Indução Matemática

Rômulo César Silva

Unioeste

Dezembro de 2019

Sumário

Computação e Matemática

A Ciência da Computação é fortemente vinculada à Matemática.

Algoritmo: sequência de passos executados para a resolução de um problema, descrito através de dados de entrada (parâmetros do problema) e dados de saída (solução do problema).

- O efeito de um algoritmo é semelhante ao conceito matemático de função: $f(x)$ representa o resultado da aplicação da função f ao dado de entrada x
- Assim, vários conceitos da Matemática são usados como ferramentas no projeto e análise de algoritmos
  - Complexidade de tempo: medida pelo número de passos ou operações
  - Complexidade de espaço: espaço ocupado em memória pelas variáveis durante a execução do algoritmo
  - Demonstração de corretude do algoritmo é similar a uma demonstração matemática: é necessário provar que o algoritmo funciona para todos os casos previstos na entrada do problema.

Técnicas de demonstração

Na Matemática, as técnicas básicas de demonstração são:

- **Demonstração direta**: usa-se apenas propriedades já conhecidas e operações básicas dentro do contexto da demonstração.
- **Demonstração por absurdo**: supõe-se a validade exatamente do contrário do que se deseja demonstrar, e partir daí, usa-se propriedades já conhecidas e operações básicas e conclui-se que é impossível (um absurdo) a hipótese assumida no início.
- **Demonstração por indução**: usa-se o princípio da indução (visto mais a frente)

Todas essas técnicas são úteis na Análise e Projeto de Algoritmos.

Princípio da Indução

- Técnica de demonstração de propriedades sobre os números naturais ($\mathbb{N}$)
- Um algoritmo é um sequência passos discretos (Matemática Discreta), já que não existe $\frac{1}{3}$ de passo ou $0,5$ passo.
- Indução matemática é uma ferramenta adequada para a demonstração de corretude de algoritmos e de sua complexidade.

Princípio da Indução Matemática (ou Finita)

Considere o conunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ e seja $P(n)$ uma propriedade a respeito do número natural n.

1. Se $P(n)$ é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$
2. Se $P(k)$ é verdadeira para $k > n$ então $P(k+1)$ é verdadeira para todo $k \geq n$

Então conclui-se de (1) e (2) que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$

Princípio da Indução Matemática (ou Finita)

A ideia por trás do Princípio da Indução é:

- se sabemos que uma propriedade P vale para um caso inicial (caso base)
- e além disso, supondo que P vale para algum número, consegue-se demonstrar que também vale para o número natural seguinte, então P vale para todo número maior ou igual ao caso base.

Princípio da Indução Matemática (ou Finita)

A demonstração usando o Princípio da Indução é composta de 2 etapas:

1. **Caso base**: em que se demonstra que a propriedade P vale para um determinado valor inicial
2. **Passo da Indução**: em que se estabelecendo uma hipótese de indução (HI), consegue-se demonstrar que a propriedade P é válida para o número natural seguinte.

Princípio da Indução Matemática (ou Finita)

Observação: tanto pode-se usar como hipótese de indução a validade de $P(k)$ e no passo da indução concluir a validade para $P(k+1)$ quanto usar a validade de $P(k-1)$ e concluir para $P(k)$.

Exemplo 1

Seja $P(n) : 4 + 10 + 16 + ... + (6n - 2) = n(3n + 1)$. Queremos demonstrar que $P(n)$ vale para qualquer $n \geq 1$.

1. **Caso base**: $n = 1$.
   Subtituindo em $P(1) : 1(3.1 + 1) = 4$ (verdadeiro)
2. **Passo da indução**:
   estabelecendo como hipótese de indução (HI): suponha que $P(k) : 4 + 10 + 16 + ... + (6k - 2) = k(3k + 1)$ é verdadeira para algum $k > 1$.
   Usando HI devemos concluir que $P(k + 1)$ também é verdadeira, isto é, $P(k + 1) = (k + 1)[3(k + 1) + 1]$.
   Ou seja, devemos concluir que
   $P(k + 1) = 3(k + 1)^2 + (k + 1) = 3k^2 + 7k + 4$.

Exemplo 1 (continuação)

Temos que $P(k+1) = 4 + 10 + 16 + ... + (6k-2) + [6(k+1)-2]$.
Isto é: $P(k+1) = \underbrace{4 + 10 + 16 + ... + (6k-2)}_{P(k)} + [6(k+1)-2]$

Logo $P(k+1) = P(k) + [6(k+1)-2]$.

De acordo com a HI $P(k) = k(3k+1)$. Assim, usando HI temos que $P(k+1) = k(3k+1) + [6(k+1)-2]$.

Assim, $P(k+1) = 3k^2 + k + 6k + 6 - 2$. E portanto $P(k+1) = 3k^2 + 7k + 4$, ou seja, $P(k+1)$ é verdadeira a partir de HI.

Logo podemos concluir que $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq 1$.

Exemplo 2

Seja $P(n) : 5^n - 1$ representa um número múltiplo de 4 para $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. **Caso base**: $n = 0$.
   Subtituindo em $P(0) : 5^0 - 1 = 0$. Como 0 é múltiplo de 4, portanto $P(0)$ é verdadeira.
2. **Passo da indução**:
   estabelecendo como hipótese de indução (HI): suponha que $P(k) : 5^k - 1$ é múltiplo de 4 seja verdadeira para algum $k > 0$.
   Usando HI devemos concluir que $P(k+1)$ também é verdadeira, isto é, $P(k+1) = 5^{(k+1)} - 1$ é múltiplo de 4.

Exemplo 2 (continuação)

Temos que $5^{(k+1)} - 1 = 5^{(k+1)} - (5 - 4)$.
Assim $P(k+1) = 5^k.5 - 5 + 4 = 5(5^k - 1) + 4$

Por HI temos que $5^k - 1$ é múltiplo de 4.
Logo multiplicá-lo por 5 não altera sua multiplicidade por 4, e portanto $5(5^k - 1)$ é múltiplo de 4.
Assim $5(5^k - 1) + 4$ será múltiplo de 4.

Logo $P(n) : 5^n - 1$ é múltiplo de 4 é verdadeira para $\forall n \geq 0$.

Exemplo 3

$P(n) : n! \geq 2^n$ para $\forall n \geq 4$.

1. **Caso base**: $n = 4$.
   Subtituindo em $P(4) : 4! \geq 2^4$. Isto é $24 \geq 16$ (verdadeiro)
2. **Passo da indução**:
   estabelecendo como hipótese de indução (HI): suponha que $P(k-1) : (k-1)! \geq 2^{k-1}$ para algum $k > 4$.
   Devemos provar que $P(k)$ também é verdadeira, isto é, $P(k) = k! \geq 2^k$.

Exemplo 3 (continuação)

Temos que multiplicando o lado esquerdo da inequação da HI por um número a e o lado direito por um númer b tal que $a \geq b$ mantém-se que

$(k-1)!a \geq 2^{k-1}b$

Pode-se escolher $a = k$ e $b = 2$, já que $k > 4 > 2$. Assim tem-se:

$(k-1)!k \geq 2^{k-1}2$, ou seja: $k! \geq 2^k$, como queríamos demonstrar.

Logo pode-se concluir que $P(n) : n! \geq 2^n$ para $\forall n \geq 4$ é verdadeira.

Erros comuns no uso de Indução Matemática

- Não identificar o **Caso Base** corretamente. Em cada proposição, o valor inicial é dependente da propriedade a ser demonstrada.
- Não usar a Hipótese de Indução (HI) no **Passo da Indução**. Se uma hipótese foi estabelecida, ela deve ser usada em algum ponto da demonstração, caso contrário ela não têm utilidade.

Bibliografia I

[Sipser 2007] Michael Sipser.
Introdução à Teoria da Computação. Cengage Learning, São Paulo, 2015.

[Manber 1989] Udi Manber.
Introduction to Algorithms: A Creative Approach. Addison-Wesley, 1989.

[Preparata 1973] Franco P. Preparata; Raymond T. Yeh.
Introduction to Discrete Structures for Computer Science and Engineering. Addison-Wesley, Reading - MA, 1973.