Notações Assintóticas

Rômulo César Silva

Unioeste

Dezembro de 2019

Sumário

Notações Assintóticas

É uma forma de descrever o comportamento de funções, mais especificamente seu crescimento.

Útil para efetuar comparações entre medidas de complexidade de algoritmos diferentes para um mesmo problema.

Veremos aqui 3 notações:

- notação O ("*big*" 0)
- notação Ω (ômega)
- notação Θ (theta)

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Notação O

Seja $f(n)$ função não-negativa para todos inteiros.

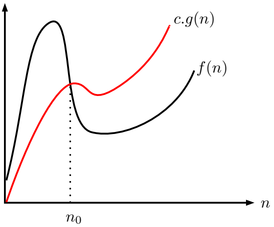
$f(n)$ é $O(g(n))$, denota-se $f(n) \in O(g(n))$, se existirem inteiro n_0 e constante $c > 0$ tal que para todo inteiro $n \geq n_0$,

$$f(n) \leq c.g(n)$$

Assim é estabelecido um **limite superior** para a taxa de crescimento de f em relação ao crescimento de n. Ou seja, $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$.

Notação O

O gráfico abaixo apresenta esquematicamente essa situação:



para valores maiores que n_0, a função g multiplicada por uma constante $c > 0$ sempre é maior que a função f.

Por exemplo: $f(n) = 7n - 2$ e $g(n) = n$.
Escolhendo $c = 7$ e $n_0 = 1$, verifica-se que $f(n) \leq 7n$ para $\forall n \geq n_0$.
Logo, pode-se dizer que $f(n) \in O(g(n))$.

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Notação Ω

Seja $f(n)$ função não-negativa para todos inteiros.

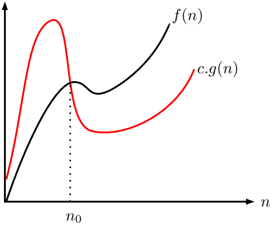
$f(n)$ é $\Omega(g(n))$, denota-se $f(n) \in \Omega(g(n))$, se existirem inteiro n_0 e constante $c > 0$ tal que para todo inteiro $n \geq n_0$,

$$0 \leq c.g(n) \leq f(n)$$

Assim é estabelecido um **limite inferior** para a taxa de crescimento de f em relação ao crescimento de n. Ou seja, $f(n)$ cresce no mínimo tão rapidamente quanto $g(n)$.

Notação Ω

O gráfico abaixo apresenta esquematicamente essa situação:



para valores maiores que n_0, a função g multiplicada por uma constante $c > 0$ sempre é menor que a função f.

Por exemplo: $f(n) = 7n - 2$ e $g(n) = n$.
Escolhendo $c = 5$ e $n_0 = 1$, verifica-se que $5n \leq f(n)$ para $\forall n \geq n_0$.
Logo, pode-se dizer que $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Notação Θ

Seja $f(n)$ função não-negativa para todos inteiros.

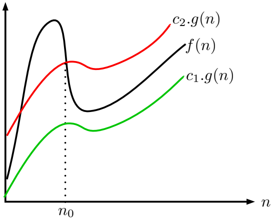
$f(n)$ é $\Theta(g(n))$, denota-se $f(n) \in \Theta(g(n))$, se existirem inteiro n_0 e constantes $c1$ e $c_2 > 0$ tal que para todo inteiro $n \geq n_0$,

$0 \leq c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)$

Assim é estabelecido um **limite assintótico exato** para a taxa de crescimento de f em relação ao crescimento de n.

Notação Θ

O gráfico abaixo apresenta esquematicamente essa situação:



para valores maiores que n_0, a função g multiplicada por uma constante $c_1 > 0$ sempre é menor que a função f e ao mesmo tempo multiplicada por uma constante $c_2 > 0$ sempre é maior que a função f

Por exemplo: $f(n) = 7n - 2$ e $g(n) = n$.

Escolhendo $c_1 = 5$, $c_2 = 7$ e $n_0 = 1$, verifica-se que $0 \leq 5n \leq f(n) \leq 7n$ para $\forall n \geq n_0$.

Logo, pode-se dizer que $f(n) \in \Theta(g(n))$.

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Propriedades das notações assintóticas

- **Transitiva**
  - Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$ então $f(n) \in O(h(n))$
  - Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$ então $f(n) \in \Omega(h(n))$
  - Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$ então $f(n) \in \Theta(h(n))$
- **Reflexiva**
  - $f(n) \in O(f(n))$
  - $f(n) \in \Omega(f(n))$
  - $f(n) \in \Theta(f(n))$
- **Simétrica**:
  Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ se e somente se $g(n) \in \Theta(f(n))$
- **Simetria Transposta**:
  $f(n) \in O(g(n))$ se e somente se $g(n) \in \Omega(f(n))$

Propriedades das notações assintóticas

- Se $f_1(n) \in O(g_1(n))$ e $f_2(n) \in O(g_2(n))$ então:
  - $f_1(n) + f_2(n) \in O(max(g_1(n), g_2(n)))$
  - $f_1(n).f_2(n) \in O(g_1(n).g_2(n))$
- $O(k.f(n)) = O(f(n))$ para k constante
- Se $f(n)$ é polinômio de grau k então $f(n) \in O(n^k)$

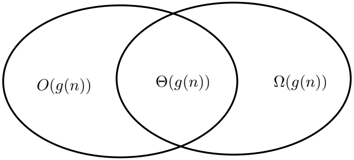
Observações

As notações assintóticas na prática permitem a comparação de conjuntos ("famílias") de funções. Assim, as famílias de funções mais comuns possuem nomes conforme abaixo:

- **Constante**: $O(1)$
- **Logaritmica**: $O(lg\ n)$
- **Linear**: $O(n)$
- **Quadrática**: $O(n^2)$
- **Cúbica**: $O(n^3)$
- **Polinomial**: $O(n^k)$ para $k \geq 1$
- **Exponencial**: $O(a^n)$ para $a > 1$

Observações

A notação Θ indica que a função é ao mesmo tempo O e Ω da outra função.



Observações

Pode-se fazer uma analogia entre as notações assintóticas e a comparação entre número reais da seguinte maneira: sendo a um número real representando $f(n)$ e b outro número real representa $g(n)$:

- $f(n) \in O(g(n))$ significa $a \leq b$
- $f(n) \in \Omega(g(n))$ significa $a \geq b$
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ significa $a = b$

Dentro dessa analogia, pode-se usar a notação O para comparar as famílias de funções:

$O(1) < O(lg\ \ n) < O(n) < O(n\, lg\ \ n) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n)$

Bibliografia I

[Cormen 1997] Cormen,T.; Leiserson, C.; Rivest, R.
Introduction to Algorithms. McGrawHill, New York, 1997.