

3,5

Caique de Oliveira Kobayashi - 9793461

Heitor Fontana Godoy - 10335677

Lucas Hattori Costa - 10335847

Lucas Pinheiro Paiva Cavalcante - 10274270

Indice de semelhança Turnitin: 15%

Trabalho muito incompleto. Não fizeram:

- 1) seguidor de sinais ctes e variantes no tempo
- 2) rejeição de distúrbio
- 3) Compensador (feito mas muito mal feito)
- 4) pré-compensador do ITAE
- 5) simulação do melhor controlador com o sistema não linear (já que não fizeram muita coisa)
- 6) Explicação das matrizes de ponderação Q e P no moderno,
- 7) redução de ordem

Além disso:

- 1) erro absurdo supondo matriz C identidade
- 2) não sabem o que é acoplamento no sistema
- 3) Estrutura geral do trabalho é ruim: fazer a parte de modelagem física e matemática na parte inicial) de forma completa: atuadores definem a matriz B e sensores (definem a matriz C) devem vir antes de começar a parte de controle
- 4) Definir o número mínimo de sensores e com isso definir a matriz C, justificando a modelagem
- 5) Sintonizar melhor alguns controladores
- 6) Muitos gráficos sem unidades
- 7) outras correções indicada no texto.

São Paulo - SP, Brasil

29 de junho de 2020

Caique de Oliveira Kobayashi - 9793461
Heitor Fontana Godoy - 10335677
Lucas Hattori Costa - 10335847
Lucas Pinheiro Paiva Cavalcante - 10274270

Modelagem e Controle de Braço Robótico para Jogo de Tênis de Mesa

Trabalho dedicado ao desenvolvimento do sistema de controle de um sistema dinâmico a ser apresentado como instrumento de avaliação da disciplina PME 3481.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
PME 3481 - Controle e Aplicações

Orientador:
Prof. Dr. Agenor Fleury e
Prof. Dr. Décio Donha

São Paulo - SP, Brasil
29 de junho de 2020

RESUMO

O presente relatório se dispõe a tratar da modelagem e o controle de um braço robótico voltado para uma situação de jogo de tênis de mesa. Essa inspiração no esporte para aprimoramento de tecnologias na área de controle é compartilhada por diversos pesquisadores desde a década de 1980. No presente trabalho, o objetivo definido foi o controle do sistema para seu retorno ao estágio de espera. Foi construído um modelo físico e determinado um modelo linearizado, o qual apresentou comportamento adequado próximo ao ponto de operação. Foram, então, avaliados os modelos de controle no domínio da frequência (Controle Clássico) e no domínio do tempo (Controle Moderno). Quanto ao controle moderno, foram comparados os controles por alocação de polos e pelo método LQ e avaliado o emprego de um observador. Verificou-se que há convergência suficientemente rápida em ambos os casos e a viabilidade da aplicação do observador e uso de apenas três sensores e três atuadores. Quanto ao controle clássico, foi definida a função de transferência a ser estudada, optando pelo controle da velocidade angular do antebraço do robô. Foram, pois, testadas quatro formas diferentes de determinação dos ganhos de PID, obtendo melhor resposta com uso do método iterativo de ITAE. Dessa forma, foram verificadas múltiplas formas de realizar o controle do braço robótico.

Palavras-chave: Controle, Tênis de Mesa, Modelagem, Regulador, PID.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comparação de robôs para jogo de tênis de mesa	1
Figura 2 – Definição visual do problema	5
Figura 3 – Sistema base para a modelagem	8
Figura 4 – Modelo físico simplificado	9
Figura 5 – Diagramas de corpo livre da Base, Braço e antebraço, respectivamente	10
Figura 6 – Mapa de Polos	17
Figura 7 – Diagrama de Bode ($\theta_2 \times T_1$)	20
Figura 8 – Resposta no tempo para o sistema em malha aberta.	21
Figura 9 – Tendência de estabilidade para um tempo de operação muito grande. .	21
Figura 10 – Resposta dos deslocamentos no tempo do sistema	25
Figura 11 – Resposta das Velocidades no tempo do sistema	25
Figura 12 – Potências, Toques e Forças exigidas dos atuadores ao longo do movimento	26
Figura 13 – (a) Sensor <i>Vishay</i> de deslocamento linear; (b) Sensor <i>Transtek</i> de ve- locidade linear; (c) Sensor <i>Grove</i> de deslocamento angular; (d) Sensor <i>HiLetgo</i> de velocidade angular.	28
Figura 14 – Resposta no tempo dos deslocamentos com observador	29
Figura 15 – Resposta no tempo das velocidades com observador	30
Figura 16 – Convergência dos erros do observador	30
Figura 17 – Resposta ao degrau de amplitude unitária da FTMF escolhida	32
Figura 18 – Diagrama de Bode e Margens do sistema compensado	33
Figura 19 – Diagrama de blocos simplificado para controlador PID na planta. . . .	34
Figura 20 – Resposta em formato <i>S</i> esperada pelo método e resposta ao degrau da FT estudada.	35
Figura 21 – Lugar das raízes para FT estudada.	35
Figura 22 – Resposta ao degrau para sistema com controlador P sintonizado via LR	36
Figura 23 – Resposta ao degrau para sistema com controlador PID e PI sintonizado via LR	37
Figura 24 – Resposta ao degrau para sistema com controlador PID e PI sintonizado via <i>PID Tuner</i>	38
Figura 25 – Resposta ao degrau da melhor iteração por AP.	40
Figura 26 – Resposta ao degrau com uso do método ITAE	42
Figura 27 – Diagrama de Nyquist de malha aberta para o sistema sintonizado por ITAE.	43
Figura 28 – Diagrama de Bode para o sistema em malha aberta controlado com o PI por ITAE, com as margens de ganho e fase assinaladas.	44
Figura 29 – Respostas ao degrau para diferentes sintonizações PID.	45

Figura 30 – Diagrama de Bode - x , F	71
Figura 31 – Diagrama de Bode - \dot{x} , F	71
Figura 32 – Diagrama de Bode - θ_1 , F	72
Figura 33 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1$, F	72
Figura 34 – Diagrama de Bode - θ_2 , F	73
Figura 35 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_2$, F	73
Figura 36 – Diagrama de Bode - x , T_1	74
Figura 37 – Diagrama de Bode - \dot{x} , T_1	74
Figura 38 – Diagrama de Bode - θ_1 , T_1	75
Figura 39 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1$, T_1	75
Figura 40 – Diagrama de Bode - θ_2 , T_1	76
Figura 41 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_2$, T_1	76
Figura 42 – Diagrama de Bode - x , T_2	77
Figura 43 – Diagrama de Bode - \dot{x} , T_2	77
Figura 44 – Diagrama de Bode - θ_1 , T_2	78
Figura 45 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1$, T_2	78
Figura 46 – Diagrama de Bode - θ_2 , T_2	79
Figura 47 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_2$, T_2	79
Figura 48 – Diagrama de Nyquist para o controlador PID projetado por LR.	83
Figura 49 – Diagrama de Nyquist para o controlador PI projetado pelo PID Tuner.	83
Figura 50 – Diagrama de Nyquist para o controlador PID projetado pelo PID Tuner.	84
Figura 51 – Diagrama de Nyquist para o controlador PID projetado por AP.	84
Figura 52 – Diagrama de Nyquist para o controlador PI projetado por LR.	85
Figura 53 – Diagrama de Bode para o controlador PID projetado por LR.	85
Figura 54 – Diagrama de Bode para o controlador PI projetado pelo PID Tuner.	86
Figura 55 – Diagrama de Bode para o controlador PID projetado pelo PID Tuner.	86
Figura 56 – Diagrama de Bode para o controlador PID projetado por AP.	87
Figura 57 – Diagrama de Bode para o controlador PI projetado por LR.	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características de Amortecimento do Sistema	18
Tabela 2 – Análise de estabilidade por Routh-Hurwitz.	18
Tabela 3 – Valores máximos exigidos de cada um dos atuadores.	26
Tabela 4 – Características do Motor 1	27
Tabela 5 – Características do Motor 2	27
Tabela 6 – Características do Motor 3	27
Tabela 7 – Relação de sensores elencados para as medições do problema.	28
Tabela 8 – Diferentes projetos de controladores PID pelo método LR.	37
Tabela 9 – Diferentes projetos de controladores a partir do <i>PID Tuner</i>	38
Tabela 10 – Valores de polos utilizados, já considerando dois polos em zero.	39
Tabela 11 – Valores encontrados e resultados do degrau para o controlador PID por AP.	39
Tabela 12 – 20 melhores resultados do método iterativo com ITAE	41
Tabela 13 – Características da resposta ao degrau do PID sintonizado por ITAE . .	42
Tabela 14 – Valores das Margens de Fase para os controladores projetados.	44
Tabela 15 – Comparação entre métodos de sintonização para controlador PID . . .	45
Tabela 16 – Zeros das funções de transferência	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Estudo da Literatura	2
2	OBJETIVOS	4
3	METODOLOGIA	6
4	MODELAGEM DO SISTEMA	8
4.1	Determinação do Modelo Físico	8
4.1.1	Hipóteses simplificadoras	8
4.1.2	Modelo físico final	9
4.2	Modelagem Matemática	10
4.2.1	Diagrama de Corpo Livre	10
4.2.2	Aplicação do Método de Lagrange-Euler	10
4.2.3	Modelo final não linearizado	12
4.2.4	Linearização do modelo	12
4.2.5	Representação em Espaço de Estados	13
4.2.6	Parâmetros do problema	15
5	ANÁLISE DO SISTEMA EM MALHA ABERTA	16
5.1	Descrição no domínio das frequências	16
5.1.1	Funções de transferência	16
5.1.2	Polos	17
5.1.3	Zeros	18
5.1.4	Estabilidade	18
5.1.5	Diagramas de Bode	19
5.2	Matriz de Transição e Resposta no Tempo	20
6	CONTROLE MODERNO	22
6.1	Controlabilidade e Observabilidade do sistema	22
6.2	Controle por alocação de polos e por método LQ	22
6.2.1	Parâmetros e matriz de transição para alocação de polos	22
6.2.2	Parâmetros e matriz de transição para método LQ	23
6.2.3	Simulação e comparação da velocidade dos sistemas em malha fechada	24
6.3	Sensores e Atuadores Necessários	26
6.4	Observador de Estado	28

7	CONTROLE CLÁSSICO	31
7.1	Funções de transferências relevantes	31
7.2	Avaliação do uso de Compensador	32
7.3	Sintonização de um controlador PID	33
7.3.1	Métodos de Ziegler-Nichols	34
7.3.1.1	Método da curva de reação	34
7.3.1.2	Método do Ganho Limite	35
7.3.2	Sintonia via Lugar das Raízes	35
7.3.3	Sintonia via <i>PID Tuner</i>	38
7.3.4	Sintonia PID via Alocação de Polos	39
7.3.5	Sintonia PID via ITAE	40
7.4	Análise de Estabilidade	42
7.4.1	Estabilidade Absoluta	42
7.4.2	Estabilidade Relativa	43
7.5	Comparação entre controladores Clássicos	44
8	COMPARAÇÃO ENTRE CONTROLE CLÁSSICO E MODERNO	46
9	CONCLUSÃO	48
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	49
	APÊNDICES	51
	APÊNDICE A – CÓDIGOS	52
A.1	Simulações em Malha Aberta	52
A.2	Simulações em Malha Fechada	55
A.3	Simulações com Observador	58
A.4	Sintonizações PID	63
A.5	Solução numérica de sistema para sintonização PID por AP	67
	APÊNDICE B – FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA	68
	APÊNDICE C – MATRIZES DE CONTROLABILIDADE E OBSER-	
	VABILIDADE	70
	APÊNDICE D – DIAGRAMAS DE BODE EM MALHA ABERTA	71
	APÊNDICE E – ATUADORES	80
	APÊNDICE F – GRÁFICOS DE ESTABILIDADE	83

F.1	Diagramas de Nyquist	83
F.2	Diagramas de Bode com margens de estabilidade	85

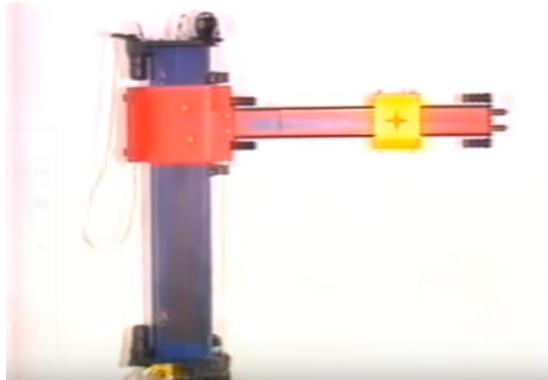
1 INTRODUÇÃO

Tênis de mesa é um jogo que envolve rápidos reflexos, coordenação motora e capacidade de adaptação conforme variação dos parâmetros referentes ao jogo, como resumido por Mullin Jens Kobe (2011). Criar um braço robótico capaz de realizar todas as tarefas exigidas durante uma partida comum tem sido um desafio amplamente estudado por inúmeros entusiastas da robótica, da engenharia e do esporte. A vasta literatura que se debruça sobre o assunto aborda diferentes aspectos do jogo de diferentes maneiras. As abordagens variam desde o desenvolvimento de sistemas robóticos com variado número de graus de liberdade, como em Matsushima et al. (2005) (usando 7 GL, por exemplo) até o uso de aprendizado de máquina aplicado com visão computacional em Mülling e Peters (2009).

Um dos primeiros modelos desenvolvidos foi criado pelo Instituto Federal de Tecnologia de Zurique (ou ETHZ, sigla em alemão), em 1987, representado na Figura 2(a). Este modelo simples descreve um movimento com dois graus de liberdade que varre o plano de forma cartesiana.

Com o crescimento da inovação tecnológica e da curiosidade científica, os modelos sofisticaram-se e atingiram níveis de precisão e agilidade bem elevados. A título de ilustração, encontra-se o robô “Forhpheus”, da empresa japonesa Omron®, exibido na Figura 2(b). Este modelo é capaz de detectar a posição do jogador, da bola e da raquete e, assim, reproduzir os movimentos humanos de um jogador, com um tempo de ciclo inferior a 0,0001 segundos.

Figura 1 – Comparaçāo de robôs para jogo de tênis de mesa



(a) Braço cartesiano desenvolvido na ETHZ



(b) Robô japonês “Forhpheus”

Independentemente da sofisticação do modelo, contudo, o interesse pelo jogo de tênis de mesa se resume a duas problemáticas fundamentais. A primeira trata do reconhecimento

e predição da trajetória da bola, garantindo seu encontro com a raquete do robô. A segunda, por sua vez, remete a velocidade de resposta necessária para atuação do sistema.

Diante da análise de trajetória, encontram-se abordagens com uso de câmeras binoculares com pares de sensores, como em Hashimoto et al. (1987) ou com sensores dinâmicos de luz, como em Andersson (1989). Uma síntese dos métodos mais utilizados para detecção da trajetória da bolinha é apresentada por Saber Ferat Sahin (2005).

Por outro lado, a velocidade de resposta do sistema implica a necessidade de um conhecimento concreto a respeito do sistema dinâmico do robô. Todavia, a dinâmica dos sistemas mais modernos é complexa e apresenta, usualmente, comportamento caótico. Há muito, pois, a ser ainda estudado a respeito deste mecanismo, principalmente quanto à simplificação do controle e dos equipamentos necessários, conferindo escalabilidade ao modelo.

Não somente ao esporte e entretenimento, mas o estudo do comportamento robótico é de grande importância para áreas de atuação como a saúde. Mecanismos biomiméticos são empregados para substituição de membros do corpo ou para reabilitação de movimentos perdidos, e buscam-se atualmente formas de reduzir o tempo de resposta e agilizar os movimentos de próteses mecânicas frente aos estímulos daquele que às utiliza.

Sendo assim, é de interesse o estudo da modelagem e do controle do sistema do robô para tênis de mesa, visando otimização dos métodos atuais de controle.

1.1 Estudo da Literatura

A fim de desenvolver uma base de conhecimentos para fundamentar um desenvolvimento e estudo aprofundado da modelagem e do controle deste sistema em questão, obteve-se um acervo bibliográfico que serviu de guia para as análises e hipóteses adotadas.

Sendo uma das principais referências, Acosta L.; Marichal (2003) aborda o aspecto mais prático do sistema, focando diretamente na descrição de um protótipo funcional e nos desafios de sua construção. Com isso, fornece importantes noções para estimar os parâmetros do nosso modelo físico, essenciais para a posterior análise e simulação do comportamento do sistema. Além disso, é interessante por apresentar uma modelagem relativamente simples, e que permite um desempenho razoável de jogo.

Mullin Jens Kobe (2011) busca reproduzir movimentos humanos de composição e tomadas de decisão (muitas vezes inconscientes) em uma simulação de um braço robótico com sete graus de liberdade. É, inclusive, abordada de forma interessante a questão do controle e modelagem de um braço humano: o braço humano possui centenas de músculos, capazes de atingir os mesmos objetivos das mais diversas maneiras. Apesar disso, fornecer flexibilidade ao sistema, acaba por tornar seu controle artificial difícil. Assim, são utilizados

princípios do controle ótimo, no qual é feita a minimização de uma função custo.

Nakashima et al. (2010, 2011, 2012) traz um estudo aprofundado sobre alguns aspectos usualmente desprezados na maioria das análises. Em Nakashima et al. (2012), é investigado o efeito aerodinâmico na raquete e na bola e como isso pode influenciar a previsão de movimento do braço robótico. Além disso, em Nakashima et al. (2011), avalia-se a composição do material da raquete de forma a modelar com precisão o contato da raquete com a bola e como isso pode influenciar o controle do braço robótico. A modelagem do movimento do braço é sucinta por não ser o foco do estudo em nenhum dos trabalhos, porém, ainda assim, apresenta proveitosa base de hipóteses e métodos a serem seguidos, tornando-se um texto de referência importante para o desenvolvimento do modelo.

Hashimoto et al. (1987) trata do desenvolvimento de um sistema robótico com 7 graus de liberdade, diretamente controlado por um microcontrolador. Além de também focar na parte de previsão da posição da bolinha, usando isso para alimentar o sistema de controle, diretamente relacionado ao escopo deste trabalho, a pesquisa traz importantes parâmetros experimentais que foram extremamente úteis para a concepção do presente modelo. Além disso, apresenta uma seção dedicada à cinemática inversa, assunto de crucial importância para validar as entradas necessárias para atingir os pontos de operação do sistema. Ainda no tópico de cinemática inversa, Craig (2005) apresenta extenso ferramental teórico para aprofundar as análises.

Saini et al. (2012) é um texto que compara o controle em malha fechada por alocação de polos e método LQ. Sua importância como bibliografia se dá pela comparação que faz entre a velocidade de resposta e aplicação de ambos os métodos em um sistema dinâmico, servindo de base para a aplicação de ambas as formas de controle em malha fechada neste trabalho. Além disso, Saini et al. (2012) fornece parâmetros e base para as estimativas das matrizes Q e R, essenciais para controle pelo método LQ.

2 OBJETIVOS

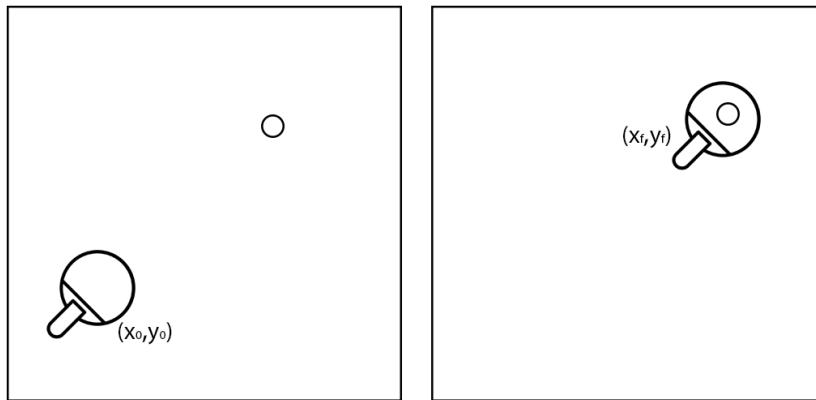
Com base no repertório levantado, foi delimitado o problema proposto anteriormente. Dessa forma, pode-se defini-lo, efetivamente, como: determinar o controle mais adequado e otimizado para regulação do braço mecânico em torno do ponto de operação, **minimizando efeitos de perda.**

Dessa forma, como pode-se ilustrar na Figura 2, tratar-se-á da modelagem e do controle do sistema para movimento da raquete em um determinado ponto. Para determinar esse ponto, foi considerada a abordagem proposta por Ramanantsoa M. (1994), com o objetivo de definir um estágio do jogo para ser o ponto de operação. Segundo o mesmo, o tênis de mesa possui um padrão regular, podendo ser dividido em 4 estágios definidos: Estágio de Espera, Estágio de Preparação, Estágio do Golpe e Estágio de Finalização. Não sendo possível abordar todas as etapas, escolheu-se apenas a primeira, de Espera, como ponto de operação a ser simulado.

1. **Estágio de Espera:** A bola está vindo em direção ao oponente que a rebate em direção a rede. Neste momento o braço se encontra na posição mais baixa de jogo, preparado para se deslocar em direção ao ponto de contato com a bola.
2. **Estágio de Preparação:** A bola está vindo em direção ao jogador, já ultrapassou a rede e toca a mesa durante esse estágio. A raquete está se movendo para preparar o golpe.
3. **Estágio de Golpe:** A bola está chegando no ponto onde ocorrerá o contato com a raquete. A raquete já está em movimento em direção à bola, até atingí-la. Segundo Ramanantsoa M. (1994), esse momento dura cerca de 80ms.
4. **Estágio da Finalização:** Após sofrer o golpe, a bola está retornando ao outro lado da mesa, do oponente, enquanto o braço da raquete está se movendo para baixo até o estágio de espera.

Com o estágio de operação definido, o escopo do trabalho se restringe à uma operação bem específica dentro dos movimentos do jogo, porém ainda assim relevante. Trata-se da volta do braço ao ponto de espera após ter rebatido a bola, ou seja, o fim do ciclo de quatro etapas, para que o braço robótico repita novamente os movimentos para a próxima jogada. Ainda que simples, esse movimento é crucial para a eficácia do braço robótico por permitir que o ciclo se inicie sempre do mesmo ponto inicial e com precisão necessária. Controlar com precisão esse movimento configura um desafio adequado às restrições e objetivos da disciplina e do presente relatório.

Figura 2 – Definição visual do problema



Fonte: Autoria própria.

Do problema supracitado, portanto, já é possível inferir que alguns dos parâmetros fundamentais do modelo físico e matemático são os comprimentos dos componentes do mecanismo-solução, com o fito de garantir a cobertura de toda a área estipulada; os parâmetros dos atuadores a serem utilizados; e, finalmente, as massas de todos os componentes, que definem a inércia do mecanismo como um todo. Quanto ao controle, será visado um tempo de resposta rápido, com baixa oscilação, uma vez que o jogo de tênis de mesa exige agilidade e precisão.

3 METODOLOGIA

Com o objetivo do presente relatório definido e centrado na modelagem e controle do sistema físico correspondente a um braço robótico dedicado a tênis de mesa, em especial o movimento em torno do estágio de espera, tem-se como próxima etapa a definição da metodologia subsequente para desenvolver tal objetivo.

A primeira ação é a modelagem completa do sistema, a começar pela física, onde, com auxílio da bibliografia, elaborar-se-á um sistema suficientemente fiel à realidade para se obter resultados condizentes, porém simplificados por hipóteses que possibilitam sua análise de forma menos extensa. A isto, segue-se a modelagem matemática, que, a partir das equações diferenciais resultantes do método de Lagrange-Euler, resulta em um espaço de estados posteriormente linearizado, utilizando a expansão em série de Taylor de primeira ordem multivariável. Tal espaço de estados será de fundamental importância para o consequente do relatório, inclusive para a determinação dos seus polos, etapa que o seguirá para finalizar a modelagem completa do sistema.

Para a análise do controle do braço robótico, é necessário analisar inicialmente o sistema em malha aberta, afim de obter-se conclusões iniciais acerca da estabilidade em malha aberta do sistema, além de todas as funções de transferência. Diagramas de Bode e mapa de polos serão alguns dos ferramentais teóricos para elucidar tais conclusões e fomentar a etapa seguinte, que é a análise do sistema em malha fechada.

Esta etapa, diretamente voltada para o controle do braço robótico, é composta por uma comparação dos métodos de controle por alocação de polos (AP) e o controle linear quadrático (LQ), com e sem o uso de um observador de estados. Para que isso seja possível, será conduzido um estudo de controlabilidade e observabilidade e, com isso, os resultados obtidos serão utilizados para definir sensores e atuadores necessários para controlar o sistema. Todas essas etapas serão desenvolvidas utilizando a teoria de controle provinda da bibliografia e funções do software MATLAB®.

Por fim, realizar-se-á uma análise do sistema sob ótica do Controle Clássico. Assim, uma função de transferência específica será tomada para análise e, com base nela, serão projetados diversos tipos de controladores por métodos de sintonização distintos. Esses projetos serão comparados tendo em mente as condições que o braço robótico terá que obedecer na dinâmica do tênis de mesa e serão estudados nos quesitos de estabilidade absoluta e relativa, de forma que, ao fim, seja possível definir um melhor projeto para o sistema.

Resultados e Análises

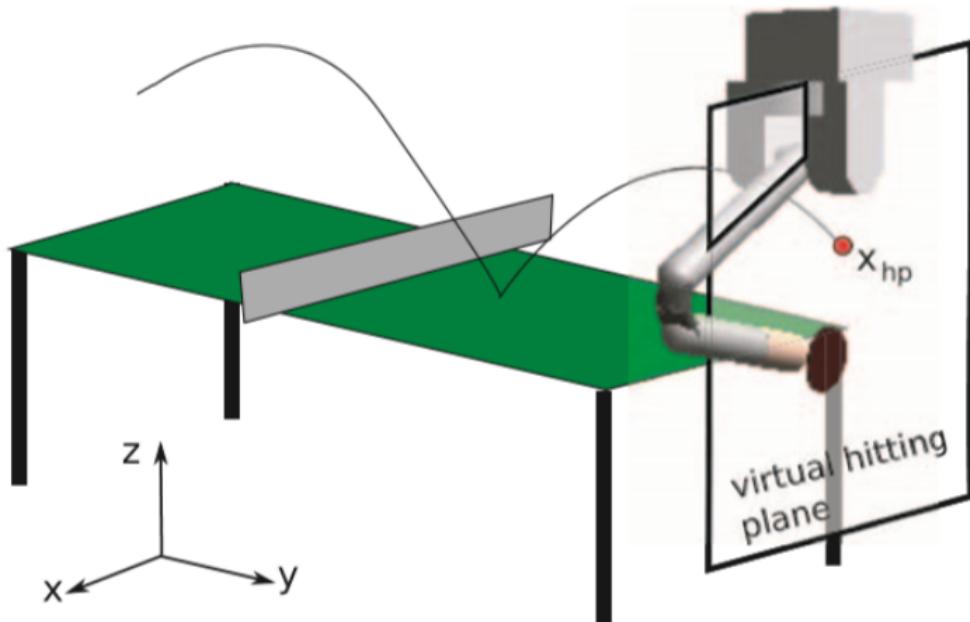
4 MODELAGEM DO SISTEMA

4.1 Determinação do Modelo Físico

Com o problema bem descrito, buscou-se elaborar um modelo físico capaz de representar de forma suficiente o sistema mecânico em estudo, contudo de maneira simples e objetiva, evitando considerações desnecessárias que dificultem o atingimento dos objetivos.

Para isso, procurou-se manter o modelo coerente aos sistemas mecânicos dos robôs jogadores de tênis de mesa. Após avaliação dos modelos existentes, foi tomado como referência o sistema proposto por Mülling e Peters (2009), apresentado na Figura 3. Este modelo consiste de uma base superior que sustenta um pêndulo duplo, simulando o braço e antebraço de um jogador de tênis de mesa. Seu movimento é restrito a um único plano no espaço e apresenta apenas três graus de liberdade.

Figura 3 – Sistema base para a modelagem



Fonte: Mülling e Peters (2009)

4.1.1 Hipóteses simplificadoras

A fim de simplificar e especificar o sistema ao problema proposto, foram determinadas as seguintes hipóteses simplificadoras para o modelo de Mülling e Peters (2009):

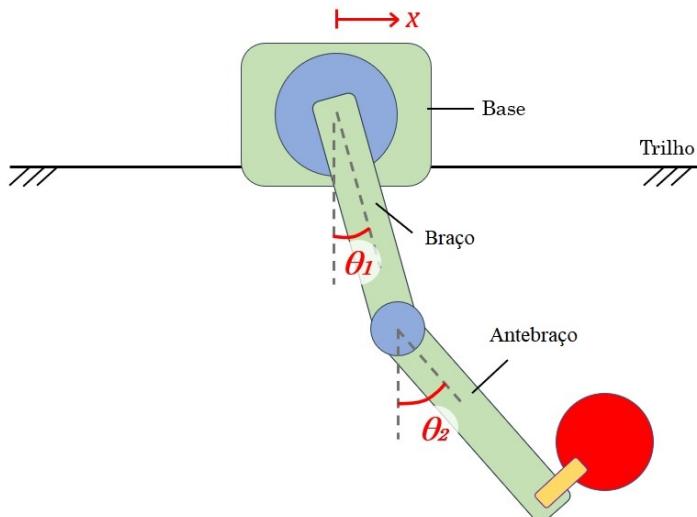
- Realização apenas de pequenas oscilações em torno do ponto de operação;

- Pesos dos braços concentrados em seus centros de massa: não é levada em conta a distribuição do peso ao longo das barras;
- Braços considerados barras de largura desprezível, rígidas e homogêneas: as barras não sofrem deformações consideráveis e possuem centro de gravidade coincidente com o centro geométrico das barras;
- Atritos considerados: atrito viscoso nas articulações e atrito viscoso entre a base e os trilhos (o atrito com o ar foi desprezado), obtendo um sistema não conservativo;
- Raquete com dimensões e massa desprezíveis: dimensões e massa do braço muito maiores do que da raquete;
- Movimento plano com três graus de liberdade;
- Serão considerados efeitos de inércia para deslocamentos amplos, sendo desprezados efeitos de pequenas vibrações de elevadas frequências;
- Tempo de resposta e massa dos atuadores desprezíveis;
- As duas barras possuem as mesmas dimensões (seção, comprimento e massa).

4.1.2 Modelo físico final

Por fim, aplicando as hipóteses adotadas ao modelo original de Mülling e Peters (2009) proposto, obtém-se um modelo já conhecido de pêndulo duplo, preso a uma base móvel, tal qual na Figura 4. A figura apresenta os três graus de liberdade estudados no presente trabalho: x , θ_1 e θ_2 . Além disso, como apresentado na figura, os componentes do sistema serão tratados como base, braço e antebraço, para melhor elucidação do modelo.

Figura 4 – Modelo físico simplificado



Fonte: Autoria própria.

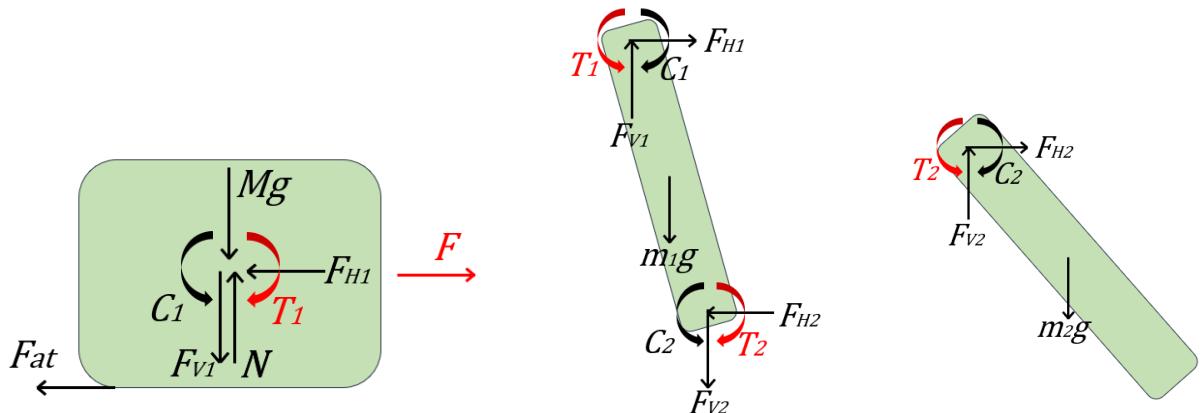
Vale ressaltar que, para o problema do jogo de tênis de mesa, é de interesse não somente a análise posicional dos graus de liberdade, mas também o estudo de suas derivadas.

4.2 Modelagem Matemática

4.2.1 Diagrama de Corpo Livre

Para definição matemática do modelo determinado, é de interesse a separação dos componentes para avaliar os esforços envolvidos. O diagrama de corpo livre pode ser observado na Figura 5. Os esforços destacados em vermelho representam as possíveis forças de atuação nos graus de liberdade estabelecidos.

Figura 5 – Diagramas de corpo livre da Base, Braço e antebraço, respectivamente



Fonte: Autoria própria.

4.2.2 Aplicação do Método de Lagrange-Euler

Para descrição do comportamento dinâmico do sistema, foi utilizado o método de Lagrange-Euler. As chamadas Equações de Lagrange são um conjunto de equações que compõem um ferramental simples, capaz de resolver uma gama de problemas por meio da avaliação da energia mecânica (FRANÇA; MATSUMURA, 2011). A equação genérica é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial N}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^{ext} \quad (4.1)$$

Onde:

- V : Energia Potencial Total do Sistema;

- T : Energia Cinética Total do Sistema;
- $L = T - V$: Lagrangeano (diferença da Energia Cinética e Potencial do sistema);
- N : Energia de Amortecimento do Sistema não conservativo;
- Q_i^{ext} : Forças externas generalizadas;
- q_i e \dot{q}_i : Coordenadas Generalizadas.

Calculando os termos V e T , obtém-se os valores das energias, expostos nas Equações (4.2) e (4.3).

$$T = M \cdot \frac{\dot{x}^2}{2} + m_1 \cdot \frac{\dot{x}_{1G}^2}{2} + m_1 \cdot \frac{\dot{y}_1^2}{2} + m_1 \frac{l_1^2}{24} \dot{\theta}_1^2 + m_2 \cdot \frac{\dot{x}_{2G}^2}{2} + m_2 \cdot \frac{\dot{y}_2^2}{2} + m_2 \frac{l_2^2}{24} \dot{\theta}_2^2 \quad (4.2)$$

$$V = -m_1 \cdot g \cdot y_1 - m_2 \cdot g \cdot y_2 \quad (4.3)$$

E, portanto, obtemos as Equações (4.4) e (4.5) que determinam o sistema.

$$L = M \cdot \frac{\dot{x}^2}{2} + m_1 \cdot \frac{\dot{x}_{1G}^2}{2} + m_1 \cdot \frac{\dot{y}_1^2}{2} + m_1 \frac{l_1^2}{24} \dot{\theta}_1^2 + m_2 \cdot \frac{\dot{x}_{2G}^2}{2} + m_2 \cdot \frac{\dot{y}_2^2}{2} + m_2 \frac{l_2^2}{24} \dot{\theta}_2^2 + m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_2 \quad (4.4)$$

$$N = b \frac{\dot{x}^2}{2} + c_1 \frac{\dot{\theta}_1^2}{2} + c_2 \frac{\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1^2}{2} \quad (4.5)$$

Sendo que:

$$Q_x = \frac{\partial Fx}{\partial x} \quad Q_{\theta_1} = \frac{\partial T_1 \cdot \theta_1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial T_2 \cdot \theta_1}{\partial \theta_1} \quad Q_{\theta_2} = \frac{\partial T_2 \cdot \theta_2}{\partial \theta_2}$$

$$\dot{x}_{1G} = \dot{x} + \frac{l_1}{2} \cdot \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 \quad \dot{x}_{2G} = \dot{x} + l_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2$$

$$y_1 = \frac{l_1}{2} \cdot \cos \theta_1 \quad \dot{y}_1 = -\frac{l_1}{2} \cdot \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1$$

$$y_2 = l_1 \cdot \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos \theta_2 \quad \dot{y}_2 = -l_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2$$

4.2.3 Modelo final não linearizado

Por fim, substituindo os termos de Lagrange na equação (4.1), encontram-se as três equações características do sistema, descritas abaixo (Equações (4.6) a (4.8)). É possível observar que o sistema, além de não linear, é também acoplado, sendo esta característica um obstáculo à continuidade do estudo dinâmico, o qual deverá ser contornado.

$$\begin{aligned} F = & (M + m_1 + m_2) \ddot{x} - l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) - \frac{m_2 l_2}{2} \operatorname{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_1 \right) \\ & + \frac{m_2 l_2}{2} \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 + b \dot{x} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 = & \frac{m_1 l_1}{3} \ddot{\theta}_1 + c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + \frac{m_1 l_1}{2} \cos \theta_1 \ddot{x} \\ & + \sin \theta_1 \left[\frac{m_1 g l_1}{2} + m_2 l_1 \left(g + \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \theta_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \operatorname{sen} \theta_1 \ddot{\theta}_1 \right) \right] \\ & + m_2 l_1 \cos \theta_1 \left(-\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 - l_1 \operatorname{sen} \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{x} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} T_2 = & m_2 \left(\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \theta_2 (l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \operatorname{sen} \theta_1 \ddot{\theta}_1) + \frac{\ddot{x} l_2}{2} \cos \theta_2 - \frac{l_1 l_2}{2} \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_1 l_2}{2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_1 \right) \\ & - \frac{m_2 l_2^2}{3} \ddot{\theta}_2 - \frac{m_2 l_2^2}{3} \ddot{\theta}_1 + \frac{m_2 g l_2}{2} \operatorname{sen} \theta_2 + c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2.4 Linearização do modelo

De acordo com Franklin, Powell e Emami-Naeini (2014), o método Lyapunov prova que, se um modelo linear de pequenos sinais é válido perto de um equilíbrio e é estável, então existe uma região contendo o equilíbrio no qual o sistema não-linear é estável.

Assim, será aplicada a linearização para simplificar o modelo do sistema. A bibliografia de controle dinâmico em sistemas robóticos traz métodos como a linearização por *feedback*, mas tais métodos estão fora do escopo deste trabalho. Adotou-se, portanto, o método de linearização por expansão em série de Taylor de primeira ordem multivariável, apresentada na Equação (4.9).

$$\tilde{f} = f_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{f^{op}} \cdot (x_i - x_i^{op}) \quad (4.9)$$

No caso do modelo em estudo, faz-se necessária a expansão em série dos termos de segunda ordem \ddot{x} , $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$. Logo, a Equação (4.9) torna-se como apresentada pela Equação (4.10).

$$\begin{aligned}\tilde{f} = f_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{f^{op}} \cdot (x - x^{op}) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \Big|_{f^{op}} \cdot (\dot{x} - \dot{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \Big|_{f^{op}} \cdot (\theta_1 - \theta_1^{op}) \\ + \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_1} \Big|_{f^{op}} \cdot (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1^{op}) + \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \Big|_{f^{op}} \cdot (\theta_2 - \theta_2^{op}) + \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_2} \Big|_{f^{op}} \cdot (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_2^{op})\end{aligned}\quad (4.10)$$

Nesse ponto, para prosseguir com a linearização, substituímos com os valores referentes ao ponto de operação escolhido. Como explicitado anteriormente, o Estágio de Espera do jogo é configurado pela raquete no ponto mais baixo da sua trajetória, antes ainda de sofrer um esforço para atingir a bolinha. Tal situação é verificada quando $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Logo, substitui-se as equações (4.6) a (4.8) na equação (4.10) com os valores do ponto de operação, que resulta em:

$$(2m + M)l\ddot{x} = -bl\dot{x} - \frac{3ml^2}{2}\ddot{\theta}_1 - \frac{ml^2}{2}\ddot{\theta}_2 + lF \quad (4.11)$$

$$\frac{3ml^2}{2}\ddot{\theta}_1 + \frac{2ml^2}{2}\ddot{\theta}_2 + 2ml\ddot{x} = -\frac{3mlg}{2}\theta_1 - c\dot{\theta}_1 - \frac{mlg}{2}\theta_2 + T_1 \quad (4.12)$$

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}_2 + \frac{ml^2}{6}\ddot{\theta}_1 + \frac{ml}{2}\ddot{x} = c\dot{\theta}_1 - \frac{mlg}{2}\theta_2 - c\dot{\theta}_2 + T_2 \quad (4.13)$$

4.2.5 Representação em Espaço de Estados

Observando-se as Equações (4.11) a (4.13), percebe-se que há acoplamento do modelo. Contudo, agora é possível desacoplar o sistema resolvendo-o para os três termos de segunda ordem (\ddot{x} , $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$) e, dessa forma, representar o sistema e as equações diferenciais linearizadas em Espaço de Estados, segundo Ogata (1982) na forma:

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (4.14)$$

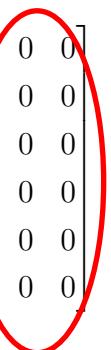
$$y = CX + Du \quad (4.15)$$

Onde:

- $y \equiv$ vetor de saídas do sistema;
- $X \equiv$ vetor de estados do sistema;
- $\dot{X} \equiv$ derivada do vetor de estados do sistema;
- $u \equiv$ vetor de entradas do sistema;
- $A \equiv$ matriz de estado;

- $B \equiv$ matriz de entrada;
- $C \equiv$ matriz de saída;
- $D \equiv$ matriz de transmissão direta.

Primeiramente, define-se as matrizes X , \dot{X} , \tilde{A} e \tilde{B} e a matriz de massa M , como apresentado abaixo:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -bl & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3mgl}{2} & -c & \frac{-mgl}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c & \frac{-mlg}{2} & -c \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2m + M)l & 0 & \frac{3ml^2}{2} & 0 & \frac{ml^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2ml & 0 & \frac{3ml^2}{2} & 0 & \frac{2ml^2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ml}{2} & 0 & \frac{ml^2}{6} & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix}$$

Para o efetivo desacoplamento do sistema e obtenção das matrizes A e B , é necessário multiplicar a inversa da matriz de inércia M pela matrizes \tilde{A} e \tilde{B} , de fato isolando os termos de segunda ordem

$$A = M^{-1}\tilde{A} \quad B = M^{-1}\tilde{B}$$

obtendo, assim,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(28b)}{28M+5m} & \frac{45gm}{28M+5m} & \frac{48c}{L(28M+5m)} & \frac{6gm}{28M+5m} & \frac{18c}{L(28M+5m)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24b}{L(28M+5m)} & \frac{-(9g(4M+5m))}{L(28M+5m)} & -\frac{18c(4M+3m)}{L^2m(28M+5m)} & \frac{3g(4M-m)}{L(28M+5m)} & \frac{-(24c(2M+m))}{L^2m(28M+5m)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{30b}{L(28M+5m)} & \frac{9g(2M-5m)}{L(28M+5m)} & \frac{30c(4M-m)}{L^2m(28M+5m)} & \frac{-(g(48M+15m))}{L(28M+5m)} & \frac{108Mc}{L^2m(28M+5m)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{28}{28M+5m} & \frac{-30}{L(28M+5m)} & \frac{18}{L(28M+5m)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-24}{L(28M+5m)} & \frac{6(4M+5m)}{L^2m(28M+5m)} & \frac{-(24(2M+m))}{L^2m(28M+5m)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-30}{L(28M+5m)} & \frac{-(6(2M-5m))}{L^2m(28M+5m)} & \frac{108M}{L^2m(28M+5m)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da matriz A, primeiramente, percebe-se que tanto $\ddot{\theta}_1$ quanto $\ddot{\theta}_2$ possuem termos restitutivos ($-\frac{9g(4M+5m)}{L(28M+5m)}\theta_1$ e $-\frac{(48Mg+15mg)}{L(28M+5m)}\theta_2$ respectivamente), que contribuem para oscilação em torno da posição de equilíbrio. O termo \ddot{x} não possui esse termo, ou seja, a restituição para uma posição desejada, qualquer que seja, deve vir de uma das entradas do sistema.

Em relação aos termos de primeira derivada ($\dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$) interagindo com as velocidades, percebe-se que tanto x quanto θ_1 possuem termos que se opõem à velocidade em x e θ_1 , representando uma resistência ao movimento. Contudo, existe um termo do tipo $c \cdot \dot{\theta}_2$ com c positivo na expressão de $\ddot{\theta}_2$. Isso poderia indicar instabilidades em torno do ponto de operação, caso os eventos desse termo não fossem cancelados. Nesse caso específico, esse termo não apresentará grande influência, por apresentar pequena magnitude se comparado aos outros termos.

Na matriz B, percebe-se a interação das entradas com o sistema. Como esperado, as entradas (F, T_1, T_2) apenas influenciam os termos de segunda ordem.



4.2.6 Parâmetros do problema

Toda a modelagem anterior foi realizada de forma completamente analítica e literal, em função de constantes próprias do problema, como a massa dos elementos do braço. Para simulação, foram adotados os valores obtidos a partir de um catálogo especificações iniciais da fabricante Barrett (2008), relativos a um braço robótico de dimensões e desenho semelhantes ao aqui analisado.

- $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- $c_1 = c_2 = c = 8,5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$
- $l_1 = l_2 = l = 0,5 \text{ m}$
- $l_{raquete} = 0,2 \text{ m}$
- $b_{base} = 7,12 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$
- $M = 6 \text{ kg}$ e $m_1 = m_2 = m = 2 \text{ kg}$

5 ANÁLISE DO SISTEMA EM MALHA ABERTA

5.1 Descrição no domínio das frequências

5.1.1 Funções de transferência

Utilizando-se da ferramenta das transformadas de Laplace para o espaço de estados obtido, chega-se na transformação que permite justamente à obtenção de funções que relacionam as entradas às saídas do sistema, explicitadas nas equações Equações (5.1) e (5.4).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} sX(s) = AX(s) + Bu(s) \quad (5.1)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \quad (5.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} Y(s) = CX(s) + Du(s) \quad (5.3)$$

$$\therefore Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s) \quad (5.4)$$

Por conveniência, denomina-se $G(s) \equiv C(sI - A)^{-1}B + D$. Com a linearização realizada em torno do ponto ($\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$) e a representação do sistema em espaço de estados, utilizou-se a função `tf()` do software MATLAB® para obter as funções de transferência, ou seja, já com as equações no domínio da frequência. Efetivamente, pelo fato de o sistema dispor de seis variáveis de estado e três entradas, tratar-se-iam de dezoito funções de transferência para o sistema. Ao presente trabalho, é interessante a simplificação da abordagem às funções de transferência mais determinísticas ao sistema, minimizando a quantidade de sensores e atuadores e, consequentemente, o custo do projeto. A quantidade de sensores será reduzida, sendo posteriormente aplicado o uso de observadores, como posteriormente apresentado na Seção 6.3. Puramente a título de ilustração, encontram-se abaixo três funções de transferência relativas a entradas e saídas distintas. As demais podem ser encontradas no Apêndice B.

$$G_{F,\theta_1} = \frac{-0,2697s^4 + 2,751 \cdot 10^{-4}s^3 - 11,9s^2 + (1,052 \cdot 10^{-18})s}{s^6 + 1,017 \cdot 10^{-3}s^5 + 68,78s^4 + 5,918 \cdot 10^{-2}s^3 + 1168s^2 + 0,8315s}$$

$$G_{T_1,\theta_2} = \frac{-0,1348s^4 + 4,153 \cdot 10^{-4}s^3 + 9,792 \cdot 10^{-7}s^2 + 7,654 \cdot 10^{-19}s}{s^6 + 1,017 \cdot 10^{-3}s^5 + 68,78s^4 + 5,918 \cdot 10^{-2}s^3 + 1168s^2 + 0,8315s}$$

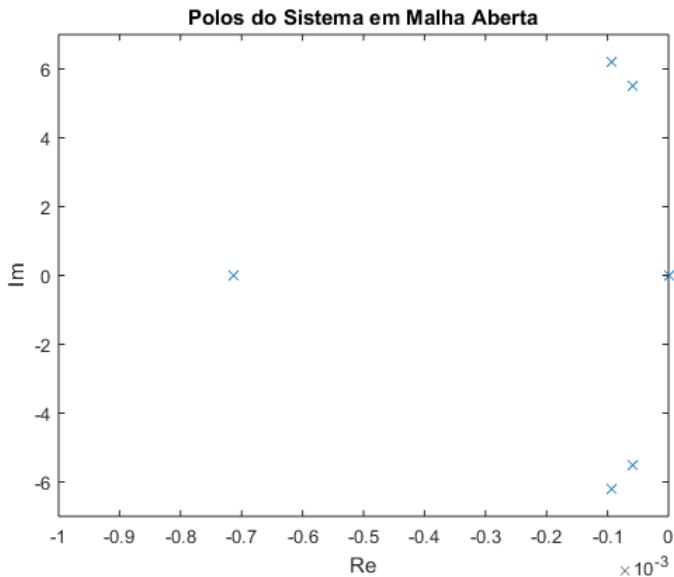
$$G_{T_2,\dot{x}} = \frac{0,202s^5 - 6,876 \cdot 10^{-5}s^4 - 4,309 \cdot 10^{-15}s^3 + 5,957 \cdot 10^{-12}s^2 - 4,415 \cdot 10^{-13}s}{s^6 + 1,017 \cdot 10^{-3}s^5 + 68,78s^4 + 5,918 \cdot 10^{-2}s^3 + 1168s^2 + 0,8315s}$$

Como análise preliminar de estabilidade, a ser aprofundada no tópico seguinte, já se pode perceber que não há troca de sinal dos coeficientes do polinômio característico, o qual é comum para todo o sistema (KULAKOWSKI; GARDNER; SHEARER, 2007).

5.1.2 Polos

A determinação dos polos de um sistema é fundamental para o entendimento da sua resposta em frequência e para posteriores análises de estabilidade e determinação de ganhos de controle. Os polos encontrados estão representados na Figura 6, na qual temos que a distância em relação à origem indica uma frequência natural não amortecida e o ângulo com o eixo real indica o coeficiente de amortecimento (OGATA, 1982).

Figura 6 – Mapa de Polos



Fonte: Autoria própria.

Uma vez que consiste nas raízes de um polinômio (advindo do denominador das funções de transferências) (OGATA, 1982; KULAKOWSKI; GARDNER; SHEARER, 2007), podemos averiguar uma consonância do mapa com o esperado, uma vez que apresenta todos os valores imaginários conjugados, bem como o número de raízes equivalente à ordem do polinômio.

Dessa forma, podemos extrair os módulos das frequências naturais do sistema estudado sem amortecimento (ω) e os coeficientes de amortecimento de cada polo (ζ). Estes valores, presentes na Tabela 1, caracterizam globalmente propriedades do sistema, de tal forma que, independente da função de transferência, os polos permanecem constantes (PARASKEVOPOULOS, 2002).

Tabela 1 – Características de Amortecimento do Sistema

Polo	Amortecimento	Frequência Natural (rad/s)	Constante de Tempo (s)
0,0	-	0,0	∞
$-7, 12 \cdot 10^{-4}$	1,00	$7, 12 \cdot 10^{-4}$	1,40
$-5, 82 \cdot 10^{-5} + 5, 53i$	$1, 05 \cdot 10^{-5}$	5,53	$1, 72 \cdot 10^4$
$-5, 82 \cdot 10^{-5} - 5, 53i$	$1, 05 \cdot 10^{-5}$	5,53	$1, 72 \cdot 10^4$
$-9, 42 \cdot 10^{-5} + 6, 18i$	$1, 52 \cdot 10^{-5}$	6,18	$1, 06 \cdot 10^4$
$-9, 42 \cdot 10^{-5} - 6, 18i$	$1, 52 \cdot 10^{-5}$	6,18	$1, 06 \cdot 10^4$

Fonte: Autoria própria.

5.1.3 Zeros

Para determinação dos zeros das funções, faz-se necessário encontrar as raízes do polinômio que compõe o numerador de cada uma das funções de transferências (OGATA, 1982). Como os zeros tratam de propriedades específicas de cada uma das funções de transferências, ou seja, representam o comportamento de uma determinada saída em relação a uma determinada entrada (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2014). Os zeros obtidos também encontram-se no Apêndice B.

5.1.4 Estabilidade

Concomitantemente, **utiliza-se** ainda os polos obtidos do sistema para avaliar a estabilidade. Segundo Ogata (1982), sabe-se que a estabilidade é definida através da parte real dos polos, de tal forma que, na presença de um polo com parte real positiva, o sistema é dito instável.

Observando os polos obtidos, tem-se que quase todos os polos apresentam parte real negativa, com exceção do polo ~~centrado na origem~~. Assim, o comportamento do sistema é classificado como estável, sendo que o polo na origem indica característica de um integrador puro ligado ao deslocamento no eixo x .

A estabilidade do sistema pode ser ratificada utilizando o critério de Routh-Hurwitz (EL-MARHOMY; ABDEL-SATTAR, 2004), conforme a Tabela 2, observando-se que não há troca de sinais na primeira coluna, com todos permanecendo positivos.

Tabela 2 – Análise de estabilidade por Routh-Hurwitz.

s^5	1	68,78	1168
s^4	0,001017	0,05918	0,8315
s^3	10,58924	350,3992	
s^2	0,025527	0,8315	
s^1	5,476896	0	
s^0	0,8315		

Fonte: Autoria própria.

Essa descrição de fato se reflete no sistema estudado. Considerando as pequenas oscilações das suas saídas e entradas, espera-se que os componentes pendulares do modelo físico mantenham-se estáveis, oscilando em torno do ponto de equilíbrio, cujo ângulo e velocidade angular são nulos. Contudo, dadas as saídas lineares horizontais x e \dot{x} , temos que, para entradas relativamente grandes, o sistema deslocar-se-á para um novo ponto, diferente de zero, no qual passará a oscilar.

5.1.5 Diagramas de Bode

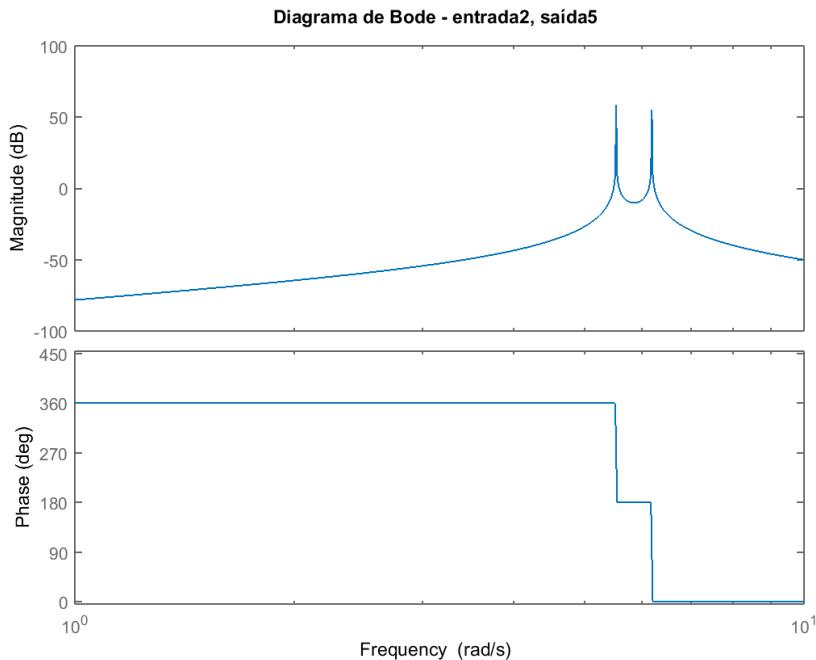
O diagrama de Bode é fundamental para um bom entendimento da resposta em frequência do sistema (BODE, 1940). Essencialmente, este diagrama é uma composição de dois gráficos, os quais apresentam: a magnitude do ganho da resposta em frequência, em decibéis (dB); e a fase desse ganho, em graus, com relação à frequência.

Ambos os gráficos são apresentados em escala logarítmica, no intuito de simplificar ~~do entendimento visual do caso~~. Sendo assim, deve-se ater ao fato de que a magnitude apresentada se refere a vinte vezes o logaritmo da razão das amplitudes (amplitude da função de transferência para $s = j\omega$).

Para levantamento dos diagramas de nosso sistema, foi utilizado o comando `bode()` do software MATLAB®, ~~no qual se insere apenas a função de transferência e já se obtém o diagrama completo~~.

Os diagramas obtidos podem ser visualizados no Apêndice D. Na Figura 7 encontra-se representado o diagrama de Bode para um conjunto entrada-saída qualquer do presente sistema.

Ao observar-se a figura, destaca-se a presença de dois acentuados picos de ganho, que correspondem justamente às frequências de ressonância (ω_n) registradas na Tabela 1, em frequências em torno de 5 e 6 rad/s, ocasionadas pelos polos complexos conjugados pouco amortecidos. Percebe-se, portanto, que o sistema em malha aberta é notoriamente sensível a frequências ~~relativamente baixas~~.

Figura 7 – Diagrama de Bode ($\theta_2 \times T_1$)

Fonte: Autoria própria.

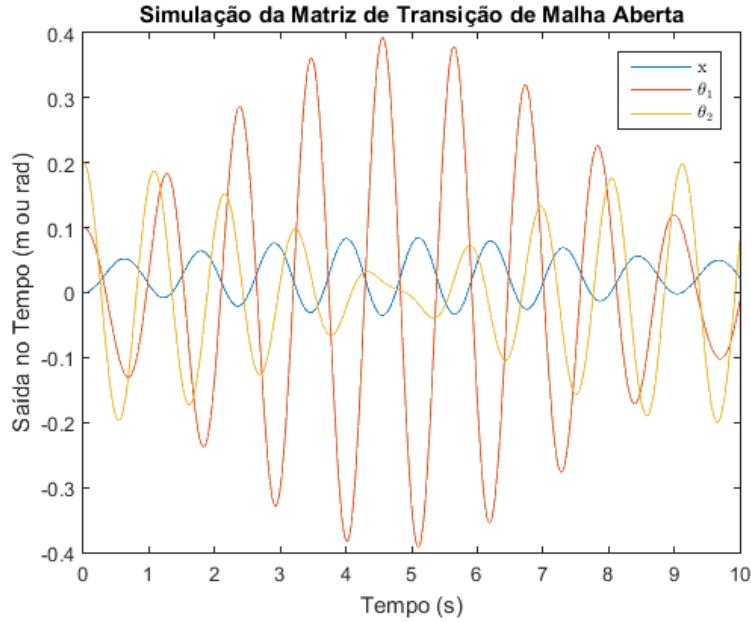
5.2 Matriz de Transição e Resposta no Tempo

A matriz de transição de estados é tal que pode-se obter toda a informação sobre movimentos livres do sistema definido pela equação $\dot{X} = AX$ a partir da mesma (SEQUEIRA, 2013). Dessa forma, com a obtenção da matriz de transição, pode-se simular e prever o comportamento do vetor X do sistema ao longo do tempo, para qualquer ponto em tal vetor. Para o caso em malha aberta, pode-se visualizar a matriz de transição Φ_{aberta} abaixo. No tocante às condições iniciais, escolheu-se arbitrariamente (dentro dos limites da linearização e de situações razoáveis) os valores $\theta_1 = 0,1 \text{ rad}$ e $\theta_2 = 0,2 \text{ rad}$, com os outros parâmetros zerados, de fato simulando a volta ao Estágio de Espera descrito na Capítulo 2.

$$\Phi_{aberta} = \begin{bmatrix} 1 & 9,9999 \cdot 10^{-3} & 2,4794 \cdot 10^{-4} & 8,2884 \cdot 10^{-7} & 3,3073 \cdot 10^{-5} & 1,1109 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 9,9999 \cdot 10^{-1} & 4,9573 \cdot 10^{-2} & 2,4839 \cdot 10^{-4} & 6,6156 \cdot 10^{-3} & 3,3244 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 9,5980 \cdot 10^{-8} & 9,9831 \cdot 10^{-1} & 9,9944 \cdot 10^{-3} & 3,6353 \cdot 10^{-4} & 1,196 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 1,9192 \cdot 10^{-5} & -3,371 \cdot 10^{-1} & 9,9831 \cdot 10^{-1} & 7,2665 \cdot 10^{-2} & 3,6033 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 1,1997 \cdot 10^{-7} & 9,9144 \cdot 10^{-5} & 3,6206 \cdot 10^{-7} & 9,9825 \cdot 10^{-2} & 9,9942 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 2,3987 \cdot 10^{-5} & 1,9817 \cdot 10^{-2} & 1,0544 \cdot 10^{-4} & -3,503 \cdot 10^{-1} & 9,9825 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Após determinação da matriz de transição, foi possível simular o comportamento

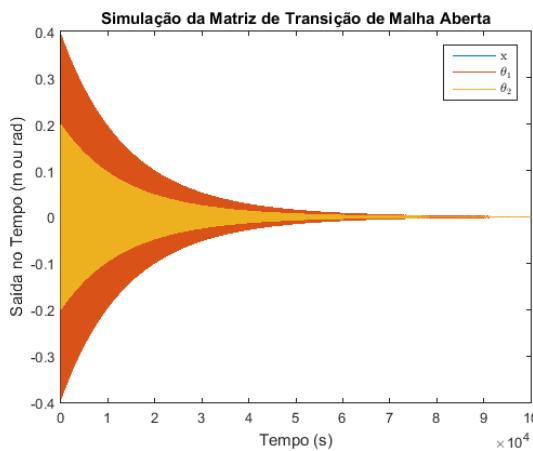
Figura 8 – Resposta no tempo para o sistema em malha aberta.



Fonte: Autoria própria.

do sistema, representado na Figura 8, e verificou-se que há ~~uma demora para~~ tendência de estabilidade pelo sistema. Isso condiz com os polos calculados para o sistema em malha aberta, que estão próximos do eixo imaginário, sendo, portanto, polos lentos. A Figura 9 mostra como essa tendência só pode ser observada caso a simulação seja feita com período de tempo demasiado longo, completamente incompatível com o sistema.

Figura 9 – Tendência de estabilidade para um tempo de operação muito grande.



Fonte: Autoria própria.

6 CONTROLE MODERNO

A este capítulo, **reserva-se uma** análise acerca do controle do sistema enquanto malha fechada. Para isto, de início, é crucial retomar o objetivo global do relatório e entender o que essa etapa visa agregar ***no mesmo***. Assim, reforça-se que o objetivo definido foi a modelagem e o controle um sistema capaz de retornar à posição de espera com atuação nos três elementos (a base, braço, e antebraço). Tal definição tem consequências importantes para o desenvolvimento do presente capítulo.

Uma consequência importante dessa hipótese é que o objetivo configura um problema de regulador, ou seja, o objetivo do controle é manter o braço no ponto Estágio de Espera, onde o estado é nulo. Dessa forma, uma análise de controle com acompanhamento de referência não se aplica a esse sistema, pois a referência é estática e nula a todo instante, de forma que tal análise não impactaria os estados.

6.1 Controlabilidade e Observabilidade do sistema

É imprescindível verificar a controlabilidade e a observabilidade do sistema para os atuadores e sensores estabelecidos, o que é obtido com o auxílio das matrizes de controlabilidade e observabilidade, sabendo-se que o sistema é de estados completamente controláveis e observáveis se, e somente se, suas respectivas colunas forem linearmente independentes entre si, ou seja, seus postos coincidem com a ordem 6 do sistema (OGATA, 1982).

Como para esse número de atuadores e sensores as matrizes supracitadas acabam por serem grandes demais para ser produtivo colocá-las no corpo do relatório, elas estão descritas com mais detalhes no Apêndice C, valendo aqui ressaltar-se que, utilizando-se o comando *rank()* do MATLAB®, constatou-se que, de fato, ambas as matrizes possuem posto 6, o que ratifica a hipótese de que o sistema é completamente controlável e observável.

6.2 Controle por alocação de polos e por método LQ

6.2.1 Parâmetros e matriz de transição para alocação de polos

Para o método de controle por alocação de polos, o sistema de realimentação em malha fechada é feito de forma que o sistema passe a possuir novos polos característicos, que irão, então, ditar o novo comportamento do sistema controlado.

Os polos forçados determinados, foram selecionados de tal forma a se obter uma

resposta do sistema rápida, alinhando aos objetivos do robô e à velocidade do jogo de tênis de mesa. Todavia, como fator limitante, foram determinados polos cuja resposta não exigissem atuadores com potências e massas inconcebíveis ao projeto. A escolha do motor será melhor apresentada na Seção 6.3.

Assim, a partir de testes com novos polos negativos, optou-se por escolher como os novos polos do sistema: $(-5,5; -7,5; -9,5; -11,5; -13,5; -15,5)$. Os valores apresentados são todos reais, tornando o amortecimento do sistema o mais crítico possível, minimizando oscilações e *overshoot*. Além disso, os módulos os polos são elevados para conferir maior velocidade de estabilização. Todavia, quanto maior essa velocidade, maior a exigência dos atuadores.

A matriz de transição para o caso em malha fechada por alocação de polos foi calculada de forma análoga ao caso em malha aberta, discutido na Seção 5.2, e pode ser vista abaixo. A diferença é que a operação de expansão em Série de Taylor é feita com a matriz $F_{ap} = A - K_{ap}B$, com K_{ap} sendo o vetor de ganho, calculado a partir dos novos polos e exposto na Equação (6.2).

$$K_{ap} = \begin{bmatrix} 1552,6186 & 251,2653 & 6,0688 & 19,3935 & 20,6043 & 6,497 \\ 298,3744 & 49,2883 & 52,7121 & 14,9268 & 8,8416 & 4,3328 \\ 77,4019 & 12,5454 & 1,5319 & 1,1745 & 1,969 & 2,1666 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$\Phi_{ap} = \begin{bmatrix} 9,9809 \cdot 10^{-1} & 4,6919 \cdot 10^{-3} & 2,5209 \cdot 10^{-4} & 2,0465 \cdot 10^{-5} & 2,7571 \cdot 10^{-4} & 4,0398 \cdot 10^{-9} \\ -7,469 \cdot 10^{-1} & 8,7873 \cdot 10^{-1} & 9,7695 \cdot 10^{-2} & 7,9292 \cdot 10^{-3} & 1,0728 \cdot 10^{-5} & 1,5717 \cdot 10^{-6} \\ 3,1701 \cdot 10^{-4} & 2,5202 \cdot 10^{-5} & 9,9824 \cdot 10^{-1} & 4,7025 \cdot 10^{-3} & -2,0167 \cdot 10^{-8} & -2,9716 \cdot 10^{-9} \\ 1,2287 \cdot 10^{-1} & 9,7668 \cdot 10^{-3} & -6,9135 \cdot 10^{-1} & 8,8283 \cdot 10^{-1} & -7,8414 \cdot 10^{-6} & -1,1553 \cdot 10^{-6} \\ 3,5143 \cdot 10^{-7} & 2,8496 \cdot 10^{-8} & -2,0022 \cdot 10^{-7} & -1,5749 \cdot 10^{-8} & 9,9950 \cdot 10^{-1} & 4,8401 \cdot 10^{-3} \\ 1,3740 \cdot 10^{-4} & 1,1140 \cdot 10^{-5} & -7,8247 \cdot 10^{-5} & -6,1530 \cdot 10^{-6} & -1,996 \cdot 10^{-1} & 9,3657 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

6.2.2 Parâmetros e matriz de transição para método LQ

Para o controle por método LQ, o sistema de realimentação em malha fechada é feito de forma que o sistema passe a possuir matrizes Q e R que irão, então, ditar o novo comportamento do sistema controlado, minimizando os efeitos do distúrbio do sistema e mantendo o estado próximo à origem.

Para determinação dos valores adequados das matrizes R e Q , buscou-se um sistema que apresentasse, assim como em alocação de polos, resposta rápida, dentro das limitações de projeto. Para tal, foi determinada uma matriz Q diagonal, apresentada na Equação (6.3), cujos valores q_{11} , q_{33} e q_{55} , os quais implicam diretamente na resposta em deslocamentos, são consideravelmente superiores aos demais (relacionados às velocidades) (OGATA, 1982). Além disso, buscou-se atribuir um valor para R baixo, reduzindo as oscilações do sistema, como apresentado na Equação (6.3).

$$Q = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \quad R = 0,005 \quad (6.3)$$

O cálculo para a obtenção da matriz de transição se deu de forma análoga à utilizada para o sistema em malha aberta. A operação de expansão em Série de Taylor é feita com a matriz $F_{LQ} = A - K_{LQ}B$, com K_{LQ} sendo o vetor de ganho, calculado a partir dos novos polos do sistema. As Equações (6.4) e (6.5) ilustram tais novos polos e K_{LQ} .

$$K_{LQ} = \begin{bmatrix} 555,7693 & 135,28 & 62,575 & 14,7676 & 8,582 & 3,7363 \\ -300,1413 & -40,1756 & 93,9713 & 14,2771 & 15,2333 & 6,1845 \\ 32,1828 & 5,5057 & -66,9939 & -5,9662 & 34,7045 & 10,8674 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$\text{Polos}_{LQ} = [-100,96; -38,94; -6,16 \pm 3,8i; -8,05; -3,97] \quad (6.5)$$

$$\Phi_{LQ} = \begin{bmatrix} 0,99777 & 0,0045828 & 0,00043654 & 4,0253e-05 & -2,0038e-05 & -5,5626e-06 \\ -0,85502 & 0,83909 & 0,16244 & 0,015032 & -0,0059627 & -0,0016824 \\ 0,010467 & 0,0016387 & 0,99478 & 0,0044353 & 0,0010709 & 0,00028285 \\ 3,9105 & 0,61404 & -1,9377 & 0,78769 & 0,38458 & 0,1017 \\ -0,00012823 & 0,00013023 & 0,0053571 & 0,00052032 & 0,99697 & 0,0041678 \\ 0,10927 & 0,073316 & 1,9348 & 0,18898 & -1,1239 & 0,69032 \end{bmatrix}$$

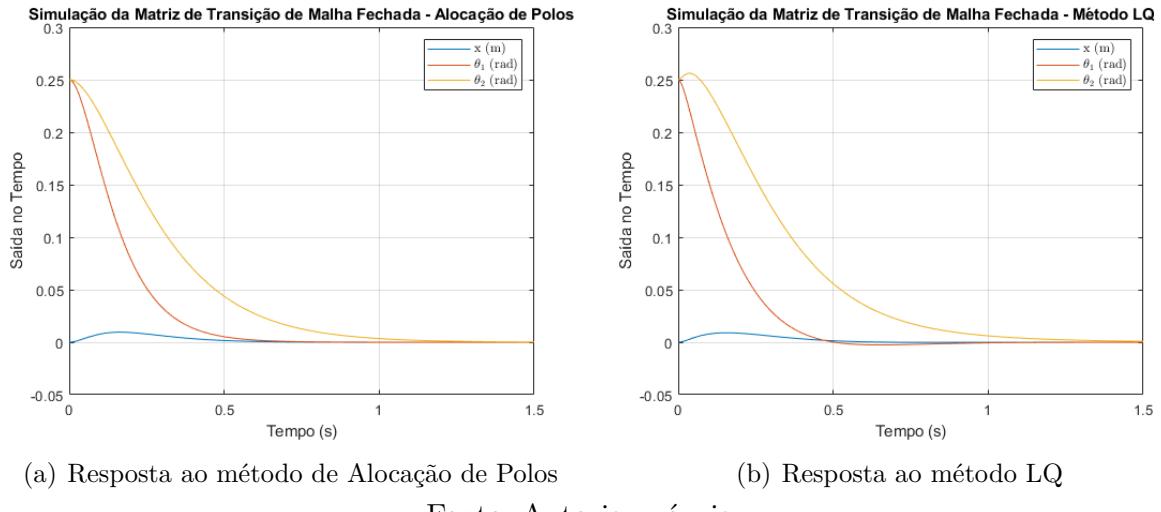
6.2.3 Simulação e comparação da velocidade dos sistemas em malha fechada

Após a determinação das matrizes de transição características do sistema para cada um dos casos de controle em malha fechada, foi possível simular o comportamento de resposta do sistema para condições iniciais específicas. Foram utilizadas na simulação as condições limites impostas para o Estado de Espera, já anteriormente mencionados na Capítulo 2, ou seja: $\theta_1 = 0,25 \text{ rad}$ e $\theta_2 = 0,25 \text{ rad}$ e os demais valores zerados.

Os gráficos de resposta no tempo quanto ao deslocamento para o caso de controle por alocação de polos e por método LQ podem ser vistos na Figura 10. Na Figura 11, observam-se as respostas referentes às saídas de velocidade. Como podemos notar, há uma grande similaridade entre as respostas para ambos os métodos, a qual foi intencionalmente visada, buscando atingir o controle mais rápido possível dentro das limitações estabelecidas pelos motores.

A rápida estabilização leva em torno de 1,5 s para estabilização do sistema, para ambos os métodos de controle. Dessa forma, o resultado obtido é compatível com o tempo de espera para o jogo de tênis de mesa, havendo baixo nível de oscilação e um valor de ***overshoot*** ínfimo.

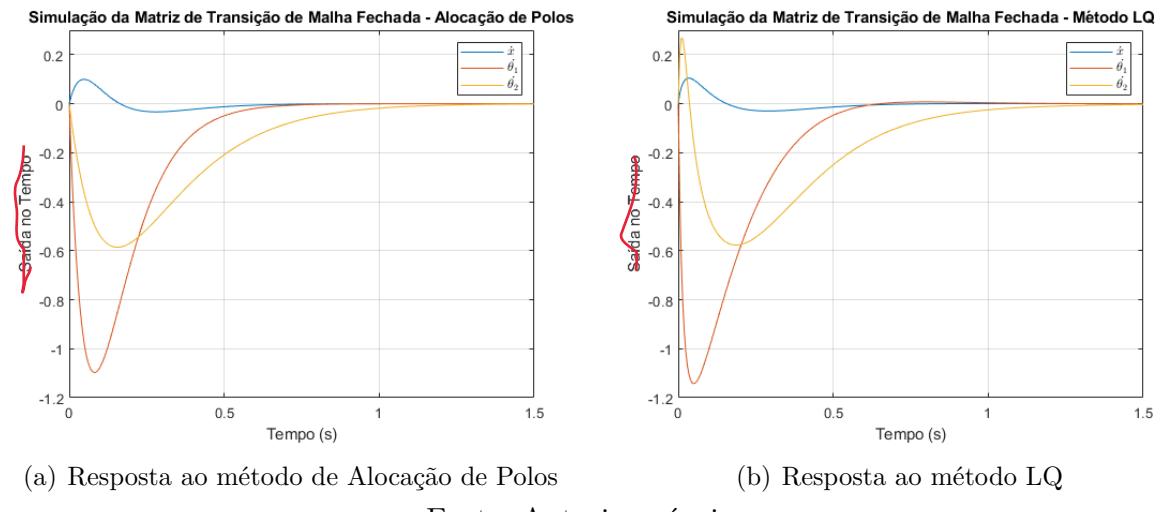
Figura 10 – Resposta dos deslocamentos no tempo do sistema



Fonte: Autoria própria.

Como podemos observar, as velocidades obtidas pelo sistema em ambos os modelos não são muito elevadas, atingindo módulos de, no máximo, $0,45 \text{ rad/s}$ e $0,05 \text{ m/s}$. Isso, conforme veremos na análise dos atuadores, implicam em uma baixa necessidade de potência. Contudo, dada a rápida frenagem do sistema, os torques são mais elevados.

Figura 11 – Resposta das Velocidades no tempo do sistema



Fonte: Autoria própria.

Como esperado, ambos os métodos de controle são capazes de atingir resultados similares e adequados às restrições e requisitos do sistema. Dessa forma, o método a ser escolhido para realização do controle fica a critério do operador.

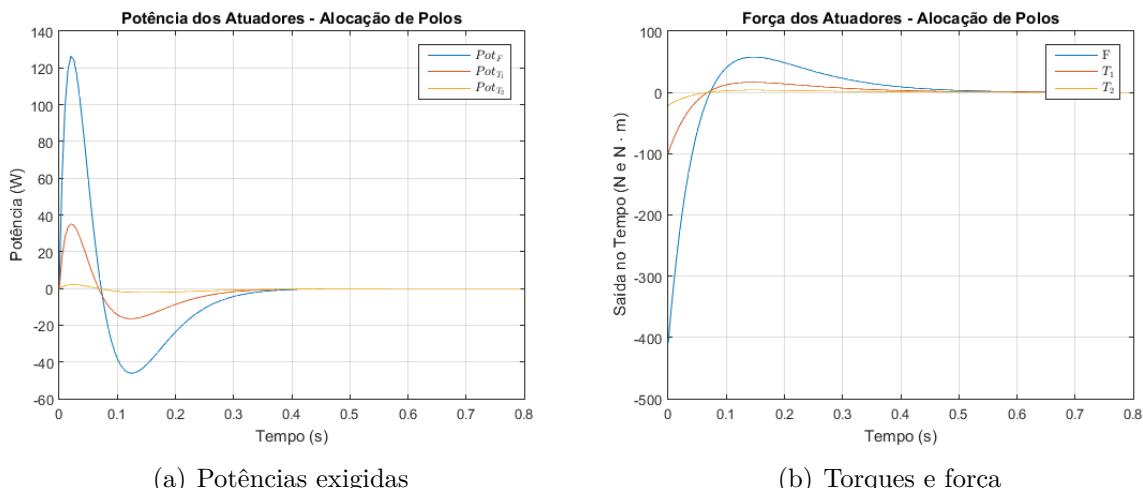
6.3 Sensores e Atuadores Necessários

Como já foi discutido previamente, o sistema é, garantidamente, controlável e observável a partir dos 3 atuadores e **os observadores propostos**. Determinar os equipamentos capazes de realizar tais funções é um processo que se baseou nas respostas do sistema obtidas nas simulações com controle por alocação de polos.

Assim, para dimensionar os atuadores, estimou-se as potências e os torques exigidos ao longo do movimento, de forma que o resultado pode ser observado nas Figuras 13(a) e 13(b).

Esse cálculo foi feito tomando os valores numéricos das acelerações \ddot{x} , $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ através de um método numérico de derivação das velocidades. Com o auxílio das Equações (4.11) a (4.13) e com estes valores numéricos, pode-se calcular os esforços exigidos pelos motores (força, no caso do atuador alocado para movimentar a base, e torque, no caso dos atuadores responsáveis por rotacionar as duas barras) e, ao multiplicar esses valores pelas respectivas velocidades, obtém-se as potências ao longo do tempo.

Figura 12 – Potências, Toques e Forças exigidas dos atuadores ao longo do movimento



Fonte: Autoria própria.

Assim, é possível elaborar a Tabela 3 contendo os valores máximos exigidos de cada um dos atuadores. A saber, identificou-se como motor 1 o atuador alocado na base para movimento horizontal do mesmo; motor 2 para o atuador responsável pela rotação da barra superior e motor 3 para aquele que rotaciona a barra inferior, sendo alocado na ponta da barra superior.

Tabela 3 – Valores máximos exigidos de cada um dos atuadores.

Atuador	Potência	Esforço (Força/Torque)	Velocidade (linear/angular)
Motor 1	126,27 W	409,28 N	0,99 m/s
Motor 2	35,19 W	99,05 Nm	11,36 rpm
Motor 3	2,25 W	20,99 Nm	5,63 rpm

Com isso, foi escolhido para o motor 1, o modelo W12 B34D de 0,25 kW de potência da fabricante WEG®, já conhecida pelo grupo. As informações a respeito dele são expostas na Tabela 4. Para o motor 2, escolheu-se o modelo Motoredutor 82 da fabricante R11®, cujas informações estão expostas na Tabela 5. Por fim, para o motor 3, escolheu-se o modelo Motoredutor 90 da fabricante IMP®, cujas informações estão expostas na Tabela 6. Para este último, os maiores limitantes são o peso (que deve ser baixo o suficiente para atender às hipóteses simplificadores estabelecidas no início do relatório) e o torque, que é relativamente alto. De fato, o peso do motor é baixo o suficiente para ser ignorado, porém, para atingir o torque exigido seria necessária a implementação de um mecanismo de redução no motor, de forma a reduzir sua rotação e aumentar o torque.

Mais informações acerca dos atuadores estão disponíveis no Apêndice E.

Tabela 4 – Características do Motor 1

Norma	ABNT NBR 17094	Potência	0,25kW (0,33 cv)
Frequência	60 Hz	Fixação	com pés
Tensão	220/380 V	Dimensões aproximadas	160x220x120 mm
Nº de Polos	2	Massa aproximada	3,7 kg
Rotação síncrona	3600 rpm	Material da carcaça	Alumínio

Fonte: WEG®.

Tabela 5 – Características do Motor 2

Voltagem	12V DC	Rotação síncrona	82 rpm
Corrente máxima	20 A	Corrente nominal	5A
Torque nominal	6 Nm	Torque máximo	35 Nm
Massa aproximada	1,5 kg	Dimensões aproximadas	200x65x60 mm

Fonte: R11®.



Tabela 6 – Características do Motor 3

Voltagem	12V DC	Rotação síncrona	90 rpm
Corrente máxima	4 A	Torque máximo	20 kgf.cm
Corrente nominal	1 A	Torque nominal	8 kgf.cm
Massa aproximada	0,5 kg	Dimensões aproximadas	110x113x30 mm
Potência	10 W	Diâmetro do eixo	8 mm

Fonte: IMP®.

No tocante aos sensores, o caso ideal para o projeto é, inicialmente, justamente medir todas as grandezas avaliadas, de modo a obter-se as medidas precisas e não ser necessário depender de estimativas do observador. Além disso, considera-se que apenas os sensores angulares estarão embarcados, já que os modelos de sensores de deslocamento e velocidade lineares podem facilmente ser montados na estrutura de apoio ao conjunto base e dois braços.

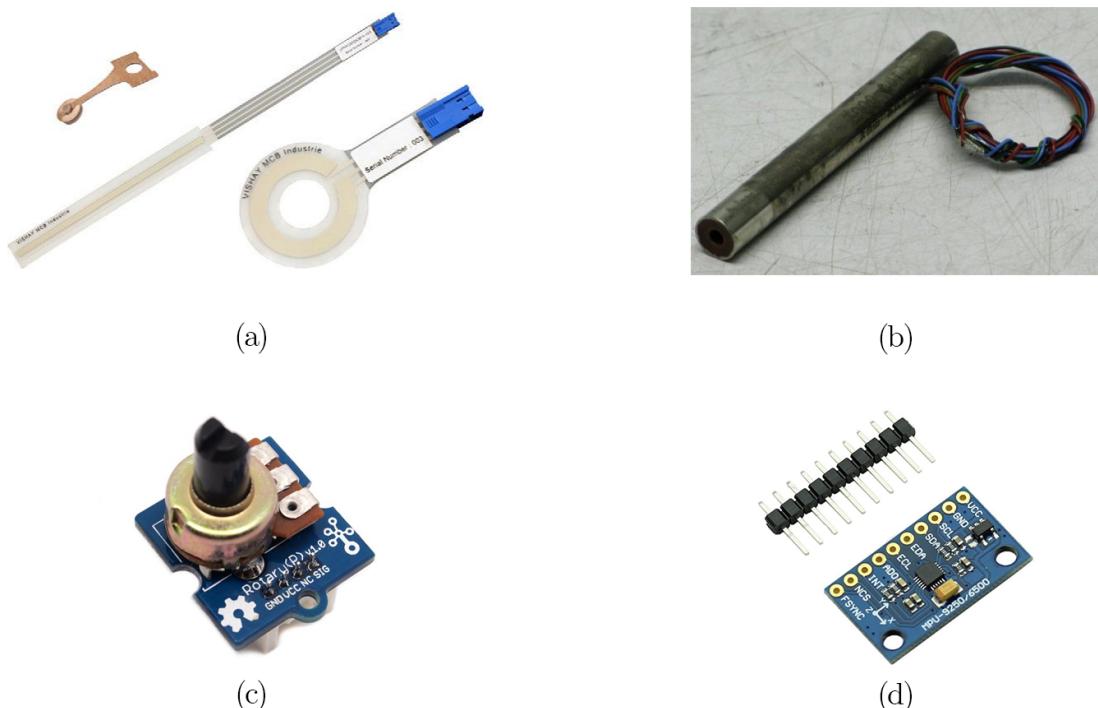
Assim, foram escalados sensores de deslocamento e velocidade, lineares e angulares, como destacado na Tabela 7 e ilustradas pela Figura 13. Nota-se que a indisponibilidade dos valores de peso dos sensores lineares não é impedimento para a sua consideração, já que, como supracitado, eles não estão embarcados.

Tabela 7 – Relação de sensores elencados para as medições do problema.

Grandeza	Sensor	Marca	Preço	Peso
Deslocamento linear	UIPMA150I472XCB	Vishay	US\$ 15,56	-
Velocidade linear	Linear Velocity Transdutor	Transtek	US\$ 75,00	-
Deslocamento angular	Rotary Angle Sensor	Grove	US\$ 2,90	10 g
Velocidade angular	Giroscópio MPU9250/6500	HiLetgo	US\$ 8,99	2,72 g

Fonte: Autoria própria.

Figura 13 – (a) Sensor *Vishay* de deslocamento linear; (b) Sensor *Transtek* de velocidade linear; (c) Sensor *Grove* de deslocamento angular; (d) Sensor *HiLetgo* de velocidade angular.



Fontes: (a) Mouser; (b) Amazon; (c) SeedStudio; (d) Amazon.

6.4 Observador de Estado

A fim de minimizar as restrições relacionadas aos custos de projeto, é necessário realizar uma análise da influência da utilização de sensores no sistema, para evitar gastos com sensores não necessários.

Sendo assim, foi realizado o estudo da adoção de um observador para estimar as saídas que não seriam medidas. Tal ferramenta pode ser implementada por alocação de polos ou pelo método LQ, independente dos ganhos de controle já projetados, graças ao princípio da separação. Pode-se, então, simular o comportamento do sistema com a ferramenta da matriz de transição já apresentada e utilizando também a matriz Λ descrita na Equação (6.6).

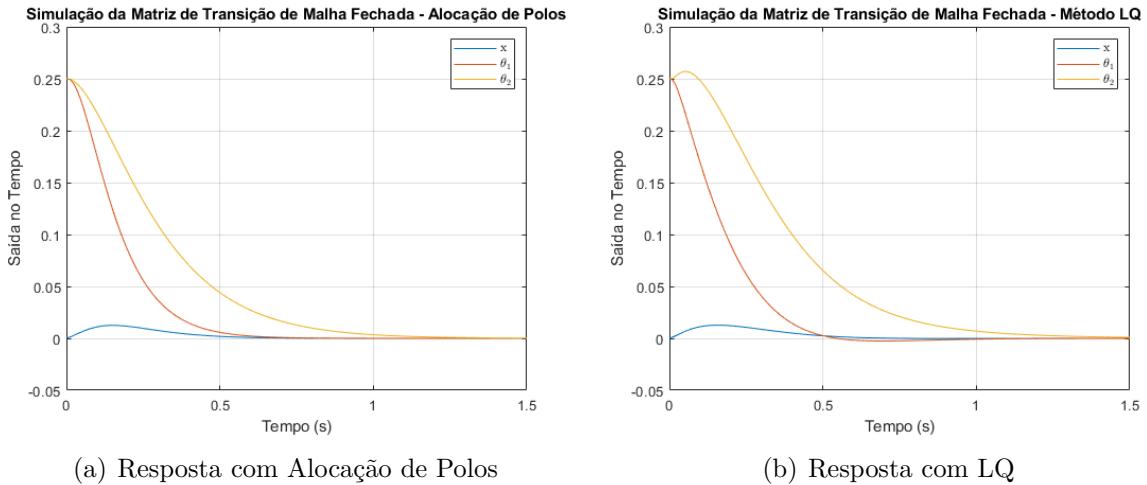


$$\Lambda = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_o C \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Com isso, tentou-se inicialmente elaborar o observador/regulador utilizando os polos previamente alocados e selecionando os polos de observação com módulo dez vezes maior que os anteriores ($\mu_1 = -55$, $\mu_2 = -75$, $\mu_3 = -95$, $\mu_4 = -115$, $\mu_5 = -135$, $\mu_6 = -155$). Para as matrizes do observador pelo método LQ, foram utilizados valores elevados para os valores referentes às variáveis não medidas, visando reduzir o tempo de convergência do erro. Para tanto, utilizou-se a matriz Q diagonal com valores: $q_{11} = 1$, $q_{22} = 100$, $q_{33} = 100$, $q_{44} = 1$, $q_{55} = 100$ e $q_{66} = 1$; e mantendo $R = 0,005$.

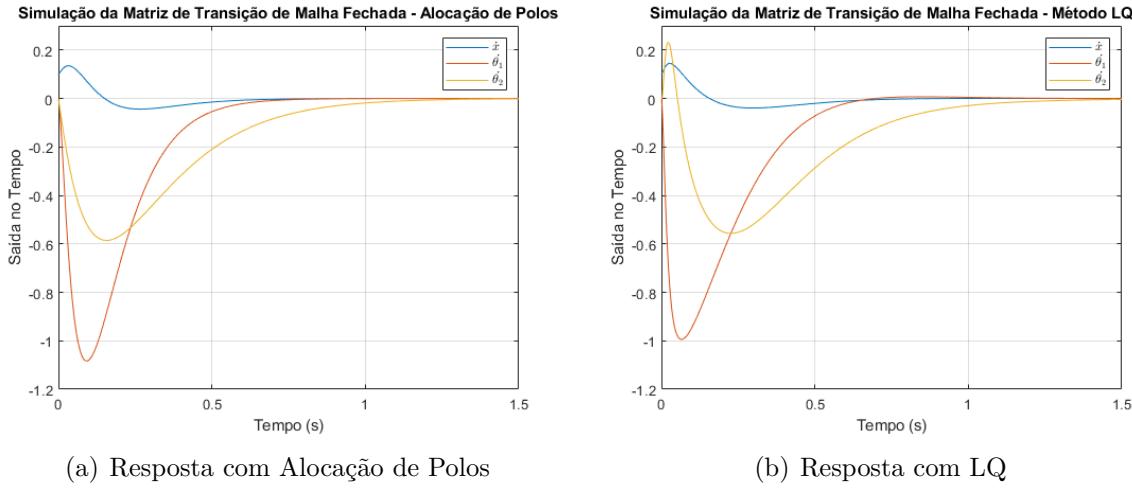
Os resultados das simulações em matriz de transição encontram-se nas Figuras 14 e 15.

Figura 14 – Resposta no tempo dos deslocamentos com observador



Fonte: Autoria própria.

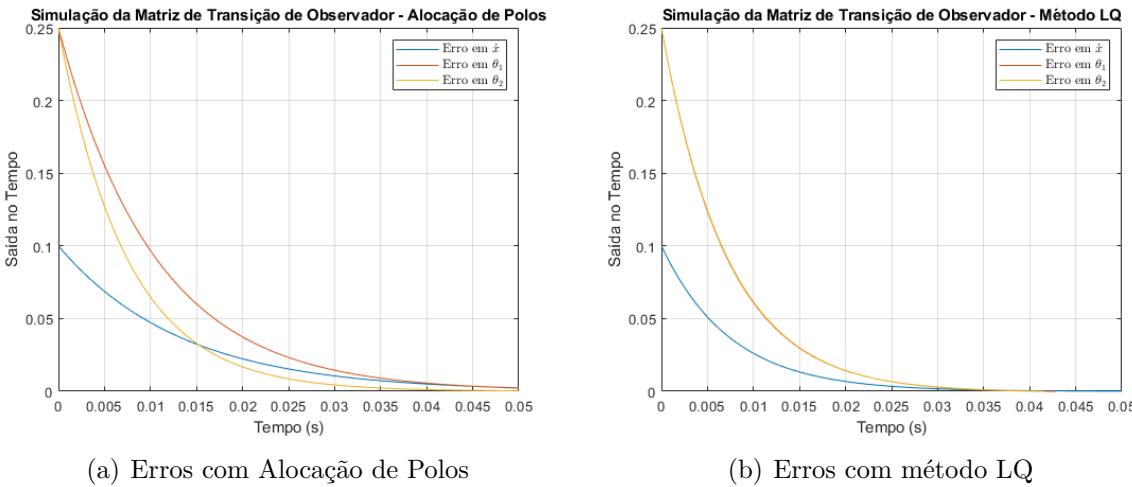
Figura 15 – Resposta no tempo das velocidades com observador



Fonte: Autoria própria.

Como se pode observar, as respostas obtidas são muito similares aos valores apresentados para o sistema sem observador. Isso é justificado pela convergência muito rápida dos erros iniciais dos parâmetros estimados, os quais convergem em aproximadamente 0,05 segundos, como apresentado na Figura 16. Essa resposta quase instantânea, implica em uma variação da resposta do sistema quase imperceptível.

Figura 16 – Convergência dos erros do observador



Fonte: Autoria própria.

Sendo assim, é possível concluir que, dado que o sistema com e sem observador possuem respostas que podem ser consideradas praticamente idênticas dadas as especificações de projeto, não é necessário implementar todos os 6 sensores.

Após tal análise, serão mantidos os sensores para avaliar o deslocamento linear (x) e as velocidades angulares ($\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$). Isso, pois são os sensores de mais baixo custo e que ainda garantem a observabilidade do sistema.



Espaço de Estado continua ruim e incompleto. Usaram matriz identidade para a matriz de saída.
Nenhum seguidor.
Não falaram de rejeição de distúrbio.
Podriam ter simulado o melhor controlador com o sistema não linear para avaliar a robustez do controlador, já que não fizeram nada de seguidor. Só fizeram regulador, simpificando extremamente o problema de controle a um único estágio.

31

7 CONTROLE

7.1 Funções de transferências relevantes

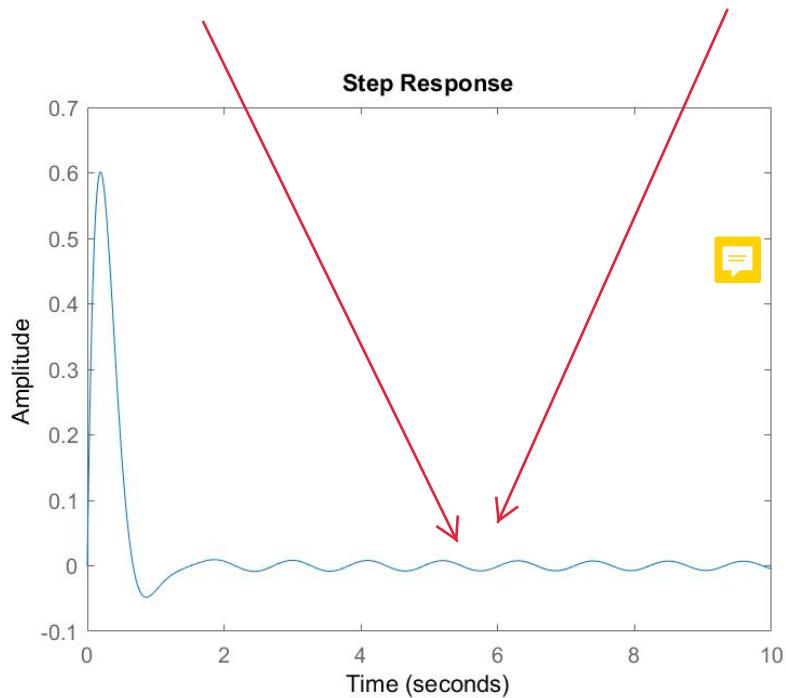
Como já discutido na Seção 5.1.1, o sistema dispõe de 18 funções de transferência, que relacionam as três entradas com as seis saídas. Para a análise do sistema utilizando ferramentas de controle clássico, faz-se necessário escolher apenas a mais relevante para o sistema para ser analisada. Com isso, opta-se por tomar como função a ser estudada $G_{T_2, \dot{\theta}_2}$, explicitada abaixo.

$$G_{T_2, \dot{\theta}_2} = \frac{7,281s^5 + 0,01002s^4 + 238,1s^3 + 0,1695s^2}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (7.1)$$

Tal função foi adotada para análise por três principais razões. Primeiramente, relaciona uma entrada com uma das saídas com as quais possuem relação mais direta, isto é, o torque aplicado no motor 3 tem uma influência visível e óbvia sobre a angulação que a segunda barra faz com a diagonal. Ademais, entendemos que o sistema exige mais precisão e velocidade nas saídas relacionadas com $\dot{\theta}_2$ do que, por exemplo, nas saídas de x ou \dot{x} , pois variam mais ao longo do movimento e impactam diretamente na forma com a qual a raquete vai se portar no estágio modelado. Por fim, pela análise de sensores realizada na Seção 6.3, sabe-se que a precisão na medida da velocidade angular, realizada pelo giroscópio, é maior que a precisão da medida da angulação em si, motivo pelo qual optamos por $G_{T_2, \dot{\theta}_2}$ em detrimento de G_{T_2, θ_2} .

Analizando a função escolhida, sabe-se que é estável em malha aberta, porém com um tempo de acomodação muito alto. Ademais, pode-se ver, pela resposta ao degrau em malha fechada ilustrada na Figura 17, que existe um erro altíssimo no regime permanente, dado que após cerca de 2 segundos a resposta oscila em torno de zero, além de não atingir 1 em nenhum momento. Tais pontos serão tratados em projetos de controladores PID, na seção a seguir.

Figura 17 – Resposta ao degrau de amplitude unitária da FTMF escolhida



Fonte: Autoria própria.

7.2 Avaliação do uso de Compensador

Em sistemas com baixa estabilidade relativa, o uso de compensador é interessante, buscando aumentar as margens de fase e, consequentemente, a estabilidade relativa do sistema.

Entretanto, a presente função de transferência selecionada apresenta comportamento estável e estabilidade absoluta muito grande, uma vez que não apresenta polos em malha aberta no semiplano direito e a fase de $GH(s)$ não chega a -180° em nenhum momento. Com essas afirmações, pode-se concluir que é desnecessária a aplicação prévia de um compensador.

Todavia, para certificar tal conclusão, um teste foi realizado, aplicando um avanço de fase por meio do método de Bode. Nele, é determinado um valor de avanço de interesse ϕ . Com ele, é determinado um valor de α da seguinte forma:

$$\alpha = \frac{\sin \phi + 1}{1 - \sin \phi}$$

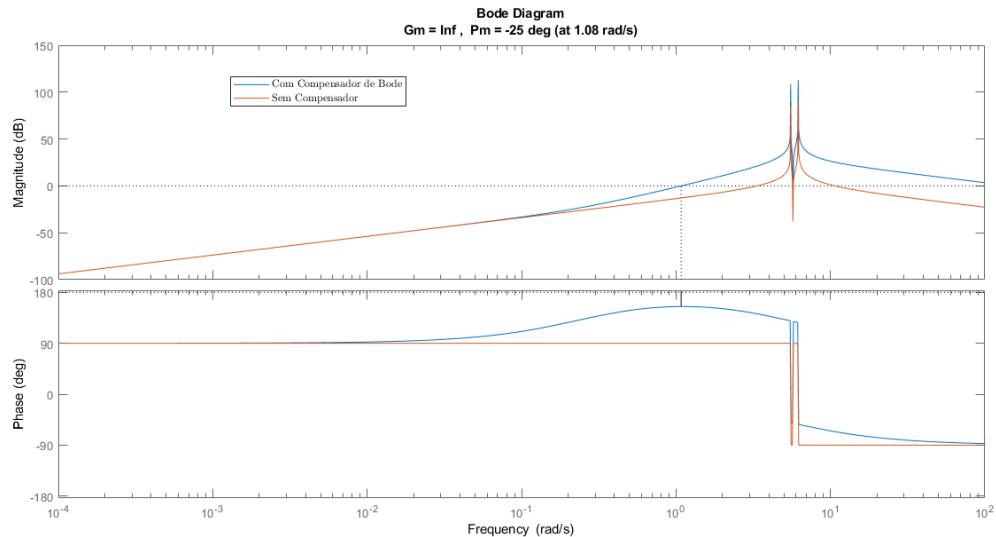
Sendo que:

$$\alpha = \frac{|polo|}{|zero|}$$



Para sua aplicação, foi definido portanto $\phi = 60^\circ + 5^\circ$. Com isso, obteve-se o diagrama de Bode apresentado na Figura 18.

Figura 18 – Diagrama de Bode e Margens do sistema compensado



Fonte: Autoria própria.

Como se pode observar, a resposta com compensador apresentou uma variação de fase próximo às frequências de ressonância, além de um aumento no ganho nesta região. Em termos de estabilidade, porém, pouca diferença é encontrada, uma vez que o sistema tem fase variando de 90° a -90° . Assim, não é de interesse a inserção de um compensador, o qual aumentará a ordem do sistema sem ganhos significativos.



7.3 Sintonização de um controlador PID

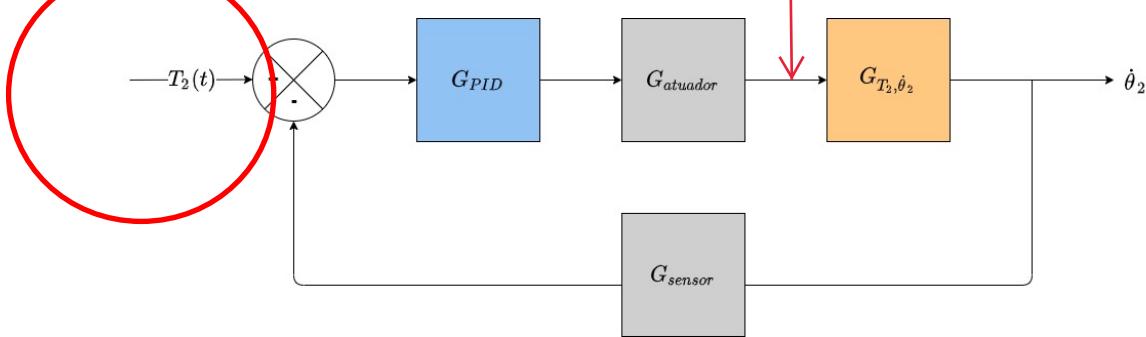
A seguir, avaliaremos diferentes métodos de sintonia para projetar um controlador do PID para o sistema. Tal controlador pode ser sintetizado pela Equação (7.2) e pela Figura 19. Pela equação citada, vemos que a função de transferência do sistema resultante pode ser entendida como a função original da planta acrescida de um par de zeros complexos e de um integrador puro (polo na origem do plano s).

Ressalta-se que o controlador PID não é, necessariamente, a melhor opção para qualquer sistema. Assim, é necessário uma análise para entender quais ganhos (integral, derivativo ou proporcional) são necessários. No presente sistema, como discutido no seção anterior e explicitado pela Figura 17, a resposta ao degrau não atinge valor unitário e possui grandes erros no regime permanente. Tal situação indica a necessidade de um controlador do tipo PI. Quanto ao ganho derivativo, avaliar-se-á sua necessidade conforme

os ganhos K_P e K_I forem sintonizados por cada um dos métodos.

$$\begin{aligned} u(t) &= K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int_0^{\tau} e(t) dt \\ U(s) &= K_p E(s) + K_d E(s)s + K_i \frac{E(s)}{s} \\ \therefore G_{PID} &= \frac{K_I + K_P \cdot s + K_D \cdot s^2}{s} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Figura 19 – Diagrama de blocos simplificado para controlador PID na planta.



Fonte: Autoria própria.

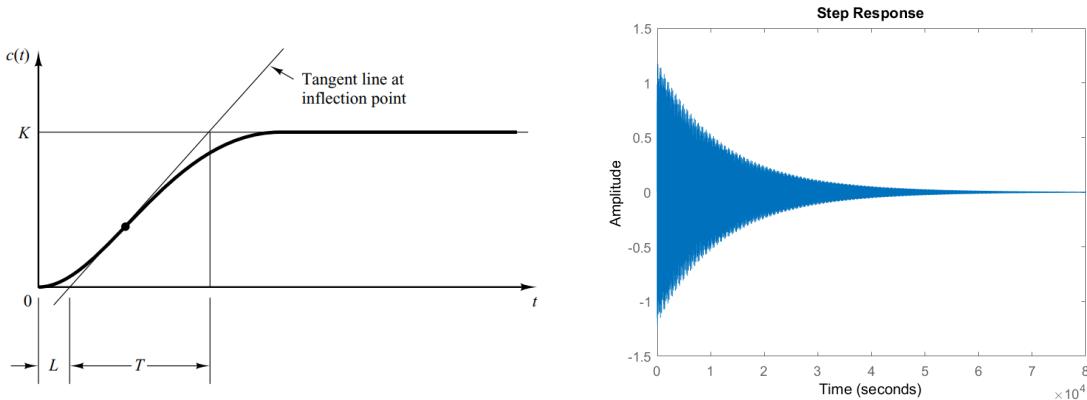
7.3.1 Métodos de Ziegler-Nichols

Ziegler e Nichols (1942) estabeleceram dois métodos para a determinação dos ganhos de controladores P, PI e PID operando em malha fechada. Tais métodos são apresentados a seguir.

7.3.1.1 Método da curva de reação

Para este primeiro método, tem-se como requisito que a resposta em malha aberta para uma entrada em degrau possua um formato de S , exemplificado na Figura 20. Porém, para a função analisada, a resposta possui formato muito distinto, impossibilitando o uso desse método. Ademais, Ogata (1982) indica que esse requisito só será atingido caso o sistema não possua integradores nem polos conjugados complexos dominantes, o que não é o caso do presente sistema.

Figura 20 – Resposta em formato S esperada pelo método e resposta ao degrau da FT estudada.

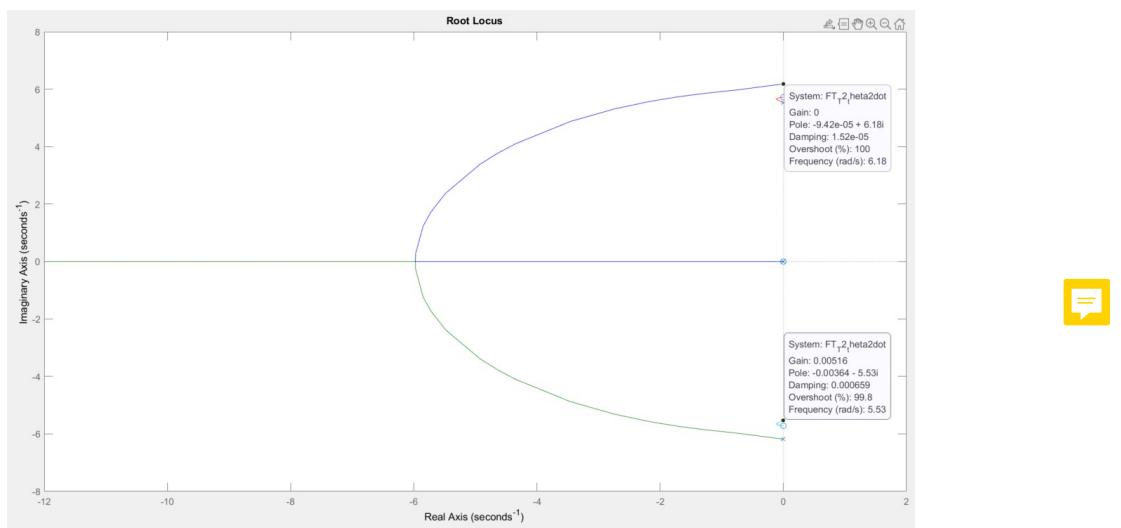


Fonte: (OGATA, 1982) e autoria própria.

7.3.1.2 Método do Ganho Limite

O segundo método proposto por Ziegler-Nichols se baseia em determinar o ganho crítico de forma que o sistema em malha fechada produza uma resposta harmônica, puramente oscilatória. Porém, ao traçar o lugar das raízes para a função vê-se que para nenhum ganho o sistema assume tal característica, uma vez que não existe K_{cr} finito para o qual os polos estejam no eixo imaginário, salvo na origem. Isso é apresentado graficamente na Figura 21.

Figura 21 – Lugar das raízes para FT estudada.



Fonte: Autoria própria.

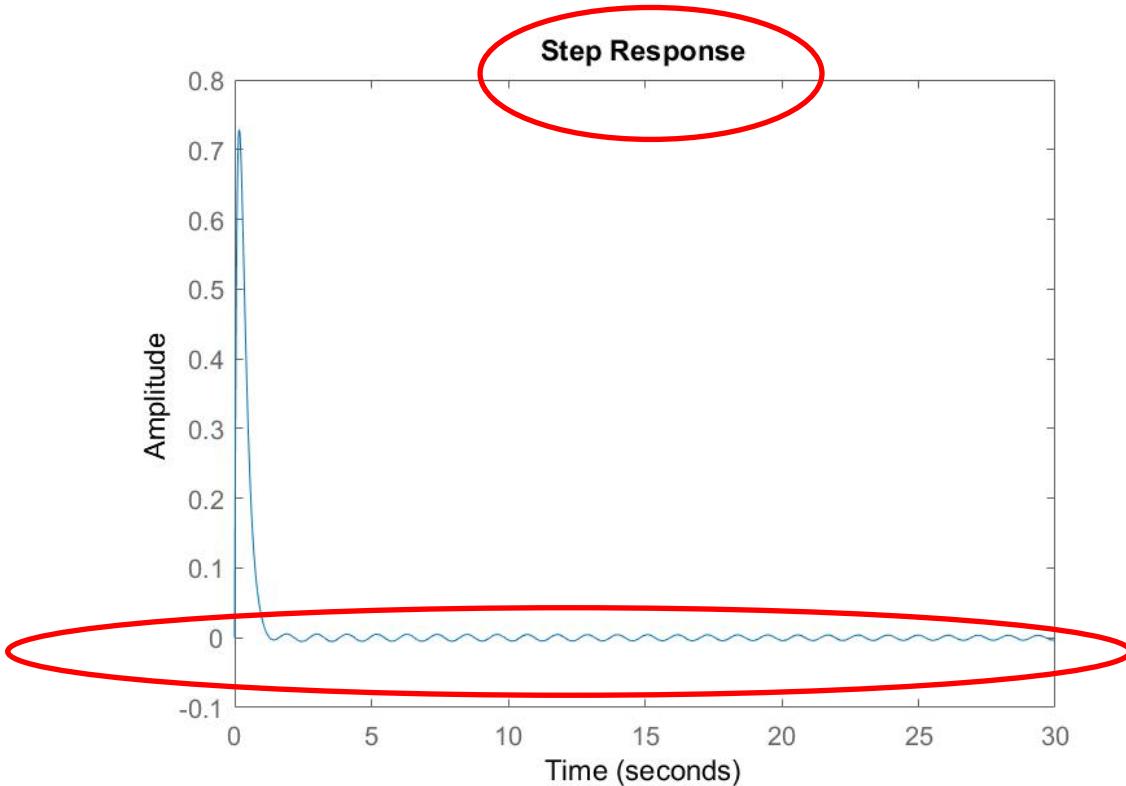
7.3.2 Sintonia via Lugar das Raízes

A sintonia do controlador via Lugar das Raízes (LR) foi feita utilizando o ambiente *Control System Designer* do MATLAB®. Nele, é possível editar o LR plotado ajustando

valores de ganhos e adicionando polos e zeros, enquanto a resposta ao degrau é atualizada simultaneamente. Dessa forma, com ele, os ganhos puderam ser sintonizados de forma a garantir a melhor resposta ao degrau possível, ou seja, a resposta que apresentasse menor tempo de acomodação e menor erro no regime permanente.

Primeiramente, considerou-se o caso de se projetar apenas um ganho proporcional, cuja resposta está ilustrada na Figura 22. Com o ambiente de simulação citado, obteve-se como melhor valor de ganho $K_P = 1,6025$. Obviamente, esse sistema não foi satisfatório, uma vez que o erro no regime permanente não foi corrigido. Em comparação com o sistema original, houve uma melhoria no um aumento de 21,11% no valor de pico, passando de 0,6016 para 0,7286.

Figura 22 – Resposta ao degrau para sistema com controlador P sintonizado via LR



Fonte: Autoria própria.

Tal resultado condiz com o esperado, uma vez que, como já discutido, a resposta original indicava a necessidade de um controlador, no mínimo, com ganhos integral e proporcional. Assim, o próximo passo foi projetar um controlador do tipo PI e outro do tipo PID, ainda seguindo a mesma metodologia de alterar o LR no ambiente *Control System Designer* observando as respostas. Para sintonizar um PI acrescentou-se ao LR um integrador puro e um zero real; já para o caso PID, acrescentou-se um integrador e um zero complexo.

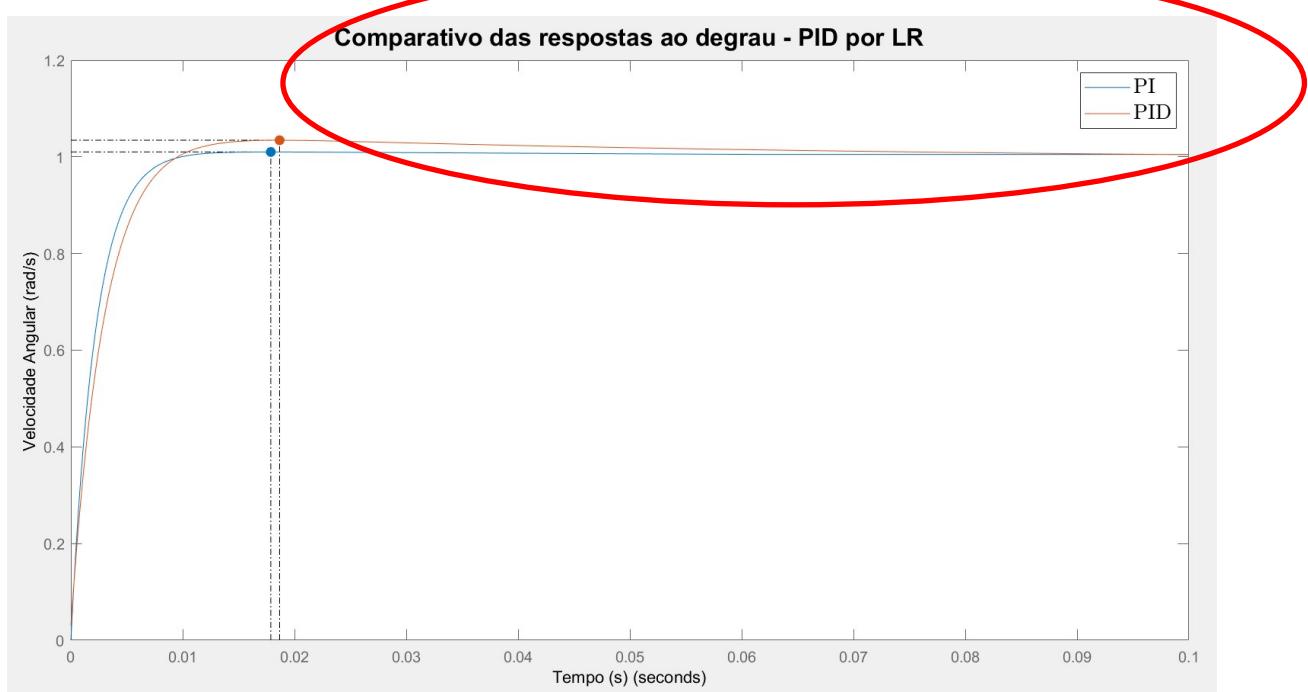
Com isso, obteve-se os valores de ganho apresentados na Tabela 8. Com tais valores, obteve-se as respostas apresentadas na Figura 23. Ainda na Tabela 8, estão representadas as características de resposta de cada um dos sistemas projetados.

Tabela 8 – Diferentes projetos de controladores PID pelo método LR.

Controlador	K_P	K_I	K_D	Tempo de pico	Tempo de acomodação	Erro aproximado no RP
P	1,60	-	-	0,1662	1,0919	0,9966
PI	63,05	355,8	-	0,0179	0,0521	0,0061
PID	49,20	782,1	0,86	0,0187	0,0660	0,0013

Com os valores apresentados acima, e reiterando as restrições e os requisitos do projeto estabelecidos, toma-se o sistema com controlador PI como o mais adequado. Isso porque tanto o seu tempo de pico quanto tempo de acomodação é menor que os demais, sendo, portanto, mais compatível com a rápida dinâmica de um jogo de tênis de mesa. Como contraponto, ressalta-se que o erro aproximado no regime permanente é menor utilizando um controlador PID, porém, entende-se que existe uma margem para erro para a velocidade angular no ponto de operação modelado, uma vez que a raquete não precisa estar necessariamente parada ou com uma velocidade específica no estágio de espera do jogo.

Figura 23 – Resposta ao degrau para sistema com controlador PID e PI sintonizado via LR



Fonte: Autoria própria.

7.3.3 Sintonia via *PID Tuner*

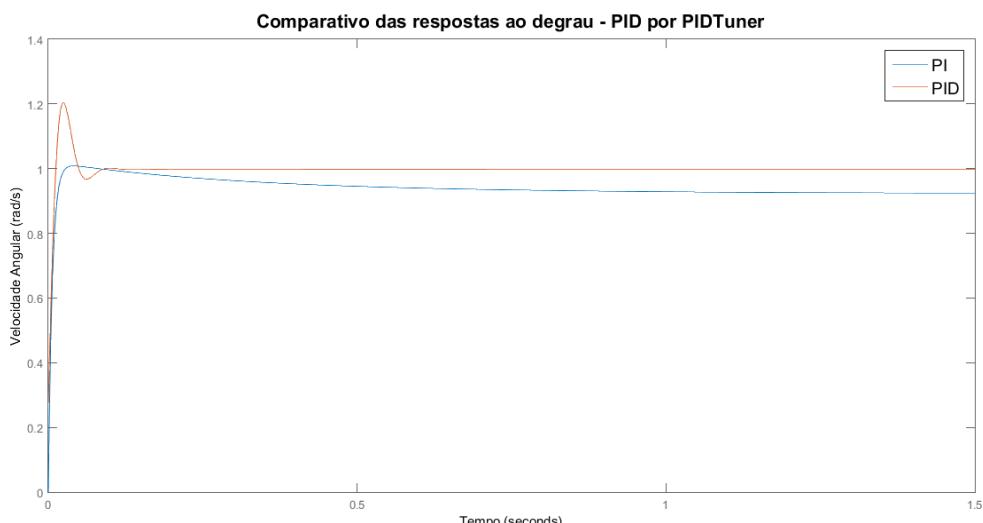
Para efeitos de comparação adicional, faz sentido a utilização da ferramenta *PID Tuner* do MATLAB®, a qual permite o projeto de controladores iterativamente a partir do ajuste da velocidade da resposta e da robustez do sistema, observando a resposta ao degrau para a malha fechada. Dessa forma, analogamente à sintonia por LR, foram projetados controladores PI e PID, de modo a comparar as respostas. Na Tabela 9, observa-se os ganhos projetados e algumas características das suas respectivas respostas ao degrau.

Tabela 9 – Diferentes projetos de controladores a partir do *PID Tuner*.

Controlador	K_P	K_I	K_D	Tempo de pico	Tempo de acomodação	Erro aproximado no RP
PI	21,6	59,5	-	0,0415	0,5515	0,0753
PID	19,5	1822,4	0,05	0,0242	0,0756	0,0027

A análise dos dados da tabela revela, em contrapartida ao observado na sintonização por Lugar das Raízes, que o controlador projetado por PID apresenta uma resposta consideravelmente melhor que o PI, sendo melhor em todos os parâmetros escolhidos. É interessante ressaltar, também, que o controlador PI projetado nesse ambiente não foi tão eficiente para mitigar o erro em regime permanente. Os gráficos das respostas ao degrau supracitadas encontram-se na Figura 24.

Figura 24 – Resposta ao degrau para sistema com controlador PID e PI sintonizado via *PID Tuner*.



Fonte: Autoria própria.

7.3.4 Sintonia PID via Alocação de Polos

Tal método de projeto de controle consiste na determinação dos ganhos proporcional, integrativo e derivativo com o fito de tornar a equação característica do sistema em malha fechada igual à correspondente a um sistema com os polos escolhidos pelo projetista, a partir da resolução de um sistema linear. Há de se notar, no entanto, que esse procedimento, pela limitação no número de incógnitas, é exato apenas para sistemas de baixa ordem, o que não é o caso deste trabalho e portanto exige uma aproximação da solução via método dos mínimos quadrados  Outra limitação que pode comprometer os resultados é o fato de que a FTMF do sistema apresenta dois polos em zero, não dispondo de termos s^1 e s^0 em sua composição, o que restringe a escolha dos polos.

Com isso, foram elaboradas rotinas no MATLAB® e em *Python* para a resolução do sistema sobredeterminado a partir de polos similares aos alocados na Seção 6.2.1. Novamente, vale ressaltar que, da imprecisão dos resultados via MMQ, decorre que os valores obtidos para os ganhos não tornam de fato a resposta do sistema como a pretendida, fazendo-se necessárias iterações dos polos escolhidos de modo a otimizar-se a resposta. A sequência de polos iterados e resultados encontram-se, respectivamente nas Tabelas 10 e 11.

Tabela 10 – Valores de polos utilizados, já considerando dois polos em zero.

Iteração	Polo 1	Polo 2	Polo 3	Polo 4	Polo 5
1	-1,5	-3,5	-11,5	-13,5	-15,5
2	-3,5	-7,5	-9,5	-11,5	-13,5
3	-1,5	-2,5	-13,5	-15,5	-17,5
4	-1,5	-2,5	-10	-17,5	-19,5
5	-1,5	-2,5	-17,5	-19,5	-21,5
6	-1	-2	-19,5	-21,5	-23,5

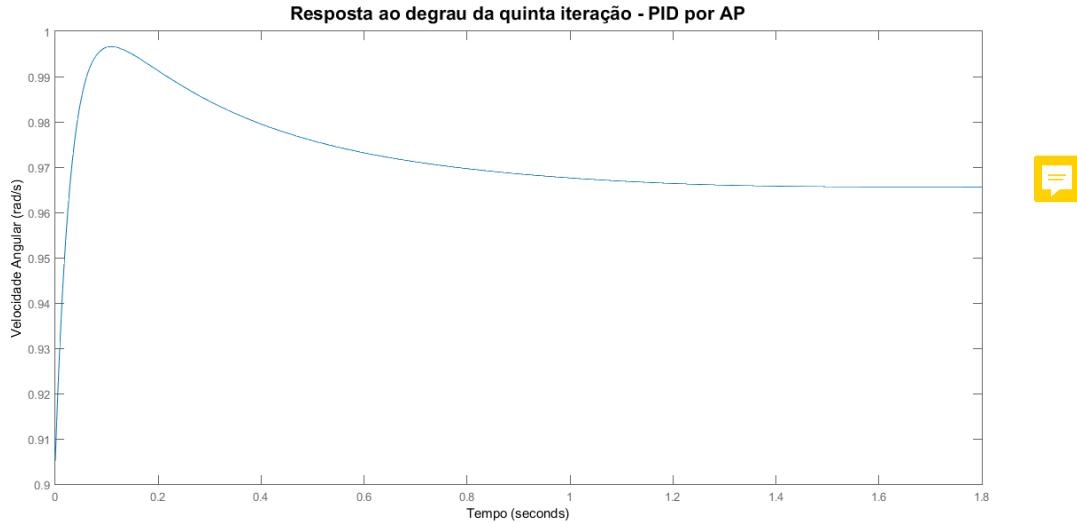


Tabela 11 – Valores encontrados e resultados do degrau para o controlador PID por AP.

Iteração	K_P	K_I	K_D	Tempo de pico	Tempo de acomodação	Erro aproximado no RP
1	22,38	57,62	1,01	0,1428	1,2859	0,077949
2	15,82	47,66	0,53	0,1356	1,0713	0,093136
3	28,13	67,92	1,44	0,1505	1,3922	0,06757
4	26,99	63,64	1,55	0,1508	1,401	0,071671
5	50,77	136,3	1,31	0,1093	1,1835	0,034368
6	59,29	130,86	2,33	0,1287	1,7957	0,035987

A partir da observação dos dados de ambas as tabelas, vê-se que a quinta iteração foi a que forneceu os melhores resultados e cuja resposta ao degrau encontra-se na Figura 25.

Figura 25 – Resposta ao degrau da melhor iteração por AP.



Fonte: Autoria própria.

7.3.5 Sintonia PID via ITAE

A sintonização por controle ótimo, ou índice ITAE, utiliza de coeficientes pré-determinados que acarretam no melhor desempenho de um sistema dada uma entrada em degrau ou rampa. Dessa forma, o primeiro passo é identificar a ordem do sistema controlado, o que se obtém facilmente realizando multiplicando a função de transferência do sistema (Equação (7.1)) pela função do ganho PID (Equação (7.2)):

$$G_{PID} = G_{T_2, \dot{\theta}_2} \cdot \frac{K_I + K_P \cdot s + K_D \cdot s^2}{s}$$

Como nosso sistema original apresenta um denominador de sexta ordem e a função de PID adiciona um novo polo, o sistema se torna de sétima ordem. Sendo assim, os coeficientes do controle ótimo seriam:

$$\text{Coef. } s^7 + 2,217\omega_n s^6 + 6,745\omega_n^2 s^5 + 9,349\omega_n^3 s^4 + 11,580\omega_n^4 s^3 + 8,680\omega_n^5 s^2 + 4,323\omega_n^6 s + \omega_n^7$$

Para poder obter uma comparação direta do sistema com estes coeficientes, contudo, seria necessária manipulação algébrica de filtro, para reduzir o numerador, assim como solucionar um sistema sobre-determinado de sete equações. Claramente, este procedimento exige grande custo, se tratando de um sistema com tamanha ordem, não sendo pois o procedimento mais adequado.

Dessa forma, o índice ITAE será aplicado de forma iterativa, utilizando-se de sua definição, apresentada na Equação (7.3), onde t representa o tempo decorrido e $e(t)$ o erro

ao longo do tempo.

$$ITAE = \int_0^T t \cdot |e(t)| dt \quad (7.3)$$

Conhecido o diagrama de local das raízes do sistema, será selecionada uma margem de ganhos que levam os polos à maior estabilidade. Com essa margem, será realizado um processo iterativo de alteração dos valores de ganhos do controle PID, buscando determinar o conjunto que implica em menor índice ITAE, ou seja, menor acúmulo de erro.

Dessa forma, foram analisadas inúmeras combinações de ganhos para as seguintes faixas de valores:

$$0 \leq K_D \leq 0,1 \quad 55 \leq K_P \leq 65 \quad 850 \leq K_I \leq 1250$$

Os melhores resultados encontrados são apresentados na Tabela 12.

Tabela 12 – 20 melhores resultados do método iterativo com ITAE

K_D	K_P	K_I	ITAE
0	65	1250	0,1960
0,0100	65	1250	0,1960
0,0200	65	1250	0,1960
0,0300	65	1250	0,1960
0,0400	65	1250	0,1960
0,0500	65	1250	0,1961
0,0600	65	1250	0,1961
0,0700	65	1250	0,1961
0,0800	65	1250	0,1961
0,0900	65	1250	0,1962
0,1000	65	1250	0,1963
0	60	1250	0,1970
0,0100	60	1250	0,1970
0,0200	60	1250	0,1970
0,0300	60	1250	0,1970
0,0400	60	1250	0,1971
0,0500	60	1250	0,1971
0,0600	60	1250	0,1971
0,0700	60	1250	0,1972
0,0800	60	1250	0,1973

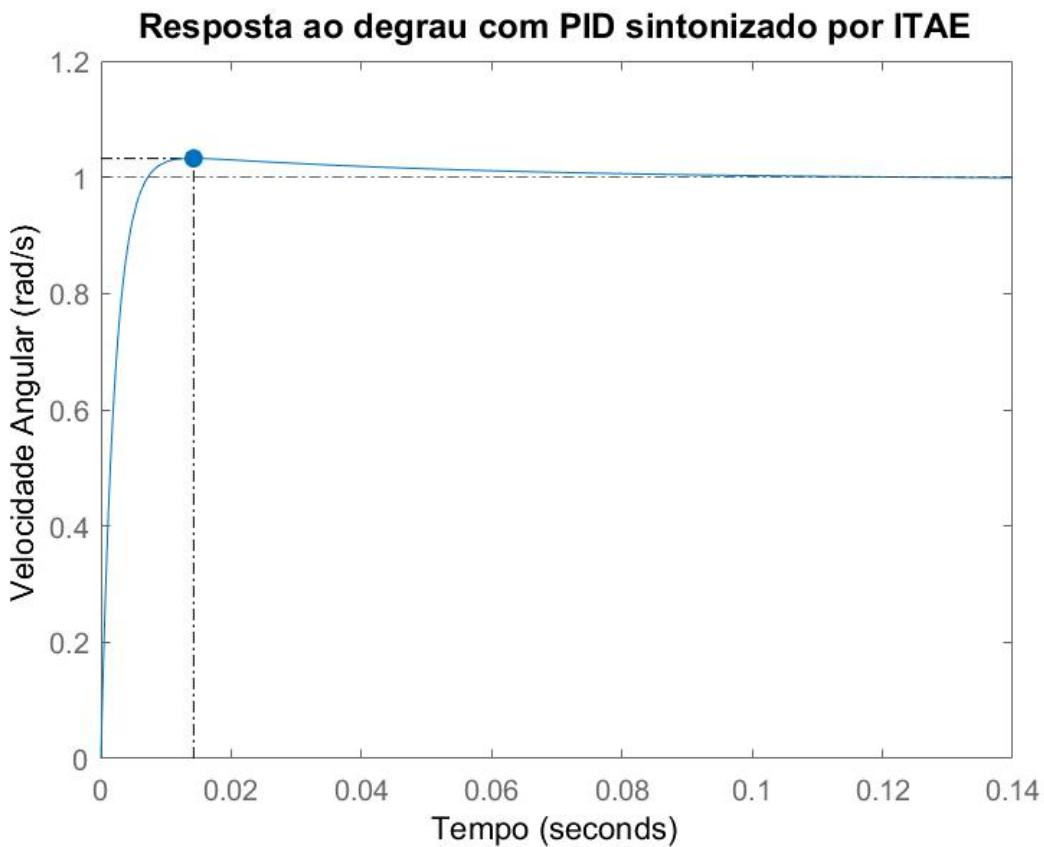


Com isso, observou-se que a melhor combinação seria o uso dos valores:

$$K_D = 0 \quad K_P = 65 \quad K_I = 1250$$

Como podemos observar, o melhor resultado apresentou valor de K_D nulo, o que se assemelha ao resultado obtido com controle por LR, como era de se esperar.

Figura 26 – Resposta ao degrau com uso do método ITAE



Fonte: Autoria própria.

Uma validação final do resultado obtido foi feita com uso da resposta ao degrau. Novamente, com uso do *software* MATLAB®, foi obtida a resposta apresentada na Figura 26. As características de tal resposta estão explicitadas na Tabela 13

Tabela 13 – Características da resposta ao degrau do PID sintonizado por ITAE

Tempo de pico	Tempo de acomodação	Erro aproximado no RP	Pico
0,0142	0,0462	$3,2436 \cdot 10^{-4}$	1,0325



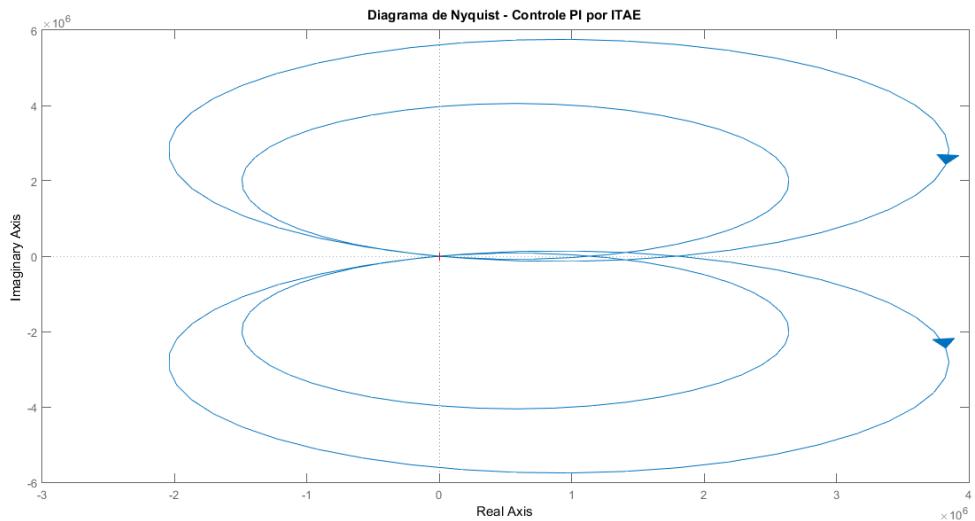
7.4 Análise de Estabilidade

7.4.1 Estabilidade Absoluta

Nyquist (1932) define um critério gráfico para a averiguação da estabilidade **absoluta** em malha fechada no domínio da frequência. Em suma, trata-se de averiguar a quantidade de voltas positivas que a curva de Nyquist dá em torno do ponto -1 do eixo real e compará-la com a quantidade de polos positivos em malha aberta: o sistema é absolutamente

estável se o total de voltas  em torno desse ponto for menor ou igual a zero e equivalente à quantidade de polos positivos em malha aberta. Como averiguado em Seção 5.1.2, não há polos positivos para o sistema em malha aberta, então os sistemas controlados serão estáveis se, e somente se, o número de voltas em torno de -1 for nulo. Assim, a Figura 27 mostra a resposta do sistema controlado pelo PI projetado por ITAE, verificando-se que não há, de fato, qualquer volta em torno do ponto -1, o que garante a estabilidade absoluta do sistema. Pela resposta ser de difícil visualização, optou-se por ratificar a não envoltura do ponto pela função *nyqlog* (ANDRESEN, 2020). Os diagramas de Nyquist obtidos para as demais sintonizações encontram-se no Apêndice F.1, todos tendo suas estabilidades absolutas garantidas.

Figura 27 – Diagrama de Nyquist de malha aberta para o sistema sintonizado por ITAE.

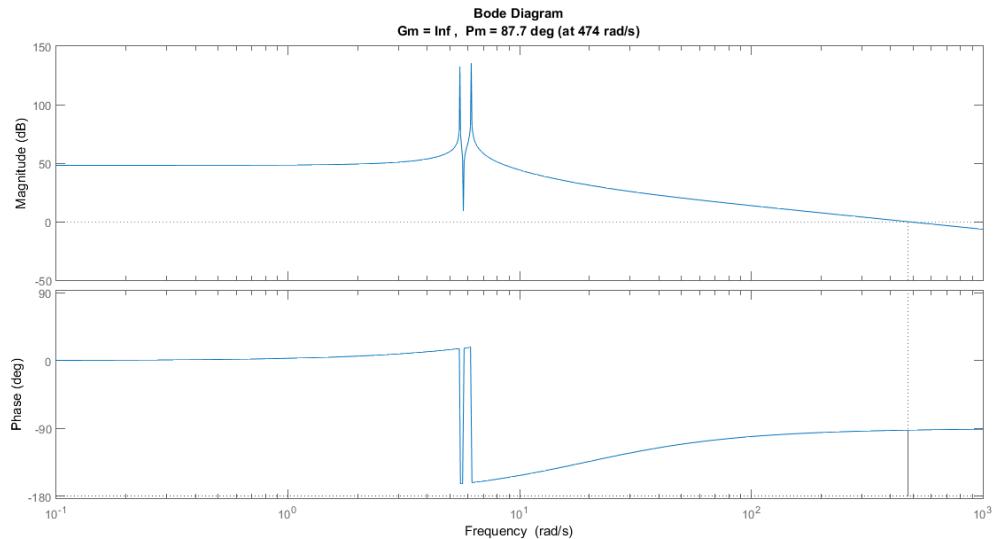


Fonte: Autoria própria.

7.4.2 Estabilidade Relativa

A análise da estabilidade relativa foi realizada a partir dos gráficos de Bode dos sistemas controlados em malha aberta. Para todos os casos estudados, não foi calculada qualquer margem de ganho, já que os gráficos de fase não chegam a cruzar -180° . Em relação às margens de fase, a reunião de seus valores encontra-se na Tabela 14. Analogamente à seção anterior, a figura Figura 28 exibe o diagrama de Bode do sistema controlado pelo PI projetado com Lugar das Raízes, enquanto os outros diagramas encontram-se no Apêndice F.2.

Figura 28 – Diagrama de Bode para o sistema em malha aberta controlado com o PI por ITAE, com as margens de ganho e fase assinaladas.



Fonte: Autoria própria.

Método	Controle	Margem de Fase
Lugar das Raízes	PI	89,3°
Lugar das Raízes	PID	89,3°
PID Tuner	PI	82,7°
PID Tuner	PID	76,1°
Alocação de Polos	PID	117°
ITAE	PI	87,7°

Tabela 14 – Valores das Margens de Fase para os controladores projetados.

Dessa forma, observa-se que o controlador projetado por alocação de polos apresenta a maior margem de fase, enquanto a menor foi apresentada pelo controlador PID sintonizado no *PID Tuner*. Mesmo assim, é trivial notar que todos os valores são bastante altos e reafirmam a grande margem de estabilidade dos controladores projetados.

7.5 Comparação entre controladores Clássicos

Com as sintonizações realizadas, podemos condensar as informações afim de realizar um比较 holística, como mostra a Tabela 15. Nela, é possível ver que a sintonização via ITAE apresenta os melhores tempos, tanto de pico quanto por acomodação, e o menor erro no regime permanente. Para o sistema avaliado, esses quesitos são os mais importantes pela rápida dinâmica do jogo de tênis de mesa. Assim, **foi escolhida a opção ITAE como sendo a mais adequada para o projeto**

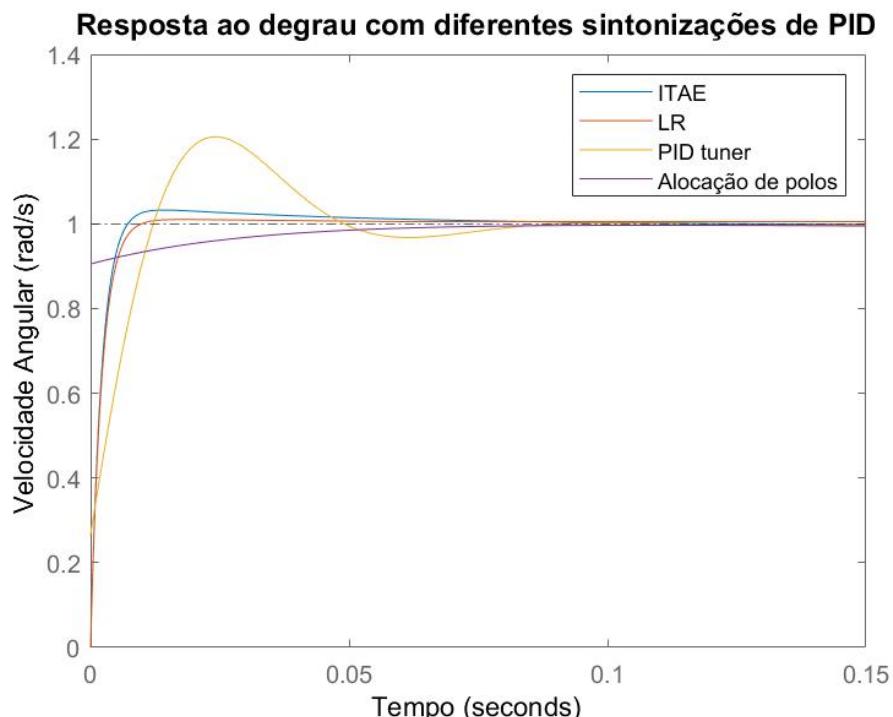
É notável que o controlador escolhido é do tipo PI e não PID. Como mencionado anteriormente, avaliou-se caso a caso a necessidade de um ganho derivativo. Nas sintonizações com melhores respostas o ganho derivativo não se faz necessário, mostrando que apenas os ganhos proporcional e integral já são suficientes para atingir bons resultados nos regimes transitório e permanente. Isso é esperado, uma vez que o ganho derivativo tem como característica não ser indicado para sistemas de ordem elevadas, como é o presente caso.

Tabela 15 – Comparação entre métodos de sintonização para controlador PID

Método de Sintonização	K_P	K_I	K_D	Tempo de pico	Tempo de acomodação	Erro aproximado no RP
ITAE	65	1250	-	0,0142	0,0462	$0,32 \cdot 10^{-3}$
LR	63,05	355,8	-	0,0179	0,0521	$6,1 \cdot 10^{-3}$
PID tuner	19,5	1822,4	0,05	0,0242	0,0756	$2,7 \cdot 10^{-3}$
AP	50,77	136,3	1,31	0,1093	1,1835	$34,4 \cdot 10^{-3}$

A Figura 29 corrobora com a escolha do controlador, demonstrando ilustrativamente as características explicitadas na Tabela 15. É interessante reparar que a resposta do sistema sintonizado via AP tem valor inicial mais elevada que os demais, isto é, existe uma grande correção antes que o erro cresça muito, fato que é consequência do alto valor (em comparação com as outras sintonizações) do ganho derivativo.

Figura 29 – Respostas ao degrau para diferentes sintonizações PID.



Fonte: Autoria própria.

8 COMPARAÇÃO ENTRE CONTROLE CLÁSSICO E MODERNO



Inicialmente, foi realizado utilizado o controle moderno, no domínio do tempo para controlar o sistema. Comparou-se os métodos de alocação de polos e linear quadrático, obtendo resultados rápidos e dentro das restrições desejadas, muito semelhantes para ambos os métodos.

Em seguida, foram avaliadas as condições dos atuadores e sensores necessários e, seguindo as restrições impostas, que limitam o número de sensores em no máximo três, foi necessária a aplicação de um observador. Para estimação dos estados de entrada, os métodos de alocação e LQ foram novamente utilizados porém com o acréscimo de um observador. Ambas as respostas se mostraram novamente muito similares e satisfatoriamente próximas das respostas obtidas caso todas as saídas estivessem com sensores.

Foram, pois, definidos os atuadores e sensores necessários a partir dos resultados obtidos com este controle.

Em seguida, foi realizado testado o controle clássico para o sistema em questão. Este controle se pauta na aplicação de um controlador com ganhos proporcionais, derivativos e/ou integrativos para cada uma das funções de transferência do sistema, obtendo respostas adequadas para cada uma delas. Como explicitado, foi realizada a seleção da principal função de transferência do sistema para realização dos métodos de controle. Demais funções de transferência seguiriam o mesmo procedimento.

Foram determinados os valores de ganhos (K_p , K_d e K_i) por meio dos métodos de Lugar das Raízes, Alocação de Polos, ITAE e PID Tuner (MATLAB[®]), cabíveis ao sistema. Ficou claro para os quatro métodos, que o valor do termo derivativo deveria ser reduzido, o que era esperado dada a resposta inicial da função de transferência. Por outro lado, o termo integrativo necessário para respostas adequadas foi elevado nos três métodos, uma vez que o erro em regime permanente da resposta era significativo. Assim sendo, foi verificado que o controle PI seria suficiente, não sendo necessário o PID, como era esperado, uma vez que o controle PID é, geralmente, inadequado para sistemas de ordem muito elevada.

Dentre as respostas obtidas, a que apresentou comportamento mais adequado para o problema do robô de tênis de mesa foi o método iterativo de ITAE. Isso, pois a resposta obtida apresentou menor tempo de acomodação e tempo de pico, aliado a baixíssimo erro no regime permanente.

Dentre ambos os modelos de controle, clássico e moderno, podemos notar algumas

diferenças substanciais para realização do controle. Primeiramente, o controle moderno apresenta a versatilidade do trabalho diretamente com o espaço de estados, controlando todo o sistema sem a necessidade de avaliação de cada uma das funções de transferência. Isso apresenta uma redução drástica de tempo empregado ao controle e, consequentemente, de custo de projeto.

Além disso, o controle moderno, ao trabalhar no domínio do tempo, apresenta respostas mais palpáveis e factíveis ao projeto de um robô. Isso, pois as entradas do sistema não serão constantes nem periódicas, tornando o estudo em frequência menos interessante.

Conclui-se, pois, que, dado o contexto e o problema abordado no presente trabalho, o método mais adequado de controle seria o moderno.

nada sobre
rejeição de
distúrbios!
nada sobre
redução de ordem.

9 CONCLUSÃO

O presente relatório se dispôs a analisar o sistema proposto de um robô para aplicação ao jogo de tênis de mesa mediante diversos aspectos. O objetivo holístico de tal análise se baseia na proposta de controle de tal sistema com atuação apenas na base.

Inicialmente, foi realizada a modelagem completa do sistema, tanto matemática quanto física, resultando em equações analíticas não lineares e acopladas que geraram, após um processo de linearização, a representação do modelo em espaço de estados.

A partir disto, o estudo acerca do controle de tal sistema se deu de forma mais intensa, a começar pela análise do sistema em malha aberta. Tal análise apontou que o modelo era estável, com polos ditos lentos, fato que não é conclusão imediata e intuitiva tirada do sistema, mas que pode ser explicado pela possibilidade da posição horizontal x oscilar em torno de um ponto qualquer, dado que se encontra sobre uma reta horizontal.

Em seguida, foi realizada a análise em malha fechada, adotando o modelo moderno e o modelo clássico de controle. Com tais análises realizadas, foi visto que o controle moderno é o mais adequado para o projeto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACOSTA L.; MARICHAL, G. M. J. R. J. S. M. Ping-Pong Player Prototype. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 2003. Citado na página 2.
- ANDERSSON, R. L. Dynamic sensing in a ping-pong playing robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 5, n. 6, p. 728–739, Dec 1989. ISSN 2374-958X. Citado na página 2.
- ANDRESEN, T. Nyquist plot with logarithmic amplitudes. *MATLAB Central File Exchange*, MATLAB, 2020. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7444-nyquist-plot-with-logarithmic-amplitudes>>. Citado na página 43.
- BARRETT. *Inertial Data for the WAM arm*. 2008. Catalogue. Citado na página 15.
- BODE, H. W. Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design. *The Bell System Technical Journal*, Nokia Bell Labs, v. 19, n. 3, p. 421–454, 1940. Citado na página 19.
- CRAIG, J. J. *Introduction to Robotics - Mechanics and Control*. [S.l.: s.n.], 2005. 1410-1415 p. Citado na página 3.
- EL-MARHOMY, A. A.; ABDEL-SATTAR, N. E. Stability analysis of rotor-bearing systems via routh-hurwitz criterion. *Applied Energy*, Elsevier, v. 77, n. 3, p. 287–308, 2004. Citado na página 18.
- FRANÇA, L.; MATSUMURA, A. *Mecânica geral*. Edgard Blücher, 2011. ISBN 9788521203414. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=IUnSAwAACAAJ>>. Citado na página 10.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 7th. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall Press, 2014. ISBN 0133496597, 9780133496598. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 18.
- HASHIMOTO, H. et al. Development Of A Pingpong Robot System Using 7 Degrees Of Freedom Direct Drive Arm. In: ABRAMOVICH, A. (Ed.). *IECON '87: Industrial Applications of Robotics Machine Vision*. SPIE, 1987. v. 0856, p. 608 – 615. Disponível em: <<https://doi.org/10.1117/12.943016>>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- KULAKOWSKI, B.; GARDNER, J.; SHEARER, J. *Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9781139464239. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=9bforCnE8HUC>>. Citado na página 17.
- MATSUSHIMA, M. et al. A learning approach to robotic table tennis. *IEEE Transactions on Robotics*, v. 21, n. 4, p. 767–771, Aug 2005. ISSN 1941-0468. Citado na página 1.
- MULLIN JENS KOBE, J. P. K. A biomimetic approach to robot table tennis. *Adaptive Behavior*, p. 359–376, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

- MÜLLING, K.; PETERS, J. A computational model of human table tennis for robot application. In: DILLMANN, R. et al. (Ed.). *Autonome Mobile Systeme 2009*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 57–64. ISBN 978-3-642-10284-4. Citado 3 vezes nas páginas 1, 8 e 9.
- NAKASHIMA, A. et al. Hitting back-spin balls by robotic table tennis system based on physical models of ball motion. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 45, n. 22, p. 834 – 841, 2012. ISSN 1474-6670. 10th IFAC Symposium on Robot Control. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016337132>>. Citado na página 3.
- NAKASHIMA, A. et al. Robotic table tennis based on physical models of aerodynamics and rebounds. *2011 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, p. 2348–2354, 2011. Citado na página 3.
- NYQUIST, H. Regeneration theory. *The Bell System Technical Journal*, v. 11, n. 1, p. 126–147, 1932. Citado na página 42.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Prentice Hall do Brasil, 1982. ISBN 9788587918239. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=fxmIPQAAQAAJ>>. Citado 7 vezes nas páginas 13, 17, 18, 22, 23, 34 e 35.
- PARASKEVOPOULOS, P. N. *Modern Control Engineering*. 3th. ed. [S.l.]: Marcel DEkker, 2002. Citado na página 17.
- RAMANANTSOA M., D. A. Towards a stroke construction model. *Journal of Table Tennis Science* 2, 1994. Citado na página 4.
- SABER FERAT SAHIN, K. P. M. E. An Application of Human Robot Interaction: Development of a Ping-Pong Playing Robotic Arm. 2005. Citado na página 2.
- SAINI, S. C. et al. Comparison of pole placement and lqr applied to single link flexible manipulator. p. 843–847, 2012. Citado na página 3.
- SEQUEIRA, J. L. Sistema para a verificação lógica de controle. *FEUP - Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto*, p. 4, Dez. 2013. Citado na página 20.
- ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme*, v. 115, p. 220–222, 1942. Citado na página 34.

Apêndices

APÊNDICE A – CÓDIGOS

A.1 Simulações em Malha Aberta

```

1 %% Deixa os eixos em LaTeX
2 set(groot, 'defaultLegendInterpreter','latex');
3
4 %%Espaço de estados
5 clear; close all; clc;
6
7 m = 2;
8 Mbase = 6;
9 L = 0.5;
10 c = 8.5e-5;
11 b = 7.12e-3;
12 g = 9.81;
13
14 M = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
       0, 1, 0, 0, 0; 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 0, 1,
       0; 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
15
16 I = eye(6);
17
18 Minv = I/M;
19
20 Atil = [0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, -b*L, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3*m
           *L*g/2, -c, -m*L*g/2, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
21
22 Btil = [0, 0, 0; L, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 1];
23
24 A = Minv*Atil;
25
26 B = Minv*Btil;
27
28 C = eye(6); C = eye(6);
29
30 D = 0;
31
32 ee = ss(A,B,C,D);
33
34 %% Matriz de Controlabilidade
35 Cont = ctrb(A,B);
36 Posto = rank(Cont);
37

```

```
38 %% Matriz de Observabilidade
39 Ob = obsv(A,C);
40 Posto2 = rank(Ob);
41
42 %% Matriz de Transição
43 Dt = 0.01;
44 Phi = expm(A*Dt);
45 ti = 0;
46 tf = 10;
47 t = ti:Dt:tf;
48 x = zeros(size(t));
49 x(1,1) = 0;
50 x(2,1) = 0;
51 x(3,1) = 0.1;
52 x(4,1) = 0;
53 x(5,1) = 0.2;
54 x(6,1) = 0;
55
56 for i=1:(tf/Dt)
57     x(:,i+1) = Phi*x(:,i);
58 end
59
60 p = pole(ee);
61
62 %% Plots
63 % figure
64 % plot(p,'x')
65 % axis([-0.001 0 -7 7])
66 % xlabel('Re')
67 % ylabel('Im')
68 % title('Polos do Sistema em Malha Aberta')
69 %
70 % figure
71 % plot(t,x(1,:),t,x(3,:),t,x(5,:))
72 % xlabel('Tempo (s)')
73 % ylabel('Saída no Tempo (m ou rad)')
74 % title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Aberta')
75 % legend('x','\theta_1','\theta_2')
76 %
77 % figure
78 % plot(t,x(2,:),t,x(4,:),t,x(6,:))
79 % xlabel('Tempo (s)')
80 % ylabel('Saída no Tempo (m/s ou rad/s)')
81 % title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Aberta')
82 % legend('dot{x}','dot{\theta_1}','dot{\theta_2}')
83
84 % matriz_latex(Phi,'C:\Users\Lucas Paiva\Documents\USP\Trabalhos\Controle\
```

```
    T2\Matlabs\Phi.txt')
85 % matriz_latex(Cont, 'C:\Users\Lucas Paiva\Documents\USP\Trabalhos\Controle\
     \T2\Matlabs\Contr.txt')
86 % matriz_latex(Ob, 'C:\Users\Lucas Paiva\Documents\USP\Trabalhos\Controle\T2
     \Matlabs\Obsv.txt')
87
88 % figure
89 % rlocus(ee)
90 % sggrid
91 % axis([-0.5 0.5 -8 8])
92 % title('Lugar das raízes para o sistema')
93 % xlabel('Re')
94 % ylabel('Im')
```

A.2 Simulações em Malha Fechada

```

1 clear; close all; clc;
2
3 %% Deixa os eixos em LaTeX
4 set(groot, 'defaultLegendInterpreter','latex');
5
6 %% Parametros
7 m = 2;
8 Mbase = 6;
9 L = 0.5;
10 c = 8.5e-5;
11 b = 7.12e-3;
12 g = 9.81;
13
14 %% Espaco de estados
15
16 M = [1, 0, 0, 0, 0, 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
       0, 1, 0, 0, 0, 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 1,
       0, 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
17
18 I = eye(6);
19
20 Minv = I/M;
21
22 Atil = [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -b*L, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -3*m
           *L*g/2, -c, -m*L*g/2, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
23
24 Btil = [0, 0, 0; L, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 1];
25
26 A = Minv*Atil;
27
28 B = Minv*Btil;
29
30 C = eye(6); %[1, 0, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0, 0];
31
32 D = 0;
33
34 ee = ss(A,B,C,D); % Espaço de Estados de malha aberta
35
36 %% Ganhos de Controle por alocação
37 %% Polos desejados
38 polos = [-5.5, -7.5, -9.5, -11.5, -13.5, -15.5];
39
40
41 %% Alocação
42 K = place(A,B,polos);
43 F = A - B*K;

```

```

44 ee_fechada = ss(F,B,C,D); % Espaco de estados por alocacao
45
46 %% Matrizes de Transição
47 Dt = 0.005;
48 Phi = expm(F*Dt);
49 ti = 0;
50 tf = 0.8;
51 t = ti:Dt:tf;
52 x = zeros( size(t));
53
54 %% Estado sem observador
55 x(1,1) = 0.2;
56 x(2,1) = 0;
57 x(3,1) = 0.25;
58 x(4,1) = 0;
59 x(5,1) = 0.25;
60 x(6,1) = 0;
61
62 for i=1:(tf/Dt)
63     x(:,i+1) = Phi*x(:,i);
64 end
65
66 %% Acelerações
67
68 xdd = diff(x(2,:))/diff(t(1,:));
69 theta1dd = diff(x(4,:))/diff(t(1,:));
70 theta2dd = diff(x(6,:))/diff(t(1,:));
71 figure
72 plot(t(1:end-1),xdd,t(1:end-1),theta1dd,t(1:end-1),theta2dd)
73 grid on
74 xlabel('Tempo (s)')
75 ylabel('Saída no Tempo')
76 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de Polos')
77 legend('$\ddot{x}$', '$\ddot{\theta_1}$', '$\ddot{\theta_2}$')
78
79 %% Forças
80
81 Flin = ((2*m+Mbase)*L*xdd + b*L*x(2,1:end-1) + (3*m*(L^2)/2)*theta1dd + (m*(L^2)/2)*theta2dd)/L;
82 Torq1 = (3*m*(L^2)/2)*theta1dd + (m*(L^2))*theta2dd + 2*m*L*xdd + (3*m*L*g/2)*x(3,1:end-1) + c*x(4,1:end-1) + (m*L*g/2)*x(5,1:end-1);
83 Torq2 = (m*(L^2)/3)*theta2dd + (m*(L^2)/6)*theta1dd + (m*L/2)*xdd - c*x(4,1:end-1) + (m*L*g/2)*x(5,1:end-1) + c*x(6,1:end-1);
84
85 figure
86 plot(t(1:end-1),Flin,t(1:end-1),Torq1,t(1:end-1),Torq2)

```

```

87 grid on
88 xlabel('Tempo (s)')
89 ylabel('Saída no Tempo (N e N \cdot m)')
90 title('Força dos Atuadores – Alocação de Polos')
91 legend('F', '$T_1$', '$T_2$')
92
93 %% Potencias
94
95 Pot1 = Flin.*x(2,1:end-1);
96 Pot2 = Torq1.*x(4,1:end-1);
97 Pot3 = Torq2.*x(6,1:end-1);
98
99 figure
100 plot(t(1:end-1),Pot1,t(1:end-1),Pot2,t(1:end-1),Pot3)
101 grid on
102 xlabel('Tempo (s)')
103 ylabel('Potência (W)')
104 title('Potência dos Atuadores – Alocação de Polos')
105 legend('$Pot_F$', '$Pot_{T_1}$', '$Pot_{T_2}$')
106
107 %% Plots
108
109 figure
110 plot(t,x(1,:),t,x(3,:),t,x(5,:))
111 grid on
112 xlabel('Tempo (s)')
113 ylabel('Saída no Tempo')
114 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de Polos')
115 legend('x', '$\theta_1$', '$\theta_2$')
116
117 figure
118 plot(t,x(2,:),t,x(4,:),t,x(6,:))
119 grid on
120 xlabel('Tempo (s)')
121 ylabel('Saída no Tempo')
122 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de Polos 2')
123 legend('$\dot{x}$', '$\dot{\theta}_1$', '$\dot{\theta}_2$')
124
125
126 %% Vídeo da Animação
127 xA = x(1,:);
128 yA = zeros(1,length(xA));
129 yA = yA + 2;
130 xB = xA + L*sin(x(3,:));
131 yB = yA - L*cos(x(3,:));

```

```

132 xC = xB + L*sin(x(5,:));
133 yC = yB - L*cos(x(5,:));
134 n=length(xA);
135 v = VideoWriter('C:\Users\Lucas Paiva\Documents\USP\Trabalhos\Controle\T2\
    Imagens\GIF. avi');
136 v.Quality = 95;
137 v.FrameRate = 1/Dt;
138 open(v);
139 for i=1:n
140 Pxa = [ xA(i), xB(i) ];
141 Pya = [ yA(i), yB(i) ];
142 Pxb = [ xB(i), xC(i) ];
143 Pyb = [ yB(i), yC(i) ];
144 PC1 = [ xA(i)+0.15 , xA(i)+0.15];
145 PC2 = [ yA(i)+0.03 , yA(i)-0.03];
146 PC3 = [ xA(i)+0.15 , xA(i)-0.15];
147 PC4 = [ yA(i)+0.03 , yA(i)+0.03];
148 PC5 = [ xA(i)-0.15 , xA(i)-0.15];
149 PC6 = [ yA(i)+0.03 , yA(i)-0.03];
150 PC7 = [ xA(i)+0.15 , xA(i)-0.15];
151 PC8 = [ yA(i)-0.03 , yA(i)-0.03];
152 plot(xA, yA, xA(i),yA(i), 'o', xB, yB, xB(i),yB(i), 'o', xC, yC, xC(i),yC(i),
    'o')
153 axis([-0.6 0.6 0.9 2.1])
154 grid on
155 line(Pxa,Pya)
156 line(Pxb,Pyb)
157 line(PC1, PC2)
158 line(PC3, PC4)
159 line(PC5, PC6)
160 line(PC7, PC8)
161 frame = getframe(gcf);
162 writeVideo(v,frame);
163 end
164 close(v)

```

A.3 Simulações com Observador

```

1 clear; close all; clc;
2
3 %% Deixa os eixos em LaTeX
4 set(groot, 'defaultLegendInterpreter','latex');
5
6 %% Parametros
7 m = 2;
8 Mbase = 6;
9 L = 0.5;

```

```

10 c = 8.5e-5;
11 b = 7.12e-3;
12 g = 9.81;
13
14 %% Espaco de estados
15
16 M = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
       0, 1, 0, 0, 0; 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 1,
       0; 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
17
18 I = eye(6);
19
20 Minv = I/M;
21
22 Atil = [0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, -b*L, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, -3*m
           *L*g/2, -c, -m*L*g/2, 0; 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
23
24 Btil = [0, 0, 0; L, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 1];
25
26 A = Minv*Atil;
27
28 B = Minv*Btil;
29
30 C = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1];
31
32 D = 0;
33
34 ee = ss(A,B,C,D); % Espaço de Estados de malha aberta
35
36 %% Ganhos de Controle por alocação
37 %% Polos desejados
38 polos = [-5.5, -7.5, -9.5, -11.5, -13.5, -15.5];
39
40
41 %% Alocação
42 K = place(A,B,polos);
43 F = A - B*K;
44 ee_fechada = ss(F,B,C,D); % Espaço de estados por alocacao
45
46 %% Método LQ
47 Q = diag([2000, 50, 100, 0.7, 10, 0.7]);
48 R = diag([0.005 0.005 0.005]);
49 Klq = lqr(A,B,Q,R);
50 F1q = A - B*Klq;
51 ee_LQ = ss(F1q,B,C,D); % Espaço de estados por LQ
52
53 %% Observador AP

```

```

54 polos_ob = [-16, -18, -20, -22, -24, -26];
55 Ko = ( place(A',C',polos_ob) )';
56
57 %% Observador LQ
58 Qo = diag([5000, 100, 200, 0.07, 50, 0.07]);
59 Ro = diag([5e-4 5e-4 5e-4]);
60 Ko_lq = (lqr(A',C',Qo,Ro))';
61
62 %% Composicao de Lambda AP
63 L11 = A - B*K;
64 L12 = B*K;
65 L21 = zeros(6);
66 L22 = A - Ko*C;
67 La = [ L11 , L12 ; L21 , L22 ] ;
68
69 %% Lambda LQ
70 L11_lq = A - B*K_lq;
71 L12_lq = B*K_lq;
72 L21_lq = L21;
73 L22_lq = A - Ko_lq*C;
74 L_lq = [L11_lq, L12_lq; L21_lq, L22_lq];
75
76 %% Matrizes de Transição
77 Dt = 0.005;
78 Phi_lambda = expm(La*Dt);
79 Phi_lambda_lq = expm(L_lq*Dt);
80 ti = 0;
81 tf = 2;
82 t = ti:Dt:tf;
83 x = zeros(size(t));
84
85 %% Estado
86 x(1,1) = 0.2;
87 x(2,1) = 0;
88 x(3,1) = 0.25;
89 x(4,1) = 0;
90 x(5,1) = 0.25;
91 x(6,1) = 0;
92
93 %% Observador
94 x(7,1) = 0;
95 x(8,1) = x(2,1) - 0;
96 x(9,1) = x(3,1) - 0;
97 x(10,1) = 0;
98 x(11,1) = x(5,1) - 0;
99 x(12,1) = 0;
100

```

```
101 x_LQ = x;
102
103 for i=1:(tf/Dt)
104     x(:,i+1) = Phi_lambda*x(:,i);
105     x_LQ(:,i+1) = Phi_lambda_lq*x_LQ(:,i);
106 end
107
108 %% Plots
109
110 %% Alocação
111
112 %% Estado
113 figure
114 plot(t,x(1,:),t,x(3,:),t,x(5,:))
115 grid on
116 xlabel('Tempo (s)')
117 ylabel('Saída no Tempo')
118 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de Polos')
119 legend('x','$\theta_1$','$\theta_2$')
120
121 figure
122 plot(t,x(2,:),t,x(4,:),t,x(6,:))
123 grid on
124 xlabel('Tempo (s)')
125 ylabel('Saída no Tempo')
126 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de Polos')
127 legend('$\dot{x}$','$\dot{\theta}_1$','$\dot{\theta}_2$')
128
129 %% Observador
130 figure
131 plot(t,x(7,:),t,x(9,:),t,x(11,:))
132 grid on
133 xlabel('Tempo (s)')
134 ylabel('Saída no Tempo')
135 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de Polos')
136 legend('Erro em x','Erro em $\theta_1$','Erro em $\theta_2$')
137
138 figure
139 plot(t,x(8,:),t,x(10,:),t,x(12,:))
140 grid on
141 xlabel('Tempo (s)')
142 ylabel('Saída no Tempo')
143 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de Polos')
```

```

144 legend( 'Erro em $\dot{x}$' , 'Erro em $\dot{\theta_1}$' , 'Erro em $\dot{\theta_2}$' )
145
146 %% LQ
147
148 %% Estado
149 figure
150 plot(t,x_LQ(1,:),t,x_LQ(3,:),t,x_LQ(5,:))
151 grid on
152 xlabel('Tempo (s)')
153 ylabel('Saída no Tempo')
154 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Método LQ')
155 legend('x','$\theta_1$','$\theta_2$')
156
157 figure
158 plot(t,x_LQ(2,:),t,x_LQ(4,:),t,x_LQ(6,:))
159 grid on
160 xlabel('Tempo (s)')
161 ylabel('Saída no Tempo')
162 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Método LQ')
163 legend('$\dot{x}$','$\dot{\theta_1}$','$\dot{\theta_2}$')
164
165 %% Observador
166 figure
167 plot(t,x_LQ(7,:),t,x_LQ(9,:),t,x_LQ(11,:))
168 grid on
169 xlabel('Tempo (s)')
170 ylabel('Saída no Tempo')
171 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Método LQ')
172 legend('Erro em x','Erro em $\theta_1$','Erro em $\theta_2$')
173
174 figure
175 plot(t,x_LQ(8,:),t,x_LQ(10,:),t,x_LQ(12,:))
176 grid on
177 xlabel('Tempo (s)')
178 ylabel('Saída no Tempo')
179 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Método LQ')
180 legend('Erro em $\dot{x}$','Erro em $\dot{\theta_1}$','Erro em $\dot{\theta_2}$')
181
182 %% Descomentar para ver o vídeo do LQ
183 % x = x_LQ;
184
185 %% Vídeo da Animação
186 figure
187 xA = x(1,:);
188 yA = zeros(1,length(xA));

```

```

189 yA = yA + 2;
190 xB = xA + L*sin(x(3,:));
191 yB = yA - L*cos(x(3,:));
192 xC = xB + L*sin(x(5,:));
193 yC = yB - L*cos(x(5,:));
194 n=length(xA);
195 v = VideoWriter('C:\Users\Lucas Paiva\Documents\USP\Trabalhos\Controle\T2\
    Imagens\GIF_OBS.avi');
196 v.Quality = 95;
197 v.FrameRate = 1/Dt;
198 open(v);
199 for i=1:n
200 Pxa = [ xA(i), xB(i) ];
201 Pya = [ yA(i), yB(i) ];
202 Pxb = [ xB(i), xC(i) ];
203 Pyb = [ yB(i), yC(i) ];
204 PC1 = [ xA(i)+0.15 , xA(i)+0.15];
205 PC2 = [ yA(i)+0.03 , yA(i)-0.03];
206 PC3 = [ xA(i)+0.15 , xA(i)-0.15];
207 PC4 = [ yA(i)+0.03 , yA(i)+0.03];
208 PC5 = [ xA(i)-0.15 , xA(i)-0.15];
209 PC6 = [ yA(i)+0.03 , yA(i)-0.03];
210 PC7 = [ xA(i)+0.15 , xA(i)-0.15];
211 PC8 = [ yA(i)-0.03 , yA(i)-0.03];
212 plot(xA, yA, xA(i),yA(i), 'o', xB, yB, xB(i),yB(i), 'o', xC, yC, xC(i),yC(i),
    'o')
213 axis([-0.6 0.6 0.9 2.1])
214 grid on
215 line(Pxa,Pya)
216 line(Pxb,Pyb)
217 line(PC1, PC2)
218 line(PC3, PC4)
219 line(PC5, PC6)
220 line(PC7, PC8)
221 frame = getframe(gcf);
222 writeVideo(v,frame);
223 end
224 close(v)

```

A.4 Sintonizações PID

```

1 %% Start
2
3 clear; close all; clc;
4
5 %% Deixa os eixos em LaTeX
6 set(groot, 'defaultTextInterpreter','latex');

```

```

7
8 %% Definindo FT's
9
10 %% Parametros
11 m = 2;
12 Mbase = 6;
13 L = 0.5;
14 c = 8.5e-5;
15 b = 7.12e-3;
16 g = 9.81;
17
18 %% Espaco de estados
19
20 M = [1, 0, 0, 0, 0; 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
       0, 1, 0, 0; 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 1,
       0; 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
21
22 I = eye(6);
23
24 Minv = I/M;
25
26 Atil = [0, 1, 0, 0, 0; 0, -b*L, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, -3*m
           *L*g/2, -c, -m*L*g/2, 0; 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
27
28 Btil = [0, 0, 0; L, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 1];
29
30 A = Minv*Atil;
31
32 B = Minv*Btil;
33
34 C = eye(6);
35
36 D = zeros(6,3);
37
38 ee = ss(A,B,C,D); % Espaco de Estados de malha aberta
39
40 fts = tf(ee); % Mudanca para FTs
41
42 FT_T2_theta2dot = fts(6,3); % FT relacionando thetadot2 x T2
43 [num,den]=tfdata(FT_T2_theta2dot, 'v');
44 num2 = [num 0];
45 den2 = [den 0];
46 FT_T2_theta2dot = tf(num2,den2);
47
48 %% Ganhos calculados no controlSystemDesigner para LR
49
50 C_P_LR = 1.6025;

```

```

51 C_PI_LR = tf([63.049 63.049*5.643], [1 0]);
52 C_PID_LR = tf([0.86076/200 0.86076*57.16 0.86076*908.6], [1 0]);
53
54 %% FTMFs
55
56 FTMF_P_LR = feedback(C_P_LR*FT_T2_theta2dot,1);
57 FTMF_PI_LR = feedback(C_PI_LR*FT_T2_theta2dot,1);
58 FTMF_PID_LR = feedback(C_PID_LR*FT_T2_theta2dot,1);
59
60 %% Plots
61 opt = stepDataOptions('StepAmplitude',1);
62 stepplot(FTMF_PI_LR,FTMF_PID_LR,opt)
63 title({'Comparativo das respostas ao degrau - PID por LR'}, 'FontSize', 16)
64 xlabel('Tempo (s)')
65 ylabel('Velocidade Angular (rad/s)')
66 legend({'PI','PID'}, 'FontSize', 14)
67
68 %% Parametros do Step
69 stepinfo(FTMF_PI_LR)
70 stepinfo(FTMF_PID_LR)
71
72 %% Ganhos calculados por ITAE
73
74 cont = 1;
75 lastcont = 1;
76 Kd = 0.0:0.01:0.1;%a
77 Kp = 55:5:65;%b
78 Ki = 850:20:1250;%c
79
80 for a = 1:length(Kd)
81     for b = 1:length(Kp)
82         for c = 1:length(Ki)
83             Ncc = [Kd(a),Kp(b),Ki(c)];
84             Dcc = [1, 0];
85             Gcc = tf(Ncc,Dcc);
86             GccGH = Gcc*FT1;
87             T1 = feedback(GccGH,1);
88             T = 1;
89             delT = 0.01;
90             t = 0:delT:T;
91             u = ones(1,length(t));
92             y = lsim(T1,u,t);
93             ITAE = 0;
94             for i = 1:length(t)
95                 inc = t(i)*abs(1-y(i));
96                 ITAE = ITAE + inc;
97             end

```

```

98     Results(cont,:) = [Kd(a),Kp(b),Ki(c),ITAE];
99     cont = cont +1;
100    lastcont = lastcont + 1;
101    porcent = 100*cont/(length(Kd)*length(Kp)*length(Ki));
102    if lastcont > (length(Kd)*length(Kp)*length(Ki))/100
103        disp(vpa(porcent,3));
104        lastcont = 0;
105    end
106    end
107 end
108
109 ResultsOrd = sortrows(Results,4);
110 Kd = ResultsOrd(1,1);
111 Kp = ResultsOrd(1,2);
112 Ki = ResultsOrd(1,3);
113 PID = pid(Kp,Ki,Kd);
114 FTMF_ITAE = (feedback(PID*FT1,1));
115 step(FTMF_ITAE)
116
117 %% Ganhos calculados por Alocacao de Polos
118
119 Kp_PID = 50.77;
120 Ki_PID = 136.3;
121 Kd_PID = 1.31;
122 C_PID = tf([Kd_PID Kp_PID Ki_PID],[1 0]);
123
124 %% FTMF
125 FTMF_PID = feedback(C_PID*FT_T2_theta2dot,1);
126
127 %% Plots
128 figure
129 opt = stepDataOptions('StepAmplitude',1);
130 step(FTMF_PID,opt)
131 title({'Resposta ao degrau da quinta iteracao - PID por AP'}, 'FontSize',
132 16)
133 xlabel('Tempo')
134 ylabel('Velocidade Angular (rad/s)')
135
136 %% Parametros do Step
137 stepinfo(FTMF_PID)
138 [s,t] = step(FTMF_PID,opt);
139 RP = 1-s(end);
140 disp(strcat('RP = ', num2str(RP)))
141
142 %% Plots Juntos
143 Kp_ar = [22.38 15.82 28.13 26.99 50.77 59.29];
144 Ki_ar = [57.62 47.66 67.92 63.64 136.3 130.86];

```

```

144 Kd_ar = [1.01 0.53 1.44 1.55 1.31 2.33];
145
146 figure
147 hold on
148 for i=1:6
149     K_aux = tf([Kd_ar(i) Kp_ar(i) Ki_ar(i)], [1 0]);
150     FTMF_aux = feedback(K_aux*FT_T2_theta2dot, 1);
151     step(FTMF_aux, opt)
152 end
153 [s2, t2] = step(FTMF_aux, opt);
154 ref = ones(1, size(t2, 1));
155 plot(t2, ref, 'Color', [169 169 169]/255)
156 legend('Conjunto 1', 'Conjunto 2', 'Conjunto 3', 'Conjunto 4', 'Conjunto 5', 'Conjunto 6')
157 title({'Comparativo das respostas ao degrau - PID por AP'}, 'FontSize', 16)
158 xlabel('Tempo')
159 ylabel('Velocidade Angular (rad/s)')

```

A.5 Solução numérica de sistema para sintonização PID por AP

```

1 # Alocacao de polos
2 import numpy as np
3
4 def PID_AP():
5     # Kd, Ki, Kp
6     A = np.array([[7.281, 0, 0], # s^7
7                   [0.501/50, 0, 7.281], # s^6
8                   [238.1, 7.281, 0.501/50], # s^5
9                   [0.339/2, 0.501/50, 238.1], # s^4
10                  [0, 238.1, 0.339/2], # s^3
11                  [0, 0.339/2, 0]] # s^2
12      )
13
14     B = np.array([
15         [0, -1], # s^7
16         [-0.001017 + 67.5], # s^6
17         [-343.9/5 + 1578.25], # s^5
18         [-0.2959/5 + 14129.625], # s^4
19         [-1168 + 32322.625], # s^3
20         [-1.663/2 + 19704.75]]) # s^2
21
22     [KD, KI, KP] = np.linalg.lstsq(A, B, rcond=None)[0]
23
24     return KD, KI, KP

```

APÊNDICE B – FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

$$G_{F,x} = \frac{0,1573s^4 - 3,438e^{-05}s^3 + 9,259s^2 - 0,0006746s + 116,8}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.1})$$

$$G_{F,\dot{x}} = \frac{0,1573s^4 - 3,438e^{-05}s^3 + 9,259s^2 - 0,0006746s + 116,8}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.2})$$

$$G_{F,\theta_1} = \frac{-0,2697s^4 + 0,0002751s^3 - 11,9s^2 + 1,052e - 18s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.3})$$

$$G_{F,\dot{\theta}_1} = \frac{-0,2697s^4 + 0,0002751s^3 - 11,9s^2 + 1,047e - 18s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.4})$$

$$G_{F,\theta_2} = \frac{-0,3371s^4 - 0,0003438s^3 - 11,9s^2 + 2,664e - 18s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.5})$$

$$G_{F,\dot{\theta}_2} = \frac{-0,3371s^4 - 0,0003438s^3 - 11,9s^2 + 2,662e - 18s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.6})$$

$$G_{T_1,x} = \frac{-0,3371s^4 + 0,0001375s^3 - 11,9s^2 - 2,118e - 10s - 1,496e - 13}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.7})$$

$$G_{T_1,\dot{x}} = \frac{-0,3371s^4 + 0,0001375s^3 - 11,9s^2 + 5,8e - 13s - 1,77e - 14}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.8})$$

$$G_{T_1,\theta_1} = \frac{2,292s^4 + 0,0005447s^3 + 79,36s^2 + 0,05651s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.9})$$

$$G_{T_1,\dot{\theta}_1} = \frac{2,292s^4 + 0,0005447s^3 + 79,36s^2 + 0,05651s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.10})$$

$$G_{T_1,\theta_2} = \frac{-0,1348s^4 + 0,0004153s^3 + 9,792e - 07s^2 + 7,654e - 19s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.11})$$

$$G_{T_1,\dot{\theta}_2} = \frac{-0,1348s^4 + 0,0004153s^3 + 9,792e - 07s^2 + 4,513e - 19s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.12})$$

$$G_{T_2,x} = \frac{0,2022s^4 - 6,876e - 05s^3 + 1,738e - 13s^2 + 4,75e - 09s + 3,24e - 12}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (B.13)$$

$$G_{T_2,\dot{x}} = \frac{0,2022s^4 - 6,876e - 05s^3 - 4,309e - 15s^2 + 5,957e - 12s - 4,415e - 13}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (B.14)$$

$$G_{T_2,\theta_1} = \frac{-3,775s^4 - 0,00384s^3 - 79,36s^2 - 0,05651s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (B.15)$$

$$G_{T_2,\dot{\theta}_1} = \frac{-3,775s^4 - 0,00384s^3 - 79,36s^2 - 0,05651s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (B.16)$$

$$G_{T_2,\theta_2} = \frac{7,281s^4 + 0,01002s^3 + 238,1s^2 + 0,1695s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (B.17)$$

$$G_{T_2,\dot{\theta}_2} = \frac{7,281s^4 + 0,01002s^3 + 238,1s^2 + 0,1695s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (B.18)$$

Zeros das FT's

Tabela 16 – Zeros das funções de transferência

	z_1	z_2	z_3	z_4
g_{11}	0,00010283-6,3682i	0,00010283+6,3682i	6,4524e-06-4,2786i	6,4524e-06+4,2786i
g_{12}	0,000204-5,9427i	0,000204+5,9427i	-8,8949e-12-1,1211e-07i	-8,8949e-12+1,1211e-07i
g_{13}	0,0017494-0,0025051i	0,0017494+0,0025051i	-0,0024616	-0,00069717
g_{21}	0,00010283-6,3682i	0,00010283+6,3682i	6,4524e-06-4,2786i	6,4524e-06+4,2786i
g_{22}	0,000204-5,9427i	0,000204+5,9427i	2,4359e-14-3,8558e-08i	2,4359e-14+3,8558e-08i
g_{23}	0,001305	8,9155e-05-0,0012063i	8,9155e-05+0,0012063i	-0,0011433
g_{31}	0,00051-6,6442i	0,00051+6,6442i	8,8377e-20	0
g_{32}	0,00023718-5,8842i	0,00023718+5,8842i	-0,000712	0
g_{33}	-0,00015257-4,5849i	-0,00015257+4,5849i	-0,000712	0
g_{41}	0	0,00051-6,6442i	0,00051+6,6442i	8,7923e-20
g_{42}	0	0,00023718-5,8842i	0,00023718+5,8842i	-0,000712
g_{43}	0	-0,00015257-4,5849i	-0,00015257+4,5849i	-0,000712
g_{51}	-0,00051-5,9427i	-0,00051+5,9427i	2,2381e-19	0
g_{52}	0,0046439	-0,0015639	-7,8162e-13	0
g_{53}	-0,00033178-5,7184i	-0,00033178+5,7184i	-0,000712	0
g_{61}	0	-0,00051-5,9427i	-0,00051+5,9427i	2,2362e-19
g_{62}	0	0,0046439	-0,0015639	-4,609e-13
g_{63}	0	-0,00033178-5,7184i	-0,00033178+5,7184i	-0,000712

APÊNDICE C – MATRIZES DE CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

Matriz de Controlabilidade \mathcal{C} do sistema:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,0002 & -0,0003 & 0,0002 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0016 \\ 0,0002 & -0,0003 & 0,0002 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0016 & 0,0113 & -0,0139 & 0,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0003 & 0,0023 & -0,0038 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & 0,0066 \\ -0,0003 & 0,0023 & -0,0038 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & 0,0066 & -0,0783 & 0,1803 & -0,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0003 & -0,0001 & 0,0073 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0113 \\ -0,0003 & -0,0001 & 0,0073 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0113 & 0,0093 & -0,2627 & 0,0000 \\ 0,0113 & -0,0139 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0404 & -0,3822 & 0,7206 & & \\ -0,0000 & 0,0000 & 0,0404 & -0,3822 & 0,7206 & -0,0002 & 0,0011 & -0,0012 & & \\ -0,0783 & 0,1803 & -0,0000 & 0,0001 & -0,0000 & -0,1420 & 2,7081 & -7,9925 & & \\ 0,0001 & -0,0000 & -0,1420 & 2,7081 & -7,9925 & 0,0013 & -0,0064 & 0,0017 & & \\ 0,0093 & -0,2627 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0002 & -0,3822 & -0,4804 & 9,5656 & & \\ -0,0000 & -0,0002 & -0,3822 & -0,4804 & 9,5656 & -0,0006 & 0,0021 & 0,0087 & & \end{bmatrix}$$

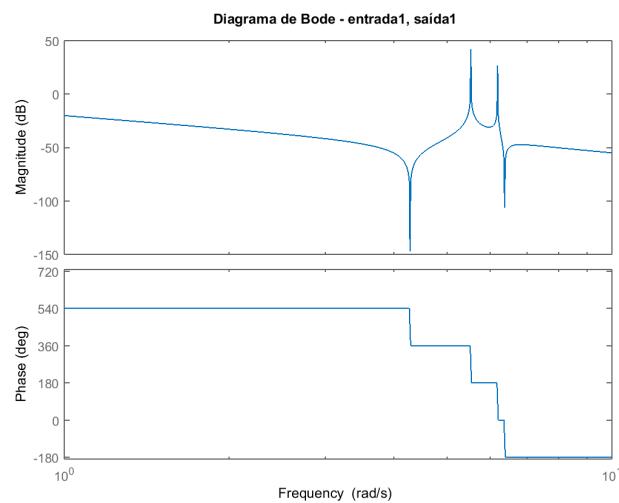
Matriz de observabilidade \mathcal{O} do sistema:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,00112 & 4,9601 & 4,5843e-05 & 0,66135 & 1,7191e-05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00192 & -33,7288 & -0,00051573 & 7,2748 & -0,0003209 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,0024 & 1,984 & 0,00063034 & -35,0515 & 0,00061888 \\ 0 & -0,00112 & 4,9601 & 4,5843e-05 & 0,66135 & 1,7191e-05 \\ 0 & 1,3837e-06 & -0,0070674 & 4,9601 & -0,0010098 & 0,66135 \\ 0 & 0,00192 & -33,7288 & -0,00051573 & 7,2748 & -0,0003209 \\ 0 & -3,9108e-06 & 0,026282 & -33,7288 & 0,0087659 & 7,2748 \\ 0 & 0,0024 & 1,984 & 0,00063034 & -35,0515 & 0,00061888 \\ 0 & 7,5506e-09 & -0,0081283 & 1,984 & -0,01552 & -35,0515 \\ 0 & 1,3837e-06 & -0,0070674 & 4,9601 & -0,0010098 & 0,66135 \\ 0 & 0,011111 & -165,9863 & -0,0092086 & 12,9028 & -0,0021922 \\ 0 & -3,9108e-06 & 0,026282 & -33,7288 & 0,0087659 & 7,2748 \\ 0 & -0,0473 & 1152,0631 & 0,048262 & -500,3645 & 0,024092 \\ 0 & 7,5506e-09 & -0,0081283 & 1,984 & -0,01552 & -35,0515 \\ 0 & -0,080314 & -136,4631 & -0,031246 & 1243,0385 & -0,037849 \\ 0 & 0,011111 & -165,9863 & -0,0092086 & 12,9028 & -0,0021922 \\ 0 & -3,5386e-05 & 0,36136 & -165,9863 & 0,017196 & 12,9028 \\ 0 & -0,0473 & 1152,0631 & 0,048262 & -500,3645 & 0,024092 \\ 0 & 0,00020346 & -1,8146 & 1152,0631 & -0,52463 & -500,3645 \\ 0 & -0,080314 & -136,4631 & -0,031246 & 1243,0385 & -0,037849 \\ 0 & -6,0877e-05 & 0,58042 & -136,4631 & 1,0462 & 1243,0385 \\ 0 & -3,5386e-05 & 0,36136 & -165,9863 & 0,017196 & 12,9028 \\ 0 & -0,28773 & 5624,1123 & 0,45509 & -1659,783 & 0,078446 \\ 0 & 0,00020346 & -1,8146 & 1152,0631 & -0,52463 & -500,3645 \\ 0 & 1,0111 & -39850,4085 & -2,7242 & 25919,5731 & -1,204 \\ 0 & -6,0877e-05 & 0,58042 & -136,4631 & 1,0462 & 1243,0385 \\ 0 & 2,7213 & 7068,9747 & 1,4343 & -44563,0598 & 1,8593 \end{bmatrix}$$

APÊNDICE D – DIAGRAMAS DE BODE EM MALHA ABERTA

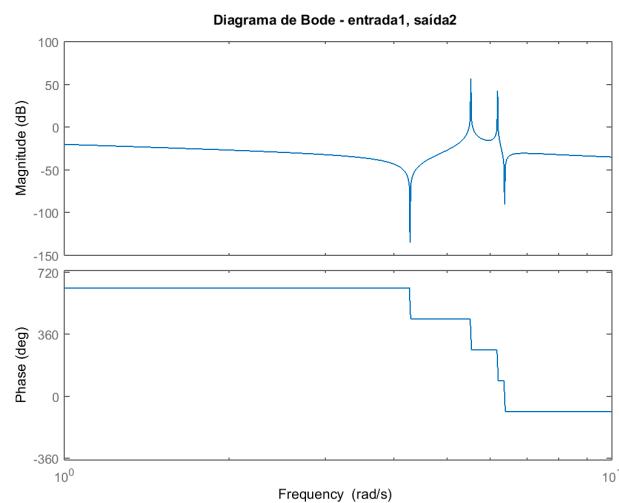
Diagramas de Bode para a entrada F:

Figura 30 – Diagrama de Bode - x, F

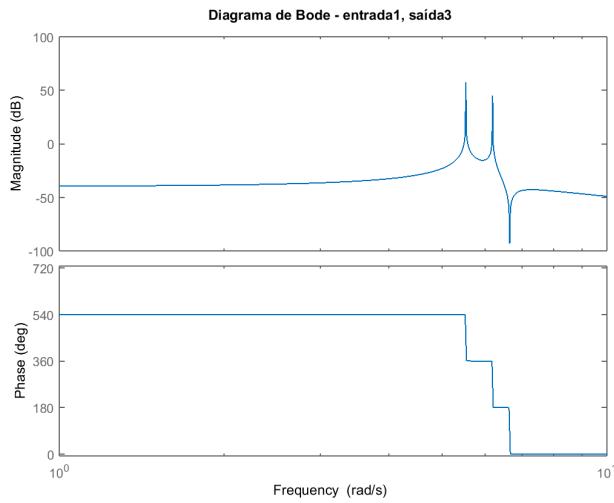


Fonte: Autoria própria.

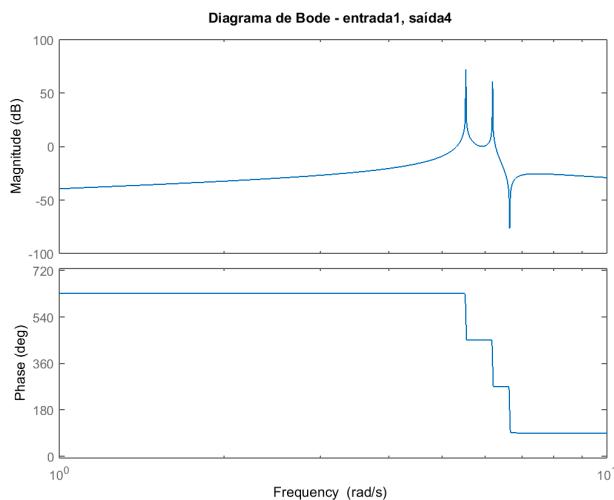
Figura 31 – Diagrama de Bode - \dot{x} , F



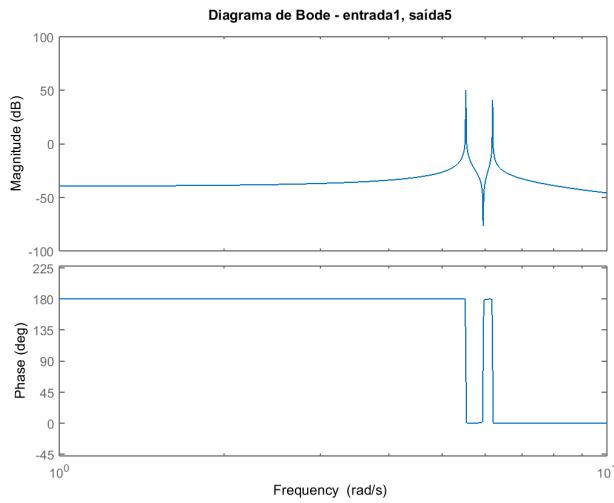
Fonte: Autoria própria.

Figura 32 – Diagrama de Bode - θ_1 , F

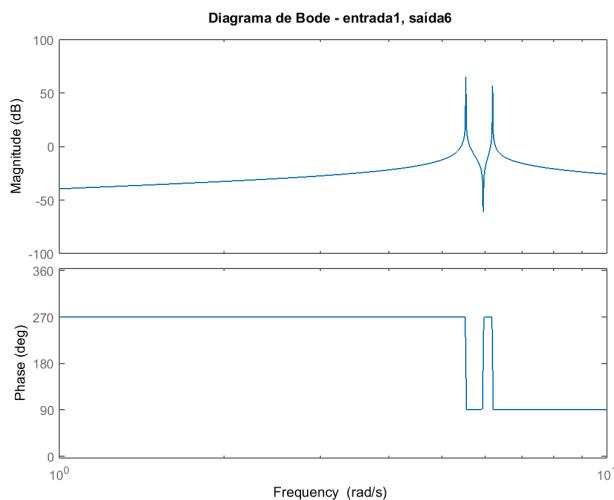
Fonte: Autoria própria.

Figura 33 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1$, F

Fonte: Autoria própria.

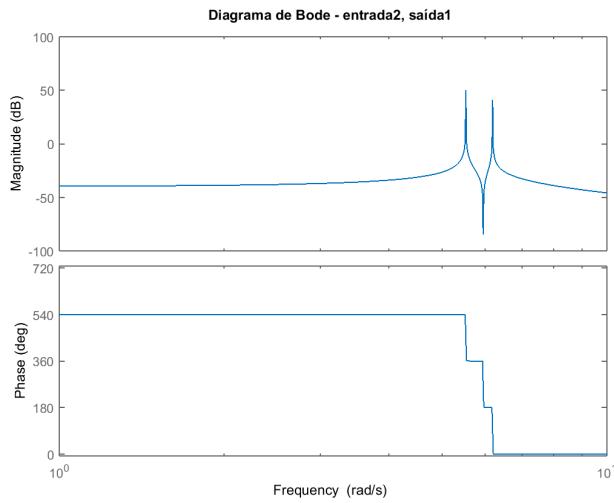
Figura 34 – Diagrama de Bode - θ_2 , F

Fonte: Autoria própria.

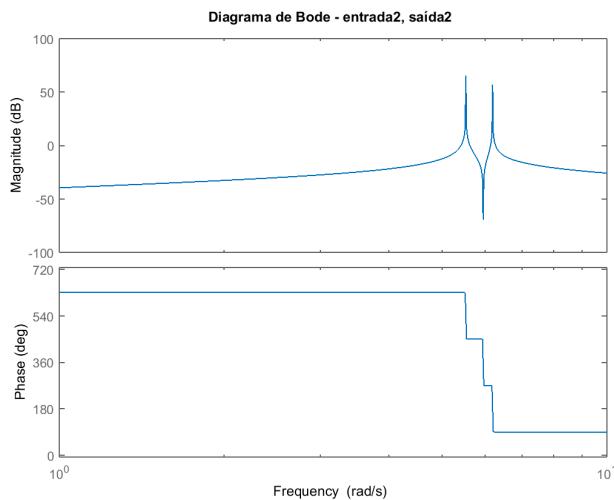
Figura 35 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_2$, F

Fonte: Autoria própria.

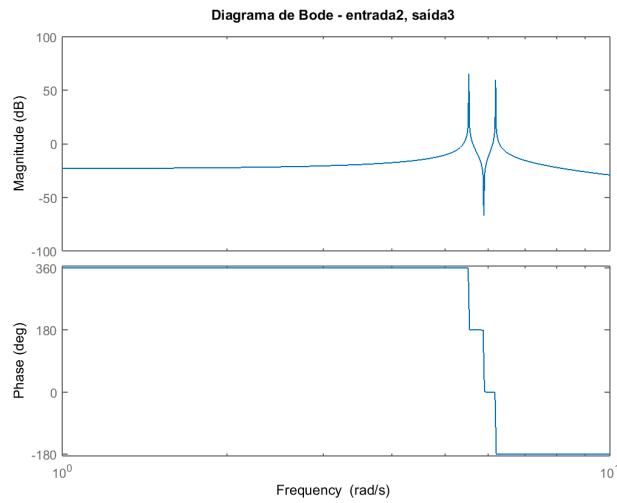
Diagramas de Bode para a entrada T_1 :

Figura 36 – Diagrama de Bode - x, T_1 

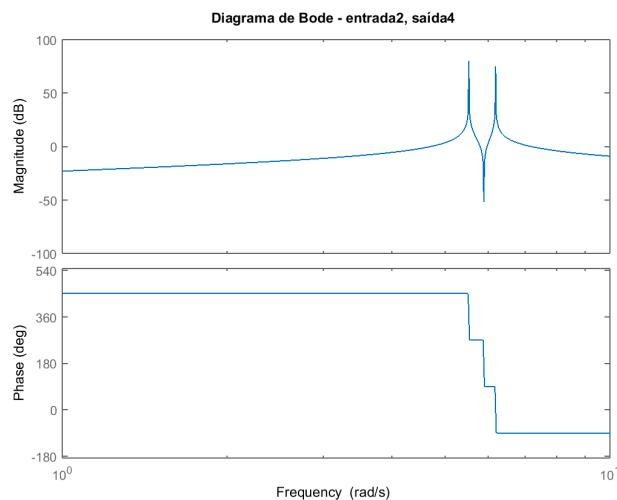
Fonte: Autoria própria.

Figura 37 – Diagrama de Bode - \dot{x} , T_1 

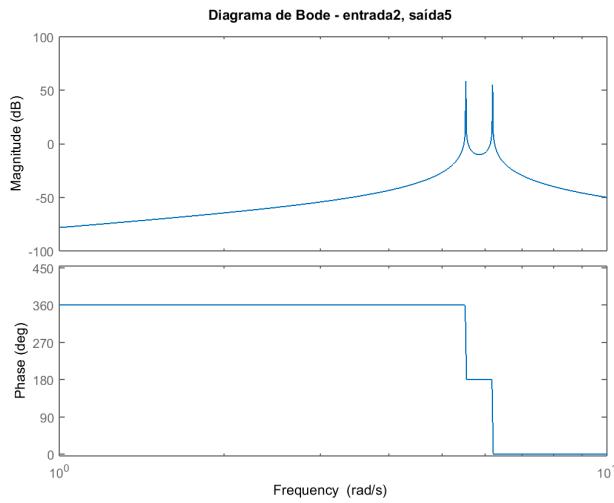
Fonte: Autoria própria.

Figura 38 – Diagrama de Bode - θ_1 , T_1 

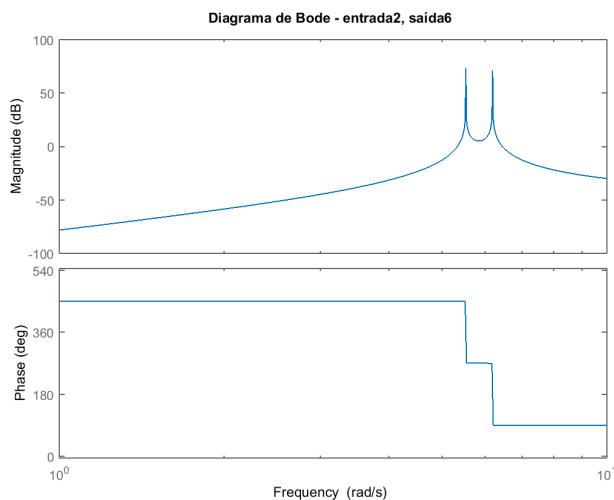
Fonte: Autoria própria.

Figura 39 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1$, T_1 

Fonte: Autoria própria.

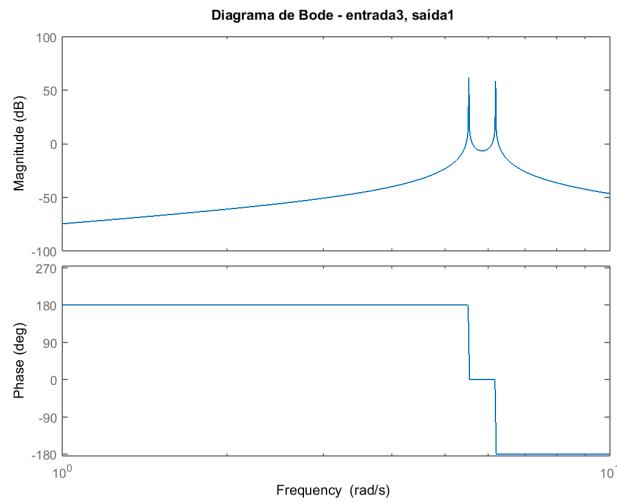
Figura 40 – Diagrama de Bode - θ_2 , T_1 

Fonte: Autoria própria.

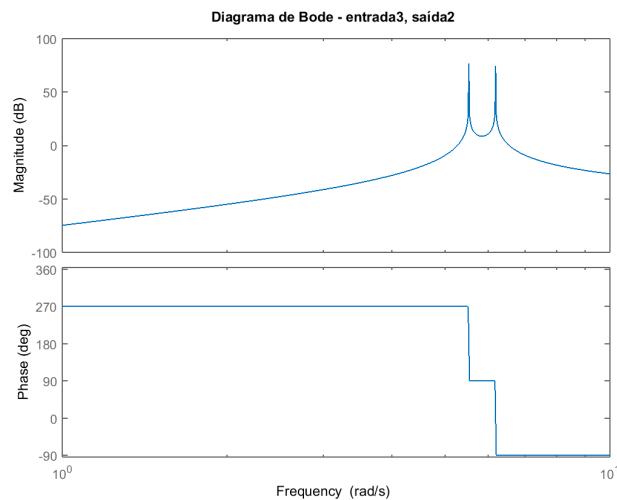
Figura 41 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_2$, T_1 

Fonte: Autoria própria.

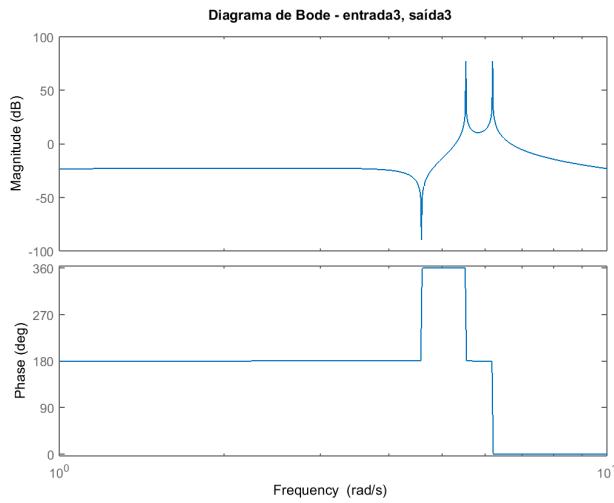
Diagramas de Bode para a entrada T_2 :

Figura 42 – Diagrama de Bode - x, T_2 

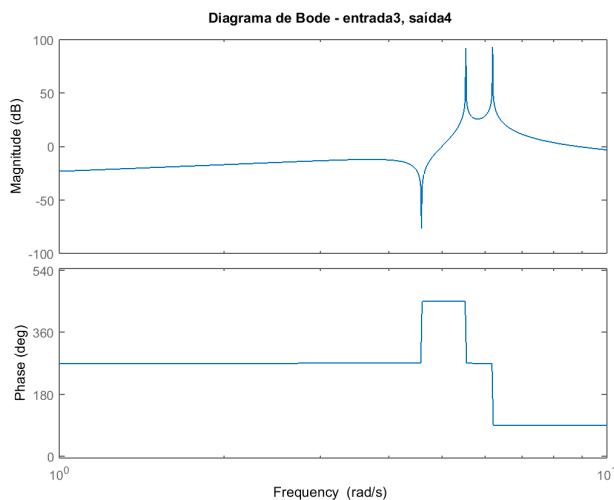
Fonte: Autoria própria.

Figura 43 – Diagrama de Bode - \dot{x} , T_2 

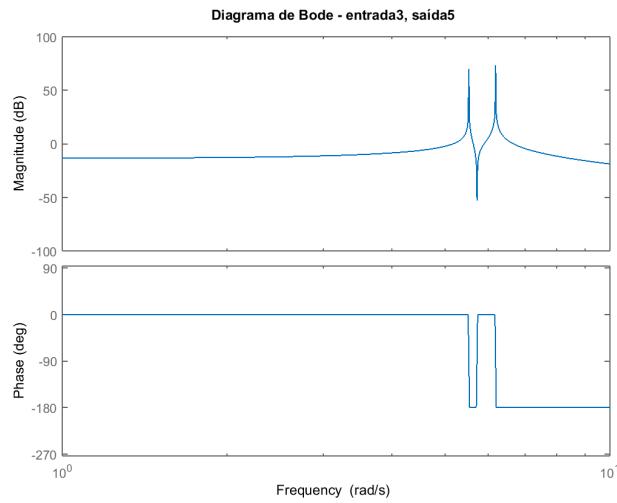
Fonte: Autoria própria.

Figura 44 – Diagrama de Bode - θ_1 , T_2 

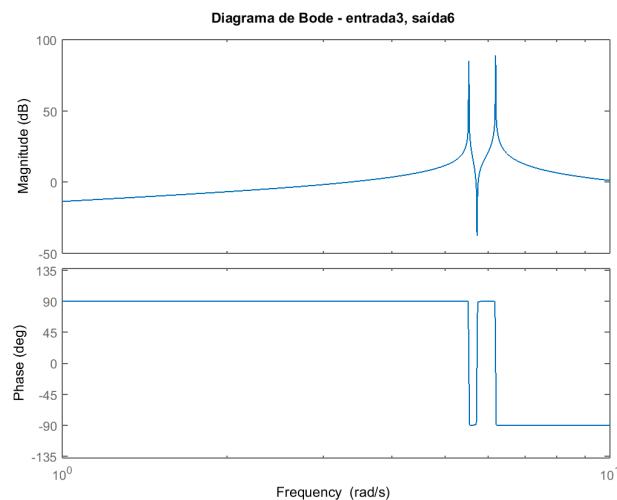
Fonte: Autoria própria.

Figura 45 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1$, T_2 

Fonte: Autoria própria.

Figura 46 – Diagrama de Bode - θ_2 , T_2 

Fonte: Autoria própria.

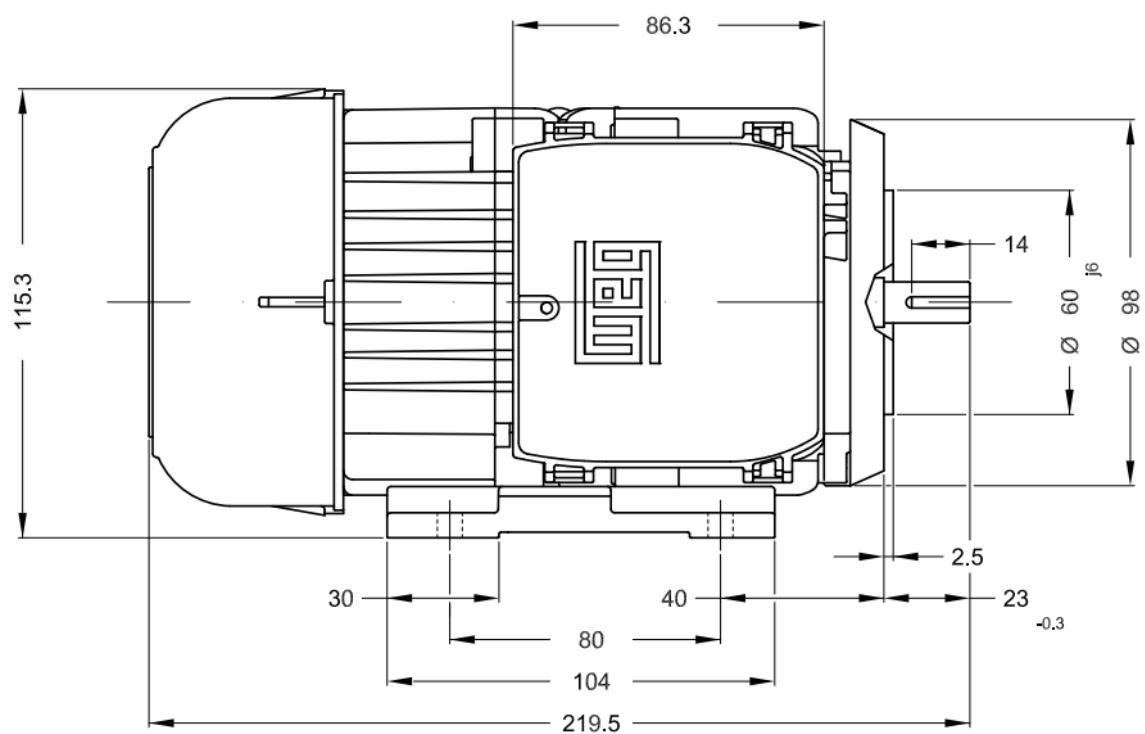
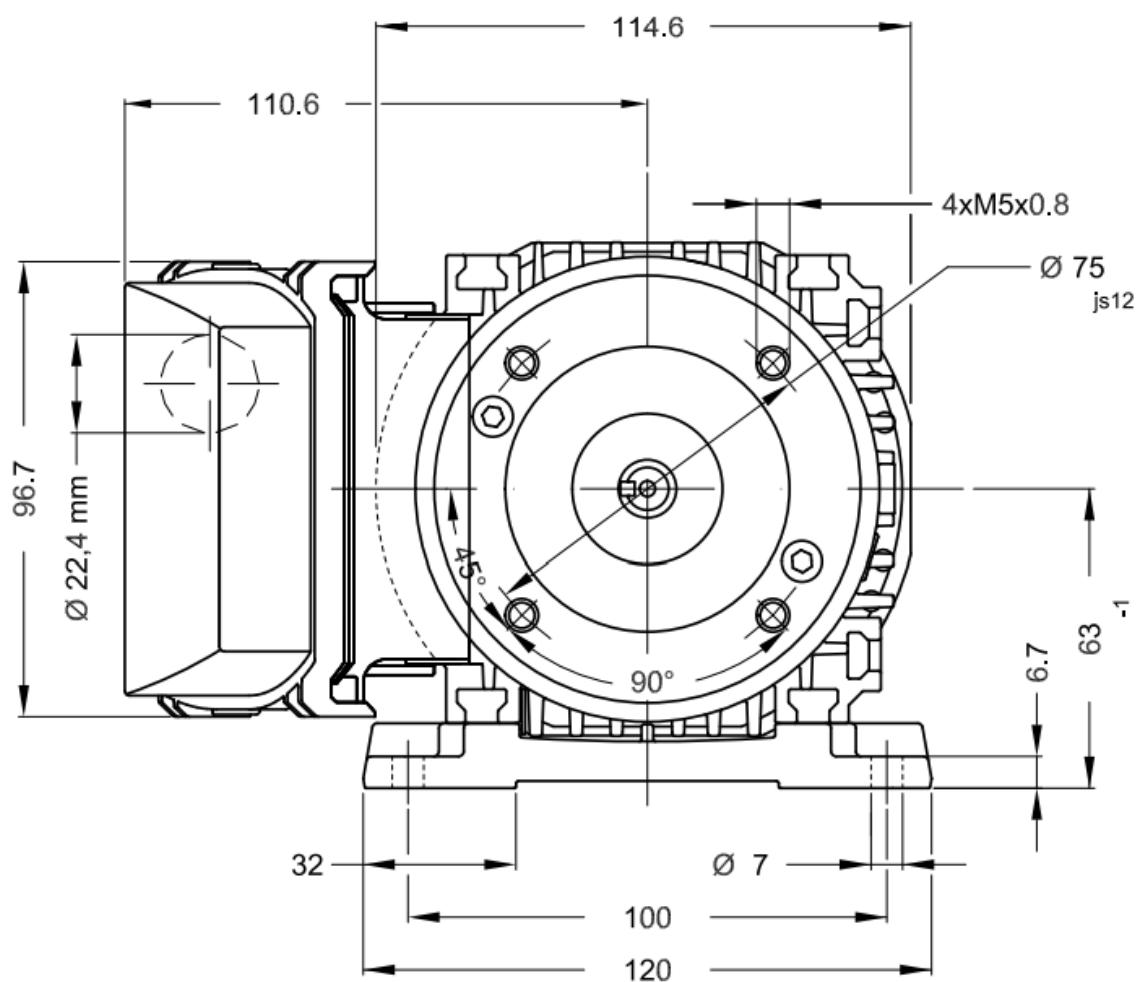
Figura 47 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_2$, T_2 

Fonte: Autoria própria.

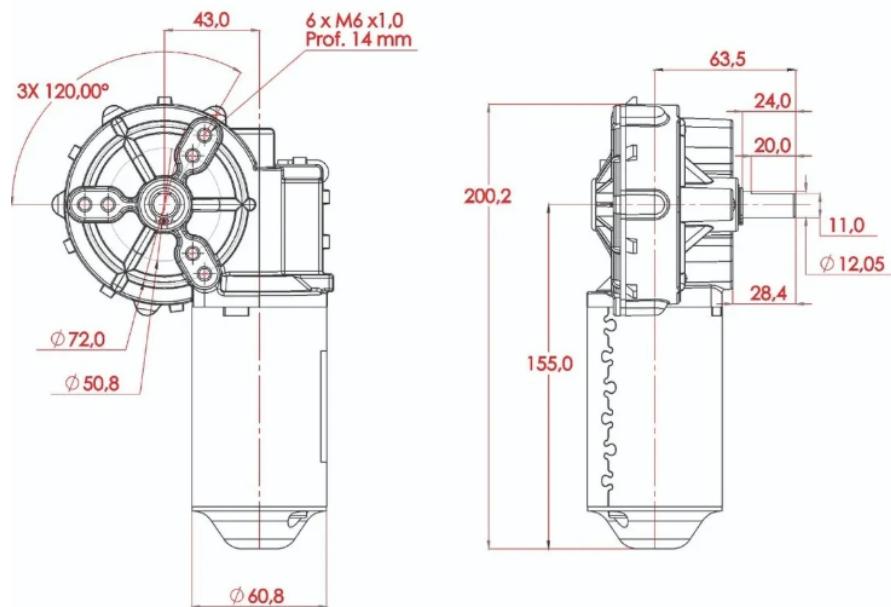
APÊNDICE E – ATUADORES

Motor 1

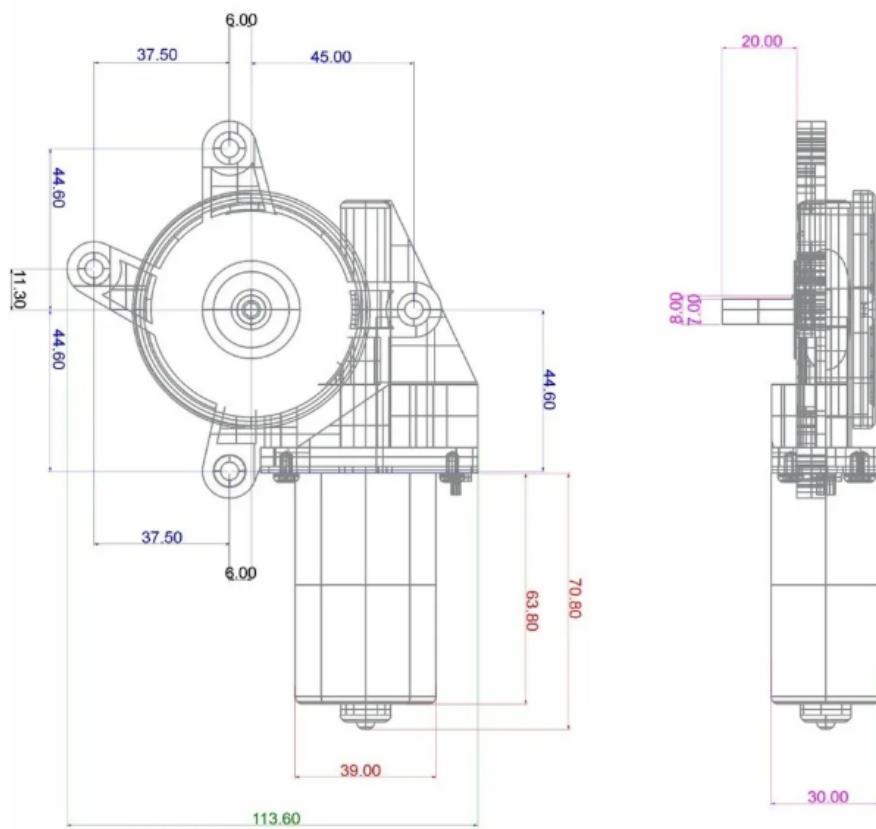
FOLHA DE DADOS				
Motor Trifásico de Indução - Rotor de Gaiola				
Cliente	:			
Linha do produto	: W12 Trifásico		Código do produto :	15087342
Carcaça	: W63	Tempo de rotor bloqueado	: 84s (frio) 47s (quente)	
Potência	: 0.12 kW (0.16 HP-cv)	Elevação de temperatura	: 80 K	
Número de polos	: 4	Regime de serviço	: S1	
Frequência	: 60 Hz	Temperatura ambiente	: -20°C a +40°C	
Tensão nominal	: 220/380 V	Altitude	: 1000 m	
Corrente nominal	: 0.724/0.419 A	Grau de proteção	: IP55	
Corrente de partida	: 3.26/1.89 A	Método de refrigeração	: IC411 - TEFC	
Ip/In	: 4.5	Forma construtiva	: B34D	
Corrente a vazio	: 0.605/0.350 A	Sentido de rotação ¹	: Ambos	
Rotação nominal	: 1705 rpm	Nível de ruído ²	: 50.0 dB(A)	
Escorregamento	: 5.28 %	Método de partida	: Partida direta	
Conjugado nominal	: 0.672 Nm	Massa aproximada ³	: 4.3 kg	
Conjugado de partida	: 260 %			
Conjugado máximo	: 280 %			
Classe de isolamento	: F			
Fator de serviço	: 1.25			
Momento de inércia (J)	: 0.0005 kgm ²			
Categoría	: N			
Potência	50%	75%	100%	Esforços na fundação
Rendimento (%)	56.0	63.0	66.0	Tração máxima : 54 N
Cos φ	0.45	0.56	0.66	Compressão máxima : 96 N
		Dianteiro	Traseiro	
Tipo de mancal	:	6201 ZZ	6201 ZZ	
Vedaçāo	:	V'Ring	V'Ring	
Intervalo de lubrificação	:	-	-	
Quantidade de lubrificante	:	-	-	
Tipo de lubrificante	:	Mobil Polyrex EM		



Motor 2



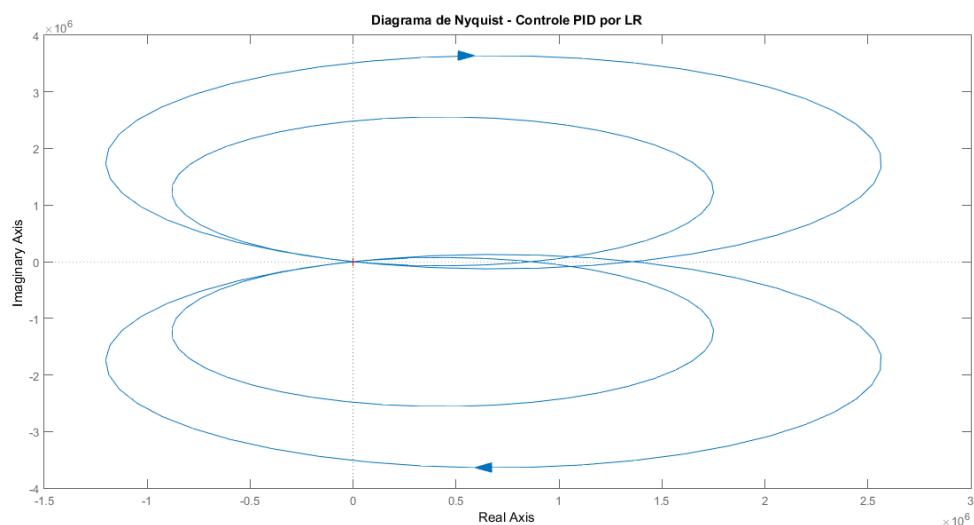
Motor 3



APÊNDICE F – GRÁFICOS DE ESTABILIDADE

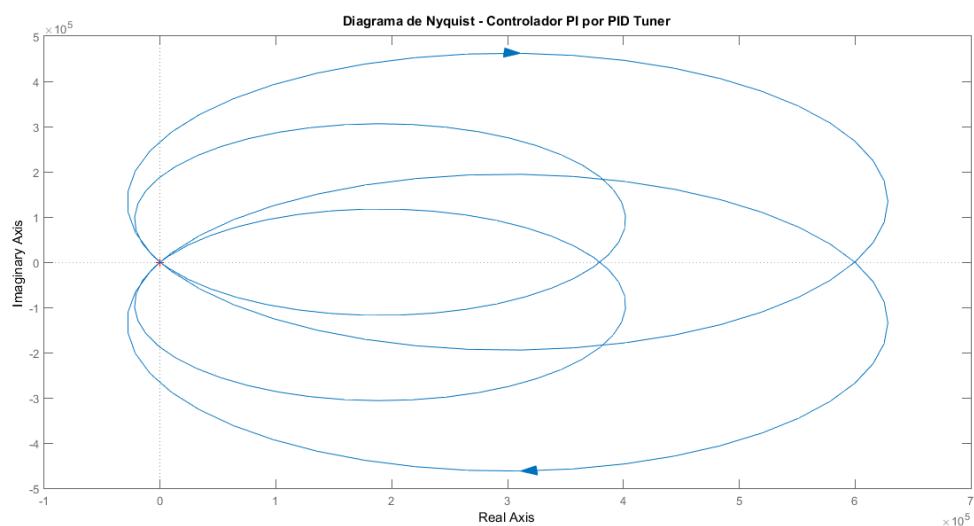
F.1 Diagramas de Nyquist

Figura 48 – Diagrama de Nyquist para o controlador PID projetado por LR.



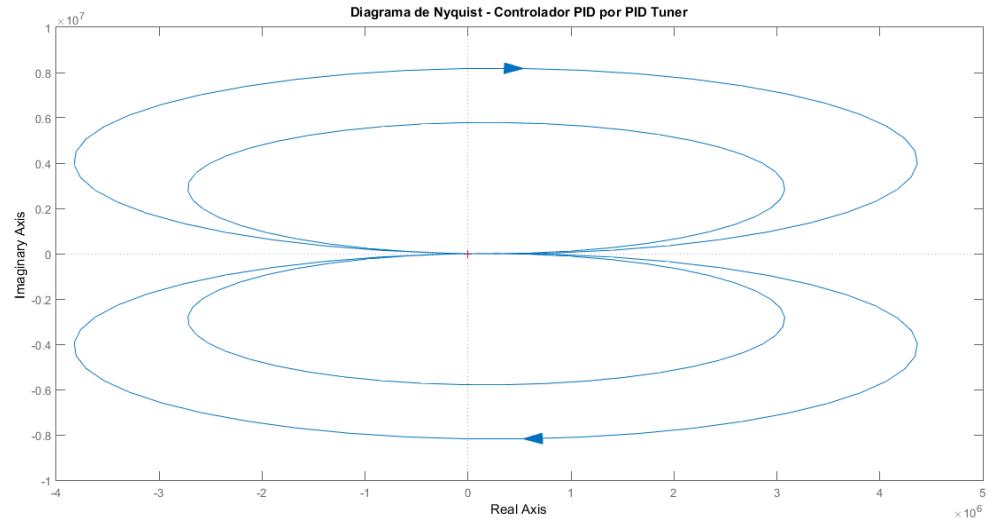
Fonte: Autoria própria.

Figura 49 – Diagrama de Nyquist para o controlador PI projetado pelo PID Tuner.



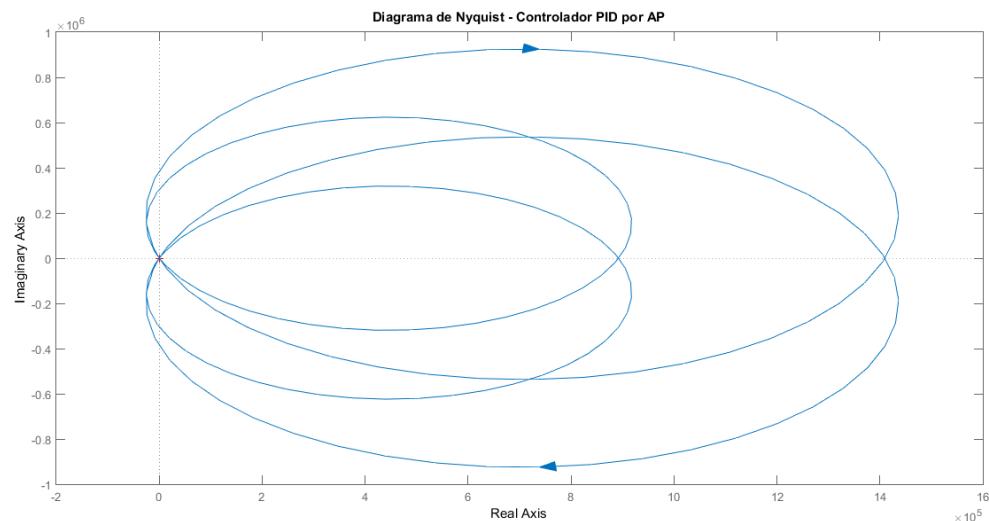
Fonte: Autoria própria.

Figura 50 – Diagrama de Nyquist para o controlador PID projetado pelo PID Tuner.



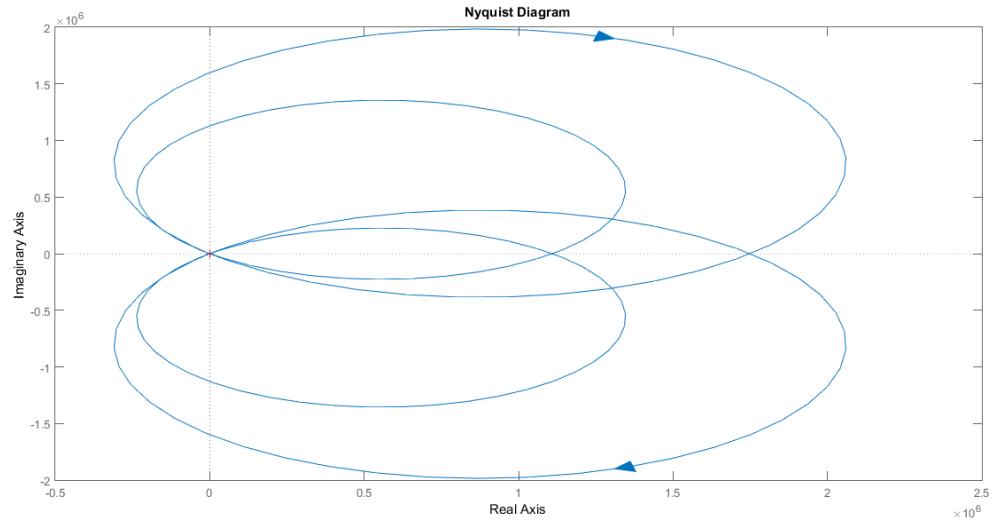
Fonte: Autoria própria.

Figura 51 – Diagrama de Nyquist para o controlador PID projetado por AP.



Fonte: Autoria própria.

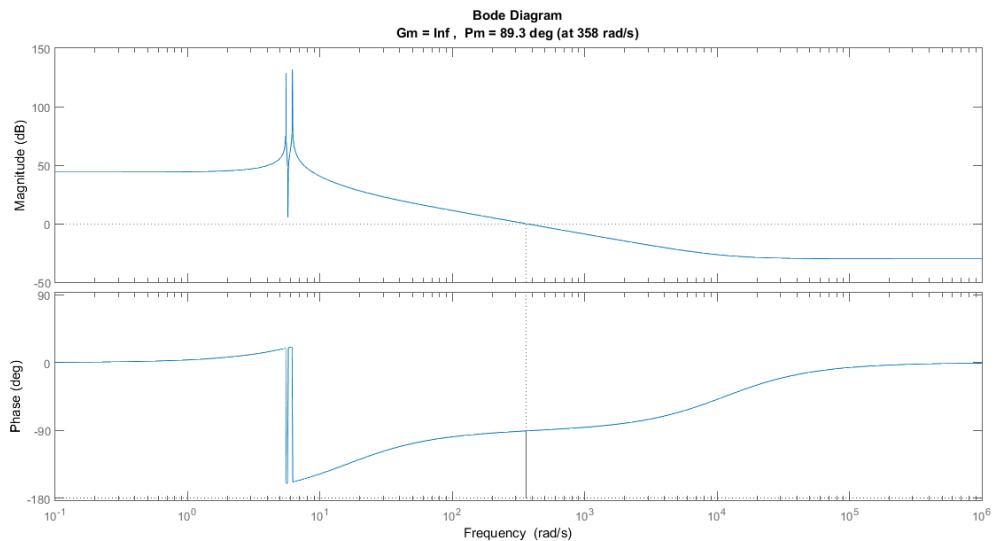
Figura 52 – Diagrama de Nyquist para o controlador PI projetado por LR.



Fonte: Autoria própria.

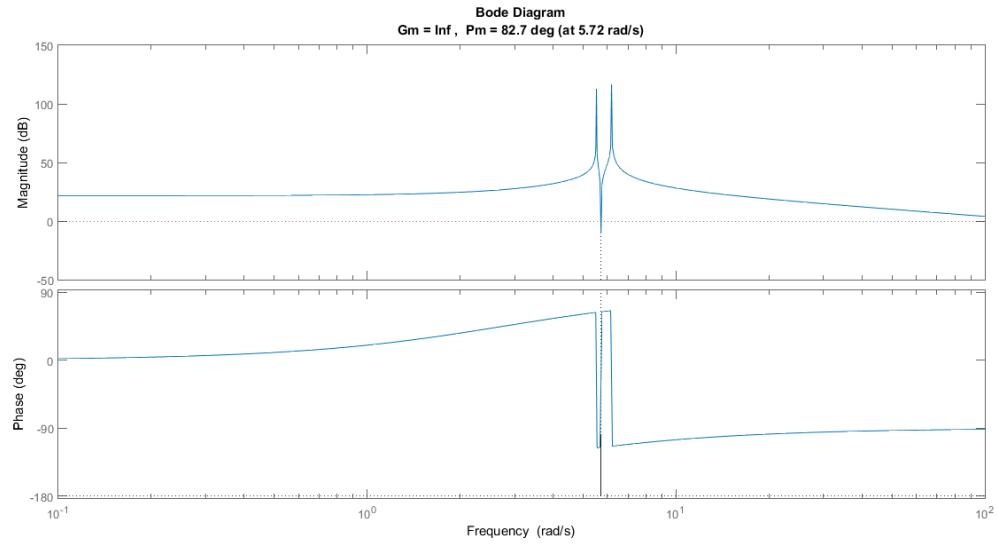
F.2 Diagramas de Bode com margens de estabilidade

Figura 53 – Diagrama de Bode para o controlador PID projetado por LR.



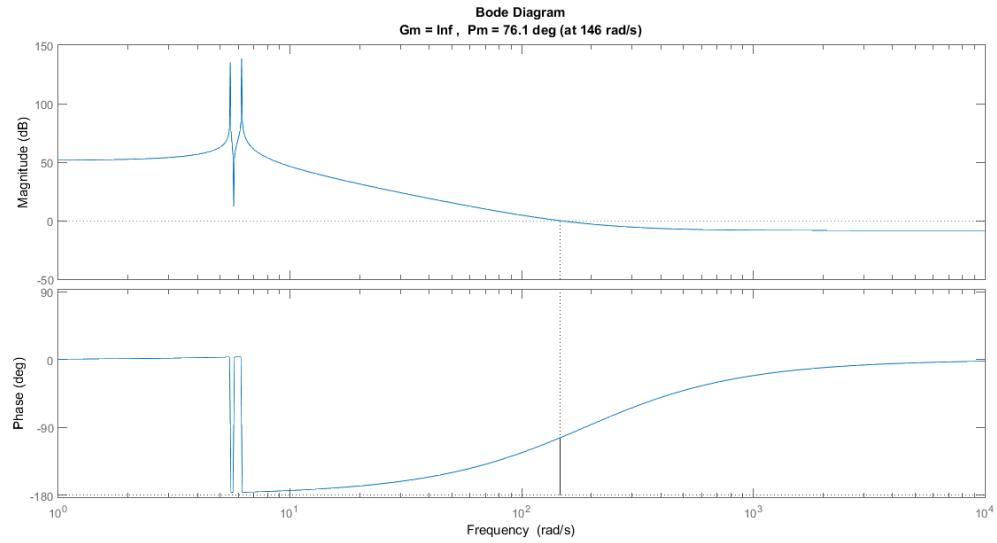
Fonte: Autoria própria.

Figura 54 – Diagrama de Bode para o controlador PI projetado pelo PID Tuner.



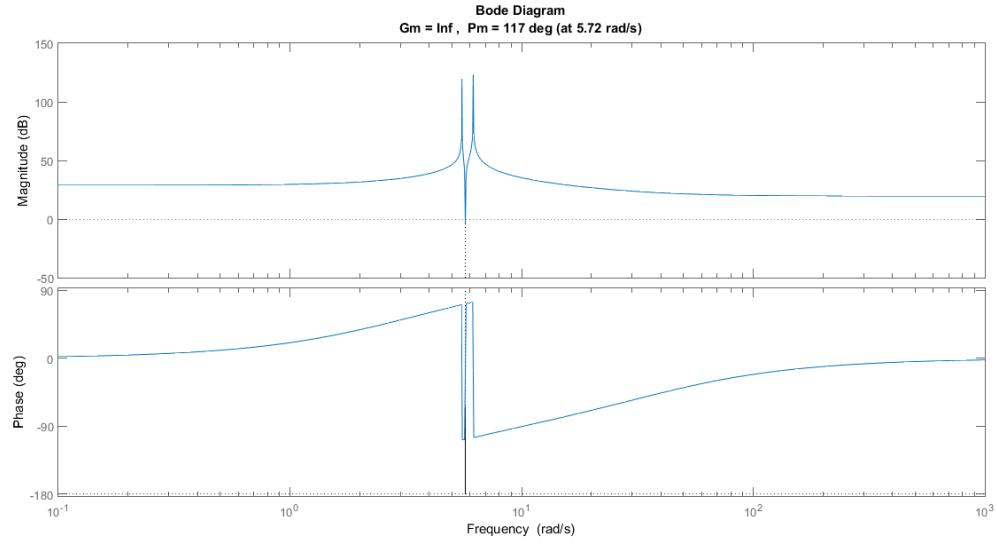
Fonte: Autoria própria.

Figura 55 – Diagrama de Bode para o controlador PID projetado pelo PID Tuner.



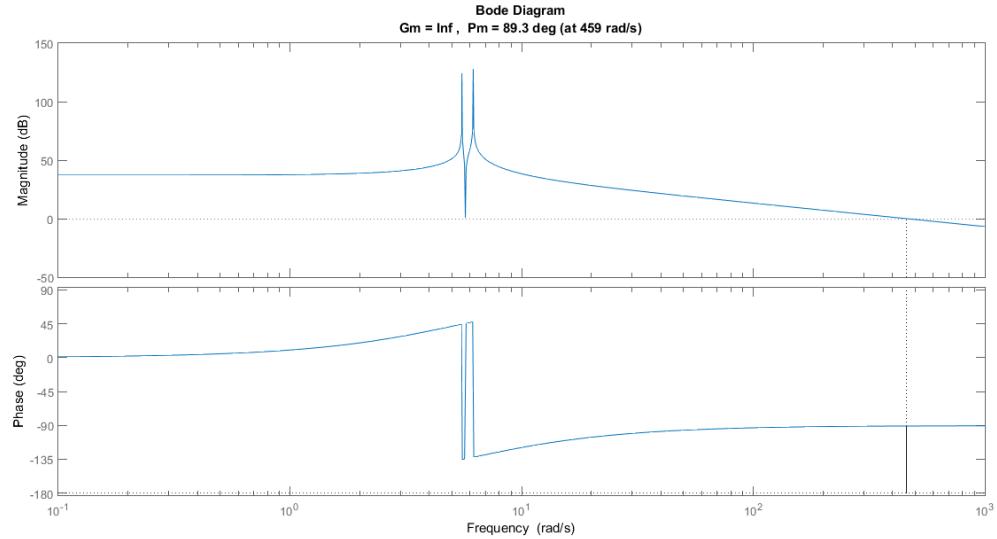
Fonte: Autoria própria.

Figura 56 – Diagrama de Bode para o controlador PID projetado por AP.



Fonte: Autoria própria.

Figura 57 – Diagrama de Bode para o controlador PI projetado por LR.



Fonte: Autoria própria.