Somatórios

Rômulo César Silva

Unioeste

Dezembro de 2019

Sumário

Somatórios

Os somatórios são uma notação prática para escrever somas de muitas parcelas.
São bastante úteis na Ciência da Computação para expressar complexidade de algoritmos.
Veremos aqui as propriedades comuns que podem ser usadas em diferentes contextos para o cálculo de somatórios.

Notação básica: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Propriedades de somatórios

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$ e a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ para $i = m, m+1, ..., n$ e c uma constante real.

- **Propriedade homogênea**: $\sum_{i=m}^{n} (c.a_i) = c \sum_{i=m}^{n} a_i$
- **Propriedade Aditiva**: $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$
- **Propriedade Telescópica**: $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$
- $\sum_{k=m}^{n} c = c(n - m + 1)$

Propriedades de somatórios

- **Progressão Aritmética (PA)**: sequência de termos tal que o termo seguinte é igual ao termo anterior somado a uma razão fixa r. O termo geral pode ser expresso por $a_n = a_1 + (n-1).r$. A soma da PA é dada $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$
- **Progressão Geométrica (PG)**: sequência de termos tal que o termo seguinte é igual ao termo anterior multiplicado por uma razão fixa q. O termo geral pode ser expresso por $a_n = a_1.q^{n-1}$.
  - A soma de PG finita com razão $q > 0$: $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$
  - A soma de PG infinita com razão $-1 < q < 1$: $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$

Propriedades de somatórios

Algumas somas comuns:

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} ka^k = \frac{a-na^n+(n-1)a^{n+1}}{(1-a)^2}$ supondo $a \neq 1$

Propriedades de somatórios

Uma técnica útil na resolução de vários somátorios é o uso do operador diferença (Δ) definido abaixo.
$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta f(k) =$$
$$= (f(n+1) - f(n)) + (f(n) - f(n-1)) + ... + (f(2) - f(1))$$
$$= f(n+1) - f(1)$$

Por exemplo, suponha que se deseja calcular $\sum_{k=1}^{n} kk!$

Considere $f(k) = k!$, assim:
$\Delta f(k) = (k+1)! - k! = (k+1)k! - k! = K!(K+1-1) = kk!$

Propriedades de somatórios

Logo $\sum_{k=1}^{n} \Delta f(k) = \sum_{k=1}^{n} kk!$

$= f(n+1) - f(1)$

$= (n+1)! - 1$

Observações:

- a função f escolhida deve ser tal que $\Delta f(k)$ seja igual ao termo do somatório que se deseja calcular
- a função f deve ser contínua no intervalo do somatório

Bibliografia I

[Cormen 1997] Cormen,T.; Leiserson, C.; Rivest, R.
Introduction to Algorithms. McGrawHill, New York, 1997.

[CS 2020]
Theoretical Computer Science Cheat Sheet. Disponível em https://www.tug.org/texshowcase/cheat.pdf. Acesso em 04/01/2020.