MÉTODOS NUMÉRICOS
GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS Nº 2.
Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales

1. Realice un algoritmo en MatLab, del ***Método de Euler***, que resuelve numéricamente la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$ con $y(t_0) = y_0$. Su algoritmo debe tener como parámetros de entrada a la función derivada (como script de MatLab), los tiempos iniciales y finales de cálculo $[t_0, t_1]$, la condición inicial de la ecuación diferencial $y(t_0) = y_0$ y el número de pasos a realizar (a fin de calcular el Δt).

2. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, utilizando el algoritmo de ***Euler*** desarrollado en el inciso anterior, tomando primero un intervalo de tiempo *h=0.1* y *20* pasos y luego un *h=0.05* y *40* pasos. Compare estas 2 aproximaciones con la solución exacta, dibujando las mismas en iguales gráficos y calculando el error final de cálculo en *t=2*.

a) $y' = t^2 - y$, con $y(0) = 1$. Solución verdadera: $y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2$

b) $y' = 3y + 3t$, con $y(0) = 1$. Solución verdadera: $y(t) = \frac{4}{3}e^{3t} - t - \frac{1}{3}$

c) $y' = -ty$ con $y(0) = 1$. Solución verdadera: $y(t) = e^{-t^2/2}$

d) $y' = e^{-2t} - 2y$ con $y(0) = \frac{1}{10}$. Solución verdadera: $y(t) = \frac{1}{10}e^{-2t} + te^{-2t}$

e) $y' = 2ty^2$ con $y(0) = 1$. Solución verdadera: $y(t) = 1/(1 - t^2)$

3. ***Crecimiento de Población Logístico***. La curva de Población $P(t)$ de los EEUU se supone que obedece a una ecuación diferencial de regresión logística dada por $P' = aP - bP^2$. Se estima que para el año 1900, la población de EEUU era de 76.3 millones. Suponiendo un paso *h=10 años*, las constantes *a=0.02* y *b=0.00004*, encuentre la evolución de la población estadounidense hasta el año 2025.

4. ***Crecimiento Exponencial de Población***. La población de ciertas especies crece a una velocidad que es proporcional a la población actual y obedece la ley $y' = 0.02y$, en el intervalo $[0,5]$ con $y(0) = 5000$. Se pide:

a) Utilizando el algoritmo de ***Euler***, encuentre la aproximación en $y(5)$, utilizando tamaños de paso $h = 1$, $h = \frac{1}{12}$ y $h = \frac{1}{360}$.

b) ¿Cuál es el límite en la parte ***a)***, cuando h tiende a cero?

5. Un paracaidista salta desde un avión y hasta el momento en el que abra el paracaídas, la resistencia del aire es proporcional a $v^{3/2}$ (representando v a la velocidad del paracaidista). Suponga que el intervalo de tiempo es $[0,12]$ y que la ecuación diferencial para esta caída libre es: $v' = 32 - 0.032v^{3/2}$ con $v(0) = v_0 = 0$. Utilice el algoritmo de *Euler* con *h=0.05* para estimar la velocidad $v(6)$.

6. Realice un algoritmo en MatLab, del ***Método de Heun*** (Euler mejorado), que resuelve numéricamente la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$ con $y(t_0) = y_0$. Su algoritmo debe tener como parámetros de entrada a la función derivada (como script), los tiempos iniciales y finales $[t_0, t_1]$, la condición inicial de la ecuación diferencial $y(t_0) = y_0$ y el número de pasos a realizar (a fin de calcular el Δt).

7. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, utilizando el algoritmo de ***Heun*** desarrollado en el inciso anterior, tomando primero un *h=0.1* y *20* pasos y luego un *h=0.05* y *40* pasos. Compare estas 2 aproximaciones con la solución exacta, dibujando las mismas en iguales gráficos y calculando el error final de cálculo en *t=2.*

- ***a)*** $y' = t^2 - y$, con $y(0) = 1$. Solución verdadera: $y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2$
- ***b)*** $y' = 3y + 3t$, con $y(0) = 1$. Solución verdadera: $y(t) = \frac{4}{3}e^{3t} - t - \frac{1}{3}$
- ***c)*** $y' = -ty$ con $y(0) = 1$. Solución verdadera: $y(t) = e^{-t^2/2}$
- ***d)*** $y' = e^{-2t} - 2y$ con $y(0) = \frac{1}{10}$. Solución verdadera: $y(t) = \frac{1}{10}e^{-2t} + te^{-2t}$
- ***e)*** $y' = 2ty^2$ con $y(0) = 1$. Solución verdadera: $y(t) = 1/(1 - t^2)$

8. En psicología, la ley de ***Wever-Fechner*** para estímulo – respuesta establece que la velocidad de cambio dR/dE de la reacción R es inversamente proporcional al estímulo E. El valor de umbral es el mas bajo nivel del estímulo que puede ser detectado consistentemente. La ecuación diferencial para este modelo es:

$R' = \dfrac{k}{E}$ con $R(E_0) = 0$. Suponga que $E_0 = 0.1$ y $R(0.1) = 0$. Utilice el algoritmo de ***Heun*** con h=0.1 para resolver $R' = \dfrac{1}{E}$ en el intervalo $[0.1, 5.1]$

9. Realice un algoritmo en MatLab, del ***Método de Runge-Kutta Orden 4***, que resuelve numéricamente la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$ con $y(t_0) = y_0$. Su algoritmo debe tener como parámetros de entrada a la función derivada (como script), los tiempos iniciales y finales $[t_0, t_1]$, la condición inicial de la ecuación diferencial $y(t_0) = y_0$ y el número de pasos a realizar (a fin de calcular el Δt).

10. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, utilizando el algoritmo de ***Runge-Kutta Orden 4*** desarrollado en el inciso anterior, tomando primero un *h=0.1* y *20* pasos y luego un *h=0.05* y *40* pasos. Compare estas 2 aproximaciones con la solución exacta, dibujando las mismas en iguales gráficos y calculando el error final de cálculo en *t=2.*

- ***a)*** $y' = t^2 - y$, con $y(0) = 1$. Solución verdadera: $y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2$
- ***b)*** $y' = 3y + 3t$, con $y(0) = 1$. Solución verdadera: $y(t) = \frac{4}{3}e^{3t} - t - \frac{1}{3}$
- ***c)*** $y' = -ty$ con $y(0) = 1$. Solución verdadera: $y(t) = e^{-t^2/2}$
- ***d)*** $y' = e^{-2t} - 2y$ con $y(0) = \frac{1}{10}$. Solución verdadera: $y(t) = \frac{1}{10}e^{-2t} + te^{-2t}$
- ***e)*** $y' = 2ty^2$ con $y(0) = 1$. Solución verdadera: $y(t) = 1/(1 - t^2)$

11. En una reacción química, una molécula *A* se combina con otra molécula *B* para formar una nueva molécula *C*. Se ha encontrado que la concentración $y(t)$ de *C* en el tiempo *t* es la solución de la ecuación diferencial:

$y' = k(a-y)(b-y)$ con $y(0)=0$, donde k es una constante positiva y a y b son las concentraciones iniciales de A y B respectivamente. Suponga que $k=0.01$ $a=70$ milimoles/litro y $b=50$ milimoles/litro. Utilice el método de ***Runge-Kutta Orden 4*** para encontrar la solución en el intervalo $[0,20]$. Compare su solución computacional con la solución exacta $y(t)=350(1-e^{-0.2t})/(7-5e^{-0.2t})$. Observe que el valor limitante es 50 a medida que el tiempo tiende a infinito.

12. Realice un algoritmo en MatLab, del método de ***Runge-Kutta Orden 4***, que resuelve numéricamente el *sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, de orden "n"* que se muestra a continuación. Su algoritmo debe tener como parámetros de entrada al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en formato matricial (como script), los tiempos iniciales y finales de cálculo $[t_0, t_1]$, el vector de condiciones iniciales del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden $x_1(t_0)=\alpha_1, x_2(t_0)=\alpha_2, \cdots, x_n(t_0)=\alpha_n$ y el número de pasos a realizar (a fin de calcular el Δt).

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & f_1(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \\ x_2'(t) & = & f_2(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = & f_n(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \end{cases} \text{ con CI: } x_1(t_0)=\alpha_1, x_2(t_0)=\alpha_2, \cdots, x_n(t_0)=\alpha_n$$

13. Teniendo en cuenta el algoritmo desarrollado en el ejercicio ***12***, y utilizando un paso de programa *h=0.05*, resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales. Dibuje las soluciones aproximadas junto con las verdaderas, a fin de evaluar el error cometido.

a) $x' = 2x + 3y$, $y' = 2x + y$ con $x(0) = -2.7$, $y(0) = 2.8$ en $0 \le t \le 1$. Solución verdadera: $x(t) = -\frac{69}{25}e^{-t} + \frac{3}{50}e^{4t}$ e $y(t) = \frac{69}{25}e^{-t} + \frac{1}{25}e^{4t}$

b) $x' = 3x - y$, $y' = 4x - y$ con $x(0) = 0.2$, $y(0) = 0.5$ en $0 \le t \le 2$. Solución verdadera: $x(t) = \frac{1}{5}e^{t} - \frac{1}{10}te^{t}$ e $y(t) = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{5}te^{t}$

c) $x' = x - 4y$, $y' = x + y$ con $x(0) = 2$, $y(0) = 3$ en $0 \le t \le 2$. Solución verdadera:
$$x(t) = -2e^{t} + 4e^{t}\cos^2(t) - 12e^{t}\cos(t)\sin(t)$$
$$y(t) = -3e^{t} + 6e^{t}\cos^2(t) + 2e^{t}\cos(t)\sin(t)$$

14. Modelo Predador – Presa. Un ejemplo de un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales es el problema del predador y la presa. Suponga que $x(t)$ e $y(t)$ representan la población de conejos y zorros respectivamente, a un determinado tiempo *t*. El modelo predador – presa afirma que $x(t)$ e $y(t)$ satisface:

$$\begin{cases} x'(t) & = & Ax(t) & - & Bx(t)y(t) \\ y'(t) & = & Cx(t)y(t) & - & Dy(t) \end{cases}$$

Utilizando el algoritmo desarrollado en el ejercicio ***12*** y los siguientes valores para el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales:

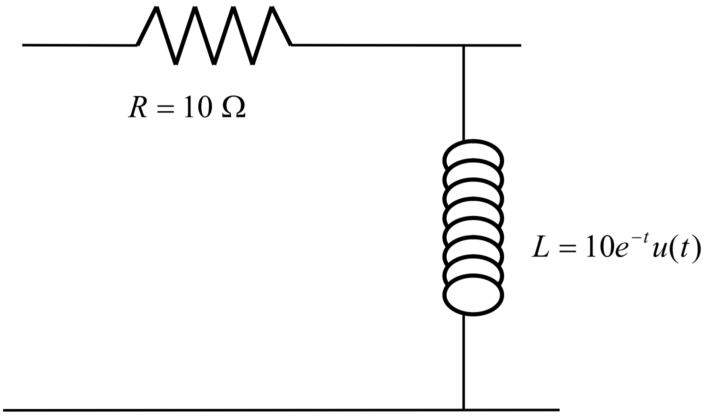
$A = 2$, $B = 0.02$, $C = 0.0002$ y $D = 0.8$

Resuelva el sistema para los 2 casos siguientes:

a) $x(0) = 3000$ conejos e $y(0) = 120$ zorros

b) $x(0) = 5000$ conejos e $y(0) = 100$ zorros

15. El siguiente esquema, representa un circuito LR en el cual uno de sus componentes varía con el tiempo. Calcular la corriente que circula por el circuito si se aplica un escalón de tensión de amplitud 2 volts. Utilice el algoritmo desarrollado en el ejercicio ***12***.



16. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el algoritmo desarrollado en el ejercicio ***12***:

a) $y''+4y = 7e^{t}$, $y(0) = y'(0) = 0$

b) $y''+y = 9t$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 7$

c) $y''-4y'+5y = 125t^{2}$, $y(0) = y'(0) = 0$

d) $ty''(t) + (1-2t)y'(t) - 2y(t) = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$

e) $ty''(t) + (t-1)y'(t) - y(t) = 0,\ y(0) = 5, y'(0) = 0$