Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Prof. Rômulo

Resolução de Recorrências

Foz do Iguaçu

Janeiro 2010

Recorrências

Uma recorrência é uma equação ou inequação matemática definida em termos dela mesma (de maneira recursiva) e de seus valores iniciais.

Recorrências são bastantes úteis no estudo de algoritmos recursivos porque podem ser usadas para expressar sua complexidade de tempo.

Exemplo de recorrência: $f(n) = \begin{cases} 1 \; se \; n = 0 \; ou \; n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) \; se \; n > 1 \end{cases}$.

Assim, por exemplo para calcular $f(3)$, precisa-se calcular $f(2)$ e $f(1)$. Para calcular $f(2)$ precisa-se calcular $f(1)$ e $f(0)$, cujo valor é 1 pela fórmula. Assim:

$$f(3) = f(2) + f(1) = f(2) + 1 = f(1) + f(0) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

Será possível obter uma fórmula para calcular $f(n)$ diretamente sem ser necessário calcular $f(n-1)$ e $f(n-2)$? Quando isso é feito, dize-se que foi obtida uma fórmula fechada para a recorrência, ou que a recorrência foi resolvida.

Cada recorrência pode ser resolvida por um ou mais métodos, dependendo de como são seus termos.

A seguir os principais métodos para resolução de recorrências.

1. **Método da Iteração:**
Consiste em expandir (iterar) a recorrência e expressá-la como um somatório em termos de n e das condições iniciais.
Ex. a)
$T(n) = \begin{cases} 0 \quad se \; n = 0 \\ T(n-1) + n \end{cases}$
Expandindo a recorrência temos:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + n \\ &= T(n-1-1) + (n-1) + n = T(n-2) + (n-1) + n \\ &= T(n-2-1) + (n-2) + (n-1) + n = T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\ &= T(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1}(n-i) \end{aligned}$$
fazendo $k = n$, temos:
$$T(n) = T(0) + \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)$$
Pela fórmula de recorrência $T(0) = 0$. E a somatória anterior corresponde à soma de uma PA (Progressão Aritmética) de razão 1 em que o termo inicial é n , e o termo final é 1. Assim $T(n) = \frac{(n+1)n}{2}$.
Conferindo:
$T(5) = \frac{(5+1)5}{2} = 15.$

Usando a recorrência, temos $T(5) = T(4) + 5 = T(3) + 4 + 5 = T(2) + 3 + 4 + 5 = T(1) + 2 + 3 + 4 + 5 = T(0) + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Ex. b)

$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$

Observe que essa recorrência não indica valor inicial. Isto significa que podemos estabelecer o valor inicial de acordo com o nosso interesse. Além disso, para esse tipo de recorrência, em geral está-se mais interessado em obter um limite assintótico que propriamente uma fórmula exata.

$T(n) = T(n/2) + 1$

$= T(n/4) + 1 + 1 = T(n/4) + 2$

$= T(n/8) + 1 + 1 + 1$

$= \cdots$

$= T(n/2^k) + k$

Assumindo n que é potência de 2 e que a iteração segue até $T(1)$, tem-se: $n = 2^k$. E logo $k = \log_2 n$.

Considerando $T(1) = 0$, teremos:

$T(n) = T\left(n/2^{\log_2 n}\right) + \log_2 n = T(n/n) + \log_2 n = T(1) + \log_2 n = 0 + \log_2 n$

$T(n) = \log_2 n$

Ex. c)

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

Resolvendo:

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

$= n + 3\left[\, 3T\left(\frac{n}{16}\right) + \frac{n}{4}\right]$

$= n + \frac{3n}{4} + 3^2 T\left(\frac{n}{4^2}\right)$

$= n + \frac{3n}{4} + 3^2\left[3T\left(\frac{n}{4^3}\right) + \frac{n}{16}\right]$

$= n + \frac{3n}{4} + \frac{3^2 n}{4^2} + 3^3 T\left(\frac{n}{4^3}\right)$

A iteração segue até que $T\left(\frac{n}{4^i}\right) = T(1)$.

Se $\frac{n}{4^i} = 1$, tem-se que $n = 4^i$. Logo $i = \log_4 n$.

Portanto tem-se que:

$$T(n) = n + \left({}^{3}/_{4}\right)n + \left({}^{3}/_{4}\right)^2 n + \cdots + 3^i \Theta(1)$$

Isto é:

$$T(n) \leq n\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{i} + 3^{\log_4 n}\Theta(1)$$

A somatória corresponde à soma da série geométrica infinita (PG) de razão $3/4$ e termo inicial 1. Assim, $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{i} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$.

Logo $T(n) \leq 4n + 3^{\log_4 n}\Theta(1)$. Aplicando propriedades de logaritmos tem-se: $T(n) \leq 4n + n^{\log_4 3}\Theta(1)$. Como $\log_4 3 < 1$, então $T(n) \in O(n)$.

2. **Método da Substituição**:
Este método consiste em propor ("chutar") uma fórmula para a recorrência e em seguida demonstrá-la que está correta. Sua utilização requer bom "*feeling*" matemático.

Ex. a)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & se\ n = 1 \\ T(n-1) + 3n + 2 & para\ n \geq 2 \end{cases}$$

Chute: $T(n) = \frac{3n^2}{2} + \frac{7n}{2} - 4$

Demontração por indução:

- Caso base: $n = 1$. $T(1) = \frac{3.1^2}{2} + \frac{7.1}{2} - 4 = 5 - 4 = 1$. (ok!)
- Passo da indução:
  Hipótese de Indução (HI): suponha que vale para $n-1$, isto é:
  $T(n-1) = \frac{3(n-1)^2}{2} + \frac{7(n-1)}{2} - 4$.
  Temos que:
  $T(n) = T(n-1) + 3n + 2$. Usando HI, temos:
  $$T(n) = \frac{3(n-1)^2}{2} + \frac{7(n-1)}{2} - 4 + 3n + 2 = \frac{3n^2}{2} - 3n + \frac{3}{2} + \frac{7n}{2} - \frac{7}{2} - 4 + 3n + 2$$
  $= \frac{3n^2}{2} + \frac{7n}{2} - 4$, como queríamos demonstrar.

Ex. b)

$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

Chute: $O(nlgn)$.

Demonstração: usando a definição da notação assintótica O, tem-se que provar que:
$T(n) \leq c.n\ lg\ n$ para algum $c > 0$.

Usando como hipótese a definição da notação O , temos que:
$T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c\lfloor n/2 \rfloor lg\lfloor n/2 \rfloor$.

Substituindo em $T(n)$ tem-se:

$T(n) \leq 2c\lfloor n/2 \rfloor lg\lfloor n/2 \rfloor + n$

$\leq cn \lg n/2 + n$

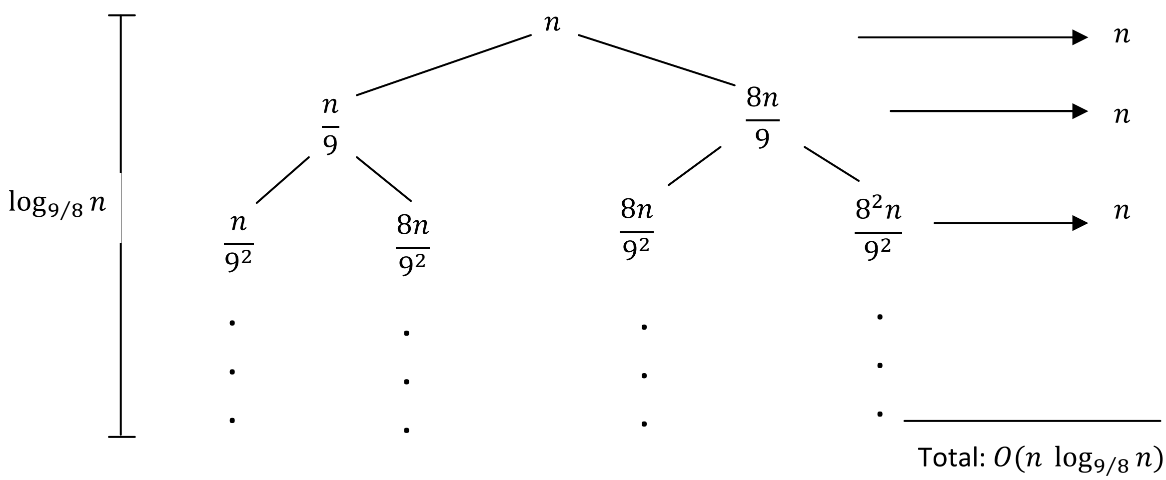
$\leq cn \lg n - cn \lg 2 + n$

$\leq cn \lg n - cn + n$

$\leq cn \lg n$ desde que $c \geq 1$.

Logo $T(n) \in O(nlgn)$.

3. **Método da Árvore de Recorrência**:
   Este método permite visualizar melhor os termos da recorrência à medida que eles são expandidos.
   Ex.:
   $T(n) = T(n/9) + T(8n/9) + n \quad para\, n \geq 1$
   Para a recorrência acima, por conveniência deve-se supor que n seja potência de 9.



   Obs.: quando se chega a uma solução que consiste em um limite assintótico logaritmico não interessa a base do logaritmo, pois se uma função $f(n) \in O(\log_3 n)$ (base 3 por exemplo) então $f(n) \in O(\lg n)$. Logo para a recorrência, pode-se escrever $T(n) \in O(n \lg n)$.

4. **Método Master (ou Teorema CLRS)**:
   Este método permite estabelecer limites assintóticos para recorrências que atendam a determinadas condições e tenham a forma:

   $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ onde $a \geq 1$ e $b \geq 1$ e n/b pode ser $\lfloor n/b \rfloor$ ou $\lceil n/b \rceil$.

   Deve-se analisar qual das seguintes situações ocorre:
   4.1 Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para constante $\epsilon > 0$ então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
   4.2 Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$
   4.3 Se $f(n) \in O(n^{\log_b a + \epsilon})$ para algum $\epsilon > 0$, e se $af(n/b) \leq cf(n)$para alguma constante $c < 1$ e n suficientemente grande, então $T(n) \in \Theta(f(n))$

   Ex. a)

   $T(n) = 9T(\lfloor n/3 \rfloor) + n$

   Para essa recorrência tem-se que:
   $a = 9$
   $b = 3$
   $f(n) = n$
   $\log_b a = \log_3 9 = 2$ e $f(n) \in O\left(n^{\log_3 9 - \varepsilon}\right)$ onde $\varepsilon = 1$. Portanto $T(n) \in \Theta(n^2)$.

Ex. b)

$T(n) = T(2n/3) + 1$
$a = 1$
$b = 3/2$
$f(n) = 1$
$\log_b a = \log_{3/2} 1 = 0$ e $f(n) \in O(n^0) = O(1)$. Portanto $T(n) \in \Theta(\lg \mathrm{n})$.

Ex. c)

$T(n) = 2T(n/2) + n^2$
$a = 2$
$b = 2$
$f(n) = n^2$
$\log_b a = \log_2 2 = 1$ e $f(n) \in \Omega(n^{1+\varepsilon})$ onde $\varepsilon = 1$. Além disso:
$af(n/b) = 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 \leq c.f(n) = c.n^2$
$\frac{n^2}{2} \leq c.n^2$ para $c = \frac{1}{2} < 1$. Logo $T(n) \in \Theta(n^2)$.

Observação: a partir do teorema mestre pode-se demonstrar os seguintes casos particulares:

Para $T(n) = aT(n/b) + cn^k$ onde $a > 1$, $b \geq 2$ e $c, k \in \mathbb{R}^+$, tem-se:

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta\left(n^{\log_b a}\right) & se\ a > b^k \\ \Theta(n^k \lg n) & se\ a = b^k \\ \Theta(n^k) & se\ a < b^k \end{cases}$$

5. **Método do Polinômio Característico**:
Este método é indicado para resolver recorrências da forma:
$\sum_{i=0}^{k} c_i T_{n-i} = 0$
em que c_ié constante real tal que $c_0, c_k \neq 0$. Esse tipo de recorrência é conhecida como linear homogênea. Linear porque todos os termos recursivos são em função de n, não existindo termos como n^2ou $\lg n$. Homogênea porque a soma dos termos é igual a zero.
Para que a recorrência possa ser resolvida devem ser fornecidos valores para os termos $T_0, T_1, \dots, T_{k-1}$.

Ex. a)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & se\ n = 0 \\ 1 & se\ n = 1 \\ T(n-1) - T(n-2) & se\ n > 1 \end{cases}$$

Ex. b)

$$T(n) = \begin{cases} 0 & se\ n = 0 \\ 5 & se\ n = 1 \\ 3T(n-1) + 4T(n-2) & caso\ contrário \end{cases}$$

Dada uma recorrência linear homogênea $\sum_{i=0}^{k} c_i T_{n-i} = 0$, o polinômio característico associado é dado por: $\sum_{i=0}^{k} c_i x^{k-i} = c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \ldots + c_{k-1} x^1 + c_k = 0$.

Para os exemplos anteriores:

a) $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$
   Reescrevendo a recorrência, tem-se: $T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$, cujo polinômio característico é $x^2 - x - 1 = 0$.
b) $T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2)$
   Reescrevendo a recorrência, tem-se: $T(n) - 3T(n-1) - 4T(n-2) = 0$, cujo polinômio característico é $x^2 - 3x - 4 = 0$.

A solução de uma recorrência desse tipo será dada pela combinação linear:

$d_1 r_1^n + d_2 r_2^n + \ldots + d_k r_k^n$ onde $r_1, r_2, \ldots, r_k$ correspondem às raizes **distintas** do polinômio característico e os coeficientes $d_1, d_2, \ldots, d_k$são determinados pelas condições de contorno.

Para o exemplo a): as raízes do polinômio $x^2 - x - 1 = 0$ são $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Logo a solução terá a forma $T(n) = a(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + b(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

Para determinar os valores de a e b, usamos as condições de contorno $T(0) = 1$ e $T(1) = 1$.

Subtituindo:

$T(0) = a + b = 1$

$T(1) = a(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + b(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 = 1$. Resolvendo o sistema linear, obtém-se os valores $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ e $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

Logo $T(n) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n$

Para o exemplo b): as raízes do polinômio $x^2 - 3x - 4 = 0$ são $r_1 = -1$ e $r_2 = 4$.

Logo a solução da recorrência terá a forma $T(n) = a(-1)^n + b4^n$.

Usando as condições de contorno $T(0) = 0$ e $T(1) = 5$, temos:

$$T(0) = a + b = 0$$

$$T(1) = -a + 4b = 1$$

Resolvendo o sistema linear chega-se $a = -1$ e $b = 1$. Logo a solução é $T(n) = 4^n - (-1)^n$.

Observações sobre resolução de recorrências:

- Existem recorrências que não se conhecem métodos de resolução.
- Se o polinômio característico tem raízes com multiplicidade ou a recorrência não é homogênea, o método apresentado aqui não pode ser usado.

Mudança de Variável:

Algumas recorrências podem ser mais facilmente resolvidas utilizando-se do artifício matemático de mudança de variável. O objetivo é obter uma recorrência mais simples de ser resolvida por algum dos métodos anteriores e em seguida usar o resultado para calcular a solução da recorrência original.

Ex.:

$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

Criando variável $m = \lg n$, tem-se que $n = 2^m$. Renomeando $S(m) = T(2^m)$ fica:

$T(2^m) = T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + 1$

$T(2^m) = T\left(\frac{2^m}{2}\right) + 1$

$S(m) = S\left(\frac{m}{2}\right) + 1$. Usando método CLRS, chega-se que $S(m) \in O(\lg m)$.

Como $m = \lg n$ e $S(m) = T(n),$ logo $T(n) \in O(\lg \lg n)$.

Bibliografia e Sites:

Cormen T. H; Leiserson, C.E.; Rivest, Ronald L. Introduction do Algorithms, MIT Press, 1997.

http://www.ime.usp.br/~pf/mac5711/aulas/recorrencias.html