# Teoria dos Grafos

Rômulo César Silva

Unioeste

Agosto de 2021

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

# Sumário

# Definição

## Grafo

Um grafo é um sistema $G = (V, E)$ tal que:

- $V$ é conjunto de vértices (ou nós)
- $E$ é conjunto de arestas (ou arcos) tal que $E = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$

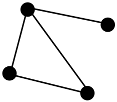
- se $u = v$, a aresta é $(u, v)$ é chamada de **laço**
- se $(u, v)$ é considerada diferente de $(v, u)$ então $G$ é dito **grafo orientado**
- se $(u, v)$ é considerada a mesma aresta que $(v, u)$ então $G$ é dito **grafo não-orientado**

# Conceitos Básicos e Terminologia

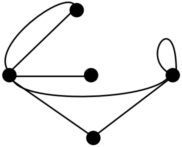
- se existem arestas múltiplas entre 2 ou mais vértices ou ainda laços, o grafo é chamado **multigrafo**
- se não existem arestas múltiplas e nem laços, o grafo é dito **grafo simples**
- $e = (u, v)$ uma aresta de $E$:
  - $e$ é incidente aos vértices $u$ e $v$
  - $u$ e $v$ são os vértices (nós) terminais de $e$
  - $e$ conecta (liga) os vértices $u$ e $v$
  - $u$ e $v$ são ditos adjacentes

# Conceitos Básicos e Terminologia

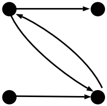
- $G_1$ é grafo simples não-orientado
- $G_2$ é multigrafo não-orientado
- $G_3$ é grafo orientado



$G_1$



$G_2$



$G_3$

# Conceitos Básicos e Terminologia

Exemplos de aplicação:

- **mapa rodoviário**: nós representam cidades e arestas representam rodovias ligando as cidades. No caso se existem mais de uma rodovia ligando o mesmo par de cidades, é um multigrafo
- **relações de amizade**: vértices são pessoas e arestas são a relação *conhece*. Assim uma pessoa $p_1$ conhece a pessoa $p_2$, existe aresta $(p_1, p_2)$, sendo grafo simples não-orientado se assume que $p_1$ conhece $p_2$ implica que $p_2$ conhece $p_1$
- **relações de seguimento em redes sociais**: vértices são pessoas e arestas são a relação *segue*. Assim uma pessoa $p_1$ segue a pessoa $p_2$ na rede social, existe aresta $(p_1, p_2)$, sendo grafo orientado se assume que $p_1$ segue $p_2$ não implica necessariamente que $p_2$ segue $p_1$

# Conceitos Básicos

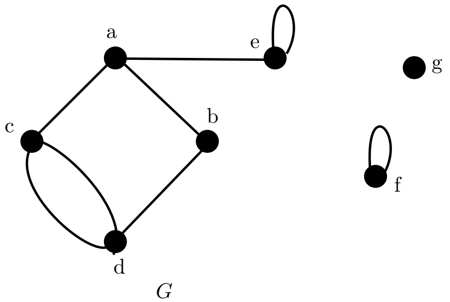
## Grau de vértice

Seja $G = (V, E)$ grafo não-orientado. Seja $v \in V$. O grau do vértice $v$, denotado por $d_G(v)$, é o número de arestas incidentes a $v$.

- um laço é contado como 2 incidências
- um vértice $v$ é *isolado* se $d_G(v) = 0$

**Teorema**: $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$

# Conceitos Básicos

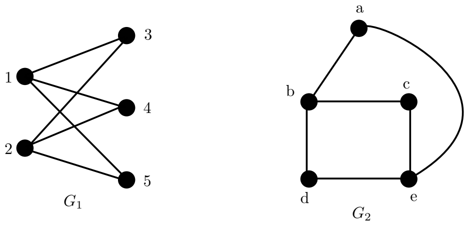



- $d_G(a) = 3$, $d_G(b) = 2$, $d_G(c) = 3$, $d_G(d) = 3$, $d_G(e) = 3$, $d_G(f) = 2$, $d_G(g) = 0$
- $f$ não é vértice isolado, pois $d_G(f) = 2$
- $g$ é vértice isolado, pois $d_G(g) = 0$

# Isomorfismo

## Isomorfismo

Dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ são **isomorfos** se são iguais a menos de uma rotulação de vértices. Isto significa que existe uma bijeção $h : V_1 \to V_2$ tal que a aresta $(u, v) \in E_1$ se e somente se a aresta $(h(u), h(v)) \in E_2$.
Notação $G_1 \sim G_2$




$G_1 \sim G_2$: considere a bijeção
$h = \{(1, b), (2, e), (3, c), (4, d), (5, a)\}$

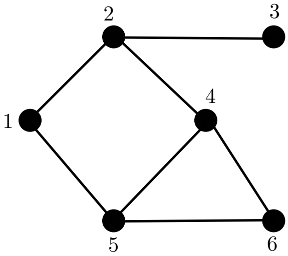
# Conceitos Básicos

As principais formas de representação de grafos são:

- **matriz adjacência**
- **matriz incidência**
- **listas de adjacência**

# Matriz Adjacência

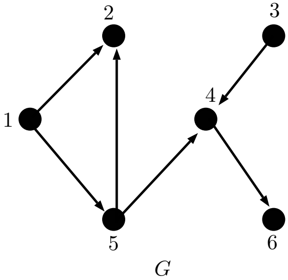
$$A = a_{ij} \text{ é matriz } n \times n, \text{ onde } |V| = n \text{ e } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (i,j) \in E \\ 0 & \text{se} \quad (i,j) \notin E \end{cases}$$




$G$

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Matriz Adjacência




$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Matriz Incidência

$B = b_{ij}$ é matriz $n \times m$, onde $|V| = n$ e $|E| = m$ e:

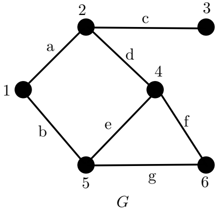
- se o grafo é não-orientado:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad v_i \text{ é incidente à aresta } e_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- se o grafo é orientado:

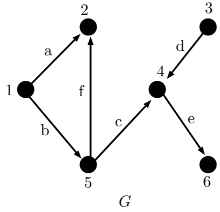
$$b_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } v_i \text{ é oridem da aresta } e_j \\ -1 & \text{se } v_i \text{ é destino da aresta } e_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

# Matriz Incidência




$$B_G = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

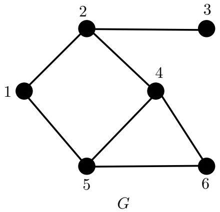
# Matriz Incidência

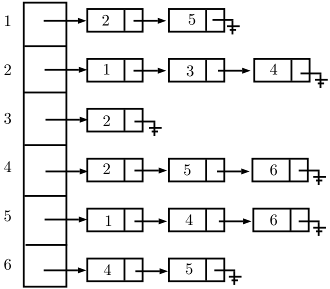



$$B_G = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

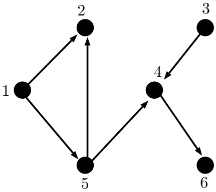
# Listas de Adjacência

Consiste em um vetor de $n$ posições, em que $|V| = n$ e cada elemento $vet[i]$ aponta para a cabeça da lista dos vértices adjacentes ao vértice $i$.

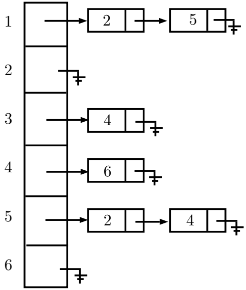


# Listas de Adjacência



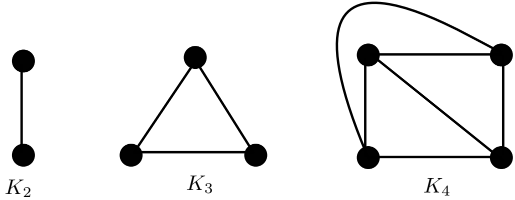

$G$



# Grafo Completo

## Grafo Completo

Um grafo $G$ é **completo** se todos os vértices são adjacentes entre si.
Notação: $K_n$, onde $n$ é o número de vértices.

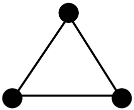


# Ciclo

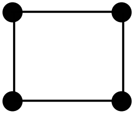
## Ciclo

Um grafo $G = (V, E)$ é um **ciclo** de $n$ vértices, se $n \geq 3$, tal que os vértices podem ser rotulados $v_1, v_2, ..., v_n$ e $E = \{(i, i+1) \mid i = 1, 2, ..., n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$.

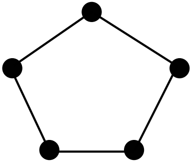
Notação: $C_n$



$C_3$



$C_4$



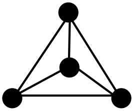
$C_5$

# Roda

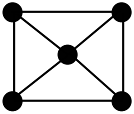
## Roda

Um grafo $G = (V, E)$ é uma **roda** com $n$ vértices, se $|V| - n + 1$ e $V = \{v_0, v_1, v_2, ..., v_n\}$, tal que $E = \{(i, i + 1) \mid i = 1, 2, ..., n - 1\} \cup \{v_n, v_1)\} \cup \{(v_0, v_k) \mid k = 12, ..., n\}$. Ou seja, $\{v_0, v_1, v_2, ..., v_n\}$ formam um ciclo e $v_0$, denominado vértice central liga-se a todos os vértices do ciclo.

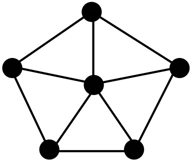
Notação: $W_n$



$W_3$



$W_4$

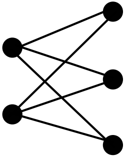


$W_5$

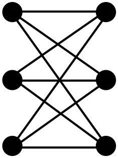
# Grafo Bipartido Completo

## Grafo Bipartido Completo

Um grafo $G = (V, E)$ é dito **bipartido completo** se $G$ é bipartido com partições $X$ e $Y$ tal que $|X| = m$ e $|Y| = n$ e todos os vértices em $X$ são adjacentes aos vértices em $Y$.
Notação: $K_{m,n}$



$K_{2,3}$



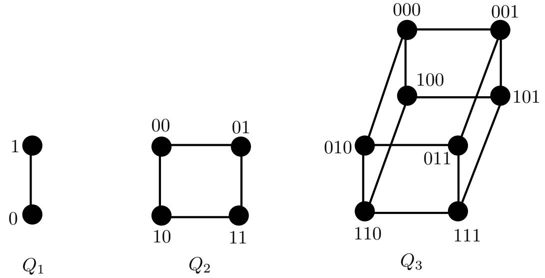
$K_{3,3}$

# N-Cubos

## N-cubo

Seja $n \geq 1$. O **n-cubo**, denotado $Q_n$ é o grafo com $2^n$ vértices tal que:

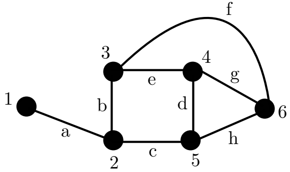
- cada vértice é representado por uma cadeia distinta de *bits*
- existe aresta ligando os vértices *u* e *v* se as cadeias de *bits* que representam *u* e *v* diferem exatamente em uma única posição



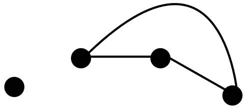
# Subgrafo Induzido

## Subgrafo Induzido

Considere $G = (V, E)$ grafo não-orientado. Seja $V' \subseteq V$ e $V' \neq \emptyset$. O **subgrafo induzido** por $V'$, denotado $G[V']$, é formado por $V'$ e todas as arestas ligando elementos em $V'$ que estão em $E$.




$G$

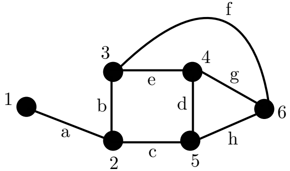


$G[\{1, 3, 4, 6\}]$

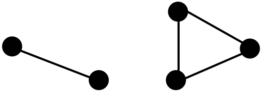
# Subgrafo Induzido por Arestas

## Subgrafo Induzido por Arestas

Considere $G = (V, E)$ grafo não-orientado. Seja $E' \subseteq E$ e $E' \neq \emptyset$. O **subgrafo induzido** por $E'$, denotado $G[E']$, é formado pelo conjunto de vértices que tem extremo em alguma aresta de $E'$.




$G$



$G[\{a, d, g, h\}]$

# Subgrafo Induzido

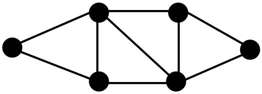
Notações:

- $G - V'$: subgrafo induzido pelos vértices que estão em $V$ e não estão em $V'$
- $G - v$: subgrafo tirando vértice $v$ e arestas incidentes a $v$
- $G - E'$: possuit todos os vértices de $G$, mas apenas as arestas que não estão em $E'$
- $G - e$: $G$ tirando a aresta $e$

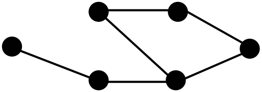
# Subgrafo Gerador

## Subgrafo Gerador

Dado um grafo $G$, um subgrafo gerador é um grafo $H \subseteq G$ tal que $V_H = V_G$.



$G$

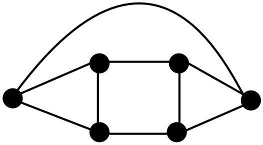


$H \subseteq G$

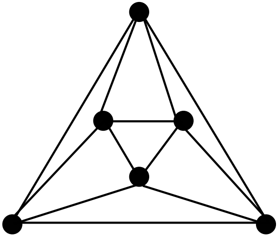
# Grafo Regular

## Grafo Regular

$G$ é dito $k$-regular se todos os vértices têm grau $k$.



3-regular

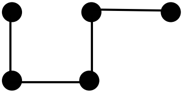


4-regular

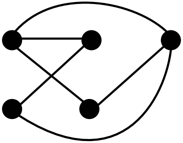
# Grafo Complementar

## Grafo Complementar

Dado grafo $G$ não-orientado simples, o **grafo complementar** de $G$, denotado $\overline{G}$, é o grafo tal que $(u, v) \in E_{\overline{G}}$ se e somente se $(u, v) \notin E_G$.



$G$



$\overline{G}$

# Alerta!

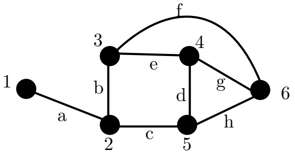
Os conceitos aqui apresentados estão de acordo com a referência de Bondy e Murty.

Dependendo da referência, os conceitos são definidos de maneira distinta dos aqui apresentados.

# Passeio

## Passeio

**Passeio** é uma sequência não nula finita $w = v_0 e_1 v_2 e_2 \ldots e_k v_k$, cujos termos são vértices e arestas alternadamente tal que $1 \leq i \leq k$ onde os extremos de $e_i$ são $v_{i-1}$ e $v_i$




$G$

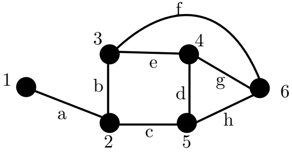
Exemplos:

- $w_1 = 1a2c5d4$
- $w_2 = 3e4g6f3e4d5$

# Trilha

## Trilha

**Trilha** é um passeio com arestas distintas.




$G$

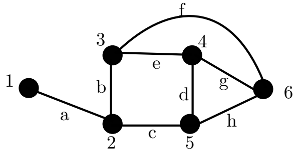
Exemplos:

- $3e4g6h5c2b3f6$
- $1a2b3e4g6$

# Caminho

## Caminho

**Caminho** é um passeio com arestas e vértices distintos.




$G$

Exemplo: $1a2c5d4$

# Conectividade

## Conectividade

Dado um grafo $G$ não-orientado, um vértice $u$ está conectado a um vértice $v$ se existe caminho de $u$ para $v$.
Isto define uma relação de equivalência (simétrica, transitiva e reflexiva):

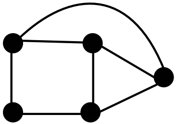
- $u$ está conectado a $u$ (caminho de comprimento zero)
- $u$ está conectado a $v$ implica que $v$ está conectado a $u$ (caminho inverso)
- $u$ está conectado a $v$ e $v$ está conectado a $w$ implicam que $u$ está conectado a $w$ (concatenação de caminhos)

As **componentes conexas** de $G$ correspondem aos subgrafos induzidos pelas classes de equivalência gerada pela relação de conexão.

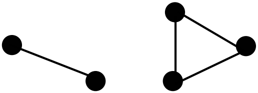
# Grafo conexo

## Grafo conexo

Um grafo $G$ é **conexo** se tem uma única componente conexa, ou seja, se existe caminho entre quaisquer pares de vértices.



grafo conexo

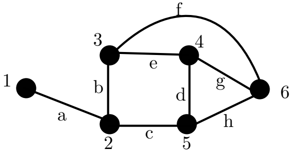


grafo desconexo

# Vértice de corte

## Vértice de corte

Um vértice $v$ de um grafo $G$ é dito ser **vértice de corte** (ou **ponto de articulação**) se ao removermos $v$ e suas arestas incidentes aumenta o número de componentes conexas de $G$.



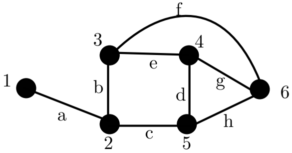

$G$

Exemplo: o vértice 2

# Aresta de corte

## Aresta de corte

Uma aresta $e$ de um grafo $G$ é dito ser **aresta de corte** (ou **ponte**) se ao removermos $e$ aumenta o número de componentes conexas de $G$. Neste caso, sempre aumenta de uma unidade.



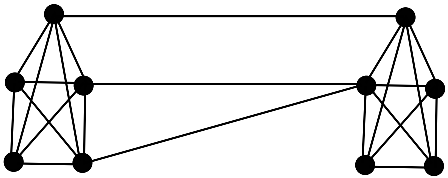

$G$

Exemplo: a aresta $a$

# Grafo k-conexo

## Grafo k-conexo

Um grafo $G$ é dito ser **k-conexo** se é necessário retirar pelo menos $k$ vértices para torná-lo desconexo.



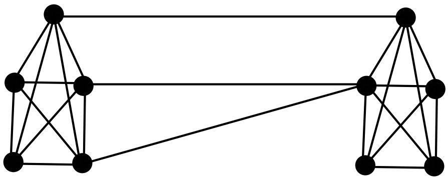
$G$

Exemplo: $G$ é 2-conexo.

# Grafo k-aresta-conexo

## Grafo k-aresta-conexo

Um grafo $G$ é dito ser **k-aresta-conexo** se é necessário retirar pelo menos $k$ arestas para torná-lo desconexo.



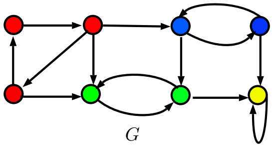
$G$

Exemplo: $G$ é 3-aresta-conexo.

# Conectividade em Grafos orientados

## Componente Fortemente Conexa

Uma **componente fortemente conexa** é um subgrafo induzido maximal em que existe caminho entre quaisquer pares de vértices do subgrafo induzido.



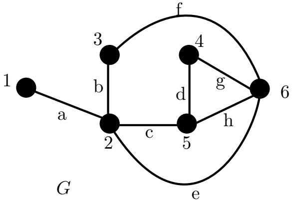
$G$

Exemplo: cada cor em $G$ indica uma componente fortemente conexa

# Conectividade

## Trilha de Euler

Uma **Trilha de Euler** é uma trilha que passa por todas as arestas.

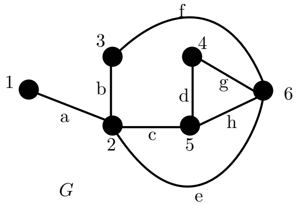



Exemplo: 1a2b3f6g4d5h6e2c5

# Conectividade

## Circuito

Um **circuito** é um passeio fechado que passa por todas as arestas de $G$ pelo menos uma vez.




Exemplo: 1a2b3f6g4d5h6e2c5h6e2a1

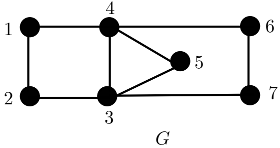
# Conectividade

## Circuito de Euler

Um **circuito de Euler** é um circuito que passa por todas as arestas de $G$ uma única vez (uma trilha de Euler fechada).

## Grafo Euleriano

Um grafo é dito **euleriano** se possui um circuito de Euler.

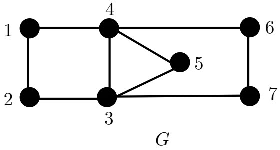



$G$ é euleriano, pois possui o seguinte circuito de Euler:
$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 3 - 7 - 6 - 4 - 1$

# Conectividade

**Teorema**

Um grafo $G$ é **euleriano** se e somente todos os vértices de $G$ têm grau par.



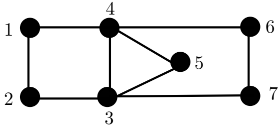
# Conectividade

## Caminho Hamiltoniano

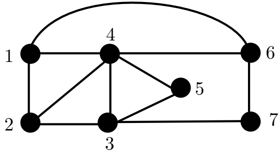
Um caminho é dito ser **hamiltoniano** se passa por todos os vértices.

## Grafo Hamiltoniano

Um grafo $G$ é **hamiltoniano** se possui um ciclo que passa por todos os vértices.




$G_1$



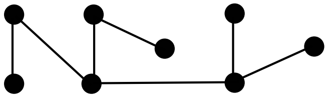

$G_2$

- $G_1$ não é hamiltoniano
- $G_2$ é hamiltoniano, pois possui o ciclo hamiltoniano $4 - 5 - 3 - 7 - 6 - 1 - 2 - 4$

# Árvore

## Árvore

Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico.

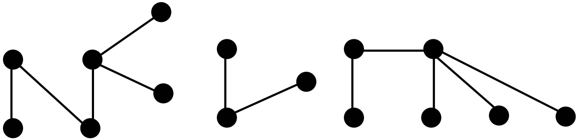


Observação: em qualquer árvore $|E| = |V| - 1$

# Floresta

## Floresta

Uma **floresta** é um grafo acíclico. Suas componentes conexas são árvores.



# Cintura e Diâmetro

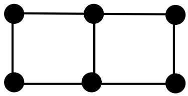
## Cintura

A **cintura** de um grafo é o comprimento do menor ciclo.

Observação: se o grafo é acíclico, então a cintura é infinita.

## Diâmetro

O **diâmetro** de um grafo é a distância máxima entre 2 vértices.

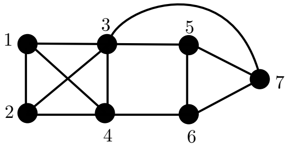


- cintura: 4
- diâmetro: 3

# Clique

## Clique

Dado um grafo $G = (V, E)$, $X \subseteq V$ é uma **clique** em $G$ se o subgrafo induzido $G[X]$ é grafo completo.



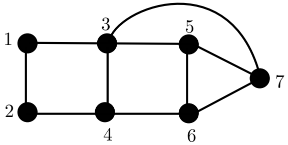

Exemplos:

- $\{1, 2, 3, 4\}$ é uma clique de tamanho 4
- $\{3, 5, 7\}$ é uma clique de tamanho 3

# Conjunto Independente

## Conjunto Independente

Dado um grafo $G = (V, E)$, $X \subseteq V$ é um **conjunto independente** (ou **estável**) em $G$ se e somente se $\forall u, v \in X$ tem que $(u, v) \notin E$.

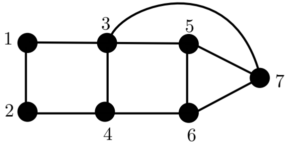



Exemplos: $\{1, 4, 7\}$ e $\{2, 6, 3\}$ são conjuntos independentes de tamanho 3.

# Cobertura

## Cobertura

Dado um grafo $G = (V, E)$, $C \subseteq V$ é uma **cobertura** em $G$ se e somente se toda aresta em $E$ tem pelo menos um extremo em $C$.

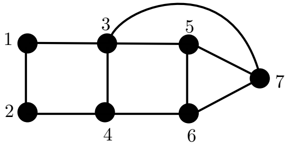



Exemplos:$\{1, 4, 5, 7\}$ e $\{2, 3, 6, 7\}$ são coberturas.

# Emparelhamento

## Emparelhamento

Dado um grafo $G = (V, E)$, $M \subseteq E$ é um **emparelhamento** em $G$ se e somente se $M$ não contém arestas adjacentes duas a duas em $G$.




Exemplos: $\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ e $\{(1,3),(2,4),(5,6)\}$ são emparelhamentos.

# Número Cromático

## Número Cromático

O **número cromático** de um grafo $G$ é o número mínimo de cores para se colorir os **vértices** de $G$ tal que vértices adjacentes tenham cores distintas.

Notação: $\chi(G)$

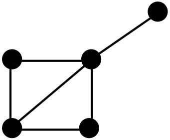
# Índice Cromático

## Índice Cromático

O **índice cromático** de um grafo $G$ é o número mínimo de cores para se colorir as **arestas** de $G$ tal que arestas adjacentes tenham cores distintas.

Notação: $\chi'(G)$

# Número Cromático e Índice Cromático

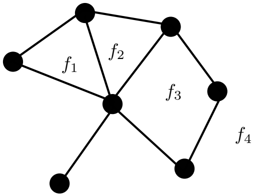


- $\chi(G) = 3$
- $\chi'(G) = 4$

# Grafo Plano (Mapa)

## Grafo Plano (Mapa)

Um **grafo plano** ou **mapa** é um grafo desenhado no plano tal que as arestas não se cruzam, definindo regiões ou faces nas quais divide o plano.



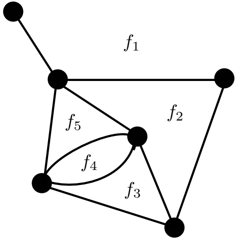

$G$ tem 4 faces, sendo $f_4$ a face externa.

# Grafo Dual

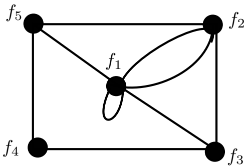
## Grafo Dual

Dado um grafo plano (mapa) $G$, o seu **grafo dual**, denotado por $G^*$ é tal que:

- faces de $G$ são vértices em $G^*$
- arestas em $G$ são arestas em $G^*$ (cada aresta tem uma face de cada lado)
- vértices de $G$ são faces em $G^*$




$G$




$G^*$

# Grafo Planar

### Grafo Planar

Um grafo é **planar** se existe mapa (grafo plano) isomorfo a ele.

### Teorema

Um grafo $G$ é **planar** se e somente se $G$ não contém subgrafos que sejam subdivisões de $K_5$ ou $K_{3,3}$

### Teorema

Para todo grafo planar $G$, tem-se que $(G^*)^*$ é isomorfo a $G$.

# Fórmula de Euler

## Fórmula de Euler

Para todo grafo plano conexo $G$:

$$|V| - |E| + |f| = 2$$

onde $|f|$ é o número de faces de $G$.

# Teorema das 4 cores

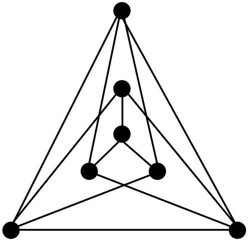
**Teorema das 4 cores**

Todo grafo planar pode ser colorido com no máximo 4 cores.

# Parâmetros de um Grafo

- $\delta$: grau mínimo de vértices
- $\Delta$: grau máximo de vértices
- $\omega$: número de componentes conexas
- $\kappa$: número mínimo de vértices a serem retirados de $G$ tal que aumente o número de componentes conexas
- $\kappa'$: número mínimo de arestas a serem retiradas de $G$ tal que aumente o número de componentes conexas
- $\alpha$: número de vértices em um conjunto independente máximo
- $\beta$: número de vértices em uma cobertura mínima

# Parâmetros de um Grafo




- $|V| = 7$
- $|E| = 12$
- $\delta = 3$
- $\Delta = 4$
- $\omega = 1$
- $\kappa = 3$
- $\kappa' = 3$
- $\alpha = 3$
- $\beta = 4$
- diâmetro $= 2$
- cintura $= 3$
- bipartido: NÃO
- euleriano: NÃO
- hamiltoniano: SIM
- planar: SIM

# Bibliografia I

[Bondy 1982] Bondy, J. A.; Murty, U.S.R.
*Graph Theory with Applications*. Elsivier, 1982.

[Netto 1996] P.O. Boaventura Netto.
*Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. Edgard Blucher, São Paulo, 1996.

[Diestel 1997] R. Diestel.
*Graph Theory*. Springer, New York, 1997.