Programação Linear

1st Felipe Petini
Engenharia da computação
Fundação Herminio Ometto
Araras, Brazil
felipepetini@alunos.fho.edu.br

2nd João Fernandes
Engenharia da computação
Fundação Herminio Ometto
Araras, Brazil
joao.fernandes@alunos.fho.edu.br

3rd Leonardo Colla
Engenharia da computação
Fundação Herminio Ometto
Araras, Brazil
leonardo.colla@alunos.fho.edu.br

4th Lucas Sampaio
Engenharia da computação
Fundação Herminio Ometto
Araras, Brazil
lucas.fortolan@alunos.fho.edu.br

***Abstract*—Este relatório desmistifica a Programação Linear (PL), uma técnica que utiliza modelos matemáticos para otimizar um resultado (a função objetivo), sujeito a limitações de recursos (as restrições). O artigo equipa o leitor com o conhecimento fundamental sobre como estruturar e interpretar esses modelos, permitindo-lhe transformar desafios operacionais complexos em decisões otimizadas. O foco é capacitar o leitor a usar a PL para gerar vantagens competitivas mensuráveis através da alocação eficiente de recursos**

***Index Terms*—Programação, Linear, operacional, otimização, maximizar, minimizar**

I. Introdução

No cenário empresarial moderno, marcado por uma competitividade crescente, a otimização de recursos limitados tornou-se um pilar para a tomada de decisões estratégicas. As organizações enfrentam constantemente o desafio de alocar capital, mão de obra, matéria-prima e tempo da maneira mais eficiente possível. Nesse contexto, a Programação Linear (PL) emerge como uma técnica matemática fundamental da Pesquisa Operacional (PO), projetada para encontrar a melhor solução possível — a solução ótima — para problemas complexos de alocação de recursos.

II. Conceitos

A. O Que É Programação Linear? Uma Análise Conceitual

A aplicação bem-sucedida da Programação Linear não é um ato mecânico; ela exige um domínio conceitual sólido. Antes de modelar qualquer problema, é imperativo dissecar sua arquitetura fundamental: o que é, de onde veio e quais são seus componentes essenciais. Esta seção estabelece esse alicerce teórico, indispensável para a prática consciente e eficaz.

B. Definição Fundamental e Contexto Histórico

A Programação Linear é uma ferramenta da Pesquisa Operacional que utiliza um modelo matemático para otimizar (maximizar ou minimizar) um resultado desejado, dadas certas limitações ou restrições de recursos. O termo ”linear” é central para sua definição, indicando que todas as funções matemáticas utilizadas no modelo — tanto a que representa o objetivo quanto as que representam as restrições — são, obrigatoriamente, de primeiro grau. Em essência, a PL planeja atividades para obter um resultado ótimo, como a maximização de lucros ou a minimização de custos, dentro de um conjunto de condições operacionais. A PL surgiu da necessidade de resolver problemas complexos durante a Segunda Guerra Mundial, quando era crucial alocar recursos escassos para otimizar táticas e estratégias militares. Sua aplicação formal começou a tomar forma nesse período, mas consolidou-se no pós-guerra. Dois marcos históricos são fundamentais:

- O ”Problema da Dieta”: Em 1945, o economista George Stigler formulou um dos primeiros problemas clássicos de PL. Ele buscou determinar a dieta mais econômica que satisfizesse as necessidades nutricionais mínimas diárias, analisando 77 alimentos e 9 nutrientes.
- O Método Simplex: Em 1947, o matemático George Dantzig desenvolveu o Método Simplex, um algoritmo capaz de resolver qualquer problema de PL. Esse avanço transformou a PL em uma técnica robusta e aplicável, e com o advento dos computadores, sua utilização expandiu-se de forma extraordinária para a indústria e outros setores.

C. Componentes Essenciais de um Modelo de PL

Qualquer problema de Programação Linear é estruturado a partir de três componentes fundamentais, que traduzem um desafio do mundo real para uma linguagem matemática:

- Função Objetivo Este é o elemento central do modelo, representando a meta a ser otimizada. É uma expressão matemática linear que define o que se deseja alcançar: na maioria dos casos, a maximização de lucros ou a minimização de custos. A solução do modelo fornecerá o melhor valor possível para esta função.
- Variáveis de Decisão São as incógnitas do problema, representando as quantidades ou os níveis de atividades que precisam ser determinados para se alcançar a solução ótima. Por exemplo, em um problema de produção, as

variáveis de decisão podem ser a quantidade de cada produto a ser fabricado para maximizar o lucro total.
- Restrições As restrições são um conjunto de equações ou inequações lineares que representam as limitações dos recursos disponíveis, como tempo de máquina, matéria-prima, capital, mão de obra ou demanda de mercado. Qualquer solução viável para o problema deve, obrigatoriamente, satisfazer todas as restrições simultaneamente. Uma restrição fundamental, presente na maioria dos modelos, é a de não negatividade, que estipula que as variáveis de decisão não podem assumir valores negativos (por exemplo, não é possível produzir uma quantidade negativa de um produto).

D. *Hipóteses Fundamentais*

A aplicação da PL assume quatro hipóteses principais sobre o problema modelado:

- Proporcionalidade: A contribuição de cada variável de decisão para a função objetivo e para as restrições é diretamente proporcional ao seu valor. Isso descarta economias de escala, onde o lucro ou custo unitário mudaria com o volume de produção.
- Aditividade: A contribuição total de todas as variáveis na função objetivo e nas restrições é a soma direta das contribuições individuais de cada variável. Interações ou produtos cruzados entre variáveis não são permitidos.
- Divisibilidade: As variáveis de decisão podem assumir valores fracionários. Se as variáveis precisarem ser inteiras (e.g., número de caminhões), deve-se usar uma extensão chamada Programação Inteira.
- Certeza (Determinismo): Todos os parâmetros do modelo (coeficientes da função objetivo, coeficientes das restrições e disponibilidade de recursos) são constantes e conhecidos com certeza. Na prática, incertezas são tratadas por meio da Análise de Sensibilidade.

III. Métodos de Solução para Problemas de PL

A solução ótima de um problema de Programação Linear (PPL) pode ser encontrada utilizando diferentes técnicas, que variam em complexidade e aplicabilidade. O método gráfico é usado para problemas com duas variáveis de decisão e envolve representar as variáveis em um gráfico cartesiano, plotar as restrições como linhas e traçar a reta da função objetivo. A solução ótima é o ponto onde a reta da função objetivo toca o último vértice da região viável. Já o método Simplex, desenvolvido por George Dantzig em 1947, é amplamente utilizado para resolver problemas de qualquer dimensão. Trata-se de um algoritmo iterativo que começa em um vértice viável e, a cada iteração, move-se para um vértice adjacente que melhore o valor da função objetivo, até que não seja mais possível melhorar, encontrando assim a solução ótima. Para problemas de grande escala, com muitas variáveis e restrições, a resolução manual torna-se impraticável. Nesses casos, utilizam-se softwares especializados, como o Microsoft Excel Solver e o LINGO. O Excel Solver é uma ferramenta acessível e amplamente utilizada para análise, enquanto o LINGO é projetado para resolver problemas de grande porte de forma eficiente.

IV. Por Que Usar a Programação Linear? Benefícios e Vantagens Competitivas

A Programação Linear (PL) é uma ferramenta gerencial poderosa que oferece vantagens competitivas significativas, além de sua elegância matemática. Sua aplicação permite que as organizações transformem dados operacionais brutos em decisões otimizadas e economicamente vantajosas, justificando seu uso em uma ampla gama de setores e problemas.

O principal objetivo da Programação Linear é encontrar a distribuição mais eficiente de recursos limitados entre atividades que competem por eles. Em qualquer sistema produtivo ou operacional, existem diversas maneiras de alocar esses recursos, e a PL se encarrega de encontrar a distribuição única (ou um conjunto de distribuições) que não apenas satisfaça todas as restrições impostas, mas também alcance o melhor resultado possível — o ótimo — para a função objetivo. Assim, ela responde à pergunta: "Qual é a melhor maneira de utilizar os recursos disponíveis para alcançar nosso objetivo?".

A aplicação da PL gera benefícios tangíveis, como economias financeiras, aumento de produtividade e melhorias na qualidade. Por exemplo, a Texaco Inc. economizou 30 milhões de dólares por ano ao otimizar a mistura de ingredientes na produção de gasolina. A UPS economizou 87 milhões de dólares ao usar a PL para otimizar suas rotas e a alocação de voos. No setor ferroviário, a Canadian Pacific Railway aumentou sua produtividade em 40 e reduziu o consumo de combustível em 17 ao aplicar a PL no despacho de trens. Na área de qualidade, a Jan de Wit Company, produtora de flores, conseguiu aumentar a proporção de flores de qualidade superior de 11 para 61 após otimizar seu ciclo de produção. Além disso, a Taco Bell economizou 53 milhões de dólares em um ano ao otimizar o agendamento de funcionários, aumentando o nível de serviço ao cliente e reduzindo os custos operacionais. Esses exemplos ilustram os impactos tangíveis e significativos da PL e destacam a importância de identificar os cenários e problemas ideais para sua aplicação bem-sucedida.

V. Quando Usar a Programação Linear? Cenários de Aplicação e Limitações

A eficácia da Programação Linear depende fundamentalmente de sua aplicação nos contextos corretos. Nem todo problema de otimização é um problema de PL. Este capítulo detalha os tipos de problemas clássicos que a PL resolve, os setores onde sua aplicação é mais prevalente e, crucialmente, as hipóteses fundamentais que determinam sua validade como modelo.

A. *Problemas Típicos e Áreas de Aplicação*

A PL é uma técnica versátil, aplicada para resolver uma variedade de problemas de otimização já consagrados na literatura.

- Problema da Mistura (Blendagem): Consiste em determinar a combinação ótima de ingredientes ou materiais brutos (como minérios, rações ou componentes de gasolina) que atenda a especificações de qualidade pré-definidas com o menor custo possível.

- Problema da Dieta: Um caso particular do problema da mistura, busca encontrar a combinação de alimentos mais econômica que satisfaça as necessidades nutricionais mínimas diárias de um indivíduo ou animal.
- Problema de Alocação de Atividades: Visa decidir o nível de produção de diferentes produtos ou serviços para maximizar o lucro total, dadas as limitações de recursos como mão de obra, tempo de máquina e matéria-prima.
- Problema de Transporte: Procura definir o plano de distribuição de bens de várias origens (fábricas) para vários destinos (mercados) que minimize o custo total de transporte, satisfazendo tanto a capacidade das origens quanto a demanda dos destinos.
- Problema da Designação: É um caso especial do problema de transporte, onde o objetivo é atribuir um conjunto de tarefas a um conjunto de agentes (pessoas, máquinas, veículos) de forma a otimizar um critério, como o tempo total ou o custo.

  Setores de Aplicação A PL é amplamente utilizada em diversos setores da economia. Na indústria, é aplicada em manufatura, planejamento da produção e mineração. No setor de finanças, auxilia na análise de investimentos e na montagem de portfólios. Em logística, otimiza rotas de transporte e gerenciamento de cadeias de suprimentos. No agronegócio, é usada para formulação de rações e planejamento de safras. No varejo, pode otimizar a gestão de compras em supermercados para maximizar o lucro com base no capital e no espaço de armazenamento disponíveis.

VI. Como Usar a Programação Linear? Metodologia de Formulação e Resolução

A aplicação bem-sucedida da Programação Linear segue um processo estruturado e metódico. Este processo se inicia com a tradução de um problema gerencial ou operacional em um modelo matemático formal e culmina em sua resolução por meio de métodos gráficos, algébricos ou, mais comumente, computacionais, seguida de uma análise dos resultados.

A formulação do modelo é, sem dúvida, a etapa mais crítica e intelectualmente exigente do processo. É aqui que a abstração encontra a realidade; um erro na tradução do problema gerencial para a linguagem matemática comprometerá toda a análise subsequente. Utilizaremos o exemplo da indústria de móveis Fresão para ilustrar como realizar essa tradução com rigor e precisão.

Passo 1: Definir as Variáveis de Decisão O primeiro passo é identificar as quantidades desconhecidas que se deseja determinar para resolver o problema. Exemplo Fresão: A empresa quer saber quantos conjuntos de cada tipo deve produzir. As variáveis de decisão são: X = número de unidades do conjunto Beatrice a serem produzidas Y = número de unidades do conjunto Anamaria a serem produzidas. Passo 2: Formular a Função Objetivo Em seguida, constrói-se a expressão matemática linear que representa a meta a ser otimizada (maximizada ou minimizada). Exemplo Fresão: O objetivo é maximizar o lucro total. O lucro unitário é de R$4.000 para Beatrice e R$5.000 para Anamaria. A função objetivo é: Maximizar Lucro (L) = 4000X + 5000Y Passo 3: Determinar as Restrições Nesta etapa, as limitações de recursos (tempo, matéria-prima, demanda, etc.) são traduzidas em um conjunto de inequações ou equações lineares. Exemplo Fresão: Restrição de Preparação: Cada Beatrice (X) requer 5 horas e cada Anamaria (Y) requer 10 horas. O total disponível é de 100 horas. 5X + 10Y ¡= 100 Restrição de Acabamento: Cada Beatrice (X) requer 9 horas e cada Anamaria (Y) requer 6 horas. O total disponível é de 108 horas. 9X + 6Y ¡= 108 Restrição de Demanda: A demanda semanal para o conjunto Anamaria (Y) não ultrapassa 8 unidades. Y ¡= 8. Passo 4: Estabelecer a Condição de Não Negatividade Por fim, adiciona-se a restrição de que as variáveis de decisão não podem assumir valores negativos, pois não faria sentido produzir uma quantidade negativa de móveis. Exemplo Fresão: X ¿= 0 e Y ¿= 0

A. *Métodos de Resolução*

Uma vez formulado, o modelo de PL pode ser resolvido por diferentes métodos para encontrar a solução ótima.

- Método Gráfico: Este método é altamente visual e intuitivo, mas sua aplicação é limitada a problemas com apenas duas variáveis de decisão. Consiste em desenhar as restrições em um plano cartesiano para identificar a região de soluções viáveis (a área que satisfaz todas as restrições simultaneamente). A solução ótima é então encontrada no ponto extremo (vértice) dessa região que otimiza o valor da função objetivo.
- Desenvolvido por George Dantzig, é o algoritmo mais importante e amplamente utilizado para resolver problemas de PL de qualquer dimensão. Trata-se de um procedimento iterativo que se move de forma sistemática entre os pontos extremos (vértices) da região viável, buscando a cada passo uma solução melhor, até que a solução ótima seja encontrada e verificada.
- Método Computacional: Na prática, problemas empresariais reais podem envolver milhares de variáveis e restrições — como otimizar a logística de uma rede com centenas de armazéns e milhares de destinos. A resolução manual ou gráfica é impossível, tornando o uso de softwares especializados não apenas uma conveniência, mas uma necessidade absoluta. Ferramentas como LINGO, Lindo 6.1 e o suplemento Solver do Microsoft Excel são exemplos de aplicativos que implementam o algoritmo Simplex e outras técnicas avançadas para encontrar a solução ótima de forma rápida e confiável.

A obtenção da solução ótima não é o fim do processo. Uma etapa crucial é a análise de pós-otimização, que avalia a robustez da solução encontrada. A principal técnica utilizada é a Análise de Sensibilidade, que examina como a solução ótima e o valor da função objetivo são afetados por mudanças nos parâmetros do modelo (como custos unitários, preços de venda ou disponibilidade de recursos). Essa análise confere solidez à tomada de decisão, pois revela até que ponto os dados de entrada podem variar sem que a solução ótima recomendada seja invalidada, oferecendo ao gestor uma compreensão mais profunda das implicações de sua escolha.

VII. Definições e Parâmetros

O solo apresenta níveis atuais de nutrientes:

$$N_{atual},\ P_{atual},\ K_{atual}$$

Cada cultura c possui necessidades ideais de nutrientes por hectare:

$$N_c^{ideal},\ P_c^{ideal},\ K_c^{ideal}$$

Os preços dos fertilizantes por quilograma são:

$$C_N,\ C_P,\ C_K$$

A área total disponível é dada por:

$$A_{total}$$

Cada cultura apresenta preço do saco e produtividade por hectare:

$$P_c^{saco}, \quad S_c^{ha}$$

VIII. Cálculo da Deficiência Nutricional

A deficiência de um nutriente é dada por:

$$D_{c,i} = \max(0,\ i_c^{ideal} - i_{atual}) \qquad i \in \{N, P, K\}$$

Explicitamente:

$$D_{c,N} = \max(0, N_c^{ideal} - N_{atual})$$

$$D_{c,P} = \max(0, P_c^{ideal} - P_{atual})$$

$$D_{c,K} = \max(0, K_c^{ideal} - K_{atual})$$

IX. Custo de Fertilização por Hectare

O custo de fertilização por hectare da cultura c é:

$$CustoFert_c = D_{c,N} \cdot C_N + D_{c,P} \cdot C_P + D_{c,K} \cdot C_K \tag{1}$$

X. Receita por Hectare

A receita agrícola por hectare para a cultura c é dada por:

$$R_c = P_c^{saco} \cdot S_c^{ha}$$

XI. Lucro Líquido por Hectare

$$L_c = R_c - CustoFert_c$$

Este é o coeficiente utilizado na Função Objetivo da Programação Linear.

XII. Variáveis de Decisão

São definidas as seguintes variáveis:

$$x_{arroz},\ x_{feijao},\ x_{milho}$$

Cada uma representa a área (em hectares) alocada para a respectiva cultura.

Condição mínima obrigatória:

$$x_c \geq 0.5 \qquad \forall c \in \{arroz, feijao, milho\}$$

XIII. Formulação da Função Objetivo

A função objetivo visa:

$$\text{Maximizar } Z = L_{arroz} \cdot x_{arroz} + L_{feijao} \cdot x_{feijao} + L_{milho} \cdot x_{milho}$$

XIV. Restrições do Problema

A. Restrição de Área Total

$$x_{arroz} + x_{feijao} + x_{milho} \leq A_{total}$$

B. Restrições de Não-Negatividade

$$x_c \geq 0.5, \quad c \in \{arroz, feijao, milho\}$$

XV. Cálculo Final Após a Otimização

A. Receita Total

$$ReceitaTotal = R_{arroz} \cdot x_{arroz} + R_{feijao} \cdot x_{feijao} + R_{milho} \cdot x_{milho}$$

B. Custo Total de Fertilizantes

$$CustoTotal = CustoFert_{arroz} \cdot x_{arroz} + CustoFert_{feijao} \cdot x_{feijao} + Cust$$

C. Lucro Total

$$LucroTotal = Z$$

XVI. Resultados

A produção agrícola moderna exige decisões estratégicas que maximizem o lucro, reduzam custos e utilizem de forma eficiente os recursos do solo. A Programação Linear (PL) é uma técnica apropriada para esse tipo de problema, pois permite modelar limites de nutrientes, custos de fertilizantes, restrições de área e metas de produção. Neste estudo, desenvolve-se um modelo matemático implementado em Python com o objetivo de determinar a alocação ótima de hectares entre diferentes culturas, considerando níveis atuais de nutrientes do solo, necessidades nutricionais das culturas e preços dos fertilizantes. Cada cultura exige quantidades específicas de Nitrogênio (N), Fósforo (P) e Potássio (K). O solo possui níveis iniciais desses nutrientes, e o produtor deve compensar a deficiência por meio de fertilizantes. Seu objetivo é maximizar o lucro.

O modelo de PL define a alocação ideal de hectares entre arroz, feijão e milho, considerando produtividade, preços de venda e necessidades de nutrientes do solo. Ele prioriza a cultura com maior retorno econômico nas condições atuais, mantendo apenas o mínimo necessário das demais. Esse cenário, porém, é sensível: qualquer alteração nos preços dos fertilizantes, na produtividade ou nos valores de mercado das culturas pode modificar a solução ótima.

CONCLUSÃO

Em suma, a Programação Linear não é apenas uma ferramenta matemática, mas uma filosofia de gestão orientada por dados. Seu domínio transcende a simples solução de problemas, representando um pilar fundamental para a liderança estratégica e a inovação contínua no competitivo cenário global. Ao fornecer um caminho estruturado para encontrar a melhor solução possível entre inúmeras alternativas, a PL eleva a tomada de decisão de um processo intuitivo para um exercício analítico, permitindo que gestores em diversas áreas transformem desafios complexos de alocação de recursos em vantagens competitivas mensuráveis.

REFERENCES

[1] G. Eason, B. Noble, and I. N. Sneddon, “On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions,” Phil. Trans. Roy. Soc. London, vol. A247, pp. 529–551, April 1955.

[2] J. Clerk Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, 3rd ed., vol. 2. Oxford: Clarendon, 1892, pp.68–73.

[3] I. S. Jacobs and C. P. Bean, “Fine particles, thin films and exchange anisotropy,” in Magnetism, vol. III, G. T. Rado and H. Suhl, Eds. New York: Academic, 1963, pp. 271–350.

[4] K. Elissa, “Title of paper if known,” unpublished.

[5] R. Nicole, “Title of paper with only first word capitalized,” J. Name Stand. Abbrev., in press.

[6] Y. Yorozu, M. Hirano, K. Oka, and Y. Tagawa, “Electron spectroscopy studies on magneto-optical media and plastic substrate interface,” IEEE Transl. J. Magn. Japan, vol. 2, pp. 740–741, August 1987 [Digests 9th Annual Conf. Magnetics Japan, p. 301, 1982].

[7] M. Young, The Technical Writer’s Handbook. Mill Valley, CA: University Science, 1989.