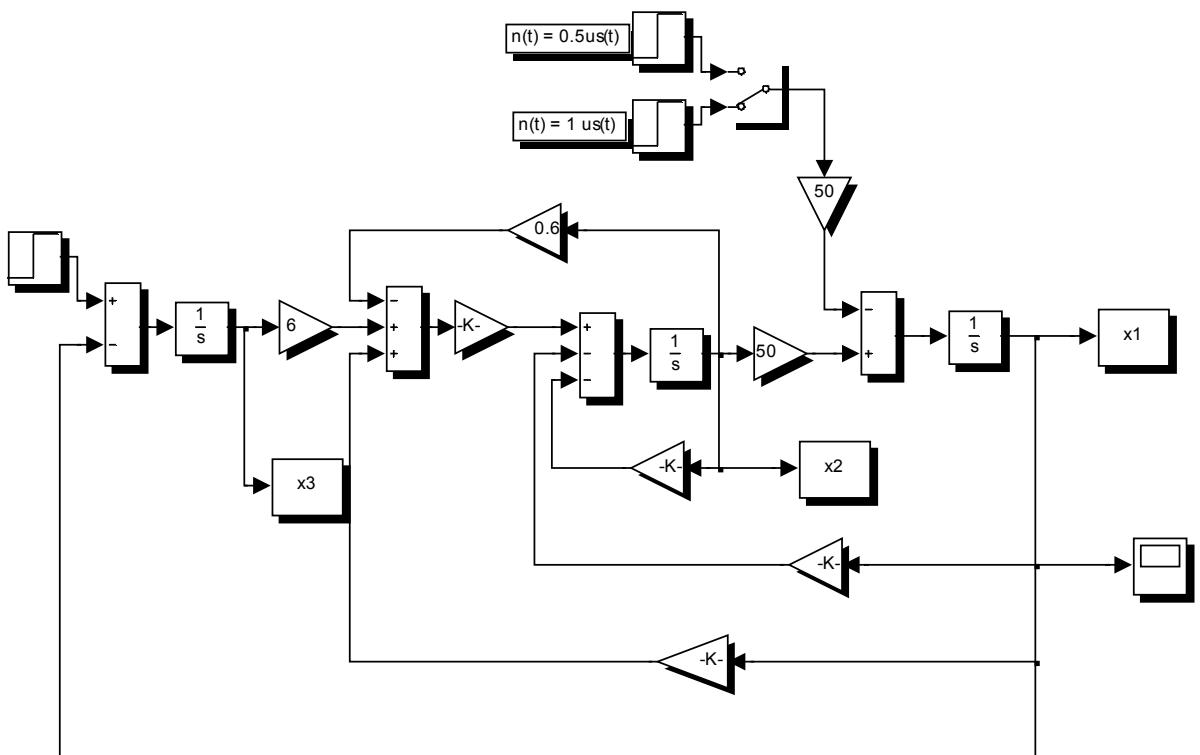


Figura 21

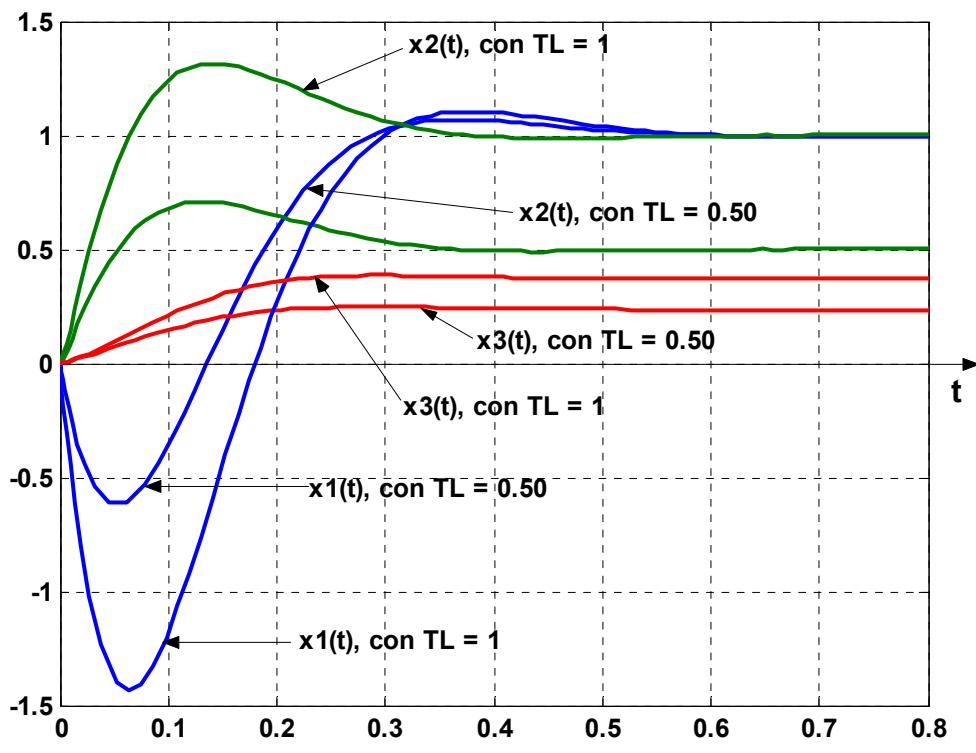


Figura 22

Y la respuesta de los estados, con $T_L = 0.50$ y $T_L = 1$, además: $r(t) = 1 \mu_S(t)$. –

Supondremos para simplificar que: $B = 0$. –

El diagrama está indicado en la figura 21, y sus respuestas en la figura 22.-

Como se puede apreciar la velocidad angular de salida $x_1(t) \equiv \omega(t)$ es siempre la deseada independientemente del valor del par de perturbación TL . –

Resolveremos el problema de una manera diferente a la empleada anteriormente en la página 37, donde se aplicó el principio de superposición.

Las matrices de este sistema de control de velocidad del motor, considerando el vector de entrada como: $\begin{bmatrix} r(t) \\ n(t) \end{bmatrix}$; eran:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 \\ -124 & -320 & 1200 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -50 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad D = [0 \ 0]. -$$

Ingresándolas en Matlab y creando el modelo del sistema así:

```
>> A=[0 50 0;-124 -320 1200;-1 0 0]
```

A =

$$\begin{array}{ccc} 0 & 50 & 0 \\ -124 & -320 & 1200 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}$$

```
>> B=[0 50;0 0;1 0]
```

B =

$$\begin{array}{cc} 0 & 50 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}$$

```
>> C=[1 0 0]
```

C =

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array}$$

```
>> D=[0 0]
```

D =

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}$$

```
>> S=ss(A,B,C,D)
```

a =

$$\begin{array}{ccc} & x1 & x2 & x3 \\ x1 & 0 & 50 & 0 \\ x2 & -124 & -320 & 1200 \\ x3 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

$b =$
 $\begin{matrix} u1 & u2 \\ x1 & 0 & -50 \\ x2 & 0 & 0 \\ x3 & 1 & 0 \end{matrix}$

$c =$
 $\begin{matrix} & x1 & x2 & x3 \\ y1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$

$d =$
 $\begin{matrix} u1 & u2 \\ y1 & 0 & 0 \end{matrix}$

Continuous-time model.

Respuesta Temporal del Sistema:

```
>> T=[0:0.01:0.8];
>> [Y,T,X]=step(S,T);
```

Para graficar la variación temporal del estado $x_1(t)$, (que es la salida $y(t)$ en este ejemplo):

- 1º) Con la entrada $r(t)$, sola.
- 2º) Con la entrada $n(t)$, sola.
- 3º) Con las dos juntas.

Como $X(:,:,1) = [x_{11} \ x_{21} \ x_{31}]$, es la variación temporal de $\bar{x}(t)$ debido a $r(t)$.

y $X(:,:,2) = [x_{12} \ x_{22} \ x_{32}]$; es la variación temporal de $\bar{x}(t)$ debido a $n(t)$.

se debe proceder de la manera siguiente:

x_{11} = la variación de $x_1(t)$,debido a la entrada uno, $r(t)$.-

$>> x_{11}=[1 \ 0 \ 0]*X(:,:,1)'$; Con la entrada de referencia $r(t) = \mu_s(t)$ y $n(t) = cte$.-

x_{12} = la variación de $x_1(t)$,debido a la entrada dos, $n(t)$.-

$>> x_{12}=[1 \ 0 \ 0]*X(:,:,2)'$; Con el par perturbador $n(t) = \mu_s(t)$ y $r(t) = cte$.-

x_1 = variación de $x_1(t)$, total debido a las dos entradas $r(t)$, $n(t)$.-

$>> x_1=x_{11}+x_{12}$; Con las **dos entradas**, o se la variación **total** de la velocidad angular $\omega(t) = x_1(t)$.-

Para graficar las tres respuestas se procede así:

```
>> plot(T,x11)
>> grid, hold on
>> plot(T,x12)
>> plot(T,x1)
```

Las respuestas se muestran en la figura 23.-

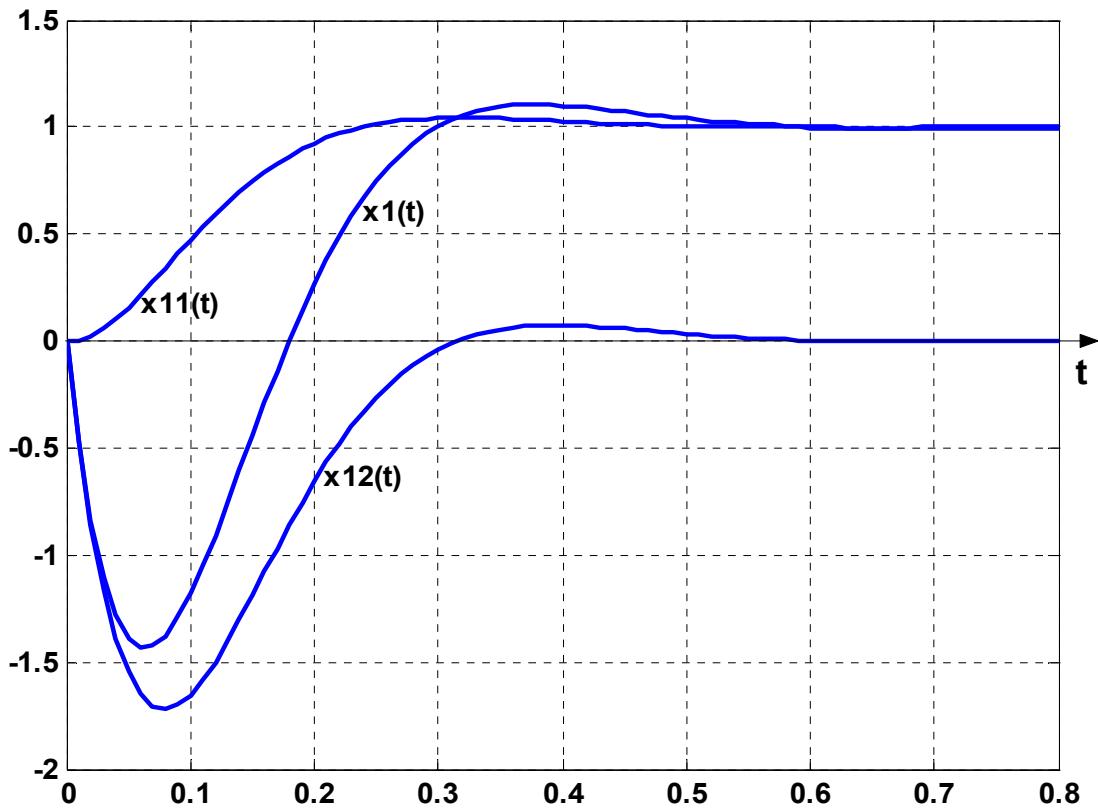


Figura 23

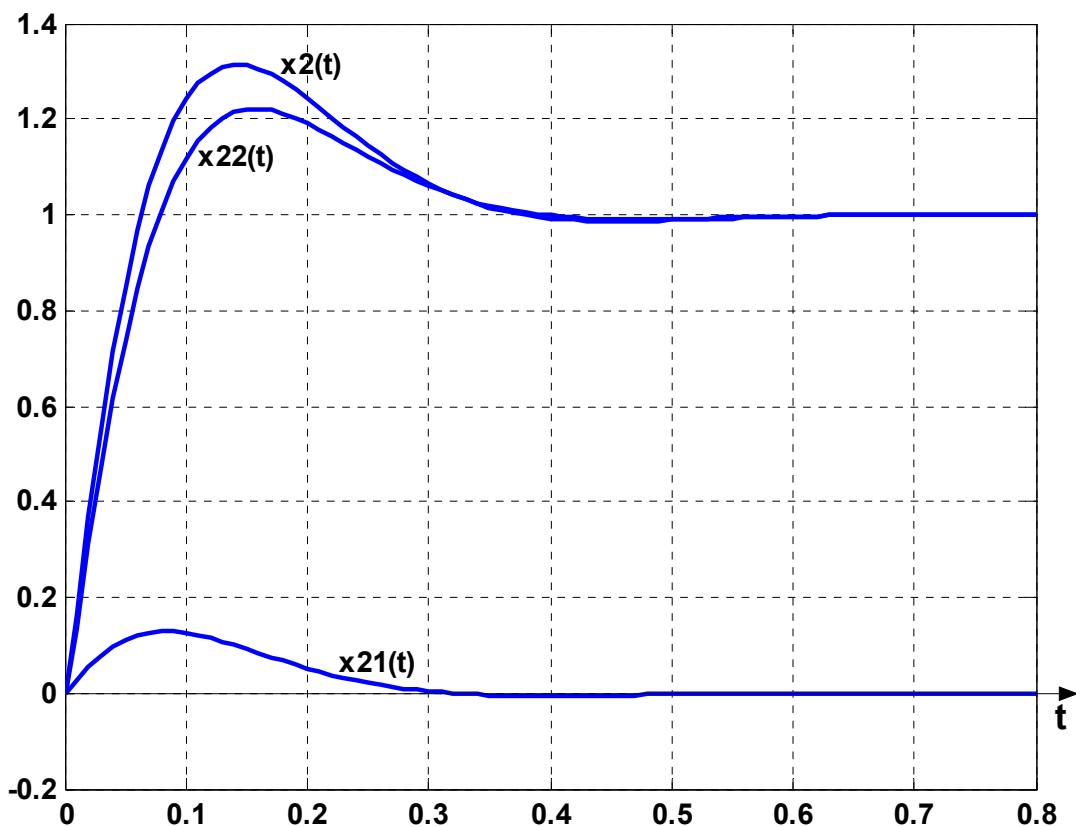


Figura 24

Lo mismo para las otras variables de estado, $x_2(t)$ y $x_3(t)$. Para $x_2(t)$, corriente de armadura.

```
>> x21=[0 1 0]*X(:,:,1)';
>> x22=[0 1 0]*X(:,:,2)';
>> x2=x21+x22;
>> plot(T,x21)
>> grid, hold on
>> plot(T,x22)
>> plot(T,x2)
```

Las respuestas se muestran en la figura 24.-

Finalmente para la variable de estado $x_3(t)$. - (integral del error). -

```
>> x31=[0 0 1]*X(:,:,1)';
>> x32=[0 0 1]*X(:,:,2)';
>> x3=x31+x32;
```

Las respuestas están indicadas en la figura 25.-

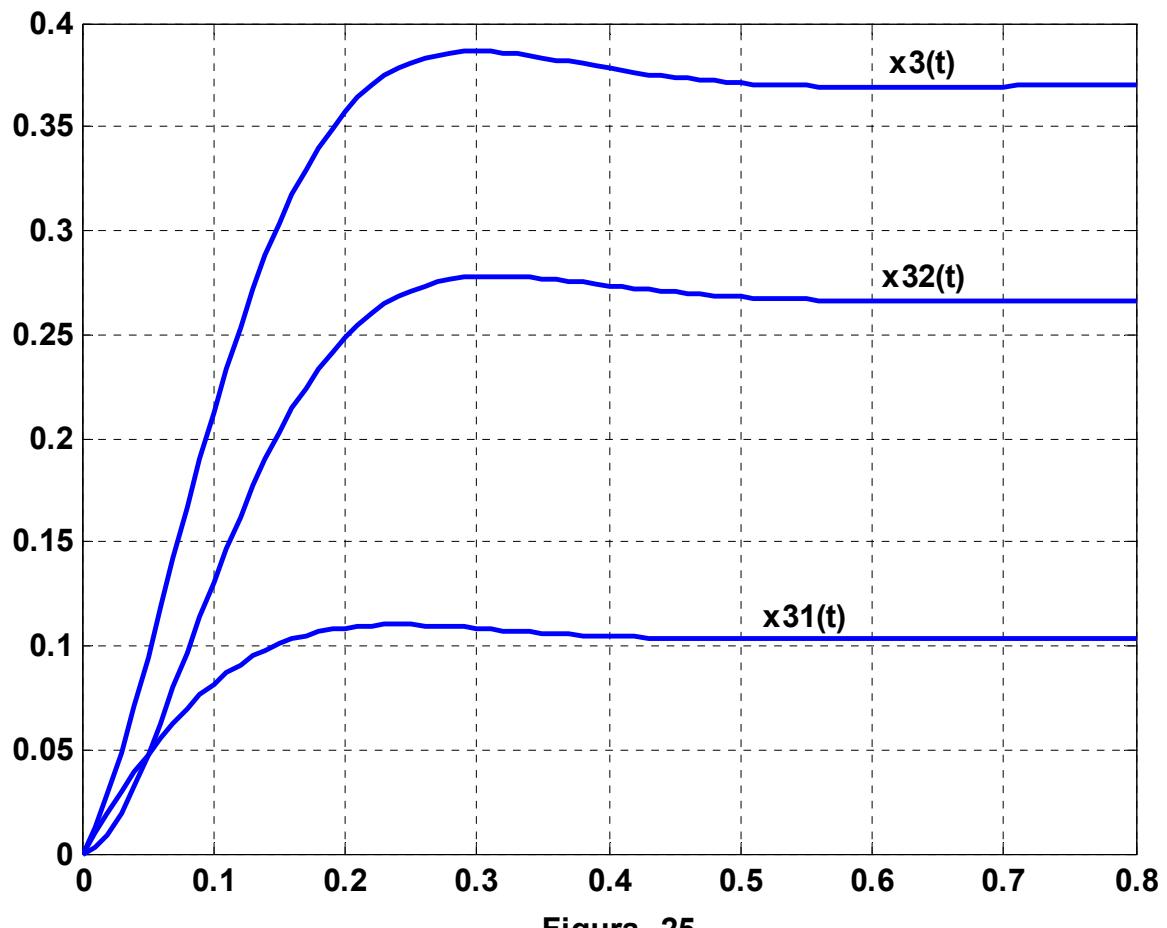


Figura 25

La **Respuesta Total** de los estados con las dos entradas, (en un grafico solo) será la indicada en la figura 26.-

```
>> plot(T,x1)
>> grid, hold on
>> plot(T,x2)
>> plot(T,x3)
```

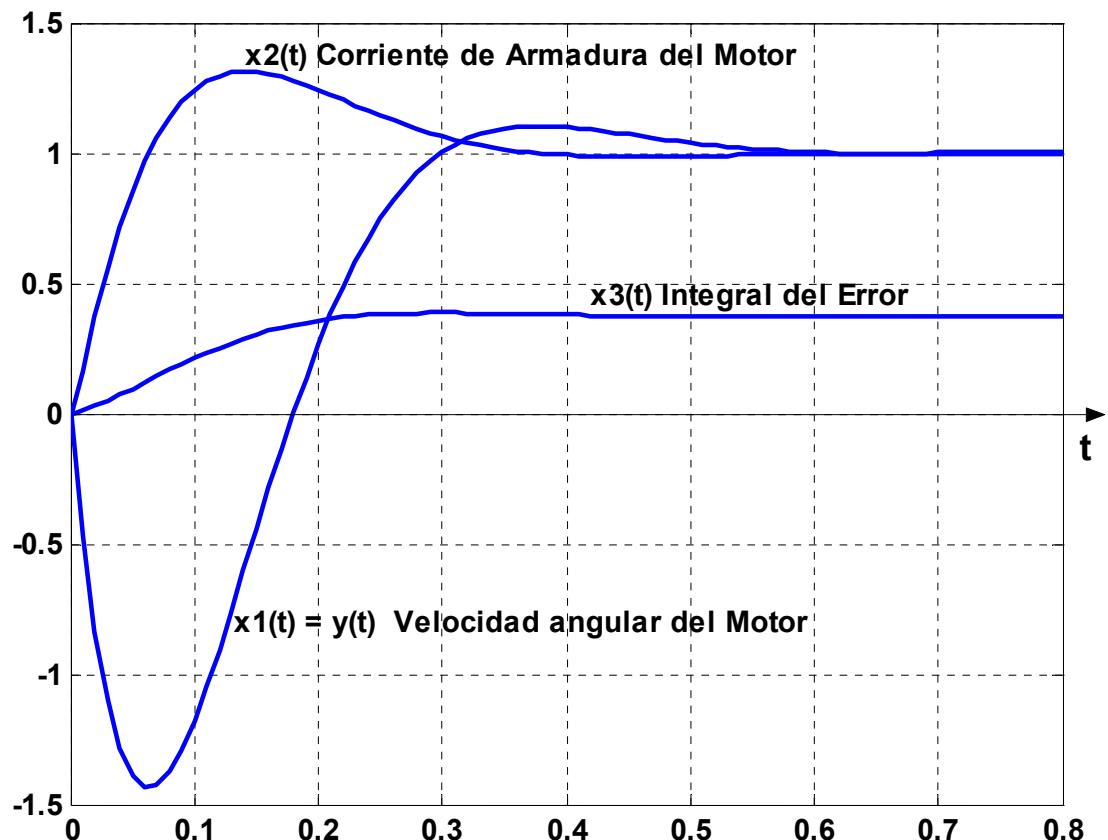


Figura 26

Solución Total con Condiciones Iniciales y una Entrada Determinada:

Está solución sería la suma de la homogénea para unas condiciones iniciales dadas y de la particular o forzada para una señal de entrada determinada.-

$$\bar{x}_T(t) = \bar{x}_h(t) + \bar{x}_p(t)$$

Métodos:

- 1º) Usando la transformación inversa de Laplace.
- 2º) Con algún diagrama de estado.-
- 3º) Empleando la computadora digital para graficar las respuestas.-

Para los métodos 1º) y 2º) se suman las ya obtenidas.-

Por lo tanto nos extenderemos con más detalles estudiando el método 3º).-

El programa Csad no se puede usar pues obtiene la solución homogénea y particular por separado solamente.-

Por ende se usará el Matlab, o el Simulink.-

Retornemos al ejemplo ya visto al principio:

Las matrices del sistema eran:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 160 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 1] \quad y \quad D = [0]$$

Las condiciones iniciales eran:

$$\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

se determinara la solución total a una señal de entrada escalón unitario:

$$r(t) = 1\mu(t)$$

$$\bar{x}(t) = ?$$

$$y(t) = ?$$

Funciones Usadas por Matlab para Obtener la Solución Total:
Con Condiciones Iniciales y una Entrada Escalón Unitario:

Se procede así:

```
» A=[0 1 0;0 0 1;-160 -56 -14];
» B=[0;0;160];
» C=[1 0 1];
» D=0;
» xo=[1;-1;2];
» T=[0:0.01:3];
» S=ss(A,B,C,D);
» [Yh,T,Xh]=initial(S,xo,T);
» [Yp,T,Xp]=step(S,T);
» X=Xh+Xp;
» Y=Yh+Yp;
» plot(T,X)
» grid, hold on
» plot(T,Y,'k-')
```

Las respuestas se muestran en la figura 27.-

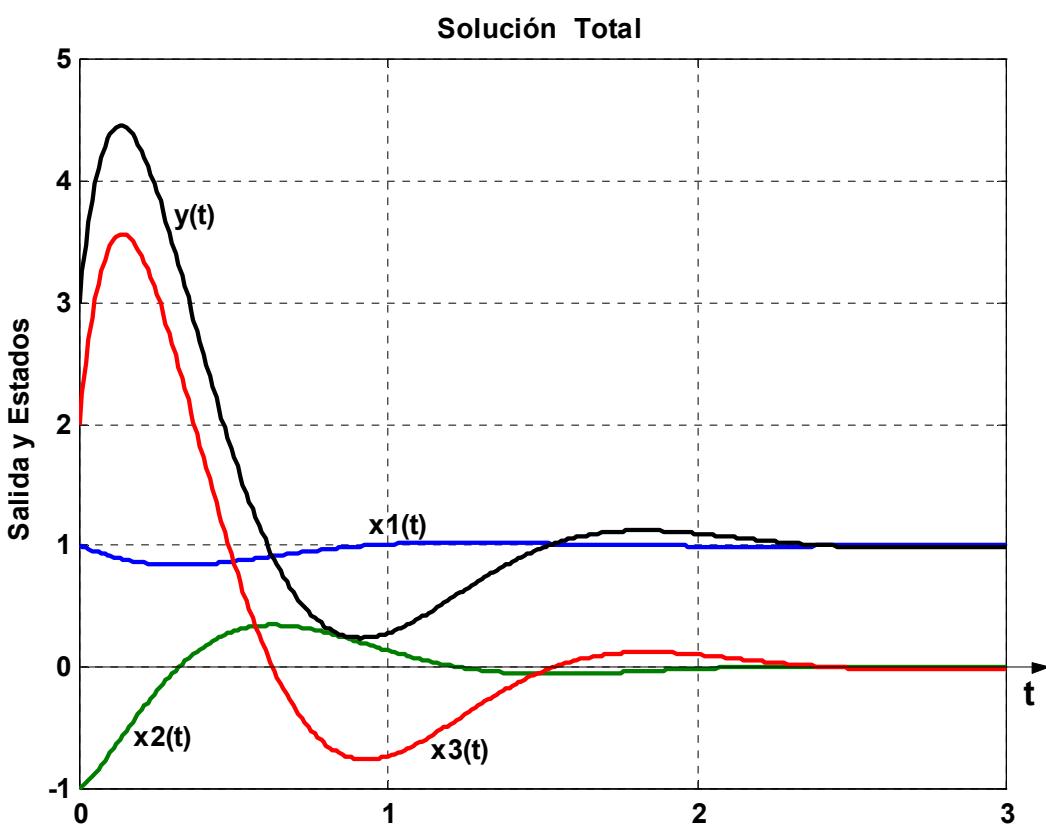


Figura 27

Se puede usar el Simulink representando el diagrama de estado correspondiente para que las variables de estado sean las mismas, o sea matrices idénticas.- Con este procedimiento se podrá graficar $y(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$.- El diagrama de estado es el siguiente:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{160.(s^2 + 1)}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}$$

$$\frac{Y(s)}{160R(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160} \times \frac{s^{-3}P(s)}{s^{-3}P(s)}$$

por lo tanto:

$$Y(s) = s^{-1}P(s) + s^{-3}P(s)$$

$$y \quad P(s) = -14s^{-1}P(s) - 56s^{-2}P(s) - 160s^{-3}P(s) + 160R(s)$$

El diagrama de estado resulta el siguiente:

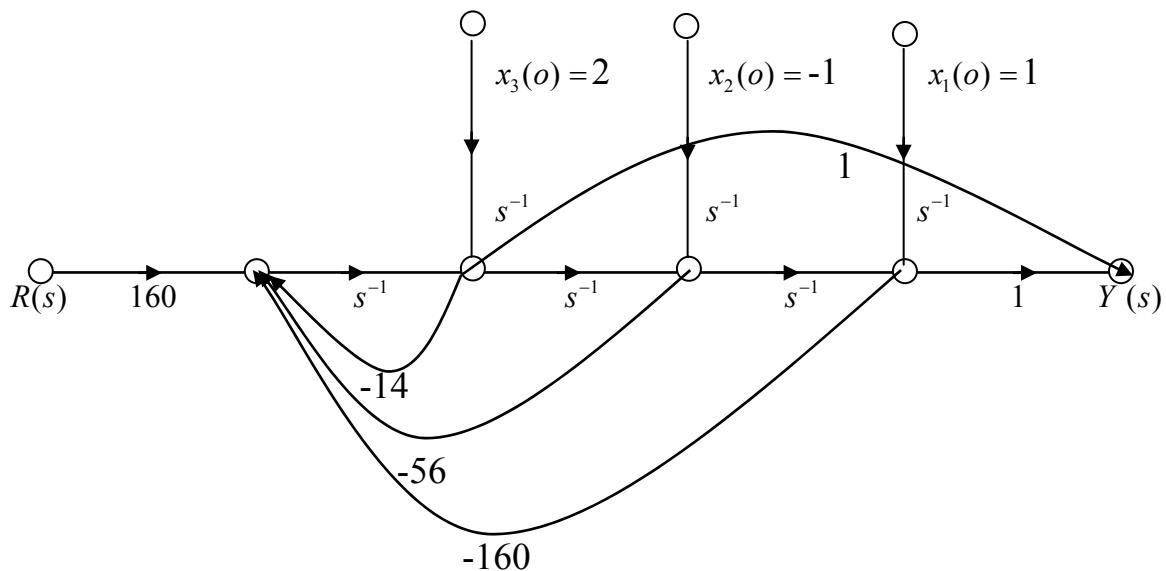


Figura 28

Las matrices resultan las mismas que el modelo utilizado por el otro método.-

El diagrama de Simulink resultante está indicado en la figura 29.

Hay que colocar las condiciones iniciales para los respectivos integradores así:

Condición Inicial Fuente \Rightarrow internal

External Reset \Rightarrow None

C.I. ($\bar{x}(o) \Rightarrow 1, -1 \text{ o } 2 \text{ según sea. -}$)

El diagrama de Simulink correspondiente es el mostrado en la figura 29.-

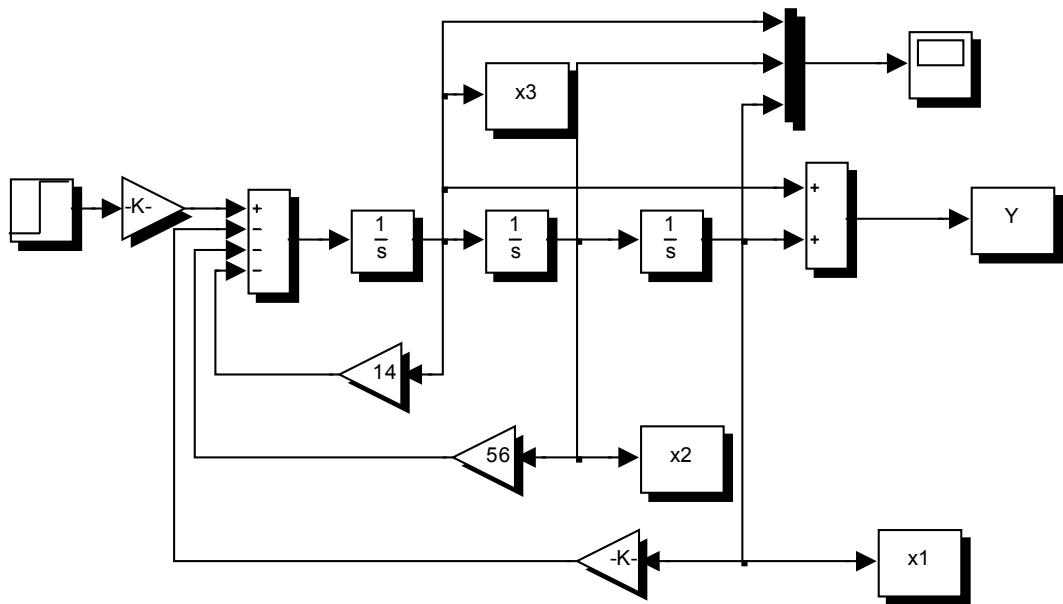
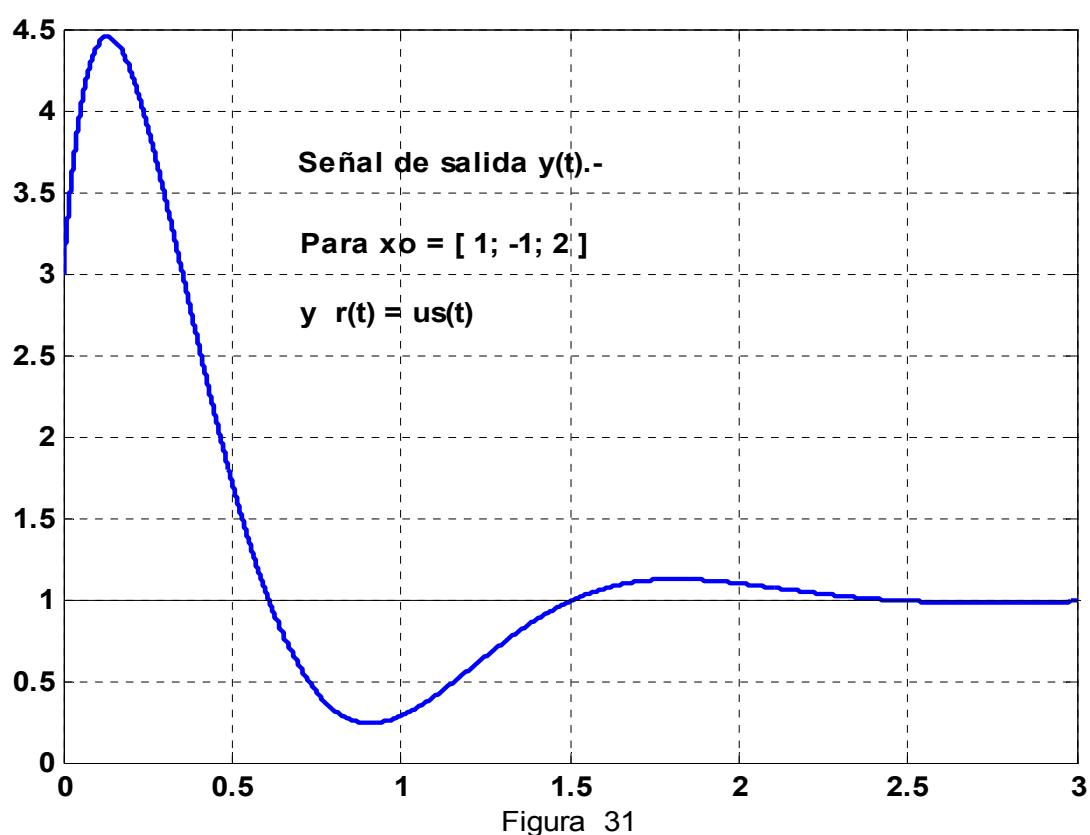
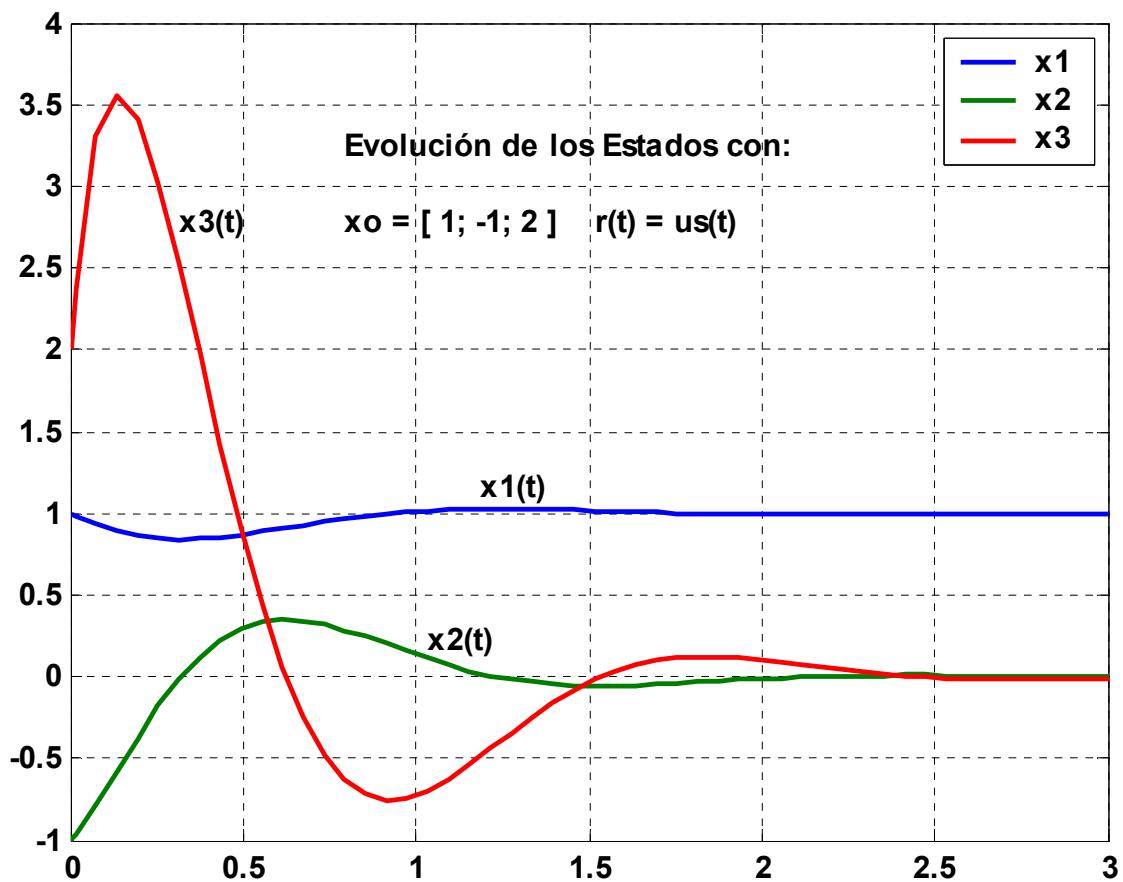


Figura 29

Las respuestas se muestran en las figuras 30 y 31.-

```
>> plot(tout,x1,tout,x2,tout,x3)
>> gris
```



También se puede usar el bloque (**State-Space**), si se desea obtener solo la respuesta $y(t)$ a las entradas más comunes.

Para el sistema en estudio, se grafica la respuesta del mismo a una entrada rampa de pendiente unitaria, $r(t) = t \mu_s(t)$ y luego para una entrada senoidal, $r(t) = \sin(10t)$.

El diagrama sería el indicado en la figura 32.

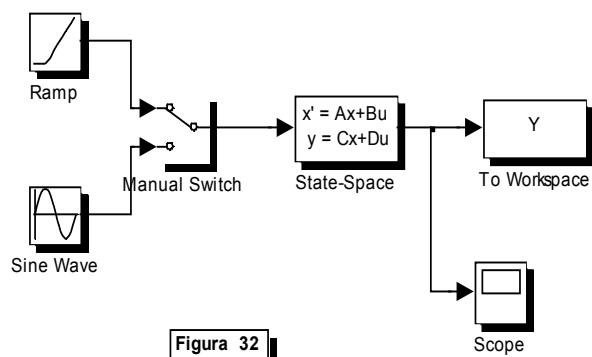


Figura 32

Las respuestas se ilustran en las figuras 33 y 34.-

```
» plot(tout,Y)
» grid
```

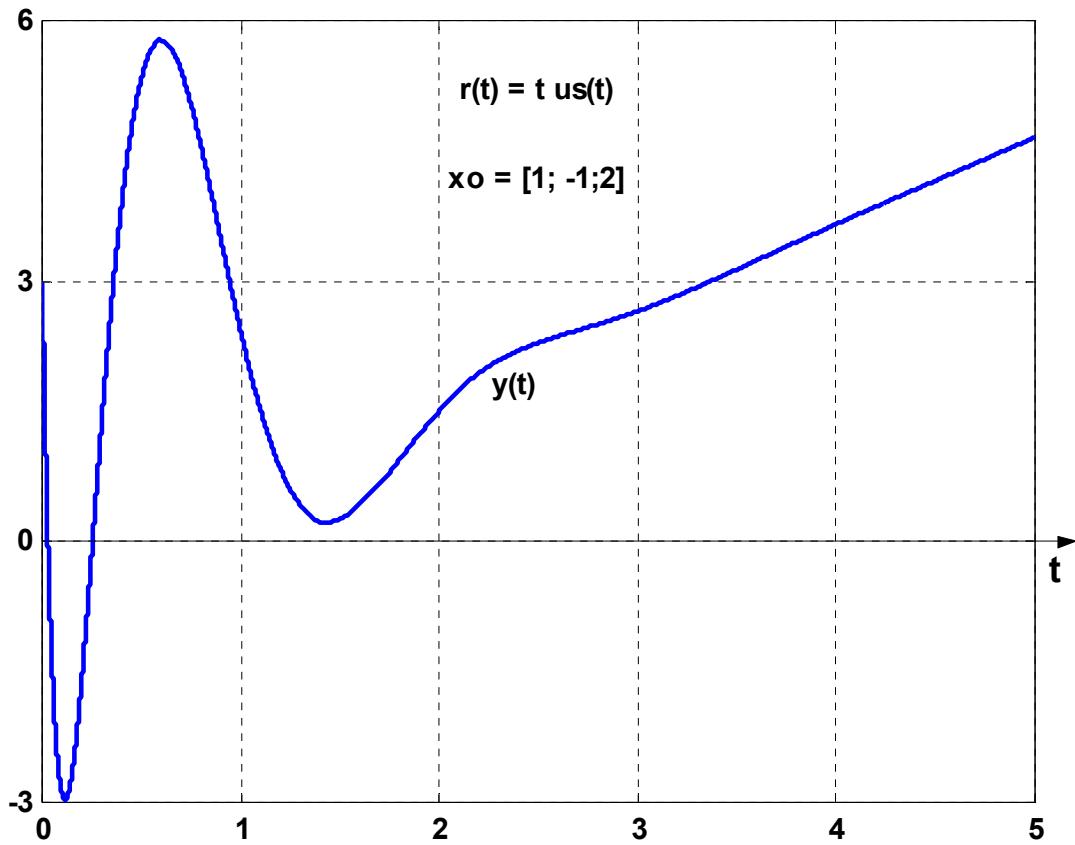


Figura 33

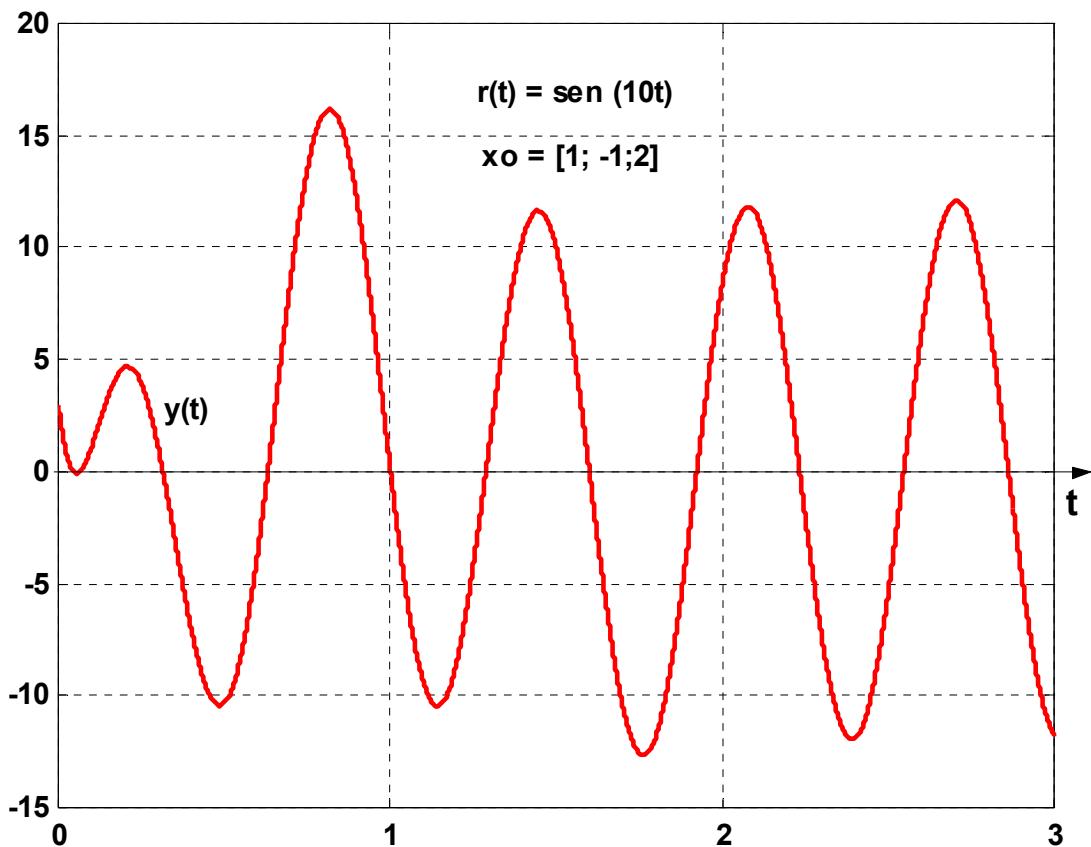


Figura 34

CONTROL II (Elo y Bio)

Tema:

Diseño de Controladores Analógicos
Por Métodos de Espacio de Estado:

Prof. Ing. Carlos F. Martín

Año: 2010

Diseño de Controladores Analógicos por Métodos de Espacio de Estado.

El objetivo de este capítulo es el diseño de sistemas de control usando la realimentación del vector de estado. La técnica de ubicación de polos permite situar los polos del sistema de control, (del sistema de lazo cerrado), en la posición deseada por el diseñador, de modo que su comportamiento se adecue a lo que éste desea.

Se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que el sistema admita que sus polos en lazo cerrado se ubiquen en cualquier posición del plano s , es que la planta a controlar sea *completamente controlable*.

Cuando no es posible sentir o medir todos los estados de la planta para utilizarlos en el vector de realimentación, se estiman los estados necesarios a partir de la información disponible de la planta, la salida $y(t)$, y de la entrada o la acción de control $u(t)$.

Se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que el vector de estado se pueda estimar es que la planta sea *completamente observable*. En el capítulo se aborda tanto el diseño de sistemas sin entrada o con entrada constante (reguladores), como el de sistemas que han de seguir a una señal de referencia (seguidores). Se realizan varios ejemplos en lápiz y papel así como mediante una computadora utilizando MatLab o el Csad.

La última parte del capítulo se dedica al diseño de observadores por medio de la computadora usando el programa svdesign del Csad. Es importante hacer la consideración preliminar que a lo largo de todo este capítulo los modelos de estado serán de sistemas Lineales Invariantes con el Tiempo, esto es, plantas L.T.I.-

Introducción:

La técnica de diseño de controladores mediante la realimentación del estado consiste en realimentar las variables de estado hacia la entrada mediante una matriz de ganancias constantes K . En la figura 6, se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control mediante la realimentación de los estados *solamente*.

En cuanto a la ubicación de los polos del sistema se puede mostrar que un control PD modificado, (P-D), y con una serie P.D., son casos especiales del esquema de control mediante realimentación de los estados.

$$\text{Si se supone que la planta a controlar es: } G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\delta\omega_n)} \quad (18)$$

Descomponiendo en forma directa la función $G_p(s)$ y realimentando *solo* los estados el diagrama de estado de la planta a controlar como se muestra en la figura 7. Aplicando la fórmula de ganancia de Masson, se tendrá:

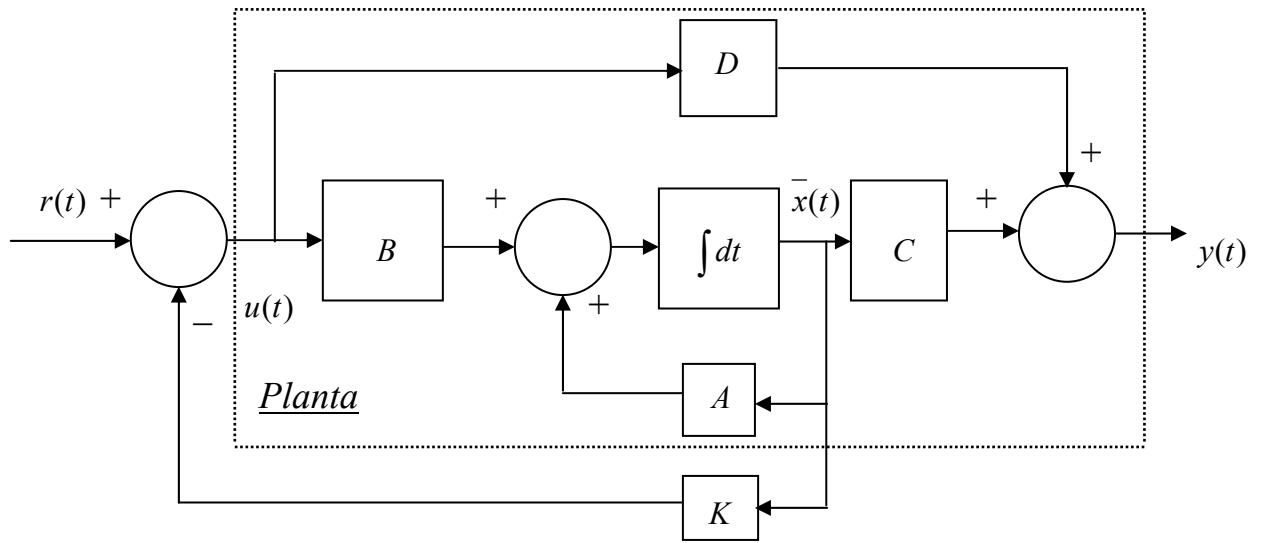


Figura 6

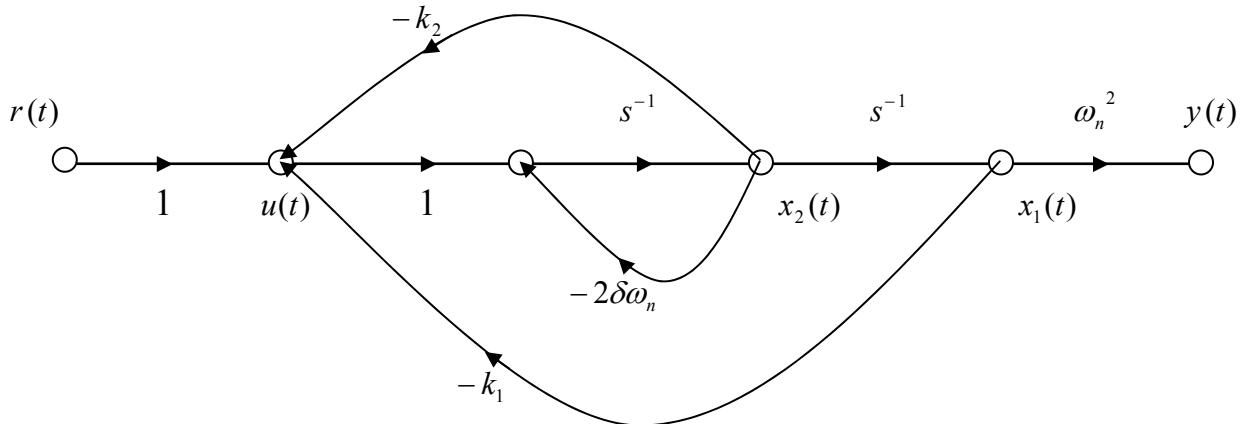


Figura 7

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\delta\omega_n + k_2)s + k_1} \quad (19)$$

Para propósitos de comparación se presentan las funciones de transferencia de los sistemas con un control P-D, con $K_p = 1$, y con un control P.D. serie, como sigue:

Para el control P-D, con $K_p = 1 \rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\delta\omega_n + K_D\omega_n^2)s + \omega_n^2} \quad (20)$

Con un control serie P.D. $\rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(K_p + K_Ds)}{s^2 + (2\delta\omega_n + K_D\omega_n^2)s + \omega_n^2 K_p} \quad (21)$

Por tanto, el control P-D, (con $K_p = 1$), será *equivalente* a la realimentación de los estados si: $K_1 = \omega_n^2$ y $K_2 = K_D \cdot \omega_n^2$.- (22)

Para el control P.D., al comparar las ecuaciones (19) y (21) se observa que la ecuación característica del sistema con realimentación del estado sería idéntica a la del sistema con el control P.D., si: $K_1 = \omega_n^2 \cdot K_p$ y $K_2 = K_D \omega_n^2$.-

Sin embargo, los numeradores de las dos funciones de transferencia son diferentes. En el control PD el sistema tendrá un cero en $(-K_p/K_D)$, y con la realimentación de los estados no lo tendrá.-

Se debe enfatizar que las comparaciones realizadas anteriormente son solo para plantas de *segundo orden*. Para sistemas de orden mayor, el control P.D. y el control P-D son equivalentes a realimentar solo las variables de estado x_1 y x_2 , pero en el control por realimentación del estado se pueden realimentar *todos* los estados (x_1, x_2, \dots, x_n). Como se sabe el control P.I. incrementa el orden del sistema en uno, no puede ser equivalente a la realimentación de estado a través solo de *ganancias constantes* solamente. Mas adelante, se verá que si se combina la realimentación del estado con el *control integral* se puede realizar el control P.I. en el sentido del control mediante la realimentación del estado.

Los sistemas con la señal de referencia constante, o sea con variación nula en la entrada, ($\Delta r(t) = 0$), en adelante $r(t)=0$, se conocen por lo común con el nombre de *Reguladores*. En lugar de indicar $\Delta r(t)$ se designara en lo que sigue como $r(t)$. Cuando $r(t) = 0$, el objetivo del control es llevar el sistema desde cualquier condición inicial del vector de estado, provocado por alguna perturbación, a cero, (*o sea a su valor nominal*), en alguna forma predeterminada, por ejemplo, tan rápido como sea posible.

Cuando se dice a cero, es llevar el vector de estado a su valor nominal de funcionamiento estable, o sea con una desviación nula de la señal de referencia nominal. El diseño consistiría en predeterminar la evolución de la solución homogénea del sistema para una condición inicial del vector de estado $\bar{x}(0)$, con $r(t) = 0$.

Diseño de Controladores Analógicos por Diferentes Métodos en el Espacio de Estado.

Cuando el lugar geométrico de las raíces se emplea para diseñar sistemas de control, el enfoque general se puede describir como *ubicación de polos*, aquí los polos son los de la función de transferencia en lazo cerrado, que también son las raíces de la ecuación característica del sistema. Al conocer la relación entre los polos y ceros en lazo cerrado y el desempeño del sistema, se puede realizar el diseño al especificar la ubicación de los primeros. Los métodos de diseño clásicos ya estudiados, estaban caracterizados por la propiedad donde los polos se seleccionan basados en que es lo que se puede alcanzar con la configuración de control fija y los límites físicos de los parámetros del controlador.

Una pregunta natural será:

¿Bajo qué condición los polos pueden ser colocados en forma arbitraria?
Esta es una filosofía nueva de diseño que en apariencia solo se puede

alcanzar bajo ciertas condiciones. Cuando se tiene un proceso controlado de tercer orden o mayor, los controladores clásicos P.D., P.I., de atraso o adelanto de fase de una etapa, (con K_{oc} ajustado para que cumpla el requerimiento de error de estado estable), no son capaces de controlar en forma independiente *todos los polos del sistema* de control, ya que solo hay dos parámetros independientes en cada uno de los controladores (pues se tendrán 3 o mas ecuaciones con dos incógnitas).

Diseño de Sistemas de Control del Tipo Reguladores.

La realimentación de estado permite el diseño de sistemas de control vía la ubicación o asignación de polos. Esto es, los polos del sistema de lazo cerrado se ubican en la posición deseada por el diseñador, de modo que las condiciones transitorias sean llevadas a cero de forma preestablecida, en primer lugar se va a considerar el diseño de sistemas de control tipo *regulador*. Esto es, en el diseño se asumirá que el sistema no tiene entrada de referencia (ver figura 8), o mejor, si la tiene pero no varía como se dijo.

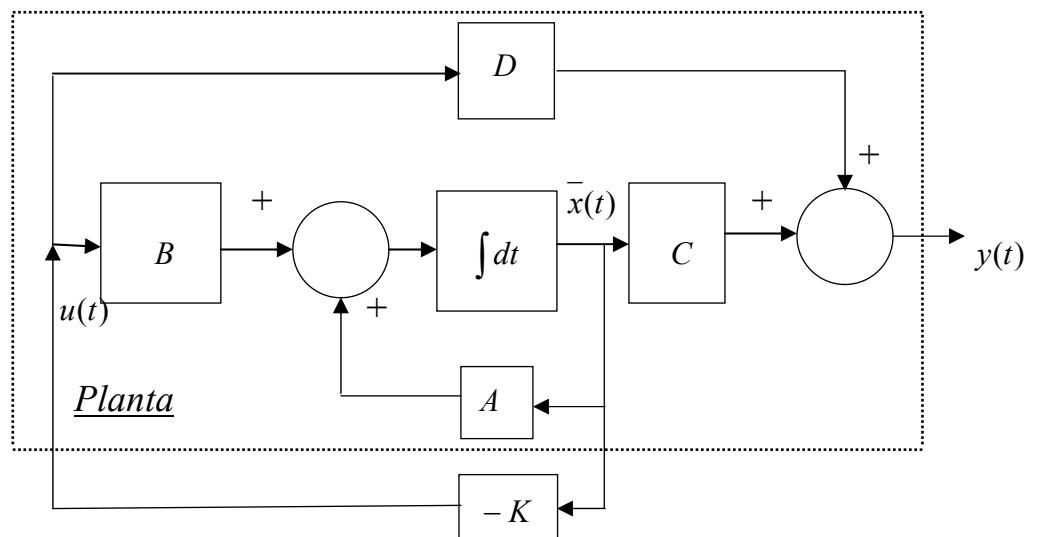


Figura 8

El objetivo de control es: que dado un sistema en ciertas condiciones de funcionamiento, se desea mantenerlo en ellas, de modo que las posibles perturbaciones a las que se ve sometido no deben sacarlo de regulación (el error que puedan ocasionar las perturbaciones ha de ser llevado a cero en tiempo y forma razonable).

Supongamos que la planta a controlar tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{(t)} &= \bar{A}\bar{x}_{(t)} + \bar{B}u_{(t)} \\ y_{(t)} &= \bar{C}\bar{x}_{(t)} + \bar{D}u_{(t)} \end{aligned} \quad (23) \quad \text{Lazo abierto}$$

Para estos sistemas la ecuación de control será:

$$u_{(t)} = -K \bar{x}_{(t)} \quad (24)$$

Donde K es la matriz de realimentación de los estados. Las matrices C y D no intervienen a la hora de ubicar los polos.

Las ecuaciones del sistema de lazo cerrado serán:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{(t)} &= A\bar{x}_{(t)} + B(-K\bar{x}_{(t)}) = (A - B.K)\bar{x}_{(t)} \\ \bar{y}_{(t)} &= C\bar{x}_{(t)} + D(-K\bar{x}_{(t)}) = (C - D.K)\bar{x}_{(t)} \end{aligned} \quad (25)$$

Por lo tanto:

$$A_c = (A - B.K) \text{ y } C_c = (C - D.K)$$

Serán las matrices del sistema de lazo cerrado, o del sistema de control.

Como se sabe la solución de la ecuación de estado (25) es:

$$\bar{x}_{(t)} = e^{A_c t} \bar{x}_{(0)} \quad (26)$$

En donde $\bar{x}_{(0)}$ es el estado inicial provocado por las perturbaciones. Las características de las respuestas transitorias $\bar{x}_{h(t)}$; $\bar{y}_{h(t)}$ están impuestas por los valores característicos de la matriz $A_c = (A - B.K)$.

Si se elige la misma en forma correcta, (por una elección adecuada de los elementos de la matriz K), es posible hacer que $\bar{x}_{h(t)}$ tienda a cero, conforme t tiende a infinito.

Los valores característicos de $(A - B.K)$ se llaman *polos reguladores*. Se puede demostrar que la ubicación arbitraria de los mismos es posible si y solo si la planta es de estado completamente controlable.

Veremos tres formas analíticas alternativas de determinar K.

1.- Solución Directa:

Sean las posiciones de los polos deseados: $s = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ con lo cual la ecuación característica del sistema de lazo cerrado será:

$$|s.I - A + B.K| = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_2.s^2 + \alpha_1.s + \alpha_0 = 0$$

En esta ecuación hay n incógnitas, k_1, k_2, \dots, k_n y n coeficientes conocidos $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_1$ y α_0 , en la parte derecha de la igualdad. Para calcular las ganancias desconocidas basta con igualar los coeficientes de igual potencia en s . Ciertamente, esta forma de calcular la matriz K , si bien es intuitiva y directa, es bastante tediosa cuando el orden n es elevado. No obstante, como se verá, esto no tiene mucha importancia ya que Matlab tiene implementado algoritmos que resuelven este problema de forma automática. Pero con este método no queda claro el *rol que juega la controlabilidad*, en los métodos siguientes si, como se verá a continuación.

2.- Teorema: (asignación de valores característicos)

Si el modelo original de la planta es de estado completamente controlable, entonces mediante la realimentación de estados $u_{(t)} = -K.\bar{x}_{(t)}$, donde K , si $p=1$, es un vector real con elementos constantes de $(1 \times n)$, los valores característicos de $(A - B.K)$ pueden ser asignados arbitrariamente, siempre que los valores característicos *complejos se asigne en pares conjugados*.

Demostración:

Si las ecuaciones de la planta a controlar son, si la matriz $D=0$:

$$\dot{\bar{x}}_{(t)} = A\bar{x}_{(t)} + Bu_{(t)}$$

$$y_{(t)} = C\bar{x}_{(t)}$$

Como la misma es controlable, se puede llevar a la FCC mediante la matriz de transformación $P = S.M$, donde:

$$S = [B \quad A.B \quad A^2.B \quad \dots \quad A^{n-1}.B]$$

y

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Donde los a_i son los coeficientes de la ecuación característica de la planta.

Llamaremos \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} a las nuevas matrices en la FCC, donde:

$$\hat{A} = P^{-1}.A.P ; \quad \hat{B} = P^{-1}.B \quad y \quad \hat{C} = C.P$$

Puede verse también que la matriz de controlabilidad en la FCC, (que llamaremos \hat{S}) será:

$$\hat{S} = [\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \dots \quad \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = [P^{-1}.B \quad P^{-1}.A.P.P^{-1}.B \quad \dots \quad P^{-1}.A^{n-1}.B]$$

Por lo tanto

$$\hat{S} = P^{-1} \begin{bmatrix} B & A.B & \dots & A^{n-1}.B \end{bmatrix} \rightarrow \hat{S} = P^{-1}.S$$

También se puede ver que:

$$\hat{S} = (S.M)^{-1}.S = M^{-1}.S^{-1}.S = M^{-1}.I \rightarrow \hat{S} = M^{-1}$$

Sustituyendo $\bar{x}_{(t)} = P\hat{x}(t)$ en $u_{(t)}$ nos queda:

$$u_{(t)} = -K.\bar{x}_{(t)} = -K.P\hat{x}(t) = -\hat{K}\hat{x}(t) \quad \text{con} \quad \hat{K} = K.P$$

Como $\hat{A} - \hat{B}\hat{K} = P^{-1}.(A - B.K).P$, se puede ver que $(A - B.K)$ y $(\hat{A} - \hat{B}\hat{K})$ tienen los mismos autovalores (como ya se sabe).

Ahora, de cualquier conjunto de n autovalores requeridos podemos formar el polinomio característico deseado:

$$\Delta_c(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_2.s^2 + \alpha_1.s + \alpha_0 \quad (*)$$

Por lo tanto como: $|sI - A + B.K| \equiv |sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}|$ se tendrá:

$$sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \hat{k}_1 & \hat{k}_2 & \dots & \dots & \hat{k}_n \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & s & -1 \\ (a_0 + \hat{k}_1) & (a_1 + \hat{k}_2) & \dots & \dots & (s + a_{n-1} + \hat{k}_n) \end{bmatrix}$$

Resolviendo el determinante queda:

$$s^n + \left(a_{n-1} + \hat{k}_n\right)s^{n-1} + \left(a_{n-2} + \hat{k}_{n-1}\right)s^{n-2} + \dots + \left(a_1 + \hat{k}_2\right)s + \left(a_0 + \hat{k}_1\right) = 0$$

Que deberá ser igual a la ecuación (*). Igualando los coeficientes de iguales potencias, se tendrá:

$$a_{n-1} + \hat{k}_n = \alpha_{n-1} \rightarrow \hat{k}_n = (\alpha_{n-1} - a_{n-1})$$

$$a_{n-2} + \hat{k}_{n-1} = \alpha_{n-2} \rightarrow \hat{k}_{n-1} = (\alpha_{n-2} - a_{n-2})$$

.....

.....

$$a_1 + \hat{k}_2 = \alpha_1 \rightarrow \hat{k}_2 = (\alpha_1 - a_1)$$

$$a_0 + \hat{k}_1 = \alpha_0 \rightarrow \hat{k}_1 = (\alpha_0 - a_0)$$

Como $\hat{K} = KP$ y $\hat{K} = [\hat{k}_1 \hat{k}_2 \dots \hat{k}_n]$:

$$K = \hat{K}P^{-1} = [(\alpha_0 - a_0)(\alpha_1 - a_1) \dots (\alpha_{n-1} - a_{n-1})]P^{-1}$$

Finalmente como $P = S M$

$$P^{-1} = (SM)^{-1} = M^{-1}S^{-1}$$

Y también como $\hat{S} = M^{-1}$ se tendrá finalmente:

$$K = [(\alpha_0 - a_0)(\alpha_1 - a_1) \cdots (\alpha_{n-1} - a_{n-1})] \hat{S} S^{-1} = \hat{K} \hat{S} S^{-1}$$

Por lo tanto si la planta es de estado completamente controlable, (Determinante de S distinto de cero), todos los valores característicos se ubican arbitrariamente, seleccionando la matriz K , de acuerdo con la última ecuación.

Hemos demostrado que la condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de los polos, es que la planta sea de estado completamente controlable, pues así existirá la inversa matriz (S^{-1}).

Este teorema nos da el segundo método para seleccionar la matriz K :

Recordando: $K = \hat{K} \hat{S} S^{-1}$ donde:

S : Matriz de la controlabilidad con las variables de estado originales

\hat{S} : Matriz de la controlabilidad con las variables de estado en la F.C.C.

\hat{K} : Matriz de la realimentación de los estados con las variables de estado en la Forma Canónica Controlable.

K : Matriz de la realimentación de los estados buscada, o sea, cuando las variables están en la forma original.

Resumen de los pasos para calcular K:

1) Obtener los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_{n-1} del polinomio característico del sistema en lazo abierto, (de la planta a controlar).

2) Formar las matrices de la controlabilidad S y \hat{S} :

$$S = [B : AB : A^2B : \cdots : A^{n-1}B]$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

3) Elegir los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ del polinomio característico deseado y determinar la matriz de realimentación en las coordenadas de la F.C.C.

$$\hat{K} = [(\alpha_0 - a_0) \ (\alpha_1 - a_1) \ \cdots \ (\alpha_{n-1} - a_{n-1})]$$

4) Determinar la matriz de realimentación en las coordenadas originales

$$K = \hat{K} \hat{S} S^{-1} \quad (29)$$

Recordar que la realimentación de los estados puede mover solo los polos de $G_p(s)$, pero no tiene ningún efecto sobre los ceros de la misma.

Un tercer método para determinar K es usando la fórmula de Ackerman.

3.-Fórmula de Ackerman:

La ecuación característica deseada es:

$$|SI - Ac| = |SI - A + BK| = (S - \lambda_1) \cdots (S - \lambda_n) = S^n + \alpha_{n-1}S^{n-1} + \cdots + \alpha_1S + \alpha_0 = 0$$

El teorema de Cayley-Hamilton plantea que Ac satisface a la ecuación característica, o sea:

$$\phi(A_c) = A_c^n + \alpha_{n-1}A_c^{n-1} + \cdots + \alpha_1A_c + \alpha_0I = [0]_{nxn}$$

Para simplificar, se supondrá $n = 2$, (para n mayor que 2 se puede extender el razonamiento siguiente)

Consideramos las igualdades siguientes:

$$I = I$$

$$A_c = A - BK$$

$$A_c^2 = (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BKA - B^2K^2 = A^2 - ABK - BK(A - BK) = A^2 - ABK - BKA_c$$

Multiplicando las ecuaciones anteriores por α_0 , α_1 y 1 respectivamente y arreglando el resultado se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha_0I + \alpha_1A_c + A_c^2 &= \alpha_0I + \alpha_1(A - BK) + A^2 - ABK - BKA_c \\ &= (\alpha_0I + \alpha_1A + A^2) - \alpha_1(BK) - ABK - BKA_c \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\alpha_0I + \alpha_1A_c + A_c^2 = \phi_{(A_c)} = [0]_{nxn}$$

$$\alpha_0I + \alpha_1A + A^2 = \phi_{(A)} \neq [0]_{nxn}$$

Asimismo será:

$$\phi_{(A_c)} = \phi_{(A)} - \alpha_1BK - ABK - BKA_c ; \text{ dado que } \phi_{(A_c)} = [0]_{nxn} \text{ se obtiene:}$$

$$\phi_{(A)} = \alpha_1BK + BKA_c + ABK$$

$$\phi_{(A)} = B(\alpha_1K + KA_c) + (AB)(K)$$

Si esto lo colocamos en forma matricial, (usando el concepto de particiones de las mismas), se obtiene la siguiente expresión:

$$\phi_{(A)} = [B : AB] \begin{bmatrix} \alpha_1K + KA_c \\ K \end{bmatrix} \quad (*)$$

Como la planta es controlable, la inversa de la matriz de controlabilidad existe, o sea:

$$S^{-1} = [B : AB]^{-1}$$

Premultiplicando ambos miembros de la ecuación (*) por S^{-1} , se obtiene:

$$[B : AB]^{-1} \phi_{(A)} = \begin{bmatrix} \alpha_1K + KA_c \\ K \end{bmatrix}$$

Premultiplicando ahora ambos miembros por $[0 \ 1]$ se tendrá:

$$[0 \ 1][B : AB]^{-1} \phi_{(A)} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_1K + KA_c \\ K \end{bmatrix} = K$$

que puede colocarse en general:

$$K = [0 \ 0 \ \cdots \ 1] S^{-1} \phi_{(A)}$$

Donde:

$$\phi_{(A)} = \alpha_0I + \alpha_1A + \alpha_2A^2 + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + A^n$$

Por lo tanto K será la última fila de la matriz $S^{-1} \times \phi(A)$. –

Este método puede llegar ser incluso más tedioso que el descrito para cálculos analíticos, sin embargo, su desarrollo completamente matricial permite diseñar algoritmos para su implementación mediante programas de computación, por ejemplo,
 $>>K = \text{Acker}(A,B,P)$ en Matlab.

Veremos un ejemplo, por los tres métodos. Una planta tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Obtener la matriz K para que $\lambda_{1-2} = -1$ y $\lambda_3 = -4$

Primer Método: Se verifico que la planta es controlable, Rango (S)=3.-

La ecuación característica será:

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \right| = \\ &= (s^3 + (2 + K_2 + K_3)s^2 + (2 + K_1 + K_3)s + (1 + K_3)) = 0 \end{aligned}$$

y también, con los polos deseados será:

$$(s+1)^2(s+4) = s^3 + 6s^2 + 9s + 4 = 0$$

Donde:

$$1 + K_3 = 4 \rightarrow K_3 = 3$$

$$2 + K_1 + K_3 = 5 + K_1 = 9 \rightarrow K_1 = 4$$

$$2 + K_2 + K_3 = 5 + K_2 = 6 \rightarrow K_2 = 1$$

De donde la matriz de realimentación de los estados es:

$$K = [4 \ 1 \ 3]$$

Utilizando Matlab

$\gg \text{syms k1 k2 k3}$

$\gg [k1,k2,k3]=\text{solve}'1+k3=4',2+k1+k3=9',2+k2+k3=6')$

$k1 =$

4

$k2 =$

1

$k3 =$

3

O con la función Gauss, (agregada al Csad para Matlab): este programa aplica el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

$>>\text{Gauss}$

Ingresé matriz de coeficientes: [0 0 1; 1 0 1; 0 1 1]

Ingresé la matriz de términos independientes: [3; 7; 4]

El sistema tiene solución única

ans =

4
1
3

Segundo Método:

$$1) |sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 1 & s+1 & 1 \\ 0 & 0 & s+1 \end{vmatrix} = s(s+1)^2 + (s+1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0$$

Donde:

$$a_0 = 1; a_1 = 2; a_3 = 2$$

$$S = [B : AB : A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2) \hat{S} = M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3) |sI - A_c| = |sI - A + BK| = (s+1)^2(s+4) = s^3 + 6s^2 + 9s + 4 = 0$$

Donde: $\alpha_0 = 4; \alpha_1 = 9; \alpha_2 = 6$

por lo que:

$$\hat{K} = [\alpha_0 - a_0 : \alpha_1 - a_1 : \alpha_2 - a_2] = [4 - 1 : 9 - 2 : 6 - 2] = [3 \ 7 \ 4]$$

$$4) K = \hat{K} \hat{S} S^{-1} = [3 \ 7 \ 4] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [4 \ 1 \ 3]$$

Tercer método: (Formula de Ackerman)

$$\phi_{(A)} = 4.I + 9.A + 6A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [4 \ 1 \ 3]$$

Todo esto se puede hacer usando Matlab, o con algún programa para tal fin, por ejemplo con *svdesign* del Csad/Matlab con la opción del menú principal *state feedback*.

Nota: Para esta planta $G_{p(S)} = \frac{(s+1)^2}{(s+1)(s^2+s+1)}$; al tener cancelación, esta

planta deberá ser no observable, ya que si es controlable.
O sea:

$$\text{Rango } (V) = \text{Rango} \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \end{bmatrix} = \text{Rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \neq 3$$

$$\text{Rango } (V) = 2 \neq 3$$

Veamos los tres métodos usando Matlab y operaciones simples con matrices:

Primer Método

```

» A=[0 1 0;-1 -1 -1;0 0 -1];
» B=[0;1;1];
» I=eye(3);
» syms s k1 k2 k3
» K=[k1 k2 k3];
» EC=det((s*I-A)+(B*K))
EC =
s^3+2*s^2+s^2*k3+2*s+s*k3+k2*s^2+1+k3+k1*s
» % Ordenando: s^3+(2+k2+k3)*s^2+(2+k1+k3)*s+(1+k3)=0
» % Por lo tanto: a0=1+k3 a1=2+k1+k3 a2=2+k2+k3
» % Se calculan los coeficientes ai;
» aa=poly([-1 0 0;0 -1 0;0 0 -4])
aa =
    1   6   9   4
» % O también así:
» aa=pmake(-1,-1,-4)
aa =
    1   6   9   4
» % Por lo tanto: a0=4 a1=9 y a2=6
» % Los elementos de la matriz K=[k1 k2 k3], se pueden calcular así:
» [k1,k2,k3]=solve('1+k3=4','2+k1+k3=9','2+k2+k3=6')
k1 =
4
k2 =
1
k3 =
3
» % Por ende la matriz buscada será:
K = [4 1 3]
```

Segundo Método

```
» A=[0 1 0;-1 -1 -1;0 0 -1];
```

```

» B=[0;1;1];
» % Defina la matriz de controlabilidad S:
» S=[B A*B A^2*B];
» %Verifique el rango de la misma:
» R=rank(S)
R =
    3
» % Dado que el rango de S es 3, la solución existe.
» % Obtenga los coeficientes del polinomio característico de la planta, con
el comando Poly(A)
» EC=poly(A)
EC =
    1.0000  2.0000  2.0000  1.0000
» a0=EC(4);a1=EC(3);a2=EC(2);
» % Defina las matrices M y P.
» M=[a1 a2 1;a2 1 0;1 0 0];
» P=S*M;
» % Obtenga los coeficientes del polinomio característico deseado, ya sea
con la matriz Ad y el comando poly(Ad), o con pmake.
» aa=poly([-1 0 0;0 -1 0;0 0 -4])
aa =
    1   6   9   4
» % O con:
» aa=pmake(-1,-1,-4)
aa =
    1   6   9   4
» aa0=aa(4);aa1=aa(3);aa2=aa(2);
» % La matriz K será:
» K=[aa0-a0 aa1-a1 aa2-a2]*inv(P)
K =
    4   1   3
También se puede usar el comando place(A, B, p), donde p = vector de la
posición deseada de los polos, los mismos no deberán tener un orden de
multiplicidad mayor que el rango de la matriz B o el número de entradas,
por eso no se puede usar para este ejemplo pues el rango de B es uno.
» p=[-1;-1;-4];
» place(A,B,p)
??? Error using ==> place
Can't place poles with multiplicity greater than rank(B).

```

Tercer Método: (Fórmula de Ackerman)

» % Introducir las matrices A y B

```

» A=[0 1 0;-1 -1 -1;0 0 -1];
» B=[0;1;1];
» % Determine la matriz de controlabilidad
» S=[B A*B A^2*B];
» % Verifique su Rango
» R=rank(S)
R =
    3
» % Dado que el rango es 3, la solución existe
» % Obtenga los coeficientes del polinomio característico deseado, con la
matriz diagonal correspondiente y el comando poly(Ad), o con la función
pmake del Csad/MatLab
» Ad=[-1 0 0;0 -1 0;0 0 -4];
» aa=poly(Ad)
aa =
    1   6   9   4
» % Calcule la matriz  $\phi_{(A)}$  con el comando polyvalm(aa,A).
» Pc=polyvalm(aa,A);
» % Determine la matriz K de la realimentación de los estados.
» K=[0 0 1]*inv(S)*Pc
K =
    4   1   3
» % Todo esto está resumido en el comando ACKER(A,B,P), en donde P es
el vector de los valores propios deseados y A y B las matrices de la planta
» P=[-1;-1;-4];
» K=acker(A,B,P)
K =
    4   1   3
>>%Todo esta resumido en el comando ACKER(A, B, P), donde P es el
vector de los valores propios de deseados, y A y B las matrices de la
planta.
>> P=[-1;-1;-4];
>> K=ACKER(A,B,P)
K=
    4   1   3

```

Ejercicio N°1:

Usando la función *Svdesign* del Csad/Matlab.

Una planta a controlar tiene las siguientes matrices en su modelo matemático, como se puede ver está en la F.C.C.:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.6 \end{bmatrix} \quad D = 0.1$$

De donde:

$$G_p(s) = \frac{0.1(s^2 + 12s + 20)}{s^2 + 6s + 5} \rightarrow G_p(s) = \frac{0.1(s+2)(s+10)}{(s+1)(s+5)}$$

Diseñar un sistema regulador por medio de la realimentación de los estados para que los polos del sistema en lazo cerrado estén ubicados en:

$$\lambda_1 = -1 \quad y \quad \lambda_2 = -4$$

Al llamar al programa, Svdesign del Csad, el mismo pregunta si se ingresa la función de transferencia de la planta, (n y d) o las matrices del modelo en variables de estado de la misma. Si se elige esta última se ingresa el orden y las matrices. Luego eligiendo la opción: *STATE FEEDBACK*, el programa pide la ubicación deseada de los polos reguladores, luego brinda información como: las matrices K , Ac y Cc .

Para sistemas reguladores no interesan las matrices Bc y Dc , pues no hay señal de referencia en la entrada.

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > s

Enter vector of 2 desired pole locations > [-1 -4]

State Feedback Vector K is:

-1 -1

Pole Locations

Desired -- Achieved

-4 -4

-1 -1

A-BK is:

0 1

-4 -5

DC System Gains:

Without feedback 0.4

With state feedback 0.475

Update current state variable matrices? (y/n) [y] >

State feedback is: $u = -Kx + Gr$ (solo para sistemas seguidores)

Enter desired value for G [2.105] > (solo para sistemas seguidores)

Si se desea graficar las respuestas homogéneas $y(t)$ y $x(t)$ para un estado inicial determinado se procede como se indicará oportunamente en la publicación: *Respuestas Temporales*, de la Cátedra.

(Soluciones homogéneas). Si $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$:

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > R

- SVPLOT OPTIONS -

Plot	Stimulus
X Resp	Final time
Zoom	New A,B,C,D
Grid	Display Sys
Hold	Attributes
Label	Eigenvalues
	View data
Quit	Interpolate

SVPLOT > S

Stimulus: Step,Impulse,Ramp,Zero-input [s] > Z

Enter I.C. vector (1x2) > [0.2 0.5]

Initial condition vector is:

0.2000

0.5000

SVPLOT >p grafica y(t)

SVPLOT >H

Current plot held

SVPLOT >x

Enter state to plot :1 to 2 > 1 grafica x1(t)

SVPLOT >x

Enter state to plot :1 to 2 > 2 grafica x2(t)

Esto se aprecia en la figura 9:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow |S| = -1 \quad \text{Controlable.}$$

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.6 \\ -3 & -2.1 \end{bmatrix} \rightarrow |V| = -1.35 \quad \text{Observable.}$$

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \quad y$$

$$Cc = [1.6 \quad 0.7]$$

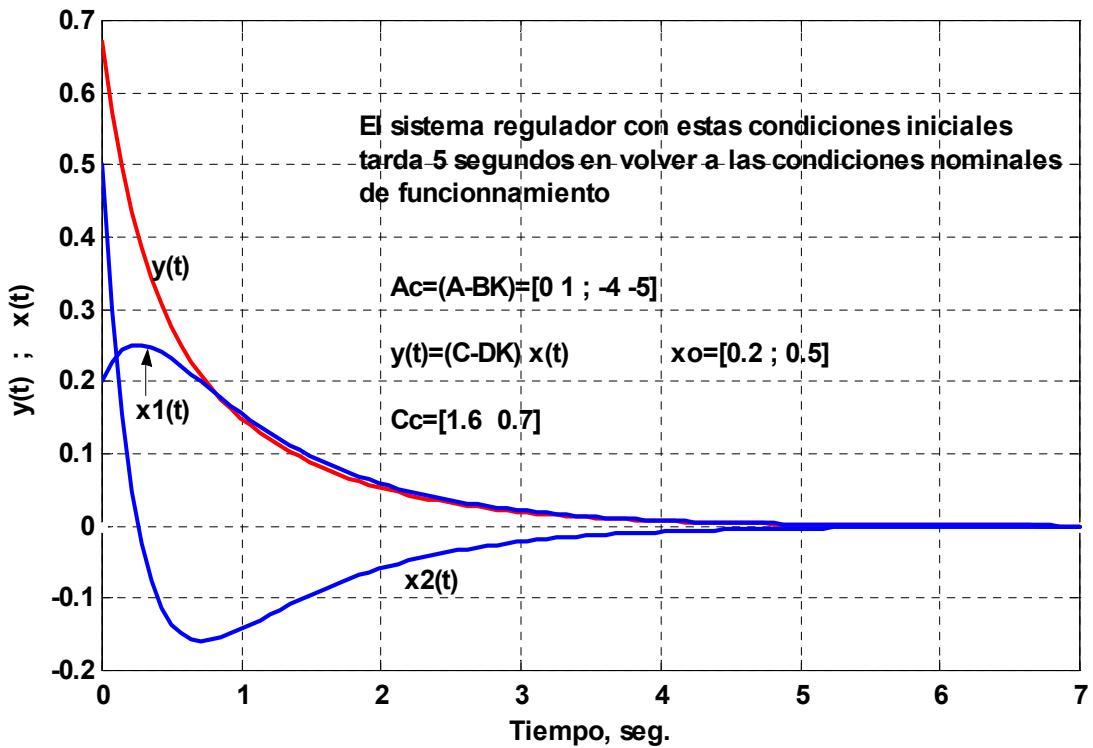


Figura: 9

Formulas Útiles para Sistemas Prototipos de Segundo Orden.
Expresiones que serán de gran ayuda para seleccionar los polos del sistema de control, si los mismos son complejos conjugados dominantes.

δ : Factor de Amortiguamiento Relativo.-

$\sigma := -\delta\omega_n$: Parte Real del par de Polos Complejos del Sistema.

$\lambda_{1-2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$: Polos Complejos Conjugados.-

$Mp(\%) = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$: Sobrelongación Porcentual al Escalón de Entrada.-

$\delta \geq \sqrt{\frac{(\ln Mp_u)^2}{\pi^2 + (\ln Mp_u)^2}}$: Coef. de Amort. Mínimo para un Mp por unidad dado.-

$t_{máx} = \frac{\pi}{\omega d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$: Tiempo de pico para la Salida.-

$$t_{demora} = \frac{1.1 + 0.125\delta + 0.47\delta^2}{\omega_n} \quad (0 < \delta < 1) : Tiempo de Demora.-$$

$$t_{Subida} \cong \frac{1 - 0.416\delta + 2.91\delta^2}{\omega_n} \quad (0 < \delta < 1) : Tiempo de Subida.-$$

$$t_E(5\%) \cong \frac{3.2}{\delta \omega_n} \text{ si } \delta < 0.69. : Tiempo de Establecimiento al (5%).-$$

$$t_E(5\%) \cong \frac{4.5\delta}{\omega_n} = \frac{4.5\delta^2}{|\sigma|} \quad \text{si } \delta > 0.69. : Tiempo de Establecimiento al (5%).$$

$$t_E(2\%) \cong \frac{4}{\delta \omega_n} = \frac{4}{|\sigma|} \quad \text{si } \delta < 0.78. : Tiempo de Establecimiento al (2%).-$$

Para un Sistema de Primer Orden, Tenemos que:

$$t_E(5\%) \cong \frac{3}{|\sigma|} : Tiempo de Establecimiento al (5%).-$$

$$t_E(2\%) \cong \frac{4}{|\sigma|} : Tiempo de Establecimiento al (2%).-$$

Ejercicio N° 2:

El modelo linealizado, en un punto de operación, del sistema de suspensión magnética de una bola de acero, como se muestra en la figura 10, se obtiene de la manera siguiente.

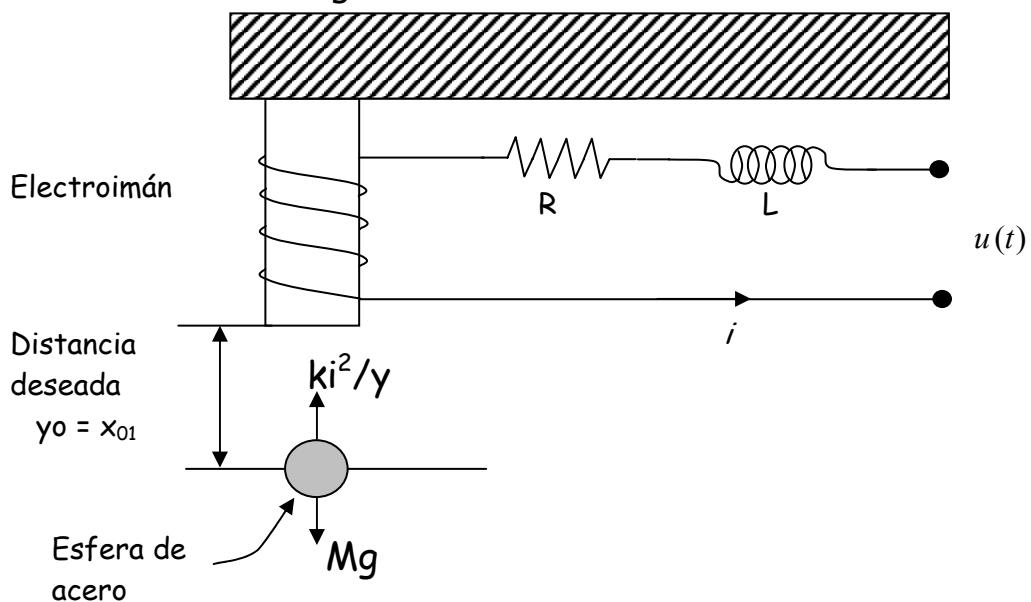


Figura 10

El objetivo del sistema es controlar la posición de la esfera de acero suspendida en un punto de equilibrio nominal mediante el ajuste de la corriente en el electroimán a través de la tensión de entrada $u(t)$. La aplicación práctica de este sistema es la levitación magnética de trenes o de cojinetes magnéticos en sistemas de control de alta precisión. Las ecuaciones diferenciales de la planta a controlar son:

$$\begin{cases} Mg - \frac{k i^2(t)}{y(t)} = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} & (*) \\ u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$$

$u(t)$: Tensión de entrada

En donde:
 $i(t)$: Corriente del bobinado
 L : Inductancia del bobinado
 g : Aceleración de la gravedad

$y(t)$: posición de la esfera
 R : Resistencia del bobinado
 M : Masa de la esfera

Las variables de estado se definen como:

$$x_1(t) = y(t) \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad y \quad x_3(t) = i(t). -$$

Las ecuaciones de estado de la misma son:

$$\begin{cases} f_1 \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ f_2 \Rightarrow \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{-k}{M} \frac{x_3^2(t)}{x_1(t)} + g \quad \text{Planta no Lineal} \\ f_3 \Rightarrow \frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{-R}{L} x_3(t) + \frac{1}{L} u(t) \end{cases}$$

La planta se va a linealizar en el punto de equilibrio $y_0(t) = x_{01} = \text{Constante}$.

Entonces:

$$x_{02}(t) = \frac{dx_{01}(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 y_o(t)}{dt^2} = 0 \quad (**)$$

El valor nominal de $i(t)$ se determina al sustituir la ecuación (**) en la (*).

Por tanto:

$$i_0(t) = x_{01}(t) = \sqrt{Mgx_{01}}$$

La ecuación de estado linealizada alrededor del punto de equilibrio se expresa en la forma de la ecuación:

$$\dot{\Delta x}(t) = A^* \dot{\Delta x}(t) + B^* \Delta u(t); \text{ en donde:}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_{03}^2}{Mx_{01}} & 0 & \frac{-2x_{03}}{Mx_{01}} \\ 0 & 0 & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{x_{01}} & 0 & -2\sqrt{\frac{g}{Mx_{01}}} \\ 0 & 0 & \frac{-R}{L} \end{bmatrix}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Los parámetros de la planta son:

k : constante proporcional = 1.0; $L = 0.01H$; $R = 1\Omega$ $M = 6.4kg$; $y g \cong 10m/seg^2$.-

Las denominadas matrices Jacobianas serán, si $x_{01} = 1m$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & -2.5 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \quad C^* = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D^* = 0$$

Los valores característicos de la matriz A^* serán:

$$|sI - A^*| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ -10 & s & 2.5 \\ 0 & 0 & s+100 \end{vmatrix} = s^3 + 100s^2 - 10s - 1000$$

$$\therefore P_1 = -100 \quad P_2 = -3.1623 \quad P_3 = +3.1623$$

Por ende esta planta sin el control es inestable, como era lógico.

Se tienen las siguientes especificaciones de diseño:

1. El sistema de control debe ser estable
2. Para *cualquier perturbación inicial* en la posición de la bola desde su posición de equilibrio, la bola debe regresar a la *posición nominal* con un error de estado estable nulo.
3. El $\text{te}(5\%) \leq 0.6 \text{ seg.}$ (5% del valor del apartamiento inicial).-
4. El sobre impulso máximo porcentual $M_p (\%) \leq 10\%$ de la magnitud de la desviación inicial.
5. El control se debe realizar mediante la realimentación del estado

$$u(t) = -K \bar{x}(t) = -[k_1 \ k_2 \ k_3] \bar{x}(t)$$

Donde k_1, k_2 y k_3 son constantes reales.

Un diagrama de estado del sistema de suspensión en lazo abierto se muestra en la figura (11a) y del mismo sistema pero en lazo cerrado con realimentación del estado se muestra en la figura (11b).

Se debe seleccionar la posición deseada de los valores característicos ($sI - A + BK$) para que los requisitos 3 y 4 sobre la respuesta en el tiempo sean satisfechos.

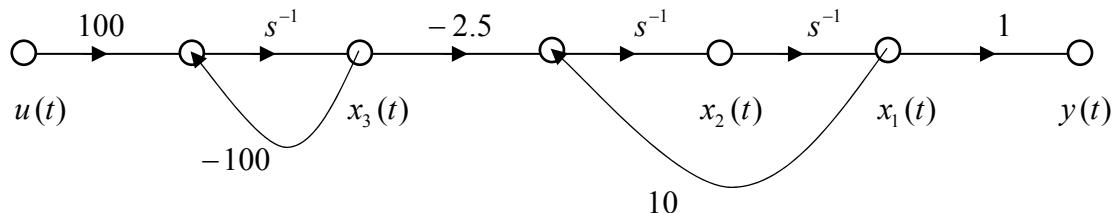


Figura 11a

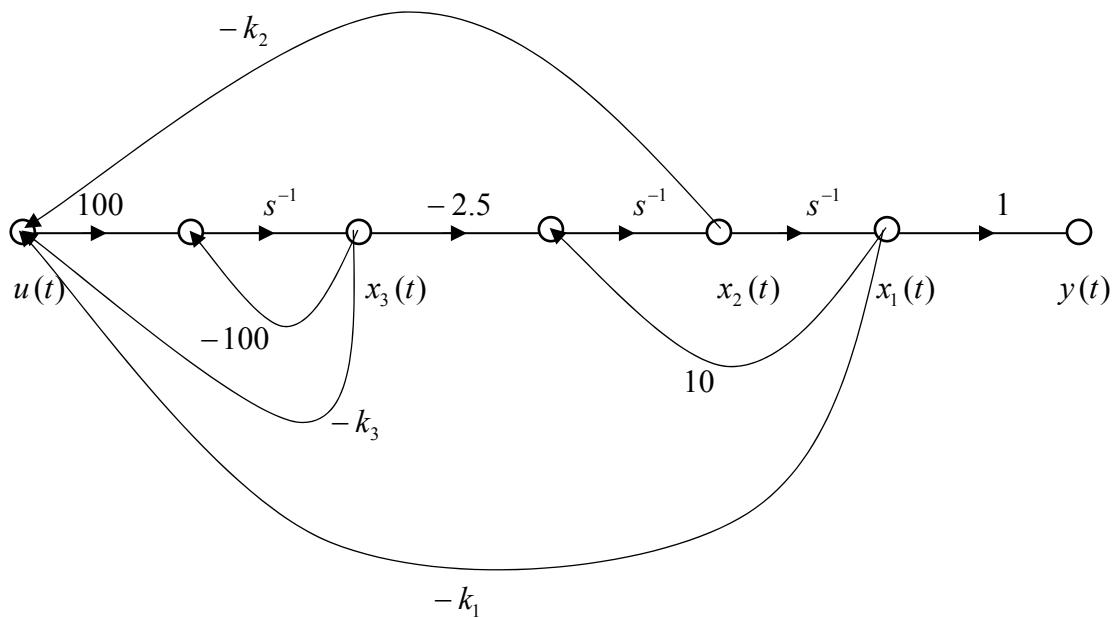


Figura 11b

Figura 11

Sin entrar al procedimiento para seleccionar los polos del sistema diseñado, por ahora, se puede comenzar con las decisiones siguientes:

- La dinámica del sistema debe ser controlada por dos raíces dominantes.
- Para alcanzar la respuesta relativamente rápida, las dos raíces dominantes deben ser complejas.
- El amortiguamiento que es controlado por el coeficiente de amortiguación δ de los polos debe ser adecuado, y las partes reales deben ser lo suficientemente grandes para que el transitorio decaiga con rapidez ($te(5\%) \leq 0.6$ segundos).

Todo esto será posible si el rango de S es igual a tres:

$$S = [B \ AB \ A^2B]$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -250 \\ 0 & -250 & 25000 \\ 100 & -10000 & 1000000 \end{bmatrix} \Rightarrow Rango(S) = 3, \text{ pues } |S| = -6250000$$

Por lo tanto los estados de la planta son controlables y se podrán realimentar los mismos con éxito. La solución, en general, no será única. Para que se cumpla la 4, ($M_p (\%) \leq 10\%$), el coeficiente de amortiguación de los polos complejos deberá ser:

$$\delta \geq \sqrt{\frac{(\ln .10)^2}{\pi^2 + (\ln .10)^2}} \rightarrow \delta \geq 0.59115$$

Se pudo elegir $\delta = 0.6$

Para que se cumpla la 3), ($te(5\%) \leq 0.6$ seg.):

$$te(5\%) \cong \frac{3.2}{|\sigma|} \leq 0.6 \text{ seg} \quad \therefore |\sigma| \geq 5.334 \text{ se pudo elegir: } |\sigma| = 6$$

Para mantener $\delta=0.6$ deberá ser: $wd = 6 \tan \theta = 6 \tan(\cos^{-1} 0.6) = 8$

Por lo tanto los polos dominantes serán: $\lambda_{1-2} = -6 \pm j8$

Para que el tercer polo no influya en demasiado, $\lambda_3 \leq 5\sigma \rightarrow \lambda_3 = -30$

La ecuación característica deseada será:

$$(s+30)(s^2 + 12s + 100) = s^3 + 42s^2 + 460s + 3000 = 0$$

En función de los coeficientes de la matriz K, será:

Método directo

$$|sI - A^* + BK| = s^3 + (100 + 100k_3)s^2 + (-10 - 250k_2)s + (-1000 - 1000k_3 - 250k_1) = 0$$

$$\begin{cases} 100 + 100k_3 = 42 \Rightarrow k_3 = -0.58 \\ -10 - 250k_2 = 460 \Rightarrow k_2 = -1.88 \\ -1000 - 1000k_3 - 250k_1 = 3000 \Rightarrow k_1 = -13.68 \end{cases}$$

$$\therefore K = [-13.68 \quad -1.88 \quad -0.58]$$

Con cualquier programa de computación se puede verificar si se cumplen las especificaciones pedidas. Usando svdesign del Csad/Matlab para obtener

$\bar{x}(t)$ y verificar por ejemplo que con $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ que se obtiene el transitorio

pedido.

En las figuras siguientes se puede ver que $M_p (\%) = 9 \% < 10\%$ y $t_e(5\%) = 0.576 \text{ seg.} < 0.60 \text{ seg.}$ La variación temporal de los estados del sistema regulador está indicada en la figura 12:

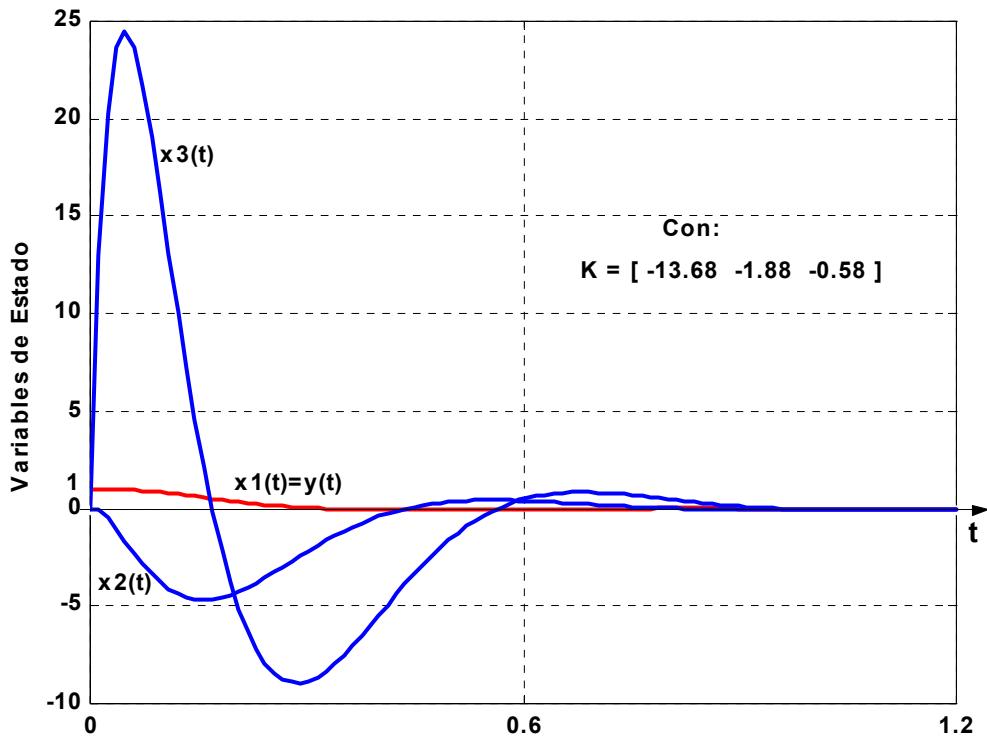


Figura 12

La posición de la bola de acero $y(t) = x_1(t)$, ampliada se muestra en la figura 13.

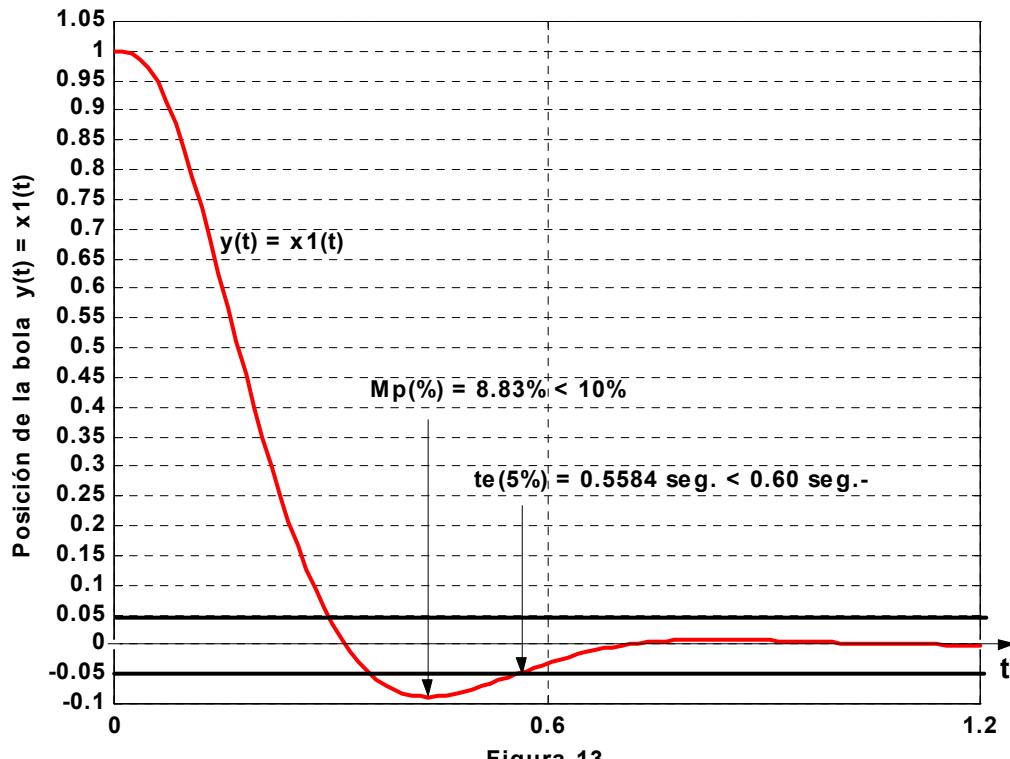


Figura 13

Como se puede apreciar en la misma el sistema regulador diseñado cumple con todas las especificaciones requeridas.

Esta solución no es la única. Por ejemplo, podemos diseñar otra en la que la respuesta entre por arriba en la banda del $\pm 5\%$ y no salga mas. Para ello se elige:

$$\delta = 0.707$$

$$te(5\%) \approx \frac{4.5\delta^2}{|\sigma|} \leq 0.60 \Rightarrow |\sigma| \geq 3.75 \text{ se elige } \sigma = -4$$

$$\therefore \lambda_{1-2} = -4 \pm j4 \rightarrow \lambda_3 \leq 5\sigma \rightarrow \text{si se elige } \lambda_3 = 5\sigma \Rightarrow \lambda_3 = -20.$$

$$(s+20)(s^2 + 8s + 32) = s^3 + 28s^2 + 192s + 640 = 0$$

$$\therefore 100 + 100k_3 = 28 \Rightarrow k_3 = -0.72$$

$$-10 - 250k_2 = 192 \Rightarrow k_2 = -0.80$$

$$-1000 - 1000k_3 - 250k_1 = 640 \Rightarrow k_1 = -3.68$$

Por lo tanto:

$$K = [-3.68 \quad -0.80 \quad -0.72]$$

En la figura 14 se muestran las respuestas temporales y la verificación de las especificaciones de funcionamiento del sistema regulador diseñado, por ende esta sería *otra solución* al problema de diseño planteado.-

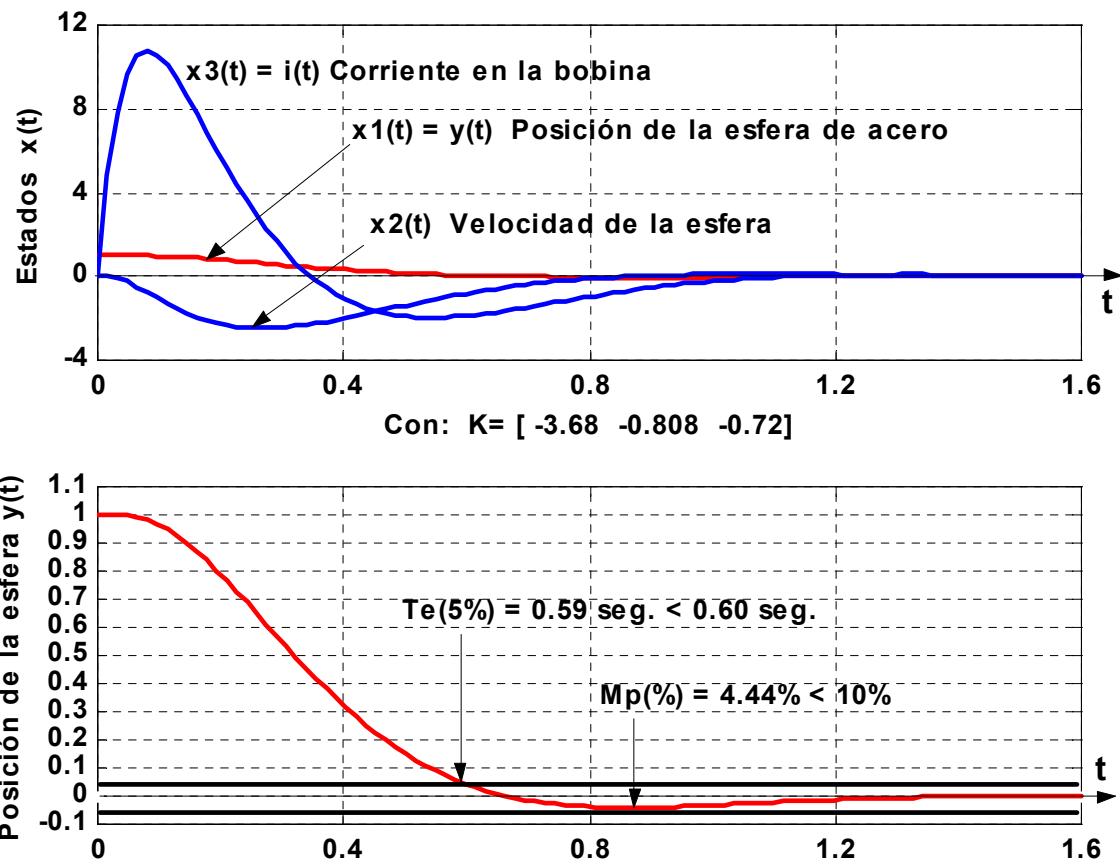


Figura 14

Diseño de Sistemas Seguidores:

Hasta ahora, los diseños mediante asignación de polos se han aplicado a un sistema que carecía de entrada de referencia, o mejor, que la misma era constante, por ende señal de control $u(t)$ era proporcional al vector de estado solamente. En el problema del regulador que ha sido tratado en las secciones anteriores, el criterio de diseño es eliminar el efecto de las perturbaciones y *llover al vector de estado del sistema a cero en tiempo y forma razonable*. Sin embargo, la mayoría de los sistemas de control son seguidores (servo sistemas), esto es, la salida $y(t)$ deberá seguir a una entrada referencia $r(t)$, luego el objetivo de diseño ahora será que el vector de estado y la salida correspondiente del sistema sigan unas trayectorias deseadas. Las formas de encarar esto serán las siguientes:

1.- Con la Realimentación del Estado *Solamente*:

Si bien la condición de controlabilidad se ha demostrado para el caso mas general, esto es, un sistema MIMO en el que tanto la señal de entrada $\bar{u}(t)$ como la de salida $\bar{y}(t)$ son vectores, el calculo de la matriz de realimentación K se vuelve mucho mas complicado cuando el control es

multivariable que cuando se trata de monovariable. El control multivariable excede las pretensiones de este texto, por lo cual, en los diseños que siguen, se consideran sistemas SISO o SIMO exclusivamente. Sea pues el sistema SISO de control cuya ubicación de polos mediante la *realimentación del estado solamente*, (como el que se muestra en la figura 15), en el cual se ha supuesto, como es casi general, que $D=0$:

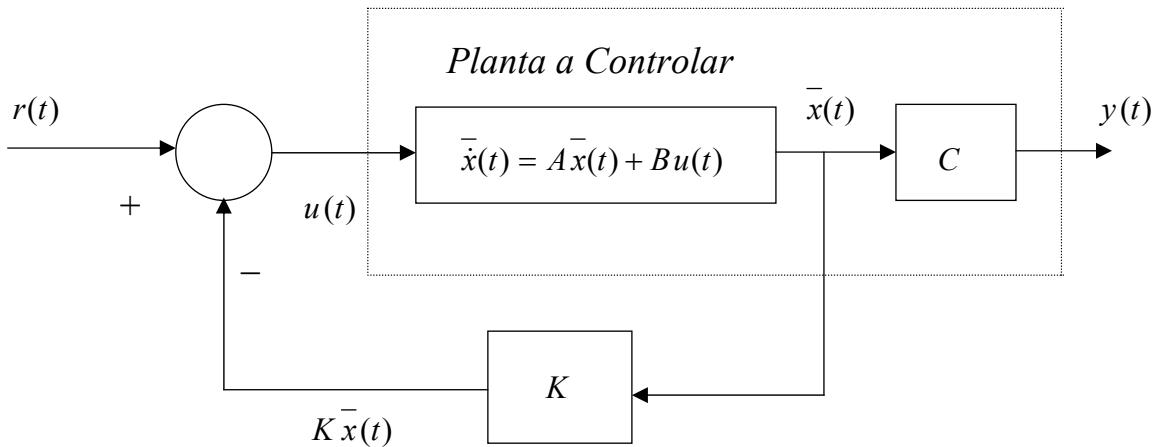


Figura 15

La planta está modelada por las ecuaciones siguientes:

$$\dot{\bar{x}}_{(t)} = A\bar{x}_{(t)} + Bu_{(t)}$$

$$y_{(t)} = C\bar{x}_{(t)}$$

La señal de control está dada por la relación:

$$u_{(t)} = -K\bar{x}_{(t)} + r_{(t)}$$

Donde:

$$K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$$

Por ende el modelo de estado del sistema en lazo cerrado es:

$$\dot{\bar{x}}_{(t)} = A\bar{x}_{(t)} + B[-K\bar{x}_{(t)} + r_{(t)}]$$

Por lo tanto:

$$\dot{\bar{x}}_{(t)} = (A - BK)\bar{x}_{(t)} + Br_{(t)} = Ac\bar{x}_{(t)} + Bcr_{(t)}$$

Las matrices características y de distribución del sistema de lazo cerrado serán:

$Ac = (A - BK)$: Igual como era de esperar a la del sistema regulador.

$Bc = B$: La matriz de distribución no se altera.-

Para la ecuación de salida, suponiendo que $D \neq 0$ será:

$$y(t) = C\bar{x}(t) + D(-K\bar{x}(t) + r(t))$$

$$y(t) = (C - DK)\bar{x}(t) + Dr(t) = Cc\bar{x}(t) + Dcr(t)$$

Las matrices de salida o medición y la D del sistema de lazo cerrado serán:

$Cc = (C - DK)$: Matriz de salida.

$D_c = D$: La matriz D no se altera.-

Se sabe que $G_p(s) = K_p N_p(s) / D_p(s)$, donde $N_p(s)$ es un polinomio en s, que no se modifica pues se agregan solo lazos al diagrama de estado del sistema y no caminos directos.-

En consecuencia los polos en lazo cerrado se pueden ubicar libremente mediante el ajuste de la matriz de ganancias de realimentación de los estados K, si la planta es de estado completamente controlable como a se dijo oportunamente.

Sean pues las posiciones de los polos deseados:

$$s = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

Con lo cual la ecuación característica del sistema es:

$$|sI - A + BK| = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) = 0$$

En esta ecuación hay n incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y n coeficientes conocidos en el miembro derecho de la igualdad de polinomios. Para calcular las ganancias desconocidas, con el método directo, basta con igualar los coeficientes de igual potencia en s.

Nótese que por medio de la realimentación del vector estado *sólo* se modifica la ubicación de los polos de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado, sin embargo como ya se dijo, *los ceros permanecerán inalterados*.

Por regla general el modelo de la planta mediante la realimentación de los estados *sólo*, produce un *sistema tipo cero*, pues $M(0) \neq 1$, de modo que como ya se sabe, un sistema de este tipo sería incapaz de seguir sin error a una señal de entrada de referencia escalón.-

Ejemplo 3:

Para una planta a controlar el modelo tiene las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 140 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D = 0. -$$

Se desea diseñar un sistema seguidor tipo uno para que se cumplan las especificaciones siguientes:

- Error de Estado Estacionario a entradas escalones nulo.
- $M_p(\%) \leq 17\%$.
- $t_E(2\%) \leq 2.20 \text{ seg}$.

En base a las matrices la función de transferencia de la planta es:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \frac{\text{Adj}(sI - A)}{|(sI - A)|} B = \frac{140}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{140}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Como se puede ver en este caso la planta será controlable. Se intentará hacer un diseño con un par de *polos complejos conjugados dominantes*.- Para que se cumpla la segunda especificación los mismos deberán tener:

$$\delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0.17)^2}{\pi^2 + (\ln 0.17)^2}} \Rightarrow \delta \geq 0.4912$$

Para la tercera: $t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 2.2 \text{ seg.} \Rightarrow |\sigma| \geq 1.818,$

se elegirá: $|\sigma| = 2.$ -

Si se elige: $\delta = 0.50$ y $\sigma = -2 \Rightarrow \omega_d = 2\sqrt{3}$

Por ende: $\lambda_{1-2} = -2 \pm j2\sqrt{3},$

y el tercer polo, $\lambda_3 \geq 5|\sigma| \Rightarrow \lambda_3 = -10.$ -

En general en primer lugar se verificará que la planta es controlable, cosa que en este ejemplo ya se sabe, pues en la $Gp(s)$ de la planta no hay cancelación de polos y ceros.

Para ello el rango de la matriz de la controlabilidad:

$$S = [B \ AB \ A^2B],$$

debe ser 3, en efecto,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 140 \\ 0 & 140 & -840 \\ 140 & -840 & 3500 \end{bmatrix} \Rightarrow |S| = -2744000,$$

por lo tanto $\text{Rango}(S) = n = 3.$ -

Ahora: $|sI - A + BK| = (s+10)(s^2 + 4s + 16) = (s^3 + 14s^2 + 56s + 160) = 0$

En consecuencia:

$$160 = 6 + 140k_1 \Rightarrow k_1 = 1.10$$

$$56 = 11 + 140k_2 \Rightarrow k_2 = 9/28$$

$$14 = 6 + 140k_3 \Rightarrow k_3 = 2/35$$

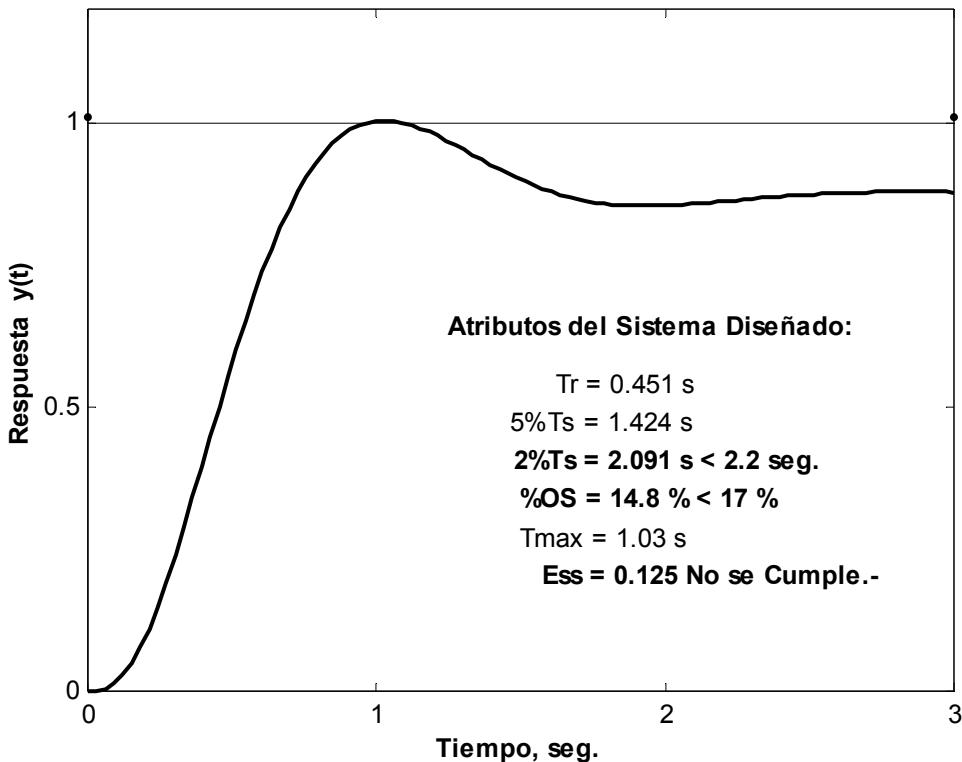
La matriz K será: $K = [1.10 \ 9/28 \ 2/35]$

La F de T. del sistema diseñado será:

$$M(s) = \frac{140}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}.$$

Como se puede apreciar en la figura 16 no se cumple la especificación de que el error de estado estacionario al escalón de entrada sea nulo.

La lección que se aprende de este ejemplo, es que el control con realimentación de los estados *sólo*, produce en general un *sistema seguidor tipo 0* si *todos* los polos se eligen en forma arbitraria. Para que el sistema siga a una entrada escalón *sin error* de estado estable, una forma de solucionar esto sería: como en este caso la planta es de orden $n=3$, solo $(n-1)=2$ polos se podrán elegir en forma arbitraria. Lo cual no garantiza, en general, el transitorio deseado. Otra forma, la más usada, es por ejemplo colocar una ganancia de precompensación como se verá más adelante. Apliquemos lo primero al ejemplo que se está tratando.



La función de transferencia del sistema en función de los elementos de la matriz de realimentación era:

$$M(s) = \frac{140}{s^3 + (6+140k_3)s^2 + (11+140k_2)s + (6+140k_1)}$$

Para que, $M(0)=1 \Rightarrow 140 = 6 + 140k_1 \Rightarrow k_1 = 67/70.$ –

Poe ende en este caso podrán elegir solo: $n-1=3-1=2$ polos en forma arbitraria, por ejemplo el par complejo, λ_{1-2} y el real λ_3 , resultara en consecuencia para cumplir $M(0)=1.$ –

Si se elige $\lambda_{1-2} = -2 \pm j2\sqrt{3}; \lambda_3 = ?$

Para que el par complejo sea dominante deberá ser $\lambda_3 \leq 5\sigma$, si esto se cumple el diseño será un éxito si no se cumple no. La ecuación característica será:

$$(s - \lambda_3)(s^2 + 4s + 16) = s^3 + (4 - \lambda_3)s^2 + (16 - 4\lambda_3)s + (-16\lambda_3) = 0$$

Por lo tanto:

$$-16\lambda_3 = 140 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{-140}{16} \Rightarrow \lambda_3 = -8.75$$

Como se aprecia mas cerca del par de polos complejos que en el primer diseño, pues en el era $\lambda_3 = -10$, el $t_E(2\%)$ subirá un poco y Mp bajara.

$$\text{Por ende: } 11+140k_2 = 16 - 4\lambda_3 = 16 + 35 = 51 \Rightarrow k_2 = 2/7. -$$

$$6+140k_3 = 4 - \lambda_3 = 4 + 8.75 = 12.75 \Rightarrow k_3 = 27/560$$

La matriz de la realimentación de los estados seria la siguiente:

$$K = [67/70 \quad 2/7 \quad 27/560] ; \quad K \cong [0.957 \quad 0.286 \quad 0.048] -$$

Con la computadora se obtiene la respuesta mostrada en la figura 17, con los atributos correspondientes. En la misma se observa que el sistema diseñado cumple con todas las especificaciones solicitadas.

Recordar que no siempre se tiene éxito, por ejemplo si la ganancia de la planta a controlar, (igual al elemento de la matriz B), fuera menor, por ejemplo 10, se tendrá que:

$-16\lambda_3 = 10 \Rightarrow \lambda_3 = -0.625$, y por lo tanto el par de polos complejos no será, ya dominante y el diseño de esta manera sería un fracaso.

Esto requerirá recurrir a otros métodos, por ejemplo colocar una ganancia de precompensación como ya se mencionó, sería el más sencillo.-

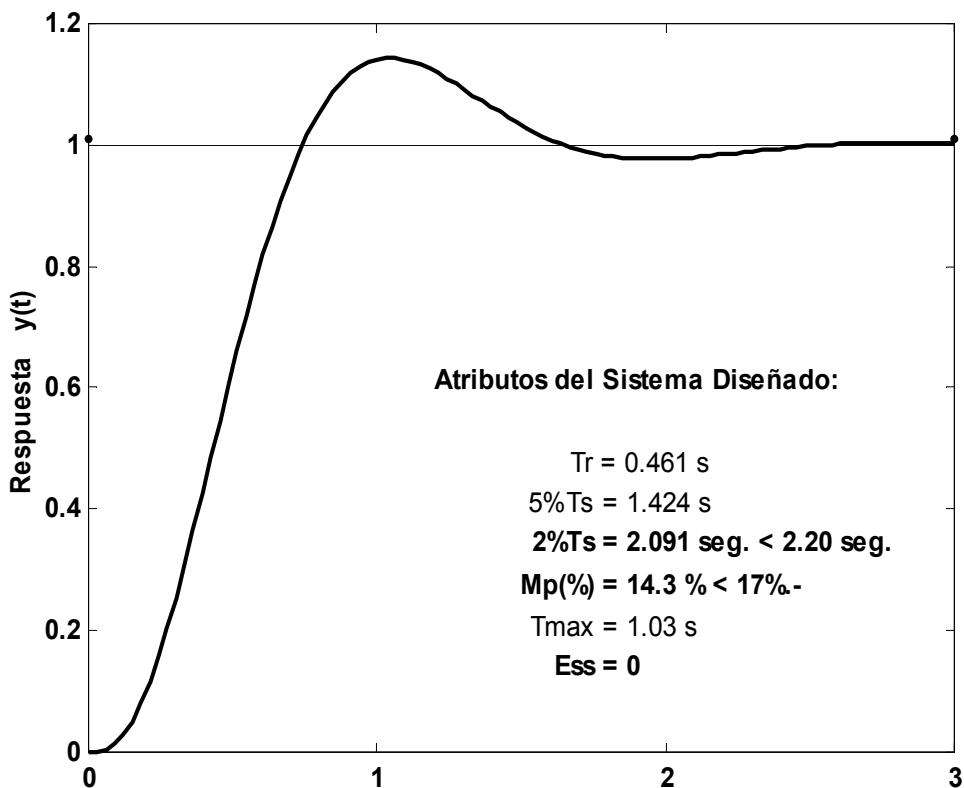


Figura 17

Ejemplo 4:

La función de transferencia de una planta a controlar es:

$$G_p(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

El problema es diseñar, si es posible, por medio de la realimentación de los estados *sólo*, un sistema de seguimiento al escalón que cumpla con las especificaciones siguientes:

1. Que el error de estado estable al escalón de entrada sea nulo.-
2. La respuesta al escalón debe tener el sobre paso, $M_p \approx 0$, (sin oscilaciones), y el tiempo de establecimiento t_E (5%), mínimo.-

Utilizar el modelo de la planta en la forma canónica controlable, o sea:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [2500 \quad 0] \quad y \quad D = 0. -$$

Siguiendo con este método, se podrán elegir ($n-1$) valores característicos, uno en este caso y el otro *resultará*. Como $M_p = 0$ y sin oscilaciones y además el $t_E(5\%)$ mínimo, deberá tener el sistema un polo doble, ($\delta=1$), veremos qué valor deberá tener el mismo.

La función de transferencia de lazo cerrado será, en este caso:

$$M(s) = C \frac{\text{Adj}(sI - A)}{|sI - A|} B = \frac{2500}{s^2 + (25 + k_2)s + k_1} . -$$

Para que el error de estado estacionario al escalón de entrada sea nulo deberá ser la ganancia estática $M(0)=1$, o sea $k_1 = 2500$.

Esto significa que aunque la planta sea controlable, *solo con realimentación de los estados solamente*, no podrán asignarse en forma arbitraria los dos polos del sistema. La ecuación característica es:

$$s^2 + (25 + k_2)s + 2500 = 0$$

$$\text{Por lo tanto: } \lambda_1 \lambda_2 = \lambda^2 = 2500 \Rightarrow \lambda_{1-2} = -50.$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -(25 + k_2) \Rightarrow -100 = -(25 + k_2) \Rightarrow k_2 = 75. -$$

La matriz de la realimentación de los estados será:

$$K = [k_1 \quad k_2] = [2500 \quad 75]$$

Todo esto también se puede razonar así:

El movimiento de las raíces de la ecuación característica para $k_1 = 2500$, variando el parámetro k_2 se puede obtener de:

$$G_{equiv}(s) = \frac{k_2 s}{s^2 + 25s + 2500}$$

Como se puede ver en la Figura 18, se llega a la misma conclusión, para $k_2 = 75$ los polos del sistema seguidor diseñado estarán en: $\lambda_{1-2} = -50$,

En la figura 19, se muestran tres respuestas para valores diferentes de k_2 , con $k_1 = 2500$. Como se puede apreciar la más rápida sin sobre elongación es para $k_2 = 75$, como ya se discutió.-

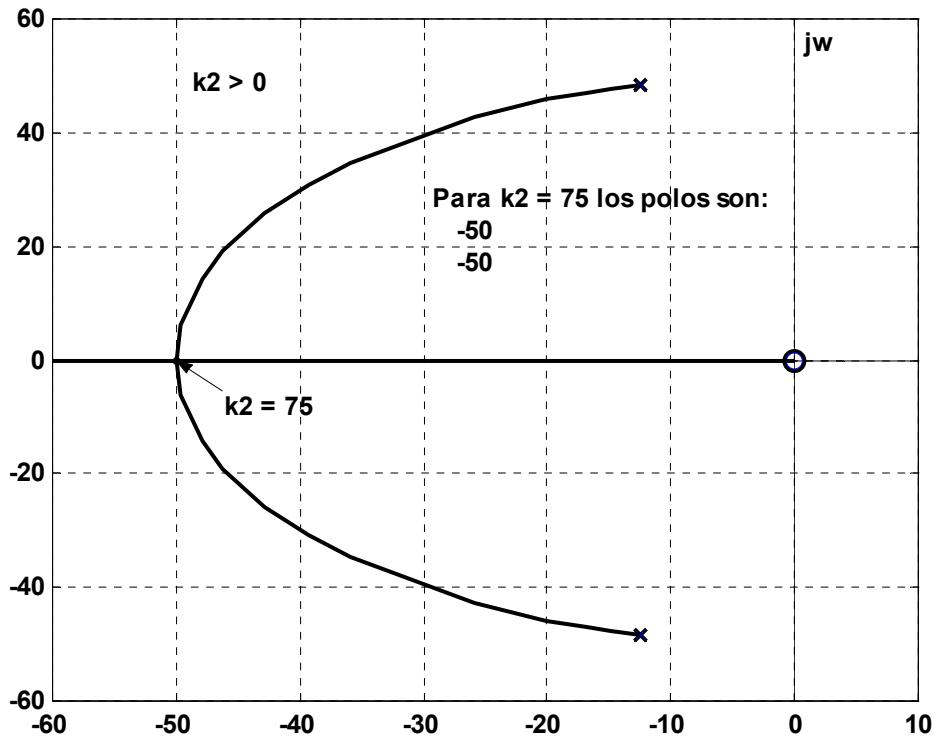


Figura 18

Como es lógico con éste método, para otros diseños más complejos en general, seguramente se fracasará, por lo tanto se verán a continuación otras formas de diseñar un sistema de control seguidor tipo uno.-

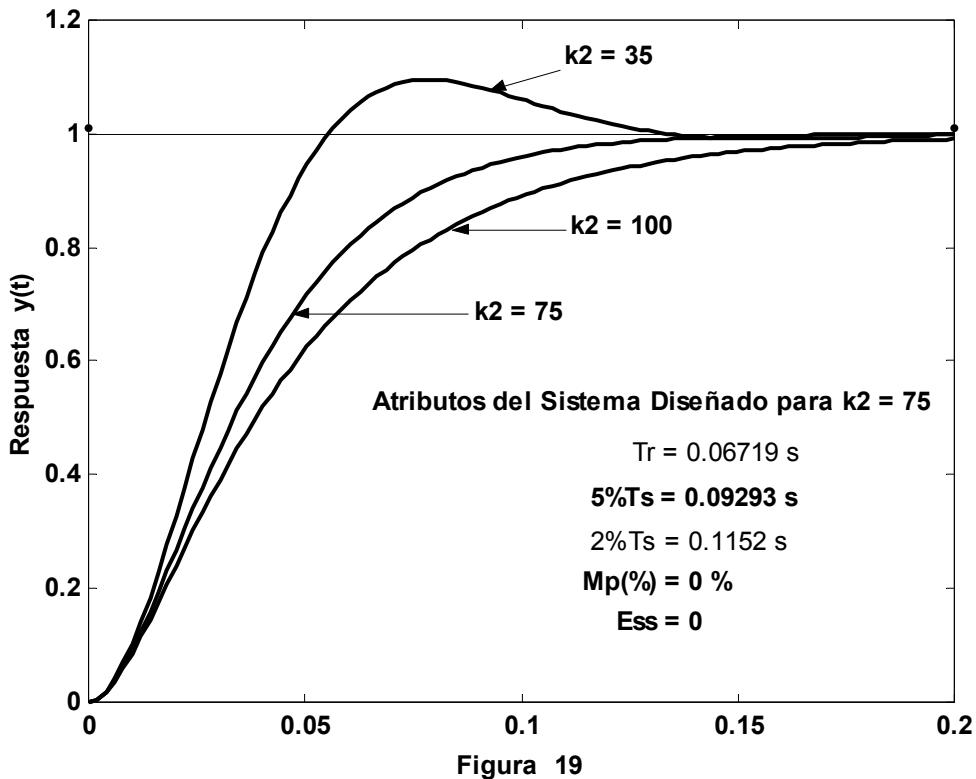


Figura 19

Sistema de Seguimiento “Tipo 1” cuando la Planta tiene un Integrador, solo con la Realimentación de los Estados:

Mediante una elección *adecuada* de las variables de estado, es posible seleccionar la salida igual a una de las variables de estado, por ejemplo $y(t) = x_1(t)$. Ya vimos un método en el cual sucede esto, lo recordemos.

Si en general la función de transferencia de la planta es:

$$G_p(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Una forma adecuada de elegir las variables de estado y de salida es definir las siguientes “n” variables de estado de la planta:

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_n u \Rightarrow y(t) = x_1(t) + \beta_n u(t) \\ x_2 = \dot{y} - \beta_n \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_1 - \beta_{n-1} u \\ x_3 = \ddot{y} - \beta_n \ddot{u} - \beta_{n-1} \dot{u} - \beta_{n-2} u = \dot{x}_2 - \beta_{n-2} u \\ \dots \\ x_n = \overset{(n-1)}{y} - \beta_n \overset{(n-1)}{u} - \beta_{n-1} \overset{(n-2)}{u} - \dots - \beta_2 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_{n-1} - \beta_1 u \end{cases}$$

En donde:

$$\begin{cases} \beta_n = b_n \\ \beta_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1} \beta_n \\ \beta_{n-2} = b_{n-2} - a_{n-1} \beta_{n-1} - a_{n-2} \beta_n \\ \beta_{n-3} = b_{n-3} - a_{n-1} \beta_{n-2} - a_{n-2} \beta_{n-1} - a_{n-3} \beta_n \\ \dots \\ \beta_0 = b_0 - a_{n-1} \beta_1 - \dots - a_1 \beta_{n-1} - a_0 \beta_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_{n-2} u \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_1 u \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + \beta_0 u \end{cases}$$

En forma matricial sería:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_n u(t) \quad \text{En esta representación las matrices A, C y D}$$

son las mismas que en la forma canónica controlable, cuando *no hay* derivadas de la entrada en la ecuación diferencial *y además* $b_0 = 1$. La matriz B es solo la que cambia. Un diagrama de estado seria el de la fig. 20

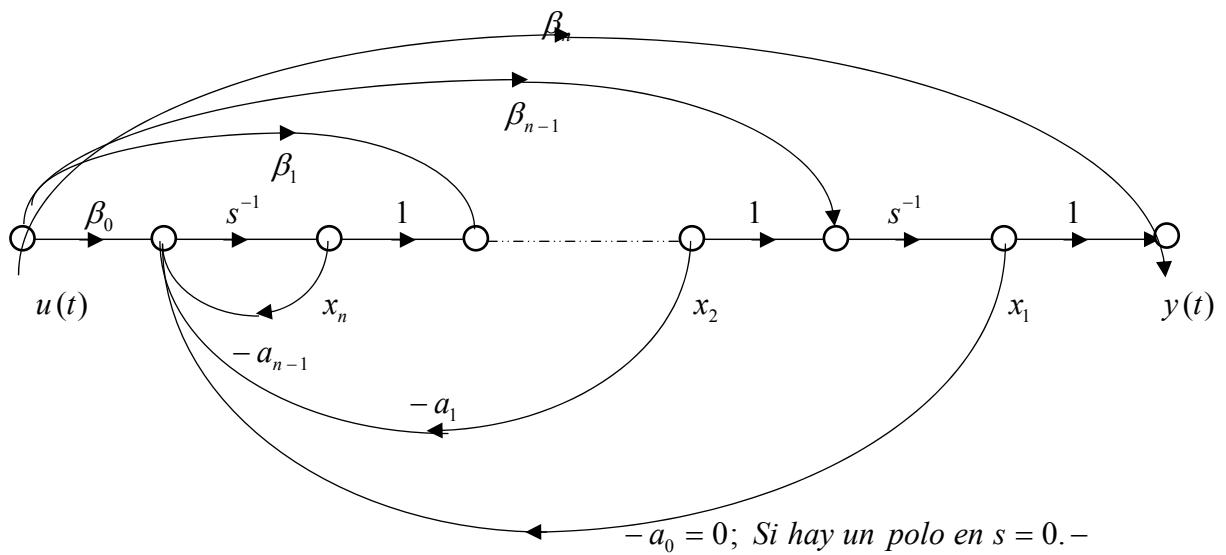


Figura 20

Si $a_0 = 0$, la función de transferencia tendrá un polo en el origen.

Con el objeto de *no modificar* el tipo del sistema y que a su vez *todos* los polos puedan ser ubicados en los lugares deseados, se utiliza la configuración mostrada en la figura 21, (en ella se supone que la matriz $D = [\beta_n] = [b_n] = [0]$).-

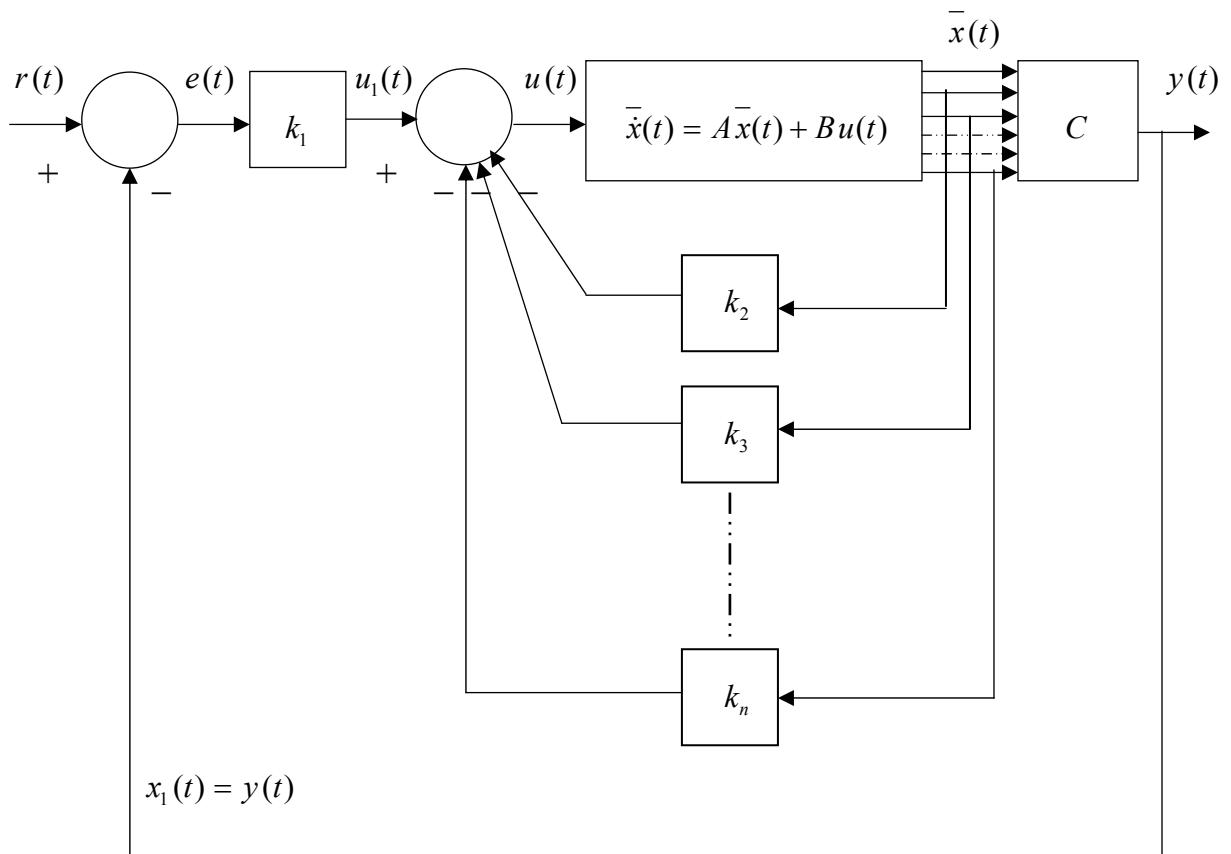


Figura 21

Se puede demostrar fácilmente que la "planta", con $u_1(t)$ como entrada también tendrá un polo en el origen, por ende el sistema será tipo 1, como se desea.-

De la figura 21, la acción de control será:

$$u(t) = -[0 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + k_1(r - x_1) = -K^T \bar{x}(t) + k_1(r - x_1). -$$

La cual se puede colocar:

$$u(t) = -[k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n] \bar{x}(t) + k_1 r(t)$$

$$u(t) = -K \bar{x}(t) + k_1 r(t)$$

$$\text{Donde: } K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n]$$

Así la dinámica del sistema será:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) = (A - BK)\bar{x}(t) + k_1 Br(t) \quad (*)$$

Donde las matrices de lazo cerrado serán:

$$Ac = (A - BK) \quad ; \quad Bc = (k_1 B) \quad y \quad Cc \equiv C$$

Siguiendo con este modelo en estado estable se tendrá que:

$$(**) \quad \dot{\bar{x}}(\infty) = (A - BK)\bar{x}(\infty) + k_1 Br(\infty) \quad \text{si} \quad r(t) = Ru_S(t) \quad ; \quad r(\infty) = R. -$$

Restando la ecuación (**) de la ecuación (*), se obtiene:

$$\dot{\bar{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(\infty) = (A - BK)[\bar{x}(t) - \bar{x}(\infty)]$$

Si se define el error de estado estacionario, como:

$$\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - \bar{x}(\infty)$$

Se tendrá:

$$\dot{\bar{e}}(t) = (A - BK)\bar{e}(t)$$

Ecuación que describe la dinámica del error en los estados. El diseño del sistema de seguimiento tipo 1 se convierte aquí en el diseño de un sistema regulador asintóticamente estable tal que $\bar{e}(t) \rightarrow \bar{0}$, dada cualquier condición inicial $\bar{e}(0)$.

Si la planta es controlable, entonces especificando los valores característicos deseados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, para la matriz $(A - BK)$, la matriz K se podrá determinar por cualquiera de los métodos ya vistos.-

Los valores de estado estable de $\bar{x}(t)$ y $u(t)$ se encuentran del modo siguiente.

En estado estable, ($t \rightarrow \infty$), se tendrá:

$$\dot{\bar{x}}(\infty) = \bar{0} = (A - BK)\bar{x}(\infty) + k_1 BR$$

Dado que todos los valores característicos deseados de $(A - BK)$ están en el

semiplano izquierdo del plano s , existirá la inversa de la matriz $(A - BK)$, por ende:

$$\bar{x}(\infty) = -(A - BK)^{-1} k_1 BR$$

Así mismo, $u(\infty)$ se obtiene como:

$$u(\infty) = -K \bar{x}(\infty) + k_1 R = 0$$

Resolviendo el Ejemplo 4, con este método, pues $a_0 = 0$, el modelo de estado será para este caso:

$$G_p(s) = \frac{2500}{s(s+25)} = \frac{2500}{s^2 + 25s + 0} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = b_2 = 0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1\beta_2 = 0 \\ \beta_0 = b_0 - a_1\beta_1 - a_0\beta_2 = b_0 = 2500. \end{cases}$$

Las matrices del modelo serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2500 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0] \text{ y } D = [0]$$

Las variables de estado serán las siguientes:

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_2 u \\ x_2 = \dot{y} - \beta_2 \dot{u} - \beta_1 u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y(t) \\ x_2 = \dot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}.$$

los polos se eligieron en: $\lambda_{1-2} = -50$, la ecuación característica es en consecuencia: $s^2 + 100s + 2500 = 0$, como $Ac = (A - BK)$, también la ecuación característica es:

$$|sI - A + BK| = s^2 + (25 + 2500k_2)s + 2500k_1 = 0$$

Por ende:

$$k_1 = 1 \text{ y como } 2s + 2500k_2 = 100 \Rightarrow k_2 = 0.03$$

$K = [1 \ 0.03]$, será la matriz de realimentación de los estados.-

Las matrices del sistema de control diseñado serán:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2500k_1 & -25(1+100k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2500 & -100 \end{bmatrix}$$

$$Bc = k_1 B = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2500 \end{bmatrix} \text{ y } Cc = C = [1 \ 0] -$$

Ejemplo 5:

Dada una planta con:

$$G_p(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1) \cdot (s+5)}$$

Diseñar un sistema seguidor para que se cumplan las especificaciones siguientes:

1. Que el error de estado estable a una entrada escalón sea nulo.
2. $te(2\%) \leq 2.20$ seg.
3. $Mp(\%) \leq 20\%$

$$G_p(s) = \frac{1}{s^3 + \overset{bo}{\underset{a_2}{6}} \cdot s^2 + \overset{a_1}{5} \cdot s + \overset{a_0}{0}} \quad \text{Por ende se tendrá} \quad \begin{cases} \beta_3 = b_3 = 0 \\ \beta_2 = b_2 - a_2 \beta_3 = 0 \\ \beta_1 = b_1 - a_2 \beta_2 - a_1 \beta_3 = 0 \\ \beta_0 = b_0 - a_2 \beta_1 - a_1 \beta_2 - a_0 \beta_3 = b_0 = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto el modelo de la planta será el siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

Con este método el modelo coincide, como ya se dijo, con la FCC si no hay ceros y $b_0 = 1$ en $G_p(s)$.

No hace falta verificar que el rango de S es igual a 3, pues está en la FCC, de todas maneras:

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango}(S) = 3$$

Ubicación de los polos Complejos Conjugados Dominantes:

$$\text{Para que } M_p (\%) \leq 20\% \rightarrow \delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0.2)^2}{\pi^2 + (\ln 0.2)^2}} = 0.446 \rightarrow \delta \geq 0.446$$

$$\text{Para que } \text{te} (2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 2.20 \rightarrow |\sigma| \geq 1.818; \text{ si se elige } \sigma = -2$$

$$\delta \geq 0.446 \rightarrow \cos \theta \geq 0.446 \rightarrow \theta \leq \cos^{-1}(0.446)$$

$$\text{Si } \operatorname{tag}^{-1}\left(\frac{wd}{2}\right) \leq \cos^{-1}(0.446) \rightarrow wd \leq 2 \cdot \operatorname{tag}(\cos^{-1} 0.446)$$

$$\therefore wd \leq 2 \cdot \operatorname{tag} 63.512^\circ \rightarrow wd \leq 4.136 \rightarrow wd = 4$$

Por lo tanto los polos complejos dominantes serán: $\lambda_{1-2} = -2 \pm j4$

Además como $G_p(s)$ no tiene ceros $\rightarrow |\lambda_3| \geq 5 \cdot |\sigma| \rightarrow \lambda_3 = -10$

La ecuación característica será:

$$(s+10)(s^2 + 4s + 20) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200 = 0$$

También: $|sI - Ac| = 0$

$$A_c = (A - BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -5 - k_2 & -6 - k_3 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A_c| = s^3 + (6 + k_3)s^2 + (5 + k_2)s + k_1 = 0$$

en consecuencia:

$$k_1 = 200$$

$$k_2 = 55$$

$$k_3 = 8$$

La matriz de realimentación será: $K = [200 \ 55 \ 8]$

También se puede expresar: $K' = [0 \ 55 \ 8]$ y $k_1 = 200$

Las matrices del sistema de lazo cerrado diseñado serán las siguientes:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -200 & -60 & -14 \end{bmatrix} \quad B_c = k_1 \cdot B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C_c = C = [1 \ 0 \ 0]$$

Por último con el objeto de comprobar en forma analítica la capacidad de seguimiento del sistema diseñado, se aplicará:

$$\bar{x}_{(\infty)} = -(A - BK)^{-1} B k_1 R$$

$$\begin{bmatrix} x_{1(\infty)} \\ x_{2(\infty)} \\ x_{3(\infty)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -200 & -60 & -14 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix} \cdot R \rightarrow r(t) = R \mu_s(t)$$

Teniendo en cuenta que: $y(t) = x_1(t)$

$$\begin{bmatrix} y_{(\infty)} \\ x_{2(\infty)} \\ x_{3(\infty)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.07 & 0.005 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \cdot R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual $y_{(\infty)} = R$, $x_{2(\infty)} = 0$ y $x_{3(\infty)} = 0$. Por lo tanto se demuestra que como exigía el diseño, la salida sigue fielmente a la señal de referencia. La figura 22 resume todo lo dicho.

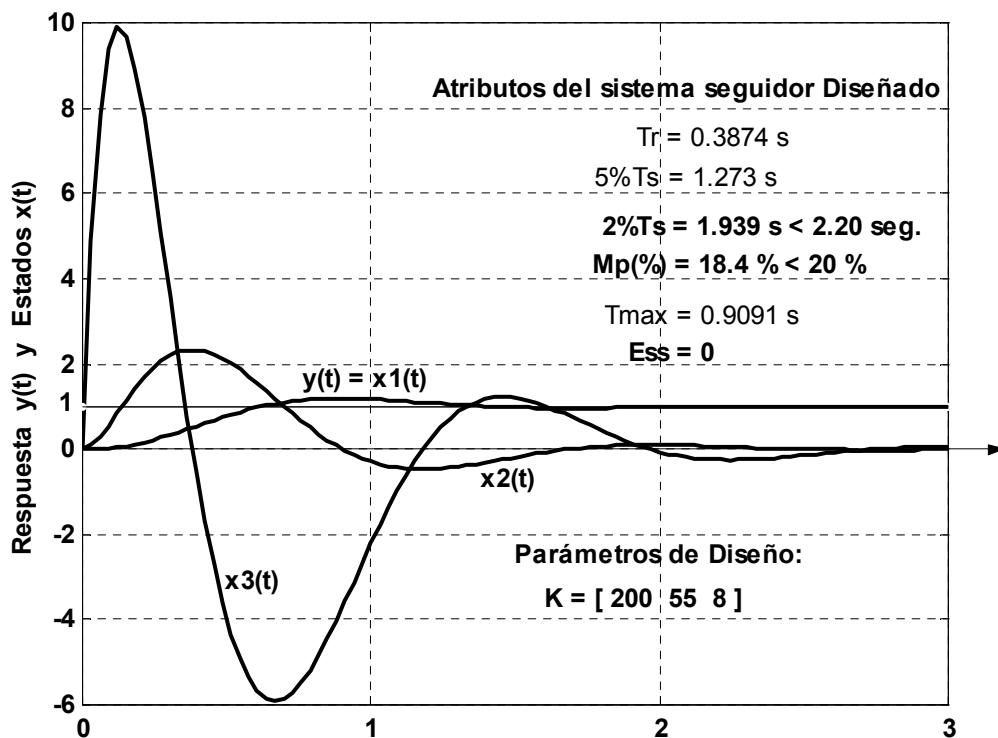


Figura 22

Además se ve que:

$$u(\infty) = -K \bar{x}(\infty) + k_1 R ; \quad u_{(\infty)} = -[200 \ 55 \ 8] \cdot \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 200 \cdot R = -200 \cdot R + 200 \cdot R = 0$$

Por lo tanto la señal de control en régimen permanente es nula.

Ejemplo 6:

Una planta a controlar tiene la función de transferencia siguiente:

$$G_p(s) = \frac{10(s+5)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{10s+50}{s^3 + 3s^2 + 2s + 0} \rightarrow \begin{cases} b_1 = 10; b_0 = 50 \\ a_2 = 3; a_1 = 2 \text{ y } a_0 = 0 \end{cases}$$

$$\beta_3 = b_3 = 0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_2\beta_3 = 0 - 3 \times 0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_2\beta_2 - a_1\beta_3 = b_1 = 10$$

$$\beta_0 = b_0 - a_2\beta_1 - a_1\beta_2 - a_0\beta_3 = b_0 - a_2b_1 = 50 - 3 \times 10 = 20. -$$

Con el método visto las matrices de la planta serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un diagrama de estado sería el indicado en la figura 23.

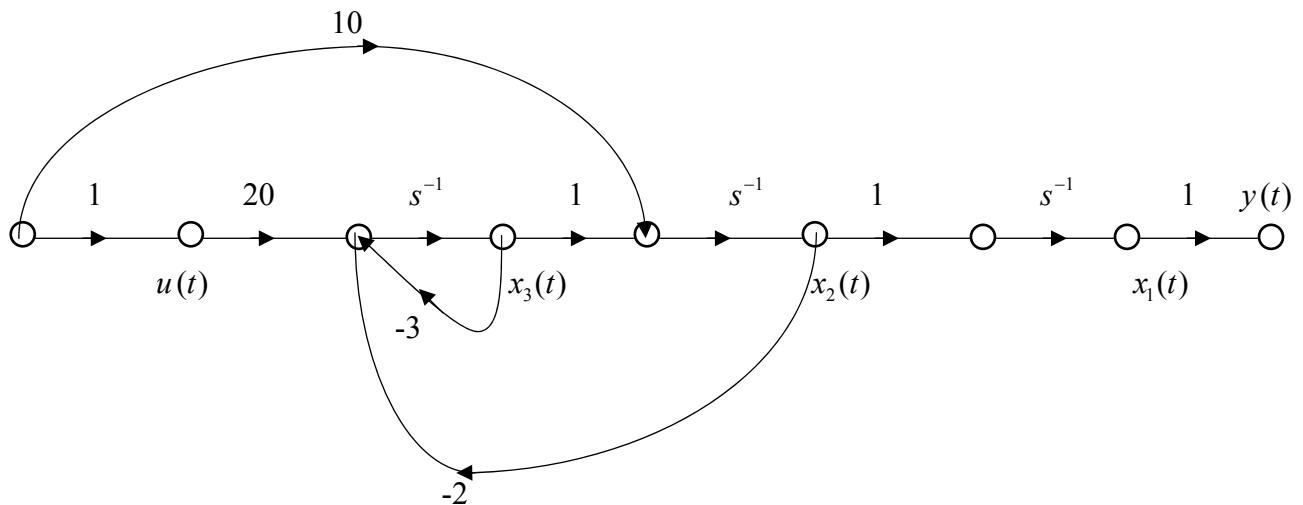


Figura 23

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 10 & 20 & -80 \\ 20 & -80 & 200 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rango}(S) = 3$$

Se desea que el sistema seguidor tipo 1 cumpla con las especificaciones siguientes:

- Que el error de estado estable al escalón de entrada sea nulo.
- Que el $t_E(2\%) \leq 2.25 \text{ seg.}$
- Que el $M_p(\%) \leq 5\%.$ -

$$\text{Para el } t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 2.25 \Rightarrow |\sigma| \geq 1.777$$

Se elegirá: $\sigma = -2$

Para que el $M_p(\%) \leq 5\% \rightarrow \delta \geq 0.69 \Rightarrow$ se elige: $\delta = 0.707.$ –

Por lo tanto el par de polos complejos conjugados dominantes será:

$$\lambda_{1-2} = -2 \pm j2$$

Se elegirá el tercer polo en $\lambda_3 = -5$, para cancelar el cero de la F.T. de la planta, por ende la ecuación característica deseada del sistema será:

$$(s+5)(s^2 + 4s + 8) = s^3 + 9s^2 + 28s + 40 = 0$$

y también, como se sabe:

$$|sI - A + BK| = s^3 + (3 + 10k_2 + 20k_3)s^2 + (2 + 10k_1 + 50k_2 - 20k_3)s + (50k_1) = 0$$

Los elementos de la matriz de realimentación serán:

$$50k_1 = 40 \rightarrow k_1 = 0.80$$

$$\begin{aligned} 2 + 10k_1 + 50k_2 - 20k_3 &= 28 \\ 3 + 10k_2 + 20k_3 &= 9 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 50k_2 - 20k_3 = 18 \\ 10k_2 + 20k_3 = 6 \end{cases}$$

Resolviendo se llega a: $k_2 = 0.40$ y $k_3 = 0.10$

En consecuencia: $K = [0.80 \quad 0.40 \quad 0.10]$

Las respuestas temporales $y(t)$ y $\bar{x}(t)$ se muestran en la figura 24 para una señal de referencia escalón unitario $r(t) = u_S(t)$, las matrices del sistema diseñado serán:

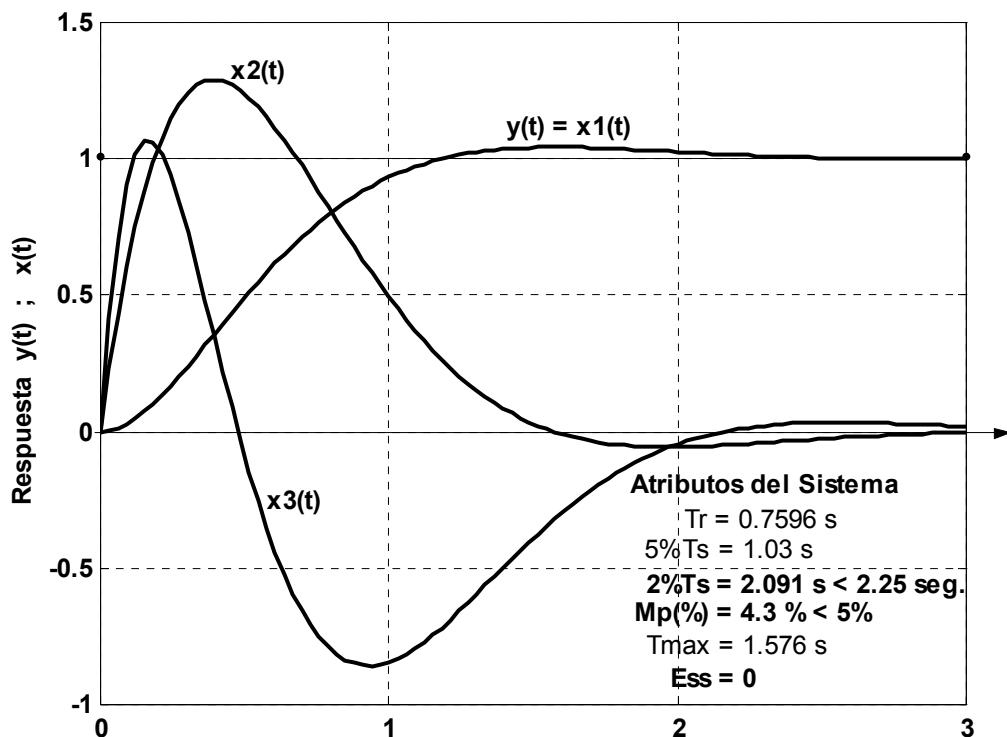


Figura 24:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ -16 & -10 & -5 \end{bmatrix} \quad Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} = k_1 B \quad y \quad Cc = [1 \quad 0 \quad 0] -$$

Como se determinó:

$$\bar{x}(\infty) = -(A - BK)^{-1} B k_1 R$$

$$\bar{x}(\infty) = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ -16 & -10 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \cdot R = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto: $y(\infty) = R$; $x_2(\infty) = 0$ y $x_3(\infty) = 0$, y también:

$$u(\infty) = -K\bar{x}(\infty) + k_1 R = -[0.80 \quad 0.40 \quad 0.10] \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.80 R = 0$$

En estado estable la señal de control es nula.-

Finalmente, este método se puede interpretar, (se verá en el próximo punto), como una realimentación total de *todos* los estados *más una ganancia de pre-compensación*, en donde *la misma es igual al primer elemento de la matriz de realimentación de todos los estados o sea $G = k_1$* . Como se sabe $u(t) = -K\bar{x}(t) + k_1 r(t)$, un diagrama de bloque sería el indicado en la figura 25, donde:

$$G = k_1$$

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

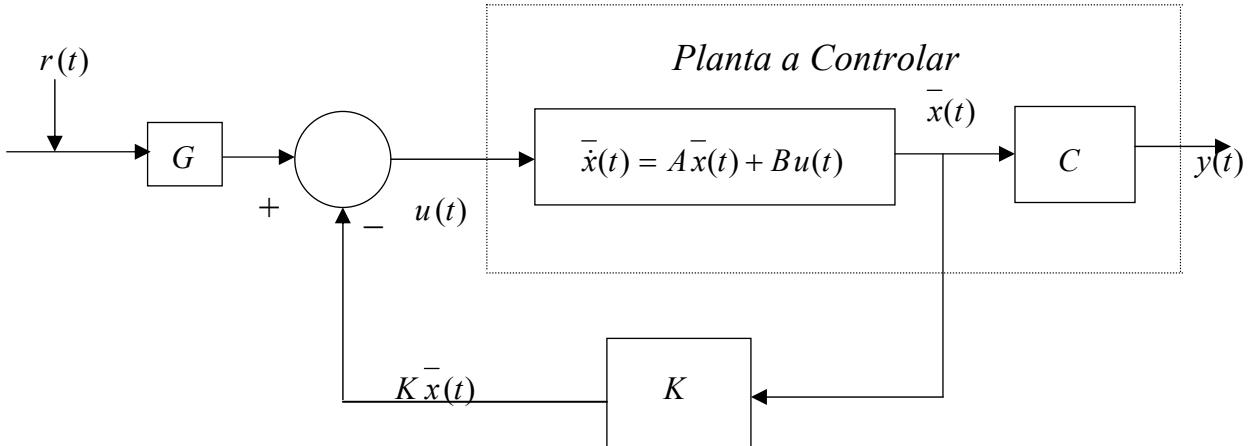


Figura 25

Se debe mantener en mente que *NUNCA* se debe intentar cancelar un cero de la función de transferencia de la planta en el semiplano derecho del plano s, ya que la cancelación exacta es prácticamente imposible, lo que resultaría en un sistema inestable evidentemente.-

Se verá a continuación un método general con una realimentación de todos los estados y una ganancia de pre-compensación para conseguir que la ganancia estática de la función de transferencia del sistema diseñado sea la unidad.-

Método General de Diseño con la Realimentación de los Estados y una Ganancia de Pre-compensación.

Un diagrama de bloques general con este tipo de diseño sería el mostrado en la figura 26.

De esta forma se podrán elegir todos los polos del sistema y ajustar la ganancia G para que el error de estado estacionario a una señal de referencia escalón sea nulo. La planta puede ser modelada de cualquier forma. Para determinar la ganancia de pre-compensación G se procede de tal forma que la ganancia estática de la función de transferencia del sistema de lazo cerrado sea la unidad, $M(0)=1$.

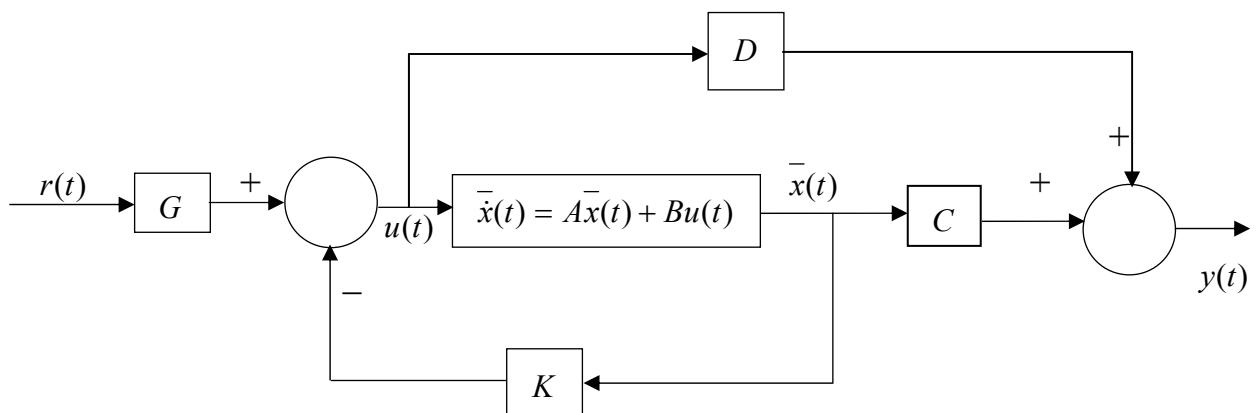


Figura 26

$$\text{Si } Gp(s) = \frac{Kp Np(s)}{Dp(s)} \Rightarrow M(s) = \frac{G Kp Np(s)}{D(s)}$$

Donde: $D(s)$ es la ecuación característica deseada.-

$$D(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

$$\text{y } Np(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 \quad \text{con } n \geq m.$$

Por lo tanto:

$$M(0) = \frac{G Kp b_0}{\alpha_0} = 1 \Rightarrow G = \frac{\alpha_0}{Kp b_0}$$

Para el ejemplo Nº 3, la ganancia de pre compensación G debería ser:

$$G = \frac{160}{140 \times 1} = \frac{8}{7} \approx \frac{1}{0.875}$$

En lugar de la unidad, ($G=1$), para que la salida alcance en régimen permanente la magnitud del escalón en $r(t)$, y ser así un seguidor tipo 1.-

Las matrices del modelo del sistema de lazo cerrado serán:

$$\bar{\dot{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t); \quad y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t)$$

$$con: u(t) = -K\bar{x}(t) + G r(t)$$

$$\bar{\dot{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + B(-K\bar{x}(t) + G r(t))$$

$$\bar{\dot{x}}(t) = (\bar{A} - \bar{B}K)\bar{x}(t) + (B G)r(t)$$

$$con: Ac = (\bar{A} - \bar{B}K) \quad y \quad Bc = (B G)$$

$$y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + D(-K\bar{x}(t) + G r(t))$$

$$y(t) = (\bar{C} - \bar{D}K)\bar{x}(t) + (DG)r(t)$$

$$con: Cc = (\bar{C} - \bar{D}K) \quad y \quad Dc = (DG)$$

$$Si \quad D = 0; \quad Cc = C \quad y \quad Dc = 0$$

Para determinar K , se procede como ya se explico anteriormente:

$$|sI - \bar{A} + \bar{B}K| = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_2s^2 + \alpha_1s + \alpha_0$$

De la última igualdad resultan n ecuaciones con n incógnitas: k_1, k_2, \dots, k_n . -

Ejemplo 7: Un proceso a controlar tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & 19 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [10 \quad 6 \quad 0.50] \quad y \quad D = 0$$

Diseñar un sistema de control seguidor tipo 1 para conseguir las especificaciones siguientes:

1º) Que el error de estado estacionario a entradas escalones sea nulo. -

2º) $t_E(5\%) \leq 1.25$ seg.

3º) $Mp(%) \leq 5\%.$ -

$$\text{La } Gp(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{0.5(s+2)(s+10)}{(s-1)(s-5)(s+4)} \Rightarrow \begin{cases} Kp = 0.50 \\ b_0 = 20 \end{cases}$$

Como la planta es controlable se pueden ubicar todos los polos del sistema en forma arbitraria.

Elección de la ubicación de los tres polos del sistema de control:

Para eliminar el efecto del cero en -2 se colocara un polo en: $\lambda_3 = -2$

Ahora se seleccionará un par complejo conjugado que domine la dinámica del sistema y cumpla con el transitorio al escalón deseado $\lambda_{1-2} = \sigma \pm j\omega_d$

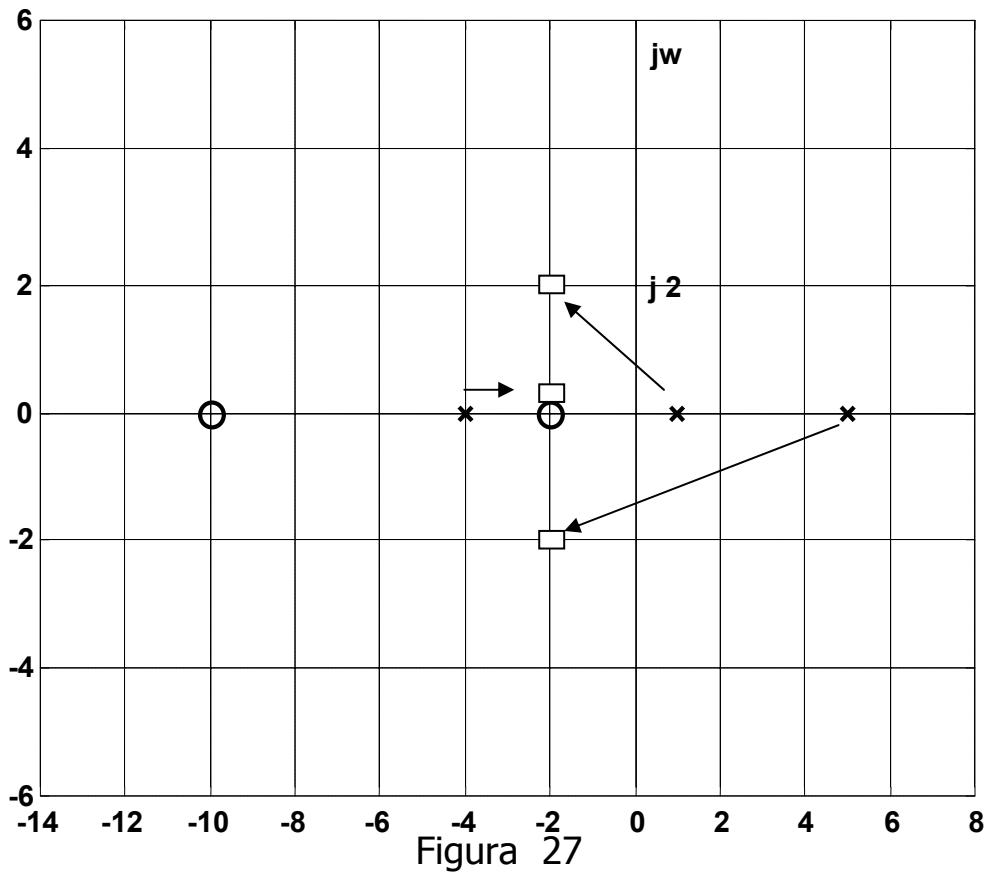
Como se pide $Mp(%) \leq 5\% \Rightarrow \delta \geq 0.69$; se elegirá: $\delta = 0.707.$ -

(Con lo cuál será $Mp(%) \approx 4.32\%$, el efecto del cero en -10 lo puede incrementar un poco, pero será despreciable).-

$$\text{Si } t_E(5\%) \approx \frac{4.5\delta^2}{|\sigma|} = \frac{2.25}{|\sigma|} \leq 1.25 \text{ seg.} \Rightarrow |\sigma| \geq 1.80$$

Se elegirá $\sigma = -2$, en consecuencia los polos deberán estar ubicados en:

$$\begin{cases} \lambda_{1-2} = -2 \pm j2 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases} \quad \text{Con un cero en } Z_2 = -10, \quad \text{ver figura 27:}$$



La ecuación característica deseada será:

$$(s+2)(s^2 + 4s + 8) = s^3 + 6s^2 + 16s + 16 = 0$$

y también:

$$|sI - A + BK| = s^3 + (k_3 - 2)s^2 + (k_2 - 19)s + (k_1 + 20) = 0$$

$$k_1 + 20 = 16 \rightarrow k_1 = -4$$

$$k_2 - 19 = 16 \rightarrow k_2 = 35$$

$$k_3 - 2 = 6 \rightarrow k_3 = 8 \quad \Rightarrow \quad K = [-4 \quad 35 \quad 8]$$

Además:

$$G = \frac{\alpha_o}{K p b_0} = \frac{16}{0.5 \times 20} = 1.60 \quad G = 1.60$$

También se podría aplicar el segundo método, a saber:

La ecuación característica deseada $\Rightarrow s^3 + 6s^2 + 16s + 16 = 0$

Por lo tanto: $\alpha_0 = 16 \quad \alpha_1 = 16 \quad y \quad \alpha_2 = 6$.

De la ecuación característica de la planta: $a_0 = 20 \quad a_1 = -19 \quad y \quad a_2 = -2$.

$$K = [\alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1 \quad \alpha_2 - a_2] P^{-1}$$

Como en este caso $P = I$, la matriz de realimentación será:

$$K = [16 - 20 \quad 16 - (-19) \quad 6 - (-2)] \Rightarrow K = [-4 \quad 35 \quad 8]$$

Graficando la salida $y(t)$ y los estados $\bar{x}(t)$ para una señal de referencia $r(t) = u_s(t)$, resulta el grafico de la figura 28.

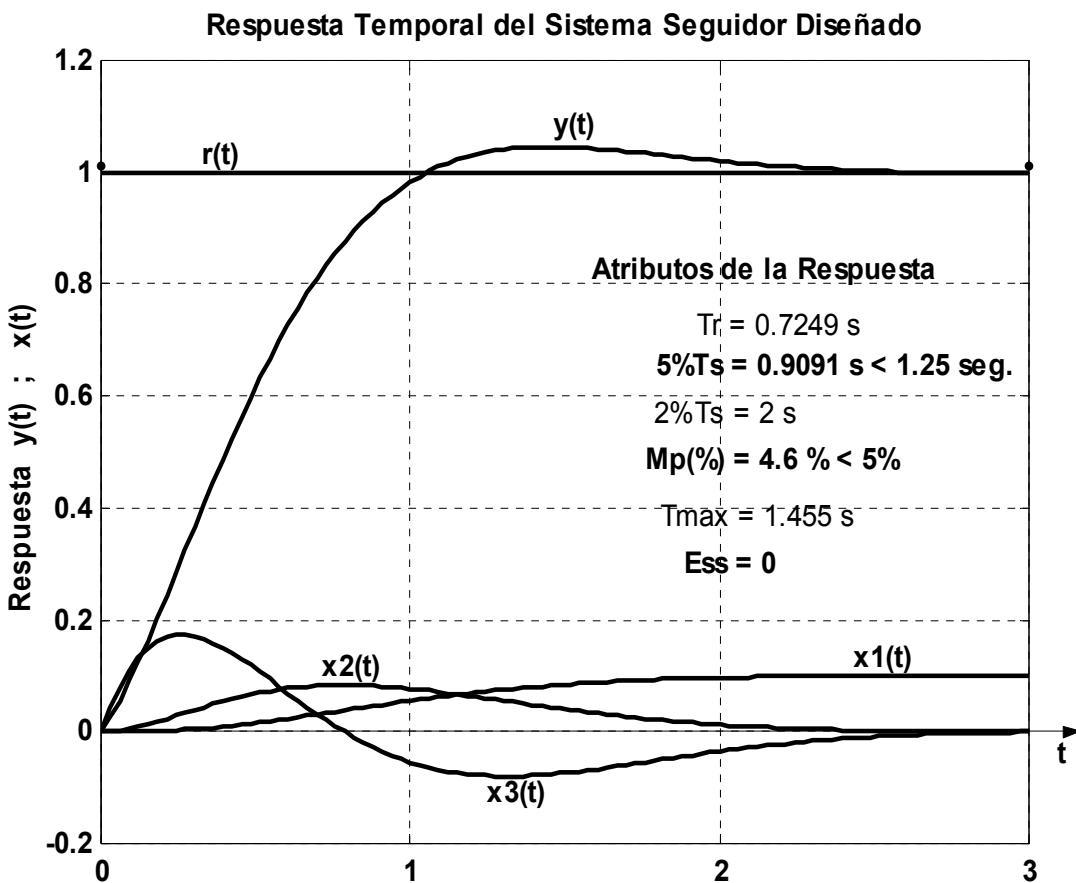


Figura 28 :

Diseño de un Sistema de Seguimiento “Tipo 1” con un Control Integral

Por lo general, el diseño del sistema de control mediante la realimentación de los estados solamente produce, como se dijo, un sistema tipo cero, de modo que como se sabe, un sistema de este tipo sería incapaz de seguir sin error a una señal de referencia escalón en la entrada. Si la planta no posee un integrador y la señal de referencia fuera el escalón, el sistema debería contar, en su función de transferencia del camino directo con un integrador, (sistema tipo 1), para poder seguir sin error a las señales de entrada escalón.

De lo dicho anteriormente es fácil deducir que para lograr que un sistema de control diseñado mediante la ubicación de los polos por la realimentación de los estados pueda seguir una señal de referencia tipo escalón, se ha de insertar un integrador en la trayectoria directa entre los comparadores del error y el que obtiene la acción de control $u(t)$.

En la figura 29 se muestra un sistema de control con realimentación de los estados capaz de seguir sin error una señal de referencia escalón, (error de posición nulo).-

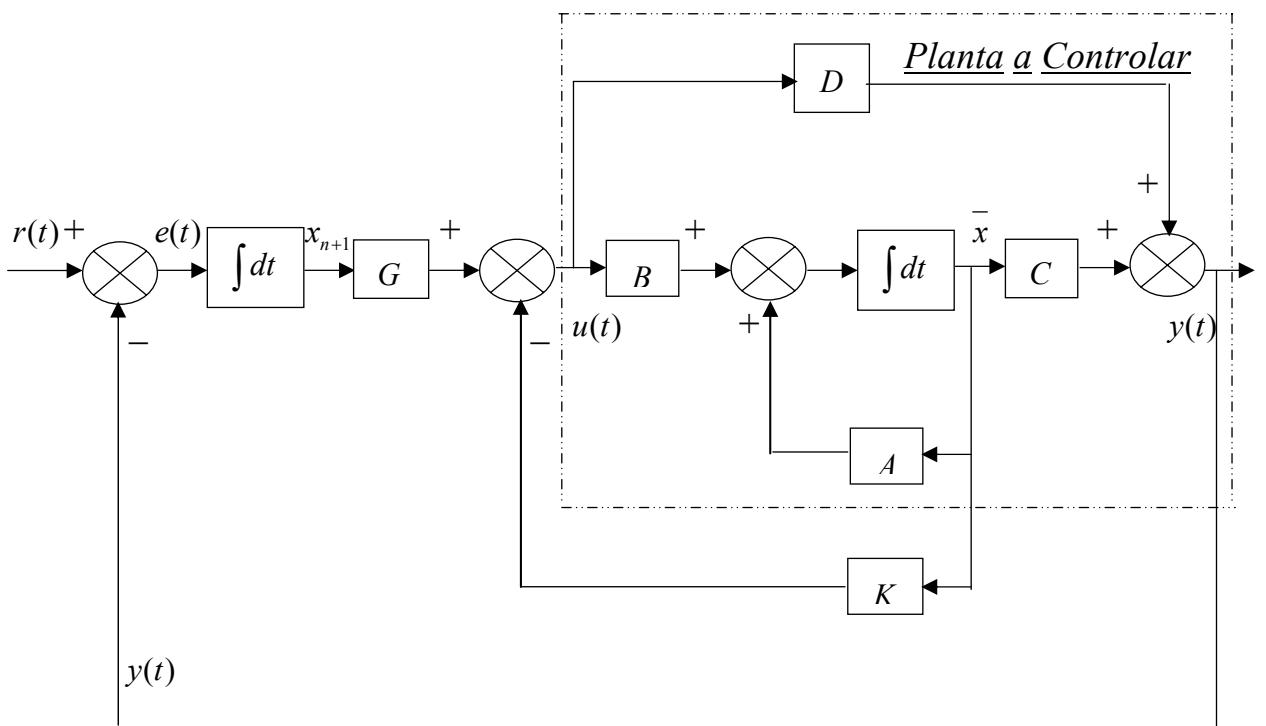


Figura 29

Nótese como el integrador aumenta en uno el orden del sistema. La nueva variable de estado que incorpora el integrador al sistema se llamará como $x_{(n+1)}(t)$.

Las ecuaciones que modelan al sistema, planta mas integrador son:

$$\dot{\bar{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = C\bar{x}(t) + Du(t) \quad (2)$$

$$\dot{x}_{(n+1)}(t) = r(t) - y(t) \quad (3)$$

donde $\bar{x}(t)$ es el vector de estado de dimensión "n", y $r(t)$ e $y(t)$ son la señal de referencia y de salida,(escalares), respectivamente.

Se supondrá que la planta es de estado completamente controlable, y además que la función de transferencia de la misma no tiene ceros en el origen, derivadores, para evitar la posibilidad de que el integrador insertado se cancele con dicho cero de $Gp(s)$. La señal de control escalar $u(t)$ depende de las realimentaciones de los estados e integral mediante:

$$u(t) = -K\bar{x}(t) + Gx_{(n+1)}(t) \quad (4)$$

$$K = [k_1 \ k_2 \ . \ . \ . \ k_n] \quad (5)$$

Donde K es la matriz de realimentación de los estados de la planta, y G la ganancia escalar del control integral.

Introduciendo la ecuación (2) en la (3), se puede escribir el modelo de estado de orden ($n+1$), como:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \bar{r}(t) \\ \dot{x}_{(n+1)}(t) = r(t) - C\bar{x}(t) - Du(t) \end{cases} \quad \bar{r} \Rightarrow \text{Es un vector nulo de dimensión (nx1).}$$

o en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \dot{x}_{(n+1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ x_{(n+1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

Se definirá:

$$\bar{x}^*(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ x_{(n+1)}(t) \end{bmatrix} ; \quad \dot{\bar{x}}^*(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \dot{x}_{(n+1)}(t) \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} \quad (6)$$

La dimensión de $\bar{x}^*(t)$ es $(n+1) \times 1$, la de A^* $(n+1) \times (n+1)$, la de B^* $(n+1) \times 1$ y finalmente de C^* $1 \times (n+1)$. Con estas definiciones la ecuación de estado se puede escribir así:

$$\dot{\bar{x}}^*(t) = A^* \bar{x}^*(t) + B^* u(t) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

Para obtener la ecuación de estado del sistema de lazo cerrado, basta con sustituir en la expresión anterior la ecuación (4):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}^*(t) &= A^* \bar{x}^*(t) + B(-K \bar{x}(t) + G x_{(n+1)}(t)) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ &= A^* \bar{x}^*(t) - B^* K \bar{x}(t) + B^* G x_{(n+1)}(t) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ &= A^* \bar{x}^*(t) + \begin{bmatrix} -B^* K & B^* G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ x_{(n+1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ &= A^* \bar{x}^*(t) - B^* [K \quad -G] \bar{x}^*(t) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\dot{\bar{x}}^*(t) = (A^* - B^* K^*) \bar{x}^*(t) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

donde:

$$Ac = (A^* - B^* K^*)$$

$$Bc = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad K^* = [K \quad -G] = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n \quad -G] \quad (7)$$

Finalmente:

$$\dot{\bar{x}}^*(t) = Ac \bar{x}^*(t) + Bc r(t) \quad (8)$$

Respecto a la ecuación de salida, teniendo en cuenta que ahora el vector de estado es $\bar{x}^*(t)$, se puede escribir a partir de (2) y (6), que:

$$y(t) = C \bar{x}(t) + 0 x_{(n+1)}(t) + D (-K \bar{x}(t) + G x_{(n+1)}(t))$$

$$y(t) = [(C - D K) \quad D G] \bar{x}^*(t) + 0 r(t)$$

La ecuación de salida será:

$$y(t) = C^* \bar{x}^*(t) + 0r(t)$$

Por lo tanto las matrices del sistema de control diseñado, o de lazo cerrado, serán en consecuencia las siguientes:

$$Ac = A^* - B^* K^*$$

$$Bc = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Cc = C^* = [(C - DK) \quad DG] \rightarrow \text{si } D = 0 \Rightarrow Cc = [C \quad 0]$$

$$Dc = [0]$$

Se puede expresar a la matriz Ac en función de las matrices:

A, B, C, D, K y G .

$$Ac = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} BK & -BG \\ -DK & -DK \end{bmatrix}$$

$$Ac = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ DK - C & -DG \end{bmatrix} \rightarrow \text{si } D = 0 \Rightarrow Ac = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ -C & 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que la ecuación característica del sistema es $|sI - A^* + B^* K^*| = 0$,

queda claro que si la matriz de la controlabilidad:

$$S^* = [B^* \quad A^* B^* \quad A^{*2} B^* \quad \dots \quad A^{*n} B^*] \quad (9)$$

tiene rango ($n+1$), la ecuación:

$$|sI - A^* + B^* K^*| = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)(s - \lambda_{n+1}) \quad (10)$$

permite ubicar todos los polos del sistema de lazo cerrado en los lugares deseados impuestos por las especificaciones de funcionamiento pedidas.-

Nota: Comprobar que el par (A^*, B^*) es controlable es equivalente a

verificar que el rango de la matriz $H = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix}$ sea igual a $(n+1)$, la

demonstración se hará a continuación:

Si el par (A, B) de la planta es controlable, la matriz:

$$S = [B \quad AB \quad A^2 B \quad \dots \quad A^{n-1} B], \text{ debe tener rango igual a } n.$$

Por lo tanto la matriz:

$$\begin{bmatrix} S & \bar{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ deberá tener rango igual a } (n+1).$$

Considerando la ecuación siguiente:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & \bar{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AS & B \\ -CS & -D \end{bmatrix} \quad (11)$$

Si la matriz H , tiene rango igual a $(n+1)$, el primer miembro de la ecuación (11) será de rango igual a $(n+1)$. Por lo tanto el segundo miembro de (11), también tendrá $(n+1)$. Dado que:

$$\begin{bmatrix} AS & B \\ -CS & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A[B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B] & B \\ -C[B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B] & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [AB & A^2B & \dots & A^nB] & B \\ [-CB & -CAB & \dots & -CA^{n-1}B] & -D \end{bmatrix}$$

La primera columna, $\begin{vmatrix} AB \\ -CB \end{vmatrix}$, es igual a, A^*B^* , la segunda es, $A^{*2}B^*$, etc., la penúltima, $A^{*n}B^*$, y la última, B^* , por ende quedará:

$$\begin{bmatrix} AS & B \\ -CS & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^*B^* & A^{*2}B^* & \dots & A^{*n}B^* & B^* \end{bmatrix}$$

Para determinar su rango, reordenamos de la manera siguiente, colocamos a B^* como la primera columna:

$$Rango \left\{ \begin{bmatrix} B^* & A^*B^* & A^{*2}B^* & \dots & A^{*n}B^* \end{bmatrix} \right\} = Rango (S^*)$$

Encontramos que el rango de S^* es $(n+1)$. Por lo tanto el par (A^*B^*) , será controlable, si como se supuso el rango de la matriz H es $(n+1)$.

Con lo cual queda demostrado que si el rango de la matriz H es $(n+1)$ el par (A^*B^*) es controlable.-

En la ecuación (10) hay $(n+1)$ incógnitas, k_1, k_2, \dots, k_n y G y $(n+1)$ coeficientes conocidos elegidos por el diseñador, con lo cual para determinar K^* , basta con igualar los coeficientes de la misma potencia de s.-

Régimen en Estado Estable:

Los valores en estado estable de $\bar{x}(t)$, $x_{n+1}(t)$ y $u(t)$ se encuentran del modo siguiente, en estado estable, ($t \rightarrow \infty$), a partir de las ecuaciones (1) y (3), se tendrá que:

$$\begin{cases} \bar{x}(\infty) = \bar{0} = A\bar{x}(\infty) + Bu(\infty) \\ \dot{x}_{n+1}(\infty) = 0 = R - C\bar{x}(\infty) - Du(\infty) \end{cases} \quad \text{si } r(t) = Ru_S(t) \Rightarrow r(\infty) = R$$

Una ecuación matricial seria:

$$\begin{bmatrix} \bar{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ R \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ -R \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad H = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix}$$

Si la matriz, H , tiene rango $(n+1)$, (como se demostró anteriormente para poder ubicar los polos del sistema en forma arbitraria), existirá la inversa de la misma y en consecuencia, se tendrá:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ -R \end{bmatrix} \quad (12)$$

Así mismo a partir de la ecuación (4):

$$u(\infty) = -K \bar{x}(\infty) + G x_{n+1}(\infty)$$

$$G x_{n+1}(\infty) = u(\infty) + K \bar{x}(\infty)$$

Por lo tanto:

$$x_{n+1}(\infty) = \frac{1}{G} [u(\infty) + K \bar{x}(\infty)] \quad (13)$$

Las expresiones (12) y (13) permiten encontrar lo propuesto, o sea:

$$\bar{x}(\infty); \quad x_{n+1}(\infty); \quad y \quad u(\infty) .-$$

Ejemplo 8:

Dada la planta definida por:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = [1 \quad 0] \bar{x}(t)$$

Se tratará de diseñar un sistema seguidor mediante la realimentación de los estados con un control integral que permita el seguimiento sin error de una señal de referencia tipo escalón. Los objetivos de diseño son además que:

- El $M_p(\%)$ en la respuesta $y(t)$ debe ser menor o igual a 5%.-
- El $t_E(2\%) \leq 4.50 \text{ seg.}$
- El error de estado estable a entradas rampas de pendientes unitarias no supere el valor de 1.10

Se tratará que dos polos sean complejos conjugados dominantes y el tercero en consecuencia alejado hacia la izquierda del plano s. Por ello se podrá utilizar, para un sistema prototípico de segundo orden, la fórmula aproximada del tiempo de establecimiento y de la sobreelongación porcentual de la respuesta de salida.

Lo primero que hay que hacer es verificar que los pares (A, B) y (A^*, B^*) sean controlables:

- Para el par $(A, B) \rightarrow S = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} \rightarrow |S| = -1 \Rightarrow \text{Rango}(S) = 2 .-$

Para el par (A^*, B^*) , será:

$$(A^*, B^*) \rightarrow S^* = \begin{bmatrix} B^* & A^* B^* & A^{*2} B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -25 \\ 1 & -25 & 625 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|S^*| = 1 \Rightarrow \text{Rango}(S^*) = (n+1) = 3$$

Esto último también se puede hacer determinando el rango de la matriz H:

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -25 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |H| = -1 \Rightarrow \text{Rango de } H = 3 .-$$

El diseño se llevará a cabo, pues los valores característicos de $(sI - Ac)$ se podrán colocar en los lugares deseados.-

Ubicación de los tres polos del sistema:

Para que $M_p(\%) \leq 5\% \rightarrow \delta \geq 0.69$ se elegirá $\Rightarrow \delta = 0.707 \rightarrow \omega_d = |\sigma|$

Para que $t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 4.5 \text{ seg.} \rightarrow |\sigma| \geq 0.888$ se elige $\Rightarrow \sigma = -1.$ -

Por lo tanto los polos dominantes serán:

$$\lambda_{1-2} = -1 \pm j$$

Para que sean dominantes deberá ser $\lambda_3 \leq 5\sigma \rightarrow \lambda_3 \leq -5$ (*)

Pero para que se cumpla la especificación de error a la rampa, como el sistema no tendrá ceros, el tercer polo deberá cumplir la condición a determinar.

La ecuación característica deseada será:

$$(s - \lambda_3)(s^2 + 2s + 2) = s^3 + (2 - \lambda_3)s^2 + (2 - 2\lambda_3)s + (-2\lambda_3)$$

El error a la rampa unitaria en la entrada será:

$$e(\infty) = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{(2 - 2\lambda_3)}{-2\lambda_3} \leq 1.10 \rightarrow \lambda_3 \leq -10 \quad (**)$$

Interceptando las condiciones (*) y (**), resultará que $\lambda_3 \leq -10.00$

se puede elegir en consecuencia: $\underline{\lambda_3 \leq -10}$

Por ende la ecuación característica será:

$$(s + 10)(s^2 + 2s + 2) = s^3 + 12s^2 + 22s + 20 = 0$$

También la ecuación característica es: $|sI - Ac| = 0$

$$Ac = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ DK - C & -DG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ -C & 0 \end{bmatrix} \text{ pues } D = 0 : \text{Donde: } K = [k_1 \ k_2]$$

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -25 - k_2 & G \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$|sI - Ac| = \left| \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ k_1 & s + 25 + k_2 & -G \\ 1 & 0 & s \end{bmatrix} \right| = s^3 + (25 + k_2)s^2 + (k_1)s + G = 0$$

Resolviendo:

$$G = 20; \quad k_1 = 22 \quad y \quad k_2 = -13$$

Los parámetros de diseño serán:

$$K = [22 \ -13] \quad y \quad G = 20$$

Para verificar si se cumplen las especificaciones pedidas se grafican la respuesta del sistema $y(t)$ al escalón unitario y los atributos de la misma.

Como se puede apreciar se cumplen todas las especificaciones solicitadas.

Para tal fin se puede utilizar la función Svddesign del Csad/Matlab, o emplear la función Step de Matlab entre varias posibilidades.-

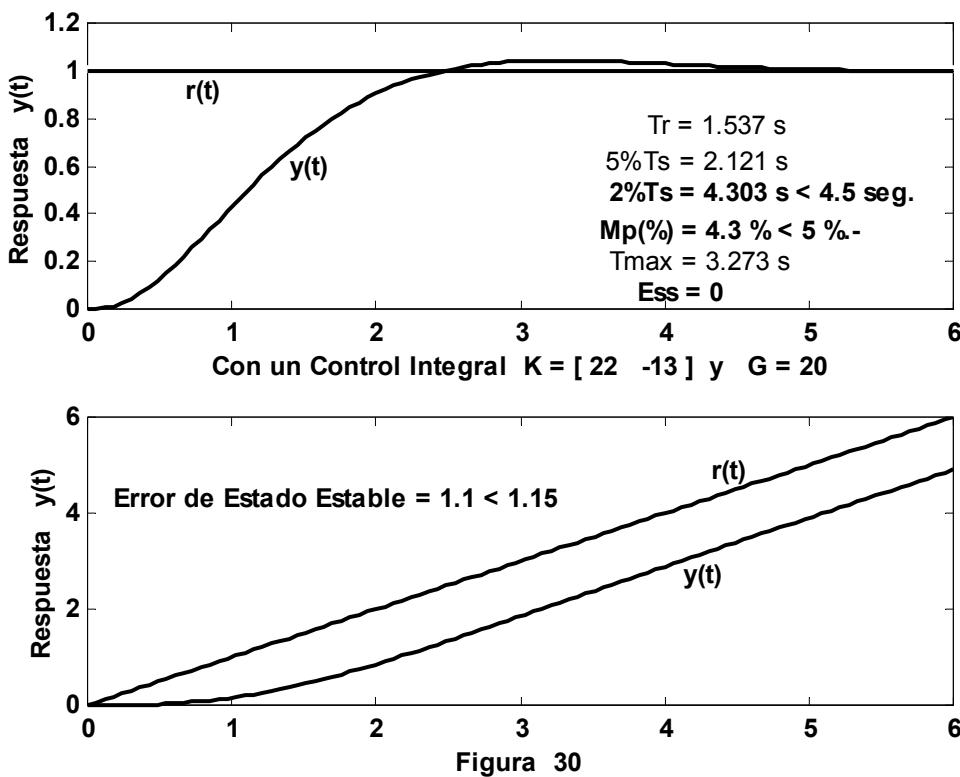
Las matrices del sistema de control diseñado serán:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -22 & -12 & 20 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Cc = [1 \ 0 \ 0] \quad Dc = 0.$$

La función de transferencia del sistema es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = Cc(sI - Ac)^{-1} Bc = \frac{20}{s^3 + 12s^2 + 22s + 20}.$$

Las respuestas a las señales de referencia escalón unitario y rampa de pendiente unitaria se muestran en la figura 30, como se observa se satisfacen todas las especificaciones pedidas.-



Determinaremos ahora los valores de estado estable: $\bar{x}(\infty); x_{n+1}(\infty)$ y $u(\infty)$:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 25 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ por ende: } \begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = H^{-1} \times \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $R=1$, será: $x_1(\infty)=1; x_2(\infty)=0$ y $u(\infty)=0$

Con lo cual se comprueba que en efecto, la salida sigue sin error a la señal de referencia, pues como:

$$C = [1 \ 0 \ 0]; \quad y(t) = x_1(t) \text{ en todo momento.}$$

En consecuencia: $y(\infty)=1$

Por último el valor de estado estacionario de $x_3(t)$ se puede obtener aplicando la ecuación:

$$x_3(\infty) = \frac{1}{G} [u(\infty) + K \bar{x}(\infty)] = \frac{1}{20} \left[0 + [22 \quad -13] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \frac{22}{20}$$

$$x_3(\infty) = 1.10.$$

Todo esto se aprecia en la figura 31.

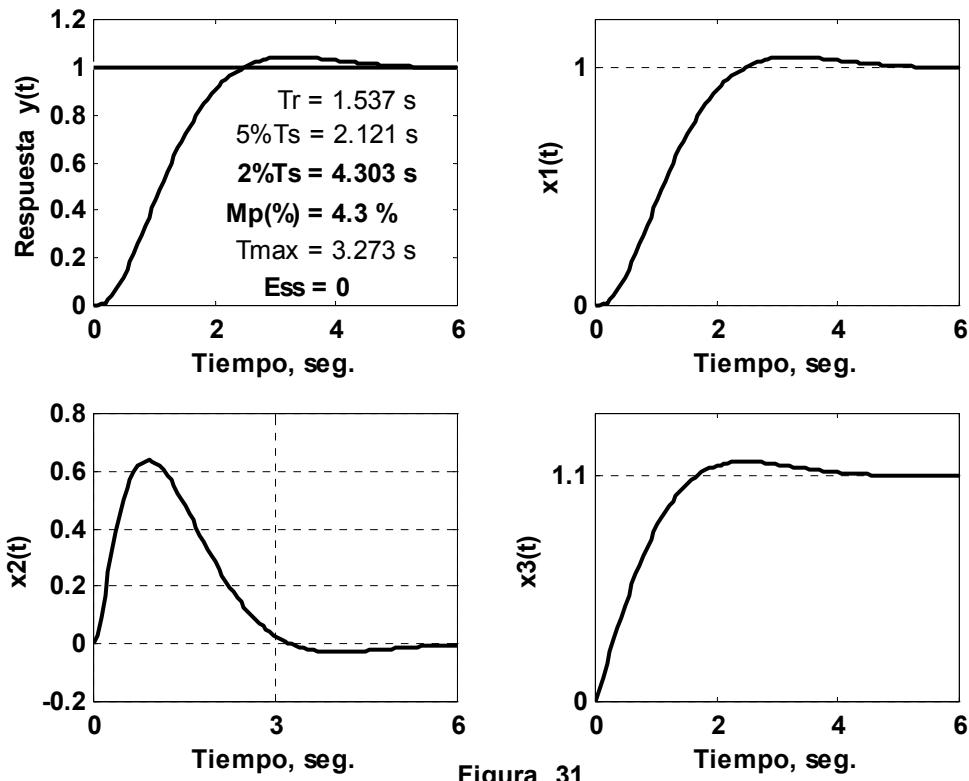


Figura 31

Ejemplo 9:

Consideremos una planta que tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D = 0$$

Diseñar un sistema seguidor por medio de la realimentación de los estados más un control integral para que se cumplan las especificaciones siguientes:

- Error de estado estable a entradas rampas unitarias no superior a 0.625
- La sobreelongación de la salida al escalón unitario $M_p(%) < 5\%$.
- El tiempo de establecimiento al (2%) inferior a 1.20 segundos.

Como la planta es controlable, pues el modelo está en la forma canónica controlable, hay que verificar que el par (A^*, B^*) sea controlable:

$$A^* = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -19 & -8 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B^* = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$S^* = \begin{bmatrix} B^* & A^*B^* & A^{*2}B^* & A^{*3}B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -8 & 45 \\ 1 & -8 & 45 & -220 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow |S^*| = 4; \text{Rango}(S^*) = 4$$

También se puede hacer esto con la matriz, H , verificando que su rango es $(n+1)=3+1=4$.

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -19 & -8 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |H| = 4 \Rightarrow \text{Rango}(H) = 4$$

Por lo tanto se podrán ubicar los polos del sistema diseñado en forma arbitraria.-

Elección de los Polos Deseados:

$$\text{Como } G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)} \rightarrow \begin{cases} Kp = 2 \\ b_0 = 2 \end{cases}$$

Se puede elegir un polo en -2 para cancelar el cero de la planta $\rightarrow \lambda_3 = -2$

Se elegirá un par de polos complejos dominantes $\lambda_{1-2} = ?$.

Como $M_p(\%) \leq 5\% \rightarrow$ Se elige $\delta = 0.707$

$$\text{Como } t_e(5\%) \approx \frac{4.5\delta^2}{|\sigma|} \leq 1.2 \text{ seg} \rightarrow \frac{2.25}{|\sigma|} \leq 1.2 \rightarrow |\sigma| \geq 1.875$$

si se elige: $\sigma = -2 \rightarrow \lambda_{1-2} = -2 \pm j2$

El cuarto polo $\lambda_4 = ?$ se deberá elegir para que $|\lambda_4| \geq 5|\sigma|$, y además cumpla que $e_{EE} \leq 0.625$ (para entrada rampa unitaria).

La ecuación característica será, luego de cancelado el cero en -2 por el polo λ_3 la siguiente:

$$(s - \lambda_4)(s^2 + 4s + 8) = s^3 + (4 - \lambda_4)s^2 + (8 - 4\lambda_4)s + (-8\lambda_4) = 0$$

como la función de transferencia del sistema no tendrá ceros será :

$$e_{EE} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{8 - 4\lambda_4}{-8\lambda_4} \leq 0.625$$

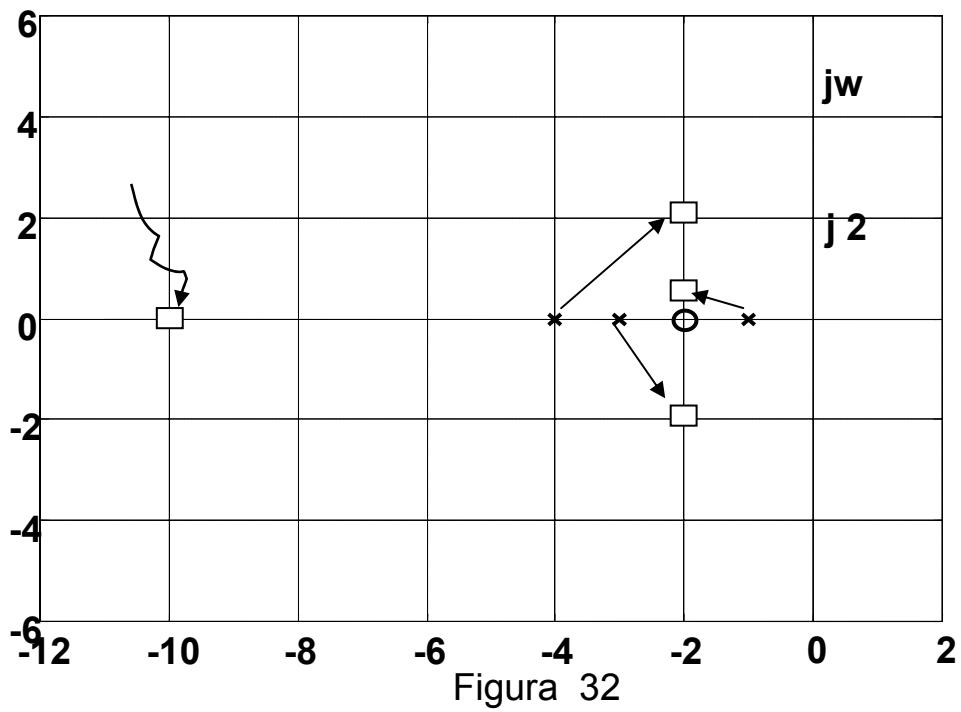
$$\therefore 8 - 4\lambda_4 \leq -5\lambda_4 \rightarrow \lambda_4 \leq -8$$

Se eligira $\rightarrow \lambda_4 \leq -10$ para que $|\lambda_4| \geq 5|\sigma|$

Si se elige esa ubicación λ_{1-2} será dominante además con:

$\lambda_4 = -10$ (y el error será de $0.60 < 0.625$)

La figura 32, ilustra el movimiento requerido de los polos.



La ecuación característica deseada será:

$$(s+2)(s+10)(s^2 + 4s + 8) = s^4 + 16s^3 + 76s^2 + 176s + 160 = 0$$

También:

$$A_c = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 - k_1 & -19 - k_2 & -8 - k_3 & G \\ -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A_c| = s^4 + (8 + k_3)s^3 + (19 + k_2)s^2 + (2G + 12 + k_1)s + (4G) = 0$$

$$\therefore 4G = 160 \quad \rightarrow \quad G = 40$$

$$2G + 12 + k_1 = 176 \quad \rightarrow \quad k_1 = 84$$

$$19 + k_2 = 76 \quad \rightarrow \quad k_2 = 57$$

$$8 + k_3 = 16 \quad \rightarrow \quad k_3 = 8$$

$$K = [84 \ 57 \ 8] \quad y \quad G = 40$$

Las matrices del sistema de lazo cerrado serán:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -96 & -76 & -16 & 40 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Cc = [C \quad 0] = [4 \quad 2 \quad 0 \quad 0] \quad y \quad Dc = [0]$$

Las respuestas $y(t)$ y de los estados, se muestran en la figura 33 a.

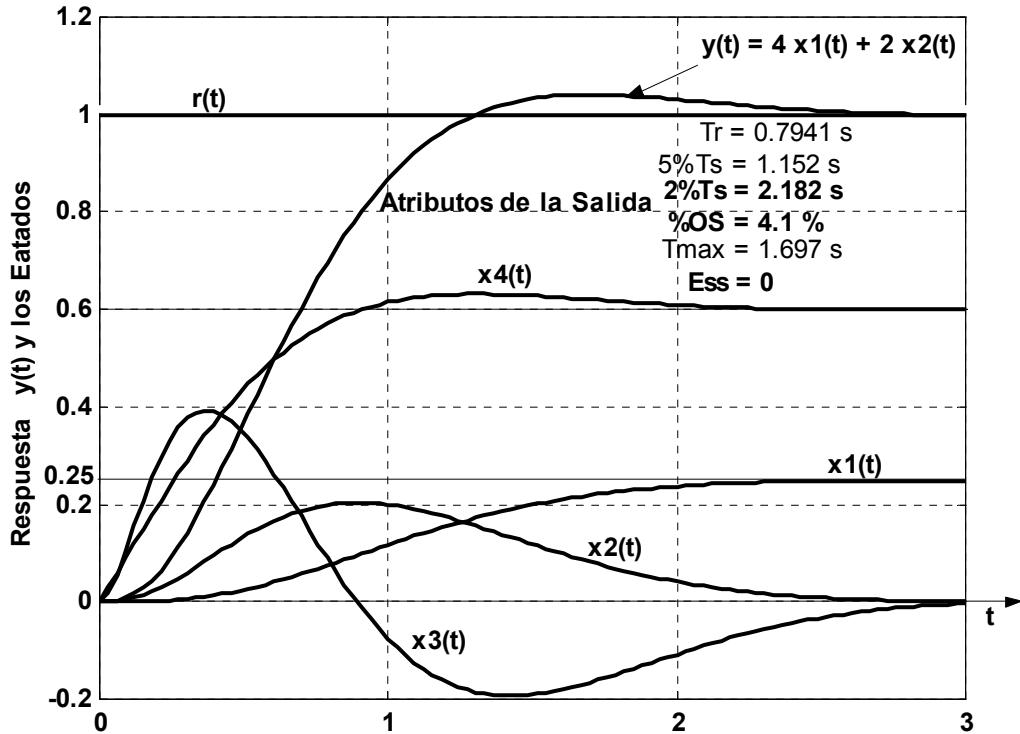


Figura 33 a

Obtenidas con el programa svdesign del Csad/MatLab. Además se muestran los atributos del sistema diseñado, (de $y(t)$), al escalón unitario en la referencia $r(t)$.

Como se puede apreciar se cumplen todas las especificaciones solicitadas.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ -R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25R \\ 0 \\ 0 \\ 3R \end{bmatrix} \quad \text{si } R = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1(\infty) = 0.25 \\ x_2(\infty) = 0 \\ x_3(\infty) = 0 \\ u(\infty) = 3 \end{cases}$$

$$y(\infty) = \bar{Cx}(\infty) = [4 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y(\infty) = 1$$

$$x_4(\infty) = \frac{1}{40} \left\{ 3 + [84 \quad 57 \quad 8] \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad x_4(\infty) = 0.60$$

Como se puede apreciar se cumplen todas las especificaciones de diseño. También para la $r(t) = t_{us}(t) \rightarrow e_{EE} = 0.6 < 0.625$

Determinación de la Matriz de Realimentación de los Estados, K, y de la Ganancia Integral G, con la función Svdesign del Csad/MatLab.

Si se usa la opción *Integral&State* del menú principal hay que tener cuidado, pues ella solo se puede aplicar si la matriz D de la planta es nula, es decir mas polos que ceros en $G_p(s)$.

Si $D \neq 0$ se puede emplear la opción del menú *State Feedback* ingresando las matrices A^* y B^* , (la matriz C puede ser cualquiera), para obtener la matriz $K^* = [K \quad -G]$. También se puede usar el álgebra matricial en MatLab.

Veamos el ejemplo anterior con Svdesign, luego de entrar las matrices de la planta A, B y C, se llama a la opción *Integral&State* del menú:

----- *SVDESIGN OPTIONS* -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > i

Enter vector of 4 desired pole locations > [-2 -2-2i -2+2i -10]

State feedback with integral control is:

$$u = -Kx + G * \text{integral}(r - y)$$

K =

$$\begin{matrix} 84 & 57 & 8 \end{matrix}$$

$$G = 40$$

Pole Locations

Desired	Achieved
---------	----------

-2.0000	-2.0000
---------	---------

-2.0000 - 2.0000i	-2.0000 - 2.0000i
-------------------	-------------------

-2.0000 + 2.0000i	-2.0000 + 2.0000i
-------------------	-------------------

-10.0000	-10.0000
----------	----------

Update current state variable matrices? (y/n) [y] >

Con la opción *Display System*, se pueden ver las matrices de lazo cerrado del sistema:

SVDESIGN > d

Display Current,Original,or Both Systems? [c] >

Current system is:

A matrix is:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -96 & -76 & -16 & 40 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \end{matrix}$$

B matrix is:

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

C matrix is:

$$\begin{matrix} 4 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Podemos graficar la respuesta $y(t)$ y de los estados con una entrada de referencia escalón unitario, procediendo como ya se sabe se obtienen las respuestas de la figura 34.

También se podrían graficar las respuestas del sistema trabajando como regulador, con unas condiciones iniciales dadas, por ejemplo:

$$\bar{x}(0) = \{-2; 1; -1; 0\}$$

Procediendo como ya se indicó, se muestran en la figura 35.

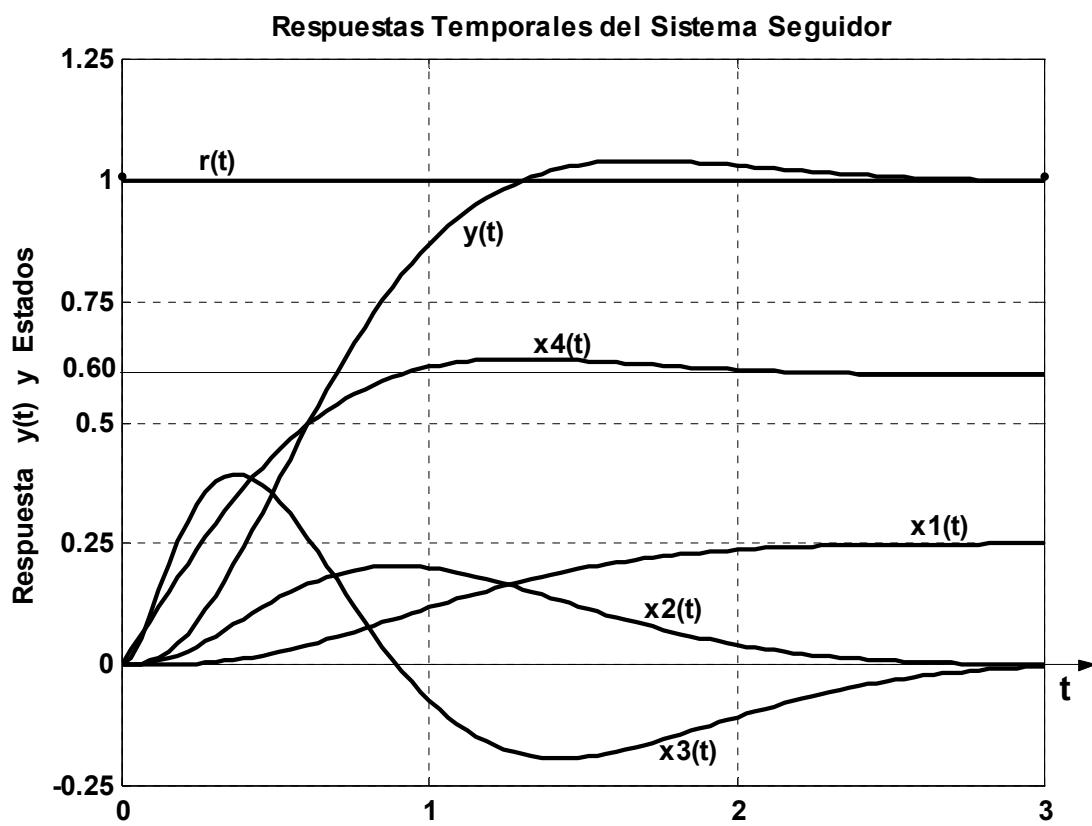


Figura 34

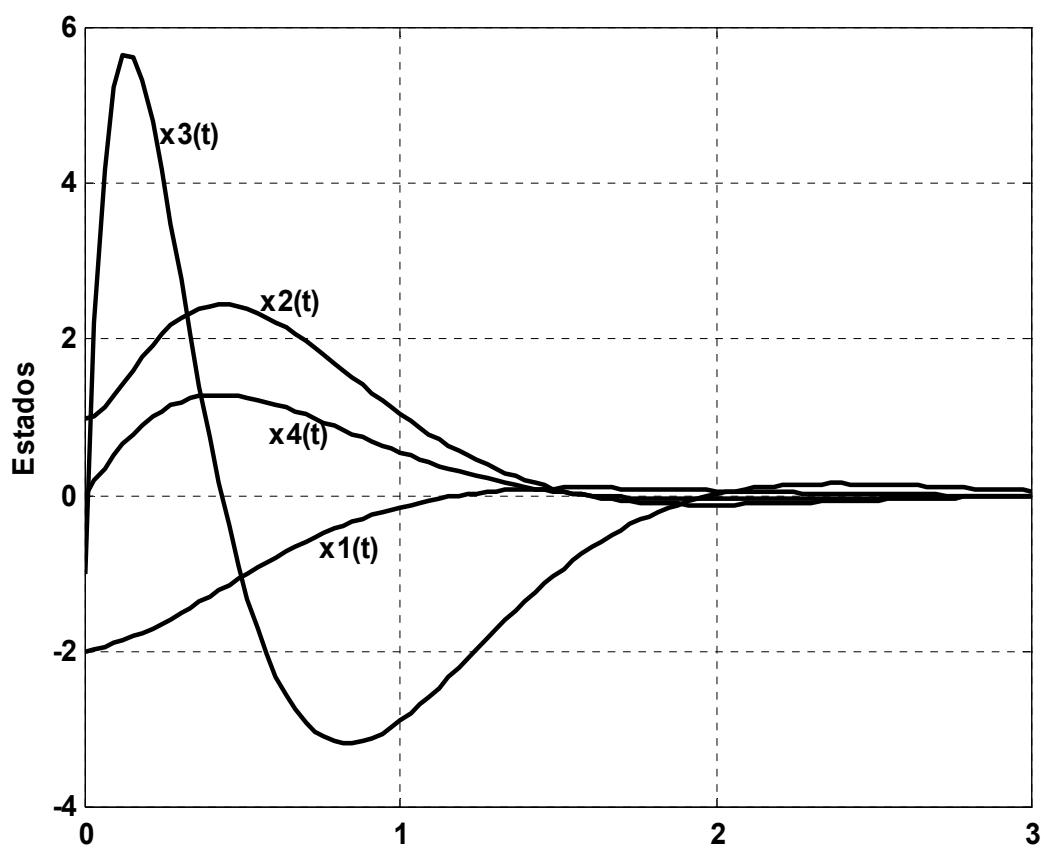


Figura 35

Ejemplo 10:

Una planta tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \text{ y } D=0 \rightarrow F.C.C$$

Las especificaciones del sistema seguidor son:

- Que el error de estado estacionario al escalón de entrada sea nulo.
- Que el $M_p(\%) \leq 5\%.$ –
- Que el $t_E(5\%) \leq 5\text{seg.}$ –

Se vera primero si el par (A^*, B^*) , es controlable:

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango de } (H) = 4. -$$

Por ende se podrán ubicar los cuatro polos, (con el control integral), arbitrariamente:

Como $M_p(5\%) \leq 5\% \rightarrow \delta \geq 0.69 \rightarrow \text{se elige } \delta = 0.707. - (\omega_d = |\sigma|).$

$$\text{Y también } t_E(5\%) \cong \frac{4.5\delta}{\omega_n} = \frac{4.5\delta^2}{|\sigma|} = \frac{2.25}{|\sigma|} \leq 5\text{seg.} \rightarrow |\sigma| \geq 0.45$$

Se elegirá $\sigma = -0.50 \Rightarrow \lambda_{1-2} = -0.50 \pm j0.50. -$

Se ubicarán los otros dos polos en: $\lambda_{3-4} = 10\sigma \rightarrow \lambda_{3-4} = -5. -$

La ecuación característica deseada será:

$$(s+5)^2(s^2 + s + 0.50) = s^4 + 11s^3 + 35.5s^2 + 30s + 12.50 = 0$$

En función de los parámetros de diseño:

$$|sI - Ac| = |sI - A^* + B^*K^*| = \left| sI - \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ -C & 0 \end{bmatrix} \right| =$$

$$|sI - Ac| = s^4 + (1+k_3)s^3 + k_2s^2 + k_1s + G = 0$$

Por lo tanto :

$$1+k_3 = 11 \rightarrow k_3 = 10$$

$$k_2 = 35.5$$

$$k_1 = 30$$

$$G = 12.5$$

O sea:

$$K^* = [30 \ 35.5 \ 11 \ -12.5]$$

O en su defecto:

$$K = [30 \ 35.5 \ 11] \quad y \quad G = 12.5$$

Las matrices del sistema de lazo cerrado:

$$Ac = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ DK - C & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -30 & -35.5 & -11 & 12.5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Cc = [(C - DK) \quad DG] = [C \quad 0] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad \text{pues } D = 0$$

Como $D = 0$, se puede usar la opción Integral&State del menú principal de la función Svdesign del Csad/Matlab.-

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > i

Enter vector of 4 desired pole locations > [-5 -5 -0.5-0.5i -0.5+0.5i]

State feedback with integral control is:

$$u = -Kx + G * \text{integral}(r - y)$$

K =

$$30.0000 \quad 35.5000 \quad 10.0000$$

G = 12.5

Pole Locations

Desired	Achieved
-0.5000 - 0.5000i	-0.5000 - 0.5000i
-0.5000 + 0.5000i	-0.5000 + 0.5000i
-5.0000	-5.0000 - 0.0000i
-5.0000	-5.0000 + 0.0000i

Update current state variable matrices? (y/n) [y] >

Las matrices del sistema de lazo cerrado serán:

SVDESIGN > d

Display Current,Original,or Both Systems? [c] >

Current system is:

A matrix is:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ -30.0000 & -35.5000 & -11.0000 & 12.5000 \\ -1.0000 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

B matrix is:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

C matrix is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En estado estacionario se tendrá:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = H^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{si } R = 1, \text{ será.}$$

$$x_1(\infty) = 1; x_2(\infty) = x_3(\infty) = 0; \text{ además: } y(\infty) = [1 \ 0 \ 0] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow y(\infty) = 1. -$$

$$x_4(\infty) = \frac{1}{12.5} \times \left\{ [30 \ 35.5 \ 10] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = 2.40 \Rightarrow x_4(\infty) = 2.40. -$$

Las respuestas temporales serán las mostradas en la figura 36.-

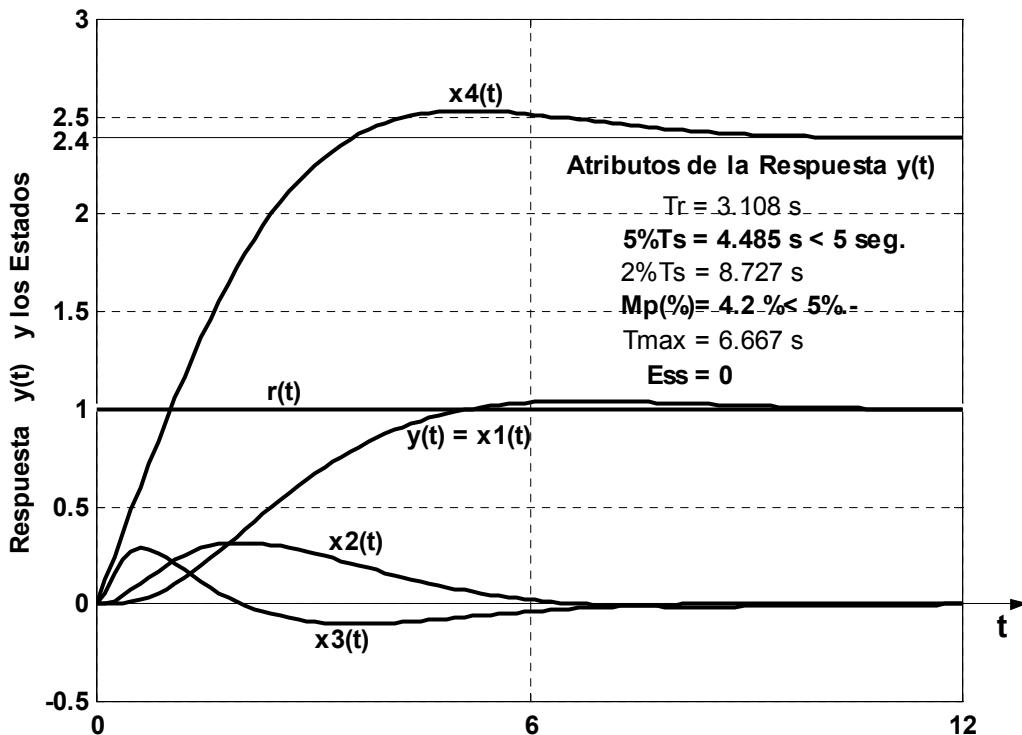


Figura 36

Problemas de Diseño por

Realimentación de los Estados

Problema 1:

Dada la siguiente función de transferencia de una planta a controlar:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+2)(s+10)}$$

Determinar un modelo en el espacio de estado adecuado, la planta tiene un integrador, para diseñar un sistema seguidor tipo 1 por medio de la realimentación de los estados, eligiendo una ubicación adecuada de los polos del sistema diseñado para que se cumplan las especificaciones siguientes:

- Que la sobre elongación a una entrada escalón unitario sea: $M_p(\%) \leq 15\%$
- $t_e(2\%) \leq 4.2$ seg
- Que el e_{EE} a una entrada rampa unitaria sea menor que $2/3$

Si llevamos el modelo a la forma adecuada para aplicar el tercer método de diseño, como no hay ceros y $b_0 = 1$, se llegaría a la forma canónica controlable. Resultaría, como se determinó oportunamente, un diseño con realimentación total de los estados más una ganancia de pre-compensación $G = k_1$.

Resultará:

$$K = [k_1 \ k_k \ k_k] \quad \text{y} \quad G = k_1 \cdot -$$

La función de transferencia de lazo cerrado será:

$$M(s) = \frac{k_1}{s^3 + \alpha_2 s + \alpha_1 s + k_1} \rightarrow \alpha_0 = k_1 = G \quad \text{para que: } M(0) = 1 \cdot -$$

Para encontrar la expresión del error a entradas rampas de pendiente unitaria, teniendo en cuenta que aquí $Sr(t) \equiv r(t) = \mu_s(t)$, se empleará los coeficientes de la $M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.

En este ejemplo no tiene ceros, por ende:

$$e_{EE} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}; \quad \text{en el ejemplo} \quad e_{EE} = \frac{\alpha_1}{k_1}$$

Con un par de polos complejos y uno real, la ecuación característica será:

$$(s - \lambda_3)(s^2 + 2|\sigma|s + \sigma^2 + \omega_d^2) = s^3 + [2|\sigma| - \lambda_3]s^2 + [\sigma^2 + \omega_d^2] - 2|\sigma|\lambda_3 s + [-\lambda_3(\sigma^2 + \omega_d^2)] = 0$$
$$e_{EE} = \frac{(\sigma^2 + \omega_d^2) - 2|\sigma|\lambda_3}{-\lambda_3(\sigma^2 + \omega_d^2)} \leq e_{EE} \text{ especificado}$$

Recordar que $\lambda_3 < 0$ para que el sistema sea estable.

Llamando e_{EE} especificado = e_{EE}^* ;

$$\begin{aligned} (\sigma^2 + \omega_d^2) - 2|\sigma|\lambda_3 &\leq -\lambda_3(\sigma^2 + \omega_d^2)e_{EE}^* \\ (\sigma^2 + \omega_d^2) &\leq 2|\sigma|\lambda_3 - \lambda_3(\sigma^2 + \omega_d^2)e_{EE}^* \\ (\sigma^2 + \omega_d^2) &\leq \lambda_3[2|\sigma| - (\sigma^2 + \omega_d^2)e_{EE}^*] \end{aligned}$$

Lo que esta entre corchetes debe ser negativo, pues λ_3 , tambien :

$$\lambda_3 \leq \frac{(\sigma^2 + \omega_d^2)}{2|\sigma| - (\sigma^2 + \omega_d^2)e_{EE}^*}$$

o

$$\lambda_3 \leq \frac{1}{\frac{2|\sigma|}{(\sigma^2 + \omega_d^2)} - e_{EE}^*} \quad (1)$$

Dado σ, ω_d y especificado e_{EE}^* se elige la posision de λ_3 , teniendo en cuenta que λ_{1-2} sea dominante; $|\lambda_3| \geq 5|\sigma|$ o $\lambda_3 \leq 5\sigma$ (2)

Se deben cumplir (1) y (2).

Si el sistema fuera típico de segundo orden, ($\lambda_3 \rightarrow -\infty$), el error seria:

$$e_{EE} \frac{2|\sigma|}{(\sigma^2 + \omega_d^2)} \leq e_{EE}^*$$

o

$$e_{EE} = \frac{2\delta\omega_n}{\omega_n^2} = \frac{2\delta}{\omega_n} = \frac{2\delta^2}{|\sigma|} \leq e_{EE}^*$$

En este caso, fijado δ surge $|\sigma|$.

La planta tendrá las matrices siguientes, en la forma canónica controlable:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & -12 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D = [0]$$

$$A_c = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k_1 & -20 - k_2 & -12 - k_3 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A_c| = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k_{11} & 20 + k_2 & (s + 12 + k_3) \end{bmatrix}$$

$$|sI - A_c| = s^3 + (12 + k_3)s^2 + (20 + k_2)s + k_1 = 0$$

Posición de los polos:

- Para que $M_p(\%) \leq 15\% \rightarrow \delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0.17)^2}{\pi^2 + (\ln 0.17)^2}} \approx 0.517$

- Para que $te(2\%) \equiv \frac{4}{|\sigma|} \leq 4.2 \rightarrow |\sigma| \geq 0.952$

Si se elige $\sigma = -1$, ω_d debera ser tal que $\delta \geq 0.517$

Si se elige $\omega_d = 1.5, \delta = \cos\theta = \cos(\tan^{-1} 1.5) = 0.5547$ por ende $\delta = 0.5547 > 0.517$

$$\therefore \lambda_{1-2} = -1 \pm j1.5$$

Para que se cumpla que el e_{EE} a una entrada rampa unitaria sea menor o igual a $2/3$; $e_{EE}^* = 2/3$:

$$\lambda_3 \leq \frac{1}{\frac{2}{1+(1.5)^2} - 2/3} \rightarrow 1) \lambda_3 \leq -19.5; \text{ y como } 2) \lambda_3 \leq -5 \Rightarrow \text{se elegira } \lambda_3 = -20$$

Por lo tanto los polos deseados serán:

$$\lambda_{1-2} = -1 \pm j1.5 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -20$$

La ecuación característica deseada será:

$$(s + 20)(s^2 + 2s + 3.25) = s^3 + 22s^2 + 43.25s + 65 = 0$$

Igualando :

$$k_1 = 65$$

$$12 + k_3 = 22 \rightarrow k_3 = 10$$

$$20 + k_2 = 43.25 \rightarrow k_2 = 23.25$$

$$\text{Como } G = k_1 \rightarrow G = 65$$

$$\therefore K = [65 \ 23.25 \ 10] \quad \text{y} \quad G = 65$$

La figura 37 muestra las respuestas al escalón y a la rampa, como se puede observar se cumplen con todas las especificaciones deseadas

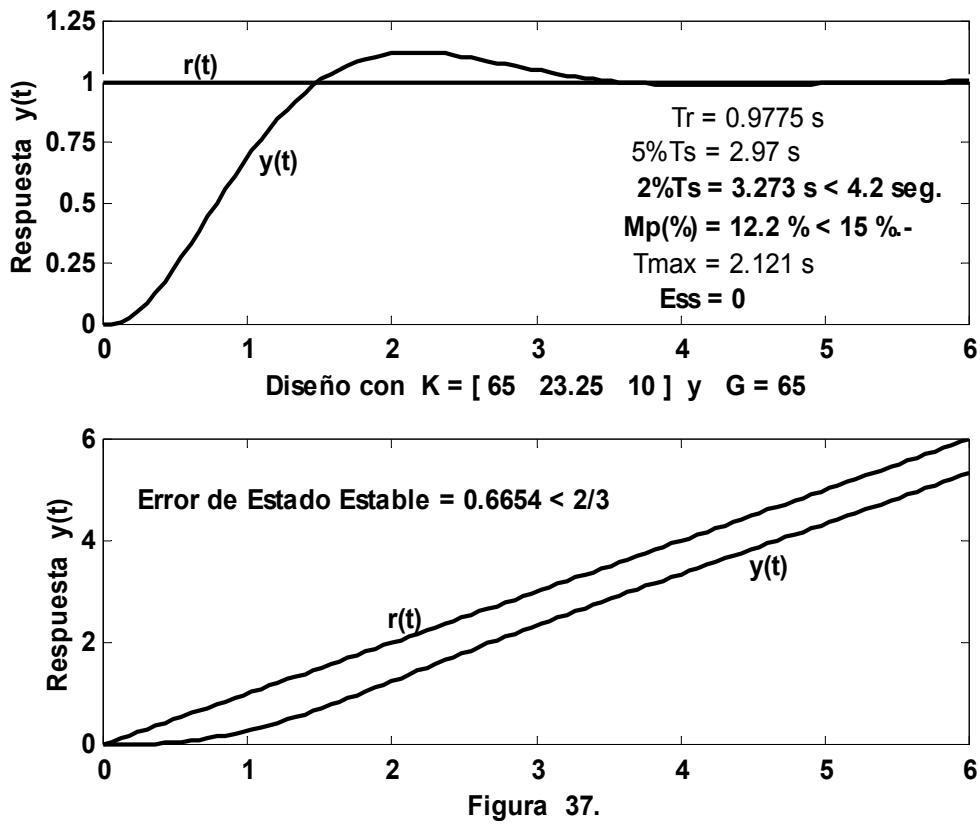
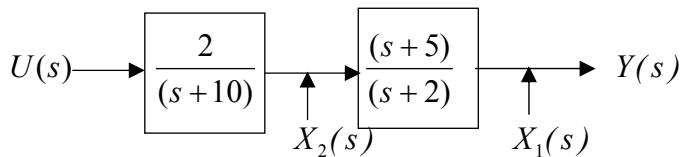


Figura 37.

Problema 2:

Dada la planta siguiente:



Diseñar un sistema de control por medio de la técnica moderna (realimentación de las variables de estado) para que el mismo cumpla con las especificaciones siguientes:

- Que el error de estado estable a entradas escalones sea nulo.
- Que el $t_E(2\%) \leq 0.75 \text{ seg.}$
- Que el $M_p(\%) \leq 5\%$.
- Que el error de estado estable a entradas rampas unitarias no supere el valor de 0.175.-

Primero se obtiene el modelo:

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{(s+5)}{(s+2)} \xrightarrow{L^{-1}} \dot{x}_1 + 2x_1 = \dot{x}_2 + 5x_2$$

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + \dot{x}_2 + 5x_2 \quad (1)$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+10)} \xrightarrow{L^{-1}} \dot{x}_2 + 10x_2 = 2u(t) \therefore \dot{x}_2(t) = -10x_2(t) + 2u(t) \quad (2)$$

$$(2) \text{ en } (1) \rightarrow \dot{x}_1 = -2x_1 - 10x_2 + 2u + 5x_2 \rightarrow \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - 5x_2(t) + 2u(t)$$

$$Y(s) = X_1(s) \xrightarrow{L^{-1}} y(t) = x_1(t) \quad (3)$$

Las matrices de la planta serán las siguientes :

$$\therefore A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

La función de transferencia de la misma se podría determinar, para verificar,:

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{C(sI - A)^{-1}B}{|sI - A|}$$

$$|sI - A| = \begin{bmatrix} s+2 & 5 \\ 0 & s+10 \end{bmatrix} = (s+2)(s+10)$$

$$\begin{bmatrix} s+10 & -5 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[1 \quad 0] [s+10 \quad -5] [2(s+10) \quad -10] = 2(s+5)$$

$$G_p(s) = \frac{2(s+5)}{(s+2)(s+10)} \quad \text{Se verificó. La Planta será controlable}$$

Como se tiene que ubicar λ_{1-2} , complejos para que se tenga el transitorio al escalón, salvo que $|\sigma| \leq 1$, el $t_e(2\%)$ debería ser aproximadamente 4 seg. y se pide 0.7 seg. Por ende $|\sigma|$ será mucho más grande. El cero en -5 tendría mucha influencia en consecuencia haría falta otro polo en las

inmediaciones del cero para anularlo. Por lo tanto se aplicará un control por realimentación de los estados con un control integral. Lo primero que hay que hacer es ver si el par A^*, B^* es controlable. Para ello el rango de la matriz H deberá ser 3.

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 0 & -10 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(H) = -10 \neq 0$$

Por lo tanto el rango de la matriz H , será igual a tres, y el diseño puede tener éxito.

Elección de los tres Polos:

Para que: $M_p(\%) \leq 5\% \rightarrow \delta \geq 0.69$ se elegirá: $\delta = 0.707 \rightarrow \omega_d = |\sigma| -$

Si el $t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 0.75$ seg. $\rightarrow |\sigma| \geq 5.333$ se elegirá: $\rightarrow \sigma = -6$

Por lo tanto el par de polos dominantes será:

$$\lambda_{1-2} = -6 \pm j6$$

La posición del tercer polo λ_3 , se elegirá para que se cumpla la especificación de error de estado estable a la rampa en la entrada. Deberá estar cercana a -5, para que el par complejo sea dominante.

La ecuación característica es:

$$(s - \lambda_3)(s^2 + 12s + 72) = 0$$

$$s^3 + (12 - \lambda_3)s^2 + (72 - 12\lambda_3)s + (-72\lambda_3) = 0$$

La función de transferencia del sistema con realimentación de los estados y una ganancia de pre-compensación será:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2Gs + 10G}{s^3 + (12 - \lambda_3)s^2 + (72 - 12\lambda_3)s + (-72\lambda_3)}$$

$$\text{Como: } M(0) = 1 = \frac{10G}{-72\lambda_3} \rightarrow 2G = -14.4\lambda_3.$$

El error de estado estable a una rampa unitaria en la entrada será:

$$e_{EE} = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{72 - 12\lambda_3 + 14.4\lambda_3}{-72\lambda_3} \leq 0.175$$

Por ende:

$$72 + 2.4\lambda_3 \leq -12.6\lambda_3 \rightarrow \lambda_3 \leq -4.80 \text{ se elegirá} \Rightarrow \lambda_3 = -5$$

La ecuación característica deseada es:

$$s^3 + 17s^2 + 132s + 360 = 0$$

También:

$$Ac = A^* - B^* K^* = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ DK - C & -DG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 2k_1 & -5 - 2k_2 & 2G \\ -2k_1 & -10 - 2k_2 & 2G \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|sI - Ac| = s^3 + (12 + 2k_1 + 2k_2)s^2 + (20 + 10k_1 + 4k_2 + 2G)s + (10G) = 0$$

Igualando los coeficientes de igual potencia se llega a:

$$k_1 = 5; k_2 = -2.50' \text{ y } G = 36$$

Por lo tanto:

$$K = [k_1 \ k_2] = [5 \ -2.50] \quad y \quad G = 36$$

$$\text{o tambien: } K^* = [k_1 \ k_2 \ -G] = [5 \ -2.50 \ -36]$$

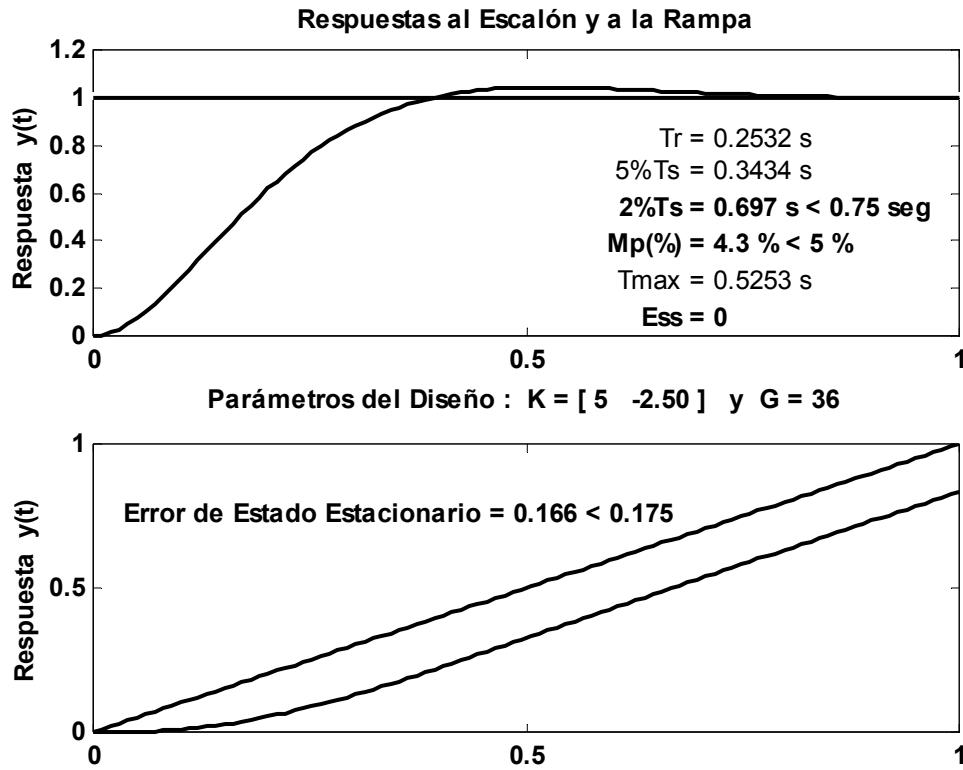


Figura 38

Para verificar si se cumplen todas las especificaciones solicitadas se recurre a la PC. Las respuestas obtenidas están indicadas en la figura 38. Como se puede apreciar se cumple con todo lo solicitado oportunamente.

Para obtener: $\bar{x}(\infty)$; $u(\infty)$; $y(\infty)$ y $x_3(\infty)$, se procede así:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ -R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0.4R \\ 2R \end{bmatrix} \quad \text{si } R = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1(\infty) = 1 \\ x_2(\infty) = 0.4 \\ u(\infty) = 2 \end{cases}$$

$$y(\infty) = C\bar{x}(\infty) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \end{bmatrix} \rightarrow y(\infty) = 1. -$$

$$x_3(\infty) = \frac{1}{G} [u(\infty) + K\bar{x}(\infty)] = \frac{1}{36} \left[2 + [5 \ -2.5] \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \end{bmatrix} \right] = \frac{1}{6} \rightarrow x_3(\infty) = 0.1667. -$$

Estos valores se verifican con la PC, en la figura 39.-

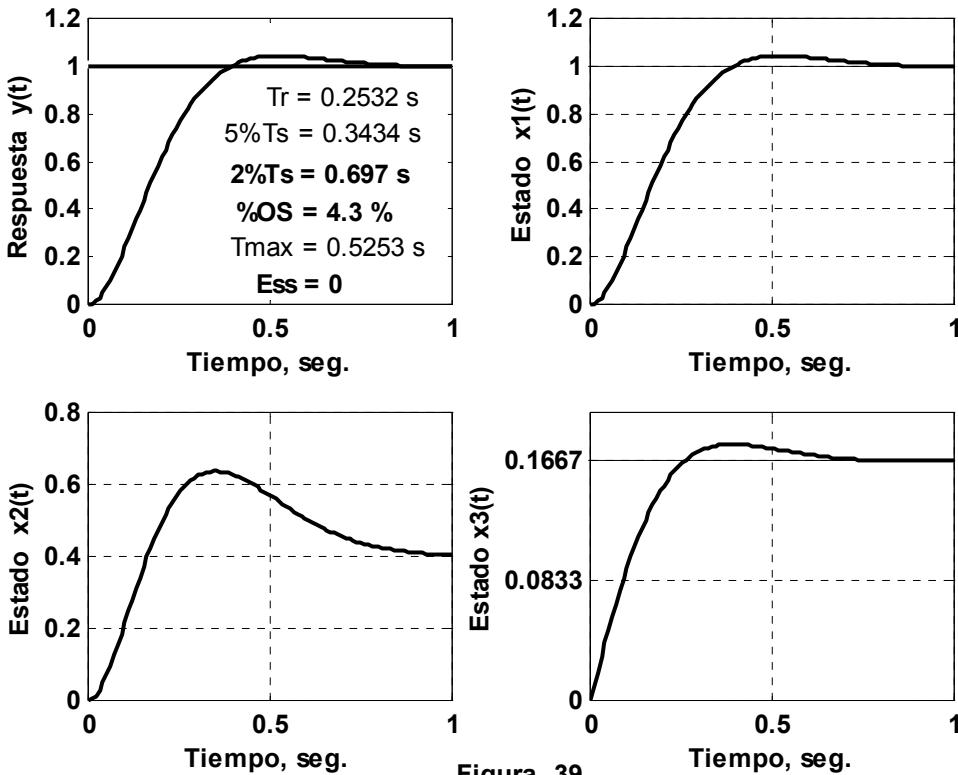


Figura 39

Las matrices del sistema de lazo cerrado serán:

$$Ac = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 72 \\ -10 & -5 & 72 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad Cc = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . -$$

La función de transferencia del mismo:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{72(s+5)}{(s+5)(s^2 + 12s + 72)} = \frac{72}{(s^2 + 12s + 72)} . -$$

Con el programa Simulink de Matlab se puede simular el sistema y obtener las respuestas temporales.

El diagrama se muestra en la figura 40, y las respuestas a un escalón unitario en la 41.-

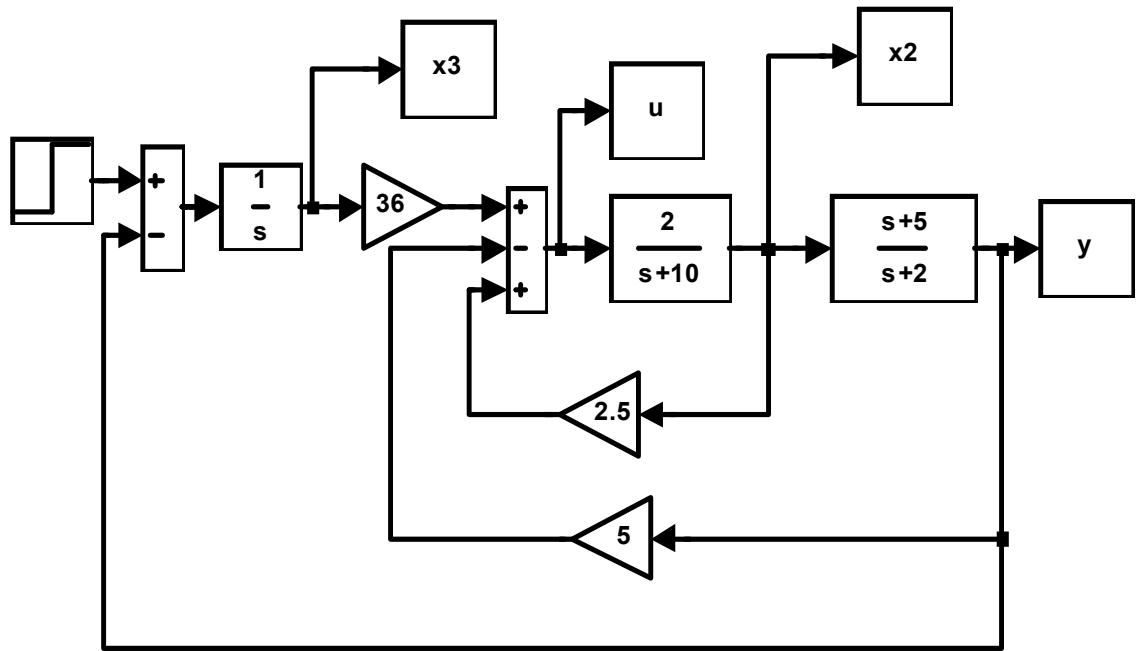


Figura 40

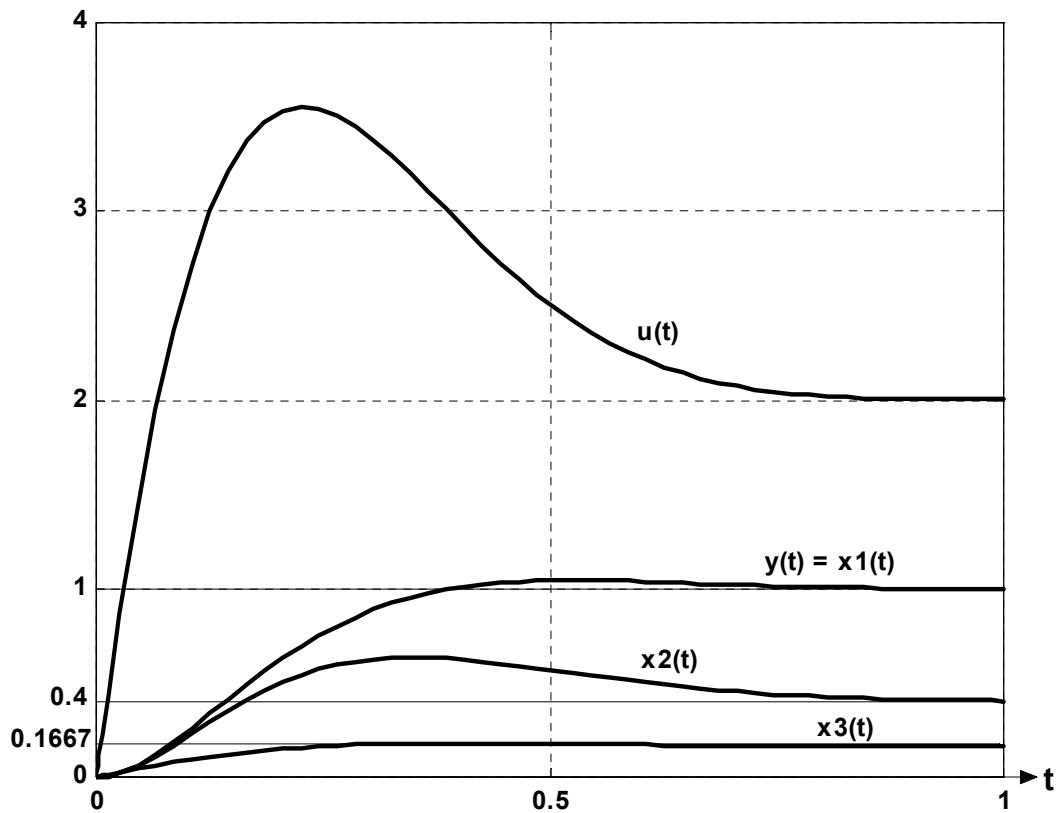


Figura 41

Para una señal de referencia rampa de pendiente unitaria, $r(t) = t \mu_s(t)$. las variaciones temporales de la respuesta $y(t)$, y de los estados $\bar{x}(t)$, se

muestran en la figura 42.-

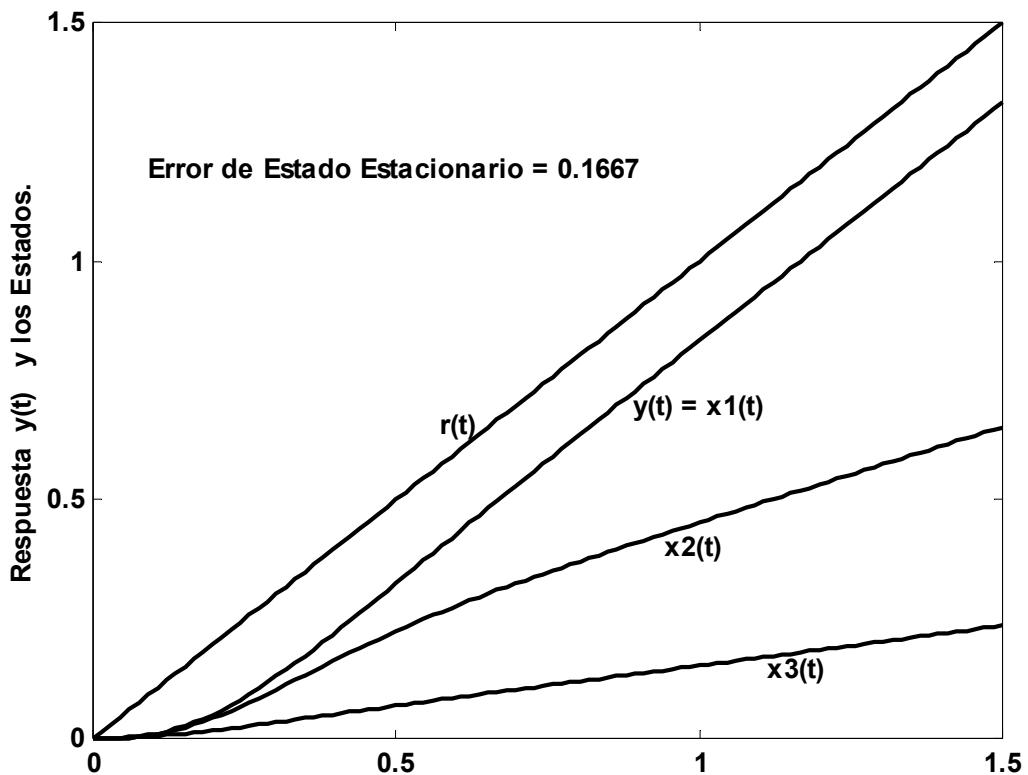


Figura 42.

Problema 3:

La función de transferencia de una planta es:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.10(s+2)(s+10)}{(s+1)(s+5)}$$

- 1) Determinar el modelo en la forma canónica controlable.-
- 2) Con ese modelo diseñar un sistema de control por realimentación de los estados mas un control integral, para que se cumplan las especificaciones siguientes: (como la matriz $D \neq 0$, no se puede usar la opción Integral&State del menú principal de la función Svdesign).-
 - Que el error de estado estable a entradas escalones sea nulo.
 - Que el $t_E(2\%) \leq 4.25 \text{ seg.}$
 - Que $M_p(5\%) \leq 5\%.$ -

1) La F.C.C., resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1.5 \quad 0.6] \quad D = [0.10]$$

Como el par (A, B) es controlable solo hay que ver si lo es el par (A^*, B^*) .

Como la matriz H es de rango tres, lo será por ende el diseño será posible.

2) La primera especificación se cumplirá pues se diseñara con un control integral.

La segunda $t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 4.25 \text{ seg.} \rightarrow |\sigma| \geq 0.94$ se elegirá: $\sigma = -1$.

La tercera se cumple si λ_{1-2} , son dominantes y $\delta \geq 0.69$ se elige: $\delta = 0.707$.

En consecuencia:

$$\lambda_{1-2} = -1 \pm j$$

El tercer polo se ubicará en $\lambda_3 = -2$, para cancelar el cero de la planta en -2, ya que el otro cero está en -10 y es: $Z = 10\sigma = -10$ por ende su efecto será despreciable.-

La ecuación característica deseada será:

$$(s+2)(s^2 + 2s + 2) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0$$

La misma en función de las constantes k_1 , k_2 y G se obtendrá de:

$|sI - Ac| = 0$, donde:

$$Ac = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ DK - C & -DG \end{bmatrix}; \quad \text{con } K = [k_1 \quad k_2]$$

Remplazando A , B , C , D y K , quedará:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 - k_1 & -6 - k_2 & G \\ 0.1k_1 - 1.5 & 0.1k_2 - 0.6 & -0.1G \end{bmatrix}$$

$$|sI - Ac| = s^3 + (6 + k_2 + 0.1G)s^2 + (5 + k_1 + 1.2G)s + (2G) = 0$$

Igualando los coeficientes de igual potencia, se llega a:

$$k_1 = -1.40, \quad k_2 = -2.20 \quad y \quad G = 2.$$

En consecuencia: $K = [-1.40 \quad -2.20]$ y $G = 2$

Las matrices del sistema de control diseñado son:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3.6 & -3.8 & 2 \\ -1.64 & -0.82 & -0.20 \end{bmatrix}$$

$$Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Cc = [(C - DK) \quad DG] = [1.64 \quad 0.82 \quad 0.20]$$

$$Dc = [0]$$

La función de transferencia del sistema es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0.2(s+2)(s+10)}{(s+2)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{0.20s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

El error de estado estable a entradas rampas unitarias resultó:

$$e_{EE} = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{2 - 0.20}{2} = 0.90.$$

Para verificar las respuestas temporales se muestran en la figura 43.

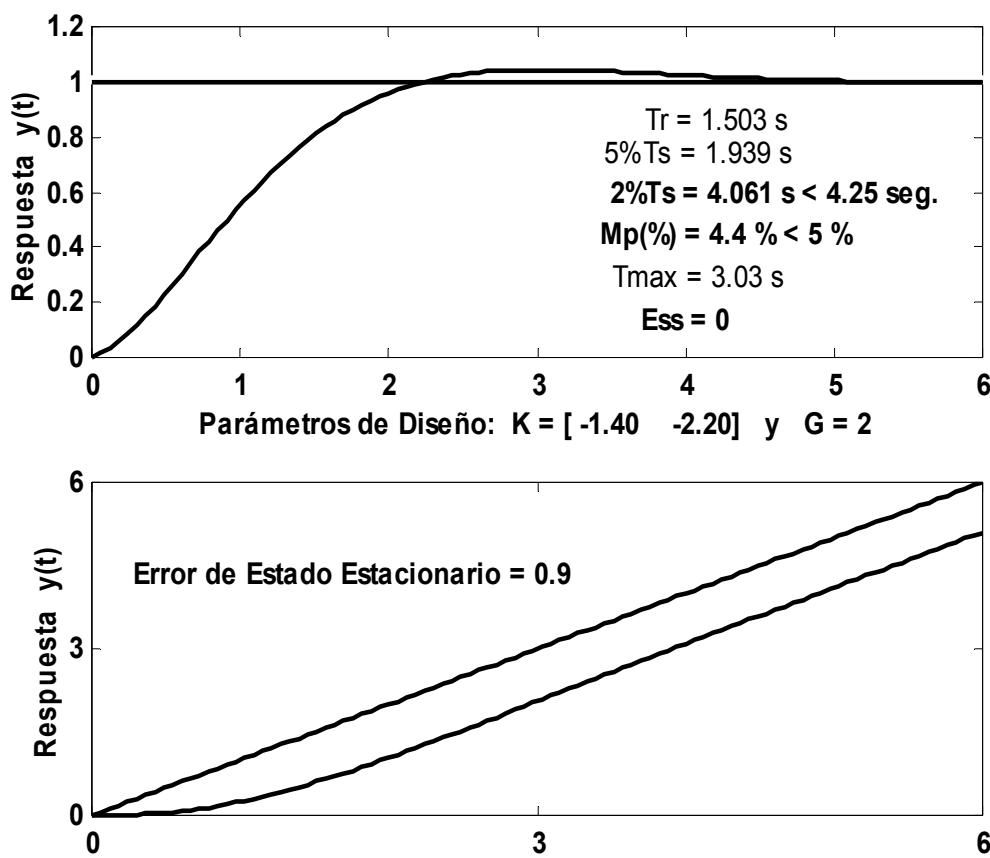


Figura 43

Usando Matlab con este Problema, se tendrá.

» % Introducimos las matrices de la planta real:
» A=[0 1;-5 -6];
» B=[0;1];
» C=[1.5 0.6];
» D=0.1;

Se definen las matrices $A^* = A_1$ y $B^* = B_1$ del sistema regulador equivalente, como se explico en la teoría:

Llamando : $Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, en Matlab tendremos:

» Q=[0;0];
» A1=[A Q;-C 0];
» B1=[B;-D];
» % El vector de los polos deseados era:

» p=[-2 -1-i -1+i];

» % La Matriz K y la ganancia G:

» K=Acker(A1,B1,p)

K =

-1.4000 -2.2000 -2.0000

» % Por lo tanto K y G serán:

» K=[-1.40 -2.20];

» G = 2;

» % Las matrices del sistema de control de lazo cerrado real son:

» Ac=[A-B*K B*G;D*K-C -D*G]

Ac =

0	1.0000	0
-3.6000	-3.8000	2.0000
-1.6400	-0.8200	-0.2000

» Bc=[Q;1]

Bc =

0
0
1

» Cc=[C-D*K D*G]

Cc =

1.6400	0.8200	0.2000
--------	--------	--------

Como se puede apreciar se llega a los mismos resultados que en la forma analítica.-

También se puede utilizar la función Svddesign del Csad/Matlab, para obtener los coeficientes de la matriz de realimentación de los estados y la

ganancia G a la salida del integrador agregado en el camino directo, de la manera siguiente, pues la matriz D no es nula:

Se ingresan las matrices A* y B*, (la matriz C puede ser cualquiera), del sistema regulador equivalente ya mencionado.

Se llama la función State Feedback, del menú principal y se ingresa la posición deseada de los tres polos, el programa nos devuelve:

$$K^* = [k_1 \ k_2 \ -G]$$

Por lo tanto será: $K = [k_1 \ k_2]$ y la ganancia de la salida del integrador G .

Se ingresan las matrices

$$A^* = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ -1.5 & -0.6 & 0 \end{bmatrix} \text{ y la } B^* = \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

La C, cualquiera, y luego se llama a la función State Feedback:

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
<i>State Feedback</i>	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > s

Enter vector of 3 desired pole locations > [-2 -1-i -1+i]

State Feedback Vector K is:

$$-1.4000 \ -2.2000 \ -2.0000 \rightarrow K = [-1.40 \ -2.20] \text{ y } G = 2.-$$

Pole Locations

Desired	Achieved
-1.0000 - 1.0000i	-1.0000 - 1.0000i
-1.0000 + 1.0000i	-1.0000 + 1.0000i
-2.0000	-2.0000

A-BK is: → Ac

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1.0000 & 0 \\ -3.6000 & -3.8000 & 2.0000 \\ -1.6400 & -0.8200 & -0.2000 \end{array}$$

Por lo tanto las otras matrices del sistema de control serán:

$$Bc = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad Cc = [(C - DK) \quad DG] = [1.64 \ 0.82 \ 0.20] \quad y \quad Dc = 0$$

Problema 4:

En este problema se indicara como se puede proceder cuando, por diferentes motivos, no se puede elegir un par de polos complejos conjugados dominantes para el sistema diseñado, con la ayuda de algún software de computación adecuado, por ejemplo el comando Svdesign del Csad/Matlab. Esta función se detallo sus principales utilidades en la publicación correspondiente.-

El modelo de una planta a controlar tiene las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ 1.6 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \end{bmatrix} \quad y \quad C = [1 \quad 5]$$

Diseñar algún sistema de control con la realimentación de los estados más una ganancia de pre-compensación para conseguir las especificaciones siguientes:

- Que el error de estado estable para *entradas escalones* sea *nulo*.-
- Que la sobre elongación a entradas escalones no supere el 5%.-
- Que el tiempo de establecimiento al 2% sea menor o igual a 0.7 seg.
- Que el error de estado estable a entradas rampas unitarias no supere el valor de 1/12.-

Como se puede apreciar, los polos deseados del sistema a diseñar no pueden ser un par complejo conjugado dominante a menos que el tiempo de establecimiento al 2% sea mayor o igual a 2.5 segundos, (se pide menor o igual a 0.70 segundos).-

Esto se debe a la presencia del cero de la planta a controlar en -8, ya que la función de transferencia de la planta es:

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{45(s+8)}{(s+4)(s+6)}$$

Se propondrá primero, ubicar los polos de M(s) reales e iguales en λ .

Por lo tanto la función de transferencia del sistema a diseñar será:

$$M(s) = \frac{45G(s+8)}{(s-\lambda)^2} = \frac{45Gs + 360G}{s^2 - 2\lambda s + \lambda^2}$$

Como la ganancia estática: $M(0) = 1 \Rightarrow \frac{360G}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow G = \frac{\lambda^2}{360}$

El error de estado estable a entradas rampas de pendiente unitaria será:

$$e(\infty) = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{-2\lambda - 45G}{\lambda^2} = \frac{-2\lambda - \frac{45}{360}\lambda^2}{\lambda^2} \leq \frac{1}{12}$$

Operando se llega a:

$$-2\lambda \leq \frac{75}{360}\lambda^2 \Rightarrow -2 \geq \frac{75}{360}\lambda : \text{pues } \lambda < 0 \quad \underline{\lambda \leq -9.60}$$

El límite inferior del rango posible de λ , estará impuesto por la

especificación del Mp (%), pues al mover los polos a la izquierda del plano s el error disminuirá pero aumenta el Mp(%). Este límite se puede determinar con la ayuda de la función Svdesign del Csd/Matlab, el resumen está indicado en la tabla siguiente:

λ_{1-2}	$T_E(2\%) \text{ seg.}$	Mp (%)	$e(\infty), a la rampa$
-9.60	0.3081	0.00	$1/12=0.08333$
-10	0.2727	0.20	0.0750
-11	0.197	1.00	0.0568
-12	0.3131	2.50	0.0416
-13	0.3434	4.60	0.2885
-13.15	0.3435	5.00	0.0271
-14	0.3485	7.30	0.01786

Si se elige: $\lambda_{1-2} = -12$, la ecuación característica será: $s^2 + 24s + 144 = 0$

También:

$$Ac = A - BK = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ 1.6 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15k_1 & 15k_2 \\ 6k_1 & 6k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 - 15k_1 & -5 - 15k_2 \\ 1.6 - 6k_1 & -2 - 6k_2 \end{bmatrix}$$

$$|sI - Ac| = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 - 15k_1 & -5 - 15k_2 \\ 1.6 - 6k_1 & -2 - 6k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + 8 + 15k_1 & 5 + 15k_2 \\ -1.6 + 6k_1 & s + 2 + 6k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= (s + 8 + 15k_1)(s + 2 + 6k_2) - (5 + 15k_2)(6k_1 - 1.6) = 0$$

2

En consecuencia:

$$24 + 72k_2 = 144 \Rightarrow k_2 = 5/3 \cong 1.6666$$

$$10 + 15k_1 + 10 = 24 \Rightarrow k_1 = 4/15 \cong 0.2666$$

$$G = \frac{144}{360} \Rightarrow G = 0.40$$

Por lo tanto: $K = [0.2666 \quad 1.6666] \quad y \quad G = 0.40$

Se propondrá ahora, que los polos son reales y distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Por lo tanto la función de transferencia del sistema a diseñar será:

$$M(s) = \frac{45G(s+8)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} = \frac{45Gs + 360G}{s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2}$$

Como la ganancia estática: $M(0) = 1 \Rightarrow \frac{360G}{\lambda_1\lambda_2} = 1 \Rightarrow G = \frac{\lambda_1\lambda_2}{360}$

El error de estado estable a entradas rampas de pendiente unitaria será:

$$e(\infty) = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2) - 45G}{\lambda^2} = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2) - \frac{1}{8}\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2} \leq \frac{1}{12}$$

Operando se llega a:

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \leq -4.80$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\Rightarrow \lambda \leq -9.60$, como ya se determinó.-

Siempre será $(\lambda_1 + \lambda_2) < 0$, y se tendrá:

$$\lambda_1 \lambda_2 \geq -4.8(\lambda_1 + \lambda_2) \Rightarrow \lambda_1(4.8 + \lambda_2) \geq -4.8\lambda_2$$

La última relación es válida solo si $\lambda_2 \leq -4.8$.

Recordar que estas relaciones nos aseguran que se cumpla la especificación del error a la rampa. Para que se cumpla también Mp (%), utilizaremos otra vez la función Svdesign. Si elegimos $\lambda_2 = -10$, la tabla siguiente muestra los resultados:

λ_2	λ_1 Límite	λ_1 Adoptado	T _E (2%), seg.	Mp (%)	$e(\infty)$, a la rampa
-10	-9.2307	-9.2307	0.3106	0.00	1/12
-10	-9.2307	-12	0.2020	0.80	0.05833
-10	-9.2307	-20	0.3037	4.20	0.02500
-10	-9.2307	-22.15	0.3030	5.00	0.02015
-10	-9.2307	-25	0.2980	6.00	0.01500

Lo mismo se puede hacer para otro valor de λ_2 .-

Si se adopta $\lambda_1 = -20$ y $\lambda_2 = -10$, procediendo como se sabe se llega a:

$$K = [0.3556 \quad 2.4444] \quad y \quad G = 0.5556$$

Haremos un *tercer diseño* con *polos complejos conjugados pero no dominantes*, $\lambda_{1-2} = \sigma \pm j\omega_d$.

La ecuación característica del sistema diseñado será:

$$s^2 + 2|\sigma|s + (\sigma^2 + \omega_d^2) = 0$$

Como la ganancia estática del sistema debe ser la unidad, la ganancia de pre-compensación deberá ser:

$$G = \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{360}$$

El error de estado estable a entradas rampas de pendiente unitaria será:

$$\text{Será la relación } e(\infty) = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{-2|\sigma| - 45G}{(\sigma^2 + \omega_d^2)} = \frac{-2|\sigma| - \frac{1}{8}\sigma^2 - \frac{1}{8}\omega_d^2}{(\sigma^2 + \omega_d^2)} \leq \frac{1}{12}$$

Operando se llega a:

$$\omega_d \geq \sqrt{|\sigma|(9.6 - |\sigma|)}$$

Válida solo para $|\sigma| < 9.60$.

Como $|\sigma| = -\sigma$, la última expresión se puede poner así:

$$\underline{\omega_d \geq \sqrt{-\sigma(9.6 + \sigma)}}$$

Recordar que esta relación nos asegura que se cumpla la especificación del error a la rampa. Como se ve si $|\sigma| = 9.60 \Rightarrow \omega_d = 0$, como ya se demostró.-

Además para que se cumpla la especificación del Mp (%), $\sigma \leq -4.8$ ya que resulta $\lambda_{1-2} = -4.8 \pm j4.8$ y como hay un cero en -8 el Mp (%) > 5%.-

Para que se cumpla también Mp (%), utilizaremos otra vez la función Svdesign. La figura 44 indica la zona de ubicación del polo λ_1 .

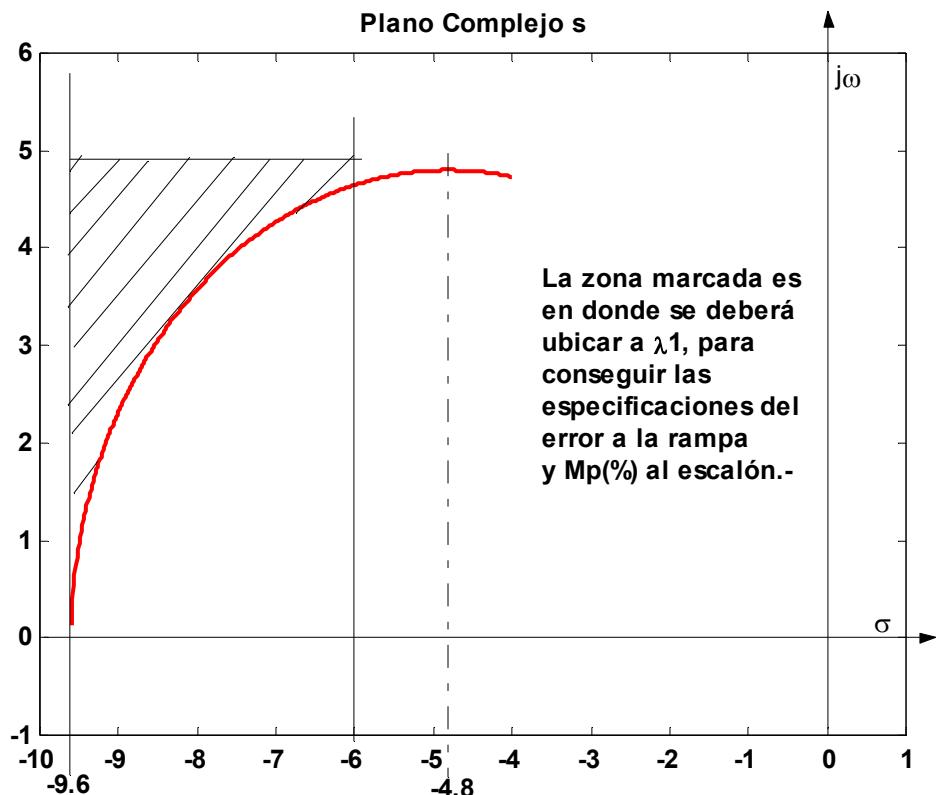


Figura 44

Un resumen de los resultados está mostrado en la tabla siguiente:

σ	ω_d Min : Error	ω_d	T _E (2%) seg.	Mp (%)	$e(\infty)$ al rampa
-4.8	4.8	4.8	0.75	8.30	1/12
-5	4.795	4.795	0.733	7.70	0.08316
-6	4.647	4.647	0.6465	4.90	1/12
-7	4.266	4.65	0.5619	4.10	0.07324
-7	4.266	4.90	0.5657	5.00	0.06675
-8	3.5777	3.5777	0.275	1.30	0.08333
-8	3.5777	4.65	0.50	3.90	0.06187
-8	3.5777	4.975	0.5091	5.00	0.05528

σ	$\omega_d \text{ Mín : Error}$	ω_d	$T_E (2\%) \text{ seg.}$	$M_p (\%)$	$e(\infty) \text{ alarampa}$
-9	2.323	4	0.4148	2.60	0.06057
-9	2.323	4.875	0.4596	5.00	0.04681
-9.6	0	0	0.3056	0.00	1/12
-9.6	0	4.00	0.4097	3.10	0.05251
-9.6	0	4.725	0.4375	5.00	0.04271

Como se puede ver hay muchas soluciones, con pares de polos complejos conjugados *no dominantes*.-

Si se escoge: $\lambda_{1-2} = -6 \pm j4.65$, con el cero en: $Z = -8$, la matriz de la realimentación de los estados y la ganancia de pre-compensación serán:

$$K = [-0.0535 \quad 0.4670] \quad y \quad G = 0.1601$$

La respuesta del sistema y sus atributos se muestran en la figura 45.-

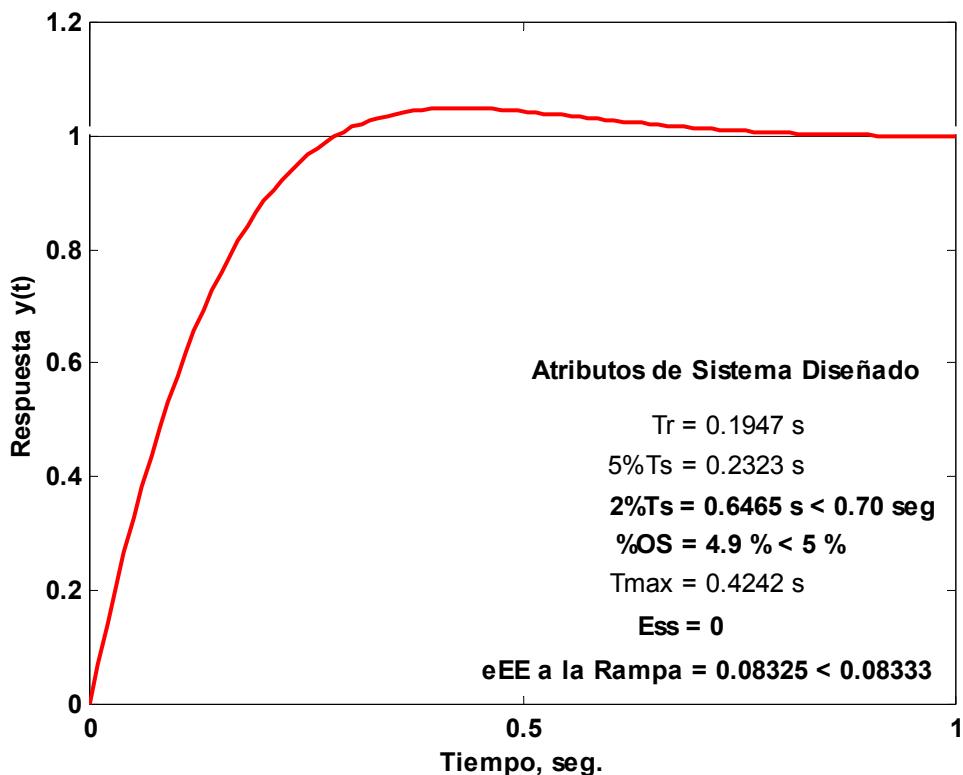


Figura 45

Ejercicio Nº 5:

Resolver el problema anterior usando la realimentación de los estados más un control integral, con una configuración de polos complejos conjugados dominantes.-

Ahora como hay tres polos se podrá cancelar el cero en -8 y si fijamos el coeficiente de amortiguación correspondiente, variando la parte real, y en consecuencia la imaginaria se podrá conseguir lo pedido.-

Para que $M_p (\%) < 5\%$, se elige : $\delta = 0.707$.-

Para el tiempo de establecimiento al (2%), $|\sigma| \geq 5.714$. -

Para el error a la rampa unitaria: $e(\infty) = \frac{2\delta^2}{|\sigma|} = \frac{1}{|\sigma|} \leq \frac{1}{12} \Rightarrow |\sigma| \geq 12$. -

Interceptando las dos expresiones anteriores será: $|\sigma| \geq 12$. -

El tiempo de establecimiento disminuirá manteniendo el Mp (%) y se cumplirá la especificación del error a la rampa. -

En consecuencia la ubicación de los polos deseada será:

$$\lambda_{1-2} = -12 \pm j12 \quad y \quad \lambda_3 = -8$$

Procediendo como ya se sabe se llega a:

$$K = [8/15 \quad 7/3] \quad y \quad G = 6.40$$

La figura 46 muestra las respuestas del sistema diseñado. -

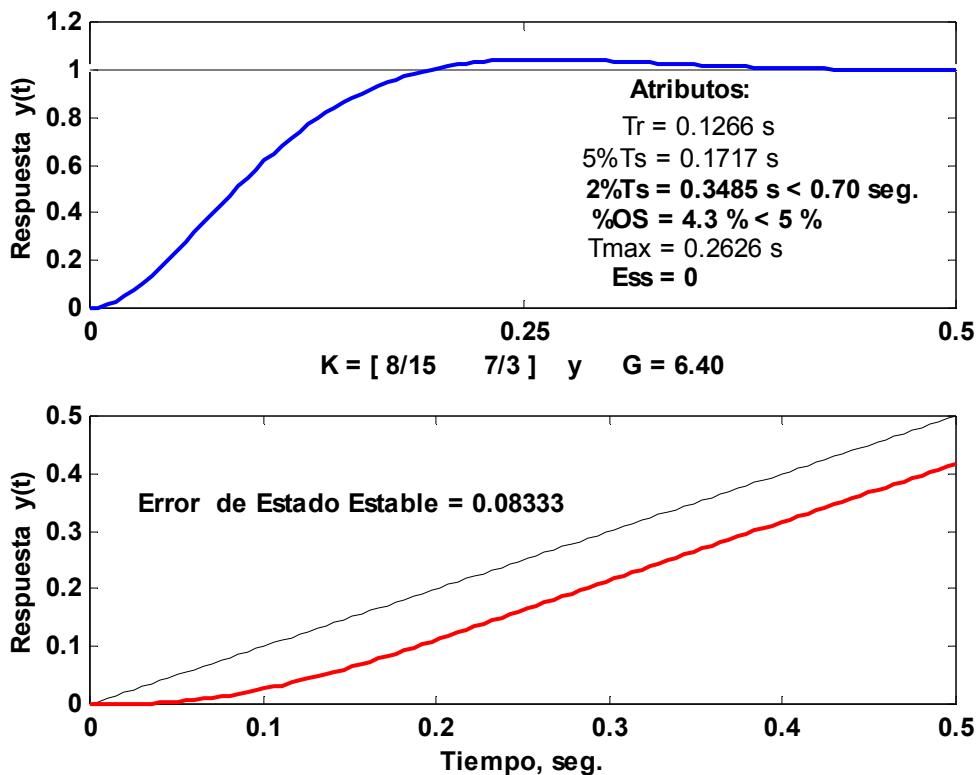


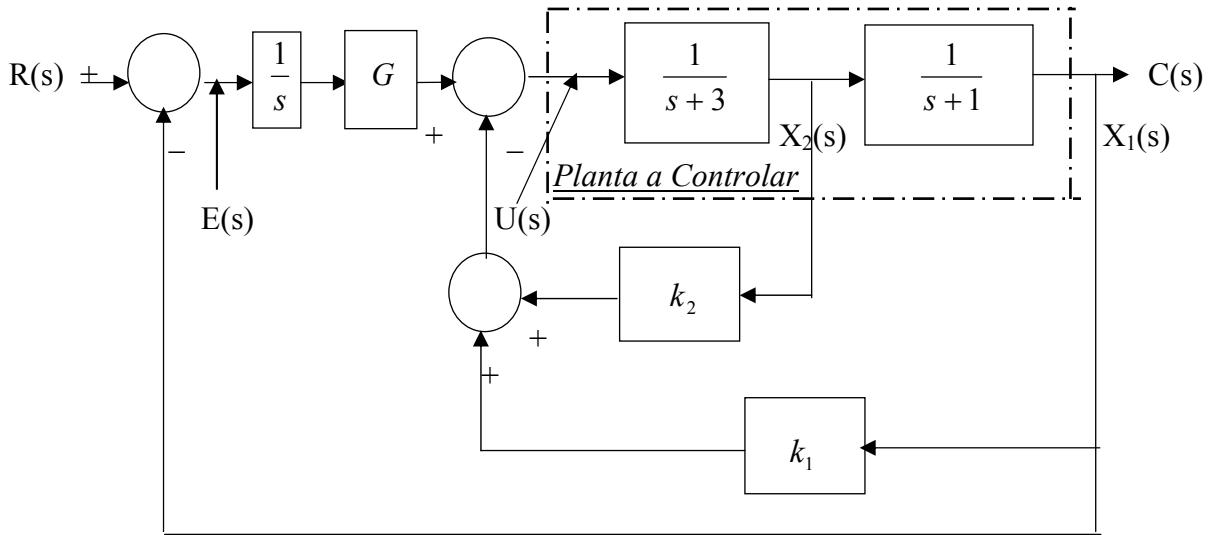
Figura 46

Problemas Propuestos

En los mismos se integran los conocimientos adquiridos en cuanto al análisis y diseño de los Sistemas de control automático, con las técnicas Clásica y Moderna.-

Ejercicio Nº 1:

El diagrama de bloques de un sistema de control Integral más la Realimentación de los estados con ganancias k_1 y k_2 (ctes reales), de un proceso, se muestra en la figura.



Control Moderno:

- 1) Encuentre el modelo matemático de la planta a controlar.-
- 2) Determine las matrices del *sistema de control* seguidor en función de las constantes k_1 , k_2 y G .-
- 3) Encontrar la función de transferencia del Sistema de Control, $M(s)$.-
- 4) Determine, los valores de las ganancias de la matriz K de realimentación de los estados y el valor de la ganancia G de la salida del integrador agregado al camino directo, para que el *sistema de control diseñado*, tenga los atributos siguientes:

- a) El error de estado estable debidos a entradas escalones sea nulo.-
- b) La sobreelongación a un escalón unitario en la entrada sea: $M_p \leq 5\%$. -
- c) El tiempo de establecimiento al 5% sea aproximadamente: $T_e(5\%) \cong 2.25 \text{ seg}$. -
- d) El error estacionario a *entradas rampas* unitarias sea igual a 1.10.-

Control Clásico:

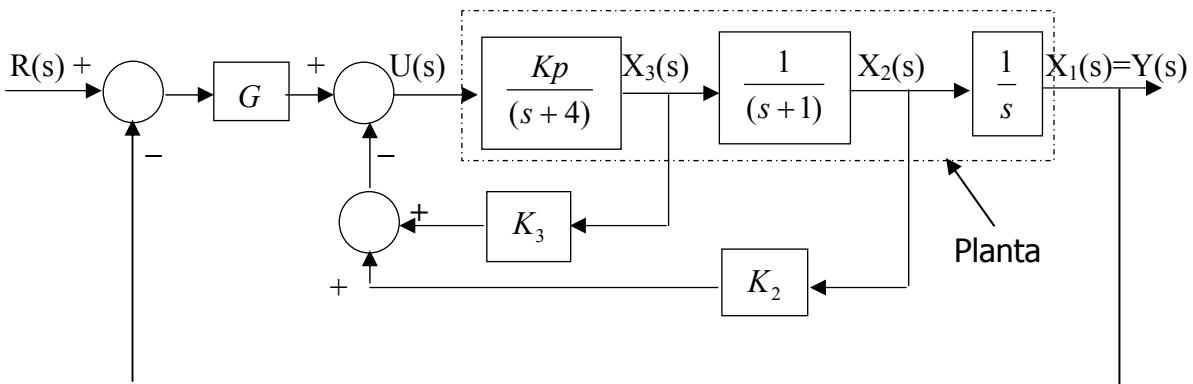
- 5) Si $G = 20$ y $k_1 = 11$, determine el rango de la ganancia k_2 para que el sistema sea estable, aplicando el criterio de estabilidad de Nyquist.
- 6) Si $G = 20$ y $k_1 = 11$, bosquejar el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema de control con la ganancia k_2 como parámetro variable.- Además encontrar la ubicación de los polos del sistema, y el valor de la ganancia k_2 , si se sabe que uno de los mismos está en $\lambda_3 = -10$.-
- 7) Eliminar las realimentaciones internas, ($k_1 = k_2 = 0$) y reemplazar el boque de ganancia G por un *controlador adecuado*, para que el sistema sea uno *típico de segundo orden* con las especificaciones siguientes:

- La sobreelongación a un escalón unitario en la entrada sea: $M_p \leq 5\%$. -
- El tiempo de establecimiento al 5% no supere los 1.50 segundos.-

- 8) ¿Qué *error de estado estable*, para entradas rampas de pendiente unitaria resultó?-

Ejercicio 2:

En la figura se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control.



Control Moderno: Si, $K_p = 24$. -

- Encontrar el modelo en variables de estado de la *planta a controlar*. -
- Encontrar las matrices del *sistema de control* en función de las ganancias G , K_2 y K_3 . -
- Determinar la ecuación característica del *sistema* en función de las ganancias G , K_2 y K_3 . -
- Determinar el valor de dichas ganancias, para que la respuesta del sistema de control, tenga los atributos siguientes:

- Error de Estado Estacionario a entradas escalones unitarios sea nulo. -
- Sobrelongación a las mismas entradas sea: $M_p(\%) \leq 17\%$. -
- Tiempo de establecimiento a las mismas entradas sea: $T_e(2\%) \leq 4.5$ seg. -
- Error de Estado Estable a entradas rampas unitarias sea menor o igual a $\frac{2}{3}$. -

- Determinar la función de transferencia del sistema de control

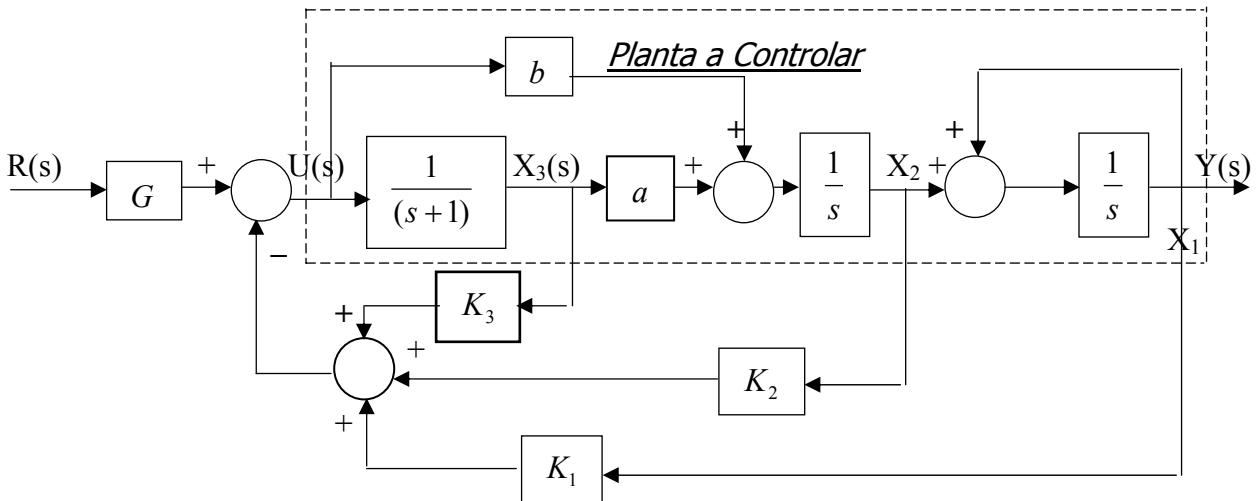
$$\text{diseñado}, M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} .$$

Control Clásico:

- Si $K_2 = 0.375$, $K_3 = 0.125$ y $G = 1.00$, con K_p como el parámetro variable, determinar el rango del mismo para que el sistema sea estable, aplicando el criterio de Nyquist. -
- Si $K_2 = 0.375$, $K_3 = 0.125$, y $G = 1.00$, con K_p como el parámetro variable, bosquejar el lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema. Determinar el valor de K_p , y la configuración de polos del sistema si se sabe que uno de ellos está ubicado en $\lambda_3 = -6$. -
- Si en la *planta a controlar*, $K_p = 24$, diseñar un sistema de control clásico con un controlador serie adecuado y una *realimentación unitaria* para conseguir las *mismas* especificaciones de funcionamiento que se consiguieron con la teoría de control moderno en el punto d). -

Ejercicio Nº 3:

En la figura se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control.



Control Moderno:

- 1) Determinar el modelo matemático en variables de estado *de la planta a controlar*, luego la función de transferencia $G_p(s)$ y por último sus valores característicos. Los mismos son funciones de los parámetros, a y b ?.-
- 2) Determinar en base a $G_p(s)$, las relaciones entre los parámetros a y b que producen una cancelación de polo-cero. De ellas cuales provocan que la planta sea de estado completamente *no controlable*, y cuales de estado completamente *no observable*.-
- 3) Suponiendo que $a = b = 1$. Realimentando los estados, con la señal de control de la forma $u(t) = -K\bar{x}(t) + Gr(t)$, donde $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$, es la matriz de realimentación de los estados y G la ganancia de precompensación. Diseñar el sistema de control propuesto para que se cumplan las especificaciones siguientes:

- Que el error de estado estacionario para entradas escalones sea nulo.-
- Que la sobreelongación para esas mismas entradas no supere el 5%.-
- Que el tiempo de establecimiento al 2% no supere los 4.50 segundos.-
- Que el sistema diseñado no tenga ceros.-

- 4) Que error de estado estable a entradas rampas unitarias resultó?-

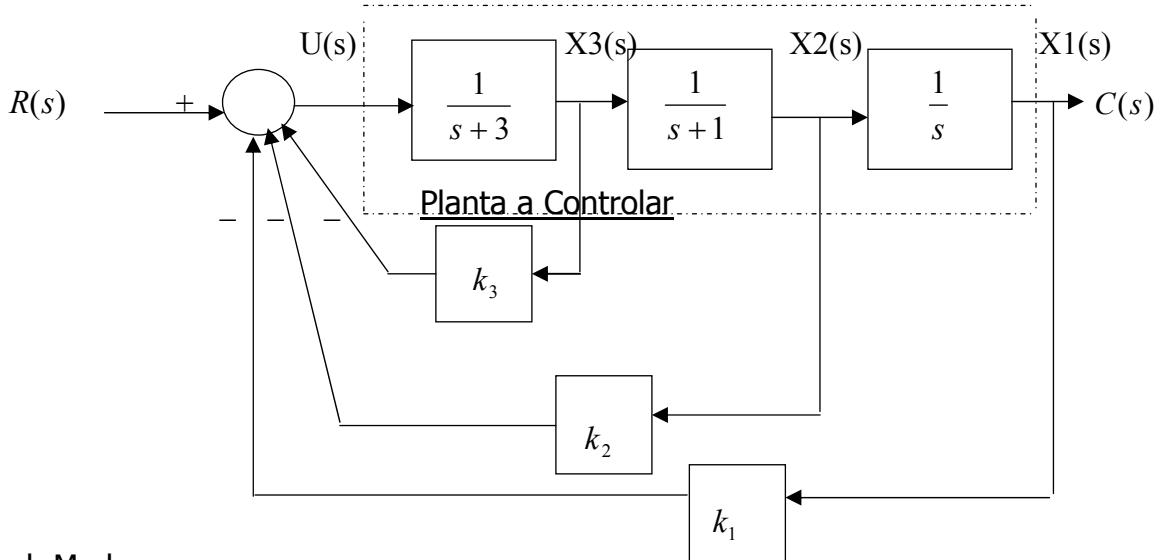
Control Clásico:

- 5) Si $a = b = 1$, determinar la ecuación característica del sistema de control propuesto en función de los parámetros k_1, k_2 y k_3 .- (Reduzca primero, el último lazo).-
- 6) Si $k_3 = 1$, demarcar en el plano $k_1 = f(k_2)$ la región donde el sistema es estable.
- 7) En el sistema de control de la figura, si $k_1 = 5$ y $k_3 = 1$, determinar el rango del parámetro k_2 para que el sistema sea estable aplicando el criterio de Nyquist. En los rangos de inestabilidad del parámetro k_2 obtener la cantidad de polos del sistema en el semiplano derecho del plano s.-
- 8) Con los valores de $k_1 = 5$ y $k_3 = 1$, graficar el lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema diseñado con k_2 como parámetro variable. Si se sabe que el sistema tiene un par de polos complejos conjugados, cuya parte es $\sigma = -1$, determinar la configuración *total* de polos y ceros del sistema como así también el valor correspondiente del parámetro k_2 .-

Ejercicio Nº 4:

Control Moderno:

El diagrama de bloques de un sistema de control mediante la realimentación de los estados *sólo* se muestra en la figura. Las ganancias k_1 , k_2 y k_3 son constantes.



Control Moderno:

- 1) El modelo de estado de la planta a controlar.-
- 2) La función de transferencia de la planta, $G_p(s)$.-
- 3) Encontrar los valores de las ganancias de realimentación para que:
 - a) El error estacionario a entradas escalones, $e_{EE} [e(t), \text{que sea la señal de error}] = 0$.
 - b) Los polos complejos del sistema de control estén ubicadas en: $\lambda_{1-2} = -1 \pm j$.
- 4) Encuentre la tercera raíz. ¿Pueden las tres raíces ser asignadas arbitrariamente, alcanzando aún los requerimientos de estado estable con este simple diseño?-
- 5) Si los polos complejos conjugados del diseño anterior, no resultan *dominantes*, agregar una ganancia de precompensación G y determinar los *nuevos* valores de las ganancias de la matriz de realimentación, para que se consigan las especificaciones siguientes:

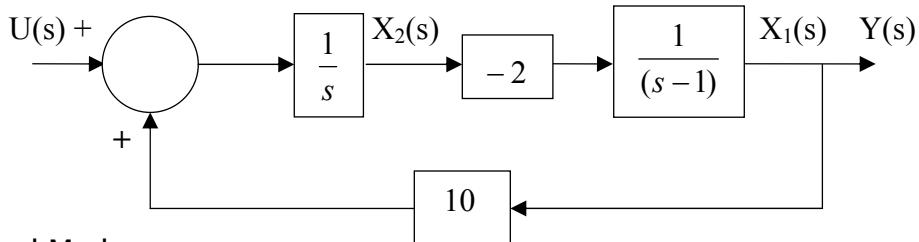
- Que el error de estado estacionario a entradas escalones siga siendo *nulo*.
- Que la sobreelongación de $c(t)$ a entradas escalones sea menor que 5%.-
- Que el tiempo de establecimiento al 2% no supere los 4.50 segundos.
- Que el error estacionario a entradas rampas unitarias no supere a 1.20.-

Control Clásico:

- 6) Si $k_1 = 10$ y $k_2 = 6$, bosquejar el lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema de control con k_3 como parámetro variable. Un polo de la función de transferencia empleada está en -2. Además encontrar la ubicación de los polos complejos conjugados del sistema y el valor de k_3 cuando se sabe que el polo real está situado en $\lambda_3 = -5$.
- 7) Con la teoría del control clásico, diseñar un sistema de control seguidor con realimentación unitaria y un controlador serie adecuado para conseguir por lo menos las primeras tres especificaciones que las logradas con el control moderno, en el punto número 5.-

Ejercicio Nº 5:

Un proceso a controlar está modelado por el siguiente diagrama de bloques:



Control Moderno:

La acción de control $u(t)$ se puede obtener de la entrada $r(t)$ y de la realimentación de los estados, de dos formas: *caso I*): $u(t) = r(t) - k_1x_1(t) - k_2x_2(t)$ o además con un control integral:

Caso II): $u(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) + G \int (r(t) - y(t)) dt$. - Se pide lo siguiente:

- 1) Determinar el modelo matemático del proceso a controlar en el espacio de estado, y establecer si el mismo es *estable*.-
- 2) En caso de ser inestable, ¿se podrá estabilizar el sistema con alguno de los controles propuestos?, ¿por qué?-
(Se conoce que las variables de estado se pueden sentir).-
- 3) En caso de ser afirmativa la respuesta del pto. anterior, determinar para el *caso I*), la región del plano $k_1 = f(k_2)$, en la cual el sistema control sea estable.-
- 4) También para el *caso II*), determinar, en el plano ya mencionado, si $G = -40$, demarcar en el plano $k_1 = f(k_2)$, la región donde el sistema de control es estable.-
- 5) Se desea diseñar un sistema de control, empleando el *caso II*), para que el mismo cumpla con las especificaciones detalladas a continuación:

- Que el error a entradas escalones sea nulo.-
- Que la sobreelongación a esas mismas entradas no supere el 5%.
- Que el tiempo de establecimiento al 5% sea menor o igual a 1.25 seg.
- Que el error de estado estable a entradas rampas unitarias sea igual a 0.60.-

- 6) Cuales resultaron las matrices del sistema diseñado.-

Control Clásico:

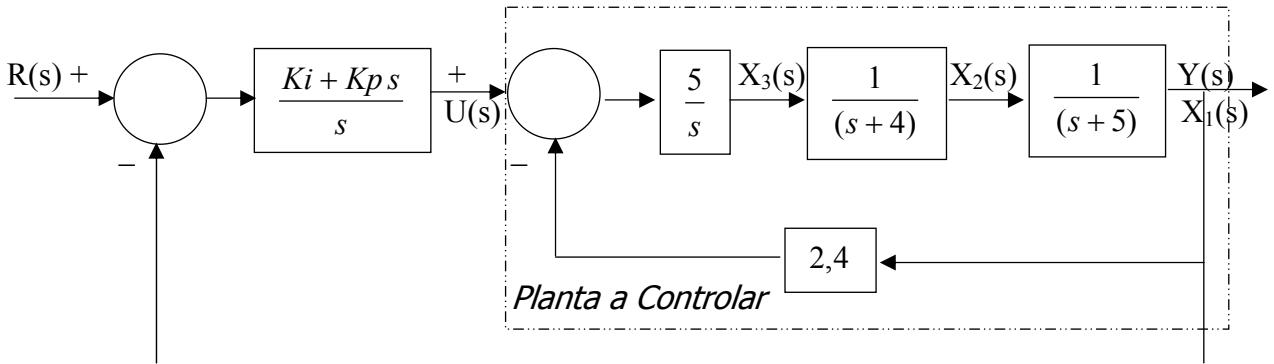
- 7) En el mismo sistema, si $k_1 = -21.5$, y la ganancia del integrador en el camino directo es $G = -40$, determinar aplicando el criterio de Nyquist el rango del parámetro k_2 , para que el sistema sea estable, además determinar la cantidad de polos en el semiplano derecho del plano s en los rangos de inestabilidad del parámetro k_2 .-
- 8) Si $k_1 = -21.5$ y $G = -40$, bosquejar el lugar geométrico completo de las raíces de la ecuación característica del sistema, con k_2 como parámetro variable. Encontrar la ubicación de los polos del sistema, y el valor correspondiente de k_2 , si se sabe que el polo real está en $\lambda_3 = -10$.-

Nota: El denominador de la función de transferencia equivalente empleada es:

$$(s^3 - s^2 + 63s + 80) \cong (s + 1.22)(s^2 - 2.22s + 65.7) .$$

Ejercicio Nº 6:

En la figura siguiente se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador serie PI. La planta es de tercer orden.



Control Moderno:

- 1) Obtener el modelo matemático en variables de estado de la *planta a controlar*.-
- 2) Diseñar un sistema *seguidor tipo 1*, con una ganancia *de precompensación* mas la realimentación de los estados, usando el *modelo del punto anterior*, para que se consiga las especificaciones siguientes:

- Que el error de estado estable a entradas escalones sea nulo.-
- Que el tiempo de establecimiento al 2% sea : $T_E(2\%) \leq 5,50 \text{ seg}$.
- Que la sobreelongación de $c(t)$ al escalón no supere el 17%: $M_p(\%) \leq 17\%.$ –
- Que el error estacionario a entradas rampas unitarias sea menor que 0.825.-

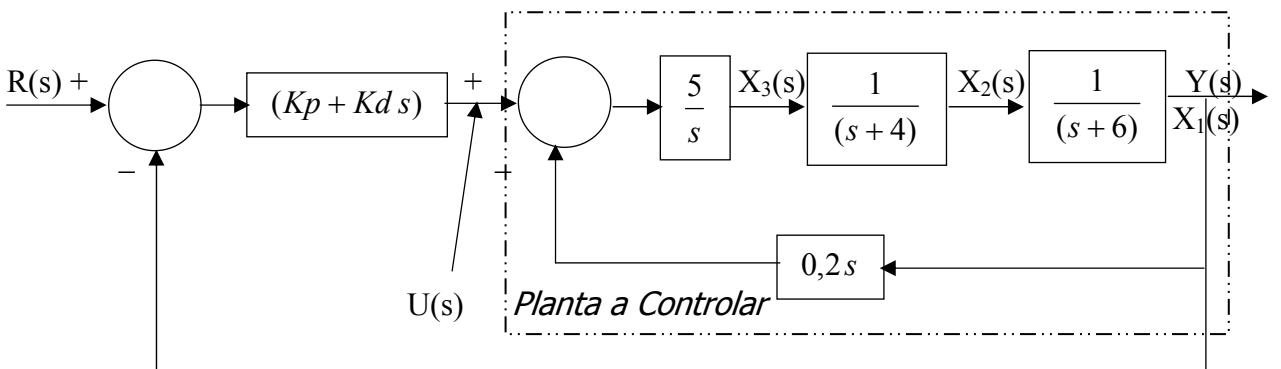
- 3) Cuales son las matrices del modelo del *sistema de control* diseñado.-

Control Clásico:

- 4) Demarcar en el plano $K_i = f(K_p)$ la región para la cual el sistema es estable.-
- 5) Utilizando el resultado del punto anterior determinar los rangos de K_i , o K_p para la estabilidad, si el otro parámetro tiene los valores siguientes: $K_p = 6$ y 15.6 , y además $K_i = 10,20$. –
- 6) Verificar por Nyquist el resultado del punto anterior, si $K_p = 6$, determinando además la cantidad de polos del sistema en el semiplano derecho del plano s en los rangos de inestabilidad del parámetro K_i . -
- 7) Bosquejar el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema con K_i como parámetro variable, ($K_i > 0$) y el valor de $K_p = 6$. Si se sabe que los dos polos reales están situados aproximadamente en $\lambda_3 = -1$ y $\lambda_4 \approx -6,89$. Determinar el valor del parámetro K_i y la ubicación del par de polos complejos conjugados λ_{1-2} . –
- 8) Diseñar un sistema de control, empleando el controlador serie PI indicado en la figura, para que se consiga *los mismos polos complejos conjugados dominantes* del punto 2) en el diseño con el control por realimentación de los estados.
- 9) ¿Que error de estado estable a entradas rampas de pendientes unitarias resultó?-

Ejercicio Nº 7:

En la figura siguiente se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador serie PD. La planta es de tercer orden.



Control Moderno:

- 1) Obtener el modelo matemático en variables de estado de la *planta a controlar*.-
- 2) Diseñar un sistema *seguidor tipo 1*, con una ganancia de precompensación mas la realimentación de los estados, usando el modelo del punto anterior, para que se consigan las especificaciones siguientes:

- Que el error de estado estable a entradas escalones sea nulo.-
- Que el tiempo de establecimiento al 2% sea : $T_E(2\%) \leq 1,80 \text{ seg.}$
- Que la sobreelongación de $c(t)$ al escalón no supere el 5%: $M_p(\%) \leq 5\%.$ -
- Que el error estacionario a entradas rampas unitarias sea menor que 0.50.

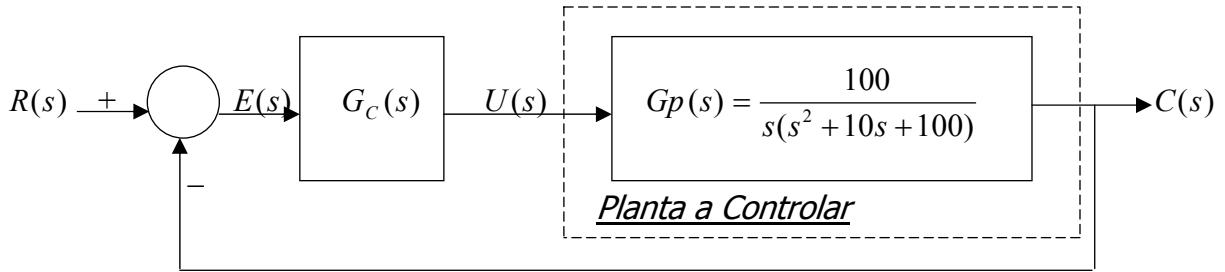
- 3) Cuales son las matrices del modelo del *sistema de control* diseñado.-

Control Clásico:

- 4) Demarcar en el plano $K_d = f(K_p)$ la región para la cual el sistema es estable.-
Suponga que los parámetros del controlador pueden teóricamente ser valores negativos.
- 5) Utilizando el resultado del punto anterior, determinar los rangos de K_d para que el sistema sea estable, si K_p tiene los valores de: $K_p = 5,6$ y $60.$ -
- 6) Verificar con el criterio de Nyquist el resultado del punto anterior, si $K_p = 5,6$ estableciendo además la cantidad de polos del sistema en el o los rangos de inestabilidad de K_d .-
- 7) Graficar un bosquejo del lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema si K_d es el parámetro variable, para $K_p = 5,6.$ Si se sabe que un polo del sistema está ubicado en $\lambda_3 = -8,$ determinar la configuración total de *polos y ceros* del sistema seguidor tipo 1 y el valor correspondiente de K_d .
Nota: $(s^3 + 5s^2 - 14) \cong (s - 1.47)(s + 2.26)(s + 4.21).$ -
- 8) Diseñar un sistema de control, empleando el controlador serie PD indicado en la figura, para que se consiga *la misma posición de los polos complejos conjugados dominantes* del punto 2), en el diseño con el control por realimentación de los estados.
- 9) ¿Que error de estado estable para una entrada rampa de pendiente unitaria resultó?-

Ejercicio Nº 8:

El diagrama de bloques de un sistema de control clásico con un controlador serie, para controlar la planta $G_p(s)$ se muestra en la figura:



Control Clásico:

Si la función de transferencia del sistema de control, (de lazo cerrado), es:

$$M(s) = \frac{K}{(s^2 + 20s + 200)(s - \lambda_3)}, \text{ donde } K \text{ es la ganancia del sistema y } \lambda_3 \text{ el tercer polo}$$

del mismo.

1) Graficar la función, coeficiente de error a entradas rampas en función de λ_3 :

$$Kv = f(\lambda_3).$$

2) ¿Cuál es el valor *teórico máximo* de Kv que se podría obtener? Comente los inconvenientes que pueden surgir al intentar obtener un valor *grande* de Kv . -

3) Diseñar ahora, si es posible, en *forma directa*, un simple controlador *serie de una etapa*, (filtro de segundo orden), para que en el sistema de control resultante se alcancen las especificaciones detalladas a continuación:

- Que el error de estado estable a entradas escalones unitarios sea nulo.
- Que el sistema no tenga ceros.
- Que la sobreelongación de $c(t)$ a entradas escalones no supere el 5%.
- Que el tiempo de establecimiento al 5% de $c(t)$ al escalón unitario no supere el valor de 0.25 seg.
- Se requiere que la constante de error a la rampa unitaria sea $Kv = 9 \text{ seg}^{-1}$.

Determinar la función de transferencia del controlador, $G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$.

Control Moderno:

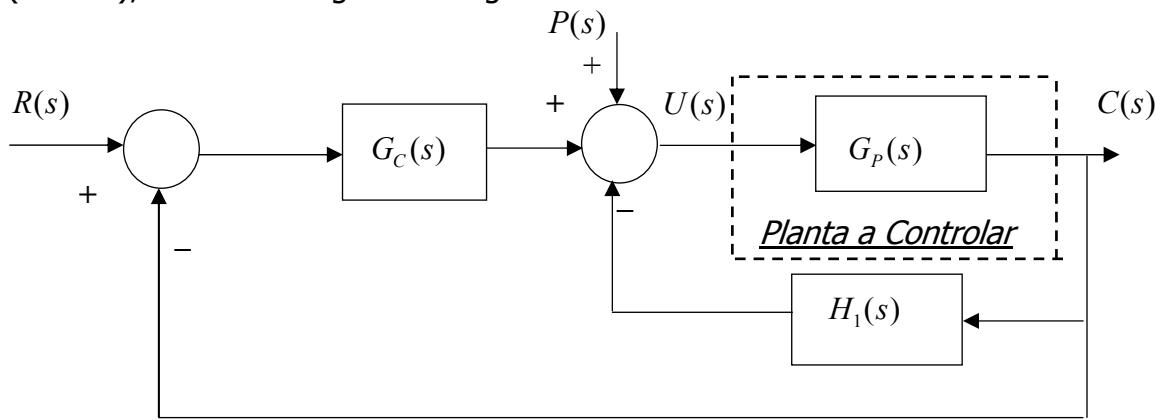
4) Determinar el modelo matemático de la planta en la forma canónica controlable.-

5) Diseñar un sistema de control *seguidor tipo 1*, empleando el modelo del punto anterior, por medio de la realimentación de los estados con una ganancia de precompensación, para que se cumplan *todas las especificaciones* obtenidas con el control clásico del punto 3).-

6) Cuales son las matrices del modelo del *sistema de control* diseñado.-

Ejercicio Nº 9:

Un sistema de control con realimentación unitaria y un control P.I.D. *modificado*, (*I – PD*), tiene la configuración siguiente:



Donde: $G_C(s) = \frac{Ki}{s}$; $G_P(s) = \frac{100}{s(s+2)}$ y $H_1(s) = (Kp + Kd s)$, con: $Kp; Ki$ y $Kd > 0.$ –

Control Clásico:

- 1) Si $Ki = 0.32$, demarcar en el plano, $Kp = f(Kd)$ la región para la cual el sistema es estable.
- 2) Usando el grafico anterior, fijado un parámetro determinar el rango del otro para que el sistema sea estable a saber: a) Si $Kd = 0.055$ y b) Si $Kp = 0.32$ y $Kp = 0.08.$ –
- 3) Verificar el caso a), aplicando el criterio de estabilidad de Nyquist.-
- 4) Si $Ki = 0.32$ y $Kd = 0.055$, graficar el lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema con Kp como parámetro variable.-
- 5) Si se quiere que el polo real y la parte real del par complejos conjugados tengan el *mismo valor*, determinar la ubicación de los tres polos del sistema y la ganancia $Kp.$ –
- 6) Diseñe el controlador P.I.D. *modificado* comentado, para que se cumplan las especificaciones de funcionamiento siguientes:

- Que el sobrepaso máximo a una entrada escalón unitario sea $\leq 5\%.$ –
- Que el tiempo de establecimiento al 2% sea, $t_E \leq 2.25 \text{ seg.}$ –
- Que error estacionario a una entrada rampa unitaria no supere el valor de $0.60.$ –

Control Moderno:

- 7) Determine el modelo matemático de la planta en la forma canónica controlable.-
- 8) Realizar un diseño por realimentación de los estados con un *control integral*, para conseguir las *mismas* especificaciones ya enumeradas para el control clásico

CONTROL II (Elo y Bio)

Tema:

Diseño de Controladores Analógicos
Por Métodos de Espacio de Estado:

Prof. Ing. Carlos F. Martín

Año: 2010

Diseño de Controladores Analógicos por Métodos de Espacio de Estado.

El objetivo de este capítulo es el diseño de sistemas de control usando la realimentación del vector de estado. La técnica de ubicación de polos permite situar los polos del sistema de control, (del sistema de lazo cerrado), en la posición deseada por el diseñador, de modo que su comportamiento se adecue a lo que éste desea.

Se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que el sistema admita que sus polos en lazo cerrado se ubiquen en cualquier posición del plano s , es que la planta a controlar sea *completamente controlable*.

Cuando no es posible sentir o medir todos los estados de la planta para utilizarlos en el vector de realimentación, se estiman los estados necesarios a partir de la información disponible de la planta, la salida $y(t)$, y de la entrada o la acción de control $u(t)$.

Se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que el vector de estado se pueda estimar es que la planta sea *completamente observable*. En el capítulo se aborda tanto el diseño de sistemas sin entrada o con entrada constante (reguladores), como el de sistemas que han de seguir a una señal de referencia (seguidores). Se realizan varios ejemplos en lápiz y papel así como mediante una computadora utilizando MatLab o el Csad.

La última parte del capítulo se dedica al diseño de observadores por medio de la computadora usando el programa svdesign del Csad. Es importante hacer la consideración preliminar que a lo largo de todo este capítulo los modelos de estado serán de sistemas Lineales Invariantes con el Tiempo, esto es, plantas L.T.I.-

Introducción:

La técnica de diseño de controladores mediante la realimentación del estado consiste en realimentar las variables de estado hacia la entrada mediante una matriz de ganancias constantes K . En la figura 6, se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control mediante la realimentación de los estados *solamente*.

En cuanto a la ubicación de los polos del sistema se puede mostrar que un control PD modificado, (P-D), y con una serie P.D., son casos especiales del esquema de control mediante realimentación de los estados.

$$\text{Si se supone que la planta a controlar es: } G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\delta\omega_n)} \quad (18)$$

Descomponiendo en forma directa la función $G_p(s)$ y realimentando *solo* los estados el diagrama de estado de la planta a controlar como se muestra en la figura 7. Aplicando la fórmula de ganancia de Masson, se tendrá:

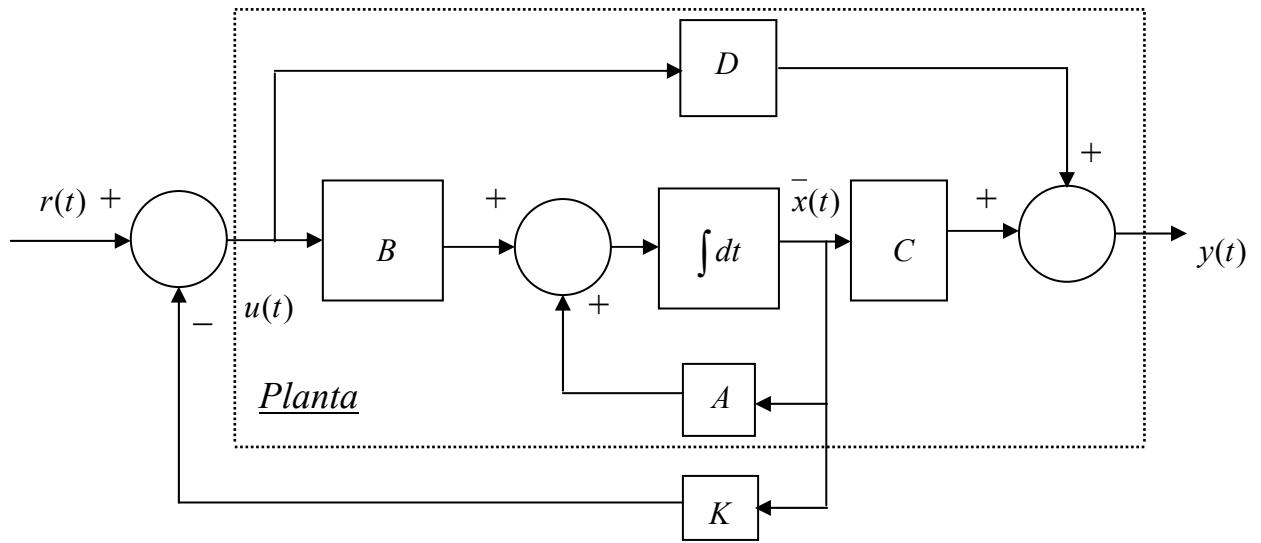


Figura 6

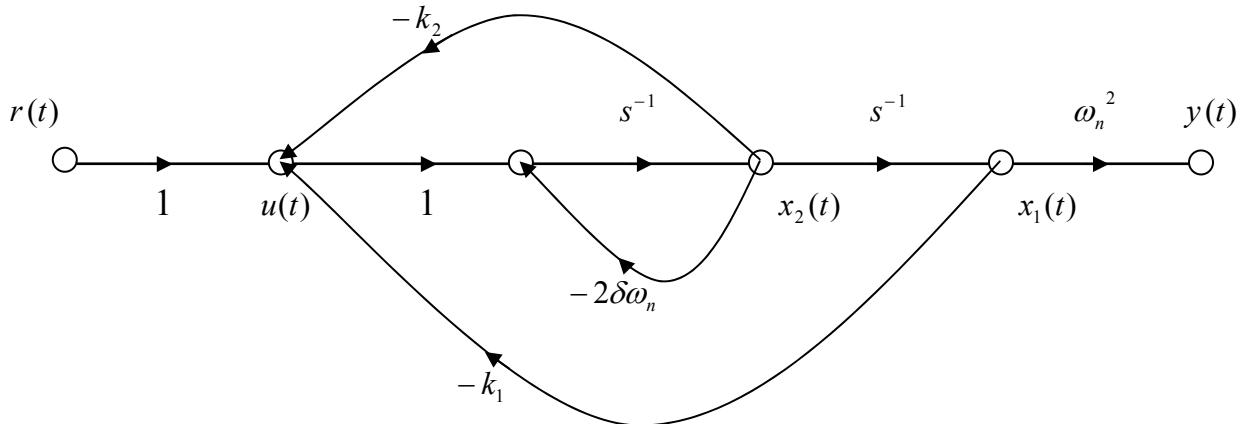


Figura 7

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\delta\omega_n + k_2)s + k_1} \quad (19)$$

Para propósitos de comparación se presentan las funciones de transferencia de los sistemas con un control P-D, con $K_p = 1$, y con un control P.D. serie, como sigue:

Para el control P-D, con $K_p = 1 \rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\delta\omega_n + K_D\omega_n^2)s + \omega_n^2} \quad (20)$

Con un control serie P.D. $\rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(K_p + K_Ds)}{s^2 + (2\delta\omega_n + K_D\omega_n^2)s + \omega_n^2 K_p} \quad (21)$

Por tanto, el control P-D, (con $K_p = 1$), será *equivalente* a la realimentación de los estados si: $K_1 = \omega_n^2$ y $K_2 = K_D \cdot \omega_n^2$.- (22)

Para el control P.D., al comparar las ecuaciones (19) y (21) se observa que la ecuación característica del sistema con realimentación del estado sería idéntica a la del sistema con el control P.D., si: $K_1 = \omega_n^2 \cdot K_p$ y $K_2 = K_D \omega_n^2$.-

Sin embargo, los numeradores de las dos funciones de transferencia son diferentes. En el control PD el sistema tendrá un cero en $(-K_p/K_D)$, y con la realimentación de los estados no lo tendrá.-

Se debe enfatizar que las comparaciones realizadas anteriormente son solo para plantas de *segundo orden*. Para sistemas de orden mayor, el control P.D. y el control P-D son equivalentes a realimentar solo las variables de estado x_1 y x_2 , pero en el control por realimentación del estado se pueden realimentar *todos* los estados (x_1, x_2, \dots, x_n). Como se sabe el control P.I. incrementa el orden del sistema en uno, no puede ser equivalente a la realimentación de estado a través solo de *ganancias constantes* solamente. Mas adelante, se verá que si se combina la realimentación del estado con el *control integral* se puede realizar el control P.I. en el sentido del control mediante la realimentación del estado.

Los sistemas con la señal de referencia constante, o sea con variación nula en la entrada, ($\Delta r(t) = 0$), en adelante $r(t)=0$, se conocen por lo común con el nombre de *Reguladores*. En lugar de indicar $\Delta r(t)$ se designara en lo que sigue como $r(t)$. Cuando $r(t) = 0$, el objetivo del control es llevar el sistema desde cualquier condición inicial del vector de estado, provocado por alguna perturbación, a cero, (*o sea a su valor nominal*), en alguna forma predeterminada, por ejemplo, tan rápido como sea posible.

Cuando se dice a cero, es llevar el vector de estado a su valor nominal de funcionamiento estable, o sea con una desviación nula de la señal de referencia nominal. El diseño consistiría en predeterminar la evolución de la solución homogénea del sistema para una condición inicial del vector de estado $\bar{x}(0)$, con $r(t) = 0$.

Diseño de Controladores Analógicos por Diferentes Métodos en el Espacio de Estado.

Cuando el lugar geométrico de las raíces se emplea para diseñar sistemas de control, el enfoque general se puede describir como *ubicación de polos*, aquí los polos son los de la función de transferencia en lazo cerrado, que también son las raíces de la ecuación característica del sistema. Al conocer la relación entre los polos y ceros en lazo cerrado y el desempeño del sistema, se puede realizar el diseño al especificar la ubicación de los primeros. Los métodos de diseño clásicos ya estudiados, estaban caracterizados por la propiedad donde los polos se seleccionan basados en que es lo que se puede alcanzar con la configuración de control fija y los límites físicos de los parámetros del controlador.

Una pregunta natural será:

¿Bajo qué condición los polos pueden ser colocados en forma arbitraria?
Esta es una filosofía nueva de diseño que en apariencia solo se puede

alcanzar bajo ciertas condiciones. Cuando se tiene un proceso controlado de tercer orden o mayor, los controladores clásicos P.D., P.I., de atraso o adelanto de fase de una etapa, (con K_{oc} ajustado para que cumpla el requerimiento de error de estado estable), no son capaces de controlar en forma independiente *todos los polos del sistema* de control, ya que solo hay dos parámetros independientes en cada uno de los controladores (pues se tendrán 3 o mas ecuaciones con dos incógnitas).

Diseño de Sistemas de Control del Tipo Reguladores.

La realimentación de estado permite el diseño de sistemas de control vía la ubicación o asignación de polos. Esto es, los polos del sistema de lazo cerrado se ubican en la posición deseada por el diseñador, de modo que las condiciones transitorias sean llevadas a cero de forma preestablecida, en primer lugar se va a considerar el diseño de sistemas de control tipo *regulador*. Esto es, en el diseño se asumirá que el sistema no tiene entrada de referencia (ver figura 8), o mejor, si la tiene pero no varía como se dijo.

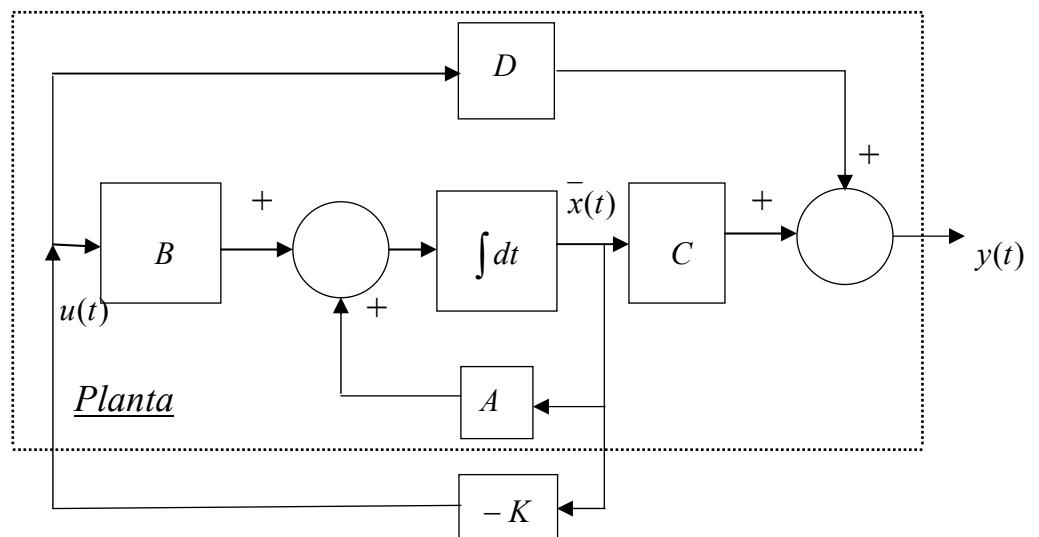


Figura 8

El objetivo de control es: que dado un sistema en ciertas condiciones de funcionamiento, se desea mantenerlo en ellas, de modo que las posibles perturbaciones a las que se ve sometido no deben sacarlo de regulación (el error que puedan ocasionar las perturbaciones ha de ser llevado a cero en tiempo y forma razonable).

Supongamos que la planta a controlar tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{(t)} &= \bar{A}\bar{x}_{(t)} + \bar{B}u_{(t)} \\ y_{(t)} &= \bar{C}\bar{x}_{(t)} + \bar{D}u_{(t)} \end{aligned} \quad (23) \quad \text{Lazo abierto}$$

Para estos sistemas la ecuación de control será:

$$u_{(t)} = -K \bar{x}_{(t)} \quad (24)$$

Donde K es la matriz de realimentación de los estados. Las matrices C y D no intervienen a la hora de ubicar los polos.

Las ecuaciones del sistema de lazo cerrado serán:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{(t)} &= A\bar{x}_{(t)} + B.(-K.\bar{x}_{(t)}) = (A - B.K).\bar{x}_{(t)} \\ \bar{y}_{(t)} &= C\bar{x}_{(t)} + D.(-K.\bar{x}_{(t)}) = (C - D.K).\bar{x}_{(t)} \end{aligned} \quad (25)$$

Por lo tanto:

$$A_c = (A - B.K) \text{ y } C_c = (C - D.K)$$

Serán las matrices del sistema de lazo cerrado, o del sistema de control.

Como se sabe la solución de la ecuación de estado (25) es:

$$\bar{x}_{(t)} = e^{A_c t} \bar{x}_{(0)} \quad (26)$$

En donde $\bar{x}_{(0)}$ es el estado inicial provocado por las perturbaciones. Las características de las respuestas transitorias $\bar{x}_{h(t)}$; $\bar{y}_{h(t)}$ están impuestas por los valores característicos de la matriz $A_c = (A - B.K)$.

Si se elige la misma en forma correcta, (por una elección adecuada de los elementos de la matriz K), es posible hacer que $\bar{x}_{h(t)}$ tienda a cero, conforme t tiende a infinito.

Los valores característicos de $(A - B.K)$ se llaman *polos reguladores*. Se puede demostrar que la ubicación arbitraria de los mismos es posible si y solo si la planta es de estado completamente controlable.

Veremos tres formas analíticas alternativas de determinar K.

1.- Solución Directa:

Sean las posiciones de los polos deseados: $s = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ con lo cual la ecuación característica del sistema de lazo cerrado será:

$$|s.I - A + B.K| = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_2.s^2 + \alpha_1.s + \alpha_0 = 0$$

En esta ecuación hay n incógnitas, k_1, k_2, \dots, k_n y n coeficientes conocidos $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_1$ y α_0 , en la parte derecha de la igualdad. Para calcular las ganancias desconocidas basta con igualar los coeficientes de igual potencia en s . Ciertamente, esta forma de calcular la matriz K , si bien es intuitiva y directa, es bastante tediosa cuando el orden n es elevado. No obstante, como se verá, esto no tiene mucha importancia ya que Matlab tiene implementado algoritmos que resuelven este problema de forma automática. Pero con este método no queda claro el *rol que juega la controlabilidad*, en los métodos siguientes si, como se verá a continuación.

2.- Teorema: (asignación de valores característicos)

Si el modelo original de la planta es de estado completamente controlable, entonces mediante la realimentación de estados $u_{(t)} = -K.\bar{x}_{(t)}$, donde K , si $p=1$, es un vector real con elementos constantes de $(1 \times n)$, los valores característicos de $(A - B.K)$ pueden ser asignados arbitrariamente, siempre que los valores característicos *complejos se asigne en pares conjugados*.

Demostración:

Si las ecuaciones de la planta a controlar son, si la matriz $D=0$:

$$\dot{\bar{x}}_{(t)} = A\bar{x}_{(t)} + Bu_{(t)}$$

$$y_{(t)} = C\bar{x}_{(t)}$$

Como la misma es controlable, se puede llevar a la FCC mediante la matriz de transformación $P = S.M$, donde:

$$S = [B \quad A.B \quad A^2.B \quad \dots \quad A^{n-1}.B]$$

y

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Donde los a_i son los coeficientes de la ecuación característica de la planta.

Llamaremos \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} a las nuevas matrices en la FCC, donde:

$$\hat{A} = P^{-1}.A.P ; \quad \hat{B} = P^{-1}.B \quad y \quad \hat{C} = C.P$$

Puede verse también que la matriz de controlabilidad en la FCC, (que llamaremos \hat{S}) será:

$$\hat{S} = [\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \dots \quad \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = [P^{-1}.B \quad P^{-1}.A.P.P^{-1}.B \quad \dots \quad P^{-1}.A^{n-1}.B]$$

Por lo tanto

$$\hat{S} = P^{-1} \begin{bmatrix} B & A.B & \dots & A^{n-1}.B \end{bmatrix} \rightarrow \hat{S} = P^{-1}.S$$

También se puede ver que:

$$\hat{S} = (S.M)^{-1}.S = M^{-1}.S^{-1}.S = M^{-1}.I \rightarrow \hat{S} = M^{-1}$$

Sustituyendo $\bar{x}_{(t)} = P\hat{x}(t)$ en $u_{(t)}$ nos queda:

$$u_{(t)} = -K.\bar{x}_{(t)} = -K.P\hat{x}(t) = -\hat{K}\hat{x}(t) \quad \text{con} \quad \hat{K} = K.P$$

Como $\hat{A} - \hat{B}\hat{K} = P^{-1}.(A - B.K).P$, se puede ver que $(A - B.K)$ y $(\hat{A} - \hat{B}\hat{K})$ tienen los mismos autovalores (como ya se sabe).

Ahora, de cualquier conjunto de n autovalores requeridos podemos formar el polinomio característico deseado:

$$\Delta_c(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_2.s^2 + \alpha_1.s + \alpha_0 \quad (*)$$

Por lo tanto como: $|sI - A + B.K| \equiv |sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}|$ se tendrá:

$$sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \hat{k}_1 & \hat{k}_2 & \dots & \dots & \hat{k}_n \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & s & -1 \\ (a_0 + \hat{k}_1) & (a_1 + \hat{k}_2) & \dots & \dots & (s + a_{n-1} + \hat{k}_n) \end{bmatrix}$$

Resolviendo el determinante queda:

$$s^n + \left(a_{n-1} + \hat{k}_n\right)s^{n-1} + \left(a_{n-2} + \hat{k}_{n-1}\right)s^{n-2} + \dots + \left(a_1 + \hat{k}_2\right)s + \left(a_0 + \hat{k}_1\right) = 0$$

Que deberá ser igual a la ecuación (*). Igualando los coeficientes de iguales potencias, se tendrá:

$$a_{n-1} + \hat{k}_n = \alpha_{n-1} \rightarrow \hat{k}_n = (\alpha_{n-1} - a_{n-1})$$

$$a_{n-2} + \hat{k}_{n-1} = \alpha_{n-2} \rightarrow \hat{k}_{n-1} = (\alpha_{n-2} - a_{n-2})$$

.....

.....

$$a_1 + \hat{k}_2 = \alpha_1 \rightarrow \hat{k}_2 = (\alpha_1 - a_1)$$

$$a_0 + \hat{k}_1 = \alpha_0 \rightarrow \hat{k}_1 = (\alpha_0 - a_0)$$

Como $\hat{K} = KP$ y $\hat{K} = [\hat{k}_1 \hat{k}_2 \dots \hat{k}_n]$:

$$K = \hat{K}P^{-1} = [(\alpha_0 - a_0)(\alpha_1 - a_1) \dots (\alpha_{n-1} - a_{n-1})]P^{-1}$$

Finalmente como $P = S M$

$$P^{-1} = (SM)^{-1} = M^{-1}S^{-1}$$

Y también como $\hat{S} = M^{-1}$ se tendrá finalmente:

$$K = [(\alpha_0 - a_0)(\alpha_1 - a_1) \cdots (\alpha_{n-1} - a_{n-1})] \hat{S} S^{-1} = \hat{K} \hat{S} S^{-1}$$

Por lo tanto si la planta es de estado completamente controlable, (Determinante de S distinto de cero), todos los valores característicos se ubican arbitrariamente, seleccionando la matriz K , de acuerdo con la última ecuación.

Hemos demostrado que la condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de los polos, es que la planta sea de estado completamente controlable, pues así existirá la inversa matriz (S^{-1}).

Este teorema nos da el segundo método para seleccionar la matriz K :

Recordando: $K = \hat{K} \hat{S} S^{-1}$ donde:

S : Matriz de la controlabilidad con las variables de estado originales

\hat{S} : Matriz de la controlabilidad con las variables de estado en la F.C.C.

\hat{K} : Matriz de la realimentación de los estados con las variables de estado en la Forma Canónica Controlable.

K : Matriz de la realimentación de los estados buscada, o sea, cuando las variables están en la forma original.

Resumen de los pasos para calcular K:

1) Obtener los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_{n-1} del polinomio característico del sistema en lazo abierto, (de la planta a controlar).

2) Formar las matrices de la controlabilidad S y \hat{S} :

$$S = [B : AB : A^2B : \cdots : A^{n-1}B]$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

3) Elegir los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ del polinomio característico deseado y determinar la matriz de realimentación en las coordenadas de la F.C.C.

$$\hat{K} = [(\alpha_0 - a_0) \ (\alpha_1 - a_1) \ \cdots \ (\alpha_{n-1} - a_{n-1})]$$

4) Determinar la matriz de realimentación en las coordenadas originales

$$K = \hat{K} \hat{S} S^{-1} \quad (29)$$

Recordar que la realimentación de los estados puede mover solo los polos de $G_p(s)$, pero no tiene ningún efecto sobre los ceros de la misma.

Un tercer método para determinar K es usando la fórmula de Ackerman.

3.-Fórmula de Ackerman:

La ecuación característica deseada es:

$$|SI - Ac| = |SI - A + BK| = (S - \lambda_1) \cdots (S - \lambda_n) = S^n + \alpha_{n-1}S^{n-1} + \cdots + \alpha_1S + \alpha_0 = 0$$

El teorema de Cayley-Hamilton plantea que Ac satisface a la ecuación característica, o sea:

$$\phi(A_c) = A_c^n + \alpha_{n-1}A_c^{n-1} + \cdots + \alpha_1A_c + \alpha_0I = [0]_{nxn}$$

Para simplificar, se supondrá $n = 2$, (para n mayor que 2 se puede extender el razonamiento siguiente)

Consideramos las igualdades siguientes:

$$I = I$$

$$A_c = A - BK$$

$$A_c^2 = (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BKA - B^2K^2 = A^2 - ABK - BK(A - BK) = A^2 - ABK - BKA_c$$

Multiplicando las ecuaciones anteriores por α_0 , α_1 y 1 respectivamente y arreglando el resultado se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha_0I + \alpha_1A_c + A_c^2 &= \alpha_0I + \alpha_1(A - BK) + A^2 - ABK - BKA_c \\ &= (\alpha_0I + \alpha_1A + A^2) - \alpha_1(BK) - ABK - BKA_c \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\alpha_0I + \alpha_1A_c + A_c^2 = \phi_{(A_c)} = [0]_{nxn}$$

$$\alpha_0I + \alpha_1A + A^2 = \phi_{(A)} \neq [0]_{nxn}$$

Asimismo será:

$$\phi_{(A_c)} = \phi_{(A)} - \alpha_1BK - ABK - BKA_c ; \text{ dado que } \phi_{(A_c)} = [0]_{nxn} \text{ se obtiene:}$$

$$\phi_{(A)} = \alpha_1BK + BKA_c + ABK$$

$$\phi_{(A)} = B(\alpha_1K + KA_c) + (AB)(K)$$

Si esto lo colocamos en forma matricial, (usando el concepto de particiones de las mismas), se obtiene la siguiente expresión:

$$\phi_{(A)} = [B : AB] \begin{bmatrix} \alpha_1K + KA_c \\ K \end{bmatrix} \quad (*)$$

Como la planta es controlable, la inversa de la matriz de controlabilidad existe, o sea:

$$S^{-1} = [B : AB]^{-1}$$

Premultiplicando ambos miembros de la ecuación (*) por S^{-1} , se obtiene:

$$[B : AB]^{-1} \phi_{(A)} = \begin{bmatrix} \alpha_1K + KA_c \\ K \end{bmatrix}$$

Premultiplicando ahora ambos miembros por $[0 \ 1]$ se tendrá:

$$[0 \ 1][B : AB]^{-1} \phi_{(A)} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_1K + KA_c \\ K \end{bmatrix} = K$$

que puede colocarse en general:

$$K = [0 \ 0 \ \cdots \ 1] S^{-1} \phi_{(A)}$$

Donde:

$$\phi_{(A)} = \alpha_0I + \alpha_1A + \alpha_2A^2 + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + A^n$$

Por lo tanto K será la última fila de la matriz $S^{-1} \times \phi(A)$. –

Este método puede llegar ser incluso más tedioso que el descrito para cálculos analíticos, sin embargo, su desarrollo completamente matricial permite diseñar algoritmos para su implementación mediante programas de computación, por ejemplo,
 $>>K = \text{Acker}(A,B,P)$ en Matlab.

Veremos un ejemplo, por los tres métodos. Una planta tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Obtener la matriz K para que $\lambda_{1-2} = -1$ y $\lambda_3 = -4$

Primer Método: Se verifico que la planta es controlable, Rango (S)=3.-

La ecuación característica será:

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \right| = \\ &= (s^3 + (2 + K_2 + K_3)s^2 + (2 + K_1 + K_3)s + (1 + K_3)) = 0 \end{aligned}$$

y también, con los polos deseados será:

$$(s+1)^2(s+4) = s^3 + 6s^2 + 9s + 4 = 0$$

Donde:

$$1 + K_3 = 4 \rightarrow K_3 = 3$$

$$2 + K_1 + K_3 = 5 + K_1 = 9 \rightarrow K_1 = 4$$

$$2 + K_2 + K_3 = 5 + K_2 = 6 \rightarrow K_2 = 1$$

De donde la matriz de realimentación de los estados es:

$$K = [4 \ 1 \ 3]$$

Utilizando Matlab

$\gg \text{syms k1 k2 k3}$

$\gg [k1,k2,k3]=\text{solve}'1+k3=4',2+k1+k3=9',2+k2+k3=6')$

$k1 =$

4

$k2 =$

1

$k3 =$

3

O con la función Gauss, (agregada al Csad para Matlab): este programa aplica el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

$>>\text{Gauss}$

Ingresé matriz de coeficientes: [0 0 1; 1 0 1; 0 1 1]

Ingresé la matriz de términos independientes: [3; 7; 4]

El sistema tiene solución única

ans =

4
1
3

Segundo Método:

$$1) |sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 1 & s+1 & 1 \\ 0 & 0 & s+1 \end{vmatrix} = s(s+1)^2 + (s+1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0$$

Donde:

$$a_0 = 1; a_1 = 2; a_3 = 2$$

$$S = [B : AB : A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2) \hat{S} = M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3) |sI - A_c| = |sI - A + BK| = (s+1)^2(s+4) = s^3 + 6s^2 + 9s + 4 = 0$$

Donde: $\alpha_0 = 4; \alpha_1 = 9; \alpha_2 = 6$

por lo que:

$$\hat{K} = [\alpha_0 - a_0 : \alpha_1 - a_1 : \alpha_2 - a_2] = [4 - 1 : 9 - 2 : 6 - 2] = [3 \ 7 \ 4]$$

$$4) K = \hat{K} \hat{S} S^{-1} = [3 \ 7 \ 4] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [4 \ 1 \ 3]$$

Tercer método: (Formula de Ackerman)

$$\phi_{(A)} = 4.I + 9.A + 6A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [4 \ 1 \ 3]$$

Todo esto se puede hacer usando Matlab, o con algún programa para tal fin, por ejemplo con *svdesign* del Csad/Matlab con la opción del menú principal *state feedback*.

Nota: Para esta planta $G_{p(S)} = \frac{(s+1)^2}{(s+1)(s^2+s+1)}$; al tener cancelación, esta

planta deberá ser no observable, ya que si es controlable.
O sea:

$$\text{Rango } (V) = \text{Rango} \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \end{bmatrix} = \text{Rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \neq 3$$

$$\text{Rango } (V) = 2 \neq 3$$

Veamos los tres métodos usando Matlab y operaciones simples con matrices:

Primer Método

```

» A=[0 1 0;-1 -1 -1;0 0 -1];
» B=[0;1;1];
» I=eye(3);
» syms s k1 k2 k3
» K=[k1 k2 k3];
» EC=det((s*I-A)+(B*K))
EC =
s^3+2*s^2+s^2*k3+2*s+s*k3+k2*s^2+1+k3+k1*s
» % Ordenando: s^3+(2+k2+k3)*s^2+(2+k1+k3)*s+(1+k3)=0
» % Por lo tanto: a0=1+k3 a1=2+k1+k3 a2=2+k2+k3
» % Se calculan los coeficientes ai;
» aa=poly([-1 0 0;0 -1 0;0 0 -4])
aa =
    1   6   9   4
» % O también así:
» aa=pmake(-1,-1,-4)
aa =
    1   6   9   4
» % Por lo tanto: a0=4 a1=9 y a2=6
» % Los elementos de la matriz K=[k1 k2 k3], se pueden calcular así:
» [k1,k2,k3]=solve('1+k3=4','2+k1+k3=9','2+k2+k3=6')
k1 =
4
k2 =
1
k3 =
3
» % Por ende la matriz buscada será:
K = [4 1 3]
```

Segundo Método

```
» A=[0 1 0;-1 -1 -1;0 0 -1];
```

```

» B=[0;1;1];
» % Defina la matriz de controlabilidad S:
» S=[B A*B A^2*B];
» %Verifique el rango de la misma:
» R=rank(S)
R =
    3
» % Dado que el rango de S es 3, la solución existe.
» % Obtenga los coeficientes del polinomio característico de la planta, con
el comando Poly(A)
» EC=poly(A)
EC =
    1.0000  2.0000  2.0000  1.0000
» a0=EC(4);a1=EC(3);a2=EC(2);
» % Defina las matrices M y P.
» M=[a1 a2 1;a2 1 0;1 0 0];
» P=S*M;
» % Obtenga los coeficientes del polinomio característico deseado, ya sea
con la matriz Ad y el comando poly(Ad), o con pmake.
» aa=poly([-1 0 0;0 -1 0;0 0 -4])
aa =
    1   6   9   4
» % O con:
» aa=pmake(-1,-1,-4)
aa =
    1   6   9   4
» aa0=aa(4);aa1=aa(3);aa2=aa(2);
» % La matriz K será:
» K=[aa0-a0 aa1-a1 aa2-a2]*inv(P)
K =
    4   1   3
También se puede usar el comando place(A, B, p), donde p = vector de la
posición deseada de los polos, los mismos no deberán tener un orden de
multiplicidad mayor que el rango de la matriz B o el número de entradas,
por eso no se puede usar para este ejemplo pues el rango de B es uno.
» p=[-1;-1;-4];
» place(A,B,p)
??? Error using ==> place
Can't place poles with multiplicity greater than rank(B).

```

Tercer Método: (Fórmula de Ackerman)

» % Introducir las matrices A y B

```

» A=[0 1 0;-1 -1 -1;0 0 -1];
» B=[0;1;1];
» % Determine la matriz de controlabilidad
» S=[B A*B A^2*B];
» % Verifique su Rango
» R=rank(S)
R =
    3
» % Dado que el rango es 3, la solución existe
» % Obtenga los coeficientes del polinomio característico deseado, con la
matriz diagonal correspondiente y el comando poly(Ad), o con la función
pmake del Csad/MatLab
» Ad=[-1 0 0;0 -1 0;0 0 -4];
» aa=poly(Ad)
aa =
    1   6   9   4
» % Calcule la matriz  $\phi_{(A)}$  con el comando polyvalm(aa,A).
» Pc=polyvalm(aa,A);
» % Determine la matriz K de la realimentación de los estados.
» K=[0 0 1]*inv(S)*Pc
K =
    4   1   3
» % Todo esto está resumido en el comando ACKER(A,B,P), en donde P es
el vector de los valores propios deseados y A y B las matrices de la planta
» P=[-1;-1;-4];
» K=acker(A,B,P)
K =
    4   1   3
>>%Todo esta resumido en el comando ACKER(A, B, P), donde P es el
vector de los valores propios de deseados, y A y B las matrices de la
planta.
>> P=[-1;-1;-4];
>> K=ACKER(A,B,P)
K=
    4   1   3

```

Ejercicio N°1:

Usando la función *Svdesign* del Csad/Matlab.

Una planta a controlar tiene las siguientes matrices en su modelo matemático, como se puede ver está en la F.C.C.:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.6 \end{bmatrix} \quad D = 0.1$$

De donde:

$$G_p(s) = \frac{0.1(s^2 + 12s + 20)}{s^2 + 6s + 5} \rightarrow G_p(s) = \frac{0.1(s+2)(s+10)}{(s+1)(s+5)}$$

Diseñar un sistema regulador por medio de la realimentación de los estados para que los polos del sistema en lazo cerrado estén ubicados en:

$$\lambda_1 = -1 \quad y \quad \lambda_2 = -4$$

Al llamar al programa, Svdesign del Csad, el mismo pregunta si se ingresa la función de transferencia de la planta, (n y d) o las matrices del modelo en variables de estado de la misma. Si se elige esta última se ingresa el orden y las matrices. Luego eligiendo la opción: *STATE FEEDBACK*, el programa pide la ubicación deseada de los polos reguladores, luego brinda información como: las matrices K , Ac y Cc .

Para sistemas reguladores no interesan las matrices Bc y Dc , pues no hay señal de referencia en la entrada.

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > s

Enter vector of 2 desired pole locations > [-1 -4]

State Feedback Vector K is:

-1 -1

Pole Locations

Desired -- Achieved

-4 -4

-1 -1

A-BK is:

0 1

-4 -5

DC System Gains:

Without feedback 0.4

With state feedback 0.475

Update current state variable matrices? (y/n) [y] >

State feedback is: $u = -Kx + Gr$ (solo para sistemas seguidores)

Enter desired value for G [2.105] > (solo para sistemas seguidores)

Si se desea graficar las respuestas homogéneas $y(t)$ y $x(t)$ para un estado inicial determinado se procede como se indicará oportunamente en la publicación: *Respuestas Temporales*, de la Cátedra.

(Soluciones homogéneas). Si $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$:

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > R

- SVPLOT OPTIONS -

Plot	Stimulus
X Resp	Final time
Zoom	New A,B,C,D
Grid	Display Sys
Hold	Attributes
Label	Eigenvalues
	View data
Quit	Interpolate

SVPLOT > S

Stimulus: Step,Impulse,Ramp,Zero-input [s] > Z

Enter I.C. vector (1x2) > [0.2 0.5]

Initial condition vector is:

0.2000

0.5000

SVPLOT >p grafica y(t)

SVPLOT >H

Current plot held

SVPLOT >x

Enter state to plot :1 to 2 > 1 grafica x1(t)

SVPLOT >x

Enter state to plot :1 to 2 > 2 grafica x2(t)

Esto se aprecia en la figura 9:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow |S| = -1 \quad \text{Controlable.-}$$

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.6 \\ -3 & -2.1 \end{bmatrix} \rightarrow |V| = -1.35 \quad \text{Observable.-}$$

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \quad y$$

$$Cc = [1.6 \quad 0.7]$$

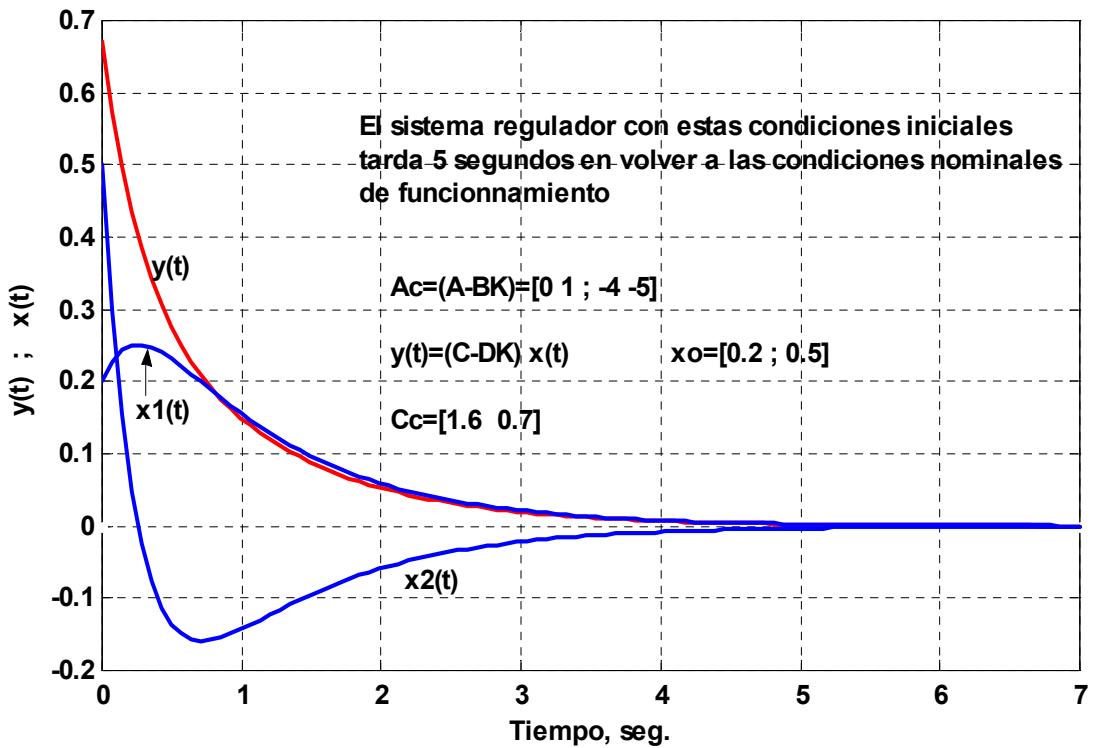


Figura: 9

Formulas Útiles para Sistemas Prototipos de Segundo Orden.
Expresiones que serán de gran ayuda para seleccionar los polos del sistema de control, si los mismos son complejos conjugados dominantes.

δ : Factor de Amortiguamiento Relativo.-

$\sigma := -\delta\omega_n$: Parte Real del par de Polos Complejos del Sistema.

$\lambda_{1-2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$: Polos Complejos Conjugados.-

$Mp(\%) = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$: Sobrelongación Porcentual al Escalón de Entrada.-

$\delta \geq \sqrt{\frac{(\ln Mp_u)^2}{\pi^2 + (\ln Mp_u)^2}}$: Coef. de Amort. Mínimo para un Mp por unidad dado.-

$t_{máx} = \frac{\pi}{\omega d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$: Tiempo de pico para la Salida.-

$$t_{demora} = \frac{1.1 + 0.125\delta + 0.47\delta^2}{\omega_n} \quad (0 < \delta < 1) : Tiempo de Demora.-$$

$$t_{Subida} \cong \frac{1 - 0.416\delta + 2.91\delta^2}{\omega_n} \quad (0 < \delta < 1) : Tiempo de Subida.-$$

$$t_E(5\%) \cong \frac{3.2}{\delta \omega_n} \text{ si } \delta < 0.69. : Tiempo de Establecimiento al (5%).-$$

$$t_E(5\%) \cong \frac{4.5\delta}{\omega_n} = \frac{4.5\delta^2}{|\sigma|} \quad \text{si } \delta > 0.69. : Tiempo de Establecimiento al (5%).$$

$$t_E(2\%) \cong \frac{4}{\delta \omega_n} = \frac{4}{|\sigma|} \quad \text{si } \delta < 0.78. : Tiempo de Establecimiento al (2%).-$$

Para un Sistema de Primer Orden, Tenemos que:

$$t_E(5\%) \cong \frac{3}{|\sigma|} : Tiempo de Establecimiento al (5%).-$$

$$t_E(2\%) \cong \frac{4}{|\sigma|} : Tiempo de Establecimiento al (2%).-$$

Ejercicio N° 2:

El modelo linealizado, en un punto de operación, del sistema de suspensión magnética de una bola de acero, como se muestra en la figura 10, se obtiene de la manera siguiente.

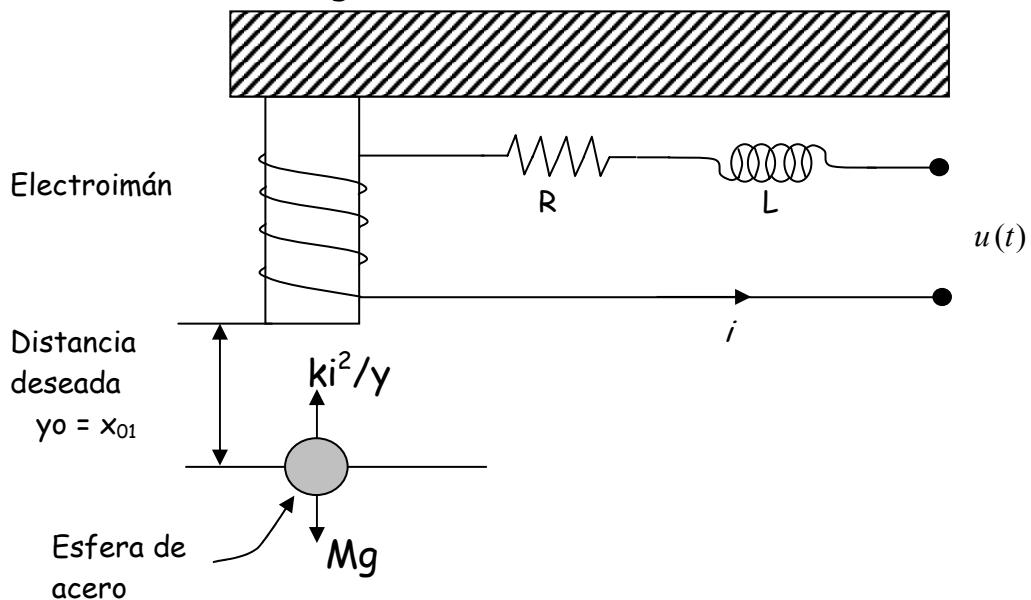


Figura 10

El objetivo del sistema es controlar la posición de la esfera de acero suspendida en un punto de equilibrio nominal mediante el ajuste de la corriente en el electroimán a través de la tensión de entrada $u(t)$. La aplicación práctica de este sistema es la levitación magnética de trenes o de cojinetes magnéticos en sistemas de control de alta precisión. Las ecuaciones diferenciales de la planta a controlar son:

$$\begin{cases} Mg - \frac{k i^2(t)}{y(t)} = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} & (*) \\ u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$$

$u(t)$: Tensión de entrada

En donde:
 $i(t)$: Corriente del bobinado
 L : Inductancia del bobinado
 g : Aceleración de la gravedad

$y(t)$: posición de la esfera
 R : Resistencia del bobinado
 M : Masa de la esfera

Las variables de estado se definen como:

$$x_1(t) = y(t) \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad y \quad x_3(t) = i(t). -$$

Las ecuaciones de estado de la misma son:

$$\begin{cases} f_1 \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ f_2 \Rightarrow \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{-k}{M} \frac{x_3^2(t)}{x_1(t)} + g \quad \text{Planta no Lineal} \\ f_3 \Rightarrow \frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{-R}{L} x_3(t) + \frac{1}{L} u(t) \end{cases}$$

La planta se va a linealizar en el punto de equilibrio $y_0(t) = x_{01} = \text{Constante}$.

Entonces:

$$x_{02}(t) = \frac{dx_{01}(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 y_o(t)}{dt^2} = 0 \quad (**)$$

El valor nominal de $i(t)$ se determina al sustituir la ecuación (**) en la (*).

Por tanto:

$$i_0(t) = x_{01}(t) = \sqrt{Mgx_{01}}$$

La ecuación de estado linealizada alrededor del punto de equilibrio se expresa en la forma de la ecuación:

$$\dot{\Delta x}(t) = A^* \dot{\Delta x}(t) + B^* \Delta u(t); \text{ en donde:}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_{03}^2}{Mx_{01}} & 0 & \frac{-2x_{03}}{Mx_{01}} \\ 0 & 0 & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{x_{01}} & 0 & -2\sqrt{\frac{g}{Mx_{01}}} \\ 0 & 0 & \frac{-R}{L} \end{bmatrix}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Los parámetros de la planta son:

k : constante proporcional = 1.0; $L = 0.01H$; $R = 1\Omega$ $M = 6.4kg$; $y g \cong 10m/seg^2$.-

Las denominadas matrices Jacobianas serán, si $x_{01} = 1m$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & -2.5 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \quad C^* = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D^* = 0$$

Los valores característicos de la matriz A^* serán:

$$|sI - A^*| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ -10 & s & 2.5 \\ 0 & 0 & s+100 \end{vmatrix} = s^3 + 100s^2 - 10s - 1000$$

$$\therefore P_1 = -100 \quad P_2 = -3.1623 \quad P_3 = +3.1623$$

Por ende esta planta sin el control es inestable, como era lógico.

Se tienen las siguientes especificaciones de diseño:

1. El sistema de control debe ser estable
2. Para *cualquier perturbación inicial* en la posición de la bola desde su posición de equilibrio, la bola debe regresar a la *posición nominal* con un error de estado estable nulo.
3. El $\text{te}(5\%) \leq 0.6 \text{ seg.}$ (5% del valor del apartamiento inicial).-
4. El sobre impulso máximo porcentual $M_p (\%) \leq 10\%$ de la magnitud de la desviación inicial.
5. El control se debe realizar mediante la realimentación del estado

$$u(t) = -K \bar{x}(t) = -[k_1 \ k_2 \ k_3] \bar{x}(t)$$

Donde k_1, k_2 y k_3 son constantes reales.

Un diagrama de estado del sistema de suspensión en lazo abierto se muestra en la figura (11a) y del mismo sistema pero en lazo cerrado con realimentación del estado se muestra en la figura (11b).

Se debe seleccionar la posición deseada de los valores característicos ($sI - A + BK$) para que los requisitos 3 y 4 sobre la respuesta en el tiempo sean satisfechos.

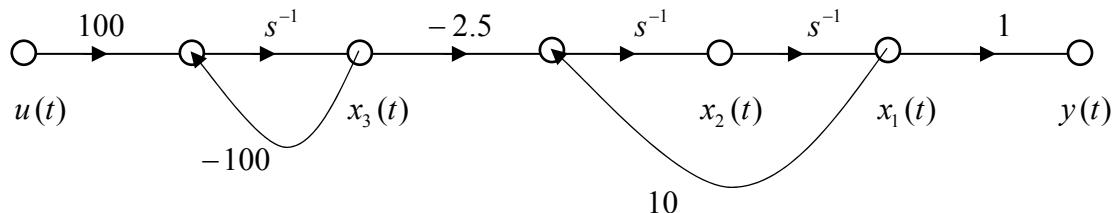


Figura 11a

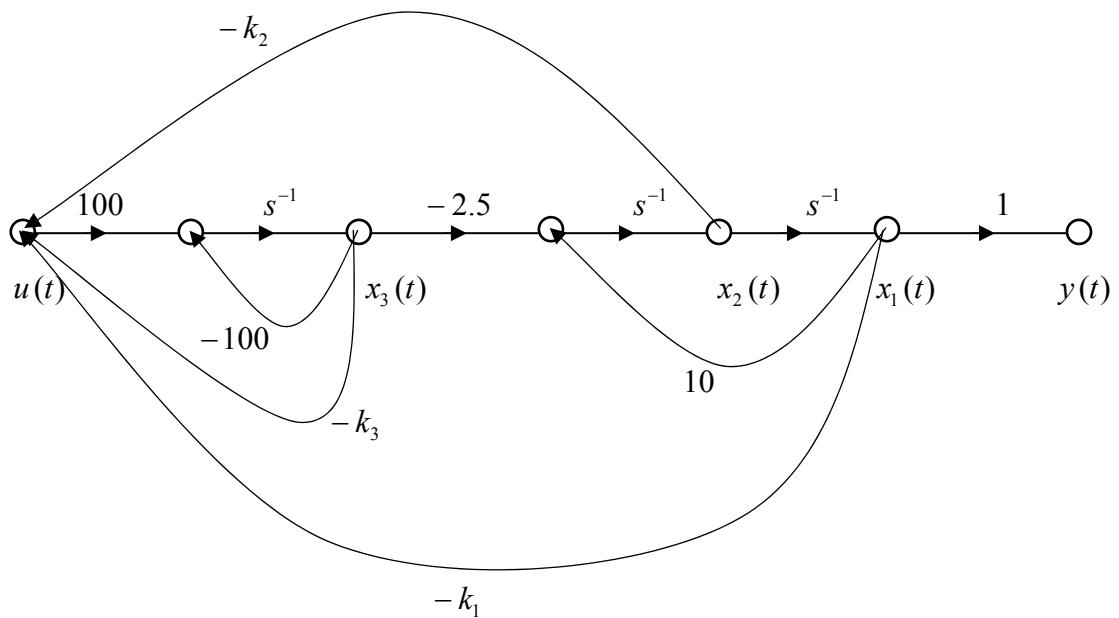


Figura 11b

Figura 11

Sin entrar al procedimiento para seleccionar los polos del sistema diseñado, por ahora, se puede comenzar con las decisiones siguientes:

- La dinámica del sistema debe ser controlada por dos raíces dominantes.
- Para alcanzar la respuesta relativamente rápida, las dos raíces dominantes deben ser complejas.
- El amortiguamiento que es controlado por el coeficiente de amortiguación δ de los polos debe ser adecuado, y las partes reales deben ser lo suficientemente grandes para que el transitorio decaiga con rapidez ($te(5\%) \leq 0.6$ segundos).

Todo esto será posible si el rango de S es igual a tres:

$$S = [B \ AB \ A^2B]$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -250 \\ 0 & -250 & 25000 \\ 100 & -10000 & 1000000 \end{bmatrix} \Rightarrow Rango(S) = 3, \text{ pues } |S| = -6250000$$

Por lo tanto los estados de la planta son controlables y se podrán realimentar los mismos con éxito. La solución, en general, no será única. Para que se cumpla la 4, ($M_p (\%) \leq 10\%$), el coeficiente de amortiguación de los polos complejos deberá ser:

$$\delta \geq \sqrt{\frac{(\ln .10)^2}{\pi^2 + (\ln .10)^2}} \rightarrow \delta \geq 0.59115$$

Se pudo elegir $\delta = 0.6$

Para que se cumpla la 3), ($te(5\%) \leq 0.6$ seg.):

$$te(5\%) \cong \frac{3.2}{|\sigma|} \leq 0.6 \text{ seg} \quad \therefore |\sigma| \geq 5.334 \text{ se pudo elegir: } |\sigma| = 6$$

Para mantener $\delta=0.6$ deberá ser: $wd = 6 \tan \theta = 6 \tan(\cos^{-1} 0.6) = 8$

Por lo tanto los polos dominantes serán: $\lambda_{1-2} = -6 \pm j8$

Para que el tercer polo no influya en demasiado, $\lambda_3 \leq 5\sigma \rightarrow \lambda_3 = -30$

La ecuación característica deseada será:

$$(s+30)(s^2 + 12s + 100) = s^3 + 42s^2 + 460s + 3000 = 0$$

En función de los coeficientes de la matriz K, será:

Método directo

$$|sI - A^* + BK| = s^3 + (100 + 100k_3)s^2 + (-10 - 250k_2)s + (-1000 - 1000k_3 - 250k_1) = 0$$

$$\begin{cases} 100 + 100k_3 = 42 \Rightarrow k_3 = -0.58 \\ -10 - 250k_2 = 460 \Rightarrow k_2 = -1.88 \\ -1000 - 1000k_3 - 250k_1 = 3000 \Rightarrow k_1 = -13.68 \end{cases}$$

$$\therefore K = [-13.68 \quad -1.88 \quad -0.58]$$

Con cualquier programa de computación se puede verificar si se cumplen las especificaciones pedidas. Usando svdesign del Csad/Matlab para obtener

$\bar{x}(t)$ y verificar por ejemplo que con $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ que se obtiene el transitorio

pedido.

En las figuras siguientes se puede ver que $M_p (\%) = 9 \% < 10\%$ y $t_e(5\%) = 0.576 \text{ seg.} < 0.60 \text{ seg.}$ La variación temporal de los estados del sistema regulador está indicada en la figura 12:

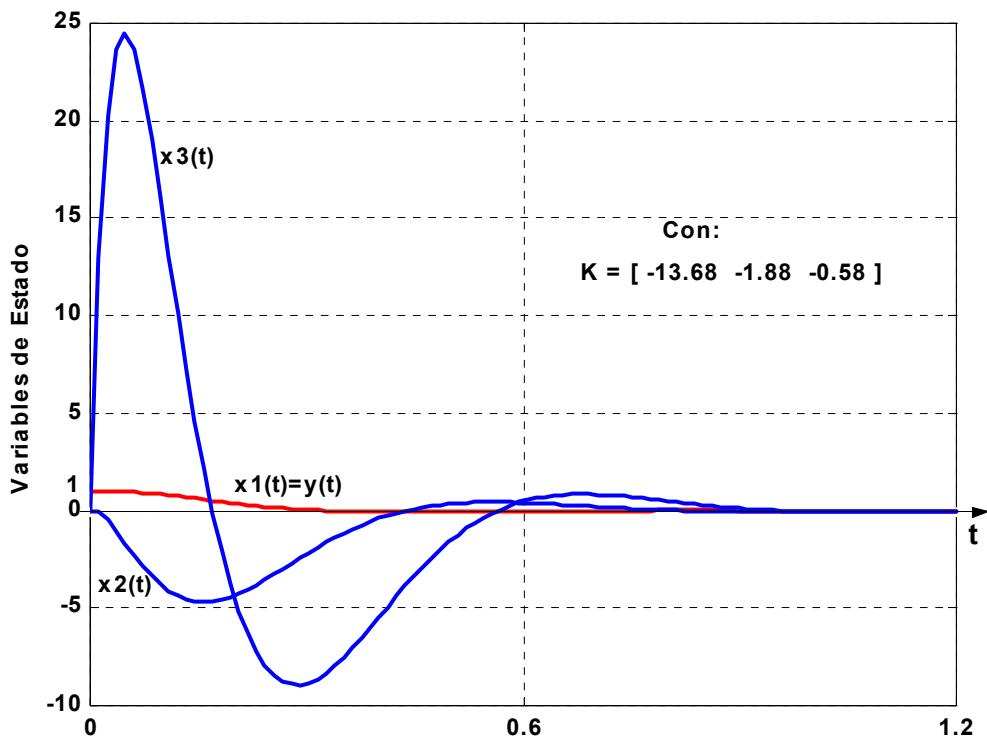


Figura 12

La posición de la bola de acero $y(t) = x_1(t)$, ampliada se muestra en la figura 13.

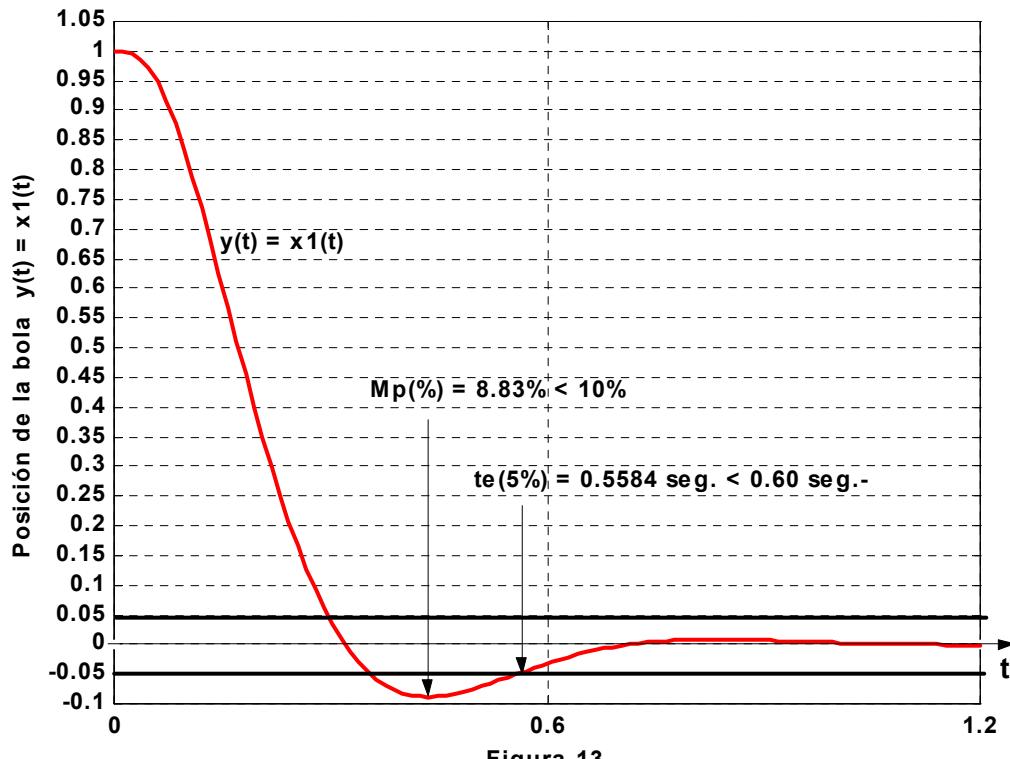


Figura 13

Como se puede apreciar en la misma el sistema regulador diseñado cumple con todas las especificaciones requeridas.

Esta solución no es la única. Por ejemplo, podemos diseñar otra en la que la respuesta entre por arriba en la banda del $\pm 5\%$ y no salga mas. Para ello se elige:

$$\delta = 0.707$$

$$te(5\%) \approx \frac{4.5\delta^2}{|\sigma|} \leq 0.60 \Rightarrow |\sigma| \geq 3.75 \text{ se elige } \sigma = -4$$

$$\therefore \lambda_{1-2} = -4 \pm j4 \rightarrow \lambda_3 \leq 5\sigma \rightarrow \text{si se elige } \lambda_3 = 5\sigma \Rightarrow \lambda_3 = -20.$$

$$(s+20)(s^2 + 8s + 32) = s^3 + 28s^2 + 192s + 640 = 0$$

$$\therefore 100 + 100k_3 = 28 \Rightarrow k_3 = -0.72$$

$$-10 - 250k_2 = 192 \Rightarrow k_2 = -0.80$$

$$-1000 - 1000k_3 - 250k_1 = 640 \Rightarrow k_1 = -3.68$$

Por lo tanto:

$$K = [-3.68 \quad -0.80 \quad -0.72]$$

En la figura 14 se muestran las respuestas temporales y la verificación de las especificaciones de funcionamiento del sistema regulador diseñado, por ende esta sería *otra solución* al problema de diseño planteado.-

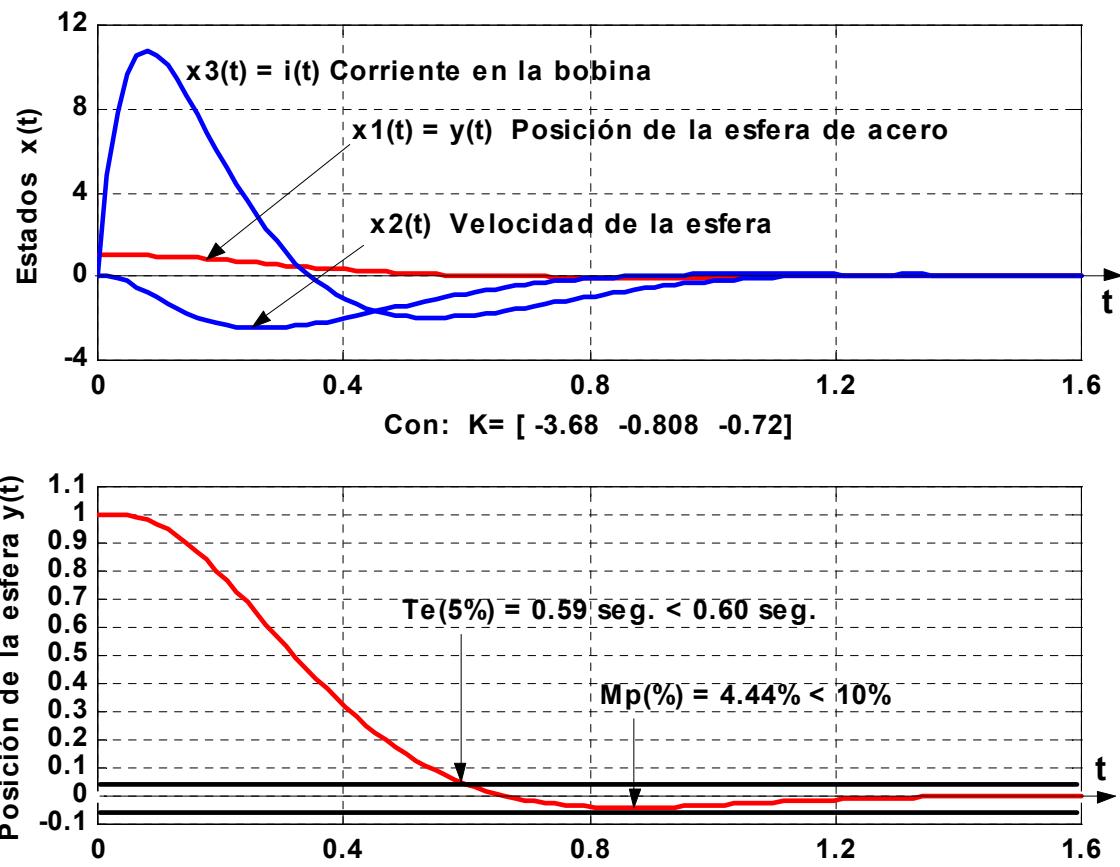


Figura 14

Diseño de Sistemas Seguidores:

Hasta ahora, los diseños mediante asignación de polos se han aplicado a un sistema que carecía de entrada de referencia, o mejor, que la misma era constante, por ende señal de control $u(t)$ era proporcional al vector de estado solamente. En el problema del regulador que ha sido tratado en las secciones anteriores, el criterio de diseño es eliminar el efecto de las perturbaciones y *llover al vector de estado del sistema a cero en tiempo y forma razonable*. Sin embargo, la mayoría de los sistemas de control son seguidores (servo sistemas), esto es, la salida $y(t)$ deberá seguir a una entrada referencia $r(t)$, luego el objetivo de diseño ahora será que el vector de estado y la salida correspondiente del sistema sigan unas trayectorias deseadas. Las formas de encarar esto serán las siguientes:

1.- Con la Realimentación del Estado *Solamente*:

Si bien la condición de controlabilidad se ha demostrado para el caso mas general, esto es, un sistema MIMO en el que tanto la señal de entrada $\bar{u}(t)$ como la de salida $\bar{y}(t)$ son vectores, el calculo de la matriz de realimentación K se vuelve mucho mas complicado cuando el control es

multivariable que cuando se trata de monovariable. El control multivariable excede las pretensiones de este texto, por lo cual, en los diseños que siguen, se consideran sistemas SISO o SIMO exclusivamente. Sea pues el sistema SISO de control cuya ubicación de polos mediante la *realimentación del estado solamente*, (como el que se muestra en la figura 15), en el cual se ha supuesto, como es casi general, que $D=0$:

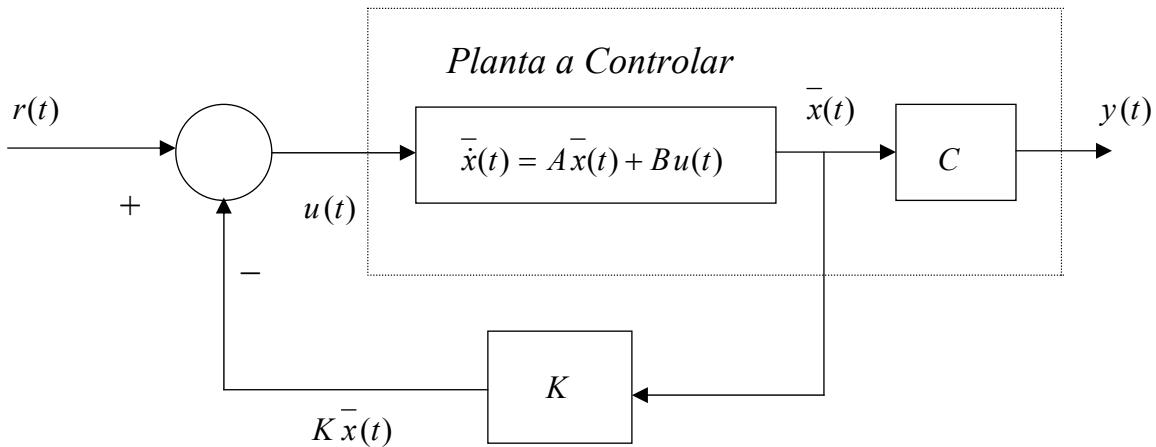


Figura 15

La planta está modelada por las ecuaciones siguientes:

$$\dot{\bar{x}}_{(t)} = A\bar{x}_{(t)} + Bu_{(t)}$$

$$y_{(t)} = C\bar{x}_{(t)}$$

La señal de control está dada por la relación:

$$u_{(t)} = -K\bar{x}_{(t)} + r_{(t)}$$

Donde:

$$K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$$

Por ende el modelo de estado del sistema en lazo cerrado es:

$$\dot{\bar{x}}_{(t)} = A\bar{x}_{(t)} + B[-K\bar{x}_{(t)} + r_{(t)}]$$

Por lo tanto:

$$\dot{\bar{x}}_{(t)} = (A - BK)\bar{x}_{(t)} + Br_{(t)} = Ac\bar{x}_{(t)} + Bcr_{(t)}$$

Las matrices características y de distribución del sistema de lazo cerrado serán:

$Ac = (A - BK)$: Igual como era de esperar a la del sistema regulador.

$Bc = B$: La matriz de distribución no se altera.-

Para la ecuación de salida, suponiendo que $D \neq 0$ será:

$$y(t) = C\bar{x}(t) + D(-K\bar{x}(t) + r(t))$$

$$y(t) = (C - DK)\bar{x}(t) + Dr(t) = Cc\bar{x}(t) + Dcr(t)$$

Las matrices de salida o medición y la D del sistema de lazo cerrado serán:

$Cc = (C - DK)$: Matriz de salida.

$D_c = D$: La matriz D no se altera.-

Se sabe que $G_p(s) = K_p N_p(s) / D_p(s)$, donde $N_p(s)$ es un polinomio en s, que no se modifica pues se agregan solo lazos al diagrama de estado del sistema y no caminos directos.-

En consecuencia los polos en lazo cerrado se pueden ubicar libremente mediante el ajuste de la matriz de ganancias de realimentación de los estados K, si la planta es de estado completamente controlable como a se dijo oportunamente.

Sean pues las posiciones de los polos deseados:

$$s = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

Con lo cual la ecuación característica del sistema es:

$$|sI - A + BK| = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) = 0$$

En esta ecuación hay n incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y n coeficientes conocidos en el miembro derecho de la igualdad de polinomios. Para calcular las ganancias desconocidas, con el método directo, basta con igualar los coeficientes de igual potencia en s.

Nótese que por medio de la realimentación del vector estado *sólo* se modifica la ubicación de los polos de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado, sin embargo como ya se dijo, *los ceros permanecerán inalterados*.

Por regla general el modelo de la planta mediante la realimentación de los estados *sólo*, produce un *sistema tipo cero*, pues $M(0) \neq 1$, de modo que como ya se sabe, un sistema de este tipo sería incapaz de seguir sin error a una señal de entrada de referencia escalón.-

Ejemplo 3:

Para una planta a controlar el modelo tiene las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 140 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D = 0. -$$

Se desea diseñar un sistema seguidor tipo uno para que se cumplan las especificaciones siguientes:

- Error de Estado Estacionario a entradas escalones nulo.
- $M_p(\%) \leq 17\%$.
- $t_E(2\%) \leq 2.20 \text{ seg}$.

En base a las matrices la función de transferencia de la planta es:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \frac{\text{Adj}(sI - A)}{|(sI - A)|} B = \frac{140}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{140}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Como se puede ver en este caso la planta será controlable. Se intentará hacer un diseño con un par de *polos complejos conjugados dominantes*.- Para que se cumpla la segunda especificación los mismos deberán tener:

$$\delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0.17)^2}{\pi^2 + (\ln 0.17)^2}} \Rightarrow \delta \geq 0.4912$$

Para la tercera: $t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 2.2 \text{ seg. } \Rightarrow |\sigma| \geq 1.818,$

se elegirá: $|\sigma| = 2.$ -

Si se elige: $\delta = 0.50$ y $\sigma = -2 \Rightarrow \omega_d = 2\sqrt{3}$

Por ende: $\lambda_{1-2} = -2 \pm j2\sqrt{3},$

y el tercer polo, $\lambda_3 \geq 5|\sigma| \Rightarrow \lambda_3 = -10.$ -

En general en primer lugar se verificará que la planta es controlable, cosa que en este ejemplo ya se sabe, pues en la $Gp(s)$ de la planta no hay cancelación de polos y ceros.

Para ello el rango de la matriz de la controlabilidad:

$$S = [B \ AB \ A^2B],$$

debe ser 3, en efecto,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 140 \\ 0 & 140 & -840 \\ 140 & -840 & 3500 \end{bmatrix} \Rightarrow |S| = -2744000,$$

por lo tanto $\text{Rango}(S) = n = 3.$ -

$$\text{Ahora: } |sI - A + BK| = (s+10)(s^2 + 4s + 16) = (s^3 + 14s^2 + 56s + 160) = 0$$

En consecuencia:

$$160 = 6 + 140k_1 \Rightarrow k_1 = 1.10$$

$$56 = 11 + 140k_2 \Rightarrow k_2 = 9/28$$

$$14 = 6 + 140k_3 \Rightarrow k_3 = 2/35$$

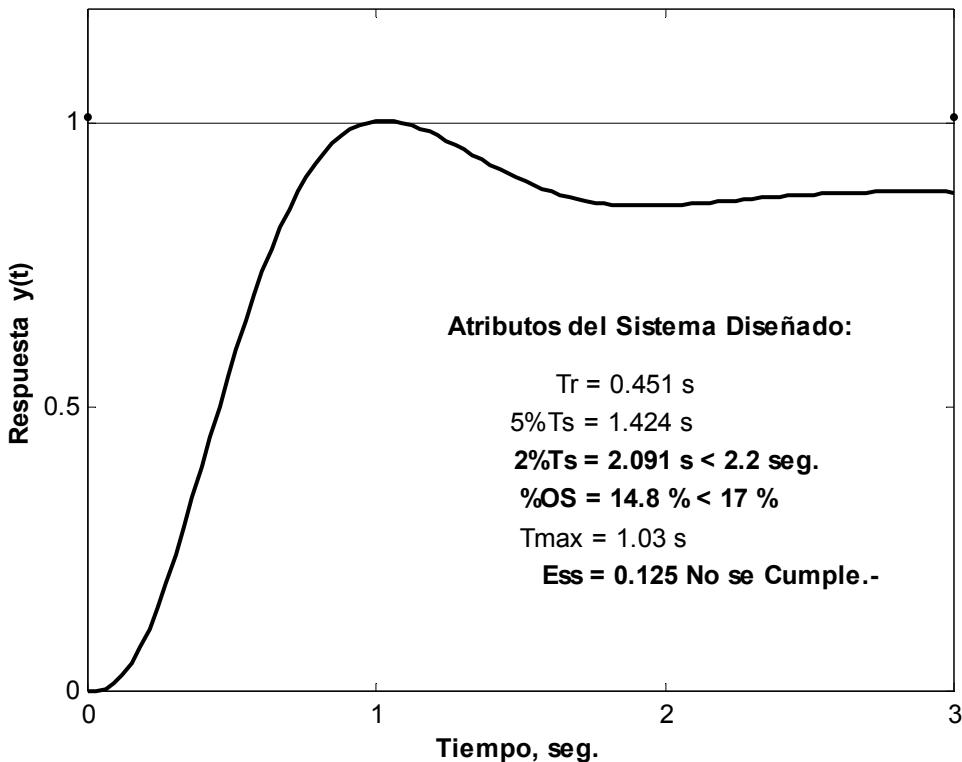
La matriz K será: $K = [1.10 \ 9/28 \ 2/35]$

La F de T. del sistema diseñado será:

$$M(s) = \frac{140}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}.$$

Como se puede apreciar en la figura 16 no se cumple la especificación de que el error de estado estacionario al escalón de entrada sea nulo.

La lección que se aprende de este ejemplo, es que el control con realimentación de los estados *sólo*, produce en general un *sistema seguidor tipo 0* si *todos* los polos se eligen en forma arbitraria. Para que el sistema siga a una entrada escalón *sin error* de estado estable, una forma de solucionar esto sería: como en este caso la planta es de orden $n=3$, solo $(n-1)=2$ polos se podrán elegir en forma arbitraria. Lo cual no garantiza, en general, el transitorio deseado. Otra forma, la más usada, es por ejemplo colocar una ganancia de precompensación como se verá más adelante. Apliquemos lo primero al ejemplo que se está tratando.



La función de transferencia del sistema en función de los elementos de la matriz de realimentación era:

$$M(s) = \frac{140}{s^3 + (6+140k_3)s^2 + (11+140k_2)s + (6+140k_1)}$$

Para que, $M(0)=1 \Rightarrow 140 = 6 + 140k_1 \Rightarrow k_1 = 67/70.$ –

Poe ende en este caso podrán elegir solo: $n-1=3-1=2$ polos en forma arbitraria, por ejemplo el par complejo, λ_{1-2} y el real λ_3 , resultara en consecuencia para cumplir $M(0)=1.$ –

Si se elige $\lambda_{1-2} = -2 \pm j2\sqrt{3}; \lambda_3 = ?$

Para que el par complejo sea dominante deberá ser $\lambda_3 \leq 5\sigma$, si esto se cumple el diseño será un éxito si no se cumple no. La ecuación característica será:

$$(s - \lambda_3)(s^2 + 4s + 16) = s^3 + (4 - \lambda_3)s^2 + (16 - 4\lambda_3)s + (-16\lambda_3) = 0$$

Por lo tanto:

$$-16\lambda_3 = 140 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{-140}{16} \Rightarrow \lambda_3 = -8.75$$

Como se aprecia mas cerca del par de polos complejos que en el primer diseño, pues en el era $\lambda_3 = -10$, el $t_E(2\%)$ subirá un poco y Mp bajara.

$$\text{Por ende: } 11+140k_2 = 16 - 4\lambda_3 = 16 + 35 = 51 \Rightarrow k_2 = 2/7. -$$

$$6+140k_3 = 4 - \lambda_3 = 4 + 8.75 = 12.75 \Rightarrow k_3 = 27/560$$

La matriz de la realimentación de los estados seria la siguiente:

$$K = [67/70 \quad 2/7 \quad 27/560] ; \quad K \cong [0.957 \quad 0.286 \quad 0.048] -$$

Con la computadora se obtiene la respuesta mostrada en la figura 17, con los atributos correspondientes. En la misma se observa que el sistema diseñado cumple con todas las especificaciones solicitadas.

Recordar que no siempre se tiene éxito, por ejemplo si la ganancia de la planta a controlar, (igual al elemento de la matriz B), fuera menor, por ejemplo 10, se tendrá que:

$-16\lambda_3 = 10 \Rightarrow \lambda_3 = -0.625$, y por lo tanto el par de polos complejos no será, ya dominante y el diseño de esta manera sería un fracaso.

Esto requerirá recurrir a otros métodos, por ejemplo colocar una ganancia de precompensación como ya se mencionó, sería el más sencillo.-

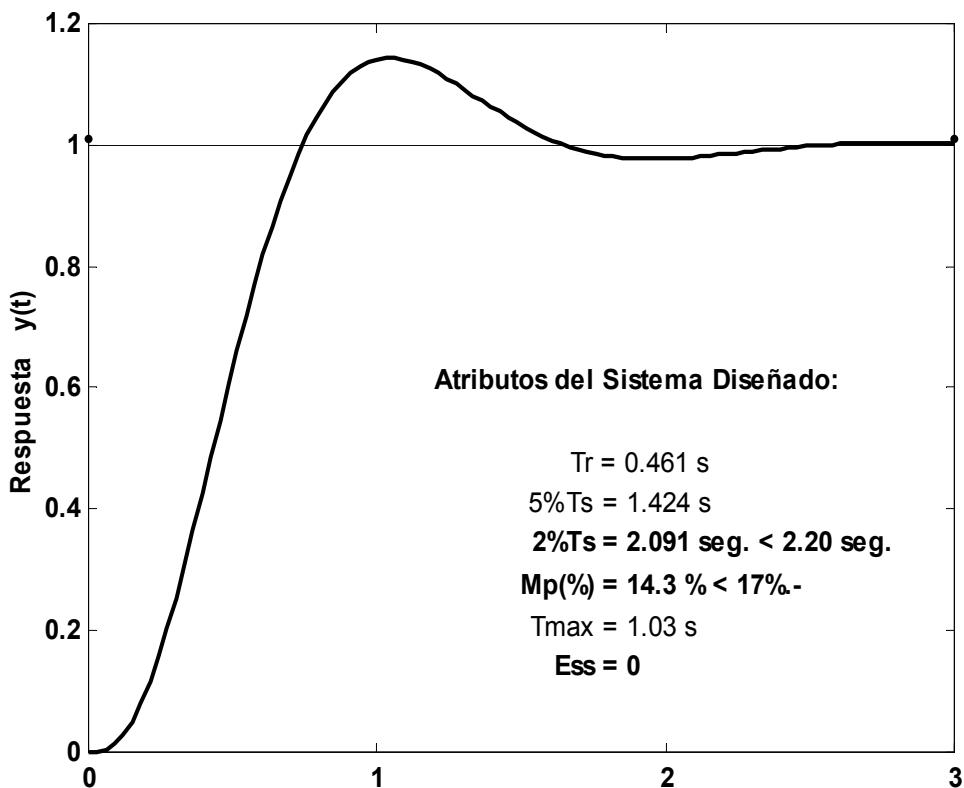


Figura 17

Ejemplo 4:

La función de transferencia de una planta a controlar es:

$$G_p(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

El problema es diseñar, si es posible, por medio de la realimentación de los estados *sólo*, un sistema de seguimiento al escalón que cumpla con las especificaciones siguientes:

1. Que el error de estado estable al escalón de entrada sea nulo.-
2. La respuesta al escalón debe tener el sobre paso, $M_p \approx 0$, (sin oscilaciones), y el tiempo de establecimiento t_E (5%), mínimo.-

Utilizar el modelo de la planta en la forma canónica controlable, o sea:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [2500 \quad 0] \quad y \quad D = 0. -$$

Siguiendo con este método, se podrán elegir ($n-1$) valores característicos, uno en este caso y el otro *resultará*. Como $M_p = 0$ y sin oscilaciones y además el $t_E(5\%)$ mínimo, deberá tener el sistema un polo doble, ($\delta=1$), veremos qué valor deberá tener el mismo.

La función de transferencia de lazo cerrado será, en este caso:

$$M(s) = C \frac{\text{Adj}(sI - A)}{|sI - A|} B = \frac{2500}{s^2 + (25 + k_2)s + k_1} . -$$

Para que el error de estado estacionario al escalón de entrada sea nulo deberá ser la ganancia estática $M(0)=1$, o sea $k_1 = 2500$.

Esto significa que aunque la planta sea controlable, *solo con realimentación de los estados solamente*, no podrán asignarse en forma arbitraria los dos polos del sistema. La ecuación característica es:

$$s^2 + (25 + k_2)s + 2500 = 0$$

$$\text{Por lo tanto: } \lambda_1 \lambda_2 = \lambda^2 = 2500 \Rightarrow \lambda_{1-2} = -50.$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -(25 + k_2) \Rightarrow -100 = -(25 + k_2) \Rightarrow k_2 = 75. -$$

La matriz de la realimentación de los estados será:

$$K = [k_1 \quad k_2] = [2500 \quad 75]$$

Todo esto también se puede razonar así:

El movimiento de las raíces de la ecuación característica para $k_1 = 2500$, variando el parámetro k_2 se puede obtener de:

$$G_{equiv}(s) = \frac{k_2 s}{s^2 + 25s + 2500}$$

Como se puede ver en la Figura 18, se llega a la misma conclusión, para $k_2 = 75$ los polos del sistema seguidor diseñado estarán en: $\lambda_{1-2} = -50$,

En la figura 19, se muestran tres respuestas para valores diferentes de k_2 , con $k_1 = 2500$. Como se puede apreciar la más rápida sin sobre elongación es para $k_2 = 75$, como ya se discutió.-

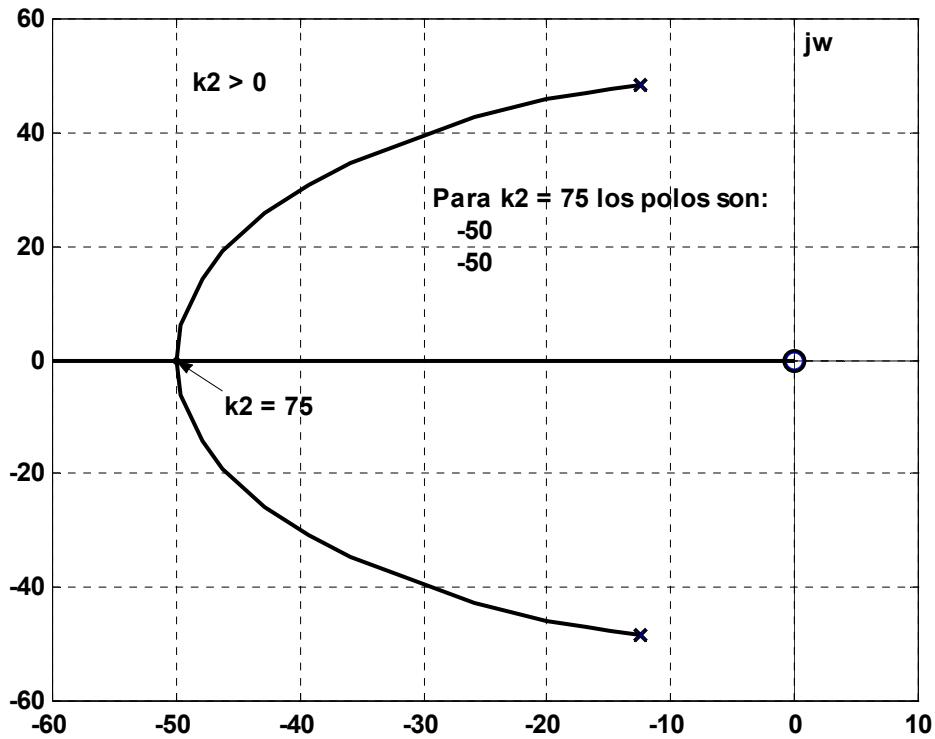


Figura 18

Como es lógico con éste método, para otros diseños más complejos en general, seguramente se fracasará, por lo tanto se verán a continuación otras formas de diseñar un sistema de control seguidor tipo uno.-

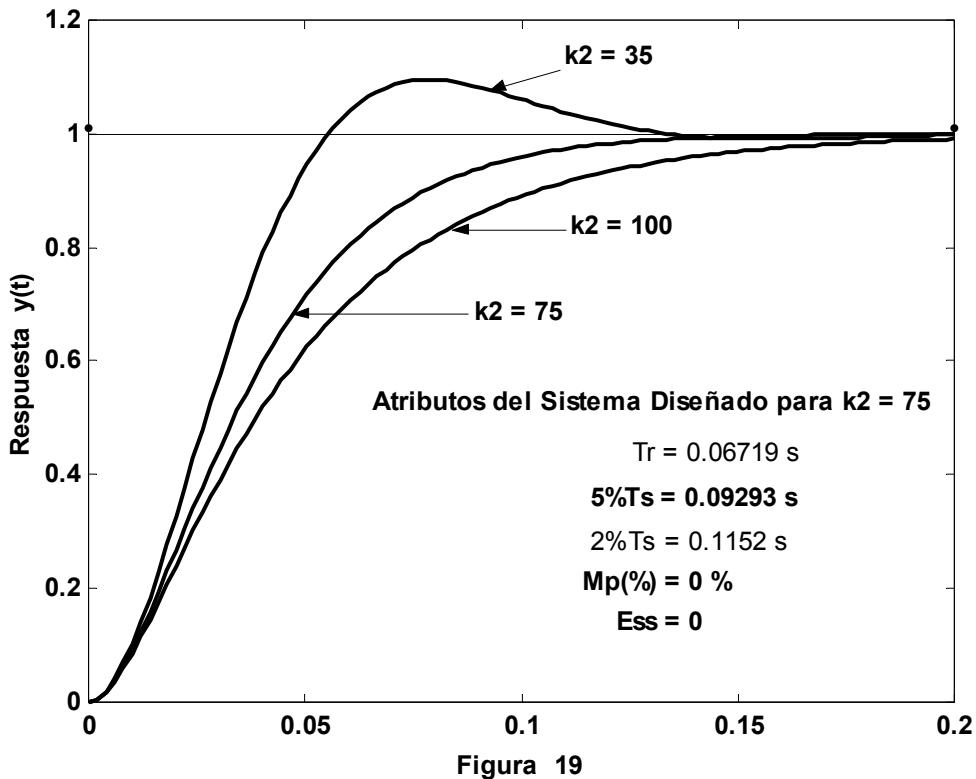


Figura 19

Sistema de Seguimiento “Tipo 1” cuando la Planta tiene un Integrador, solo con la Realimentación de los Estados:

Mediante una elección *adecuada* de las variables de estado, es posible seleccionar la salida igual a una de las variables de estado, por ejemplo $y(t) = x_1(t)$. Ya vimos un método en el cual sucede esto, lo recordemos.

Si en general la función de transferencia de la planta es:

$$G_p(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Una forma adecuada de elegir las variables de estado y de salida es definir las siguientes “n” variables de estado de la planta:

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_n u \Rightarrow y(t) = x_1(t) + \beta_n u(t) \\ x_2 = \dot{y} - \beta_n \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_1 - \beta_{n-1} u \\ x_3 = \ddot{y} - \beta_n \ddot{u} - \beta_{n-1} \dot{u} - \beta_{n-2} u = \dot{x}_2 - \beta_{n-2} u \\ \dots \\ x_n = \overset{(n-1)}{y} - \beta_n \overset{(n-1)}{u} - \beta_{n-1} \overset{(n-2)}{u} - \dots - \beta_2 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_{n-1} - \beta_1 u \end{cases}$$

En donde:

$$\begin{cases} \beta_n = b_n \\ \beta_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1} \beta_n \\ \beta_{n-2} = b_{n-2} - a_{n-1} \beta_{n-1} - a_{n-2} \beta_n \\ \beta_{n-3} = b_{n-3} - a_{n-1} \beta_{n-2} - a_{n-2} \beta_{n-1} - a_{n-3} \beta_n \\ \dots \\ \beta_0 = b_0 - a_{n-1} \beta_1 - \dots - a_1 \beta_{n-1} - a_0 \beta_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_{n-2} u \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_1 u \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + \beta_0 u \end{cases}$$

En forma matricial sería:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_n u(t)$$

En esta representación las matrices A, C y D

son las mismas que en la forma canónica controlable, cuando *no hay* derivadas de la entrada en la ecuación diferencial *y además* $b_0 = 1$. La matriz B es solo la que cambia. Un diagrama de estado seria el de la fig. 20

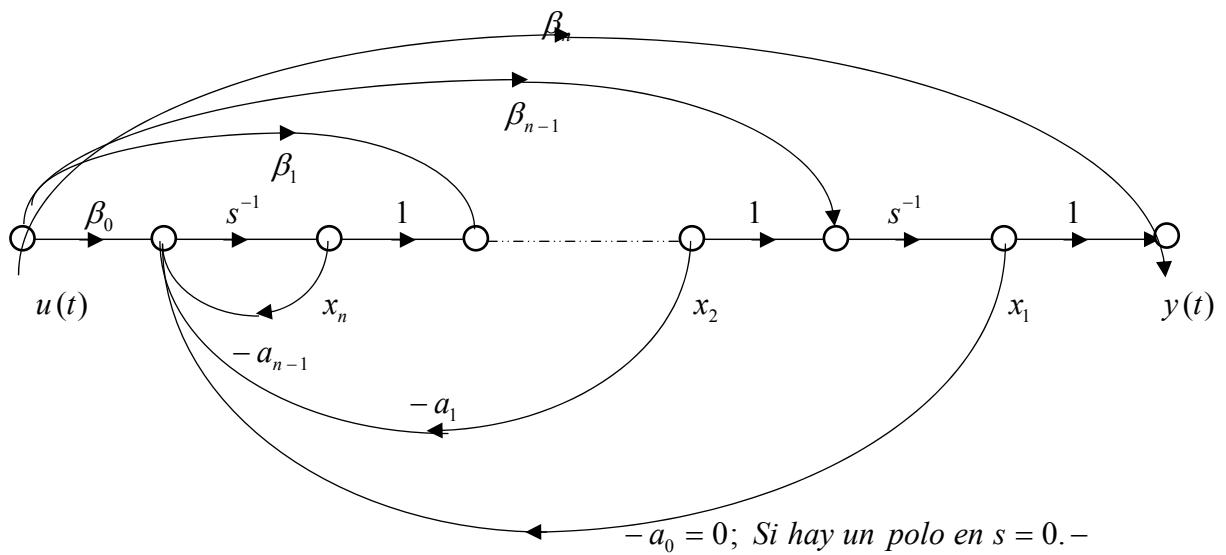


Figura 20

Si $a_0 = 0$, la función de transferencia tendrá un polo en el origen.

Con el objeto de *no modificar* el tipo del sistema y que a su vez *todos* los polos puedan ser ubicados en los lugares deseados, se utiliza la configuración mostrada en la figura 21, (en ella se supone que la matriz $D = [\beta_n] = [b_n] = [0]$).-

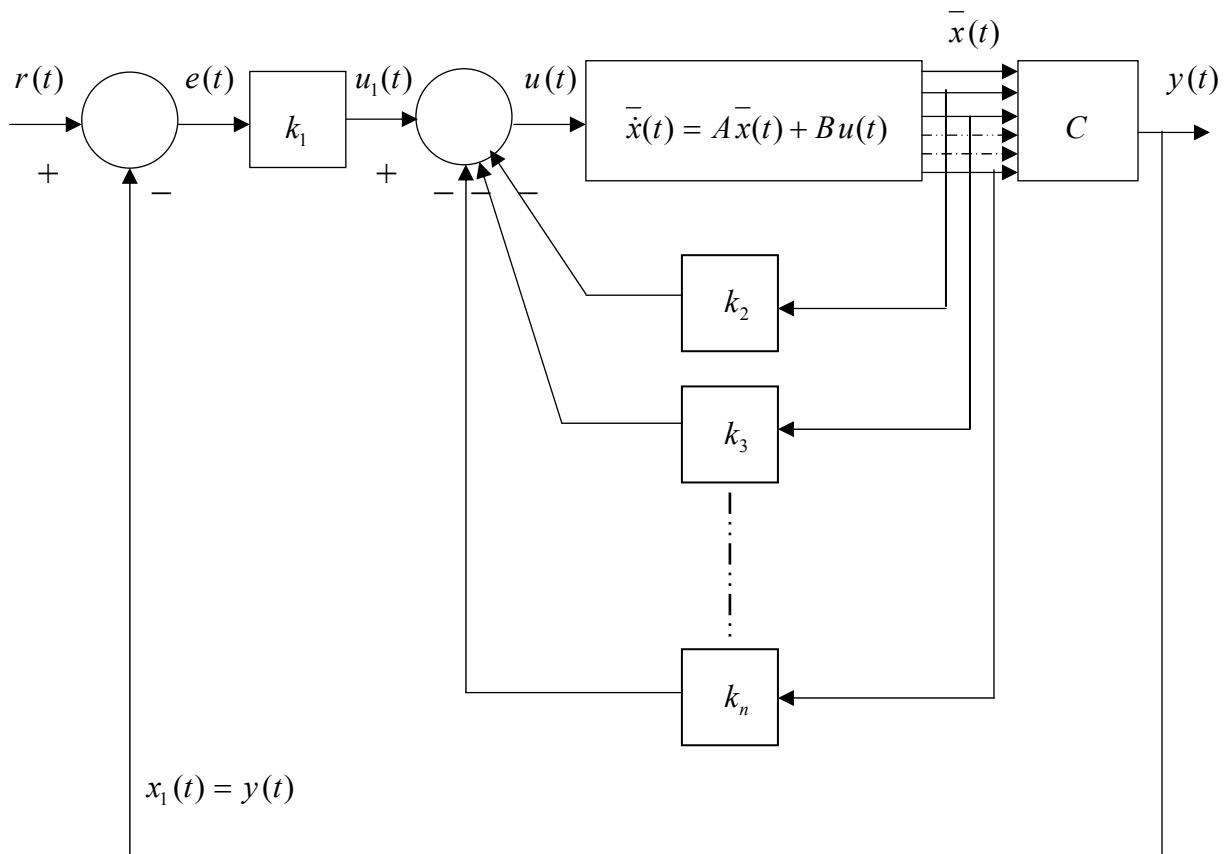


Figura 21

Se puede demostrar fácilmente que la "planta", con $u_1(t)$ como entrada también tendrá un polo en el origen, por ende el sistema será tipo 1, como se desea.-

De la figura 21, la acción de control será:

$$u(t) = -[0 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + k_1(r - x_1) = -K^T \bar{x}(t) + k_1(r - x_1). -$$

La cual se puede colocar:

$$u(t) = -[k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n] \bar{x}(t) + k_1 r(t)$$

$$u(t) = -K \bar{x}(t) + k_1 r(t)$$

$$\text{Donde: } K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n]$$

Así la dinámica del sistema será:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) = (A - BK)\bar{x}(t) + k_1 Br(t) \quad (*)$$

Donde las matrices de lazo cerrado serán:

$$Ac = (A - BK) \quad ; \quad Bc = (k_1 B) \quad y \quad Cc \equiv C$$

Siguiendo con este modelo en estado estable se tendrá que:

$$(**) \quad \dot{\bar{x}}(\infty) = (A - BK)\bar{x}(\infty) + k_1 Br(\infty) \quad si \quad r(t) = Ru_S(t) \quad ; \quad r(\infty) = R. -$$

Restando la ecuación (**) de la ecuación (*), se obtiene:

$$\dot{\bar{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(\infty) = (A - BK)[\bar{x}(t) - \bar{x}(\infty)]$$

Si se define el error de estado estacionario, como:

$$\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - \bar{x}(\infty)$$

Se tendrá:

$$\dot{\bar{e}}(t) = (A - BK)\bar{e}(t)$$

Ecuación que describe la dinámica del error en los estados. El diseño del sistema de seguimiento tipo 1 se convierte aquí en el diseño de un sistema regulador asintóticamente estable tal que $\bar{e}(t) \rightarrow \bar{0}$, dada cualquier condición inicial $\bar{e}(0)$.

Si la planta es controlable, entonces especificando los valores característicos deseados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, para la matriz $(A - BK)$, la matriz K se podrá determinar por cualquiera de los métodos ya vistos.-

Los valores de estado estable de $\bar{x}(t)$ y $u(t)$ se encuentran del modo siguiente.

En estado estable, ($t \rightarrow \infty$), se tendrá:

$$\dot{\bar{x}}(\infty) = \bar{0} = (A - BK)\bar{x}(\infty) + k_1 BR$$

Dado que todos los valores característicos deseados de $(A - BK)$ están en el

semiplano izquierdo del plano s , existirá la inversa de la matriz $(A - BK)$, por ende:

$$\bar{x}(\infty) = -(A - BK)^{-1} k_1 BR$$

Así mismo, $u(\infty)$ se obtiene como:

$$u(\infty) = -K \bar{x}(\infty) + k_1 R = 0$$

Resolviendo el Ejemplo 4, con este método, pues $a_0 = 0$, el modelo de estado será para este caso:

$$G_p(s) = \frac{2500}{s(s+25)} = \frac{2500}{s^2 + 25s + 0} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = b_2 = 0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1\beta_2 = 0 \\ \beta_0 = b_0 - a_1\beta_1 - a_0\beta_2 = b_0 = 2500. \end{cases}$$

Las matrices del modelo serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2500 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0] \text{ y } D = [0]$$

Las variables de estado serán las siguientes:

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_2 u \\ x_2 = \dot{y} - \beta_2 \dot{u} - \beta_1 u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y(t) \\ x_2 = \dot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}.$$

los polos se eligieron en: $\lambda_{1-2} = -50$, la ecuación característica es en consecuencia: $s^2 + 100s + 2500 = 0$, como $Ac = (A - BK)$, también la ecuación característica es:

$$|sI - A + BK| = s^2 + (25 + 2500k_2)s + 2500k_1 = 0$$

Por ende:

$$k_1 = 1 \text{ y como } 2s + 2500k_2 = 100 \Rightarrow k_2 = 0.03$$

$K = [1 \ 0.03]$, será la matriz de realimentación de los estados.-

Las matrices del sistema de control diseñado serán:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2500k_1 & -25(1+100k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2500 & -100 \end{bmatrix}$$

$$Bc = k_1 B = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2500 \end{bmatrix} \text{ y } Cc = C = [1 \ 0] -$$

Ejemplo 5:

Dada una planta con:

$$G_p(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1) \cdot (s+5)}$$

Diseñar un sistema seguidor para que se cumplan las especificaciones siguientes:

1. Que el error de estado estable a una entrada escalón sea nulo.
2. $te(2\%) \leq 2.20$ seg.
3. $Mp(\%) \leq 20\%$

$$G_p(s) = \frac{1}{s^3 + \overset{bo}{\underset{a_2}{6}} \cdot s^2 + \overset{a_1}{5} \cdot s + \overset{a_0}{0}} \quad \text{Por ende se tendrá} \quad \begin{cases} \beta_3 = b_3 = 0 \\ \beta_2 = b_2 - a_2 \beta_3 = 0 \\ \beta_1 = b_1 - a_2 \beta_2 - a_1 \beta_3 = 0 \\ \beta_0 = b_0 - a_2 \beta_1 - a_1 \beta_2 - a_0 \beta_3 = b_0 = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto el modelo de la planta será el siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

Con este método el modelo coincide, como ya se dijo, con la FCC si no hay ceros y $b_0 = 1$ en $G_p(s)$.

No hace falta verificar que el rango de S es igual a 3, pues está en la FCC, de todas maneras:

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango}(S) = 3$$

Ubicación de los polos Complejos Conjugados Dominantes:

$$\text{Para que } M_p (\%) \leq 20\% \rightarrow \delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0.2)^2}{\pi^2 + (\ln 0.2)^2}} = 0.446 \rightarrow \delta \geq 0.446$$

$$\text{Para que } \text{te} (2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 2.20 \rightarrow |\sigma| \geq 1.818; \text{ si se elige } \sigma = -2$$

$$\delta \geq 0.446 \rightarrow \cos \theta \geq 0.446 \rightarrow \theta \leq \cos^{-1}(0.446)$$

$$\text{Si } \operatorname{tag}^{-1}\left(\frac{wd}{2}\right) \leq \cos^{-1}(0.446) \rightarrow wd \leq 2 \cdot \operatorname{tag}(\cos^{-1} 0.446)$$

$$\therefore wd \leq 2 \cdot \operatorname{tag} 63.512^\circ \rightarrow wd \leq 4.136 \rightarrow wd = 4$$

Por lo tanto los polos complejos dominantes serán: $\lambda_{1-2} = -2 \pm j4$

Además como $G_p(s)$ no tiene ceros $\rightarrow |\lambda_3| \geq 5 \cdot |\sigma| \rightarrow \lambda_3 = -10$

La ecuación característica será:

$$(s+10)(s^2 + 4s + 20) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200 = 0$$

También: $|sI - Ac| = 0$

$$A_c = (A - BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -5 - k_2 & -6 - k_3 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A_c| = s^3 + (6 + k_3)s^2 + (5 + k_2)s + k_1 = 0$$

en consecuencia:

$$k_1 = 200$$

$$k_2 = 55$$

$$k_3 = 8$$

La matriz de realimentación será: $K = [200 \ 55 \ 8]$

También se puede expresar: $K' = [0 \ 55 \ 8]$ y $k_1 = 200$

Las matrices del sistema de lazo cerrado diseñado serán las siguientes:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -200 & -60 & -14 \end{bmatrix} \quad B_c = k_1 \cdot B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C_c = C = [1 \ 0 \ 0]$$

Por último con el objeto de comprobar en forma analítica la capacidad de seguimiento del sistema diseñado, se aplicará:

$$\bar{x}_{(\infty)} = -(A - BK)^{-1} B k_1 R$$

$$\begin{bmatrix} x_{1(\infty)} \\ x_{2(\infty)} \\ x_{3(\infty)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -200 & -60 & -14 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix} \cdot R \rightarrow r(t) = R \mu_s(t)$$

Teniendo en cuenta que: $y(t) = x_1(t)$

$$\begin{bmatrix} y_{(\infty)} \\ x_{2(\infty)} \\ x_{3(\infty)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.07 & 0.005 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \cdot R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual $y_{(\infty)} = R$, $x_{2(\infty)} = 0$ y $x_{3(\infty)} = 0$. Por lo tanto se demuestra que como exigía el diseño, la salida sigue fielmente a la señal de referencia. La figura 22 resume todo lo dicho.

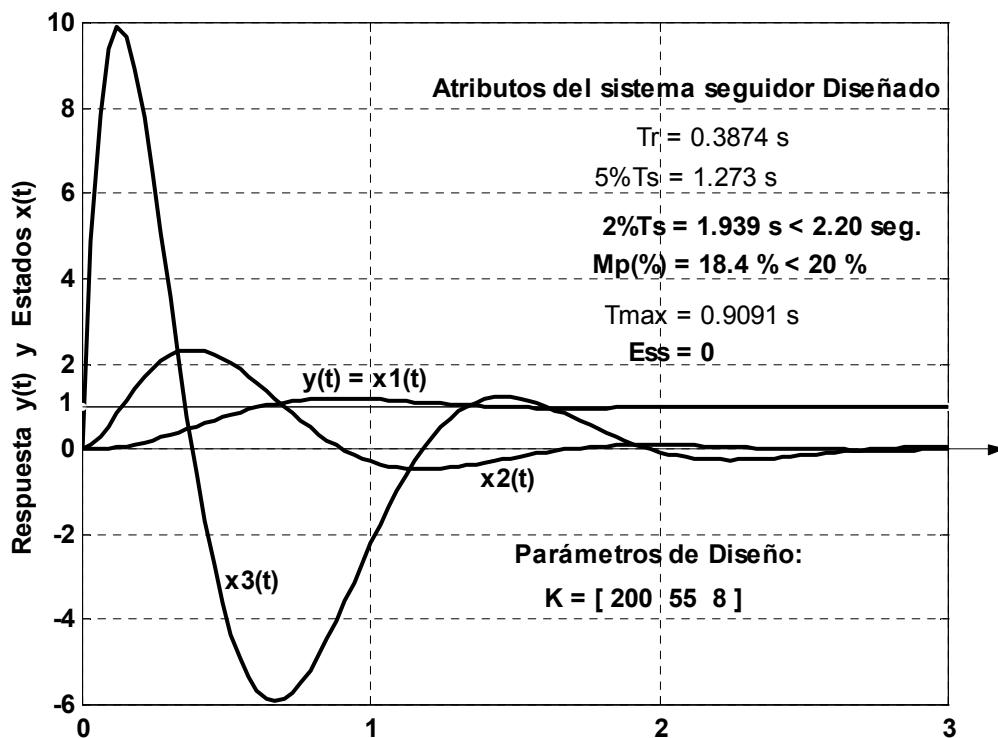


Figura 22

Además se ve que:

$$u(\infty) = -K \bar{x}(\infty) + k_1 R ; \quad u_{(\infty)} = -[200 \ 55 \ 8] \cdot \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 200 \cdot R = -200 \cdot R + 200 \cdot R = 0$$

Por lo tanto la señal de control en régimen permanente es nula.

Ejemplo 6:

Una planta a controlar tiene la función de transferencia siguiente:

$$G_p(s) = \frac{10(s+5)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{10s+50}{s^3 + 3s^2 + 2s + 0} \rightarrow \begin{cases} b_1 = 10; b_0 = 50 \\ a_2 = 3; a_1 = 2 \text{ y } a_0 = 0 \end{cases}$$

$$\beta_3 = b_3 = 0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_2\beta_3 = 0 - 3 \times 0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_2\beta_2 - a_1\beta_3 = b_1 = 10$$

$$\beta_0 = b_0 - a_2\beta_1 - a_1\beta_2 - a_0\beta_3 = b_0 - a_2b_1 = 50 - 3 \times 10 = 20. -$$

Con el método visto las matrices de la planta serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un diagrama de estado sería el indicado en la figura 23.

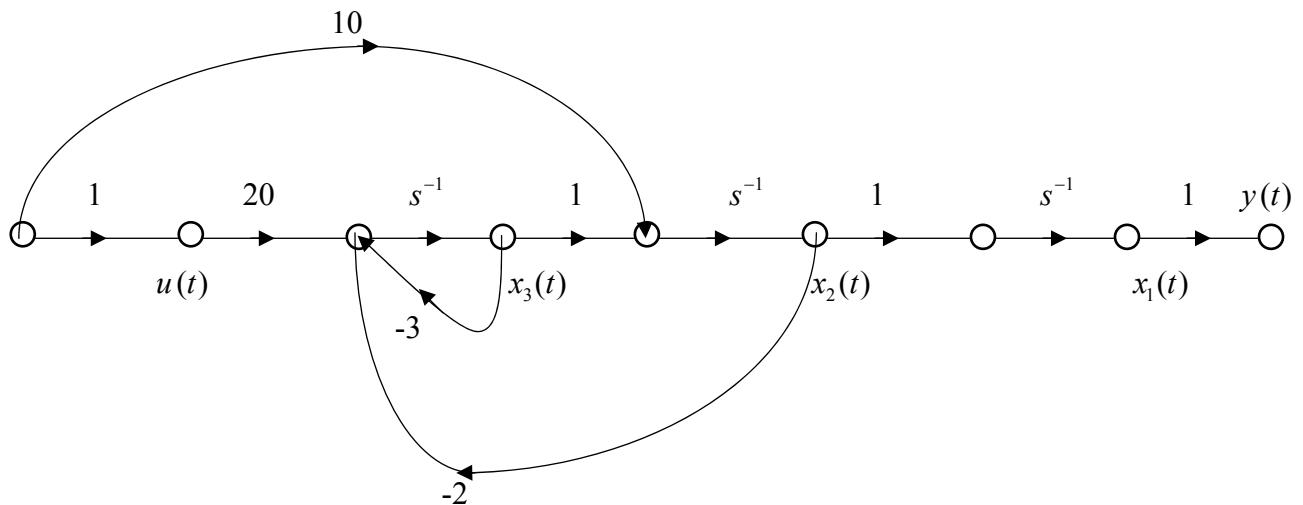


Figura 23

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 10 & 20 & -80 \\ 20 & -80 & 200 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rango}(S) = 3$$

Se desea que el sistema seguidor tipo 1 cumpla con las especificaciones siguientes:

- Que el error de estado estable al escalón de entrada sea nulo.
- Que el $t_E(2\%) \leq 2.25 \text{ seg.}$
- Que el $M_p(\%) \leq 5\%.$ -

$$\text{Para el } t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 2.25 \Rightarrow |\sigma| \geq 1.777$$

Se elegirá: $\sigma = -2$

Para que el $M_p(\%) \leq 5\% \rightarrow \delta \geq 0.69 \Rightarrow$ se elige: $\delta = 0.707.$ –

Por lo tanto el par de polos complejos conjugados dominantes será:

$$\lambda_{1-2} = -2 \pm j2$$

Se elegirá el tercer polo en $\lambda_3 = -5$, para cancelar el cero de la F.T. de la planta, por ende la ecuación característica deseada del sistema será:

$$(s+5)(s^2 + 4s + 8) = s^3 + 9s^2 + 28s + 40 = 0$$

y también, como se sabe:

$$|sI - A + BK| = s^3 + (3 + 10k_2 + 20k_3)s^2 + (2 + 10k_1 + 50k_2 - 20k_3)s + (50k_1) = 0$$

Los elementos de la matriz de realimentación serán:

$$50k_1 = 40 \rightarrow k_1 = 0.80$$

$$\begin{aligned} 2 + 10k_1 + 50k_2 - 20k_3 &= 28 \\ 3 + 10k_2 + 20k_3 &= 9 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 50k_2 - 20k_3 = 18 \\ 10k_2 + 20k_3 = 6 \end{cases}$$

Resolviendo se llega a: $k_2 = 0.40$ y $k_3 = 0.10$

En consecuencia: $K = [0.80 \quad 0.40 \quad 0.10]$

Las respuestas temporales $y(t)$ y $\bar{x}(t)$ se muestran en la figura 24 para una señal de referencia escalón unitario $r(t) = u_S(t)$, las matrices del sistema diseñado serán:

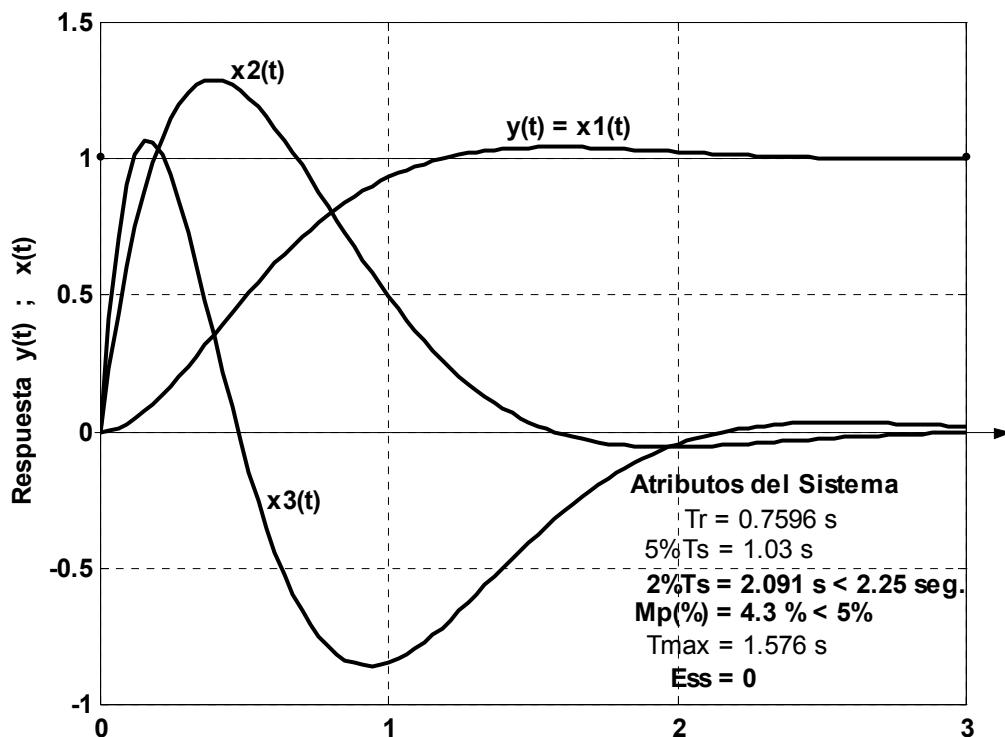


Figura 24:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ -16 & -10 & -5 \end{bmatrix} \quad Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} = k_1 B \quad y \quad Cc = [1 \quad 0 \quad 0] -$$

Como se determinó:

$$\bar{x}(\infty) = -(A - BK)^{-1} B k_1 R$$

$$\bar{x}(\infty) = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ -16 & -10 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \cdot R = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto: $y(\infty) = R$; $x_2(\infty) = 0$ y $x_3(\infty) = 0$, y también:

$$u(\infty) = -K\bar{x}(\infty) + k_1 R = -[0.80 \quad 0.40 \quad 0.10] \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.80 R = 0$$

En estado estable la señal de control es nula.-

Finalmente, este método se puede interpretar, (se verá en el próximo punto), como una realimentación total de *todos* los estados *más una ganancia de pre-compensación*, en donde *la misma es igual al primer elemento de la matriz de realimentación de todos los estados o sea $G = k_1$* . Como se sabe $u(t) = -K\bar{x}(t) + k_1 r(t)$, un diagrama de bloque sería el indicado en la figura 25, donde:

$$G = k_1$$

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

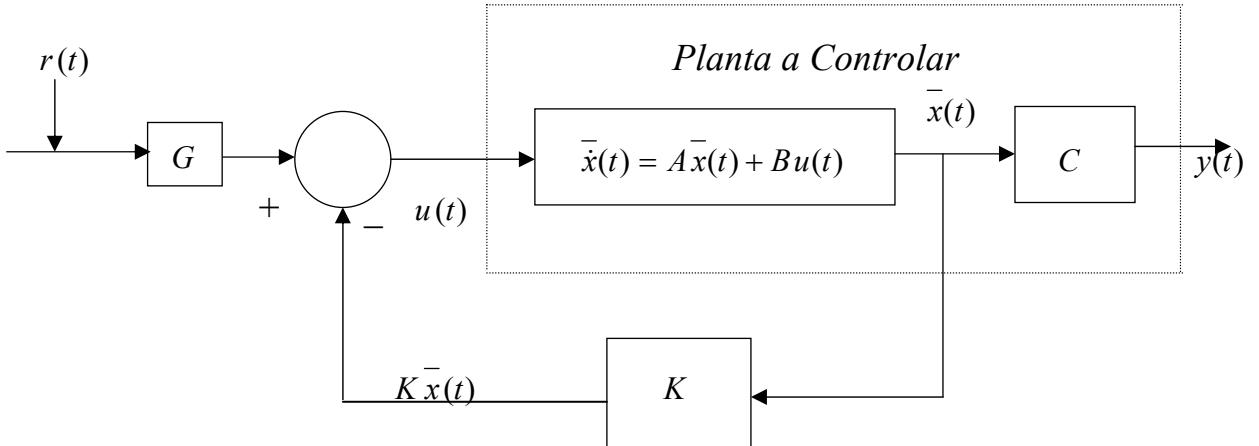


Figura 25

Se debe mantener en mente que *NUNCA* se debe intentar cancelar un cero de la función de transferencia de la planta en el semiplano derecho del plano s, ya que la cancelación exacta es prácticamente imposible, lo que resultaría en un sistema inestable evidentemente.-

Se verá a continuación un método general con una realimentación de todos los estados y una ganancia de pre-compensación para conseguir que la ganancia estática de la función de transferencia del sistema diseñado sea la unidad.-

Método General de Diseño con la Realimentación de los Estados y una Ganancia de Pre-compensación.

Un diagrama de bloques general con este tipo de diseño sería el mostrado en la figura 26.

De esta forma se podrán elegir todos los polos del sistema y ajustar la ganancia G para que el error de estado estacionario a una señal de referencia escalón sea nulo. La planta puede ser modelada de cualquier forma. Para determinar la ganancia de pre-compensación G se procede de tal forma que la ganancia estática de la función de transferencia del sistema de lazo cerrado sea la unidad, $M(0)=1$.

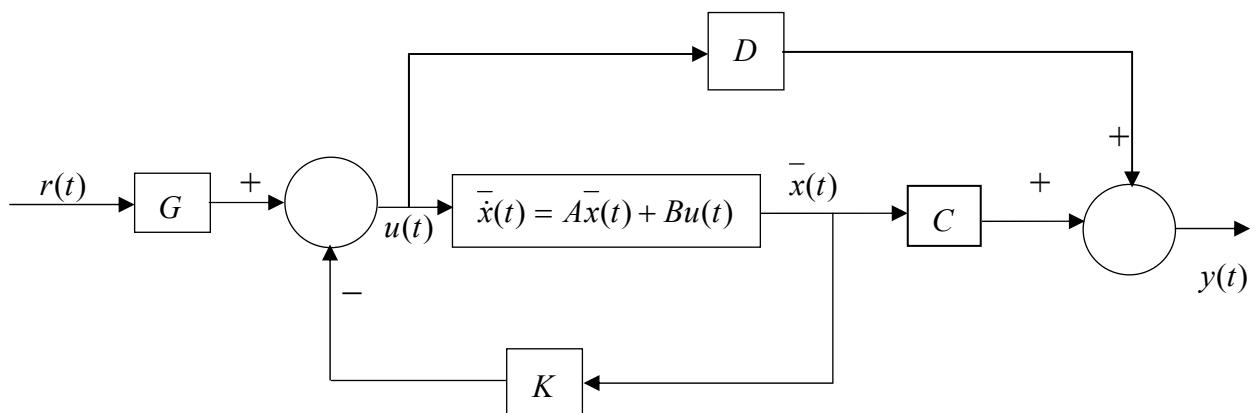


Figura 26

$$\text{Si } Gp(s) = \frac{Kp Np(s)}{Dp(s)} \Rightarrow M(s) = \frac{G Kp Np(s)}{D(s)}$$

Donde: $D(s)$ es la ecuación característica deseada.-

$$D(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

$$\text{y } Np(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 \quad \text{con } n \geq m.$$

Por lo tanto:

$$M(0) = \frac{G Kp b_0}{\alpha_0} = 1 \Rightarrow G = \frac{\alpha_0}{Kp b_0}$$

Para el ejemplo Nº 3, la ganancia de pre compensación G debería ser:

$$G = \frac{160}{140 \times 1} = \frac{8}{7} \approx \frac{1}{0.875}$$

En lugar de la unidad, ($G=1$), para que la salida alcance en régimen permanente la magnitud del escalón en $r(t)$, y ser así un seguidor tipo 1.-

Las matrices del modelo del sistema de lazo cerrado serán:

$$\bar{\dot{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t); \quad y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t)$$

$$con: u(t) = -K\bar{x}(t) + G r(t)$$

$$\bar{\dot{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + B(-K\bar{x}(t) + G r(t))$$

$$\bar{\dot{x}}(t) = (\bar{A} - \bar{B}K)\bar{x}(t) + (B G)r(t)$$

$$con: Ac = (\bar{A} - \bar{B}K) \quad y \quad Bc = (B G)$$

$$y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + D(-K\bar{x}(t) + G r(t))$$

$$y(t) = (\bar{C} - \bar{D}K)\bar{x}(t) + (DG)r(t)$$

$$con: Cc = (\bar{C} - \bar{D}K) \quad y \quad Dc = (DG)$$

$$Si \quad D = 0; \quad Cc = C \quad y \quad Dc = 0$$

Para determinar K , se procede como ya se explico anteriormente:

$$|sI - \bar{A} + \bar{B}K| = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_2s^2 + \alpha_1s + \alpha_0$$

De la última igualdad resultan n ecuaciones con n incógnitas: k_1, k_2, \dots, k_n . -

Ejemplo 7: Un proceso a controlar tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & 19 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [10 \quad 6 \quad 0.50] \quad y \quad D = 0$$

Diseñar un sistema de control seguidor tipo 1 para conseguir las especificaciones siguientes:

1º) Que el error de estado estacionario a entradas escalones sea nulo. -

2º) $t_E(5\%) \leq 1.25$ seg.

3º) $Mp(%) \leq 5\%.$ -

$$\text{La } Gp(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{0.5(s+2)(s+10)}{(s-1)(s-5)(s+4)} \Rightarrow \begin{cases} Kp = 0.50 \\ b_0 = 20 \end{cases}$$

Como la planta es controlable se pueden ubicar todos los polos del sistema en forma arbitraria.

Elección de la ubicación de los tres polos del sistema de control:

Para eliminar el efecto del cero en -2 se colocara un polo en: $\lambda_3 = -2$

Ahora se seleccionará un par complejo conjugado que domine la dinámica del sistema y cumpla con el transitorio al escalón deseado $\lambda_{1-2} = \sigma \pm j\omega_d$

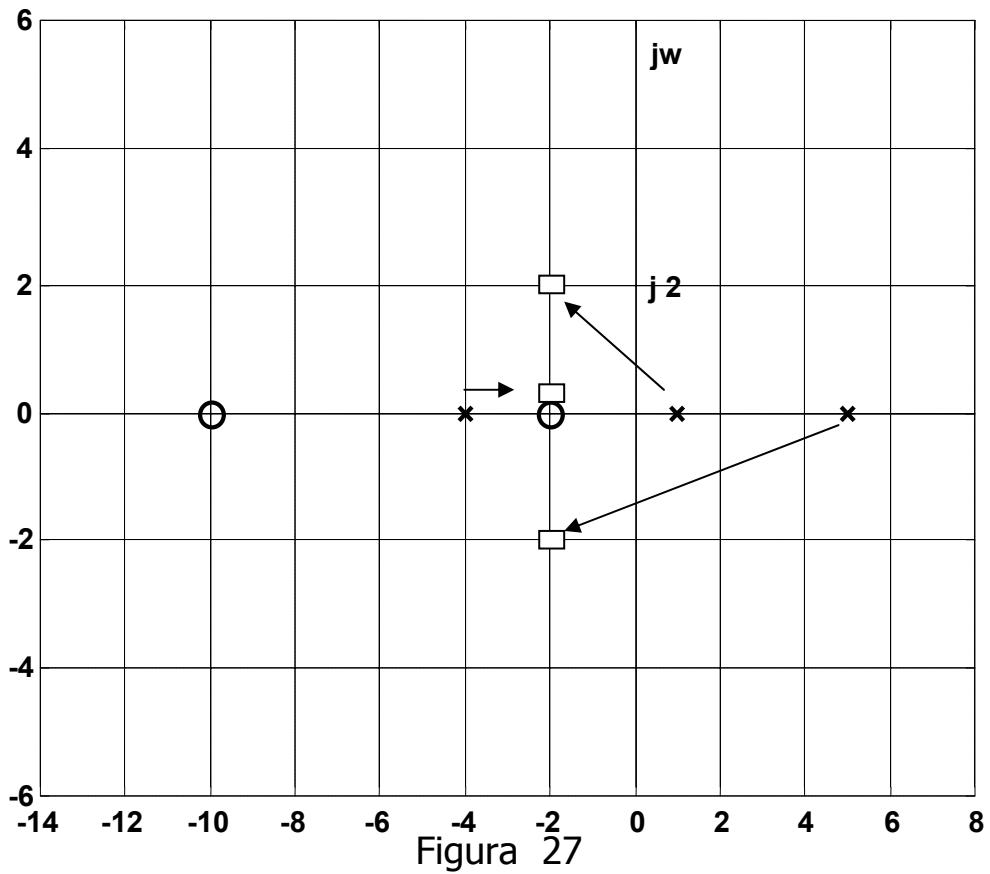
Como se pide $Mp(%) \leq 5\% \Rightarrow \delta \geq 0.69$; se elegirá: $\delta = 0.707.$ -

(Con lo cuál será $Mp(%) \approx 4.32\%$, el efecto del cero en -10 lo puede incrementar un poco, pero será despreciable).-

$$\text{Si } t_E(5\%) \approx \frac{4.5\delta^2}{|\sigma|} = \frac{2.25}{|\sigma|} \leq 1.25 \text{ seg.} \Rightarrow |\sigma| \geq 1.80$$

Se elegirá $\sigma = -2$, en consecuencia los polos deberán estar ubicados en:

$$\begin{cases} \lambda_{1-2} = -2 \pm j2 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases} \quad \text{Con un cero en } Z_2 = -10, \quad \text{ver figura 27:}$$



La ecuación característica deseada será:

$$(s+2)(s^2 + 4s + 8) = s^3 + 6s^2 + 16s + 16 = 0$$

y también:

$$|sI - A + BK| = s^3 + (k_3 - 2)s^2 + (k_2 - 19)s + (k_1 + 20) = 0$$

$$k_1 + 20 = 16 \rightarrow k_1 = -4$$

$$k_2 - 19 = 16 \rightarrow k_2 = 35$$

$$k_3 - 2 = 6 \rightarrow k_3 = 8 \quad \Rightarrow \quad K = [-4 \quad 35 \quad 8]$$

Además:

$$G = \frac{\alpha_o}{K p b_0} = \frac{16}{0.5 \times 20} = 1.60 \quad G = 1.60$$

También se podría aplicar el segundo método, a saber:

La ecuación característica deseada $\Rightarrow s^3 + 6s^2 + 16s + 16 = 0$

Por lo tanto: $\alpha_0 = 16 \quad \alpha_1 = 16 \quad y \quad \alpha_2 = 6$.

De la ecuación característica de la planta: $a_0 = 20 \quad a_1 = -19 \quad y \quad a_2 = -2$.

$$K = [\alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1 \quad \alpha_2 - a_2] P^{-1}$$

Como en este caso $P = I$, la matriz de realimentación será:

$$K = [16 - 20 \quad 16 - (-19) \quad 6 - (-2)] \Rightarrow K = [-4 \quad 35 \quad 8]$$

Graficando la salida $y(t)$ y los estados $\bar{x}(t)$ para una señal de referencia $r(t) = u_s(t)$, resulta el grafico de la figura 28.

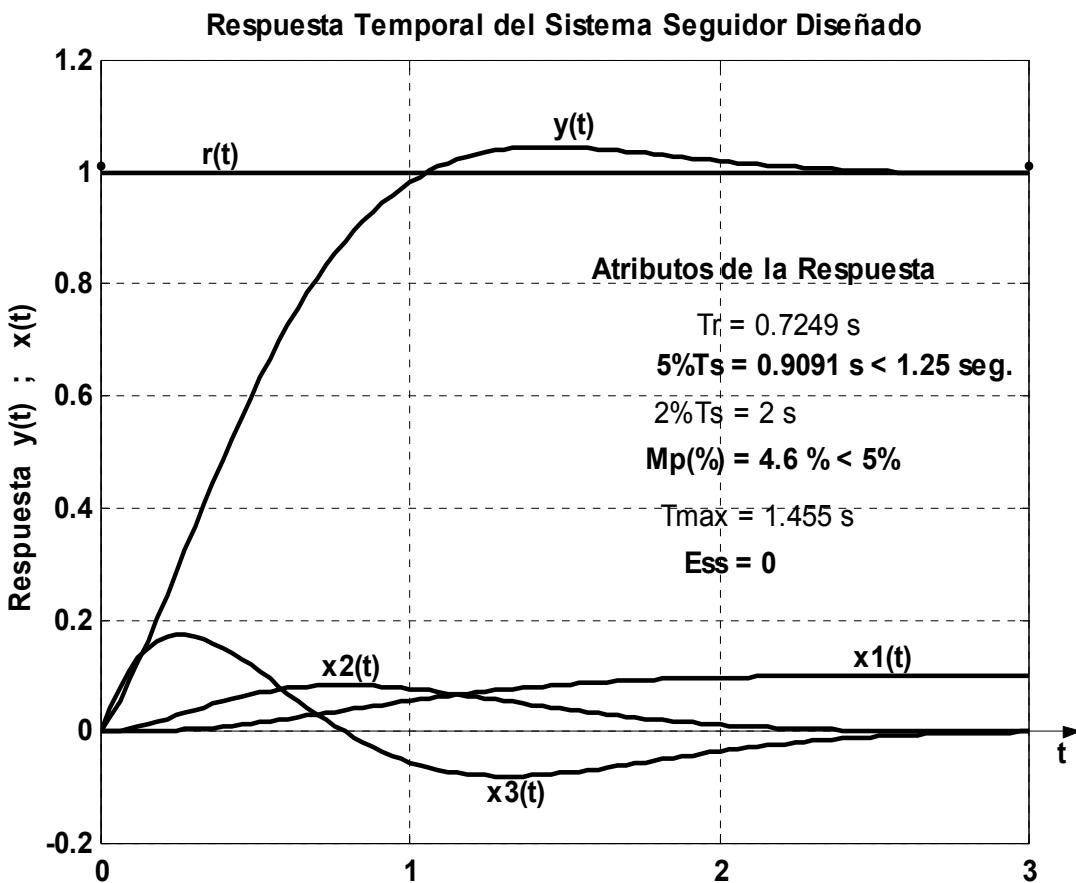


Figura 28 :

Diseño de un Sistema de Seguimiento “Tipo 1” con un Control Integral

Por lo general, el diseño del sistema de control mediante la realimentación de los estados solamente produce, como se dijo, un sistema tipo cero, de modo que como se sabe, un sistema de este tipo sería incapaz de seguir sin error a una señal de referencia escalón en la entrada. Si la planta no posee un integrador y la señal de referencia fuera el escalón, el sistema debería contar, en su función de transferencia del camino directo con un integrador, (sistema tipo 1), para poder seguir sin error a las señales de entrada escalón.

De lo dicho anteriormente es fácil deducir que para lograr que un sistema de control diseñado mediante la ubicación de los polos por la realimentación de los estados pueda seguir una señal de referencia tipo escalón, se ha de insertar un integrador en la trayectoria directa entre los comparadores del error y el que obtiene la acción de control $u(t)$.

En la figura 29 se muestra un sistema de control con realimentación de los estados capaz de seguir sin error una señal de referencia escalón, (error de posición nulo).-

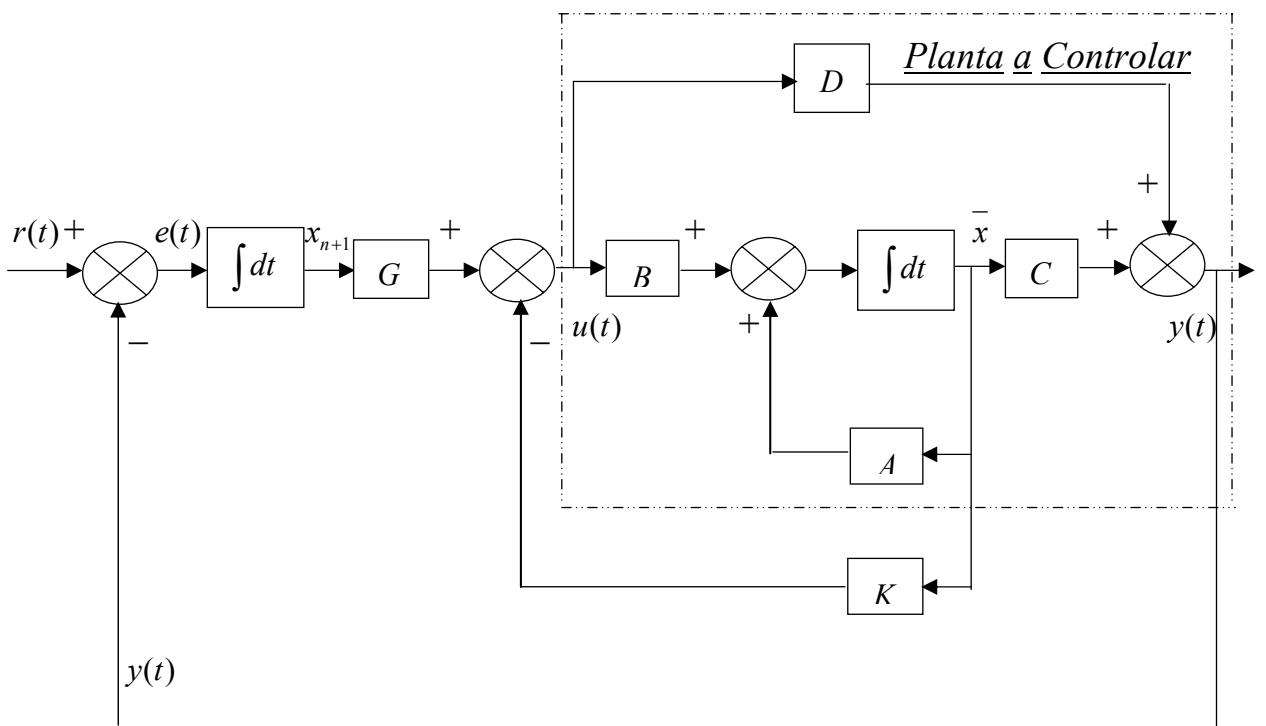


Figura 29

Nótese como el integrador aumenta en uno el orden del sistema. La nueva variable de estado que incorpora el integrador al sistema se llamará como $x_{(n+1)}(t)$.

Las ecuaciones que modelan al sistema, planta mas integrador son:

$$\bar{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = C\bar{x}(t) + Du(t) \quad (2)$$

$$\dot{x}_{(n+1)}(t) = r(t) - y(t) \quad (3)$$

donde $\bar{x}(t)$ es el vector de estado de dimensión "n", y $r(t)$ e $y(t)$ son la señal de referencia y de salida,(escalares), respectivamente.

Se supondrá que la planta es de estado completamente controlable, y además que la función de transferencia de la misma no tiene ceros en el origen, derivadores, para evitar la posibilidad de que el integrador insertado se cancele con dicho cero de $Gp(s)$. La señal de control escalar $u(t)$ depende de las realimentaciones de los estados e integral mediante:

$$u(t) = -K\bar{x}(t) + Gx_{(n+1)}(t) \quad (4)$$

$$K = [k_1 \ k_2 \ . \ . \ . \ k_n] \quad (5)$$

Donde K es la matriz de realimentación de los estados de la planta, y G la ganancia escalar del control integral.

Introduciendo la ecuación (2) en la (3), se puede escribir el modelo de estado de orden ($n+1$), como:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) + \bar{r}(t) \\ \dot{x}_{(n+1)}(t) = r(t) - C\bar{x}(t) - Du(t) \end{cases} \quad \bar{r} \Rightarrow \text{Es un vector nulo de dimensión (nx1).}$$

o en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \dot{x}_{(n+1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ x_{(n+1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

Se definirá:

$$\bar{x}^*(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ x_{(n+1)}(t) \end{bmatrix} ; \quad \dot{\bar{x}}^*(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \dot{x}_{(n+1)}(t) \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} \quad (6)$$

La dimensión de $\bar{x}^*(t)$ es $(n+1) \times 1$, la de A^* $(n+1) \times (n+1)$, la de B^* $(n+1) \times 1$ y finalmente de C^* $1 \times (n+1)$. Con estas definiciones la ecuación de estado se puede escribir así:

$$\dot{\bar{x}}^*(t) = A^* \bar{x}^*(t) + B^* u(t) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

Para obtener la ecuación de estado del sistema de lazo cerrado, basta con sustituir en la expresión anterior la ecuación (4):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}^*(t) &= A^* \bar{x}^*(t) + B(-K \bar{x}(t) + G x_{(n+1)}(t)) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ &= A^* \bar{x}^*(t) - B^* K \bar{x}(t) + B^* G x_{(n+1)}(t) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ &= A^* \bar{x}^*(t) + \begin{bmatrix} -B^* K & B^* G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ x_{(n+1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ &= A^* \bar{x}^*(t) - B^* [K \quad -G] \bar{x}^*(t) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\dot{\bar{x}}^*(t) = (A^* - B^* K^*) \bar{x}^*(t) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

donde:

$$Ac = (A^* - B^* K^*)$$

$$Bc = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad K^* = [K \quad -G] = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n \quad -G] \quad (7)$$

Finalmente:

$$\dot{\bar{x}}^*(t) = Ac \bar{x}^*(t) + Bc r(t) \quad (8)$$

Respecto a la ecuación de salida, teniendo en cuenta que ahora el vector de estado es $\bar{x}^*(t)$, se puede escribir a partir de (2) y (6), que:

$$y(t) = C \bar{x}(t) + 0 x_{(n+1)}(t) + D (-K \bar{x}(t) + G x_{(n+1)}(t))$$

$$y(t) = [(C - D K) \quad D G] \bar{x}^*(t) + 0 r(t)$$

La ecuación de salida será:

$$y(t) = C^* \bar{x}^*(t) + 0r(t)$$

Por lo tanto las matrices del sistema de control diseñado, o de lazo cerrado, serán en consecuencia las siguientes:

$$Ac = A^* - B^* K^*$$

$$Bc = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Cc = C^* = [(C - DK) \quad DG] \rightarrow \text{si } D = 0 \Rightarrow Cc = [C \quad 0]$$

$$Dc = [0]$$

Se puede expresar a la matriz Ac en función de las matrices:

A, B, C, D, K y G .

$$Ac = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} BK & -BG \\ -DK & -DK \end{bmatrix}$$

$$Ac = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ DK - C & -DG \end{bmatrix} \rightarrow \text{si } D = 0 \Rightarrow Ac = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ -C & 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que la ecuación característica del sistema es $|sI - A^* + B^* K^*| = 0$,

queda claro que si la matriz de la controlabilidad:

$$S^* = [B^* \quad A^* B^* \quad A^{*2} B^* \quad \dots \quad A^{*n} B^*] \quad (9)$$

tiene rango ($n+1$), la ecuación:

$$|sI - A^* + B^* K^*| = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)(s - \lambda_{n+1}) \quad (10)$$

permite ubicar todos los polos del sistema de lazo cerrado en los lugares deseados impuestos por las especificaciones de funcionamiento pedidas.-

Nota: Comprobar que el par (A^*, B^*) es controlable es equivalente a

verificar que el rango de la matriz $H = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix}$ sea igual a $(n+1)$, la

demonstración se hará a continuación:

Si el par (A, B) de la planta es controlable, la matriz:

$$S = [B \quad AB \quad A^2 B \quad \dots \quad A^{n-1} B], \text{ debe tener rango igual a } n.$$

Por lo tanto la matriz:

$$\begin{bmatrix} S & \bar{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ deberá tener rango igual a } (n+1).$$

Considerando la ecuación siguiente:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & \bar{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AS & B \\ -CS & -D \end{bmatrix} \quad (11)$$

Si la matriz H , tiene rango igual a $(n+1)$, el primer miembro de la ecuación (11) será de rango igual a $(n+1)$. Por lo tanto el segundo miembro de (11), también tendrá $(n+1)$. Dado que:

$$\begin{bmatrix} AS & B \\ -CS & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A[B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B] & B \\ -C[B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B] & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [AB & A^2B & \dots & A^nB] & B \\ [-CB & -CAB & \dots & -CA^{n-1}B] & -D \end{bmatrix}$$

La primera columna, $\begin{vmatrix} AB \\ -CB \end{vmatrix}$, es igual a, A^*B^* , la segunda es, $A^{*2}B^*$, etc., la penúltima, $A^{*n}B^*$, y la última, B^* , por ende quedará:

$$\begin{bmatrix} AS & B \\ -CS & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^*B^* & A^{*2}B^* & \dots & A^{*n}B^* & B^* \end{bmatrix}$$

Para determinar su rango, reordenamos de la manera siguiente, colocamos a B^* como la primera columna:

$$Rango \left\{ \begin{bmatrix} B^* & A^*B^* & A^{*2}B^* & \dots & A^{*n}B^* \end{bmatrix} \right\} = Rango (S^*)$$

Encontramos que el rango de S^* es $(n+1)$. Por lo tanto el par (A^*B^*) , será controlable, si como se supuso el rango de la matriz H es $(n+1)$.

Con lo cual queda demostrado que si el rango de la matriz H es $(n+1)$ el par (A^*B^*) es controlable.-

En la ecuación (10) hay $(n+1)$ incógnitas, k_1, k_2, \dots, k_n y G y $(n+1)$ coeficientes conocidos elegidos por el diseñador, con lo cual para determinar K^* , basta con igualar los coeficientes de la misma potencia de s.-

Régimen en Estado Estable:

Los valores en estado estable de $\bar{x}(t)$, $x_{n+1}(t)$ y $u(t)$ se encuentran del modo siguiente, en estado estable, ($t \rightarrow \infty$), a partir de las ecuaciones (1) y (3), se tendrá que:

$$\begin{cases} \bar{x}(\infty) = \bar{0} = A\bar{x}(\infty) + Bu(\infty) \\ \dot{x}_{n+1}(\infty) = 0 = R - C\bar{x}(\infty) - Du(\infty) \end{cases} \quad \text{si } r(t) = Ru_S(t) \Rightarrow r(\infty) = R$$

Una ecuación matricial seria:

$$\begin{bmatrix} \bar{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ R \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ -R \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad H = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix}$$

Si la matriz, H , tiene rango $(n+1)$, (como se demostró anteriormente para poder ubicar los polos del sistema en forma arbitraria), existirá la inversa de la misma y en consecuencia, se tendrá:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ -R \end{bmatrix} \quad (12)$$

Así mismo a partir de la ecuación (4):

$$u(\infty) = -K \bar{x}(\infty) + G x_{n+1}(\infty)$$

$$G x_{n+1}(\infty) = u(\infty) + K \bar{x}(\infty)$$

Por lo tanto:

$$x_{n+1}(\infty) = \frac{1}{G} [u(\infty) + K \bar{x}(\infty)] \quad (13)$$

Las expresiones (12) y (13) permiten encontrar lo propuesto, o sea:
 $\bar{x}(\infty); \quad x_{n+1}(\infty); \quad y \quad u(\infty)$.-

Ejemplo 8:

Dada la planta definida por:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = [1 \quad 0] \bar{x}(t)$$

Se tratará de diseñar un sistema seguidor mediante la realimentación de los estados con un control integral que permita el seguimiento sin error de una señal de referencia tipo escalón. Los objetivos de diseño son además que:

- El $M_p(\%)$ en la respuesta $y(t)$ debe ser menor o igual a 5%.-
- El $t_E(2\%) \leq 4.50$ seg.
- El error de estado estable a entradas rampas de pendientes unitarias no supere el valor de 1.10

Se tratará que dos polos sean complejos conjugados dominantes y el tercero en consecuencia alejado hacia la izquierda del plano s. Por ello se podrá utilizar, para un sistema prototípico de segundo orden, la fórmula aproximada del tiempo de establecimiento y de la sobreelongación porcentual de la respuesta de salida.

Lo primero que hay que hacer es verificar que los pares (A, B) y (A^*, B^*) sean controlables:

- Para el par $(A, B) \rightarrow S = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} \rightarrow |S| = -1 \Rightarrow \text{Rango}(S) = 2.$

Para el par (A^*, B^*) , será:

$$(A^*, B^*) \rightarrow S^* = \begin{bmatrix} B^* & A^* B^* & A^{*2} B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -25 \\ 1 & -25 & 625 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|S^*| = 1 \Rightarrow \text{Rango}(S^*) = (n+1) = 3$$

Esto último también se puede hacer determinando el rango de la matriz H:

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -25 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |H| = -1 \Rightarrow \text{Rango de } H = 3.$$

El diseño se llevará a cabo, pues los valores característicos de $(sI - Ac)$ se podrán colocar en los lugares deseados.-

Ubicación de los tres polos del sistema:

Para que $M_p(\%) \leq 5\% \rightarrow \delta \geq 0.69$ se elegirá $\Rightarrow \delta = 0.707 \rightarrow \omega_d = |\sigma|$

Para que $t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 4.5 \text{ seg.} \rightarrow |\sigma| \geq 0.888$ se elige $\Rightarrow \sigma = -1.$ -

Por lo tanto los polos dominantes serán:

$$\lambda_{1-2} = -1 \pm j$$

Para que sean dominantes deberá ser $\lambda_3 \leq 5\sigma \rightarrow \lambda_3 \leq -5$ (*)

Pero para que se cumpla la especificación de error a la rampa, como el sistema no tendrá ceros, el tercer polo deberá cumplir la condición a determinar.

La ecuación característica deseada será:

$$(s - \lambda_3)(s^2 + 2s + 2) = s^3 + (2 - \lambda_3)s^2 + (2 - 2\lambda_3)s + (-2\lambda_3)$$

El error a la rampa unitaria en la entrada será:

$$e(\infty) = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{(2 - 2\lambda_3)}{-2\lambda_3} \leq 1.10 \rightarrow \lambda_3 \leq -10 \quad (**)$$

Interceptando las condiciones (*) y (**), resultará que $\lambda_3 \leq -10.00$

se puede elegir en consecuencia: $\underline{\lambda_3 \leq -10}$

Por ende la ecuación característica será:

$$(s + 10)(s^2 + 2s + 2) = s^3 + 12s^2 + 22s + 20 = 0$$

También la ecuación característica es: $|sI - Ac| = 0$

$$Ac = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ DK - C & -DG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ -C & 0 \end{bmatrix} \text{ pues } D = 0 : \text{Donde: } K = [k_1 \ k_2]$$

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -25 - k_2 & G \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$|sI - Ac| = \left| \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ k_1 & s + 25 + k_2 & -G \\ 1 & 0 & s \end{bmatrix} \right| = s^3 + (25 + k_2)s^2 + (k_1)s + G = 0$$

Resolviendo:

$$G = 20; \quad k_1 = 22 \quad y \quad k_2 = -13$$

Los parámetros de diseño serán:

$$K = [22 \ -13] \quad y \quad G = 20$$

Para verificar si se cumplen las especificaciones pedidas se grafican la respuesta del sistema $y(t)$ al escalón unitario y los atributos de la misma.

Como se puede apreciar se cumplen todas las especificaciones solicitadas.

Para tal fin se puede utilizar la función Svddesign del Csad/Matlab, o emplear la función Step de Matlab entre varias posibilidades.-

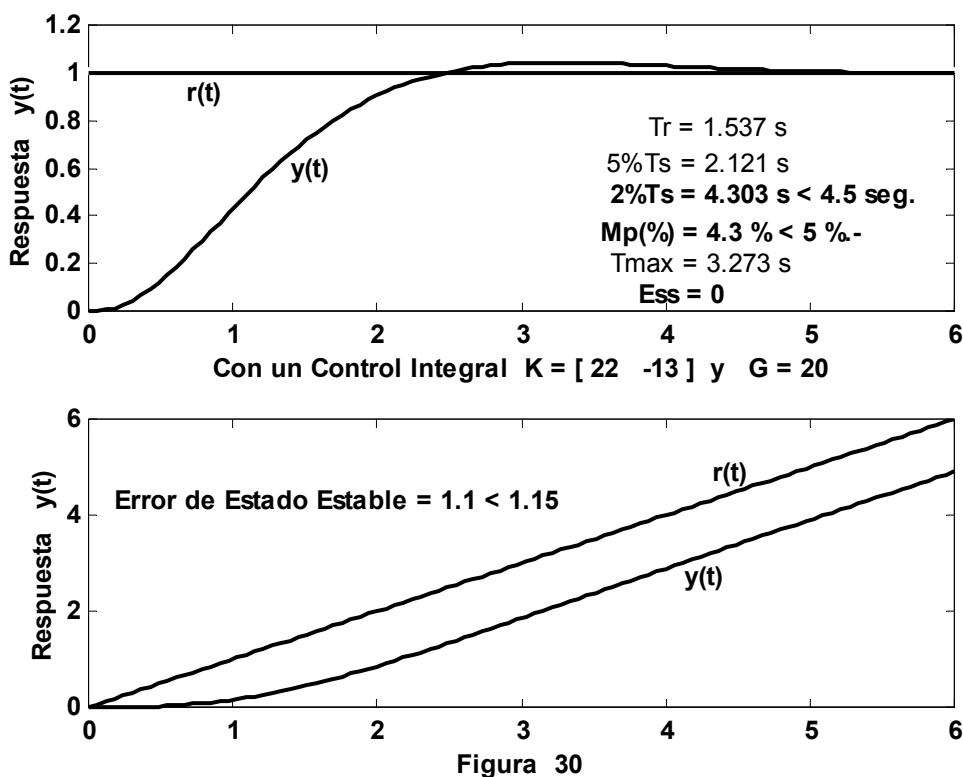
Las matrices del sistema de control diseñado serán:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -22 & -12 & 20 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Cc = [1 \ 0 \ 0] \quad Dc = 0.$$

La función de transferencia del sistema es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = Cc(sI - Ac)^{-1} Bc = \frac{20}{s^3 + 12s^2 + 22s + 20}.$$

Las respuestas a las señales de referencia escalón unitario y rampa de pendiente unitaria se muestran en la figura 30, como se observa se satisfacen todas las especificaciones pedidas.-



Determinaremos ahora los valores de estado estable: $\bar{x}(\infty); x_{n+1}(\infty)$ y $u(\infty)$:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 25 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ por ende: } \begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = H^{-1} \times \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $R=1$, será: $x_1(\infty)=1; x_2(\infty)=0$ y $u(\infty)=0$

Con lo cual se comprueba que en efecto, la salida sigue sin error a la señal de referencia, pues como:

$$C = [1 \ 0 \ 0]; \quad y(t) = x_1(t) \text{ en todo momento.}$$

En consecuencia: $y(\infty)=1$

Por último el valor de estado estacionario de $x_3(t)$ se puede obtener aplicando la ecuación:

$$x_3(\infty) = \frac{1}{G} [u(\infty) + K \bar{x}(\infty)] = \frac{1}{20} \left[0 + [22 \quad -13] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \frac{22}{20}$$

$$x_3(\infty) = 1.10.$$

Todo esto se aprecia en la figura 31.

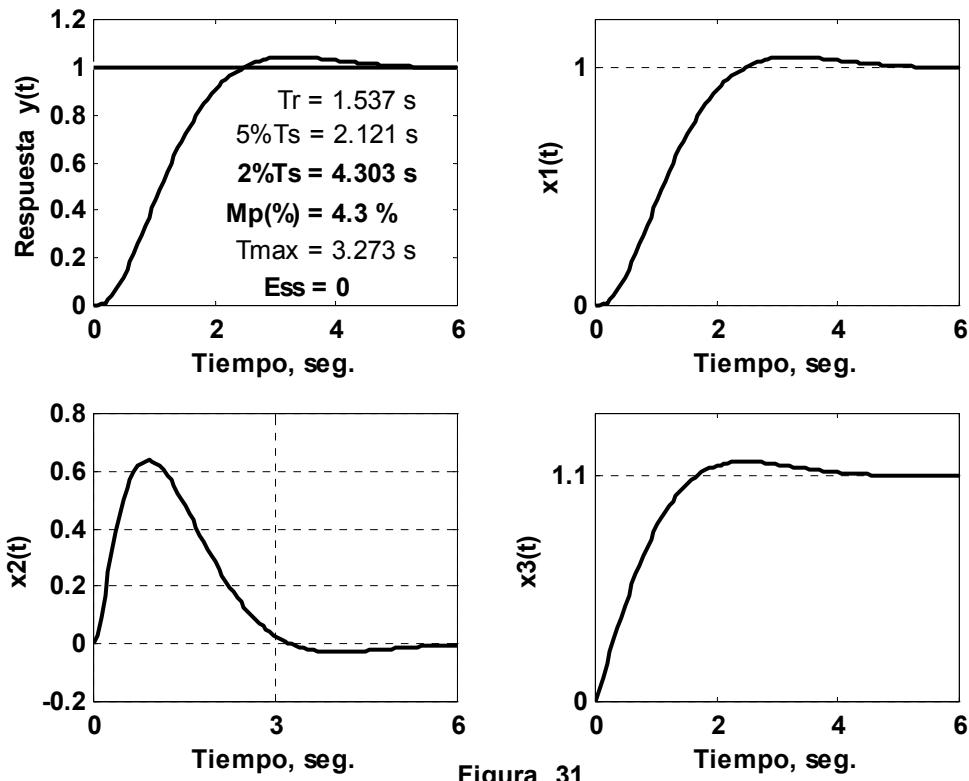


Figura 31

Ejemplo 9:

Consideremos una planta que tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D = 0$$

Diseñar un sistema seguidor por medio de la realimentación de los estados más un control integral para que se cumplan las especificaciones siguientes:

- Error de estado estable a entradas rampas unitarias no superior a 0.625
- La sobreelongación de la salida al escalón unitario $M_p(%) < 5\%$.
- El tiempo de establecimiento al (2%) inferior a 1.20 segundos.

Como la planta es controlable, pues el modelo está en la forma canónica controlable, hay que verificar que el par (A^*, B^*) sea controlable:

$$A^* = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -19 & -8 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B^* = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$S^* = \begin{bmatrix} B^* & A^*B^* & A^{*2}B^* & A^{*3}B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -8 & 45 \\ 1 & -8 & 45 & -220 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow |S^*| = 4; \text{Rango}(S^*) = 4$$

También se puede hacer esto con la matriz, H , verificando que su rango es $(n+1)=3+1=4$.

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -19 & -8 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |H| = 4 \Rightarrow \text{Rango}(H) = 4$$

Por lo tanto se podrán ubicar los polos del sistema diseñado en forma arbitraria.-

Elección de los Polos Deseados:

$$\text{Como } G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)} \rightarrow \begin{cases} Kp = 2 \\ b_0 = 2 \end{cases}$$

Se puede elegir un polo en -2 para cancelar el cero de la planta $\rightarrow \lambda_3 = -2$

Se elegirá un par de polos complejos dominantes $\lambda_{1-2} = ?$.

Como $M_p(\%) \leq 5\% \rightarrow$ Se elige $\delta = 0.707$

$$\text{Como } t_e(5\%) \approx \frac{4.5\delta^2}{|\sigma|} \leq 1.2 \text{ seg} \rightarrow \frac{2.25}{|\sigma|} \leq 1.2 \rightarrow |\sigma| \geq 1.875$$

si se elige: $\sigma = -2 \rightarrow \lambda_{1-2} = -2 \pm j2$

El cuarto polo $\lambda_4 = ?$ se deberá elegir para que $|\lambda_4| \geq 5|\sigma|$, y además cumpla que $e_{EE} \leq 0.625$ (para entrada rampa unitaria). La ecuación característica será, luego de cancelado el cero en -2 por el polo λ_3 la siguiente:

$$(s - \lambda_4)(s^2 + 4s + 8) = s^3 + (4 - \lambda_4)s^2 + (8 - 4\lambda_4)s + (-8\lambda_4) = 0$$

como la función de transferencia del sistema no tendrá ceros será :

$$e_{EE} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{8 - 4\lambda_4}{-8\lambda_4} \leq 0.625$$

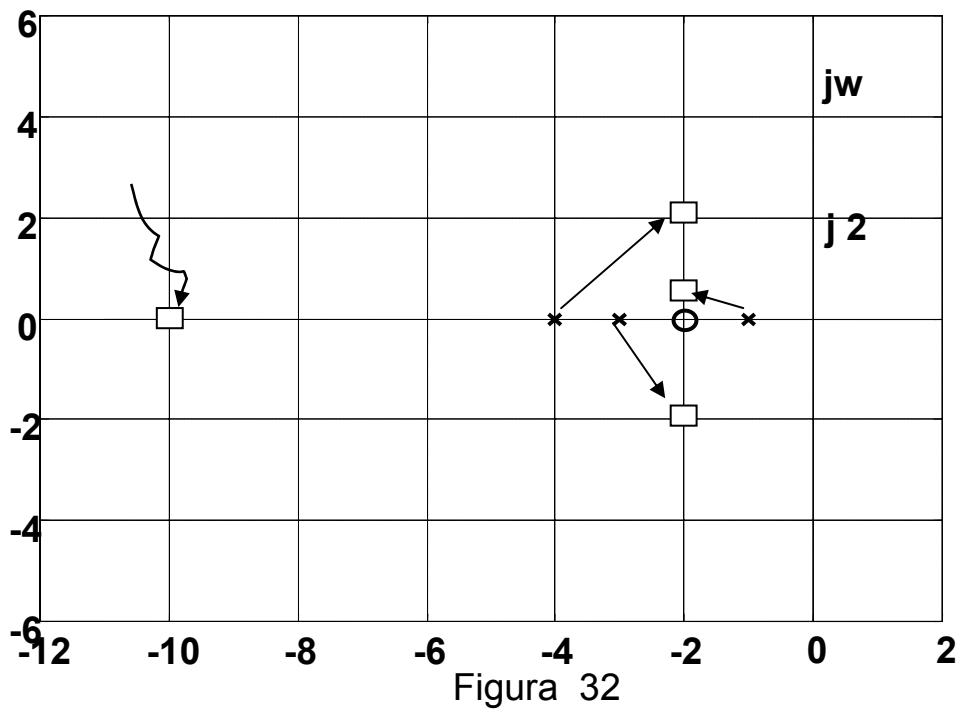
$$\therefore 8 - 4\lambda_4 \leq -5\lambda_4 \rightarrow \lambda_4 \leq -8$$

Se eligira $\rightarrow \lambda_4 \leq -10$ para que $|\lambda_4| \geq 5|\sigma|$

Si se elige esa ubicación λ_{1-2} será dominante además con:

$\lambda_4 = -10$ (y el error será de $0.60 < 0.625$)

La figura 32, ilustra el movimiento requerido de los polos.



La ecuación característica deseada será:

$$(s+2)(s+10)(s^2 + 4s + 8) = s^4 + 16s^3 + 76s^2 + 176s + 160 = 0$$

También:

$$A_c = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 - k_1 & -19 - k_2 & -8 - k_3 & G \\ -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A_c| = s^4 + (8 + k_3)s^3 + (19 + k_2)s^2 + (2G + 12 + k_1)s + (4G) = 0$$

$$\therefore 4G = 160 \quad \rightarrow \quad G = 40$$

$$2G + 12 + k_1 = 176 \quad \rightarrow \quad k_1 = 84$$

$$19 + k_2 = 76 \quad \rightarrow \quad k_2 = 57$$

$$8 + k_3 = 16 \quad \rightarrow \quad k_3 = 8$$

$$K = [84 \ 57 \ 8] \quad y \quad G = 40$$

Las matrices del sistema de lazo cerrado serán:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -96 & -76 & -16 & 40 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Cc = [C \quad 0] = [4 \quad 2 \quad 0 \quad 0] \quad y \quad Dc = [0]$$

Las respuestas $y(t)$ y de los estados, se muestran en la figura 33 a.

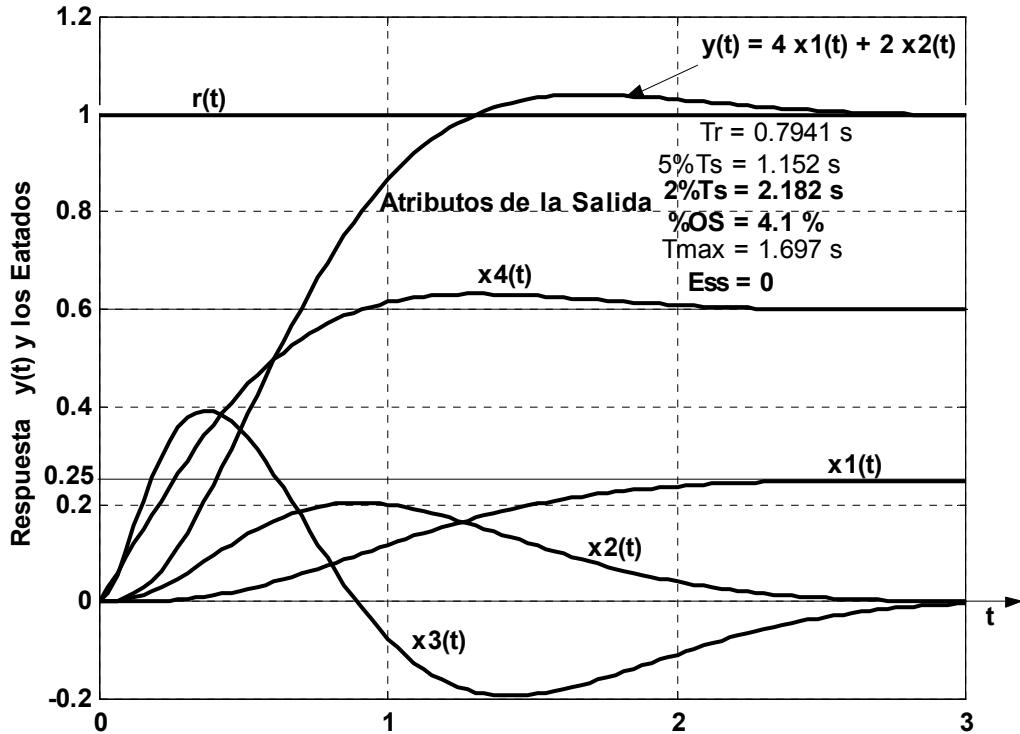


Figura 33 a

Obtenidas con el programa svdesign del Csad/MatLab. Además se muestran los atributos del sistema diseñado, (de $y(t)$), al escalón unitario en la referencia $r(t)$.

Como se puede apreciar se cumplen todas las especificaciones solicitadas.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ -R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25R \\ 0 \\ 0 \\ 3R \end{bmatrix} \quad \text{si } R = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1(\infty) = 0.25 \\ x_2(\infty) = 0 \\ x_3(\infty) = 0 \\ u(\infty) = 3 \end{cases}$$

$$y(\infty) = \bar{Cx}(\infty) = [4 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y(\infty) = 1$$

$$x_4(\infty) = \frac{1}{40} \left\{ 3 + [84 \quad 57 \quad 8] \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad x_4(\infty) = 0.60$$

Como se puede apreciar se cumplen todas las especificaciones de diseño. También para la $r(t) = t_{us}(t) \rightarrow e_{EE} = 0.6 < 0.625$

Determinación de la Matriz de Realimentación de los Estados, K, y de la Ganancia Integral G, con la función Svdesign del Csad/MatLab.

Si se usa la opción *Integral&State* del menú principal hay que tener cuidado, pues ella solo se puede aplicar si la matriz D de la planta es nula, es decir mas polos que ceros en $G_p(s)$.

Si $D \neq 0$ se puede emplear la opción del menú *State Feedback* ingresando las matrices A^* y B^* , (la matriz C puede ser cualquiera), para obtener la matriz $K^* = [K \quad -G]$. También se puede usar el álgebra matricial en MatLab.

Veamos el ejemplo anterior con Svdesign, luego de entrar las matrices de la planta A, B y C, se llama a la opción *Integral&State* del menú:

----- *SVDESIGN OPTIONS* -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > i

Enter vector of 4 desired pole locations > [-2 -2-2i -2+2i -10]

State feedback with integral control is:

$$u = -Kx + G * \text{integral}(r - y)$$

K =

$$\begin{matrix} 84 & 57 & 8 \end{matrix}$$

$$G = 40$$

Pole Locations

Desired	Achieved
-2.0000	-2.0000
-2.0000 - 2.0000i	-2.0000 - 2.0000i
-2.0000 + 2.0000i	-2.0000 + 2.0000i
-10.0000	-10.0000

Update current state variable matrices? (y/n) [y] >

Con la opción *Display System*, se pueden ver las matrices de lazo cerrado del sistema:

SVDESIGN > d

Display Current,Original,or Both Systems? [c] >

Current system is:

A matrix is:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -96 & -76 & -16 & 40 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \end{matrix}$$

B matrix is:

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

C matrix is:

$$\begin{matrix} 4 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Podemos graficar la respuesta $y(t)$ y de los estados con una entrada de referencia escalón unitario, procediendo como ya se sabe se obtienen las respuestas de la figura 34.

También se podrían graficar las respuestas del sistema trabajando como regulador, con unas condiciones iniciales dadas, por ejemplo:

$$\bar{x}(0) = \{-2; 1; -1; 0\}$$

Procediendo como ya se indicó, se muestran en la figura 35.

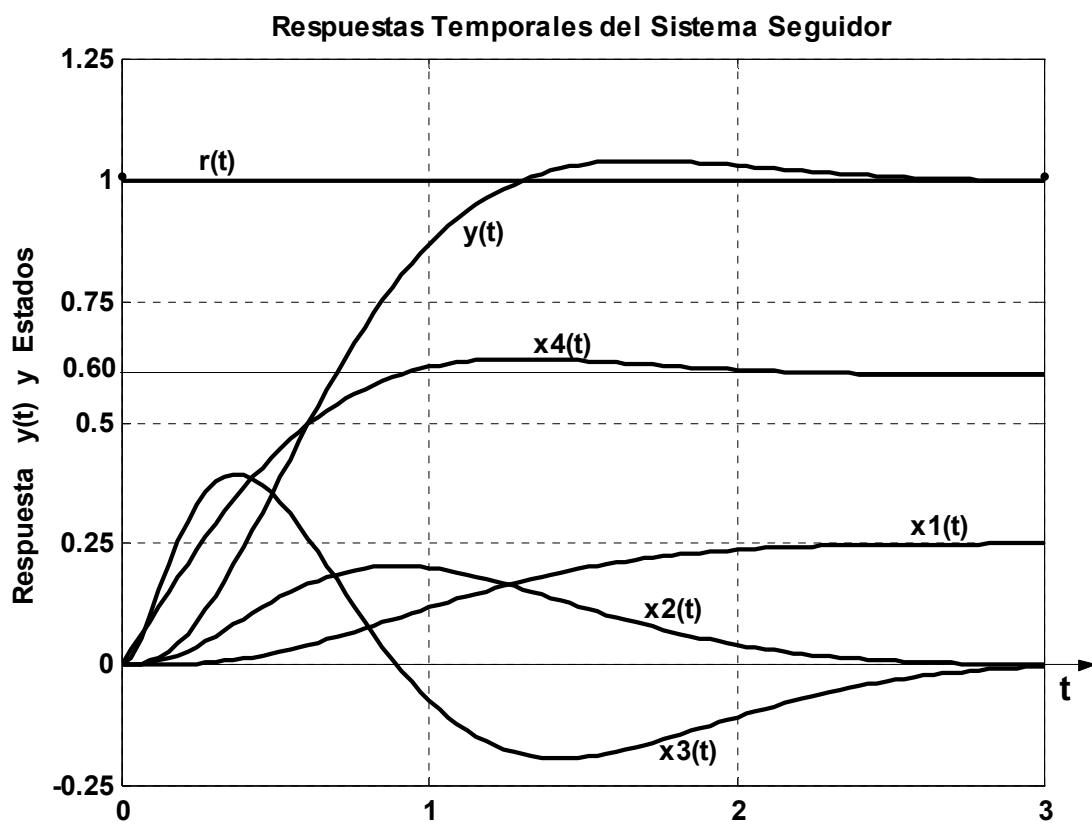


Figura 34

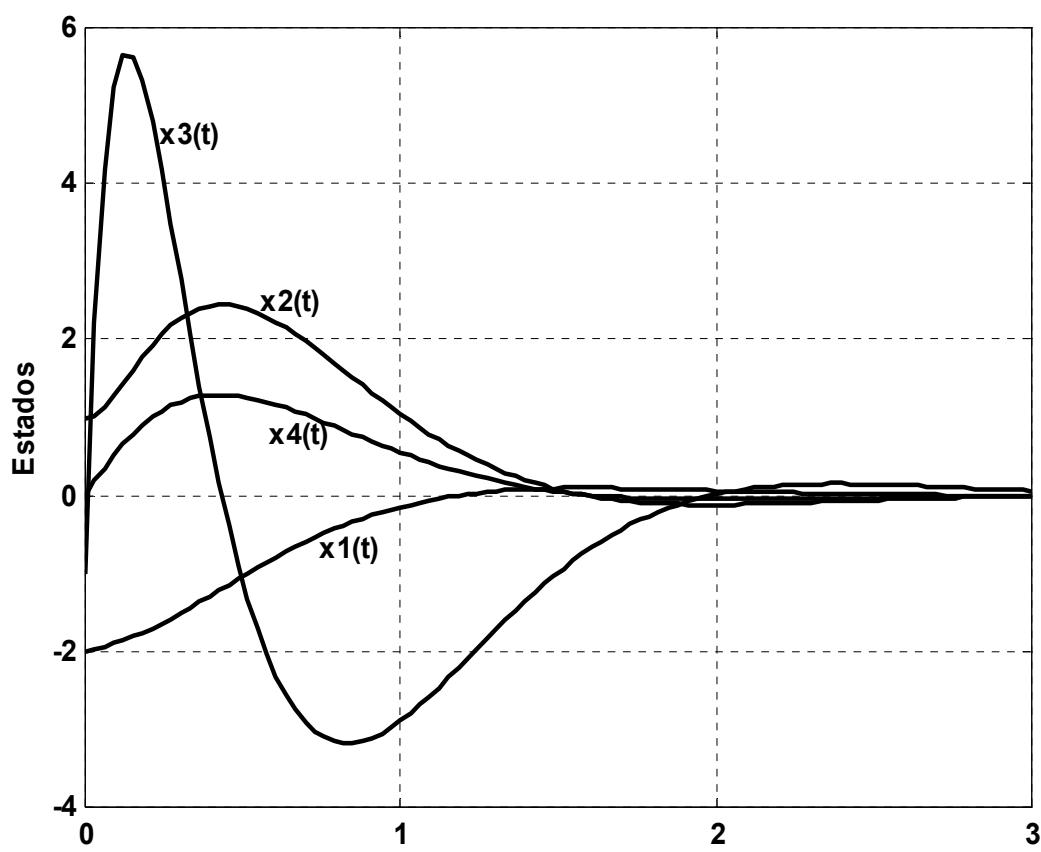


Figura 35

Ejemplo 10:

Una planta tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad D = 0 \rightarrow F.C.C$$

Las especificaciones del sistema seguidor son:

- Que el error de estado estacionario al escalón de entrada sea nulo.
- Que el $M_p(\%) \leq 5\%.$
- Que el $t_E(5\%) \leq 5\text{seg.}$

Se vera primero si el par (A^*, B^*) , es controlable:

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango de } (H) = 4.$$

Por ende se podrán ubicar los cuatro polos, (con el control integral), arbitrariamente:

Como $M_p(5\%) \leq 5\% \rightarrow \delta \geq 0.69 \rightarrow \text{se elige } \delta = 0.707. - (\omega_d = |\sigma|)$.

$$\text{Y también } t_E(5\%) \approx \frac{4.5\delta}{\omega_n} = \frac{4.5\delta^2}{|\sigma|} = \frac{2.25}{|\sigma|} \leq 5\text{seg.} \rightarrow |\sigma| \geq 0.45$$

Se elegirá $\sigma = -0.50 \Rightarrow \lambda_{1-2} = -0.50 \pm j0.50. -$

Se ubicarán los otros dos polos en: $\lambda_{3-4} = 10\sigma \rightarrow \lambda_{3-4} = -5. -$

La ecuación característica deseada será:

$$(s+5)^2(s^2 + s + 0.50) = s^4 + 11s^3 + 35.5s^2 + 30s + 12.50 = 0$$

En función de los parámetros de diseño:

$$|sI - Ac| = |sI - A^* + B^*K^*| = \left| sI - \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ -C & 0 \end{bmatrix} \right| =$$

$$|sI - Ac| = s^4 + (1+k_3)s^3 + k_2s^2 + k_1s + G = 0$$

Por lo tanto :

$$1+k_3 = 11 \rightarrow k_3 = 10$$

$$k_2 = 35.5$$

$$k_1 = 30$$

$$G = 12.5$$

O sea:

$$K^* = [30 \ 35.5 \ 11 \ -12.5]$$

O en su defecto:

$$K = [30 \ 35.5 \ 11] \quad y \quad G = 12.5$$

Las matrices del sistema de lazo cerrado:

$$Ac = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ DK - C & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -30 & -35.5 & -11 & 12.5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Cc = [(C - DK) \quad DG] = [C \quad 0] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad \text{pues } D = 0$$

Como $D = 0$, se puede usar la opción Integral&State del menú principal de la función Svdesign del Csad/Matlab.-

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
State Feedback	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > i

Enter vector of 4 desired pole locations > [-5 -5 -0.5-0.5i -0.5+0.5i]

State feedback with integral control is:

$$u = -Kx + G * \text{integral}(r - y)$$

K =

$$30.0000 \quad 35.5000 \quad 10.0000$$

G = 12.5

Pole Locations

Desired	Achieved
-0.5000 - 0.5000i	-0.5000 - 0.5000i
-0.5000 + 0.5000i	-0.5000 + 0.5000i
-5.0000	-5.0000 - 0.0000i
-5.0000	-5.0000 + 0.0000i

Update current state variable matrices? (y/n) [y] >

Las matrices del sistema de lazo cerrado serán:

SVDESIGN > d

Display Current,Original,or Both Systems? [c] >

Current system is:

A matrix is:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ -30.0000 & -35.5000 & -11.0000 & 12.5000 \\ -1.0000 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

B matrix is:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

C matrix is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En estado estacionario se tendrá:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = H^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{si } R = 1, \text{ será.}$$

$$x_1(\infty) = 1; x_2(\infty) = x_3(\infty) = 0; \text{ además: } y(\infty) = [1 \ 0 \ 0] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow y(\infty) = 1. -$$

$$x_4(\infty) = \frac{1}{12.5} \times \left\{ [30 \ 35.5 \ 10] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = 2.40 \Rightarrow x_4(\infty) = 2.40. -$$

Las respuestas temporales serán las mostradas en la figura 36.-

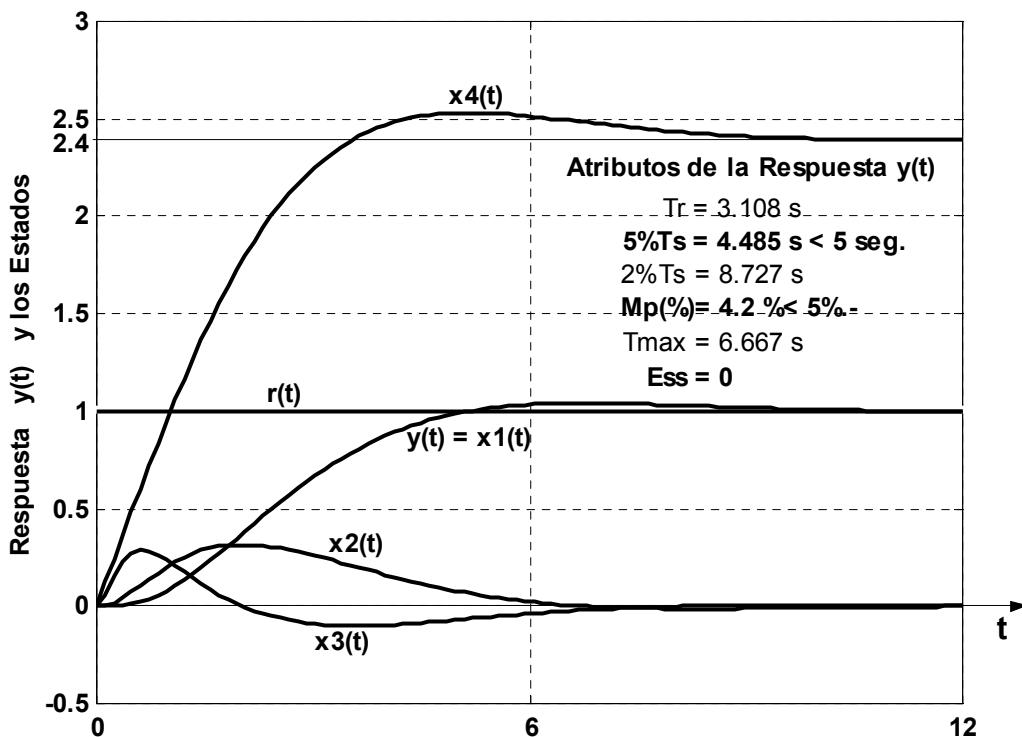


Figura 36

Problemas de Diseño por

Realimentación de los Estados

Problema 1:

Dada la siguiente función de transferencia de una planta a controlar:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+2)(s+10)}$$

Determinar un modelo en el espacio de estado adecuado, la planta tiene un integrador, para diseñar un sistema seguidor tipo 1 por medio de la realimentación de los estados, eligiendo una ubicación adecuada de los polos del sistema diseñado para que se cumplan las especificaciones siguientes:

- Que la sobre elongación a una entrada escalón unitario sea: $M_p(\%) \leq 15\%$
- $t_e(2\%) \leq 4.2$ seg
- Que el e_{EE} a una entrada rampa unitaria sea menor que $2/3$

Si llevamos el modelo a la forma adecuada para aplicar el tercer método de diseño, como no hay ceros y $b_0 = 1$, se llegaría a la forma canónica controlable. Resultaría, como se determinó oportunamente, un diseño con realimentación total de los estados más una ganancia de pre-compensación $G = k_1$.

Resultará:

$$K = [k_1 \ k_k \ k_k] \quad \text{y} \quad G = k_1 \cdot -$$

La función de transferencia de lazo cerrado será:

$$M(s) = \frac{k_1}{s^3 + \alpha_2 s + \alpha_1 s + k_1} \rightarrow \alpha_0 = k_1 = G \quad \text{para que: } M(0) = 1 \cdot -$$

Para encontrar la expresión del error a entradas rampas de pendiente unitaria, teniendo en cuenta que aquí $Sr(t) \equiv r(t) = \mu_s(t)$, se empleará los coeficientes de la $M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.

En este ejemplo no tiene ceros, por ende:

$$e_{EE} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}; \quad \text{en el ejemplo} \quad e_{EE} = \frac{\alpha_1}{k_1}$$

Con un par de polos complejos y uno real, la ecuación característica será:

$$(s - \lambda_3)(s^2 + 2|\sigma|s + \sigma^2 + \omega_d^2) = s^3 + [2|\sigma| - \lambda_3]s^2 + [\sigma^2 + \omega_d^2] - 2|\sigma|\lambda_3 s + [-\lambda_3(\sigma^2 + \omega_d^2)] = 0$$
$$e_{EE} = \frac{(\sigma^2 + \omega_d^2) - 2|\sigma|\lambda_3}{-\lambda_3(\sigma^2 + \omega_d^2)} \leq e_{EE} \text{ especificado}$$

Recordar que $\lambda_3 < 0$ para que el sistema sea estable.

Llamando e_{EE} especificado = e_{EE}^* ;

$$\begin{aligned} (\sigma^2 + \omega_d^2) - 2|\sigma|\lambda_3 &\leq -\lambda_3(\sigma^2 + \omega_d^2)e_{EE}^* \\ (\sigma^2 + \omega_d^2) &\leq 2|\sigma|\lambda_3 - \lambda_3(\sigma^2 + \omega_d^2)e_{EE}^* \\ (\sigma^2 + \omega_d^2) &\leq \lambda_3[2|\sigma| - (\sigma^2 + \omega_d^2)e_{EE}^*] \end{aligned}$$

Lo que esta entre corchetes debe ser negativo, pues λ_3 , tambien :

$$\lambda_3 \leq \frac{(\sigma^2 + \omega_d^2)}{2|\sigma| - (\sigma^2 + \omega_d^2)e_{EE}^*}$$

o

$$\lambda_3 \leq \frac{1}{\frac{2|\sigma|}{(\sigma^2 + \omega_d^2)} - e_{EE}^*} \quad (1)$$

Dado σ, ω_d y especificado e_{EE}^* se elige la posision de λ_3 , teniendo en cuenta que λ_{1-2} sea dominante; $|\lambda_3| \geq 5|\sigma|$ o $\lambda_3 \leq 5\sigma$ (2)

Se deben cumplir (1) y (2).

Si el sistema fuera típico de segundo orden, ($\lambda_3 \rightarrow -\infty$), el error seria:

$$e_{EE} \frac{2|\sigma|}{(\sigma^2 + \omega_d^2)} \leq e_{EE}^*$$

o

$$e_{EE} = \frac{2\delta\omega_n}{\omega_n^2} = \frac{2\delta}{\omega_n} = \frac{2\delta^2}{|\sigma|} \leq e_{EE}^*$$

En este caso, fijado δ surge $|\sigma|$.

La planta tendrá las matrices siguientes, en la forma canónica controlable:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & -12 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad y \quad D = [0]$$

$$A_c = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k_1 & -20 - k_2 & -12 - k_3 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A_c| = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k_{11} & 20 + k_2 & (s + 12 + k_3) \end{bmatrix}$$

$$|sI - A_c| = s^3 + (12 + k_3)s^2 + (20 + k_2)s + k_1 = 0$$

Posición de los polos:

- Para que $M_p(\%) \leq 15\% \rightarrow \delta \geq \sqrt{\frac{(\ln 0.17)^2}{\pi^2 + (\ln 0.17)^2}} \approx 0.517$

- Para que $te(2\%) \equiv \frac{4}{|\sigma|} \leq 4.2 \rightarrow |\sigma| \geq 0.952$

Si se elige $\sigma = -1$, ω_d debera ser tal que $\delta \geq 0.517$

Si se elige $\omega_d = 1.5, \delta = \cos\theta = \cos(\tan^{-1} 1.5) = 0.5547$ por ende $\delta = 0.5547 > 0.517$

$$\therefore \lambda_{1-2} = -1 \pm j1.5$$

Para que se cumpla que el e_{EE} a una entrada rampa unitaria sea menor o igual a $2/3$; $e_{EE}^* = 2/3$:

$$\lambda_3 \leq \frac{1}{\frac{2}{1+(1.5)^2} - 2/3} \rightarrow 1) \lambda_3 \leq -19.5; \text{ y como } 2) \lambda_3 \leq -5 \Rightarrow \text{se elegira } \lambda_3 = -20$$

Por lo tanto los polos deseados serán:

$$\lambda_{1-2} = -1 \pm j1.5 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -20$$

La ecuación característica deseada será:

$$(s + 20)(s^2 + 2s + 3.25) = s^3 + 22s^2 + 43.25s + 65 = 0$$

Igualando :

$$k_1 = 65$$

$$12 + k_3 = 22 \rightarrow k_3 = 10$$

$$20 + k_2 = 43.25 \rightarrow k_2 = 23.25$$

$$\text{Como } G = k_1 \rightarrow G = 65$$

$$\therefore K = [65 \ 23.25 \ 10] \quad \text{y} \quad G = 65$$

La figura 37 muestra las respuestas al escalón y a la rampa, como se puede observar se cumplen con todas las especificaciones deseadas

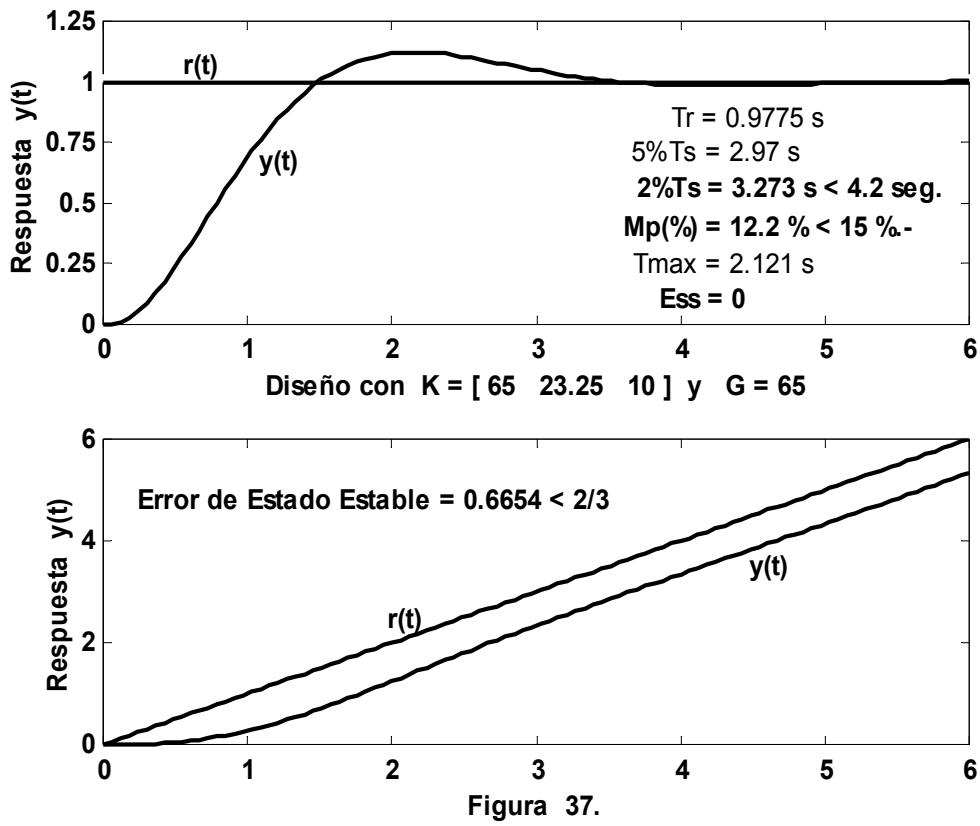
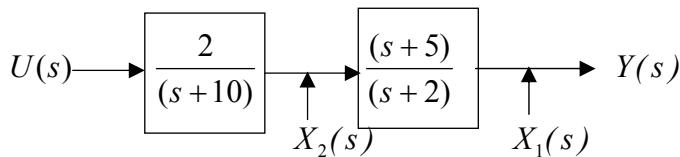


Figura 37.

Problema 2:

Dada la planta siguiente:



Diseñar un sistema de control por medio de la técnica moderna (realimentación de las variables de estado) para que el mismo cumpla con las especificaciones siguientes:

- Que el error de estado estable a entradas escalones sea nulo.
- Que el $t_E(2\%) \leq 0.75 \text{ seg.}$
- Que el $M_p(\%) \leq 5\%$.
- Que el error de estado estable a entradas rampas unitarias no supere el valor de 0.175.-

Primero se obtiene el modelo:

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{(s+5)}{(s+2)} \xrightarrow{L^{-1}} \dot{x}_1 + 2x_1 = \dot{x}_2 + 5x_2$$

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + \dot{x}_2 + 5x_2 \quad (1)$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+10)} \xrightarrow{L^{-1}} \dot{x}_2 + 10x_2 = 2u(t) \therefore \dot{x}_2(t) = -10x_2(t) + 2u(t) \quad (2)$$

$$(2) \text{ en } (1) \rightarrow \dot{x}_1 = -2x_1 - 10x_2 + 2u + 5x_2 \rightarrow \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - 5x_2(t) + 2u(t)$$

$$Y(s) = X_1(s) \xrightarrow{L^{-1}} y(t) = x_1(t) \quad (3)$$

Las matrices de la planta serán las siguientes :

$$\therefore A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

La función de transferencia de la misma se podría determinar, para verificar, :

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{C(sI - A)^{-1}B}{|sI - A|}$$

$$|sI - A| = \begin{bmatrix} s+2 & 5 \\ 0 & s+10 \end{bmatrix} = (s+2)(s+10)$$

$$\begin{bmatrix} s+10 & -5 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[1 \quad 0] [s+10 \quad -5] [2(s+10) \quad -10] = 2(s+5)$$

$$G_p(s) = \frac{2(s+5)}{(s+2)(s+10)} \quad \text{Se verificó. La Planta será controlable}$$

Como se tiene que ubicar λ_{1-2} , complejos para que se tenga el transitorio al escalón, salvo que $|\sigma| \leq 1$, el $t_e(2\%)$ debería ser aproximadamente 4 seg. y se pide 0.7 seg. Por ende $|\sigma|$ será mucho más grande. El cero en -5 tendría mucha influencia en consecuencia haría falta otro polo en las

inmediaciones del cero para anularlo. Por lo tanto se aplicará un control por realimentación de los estados con un control integral. Lo primero que hay que hacer es ver si el par A^*, B^* es controlable. Para ello el rango de la matriz H deberá ser 3.

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 0 & -10 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(H) = -10 \neq 0$$

Por lo tanto el rango de la matriz H , será igual a tres, y el diseño puede tener éxito.

Elección de los tres Polos:

Para que: $M_p(\%) \leq 5\% \rightarrow \delta \geq 0.69$ se elegirá: $\delta = 0.707 \rightarrow \omega_d = |\sigma| -$

Si el $t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 0.75$ seg. $\rightarrow |\sigma| \geq 5.333$ se elegirá: $\rightarrow \sigma = -6$

Por lo tanto el par de polos dominantes será:

$$\lambda_{1-2} = -6 \pm j6$$

La posición del tercer polo λ_3 , se elegirá para que se cumpla la especificación de error de estado estable a la rampa en la entrada. Deberá estar cercana a -5, para que el par complejo sea dominante.

La ecuación característica es:

$$(s - \lambda_3)(s^2 + 12s + 72) = 0$$

$$s^3 + (12 - \lambda_3)s^2 + (72 - 12\lambda_3)s + (-72\lambda_3) = 0$$

La función de transferencia del sistema con realimentación de los estados y una ganancia de pre-compensación será:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2Gs + 10G}{s^3 + (12 - \lambda_3)s^2 + (72 - 12\lambda_3)s + (-72\lambda_3)}$$

$$\text{Como: } M(0) = 1 = \frac{10G}{-72\lambda_3} \rightarrow 2G = -14.4\lambda_3.$$

El error de estado estable a una rampa unitaria en la entrada será:

$$e_{EE} = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{72 - 12\lambda_3 + 14.4\lambda_3}{-72\lambda_3} \leq 0.175$$

Por ende:

$$72 + 2.4\lambda_3 \leq -12.6\lambda_3 \rightarrow \lambda_3 \leq -4.80 \text{ se elegirá} \Rightarrow \lambda_3 = -5$$

La ecuación característica deseada es:

$$s^3 + 17s^2 + 132s + 360 = 0$$

También:

$$Ac = A^* - B^* K^* = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ DK - C & -DG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 2k_1 & -5 - 2k_2 & 2G \\ -2k_1 & -10 - 2k_2 & 2G \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|sI - Ac| = s^3 + (12 + 2k_1 + 2k_2)s^2 + (20 + 10k_1 + 4k_2 + 2G)s + (10G) = 0$$

Igualando los coeficientes de igual potencia se llega a:

$$k_1 = 5; k_2 = -2.50' \text{ y } G = 36$$

Por lo tanto:

$$K = [k_1 \ k_2] = [5 \ -2.50] \quad y \quad G = 36$$

$$\text{o tambien: } K^* = [k_1 \ k_2 \ -G] = [5 \ -2.50 \ -36]$$

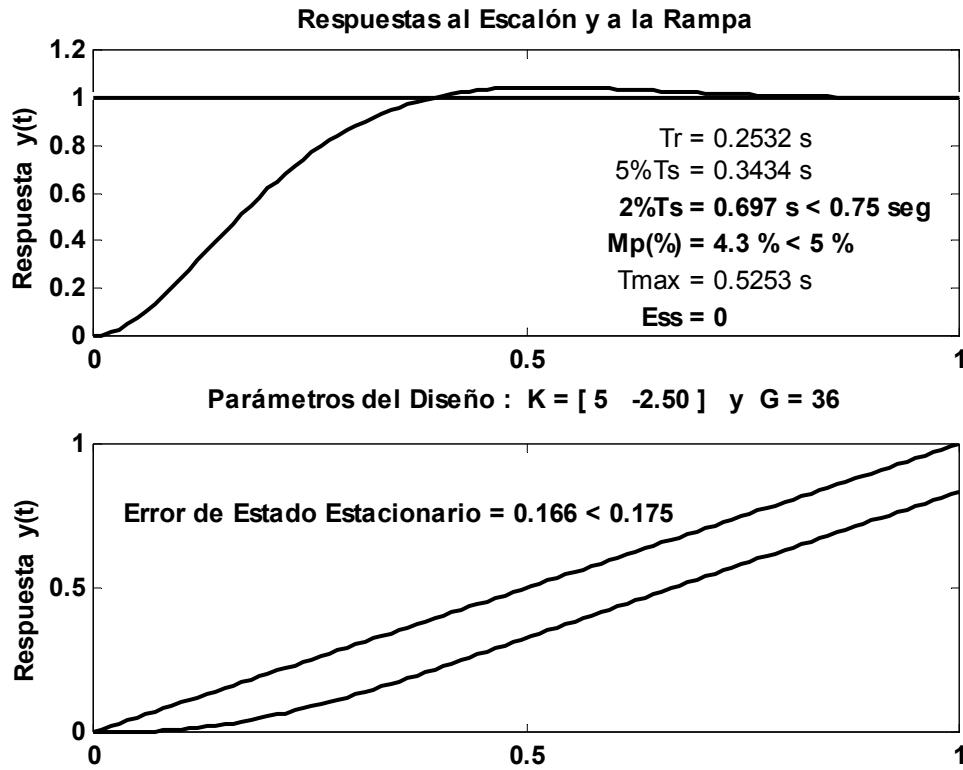


Figura 38

Para verificar si se cumplen todas las especificaciones solicitadas se recurre a la PC. Las respuestas obtenidas están indicadas en la figura 38. Como se puede apreciar se cumple con todo lo solicitado oportunamente.

Para obtener: $\bar{x}(\infty)$; $u(\infty)$; $y(\infty)$ y $x_3(\infty)$, se procede así:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ -R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0.4R \\ 2R \end{bmatrix} \quad \text{si } R = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1(\infty) = 1 \\ x_2(\infty) = 0.4 \\ u(\infty) = 2 \end{cases}$$

$$y(\infty) = C\bar{x}(\infty) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \end{bmatrix} \rightarrow y(\infty) = 1. -$$

$$x_3(\infty) = \frac{1}{G} [u(\infty) + K\bar{x}(\infty)] = \frac{1}{36} \left[2 + [5 \ -2.5] \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \end{bmatrix} \right] = \frac{1}{6} \rightarrow x_3(\infty) = 0.1667. -$$

Estos valores se verifican con la PC, en la figura 39.-

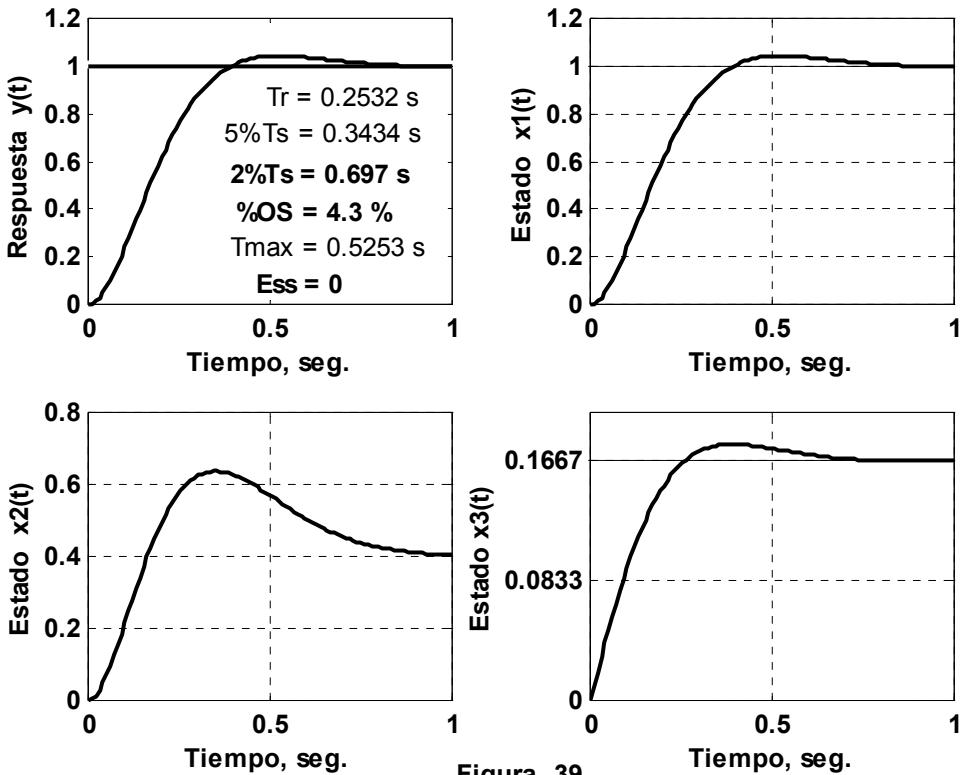


Figura 39

Las matrices del sistema de lazo cerrado serán:

$$Ac = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 72 \\ -10 & -5 & 72 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad Cc = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . -$$

La función de transferencia del mismo:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{72(s+5)}{(s+5)(s^2 + 12s + 72)} = \frac{72}{(s^2 + 12s + 72)} . -$$

Con el programa Simulink de Matlab se puede simular el sistema y obtener las respuestas temporales.

El diagrama se muestra en la figura 40, y las respuestas a un escalón unitario en la 41.-

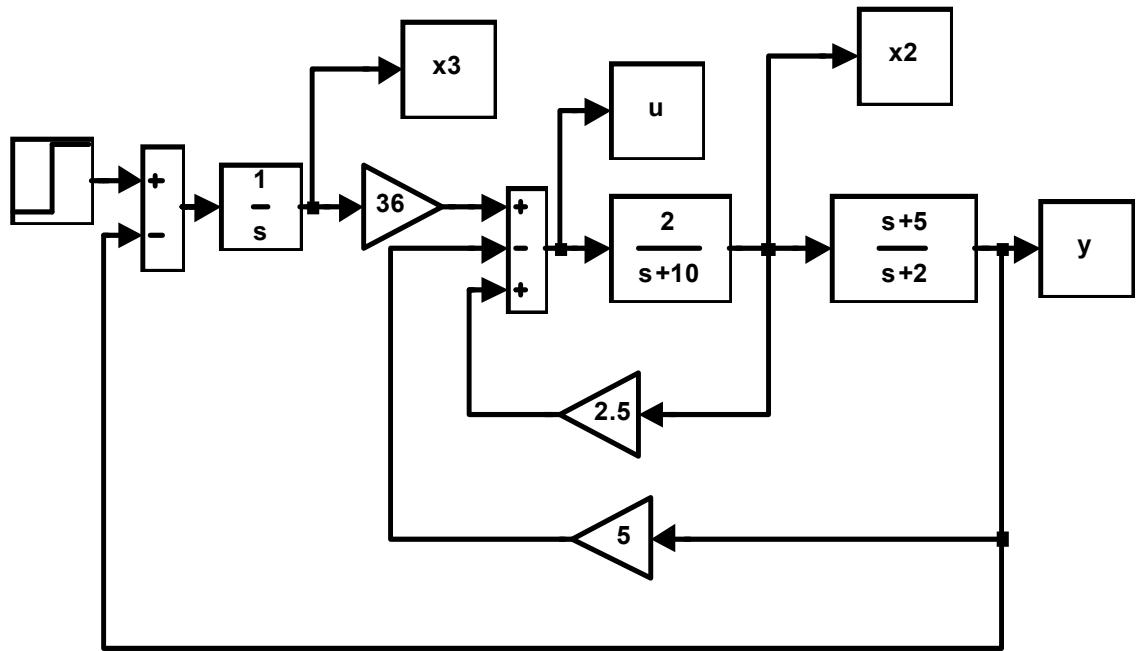


Figura 40

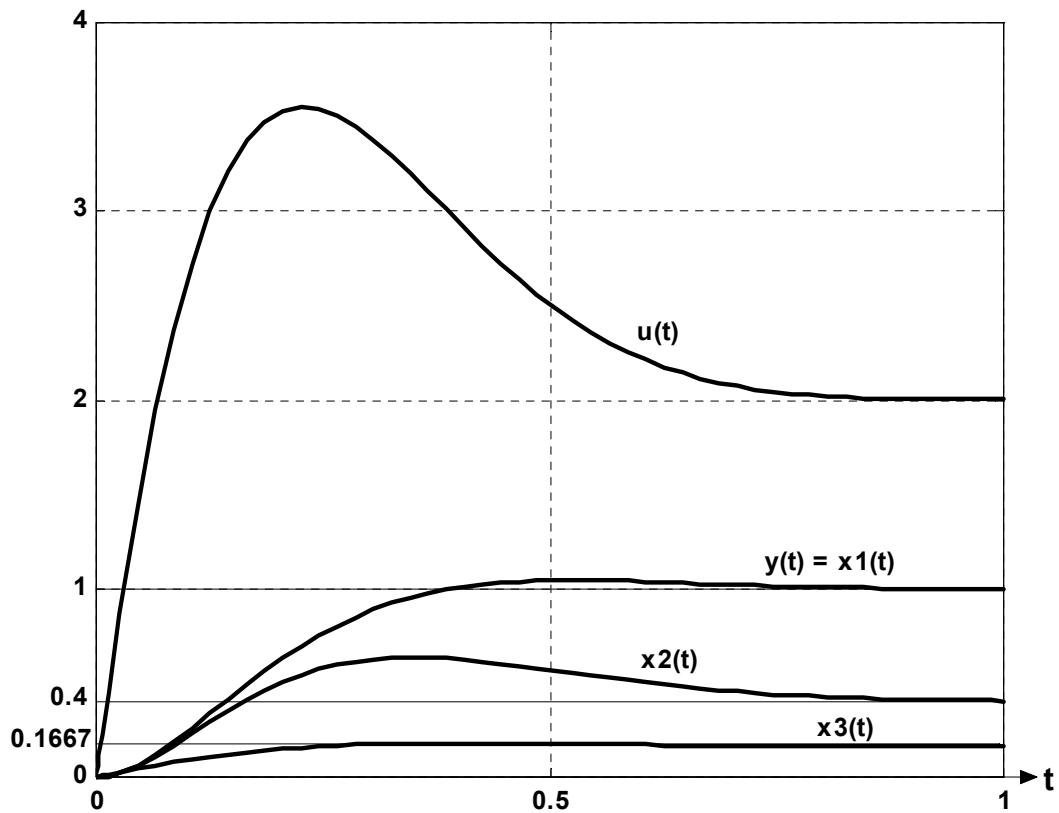


Figura 41

Para una señal de referencia rampa de pendiente unitaria, $r(t) = t \mu_s(t)$. las variaciones temporales de la respuesta $y(t)$, y de los estados $\bar{x}(t)$, se

muestran en la figura 42.-

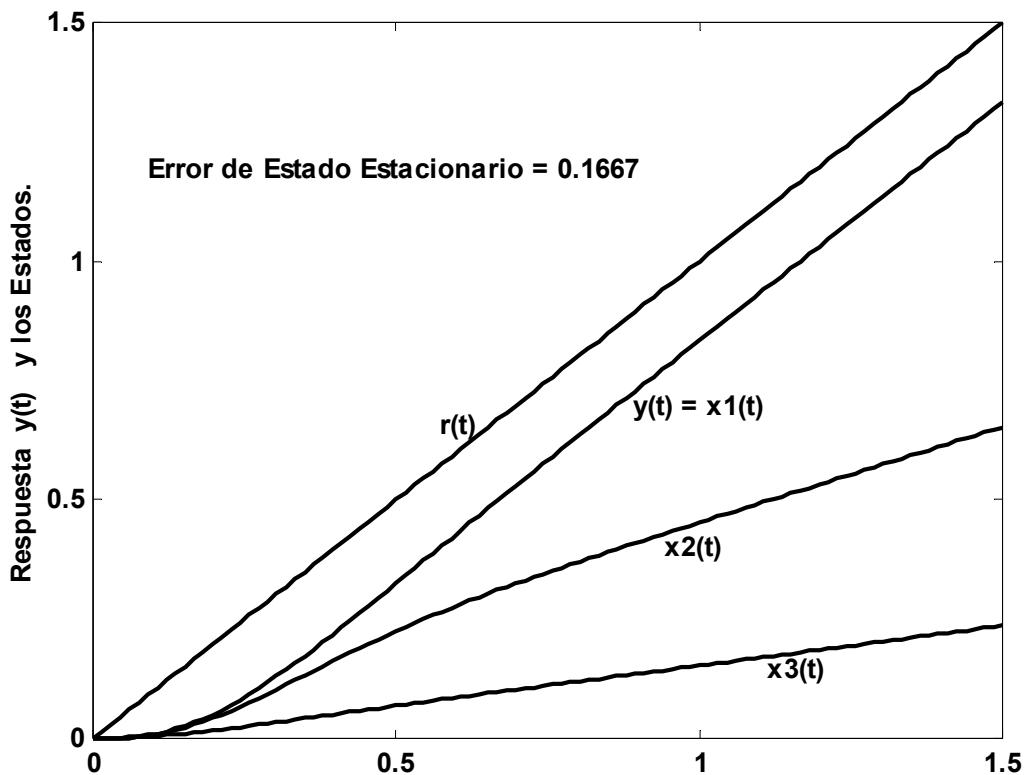


Figura 42.

Problema 3:

La función de transferencia de una planta es:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.10(s+2)(s+10)}{(s+1)(s+5)}$$

- 1) Determinar el modelo en la forma canónica controlable.-
- 2) Con ese modelo diseñar un sistema de control por realimentación de los estados mas un control integral, para que se cumplan las especificaciones siguientes: (como la matriz $D \neq 0$, no se puede usar la opción Integral&State del menú principal de la función Svdesign).-
 - Que el error de estado estable a entradas escalones sea nulo.
 - Que el $t_E(2\%) \leq 4.25 \text{ seg.}$
 - Que $M_p(5\%) \leq 5\%.$ -

1) La F.C.C., resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1.5 \quad 0.6] \quad D = [0.10]$$

Como el par (A, B) es controlable solo hay que ver si lo es el par (A^*, B^*) .

Como la matriz H es de rango tres, lo será por ende el diseño será posible.

2) La primera especificación se cumplirá pues se diseñara con un control integral.

La segunda $t_E(2\%) \approx \frac{4}{|\sigma|} \leq 4.25 \text{ seg.} \rightarrow |\sigma| \geq 0.94$ se elegirá: $\sigma = -1$.

La tercera se cumple si λ_{1-2} , son dominantes y $\delta \geq 0.69$ se elige: $\delta = 0.707$.

En consecuencia:

$$\lambda_{1-2} = -1 \pm j$$

El tercer polo se ubicará en $\lambda_3 = -2$, para cancelar el cero de la planta en -2, ya que el otro cero está en -10 y es: $Z = 10\sigma = -10$ por ende su efecto será despreciable.-

La ecuación característica deseada será:

$$(s+2)(s^2 + 2s + 2) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0$$

La misma en función de las constantes k_1 , k_2 y G se obtendrá de:

$|sI - Ac| = 0$, donde:

$$Ac = \begin{bmatrix} A - BK & BG \\ DK - C & -DG \end{bmatrix}; \quad \text{con } K = [k_1 \quad k_2]$$

Remplazando A , B , C , D y K , quedará:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 - k_1 & -6 - k_2 & G \\ 0.1k_1 - 1.5 & 0.1k_2 - 0.6 & -0.1G \end{bmatrix}$$

$$|sI - Ac| = s^3 + (6 + k_2 + 0.1G)s^2 + (5 + k_1 + 1.2G)s + (2G) = 0$$

Igualando los coeficientes de igual potencia, se llega a:

$$k_1 = -1.40, \quad k_2 = -2.20 \quad y \quad G = 2.$$

En consecuencia: $K = [-1.40 \quad -2.20]$ y $G = 2$

Las matrices del sistema de control diseñado son:

$$Ac = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3.6 & -3.8 & 2 \\ -1.64 & -0.82 & -0.20 \end{bmatrix}$$

$$Bc = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Cc = [(C - DK) \quad DG] = [1.64 \quad 0.82 \quad 0.20]$$

$$Dc = [0]$$

La función de transferencia del sistema es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0.2(s+2)(s+10)}{(s+2)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{0.20s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

El error de estado estable a entradas rampas unitarias resultó:

$$e_{EE} = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{2 - 0.20}{2} = 0.90.$$

Para verificar las respuestas temporales se muestran en la figura 43.

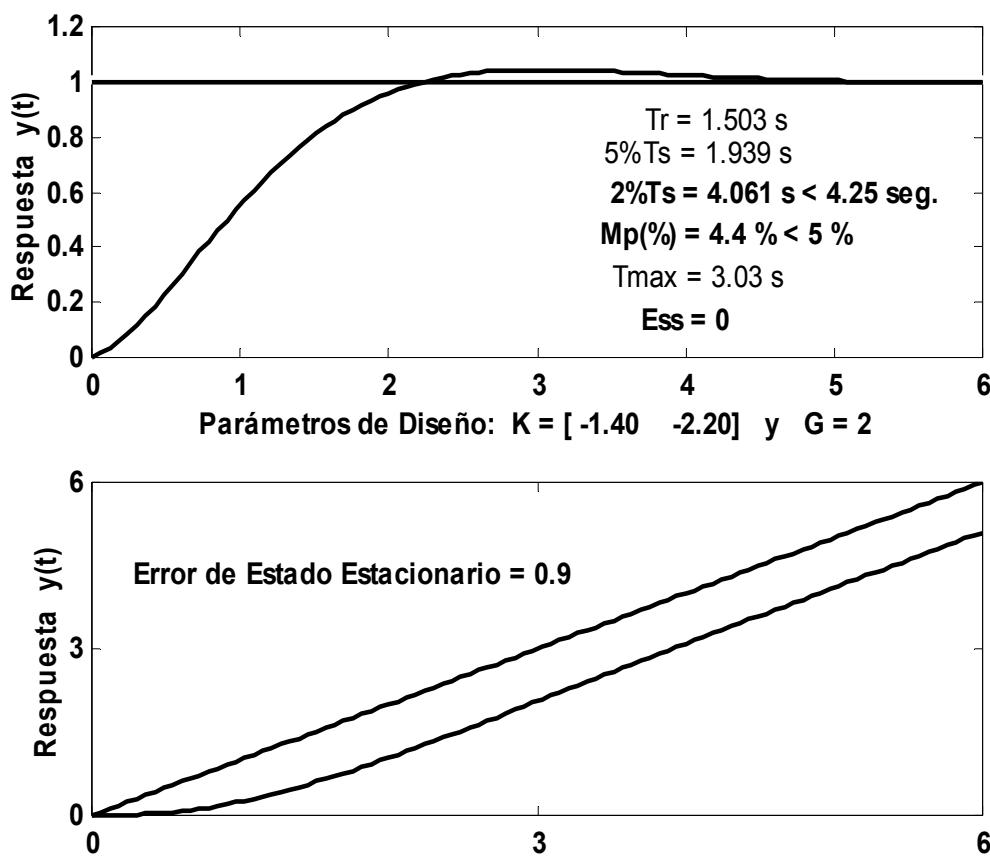


Figura 43

Usando Matlab con este Problema, se tendrá.

» % Introducimos las matrices de la planta real:
» A=[0 1;-5 -6];
» B=[0;1];
» C=[1.5 0.6];
» D=0.1;

Se definen las matrices $A^* = A_1$ y $B^* = B_1$ del sistema regulador equivalente, como se explico en la teoría:

Llamando : $Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, en Matlab tendremos:

» Q=[0;0];
» A1=[A Q;-C 0];
» B1=[B;-D];
» % El vector de los polos deseados era:

» p=[-2 -1-i -1+i];

» % La Matriz K y la ganancia G:

» K=Acker(A1,B1,p)

K =

-1.4000 -2.2000 -2.0000

» % Por lo tanto K y G serán:

» K=[-1.40 -2.20];

» G = 2;

» % Las matrices del sistema de control de lazo cerrado real son:

» Ac=[A-B*K B*G;D*K-C -D*G]

Ac =

0	1.0000	0
-3.6000	-3.8000	2.0000
-1.6400	-0.8200	-0.2000

» Bc=[Q;1]

Bc =

0
0
1

» Cc=[C-D*K D*G]

Cc =

1.6400	0.8200	0.2000
--------	--------	--------

Como se puede apreciar se llega a los mismos resultados que en la forma analítica.-

También se puede utilizar la función Svddesign del Csad/Matlab, para obtener los coeficientes de la matriz de realimentación de los estados y la

ganancia G a la salida del integrador agregado en el camino directo, de la manera siguiente, pues la matriz D no es nula:

Se ingresan las matrices A* y B*, (la matriz C puede ser cualquiera), del sistema regulador equivalente ya mencionado.

Se llama la función State Feedback, del menú principal y se ingresa la posición deseada de los tres polos, el programa nos devuelve:

$$K^* = [k_1 \ k_2 \ -G]$$

Por lo tanto será: $K = [k_1 \ k_2]$ y la ganancia de la salida del integrador G .

Se ingresan las matrices

$$A^* = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ -1.5 & -0.6 & 0 \end{bmatrix} \text{ y la } B^* = \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

La C, cualquiera, y luego se llama a la función State Feedback:

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System
Observability	New Original Sys
Transformations	Back to Original
<i>State Feedback</i>	Estimator Design
Integral&State	Feedback&Estimate
View N(s)/D(s)	Quit

SVDESIGN > s

Enter vector of 3 desired pole locations > [-2 -1-i -1+i]

State Feedback Vector K is:

$$-1.4000 \ -2.2000 \ -2.0000 \rightarrow K = [-1.40 \ -2.20] \text{ y } G = 2.-$$

Pole Locations

Desired	Achieved
-1.0000 - 1.0000i	-1.0000 - 1.0000i
-1.0000 + 1.0000i	-1.0000 + 1.0000i
-2.0000	-2.0000

A-BK is: → Ac

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1.0000 & 0 \\ -3.6000 & -3.8000 & 2.0000 \\ -1.6400 & -0.8200 & -0.2000 \end{array}$$

Por lo tanto las otras matrices del sistema de control serán:

$$Bc = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad Cc = [(C - DK) \quad DG] = [1.64 \ 0.82 \ 0.20] \quad y \quad Dc = 0$$

Problema 4:

En este problema se indicara como se puede proceder cuando, por diferentes motivos, no se puede elegir un par de polos complejos conjugados dominantes para el sistema diseñado, con la ayuda de algún software de computación adecuado, por ejemplo el comando Svdesign del Csad/Matlab. Esta función se detallo sus principales utilidades en la publicación correspondiente.-

El modelo de una planta a controlar tiene las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ 1.6 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \end{bmatrix} \quad y \quad C = [1 \quad 5]$$

Diseñar algún sistema de control con la realimentación de los estados más una ganancia de pre-compensación para conseguir las especificaciones siguientes:

- Que el error de estado estable para *entradas escalones* sea *nulo*.-
- Que la sobre elongación a entradas escalones no supere el 5%.-
- Que el tiempo de establecimiento al 2% sea menor o igual a 0.7 seg.
- Que el error de estado estable a entradas rampas unitarias no supere el valor de 1/12.-

Como se puede apreciar, los polos deseados del sistema a diseñar no pueden ser un par complejo conjugado dominante a menos que el tiempo de establecimiento al 2% sea mayor o igual a 2.5 segundos, (se pide menor o igual a 0.70 segundos).-

Esto se debe a la presencia del cero de la planta a controlar en -8, ya que la función de transferencia de la planta es:

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{45(s+8)}{(s+4)(s+6)}$$

Se propondrá primero, ubicar los polos de M(s) reales e iguales en λ .

Por lo tanto la función de transferencia del sistema a diseñar será:

$$M(s) = \frac{45G(s+8)}{(s-\lambda)^2} = \frac{45Gs + 360G}{s^2 - 2\lambda s + \lambda^2}$$

Como la ganancia estática: $M(0) = 1 \Rightarrow \frac{360G}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow G = \frac{\lambda^2}{360}$

El error de estado estable a entradas rampas de pendiente unitaria será:

$$e(\infty) = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{-2\lambda - 45G}{\lambda^2} = \frac{-2\lambda - \frac{45}{360}\lambda^2}{\lambda^2} \leq \frac{1}{12}$$

Operando se llega a:

$$-2\lambda \leq \frac{75}{360}\lambda^2 \Rightarrow -2 \geq \frac{75}{360}\lambda : \text{pues } \lambda < 0 \quad \underline{\lambda \leq -9.60}$$

El límite inferior del rango posible de λ , estará impuesto por la

especificación del Mp (%), pues al mover los polos a la izquierda del plano s el error disminuirá pero aumenta el Mp(%). Este límite se puede determinar con la ayuda de la función Svdesign del Csd/Matlab, el resumen está indicado en la tabla siguiente:

λ_{1-2}	$T_E(2\%) \text{ seg.}$	Mp (%)	$e(\infty), a la rampa$
-9.60	0.3081	0.00	$1/12=0.08333$
-10	0.2727	0.20	0.0750
-11	0.197	1.00	0.0568
-12	0.3131	2.50	0.0416
-13	0.3434	4.60	0.2885
-13.15	0.3435	5.00	0.0271
-14	0.3485	7.30	0.01786

Si se elige: $\lambda_{1-2} = -12$, la ecuación característica será: $s^2 + 24s + 144 = 0$

También:

$$Ac = A - BK = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ 1.6 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15k_1 & 15k_2 \\ 6k_1 & 6k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 - 15k_1 & -5 - 15k_2 \\ 1.6 - 6k_1 & -2 - 6k_2 \end{bmatrix}$$

$$|sI - Ac| = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 - 15k_1 & -5 - 15k_2 \\ 1.6 - 6k_1 & -2 - 6k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + 8 + 15k_1 & 5 + 15k_2 \\ -1.6 + 6k_1 & s + 2 + 6k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= (s + 8 + 15k_1)(s + 2 + 6k_2) - (5 + 15k_2)(6k_1 - 1.6) = 0$$

2

En consecuencia:

$$24 + 72k_2 = 144 \Rightarrow k_2 = 5/3 \cong 1.6666$$

$$10 + 15k_1 + 10 = 24 \Rightarrow k_1 = 4/15 \cong 0.2666$$

$$G = \frac{144}{360} \Rightarrow G = 0.40$$

Por lo tanto: $K = [0.2666 \quad 1.6666] \quad y \quad G = 0.40$

Se propondrá ahora, que los polos son reales y distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Por lo tanto la función de transferencia del sistema a diseñar será:

$$M(s) = \frac{45G(s+8)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} = \frac{45Gs + 360G}{s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2}$$

Como la ganancia estática: $M(0) = 1 \Rightarrow \frac{360G}{\lambda_1\lambda_2} = 1 \Rightarrow G = \frac{\lambda_1\lambda_2}{360}$

El error de estado estable a entradas rampas de pendiente unitaria será:

$$e(\infty) = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2) - 45G}{\lambda^2} = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2) - \frac{1}{8}\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2} \leq \frac{1}{12}$$

Operando se llega a:

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \leq -4.80$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\Rightarrow \lambda \leq -9.60$, como ya se determinó.-

Siempre será $(\lambda_1 + \lambda_2) < 0$, y se tendrá:

$$\lambda_1 \lambda_2 \geq -4.8(\lambda_1 + \lambda_2) \Rightarrow \lambda_1(4.8 + \lambda_2) \geq -4.8\lambda_2$$

La última relación es válida solo si $\lambda_2 \leq -4.8$.

Recordar que estas relaciones nos aseguran que se cumpla la especificación del error a la rampa. Para que se cumpla también Mp (%), utilizaremos otra vez la función Svdesign. Si elegimos $\lambda_2 = -10$, la tabla siguiente muestra los resultados:

λ_2	λ_1 Límite	λ_1 Adoptado	T _E (2%), seg.	Mp (%)	$e(\infty)$, a la rampa
-10	-9.2307	-9.2307	0.3106	0.00	1/12
-10	-9.2307	-12	0.2020	0.80	0.05833
-10	-9.2307	-20	0.3037	4.20	0.02500
-10	-9.2307	-22.15	0.3030	5.00	0.02015
-10	-9.2307	-25	0.2980	6.00	0.01500

Lo mismo se puede hacer para otro valor de λ_2 .-

Si se adopta $\lambda_1 = -20$ y $\lambda_2 = -10$, procediendo como se sabe se llega a:

$$K = [0.3556 \quad 2.4444] \quad y \quad G = 0.5556$$

Haremos un *tercer diseño* con *polos complejos conjugados pero no dominantes*, $\lambda_{1-2} = \sigma \pm j\omega_d$.

La ecuación característica del sistema diseñado será:

$$s^2 + 2|\sigma|s + (\sigma^2 + \omega_d^2) = 0$$

Como la ganancia estática del sistema debe ser la unidad, la ganancia de pre-compensación deberá ser:

$$G = \frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{360}$$

El error de estado estable a entradas rampas de pendiente unitaria será:

$$\text{Será la relación } e(\infty) = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{-2|\sigma| - 45G}{(\sigma^2 + \omega_d^2)} = \frac{-2|\sigma| - \frac{1}{8}\sigma^2 - \frac{1}{8}\omega_d^2}{(\sigma^2 + \omega_d^2)} \leq \frac{1}{12}$$

Operando se llega a:

$$\omega_d \geq \sqrt{|\sigma|(9.6 - |\sigma|)}$$

Válida solo para $|\sigma| < 9.60$.

Como $|\sigma| = -\sigma$, la última expresión se puede poner así:

$$\underline{\omega_d \geq \sqrt{-\sigma(9.6 + \sigma)}}$$

Recordar que esta relación nos asegura que se cumpla la especificación del error a la rampa. Como se ve si $|\sigma| = 9.60 \Rightarrow \omega_d = 0$, como ya se demostró.-

Además para que se cumpla la especificación del Mp (%), $\sigma \leq -4.8$ ya que resulta $\lambda_{1-2} = -4.8 \pm j4.8$ y como hay un cero en -8 el Mp (%) > 5%.-

Para que se cumpla también Mp (%), utilizaremos otra vez la función Svdesign. La figura 44 indica la zona de ubicación del polo λ_1 .

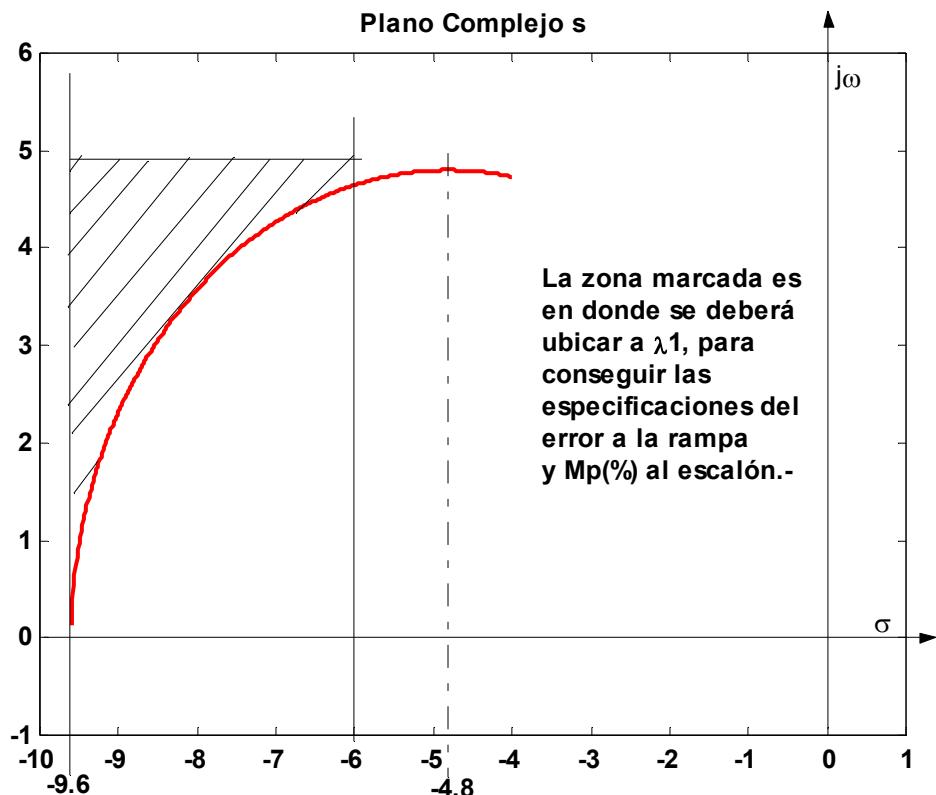


Figura 44

Un resumen de los resultados está mostrado en la tabla siguiente:

σ	ω_d Min : Error	ω_d	T _E (2%) seg.	Mp (%)	$e(\infty)$ al rampa
-4.8	4.8	4.8	0.75	8.30	1/12
-5	4.795	4.795	0.733	7.70	0.08316
-6	4.647	4.647	0.6465	4.90	1/12
-7	4.266	4.65	0.5619	4.10	0.07324
-7	4.266	4.90	0.5657	5.00	0.06675
-8	3.5777	3.5777	0.275	1.30	0.08333
-8	3.5777	4.65	0.50	3.90	0.06187
-8	3.5777	4.975	0.5091	5.00	0.05528

σ	$\omega_d \text{ Mín : Error}$	ω_d	$T_E (2\%) \text{ seg.}$	$M_p (\%)$	$e(\infty) \text{ alarampa}$
-9	2.323	4	0.4148	2.60	0.06057
-9	2.323	4.875	0.4596	5.00	0.04681
-9.6	0	0	0.3056	0.00	1/12
-9.6	0	4.00	0.4097	3.10	0.05251
-9.6	0	4.725	0.4375	5.00	0.04271

Como se puede ver hay muchas soluciones, con pares de polos complejos conjugados *no dominantes*.-

Si se escoge: $\lambda_{1-2} = -6 \pm j4.65$, con el cero en: $Z = -8$, la matriz de la realimentación de los estados y la ganancia de pre-compensación serán:

$$K = [-0.0535 \quad 0.4670] \quad y \quad G = 0.1601$$

La respuesta del sistema y sus atributos se muestran en la figura 45.-

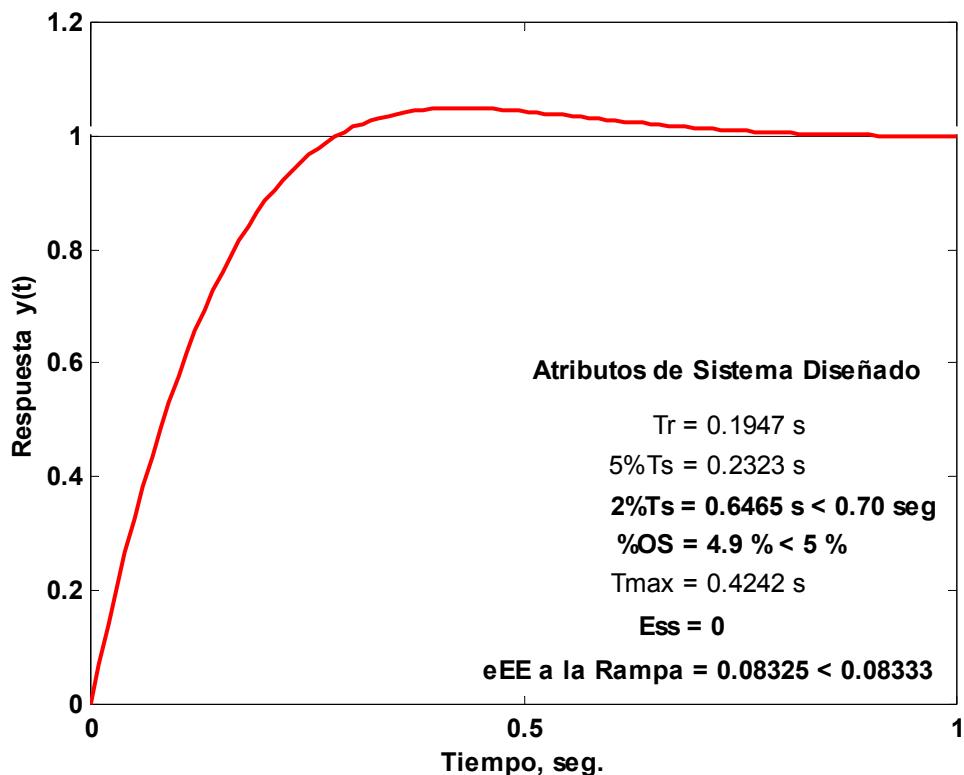


Figura 45

Ejercicio Nº 5:

Resolver el problema anterior usando la realimentación de los estados más un control integral, con una configuración de polos complejos conjugados dominantes.-

Ahora como hay tres polos se podrá cancelar el cero en -8 y si fijamos el coeficiente de amortiguación correspondiente, variando la parte real, y en consecuencia la imaginaria se podrá conseguir lo pedido.-

Para que $M_p (\%) < 5\%$, se elige : $\delta = 0.707$.-

Para el tiempo de establecimiento al (2%), $|\sigma| \geq 5.714$. -

Para el error a la rampa unitaria: $e(\infty) = \frac{2\delta^2}{|\sigma|} = \frac{1}{|\sigma|} \leq \frac{1}{12} \Rightarrow |\sigma| \geq 12$. -

Interceptando las dos expresiones anteriores será: $|\sigma| \geq 12$. -

El tiempo de establecimiento disminuirá manteniendo el Mp (%) y se cumplirá la especificación del error a la rampa. -

En consecuencia la ubicación de los polos deseada será:

$$\lambda_{1-2} = -12 \pm j12 \quad y \quad \lambda_3 = -8$$

Procediendo como ya se sabe se llega a:

$$K = [8/15 \quad 7/3] \quad y \quad G = 6.40$$

La figura 46 muestra las respuestas del sistema diseñado. -

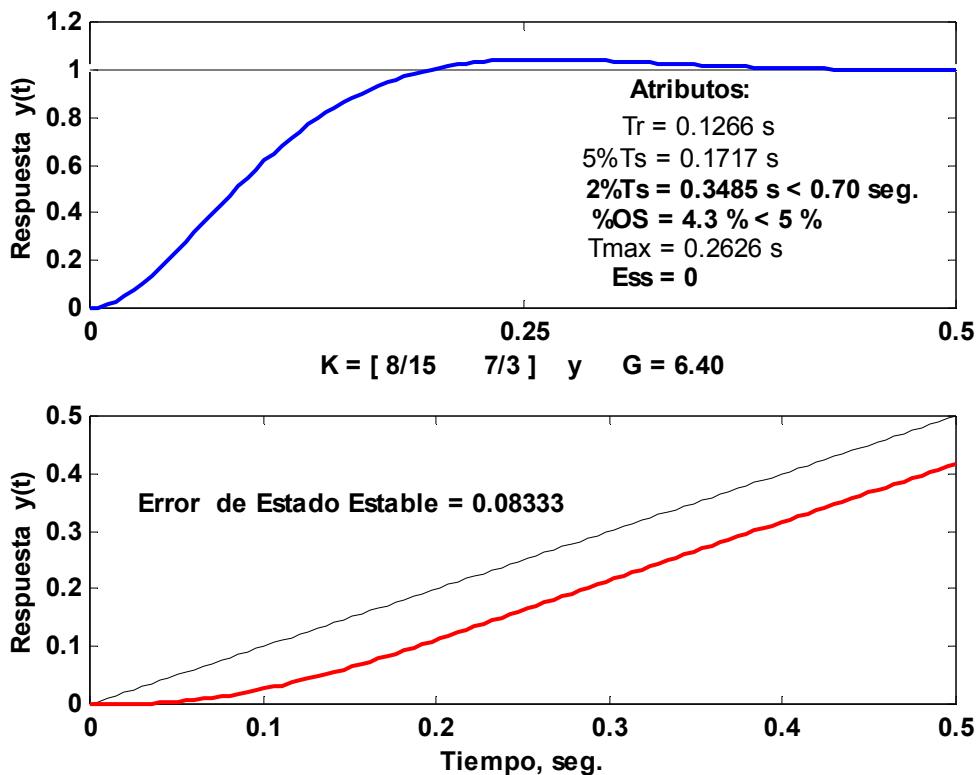


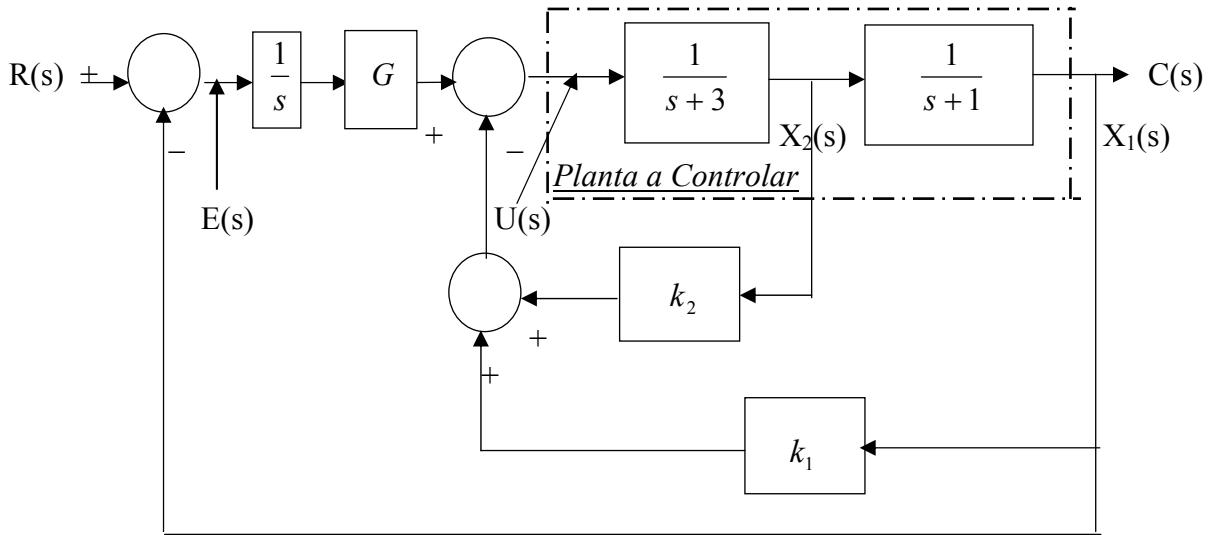
Figura 46

Problemas Propuestos

En los mismos se integran los conocimientos adquiridos en cuanto al análisis y diseño de los Sistemas de control automático, con las técnicas Clásica y Moderna.-

Ejercicio Nº 1:

El diagrama de bloques de un sistema de control Integral más la Realimentación de los estados con ganancias k_1 y k_2 (ctes reales), de un proceso, se muestra en la figura.



Control Moderno:

- 1) Encuentre el modelo matemático de la planta a controlar.-
- 2) Determine las matrices del *sistema de control* seguidor en función de las constantes k_1 , k_2 y G .-
- 3) Encontrar la función de transferencia del Sistema de Control, $M(s)$.-
- 4) Determine, los valores de las ganancias de la matriz K de realimentación de los estados y el valor de la ganancia G de la salida del integrador agregado al camino directo, para que el *sistema de control diseñado*, tenga los atributos siguientes:

- a) El error de estado estable debidos a entradas escalones sea nulo.-
- b) La sobreelongación a un escalón unitario en la entrada sea: $M_p \leq 5\%$. -
- c) El tiempo de establecimiento al 5% sea aproximadamente: $T_e(5\%) \cong 2.25 \text{ seg}$. -
- d) El error estacionario a *entradas rampas* unitarias sea igual a 1.10.-

Control Clásico:

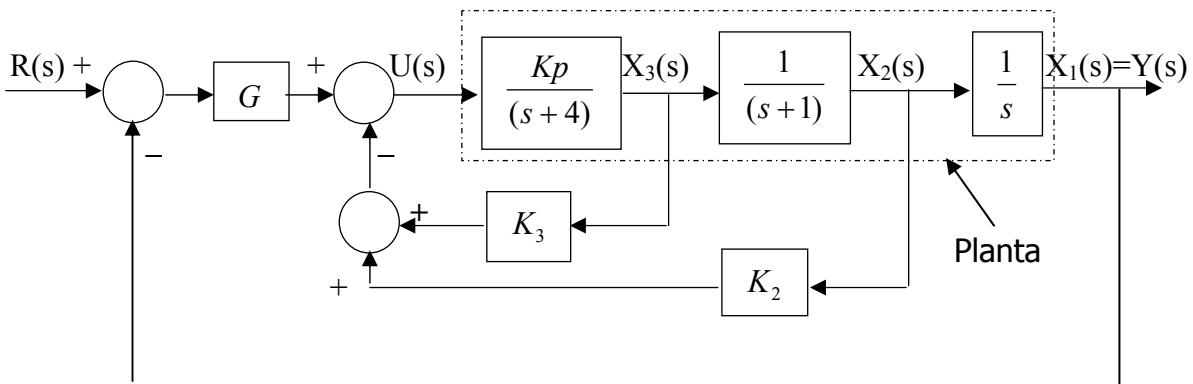
- 5) Si $G = 20$ y $k_1 = 11$, determine el rango de la ganancia k_2 para que el sistema sea estable, aplicando el criterio de estabilidad de Nyquist.
- 6) Si $G = 20$ y $k_1 = 11$, bosquejar el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema de control con la ganancia k_2 como parámetro variable.- Además encontrar la ubicación de los polos del sistema, y el valor de la ganancia k_2 , si se sabe que uno de los mismos está en $\lambda_3 = -10$.-
- 7) Eliminar las realimentaciones internas, ($k_1 = k_2 = 0$) y reemplazar el boque de ganancia G por un *controlador adecuado*, para que el sistema sea uno *típico de segundo orden* con las especificaciones siguientes:

- La sobreelongación a un escalón unitario en la entrada sea: $M_p \leq 5\%$. -
- El tiempo de establecimiento al 5% no supere los 1.50 segundos.-

- 8) ¿Qué *error de estado estable*, para entradas rampas de pendiente unitaria resultó?-

Ejercicio 2:

En la figura se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control.



Control Moderno: Si, $K_p = 24$. -

- Encontrar el modelo en variables de estado de la *planta a controlar*. -
- Encontrar las matrices del *sistema de control* en función de las ganancias G , K_2 y K_3 . -
- Determinar la ecuación característica del *sistema* en función de las ganancias G , K_2 y K_3 . -
- Determinar el valor de dichas ganancias, para que la respuesta del sistema de control, tenga los atributos siguientes:

- Error de Estado Estacionario a entradas escalones unitarios sea nulo. -
- Sobrelongación a las mismas entradas sea: $M_p(\%) \leq 17\%$. -
- Tiempo de establecimiento a las mismas entradas sea: $T_e(2\%) \leq 4.5$ seg. -
- Error de Estado Estable a entradas rampas unitarias sea menor o igual a $\frac{2}{3}$. -

- Determinar la función de transferencia del sistema de control

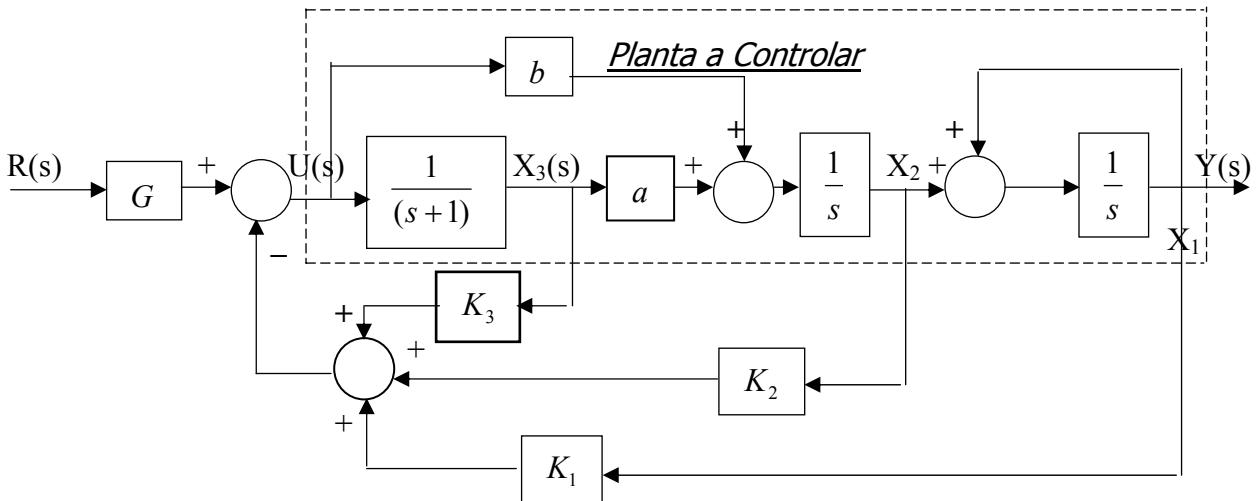
$$\text{diseñado, } M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}. -$$

Control Clásico:

- Si $K_2 = 0.375$, $K_3 = 0.125$ y $G = 1.00$, con K_p como el parámetro variable, determinar el rango del mismo para que el sistema sea estable, aplicando el criterio de Nyquist. -
- Si $K_2 = 0.375$, $K_3 = 0.125$, y $G = 1.00$, con K_p como el parámetro variable, bosquejar el lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema. Determinar el valor de K_p , y la configuración de polos del sistema si se sabe que uno de ellos está ubicado en $\lambda_3 = -6$. -
- Si en la *planta a controlar*, $K_p = 24$, diseñar un sistema de control clásico con un controlador serie adecuado y una *realimentación unitaria* para conseguir las *mismas* especificaciones de funcionamiento que se consiguieron con la teoría de control moderno en el punto d). -

Ejercicio Nº 3:

En la figura se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control.



Control Moderno:

- 1) Determinar el modelo matemático en variables de estado *de la planta a controlar*, luego la función de transferencia $G_p(s)$ y por último sus valores característicos. Los mismos son funciones de los parámetros, a y b ?.-
- 2) Determinar en base a $G_p(s)$, las relaciones entre los parámetros a y b que producen una cancelación de polo-cero. De ellas cuales provocan que la planta sea de estado completamente *no controlable*, y cuales de estado completamente *no observable*.-
- 3) Suponiendo que $a = b = 1$. Realimentando los estados, con la señal de control de la forma $u(t) = -K\bar{x}(t) + Gr(t)$, donde $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$, es la matriz de realimentación de los estados y G la ganancia de precompensación. Diseñar el sistema de control propuesto para que se cumplan las especificaciones siguientes:

- Que el error de estado estacionario para entradas escalones sea nulo.-
- Que la sobreelongación para esas mismas entradas no supere el 5%.-
- Que el tiempo de establecimiento al 2% no supere los 4.50 segundos.-
- Que el sistema diseñado no tenga ceros.-

- 4) Que error de estado estable a entradas rampas unitarias resultó?-

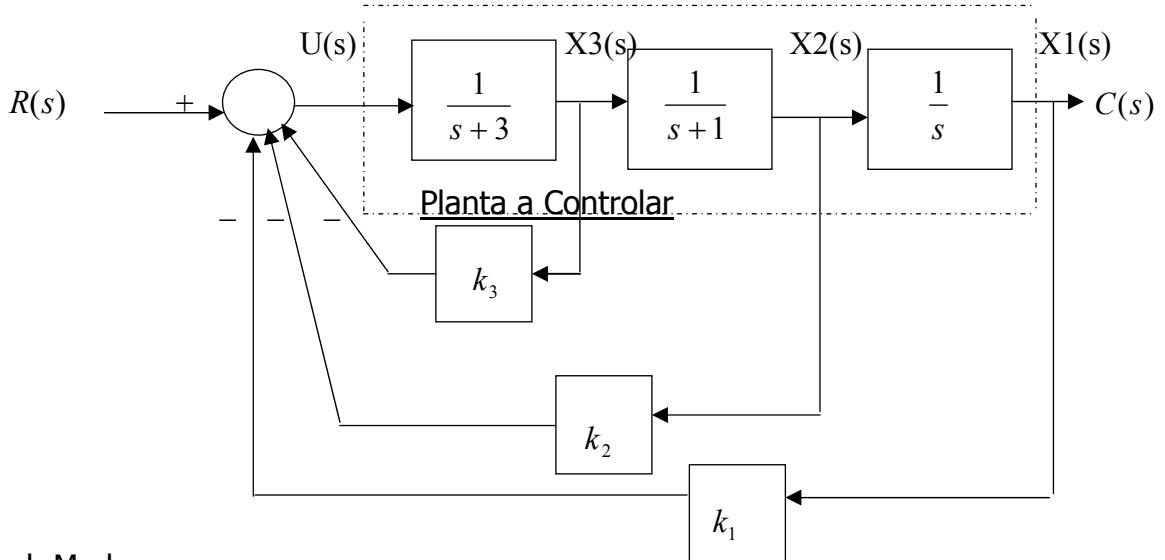
Control Clásico:

- 5) Si $a = b = 1$, determinar la ecuación característica del sistema de control propuesto en función de los parámetros k_1, k_2 y k_3 .- (Reduzca primero, el último lazo).-
- 6) Si $k_3 = 1$, demarcar en el plano $k_1 = f(k_2)$ la región donde el sistema es estable.
- 7) En el sistema de control de la figura, si $k_1 = 5$ y $k_3 = 1$, determinar el rango del parámetro k_2 para que el sistema sea estable aplicando el criterio de Nyquist. En los rangos de inestabilidad del parámetro k_2 obtener la cantidad de polos del sistema en el semiplano derecho del plano s.-
- 8) Con los valores de $k_1 = 5$ y $k_3 = 1$, graficar el lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema diseñado con k_2 como parámetro variable. Si se sabe que el sistema tiene un par de polos complejos conjugados, cuya parte es $\sigma = -1$, determinar la configuración *total* de polos y ceros del sistema como así también el valor correspondiente del parámetro k_2 .-

Ejercicio Nº 4:

Control Moderno:

El diagrama de bloques de un sistema de control mediante la realimentación de los estados *sólo* se muestra en la figura. Las ganancias k_1 , k_2 y k_3 son constantes.



Control Moderno:

- 1) El modelo de estado de la planta a controlar.-
- 2) La función de transferencia de la planta, $G_p(s)$.-
- 3) Encontrar los valores de las ganancias de realimentación para que:
 - a) El error estacionario a entradas escalones, $e_{EE} [e(t), \text{que sea la señal de error}] = 0$.
 - b) Los polos complejos del sistema de control estén ubicados en: $\lambda_{1-2} = -1 \pm j$.
- 4) Encuentre la tercera raíz. ¿Pueden las tres raíces ser asignadas arbitrariamente, alcanzando aún los requerimientos de estado estable con este simple diseño?-
- 5) Si los polos complejos conjugados del diseño anterior, no resultan *dominantes*, agregar una ganancia de precompensación G y determinar los *nuevos* valores de las ganancias de la matriz de realimentación, para que se consigan las especificaciones siguientes:

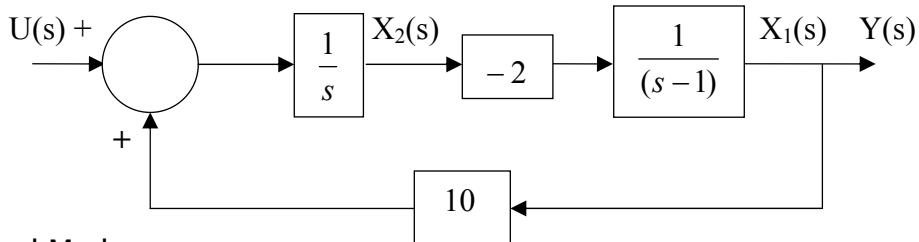
- Que el error de estado estacionario a entradas escalones siga siendo *nulo*.
- Que la sobreelongación de $c(t)$ a entradas escalones sea menor que 5%.-
- Que el tiempo de establecimiento al 2% no supere los 4.50 segundos.
- Que el error estacionario a entradas rampas unitarias no supere a 1.20.-

Control Clásico:

- 6) Si $k_1 = 10$ y $k_2 = 6$, bosquejar el lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema de control con k_3 como parámetro variable. Un polo de la función de transferencia empleada está en -2. Además encontrar la ubicación de los polos complejos conjugados del sistema y el valor de k_3 cuando se sabe que el polo real está situado en $\lambda_3 = -5$.
- 7) Con la teoría del control clásico, diseñar un sistema de control seguidor con realimentación unitaria y un controlador *serie adecuado* para conseguir por lo menos las primeras tres especificaciones que las logradas con el control *moderno*, en el punto número 5.-

Ejercicio Nº 5:

Un proceso a controlar está modelado por el siguiente diagrama de bloques:



Control Moderno:

La acción de control $u(t)$ se puede obtener de la entrada $r(t)$ y de la realimentación de los estados, de dos formas: *caso I*): $u(t) = r(t) - k_1x_1(t) - k_2x_2(t)$ o además con un control integral:

Caso II): $u(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) + G \int (r(t) - y(t)) dt$. - Se pide lo siguiente:

- 1) Determinar el modelo matemático del proceso a controlar en el espacio de estado, y establecer si el mismo es *estable*.-
- 2) En caso de ser inestable, ¿se podrá estabilizar el sistema con alguno de los controles propuestos?, ¿por qué?-
(Se conoce que las variables de estado se pueden sentir).-
- 3) En caso de ser afirmativa la respuesta del pto. anterior, determinar para el *caso I*), la región del plano $k_1 = f(k_2)$, en la cual el sistema control sea estable.-
- 4) También para el *caso II*), determinar, en el plano ya mencionado, si $G = -40$, demarcar en el plano $k_1 = f(k_2)$, la región donde el sistema de control es estable.-
- 5) Se desea diseñar un sistema de control, empleando el *caso II*), para que el mismo cumpla con las especificaciones detalladas a continuación:

- Que el error a entradas escalones sea nulo.-
- Que la sobreelongación a esas mismas entradas no supere el 5%.
- Que el tiempo de establecimiento al 5% sea menor o igual a 1.25 seg.
- Que el error de estado estable a entradas rampas unitarias sea igual a 0.60.-

- 6) Cuales resultaron las matrices del sistema diseñado.-

Control Clásico:

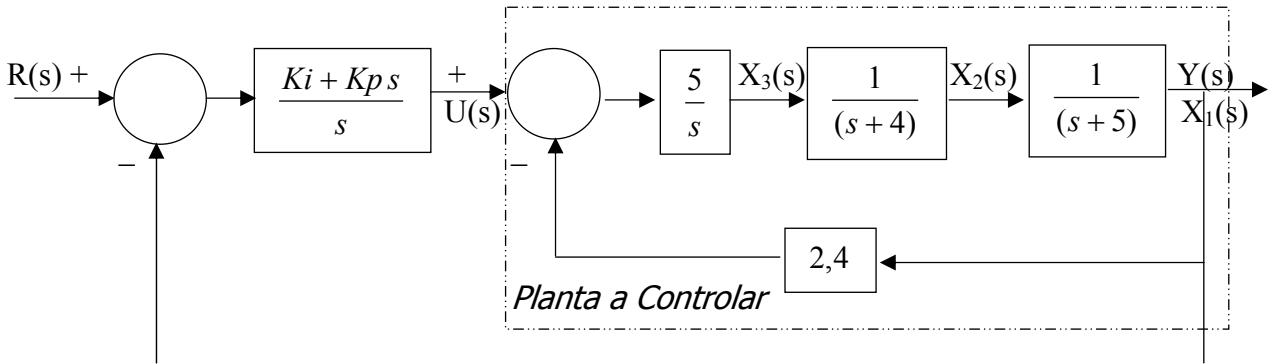
- 7) En el mismo sistema, si $k_1 = -21.5$, y la ganancia del integrador en el camino directo es $G = -40$, determinar aplicando el criterio de Nyquist el rango del parámetro k_2 , para que el sistema sea estable, además determinar la cantidad de polos en el semiplano derecho del plano s en los rangos de inestabilidad del parámetro k_2 .-
- 8) Si $k_1 = -21.5$ y $G = -40$, bosquejar el lugar geométrico completo de las raíces de la ecuación característica del sistema, con k_2 como parámetro variable. Encontrar la ubicación de los polos del sistema, y el valor correspondiente de k_2 , si se sabe que el polo real está en $\lambda_3 = -10$.-

Nota: El denominador de la función de transferencia equivalente empleada es:

$$(s^3 - s^2 + 63s + 80) \cong (s + 1.22)(s^2 - 2.22s + 65.7) .$$

Ejercicio Nº 6:

En la figura siguiente se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador serie PI. La planta es de tercer orden.



Control Moderno:

- 1) Obtener el modelo matemático en variables de estado de la *planta a controlar*.-
- 2) Diseñar un sistema *seguidor tipo 1*, con una ganancia *de precompensación* mas la realimentación de los estados, usando el *modelo del punto anterior*, para que se consiga las especificaciones siguientes:

- Que el error de estado estable a entradas escalones sea nulo.-
- Que el tiempo de establecimiento al 2% sea : $T_E(2\%) \leq 5,50 \text{ seg.}$
- Que la sobreelongación de $c(t)$ al escalón no supere el 17%: $M_p(\%) \leq 17\%. -$
- Que el error estacionario a entradas rampas unitarias sea menor que 0.825.-

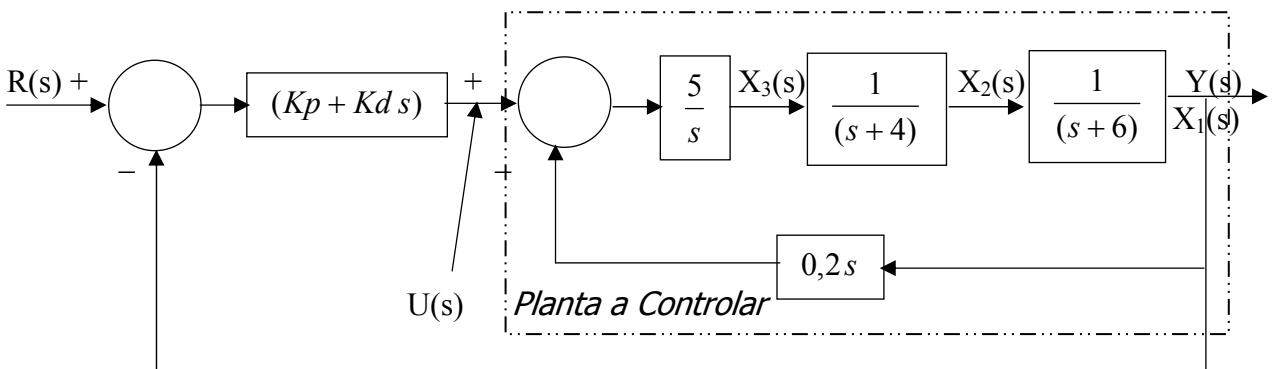
- 3) Cuales son las matrices del modelo del *sistema de control* diseñado.-

Control Clásico:

- 4) Demarcar en el plano $Ki = f(Kp)$ la región para la cual el sistema es estable.-
- 5) Utilizando el resultado del punto anterior determinar los rangos de Ki , o Kp para la estabilidad, si el otro parámetro tiene los valores siguientes: $Kp = 6$ y 15.6 , y además $Ki = 10,20$. -
- 6) Verificar por Nyquist el resultado del punto anterior, si $Kp = 6$, determinando además la cantidad de polos del sistema en el semiplano derecho del plano s en los rangos de inestabilidad del parámetro Ki . -
- 7) Bosquejar el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema con Ki como parámetro variable, ($Ki > 0$) y el valor de $Kp = 6$. Si se sabe que los dos polos reales están situados aproximadamente en $\lambda_3 = -1$ y $\lambda_4 \approx -6,89$. Determinar el valor del parámetro Ki y la ubicación del par de polos complejos conjugados λ_{1-2} . -
- 8) Diseñar un sistema de control, empleando el controlador serie PI indicado en la figura, para que se consiga *los mismos polos complejos conjugados dominantes* del punto 2) en el diseño con el control por realimentación de los estados.
- 9) ¿Que error de estado estable a entradas rampas de pendientes unitarias resultó?-

Ejercicio Nº 7:

En la figura siguiente se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador serie PD. La planta es de tercer orden.



Control Moderno:

- 1) Obtener el modelo matemático en variables de estado de la *planta a controlar*.-
- 2) Diseñar un sistema *seguidor tipo 1*, con una ganancia de precompensación mas la realimentación de los estados, usando el modelo del punto anterior, para que se consigan las especificaciones siguientes:

- Que el error de estado estable a entradas escalones sea nulo.-
- Que el tiempo de establecimiento al 2% sea : $T_E(2\%) \leq 1,80 \text{ seg.}$
- Que la sobreelongación de $c(t)$ al escalón no supere el 5%: $M_p(\%) \leq 5\%.$ -
- Que el error estacionario a entradas rampas unitarias sea menor que 0.50.

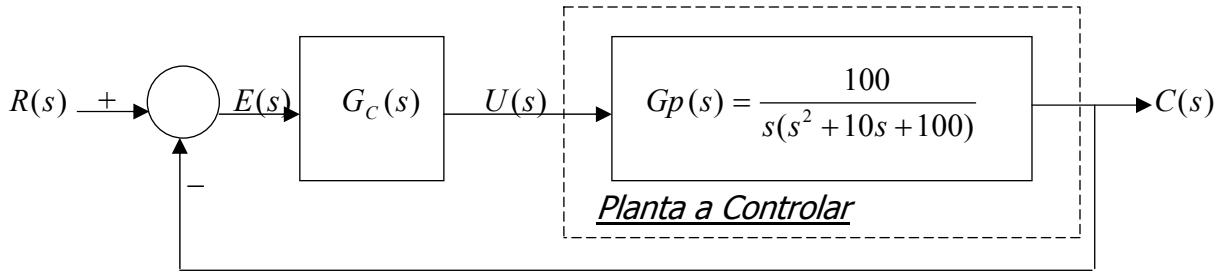
- 3) Cuales son las matrices del modelo del *sistema de control* diseñado.-

Control Clásico:

- 4) Demarcar en el plano $Kd = f(Kp)$ la región para la cual el sistema es estable.-
Suponga que los parámetros del controlador pueden teóricamente ser valores negativos.
- 5) Utilizando el resultado del punto anterior, determinar los rangos de Kd para que el sistema sea estable, si Kp tiene los valores de: $Kp = 5,6$ y 60 .-
- 6) Verificar con el criterio de Nyquist el resultado del punto anterior, si $Kp = 5,6$ estableciendo además la cantidad de polos del sistema en el o los rangos de inestabilidad de Kd .-
- 7) Graficar un bosquejo del lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema si Kd es el parámetro variable, para $Kp = 5,6$. Si se sabe que un polo del sistema está ubicado en $\lambda_3 = -8$, determinar la configuración total de *polos y ceros* del sistema seguidor tipo 1 y el valor correspondiente de Kd .
Nota: $(s^3 + 5s^2 - 14) \equiv (s - 1.47)(s + 2.26)(s + 4.21).$ -
- 8) Diseñar un sistema de control, empleando el controlador serie PD indicado en la figura, para que se consiga *la misma posición de los polos complejos conjugados dominantes* del punto 2), en el diseño con el control por realimentación de los estados.
- 9) ¿Que error de estado estable para una entrada rampa de pendiente unitaria resultó?-

Ejercicio Nº 8:

El diagrama de bloques de un sistema de control clásico con un controlador serie, para controlar la planta $G_p(s)$ se muestra en la figura:



Control Clásico:

Si la función de transferencia del sistema de control, (de lazo cerrado), es:

$$M(s) = \frac{K}{(s^2 + 20s + 200)(s - \lambda_3)}, \text{ donde } K \text{ es la ganancia del sistema y } \lambda_3 \text{ el tercer polo}$$

del mismo.

1) Graficar la función, coeficiente de error a entradas rampas en función de λ_3 :

$$Kv = f(\lambda_3).$$

2) ¿Cuál es el valor *teórico máximo* de Kv que se podría obtener? Comente los inconvenientes que pueden surgir al intentar obtener un valor *grande* de Kv . -

3) Diseñar ahora, si es posible, en *forma directa*, un simple controlador *serie de una etapa*, (filtro de segundo orden), para que en el sistema de control resultante se alcancen las especificaciones detalladas a continuación:

- Que el error de estado estable a entradas escalones unitarios sea nulo.
- Que el sistema no tenga ceros.
- Que la sobreelongación de $c(t)$ a entradas escalones no supere el 5%.
- Que el tiempo de establecimiento al 5% de $c(t)$ al escalón unitario no supere el valor de 0.25 seg.
- Se requiere que la constante de error a la rampa unitaria sea $Kv = 9 \text{ seg}^{-1}$.

Determinar la función de transferencia del controlador, $G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$.

Control Moderno:

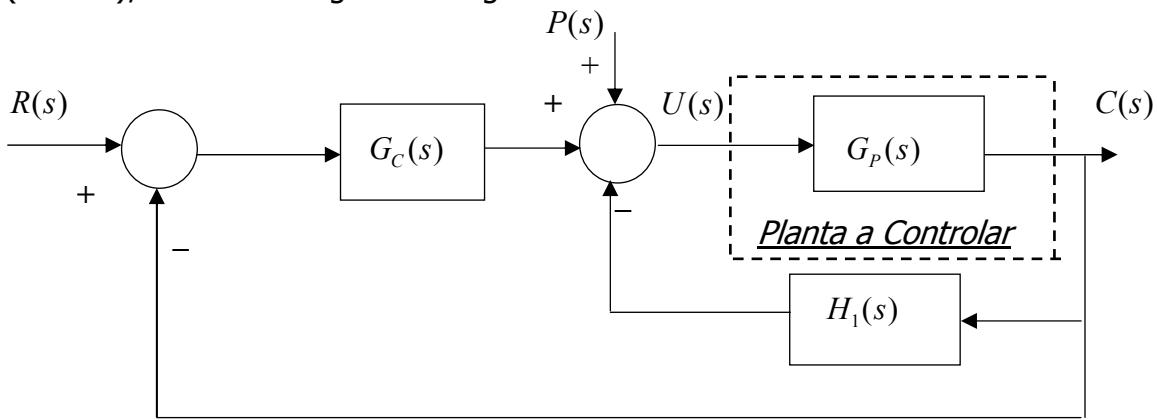
4) Determinar el modelo matemático de la planta en la forma canónica controlable.-

5) Diseñar un sistema de control *seguidor tipo 1*, empleando el modelo del punto anterior, por medio de la realimentación de los estados con una ganancia de precompensación, para que se cumplan *todas las especificaciones* obtenidas con el control clásico del punto 3).-

6) Cuales son las matrices del modelo del *sistema de control* diseñado.-

Ejercicio Nº 9:

Un sistema de control con realimentación unitaria y un control *P.I.D. modificado*, (*I – PD*), tiene la configuración siguiente:



Donde: $G_C(s) = \frac{Ki}{s}$; $G_P(s) = \frac{100}{s(s+2)}$ y $H_1(s) = (Kp + Kd s)$, con: $Kp; Ki$ y $Kd > 0.$ –

Control Clásico:

- 1) Si $Ki = 0.32$, demarcar en el plano, $Kp = f(Kd)$ la región para la cual el sistema es estable.
- 2) Usando el grafico anterior, fijado un parámetro determinar el rango del otro para que el sistema sea estable a saber: a) Si $Kd = 0.055$ y b) Si $Kp = 0.32$ y $Kp = 0.08.$ –
- 3) Verificar el caso a), aplicando el criterio de estabilidad de Nyquist.-
- 4) Si $Ki = 0.32$ y $Kd = 0.055$, graficar el lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema con Kp como parámetro variable.-
- 5) Si se quiere que el polo real y la parte real del par complejos conjugados tengan el *mismo valor*, determinar la ubicación de los tres polos del sistema y la ganancia $Kp.$ –
- 6) Diseñe el controlador *P.I.D. modificado* comentado, para que se cumplan las especificaciones de funcionamiento siguientes:

- Que el sobrepaso máximo a una entrada escalón unitario sea $\leq 5\%.$ –
- Que el tiempo de establecimiento al 2% sea, $t_E \leq 2.25 \text{ seg.}$ –
- Que error estacionario a una entrada rampa unitaria no supere el valor de $0.60.$ –

Control Moderno:

- 7) Determine el modelo matemático de la planta en la forma canónica controlable.-
- 8) Realizar un diseño por realimentación de los estados con un *control integral*, para conseguir las *mismas* especificaciones ya enumeradas para el control clásico

CONTROL II (Elo y Bio)

Tema:

Controlabilidad y Observabilidad
de las Plantas a Controlar

Prof. Ing. Carlos F. Martín

Año: 2010

Controlabilidad de Sistemas Lineales

Los conceptos de *Controlabilidad* y *Observabilidad* presentados primero por Kalman, R.E juegan un papel importante en los aspectos teóricos y prácticos del control moderno. Las condiciones sobre la controlabilidad y la observabilidad *gobiernan la existencia de una solución de un problema de control óptimo*. Esto parece ser la *diferencia básica* entre la teoría de *control óptimo* y la *teoría clásica* de control. En esta última, las teorías de diseño son dominadas por métodos de prueba y error, por lo que dado un conjunto de especificaciones de diseño, el diseñador desconoce en el inicio si existe una solución o no.

Por otro lado, la teoría de control óptimo, para la mayor parte de los problemas, cuenta con criterios para determinar desde el inicio si la solución de diseño existe o no para los parámetros del sistema y los objetivos del diseño.

Se mostrará que la condición de controlabilidad de un sistema está íntimamente relacionada con la existencia de soluciones de la realimentación del estado con el propósito de ubicar los valores característicos del sistema en forma arbitraria.

El concepto de observabilidad se relaciona con la condición de observación o estimación de las variables de estado a partir de las variables de salida, las cuales son generalmente medibles, (y menor cantidad).

Una forma de ilustrar la motivación para la investigación de la controlabilidad y observabilidad se puede realizar al hacer referencia al diagrama de bloques que se muestra en la figura 1.

La figura (1a) muestra un sistema con la dinámica del proceso descripta por:

$$\bar{u}(t) = -K \bar{x}(t) + G \bar{r}(t) \quad \text{Lazo Abierto} \quad (1)$$

El sistema de lazo cerrado se forma al realimentar las variables de estado a través de la matriz constante de ganancia de realimentación K.

Por lo que de la figura 1:

$$\bar{u}(t) = -K \bar{x}(t) + G \bar{r}(t) \quad (2)$$

En donde:

- K: es la matriz de realimentación (pxn) con elementos constantes
- G: matriz de precompensación (pxp)

El sistema de lazo cerrado se describe mediante:

$$\frac{d\bar{u}(t)}{d(t)} = A\bar{x}(t) + B \left[-K\bar{x}(t) + G\bar{r}(t) \right]$$

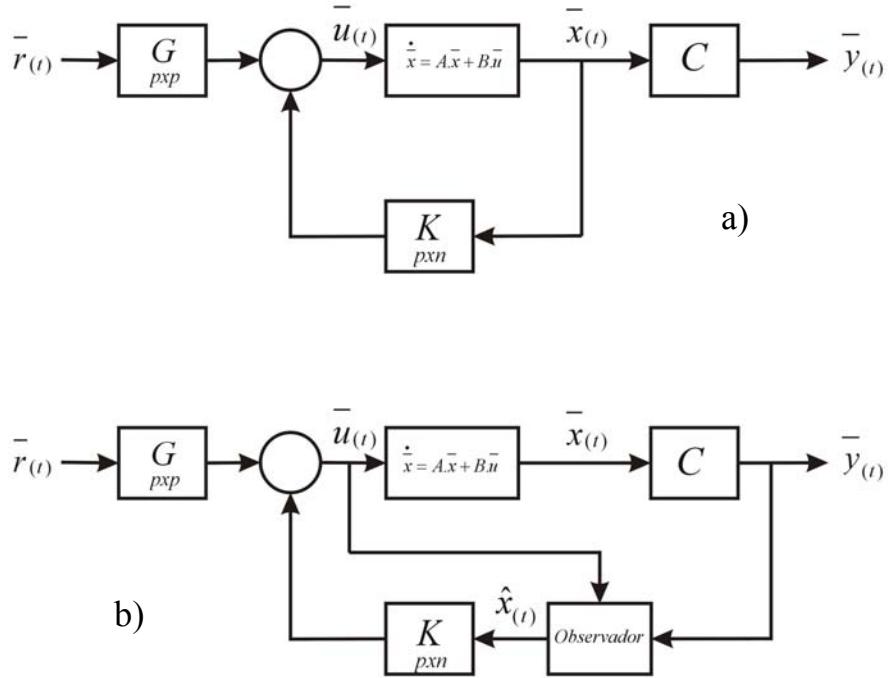


Figura 1

Entonces:

$$\frac{d\bar{u}(t)}{d(t)} = (A - B.K)\bar{x}(t) + (B.G)\bar{r}(t) \quad (3)$$

En donde:
 $Ac = A - B.K$
 $Bc = B.G$

Este problema también se conoce como: *diseño por ubicación de polos mediante la realimentación del estado*. En este caso, el objetivo de diseño es encontrar la matriz K , tal que los valores característicos de Ac sean fijados por el diseñador. La palabra “polo” se refiere a los polos de la función de transferencia de lazo cerrado (si $p = q = 1$), que serán los mismos que los valores característicos de Ac .

Se puede demostrar que la existencia de una solución al diseño por ubicación de los polos, con valores de los mismos asignados en forma arbitraria a través de la realimentación del estado, está basada directamente en la controlabilidad de los estados de la planta.

El resultado es que:

Si la planta de la ecuación (1) es controlable, existe una matriz de realimentación con elementos constantes K que permite que los valores característicos de $Ac=(A-BK)$ sean asignados en forma arbitraria.

Una vez que se ha diseñado el sistema en lazo cerrado se debe tratar con el problema práctico de implementar la realimentación de las variables de estado. Existen dos problemas prácticos en la implementación del control por realimentación del estado. Uno es que el número de variables de estado puede ser excesivo por lo que el costo de detectar cada una de estas variables de estado para la realimentación puede ser prohibitivo. El otro problema es que no todas las variables de estado están físicamente accesibles. Por lo tanto, podría ser necesario diseñar y construir un *observador* que estime el vector de estado a partir del vector de salida $\bar{y}(t)$ y de la entrada $\bar{u}(t)$. La figura (1b) muestra el diagrama de bloques de un sistema de lazo cerrado con un observador. El vector de estado observado $\hat{x}(t)$ se utiliza para generar el control $\bar{u}(t)$ a través de la matriz de realimentación K.

La condición de que tal observador pueda ser diseñado para el sistema, es que la planta sea observable.

Concepto General de Controlabilidad

El concepto de controlabilidad se puede enunciar con referencia al diagrama de bloques de la figura 2

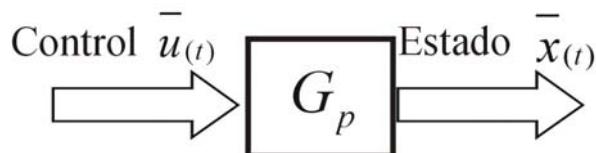


Figura 2

Se dice que el proceso es completamente controlable si cada variable de estado del proceso se puede controlar para llegar a un cierto objetivo en un tiempo finito, a través de alguna acción control no restringida $\bar{u}(t)$.

En forma intuitiva, es sencillo entender que si una de las variables de estado es independiente de la acción control $\bar{u}(t)$, no habría forma de dirigir esta variable de estado en particular al estado deseado en un tiempo finito por medio de un esfuerzo de control. Por lo tanto se dice que este estado

en particular no es controlable y que la planta no es completamente controlable o simplemente es no controlable mientras haya por lo menos un estado que sea no controlable.

Como ejemplo sencillo de una planta no controlable, la figura 3 ilustra un diagrama de estado de un proceso lineal con dos variables de estado, donde:

$p = q = 1$, $\bar{u} \equiv u$ y $\bar{y} \equiv y$, escalares.-

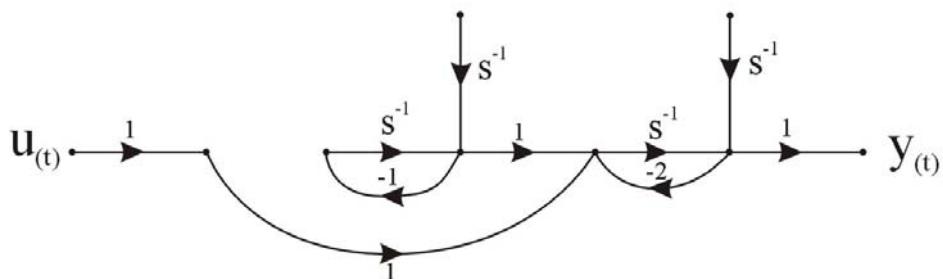


Figura 3

Debido a que $u(t)$ afecta solamente al estado $x_1(t)$, $x_2(t)$ es no controlable. En otras palabras, será imposible llevar $x_2(t)$ de un estado inicial $x_2(t_0)$ a un estado deseado $x_2(t_f)$ en un intervalo de tiempo finito ($t_f - t_0$) mediante el control $u(t)$. Por lo tanto, se dice que el sistema no es completamente controlable.

El concepto de controlabilidad mencionado anteriormente se refiere a los estados y se conoce como *controlabilidad del estado*. La controlabilidad también se puede definir para las salidas del sistema de tal forma que exista una diferencia entre la controlabilidad del estado y la controlabilidad de la salida.

Definición de Controlabilidad del Estado

Considere que un proceso lineal e invariante con el tiempo se describe mediante las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$\frac{\partial \bar{u}(t)}{\partial t} = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \quad (4)$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \quad (5)$$

En donde:

- $\bar{x}(t)$ es el vector de estado de ($n \times 1$)

- $\bar{u}(t)$ es el vector de entrada de ($p \times 1$)
- $\bar{y}(t)$ es el vector de salida de ($q \times 1$)
- A, B, C y D son las matrices de los coeficientes con dimensiones apropiadas.

Dado un sistema situado en un estado inicial arbitrario $\bar{x}(t_0)$, se dice que es completamente controlable si puede ser llevado a otro estado $\bar{x}(t_f)$ mediante un vector de entrada (señal de control) sin restricciones en un tiempo finito.

El siguiente teorema demuestra que la condición de la controlabilidad depende solo de las matrices A y B. El teorema también proporciona un método de prueba para la controlabilidad del estado.

Teorema 1: (Es general)

Para que la planta descripta por las ecuaciones de estado (4) sea de estado completamente controlable, es necesario y suficiente que la matriz denominada de controlabilidad tenga rango n.

$$S_{nxnp} = [B \quad | \quad A \cdot B \quad | \quad A^2 \cdot B \quad | \dots \quad | \quad A^{n-1} \cdot B] \quad (6)$$

La demostración de este teorema no será tratada aquí, se puede consultar en cualquier libro de sistemas de control óptimo.

Aunque este criterio es muy directo no es sencillo emplearlo en forma manual para sistemas de elevado orden y/o con muchas entradas, aún con $p = 2$ habrán $2 \times n$ columnas en S y por ende un gran número de posibles combinaciones de matrices de orden ($n \times n$). En estos caso se puede hallar $S \times S^T$ que es de orden ($n \times n$), entonces si $S \times S^T$ es no singular, S tendrá rango n pues el rango de S es igual al rango de $S \times S^T$.

Ejemplo 1:

Dada las matrices A y B de una planta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a) ¿Será controlable?

b) ¿Se cumplirá la condición de controlabilidad utilizando una sola entrada?

a) Se tiene que $S = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 7 & 3 & 12 \end{array} \right]$ (3.6)

Utilizando las tres primeras columnas, se ve que el rango de S es 3 por lo tanto la planta es controlable utilizando las dos entradas disponibles.

b) Si se usa la primera entrada, la nueva matriz B denominada ahora B_1 , tendrá una sola columna, la primera, con lo cual la matriz S_1 será:

$$S_1 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Se observa que el rango de S_1 es 2, con lo cual con la entrada $u_1(t)$ exclusivamente no es posible llevar a la planta desde un punto cualquiera a otro del espacio de estado, en consecuencia es no controlable.-

Ahora utilizando solo la segunda entrada se tiene:

$$S_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} B_2 & A \cdot B_2 & A^2 \cdot B_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \text{Rango de } (S_2) = 3$$

Por ende utilizando solo la segunda entrada la planta puede ser llevada a un punto del espacio de estado a partir de un punto inicial dado la misma será controlable.-

Ejemplo 2:

Consideremos la planta mostrada en la figura (3) que era no controlable.

Por ende el rango de la matriz S deberá ser menor que 2.

Tenemos que:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \ 0] ; \quad D = [0]$$

Por lo tanto la matriz de la controlabilidad será:

$$S = [B \ | \ A \cdot B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de S es igual a 1, distinto de 2, por lo que la planta es de estado no controlable.

En este caso $x_2(t)$ no se puede llevar de un punto cualquiera del espacio de estado a otro.

Pruebas Alternativas para la Controlabilidad

Existen otros métodos alternos para probar la controlabilidad, y algunos de éstos pueden ser más convenientes para aplicarse que la condición de la ecuación (6).

Teorema 2: (Solo para sistemas SISO)

“Para un sistema de *simple entrada simple salida*, (*SISO*), por ende:

($q = p = 1$), descrito por la ecuación de estado (4), el par (A, B) será controlable si A y B están en la forma canónica controlable o son transformables a la misma mediante una transformación lineal de semejanza”.

La prueba de la segunda parte del teorema es directa ya que como se especifico antes esta clase de transformación requiere que S tenga rango n , o sea no singular, para que exista P^{-1} pues $P^{-1} = M^{-1} \cdot S^{-1}$.

En cuanto a la primera parte del teorema se demuestra, si para este caso, la matriz S tiene *siempre* rango n . Si en la Función Canónica Controlable las matrices de la planta son A_1 y B_1 , donde como se sabe:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 \cdot B_1 & A_1^2 \cdot B_1 & \dots & A_1^{n-1} \cdot B_1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} & \dots & \dots \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & -a_{n-1} - a_{n-2} & \dots & \dots \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-1} - a_{n-2} & -a_{n-1}^3 + a_{n-2} + a_{n-3} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Como se observa S será una matriz triangular inferior con la diagonal secundaria de unos, por ende el rango de S será (+1 o -1) dependiendo de n , por lo tanto su rango será siempre n y en consecuencia la planta en la F.C.C es controlable.

Ejemplo 3a:

Sea la planta en la F.C.C

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} ; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{F.C.C}$$

$$S = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 \cdot B_1 & A_1^2 \cdot B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango de } (S) = 3 \text{ pues } |S| = -1$$

Teorema 3: (General para sistemas MIMO o SISO pero con valores característicos distintos)

"Para una planta descrita por la ecuación (4) si A está en la F.C.Diagonal, el par [A,B] es controlable si la matriz B no tiene filas totalmente nulas.

La demostración es evidente, pues las ecuaciones de estado están completamente desacopladas unas de otras y la única manera de que los estados sean "alcanzados" es que los mismos estén controlados directamente por *al menos una entrada*".

Por lo tanto si *alguna fila de B tiene todos los elementos ceros, esto indica que la correspondiente variable de estado no será "alcanzada" por ninguna de las entradas*.

Si la planta es de una entrada solamente, ningún elemento de la columna de B debe ser nulo, evidentemente.

El teorema *no sería válido* para plantas en las que la matriz A se puede diagonalizar aún cuando hay valores característicos repetidos, todos los valores característicos repetidos asociados a bloque de Jordán de orden 1x1. Esto se aclara con el teorema siguiente cuando hay valores característicos repetidos. Antes veremos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3b:

Una planta tiene las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{5}{42} \\ -\frac{1}{24} \\ \frac{3}{56} \end{bmatrix} \quad C = [32 \quad 8 \quad -20]$$

Como los valores característicos son distintos la A está en la F.C.D. y la matriz B no tiene ningún elemento nulo, (filas), la planta será controlable.

Teorema 4:

Es válido en general para sistemas MIMO aún cuando los valores característicos múltiples tengan más de un bloque de Jordán asociado con cada valor propio múltiple, y dice:

"Si A está en la forma canónica de Jordán el par [A, B] es controlable, si todos los elementos en las filas de B que correspondan a la última fila de cada bloque de Jordán no son cero.

Se entiende que las filas de B que corresponden a los valores característicos simples no deberán tener todos sus elementos nulos".

La prueba de este teorema es simple, ya que la última fila de cada bloque de Jordán corresponde a una ecuación de estado que está completamente desacoplada de las otras, por ende debe ser "alcanzada" por alguna entrada. Los elementos en las otras filas de B en cada bloque de Jordán, no necesitan ser diferentes de cero ya que los estados correspondientes están todavía acoplados a través de los números *unos* de los bloques de Jordán de la matriz A.

Cuando se trata de sistemas SISO, ($p=q=1$), los valores característicos múltiples deberán tener *solo un bloque* de Jordán asociado con cada uno de ellos y también solo el *elemento* de la matriz B que corresponde a la *última fila* de cada bloque de Jordán no deberá ser nulo.-

Ejemplo 4:

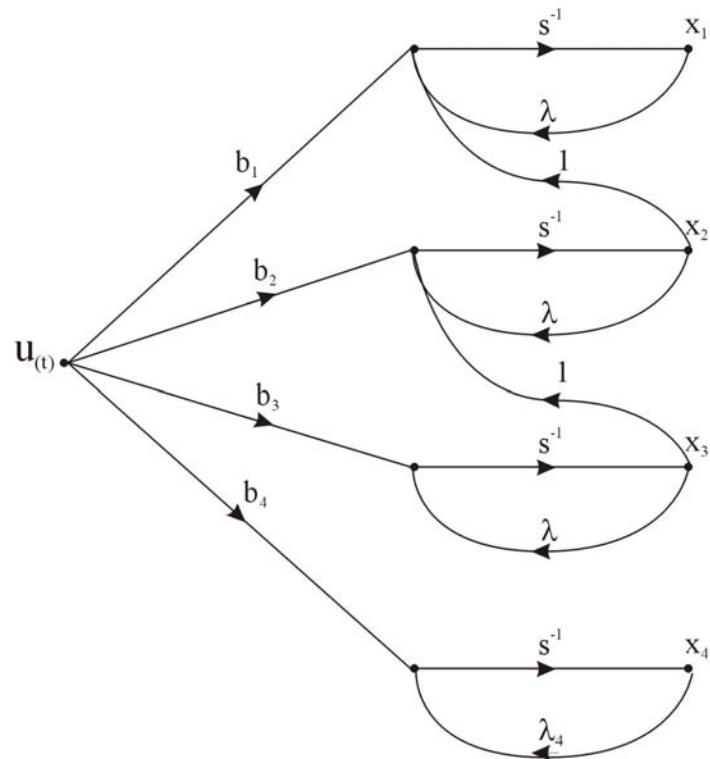
Una planta a controlar de cuarto orden tiene tres de sus cuatro valores característicos iguales: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ y λ_4 diferente, y tiene una sola entrada. Supongamos que las matrices A y B son:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

El teorema dice que b_3 y b_4 deben ser distintos de cero pero b_1 y b_2 pueden ser ceros y el sistema será controlable. Las ecuaciones de estado son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda.x_1 + 1.x_2 + b_1.u \\ \dot{x}_2 &= \lambda.x_2 + 1.x_3 + b_2.u \\ \dot{x}_3 &= \lambda.x_3 + b_3.u \\ \dot{x}_4 &= \lambda_4.x_4 + b_4.u \end{aligned}$$

El diagrama de estados sería:



Como se puede apreciar b_1 y b_2 pueden ser nulos o no pero b_3 y b_4 deben ser distintos de cero para que la planta sea controlable.

Ejemplo 5:

Consideremos el ejemplo 2, en el mismo:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Con $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -1$ (autovalores distintos)

Chequear por el teorema 3 si el sistema es controlable:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad B^* = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Último elemento} = 0$$

Como el segundo elemento de la matriz B^* es cero, la variable de estado x_2^* es no controlable, en consecuencia la planta será no controlable ya que como se verá más adelante la controlabilidad no se altera con una transformación lineal.-

O la x_2 ya que

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1^* + x_2^* \\ x_2 = x_2^* \end{array} \right.$$

Solución por Computadora

La función *svdesign* en las herramientas del CSAD para Matlab tiene una opción que regresa la condición de controlabilidad de una planta SISO, (calcula la matriz S), una vez que se han introducido los parámetros de las ecuaciones lineales dinámicas o de la función de transferencia.

Ejemplo 5a:

Una planta tiene las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0.5]$$

Según el teorema 4, como hay *solo una entrada*, sistema SISO, la planta no es controlable pues hay *dos bloques* de Jordán asociados con el valor característico $\lambda = -2$.

En general para ver si la planta es controlable se aplicaría:

$$S = [B \ A.B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow |S| = 0 \text{ por lo que el rango}(S) = 1 \neq 2 \text{ entonces la}$$

planta es *no controlable*.

Esta planta se puede hacer controlable con *otra entrada* por ejemplo:

$$\text{Con } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow S = [B \ A.B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Aplicando el método general se puede ver que las dos primeras columnas de la matriz de la controlabilidad S el rango(S) = 2 = n, por ende esta planta ahora será controlable.

Ejemplo 5b:

El modelo de un proceso a controlar tiene las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $|s.I - A| = 0 \rightarrow s^3 + (-5)s^2 + 8.s + (-4) = 0$, entonces $\lambda_{1-2} = 2$

$$\text{y } \lambda_3 = 1; \text{ y: } S = [B \ A.B \ A^2.B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow |S| = 0 \rightarrow \text{rango}(S) = 2 \neq 3$$

por lo que el proceso es *no controlable*.

Como se dijo y se verá más adelante si se hace una transformación lineal de semejanza, *no se altera la condición de la controlabilidad*. Si se lleva el modelo a la F.C.J una matriz de transformación puede ser:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Entonces se tendrá: } A_j = T^{-1} \cdot A \cdot T = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ y } B_j = T^{-1} \cdot B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right]$$

Como la última fila de B_j , que corresponde al bloque de Jordán de (1x1) para $\lambda_3 = 1$, es cero, la variable de estado transformada $x_3^*(t)$ es no controlable. Como de T se ve que: $x_2(t) \equiv x_3^*(t)$ significa que $x_2(t)$ es la variable de estado no controlable en el modelo original de la planta.

Ejemplo 6:

Consideremos un proceso de tercer orden que tiene:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 1 \ 1] \quad y \quad D = 0$$

$$\text{Luego: } S = \begin{bmatrix} B \\ A \cdot B \\ A^2 \cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |S| = 0 \rightarrow \text{rango}(S) = 1 \neq 3$$

Por ende este proceso es de estado no controlable. En consecuencia *no existirá una transformación lineal* de semejanza que lleve el modelo original a la F.C.C, pues la matriz S no tiene inversa.

Por otro lado como $|sI - A| = 0 \rightarrow (s+1)(s+2)(s+3) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = -2; \lambda_3 = -3$, se puede llevar a la F.C.D y la matriz B de esta forma deberá tener alguna fila nula como mínimo (esto se verá en el teorema 10).

$$T = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \bar{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Por ende: } A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C_d = [1 \ 0 \ 1]$$

Como las dos primeras filas de B_d son nulas el proceso es de estado no controlable. Este resultado será evidente cuando veamos el teorema 10. Las variables de estado x_1^* y x_2^* serán no controlables.

$$\text{Como } \overline{x(t)} = T \cdot \overline{x^*(t)} \text{ resultará } \begin{cases} x_1 = x_1^* - x_2^* \\ x_2 = x_2^* \\ x_3 = x_3^* \end{cases}$$

Por ende las variables x_1 y x_2 del modelo original serán las no controlables.

Ejemplo 7:

Sigamos con la misma planta, si se desea obtener la F.C.C. se tendrá que hacer la descomposición directa de la Función de Transferencia de la misma

$$G_p = C(sI - S)^{-1} \cdot B = \frac{(s^2 + 3s + 2)}{(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{Y_{(s)}}{U_{(s)}}$$

De la misma resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [2 \ 3 \ 1] \quad y \quad D = 0$$

Este modelo será de estado controlable ya que:

$$S = [B \ A \cdot B \ A^2 \cdot B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 6 & 25 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango}(S) = 3 \rightarrow \text{planta controlable}$$

Sin embargo el modelo original, (ejemplo 6), con otras variables de estado era *no controlable*.

Si en base a este último modelo (la FCC) se obtiene la forma canónica diagonal, pues los valores característicos son distintos, la nueva matriz B_d deberá tener todos sus elementos distintos de cero, por ende el modelo en la FCD será controlable, como se verá mas adelante, también o será el sistema original (invarianza de la controlabilidad en una transformación lineal de semejanza).

$$T = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -9 \end{bmatrix}, \text{ puede ser una matriz de transformación, por}$$

lo tanto:

$$A_d = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad B_d = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad y \quad C_d = [0 \ 0 \ -2]$$

Como todos los elementos de B_d son distintos de cero la planta será controlable.

$$\text{Como en este caso } G_p = C(sI - S)^{-1} \cdot B = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)};$$

Se puede ver que hay polos y ceros comunes (-1 y -2 en este caso).

Esto demuestra que *en estos casos*, cuando hay cancelación polo-cero en la $G_p(s)$ de la planta), la controlabilidad de una *planta SISO* depende de la elección de las variables de estado de la misma.-

Además la controlabilidad no cambia a través de una transformación lineal de semejanza. Estos dos puntos se tratarán en sendos teoremas mas adelante.

Ejemplo 7a:

Veamos una planta con dos entradas y dos salidas, las matrices del modelo elegido son las siguientes, (está en la F.C.J):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz B indica a simple vista que la planta es Controlable pues cumple con el teorema 4.

La matriz de la controlabilidad sería:

$$S = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Su rango será el mismo que el de SS^T :

$$SS^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -6 \\ 1 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Y como $|SS^T| = 24 \neq 0$, el rango será $= 4 = n$

Por lo tanto esta planta MIMO será controlable, a pesar de tener dos bloques de Jordán, (uno de 1×1 y otro de 2×2), asociados con el valor característico -1.

También se puede formar con S, una matriz de 4 por 4 con cuatro columnas cualquiera de S y verificar que su determinante es distinto de cero. Por ejemplo con las columnas 1, 2, 3 y 5 de S se formará la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Su determinante tiene el valor (-1), por lo tanto el rango de la matriz S es 4 igual a n, por ende la planta es controlable.-

Observabilidad de Sistemas Lineales

El concepto de observabilidad se explicó al principio. Esencialmente *un sistema es observable si cada variable de estado del sistema "afecta" alguna de las salidas.*

En otras palabras, con frecuencia es deseable obtener información sobre las variables de estados midiendo las salidas i las entradas. Si cualquiera de los estados no se puede observar a partir de las mediciones de las salidas, se dice que el estado es no observable, y el sistema no es completamente observable, o simplemente no observable. La figura (4) muestra el diagrama de estado de un sistema lineal en donde el estado x_2 no está conectado en alguna forma con la salida $y_{(t)}$. Una vez que se ha medido $y_{(t)}$, se puede observar el estado $x_{1(t)}$, ya que $x_{1(t)} = y_{(t)}$. Sin embargo el estado $x_{2(t)}$ no puede ser observado midiendo $y_{(t)}$ por lo que el sistema es no observable.

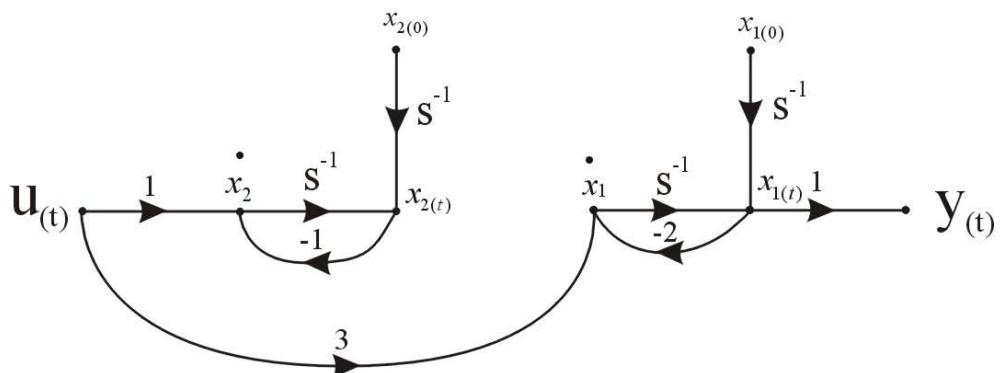


Figura 4:

Definición de Observabilidad

Dado un sistema lineal e invariante en el tiempo que se describe mediante las ecuaciones (4) y (5), *se dice que el estado es observable si dada cualquier entrada $\bar{u}_{(t)}$, existe un tiempo finito $t_f > t_0$ tal que del conocimiento de $\bar{u}_{(t)}$ para $t_0 \leq t \leq t_f$, las matrices A, B, C y D; y la salida $\bar{y}_{(t)}$ para $t_0 \leq t \leq t_f$ son suficientes para determinar $\bar{x}_{(t_0)}$.* Si cada estado del sistema es observable para un t_f finito, se dice que el sistema es completamente observable, o simplemente observable.

El siguiente teorema demuestra que la condición de observabilidad depende de las matrices del sistema A y C. El teorema proporciona también un método para probar la observabilidad del sistema.

Teorema 5: (de aplicabilidad general)

Para que la planta descripta por las ecuaciones (4) y (5) sea de estado completamente observable, es necesario y suficiente que la matriz llamada de observabilidad de orden ($n \times n$) tenga rango igual a n .

$$V = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \\ \vdots \\ C.A^{n-1} \end{bmatrix}_{n \times q} \quad (7)$$

La demostración no se tratará en este texto.

Si la planta es SISO la matriz V se cuadrada de orden ($n \times n$) y deberá cumplirse que su determinante sea distinto de cero.-

Ejemplo 8:

Sea la planta cuyas matrices son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Discernir si es observable o no
- b) ¿Se cumplirá la condición de observabilidad utilizando una sola de las salidas?

$$\text{a)} \quad V = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & -4 \\ \hline 4 & -14 & 12 \\ \hline -4 & 25 & -12 \\ \hline 12 & -54 & 32 \end{bmatrix}$$

Utilizando las 3 primeras filas, por ejemplo, se observa que el rango es 3, con lo cual se deduce que la planta es observable usando las dos salidas disponibles.

- b) Si se usa solo la primera salida, la nueva matriz C , denominada ahora C_1 será:

$$C_1 = [4 \ 0 \ 0] \rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1.A \\ C_1.A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ -4 & 24 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango } (V_1) = 2 < n$$

Con lo cual con el conocimiento de $\bar{u}_{(t)}$ e $\bar{y}_{(t)}$ solamente no es posible llegar a conocer el vector de estado.

Ahora utilizando la segunda salida se tiene:

$$V_2 = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 \cdot A \\ C_2 \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & -14 & 12 \\ 12 & -54 & 32 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango } (V_2) = 3$$

Por lo tanto, utilizando solo la observación de la segunda salida, es posible conocer el vector de estado.

Ejemplo 9:

Consideremos el sistema que se muestra en la figura (4), el cual era no observable. Las ecuaciones dinámicas del mismo eran:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

Por lo que la matriz de la observabilidad será:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango } (V) = 1 \neq 2$$

Por ende el par $[A, C]$ es de estado no observable.

Ejemplo 10:

Consideremos el proceso descrito por las ecuaciones dinámicas siguientes. Veremos que la observabilidad depende también, (cuando $p = q = 1$ y *hay polos y ceros comunes en $Gp(s)$*), de la elección de las variables de estado.

Las matrices de la planta pueden ser las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \quad 0] ; \quad D = 0$$

Luego:

$$S = [B \mid A \cdot B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango } (S) = 1 \neq 2 \rightarrow \text{planta } \textit{no controlable}$$

$$V = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango } (V) = 2 = n \rightarrow \text{planta } \textit{observable}$$

Si a través de una descomposición directa de la $Gp_{(s)} = \frac{y_{(s)}}{u_{(s)}}$ se lleva el

modelo a la F.C.C las matrices serán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \quad 1]$$

Evidentemente la planta será controlable, pues está en la F.C.C. Luego la matriz de la observabilidad será:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ C.A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango } (V) = 1 \neq 2 \rightarrow \text{planta } no\ observable$$

El presente ejemplo demuestra que la observabilidad también depende de la elección de las variables de estado cuando hay cancelación polo-cero en $G_p(s)$. En el primer caso la planta es controlable pero no observable y en el segundo a la inversa.

Hay razones bien definidas para este resultado (se verán en el teorema 9).

Pruebas Alternativas para la Observabilidad

Como con la controlabilidad, existen otros métodos alternativos para comprobar la condición de observabilidad de una planta a controlar. Estos se verán a continuación.

Teorema 6: (Solo para plantas SISO, $p = q = 1$)

"Para un sistema de simple entrada y simple salida ($p = q = 1$), descrito por las ecuaciones:

$$\dot{\bar{x}}_{(t)} = A\bar{x}_{(t)} + B\bar{u}_{(t)}$$

$$\bar{y}_{(t)} = C\bar{x}_{(t)} + D\bar{u}_{(t)}$$

El par $[A, C]$ es observable si A y C están en la F.C.O o son transformables a la F.C.O por medio de una transformación lineal de semejanza".

La prueba de la segunda afirmación es directa, ya que se estableció que la transformación a la forma canónica observable requiere que la matriz de observabilidad V sea no singular, pues $Q = (M.V)^{-1} = M^{-1} \cdot V^{-1}$, o sea que para que exista Q , matriz de transformación, el determinante de V debe ser distinto de cero para que la inversa de V exista y en consecuencia también la matriz de transformación Q .

Recordar que esto es *válido solo para plantas monovariables* o sea una entrada, $p = 1$ y una salida $q = 1$.

En cuanto a la primera parte del teorema se demuestra si la matriz de observabilidad V tiene siempre rango igual a n . La demostración se plantea como una ejercitación para el alumno.

La matriz V resulta una triangular inferior con números unos en la diagonal secundaria, por ende siempre será no singular, pues el determinante de V será -1 o $+1 \neq 0$, según sea n .

Por ejemplo si una planta está en F.C.O. o sea:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad C = [0 \ 0 \ 1]$$

$$V = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 \cdot A \\ C_2 \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

→ Rango (V) = -1 (n es impar) → V es no singular siempre

Teorema 7: (General para sistemas MIMO o SISO)

"Para un sistema descrito por las ecuaciones dinámicas (4) y (5), si los valores característicos son todos distintos y A está en la F.C.D.; el par [A,C] será completamente observable si la matriz C no tiene columnas con todos sus elementos nulos".

La demostración es directa, pues si la j-esima columna de C tiene *todos* sus elementos nulos, la variable de estado $x_{j(t)}$ no aparecerá en la ecuación de salida $\bar{y}_{(t)}$. Por lo tanto $x_{j(t)}$ será no observable.

Ejemplo 11:

Consideremos el ejemplo 9, en el que la planta era no observable. Como la matriz A es diagonal, ($\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, son distintos), la prueba alternativa para la observabilidad requiere que la matriz C tenga al menos un elemento nulo, y como $C = [1 \ 0]$, el estado $x_{2(t)}$ será no observable y por ende el sistema será no observable.

Teorema 8: (Forma Dual del Teorema 4).-

Es válido en general para sistemas MIMO aún cuando los valores característicos múltiples tengan más de un bloque de Jordán asociado con cada valor propio múltiple, y dice:

"Si A está en la forma canónica de Jordán el par [A, C] es observable, si todos los elementos en las columnas de C que correspondan a la *primera* fila de cada bloque de Jordán no son cero.

Se entiende que las columnas de C que corresponden a los valores característicos simples no deberán tener todos sus elementos nulos".

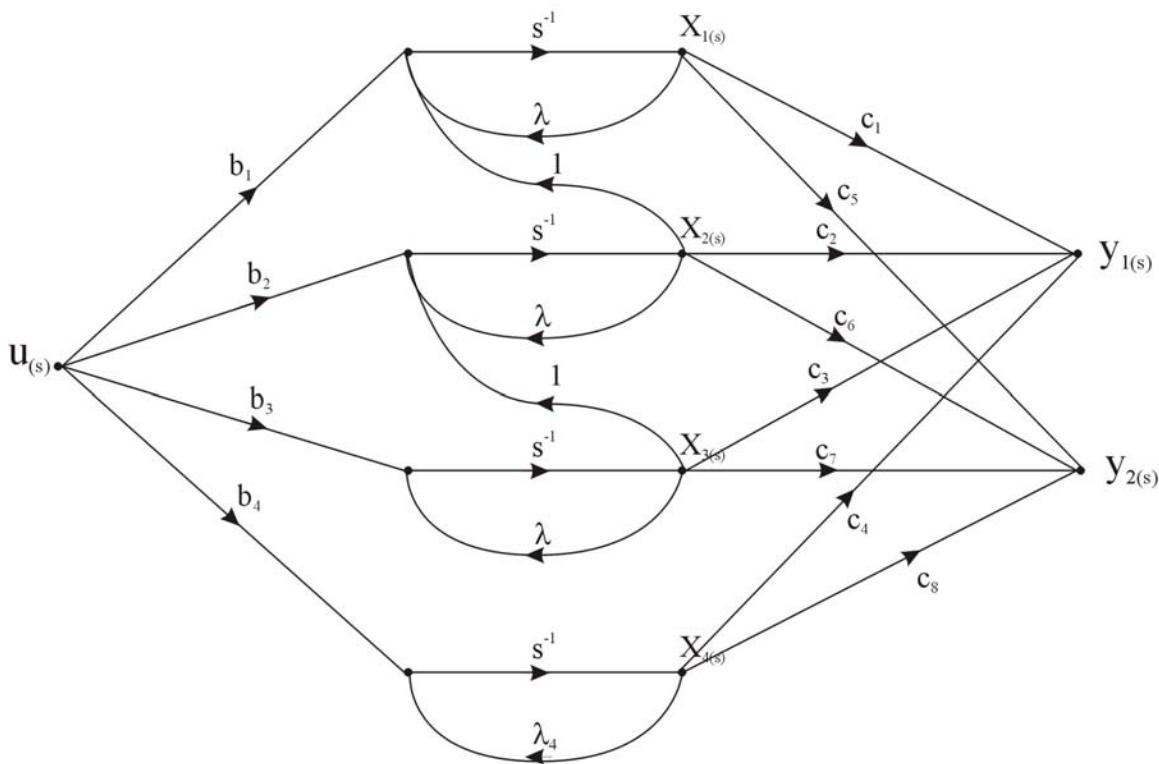
Los elementos en las otras columnas de C en cada bloque de Jordán, no necesitan ser diferentes de cero ya que los estados correspondientes están todavía acoplados a través de los números *unos* de los bloques de Jordán de la matriz A.

Cuando se trata de sistemas SISO, los valores característicos múltiples deberán tener *un solo bloque* de Jordán asociado con cada valor propio múltiple y también el *elemento* de la matriz C que corresponde a la primera fila de cada bloque de Jordán no deberá ser nulo.-

Ejemplo 12: Consideremos el sistema visto en el ejemplo 4. Suponiendo que el mismo tiene dos salidas $y_{1(t)}$ e $y_{2(t)}$, por ende la matriz C del mismo será de orden (2x4).

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \end{bmatrix}$$

El diagrama de estado será:



Los elementos de la matriz C que pueden ser nulos son: c_2 , c_6 , c_3 y c_7 . Pero c_1 y c_5 no pueden ser simultáneamente nulos, pero uno puede ser nulo si al mismo tiempo el otro no lo es. Lo mismo para c_4 y c_8 . Esto se resume en que: "Cada variable de estado deberá afectar directa o indirectamente a por lo menos una salida".

Ejemplo 12a:

Volvamos al ejemplo 7a, la planta tenía dos salidas. A simple vista la misma es observable, pues cumple con el teorema 8. Por ende deberá ser, con el método general, el rango de la matriz de la observabilidad igual a cuatro.

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Formando la matriz con las filas 2, 5, 6 y 7 se tendrá:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \text{ Como su determinante es igual a } (-1), \text{ el rango de la}$$

matriz de la observabilidad es igual a $n=4$ por ende la planta es observable.-

Relación entre Controlabilidad, Observabilidad y Funciones de Transferencia.

En el análisis clásico de sistemas de control, las funciones de transferencia se utilizan para modelar sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Aún cuando la controlabilidad y la observabilidad son conceptos y herramientas de la teoría de control moderna, se debe mostrar que están estrechamente relacionadas con las propiedades de las funciones de transferencia.

Teorema 9: (Solo aplicable a sistemas SISO).-

Si la función de transferencia $G_p(s)$ entre la salida y la entrada de una planta lineal *tiene cancelación de polos y ceros*, el sistema será: o no controlable, o no observable, o no controlable ni observable, dependiendo de cómo se definan las variables de estado. Por otra parte, si la función de transferencia entre la salida y la entrada *no tiene cancelación de polos y ceros*, el sistema *siempre* se puede representar mediante las ecuaciones dinámicas como un sistema *totalmente controlable y observable, cualquiera sean las variables de estado definidas*.

No se da la prueba para este teorema. La importancia del mismo es que si un sistema lineal se modela mediante la función de transferencia que no tiene cancelación de polos y ceros, se asegura que es un sistema controlable y observable, no importando como se obtenga el modelo en variables de estado.

Se ampliará este punto con referencia al siguiente sistema SISO:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \ 0 \ 1 \ 0] ; \quad D = [0]$$

Ya que S es una matriz diagonal, las condiciones de controlabilidad y observabilidad de los cuatro estados se determinan mediante inspección.

Estos son $x_{1(t)}$: Controlable y observable (C y O).

$x_{2(t)}$: Controlable pero no observable (C pero no O).

$x_{3(t)}$: No controlable pero observable (no C pero O).

$x_{4(t)}$: No controlable y no observable (no C y no O).

El diagrama de bloques del sistema de la figura 5 muestra la descomposición de la F.C.D. del sistema.

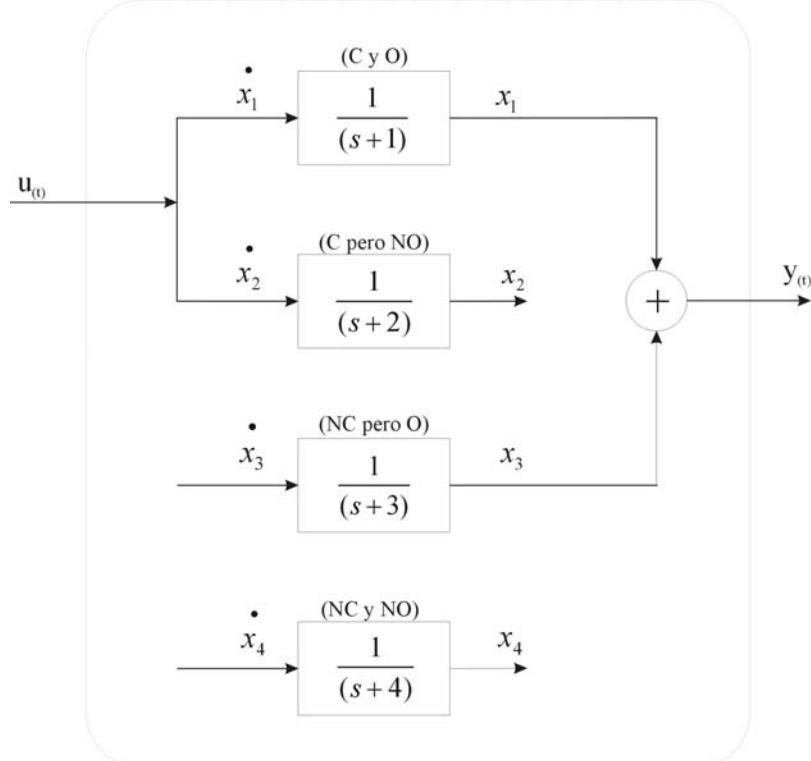


Figura 5

Claramente la función de transferencia del subsistema C y O debe ser

$$\frac{y_{(s)}}{u_{(s)}} = \frac{1}{(s+1)}$$

Mientras que la función de transferencia que corresponde a la dinámica descrita por las matrices (8) es:

$$\frac{y_{(s)}}{u_{(s)}} = C.(s.I - A)^{-1}.B = \frac{(s+2).(s+3).(s+4)}{(s+1).(s+2).(s+3).(s+4)} \quad (9)$$

Que tiene tres polos y ceros comunes. Este ejemplo ilustra que la función de transferencia de "orden mínimo" luego de cancelar los polos y ceros es el único componente que corresponde a un subsistema que es controlable y observable.

Ejemplo 13:

Consideremos la planta cuya función de transferencia era:

$$\frac{y_{(s)}}{u_{(s)}} = \frac{s^2 + 3.s + 2}{s^3 + 6.s^2 + 11.s + 6} = \frac{(s+1).(s+2)}{(s+1).(s+2).(s+3)}$$

La F.C.C. por descomposición directa será:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} ; \quad D = [0]$$

Por lo tanto la planta *será controlable* (como sabemos), pero como:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -6 & -9 & -3 \\ 18 & 27 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow |V| = 0 \rightarrow \text{Rango}(V) = 1 \neq 3$$

La misma será *no observable*.

Su forma dual (F.C.O) será:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad D = [0]$$

Por ende será observable pero no controlable, pues:

$$S = \left[B \mid A.B \mid A^2.B \right] = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 18 \\ 3 & -9 & 27 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow |S| = 0 \rightarrow \text{Rango}(S) = 1 \neq 3$$

Otro modelo de la misma planta puede ser el siguiente, (obtenido a través de una transformación lineal de similitud):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad D = [0]$$

La función de transferencia deberá ser la misma o sea:

$$Gp(s) = C.(s.I - A)^{-1}.B = \frac{s^2 + 3.s + 2}{s^3 + 6.s^2 + 1.s + 6}$$

Como:

$$S = \begin{bmatrix} B & | & A.B & | & A^2.B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow |V| = 0 \rightarrow \text{Rango}(S) = 1 \neq 3$$

→ Planta de estado *no controlable*

Y

$$V = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow |V| = 0 \rightarrow \text{Rango}(V) = 2 \neq 3$$

→ Planta de estado *no observable*

La conclusión a la que se llega es, que dada una planta con una $Gp(s)$ con polos y ceros comunes, las condiciones de controlabilidad y observabilidad de la misma, dependen de cómo se eligen las variables de estado.

Además, como ya se dijo, si la $Gp(s)$ no tiene cancelación de polos y ceros, la planta será *siempre controlable y observable* cualquiera sean las variables de estado elegidas.

Teoremas de la Invariancia de la Controlabilidad y la Observabilidad.

Ahora se investigarán los efectos de las transformaciones de semejanza sobre la controlabilidad y la observabilidad. También se investigarán los efectos de la realimentación del estado sobre la controlabilidad y la observabilidad.

Teorema 10:

Teorema de la invarianza debido a las transformaciones de semejanza.

Considere el sistema descrito por las ecuaciones dinámicas (4) y (5). La transformación de semejanza $\bar{x}_{(t)} = P\bar{x}_{(t)}^*$, en donde P es no singular,

transforma las ecuaciones a:

$$\frac{d\bar{x}_{(t)}}{dt} = A^*\bar{x}_{(t)}^* + B^*\bar{u}_{(t)}$$

$$\bar{y}_{(t)} = C^*\bar{x}_{(t)}^* + D^*\bar{u}_{(t)}$$

en donde: $A^* = P^{-1} \cdot A \cdot P$ y $B^* = P^{-1} \cdot B$

La controlabilidad de $[A^*, B^*]$ y la observabilidad de $[A^*, C^*]$ no se afectan por la transformación.

En otras palabras, la controlabilidad y la observabilidad se conservan a través de transformaciones de semejanza.

El teorema se comprueba fácilmente al mostrar que los rangos de S^* y S y los rangos de V^* y V son idénticos, en donde S^* y V^* son las matrices de controlabilidad y observabilidad, respectivamente, del sistema transformado.

Tenemos que:

$$S^* = \begin{bmatrix} B^* & A^* \cdot B^* & A^{*2} \cdot B^* & \dots & A^{*n-1} \cdot B^* \end{bmatrix}$$

Usando $A^* = P^{-1} \cdot A \cdot P$ y $B^* = P^{-1} \cdot B$, nos queda:

$$S^* = \begin{bmatrix} P^{-1} \cdot B & P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} \cdot B & P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} \cdot B & \dots \end{bmatrix}$$

$$S^* = \begin{bmatrix} P^{-1} \cdot B & P^{-1} \cdot A \cdot B & P^{-1} \cdot A^2 \cdot B & \dots & P^{-1} \cdot A^{n-1} \cdot B \end{bmatrix}$$

$$S^* = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} B & A \cdot B & A^2 \cdot B & \dots & A^{n-1} \cdot B \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot S$$

Por lo tanto: $S^* = P^{-1} \cdot S$ (12)

Como P^{-1} es no singular el rango de S será igual al de S^* . Por lo tanto si la planta es controlable con el modelo original, también lo será con el modelo transformado.

Para la observabilidad se puede ver que:

$$V^* = V \cdot P \quad (13)$$

Como P es no singular el rango de V será igual al de V^* .

Teorema 11:

La Controlabilidad de una planta a controlar es invariante con respecto a la realimentación de los estados. Por ende el par $[(A-BK), BG]$, para cualquier vector o matriz $K_{(1 \times n)}$, es controlable si y solo si el par $[A, B]$ lo es.

Se demuestra de la siguiente manera. La matriz de controlabilidad del sistema a lazo abierto es:

$$S = \begin{bmatrix} B & A \cdot B & A^2 \cdot B & \dots & A^{n-1} \cdot B \end{bmatrix}$$

y la matriz de controlabilidad del sistema a lazo cerrado será:

$$S_K = \begin{bmatrix} B & (A - B \cdot K) \cdot B & (A - B \cdot K)^2 \cdot B & \dots & (A - B \cdot K)^{n-1} \cdot B \end{bmatrix}; \text{ Si } G = 1$$

No es difícil chequear que S y S_K están relacionadas de la forma:

$$S_K = S \cdot \begin{bmatrix} 1 & -K \cdot B & -K \cdot (A - B \cdot K) \cdot B & \dots & -K \cdot (A - B \cdot K)^{n-2} \cdot B \\ 0 & 1 & -K \cdot B & \dots & -K \cdot (A - B \cdot K)^{n-3} \cdot B \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -K \cdot (A - B \cdot K)^{n-4} \cdot B \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

Notar que como $K_{(1 \times n)}$ y $B_{(n \times 1)}$, todos los elementos de la última matriz son escalares y como es triangular superior es no singular, por ende el rango de S es igual al de S_K . Así el sistema de lazo cerrado es controlable si y solo si el de lazo abierto lo es.

Por otra parte, si $[A, B]$ no es controlable, no existe K que haga al par $[(A-BK), B]$, sea controlable.

En otras palabras, si la planta es **no controlable**, **no puede** convertirse en controlable el sistema de lazo cerrado por medio de la realimentación de los estados.

Teorema 12:

La Observabilidad de un sistema de lazo cerrado *puede ser destruida* por la realimentación de los estados. O sea, la observabilidad de un sistema no es invariantes (siempre) con respecto a la realimentación de los estados.

El siguiente ejemplo demuestra esto:

Ejemplo 14: Sea la planta siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -10 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad C = [2 \quad -2.5] ; \quad D = 0$$

Se puede ver que el par $[A, B]$ es controlable y el par $[A, C]$ es observable, pues:

$$S = [B \mid A \cdot B] = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango}(S) = 2 = n$$

$$V = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2.5 \\ -9.5 & -12.5 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango}(V) = 2 = n$$

La realimentación de los estados se define como:

$$u_{(t)} = G \cdot r_{(t)} - K \cdot \bar{u}_{(t)}$$

en donde: $K = [k_1 \quad k_2]$

El sistema en lazo cerrado se describe por la ecuación de estado:

$$\dot{\bar{x}}_{(t)} = (A - B.K).\bar{x}_{(t)} + (B.G).r_{(t)}$$

$$(A - B.K) = \begin{bmatrix} -6 & -10 \\ -(1+K_1) & -(3+K_2) \end{bmatrix}$$

La matriz de la observabilidad en lazo cerrado es:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ C.(A - B.K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2,5 \\ (2,5K_1 - 9,5) & (2,5K_2 - 12,5) \end{bmatrix}$$

El determinante de V es:

$$|V| = 6,25.K_1 + 5.K_2 - 48,75$$

Por lo que si K_1 y K_2 se eligen para que $|V| = 0$, el sistema en lazo cerrado será no observable. Como sabemos si un sistema es controlable pero no observable, deberá tener al menos un cero y un polo común la función de transferencia (pues ya se vio que la controlabilidad era invariante). O sea, si se elige uno o más polos que cancelen ceros de la $G_{p(s)}$ vuelven a estos modos no observables.

O sea que:

$$6,25.K_1 + 5.K_2 = 48,75 \rightarrow K_2 = 9,75 - 1,25.K_1 \quad (14)$$

Sería una recta en el plano $K_2 = f(K_1)$, y sus puntos serían valores de $K = [K_1 \ K_2]$ que hacen al sistema de lazo cerrado no observable.

Como

$$G_{p(s)} = C.(s.I - A)^{-1}.B = \frac{-2,5.(s+14)}{(s+1).(s+8)}$$

Por lo tanto, si se eligen K_1 y K_2 de acuerdo a la relación (14), un polo se ubicara en -14, y el otro en algún lugar del eje real. Para puntos fuera de esa recta, el sistema será observable, o sea ningún polo se ubicará en -14. Si además se desea que el sistema sea estable la relación entre K_1 y K_2 deberá ser:

$$[s.I - A + B.K] = \begin{vmatrix} s+6 & 10 \\ 1+K_1 & s+3+K_2 \end{vmatrix} = s^2 + (9+K_2)s + (8+6.K_1 - 10.K_1) = 0$$

Las restricciones serán:

$$9+K_2 > 0 \rightarrow K_2 > -9$$

y

$$(8+6.K_1 - 10.K_1) > 0 \rightarrow K_2 > \frac{5}{3}.K_1 - \frac{4}{3}$$

En el plano $K_2 = f(K_1)$ la zona de estabilidad es la marcada en la figura 6. En ella también se observa la línea para que el sistema sea no observable (ecuación (14)).

Para que el sistema se *estable* y *no observable*: $\Rightarrow \frac{K_1 < 3,8}{K_2 > 5}$ en la ecuac. 14

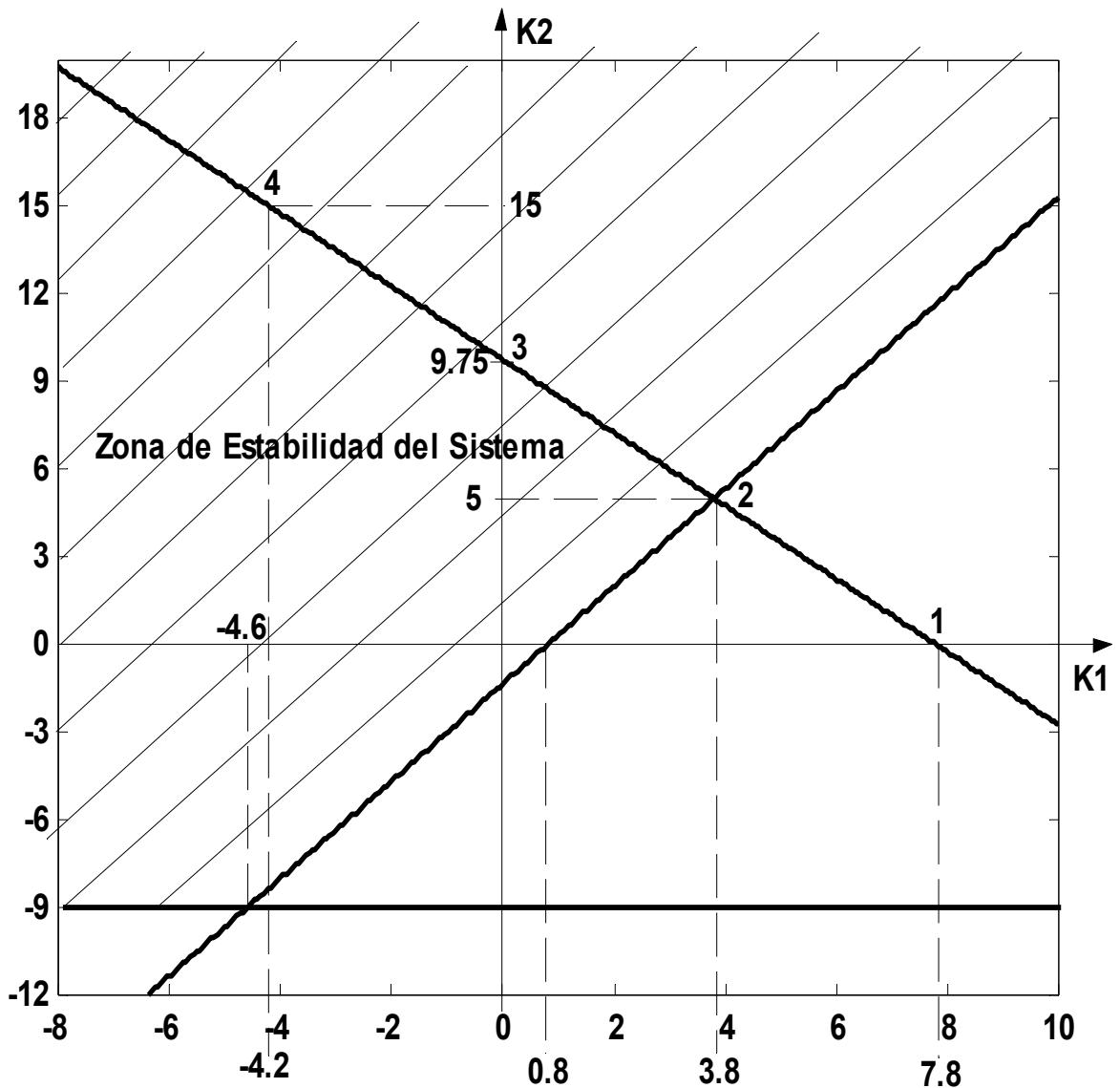


Figura 6

En la gráfica están marcadas cuatro matrices K a saber:

1. $K = [7,8 \ 0] \rightarrow$ polos en -14 y +5
2. $K = [3,8 \ 5] \rightarrow$ polos en -14 y 0
3. $K = [0 \ 9,75] \rightarrow$ polos en -14 y -4,75
4. $K = [-4,2 \ 15] \rightarrow$ polos en -14 y -10

Si se elige $K = [-4,2 \ 15]$ resulta:

$$A_c = \begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 3,2 & -18 \end{bmatrix} ; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} ; \quad C_c = [2 \ -2,5]$$

Se elige $G = -4$ para que $M_{(0)} = 1$, sistema seguidor tipo 1.-

$$M_{(s)} = C_c \cdot (sI - A + B \cdot K)^{-1} \cdot B_c = \frac{-2,5 \cdot G \cdot (s+14)}{(s+10) \cdot (s+14)} \rightarrow \text{Para } G = -4 \rightarrow M_{(s)} = \frac{10}{(s+10)}$$

Esto demuestra también que *la realimentación de los estados puede mover los polos pero no tiene ningún efecto sobre los ceros.*

Principio de Dualidad.

Este principio establece que:

“Una planta será controlable (observable), si y solo si su planta dual es observable (controlable)”.

O sea a partir de este principio de controlabilidad (observabilidad) de una planta cualquiera se puede verificar probando la observabilidad (controlabilidad) de su planta dual.

Ejemplo: Una planta tiene las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \ 1 \ 0] ; \quad D = 0$$

La forma dual será:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} ; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \bar{C} = [0 \ 0 \ 1] ; \quad \bar{D} = 0$$

Para el mismo:

$$\bar{S} = [\bar{B} \mid \bar{A}\bar{B} \mid \bar{A}^2\bar{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango}(\bar{S}) = 2 \neq 3$$

Por ende el sistema original será no observable, conclusión que se puede llegar con:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} = S^T \rightarrow \text{Rango}(V) = 2 \neq 3 \rightarrow \text{planta no observable}$$

Y como

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \bar{C}\bar{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango}(\bar{V}) = 3 = n$$

Por lo tanto el sistema original será controlable.

CONTROL II (Elo y Bio)

Tema:

Introducción a los Observadores
de Estado:

Prof. Ing. Carlos F. Martín

Año: 2010

Introducción:

Hemos visto que para hacer una asignación completa de los autovalores de lazo cerrado, es necesario realimentar todos los estados de la planta. Sin embargo, es común que algunos estados no sean accesibles o que su medida no sea económicamente viable. Una alternativa para estos casos es obtener una estimación de los estados no medibles, o todos, a través de un observador de estados.

Un observador de estados es un sistema dinámico cuyos estados convergen a los del sistema observado. Dependiendo del número de estados observados, el observador es de orden completo u orden reducido.

Luego puede implementarse un control con asignación de autovalores de lazo cerrado por realimentación de los estados observados (figura 1).

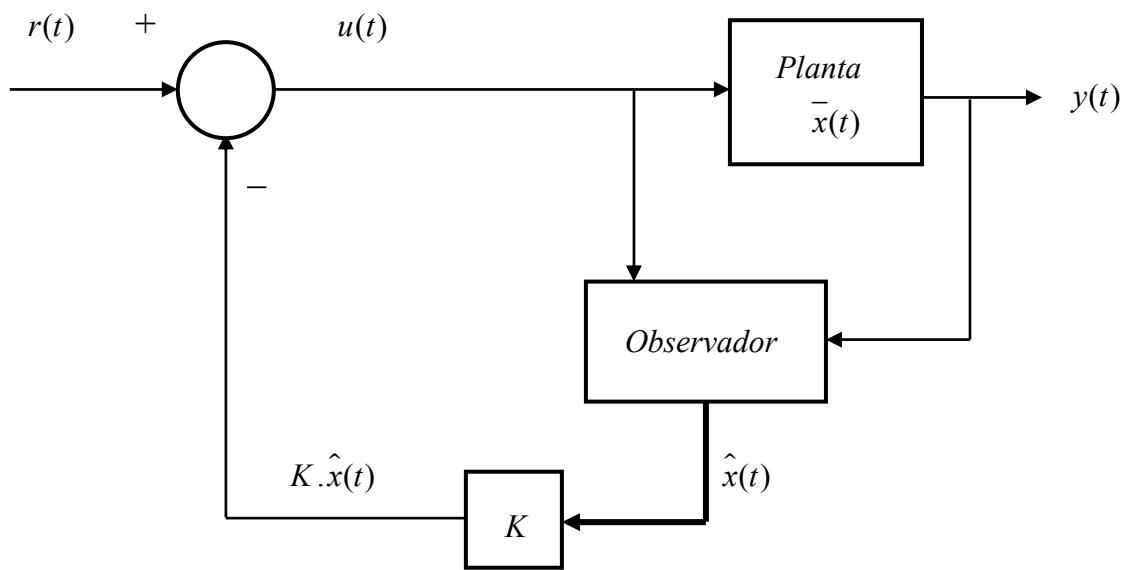


Figura 1

Observador de Orden Completo.

Consideremos que se desea estimar los estados $\bar{x}(t)$ de la planta lineal.

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\bar{x}(t) \end{cases} \quad (1)$$

donde las matrices A , B y C son conocidas.

Se propone la siguiente estructura genérica para el observador:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_0 \hat{x}(t) + L y(t) + \bar{z}(t) \quad (2)$$

donde las matrices A_0 y L deben ser diseñadas para cumplir el objetivo de forzar la convergencia de los estados del observador a los de la planta (1). Por otra parte $\bar{z}(t)$ es una señal a determinar, si bien aún no es conocida es razonable pensar que dependa de la señal de control $u(t)$ de la planta a observar.

La dinámica del error definido por la diferencia entre los estados de la planta y los estados del observador resulta de la diferencia entre las ecuaciones (1) y (2).

$$\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - \hat{x}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t) - A_0\hat{x}(t) - Ly(t) - \bar{z}(t) \quad (3)$$

$$\dot{\bar{e}}(t) = (A - LC)\bar{x}(t) - A_0\hat{x}(t) + Bu(t) - \bar{z}(t) \quad (4)$$

Para asegurar que el error $\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - \hat{x}(t)$ converja a cero, mas allá de la excitación $u(t)$ de la planta, de su salida $y(t)$ y del valor inicial $\bar{e}_0(0)$, la ecuación (4) debería poder reducirse a:

$$\dot{\bar{e}}(t) = \tilde{A}\bar{e}(t) \quad (5)$$

donde los autovalores de la matriz \tilde{A} deben pertenecer al semiplano izquierdo.

Esta reducción es posible si:

$$A_0 = A - LC = \tilde{A} \quad (6)$$

$$\bar{z}(t) = Bu(t) \quad (7)$$

Luego el diseño del observador se reduce a encontrar una matriz L que asigne sus autovalores en:

1. El semiplano izquierdo, lo cual asegura la estabilidad del observador.
2. Y a la izquierda de los autovalores del sistema para asegurar que la dinámica del error $\dot{\bar{e}}(t) = A_0\bar{e}(t)$ sea más rápida que la del sistema.

La figura 2a muestra un diagrama en bloques del conjunto sistema-observador. Para obtener las partes b y c de la figura se han realizado transformaciones elementales, obteniéndose así, el diagrama en bloques que puede encontrarse en muchos libros de texto (cuya interpretación resulta inmediata).

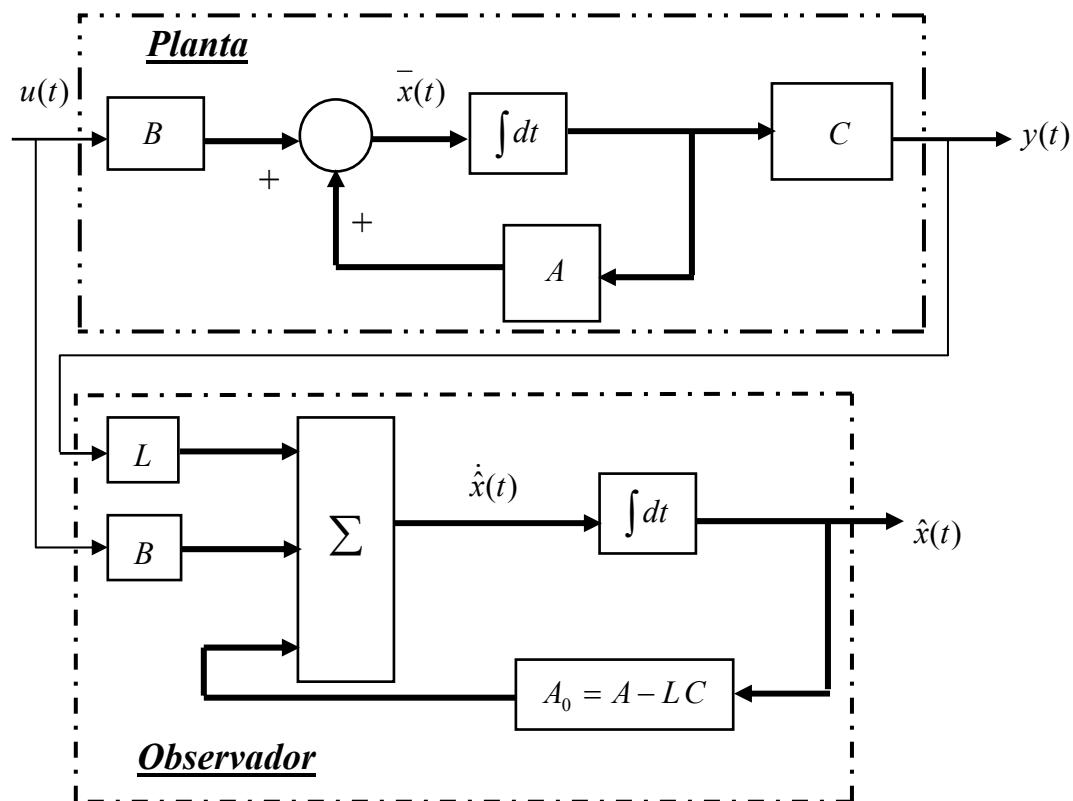


Figura 2 a

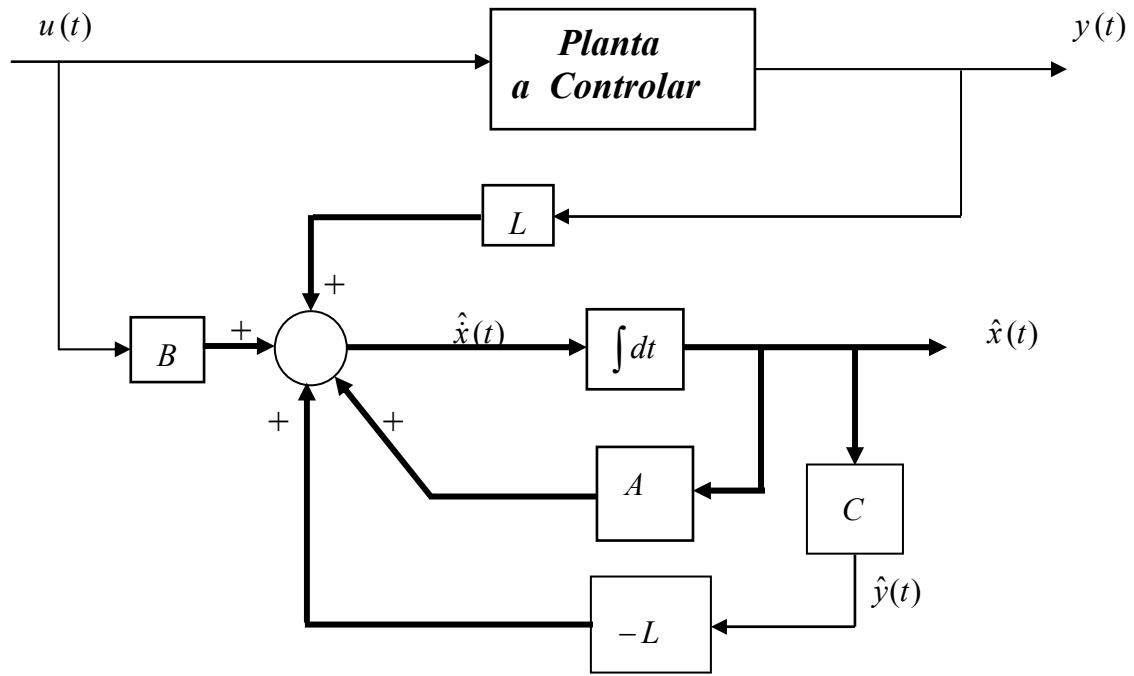


Figura 2b

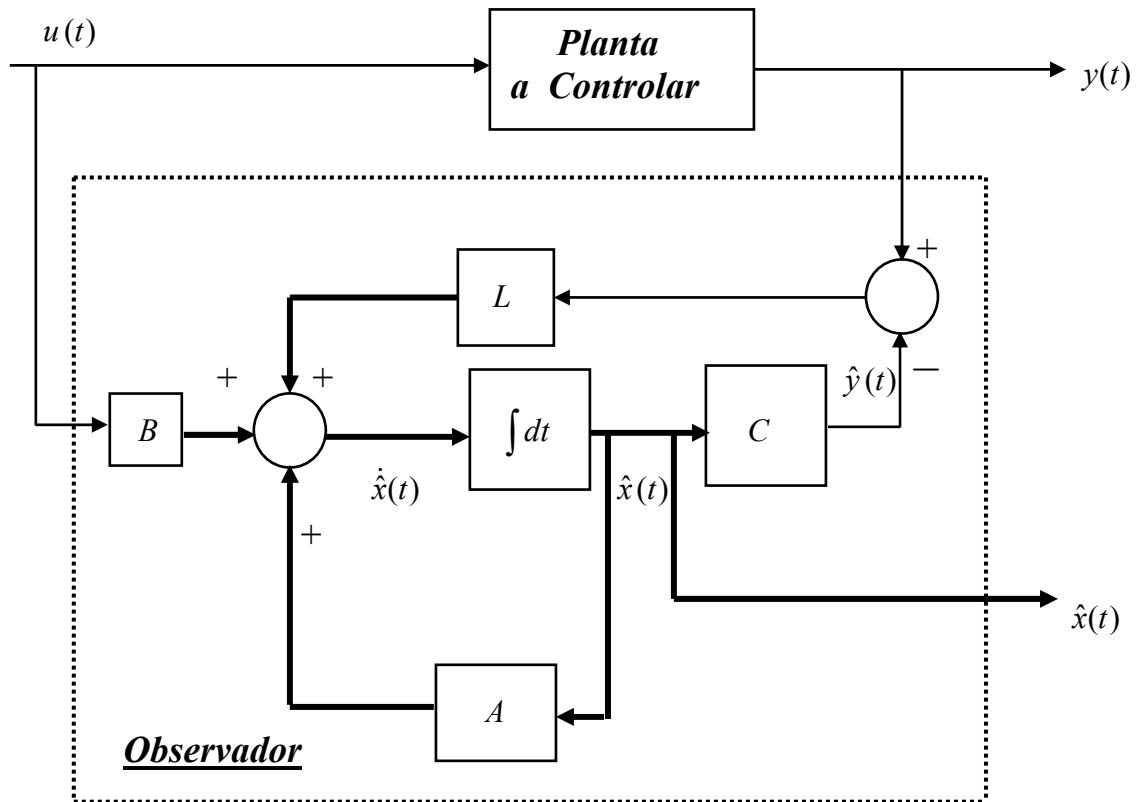


Figura 2c

Nota 1: Los autovalores de una matriz y los correspondientes a su transpuesta son iguales. Luego es indistinto asignar los autovalores de $A_0 = A - LC$ o de $A_0^T = (A - LC)^T = A^T - C^T L^T$.

Nota 2: Si A está en la forma canónica observable, A^T estará en la forma canónica controlable. Luego la asignación de los autovalores del observador $A_0^T = A^T - C^T L^T$ puede realizarse en forma análoga a como se ha hecho la asignación de los polos de lazo cerrado del sistema, por la realimentación de los estados, con ($A_{LC} = A - BK$). -

Los valores característicos del observador se pueden determinar de:

$$|sI - (A - LC)| = |sI - A + LC| = s^n + \eta_{n-1}s^{n-1} + \eta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \eta_2s^2 + \eta_1s + \eta_0 = 0$$

Los valores característicos del observador serán funciones de los coeficientes de la matriz L y estos en consecuencia de la posición deseada de los valores característicos de $(A - LC)$, que designaremos como:

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n . -$$

En este análisis se supone que las matrices A , B y C usadas en el observador son idénticas a las de la planta. En general los $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n$, se eligen mucho mas lejos hacia la izquierda del plano s que los valores característicos de la matriz de lazo cerrado $(A - BK)$.

Si la planta es observable, se puede demostrar que es posible seleccionar una matriz L tal que $(A - LC)$ tenga los valores característicos arbitrariamente elegidos. Se verán a continuación algunos métodos para determinar la matriz L del observador.-

Métodos Para Obtener la Matriz del Observador L.-

Primer Método:

Al igual que en el caso de la ubicación de los polos si el sistema es de orden inferior a tres, puede ser más sencillo la sustitución directa de la matriz L , dentro del polinomio característico deseado. Por ejemplo, si $\bar{x}(t)$ es un vector de dimensión n , la matriz L será, (recordar que se está tratando solo sistemas SISO):

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ l_n \end{bmatrix}; \text{ sustituyéndola en el polinomio característico deseado se tendrá:}$$

$$|sI - (A - LC)| = |sI - A + LC| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n). -$$

donde: los μ_i , para $i = 1, 2, \dots, n$, son los valores característicos deseados para $(A - LC)$. Igualando los coeficientes de potencias iguales de s en ambos miembros, se determinan los coeficientes: $l_1; l_2; l_3; \dots; l_n$.

Si $n \geq 4$, el cálculo manual se vuelve muy tedioso y por ende, se verán dos métodos para trabajar en Matlab.

Segundo Método:

$$\text{Se puede usar: } L = Q \begin{bmatrix} \eta_0 - a_0 \\ \eta_1 - a_1 \\ \eta_2 - a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \equiv (MV)^{-1} \begin{bmatrix} \eta_0 - a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} = V^{-1} M^{-1} \begin{bmatrix} \eta_0 - a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Donde:

Q, M y V , ya fueron definidas en la unidad anterior.

Q : Matriz para la transformación a la forma canónica observable.

V : Matriz de la observabilidad.

M : Matriz triangular en función de los coeficientes, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} .

a_i : Coeficientes del polinomio característico de la planta, $|sI - A| = 0$.

η_i : Coeficientes del polinomio característico deseado de $(A - LC)$, o sea:

$$|sI - A + LC| = s^n + \eta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \eta_2s^2 + \eta_1s + \eta_0 = (s - \mu_1)(s - \mu_2)\dots(s - \mu_n) = 0$$

Tercer Método: Fórmula de Ackermann

$$L = \Phi(A)V^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

V : Matriz de la observabilidad.

$$\Phi(A) = \eta_0 I + \eta_1 A + \eta_2 A^2 + \dots + \eta_{n-2} A^{n-2} + \eta_{n-1} A^{n-1} + A^n.$$

Ejemplo 1:

Una planta tiene las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diseñar un observador de orden completo, determinando la matriz L , por los tres métodos vistos. Suponga que los valores característicos deseados que rigen

su dinámica deberán ubicarse en:

$$\mu_{1-2} = -2 \pm j2\sqrt{3}; \quad \mu_3 = -5$$

1) Método Directo:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango de}(V) = 3$$

Por lo tanto la planta es completamente observable, en consecuencia será posible el diseño del observador de estado solicitado.

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \rightarrow |sI - A + LC| = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 & 0 \\ l_2 & s & -1 \\ l_3 + 6 & 11 & s + 6 \end{bmatrix} = s^3 + (6 + l_1)s^2 + (6l_1 + l_2 + 11)s + (11l_1 + 6l_2 + l_3 + 6). -$$

Como el polinomio deseado también es:

$$(s + \mu_1)(s + \mu_2)(s + \mu_3) = (s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 2 + j2\sqrt{3})(s + 5) = s^3 + 9s^2 + 36s + 80. -$$

Las tres ecuaciones con las tres incógnitas serán:

$$\begin{cases} l_1 + 6 = 9 \\ 6l_1 + l_2 + 11 = 36 \\ 11l_1 + 6l_2 + l_3 + 6 = 80 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l_1 = 3 \\ l_2 = 7 \\ l_3 = -1 \end{cases} \rightarrow L = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} . -$$

2) Segundo Método:

$$L = (MV)^{-1} \begin{bmatrix} \eta_0 - a_0 \\ \eta_1 - a_1 \\ \eta_2 - a_2 \end{bmatrix}; \text{ ya se determinó a la matriz } V, \text{ y los coeficientes } \eta_i :$$

La ecuación característica de la planta es:

$$|sI - A| = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s + 6 \end{bmatrix} = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \rightarrow \begin{cases} a_0 = 6 \\ a_1 = 11 \\ a_2 = 6 \end{cases} . -$$

Por ende:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 80 - 6 \\ 36 - 11 \\ 9 - 6 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} . -$$

3) Formula de Ackermann:

$$L = \Phi(A)V^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(A) = A^3 + 9A^2 + 36A + 80I = \begin{bmatrix} 74 & 25 & 3 \\ -18 & 41 & 7 \\ -42 & -98 & -1 \end{bmatrix}$$

Como $V = I; V^{-1} = I$:

$$L = \begin{bmatrix} 74 & 25 & 3 \\ -18 & 41 & 7 \\ -42 & -98 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} .-$$

Todo esto se puede hacer usando Matlab.

» % SE introducen las matrices A y C.-

» A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];

» C=[1 0 0];

» % Se determina si la planta es observable, con el rango de la matriz de la observabilidad.

» V=[C;C*A;C*A^2];

» R=rank(V)

R =

3

» % Por lo tanto la planta es observable, se podrá diseñar el observador.

» % Se calcula fideA, por ejemplo así:

» Ad=[-2+2*sqrt(3)*i 0 0;0 -2-2*sqrt(3)*i 0;0 0 -5];

» EC=poly(Ad)

EC =

1.0000 9.0000 36.0000 80.0000

» % Esto también se puede hacer así:

» EC=pmake(-5,[1 4 16])

EC =

1 9 36 80

» FideA=A^3+9*A^2+36*A+80*eye(3)

FideA =

74 25 3

-18 41 7

-42 -95 -1

» % También se puede usar:

» FideA=polyvalm(poly(Ad),A)

```

FideA =
 74.0000 25.0000 3.0000
 -18.0000 41.0000 7.0000
 -42.0000 -95.0000 -1.0000

```

» %La matriz buscada será:

» L=FideA*inv(V)*[0;0;1]

L =

```

 3.0000
 7.0000
 -1.0000

```

Como se ve se llega al mismo resultado.-

Efectos del Agregado del Observador en el Sistema de Lazo Cerrado:

El proceso de diseño tiene dos etapas, la primera es la determinación de la matriz de las ganancias de realimentación K para producir la ecuación característica deseada y la segunda es la determinación de la matriz de ganancias del observador L , para obtener la ecuación característica deseada del observador.

Consideremos que la planta es controlable y observable definida mediante las ecuaciones, (si $D = 0$):

$$\bar{x}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = \bar{C}\bar{x}(t)$$

Para el control mediante la realimentación basada en el estado observado $\hat{x}(t)$ es:

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + Gr(t)$$

Con este control, la ecuación de estado se vuelve:

$$\bar{\dot{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + B(-K\hat{x}(t) + Gr(t))$$

$$\bar{\dot{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) - BK\hat{x}(t) + BG r(t) + BK\bar{x}(t) - BK\bar{x}(t)$$

$$\bar{\dot{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) - BK\bar{x}(t) + BK\bar{x}(t) - BK\hat{x}(t) + BG r(t)$$

$$\bar{\dot{x}}(t) = (A - BK)\bar{x}(t) + BK(\bar{x}(t) - \hat{x}(t)) + BGr(t)$$

La diferencia entre el estado real $\bar{x}(t)$ y el observado $\hat{x}(t)$ se define como el error

$$\bar{e}(t) :$$

$$\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - \hat{x}(t); \text{ por lo tanto:}$$

$$\bar{\dot{x}}(t) = (A - BK)\bar{x}(t) + BK\bar{e}(t) + BGr(t) \quad (1)$$

Como ya se determinó la ecuación del observador era:

$$\bar{\dot{e}}(t) = (A - LC)\bar{e}(t) \quad (2)$$

Si se define:

$$\bar{x}_T(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{e}(t) \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{\dot{x}}_T(t) = \begin{bmatrix} \bar{\dot{x}}(t) \\ \bar{\dot{e}}(t) \end{bmatrix}; \text{ Las ecuaciones (1) y (2) se pueden colocar:}$$

$$\begin{cases} \bar{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \bar{x}_T(t) + \begin{bmatrix} BG \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) = [C \ 0] \bar{x}_T(t) \end{cases}$$

Ecuación que describe la dinámica del sistema completo de control, mediante la realimentación del estado observado.

La ecuación característica será:

$$\left| \begin{bmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix} \right| = 0$$

o bien:

$$|sI - A + BK| \cdot |sI - A + LC| = 0$$

y las matrices serán:

$$Ac = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \quad Bc = \begin{bmatrix} BG \\ 0 \end{bmatrix} \quad Cc = [C \ 0]$$

La función de transferencia $\frac{Y(s)}{R(s)}$, será:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Cc \text{ Adj}(sI - Ac) Bc}{|sI - Ac|}$$

La misma tiene los ceros en los mismos sitios que los polos agregados por el observador y por ende se cancelan. La ganancia G de precompensación hace que $\frac{Y(0)}{R(0)} = 1$.

Por lo general los polos del observador se eligen para que la respuesta del mismo sea mucho más rápida que la respuesta del sistema.

Una regla es elegir la respuesta del observador al menos 2 a 5 veces más rápida que la respuesta del sistema, por ende sus polos estarán más alejados hacia la izquierda del plano s.

En la función Svdesign del Csad/Matlab, tiene en el menú principal la opción Feedback&Estimate, que realiza este diseño.

Ejemplo 2:

Una planta tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [2 \ 0]$$

Los polos del sistema de control se elegirán en: $\lambda_{1-2} = -2 \pm j2$ y los del observador de estado: $\mu_{1-2} = -10$.

Empleando la función Svdesign, se tendrá:

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots	Zeros and Poles
Controllability	Display System

Observability New Original Sys
Transformations Back to Original
State Feedback Estimator Design
Integral&State Feedback&Estimate
View N(s)/D(s) Quit

SVDESIGN > n

Enter TF or SV? [s] >

Enter number of state variables [2] >

Enter (2x2) A matrix one row at a time:

Default row 1 is:

0 1

Row 1 > [0 1]

Enter (2x2) A matrix one row at a time:

Default row 2 is:

-2 -2

Row 2 > [-2 -2]

The B matrix is a column vector

but you can enter it as a row.

Default B written as a row is:

0 1

Enter B (2x1) > [0 1]

Default C is:

2 0

Enter C (1x2) > [2 0]

Enter D [0] >

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots Zeros and Poles
Controllability Display System
Observability New Original Sys
Transformations Back to Original
State Feedback Estimator Design
Integral&State Feedback&Estimate
View N(s)/D(s) Quit

SVDESIGN > F

Design estimator first:

Enter vector of 2 desired pole locations > [-10 -10]

Estimator gain vector L is:

9 31

Pole Locations

Desired -- Achieved

-10 -10

-10 -10

A-LC is:

$$\begin{array}{cc} -18 & 1 \\ -64 & -2 \end{array}$$

Design estimated state feedback second:

Enter vector of 2 desired pole locations > [-2-2i -2+2i]

State feedback vector K is:

$$\begin{array}{cc} 6 & 2 \end{array}$$

Pole Locations

Desired -- Achieved

$$-2.0000 - 2.0000i \quad -2.0000 - 2.0000i$$

$$-2.0000 + 2.0000i \quad -2.0000 + 2.0000i$$

A-BK is:

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} -8 & -4 \end{array}$$

DC system gains:

Without feedback 1

With state feedback 0.25

Update current state variable matrices? (y/n) [y] >

Estimator feedback is $u = -Kxhat + Gr$

Enter desired value for G [4] > $\Rightarrow El\ programatoma \quad G = 1.$ -

Current system replaced with

Overall system: SV's = [x; error]

$$Ahat = \begin{vmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{vmatrix} \quad Bhat = \begin{vmatrix} B \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$Chat = \begin{vmatrix} C & 0 \end{vmatrix} \quad Dhat = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

Ahat matrix is:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -18 & 1 \\ 0 & 0 & -64 & -2 \end{array}$$

Bhat matrix is:

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Chat matrix is:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Equivalent transfer function:

$$2*(s^2 + 20s^1 + 100)$$

Como se ve toma G = 1

$$s^4 + 24s^3 + 188s^2 + 560s^1 + 800$$

Equivalent transfer function after pole-zero cancelation:

2

----- ; Para Compensar se tomara $r(t) = 4u_s(t)$; no para los atributos
 $s^2 + 4s + 8$ sino para ver la respuesta del sistema.-

----- SVDESIGN OPTIONS -----

Response Plots Zeros and Poles
Controllability Display System
Observability New Original Sys
Transformations Back to Original
State Feedback Estimator Design
Integral&State Feedback&Estimate
View N(s)/D(s) Quit
SVDESIGN > r

- SVPLOT OPTIONS -

Plot Stimulus
X Resp Final time
Zoom New A,B,C,D
Grid Display Sys
Hold Attributes
Label Eigenvalues
View data
Quit Interpolate

SVPLOT > r

SVPLOT > S

Stimulus: Step,Impulse,Ramp,Zero-input [s] >

Desired Amplitude [1] > 4

SVPLOT > f

Enter desired final time [3.3] > 3

Graficando la salida del sistema para una entrada escalón unitario, (recordar que si $G = 4$, $r(t)=4u_s(t)$), en la misma se pueden arreglar los límites de ejes).-

También se podría usar la función: $tftplot$ entrando la $M(s) = \frac{8}{s^2 + 4s + 8}$, ya conocida, con $r(t) = 1.u_s(t)$ para ver los atributos del sistema diseñado, esto ultimo es lo que se hizo.-

