

# PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

## GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS Nº 3 Filtros Digitales FIR e IIR

### Primera Parte. Análisis General de Sistemas Digitales

**1. Dada la Ecuación en Diferencias.** Dada la Ecuación en Diferencias del siguiente filtro digital, se pide:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k v[n-k]$$

$$a = [1 \quad -0.8741 \quad 0.9217 \quad -0.2672]^T$$

$$b = [0.1866 \quad 0.2036 \quad 0.2036 \quad 0.1866]^T$$

a) Calcule los parámetros de las siguientes descripciones del sistema:

- Representación en el *Espacio de Estados* usando *tf2ss*
- Expansión en *Fracciones Simples* usando *residuez*

b) Escriba una función *tf2zp* para calcular la representación en polos y ceros del filtro.

c) Calcule 512 muestras de la respuesta en frecuencia del filtro  $H(e^{j\omega})$  para  $0 \leq \omega \leq 2\pi$  usando *freqz*. Grafique la respuesta de amplitud y fase del filtro.

d) Calcule los 100 primeros valores de la respuesta al impulso  $h[n]$  del filtro utilizando el comando *filter*. Calcule analíticamente el resultado y compare los coeficientes de las fracciones simples halladas con el inciso a).

**2. Dados los Polos y Ceros del Sistema.** Dada la representación en la Transformada Z del siguiente filtro Digital, se pide:

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}, \quad p_1 = 0.9, \quad p_{2,3} = 0.6718 \pm j0.6718$$

$$z_1 = -1, \quad z_{2,3} = \pm j, \quad b_0 = 1/77$$

a) Escriba una función *zp2tf* para convertir esta descripción mediante polos y ceros del filtro a función transferencia en  $H(z)$ .

b) Calcule la secuencia de salida  $y[n]$  para cada una de las siguientes secuencias de entrada de longitud 100:

- $v_1 = \text{ones}(1,100)$ , es decir, respuesta al Escalón Unitario.
- $v_2 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad \dots]$
- $v_3 = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad \dots]$

- c) Encuentre la secuencia de entrada  $v[n]$  de Período Fundamental de repetición de 4 puntos, tal que la correspondiente salida del sistema sea proporcional a  $(0.9)^n$  para  $n \geq 3$ .

**3. Dada la Representación en el Espacio de Estados.** Dada la representación en el *Espacio de Estados* del siguiente filtro Digital, se pide:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{b}v[n+1] \\ y[n] = \mathbf{c}^T\mathbf{x}[n] + dv[n+1] \end{cases}$$

Siendo  $\mathbf{x}[n] = [x_1[n] \ x_2[n] \ x_3[n] \ \dots \ x_N[n]]^T$  el vector de variables de estado. Si  $M = N$ , una representación equivalente a la ecuación en diferencias del Ejercicio 1) está dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_N & 0 & \dots & \ddots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & - & b_0a_1 \\ b_2 & - & b_0a_2 \\ \vdots & - & \vdots \\ b_N & - & b_0a_N \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \text{ y } d = b_0$$

Para este ejercicio, el valor de las matrices es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.3639 & 0 & 0 \\ 1.3639 & 0.5111 & -0.8580 \\ 0 & 0.8580 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = [1.3629 \ 0.6019 \ 0.3074] \text{ y } d = 1$$

- Calcule la Función de Transferencia  $H(z)$  utilizando el comando `ss2tf`. Encuentre los polos de la Función de Transferencia. Verifique que los mismos son iguales a los Autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$ .
- Escriba un programa utilizando el comando `ss2tf` para el cálculo de una versión truncada de la respuesta al impulso  $h[n]$  resolviendo las ecuaciones de estado:
 
$$\begin{cases} \mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{b}v[n] \\ y[n] = \mathbf{c}^T\mathbf{x}[n] + dv[n] \end{cases}$$
 Tal que tanto  $\mathbf{x}[n]$  como  $y[n] = h[n]$  sean obtenidos. Tome como parámetros de entrada a su programa  $[\mathbf{A} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}^T \ d]$  para  $n = 0 : 50$ . Dibuje las componentes de  $\mathbf{x}[n]$  así también como las de  $h[n]$  juntas usando `subplot(2,2,x)`.
- Compare los resultados obtenidos para  $h[n]$  en el inciso anterior con los que se obtendrían con el comando `filter`, utilizando la función de transferencia obtenida en el inciso a).
- Realice un diagrama de flujo del sistema, descrito por  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}^T$  y  $d$ .

Segunda Parte. Implementación Filtros FIR (Finite Impulse Response)

4. Para cada una de las siguientes especificaciones de diseño, se pide implementar los FIR correspondientes mediante una ventana rectangular. En todos los casos el valor de  $N$  es

67. Se pide además graficar la respuesta al impulso de cada uno de ellos y la respuesta en frecuencia (lineal y semilogarítmica) para cada uno de ellos verificando su diseño. Utilice para estos gráficos MatLab. Utilice el comando de MatLab *fdatool* para sus algoritmos.
- Filtro Pasa Bajos con las siguientes características: Frecuencia de Muestreo  $f_s$  de 8 KHz; Banda de Paso: 0 – 1 KHz.
  - Filtro Pasa Altos con las siguientes características: Frecuencia de Muestreo  $f_s$  de 5 KHz; Banda de Paso: 3 –  $\infty$  KHz.
  - Filtro Pasa Banda con las siguientes características: Frecuencia de Muestreo  $f_s$  de 8 KHz; Banda de Eliminación Inferior: 0 – 1 KHz; Banda de Paso: 1 – 2 KHz; Banda de Eliminación Superior: 2 –  $\infty$  KHz.
  - Filtro Elimina Banda con las siguientes características: Frecuencia de Muestreo  $f_s$  de 8 KHz; Banda de Paso Inferior: 0 – 1 KHz; Banda de Eliminación: 1 – 2 KHz; Banda de Paso Superior: 2 –  $\infty$  KHz.
  - Reduzca el orden  $N$  de los filtros y observe como cambian las características de los filtros diseñados. ¿Qué puede concluir al respecto?
5. Para cada una de las siguientes especificaciones de diseño, se pide implementar los *FIR* correspondientes mediante la técnica de ventanas. Se pide además graficar la respuesta al impulso de cada uno de ellos y la respuesta en frecuencia (lineal y semilogarítmica) para cada uno de ellos verificando su diseño. Utilice para estos gráficos MatLab. Utilice el comando de MatLab *fdatool* para sus algoritmos.
- Diseñe un filtro Pasa Bajos con las siguientes características: Frecuencia de Muestreo  $f_s$  de 8 KHz; Banda de Paso: 0 – 1 KHz; Banda de Eliminación: 1.4 –  $\infty$  KHz; Atenuación en Banda de Eliminación: 50 dB.
  - Diseñe un filtro Pasa Altos con las siguientes características: Frecuencia de Muestreo  $f_s$  de 10 KHz; Banda de Eliminación: 0 – 3 KHz; Banda de Paso: 3.5 –  $\infty$  KHz; Atenuación en Banda de Eliminación: 60 dB.
  - Diseñe un filtro Pasa Banda con las siguientes características: Frecuencia de Muestreo  $f_s$  de 8 KHz; Banda de Eliminación Inferior: 0 – 0.6 KHz; Banda de Paso: 1 – 2 KHz; Banda de Eliminación Superior: 2.6 –  $\infty$  KHz. Atenuación en las Bandas de Eliminación: 40 dB. Utilice una ventana de Hanning.
  - Diseñe un filtro Elimina Banda con las siguientes características: Frecuencia de Muestreo  $f_s$  de 8 KHz; Banda de Paso Inferior: 0 – 0.6 KHz; Banda de Eliminación: 1 – 2 KHz; Banda de Paso Superior: 2.6 –  $\infty$  KHz. Atenuación en la Banda de Eliminación: 70 dB.
6. Diseñe un filtro *FIR* diferenciador con  $N=40$  usando una ventana de Blackman. Tenga en cuenta que los Diferenciadores *FIR* tienen respuesta al impulso antisimétrica, es decir  $h(n) = -h(N-1-n)$  y el número de muestras que lo componen, es decir  $N$ , debe ser un número par (en este caso 40) así su respuesta en frecuencia no es cero en  $\omega=\pi$ . Además la respuesta en frecuencia de un diferenciador ideal está dada por:

$$H(e^{j\omega}) = j \cdot \text{sgn}(\omega) \cdot \frac{|\omega|}{\pi} e^{-j\alpha\omega}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Grafique mediante MatLab la respuesta al impulso  $h[n]$  del filtro obtenido y su respuesta en frecuencia. Cambie  $N$  a un valor impar (por ejemplo 41) y repita el ejercicio. ¿Qué conclusión obtiene al respecto?

7. Diseñe un filtro *FIR* Notch de segundo orden ( $N=2$ ) que elimine la frecuencia de ruido de línea de 50 Hz de un Electrocardiograma. La frecuencia a la cual se muestrea la señal de ECG es de 250 Hz (más del doble del ancho de banda de una señal de electrocardiograma que es aproximadamente 100 Hz en el humano).
8. Diseñe un diferenciador *FIR* de segundo orden si la frecuencia a la cual se quiere muestrear la señal a derivar es de  $f_s=1000$  Hz.
9. Implemente una rutina MatLab que permita ingresar los coeficientes de un filtro *FIR* (al cual habrá que ingresarle también el orden del filtro  $N$ ). Se deberá poder verificar la respuesta del filtro diseñado, es decir la visualización de su respuesta en frecuencia (respuesta ante una delta de Dirac a la entrada del filtro *FIR*).

Tercera Parte. Implementación Filtros IIR (Infinite Impulse Response)

10. Dada la respuesta en frecuencia de un filtro Pasa Bajos de primer orden *RC*, se pide implementarlo en forma digital con un filtro *IIR* (mediante el uso de la Transformada Bilineal) con las siguientes características: Frecuencia de Muestreo  $f_s=1$  KHz y una frecuencia de 3 dB del filtro de 60 Hz.
11. Verifique la correcta implementación del filtro *IIR* anterior mediante MatLab calculando y graficando su respuesta al impulso, su función de Transferencia y graficando la salida temporal  $y(t)$  que se obtiene de haber filtrado la señal de entrada  $x(t) = 2 \sin(2\pi 50 \cdot t) + \sin(2\pi 300 \cdot t)$  con el filtro digital *IIR*.
12. Teniendo en cuenta la siguiente Función de Transferencia de un Filtro Notch Analógico

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}s + \omega_0^2}, \text{ con } \begin{cases} \omega_0 = 2\pi \cdot 50 \text{ (1/s)} \\ Q_0 = 100 \end{cases}$$

se pide una implementación digital *IIR* del mismo en la cual la frecuencia a eliminar sea de  $f_0=50$  Hz siendo la frecuencia de muestreo de  $f_s=1$  KHz. Elija el  $Q$  del Filtro Notch analógico de tal manera de conseguir la máxima atenuación a la frecuencia de eliminación (puede utilizar el comando **tf** de Matlab de la función de transferencia del filtro analógico para elegir el mejor factor de selectividad). Verifique además el resultado del *IIR* Notch diseñado graficando la respuesta al impulso del Filtro Digital como así también su respuesta en Frecuencia. ¿Que pasa si la frecuencia de muestreo fuera 200 Hz?

13. Diseñe un filtro Pasa Bajos Butterworth *IIR* suponiendo que se requiere que la banda de paso sea constante dentro de 1 dB para frecuencias por debajo de 100 Hz y que la banda

de atenuación sea mayor que 15 dB para frecuencias superiores a 150 Hz (se recomienda utilizar MatLab para obtener la función de transferencia del filtro pedido). La frecuencia de muestreo que se utiliza para el diseño del filtro es de 1 KHz. Verifique su diseño graficando la respuesta al impulso del filtro como así también su respuesta en frecuencia. Utilice el comando de MatLab *fdatool* para este algoritmo.

14. Diseñe un filtro Pasa Bajos *IIR* usando una aproximación de Chebyshev con 1dB de ripple en la banda pasante, una frecuencia de corte de 500 Hz, 45 dB de atenuación a 1KHz. La frecuencia de muestreo que se utiliza para el diseño del filtro es de 10 KHz. Verifique su diseño graficando la respuesta al impulso del filtro como así también su respuesta en frecuencia. Utilice el comando de MatLab *fdatool* para este algoritmo.
15. Diseñe un filtro Pasa Altos Chebyshev *IIR* con una frecuencia de  $-3$  dB a 1 KHz y una banda de atenuación de 50 dB a 0.5 KHz. La frecuencia de muestreo que se utiliza para el diseño del filtro es de 10 KHz. Verifique su diseño graficando la respuesta al impulso del filtro como así también su respuesta en frecuencia. Utilice el comando de MatLab *fdatool* para este algoritmo.
16. Diseñe un filtro Pasa Banda *IIR* Elíptico de 6to. orden centrado en 4 KHz con 1 KHz de ancho de banda, un ripple en la banda de paso de 1 dB y un ripple en la banda de atenuación de por lo menos 100 dB. La frecuencia de muestreo que se utiliza para el diseño del filtro es de 40 KHz. Verifique su diseño graficando la respuesta al impulso del filtro como así también su respuesta en frecuencia. Utilice el comando de MatLab *fdatool* para este algoritmo.
17. Implemente una rutina MatLab que permita ingresar los coeficientes de un filtro *IIR* (al cual habrá que ingresarle también el orden del filtro  $N$ , que puede ser no mayor que 6). Se deberá poder verificar la respuesta del filtro diseñado, es decir la visualización de su respuesta en frecuencia (respuesta ante una delta de Dirac a la entrada del filtro *IIR*).