8. Aplique o método Preditor-Corretor de Milne-Simpson para aproximar as soluções dos problemas de valor inicial do Exercício 3.

9. a. Utilizando a forma de Lagrange do polinômio interpolador derive a Equação (5.32).

   b. Utilize a forma das diferenças regressivas de Newton do polinômio interpolador para derivar a Equação (5.34).

10. Derive a Equação (5.33) com o seguinte método. Use

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + ah\,f(t_i, y(t_i)) + bh\,f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + ch\,f(t_{i-2}, y(t_{i-2})).$$

Expanda $y(t_{i+1}), f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))$ e $f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$ na série de Taylor na vizinhança de $(t_i, y(t_i))$ e iguale os coeficientes h, h^2 e h^3 para obter a, b e c.

11. Derive a Equação (5.36) e seu erro local de truncamento utilizando uma forma adequada de um polinômio interpolador.

12. Derive o método de Simpson aplicando a regra de Simpson à integral

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt.$$

13. Derive o método de Milne aplicando a fórmula aberta de Newton-Cotes (4.29) à integral

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-3}) = \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt.$$

14. Verifique os dados da Tabela 5.10.

5.7 Métodos Multipassos com Tamanho Variável de Passo

O método de Runge-Kutta-Fehlberg é utilizado para controlar o erro porque oferece a cada passo, com um pequeno custo adicional, *duas* aproximações que podem ser comparadas e relacionadas com o erro local. As técnicas preditor-corretor sempre geram duas aproximações em cada passo, razão pela qual elas são candidatas naturais para a adaptação do controle de erro.

Para demonstrar o procedimento de controle de erro, construiremos um método preditor-corretor com tamanho de passo variável, utilizando como preditor o método explícito de Adams-Bashforth de quatro passos e como corretor o método implícito de Adams-Moulton de três passos.

O método de Adams-Bashforth de quatro passos vem da relação

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24}[55\,f(t_i, y(t_i)) - 59\,f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$$

$$+ 37\,f(t_{i-2}, y(t_{i-2})) - 9\,f(t_{i-3}, y(t_{i-3}))] + \frac{251}{720}\,y^{(5)}(\hat{\mu}_i)h^5,$$

para algum $\hat{\mu}_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$. A suposição de que as aproximações $w_0, w_1, \ldots, w_i$ são todas precisas significa que o erro de truncamento de Adams-Bashforth é

$$\frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}^{(0)}}{h} = \frac{251}{720}\,y^{(5)}(\hat{\mu}_i)h^4. \tag{5.39}$$

Uma análise similar do método de Adams-Moulton de três passos, o qual vem de

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24}[9\,f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + 19\,f(t_i, y(t_i)) - 5\,f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$$

$$+ f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))] - \frac{19}{720}\,y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)h^4,$$

para algum $\tilde{\mu}_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$, nos leva ao erro local de truncamento

$$\frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}}{h} = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) h^4. \tag{5.40}$$

Para seguir adiante, devemos supor que, para um valor pequeno de h,

$$y^{(5)}(\hat{\mu}_i) \approx y^{(5)}(\tilde{\mu}_i).$$

A efetividade do método de controle de erro depende diretamente dessa suposição.

Se subtrairmos a Equação (5.40) da Equação (5.39), teremos

$$\frac{w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}}{h} = \frac{h^4}{720}[251 y^{(5)}(\hat{\mu}_i) + 19 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)] \approx \frac{3}{8} h^4 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i),$$

e, portanto,

$$y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) \approx \frac{8}{3h^5}(w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}). \tag{5.41}$$

Ao utilizar esse resultado para suprimir o termo que contém $h^4 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$ em (5.40), obtemos a aproximação ao erro local de truncamento de Adams-Moulton

$$|\tau_{i+1}(h)| = \frac{|y(t_{i+1}) - w_{i+1}|}{h} \approx \frac{19h^4}{720} \cdot \frac{8}{3h^5} |w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}| = \frac{19|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{270h}.$$

Suponha agora que reconsideremos (5.40) com um novo tamanho de passo qh que gera novas aproximações $\hat{w}_{i+1}^{(0)}$ e $\hat{w}_{i+1}$. O objetivo é escolher q de tal forma que o erro local de truncamento de (5.40) esteja limitado pela tolerância prescrita ε. Se assumimos que o valor $y^{(5)}(\mu)$ em (5.40) associado com qh é também aproximado por meio de (5.41), então

$$\frac{|y(t_i + qh) - \hat{w}_{i+1}|}{qh} = \frac{19q^4h^4}{720} |y^{(5)}(\mu)| \approx \frac{19q^4h^4}{720}\left[\frac{8}{3h^5} | w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)} |\right],$$

e devemos selecionar q tal que

$$\frac{|y(t_i + qh) - \hat{w}_{i+1}|}{qh} \approx \frac{19q^4}{270} \frac{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{h} < \varepsilon.$$

Ou seja, selecionamos q tal que

$$q < \left(\frac{270}{19} \frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}\right)^{1/4} \approx 2\left(\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}\right)^{1/4}.$$

Uma série de suposições de aproximação foram feitas nesse desenvolvimento; contudo, na prática se seleciona q de uma maneira conservadora, geralmente como

$$q = 1{,}5\left(\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}\right)^{1/4}.$$

Uma mudança no tamanho de passo em um método multipassos requer mais avaliações de funções do que em um método de um passo, porque novos valores iniciais uniformemente espaçados têm de ser calculados. Como conseqüência, na prática se costuma ignorar a mudança de tamanho de passo sempre que o erro local de truncamento se encontra entre $\varepsilon/10$ e ε, ou seja, quando

$$\frac{\varepsilon}{10} < |\tau_{i+1}(h)| = \frac{|y(t_{i+1}) - w_{i+1}|}{h} \approx \frac{19|w_{i+1} \; w_{i+1}^{(0)}|}{270h} < \varepsilon.$$

Além disso, q recebe um limite superior para se assegurar de que uma aproximação única, de precisão pouco usual, não produza um tamanho de passo demasiadamente grande. O Algoritmo 5.5 incorpora essa medida de segurança com um limite superior de 4.

Lembre-se de que, como os métodos multipassos requerem tamanhos de passo iguais nos valores iniciais, qualquer mudança de tamanho exige que se recalcule outros valores iniciais nesse ponto. No Algoritmo 5.5 isso é feito chamando-se um subalgoritmo de Runge-Kutta (Algoritmo 5.2).

ALGORITMO 5.5

Preditor-Corretor com Tamanho Variável de Passo de Adams

Para aproximar a solução do problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

com um erro local de truncamento dentro dos limites de uma tolerância dada:

ENTRADA pontos extremos a, b; condição inicial α; tolerância TOL; tamanho máximo de passo $hmax$; tamanho mínimo de passo $hmin$.

SAÍDA i, t_i, w_i, h onde no i-ésimo passo w_i aproxima $y(t_i)$ e se usa o tamanho de passo h ou uma mensagem de que se ultrapassou o tamanho mínimo de passo.

Passo 1 Configure um subalgoritmo para o método de Runge-Kutta de quarta ordem que será chamado $RK4(h, v_0, x_0, v_1, x_1, v_2, x_2, v_3, x_3)$ que aceita como entrada um tamanho de passo h e valores iniciais $v_0 \approx y(x_0)$ e que retorna $\{(x_j, v_j) \mid j = 1, 2, 3\}$ definido pelo seguinte:
para $j = 1, 2, 3$
faça $K_1 = hf(x_{j-1}, v_{j-1})$;
$K_2 = hf(x_{j-1} + h/2, v_{j-1} + K_1/2)$
$K_3 = hf(x_{j-1} + h/2, v_{j-1} + K_2/2)$
$K_4 = hf(x_{j-1} + h, v_{j-1} + K_3)$
$v_j = v_{j-1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$;
$x_j = x_0 + jh$.

Passo 2 Faça $t_0 = a$;
$w_0 = \alpha$;
$h = hmax$;
$FLAG = 1$; (*FLAG será usado para sair do loop no Passo 4.*)
$LAST = 0$; (*LAST indica quando o último valor é calculado.*)
SAÍDA (t_0, w_0).

Passo 3 Chame $RK4(h, w_0, t_0, w_1, t_1, w_2, t_2, w_3, t_3)$;
Faça $NFLAG = 1$; (*Indica cálculo a partir de RK4.*)
$i = 4$;
$t = t_3 + h$.

Passo 4 Enquanto ($FLAG = 1$) siga os Passos 5-20.

Passo 5 Faça
$$WP = w_{i-1} + \frac{h}{24}[55 f(t_{i-1}, w_{i-1}) - 59 f(t_{i-2}, w_{i-2}) + 37 f(t_{i-3}, w_{i-3}) - 9 f(t_{i-4}, w_{i-4})]; \quad (\textit{Prediz } w_i.)$$
$$WC = w_{i-1} + \frac{h}{24}[9 f(t, WP) + 19 f(t_{i-1}, w_{i-1}) - 5 f(t_{i-2}, w_{i-2}) + f(t_{i-3}, w_{i-3})]; \quad (\textit{Corrige } w_i.)$$
$$\sigma = 19 \, |WC - WP| / (270h).$$

Passo 6 Se $\sigma \leq TOL$ então siga os Passos 7-16 (*Resultado aceito.*)
se não, siga os Passos 17-19. (*Resultado recusado.*)

Passo 7 Faça $w_i = WC$; (*Resultado aceito.*)
$t_i = t$.

Passo 8 Se $NFLAG = 1$ então para $j = i - 3, i - 2, i - 1, i$
SAÍDA (j, t_j, w_j, h);
(*Os resultados anteriores também são aceitos.*)
se não, SAÍDA (i, t_i, w_i, h).
(*Os resultados anteriores já aceitos.*)

Passo 9 Se $LAST = 1$ então faça $FLAG = 0$ (*Próximo passo é o 20.*)
se não, siga os Passos 10-16.

Passo 10 Faça $i = i + 1$;
$NFLAG = 0$.

Passo 11 Se $\sigma \leq 0{,}1\,TOL$ ou $t_{i-1} + h > b$ então siga os Passos 12-16.
(*Aumenta h se é mais preciso que o requerido ou diminui h para incluir b como um ponto de rede.*)

Passo 12 Faça $q = (TOL/(2\sigma))^{1/4}$.

Passo 13 Se $q > 4$ então faça $h = 4h$
se não, faça $h = qh$.

Passo 14 Se $h > hmax$ então faça $h = hmax$.

Passo 15 Se $t_{i-1} + 4h > b$ então
faça $h = (b - t_{i-1})/4$;
$LAST = 1$.

Passo 16 Chame $RK4(h, w_{i-1}, t_{i-1}, w_i, t_i, w_{i+1}, t_{i+1}, w_{i+2}, t_{i+2})$;
Faça $NFLAG = 1$;
$i = i + 3$. (*Ramo verdadeiro terminado. Próximo passo é o 20.*)

Passo 17 Faça $q = (TOL/(2\sigma))^{1/4}$. (*Ramo falso desde o Passo 6: resultado rejeitado.*)

Passo 18 Se $q < 0{,}1$ então faça $h = 0{,}1h$
se não, faça $h = qh$.

Passo 19 Se $h < hmin$ então faça $FLAG = 0$;
SAÍDA ('*hmin ultrapassado*')
se não
se $NFLAG = 1$ então faça $i = i - 3$;
(*Resultados prévios também rejeitados.*)
Chame $RK4(h, w_{i-1}, t_{i-1}, w_i, t_i, w_{i+1}, t_{i+1}, w_{i+2}, t_{i+2})$;
faça $i = i + 3$;
$NFLAG = 1$.

Passo 20 Faça $t = t_{i-1} + h$.

Passo 21 PARE. ■

EXEMPLO 1

A Tabela 5.13 apresenta os resultados obtidos ao se usar o Algoritmo 5.5 para calcular as aproximações para a solução do problema de valor inicial

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0{,}5,$$

que tem a solução $y(t) = (t + 1)^2 - 0{,}5e^t$. Na entrada são incluídos a tolerância $TOL = 10^{-5}$, o tamanho máximo de passo $hmáx = 0{,}25$ e o tamanho mínimo de passo $hmín = 0{,}01$. ■

Tabela 5.13

t_i	$y(t_i)$	w_i	h_i	σ_i	$\lvert y(t_i) - w_i \rvert$
0	0,5	0,5			
0,1257017	0,7002323	0,7002318	0,1257017	$4{,}051 \times 10^{-6}$	0,0000005
0,2514033	0,9230960	0,9230949	0,1257017	$4{,}051 \times 10^{-6}$	0,0000011
0,3771050	1,1673894	1,1673877	0,1257017	$4{,}051 \times 10^{-6}$	0,0000017
0,5028066	1,4317502	1,4317480	0,1257017	$4{,}051 \times 10^{-6}$	0,0000022
0,6285083	1,7146334	1,7146306	0,1257017	$4{,}610 \times 10^{-6}$	0,0000028
0,7542100	2,0142869	2,0142834	0,1257017	$5{,}210 \times 10^{-6}$	0,0000035
0,8799116	2,3287244	2,3287200	0,1257017	$5{,}913 \times 10^{-6}$	0,0000043
1,0056133	2,6556930	2,6556877	0,1257017	$6{,}706 \times 10^{-6}$	0,0000054
1,1313149	2,9926385	2,9926319	0,1257017	$7{,}604 \times 10^{-6}$	0,0000066
1,2570166	3,3366642	3,3366562	0,1257017	$8{,}622 \times 10^{-6}$	0,0000080
1,3827183	3,6844857	3,6844761	0,1257017	$9{,}777 \times 10^{-6}$	0,0000097
1,4857283	3,9697541	3,9697433	0,1030100	$7{,}029 \times 10^{-6}$	0,0000108
1,5887383	4,2527830	4,2527711	0,1030100	$7{,}029 \times 10^{-6}$	0,0000120
1,6917483	4,5310269	4,5310137	0,1030100	$7{,}029 \times 10^{-6}$	0,0000133
1,7947583	4,8016639	4,8016488	0,1030100	$7{,}029 \times 10^{-6}$	0,0000151
1,8977683	5,0615660	5,0615488	0,1030100	$7{,}760 \times 10^{-6}$	0,0000172
1,9233262	5,1239941	5,1239764	0,0255579	$3{,}918 \times 10^{-8}$	0,0000177
1,9488841	5,1854932	5,1854751	0,0255579	$3{,}918 \times 10^{-8}$	0,0000181
1,9744421	5,2460056	5,2459870	0,0255579	$3{,}918 \times 10^{-8}$	0,0000186
2,0000000	5,3054720	5,3054529	0,0255579	$3{,}918 \times 10^{-8}$	0,0000191

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 5.7

1. Use o Algoritmo Preditor-Corretor com Tamanho Variável de Passo de Adams com uma tolerância $TOL = 10^{-4}$, $hmáx = 0{,}25$ e $hmín = 0{,}025$ para aproximar as soluções dos seguintes problemas de valor inicial. Depois, compare os resultados com os valores reais.
   - **a.** $y' = te^{3t} - 2y$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 0$; solução real $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.
   - **b.** $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \le t \le 3$, $y(2) = 1$; solução real $y(t) = t + 1/(1 - t)$.
   - **c.** $y' = 1 + y/t$, $1 \le t \le 2$, $y(1) = 2$; solução real $y(t) = t \ln t + 2t$.
   - **d.** $y' = \cos 2t + \operatorname{sen} 3t$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$; solução real $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$.
2. Use o Algoritmo Preditor-Corretor com Tamanho Variável de Passo de Adams com uma tolerância $TOL = 10^{-4}$ para aproximar as soluções dos seguintes problemas de valor inicial.
   - **a.** $y' = (y/t)^2 + y/t$, $1 \le t \le 1{,}2$, $y(1) = 1$, com $hmáx = 0{,}05$ e $hmín = 0{,}01$.
   - **b.** $y' = \operatorname{sen} t + e^{-t}$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 0$, com $hmáx = 0{,}2$ e $hmín = 0{,}01$.
   - **c.** $y' = (1/t)(y^2 + y)$, $1 \le t \le 3$, $y(1) = -2$, com $hmáx = 0{,}4$ e $hmín = 0{,}01$.
   - **d.** $y' = -ty + 4t/y$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$, com $hmáx = 0{,}2$ e $hmín = 0{,}01$.
3. Use o Algoritmo Preditor-Corretor com Tamanho Variável de Passo de Adams com uma tolerância $TOL = 10^{-6}$, $hmáx = 0{,}5$ e $hmín = 0{,}02$ para aproximar as soluções dos seguintes problemas de valor inicial. Depois, compare os resultados com os valores reais.
   - **a.** $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \le t \le 4$, $y(1) = 1$; solução real $y(t) = t/(1 + \ln t)$.
   - **b.** $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \le t \le 3$, $y(1) = 0$; solução real $y(t) = t \operatorname{tg}(\ln t)$.
   - **c.** $y' = -(y + 1)(y + 3)$, $0 \le t \le 3$, $y(0) = -2$; solução real $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$.
   - **d.** $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty$, $0 \le t \le 2$, $y(0) = \frac{1}{3}$; solução real $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$.
4. Construa um Algoritmo Preditor-Corretor com Tamanho Variável de Passo de Adams tomando como base o método de Adams-Bashforth de cinco passos e o de Adams-Moulton de quatro passos. Repita o Exercício 3 aplicando esse novo método.