PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS Nº 2
Análisis Frecuencial Discreto

1. Realice un análisis teórico de la propiedad de desplazamiento temporal en el dominio de la *Transformada Z* y de la *Transformada Discreta de Fourier*.

2. Verifique la propiedad de desplazamiento circular anterior, por definición y mediante el uso de la *Transformada Discreta de Fourier* (comando *fft* en MatLab), siendo la señal de entrada $a = [1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 5 \quad 3 \quad 1]$, con un desplazamiento circular $n_0 = -4$.

3. Una señal $a[n]$ tiene una secuencia inversa $a^{-1}[n] = b[n]$ si se cumple que $a[n] * b[n] = \delta[n]$. Por medio de la *Transformada Discreta de Fourier* y su correspondiente inversa, encuentre la secuencia $a^{-1}[n] = b[n]$ de la secuencia $a[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$. Verifique el resultado obtenido convolucionando la secuencia $a[n]$ con la $b[n]$ obtenida.

4. Analice la propiedad de *Transformada de Fourier* de una Secuencia (TFS) que consiste en *Sobremuestrear* a una señal Tenga en cuenta que si:

$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, entonces $g_L[n] = \begin{cases} x[n/L] & , n = kL \\ 0 & , n \neq kL \end{cases}, k \in \mathrm{Z} \leftrightarrow G_L(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$, o bien si $x[n] \leftrightarrow X(z)$, entonces $g_L[n] = \begin{cases} x[n/L] & , n = kL \\ 0 & , n \neq kL \end{cases}, k \in \mathrm{Z} \leftrightarrow G_L(z) = X(z^L)$.

Implemente una rutina que permita realizar el sobremuestreo con *L=2* de un vector genérico. Compruebe el resultado con la señal $a[n] = [2 \quad 5 \quad 3]$. Modifique el programa anterior para que permita un sobremuestreo genérico *L*. Investigue la existencia de rutinas prediseñadas para tal efecto y verifique su algoritmo con esta rutina de Matlab.

5. La técnica de *Submuestreo*, consiste en tomar muestras de una señal con un cierto intervalo *M* de las mismas, es decir si se tiene una secuencia $x[n]$, la secuencia submuestreada con *M* puntos será $y[n] = x[nM]$. La señal resultante contará con menos puntos que la señal original, y en el espectro de las frecuencias se producirá solapamiento. Implemente una rutina que realice el submuestreo de un vector con *M=2*. Use la señal $a = [1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 8 \quad 6]$. Investigue la existencia de rutinas prediseñadas para tal efecto y verifique su algoritmo con esta rutina de Matlab.

6. Implemente una rutina que calcule la *Transformada de Fourier Discreta (DFT)* de una secuencia. Puede utilizar funciones predefinidas del *MatLab*. El parámetro de entrada debe ser la secuencia de datos y los parámetros de salida la señal compleja transformada. Esta rutina debe graficarse con un algoritmo de graficado diseñado a tal efecto. Recuerde las expresiones de la Transformada Discreta de Fourier

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\cdot\pi\cdot n\cdot k}{N}} \quad , \quad \text{con } k=0,1,2\cdots,N-1$$

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\cdot\pi\cdot n\cdot k}{N}} \quad , \quad \text{con } n=0,1,2\cdots,N-1$$

Recuerde que la fracción 1/N puede estar en cualquiera de las dos transformadas, difiriendo cada una de ellas del autor.

7. Repita el ejercicio anterior, pero ahora calculando la *Transformada Discreta Inversa de Fourier* de una secuencia. Su algoritmo debe recibir *Parte Real* e *Imaginaria* de la *Transformada Discreta de Fourier* y entregar la señal discreta en sus partes *Real* e *Imaginaria*. Tenga presente que, si la Transformada Discreta de Fourier provino de una señal real, la parte imaginaria de su antitransformada debe ser indefectiblemente cero para todo n.

8. Para los siguientes sistemas lineales, discretos, causales e invariantes al desplazamiento, se pide graficar su respuesta en frecuencia y establecer qué tipo de filtro define cada una de sus ecuaciones en diferencias:

a) $y[n]+0.13\,y[n-1]+0.52\,y[n-2]+0.3\,y[n-3]=0.16x[n]-0.48x[n-1]+0.48x[n-2]-0.16x[n-3]$

b) $y[n]-0.268\,y[n-2]=0.634x[n]-0.634x[n-2]$

c) $y[n]+0.268\,y[n-2]=0.634x[n]+0.634x[n-2]$

d) $10\,y[n]-5\,y[n-1]+y[n-2]=x[n]-5x[n-1]+10x[n-2]$

9. Determine y grafique las parte real e imaginaria y el espectro de magnitud y fase la Transformada de Fourier de una secuencia (TFS) para diferentes valores de r y ϕ del siguiente filtro digital (utilice el comando *fvtool* para la ubicación de los polos):

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-2r(\cos\phi)e^{-j\omega}+r^2e^{-2j\omega}}, \text{ con } \; 0<r<1$$

10. Determine y grafique las parte real e imaginaria y el espectro de magnitud y fase las siguientes Transformadas de Fourier:

a) $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{0.0761\left(1-0.7631e^{-j2\omega}+e^{-j4\omega}\right)}{1+1.355e^{-j2\omega}+0.6196e^{-j4\omega}}$

b) $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{0.0518-0.1553e^{-j\omega}+0.1553e^{-j2\omega}+0.0518e^{-j3\omega}}{1+1.2828e^{-j\omega}+1.0388e^{-j2\omega}+0.3418e^{-j3\omega}}$

11. Un *Filtro Notch* intenta eliminar una frecuencia en particular. Suponga que una señal continua de banda limitada contiene una interferencia de línea de *50Hz*, que deseamos eliminar con el filtro mencionado. Se pide:

a) Suponga que el período de muestreo de la señal de entrada con ruido al sistema discreto es de $T_S = 1\,\text{mS}$. ¿Cuál es la frecuencia máxima que puede tener la señal de entrada de modo tal de evitar el solapamiento a la entrada del Filtro Notch?

b) El Filtro Notch a ser utilizado tiene la siguiente respuesta en frecuencia (utilice el comando *fvtool* para la ubicación de los polos y visualización de respuesta en frecuencia o también *fdatool*. Investigue el uso del comando *zplane*):

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\left[1 - e^{-j(\omega-\omega_0)}\right]\left[1 - e^{-j(\omega+\omega_0)}\right]}{\left[1 - re^{-j(\omega-\omega_0)}\right]\left[1 - re^{-j(\omega+\omega_0)}\right]}$$

Grafique la respuesta de amplitud y fase de $H\left(e^{j\omega}\right)$. Suponga un valor de ángulo discreto $\omega_0 = 2\pi/5$ para la realización del gráfico de respuesta espectral.

c) ¿Qué valor de ω_0 debería ser seleccionado para eliminar la componente de *50Hz* de la señal de entrada?

d) Realice un gráfico de la respuesta de amplitud del Filtro Notch con el valor de ω_0 calculado en el inciso anterior.

e) Genere 150 muestras de una señal senoidad de *50Hz* con una frecuencia de muestreo $f_S = 1000\text{Hz}$. Use la función *filter* para procesar esta señal con el Filtro Notch y el valor de ángulo discreto obtenido en el inciso ***c)***. Grafique el resultado obtenido y verifique que este filtro elimina un tono de *50Hz*.

f) la Transformada de Fourier de una Secuencia describe la respuesta permanente de un filtro. De esta forma, se debería observar una respuesta "transitoria" antes que el cero a *50Hz* del filtro rechace a la entrada completamente. Determine la duración de este transitorio (en milisegundos) desde el comienzo de la señal hasta el punto en donde la salida sea menor al *1%* de la amplitud de la señal de entrada.

12. El *Retardo de Grupo* de un sistema se define como la derivada negativa de la fase de su respuesta en frecuencia $H\left(e^{j\omega}\right)$. Se pide:

a) Exprese $H\left(e^{j\omega}\right)$ en forma polar como $H\left(e^{j\omega}\right) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)}$, siendo $A(\omega)$ real y demuestre la siguiente propiedad:

$$-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \mathrm{Re}\left\{\frac{j\,\dfrac{dH\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}}{H\left(e^{j\omega}\right)}\right\}$$

b) Usando la función *fft* junto con operaciones algebraicas, desarrolle un algoritmo que calcule el Retardo de Grupo de la respuesta al impulso de un sistema $h[n]$ de *N* puntos en el intervalo $0 \le \omega \le 2\pi$.

c) Verifique lo anteriormente hallado, utilizando la función predefinida de MatLab *grpdelay*.

13. Teniendo en cuenta el algoritmo de *Retardo de Grupo* desarrollado en el problema anterior, se pide:

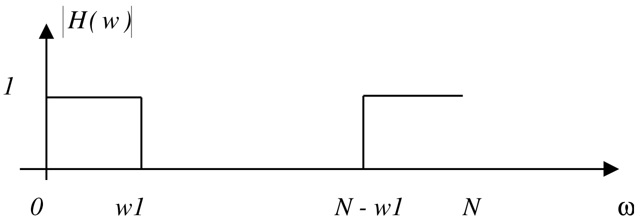
a) Para la respuesta al impulso $h[n] = \delta[n-4]$, calcule analíticamente el retardo de Grupo

b) Represente $h[n] = \delta[n-4]$ mediante un vector columna y calcule su retardo de Grupo.

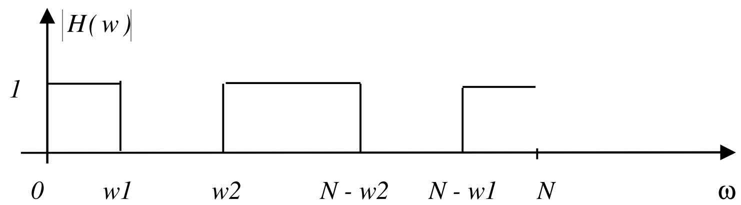
14. Calcule y grafique las *Transformadas Discretas de Fourier* de las señales seleccionadas en ejercicio ***8)*** del *Trabajo Práctico N°1*. Visualice los resultados en Módulo y Fase o Parte Real e Imaginaria. Use para ello, lo desarrollado en el ejercicio ***6)***.

15. Filtros de Fase Cero. Implementar en forma digital y visualizar los resultados de señales filtradas con los siguientes filtros de fase cero:

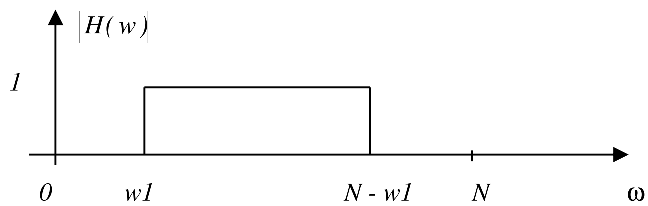
- ***Filtro Pasa Bajos de Fase Cero***



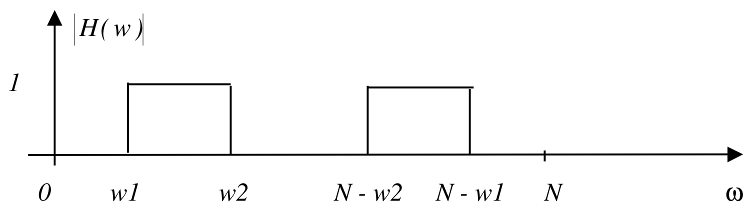
- ***Filtro Elimina Banda de Fase Cero***



- ***Filtro Pasa Altos de Orden Cero***



- ***Filtro Pasa Banda de Orden Cero***



16. Filtrado por Nivel. El caso de Filtrado por nivel es un tipo de filtro especial que no tiene una determinada respuesta en frecuencia *H(ω)* sino que deja pasar o no componentes de frecuencia de la señal si están por encima de un determinado nivel ***L***. Las componentes de frecuencia de la señal (entiéndase espectro de amplitud de la señal) que no superen este nivel de umbral serán llevadas a cero. El espectro resultante se antitransforma y se obtiene la señal filtrada. También puede pensarse el nivel *L* como un cierto porcentaje del contenido de energía de la señal a filtrar, en cuyo caso, este nivel discriminaría energía de la señal y no solo su amplitud. Implemente un filtro por nivel que permita realizar alguna de estas dos opciones en la señal a ser filtrada.

17. Aplique el filtro de nivel programado en el ejercicio anterior a una señal de audio y verifique el efecto de utilizar diferentes niveles para umbralar. Use 3 diferentes umbrales. Grafique el espectro y la señal en tiempo para los diferentes umbrales seleccionados. Comente los resultados.

APLICACIONES

Decimación. Considerando la señal analógica $x_a(t)=e^{-at}u(t)$, y utilizando un valor de *a*, un T_S y una cantidad de muestras *N*, de manera tal que la señal digitalizada pueda ser considerada de *Banda Limitada*, se pide:

18. Observe la composición espectral de la señal digitalizada $x[n]\equiv x(nT_S)$, utilizando el comando *MatLab fft*, que realiza la Transformada Discreta de Fourier de una señal discreta. Recuerde que la Transformada tiene parte real e imaginaria, por lo que deberá calcular el módulo de la misma con el comando abs, para luego realizar el graficado de la misma, con los comandos plot o stem.

19. Genere ahora una nueva señal discreta $y[n]=x[nM]$, con $M=2;\ \ M=4\ \ y\ \ M=8$. es decir, como el bloque submuestreador visto en la teoría o ejercicios anteriores. Luego, observe el espectro de Fourier (al igual que en el inciso anterior) obtenido para cada uno de estos submuestreos.

20. Considerando la secuencia original $x[n]\equiv x(nT_S)$, filtre la misma mediante un filtro Pasa Bajos de Fase cero con un Angulo de Corte de $\omega_C=\dfrac{\pi}{M}$, con los valores de *M* del inciso anterior. Observe los 3 resultados obtenidos. A esta señal filtrada denomínela $v[n]$.

21. Para cada una de las señales $v[n]$ filtradas del inciso anterior, nuevamente realice un submuestreo de las mismas al igual que en el inciso 2, es decir $y_S[n]=v[nM]$, con $M=2; M=4$ y $M=8$. Para cada una de estas secuencias filtradas y submuestreadas, obtenga su espectro de Fourier y compare estos resultados con los obtenidos en el ejercicio ***18)***. ¿Qué puede concluir al respecto?

Interpolación. Considerando la señal analógica $x_a(t)=e^{-at}u(t)$, y utilizando un valor de *a*, un T_S y una cantidad de muestras *N*, de manera tal que la señal digitalizada pueda ser considerada de *Banda Limitada*, se pide:

22. Genere la siguiente señal discreta: $v[n]=\begin{cases} x[n/L], & n=kL \\ 0 & ,\forall \text{ otro } n \end{cases}$, para valores de $L=2; L=4$ y $L=8$, es decir, como el bloque sobremuetreador visto en la teoría o ejercicios anteriores. Luego, observe el espectro de Fourier obtenido para cada uno de estos sobremuestreos. ¿Qué observa respecto al espectro del inciso ***17)***?

23. Considerando la secuencia del inciso anterior $v[n]$, filtre la misma mediante un filtro Pasa Bajos de Fase cero con un Angulo de Corte ω_C que debe determinar Ud. en base a lo dictado en la teoría, teniendo en cuenta que deben ser cumplidas las longitudes *L* de las respuestas al impulso de los filtros. Observe los 3 resultados obtenidos. ¿Se ha conseguido la interpolación de la señal original a cada uno de los puntos *L* seleccionados?

24. Implemente una Rutina para correlacionar señales, ya sea Autocorrelación o Correlación Cruzada utilizando propiedades de *Transformada Discreta de Fourier*.

25. **Sonar simplificado**. Se desea conocer la distancia *D* a la que se encuentra un objeto utilizando un sistema del tipo sonar, que consiste en enviar un pulso de sonido $x[n]=A\cos(\omega\cdot n)$ con *n=0,1,...,N* y recibir el eco producido en el objeto $y[n]$.
Considere para esto la velocidad de propagación del sonido *v=1500 m/s* y un coeficiente de atenuación de *At=1 dB/Km* (para 10KHz).
Considere además que existe un ruido aditivo $r[n]$ con distribución uniforme entre $[-R,R]$ que se suma a la señal recibida. De esta forma el modelo de sonar simplificado es el siguiente: $y[n]=A_t\cdot D\cdot x[n]+r[n]$.
Diseñe un algoritmo que permita calcular la distancia utilizando la función de correlación. ¿Cómo influyen el ruido y la distancia en el cálculo? Evalúe las condiciones de diseño que permitan detectar un objeto a 5 Km y calcule la relación señal ruido (SNR) de la señal recibida. Grafique las señales obtenidas.

26. Implementar una rutina que permita aplicar a una señal discreta a ser filtrada, distintas ventanas de visualización. A su vez, estas ventanas pueden ser aplicadas en el espectro de la frecuencia para de esta forma observar en el dominio discreto del tiempo su efecto sobre la señal transformada. Las ventanas a implementar son:

- *Hanning*
- *Hamming*
- *Bartlett*
- *Blackman*
- *Triangular*

27. **Suma de cosenos – Ventana rectangular.**
Considere la señal $x[n]=A_1\cos(\omega_1 n)+A_2\cos(\omega_2 n)$, utilizando una frecuencia de muestreo de Fs=10 kHz.

a) Utilizando una ventana rectangular de *L=64*, ¿cuál es la mínima diferencia entre frecuencias que puede detectar? ¿Y con *L=512*?

b) Utilizando una ventana rectangular, ¿cuál es la relación que debe haber entre las amplitudes de los cosenos para poder diferenciarlos en el espectro?

c) Utilizando las amplitudes $A_1=1$ y $A_2=0.75$. Grafique el espectro (utilizando *N=1024* muestras para realizar la transformación) de la señal ventaneada utilizando:

   i. $w_1=2\pi/6$ y $w_2=2\pi/3$, L=64
   ii. $w_1=2\pi/14$ y $w_2=4\pi/15$, L=64
   iii. $w_1=2\pi/14$ y $w_2=2\pi/12$, L=64
   iv. $w_1=2\pi/14$ y $w_2=2\pi/12$, L=512

d) Repita el punto ***c)*** utilizando las amplitudes $A_1=1$ y $A_2=0.2$.

28. **Suma de cosenos – Ventana Blackman.**

Considere la señal $x[n]=A_1\cos(\omega_1 n)+A_2\cos(\omega_2 n)$, utilizando una frecuencia de muestreo de Fs=10 kHz.

a) Utilizando una ventana Blackman de *L=64*, ¿cuál es la mínima diferencia entre frecuencias que puede detectar? ¿Y con *L=512*?

b) Utilizando una ventana Blackman, ¿cuál es la relación que debe haber entre las amplitudes de los cosenos para poder diferenciarlos en el espectro?

c) Utilizando las amplitudes $A_1=1$ y $A_2=0.75$. Grafique el espectro (utilizando *N=1024* muestras para realizar la transformación) de la señal ventaneada utilizando:

   i. $w_1=2\pi/6$ y $w_2=2\pi/3$, L=64
   ii. $w_1=2\pi/14$ y $w_2=4\pi/15$, L=64
   iii. $w_1=2\pi/14$ y $w_2=2\pi/12$, L=64
   iv. $w_1=2\pi/14$ y $w_2=2\pi/12$, L=512

d) Repita el punto ***c)*** utilizando las amplitudes $A_1=1$ y $A_2=0.001$.