MÉTODOS NUMÉRICOS
GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS Nº 7
Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

1. Implemente un algoritmo en MatLab, que realice la solución por diferencias finitas de la *Ecuación de Onda*, es decir una *Ecuación Diferencial Parcial Hiperbólica:* $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$ sobre $R = \{(x,t): 0 \le x \le a, 0 \le t \le b\}$, con $u(0,t) = 0$, $u(a,t) = 0$, para $0 \le t \le b$ y $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, para $0 \le x \le a$. El algoritmo debe recibir como parámetros de entrada la función $f(x) = u(x,0)$, la función $g(x) = u_t(x,0)$ (el nombre de las funciones como cadena de caracteres, ya que estarán diseñadas en un *.m* y ser accedidas a las mismas con el comando MatLab *feval*), los puntos finales de evaluación de la ecuación diferencial parcial en *x* y *t*, *a* y *b* respectivamente, la velocidad de la onda *c*, y el número de intervalos en la grilla de los entornos en *x* $[0,a]$ y en *t* $[0,b]$, *n* y *m* respectivamente. El parámetro de salida debe ser una matriz *n* x *m* con la solución $u(x,t)$ de la ecuación diferencial parcial y 2 vectores con las variables independientes *x* y *t*.

2. Utilizando el método de diferencias finitas para el cálculo de la ecuación diferencial parcial, se pide resolver las siguientes ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (grafique el resultado obtenido):

a) $u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t)$; para $0 < x < 1$ y $0 < t < 0.5$.

Con las condiciones de contorno:

$u(0,t) = 0$ y $u(1,t) = 0$, para $0 \le t \le 0.5$,

$u(x,0) = f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x)$, para $0 \le x \le 1$,

$u_t(x,0) = g(x) = 0$, para $0 \le x \le 1$.

Establezca un intervalo en x *h=0.1* y en t *k=0.05*.

b) $u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t)$; para $0 < x < 1$ y $0 < t < 1$

Con las condiciones de contorno:

$u(0,t) = 0$ y $u(1,t) = 0$, para $0 \le t \le 1$,

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{, para } 0 \le x \le \frac{3}{5} \\ 1.5 - 1.5x, & \text{para } \frac{3}{5} \le x \le 1 \end{cases}$$

$u_t(x,0) = g(x) = 0$, para $0 \le x \le 1$.

Establezca un intervalo en x *h=0.1* y en t *k=0.05*.

3. Para los siguientes incisos, utilice el programa desarrollado en el ejercicio ***1*** para resolver la ecuación de onda $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$; para $0 \le x \le a$ y $0 \le t \le b$, con las siguientes condiciones de contorno:

$u(0,t) = 0$ y $u(1,t) = 0$, para $0 \le t \le b$,

$u(x,0) = f(x)$, para $0 \le x \le a$,

$u_t(x,0) = g(x)$, para $0 \le x \le a$.

Utilice los comandos MatLab ***contour*** y ***surf*** para dibujar las soluciones aproximadas

a) Utilice *a=1*, *b=1*, *c=1*, $f(x) = u(x,0) = \sin(\pi x)$ y $g(x) = u_t(x,0) = 0$. Para su conveniencia, elija intervalos de cálculo en *x* y en *t*, *h=0.1* y en t *k=0.1* respectivamente.

b) Utilice *a=1*, *b=1*, *c=1*, $f(x)=u(x,0)=x-x^2$ y $g(x)=u_t(x,0)=0$. Para su conveniencia, elija intervalos de cálculo en *x* y en *t*, *h=0.1* y en t *k=0.1* respectivamente.

c) Utilice *a=1*, *b=1*, *c=1*, $f(x)=u(x,0)=\begin{cases} 2x & \text{, para } 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \text{para } \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$ y $g(x)=u_t(x,0)=0$. Para su conveniencia, elija intervalos de cálculo en *x* y en *t*, *h=0.1* y en t *k=0.1* respectivamente.

d) Utilice *a=1*, *b=1*, *c=2*, $f(x)=u(x,0)=\sin(\pi x)$ y $g(x)=u_t(x,0)=0$. Para su conveniencia, elija intervalos de cálculo en *x* y en *t*, *h=0.1* y en t *k=0.05* respectivamente.

e) Utilice *a=1*, *b=1*, *c=2*, $f(x)=u(x,0)=x-x^2$ y $g(x)=u_t(x,0)=0$. Para su conveniencia, elija intervalos de cálculo en *x* y en *t*, *h=0.1* y en t *k=0.05* respectivamente.

f) Repita el inciso ***c)*** pero ahora con *c=2* y *K=0.05*.

g) Repita el inciso ***a)*** pero ahora con $f(x)=u(x,0)=\sin(2\pi x)+\sin(4\pi x)$.

h) Repita el inciso ***a)*** pero ahora con *c=2*, $f(x)=u(x,0)=\sin(2\pi x)+\sin(4\pi x)$ y *k=0.05*.

4. Implemente un algoritmo en MatLab, que realice la solución por diferencias hacia adelante de la *Ecuación del calor*, es decir una *Ecuación Diferencial Parcial Parabólica:* $u_t(x,t)=c^2u_{xx}(x,t)$ sobre $R=\{(x,t):0\le x\le a, 0\le t\le b\}$, con $u(x,0)=f(x)$, para $0\le x\le a$ y $u(0,t)=c_1$, $u(a,t)=c_2$, para $0\le t\le b$. El algoritmo debe recibir como parámetros de entrada la función $f(x)=u(x,0)$ (el nombre de la función como cadena de caracteres, ya que estará diseñada en un *.m* y ser accedida a las misma con el comando MatLab *feval*), las condiciones de contorno c_1 y c_2 los puntos finales de evaluación de la ecuación diferencial parcial en *x* y *t*, *a* y *b* respectivamente, la constante en la ecuación del calor. *c*, y el número de intervalos en la grilla de los entornos en *x* $[0,a]$ y en *t* $[0,b]$, *n* y *m* respectivamente. El parámetro de salida debe ser una matriz *n* x *m* con la solución $u(x,t)$ de la ecuación diferencial parcial y 2 vectores con las variables independientes *x* y *t*.

5. Para los siguientes incisos, utilice el programa desarrollado en el ejercicio ***4*** para resolver la ecuación del calor $u_t(x,t)=c^2u_{xx}(x,t)$; para $0\le x\le 1$ y $0\le t\le 0.1$, con la condición inicial $u(x,0)=f(x)$, para *t=0* y $0\le x\le 1$, y las condiciones de contorno:

$u(0,t)=c_1=0$, para *x=0* y $0\le t\le 0.1$,
$u(1,t)=c_2=0$, para *x=1* y $0\le t\le 0.1$

Utilice los comandos MatLab ***contour*** y ***surf*** para dibujar las soluciones aproximadas

a) Utilice $f(x)=\sin(\pi x)+\sin(2\pi x)$, *h=0.1*, *k=0.01 y* $c=1/\sqrt{2}$.

b) Utilice $f(x)=3-|3x-1|-|3x-2|$, *h=0.1*, *k=0.01 y* $c=1/\sqrt{2}$.

6. Modifique el programa ***4*** para que acepte las condiciones de contorno $u(0,t) = g_1(t) \neq 0$ y $u(a,t) = g_2(t) \neq 0$.

7. Utilice el programa anterior, para resolver las ecuaciones del calor de los incisos ***a)*** y ***b)*** del ejercicio ***5***, pero ahora utilizando las siguientes condiciones de contorno:

$$u(0,t) = g_1(t) = t^2, \quad \text{para } x=0 \text{ y } 0 \leq t \leq 0.1,$$
$$u(1,t) = g_2(t) = e^t, \quad \text{para } x=1 \text{ y } 0 \leq t \leq 0.1$$

8. Suponga que Ud. desea resolver la siguiente ecuación del calor parabólica $u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = h(x)$. Encuentre la ecuación en diferencias hacia adelante explícita para esta situación.

9. Diseñe el algoritmo MatLab que implemente la forma explícita de la ecuación en diferencias del problema ***8***.

10. Utilice el programa desarrollado en el ejercicio ***9***, para resolver la ecuaciones del calor de $u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sin(x)$, para $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq t \leq 0{,}2$, con la condición inicial $u(x,0) = f(x) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x)$ y las condiciones de contorno:

$$u(0,t) = c_1 = 0, \quad \text{para } x=0 \text{ y } 0 \leq t \leq 0.2,$$
$$u(0,t) = c_2 = 0, \quad \text{para } x=1 \text{ y } 0 \leq t \leq 0.2$$

Asuma *h=0.2* y *k=0.02*.

11. Implemente un algoritmo en MatLab, que aproxime a la solución por el método de Dirichlet, de la *Ecuación de Laplace*, es decir una *Ecuación Diferencial Parcial Elíptica:* $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$ sobre $R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, con $u(x,0) = f_1(x)$, $u(x,b) = f_2(x)$, para $0 \leq x \leq a$ y $u(0,y) = f_3(y)$, $u(a,y) = f_4(y)$, para $0 \leq y \leq b$. Se supone $\Delta x = \Delta y = h$ y que los enteros *n* y *m* existen, de forma tal que $a = nh$ y $b = mh$. El algoritmo debe recibir como parámetros de entrada las funciones de contorno $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$ y $f_4(y)$ (el nombre de las funciones como cadena de caracteres, ya que estarán diseñadas en un *.m* y ser accedidas a las mismas con el comando MatLab *feval*), los puntos finales de evaluación de la ecuación diferencial parcial en *x* e *y*, *a* y *b* respectivamente, la tolerancia del método *Tol*, la resolución del paso *h*, y el máximo número de iteraciones *Max*. El parámetro de salida debe ser una matriz cuadrada con la solución $u(x,y)$ de la ecuación diferencial parcial y 2 vectores con las variables independientes *x* e *y*.

12. Encuentre una solución aproximada para la ecuación del Laplaciano $\nabla^2 u(x,y) = 0$, sobre el rectángulo $R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$, donde $u(x,y)$ representa la temperatura en el punto (x,y), con las siguientes condiciones de contorno:

$$u(x,4) = 180 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 4,$$
$$u(x,0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 4,$$
$$u(0,y) = 80 \quad \text{para } 0 \leq y \leq 4,$$
$$u(4,y) = 0 \quad \text{para } 0 \leq y \leq 4.$$

Utilice para sus cálculos $\Delta x = h = 0.5$ y $\Delta y = k = 0.5$, de modo tal de contar con 64 rectángulos en su grilla de cálculo del Laplaciano.

13. Utilice el programa desarrollado en el inciso anterior, para calcular la aproximación de la función armónica $u(x, y)$ sobre $R = \{(x, y): 0 \le x \le 1.5, 0 \le y \le 1{,}5\}$; use un h=0.5. Los valores de contorno son:

$u(x,0) = f_1(x) = x^4$ y $u(x,1.5) = f_2(x) = x^4 - 13.5x^2 + 5.0625$, para $0 \le x \le 1.5$

$u(0, y) = f_3(y) = y^4$ y $u(1.5, y) = f_4(y) = y^4 - 13.5y^2 + 5.0625$, para $0 \le y \le 1.5$

Use el comando ***surf*** para graficar las aproximaciones de la solución de la ecuación diferencial y compárela con la solución exacta $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

14. Utilizando una grilla de 5 x 5, encuentre una solución aproximada para la ecuación del Laplaciano $\nabla^2 u(x, y) = 0$, sobre el rectángulo $R = \{(x, y): 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4\}$, donde $u(x, y)$ representa la temperatura en el punto (x, y), con las siguientes condiciones de contorno:

$u(x,4) = 120$ para $0 \le x \le 4$,
$u(x,0) = 0$ para $0 \le x \le 4$,
$u(0, y) = 90$ para $0 \le y \le 4$,
$u(4, y) = 40$ para $0 \le y \le 4$.