MÉTODOS NUMÉRICOS
GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS Nº 1.
Resolución Numérica de Ecuaciones Lineales

1. Realice un algoritmo en MatLab, del método de *Sustitución hacia Atrás* ***(Back Substitution)***, que reciba una matriz triangular superior y el vector independiente del sistema lineal de ecuaciones a resolver.

2. Utilice el algoritmo desarrollado en el inciso anterior, para resolver el Sistema Lineal $UX = B$, donde:

$$U = \lfloor u_{ij} \rfloor_{10x10} \text{ y } u_{ij} = \begin{cases} \cos(ij) & i \le j \\ 0 & i > j \end{cases} \text{ y } B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{10x1} \text{ y } b_{i1} = \tan(i)$$

3. Compruebe el algoritmo desarrollado en el ejercicio ***1***, resolviendo cada uno de los siguientes sistemas lineales triangulares superiores:

$$\textbf{\textit{a)}} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_3 + 3x_4 = 11 \\ 5x_4 = 15 \end{cases}$$

$$\textbf{\textit{b)}} \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -14 \\ 11x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 22 \\ 3x_3 - 13x_4 = -11 \\ 7x_4 = 14 \end{cases}$$

$$\textbf{\textit{c)}} \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ -2x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - 2x_5 = 3 \\ -2x_4 - x_5 = 10 \\ 3x_5 = 6 \end{cases}$$

4. Realice un algoritmo en MatLab, del método de *Sustitución hacia Adelante* ***(Foward Substitution)***, que reciba una matriz triangular inferior y el vector independiente del sistema lineal de ecuaciones a resolver.

5. Utilice el algoritmo desarrollado en el inciso anterior, para resolver el Sistema Lineal $LX = B$, donde:

$$L = \lfloor l_{ij} \rfloor_{20x20} \text{ y } l_{ij} = \begin{cases} i + j & i \ge j \\ 0 & i < j \end{cases} \text{ y } B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{20x1} \text{ y } b_{i1} = i$$

6. Compruebe el algoritmo desarrollado en el ejercicio ***4***, resolviendo cada uno de los siguientes sistemas lineales triangulares inferiores:

$$\textbf{\textit{a)}}\ \begin{cases} 2x_1 & & & & & = & 6 \\ -x_1 & + & 4x_2 & & & & & = & 5 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \end{cases}$$

$$\textbf{\textit{b)}}\ \begin{cases} 5x_1 & & & & & & & = & -10 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & & & = & 4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & - & 4x_4 & = & 5 \end{cases}$$

7. Realice un algoritmo en MatLab, del método de *Triangularización inferior Gaussiana con Pivoteo Parcial* (a fin de eliminar propagación de errores por elevada magnitud del pivote), seguido por el método de sustitución hacia atrás desarrollado en el ejercicio ***1***, para completar el algoritmo de *Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales*.

8. Compruebe el algoritmo desarrollado en el ejercicio anterior, resolviendo cada uno de los siguientes sistemas lineales:

a) Encuentre la parábola $y = A + Bx + Cx^2$ que pasa por los puntos (1,4), (2,7) y (3,14).

b) Encuentre el polinomio cúbico $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ que pasa por los puntos (0,0), (1,1), (2,2) y (3,2).

$$\textbf{\textit{c)}}\ \begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & - & x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 0x_4 & = & 9 \\ 0x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 26 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 32 \end{cases}$$

d) $AX = B$, donde: $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{NxN}$ y $a_{ij} = i^{-(j-1)}$ y $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{Nx1}$ donde $b_{11} = N$ y $b_{i1} = \left(i^N - 1\right) / \left(i^{N-1}(i-1)\right)$ para $i \geq 2$. Use N=3,7 y 11. La solución exacta es $X = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}'$. Explique cualquier desviación de la solución exacta.

9. Realice un algoritmo en MatLab, que permita *triangularizar inferiormente una matriz tridiagonal*, y, asimismo, utilizando la técnica de sustitución hacia atrás (no el algoritmo del ejercicio **1**), permita resolver ese sistema de ecuaciones. Su resolución debe ser óptima, es decir, no se deben realizar operaciones de mas, al tener este sistema ceros por encima de la diagonal principal y diagonales secundarias. El algoritmo correctamente diseñado, deberá contar con un máximo de 15 líneas de código incluyendo la definición de la función. El algoritmo debe recibir a la matriz ***A*** y vector independiente ***B*** y entregar el vector de soluciones **X**. Se recuerda que un sistema lineal de ecuaciones tridiagonal, está formado por (puesto en formato matricial):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix}$$

10. Compruebe el algoritmo desarrollado en el ejercicio anterior, resolviendo cada uno de los siguientes sistemas lineales:

a)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 26 \\ 2x_3 - 4x_4 = 32 \end{cases}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$