

Caique de Oliveira Kobayashi - 9793461

Heitor Fontana Godoy - 10335677

Lucas Hattori Costa - 10335847

Lucas Pinheiro Paiva Cavalcante - 10274270

# **Modelagem e Controle de Braço Robótico para Jogo de Tênis de Mesa**

São Paulo - SP, Brasil

5 de maio de 2020

Caique de Oliveira Kobayashi - 9793461

Heitor Fontana Godoy - 10335677

Lucas Hattori Costa - 10335847

Lucas Pinheiro Paiva Cavalcante - 10274270

## **Modelagem e Controle de Braço Robótico para Jogo de Tênis de Mesa**

Trabalho dedicado ao desenvolvimento do sistema de controle de um sistema dinâmico a ser apresentado como instrumento de avaliação da disciplina PME 3481.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

PME 3481 - Controle e Aplicações

Orientador:

Prof. Dr. Agenor Fleury e

Prof. Dr. Décio Donha

São Paulo - SP, Brasil

5 de maio de 2020

# Resumo

O presente relatório se dispõe a tratar da modelagem e o controle de um braço robótico voltado para uma situação de jogo de tênis de mesa. A inspiração no esporte foi compartilhada com uma série de pesquisas realizadas desde a década de 1980. O objetivo definido foi a regulação do sistema para seu retorno ao estágio de espera. O procedimento adotado foi elaborado de forma que, a partir da situação real, construiu-se o modelo físico e encontrou-se um modelo linearizado que descrevesse bem o movimento perto do ponto de operação do braço. Posteriormente, foi feita a simulação do movimento em torno dessa posição pré-definida e foram obtidos gráficos que descrevem o movimento coerentes com o sentido físico do modelo. A partir da modelagem estruturada, foi validada a observabilidade do sistema com sensoreamento de apenas uma variável e a controlabilidade com um único atuador. Foi realizado um estudo comparativo entre o controle por alocação de polos e pelo método LQ e foi avaliado o emprego de um observador. Verificou-se que há convergência suficientemente rápida e foi possível, a partir das respostas obtidas, definir o atuador e sensor necessário para o controle do robô.

**Palavras-chave:** Controle, Tênis de Mesa, Modelagem, Regulador.

# Lista de Figuras

Figura 1 – Comparação de robôs para jogo de tênis de mesa . . . . .	1
Figura 2 – Definição visual do problema . . . . .	5
Figura 3 – Sistema base para a modelagem . . . . .	8
Figura 4 – Modelo físico simplificado . . . . .	9
Figura 5 – Diagramas de corpo livre da Base, Antebraço e Braço . . . . .	10
Figura 6 – Mapa de Polos . . . . .	17
Figura 7 – Diagrama de Bode ( $\theta_2$ x $T_1$ ) . . . . .	20
Figura 8 – Resposta no tempo para o sistema em malha aberta. . . . .	21
Figura 9 – Tendência de estabilidade para um tempo de operação muito grande. . . . .	21
Figura 10 – Diagrama de blocos para a função de transferência $G_{F,x}(s)$ . . . . .	23
Figura 11 – Resposta no tempo para o sistema em malha fechada no método de alocação de polos. . . . .	26
Figura 12 – Resposta no tempo para o sistema em malha fechada no método LQ . . . . .	27
Figura 13 – Resposta no tempo do sistema com observador e polos originais. . . . .	28
Figura 14 – Resposta no tempo do sistema com observador pelo método LQ. . . . .	28
Figura 15 – Resposta no tempo do sistema com observador pelo método alocação de polos com novos polos. . . . .	29
Figura 16 – Motor 1 cv D56C - WEG® e Sensor Linear LTC - Atek . . . . .	30
Figura 17 – Diagrama de Bode - $x$ , $F$ . . . . .	45
Figura 18 – Diagrama de Bode - $\dot{x}$ , $F$ . . . . .	45
Figura 19 – Diagrama de Bode - $\theta_1$ , $F$ . . . . .	46
Figura 20 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1$ , $F$ . . . . .	46
Figura 21 – Diagrama de Bode - $\theta_2$ , $F$ . . . . .	47
Figura 22 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_2$ , $F$ . . . . .	47
Figura 23 – Diagrama de Bode - $x$ , $T_1$ . . . . .	48
Figura 24 – Diagrama de Bode - $\dot{x}$ , $T_1$ . . . . .	48
Figura 25 – Diagrama de Bode - $\theta_1$ , $T_1$ . . . . .	49
Figura 26 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1$ , $T_1$ . . . . .	49
Figura 27 – Diagrama de Bode - $\theta_2$ , $T_1$ . . . . .	50
Figura 28 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_2$ , $T_1$ . . . . .	50
Figura 29 – Diagrama de Bode - $x$ , $T_2$ . . . . .	51
Figura 30 – Diagrama de Bode - $\dot{x}$ , $T_2$ . . . . .	51
Figura 31 – Diagrama de Bode - $\theta_1$ , $T_2$ . . . . .	52
Figura 32 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1$ , $T_2$ . . . . .	52
Figura 33 – Diagrama de Bode - $\theta_2$ , $T_2$ . . . . .	53
Figura 34 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_2$ , $T_2$ . . . . .	53

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Estudo da Literatura</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>MODELAGEM DO SISTEMA</b>	<b>8</b>
<b>4.1</b>	<b>Determinação do Modelo Físico</b>	<b>8</b>
4.1.1	Hipóteses simplificadoras	8
4.1.2	Modelo físico final	9
<b>4.2</b>	<b>Modelagem Matemática</b>	<b>10</b>
4.2.1	Diagrama de Corpo Livre	10
4.2.2	Aplicação do Método de Lagrange-Euler	10
4.2.3	Modelo final não linearizado	12
4.2.4	Linearização do modelo	12
4.2.5	Representação em Espaço de Estados	13
4.2.6	Parâmetros do problema	15
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DO SISTEMA EM MALHA ABERTA</b>	<b>16</b>
<b>5.1</b>	<b>Descrição no domínio das frequências</b>	<b>16</b>
5.1.1	Funções de transferência	16
5.1.2	Polos	17
5.1.3	Zeros	18
5.1.4	Estabilidade	18
5.1.5	Diagramas de Bode	19
<b>5.2</b>	<b>Matriz de Transição e Resposta no Tempo</b>	<b>20</b>
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DO SISTEMA EM MALHA FECHADA</b>	<b>22</b>
<b>6.1</b>	<b>Função de transferência relevante</b>	<b>22</b>
<b>6.2</b>	<b>Controlabilidade e Observabilidade do sistema</b>	<b>23</b>
<b>6.3</b>	<b>Controle por alocação de polos e por método LQ</b>	<b>24</b>
6.3.1	Parâmetros e matriz de transição para alocação de polos	24
6.3.2	Parâmetros e matriz de transição para método LQ	25
6.3.3	Simulação e comparação da velocidade dos sistemas em malha fechada	25
<b>6.4</b>	<b>Observador de Estado</b>	<b>27</b>
<b>6.5</b>	<b>Sensores e Atuadores Necessários</b>	<b>29</b>

<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>31</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>32</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>34</b>
	<b>APÊNDICE A – CÓDIGOS . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>A.1</b>	<b>Simulações em Malha Aberta . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>A.2</b>	<b>Simulações em Malha Fechada . . . . .</b>	<b>37</b>
	<b>APÊNDICE B – FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA . . . . .</b>	<b>43</b>
	<b>APÊNDICE C – DIAGRAMAS DE BODE EM MALHA ABERTA .</b>	<b>45</b>

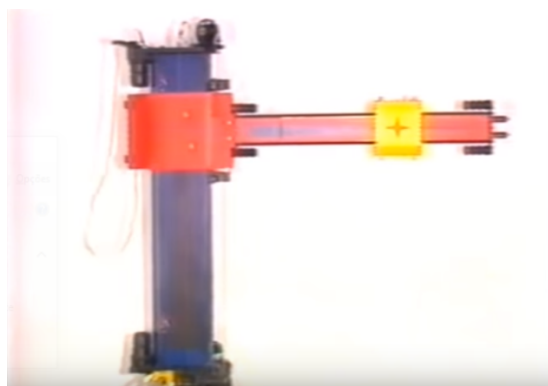
# 1 Introdução

Tênis de mesa é um jogo que envolve rápidos reflexos, coordenação motora e capacidade de adaptação conforme variação dos parâmetros referentes ao jogo, como resumido por Mullin Jens Kobe (2011). Criar um braço robótico capaz de realizar todas as tarefas exigidas durante uma partida comum tem sido um desafio amplamente estudado por inúmeros entusiastas da robótica, da engenharia e do esporte. A vasta literatura que se debruça sobre o assunto aborda diferentes aspectos do jogo de diferentes maneiras. As abordagens variam desde o desenvolvimento de sistemas robóticos com variado número de graus de liberdade, como em Matsushima et al. (2005) (usando 7 GL, por exemplo) até o uso de aprendizado de máquina aplicado com visão computacional em Mülling e Peters (2009).

Um dos primeiros modelos desenvolvidos foi criado pelo Instituto Federal de Tecnologia de Zurique (ou ETHZ, sigla em alemão), em 1987, representado na Figura 2(a). Este modelo simples descreve um movimento com dois graus de liberdade que varre o plano de forma cartesiana.

Com o crescimento da inovação tecnológica e da curiosidade científica, os modelos sofisticaram-se e atingiram níveis de precisão e agilidade bem elevados. A título de ilustração, encontra-se o robô "Forhpheus", da empresa japonesa Omron®, exibido na Figura 2(b). Este modelo é capaz de detectar a posição do jogador, da bola e da raquete e, assim, reproduzir os movimentos humanos de um jogador, com um tempo de ciclo inferior a 0,0001 segundos.

Figura 1 – Comparação de robôs para jogo de tênis de mesa



(a) Braço cartesiano desenvolvido na ETHZ



(b) Robô japonês 'Forhpheus'

Independentemente da sofisticação do modelo, contudo, o interesse pelo jogo de tênis de mesa se resume a duas problemáticas fundamentais. A primeira trata do reconhecimento

e predição da trajetória da bola, garantindo seu encontro com a raquete do robô. A segunda, por sua vez, remete a velocidade de resposta necessária para atuação do sistema.

Diante da análise de trajetória, encontram-se abordagens com uso de câmeras binoculares com pares de sensores, como em Hashimoto et al. (1987) ou com sensores dinâmicos de luz, como em Andersson (1989). Uma síntese dos métodos mais utilizados para detecção da trajetória da bolinha é apresentada por Saber Ferat Sahin (2005).

Por outro lado, a velocidade de resposta do sistema implica a necessidade de um conhecimento concreto a respeito do sistema dinâmico do robô. Todavia, a dinâmica dos sistemas mais modernos é complexa e apresenta, usualmente, **comportamento caótico**. Há muito, pois, a ser ainda estudado a respeito deste mecanismo, principalmente quanto à simplificação do controle e dos equipamentos necessários, conferindo escalabilidade ao modelo.

Não somente ao esporte e entretenimento, mas o estudo do comportamento robótico é de grande importância para áreas de atuação como a saúde. Mecanismos biomiméticos são empregados para substituição de membros do corpo ou para reabilitação de movimentos perdidos, e buscam-se atualmente formas de reduzir o tempo de resposta e agilizar os movimentos de próteses mecânicas frente aos estímulos daquele que as utiliza.

Sendo assim, é de interesse o estudo da modelagem e do controle do sistema do robô para tênis de mesa, visando otimização dos métodos atuais de controle.

## 1.1 Estudo da Literatura

A fim de desenvolver uma base de conhecimentos para fundamentar um desenvolvimento e estudo aprofundado da modelagem e do controle deste sistema em questão, obteve-se um acervo bibliográfico que serviu de guia para as análises e hipóteses adotadas.

Sendo uma das principais referências, Acosta L.; Marichal (2003) aborda o aspecto mais prático do sistema, focando diretamente na descrição de um protótipo funcional e nos desafios de sua construção. Com isso, fornece importantes noções para estimar os parâmetros do nosso modelo físico, essenciais para a posterior análise e simulação do comportamento do sistema. Além disso, é interessante por apresentar uma modelagem relativamente simples, e que permite um desempenho razoável de jogo.

Mullin Jens Kobe (2011) busca reproduzir movimentos humanos de composição e tomadas de decisão (muitas vezes inconscientes) em uma simulação de um braço robótico com sete graus de liberdade. É, inclusive, abordada de forma interessante a questão do controle e modelagem de um braço humano: o braço humano possui centenas de músculos, capazes de atingir os mesmos objetivos das mais diversas maneiras. Apesar disso, fornecer flexibilidade ao sistema, acaba por tornar seu controle artificial difícil. Assim, são utilizados




princípios do controle ótimo, no qual é feita a minimização de uma função custo.

Nakashima et al. (2010, 2011, 2012) traz um estudo aprofundado sobre alguns aspectos usualmente desprezados na maioria das análises. Em Nakashima et al. (2012), é investigado o efeito aerodinâmico na raquete e na bola e como isso pode influenciar a previsão de movimento do braço robótico. Além disso, em Nakashima et al. (2011), avalia-se a composição do material da raquete de forma a modelar com precisão o contato da raquete com a bola e como isso pode influenciar o controle do braço robótico. A modelagem do movimento do braço é sucinta por não ser o foco do estudo em nenhum dos trabalhos, porém, ainda assim, apresenta proveitosa base de hipóteses e métodos a serem seguidos, tornando-se um texto de referência importante para o desenvolvimento do modelo.

Hashimoto et al. (1987) trata do desenvolvimento de um sistema robótico com 7 graus de liberdade, diretamente controlado por um microcontrolador. Além de também focar na parte de previsão da posição da bolinha, usando isso para alimentar o sistema de controle, diretamente relacionado ao escopo deste trabalho, a pesquisa traz importantes parâmetros experimentais que foram extremamente úteis para a concepção do presente modelo. Além disso, apresenta uma seção dedicada à cinemática inversa, assunto de crucial importância para validar as entradas necessárias para atingir os pontos de operação do sistema. Ainda no tópico de cinemática inversa, Craig (2005) apresenta extenso ferramental teórico para aprofundar as análises.

(Saini et al., 2012) é um texto que compara o controle em malha fechada por alocação de polos e método LQ. Sua importância como bibliografia se dá pela comparação que faz entre a velocidade de resposta e aplicação de ambos os métodos em um sistema dinâmico, servindo de base para a aplicação de ambas as formas de controle em malha fechada neste trabalho. Além disso, Saini et al. (2012) fornece parâmetros e base para as estimativas das matrizes  $Q$  e  $R$ , essenciais para controle pelo método LQ.

## 2 Objetivos

Com base no repertório levantado, **foi possível uma restrição da questão ampla**  proposta anteriormente. Dessa forma, pode-se defini-lo, efetivamente, como: determinar o controle mais adequado e otimizado para regulação do braço mecânico em torno do ponto de operação, minimizando efeitos de perda.

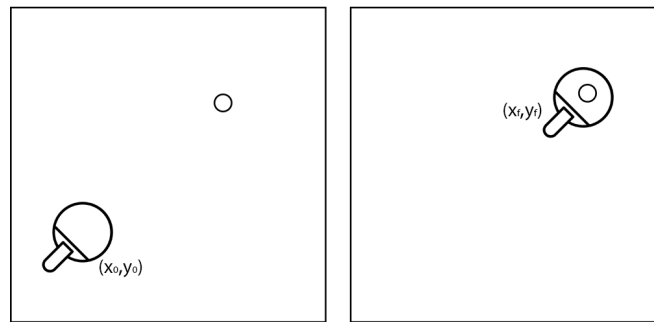
Dessa forma, como pode-se ilustrar na Figura 2, tratar-se-á da modelagem e do controle do sistema para movimento da raquete em um determinado ponto. Para determinar esse ponto, utilizou-se Ramanantsoa M. (1994) com o objetivo de definir um estágio do jogo para ser o ponto de operação. Segundo o mesmo, tênis de mesa possui um padrão regular, podendo ser dividido em 4 estágios definidos: Estágio de Espera, Estágio de Preparação, Estágio do Golpe e Estágio de Finalização. Não sendo possível abordar todas as etapas, escolheu-se apenas a primeira, de Espera, como ponto de operação a ser simulado.

1. **Estágio de Espera** A bola está vindo em direção ao oponente que a rebate em direção a rede. De modo a se preparar nesse estágio, o braço com a raquete está saindo do seu ponto mais baixo em direção ao ponto de contato com a bola.
2. **Estágio de Preparação** A bola está vindo em direção ao jogador, já ultrapassou a rede e toca a mesa durante esse estágio. A raquete está se movendo para preparar o golpe.
3. **Estágio de Golpe** A bola está chegando no ponto onde ocorrerá o contato com a raquete. A raquete já está em movimento em direção à bola, até atingí-la. Segundo Ramanantsoa M. (1994), esse momento dura cerca de 80ms.
4. **Estágio da Finalização** Após sofrer o golpe, a bola está retornando ao outro lado da mesa, do oponente, enquanto o braço da raquete está se movendo para cima até parar.

Com o estágio de operação definido, o escopo do trabalho se restringe à uma operação bem específica dentro dos movimentos do jogo, porém ainda assim relevante. Trata-se da volta do braço ao ponto de espera após ter rebatido a bola, ou seja, o fim do ciclo de quatro etapas, para que o braço robótico repita novamente os movimentos para a próxima jogada. Ainda que simples, esse movimento é crucial para a eficácia do braço robótico por permitir que o ciclo se inicie sempre do mesmo ponto inicial e com precisão necessária. Controlar com certa precisão esse movimento configura um desafio adequado às restrições e objetivos da disciplina e do presente relatório.

Para tal, propõe-se o desenvolvimento de um sistema para o qual o movimento supracitado possa ser realizado dentro de um intervalo de convergência de linearização com atuação apenas na base do braço, ou seja, sem atuar nas articulações do mesmo. A restrição da atuação apenas na base do braço impõe um desafio e tem consequências importantes, principalmente no estudos referentes ao sistema em malha fechada. Adotar tal restrição é buscar desenvolver um sistema controlável inovador, mais econômico e simples de ser construído fisicamente, uma vez que só exigirá um motor de simples implementação. A viabilidade teórica deste modelo será extensamente discutida, e, uma vez validado, será utilizado para obtenção de simulações numéricas baseadas em distintos métodos de controle moderno.

Figura 2 – Definição visual do problema



Fonte: Autoria própria.

Do problema supracitado, portanto, já é possível inferir que alguns dos parâmetros fundamentais são os comprimentos dos componentes do mecanismo-solução, com o fito de garantir a cobertura de toda a área estipulada; os parâmetros dos atuadores a serem utilizados; e, finalmente, as massas de todos os componentes, que definem a inércia do mecanismo como um todo.

### 3 Metodologia

Com o objetivo do presente relatório definido centrado na modelagem e controle do sistema físico correspondente à um braço robótico dedicado à ténis de mesa, em especial o movimento de retorno ao estágio de espera, têm-se como próxima etapa a definição da metodologia subsequente para desenvolver tal objetivo.

A primeira ação é a modelagem completa do sistema, a começar pela física, onde, com auxílio da bibliografia, elaborar-se-á um sistema fiel suficiente à realidade para se obter resultados condizentes, porém simplificado por hipóteses que possibilitam sua análise de forma menos extensa. A isto, segue-se a modelagem matemática, que, a partir das equações diferenciais resultantes do método de Lagrange-Euler, resulta em um espaço de estados posteriormente linearizado, utilizando a expansão em série de Taylor de primeira ordem multivariável. Tal espaço de estados será de fundamental importância para o **consequente** do relatório, inclusive para a obtenção de um diagrama de blocos do sistema e para a determinação dos polos do sistema, etapas que o seguirão para finalizar a modelagem completa do sistema.

Para a análise do controle do braço robótico, é necessário analisar inicialmente o sistema em malha aberta, afim de obter-se conclusões iniciais acerca da estabilidade em malha aberta do sistema, além de todas as funções de transferência. Diagramas de Bode e mapa de polos serão alguns dos ferramentais teóricos para elucidar tais conclusões e fomentar a etapa seguinte, que é a análise do sistema em malha fechada.

Esta etapa, diretamente voltada para o controle do braço robótico, é composta por uma comparação dos métodos de controle por alocação de polos e o controle linear quadrático (LQ), com e sem o uso de um observador de estados. Afim de realizar tal comparação, utilizar-se-á de uma hipótese simplificadora crucial, a ser validada durante a análise, na qual toma-se a função de transferência  $G_{(F,x)}$ , que relaciona a força aplicada a base  $\vec{F}$  com a posição horizontal  $x$ , como sendo suficiente para controlar e observar o sistema. Obviamente será conduzido um estudo de controlabilidade e observabilidade para validar essa hipótese, e, uma vez validada e os métodos estudados, os resultados obtidos serão utilizados para definir sensores e atuadores necessários para controlar o sistema. Todas essas etapas serão desenvolvidas utilizando a teoria de controle provinda da bibliografia e funções do software MATLAB.

## Resultados Parciais e Análises

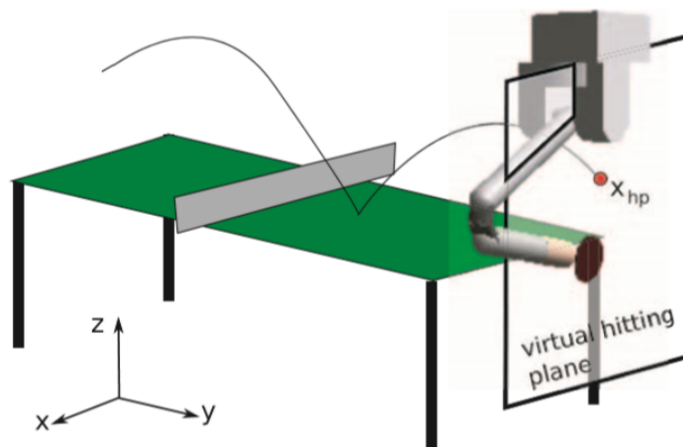
## 4 Modelagem do Sistema

### 4.1 Determinação do Modelo Físico

Com o problema bem descrito, buscou-se elaborar um modelo físico capaz de representar de forma suficiente o sistema mecânico em estudo, contudo de maneira simples e objetiva, evitando considerações desnecessárias que dificultem o atingimento dos objetivos.

Para isso, buscou-se manter o modelo coerente aos sistemas mecânicos dos robôs jogadores de tênis de mesa. Após avaliação dos modelos existentes, foi tomado como referência o sistema proposto por Mülling e Peters (2009), apresentado na Figura 3. Este modelo consiste de uma base superior que sustenta um pêndulo duplo, simulando o braço e antebraço de um jogador de tênis de mesa. Seu movimento é restrito a único plano no espaço e apresenta apenas três graus de liberdade.

Figura 3 – Sistema base para a modelagem



Fonte: Mülling, K.

#### 4.1.1 Hipóteses simplificadoras

A fim de simplificar e especificar o sistema ao problema proposto, foram determinadas as seguintes hipóteses simplificadoras para o modelo de Mülling e Peters (2009):

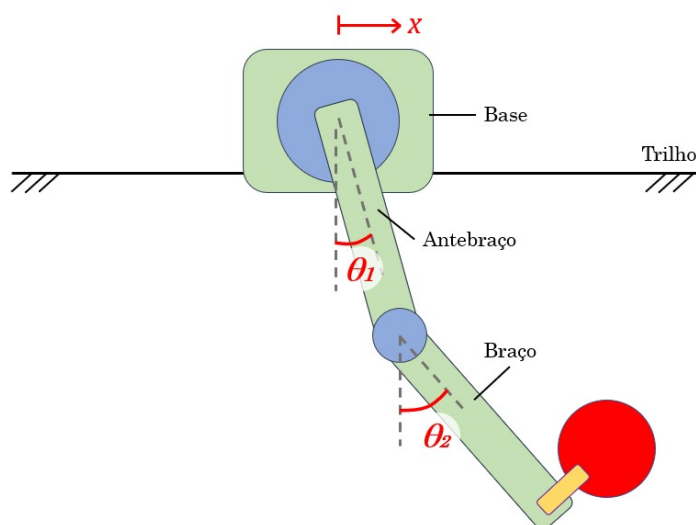
- Realização apenas de pequenas oscilações em torno do ponto de operação;
- Pesos dos braços concentrados em seus centros de massa: não é levada em conta a distribuição do peso ao longo da barras;

- Braços considerados barras de largura desprezível, rígidas e homogêneas: as barras não sofrem deformações consideráveis e possuem centro de gravidade coincidente com o centro geométrico das barras;
- Atritos considerados: atrito viscoso nas articulações e atrito viscoso entre a base e os trilhos (o atrito com o ar foi desprezado), obtendo um sistema não conservativo;
- Raquete com dimensões e massa desprezíveis: dimensões e massa do braço muito maiores do que da raquete;
- Movimento plano com três graus de liberdade;
- Serão considerados efeitos de inércia para deslocamentos amplos, sendo desprezados efeitos de pequenas vibrações de elevadas frequências;
- Tempo de resposta e massa dos atuadores desprezíveis;
- As duas barras possuem as mesmas dimensões (seção, comprimento e massa).

#### 4.1.2 Modelo físico final

Por fim, aplicando as hipóteses adotadas ao modelo original de Mülling e Peters (2009) proposto, obtém-se um modelo já conhecido de pêndulo duplo, preso a uma base móvel, tal qual na Figura 4. A figura apresenta os três graus de liberdade estudados no presente trabalho:  $x$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Além disso, como apresentado na figura, os componentes do sistema serão tratados como base, braço e antebraço, para melhor elucidação do modelo.

Figura 4 – Modelo físico simplificado



Fonte: Autoria própria

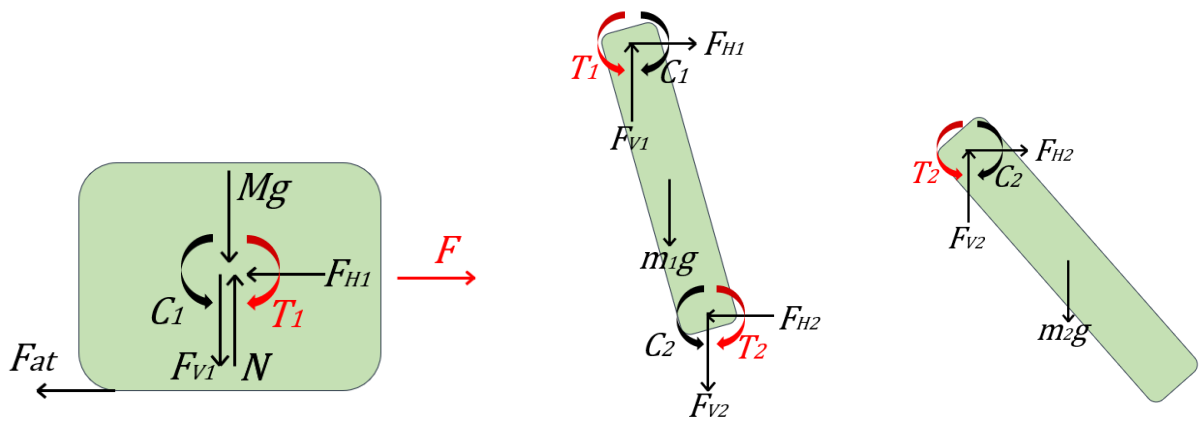
Vale ressaltar que, para o problema do jogo de tênis de mesa, é de interesse não somente a análise posicional dos graus de liberdade, mas também o estudo de suas derivadas.

## 4.2 Modelagem Matemática

### 4.2.1 Diagrama de Corpo Livre

Para definição matemática do modelo determinado, é de interesse a separação dos componentes para avaliar os esforços envolvidos. O diagrama de corpo livre pode ser observado na Figura 5. Os esforços destacados em vermelho representam as possíveis forças de atuação nos graus de liberdade estabelecidos.

Figura 5 – Diagramas de corpo livre da Base, Antebraço e Braço



Fonte: Autoria própria

### 4.2.2 Aplicação do Método de Lagrange-Euler

Para descrição do comportamento dinâmico do sistema, foi utilizado o método de Lagrange-Euler. As chamadas Equações de Lagrange são um conjunto de equações que compõem um ferramental simples, capaz de resolver uma gama de problemas por meio da avaliação da energia mecânica (FRANÇA; MATSUMURA, 2011). A equação genérica é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial N}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^{ext} \quad (4.1)$$

Onde:

- $V$ : Energia Potencial Total do Sistema



- $T$ : Energia Cinética Total do Sistema
- $L = T - V$ : Lagrangeano (diferença da Energia Cinética e Potencial do sistema)
- $N$ : Energia de Amortecimento do Sistema não conservativo
- $Q_i^{ext}$ : Forças externas generalizadas
- $q_i$  e  $\dot{q}_i$ : Coordenadas Generalizadas

Calculando os termos  $V$  e  $T$ , obtém-se os valores das energias, expostos nas Equações (4.2) e (4.3).

$$T = M \cdot \frac{\dot{x}^2}{2} + m_1 \cdot \frac{\dot{x}_{1G}^2}{2} + m_1 \cdot \frac{\dot{y}_1^2}{2} + m_1 \frac{l_1^2}{24} \dot{\theta}_1^2 + m_2 \cdot \frac{\dot{x}_{2G}^2}{2} + m_2 \cdot \frac{\dot{y}_2^2}{2} + m_2 \frac{l_2^2}{24} \dot{\theta}_2^2 \quad (4.2)$$

$$V = -m_1 \cdot g \cdot y_1 - m_2 \cdot g \cdot y_2 \quad (4.3)$$

E, portanto, obtemos as Equações (4.4) e (4.5) que determinam o sistema.

$$L = M \cdot \frac{\dot{x}^2}{2} + m_1 \cdot \frac{\dot{x}_{1G}^2}{2} + m_1 \cdot \frac{\dot{y}_1^2}{2} + m_1 \frac{l_1^2}{24} \dot{\theta}_1^2 + m_2 \cdot \frac{\dot{x}_{2G}^2}{2} + m_2 \cdot \frac{\dot{y}_2^2}{2} + m_2 \frac{l_2^2}{24} \dot{\theta}_2^2 + m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_2 \quad (4.4)$$

$$N = b \frac{\dot{x}^2}{2} + c_1 \frac{\dot{\theta}_1^2}{2} + c_2 \frac{\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1^2}{2} \quad (4.5)$$

Sendo que:

$$Q_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} \quad Q_{\theta_1} = \frac{\partial T_1 \cdot \theta_1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial T_2 \cdot \theta_1}{\partial \theta_1} \quad Q_{\theta_2} = \frac{\partial T_2 \cdot \theta_2}{\partial \theta_2}$$

$$\dot{x}_{1G} = \dot{x} + \frac{l_1}{2} \cdot \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 \quad \dot{x}_{2G} = \dot{x} + l_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2$$

$$y_1 = \frac{l_1}{2} \cdot \cos \theta_1 \quad \dot{y}_1 = -\frac{l_1}{2} \cdot \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1$$

$$y_2 = l_1 \cdot \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos \theta_2 \quad \dot{y}_2 = -l_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2$$

### 4.2.3 Modelo final não linearizado

Por fim, substituindo os termos de Lagrange na equação (4.1), encontram-se as três equações características do sistema, descritas abaixo (Equações de (4.6) a (4.8)). É possível observar que o sistema, além de não linear, é também acoplado, sendo esta característica um obstáculo à continuidade do estudo dinâmico, o qual deverá ser contornado.

$$F = (M + m_1 + m_2) \ddot{x} - l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \left( \frac{m_1}{2} + m_2 \right) - \frac{m_2 l_2}{2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \left( \frac{m_1}{2} + m_1 \right) + \frac{m_2 l_2}{2} \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 + b \dot{x} \quad (4.6)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 l_1}{3} \ddot{\theta}_1 + c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + \frac{m_1 l_1}{2} \cos \theta_1 \ddot{x} + \sin \theta_1 \left[ \frac{m_1 g l_1}{2} + m_2 l_1 \left( g + \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 \right) \right] + m_2 l_1 \cos \theta_1 \left( -\frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 - l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{x} \right) \quad (4.7)$$

$$T_2 = m_2 \left( \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 (l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1) + \frac{\ddot{x} l_2}{2} \cos \theta_2 - \frac{l_1 l_2}{2} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_1 l_2}{2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_1 \right) + \frac{m_2 l_2^2}{3} \ddot{\theta}_2 - \frac{m_2 l_2^2}{3} \ddot{\theta}_1 + \frac{m_2 g l_2}{2} \sin \theta_2 + c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (4.8)$$

### 4.2.4 Linearização do modelo

De acordo com Franklin, Powell e Emami-Naeini (2014), o método Lyapunov, melhor descrito em Ogren, Egerstedt e Hu (2001), prova que, se um modelo linear de pequenos sinais é válido perto de um equilíbrio e é estável, então existe uma região contendo o equilíbrio no qual o sistema não-linear é estável.

Assim, será aplicada a linearização para simplificar o modelo do sistema. A bibliografia de controle dinâmico em sistemas robóticos traz métodos como a linearização por feedback, mas tais métodos estão fora do escopo deste trabalho. Adotou-se, portanto, o método de linearização por expansão em série de Taylor de primeira ordem multivariável, apresentada na Equação (4.9).

$$\tilde{f} = f_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{fop} \cdot (x_i - x_i^{op}) \quad (4.9)$$

No caso do modelo em estudo, faz-se necessária a expansão em série dos termos de segunda ordem  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{\theta}_1$  e  $\ddot{\theta}_2$ . Logo, a Equação (4.9) torna-se como apresentada pela Equação (4.10).

$$\begin{aligned}\tilde{f} = f_0 &+ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{f^{op}} \cdot (x - x^{op}) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{f^{op}} \cdot (\dot{x} - \dot{x}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right|_{f^{op}} \cdot (\theta_1 - \theta_1^{op}) \\ &+ \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_1} \right|_{f^{op}} \cdot (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1^{op}) + \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right|_{f^{op}} \cdot (\theta_2 - \theta_2^{op}) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_2} \right|_{f^{op}} \cdot (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_2^{op})\end{aligned}\quad (4.10)$$

Nesse ponto, para prosseguir com a linearização, substituímos o ponto de operação escolhido. Como explicitado anteriormente, o Estágio de Espera do jogo é configurado pela raquete no ponto mais baixo da sua trajetória, antes ainda de sofrer um esforço para atingir a bolinha. Tal situação é verificada quando  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Logo, substitui-se as equações (4.6) a (4.8) na equação (4.10) com os valores do ponto de operação, que resulta em:

$$(2m + M)l\ddot{x} = -b\dot{x} - \frac{3ml^2}{2}\ddot{\theta}_1 - \frac{ml^2}{2}\ddot{\theta}_2 + lF \quad (4.11)$$

$$\frac{3ml^2}{2}\ddot{\theta}_1 + \frac{2ml^2}{2}\ddot{\theta}_2 + 2ml\ddot{x} = -\frac{3mlg}{2}\theta_1 - c\dot{\theta}_1 - \frac{mlg}{2}\theta_2 + T_1 \quad (4.12)$$

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}_2 + \frac{ml^2}{6}\ddot{\theta}_1 + \frac{ml}{2}\ddot{x} = c\dot{\theta}_1 - \frac{mlg}{2}\theta_2 - c\dot{\theta}_2 + T_2 \quad (4.13)$$

#### 4.2.5 Representação em Espaço de Estados

Observando-se as equações 4.11, 4.12 e 4.13, percebe-se que há acoplamento do modelo. Contudo, agora é possível desacoplar o sistema resolvendo-o para os três termos de segunda ordem ( $\ddot{x}$ ,  $\ddot{\theta}_1$  e  $\ddot{\theta}_2$ ) e, dessa forma, representar o sistema e as equações diferenciais linearizadas em Espaço de Estados, segundo Ogata (1982) na forma:

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (4.14)$$

$$y = CX + Du \quad (4.15)$$

Onde:

- $y \equiv$  vetor de saídas do sistema;
- $X \equiv$  vetor de estados do sistema;
- $\dot{X} \equiv$  derivada do vetor de estados do sistema;
- $u \equiv$  vetor de entradas do sistema;
- $A \equiv$  matriz de estado;

- B  $\equiv$  matriz de entrada;
- C  $\equiv$  matriz de saída;
- D  $\equiv$  matriz de transmissão direta.

Primeiramente, define-se as matrizes  $X$ ,  $\dot{X}$ ,  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  e a matriz de massa  $M$ , como apresentado abaixo:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -bl & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3mgl}{2} & -c & \frac{-mgl}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c & \frac{-mlg}{2} & -c \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2m + M)l & 0 & \frac{3ml^2}{2} & 0 & \frac{ml^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2ml & 0 & \frac{3ml^2}{2} & 0 & \frac{2ml^2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ml}{2} & 0 & \frac{ml^2}{6} & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix}$$

Para o efetivo desacoplamento do sistema e obtenção das matrizes A e B, é necessário multiplicar a inversa da matriz de inércia M pela matrizes  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ , de fato isolando os termos de segunda ordem

$$A = M^{-1}\tilde{A} \quad (4.16)$$

$$B = M^{-1}\tilde{B} \quad (4.17)$$

obtendo, assim,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(28b)}{28M+5m} & \frac{45gm}{28M+5m} & \frac{48c}{L(28M+5m)} & \frac{6gm}{28M+5m} & \frac{18c}{L(28M+5m)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24b}{L(28M+5m)} & \frac{-(9g(4M+5m))}{L(28M+5m)} & -\frac{18c(4M+3m)}{L^2m(28M+5m)} & \frac{3g(4M-m)}{L(28M+5m)} & \frac{-(24c(2M+m))}{(L^2m(28M+5m))} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{30b}{L(28M+5m)} & \frac{9g(2M-5m)}{L(28M+5m)} & \frac{30c(4M-m)}{L^2m(28M+5m)} & \frac{-(3g(16M+5m))}{L(28M+5m)} & \frac{108Mc}{L^2m(28M+5m)} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{28}{28M+5m} & \frac{-30}{L(28M+5m)} & \frac{18}{L(28M+5m)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-24}{L(28M+5m)} & \frac{6(4M+5m)}{L^2m(28M+5m)} & \frac{-(24(2M+m))}{L^2m(28M+5m)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-30}{L(28M+5m)} & \frac{-(6(2M-5m))}{L^2m(28M+5m)} & \frac{108M}{L^2m(28M+5m)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

É interessante notar a interação física dos termos das matrizes  $A$  e  $B$  no estado do sistema. É possível primeiramente uma análise qualitativa das equações.

Da matriz  $A$ , primeiramente, percebe-se que tanto  $\ddot{\theta}_1$  quanto  $\ddot{\theta}_2$  possuem termos restitutivos ( $-\frac{9g(4M+5m)}{L(28M+5m)}\theta_1$  e  $-\frac{(48Mg+15mg)}{L(28M+5m)}\theta_2$  respectivamente), que contribuem para oscilação em torno da posição de equilíbrio. O termo  $\ddot{x}$  não possui esse termo, ou seja, a resituição para uma posição desejada, qualquer que seja, deve vir de uma das entradas do sistema.

Em relação aos termos de primeira derivada ( $\dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ ) interagindo com as velocidades, percebe-se que tanto  $x$  quanto  $\theta_1$  possuem termos que se opoem à velocidade em  $x$  e  $\theta_1$ , representando uma resistência ao movimento. Contudo, existe um termo do tipo  $k\dot{\theta}_2$  com  $k$  positivo na expressão de  $\ddot{\theta}_2$ . Isso poderia indicar instabilidades em torno do ponto de operação, caso os eventos desse termo não fossem cancelado. Nesse caso específico, esse termo não apresentará grande influência, por apresentar pequena magnitude se comparado aos outros termos.

Na matriz  $B$ , percebe-se a interação das entradas com o sistema. Como esperado, as entradas ( $F, T_1, T_2$ ) apenas influenciam os termos de segunda ordem.

#### 4.2.6 Parâmetros do problema

Toda a modelagem anterior foi realizada de forma completamente analítica e literal, em função de constantes próprias do problema, como a massa dos elementos do braço. Para simulação, foram adotados os valores obtidos a partir de um catálogo especificações inerciais da fabricante Barrett (2008), relativos a um braço robótico de dimensões e desenho semelhantes ao aqui analisado.

- $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- $l_1 = l_2 = l = 0,5 \text{ m}$
- $b_{base} = 7,12 \cdot 10^{-3} \frac{Ns}{m}$  ;  $c_1 = c_2 = c = 8,5 \cdot 10^{-5} \frac{Nms}{rad}$
- $l_{raquete} = 0,2 \text{ m}$
- $M = 6 \text{ kg}$  ;  $m_1 = m_2 = m = 2 \text{ kg}$

## 5 Análise do Sistema em Malha Aberta

### 5.1 Descrição no domínio das frequências

#### 5.1.1 Funções de transferência

Utilizando-se da ferramenta das transformadas de Laplace para o espaço de estados obtido, chega-se na transformação que permite justamente a obtenção de funções que relacionam as entradas às saídas do sistema, explicitadas nas equações 5.1 a 5.4.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} sX(s) = AX(s) + Bu(s) \quad (5.1)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \quad (5.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} Y(s) = CX(s) + Du(s) \quad (5.3)$$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s) \quad (5.4)$$

Por conveniência, denomina-se  $G(s) \equiv C(sI - A)^{-1}B + D$ . Com a linearização realizada em torno do ponto  $(\theta_1 = 0, \theta_2 = 0)$  e a representação do sistema em espaço de estados, utilizou-se a função *tf* do software *Matlab* para obter as funções de transferência, ou seja, já com as equações no domínio da frequência.

Efetivamente, pelo fato de o sistema dispor de seis variáveis de estado e três entradas, tratar-se-iam de dezoito funções de transferência para o sistema. Ao presente trabalho, é interessante a simplificação da abordagem às funções de transferência mais determinísticas ao sistema, minimizando a quantidade de sensores e atuadores e, conseqüentemente, o custo do projeto. A função de transferência ideal será posteriormente determinada por meio da análise da controlabilidade e observabilidade do sistema, descritos na 6.2. Puramente a título de ilustração, encontram-se abaixo três funções de transferência relativas a entradas e saídas distintas. O restante delas encontra-se no apêndice B.

$$G_{F,\theta_1} = \frac{-0.2697s^4 + 0.0002751s^3 - 11.9s^2 + (1.052e - 18)s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (5.5)$$

$$G_{T_1,\theta_2} = \frac{-0.1348s^4 + 0.0004153s^3 + 9.792e - 07s^2 + 7.654e - 19s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (5.6)$$

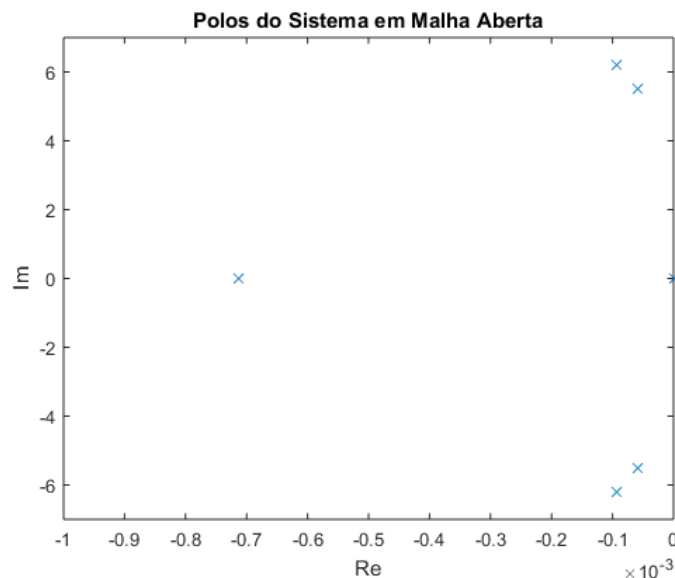
$$G_{T_2,\dot{x}} = \frac{0.2022s^4 - (6.876e - 05)s^3 - (4.309e - 15)s^2 + (5.957e - 12)s - (4.415e - 13)}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (5.7)$$

Como análise preliminar de estabilidade, a ser aprofundada no tópico seguinte, já se pode perceber que não há troca de sinal dos coeficientes do polinômio característico (KULAKOWSKI; GARDNER; SHEARER, 2007).

### 5.1.2 Polos

A determinação dos polos de um sistema é fundamental para o entendimento da sua resposta em frequência e para posteriores análises de estabilidade e determinação de ganhos de controle. Os polos encontrados estão representados na Figura 6, na qual temos que a distância em relação à origem indica uma frequência natural não amortecida e o ângulo com o eixo real indica o coeficiente de amortecimento (OGATA, 1982).

Figura 6 – Mapa de Polos



Fonte: Autoria própria.

Uma vez que consiste nas raízes de um polinômio (advindo do denominador das funções de transferências) (OGATA, 1982; KULAKOWSKI; GARDNER; SHEARER, 2007), podemos averiguar uma consonância do mapa com o esperado, uma vez que apresenta todos os valores imaginários conjugados, bem como o número de raízes equivalente à ordem do polinômio.

Dessa forma, podemos extrair os módulos das frequências naturais do sistema estudado sem amortecimento ( $\omega$ ) e os coeficientes de amortecimento de cada polo ( $\zeta$ ). Estes valores, presentes na Tabela 1, caracterizam globalmente propriedades do sistema, de tal forma que, independente da função de transferência, os polos permanecem constantes (PARASKEVOPOULOS, 2002).

Tabela 1 – Características de Amortecimento do Sistema

Polo	Amortecimento	Frequência Natural (rad/s)	Constante de Tempo (s)
0.00e+00	-1.00e+00	0.00e+00	Inf
-7.12e-04	1.00e+00	7.12e-04	1.40e+03
-5.82e-05 + 5.53e+00i	1.05e-05	5.53e+00	1.72e+04
-5.82e-05 - 5.53e+00i	1.05e-05	5.53e+00	1.72e+04
-9.42e-05 + 6.18e+00i	1.52e-05	6.18e+00	1.06e+04
-9.42e-05 - 6.18e+00i	1.52e-05	6.18e+00	1.06e+04

Fonte: Autoria própria.

### 5.1.3 Zeros

Para determinação dos zeros das funções, faz-se necessário encontrar as raízes do polinômio que compõe o numerador de cada uma das funções de transferências (OGATA, 1982). Como os zeros tratam de propriedades específicas de cada uma das funções de transferências, ou seja, representam o comportamento de uma determinada saída em relação a uma determinada entrada (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2014). Os zeros obtidos também encontram-se no Apêndice B.

### 5.1.4 Estabilidade

Concomitantemente, utiliza-se ainda os polos obtidos do sistema para avaliar a estabilidade. Segundo Ogata (1982), sabe-se que a estabilidade é definida através da parte real dos polos, de tal forma que, na presença de um polo com parte real positiva, o sistema é dito instável.

Observando os polos obtidos, tem-se que quase todos os polos apresentam parte real negativa, com exceção do polo centrado na origem. Esse comportamento é denominado marginalmente estável, uma vez que apresenta um polo com parte real nula. Como descrito por Paraskevopoulos (2002), o comportamento marginalmente estável descreve um sistema em que, para pequenas oscilações, é apresentada estabilidade, porém, a partir de uma certa frequência, o sistema apresenta instabilidade, se deslocando para outro ponto com nova estabilidade marginal. A estabilidade do sistema pode ser ratificada utilizando o critério de Routh-Hurwitz (EL-MARHOMY; ABDEL-SATTAR, 2004), conforme a Tabela 2, observando-se que não há troca de sinais na primeira coluna, com todos permanecendo positivos.



Tabela 2 – Análise de estabilidade por Routh-Hurwitz.

$s^6$	1	68,78	1168	0
$s^5$	0,001017	0,05918	0,8315	0
$s^4$	10,58924	350,3992	0	
$s^3$	0,025527	0,8315		
$s^2$	5,476896			
$s^1$	0,8315			
$s^0$	0			

Fonte: Autoria própria.

Essa descrição de fato se reflete no sistema estudado. Considerando as pequenas oscilações das suas saídas e entradas, espera-se que os componentes pendulares do modelo físico mantenham-se estáveis, oscilando em torno do ponto de equilíbrio, cujo ângulo e velocidade angular são nulos. Contudo, dada as saídas lineares horizontais  $x$  e  $\dot{x}$ , temos que, para entradas relativamente grandes, o sistema deslocar-se-á para um novo ponto, diferente de zero, no qual passará a oscilar.

### 5.1.5 Diagramas de Bode

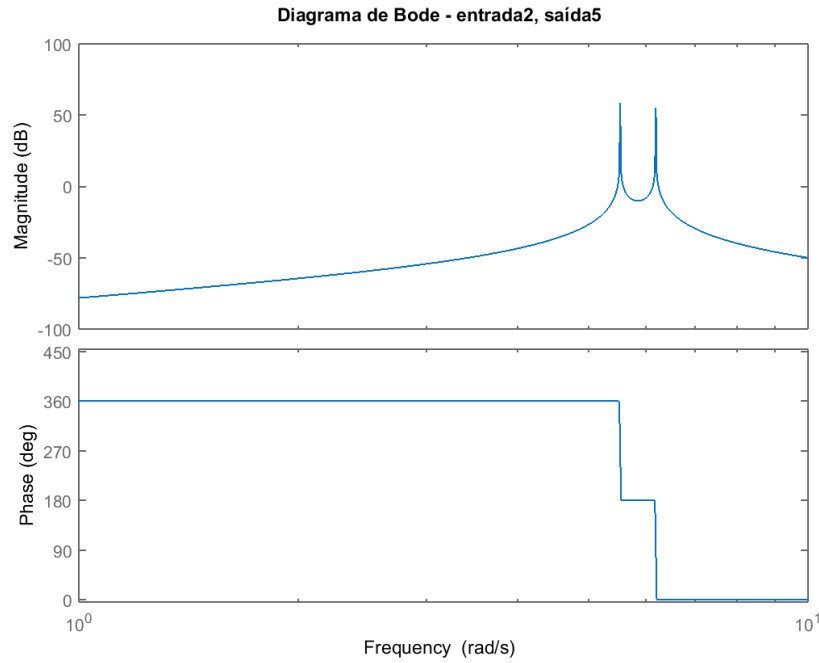
O diagrama de Bode é fundamental para um bom entendimento da resposta em frequência do sistema (BODE, 1940). Essencialmente, este diagrama é uma composição de dois gráficos, os quais apresentam: a magnitude do ganho da resposta em frequência, em decibéis (dB); e a fase desse ganho, em graus, com relação à frequência.

Ambos os gráficos são apresentados em escala logarítmica, no intuito de simplificar do entendimento visual do caso. Sendo assim, deve-se ater ao fato de que a magnitude apresentada se refere a vinte vezes o logaritmo da razão das amplitudes (amplitude da função de transferência para  $s = j\omega$ ).

Para levantamento dos diagramas de nosso sistema, foi utilizado o comando “*bode()*” do software MATLAB, no qual se insere apenas a função de transferência e já se obtém o diagrama completo.

Os diagramas obtidos podem ser visualizados no Apêndice C. Na Figura 7 encontra-se representado o diagrama de Bode para um conjunto entrada-saída qualquer do presente sistema.

Ao observar-se a figura, destaca-se a presença de dois acentuados picos de ganho, que correspondem justamente às frequências de ressonância ( $\omega_n$ ) registradas na Tabela 1, em frequências em torno de 5 e 6 rad/s, ocasionadas pelos polos complexos conjugados pouco amortecidos. Percebe-se, portanto, que o sistema em malha aberta é notoriamente sensível a frequências relativamente baixas.

Figura 7 – Diagrama de Bode ( $\theta_2 \times T_1$ )

Fonte: Autoria própria.

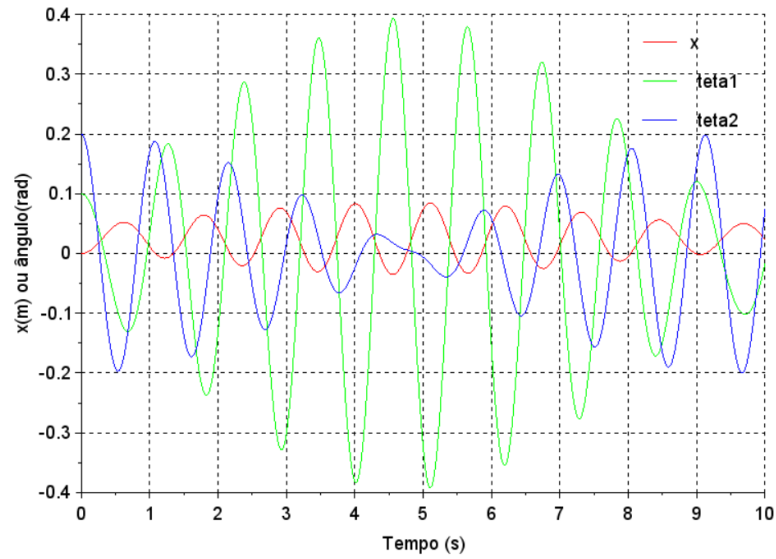
## 5.2 Matriz de Transição e Resposta no Tempo

A matriz de transição de estados é tal que pode-se obter toda a informação sobre movimentos livres do sistema definido pela equação  $\dot{X} = AX$  a partir da mesma (SEQUEIRA, 2013). Dessa forma, com a obtenção da matriz de transição, pode-se simular e prever o comportamento do vetor  $X$  do sistema ao longo do tempo, para qualquer ponto em tal vetor. Para o caso em malha aberta, pode-se visualizar a matriz de transição  $\Phi_{aberta}$  abaixo. No tocante às condições iniciais, escolheu-se arbitrariamente (dentro dos limites da linearização e de situações razoáveis) os valores  $\theta_1 = 0,1 \text{ rad}$  e  $\theta_2 = 0,2 \text{ rad}$ , com os outros parâmetros zerados, de fato simulando o Estágio de Finalização descrito na seção 2.

$$\Phi_{aberta} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0099999 & 0.00024794 & 8.2884e-07 & 3.3073e-05 & 1.1109e-07 \\ 0 & 0.99999 & 0.049573 & 0.00024839 & 0.0066156 & 3.3244e-05 \\ 0 & 9.598e-08 & 0.99831 & 0.0099944 & 0.00036353 & 1.196e-06 \\ 0 & 1.9192e-05 & -0.33709 & 0.99831 & 0.072665 & 0.00036033 \\ 0 & 1.1997e-07 & 9.9144e-05 & 3.6206e-07 & 0.99825 & 0.0099942 \\ 0 & 2.3987e-05 & 0.019817 & 0.00010544 & -0.35031 & 0.99825 \end{bmatrix}$$

Após determinação da matriz de transição, foi possível simular o comportamento do sistema, representado na Figura 8, e verificou-se que há uma demora para tendência de

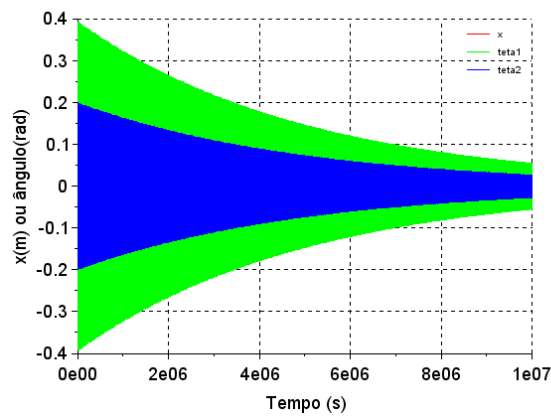
Figura 8 – Resposta no tempo para o sistema em malha aberta.



Fonte: Autoria própria

estabilidade pelo sistema. Isso condiz com os polos calculados para o sistema em malha aberta, que estão próximos do eixo imaginário, sendo, portanto, polos lentos. A Figura 9 mostra como essa tendência só pode ser observada caso a simulação seja feita com período de tempo demasiado longo, completamente incompatível com o sistema.

Figura 9 – Tendência de estabilidade para um tempo de operação muito grande.



Fonte: Autoria própria

## 6 Análise do Sistema em Malha Fechada

A este capítulo, reserva-se uma análise acerca do controle do sistema enquanto malha fechada. Para isto, de início, é crucial retomar o objetivo global do relatório e entender o que essa etapa visa agregar no mesmo. Assim, reforça-se que o objetivo definido foi a modelagem e o controle um sistema capaz de retornar à posição de espera com atuação **apenas na base**. Tal definição tem consequências importantes para o desenvolvimento do presente capítulo.

A principal é que toma-se como hipótese que, como o relatório visa o controle somente por meio da atuação na base, a única entrada que deve ser utilizada no mesmo é a força  $\vec{F}$ , uma vez que as outras entradas são aplicadas às articulações. De modo semelhante, a saída a ser observada será o deslocamento da base. Isso implica que a função de transferência  $G_{F,x}$  deve ser suficiente para controlar e observar o sistema. Tal hipótese é explicada a fundo na Seção 6.1 e validada na Seção 6.2.

Outra consequência importante é que o objetivo configura um problema de regulador, ou seja, o objetivo do controle é manter o braço no ponto estágio de espera, onde o estado é nulo. Dessa forma, uma análise de controle com acompanhamento de referência não se aplica a esse sistema, pois a referência é estática e nula a todo instante, de forma que tal análise não impactaria os estados.

### 6.1 Função de transferência relevante

Como já discutido na Seção 5.1.1, o sistema dispõe de 18 funções de transferência, que relacionam as três entradas com as seis saídas, número que extrapola a complexidade e extensão adequadas para o presente relatório. Ademais, o objetivo estabelecido a priori é definido como o desenvolvimento de um sistema para o qual o movimento de retorno a etapa de espera possa ser realizado dentro de um intervalo de convergência de linearização com atuação apenas na base do braço. Isso indica que a entrada a ser adotada deve ser a força aplicada à base, por ser a única entrada que não é aplicada às articulações do braço. Com isso em mente, toma-se como hipótese que analisar apenas a função de transferência que relaciona a entrada de força aplicada na base com a saída  $x$  já é suficiente. Tal função de transferência é explicitamente demonstrada na Equação (6.1). Outra forma de representar uma função de transferência é através de um diagrama de blocos. Para esta função, é exposto o método de função de transferência no domínio da frequência na Figura 10.



$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00112 & 4.9601 & 4.5843e-05 & 0.66135 & 1.7191e-05 \\ 0 & 1.3837e-06 & -0.0070674 & 4.9601 & -0.0010098 & 0.66135 \\ 0 & 0.011111 & -165.9863 & -0.0092086 & 12.9028 & -0.0021922 \\ 0 & -3.5386e-05 & 0.36136 & -165.9863 & 0.017196 & 12.9028 \end{bmatrix}$$

Daí, utilizando a função  $\text{rank}()$  do *Matlab*, é trivial verificar que os postos de ambas as matrizes é, de fato, 6, validando a hipótese da Seção 6.1.

## 6.3 Controle por alocação de polos e por método LQ

### 6.3.1 Parâmetros e matriz de transição para alocação de polos

Para o método de controle por alocação de polos, o sistema de realimentação em malha fechada é feito de forma que o sistema passe a possuir novos polos característicos, que irão, então, ditar o novo comportamento do sistema controlado.

Os polos forçados no sistema foram escolhidos de forma que o sistema obtivesse uma resposta mais rápida do que a resposta relativamente lenta para o caso em malha aberta, e se estabilizasse após cerca de 3 segundos, para as condições iniciais escolhidas.

Assim, a partir de testes com novos polos negativos, optou-se por escolher como os novos polos do sistema:  $(-2 \pm 6i; -3 \pm 4i; -8; -10)$ . Tais valores específicos foram escolhidos em uma análise posterior, de forma que fossem convenientes nas análises de observadores de estado, minimizando os efeitos de *overshoot*. Ainda assim, nota-se que os polos estão mais distantes do eixo imaginário do que os polos do caso em malha aberta, denotando maior velocidade de resposta do sistema.

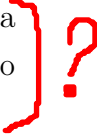
A matriz de transição para o caso em malha fechada por alocação de polos foi calculada de forma análoga ao caso em malha aberta, discutido na Seção 5.2, e pode ser vista abaixo. A diferença é que a operação de expansão em Série de Taylor é feita com a matriz  $F_{ap} = A - K_{ap}B$ , com  $K_{ap}$  sendo o vetor de ganho, calculado a partir dos novos polos e exposto na Equação (6.2).

$$K_{ap} = [686.4; 387.8; -270.0; -134.2; -295.5; 205.3] \quad (6.2)$$

$$\Phi_{alocacao} = \begin{bmatrix} 0.9950833 & 0.0072053 & 0.0020136 & 0.0009683 & 0.0023424 & -0.0014627 \\ -0.9372125 & 0.4655528 & 0.3688602 & 0.1852608 & 0.4664886 & -0.2779586 \\ 0.0084275 & 0.0047904 & 0.9952888 & 0.008336 & -0.0035953 & 0.0025085 \\ 1.6062204 & 0.9159513 & -0.8840288 & 0.6812305 & -0.7155764 & 0.4767893 \\ 0.0105337 & 0.0059875 & -0.0036844 & -0.0020725 & 0.993302 & 0.0131281 \\ 2.0074799 & 1.1447714 & -0.6641913 & -0.3961867 & -1.3350255 & 1.5937046 \end{bmatrix}$$

### 6.3.2 Parâmetros e matriz de transição para método LQ

Para o controle por método LQ, o sistema de realimentação em malha fechada é feito de forma que o sistema passe a possuir matrizes Q e R que irão, então, ditar o novo comportamento do sistema controlado, minimizando os efeitos do distúrbio do sistema e mantendo o estado próximo à origem.

Segundo Saini et al. (2012), matrizes adequadas para controle em malha fechada de um sistema do tipo podem ser  $R = I_1$  e  $Q = \alpha \cdot I_6$ , onde  $I_n$  é uma matriz identidade de ordem n e  $\alpha$  é uma constante escolhida, no caso,  $\alpha = 15$ . As operações em malha fechada referentes a tais matrizes tornaram a resposta do sistema mais rápida, alcançando a estabilidade relativamente rápido. 

Novamente, o cálculo para a obtenção da matriz de transição se deu de forma análoga à utilizada para o sistema em malha aberta. A operação de expansão em Série de Taylor é feita com a matriz  $F_{LQ} = A - K_{LQ}B$ , com  $K_{LQ}$  sendo o vetor de ganho, calculado a partir dos novos polos do sistema. As Equações (6.3) e (6.4) ilustram tais novos polos e  $K_{LQ}$ .

$$K_{LQ} = [3.873 \quad 9.845; \quad 15.268; -0.567; -21.104; -4.506] \quad (6.3)$$

$$\text{Polos}_{LQ} = [-0.4796 \pm 0.3975i; -0.8737 \pm 5.3823i; -0.2576 \pm 6.2498i] \quad (6.4)$$

$$\Phi_{LQ} = \begin{bmatrix} 0.99997 & 9.9232e-3 & 0.00012758 & 4.8374e-06 & 0.00019311 & 3.5721e-05 \\ -0.0059939 & 9.8472e-1 & 0.025487 & 0.0010052 & 0.038019 & 0.0071692 \\ 5.1651e-05 & 1.3157e-4 & 0.99852 & 0.0099875 & 8.9227e-05 & -5.9841e-05 \\ 0.010273 & 2.6184e-2 & -0.29581 & 0.99701 & 0.018846 & -0.01187 \\ 6.456e-05 & 1.6445e-4 & 0.00035699 & -8.2261e-06 & 0.99791 & 0.0099179 \\ 0.012839 & 3.2725e-2 & 0.07141 & -0.0015155 & -0.41757 & 0.98297 \end{bmatrix}$$

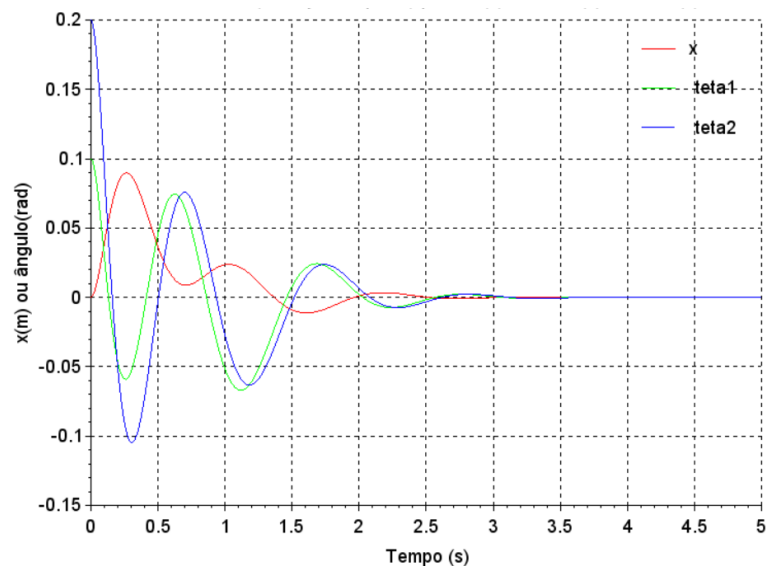
### 6.3.3 Simulação e comparação da velocidade dos sistemas em malha fechada

Após a determinação das matrizes de transição características do sistema para cada um dos casos de controle em malha fechada, foi possível simular o comportamento de resposta do sistema para condições iniciais específicas. Tais condições iniciais foram as mesmas da Seção 5.2, ou seja,  $\theta_1 = 0,1 \text{ rad}$  e  $\theta_2 = 0,2 \text{ rad}$  e os demais valores zerados.

O gráfico de resposta no tempo para o caso de controle por alocação de polos pode ser visto na Figura 11. Nota-se, como descrito anteriormente, uma tendência de estabilização do sistema após cerca de 3 segundos de oscilação. Essa grande velocidade de resposta do sistema em malha fechada se deve à alocação de polos relativamente muito à esquerda do eixo imaginário, com valores mais negativos do que os polos de malha aberta.

Já para o caso de controle por método LQ, o gráfico de resposta no tempo pode ser visto na Figura 12. Nota-se que a tendência do sistema à estabilização ocorre após cerca de 20 segundos. Tal tempo denota uma relativa rapidez de resposta do sistema, se comparado ao caso em malha aberta, extremamente lento. Tal relativa velocidade se deve aos novos polos após mudança do sistema através da introdução das matrizes Q e R, que se localizam mais distantes do eixo imaginário, se comparados ao caso em malha aberta.

Figura 11 – Resposta no tempo para o sistema em malha fechada no método de alocação de polos.



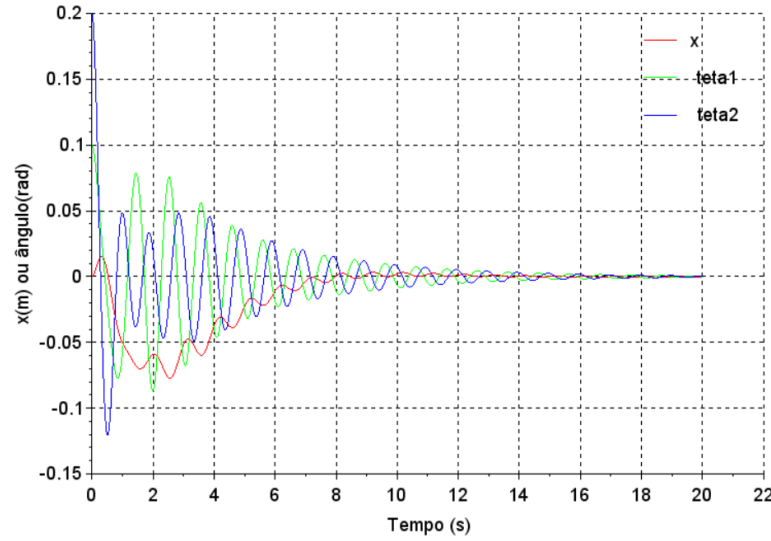
Fonte: Autoria própria

Comparando-se os dois métodos de controle em malha fechada, é possível inferir que o controle por alocação de polos é significativamente mais rápido do que o método LQ. Isso se dá pois, no controle por alocação de polos, os polos são discriminados e escolhido, ditando o comportamento do sistema de forma direta. Já no método LQ, os novos polos do sistema dependem do sistema original, de características muito lentas, e, embora tal método aumente em muitas vezes a rapidez do sistema, ainda é significativamente mais lento do que o controle por alocação de polos.

?



Figura 12 – Resposta no tempo para o sistema em malha fechada no método LQ



Fonte: Autoria própria

## 6.4 Observador de Estado

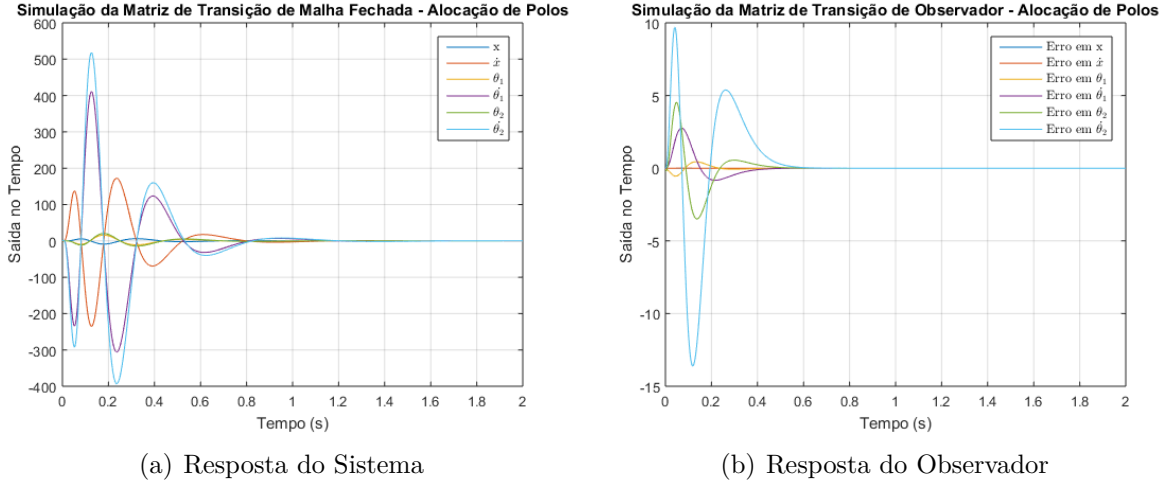
Mesmo que o sistema em malha aberta já fosse completamente controlável, faz-se necessária, ainda, a presença de um observador de estados para que se possa estimar os demais estados e, a partir disso, aplicar o ganho de controle a eles. Tal ferramenta pode ser implementada por alocação de polos ou pelo método LQ, independente dos ganhos de controle já projetados, graças ao princípio da separação. Pode-se, então, simular o comportamento do sistema com a ferramenta da matriz de transição já apresentada e utilizando também a matriz  $\Lambda$  descrita na Equação (6.5).

$$\Lambda = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_O C \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Com isso, tentou-se inicialmente elaborar o observador/regulador utilizando os polos previamente alocados anteriormente e alocando os polos de observação arbitrariamente à esquerda deles ( $\mu_1 = -21$ ,  $\mu_2 = -26$ ,  $\mu_3 = -31$ ,  $\mu_4 = -36$ ,  $\mu_5 = -41$ ,  $\mu_6 = -46$ ), comparando esse caso com os polos de ambos controlador e observador obtidos a partir do método LQ. Os resultados das simulações em matriz de transição encontram-se nas Figuras 13 e 14.

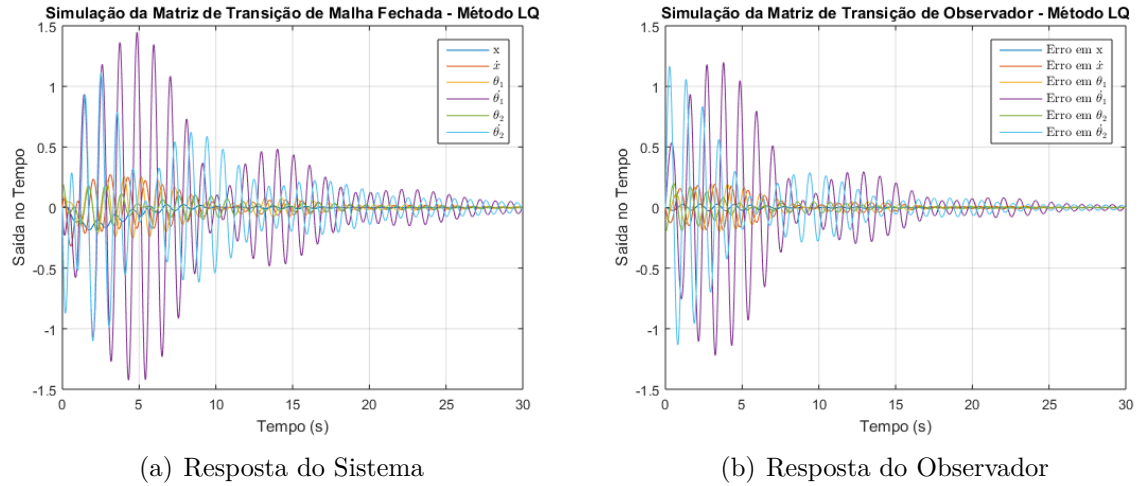
Com as Figuras 13 e 14, observa-se que, para o caso do método LQ o sistema acaba por ser demasiadamente lento e, portanto, inadequado à operação desejada. Quanto à alocação de polos, por mais que o tempo do sistema esteja extremamente adequado, o aumento do *overshoot* é preocupante na medida em que ultrapassa os limites do atuador e da linearização, não sendo também adequado. A análise dos autovalores de ambos os casos ratifica o princípio da separação, já que se tratam justamente dos polos separados

Figura 13 – Resposta no tempo do sistema com observador e polos originais.



Fonte: Autoria própria

Figura 14 – Resposta no tempo do sistema com observador pelo método LQ.

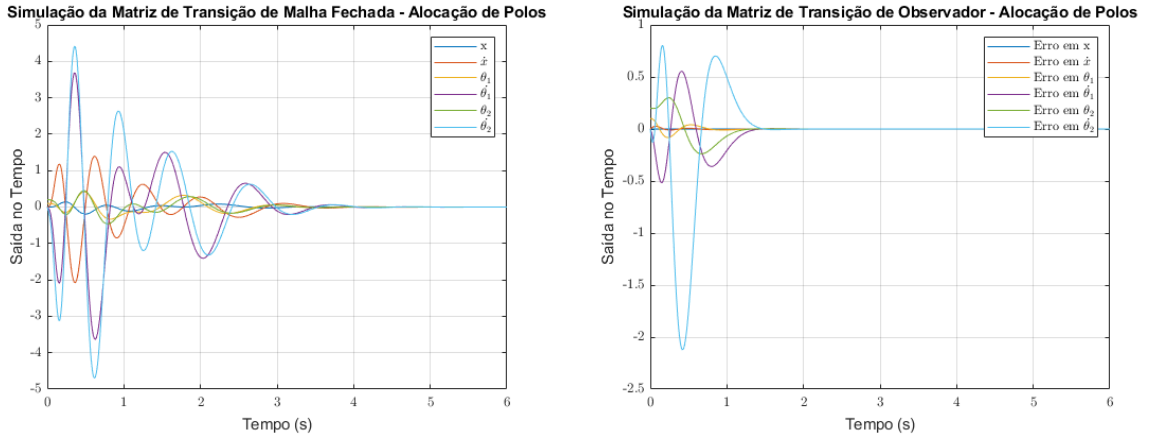


Fonte: Autoria própria

do controlador e do observador.

Dessa forma, fez-se necessária a realocação dos polos do controlador e do observador para que se obtivesse um resultado aceitável, chegando a, respectivamente,  $\lambda_{1,2} = -2 \pm 6i$ ,  $\lambda_{3,4} = -3 \pm 4i$ ,  $\lambda_5 = -8$ ,  $\lambda_6 = -10$  e  $\mu_{1,2} = -6 \pm 4i$ ,  $\mu_{3,4} = -8 \pm i$  e  $\mu_{5,6} = -10 \pm 2i$ , obtendo-se os resultados apresentados na Figura 15. Dessa forma, obteve-se um tempo de parada aceitável (em torno de 4s) sem que isso provocasse um *overshoot* que atrapalhasse o bom funcionamento do sistema.

Figura 15 – Resposta no tempo do sistema com observador pelo método alocação de polos com novos polos.



(a) Resposta do Sistema

(b) Resposta do Observador

Fonte: Autoria própria

## 6.5 Sensores e Atuadores Necessários

Como já apresentado, o sistema é observável e controlável com aplicação de apenas um atuador e um sensor de posição na base do sistema. A determinação destes equipamentos foi realizada a partir das respostas obtidas nos controles por alocação de polos e LQ com observador.

Para dimensionamento do motor, foi estimada a força máxima que seria demandada do motor, a partir dos valores máximos de  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{\theta}_1$  e  $\ddot{\theta}_2$ , estudando os casos de maior demanda do atuador. Na resposta do sistema apresentada na Figura 16(a), observa-se o caso mais crítico, na qual a base atinge uma velocidade  $1,18 \text{ m/s}$  em aproximadamente  $0,018 \text{ s}$ . Dessa forma, o corpo adquire uma aceleração média de aproximadamente  $66 \text{ m/s}^2$ , a qual será utilizada para definição dos demais parâmetros de forma aproximada e com margem de segurança:

$$F_{max} = (M + 2m) \cdot 66 = 8 \cdot 66 = 528 \text{ N}$$

$$P_{max} = |v_{max}| \cdot F_{max} = 1,32 \cdot 528 = 696,96 \text{ W} = 0,9476 \text{ cv}$$

$$\omega_{max} = \frac{v_{max}}{r_{rodas}} = \frac{1,32}{0,01} = 132 \text{ rad/s} = 1243,32 \text{ rpm}$$

Com tais informações, buscou-se um motor da fabricante WEG®, já conhecida pelo grupo. Dentre os modelos avaliados, foi escolhido o modelo apresentado na Figura 16, cujas características são observadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Características do Motor

Norma	ABNT NBR 17094	Potência	1cv
Frequência	60 Hz	Fixação	com pés
Tensão	127/220 V	Flange	FC 149
Nº de Polos	2	Forma Construtiva	B34D
Rotação síncrona	3600 rpm	Grau de Proteção	IP21

Fonte: Autoria própria.

Para determinação do sensor aplicado à base, escolheu-se um modelo de sensor de movimento linear que se adequasse à precisão necessária e ao deslocamento máximo da base. Novamente, observando as respostas da Figura 16(a), observou-se uma variação máxima menor que 30 cm. Assim, optou-se pelo modelo da Atek® apresentado na Figura 16, cujas características podem ser observadas na Tabela 4.

Tabela 4 – Características do Sensor

Curso de Medição	500 mm	Resolução	0,01 mm
Saída de Sinal	Potenciométrica	Vida útil	100 mi movimentos

Fonte: Autoria própria.

Figura 16 – Motor 1 cv D56C - WEG® e Sensor Linear LTC - Atek



Fonte: WEG e Metrolog.

## 7 Conclusão

O presente relatório se dispôs a analisar o sistema proposto de um robô para aplicação ao jogo de tênis de mesa mediante diversos aspectos. O objetivo holístico de tal análise se baseia na proposta de controle de tal sistema com atuação apenas na base. Ao longo do trabalho, obteve-se um importante avanço nessa direção.

Inicialmente, foi realizada a modelagem completa do sistema, tanto matemática quanto física, resultando em equações analíticas não lineares e acopladas que geraram, após um processo de linearização, a representação do modelo em espaço de estados.

A partir disto, o estudo acerca do controle de tal sistema se deu de forma mais intensa, a começar pela análise do sistema em malha aberta. Tal análise apontou que o modelo era marginalmente estável, com polos ditos lentos, fato que não é conclusão imediata e intuitiva tirada do sistema, mas que pode ser explicado pela possibilidade da posição horizontal  $x$  oscilar em torno de um ponto qualquer, dado que se encontra sobre uma reta horizontal.

Em seguida, foi realizada a análise em malha fechada, adotando alguns métodos distintos. Para isto, adotou-se como hipótese a ser validada possibilidade de controlar e observar o sistema analisando apenas a função de transferência  $G_{(F,x)}$  que relaciona a força aplicada a base  $\vec{F}$  com a posição horizontal  $x$ . Um estudo de observabilidade e controlabilidade do sistema validou tal hipótese, com a qual foi obtida resultados importantes para a concretização do objetivo.

Inicialmente, comparou-se os métodos de alocação de polos e linear quadrático, obtendo resultados condizentes com a realidade, sendo o método de alocação mais rápido e adequado para o sistema. Em seguida, diante da necessidade de um observador de estado para estimação dos estados de entrada, os métodos de alocação e LQ foram novamente utilizados porém com o acréscimo de um observador, novamente indicando que o método de alocação é mais condizente com a realidade. Ademais, essa análise gera os polos adequados para serem utilizados no processo de alocação e, com isso, pôde-se escolher com certo grau de confiança os sensores e atuadores adequados para o sistema, concluindo importante estágio no controle do mesmo.

Dado isso, têm-se como próxima etapa, a ser desenvolvida em um próximo relatório, é o aperfeiçoamento de tal sistema, utilizando técnicas de controle clássico a serem trabalhadas na disciplina.

# Referências Bibliográficas

- ACOSTA L.; MARICHAL, G. M. J. R. J. S. M. Ping-Pong Player Prototype. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 2003. Citado na página 2.
- Andersson, R. L. Dynamic sensing in a ping-pong playing robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 5, n. 6, p. 728–739, Dec 1989. ISSN 2374-958X. Citado na página 2.
- BARRETT. *Inertial Data for the WAM arm*. 2008. Catalogue. Citado na página 15.
- BODE, H. W. Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design. *The Bell System Technical Journal*, Nokia Bell Labs, v. 19, n. 3, p. 421–454, 1940. Citado na página 19.
- CRAIG, J. J. *Introduction to Robotics - Mechanics and Control*. [S.l.: s.n.], 2005. 1410-1415 p. Citado na página 3.
- EL-MARHOMY, A. A.; ABDEL-SATTAR, N. E. Stability analysis of rotor-bearing systems via routh-hurwitz criterion. *Applied Energy*, Elsevier, v. 77, n. 3, p. 287–308, 2004. Citado na página 18.
- FRANÇA, L.; MATSUMURA, A. *Mecânica geral*. Edgard Blücher, 2011. ISBN 9788521203414. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=IUnSAwAACAAJ>>. Citado na página 10.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 7th. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall Press, 2014. ISBN 0133496597, 9780133496598. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 18.
- HASHIMOTO, H. et al. Development Of A Pingpong Robot System Using 7 Degrees Of Freedom Direct Drive Arm. In: ABRAMOVICH, A. (Ed.). *IECON '87: Industrial Applications of Robotics Machine Vision*. SPIE, 1987. v. 0856, p. 608 – 615. Disponível em: <<https://doi.org/10.1117/12.943016>>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- KULAKOWSKI, B.; GARDNER, J.; SHEARER, J. *Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9781139464239. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=9bforCnE8HUC>>. Citado na página 17.
- MATSUSHIMA, M. et al. A learning approach to robotic table tennis. *IEEE Transactions on Robotics*, v. 21, n. 4, p. 767–771, Aug 2005. ISSN 1941-0468. Citado na página 1.
- MULLIN JENS KOBE, J. P. K. A biomimetic approach to robot table tennis. *Adaptive Behavior*, p. 359–376, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.
- MÜLLING, K.; PETERS, J. A computational model of human table tennis for robot application. In: DILLMANN, R. et al. (Ed.). *Autonome Mobile Systeme 2009*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 57–64. ISBN 978-3-642-10284-4. Citado 3 vezes nas páginas 1, 8 e 9.

- NAKASHIMA, A. et al. Hitting back-spin balls by robotic table tennis system based on physical models of ball motion. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 45, n. 22, p. 834 – 841, 2012. ISSN 1474-6670. 10th IFAC Symposium on Robot Control. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016337132>>. Citado na página 3.
- NAKASHIMA, A. et al. Robotic table tennis based on physical models of aerodynamics and rebounds. *2011 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, p. 2348–2354, 2011. Citado na página 3.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Prentice Hall do Brasil, 1982. ISBN 9788587918239. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=fXmIPQAACAAJ>>. Citado 4 vezes nas páginas 13, 17, 18 e 23.
- Ogren, P.; Egerstedt, M.; Hu, X. A control lyapunov function approach to multi-agent coordination. v. 2, p. 1150–1155 vol.2, 2001. Citado na página 12.
- PARASKEVOPOULOS, P. N. *Modern Control Engineering*. 3th. ed. [S.l.]: Marcel DEkker, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- RAMANANTSOA M., D. A. Towards a stroke construction model. *Journal of Table Tennis Science* 2, 1994. Citado na página 4.
- SABER FERAT SAHIN, K. P. M. E. An Application of Human Robot Interaction: Development of a Ping-Pong Playing Robotic Arm. 2005. Citado na página 2.
- Saini, S. C. et al. Comparison of pole placement and lqr applied to single link flexible manipulator. p. 843–847, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 25.
- SEQUEIRA, J. L. Sistema para a verificação lógica de controle. *FEUP - Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto*, p. 4, Dez. 2013. Citado na página 20.

## Apêndices



# APÊNDICE A – Códigos

## A.1 Simulações em Malha Aberta

```

1 %%Espaço de estados
2 clear; close all; clc;
3
4 m = 2;
5 Mbase = 6;
6 L = 0.5;
7 c = 8.5e-5;
8 b = 7.12e-3;
9 g = 9.81;
10
11 M = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
      0, 1, 0, 0, 0; 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 1,
      0; 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
12
13 I = eye(6);
14
15 Minv = I/M;
16
17 Atil = [0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, -b*L, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, -3*m
      *L*g/2, -c, -m*L*g/2, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
18
19 Btil = [0;L;0;0;0;0];
20
21 A = Minv*Atil;
22
23 B = Minv*Btil;
24
25 C = [1,0,0,0,0,0];
26
27 D = 0;
28
29 ee = ss(A,B,C,D);
30
31 %% Matriz de Controlabilidade
32 Cont = ctrb(A,B);
33 Posto = rank(Cont);
34
35 %% Matriz de Observabilidade
36 Ob = obsv(A,C);
37 Posto2 = rank(Ob);

```

```

38
39 %%% Matriz de Transição
40 Dt = 0.01;
41 Phi = expm(A*Dt);
42 ti = 0;
43 tf = 10;
44 t = ti:Dt:tf;
45 x = zeros(size(t));
46 x(1,1) = 0;
47 x(2,1) = 0;
48 x(3,1) = 0.1;
49 x(4,1) = 0;
50 x(5,1) = 0.2;
51 x(6,1) = 0;
52
53 for i=1:(tf/Dt)
54     x(:,i+1) = Phi*x(:,i);
55 end
56
57 p = pole(ee);
58
59 %%% Plots
60 figure
61 plot(p, 'x')
62 axis([-0.001 0 -7 7])
63 xlabel('Re')
64 ylabel('Im')
65 title('Polos do Sistema em Malha Aberta')
66
67 figure
68 plot(t,x)
69 xlabel('Tempo (s)')
70 ylabel('Saída no Tempo')
71 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Aberta')
72 legend('x', '$\dot{x}$', '$\theta_1$', '$\dot{\theta}_1$', '$\theta_2$', '$\dot{\theta}_2$')
73
74 figure
75 rlocus(ee)
76 sgrid
77 axis([-0.5 0.5 -8 8])
78 title('Lugar das raízes para o sistema')
79 xlabel('Re')
80 ylabel('Im')

```

## A.2 Simulações em Malha Fechada

```

1 clear; close all; clc;
2
3 %%% Deixa os eixos em LaTeX
4 set(groot, 'defaultLegendInterpreter','latex');
5
6 %%% Parametros
7 m = 2;
8 Mbase = 6;
9 L = 0.5;
10 c = 8.5e-5;
11 b = 7.12e-3;
12 g = 9.81;
13
14 %%% Espaco de estados
15
16 M = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
      0, 1, 0, 0, 0; 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 1,
      0; 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
17
18 I = eye(6);
19
20 Minv = I/M;
21
22 Atil = [0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, -b*L, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, -3*m
      *L*g/2, -c, -m*L*g/2, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
23
24 Btil = [0;L;0;0;0;0];
25
26 A = Minv*Atil;
27
28 B = Minv*Btil;
29
30 C = [1,0,0,0,0,0];
31
32 D = 0;
33
34 ee = ss(A,B,C,D); % Espaço de Estados de malha aberta
35
36 %%% Ganhos de Controle por alocação
37 %%% Polos desejados
38 polos = [-4+6*1i, -4-6*1i, -5, -10, -15, -20]; % Primeira Alocação
39 polos_v2 = [-2+6*1i, -2-6*1i, -3+4*1i, -3-4*1i, -8, -10]; % Segunda
40
41 %%% Alocação
42 K = place(A,B,polos);
43 K_v2 = place(A,B,polos_v2);

```

```

44 F = A - B*K;
45 F_v2 = A - B*K_v2;
46 ee_fechada = ss(F,B,C,D); % Espaço de estados por alocação
47 ee_fechada_v2 = ss(F_v2,B,C,D); % Segundo Espaço
48
49 %%% Controle LQ
50 Q = diag([15, 15, 15, 15, 15, 15]); %Ref no relatório
51 R = 1;
52 Klq = lqr(ee,Q,R);
53 Flq = A - B*Klq;
54 ee_LQ = ss(Flq,B,C,D); % Espaço de estados por LQ
55
56 %%% Alocação do Observador
57 polos_ob = [-21, -26, -31, -36, -41, -46]; % Primeira alocação observ
58 polos_ob_v2 = [-6+4*i, -6-4*i, -8+8*i, -8-8*i, -10+2*i, -10-2*i]; %
    Segunda
59 Ko = (place(A',C',polos_ob))';
60 Ko_v2 = (place(A',C',polos_ob_v2))';
61
62 %%% Observador LQ
63 Qo = diag([5, 5, 5, 5, 5, 5]);
64 Ro = 1;
65 Ko_lq = (lqr(A',C',Qo,Ro))';
66
67 %%% Composição de Lambda
68 L11 = A - B*K;
69 L12 = B*K;
70 L21 = zeros(6);
71 L22 = A - Ko*C;
72 La = [ L11 , L12 ; L21 , L22 ] ;
73
74 %%% Lambda Segunda Alocação
75 L11_v2 = A - B*K_v2;
76 L12_v2 = B*K_v2;
77 L21_v2 = zeros(6);
78 L22_v2 = A - Ko_v2*C;
79 La_v2 = [L11_v2 L12_v2; L21_v2 L22_v2];
80
81 %%% Lambda LQ
82 L11_lq = A - B*Klq;
83 L12_lq = B*Klq;
84 L21_lq = L21;
85 L22_lq = A - Ko_lq*C;
86 L_lq = [L11_lq, L12_lq; L21_lq, L22_lq];
87
88
89 %%% Matrizes de Transição

```

```

90 Dt = 0.01;
91 Phi = expm(F*Dt);
92 Phi_LQ = expm(Flq*Dt);
93 Phi_lambda = expm(La*Dt);
94 Phi_lambda_lq = expm(L_lq*Dt);
95 Phi_lambda_v2 = expm(La_v2*Dt);
96 ti = 0;
97 tf = 20;
98 t = ti:Dt:tf;
99 x = zeros(size(t));
100 xo = x;
101 %%% Estado com observador
102 x(1,1) = 0;
103 x(2,1) = 0;
104 x(3,1) = 0.1;
105 x(4,1) = 0;
106 x(5,1) = 0.2;
107 x(6,1) = 0;
108 %%% Estado com observador
109 xo(1,1) = 0;
110 xo(2,1) = 0;
111 xo(3,1) = 0.1;
112 xo(4,1) = 0;
113 xo(5,1) = 0.2;
114 xo(6,1) = 0;
115 %%% Observador
116 xo(7,1) = x(1,1) - 0;
117 xo(8,1) = x(2,1) - 0;
118 xo(9,1) = x(3,1) - 0;
119 xo(10,1) = x(4,1) - 0;
120 xo(11,1) = x(5,1) - 0;
121 xo(12,1) = x(6,1) - 0;
122
123 x_LQ = x;
124 xo_LQ = xo;
125 xo_v2 = xo;
126
127 for i=1:(tf/Dt)
128     x(:,i+1) = Phi*x(:,i);
129     x_LQ(:,i+1) = Phi_LQ*x_LQ(:,i);
130     xo(:,i+1) = Phi_lambda*xo(:,i);
131     xo_LQ(:,i+1) = Phi_lambda_lq*xo_LQ(:,i);
132     xo_v2(:,i+1) = Phi_lambda_v2*xo_v2(:,i);
133 end
134
135 %%% Plots das matrizes de transição
136

```

```

137 %%% Com Observ v1
138 figure
139 plot(t,xo(1:6,:))
140 grid on
141 xlabel('Tempo (s)')
142 ylabel('Saída no Tempo')
143 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de
      Polos')
144 legend('x','$\dot{x}$','$\theta_1$','$\dot{\theta}_1$','$\theta_2$','$\dot{\theta}_2$')
145
146 figure
147 plot(t,xo(7:12,:))
148 grid on
149 xlabel('Tempo (s)')
150 ylabel('Saída no Tempo')
151 title('Simulação da Matriz de Transição de Observador – Alocação de Polos')
152 legend('Erro em x','Erro em $\dot{x}$','Erro em $\theta_1$','Erro em $\dot{\theta}_1$','Erro em $\theta_2$','Erro em $\dot{\theta}_2$')
153
154 %%% Com Observ LQ
155 figure
156 plot(t,xo_LQ(1:6,:))
157 grid on
158 xlabel('Tempo (s)')
159 ylabel('Saída no Tempo')
160 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Método LQ')
161 legend('x','$\dot{x}$','$\theta_1$','$\dot{\theta}_1$','$\theta_2$','$\dot{\theta}_2$')
162
163 figure
164 plot(t,xo_LQ(7:12,:))
165 grid on
166 xlabel('Tempo (s)')
167 ylabel('Saída no Tempo')
168 title('Simulação da Matriz de Transição de Observador – Método LQ')
169 legend('Erro em x','Erro em $\dot{x}$','Erro em $\theta_1$','Erro em $\dot{\theta}_1$','Erro em $\theta_2$','Erro em $\dot{\theta}_2$')
170
171 %%% Com Observ v2
172 figure
173 plot(t,xo_v2(1:6,:))
174 grid on
175 xlabel('Tempo (s)')
176 ylabel('Saída no Tempo')
177 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de
      Polos v2')

```

```

178 legend('x', '$\dot{x}$', '$\theta_1$', '$\dot{\theta}_1$', '$\theta_2$', '$\dot{\theta}_2$')
179
180 figure
181 plot(t, xo_v2(7:12,:))
182 grid on
183 xlabel('Tempo (s)')
184 ylabel('Saída no Tempo')
185 title('Simulação da Matriz de Transição de Observador – Alocação de Polos
v2')
186 legend('Erro em x', 'Erro em $\dot{x}$', 'Erro em $\theta_1$', 'Erro em $\dot{\theta}_1$',
'Erro em $\theta_2$', 'Erro em $\dot{\theta}_2$')
187
188 %%% Sem observador
189 figure
190 plot(t, x)
191 grid on
192 xlabel('Tempo (s)')
193 ylabel('Saída no Tempo')
194 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de
Polos')
195 legend('x', '$\dot{x}$', '$\theta_1$', '$\dot{\theta}_1$', '$\theta_2$', '$\dot{\theta}_2$')
196
197 figure
198 plot(t, x_LQ)
199 grid on
200 xlabel('Tempo (s)')
201 ylabel('Saída no Tempo')
202 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Método LQ')
203 legend('x', '$\dot{x}$', '$\theta_1$', '$\dot{\theta}_1$', '$\theta_2$', '$\dot{\theta}_2$')
204
205 %%% Salva as matrizes de Transição em formato LaTeX
206 % matriz_latex(Phi, 'Phi.txt')
207 % matriz_latex(Phi_LQ, 'Phi_LQ.txt')
208 % matriz_latex(Phi_lambda, 'Phi_lambda.txt')
209 % matriz_latex(Phi_lambda_lq, 'Phi_lambda_lq.txt')
210 % matriz_latex(Phi_lambda_v2, 'Phi_lambda_v2.txt')
211
212 % %DESCOMENTAR PARA VER O VIDEO DO LQ
213 % x = x_LQ;
214 % %DESCOMENTAR PARA VER O VIDEO DO OBSERVADOR 1
215 % x = xo;
216 % %DESCOMENTAR PARA VER O VIDEO DO OBSERVADOR LQ
217 % x = xo_LQ;
218 % %DESCOMENTAR PARA VER O VIDEO DO OBSERVADOR 2

```

```

219 % x = xo_v2;
220
221 %%% Vídeo da Animação
222 xA = x(1,:);
223 yA = zeros(1,length(xA));
224 yA = yA + 2;
225 xB = xA + L*sin(x(3,:));
226 yB = yA - L*cos(x(3,:));
227 xC = xB + L*sin(x(5,:));
228 yC = yB - L*cos(x(5,:));
229 n=length(xA);
230 v = VideoWriter('C:\Users\Lucas Paiva\Documents\USP\Trabalhos\Controle\T1\
    Matlabs\GIF_aloc.avi');
231 v.Quality = 95;
232 open(v);
233 for i=1:n
234 Pxa = [ xA(i), xB(i) ];
235 Pya = [ yA(i), yB(i) ];
236 Pxb = [ xB(i), xC(i) ];
237 Pyb = [ yB(i), yC(i) ];
238 PC1 = [ xA(i)+0.15 , xA(i)+0.15];
239 PC2 = [ yA(i)+0.03 , yA(i)-0.03];
240 PC3 = [ xA(i)+0.15 , xA(i)-0.15];
241 PC4 = [ yA(i)+0.03 , yA(i)+0.03];
242 PC5 = [ xA(i)-0.15 , xA(i)-0.15];
243 PC6 = [ yA(i)+0.03 , yA(i)-0.03];
244 PC7 = [ xA(i)+0.15 , xA(i)-0.15];
245 PC8 = [ yA(i)-0.03 , yA(i)-0.03];
246 plot(xA, yA, xA(i),yA(i),'o', xB, yB, xB(i),yB(i),'o', xC, yC, xC(i),yC(i),
    'o')
247 axis([-0.6 0.6 0.9 2.1])
248 grid on
249 line(Pxa,Pya)
250 line(Pxb,Pyb)
251 line(PC1, PC2)
252 line(PC3, PC4)
253 line(PC5, PC6)
254 line(PC7, PC8)
255 frame = getframe(gcf);
256 writeVideo(v,frame);
257 end
258 close(v)

```



# APÊNDICE B – Funções de Transferência

$$G_{F,x} = \frac{0.1573s^4 - 3.438e^{-05}s^3 + 9.259s^2 - 0.0006746s + 116.8}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.1)$$

$$G_{F,\dot{x}} = \frac{0.1573s^4 - 3.438e - 05s^3 + 9.259s^2 - 0.0006746s + 116.8}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.2)$$

$$G_{F,\theta_1} = \frac{-0.2697s^4 + 0.0002751s^3 - 11.9s^2 + 1.052e - 18s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.3)$$

$$G_{F,\dot{\theta}_1} = \frac{-0.2697s^4 + 0.0002751s^3 - 11.9s^2 + 1.047e - 18s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.4)$$

$$G_{F,\theta_2} = \frac{-0.3371s^4 - 0.0003438s^3 - 11.9s^2 + 2.664e - 18s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.5)$$

$$G_{F,\dot{\theta}_2} = \frac{-0.3371s^4 - 0.0003438s^3 - 11.9s^2 + 2.662e - 18s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.6)$$

$$G_{T_1,x} = \frac{-0.3371s^4 + 0.0001375s^3 - 11.9s^2 - 2.118e - 10s - 1.496e - 13}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.7)$$

$$G_{T_1,\dot{x}} = \frac{-0.3371s^4 + 0.0001375s^3 - 11.9s^2 + 5.8e - 13s - 1.77e - 14}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.8)$$

$$G_{T_1,\theta_1} = \frac{2.292s^4 + 0.0005447s^3 + 79.36s^2 + 0.05651s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.9)$$

$$G_{T_1,\dot{\theta}_1} = \frac{2.292s^4 + 0.0005447s^3 + 79.36s^2 + 0.05651s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.10)$$

$$G_{T_1,\theta_2} = \frac{-0.1348s^4 + 0.0004153s^3 + 9.792e - 07s^2 + 7.654e - 19s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.11)$$

$$G_{T_1,\dot{\theta}_2} = \frac{-0.1348s^4 + 0.0004153s^3 + 9.792e - 07s^2 + 4.513e - 19s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.12)$$

$$G_{T_2,x} = \frac{0.2022s^4 - 6.876e - 05s^3 + 1.738e - 13s^2 + 4.75e - 09s + 3.24e - 12}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.13)$$

$$G_{T_2,\dot{x}} = \frac{0.2022s^4 - 6.876e - 05s^3 - 4.309e - 15s^2 + 5.957e - 12s - 4.415e - 13}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.14)$$

$$G_{T_2,\theta_1} = \frac{-3.775s^4 - 0.00384s^3 - 79.36s^2 - 0.05651s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.15)$$

$$G_{T_2,\dot{\theta}_1} = \frac{-3.775s^4 - 0.00384s^3 - 79.36s^2 - 0.05651s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.16)$$

$$G_{T_2,\theta_2} = \frac{7.281s^4 + 0.01002s^3 + 238.1s^2 + 0.1695s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.17)$$

$$G_{T_2,\dot{\theta}_2} = \frac{7.281s^4 + 0.01002s^3 + 238.1s^2 + 0.1695s}{s^6 + 0.001017s^5 + 68.78s^4 + 0.05918s^3 + 1168s^2 + 0.8315s} \quad (B.18)$$

## Zeros das FT's

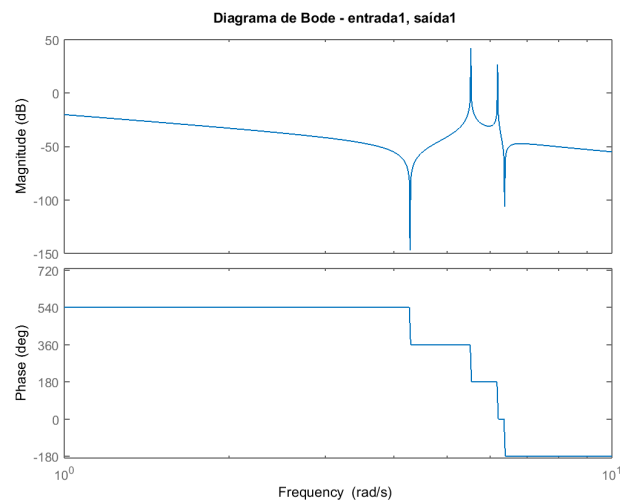
Tabela 5 – Zeros das funções de transferência

	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$g_{11}$	0.00010283-6.3682i	0.00010283+6.3682i	6.4524e-06-4.2786i	6.4524e-06+4.2786i
$g_{12}$	0.000204-5.9427i	0.000204+5.9427i	-8.8949e-12-1.1211e-07i	-8.8949e-12+1.1211e-07i
$g_{13}$	0.0017494-0.0025051i	0.0017494+0.0025051i	-0.0024616	-0.00069717
$g_{21}$	0.00010283-6.3682i	0.00010283+6.3682i	6.4524e-06-4.2786i	6.4524e-06+4.2786i
$g_{22}$	0.000204-5.9427i	0.000204+5.9427i	2.4359e-14-3.8558e-08i	2.4359e-14+3.8558e-08i
$g_{23}$	0.001305	8.9155e-05-0.0012063i	8.9155e-05+0.0012063i	-0.0011433
$g_{31}$	0.00051-6.6442i	0.00051+6.6442i	8.8377e-20	0
$g_{32}$	0.00023718-5.8842i	0.00023718+5.8842i	-0.000712	0
$g_{33}$	-0.00015257-4.5849i	-0.00015257+4.5849i	-0.000712	0
$g_{41}$	0	0.00051-6.6442i	0.00051+6.6442i	8.7923e-20
$g_{42}$	0	0.00023718-5.8842i	0.00023718+5.8842i	-0.000712
$g_{43}$	0	-0.00015257-4.5849i	-0.00015257+4.5849i	-0.000712
$g_{51}$	-0.00051-5.9427i	-0.00051+5.9427i	2.2381e-19	0
$g_{52}$	0.0046439	-0.0015639	-7.8162e-13	0
$g_{53}$	-0.00033178-5.7184i	-0.00033178+5.7184i	-0.000712	0
$g_{61}$	0	-0.00051-5.9427i	-0.00051+5.9427i	2.2362e-19
$g_{62}$	0	0.0046439	-0.0015639	-4.609e-13
$g_{63}$	0	-0.00033178-5.7184i	-0.00033178+5.7184i	-0.000712

# APÊNDICE C – Diagramas de Bode em Malha Aberta

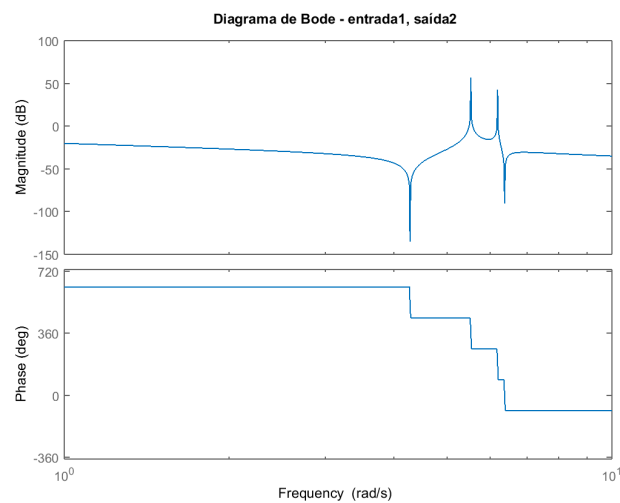
Diagramas de Bode para a entrada F:

Figura 17 – Diagrama de Bode -  $x$ , F

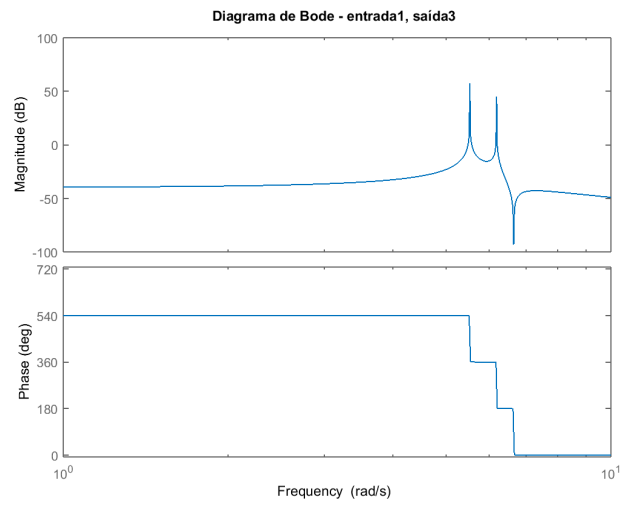


Fonte: Autoria própria.

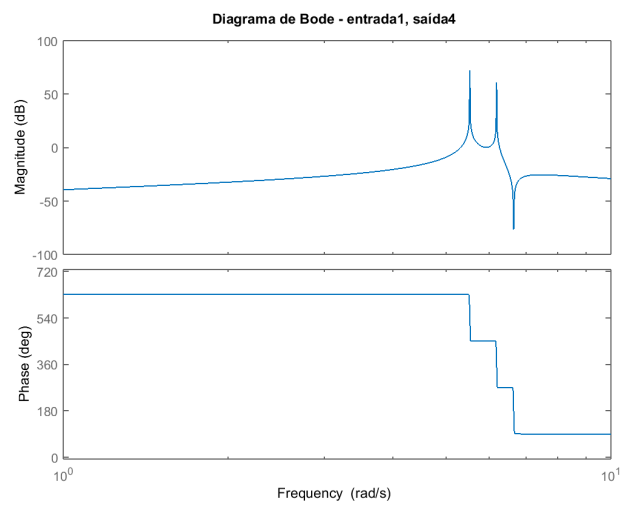
Figura 18 – Diagrama de Bode -  $\dot{x}$ , F



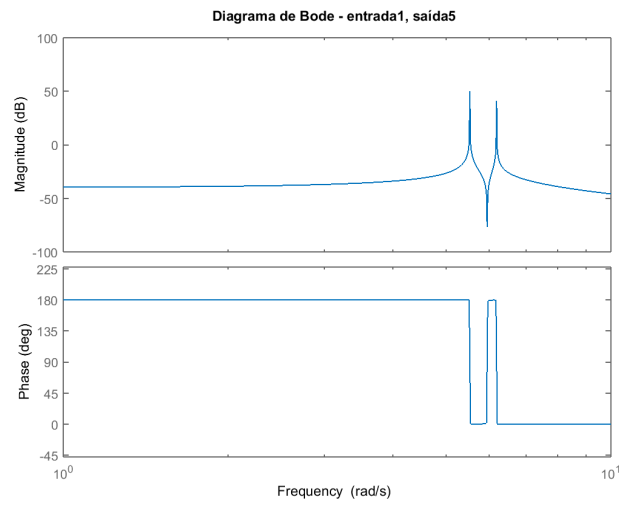
Fonte: Autoria própria.

Figura 19 – Diagrama de Bode -  $\theta_1$ , F

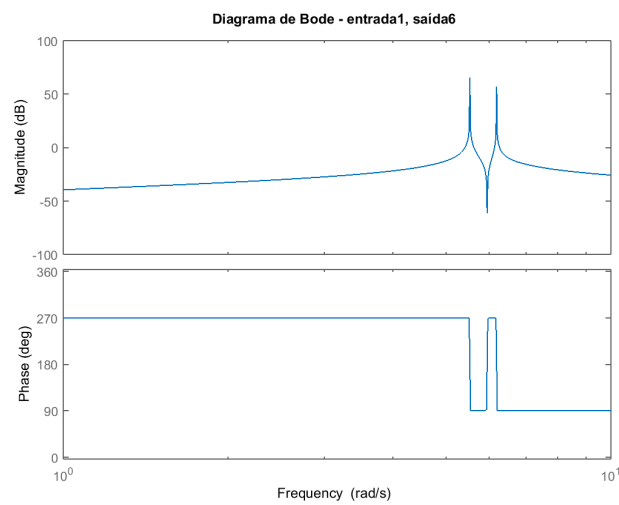
Fonte: Autoria própria.

Figura 20 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_1$ , F

Fonte: Autoria própria.

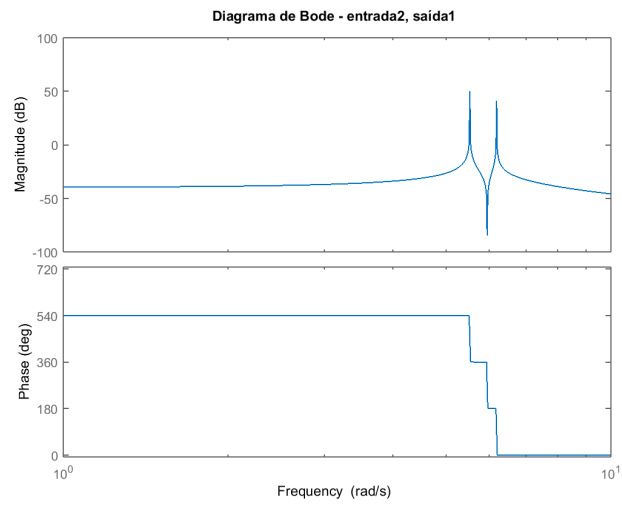
Figura 21 – Diagrama de Bode -  $\theta_2$ , F

Fonte: Autoria própria.

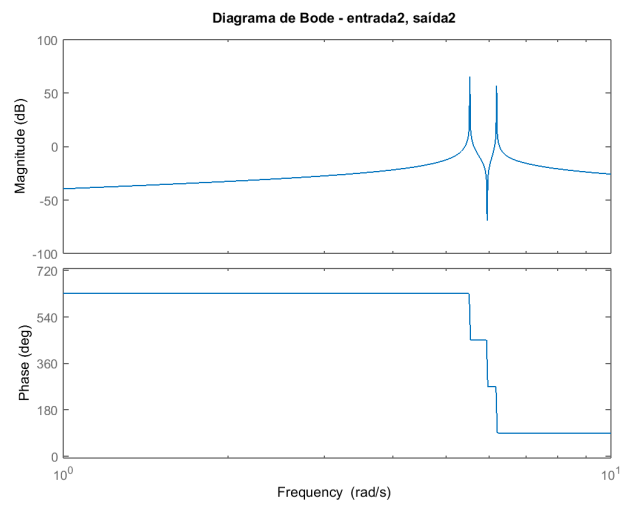
Figura 22 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_2$ , F

Fonte: Autoria própria.

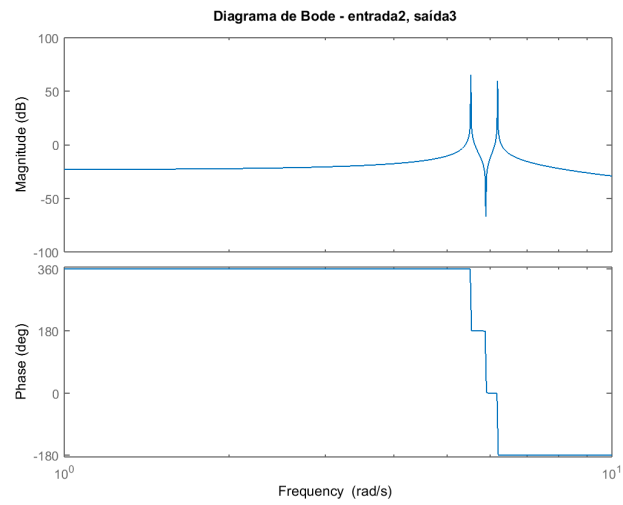
Diagramas de Bode para a entrada  $T_1$ :

Figura 23 – Diagrama de Bode -  $x, T_1$ 

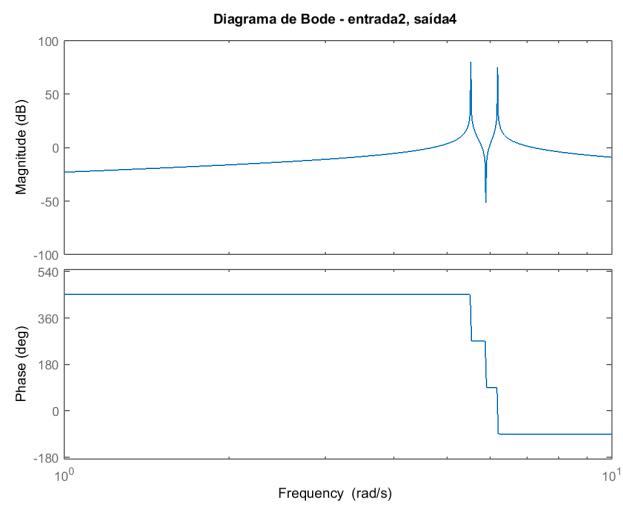
Fonte: Autoria própria.

Figura 24 – Diagrama de Bode -  $\dot{x}, T_1$ 

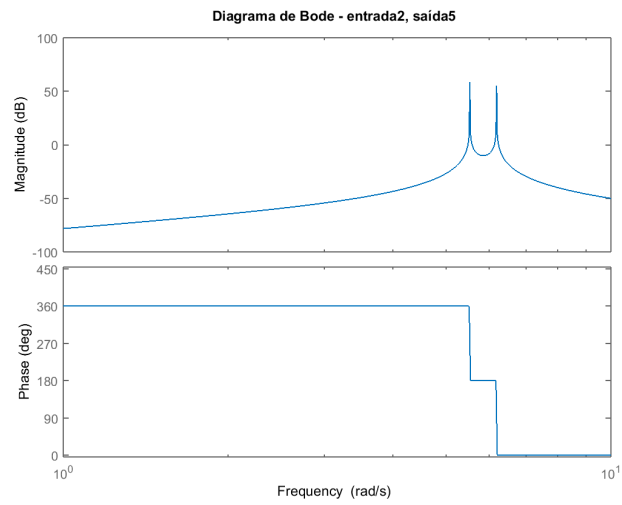
Fonte: Autoria própria.

Figura 25 – Diagrama de Bode -  $\theta_1, T_1$ 

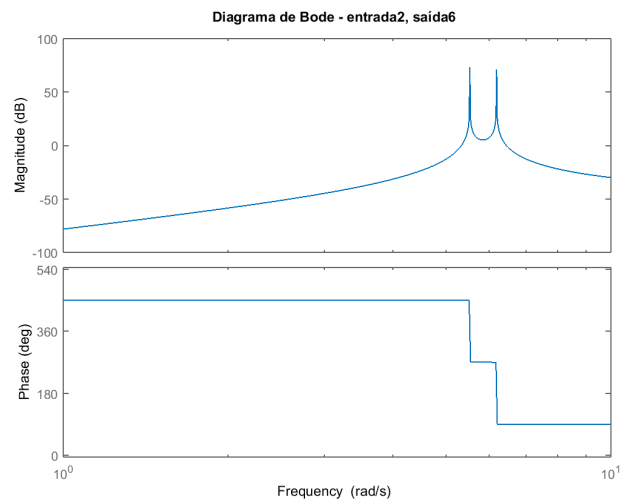
Fonte: Autoria própria.

Figura 26 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_1, T_1$ 

Fonte: Autoria própria.

Figura 27 – Diagrama de Bode -  $\theta_2$ ,  $T_1$ 

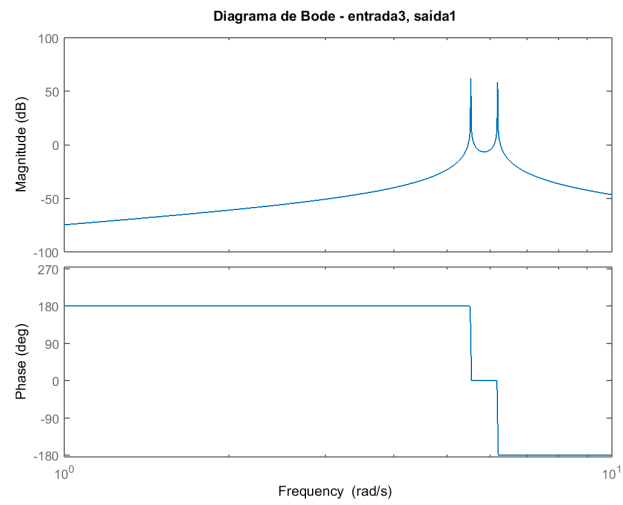
Fonte: Autoria própria.

Figura 28 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_2$ ,  $T_1$ 

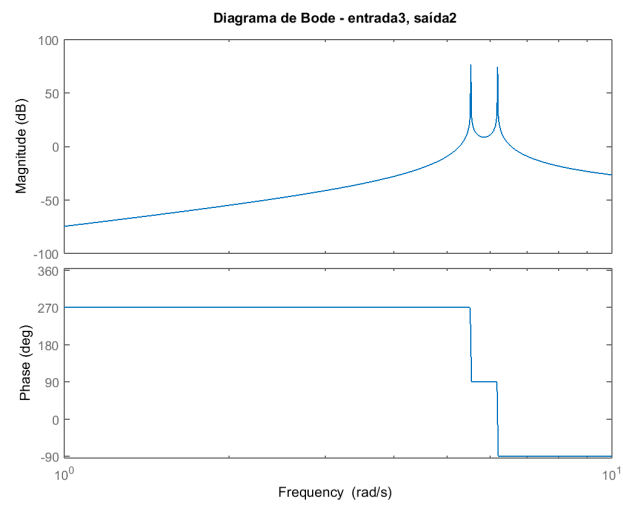
Fonte: Autoria própria.

Diagramas de Bode para a entrada  $T_2$ :

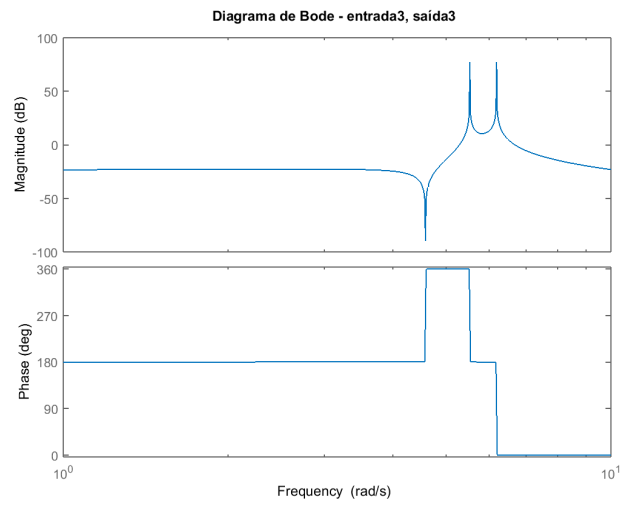


Figura 29 – Diagrama de Bode -  $x, T_2$ 

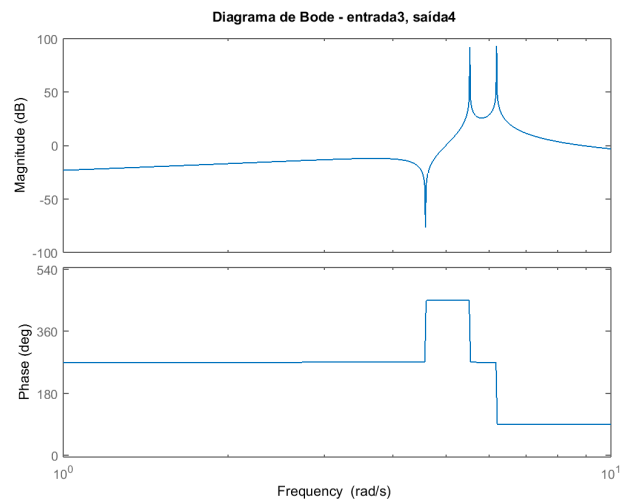
Fonte: Autoria própria.

Figura 30 – Diagrama de Bode -  $\dot{x}, T_2$ 

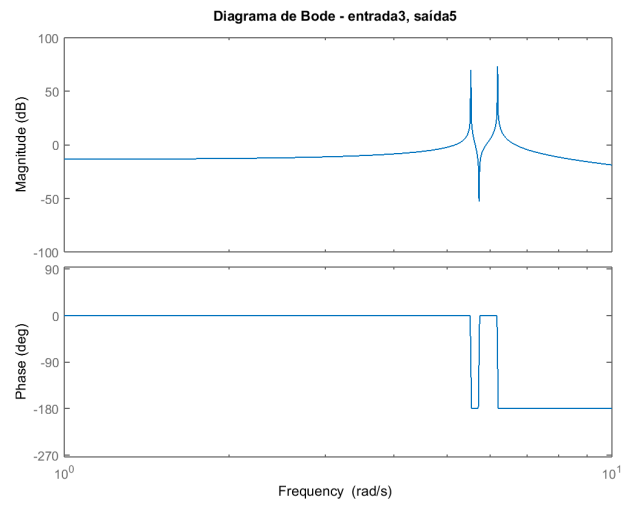
Fonte: Autoria própria.

Figura 31 – Diagrama de Bode -  $\theta_1, T_2$ 

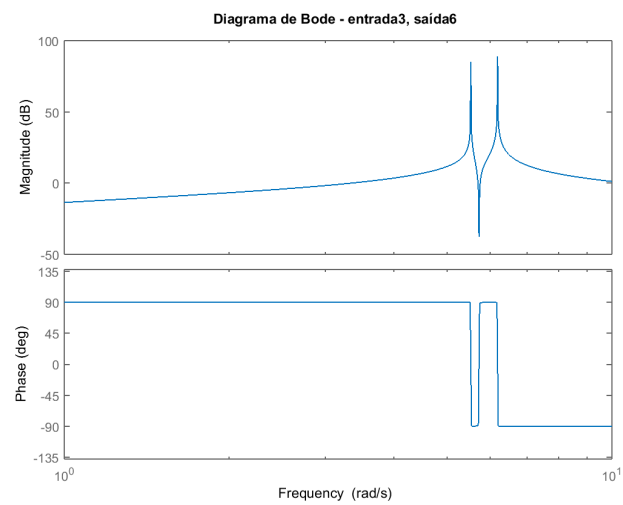
Fonte: Autoria própria.

Figura 32 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_1, T_2$ 

Fonte: Autoria própria.

Figura 33 – Diagrama de Bode -  $\theta_2$ ,  $T_2$ 

Fonte: Autoria própria.

Figura 34 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_2$ ,  $T_2$ 

Fonte: Autoria própria.