Repaso de Conceptos Lógicos

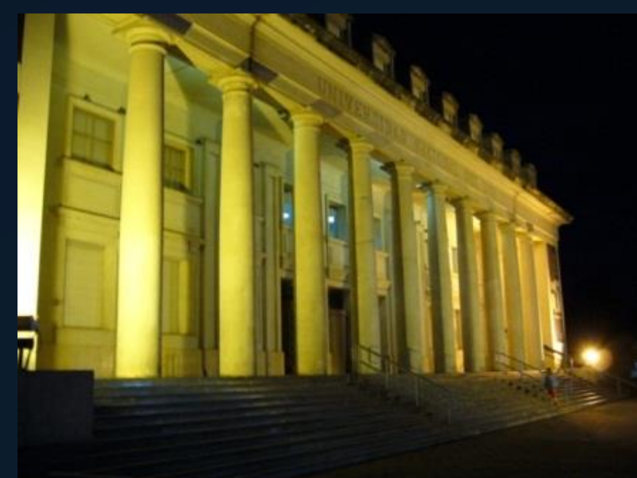
- Guillermo R. Simari

Laboratorio de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Artificial (LIDIA)

Instituto de Ciencias e Ingeniería de la Computación
Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación

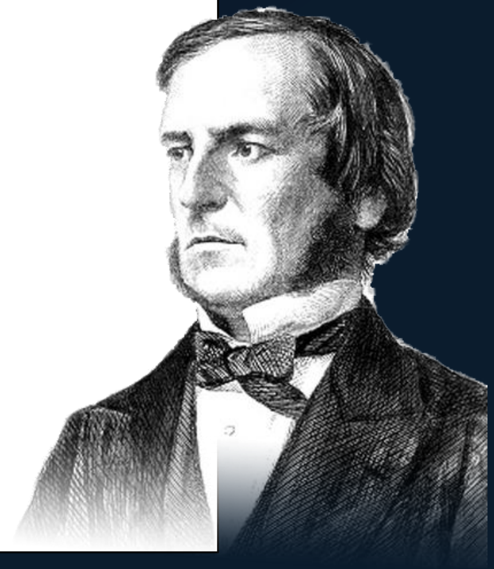
ICIC CONICET UNS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Bahia Blanca - ARGENTINA



Formal Logic

$$\frac{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$$



Argumentos Lógicos

Argumentos

Consideremos el siguiente ejemplo:

La mortalidad es una condición humana. Como Sócrates es humano, es claro que es mortal.

El mismo texto ligeramente reordenado:

– *Todos los humanos son mortales.*
– *Sócrates es humano.*
– *Luego, Sócrates es mortal.*

Argumentos

- *Como se ha mencionado, a esta construcción lingüistica se la denomina Argumento.*
- *En el ejemplo anterior se argumenta a partir de las dos primeras sentencias:*
  - *Todos los humanos son mortales.*
  - *Sócrates es humano.*

  Premisas

en favor de la última:

- *Luego, Sócrates es mortal.*

  Conclusión

[G.R.Simari]

Argumentos

- Las primeras dos sentencias se ofrecen como razones que soportan la última.
- Es decir, las premisas del argumento darían lugar o llevarían "naturalmente" a la conclusión.
- Así, un argumento puede definirse como una secuencia de sentencias, una de las cuales es la conclusión a favor de la que se argumenta, y las otras son las premisas, o razones para aceptar la conclusión.

Argumentos

- *Esta relación entre las premisas y la conclusión es difícil de establecer y ha dado lugar a diversos problemas que más tarde mencionaremos brevemente.*
- *El problema fundamental en Lógica, que reconocido desde su comienzo, es el de como verificar esta relación.*
- *Luego, veremos algunos procedimientos.*

Sentencias

- *Las sentencias en la secuencia argumentativa expresan algo, esto es, son declarativas, y tienen la propiedad de ser verdaderas o falsas.*
- *No toda sentencia es declarativa, por ejemplo:*
  - *¡Alto!*
  - *¿Está ocupado?*
  - *Gracias a Dios…*

  no son ni verdaderas ni falsas.
- *Discutiremos ahora el concepto de sentencia.*

Sentencias vs. Proposiciones

- *La sentencia "Yo soy un hombre" es verdadera o falsa de acuerdo a quien la pronuncie.*
- *Es decir que son sentencias que dependen del contexto, en este caso el que la enuncia, para determinar su significado (veracidad).*
- *En lo que sigue supondremos que el contexto no cambia durante la enunciación del argumento.*

Sentencias vs. Proposiciones

- *Al fijar el contexto se determina el significado de los argumentos al dejar invariable el significado de cada sentencia que integra la secuencia de sentencias que lo forman.*

- *Esta decisión de diseño es una abstracción necesaria para sistematizar el tratamiento de la construcción y análisis de los argumentos.*

Sentencias vs. Proposiciones

- *Por ejemplo, en el argumento:*
  - *Todas las mujeres son mortales*
  - *Yo soy una mujer*
  - *Luego, soy mortal*
- *El agente que pronuncia las sentencias se considera fijo, al igual que el contexto general donde son enunciadas.*
- *Las sentencias con significado fijo se denominan proposiciones.*

Sentencias vs. Proposiciones

- *Existe otra diferencia entre sentencias y proposiciones; por ejemplo, las sentencias:*
  - *Snow is white*
  - *Der Schnee ist weiss*
  - *La neige est blanche*
  - *La nieve es blanca*

  establecen la misma proposición a pesar de las diferencias aparentes entre ellas.
- *Es decir, las proposiciones también son independientes del lenguaje.*

Proposiciones

- *Luego de realizar todas las abstracciones mencionadas, se puede decir que la única propiedad relevante de una proposición es tener asociado un valor de verdad.*
- *En el caso clásico, se tienen dos posibles valores: una proposición es verdadera o falsa.*
- *Ahora, se puede algebrizar el tratamiento de las proposiciones.*
- *El cálculo elemental que surge es el llamado Cálculo Proposicional que repasaremos más adelante muy someramente.*

Argumentos

- *Algunos argumentos son convincentes y otros no lo son, por ejemplo:*
  - *Los seres humanos son los únicos seres racionales.*
  - *Solo la racionalidad permite a los seres realizar juicios morales.*
  - *Luego, solo los seres humanos tienen la capacidad de tener metas propias.*
- *Esta secuencia es un argumento, pero no es claro que querríamos aceptarla como tal. ¿Por qué? En principio, la conexión entre las premisas y la conclusión del argumento no es evidente.*

Argumentos

- *Por otro lado, el siguiente argumento, cuyo origen es incierto, parece ser convincente:*
  - *Los seres humanos son mortales.*
  - *Sócrates es un ser humano.*
  - *Luego, Sócrates es mortal.*
- *Aquí se percibe una fuerte conexión entre las premisas y la conclusión, y no parece posible aceptar las premisas y rechazar la conclusión.*
- *Intuitivamente, percibimos que la conclusión está contenida implícitamente en las premisas.*

Argumentos

- *Volviendo al ejemplo de Sócrates:*
  - *Los seres humanos son mortales.*
  - *Sócrates es un ser humano.*
  - *Luego, Sócrates es mortal.*
- *Este argumento posee, entre otras, las siguientes virtudes:*
  - *Sus premisas son verdaderas*
  - *El razonamiento es válido*

Argumentos

- *La primera virtud se refiere a la verdad de las premisas y establecer la verdad o falsedad de las premisas no es parte de la Lógica.*
- *La determinación de la validez del razonamiento es el ámbito de trabajo de la Lógica como disciplina.*
- *Existen otros aspectos, tales como la relevancia, han dado lugar a extensiones de Lógica.*

Validez

- *Desde el punto de vista clásico, la idea de validez de un argumento es simple:*

  Un argumento es válido si no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa.

- *Es decir, no se puede imaginar una situación en la que las premisas sean satisfechas y la conclusión no.*

Validez

- *El argumento sobre la mortalidad de Sócrates es válido porque si aceptamos que los seres humanos son mortales y que Sócrates es humano no es posible imaginar que estas premisas sean verdaderas y que Sócrates no sea mortal.*
- *Este es un ejemplo de razonamiento categórico; se define una propiedad de una categoría (conjunto) y cada elemento debe satisfacerla.*
- *Los argumentos inválidos son aquellos que no son válidos.*

Sensatez

- *Un argumento puede ser válido pero aún puede ser un mal argumento; para ello basta con que se apoye en una o más premisas falsas, tales argumentos se dicen válidos pero no sensatos (unsound).*

- *Un argumento es sensato (sound) si*
  a. *es válido y además*
  b. *todas sus premisas son verdaderas.*

- *En general, no estudiaremos argumentos que no sean sensatos.*

Evaluación de Argumentos

¿Es posible que todas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa?

No es posible

El Argumento es válido

Es posible

El Argumento es inválido

¿Son las premisas verdaderas?

Si

El argumento es sensato

No

El argumento no es sensato

Contraejemplos

Analicemos el siguiente argumento:

- *Todos los cirujanos son cuidadosos en su tarea.*
- *Juan no es un cirujano.*
- *<u>Luego</u>, Juan no es cuidadoso en su tarea*

Nuestra intuición nos dice que hay algo incorrecto en la construcción de este argumento. ¿Pero como estar seguros?

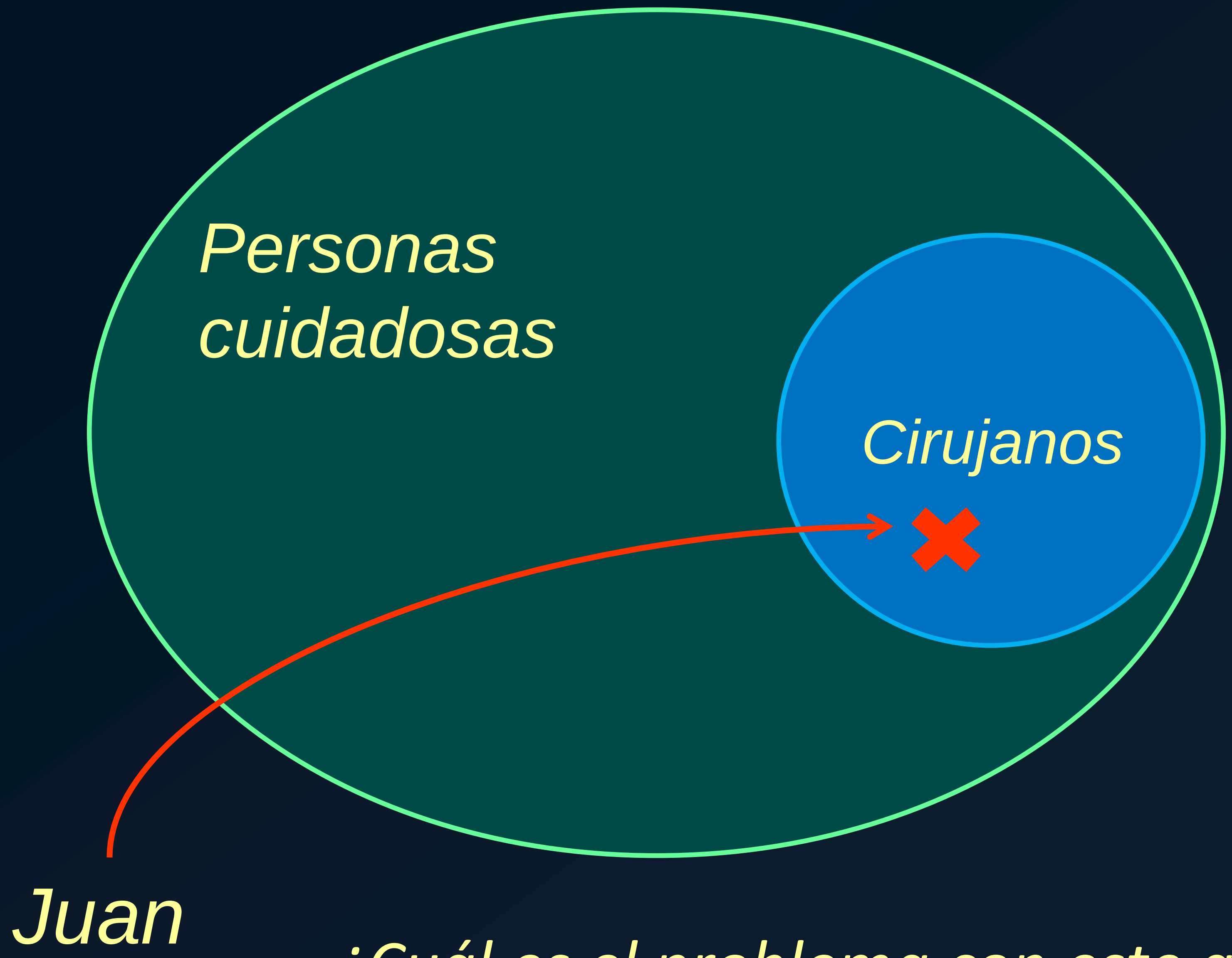
Contraejemplos

- *Una forma es diseñar una situación en la que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.*

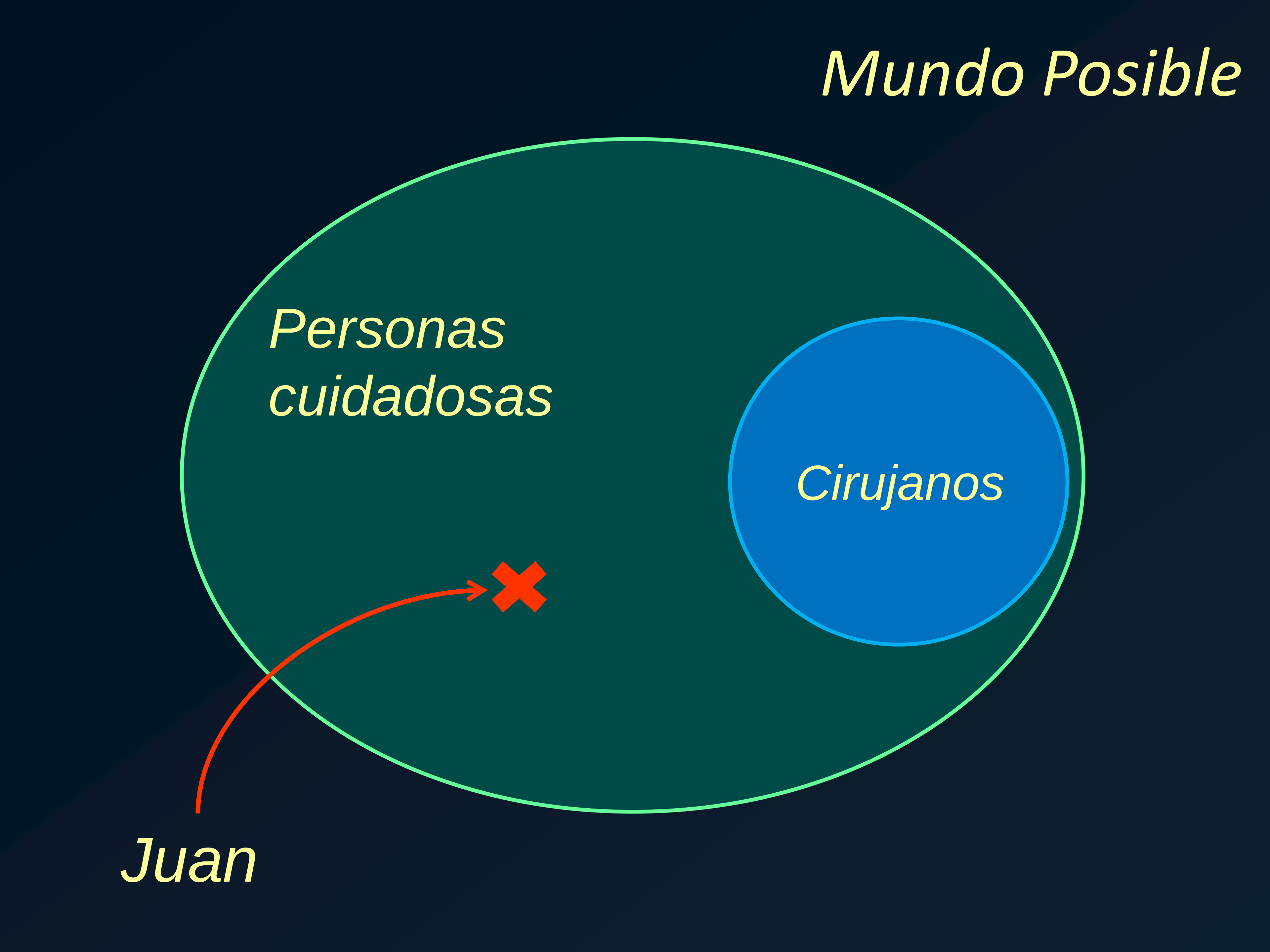
- *Basta con elegir un Juan particular que sea una persona cuidadosa y que no sea cirujano; por ej., los pilotos de avión y este será un contraejemplo para la validez del argumento.*

- *Volviendo a las categorías, Juan no pertenece a la categoría cirujanos, i.e., la propiedad que la describe (ser cirujano) puede fallar para él.*

Mundo Posible



¿Cuál es el problema con este gráfico?


Mundo Posible
Personas cuidadosas
Cirujanos
Juan

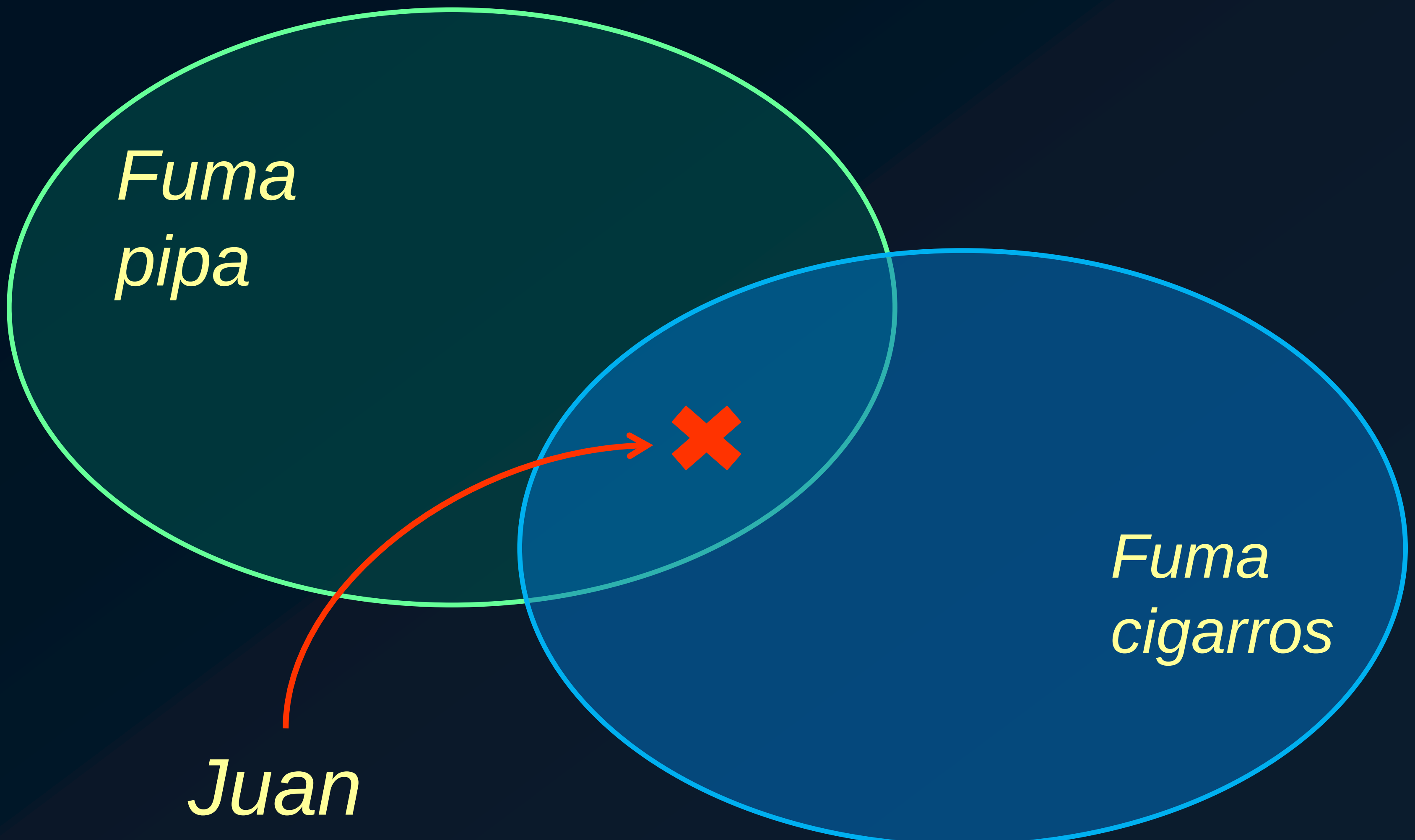
Contraejemplos

Analicemos otro argumento:

- *Alguna gente fuma en pipa.*
- *Alguna gente fuma cigarros.*
- *Luego, alguna gente fuma en pipa y cigarros*

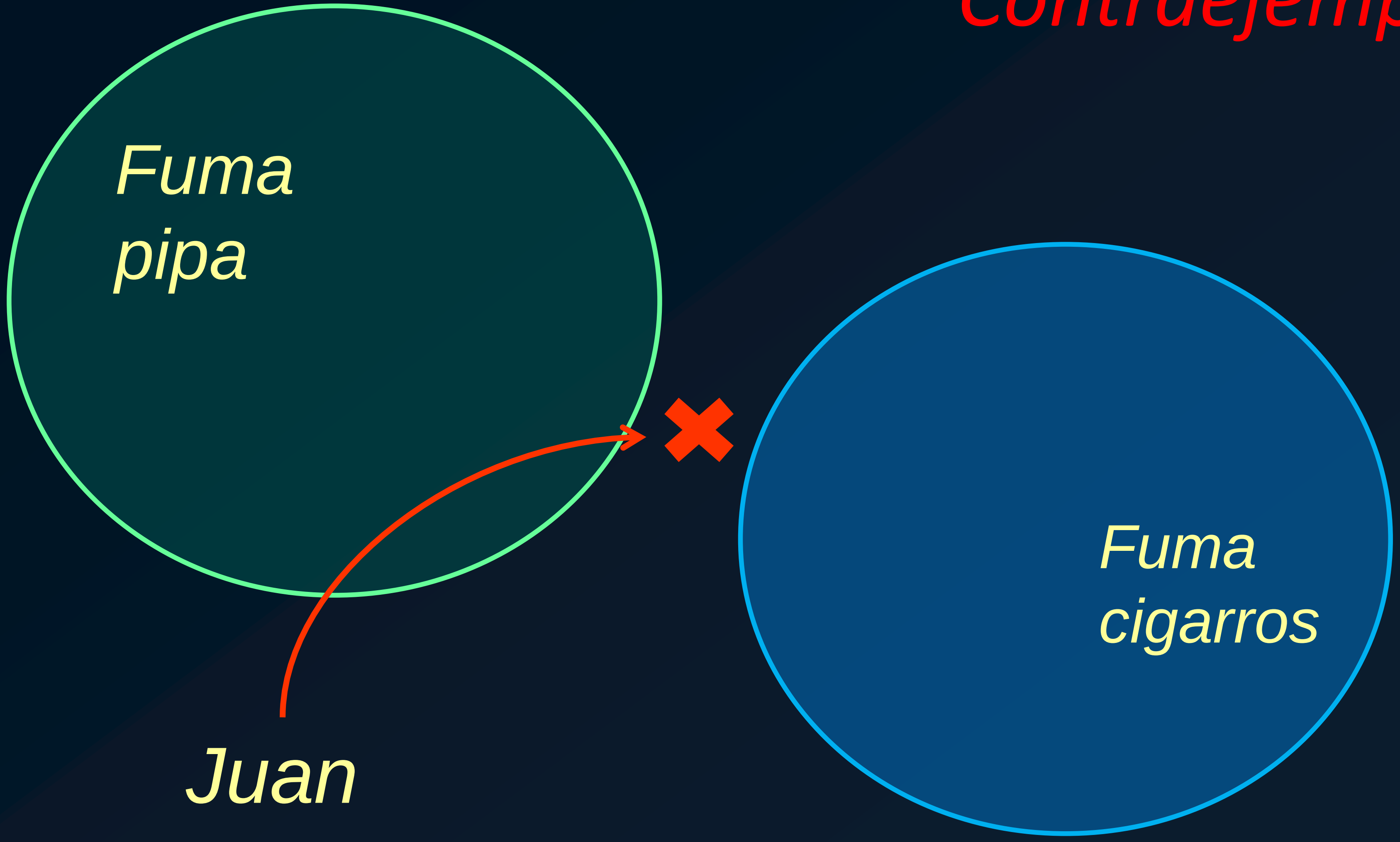
También parece ser incorrecto y para dar el contraejemplo basta con elegir un conjunto de personas separable en dos subconjuntos disjuntos de personas tales que en uno están los que fuman solo pipa y en el otro los que solo fuman cigarros.

¿Cuál es el problema con este gráfico?



Mundo Posible

Contraejemplo



Contraejemplos

El mecanismo para construir un contraejemplo sigue los siguientes pasos:

1. *Se afirma la verdad de todas las premisas,*
2. *se niega que la conclusión del argumento sea verdadera, y*
3. *se da una explicación de como esto puede ser posible.*

Al seguir estos tres pasos se diseña una situación en la que el argumento es inválido.

Argumentos Deductivos

Argumentos

Los argumentos descriptos se denominan argumentos deductivos y los argumentos válidos de este tipo siguen formas reconocidas como sensatas que garantizan que si se introducen premisas ciertas la conclusión deberá serlo.

Por ejemplo,

- *Todos los Gonks son Tronks*
- *Sócrates es un Gonk*
- *Luego, Sócrates es un Tronk*

Se observa que tiene la misma forma que el argumento sobre la mortalidad de Sócrates.

Argumentos

- La forma es,
  - Todos los ⚐ son ❄
  - ☺ es un ⚐
  - Luego, ☺ es un ❄
- Si se reemplazan consistentemente los símbolos, i.e., a igual símbolo le corresponde igual reemplazo, se obtiene un argumento válido y cualquier situación que haga falsa la conclusión también hará falsa al menos una premisa. Existen muchas formas con esta propiedad.

Argumentos

Las siguientes son algunas otras formas con la propiedad de producir argumentos válidos.

Todos los ⚐ son ❄ *Todos los ❄ son ☺* *Luego, todo ⚐ es un ☺*	*Algunos ⚐ son ❄* *Todos los ❄ son ☺* *Así, algunos ⚐ son ☺*
Todo ⚐ es un ❄ o un ☺ *⚐ no es un ❄* *Entonces, ⚐ es un ☺*	*Todo ⚐ es un ❄ y un ☺* *Por lo tanto, ⚐ es un ❄*

Todos los ⚐ son ❄

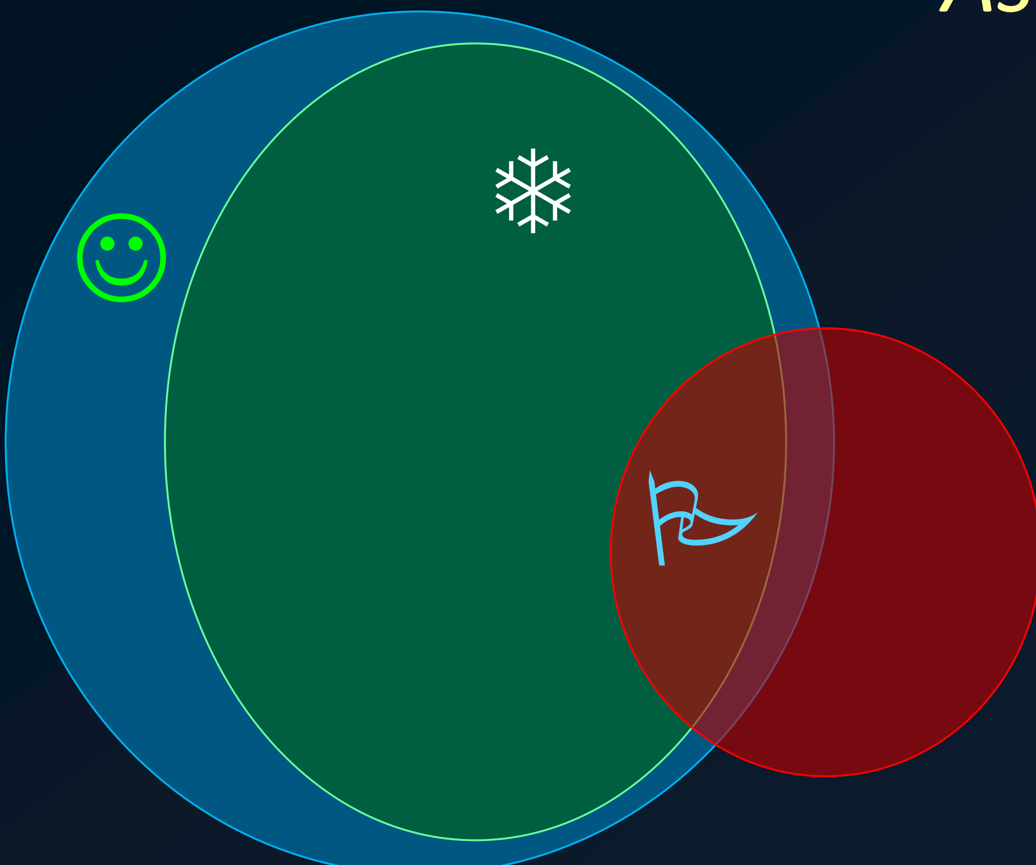
Todos los ❄ son ☺

Luego, todo ⚐ es un ☺

Algunos ⚐ son ❄

Todos los ❄ son ☺

Así, algunos ⚐ son ☺



Lo que expresa el esquema es que la intersección entre azul y rojo es no vacía

(In)Consistencia

- *Un conjunto de sentencias se dice consistente si es posible que todas ellas sean simultáneamente verdaderas.*
- *Si esto no es posible, el conjunto se dice inconsistente.*

(In)Consistencia

- *Por ejemplo,*
  a) *Sócrates tiene gran moral.*
  b) *Sócrates roba regularmente de las arcas del estado.*
  c) *No es posible tener gran moral y robar.*
- *Con la interpretación lingüística estándar, estas tres sentencias no pueden ser verdaderas simultáneamente.*

Consistencia y Validez

A pesar de ser conceptos diferentes, las nociones de consistencia y validez están relacionadas.

Validez: no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

Inconsistencia: no es posible que todas las sentencias sean verdaderas simultáneamente.

Procedimiento para testar Validez

a. *Tomamos el argumento que deseamos testear por validez considerado como un conjunto de sentencias.*

b. *En ese conjunto reemplazamos la conclusión por la afirmación de que la misma es falsa.*

c. *Chequeamos por consistencia este conjunto.*

d. *Si el conjunto es inconsistente el argumento es válido, si el conjunto es consistente entonces el argumento es inválido.*

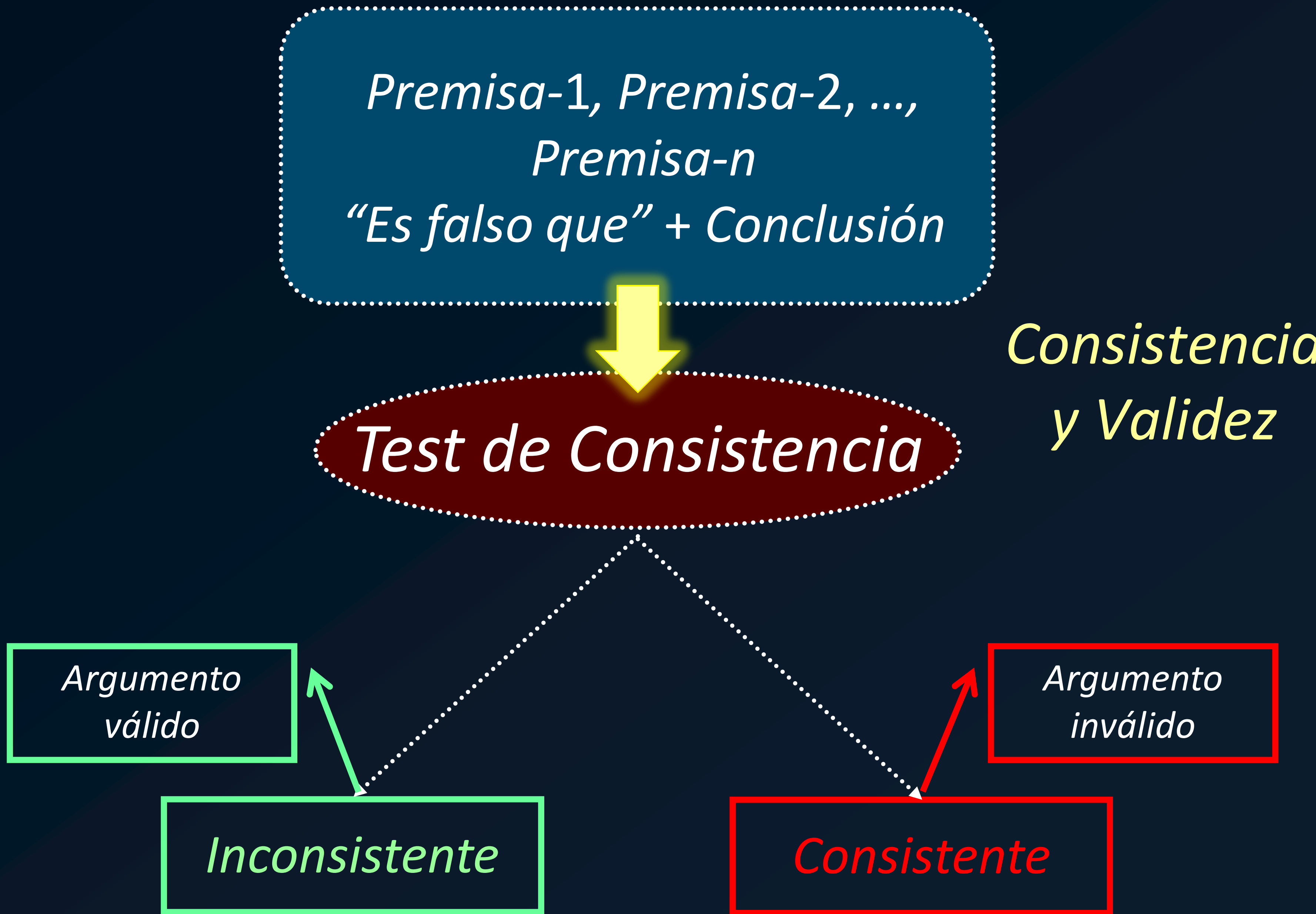
Consistencia y Validez

- *¿Por qué este procedimiento resulta efectivo para verificar validez?*

- *Si el conjunto de premisas ampliado con la afirmación de que la conclusión es falsa es consistente, entonces es posible pensar en una situación en la que las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa.*

Consistencia y Validez

- *Esto es así porque todas las sentencias de este conjunto son verdaderas; en particular, las premisas y la afirmación de que la conclusión es falsa son sentencias verdaderas.*
- *Si la afirmación "la conclusión es falsa" es una sentencia verdadera entonces la conclusión puede ser falsa al mismo tiempo que las premisas son verdaderas.*
- *Luego, el argumento debe ser inválido.*


Premisa-1, Premisa-2, ..., Premisa-n
"Es falso que" + Conclusión
Test de Consistencia
Consistencia y Validez
Argumento válido
Inconsistente
Argumento inválido
Consistente

Sistemas Formales

¿Qué es un Sistema Formal?

- *Más adelante definiremos el concepto de TEORÍA FORMAL en general.*

- *Luego daremos ejemplos de sistemas clásicos.*

- *Veremos otros esquemas formales basados en la Lógica.*

¿Por qué esto es interesante?

- *Un Sistema Computacional es una SIMULACIÓN conceptual de algún aspecto de la realidad, y a esta se le asocia un proceso de abstracción.*
- *Al realizar la abstracción se descartan aspectos considerados como no esenciales para el modelo.*
- *¡El proceso de abstracción es fuente de errores!*
- *El formalismo lógico sirve al propósito de minimizarlos.*

Una Tríada

- *Al definir un lenguaje declarativo es necesario dar cuenta de tres componentes esenciales:*
  - *Sintaxis (Forma del lenguaje)*
  - *Semántica (Significado del lenguaje)*
  - *Pragmática (Uso del lenguaje)*
- *Es posible que para cierto tipo de lenguajes sea necesario incluir o separar otros componentes.*

Una Tríada

En la ***Representación Computacional de la Realidad*** *aparecen los mismos aspectos, con la particularización de la pragmática al uso computacional:*

- *Sintaxis (Forma)*
- *Semántica (Significado)*
- *Computación (Evolución)*

Es necesario relacionar estos aspectos.

Sintaxis: Lenguajes Formales

- *Al definir un lenguaje formal para expresar conocimiento acerca del dominio ("mundo") se debe definir su sintaxis de manera de describir las fórmulas legales del lenguaje.*
- *Primero se establece cuales son los símbolos legales y luego se definen reglas para formar expresiones aceptables a partir de ellos.*
- *Las fórmulas legales se especifican por medio de una gramática.*

Semántica

- *Dado un dominio, la semántica determina el significado de las sentencias del lenguaje en el dominio, es decir, su designación en ese dominio.*

- *Así, esa relación especifica un compromiso de los símbolos del lenguaje con el dominio.*

- *Este compromiso semántico permite discutir la correctitud y/o la veracidad del conocimiento de manera independiente al uso que de él se haga.*

Teoría de Prueba

- *Consiste de un conjunto de Reglas de Inferencia que representan un patrón de razonamiento reconocido como correcto.*
- *Dado un conjunto de premisas hay dos criterios fundamentales para estas reglas:*
  - *Deberían permitir inferir solamente las conclusiones que se siguen lógicamente de estas premisas.*
  - *Deberían permitir inferir todas las conclusiones que se siguen lógicamente de estas premisas.*

Teoría de Prueba y Semántica

- *Es posible que la Teoría de Prueba y la Semántica no se "lleven bien".*
- *Si la Teoría de Prueba solo infiere respuestas correctas en acuerdo con la Semántica se dice que es Sana o Sensata o Sólida (en inglés Sound).*
- *Si genera todas las respuestas correctas se dice que es Completa.*

Teorías Formales

Teorías Formales

- *Veremos ahora una forma de establecer de manera clara los tres elementos mencionados:*

  Sintaxis, Semántica, Teoría de Prueba.

- *Mantendremos las definiciones en un nivel intuitivo para dar un marco general.*

- *Introduciremos los elementos básicos presentes en los formalismos lógicos.*

Motivación

- *La definición de una teoría formal puede entenderse como la especificación de un “juego (formal)”.*
- *Esto es, se debe introducir un lenguaje y reglas no ambiguas para manipularlo.*
- *Un estado determinado en el desarrollo del juego será una situación válida si se puede llegar a ella con las reglas dadas a partir de un estado inicial.*

Teoría Formal

DEFINICIÓN: Una teoría formal $\mathcal{T}$ consiste de:

1. *Un conjunto contable de símbolos. Se llamará expresión a toda secuencia finita de símbolos.*

2. *Un subconjunto de las expresiones llamado Fórmulas Bien Formadas (fbf), en inglés wff.*

3. *Un subconjunto de las fbf llamado Axiomas.*

4. *Un conjunto finito de relaciones sobre las fbf llamadas Reglas de Inferencia.*

Reglas de Inferencia

- Recordemos que estas reglas relacionan las premisas con una conclusión.
- Más formalmente, una regla de inferencia es una relación $\mathcal{R}$ de n fbfs $F_1, \ldots, F_{n\text{-}1}, Q$ tal que es posible decidir si la n-upla $(F_1, \ldots, F_{n\text{-}1}, Q)$ pertenece a la relación $\mathcal{R}$.
- Si $(F_1, \ldots, F_{n\text{-}1}, Q) \in \mathcal{R}$ entonces la conclusión Q se dice una consecuencia directa de las premisas $F_1, \ldots, F_{n\text{-}1}$ por la aplicación de la regla de inferencia $\mathcal{R}$.

Teoría Formal

DEFINICIÓN: Una teoría formal $\mathcal{T}$ consiste de:

Lenguaje

1. Un conjunto contable de símbolos. Se llamará expresión a toda secuencia finita de símbolos.
2. Un subconjunto de las expresiones llamado Fórmulas Bien Formadas (fbf), en inglés wff.

Prueba

3. Un subconjunto de las fbf llamado Axiomas.
4. Un conjunto finito de relaciones sobre las fbf llamadas Reglas de Inferencia.

Teoría de Prueba

Deducibilidad, derivaciones y pruebas

Def: *Sea $\mathcal{T}$ una teoría, S un conjunto de fbfs (hipótesis o premisas) y P una fbf (conclusión) en $\mathcal{T}$, se dice que P es deducible a partir de S en $\mathcal{T}$ ($S \vdash_{\mathcal{T}} P$ o $S \vdash P$) si existe una secuencia finita de fbfs $P_1, P_2, \ldots, P_n$ tal que $P_n = P$ y para todo $1 \leq i \leq n$,*

1. P_i *es un axioma, o* $P_i \in S$, *o*
2. P_i *se obtiene como una consecuencia directa por la aplicación de alguna regla de inferencia sobre elementos de la secuencia que preceden a* P_i.

La secuencia es una derivación o prueba de P a partir de S en $\mathcal{T}$.

Teoremas

Def: *Sea P una fbf de una teoría $\mathcal{T}$, si P es **deducible** a partir del conjunto vacío se dice que P es un **teorema** en $\mathcal{T}$ o que es **demostrable** en $\mathcal{T}$, denotado $\vdash_{\mathcal{T}} P$ o $\vdash P$.*

- *Los axiomas proveen un conjunto de fbfs que es posible utilizar en la deducción en cualquier momento.*
- *Trivialmente, que todo axioma es un teorema.*
- *Cuál sería la secuencia de prueba?*

Propiedades de $\vdash$

Sea $\mathcal{T}$ una teoría, A y B conjuntos de fbf y P y Q fbfs de $\mathcal{T}$, se verifican las siguientes propiedades:

Propiedad de Monotonía:

Si $A \subseteq B$ y $A \vdash P$ entonces $B \vdash P$

Propiedad de Compacidad: $A \vdash P$ sssi existe un subconjunto finito B de A, tal que $B \vdash P$

Propiedad de Modularidad: Si $A \vdash P$ y para cada fbf Q en A vale que $B \vdash Q$ entonces $B \vdash P$

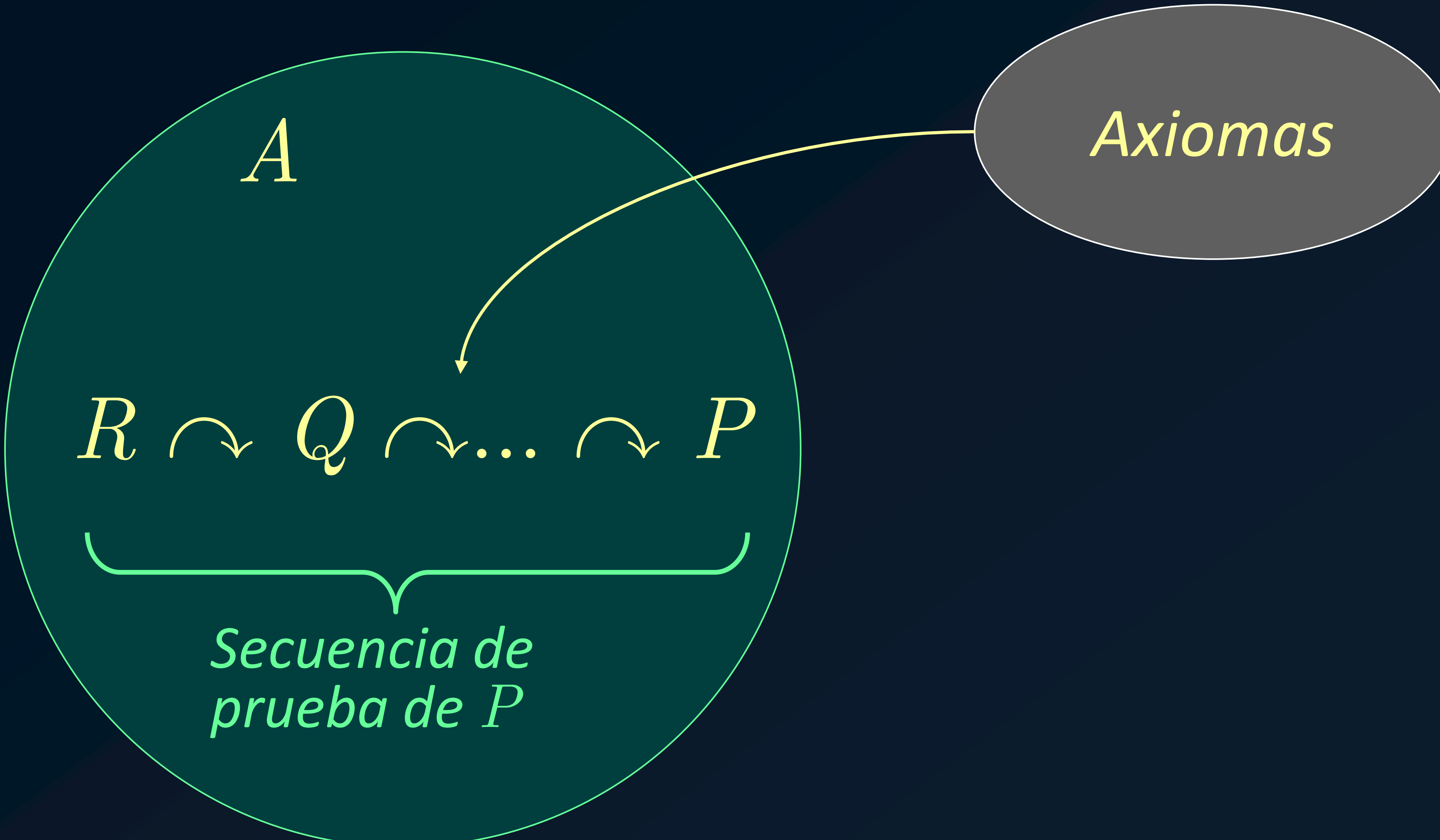
Propiedades de $\vdash$

Dada una teoría $\mathcal{T}$, y A, B conjuntos de fbf y P fbf de $\mathcal{T}$.

Propiedad de Monotonía

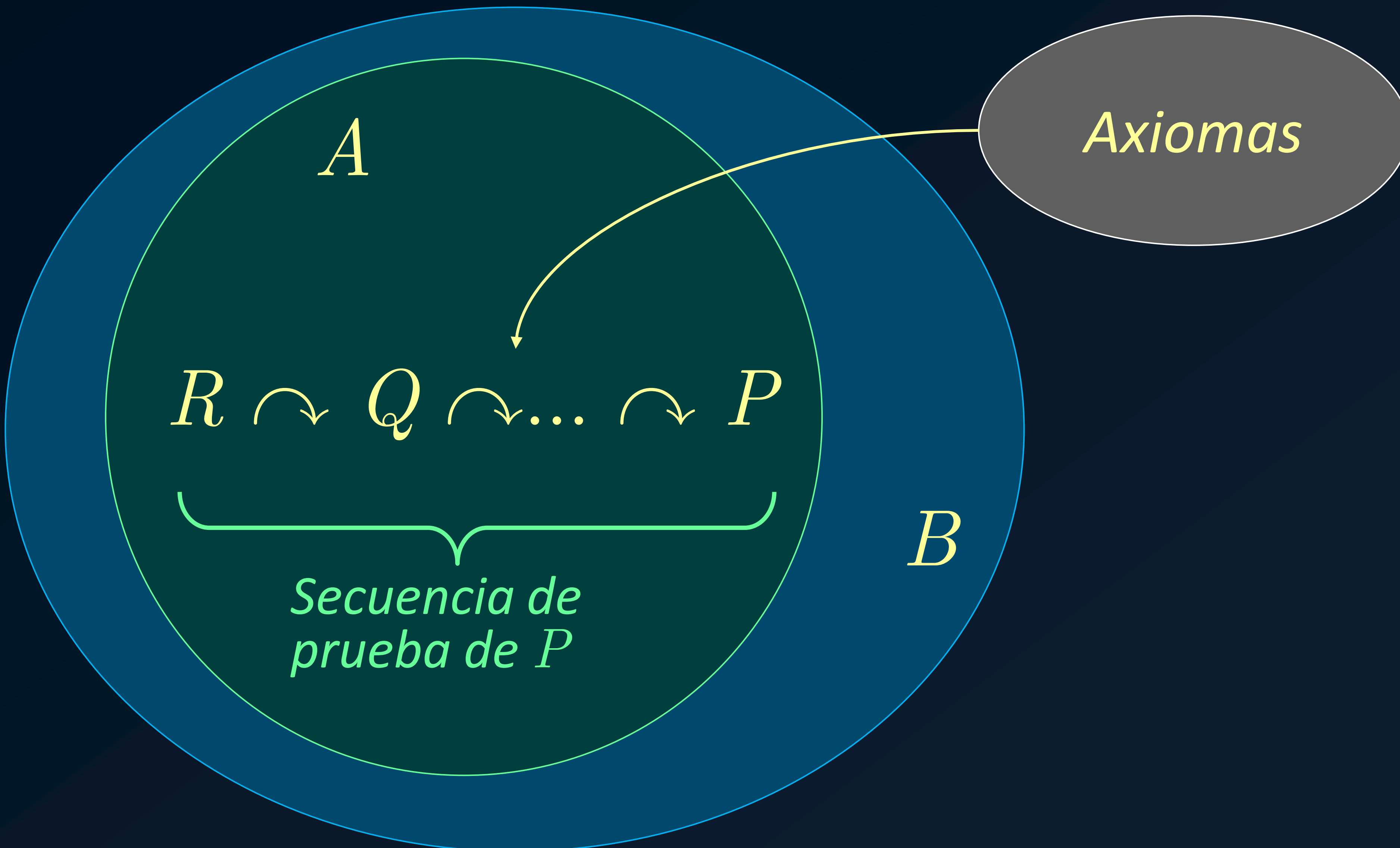
Si $A \subseteq B$ y $A \vdash P$ entonces $B \vdash P$

Posiblemente algunos miembros de la secuencia son instancias de los axiomas.



Si $A \subseteq B$ *y* $A \vdash P$ *entonces* $B \vdash P$

Posiblemente algunos miembros de la secuencia son instancias de los axiomas.



Si $A \subseteq B$ *y* $A \vdash P$ *entonces* $B \vdash P$

Semántica

Interpretaciones

- *Dada una teoría formal, es interesante obtener una visión en términos de otras cosas conocidas.*

- *La forma natural de hacerlo es dar significado a los símbolos usados para formar expresiones y propagar este significado atómico a las fbfs complejas.*

- *Esto se realiza por medio de una "aplicación" denominada interpretación.*

Interpretaciones y Modelos

Def: Una interpretación proporciona un significado para cada uno de los símbolos de una teoría formal, de tal forma que toda fbf es verdadera o falsa bajo esa interpretación.

Def: Una interpretación $\mathcal{I}$ es un modelo para un conjunto de fbfs S si toda fbf de S es verdadera bajo la interpretación $\mathcal{I}$.

Interpretaciones y Modelos

- *Si una fbf P es verdadera en todas las interpretaciones esto se denota usualmente $\models P$ y se dice que P es lógicamente verdadero.*

- *Dadas dos fbfs P y Q son tales que todo modelo de P es modelo de Q decimos que P implica lógicamente a Q y se denota $P \models Q$*

Meta-Teoría

Conceptos Meta-teóricos

- *Hemos definido la noción Sintáctica de demostrabilidad en la teoría (teorema). Denotado $\vdash P$*

- *También definimos la noción Semántica de verdad en todas las interpretaciones. Denotado $\models P$*

- *<u>En principio</u>, estos conceptos no están relacionados.*

Conceptos Meta-teóricos

- *Las relaciones entre estos dos conceptos son sobre la teoría (meta-teoría).*
- *Completitud: toda fbf verdadera en todas las interpretaciones es demostrable en la teoría.*

$$\textit{Si} \models P \ \textit{ entonces} \vdash P$$

- *Sensatez: toda fbf demostrable en la teoría es verdadera en todas las interpretaciones.*

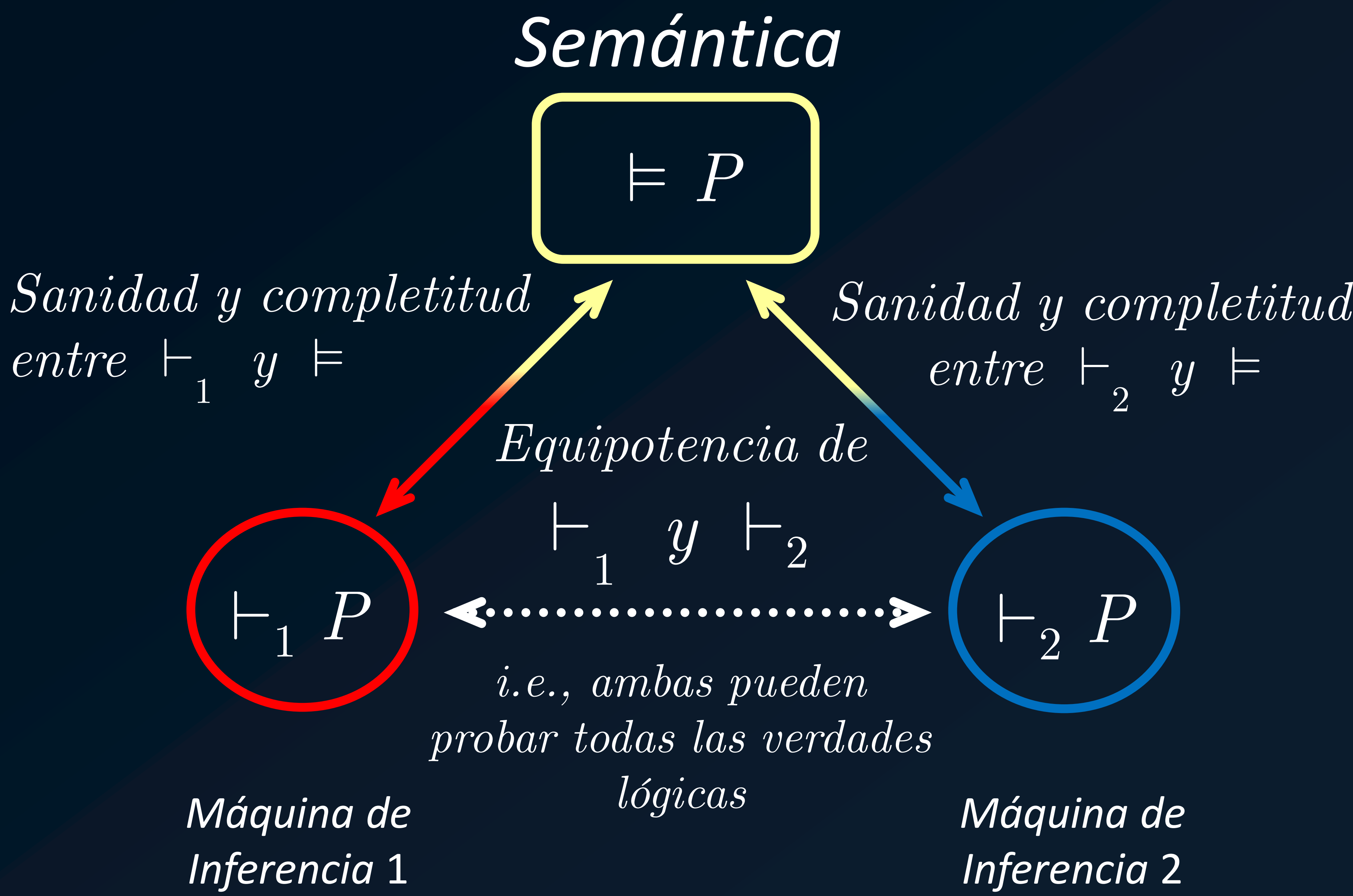
$$\textit{Si} \vdash P \ \textit{ entonces} \models P$$

Completitud y Sensatez

- En general, una teoría podría ser completa y sensata, podría verificar solo alguna de las dos meta-propiedades o no cumplir ninguna de ellas.
- La sensatez y/o completitud son propiedades que deben demostrarse, no pueden asumirse.

Completitud y Sensatez

- *Una teoría que demuestra cosas falsas no parece de mucha utilidad.*
- *Una teoría en la cual toda fbf puede demostrarse es completa, pero no es sensata (¿porqué?).*
- *En una teoría sensata y completa, verdad y deducción parecen ser equivalentes, pero ...*


Semántica
$\vDash P$
Sanidad y completitud entre $\vdash_1$ y $\vDash$
Sanidad y completitud entre $\vdash_2$ y $\vDash$
Equipotencia de $\vdash_1$ y $\vdash_2$
$\vdash_1 P$
$\vdash_2 P$
i.e., ambas pueden probar todas las verdades lógicas
Máquina de Inferencia 1
Máquina de Inferencia 2

Conceptos Meta-teóricos (2)

- *Una teoría formal es consistente si no es posible demostrar en ella una fbf y su negación.*
- *Un método computacional para una teoría es completo si aplicado a cualquier fbf termina en tiempo finito indicando si la fbf es verdadera en todas las interpretaciones.*
- *Una teoría formal es decidible si existe un procedimiento efectivo que determine para cada fbf si la fórmula es demostrable en la teoría.*

Lógica Proposicional
El Sistema $\mathcal{L}$

Introducción

Repaso

- *En la estructuración del discurso aparece la noción de argumento.*
- *En el análisis de la argumentación resulta central la ponderación del concepto de verdad y falsedad referido a las sentencias que lo forman.*
- *¿Como determinar si un argumento se sostiene?, técnicamente, si es válido y sensato.*

Repaso

- *Al analizar la estructura de los argumentos se reconoció la existencia de ciertas unidades atómicas que los forman.*
- *Estos átomos además se combinan para integrarse en bloques más complejos.*
- *A su vez, estos bloques pueden utilizarse para conformar estructuras aún más complejas.*

Repaso

- *Álgebra es la parte de la Matemática en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. (Diccionario de la RAE)*
- *Notemos que la forma en que se combinan los átomos es de naturaleza algebraica.*

Consecuencia

p : *"Si Juan está casado tiene esposa"*

q : *"Juan está casado"*

---

r : *"Juan tiene esposa"*

"p", "q" y "r" son designaciones para las proposiciones.
Esto es parte de la algebrización ya mencionada.

Se dice que r <u>es consecuencia</u> de p y q.

O que r <u>se infiere de</u> p y q.

O que r <u>sigue de</u> p y q.

Consecuencia

$$p : \text{“\textit{Si Juan está casado tiene esposa}”}$$

$$q : \text{“\textit{Juan está casado}”}$$

$$r : \text{“\textit{Juan tiene esposa}”}$$

- Esta forma argumental es conocida desde la antigüedad y se denomina *Modus Ponens o Modus Ponendo Ponens*, que puede traducirse como *probar una aserción asumiendo una aserción.*

- Sin embargo, no es evidente en el enunciado que utiliza los símbolos p, q y r.

Proposiciones

Dadas las siguientes proposiciones:

p: *"Juan está casado con María"*

q: *"Juan tiene más edad que su esposa"*

Entonces, las siguientes sentencias también lo son:

no es cierto que "Juan está casado con María" $\}\ \neg p$

"Juan está casado con María" y "Juan tiene más edad que su esposa" $\}\ p \land q$

"Juan está casado con María" o "Juan tiene más edad que su esposa" $\}\ p \lor q$

Si "Juan está casado con María" entonces "Juan tiene más edad que su esposa" $\}\ p \rightarrow q$

Teoría Formal (Repaso)

DEFINICIÓN: Una teoría formal $\mathcal{T}$ consiste de:

Lenguaje

1. *Un conjunto contable de símbolos. Se llamará expresión a toda secuencia finita de símbolos.*
2. *Un subconjunto de las expresiones llamado Fórmulas Bien Formadas (fbfs), en inglés wffs.*

Prueba

3. *Un subconjunto de las fbf llamado Axiomas.*
4. *Un conjunto finito de relaciones sobre las fbf llamadas Reglas de Inferencia.*

Lenguaje de $\mathcal{L}$

Alfabeto, conjunto contable de símbolos:

- *Letras Proposicionales:* $p_{\mathbf{1}},\ p_{\mathbf{2}},\ \ldots,\ p_{\boldsymbol{n}}\ ,\ \ldots$
- *Conectivos lógicos:* "$\rightarrow$", "$\neg$"
- *Símbolos auxiliares:* "$($" , "$)$"

Fórmulas Bien Formadas:

- *Todas las letras proposicionales (fórmulas atómicas)*
- *Si* P *y* Q *son fbfs, entonces también son fbfs* $(\neg P)$, $(\mathrm{P} \rightarrow Q)$ *(fórmulas no atómicas o compuestas)*

Lenguaje de $\mathcal{L}$

- *Se aceptan ciertas reglas de reescritura:*
  - $(P \wedge Q)$ *se reescribe como* $(\neg(P \rightarrow (\neg Q)))$
  - $(P \vee Q)$ *se reescribe como* $((\neg P) \rightarrow Q)$
  - $(P \equiv Q)$ *se reescribe como* $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$
- *Esto es, cuando escribimos la fórmula de la izquierda debemos interpretarla como una abreviatura de la fbf de la derecha.*
- *Precedencia:* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$

Semántica de $\mathcal{L}$

Interpretaciones

En Lógica Proposicional Clásica hay dos valores de verdad: Verdadero (V) *y Falso* (F).

- *Una interpretación asigna un valor de verdad a cada letra proposicional (fbf atómica).*
- *Para obtener el valor de verdad de una fbf arbitraria se necesita dar significado a los conectivos.*
- *Simplificando, una fbf es verdadera si toma el valor de verdad* V *y diremos que es falsa si toma el valor* F.

Significado de los conectivos

"$\neg$" *Negación:* $\neg P$ *es verdadera si* P *es falsa, y falsa si* P *es verdadera.*

"$\rightarrow$" *Implicación:* $P \rightarrow Q$ *es verdadera si* P *es falsa o* Q *es verdadera.*

"$\wedge$" *Conjunción:* $P \wedge Q$ *es verdadera si* P *y* Q *son verdaderas.*

"$\vee$" *Disyunción:* $P \vee Q$ *es verdadera si* P *o* Q *son verdaderas.*

"$\equiv$" *Equivalencia:* $P \equiv Q$ *es verdadera si* P *y* Q *tienen el mismo valor de verdad, i.e., son ambas verdaderas o ambas falsas.*

Tablas de verdad

Las Tablas de Verdad sirven para obtener el significado deseado de las fbf no atómicas.

A	$\neg A$
V	F
F	V

A	B	$A \rightarrow B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \equiv B$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V

La disyunción, conjunción y equivalencia se puede calcular tomando la regla de reescritura y aplicando las tablas de la negación y la implicación.

Ejemplo: $\neg(A \rightarrow B) \vee \neg C$ (fbf arbitraria)

A	B	C	$\neg$	$(A \rightarrow B)$	$\vee$	$\neg C$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

Interpretaciones y Modelos

Cada línea en una tabla de verdad es una clase de interpretaciones, es decir, aquellas interpretaciones en las que cada proposición atómica toma el valor indicado en la columna correspondiente a ella en la tabla.

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	V

Interpretaciones y Modelos

Una interpretación en la que una fbf P es verdadera se dice que es un modelo para esa fbf y dado un conjunto de fbfs S, una interpretación del mismo es un modelo si y solo si es un modelo para cada una de las fbfs que lo integran.

A	B	$A \rightarrow B$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**V**	**V**

Tautologías y contradicciones

DEF: *Una fbf es satisfacible si es verdadera en alguna interpretación.*

Ej. $A \rightarrow B$.

DEF: *Una fbf es una tautología o lógicamente válida si es verdadera en todas sus interpretaciones.*

Ej. $A \rightarrow A$, *se nota "*$\top$*"*

Tautologías y contradicciones

DEF: Una fbf es una insatisfacible o una contradicción si es siempre falsa en todas sus interpretaciones.

Ej. $\neg(A \to A)$, *se nota "*$\perp$*".*

OBS: Verificar si una sentencia es lógicamente válida es decidible. Basta comprobar si la tabla de verdad tiene V *(verdadero) en todas las filas.*

Lógica Proposicional

Deducción en $\mathcal{L}$

Deducción en $\mathcal{L}$

- *Axiomas (esquemas de): donde las metavariables A, B y C representan fbfs de $\mathcal{L}$*

  L1: $(A \rightarrow (B \rightarrow \mathrm{A}))$

  L2: $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

  L3: $(((\neg B) \rightarrow (\neg A)) \rightarrow (((\neg B) \rightarrow A) \rightarrow B))$

- *Regla de Inferencia: Modus Ponens (MP)*

  B *es una consecuencia directa de* A *y* $A \rightarrow B$

- *Formulaciones alternativas de MP*
  - *la tupla* $(A,\ A \rightarrow B,\ B)$ *está en la relación MP*
  - $A,\ A \rightarrow B \vdash B$ *o también* $\dfrac{A \qquad A \rightarrow B}{B}$

Deducción en la lógica

Demostrar que a partir de la hipótesis q se puede probar $(p \rightarrow q)$ donde p y q son letras proposicionales:

P_1: $(q \rightarrow (p \rightarrow q))$ *instancia del axioma L1,* $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$ *donde* q *reemplaza a* A *y* p *reemplaza a* B

P_2: q *hipótesis*

P_3: $(p \rightarrow q)$ *MP (P_1) y (P_2)*

Luego, $q \vdash (p \rightarrow q)$ *y la secuencia de prueba es* P_1, P_2, P_3, *es decir* $(q \rightarrow (p \rightarrow q)),\ q,\ (p \rightarrow q)$

Teoremas en la lógica

Probar que el esquema $((M \rightarrow (M \rightarrow M)) \rightarrow (M \rightarrow M)))$ *es un teorema, i.e.* $\vdash ((M \rightarrow (M \rightarrow M)) \rightarrow (M \rightarrow M)))$

P$_1$: $((M \rightarrow ((M \rightarrow M) \rightarrow M)) \rightarrow ((M \rightarrow (M \rightarrow M)) \rightarrow (M \rightarrow M)))$

instancia de L2: $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
reemplazando M *por* A, $(M \rightarrow M)$ *por* B *y* M *por* C

P$_2$: $(M \rightarrow ((M \rightarrow M) \rightarrow M))$

instancia de L1: $((A \rightarrow (B \rightarrow A))$ *con* M *por* A *y* $(M \rightarrow M)$ *por* B.

P$_3$: $((M \rightarrow (M \rightarrow M)) \rightarrow (M \rightarrow M)))$

MP (1) y (2)

y la secuencia de prueba es P$_1$, P$_2$, P$_3$.

En realidad es un metateorema, llamémoslo T_1.

[G.R.Simari]

Extendiendo la idea de prueba

Podemos extender la idea de prueba, usando teoremas probados previamente como una abreviatura de su propia deducción.

Probar que el esquema $(M \rightarrow M)$ *es un (meta)teorema, i.e.*

$$\vdash (M \rightarrow M)$$

P1: $\underline{((M \rightarrow (M \rightarrow M))} \rightarrow (M \rightarrow M)))$

teorema T_1

P2: $\underline{(M \rightarrow (\mathrm{M} \rightarrow M))}$

instancia de L1: $((A \rightarrow (B \rightarrow A))$ *con* M *por* A *y* M *por* B

P3: $(M \rightarrow M)$

MP (1) y (2)

y la secuencia de prueba es:

(toda la secuencia para probar T_1 *más)* P1, P2, P3.

Teoremas

$\vdash A \rightarrow A$

$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A))$

Teorema: Sea $\mathcal{T}$ una teoría cualquiera, para todo axioma L de $\mathcal{T}$ se cumple que L es un teorema de $\mathcal{T}$, (i.e., $\vdash_{\mathcal{T}} L$)

Los dos primeros son teoremas en la teoría (esquemas) y el último es un teorema sobre cualquier teoría formal.

Fin