

Caique de Oliveira Kobayashi - 9793461  
Heitor Fontana Godoy - 10335677  
Lucas Hattori Costa - 10335847  
Lucas Pinheiro Paiva Cavalcante - 10274270

## **Modelagem e Controle de Braço Robótico para Jogo de Tênis de Mesa**

São Paulo - SP, Brasil

23 de julho de 2020

Caique de Oliveira Kobayashi - 9793461  
Heitor Fontana Godoy - 10335677  
Lucas Hattori Costa - 10335847  
Lucas Pinheiro Paiva Cavalcante - 10274270

## **Modelagem e Controle de Braço Robótico para Jogo de Tênis de Mesa**

Trabalho dedicado ao desenvolvimento do sistema de controle de um sistema dinâmico a ser apresentado como instrumento de avaliação da disciplina PME 3481.

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
PME 3481 - Controle e Aplicações

Orientador:  
Prof. Dr. Agenor Fleury e  
Prof. Dr. Décio Donha

São Paulo - SP, Brasil  
23 de julho de 2020

# RESUMO

O presente relatório se dispõe a tratar da modelagem e o controle de um braço robótico voltado para uma situação de jogo de tênis de mesa. Essa inspiração no esporte para aprimoramento de tecnologias na área de controle é compartilhada por diversos pesquisadores desde a década de 1980. No trabalho, o objetivo definido foi o controle do sistema para seu retorno ao estágio de espera. Foi construído um modelo físico e determinado um modelo linearizado, o qual apresentou comportamento adequado próximo ao ponto de operação. Foram, então, avaliados os modelos de controle no domínio da frequência (Controle Clássico) e no domínio do tempo (Controle Moderno). Quanto ao controle moderno, foram comparados os controles por alocação de polos e pelo método LQ e avaliado o emprego de um observador. Verificou-se que há convergência suficientemente rápida em ambos os casos e a viabilidade da aplicação do observador e uso de apenas três sensores e três atuadores. Quanto ao controle clássico, foi definida a função de transferência a ser estudada, optando pelo controle da velocidade angular do antebraço do robô. Foram, pois, testadas quatro formas diferentes de determinação dos ganhos de PID, além da sintonização de um compensador, obtendo melhor resposta com uso do método iterativo de ITAE. Dessa forma, foram verificadas múltiplas formas de realizar o controle do braço robótico.

**Palavras-chave:** Controle, Tênis de Mesa, Modelagem, Regulador, PID.

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comparação de robôs para jogo de tênis de mesa . . . . .	1
Figura 2 – Definição visual do problema . . . . .	5
Figura 3 – Sistema base para a modelagem . . . . .	6
Figura 4 – Modelo físico simplificado . . . . .	8
Figura 5 – Diagramas de corpo livre da Base, Braço e Antebraço, respectivamente	8
Figura 6 – Mapa de Polos . . . . .	16
Figura 7 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1, T_1$ . . . . .	18
Figura 8 – Resposta no tempo para o sistema em malha aberta. . . . .	19
Figura 9 – Tendência de estabilidade para um tempo de operação muito grande. .	20
Figura 10 – Resposta dos deslocamentos no tempo do sistema . . . . .	24
Figura 11 – Resposta das Velocidades no tempo do sistema . . . . .	24
Figura 12 – Resposta no tempo dos deslocamentos com observador . . . . .	26
Figura 13 – Resposta no tempo das velocidades com observador . . . . .	26
Figura 14 – Convergência dos erros do observador . . . . .	26
Figura 15 – Resposta da função de transferência $G_{T_2, \dot{\theta}_2}$ aos sinais constante e móvel.	27
Figura 16 – Potências, Toques e Forças exigidas dos atuadores ao longo do movimento	28
Figura 17 – Diagrama de blocos simplificado para controlador PID na planta. . .	31
Figura 18 – Resposta em formato $S$ esperada pelo método e resposta ao degrau da FT estudada. . . . .	32
Figura 19 – Lugar das Raízes para a FT estudada . . . . .	32
Figura 20 – Detalhe das proximidades do eixo imaginário . . . . .	33
Figura 21 – Resposta ao degrau para sistema com controlador PID e PI sintonizado via LR . . . . .	34
Figura 22 – Resposta ao degrau para sistema com controlador PID e PI sintonizado via <i>PID Tuner</i> . . . . .	35
Figura 23 – Comparação entre as respostas em frequência do sistema original e reduzido à terceira ordem. . . . .	36
Figura 24 – Comparação entre as respostas em frequência do sistema original e reduzido à quarta ordem. . . . .	37
Figura 25 – Comparação das respostas ao degrau unitário das tentativas realizadas.	38
Figura 26 – Resposta ao degrau da melhor iteração por AP. . . . .	39
Figura 27 – Resposta ao degrau com uso do método ITAE . . . . .	41
Figura 28 – Diagrama de Bode interativo, no ambiente do <i>Control System Designer</i> .	42
Figura 29 – Diagrama de Lugar das Raízes interativo, no ambiente do <i>Control System Designer</i> . . . . .	43
Figura 30 – Resposta do sistema ao compensador projetado . . . . .	43

Figura 31 – Diagrama de Nyquist de malha aberta para o sistema sintonizado por ITAE. . . . .	44
Figura 32 – Detalhe do diagrama de Nyquist de malha aberta para o sistema sintonizado por ITAE, mostrando a não envoltura do ponto -1. . . . .	45
Figura 33 – Diagrama de Bode para o sistema em malha aberta controlado com o PI por ITAE, com as margens de ganho e fase assinaladas. . . . .	46
Figura 34 – Respostas ao degrau para diferentes sintonizações de controladores. . . . .	47
Figura 35 – Diagrama de blocos construído no <i>Simulink</i> . . . . .	48
Figura 36 – Resposta do sistema ao degrau unitário com distúrbio senoidal . . . . .	48
Figura 37 – Diagrama de Bode - x, F . . . . .	78
Figura 38 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1$ , F . . . . .	78
Figura 39 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_2$ , F . . . . .	79
Figura 40 – Diagrama de Bode - x, $T_1$ . . . . .	79
Figura 41 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1$ , $T_1$ . . . . .	80
Figura 42 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_2$ , $T_1$ . . . . .	80
Figura 43 – Diagrama de Bode - x, $T_2$ . . . . .	81
Figura 44 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_1$ , $T_2$ . . . . .	81
Figura 45 – Diagrama de Bode - $\dot{\theta}_2$ , $T_2$ . . . . .	82
Figura 46 – (a) Sensor <i>Vishay</i> de deslocamento linear; (b) Sensor <i>Transtek</i> de velocidade linear; (c) Sensor <i>Grove</i> de deslocamento angular; (d) Sensor <i>HiLetgo</i> de velocidade angular. . . . .	86
Figura 47 – Diagrama de Nyquist para o controlador PID projetado por LR. . . . .	87
Figura 48 – Diagrama de Nyquist para o controlador PI projetado pelo PID Tuner. . . . .	87
Figura 49 – Diagrama de Nyquist para o controlador PID projetado pelo PID Tuner. . . . .	88
Figura 50 – Diagrama de Nyquist para o controlador PID projetado por AP. . . . .	88
Figura 51 – Diagrama de Nyquist para o controlador PI projetado por LR. . . . .	89
Figura 52 – Diagrama de Nyquist para o compensador. . . . .	89
Figura 53 – Diagrama de Bode para o controlador PID projetado por LR. . . . .	90
Figura 54 – Diagrama de Bode para o controlador PI projetado pelo PID Tuner. . . . .	90
Figura 55 – Diagrama de Bode para o controlador PID projetado pelo PID Tuner. . . . .	91
Figura 56 – Diagrama de Bode para o controlador PID projetado por AP. . . . .	91
Figura 57 – Diagrama de Bode para o controlador PI projetado por LR. . . . .	92
Figura 58 – Diagrama de Bode para o compensador. . . . .	92

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação de sensores elencados para as medições do problema.	14
Tabela 2 – Características de Amortecimento do Sistema	16
Tabela 3 – Análise de estabilidade por Routh-Hurwitz.	17
Tabela 4 – Valores máximos exigidos de cada um dos atuadores.	29
Tabela 5 – Características do Motor 1	29
Tabela 6 – Características do Motor 2	29
Tabela 7 – Características do Motor 3	29
Tabela 8 – Diferentes projetos de controladores PID pelo método LR.	34
Tabela 9 – Diferentes projetos de controladores a partir do <i>PID Tuner</i> .	34
Tabela 10 – Valores de polos utilizados, já considerando dois polos em zero.	38
Tabela 11 – Valores encontrados e resultados do degrau para o controlador PID por AP.	38
Tabela 12 – 20 melhores resultados do método iterativo com ITAE	40
Tabela 13 – Características da resposta ao degrau do PID sintonizado por ITAE	41
Tabela 14 – Valores das Margens de Fase para os controladores projetados	45
Tabela 15 – Comparação entre métodos de sintonização para controlador PID	47
Tabela 16 – Zeros das funções de transferência	76

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Estudo da Literatura</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>MODELAGEM DO SISTEMA</b>	<b>6</b>
<b>4.1</b>	<b>Modelo Físico</b>	<b>6</b>
4.1.1	Hipóteses simplificadoras	7
4.1.2	Modelo físico final	7
<b>4.2</b>	<b>Modelo Matemático</b>	<b>8</b>
4.2.1	Aplicação do Método de Lagrange-Euler	8
4.2.2	Modelo final não linear	10
4.2.3	Linearização do modelo	10
4.2.4	Representação de Espaço de Estados	11
4.2.5	Sensores e matriz de saída C	13
4.2.6	Parâmetros do problema	14
<b>5</b>	<b>ANÁLISE EM MALHA ABERTA</b>	<b>15</b>
<b>5.1</b>	<b>Descrição no domínio das frequências</b>	<b>15</b>
5.1.1	Funções de transferência	15
5.1.2	Polos	15
5.1.3	Zeros	16
5.1.4	Estabilidade	17
5.1.5	Diagramas de Bode	17
<b>5.2</b>	<b>Matriz de Transição e Resposta no Tempo</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>CONTROLE MODERNO</b>	<b>20</b>
<b>6.1</b>	<b>Controlabilidade e Observabilidade</b>	<b>20</b>
<b>6.2</b>	<b>Controle por alocação de polos e por método LQ</b>	<b>21</b>
6.2.1	Parâmetros e matriz de transição para alocação de polos	21
6.2.2	Parâmetros e matriz de transição para método LQ	22
6.2.3	Simulação e comparação da velocidade dos sistemas em malha fechada	23
<b>6.3</b>	<b>Observador de Estado</b>	<b>25</b>
<b>6.4</b>	<b>Seguidores de referência</b>	<b>27</b>
<b>6.5</b>	<b>Definição dos Atuadores</b>	<b>28</b>

<b>7</b>	<b>CONTROLE CLÁSSICO . . . . .</b>	<b>30</b>
7.1	Função de Transferência analisada . . . . .	30
7.2	Sintonização do Controlador PID . . . . .	30
7.2.1	Método de Ziegler-Nichols . . . . .	31
7.2.1.1	Método da curva de reação . . . . .	31
7.2.1.2	Método do Ganho Limite . . . . .	32
7.2.2	Sintonia por Lugar das Raízes . . . . .	33
7.2.3	Sintonia via <i>PID Tuner</i> . . . . .	34
7.2.4	Sintonia por Alocação de Polos . . . . .	35
7.2.4.1	Redução de Ordem . . . . .	35
7.2.4.2	Método dos Mínimos Quadrados e obtenção dos ganhos do controlador . . . . .	37
7.2.5	Sintonia por ITAE . . . . .	39
7.2.6	Sintonização de um Compensador . . . . .	41
<b>7.3</b>	<b>Análise de Estabilidade . . . . .</b>	<b>44</b>
7.3.1	Estabilidade Absoluta . . . . .	44
7.3.2	Estabilidade Relativa . . . . .	45
<b>7.4</b>	<b>Comparação entre Controladores Clássicos . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>7.5</b>	<b>Capacidade de seguir referência e rejeitar distúrbios . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>49</b>
 <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>		<b>51</b>
 <b>APÊNDICES</b>		<b>53</b>
	<b>APÊNDICE A – CÓDIGOS . . . . .</b>	<b>54</b>
A.1	Simulações em Malha Aberta . . . . .	54
A.2	Simulações em Malha Fechada . . . . .	57
A.3	Simulações com Observador . . . . .	60
A.4	Sintonizações PID . . . . .	68
A.5	Solução numérica de sistema para sintonização PID por AP . . . . .	71
A.6	Redução de Ordem . . . . .	72
A.7	Compensador . . . . .	73
	<b>APÊNDICE B – FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA . . . . .</b>	<b>76</b>
	<b>APÊNDICE C – MATRIZES DE CONTROLABILIDADE E OBSER-</b>	
	<b>VABILIDADE . . . . .</b>	<b>77</b>

APÊNDICE D – DIAGRAMAS DE BODE EM MALHA ABERTA . . . . .	78
APÊNDICE E – ATUADORES . . . . .	83
APÊNDICE F – SENsoRES . . . . .	86
APÊNDICE G – GRÁFICOS DE ESTABILIDADE . . . . .	87
G.1 Diagramas de Nyquist . . . . .	87
G.2 Diagramas de Bode com margens de estabilidade . . . . .	90

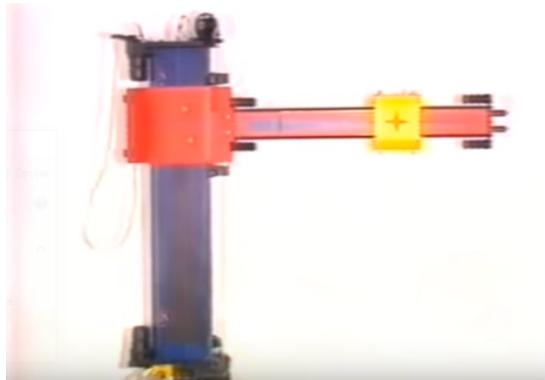
# 1 INTRODUÇÃO

Tênis de mesa é um jogo que envolve rápidos reflexos, coordenação motora e capacidade de adaptação conforme variação dos parâmetros referentes ao jogo, como resumido por Mullin Jens Kobe (2011). Criar um braço robótico capaz de realizar todas as tarefas exigidas durante uma partida comum tem sido um desafio amplamente estudado por inúmeros entusiastas da robótica, da engenharia e do esporte. A vasta literatura que se debruça sobre o assunto aborda diferentes aspectos do jogo de diferentes maneiras. As abordagens variam desde o desenvolvimento de sistemas robóticos com variado número de graus de liberdade, como em Matsushima et al. (2005) (usando 7 GL, por exemplo) até o uso de aprendizado de máquina aplicado com visão computacional em Mülling e Peters (2009).

Um dos primeiros modelos desenvolvidos foi criado pelo Instituto Federal de Tecnologia de Zurique (ou ETHZ, sigla em alemão), em 1987, representado na Figura 2(a). Este modelo simples descreve um movimento com dois graus de liberdade que varre o plano de forma cartesiana.

Com o crescimento da inovação tecnológica e da curiosidade científica, os modelos sofisticaram-se e atingiram níveis de precisão e agilidade bem elevados. A título de ilustração, encontra-se o robô “Forhpheus”, da empresa japonesa Omron®, exibido na Figura 2(b). Este modelo é capaz de detectar a posição do jogador, da bola e da raquete e, assim, reproduzir os movimentos humanos de um jogador, com um tempo de ciclo inferior a 0,0001 segundos.

Figura 1 – Comparaçāo de robôs para jogo de tēnis de mesa



(a) Braço cartesiano desenvolvido na ETHZ



(b) Robô japonês “Forhpheus”

Independentemente da sofisticação do modelo, contudo, o interesse pelo jogo de tēnis de mesa se resume a duas problemáticas fundamentais. A primeira trata do reconhecimento

e predição da trajetória da bola, para garantir que haja a estimativa de um local para a raquete golpear tal objeto. A segunda, por sua vez, remete a velocidade de resposta necessária para atuação do sistema.

Diante da análise de trajetória, encontram-se abordagens com uso de câmeras binoculares com pares de sensores, como em Hashimoto et al. (1987) ou com sensores dinâmicos de luz, como em Andersson (1989). Uma síntese dos métodos mais utilizados para detecção da trajetória da bolinha é apresentada por Saber Ferat Sahin (2005).

Por outro lado, a velocidade de resposta do sistema implica a necessidade de um conhecimento concreto a respeito do sistema dinâmico do robô. Todavia, a dinâmica dos sistemas mais modernos é complexa e apresenta, usualmente, comportamento caótico. Há muito, pois, a ser ainda estudado a respeito deste mecanismo, principalmente quanto à simplificação do controle e dos equipamentos necessários, conferindo escalabilidade ao modelo.

Não somente ao esporte e entretenimento, mas o estudo do comportamento robótico é de grande importância para áreas de atuação como a saúde. Mecanismos biomiméticos são empregados para substituição de membros do corpo ou para reabilitação de movimentos perdidos, e buscam-se atualmente formas de reduzir o tempo de resposta e agilizar os movimentos de próteses mecânicas frente aos estímulos daquele que às utiliza.

Sendo assim, é de interesse o estudo da modelagem e do controle do sistema do robô para tênis de mesa, visando otimização dos métodos atuais de controle.

## 1.1 Estudo da Literatura

A fim de desenvolver uma base de conhecimentos para fundamentar um desenvolvimento e estudo aprofundado da modelagem e do controle deste sistema em questão, obteve-se um acervo bibliográfico que serviu de guia para as análises e hipóteses adotadas.

Sendo uma das principais referências, Acosta et al. (2003) aborda o aspecto mais prático do sistema, focando diretamente na descrição de um protótipo funcional e nos desafios de sua construção. Com isso, fornece importantes noções para estimar os parâmetros do nosso modelo físico, essenciais para a posterior análise e simulação do comportamento do sistema. Além disso, é interessante por apresentar uma modelagem relativamente simples, e que permite um desempenho razoável de jogo.

Mullin Jens Kobe (2011) busca reproduzir movimentos humanos de composição e tomadas de decisão (muitas vezes inconscientes) em uma simulação de um braço robótico com sete graus de liberdade. É, inclusive, abordada de forma interessante a questão do controle e modelagem de um braço humano: o braço humano possui centenas de músculos, capazes de atingir os mesmos objetivos das mais diversas maneiras. Apesar disso, fornecer

flexibilidade ao sistema, acaba por tornar seu controle artificial difícil. Assim, são utilizados princípios do controle ótimo, no qual é feita a minimização de uma função custo.

Nakashima et al. (2010, 2011, 2012) traz um estudo aprofundado sobre alguns aspectos usualmente desprezados na maioria das análises. Em Nakashima et al. (2012), é investigado o efeito aerodinâmico na raquete e na bola e como isso pode influenciar a previsão de movimento do braço robótico. Além disso, em Nakashima et al. (2011), avalia-se a composição do material da raquete de forma a modelar com precisão o contato da raquete com a bola e como isso pode influenciar o controle do braço robótico. A modelagem do movimento do braço é sucinta por não ser o foco do estudo em nenhum dos trabalhos, porém, ainda assim, apresenta proveitosa base de hipóteses e métodos a serem seguidos, tornando-se um texto de referência importante para o desenvolvimento do modelo.

Hashimoto et al. (1987) trata do desenvolvimento de um sistema robótico com 7 graus de liberdade, diretamente controlado por um microcontrolador. Além de também focar na parte de previsão da posição da bolinha, usando isso para alimentar o sistema de controle, diretamente relacionado ao escopo deste trabalho, a pesquisa traz importantes parâmetros experimentais que foram extremamente úteis para a concepção do presente modelo. Além disso, apresenta uma seção dedicada à cinemática inversa, assunto de crucial importância para validar as entradas necessárias para atingir os pontos de operação do sistema. Ainda no tópico de cinemática inversa, Craig (2005) apresenta extenso ferramental teórico para aprofundar as análises.

Saini et al. (2012) é um texto que compara o controle em malha fechada por alocação de polos e método LQ. Sua importância como bibliografia se dá pela comparação que faz entre a velocidade de resposta e aplicação de ambos os métodos em um sistema dinâmico, servindo de base para a aplicação de ambas as formas de controle em malha fechada neste trabalho. Além disso, Saini et al. (2012) fornece parâmetros e base para as estimativas das matrizes Q e R, essenciais para controle pelo método LQ. Os métodos iterativos de determinação dos pesos de tais matrizes também foram baseados em Luo e Lan (1995).

## 2 OBJETIVOS

Com base no repertório levantado, foi delimitado o problema proposto anteriormente. Dessa forma, pode-se defini-lo, efetivamente, como: determinar o controle mais adequado e otimizado para regulação do braço mecânico em torno do ponto de operação, minimizando o tempo de resposta e o erro do sistema.

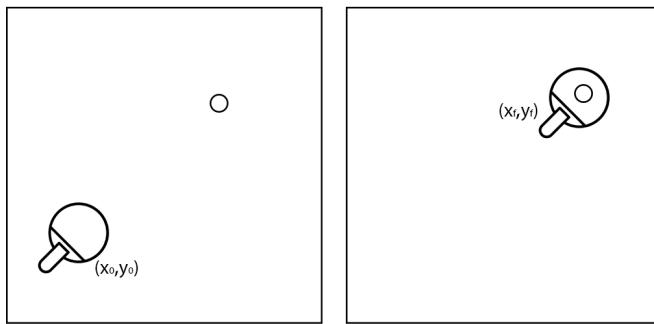
Dessa forma, como pode-se ilustrar na Figura 2, tratar-se-á da modelagem e do controle do sistema para movimento da raquete em um determinado ponto. Para determinar esse ponto, foi considerada a abordagem proposta por Ramanantsoa e Durey (1994), com o objetivo de definir um estágio do jogo para ser o ponto de operação. Segundo o mesmo, o tênis de mesa possui um padrão regular, podendo ser dividido em 4 estágios definidos: Estágio de Espera, Estágio de Preparação, Estágio do Golpe e Estágio de Finalização. Não sendo possível abordar todas as etapas, escolheu-se apenas a primeira, de Espera, como ponto de operação a ser simulado.

1. **Estágio de Espera:** A bola está vindo em direção ao oponente que a rebate em direção a rede. Neste momento o braço se encontra na posição mais baixa de jogo, preparado para se deslocar em direção ao ponto de contato com a bola.
2. **Estágio de Preparação:** A bola está vindo em direção ao jogador, já ultrapassou a rede e toca a mesa durante esse estágio. A raquete está se movendo para preparar o golpe.
3. **Estágio de Golpe:** A bola está chegando no ponto onde ocorrerá o contato com a raquete. A raquete já está em movimento em direção à bola, até atingí-la. Segundo Ramanantsoa e Durey (1994), esse momento dura cerca de 80ms.
4. **Estágio da Finalização:** Após sofrer o golpe, a bola está retornando ao outro lado da mesa, do oponente, enquanto o braço da raquete está se movendo para baixo até o estágio de espera.

Com o estágio de operação definido, o escopo do trabalho se restringe à uma operação bem específica dentro dos movimentos do jogo, porém ainda assim relevante. Trata-se da volta do braço ao ponto de espera após ter rebatido a bola, ou seja, o fim do ciclo de quatro etapas, para que o braço robótico repita novamente os movimentos para a próxima jogada. Ainda que simples, esse movimento é crucial para a eficácia do braço robótico por permitir que o ciclo se inicie sempre do mesmo ponto inicial e com precisão necessária. Controlar com precisão esse movimento configura um desafio adequado às restrições e objetivos da disciplina e do presente relatório.

Do problema supracitado, portanto, já é possível inferir que alguns dos parâmetros fundamentais do modelo físico e matemático são os comprimentos dos componentes do mecanismo-solução, com o fito de garantir a cobertura de toda a área estipulada; os parâmetros dos atuadores a serem utilizados; e, finalmente, as massas de todos os componentes, que definem a inércia do mecanismo como um todo. Quanto ao controle, será visado um tempo de resposta rápido, com baixa oscilação, uma vez que o jogo de tênis de mesa exige agilidade e precisão.

Figura 2 – Definição visual do problema



Fonte: Autoria própria.

### 3 METODOLOGIA

Com o objetivo do presente relatório definido e centrado na modelagem e controle do sistema físico correspondente a um braço robótico dedicado a tênis de mesa, em especial o movimento em torno do estágio de espera, tem-se como próxima etapa a definição da metodologia subsequente para desenvolver tal objetivo.

A primeira ação é a modelagem completa do sistema, a começar pela física, onde, com auxílio da bibliografia, elaborar-se-á um sistema suficientemente fiel à realidade para se obter resultados condizentes, porém simplificados por hipóteses que possibilitam sua análise de forma menos extensa. A isto, segue-se a modelagem matemática, que, a partir das equações diferenciais resultantes do método de Lagrange-Euler, resulta em um espaço de estados posteriormente linearizado, utilizando a expansão em série de Taylor de primeira ordem multivariável. Tal espaço de estados será de fundamental importância para o consequente do relatório, inclusive para a determinação dos seus polos, etapa que o seguirá para finalizar a modelagem completa do sistema.

Para a análise do controle do braço robótico, é necessário analisar inicialmente o sistema em malha aberta, afim de obter-se conclusões iniciais acerca da estabilidade em malha aberta do sistema, além de todas as funções de transferência. Diagramas de Bode e mapa de polos serão alguns dos ferramentais teóricos para elucidar tais conclusões e fomentar a etapa seguinte, que é a análise do sistema em malha fechada.

Esta etapa, diretamente voltada para o controle do braço robótico, é composta por uma comparação dos métodos de controle por alocação de polos (AP) e o controle linear quadrático (LQ), com e sem o uso de um observador de estados. Para que isso seja possível, será conduzido um estudo de controlabilidade e observabilidade e, com isso, os resultados obtidos serão utilizados para definir os atuadores necessários para controlar o

sistema. Todas essas etapas serão desenvolvidas utilizando a teoria de controle provinda da bibliografia e funções do software MATLAB®.

Por fim, realizar-se-á uma análise do sistema sob a ótica do Controle Clássico. Assim, uma função de transferência específica será tomada para análise e, com base nela, serão projetados diversos tipos de controladores por métodos de sintonização distintos. Esses projetos serão comparados tendo em mente as condições que o braço robótico terá que obedecer na dinâmica do tênis de mesa e serão estudados nos quesitos de estabilidade absoluta e relativa, de forma que, ao fim, seja possível definir um melhor projeto para o sistema.

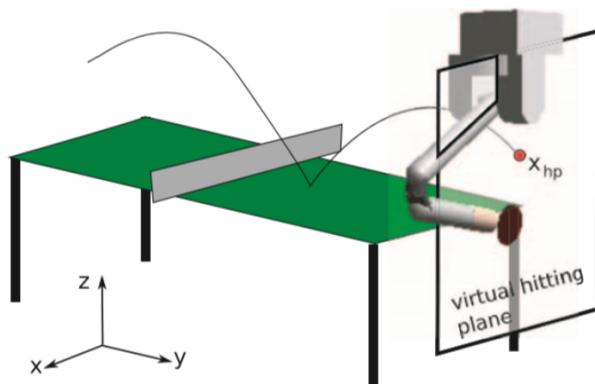
## 4 MODELAGEM DO SISTEMA

### 4.1 Modelo Físico

Com o problema bem descrito, buscou-se elaborar um modelo físico capaz de representar de forma suficiente o sistema mecânico em estudo, contudo de maneira simples e objetiva, evitando considerações desnecessárias que dificultem o atingimento dos objetivos.

Para isso, procurou-se manter o modelo coerente aos sistemas mecânicos dos robôs jogadores de tênis de mesa. Após avaliação dos modelos existentes, foi tomado como referência o sistema proposto por Mülling e Peters (2009), apresentado na Figura 3. Este modelo consiste de uma base superior que sustenta um pêndulo duplo, simulando o braço e antebraço de um jogador de tênis de mesa. Seu movimento é restrito a um único plano no espaço e apresenta apenas três graus de liberdade.

Figura 3 – Sistema base para a modelagem



Fonte: Mülling e Peters (2009)

### 4.1.1 Hipóteses simplificadoras

A fim de simplificar e especificar o sistema ao problema proposto, foram determinadas as seguintes hipóteses simplificadoras para o modelo de Mülling e Peters (2009):

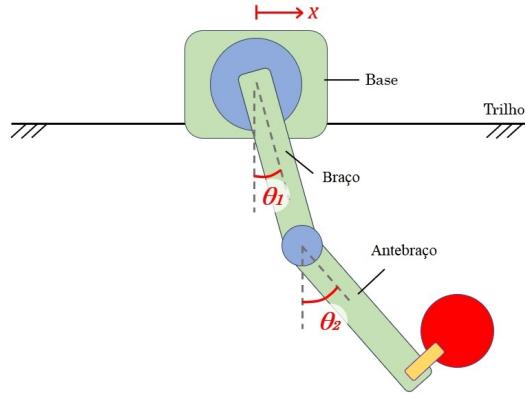
- Realização apenas de pequenas oscilações em torno do ponto de operação;
- Pesos dos braços concentrados em seus centros de massa: não é levada em conta a distribuição do peso ao longo das barras;
- Braços considerados barras de largura desprezível, rígidas e homogêneas: as barras não sofrem deformações consideráveis e possuem centro de gravidade coincidente com o centro geométrico das barras;
- Atritos considerados: atrito viscoso nas articulações e atrito viscoso entre a base e os trilhos (o atrito com o ar foi desprezado), obtendo um sistema não conservativo;
- Raquete com dimensões e massa desprezíveis: dimensões e massa do braço muito maiores do que da raquete;
- Movimento plano com três graus de liberdade;
- Serão considerados efeitos de inércia para deslocamentos amplos, sendo desprezados efeitos de pequenas vibrações de elevadas frequências;
- Tempo de resposta e massa dos atuadores desprezíveis;
- As duas barras possuem as mesmas dimensões (seção, comprimento e massa).

### 4.1.2 Modelo físico final

Por fim, aplicando as hipóteses adotadas ao modelo original de Mülling e Peters (2009) proposto, obtém-se um modelo já conhecido de pêndulo duplo, preso a uma base móvel, tal qual na Figura 4. A figura apresenta os três graus de liberdade estudados no presente trabalho:  $x$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Além disso, como apresentado na figura, os componentes do sistema serão tratados como base, braço e antebraço, para melhor elucidação do modelo.

Vale ressaltar que, para o problema do jogo de tênis de mesa, é de interesse não somente a análise posicional dos graus de liberdade, mas também o estudo de suas derivadas.

Figura 4 – Modelo físico simplificado



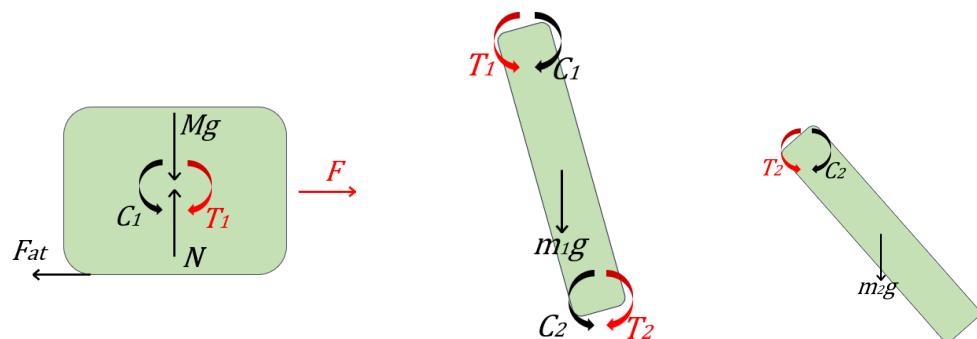
Fonte: Autoria própria.

## 4.2 Modelo Matemático

### 4.2.1 Aplicação do Método de Lagrange-Euler

Apesar do emprego do método de Lagrange-Euler não exigir a realização de um diagrama de corpo livre, são apresentados os componentes separadamente na Figura 5 de forma meramente ilustrativa, para que se evidencie o local de aplicação da força e torques externos, assim como a atuação de forças amortecedoras. Os esforços destacados em vermelho representam as possíveis forças de atuação nos graus de liberdade estabelecidos.

Figura 5 – Diagramas de corpo livre da Base, Braço e Antebraço, respectivamente



Fonte: Autoria própria.

Vale ressaltar que os termos que apresentam índice “1” (exemplo:  $c_1$ ) são referentes ao componente denominado “braço”; os termos com índice “2” (exemplo:  $T_2$ ) são referentes ao “antebraço”; e os termos sem índice (exemplo:  $M$ ) são referentes à base.

Dessa forma, faz-se possível o uso do método de Lagrange-Euler para descrição do comportamento dinâmico do sistema. As chamadas Equações de Lagrange são um

conjunto de equações que compõem um ferramental simples, capaz de resolver uma gama de problemas por meio da avaliação da energia mecânica (FRANÇA; MATSUMURA, 2011). A equação genérica é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial N}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^{ext} \quad (4.1)$$

Onde:

- $V$ : Energia Potencial Total do Sistema;
- $T$ : Energia Cinética Total do Sistema;
- $L = T - V$ : Lagrangeano (diferença da Energia Cinética e Potencial do sistema);
- $N$ : Energia de Amortecimento do Sistema não conservativo;
- $Q_i^{ext}$ : Forças externas generalizadas;
- $q_i$  e  $\dot{q}_i$ : Coordenadas Generalizadas.

Calculando os termos  $V$  e  $T$ , obtém-se os valores das energias, expostos nas Equações (4.2) e (4.3).

$$T = M \cdot \frac{\dot{x}^2}{2} + m_1 \cdot \frac{\dot{x}_{1G}^2}{2} + m_1 \cdot \frac{\dot{y}_1^2}{2} + m_1 \frac{l_1^2}{24} \dot{\theta}_1^2 + m_2 \cdot \frac{\dot{x}_{2G}^2}{2} + m_2 \cdot \frac{\dot{y}_2^2}{2} + m_2 \frac{l_2^2}{24} \dot{\theta}_2^2 \quad (4.2)$$

$$V = -m_1 \cdot g \cdot y_1 - m_2 \cdot g \cdot y_2 \quad (4.3)$$

E, portanto, obtêm-se as Equações (4.4) e (4.5) que determinam o sistema.

$$L = M \cdot \frac{\dot{x}^2}{2} + m_1 \cdot \frac{\dot{x}_{1G}^2}{2} + m_1 \cdot \frac{\dot{y}_1^2}{2} + m_1 \frac{l_1^2}{24} \dot{\theta}_1^2 + m_2 \cdot \frac{\dot{x}_{2G}^2}{2} + m_2 \cdot \frac{\dot{y}_2^2}{2} + m_2 \frac{l_2^2}{24} \dot{\theta}_2^2 + m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_2 \quad (4.4)$$

$$N = b \frac{\dot{x}^2}{2} + c_1 \frac{\dot{\theta}_1^2}{2} + c_2 \frac{\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1^2}{2} \quad (4.5)$$

Sendo que:

$$Q_x = \frac{\partial Fx}{\partial x} \quad Q_{\theta_1} = \frac{\partial T_1 \cdot \theta_1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial T_2 \cdot \theta_1}{\partial \theta_1} \quad Q_{\theta_2} = \frac{\partial T_2 \cdot \theta_2}{\partial \theta_2}$$

$$\dot{x}_{1G} = \dot{x} + \frac{l_1}{2} \cdot \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 \quad \dot{x}_{2G} = \dot{x} + l_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2$$

$$y_1 = \frac{l_1}{2} \cdot \cos\theta_1 \quad \dot{y}_1 = -\frac{l_1}{2} \cdot \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1$$

$$y_2 = l_1 \cdot \cos\theta_1 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos\theta_2 \quad \dot{y}_2 = -l_1 \cdot \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cdot \sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2$$

#### 4.2.2 Modelo final não linear

Por fim, substituindo os termos de Lagrange na equação (4.1), encontram-se as três equações características do sistema, descritas abaixo (Equações (4.6) a (4.8)). É possível observar que o sistema, além de não linear, é também acoplado, sendo esta característica um obstáculo à continuidade do estudo dinâmico, o qual deverá ser contornado.

$$F = (M + m_1 + m_2) \ddot{x} - l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 \left( \frac{m_1}{2} + m_2 \right) - \frac{m_2 l_2}{2} \sin\theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \cos\theta_1 \ddot{\theta}_1 \left( \frac{m_1}{2} + m_1 \right) + \frac{m_2 l_2}{2} \cos\theta_2 \ddot{\theta}_2 + b\dot{x} \quad (4.6)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 l_1}{3} \ddot{\theta}_1 + c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + \frac{m_1 l_1}{2} \cos\theta_1 \ddot{x} + \sin\theta_1 \left[ \frac{m_1 g l_1}{2} + m_2 l_1 \left( g + \frac{l_2}{2} \cos\theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{l_2}{2} \sin\theta_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \sin\theta_1 \ddot{\theta}_1 \right) \right] + m_2 l_1 \cos\theta_1 \left( -\frac{l_2}{2} \sin\theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{l_2}{2} \cos\theta_2 \ddot{\theta}_2 - l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cos\theta_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{x} \right) \quad (4.7)$$

$$T_2 = m_2 \left( \frac{l_2}{2} \sin\theta_2 (l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \sin\theta_1 \ddot{\theta}_1) + \frac{\ddot{x} l_2}{2} \cos\theta_2 - \frac{l_1 l_2}{2} \sin\theta_1 \cos\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_1 l_2}{2} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ddot{\theta}_1 \right) - \frac{m_2 l_2^2}{3} \ddot{\theta}_2 - \frac{m_2 l_2^2}{3} \ddot{\theta}_1 + \frac{m_2 g l_2}{2} \sin\theta_2 + c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (4.8)$$

#### 4.2.3 Linearização do modelo

De acordo com Franklin, Powell e Emami-Naeini (2014), o método Lyapunov prova que, se um modelo linear de pequenos sinais é válido perto de um equilíbrio e é estável, então existe uma região contendo o equilíbrio no qual o sistema não-linear é estável.

Assim, será aplicada a linearização para simplificar o modelo do sistema. A bibliografia de controle dinâmico em sistemas robóticos traz métodos como a linearização por *feedback* (retroalimentação), mas tais métodos estão fora do escopo deste trabalho. Adotou-se, portanto, o método de linearização por expansão em série de Taylor de primeira ordem multivariável, apresentada na Equação (4.9).

$$\tilde{f} = f_0 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{f^{op}} \cdot (x_i - x_i^{op}) \quad (4.9)$$

No caso do modelo em estudo, faz-se necessária a expansão em série dos termos de segunda ordem  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{\theta}_1$  e  $\ddot{\theta}_2$ . Logo, a Equação (4.9) torna-se como apresentada pela Equação (4.10).

$$\begin{aligned} \tilde{f} = f_0 &+ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{f^{op}} \cdot (x - x^{op}) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \Big|_{f^{op}} \cdot (\dot{x} - \dot{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \Big|_{f^{op}} \cdot (\theta_1 - \theta_1^{op}) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_1} \Big|_{f^{op}} \cdot (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1^{op}) + \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \Big|_{f^{op}} \cdot (\theta_2 - \theta_2^{op}) + \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}_2} \Big|_{f^{op}} \cdot (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_2^{op}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nesse ponto, para prosseguir com a linearização, substitui-se com os valores referentes ao ponto de operação escolhido. Como explicitado anteriormente, o Estágio de Espera do jogo é configurado pela raquete no ponto mais baixo da sua trajetória, antes ainda de sofrer um esforço para atingir a bolinha. Tal situação é verificada quando  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Logo, substituem-se as equações (4.6) a (4.8) na equação (4.10) com os valores do ponto de operação, que resulta em:

$$(2m + M)l\ddot{x} + \frac{3ml^2}{2}\ddot{\theta}_1 + \frac{ml^2}{2}\ddot{\theta}_2 = -bl\dot{x} + lF \quad (4.11)$$

$$2ml\ddot{x} + \frac{3ml^2}{2}\ddot{\theta}_1 + \frac{2ml^2}{2}\ddot{\theta}_2 = -\frac{3mlg}{2}\theta_1 - c\dot{\theta}_1 - \frac{mlg}{2}\theta_2 + T_1 \quad (4.12)$$

$$\frac{ml}{2}\ddot{x} + \frac{ml^2}{6}\ddot{\theta}_1 + \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}_2 = c\dot{\theta}_1 - \frac{mlg}{2}\theta_2 - c\dot{\theta}_2 + T_2 \quad (4.13)$$

#### 4.2.4 Representação de Espaço de Estados

Observando-se as Equações (4.11) a (4.13), percebe-se que há acoplamento do modelo. Para representação do Espaço de Estados do sistema, faz-se necessário desacoplar o sistema resolvendo-o para os três termos de segunda ordem ( $\ddot{x}$ ,  $\ddot{\theta}_1$  e  $\ddot{\theta}_2$ ) e, assim, apresentar o sistema na forma apresentada por Ogata (1982):

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (4.14)$$

$$y = CX + Du \quad (4.15)$$

Onde:

- $y \equiv$  vetor de saídas do sistema;
- $X \equiv$  vetor de estados do sistema;
- $\dot{X} \equiv$  derivada do vetor de estados do sistema;
- $u \equiv$  vetor de entradas do sistema;
- $A \equiv$  matriz de estado;
- $B \equiv$  matriz de entrada;
- $C \equiv$  matriz de saída;
- $D \equiv$  matriz de transmissão direta.

Assim, escreve-se um sistema matricial de 6 equações a partir das Equações (4.11) a (4.13), tal qual descrito abaixo. As outras três equações do sistema são igualdades triviais.

$$M_{6 \times 6} \times \dot{X}_{6 \times 1} = \tilde{A}_{6 \times 6} \times X_{6 \times 1} + \tilde{B}_{6 \times 3} \times u_{3 \times 1} \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2m+M)l & 0 & \frac{3ml^2}{2} & 0 & \frac{ml^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2ml & 0 & \frac{3ml^2}{2} & 0 & \frac{2ml^2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ml}{2} & 0 & \frac{ml^2}{6} & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -bl & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3mgl}{2} & -c & \frac{-mgl}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c & \frac{-mgl}{2} & -c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

Assim, definem-se as matrizes  $X$ ,  $\dot{X}$ ,  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  e a matriz de massa  $M$ , como apresentado abaixo:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -bl & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3mgl}{2} & -c & \frac{-mgl}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c & \frac{-mgl}{2} & -c \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} F \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2m+M)l & 0 & \frac{3ml^2}{2} & 0 & \frac{ml^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2ml & 0 & \frac{3ml^2}{2} & 0 & \frac{2ml^2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ml}{2} & 0 & \frac{ml^2}{6} & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix}$$

Para o efetivo desacoplamento do sistema e obtenção das matrizes A e B, é necessário multiplicar a inversa da matriz de inércia M pela matrizes  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ , de fato isolando os termos de segunda ordem

$$A = M^{-1} \tilde{A} \quad B = M^{-1} \tilde{B}$$

obtendo, assim:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{28M+5m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{45gm}{28M+5m} & \frac{48c}{L(28M+5m)} & \frac{6gm}{28M+5m} & \frac{18c}{L(28M+5m)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24b}{L(28M+5m)} & \frac{-(9g(4M+5m))}{L(28M+5m)} & -\frac{18c(4M+3m)}{L^2m(28M+5m)} & \frac{3g(4M-m)}{L(28M+5m)} & \frac{-(24c(2M+m))}{L^2m(28M+5m)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{30b}{L(28M+5m)} & \frac{9g(2M-5m)}{L(28M+5m)} & \frac{30c(4M-m)}{L^2m(28M+5m)} & \frac{-(g(48M+15m))}{L(28M+5m)} & \frac{108Mc}{L^2m(28M+5m)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{28}{28M+5m} & \frac{-30}{L(28M+5m)} & \frac{18}{L(28M+5m)} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-24}{L(28M+5m)} & \frac{6(4M+5m)}{L^2m(28M+5m)} & \frac{-(24(2M+m))}{L^2m(28M+5m)} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-30}{L(28M+5m)} & \frac{-(6(2M-5m))}{L^2m(28M+5m)} & \frac{108M}{L^2m(28M+5m)} \end{bmatrix}$$

Da matriz A, primeiramente, percebe-se que tanto  $\ddot{\theta}_1$  quanto  $\ddot{\theta}_2$  possuem termos restitutivos ( $-\frac{9g(4M+5m)}{L(28M+5m)}\theta_1$  e  $-\frac{(48Mg+15mg)}{L(28M+5m)}\theta_2$  respectivamente), que contribuem para oscilação em torno da posição de equilíbrio. O termo  $\ddot{x}$  não possui esse termo, ou seja, a restituição para uma posição desejada, qualquer que seja, deve vir de uma das entradas do sistema.

Em relação aos termos de primeira derivada ( $\dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ ) interagindo com as velocidades, percebe-se que tanto  $x$  quanto  $\theta_1$  possuem termos que se opõem à velocidade em  $x$  e  $\theta_1$ , representando uma resistência ao movimento. Contudo, existe um termo do tipo  $c \cdot \dot{\theta}_2$  com  $c$  positivo na expressão de  $\ddot{\theta}_2$ . Isso poderia indicar instabilidades em torno do ponto de operação, caso os eventos desse termo não fossem cancelados. Nesse caso específico, esse termo não apresentará grande influência, por apresentar pequena magnitude se comparado aos outros termos.

Na matriz B, percebe-se a interação das entradas com o sistema. Como esperado, as entradas ( $F, T_1, T_2$ ) apenas influenciam os termos de segunda ordem. Além disso, observa-se que a matriz  $\tilde{B}$  infere o emprego de atuadores em todos os três graus de liberdade. Novamente, essa decisão foi baseada no trabalho de Mullin Jens Kobe (2011), de tal forma que a análise de controlabilidade será feita posteriormente na Seção 6.1. A sua determinação e dimensionamento, contudo, serão feitos posteriormente na Seção 6.5, baseados nos resultados obtidos com os controladores.

#### 4.2.5 Sensores e matriz de saída C

Em um projeto de controle, é necessário definir claramente as variáveis que serão medidas e com quais sensores. Isso pois, não são comumente usados sensores em todas as variáveis de interesse, uma vez que, com isso, há a maior possibilidade de presença de ruídos na medição, assim como um maior custo de projeto.

No trabalho de Mullin Jens Kobe (2011), foi realizado o controle de um robô similar com uso de apenas um sensor para cada grau de liberdade. Dessa forma, acredita-se que,

para o presente projeto, seja adequado o uso de três sensores, cuja observabilidade será averiguada na Seção 6.1.

Para definição dos sensores, foi feito um levantamento para verificar quais os possíveis candidatos. Assim, foram escalados sensores de deslocamento e velocidade, lineares e angulares, como destacado na Tabela 1 e ilustrados pela Figura 46 presente no Apêndice F.

Tabela 1 – Relação de sensores elencados para as medições do problema.

Grandeza	Sensor	Marca	Preço	Peso
Deslocamento linear	UIPMA150I472XCB	Vishay	US\$ 15,56	-
Velocidade linear	Linear Velocity Transdutor	Transtek	US\$ 75,00	-
Deslocamento angular	Rotary Angle Sensor	Grove	US\$ 2,90	10 g
Velocidade angular	Giroscópio MPU9250/6500	HiLetgo	US\$ 8,99	2,72 g

Fonte: Autoria própria.

Levando em consideração principalmente os custos de cada sensor, serão, pois, utilizados os sensores de: deslocamento linear ( $x$ ) e velocidades angulares ( $\dot{\theta}_1$  e  $\dot{\theta}_2$ ).

Dessa forma, determina-se a matriz C utilizada para construção do Espaço de Estados, como sendo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vale ressaltar que, como deseja-se obter o valor da própria variável de estado, a matriz D é nula.

#### 4.2.6 Parâmetros do problema

Toda a modelagem anterior foi realizada de forma completamente analítica e literal, em função de constantes próprias do problema, como a massa dos elementos do braço. Para simulação, foram adotados os valores obtidos a partir de um catálogo especificações iniciais da fabricante Barrett (2008), relativos a um braço robótico de dimensões e desenho semelhantes ao aqui analisado.

- $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- $c_1 = c_2 = c = 8,5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$
- $l_1 = l_2 = l = 0,5 \text{ m}$
- $l_{raquete} = 0,2 \text{ m}$
- $b_{base} = 7,12 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$
- $M = 6 \text{ kg}$  e  $m_1 = m_2 = m = 2 \text{ kg}$

# 5 ANÁLISE EM MALHA ABERTA

## 5.1 Descrição no domínio das frequências

### 5.1.1 Funções de transferência

Utilizando-se da ferramenta das transformadas de Laplace para o espaço de estados obtido, chega-se na transformação que permite justamente à obtenção de funções que relacionam as entradas às saídas do sistema, explicitadas nas equações Equações (5.1) e (5.4).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} sX(s) = AX(s) + Bu(s) \quad (5.1)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \quad (5.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} Y(s) = CX(s) + Du(s) \quad (5.3)$$

$$\therefore Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s) \quad (5.4)$$

Por conveniência, denomina-se  $G(s) \equiv C(sI - A)^{-1}B + D$ . Com a linearização realizada em torno do ponto ( $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$ ) e a representação do sistema em espaço de estados, utilizou-se a função `tf()` do software MATLAB® para obter as funções de transferência, ou seja, já com as equações no domínio da frequência. Efetivamente, pelo fato de o sistema dispor de três variáveis medidas e três entradas, tratar-se-iam de nove funções de transferência para o sistema.

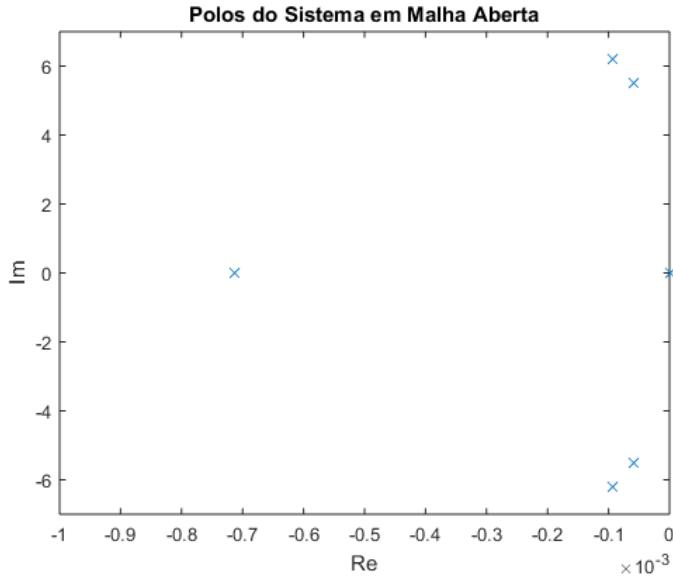
Vale ressaltar que para determinação de todo o Estado do sistema, é aplicado o uso de observadores, como posteriormente apresentado na Seção 6.5. Todas as funções de transferências podem ser encontradas no Apêndice B.

Como análise preliminar de estabilidade, a ser aprofundada no tópico seguinte, já se pode perceber que não há troca de sinal dos coeficientes do polinômio característico, o qual é comum para todo o sistema (KULAKOWSKI; GARDNER; SHEARER, 2007).

### 5.1.2 Polos

A determinação dos polos de um sistema é fundamental para o entendimento da sua resposta em frequência e para posteriores análises de estabilidade e determinação de ganhos de controle. Os polos encontrados estão representados na Figura 6, na qual tem-se que a distância em relação à origem indica uma frequência natural não amortecida e o ângulo com o eixo real indica o coeficiente de amortecimento (OGATA, 1982).

Figura 6 – Mapa de Polos



Fonte: Autoria própria.

Uma vez que consiste nas raízes de um polinômio (advindo do denominador das funções de transferências) (OGATA, 1982; KULAKOWSKI; GARDNER; SHEARER, 2007), é possível averiguar uma consonância do mapa com o esperado, uma vez que apresenta todos os valores imaginários conjugados, bem como o número de raízes equivalente à ordem do polinômio.

Dessa forma, pode-se extrair os módulos das frequências naturais do sistema estudado sem amortecimento ( $\omega$ ) e os coeficientes de amortecimento de cada polo ( $\zeta$ ). Estes valores, presentes na Tabela 2, caracterizam globalmente propriedades do sistema, de tal forma que, independente da função de transferência, os polos permanecem constantes (PARASKEVOPOULOS, 2002).

Tabela 2 – Características de Amortecimento do Sistema

Polo	Amortecimento	Frequência Natural (rad/s)	Constante de Tempo (s)
0,0	-	0,0	$\infty$
$-7,12 \cdot 10^{-4}$	1,00	$7,12 \cdot 10^{-4}$	1,40
$-5,82 \cdot 10^{-5} + 5,53i$	$1,05 \cdot 10^{-5}$	5,53	$1,72 \cdot 10^4$
$-5,82 \cdot 10^{-5} - 5,53i$	$1,05 \cdot 10^{-5}$	5,53	$1,72 \cdot 10^4$
$-9,42 \cdot 10^{-5} + 6,18i$	$1,52 \cdot 10^{-5}$	6,18	$1,06 \cdot 10^4$
$-9,42 \cdot 10^{-5} - 6,18i$	$1,52 \cdot 10^{-5}$	6,18	$1,06 \cdot 10^4$

Fonte: Autoria própria.

### 5.1.3 Zeros

Para determinação dos zeros das funções, faz-se necessário encontrar as raízes do polinômio que compõe o numerador de cada uma das funções de transferências (OGATA,

1982). Os zeros tratam de propriedades específicas de cada uma das funções de transferências, ou seja, representam o comportamento de uma determinada saída em relação a uma determinada entrada (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2014). Os zeros obtidos também encontram-se no Apêndice B.

#### 5.1.4 Estabilidade

Concomitantemente, os polos obtidos do sistema são utilizados para avaliar a estabilidade. Segundo Ogata (1982), sabe-se que a estabilidade é definida através da parte real dos polos, de tal forma que, na presença de um polo com parte real positiva, o sistema é dito instável.

Observando os polos obtidos, tem-se que quase todos os polos apresentam parte real negativa, com exceção do polo nulo. Assim, o comportamento do sistema é classificado como estável, sendo que o polo na origem indica característica de um integrador puro ligado ao deslocamento no eixo  $x$ .

A estabilidade do sistema pode ser ratificada utilizando o critério de Routh-Hurwitz (EL-MARHOMY; ABDEL-SATTAR, 2004), conforme a Tabela 3, observando-se que não há troca de sinais na primeira coluna, com todos permanecendo positivos.

Tabela 3 – Análise de estabilidade por Routh-Hurwitz.

$s^5$	1	68,78	1168
$s^4$	0,001017	0,05918	0,8315
$s^3$	10,58924	350,3992	
$s^2$	0,025527	0,8315	
$s^1$	5,476896	0	
$s^0$	0,8315		

Fonte: Autoria própria.

Essa descrição de fato se reflete no sistema estudado. Considerando as pequenas oscilações das suas saídas e entradas, espera-se que os componentes pendulares do modelo físico mantenham-se estáveis, oscilando em torno do ponto de equilíbrio, cujo ângulo e velocidade angular são nulos. Contudo, dadas as saídas lineares horizontais  $x$  e  $\dot{x}$ , tem-se que, para entradas relativamente grandes, o sistema deslocar-se-á para um novo ponto, diferente de zero, no qual passará a oscilar.

#### 5.1.5 Diagramas de Bode

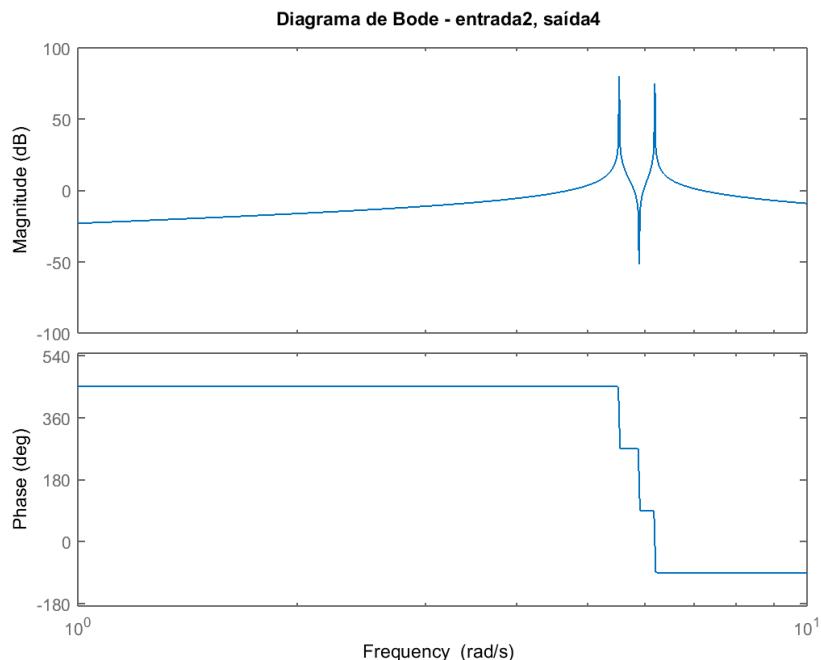
O diagrama de Bode é fundamental para um bom entendimento da resposta em frequência do sistema (BODE, 1940). Essencialmente, este diagrama é uma composição de dois gráficos, os quais apresentam: a magnitude do ganho da resposta em frequência, em decibéis (dB); e a fase desse ganho, em graus, com relação à frequência.

Como ambos os gráficos do diagrama são apresentados em escala logarítmica, deve-se ater ao fato de que a magnitude apresentada se refere a vinte vezes o logaritmo da razão das amplitudes (amplitude da função de transferência para  $s = j\omega$ ).

Para levantamento dos diagramas de nosso sistema, foi utilizado o comando *bode()* do software MATLAB®. Os diagramas obtidos podem ser visualizados no Apêndice D. Na Figura 7 encontra-se representado o diagrama de Bode para um conjunto exemplo entrada-saída, no caso  $\dot{\theta}_1 \times T_1$ .

Ao observar-se a figura, destaca-se a presença de dois acentuados picos de ganho, que correspondem justamente às frequências de ressonância ( $\omega_n$ ) registradas na Tabela 2, localizadas em 5,53 rad/s e 6,18 rad/s, ocasionadas pelos polos complexos conjugados pouco amortecidos. Percebe-se, portanto, que o sistema em malha aberta é notoriamente sensível, em geral, às frequências compreendidas entre 5 e 7 rad/s.

Figura 7 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_1, T_1$

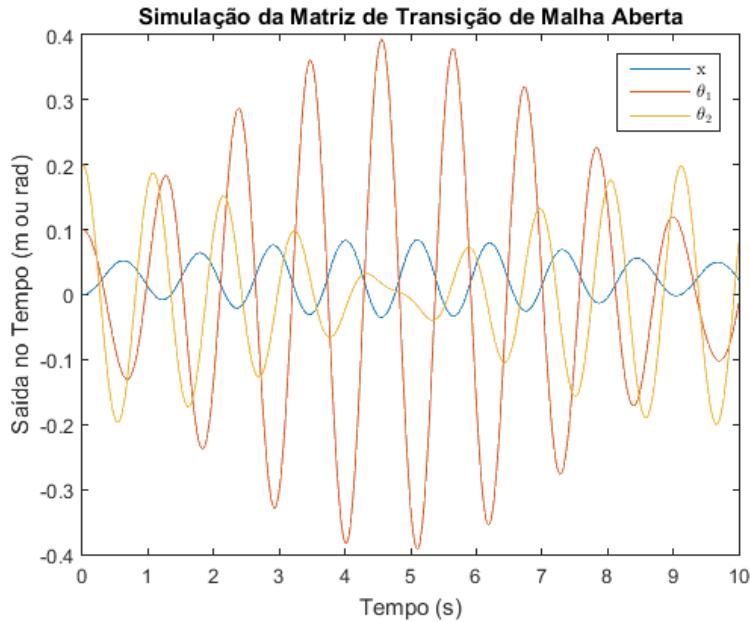


Fonte: Autoria própria.

## 5.2 Matriz de Transição e Resposta no Tempo

A matriz de transição de estados é tal que pode-se obter toda a informação sobre movimentos livres do sistema definido pela equação  $\dot{X} = AX$  a partir da mesma (SEQUEIRA, 2013). Dessa forma, com a obtenção da matriz de transição, pode-se simular e prever o comportamento do vetor X do sistema ao longo do tempo, para qualquer ponto em tal vetor. Para o caso em malha aberta, pode-se visualizar a matriz de transição  $\Phi_{aberta}$

Figura 8 – Resposta no tempo para o sistema em malha aberta.



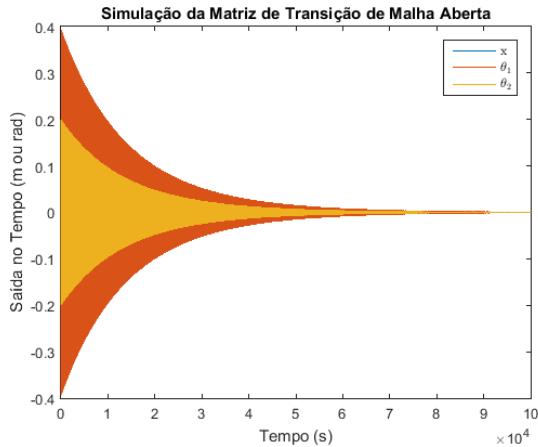
Fonte: Autoria própria.

abaixo. No tocante às condições iniciais, escolheu-se arbitrariamente (dentro dos limites da linearização e de situações razoáveis) os valores  $\theta_1 = 0,1 \text{ rad}$  e  $\theta_2 = 0,2 \text{ rad}$ , com os outros parâmetros zerados, de fato simulando a volta ao Estágio de Espera descrito na Seção 1.1.

$$\Phi_{aberta} = \begin{bmatrix} 1 & 9,9999 \cdot 10^{-3} & 2,4794 \cdot 10^{-4} & 8,2884 \cdot 10^{-7} & 3,3073 \cdot 10^{-5} & 1,1109 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 9,9999 \cdot 10^{-1} & 4,9573 \cdot 10^{-2} & 2,4839 \cdot 10^{-4} & 6,6156 \cdot 10^{-3} & 3,3244 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 9,5980 \cdot 10^{-8} & 9,9831 \cdot 10^{-1} & 9,9944 \cdot 10^{-3} & 3,6353 \cdot 10^{-4} & 1,196 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 1,9192 \cdot 10^{-5} & -3,371 \cdot 10^{-1} & 9,9831 \cdot 10^{-1} & 7,2665 \cdot 10^{-2} & 3,6033 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 1,1997 \cdot 10^{-7} & 9,9144 \cdot 10^{-5} & 3,6206 \cdot 10^{-7} & 9,9825 \cdot 10^{-2} & 9,9942 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 2,3987 \cdot 10^{-5} & 1,9817 \cdot 10^{-2} & 1,0544 \cdot 10^{-4} & -3,503 \cdot 10^{-1} & 9,9825 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Após determinação da matriz de transição, foi possível simular o comportamento do sistema, representado na Figura 8, e verificou-se que há atraso para a estabilização do sistema. Isso condiz com os polos calculados para o sistema em malha aberta, que estão próximos do eixo imaginário, sendo, portanto, polos lentos. A Figura 9 mostra como essa tendência só pode ser observada caso a simulação seja feita com período de tempo demasiado longo, completamente incompatível com o sistema.

Figura 9 – Tendência de estabilidade para um tempo de operação muito grande.



Fonte: Autoria própria.

## 6 CONTROLE MODERNO

Neste capítulo, é feita uma análise acerca do controle do sistema enquanto malha fechada. Para isto, de início, é crucial retomar o objetivo global do relatório e entender como essa etapa pode agregar ao projeto. Assim, reforça-se que o objetivo definido foi a modelagem e o controle um sistema capaz de retornar à posição de espera com atuação nos três elementos (a base, braço, e antebraço). Tal definição tem consequências importantes para o desenvolvimento do presente capítulo.

Uma consequência importante dessa hipótese é que o objetivo configura um problema de regulador, ou seja, o objetivo do controle é manter o braço no ponto Estágio de Espera, onde o estado é nulo. Dessa forma, uma análise de controle com acompanhamento de referência não se aplica a esse sistema, pois a referência é estática e nula a todo instante, de forma que tal análise não impactaria os estados.

### 6.1 Controlabilidade e Observabilidade

É imprescindível verificar a controlabilidade e a observabilidade do sistema para a quantidade de três atuadores e três sensores estabelecidos, o que é obtido justamente com o auxílio das matrizes de controlabilidade e observabilidade, sabendo-se que o sistema é de estados completamente controláveis e observáveis se, e somente se, suas respectivas colunas forem linearmente independentes entre si, ou seja, seus postos coincidem com a ordem 6 do sistema (OGATA, 1982).

Como para esse número de atuadores e sensores as matrizes supracitadas acabam

por serem grandes demais para ser produtivo colocá-las no corpo do relatório, elas estão descritas com mais detalhes no Apêndice C, valendo aqui ressaltar-se que, utilizando-se o comando *rank()* do MATLAB®, constatou-se que, de fato, ambas as matrizes possuem posto 6, o que ratifica a hipótese de que o sistema é completamente controlável e observável.

## 6.2 Controle por alocação de polos e por método LQ

Inicialmente, considerar-se-á o projeto de um sistema com todos os estados medidos, de modo a projetar-se os controladores por alocação de polos e pelo método linear quadrático, o que é possível a partir do princípio da separação (SINGH; AGNIHOTRI, 2001). Dessa forma, o observador de estados será projetado de maneira independente na Seção 6.3.

### 6.2.1 Parâmetros e matriz de transição para alocação de polos

Para o método de controle por alocação de polos, o sistema de realimentação em malha fechada é feito de forma que o sistema passe a possuir novos polos característicos, que irão, então, ditar o novo comportamento do sistema controlado (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2014).

Os polos forçados determinados foram selecionados de tal forma a se obter uma resposta do sistema rápida, alinhando aos objetivos do robô e à velocidade do jogo de tênis de mesa. Todavia, como fator limitante, foram determinados polos cuja resposta não exigissem atuadores com potências e massas inconcebíveis ao projeto. A escolha do motor será mais bem apresentada na Seção 6.5.

Assim, a partir de testes com novos polos negativos, optou-se por escolher como os novos polos do sistema:  $(-5, 5; -7, 5; -9, 5; -11, 5; -13, 5; -15, 5)$ . Os valores apresentados são todos reais, tornando o amortecimento do sistema o mais crítico possível, minimizando oscilações e sobressinal. Tal escolha de polos reais se dá considerando o comportamento ideal que se espera de um braço mecânico: com movimentos precisos e sem oscilações adicionais significantes. Apesar do comportamento crítico levar a uma resposta mais lenta, foi aplicado um módulo mais elevado aos polos, de tal forma que a velocidade fosse satisfatória. Além disso, foi considerado o fato de que uma maior velocidade, somada a uma oscilação, acarreta em uma exigência maior dos motores. Ou seja, foi buscada uma resposta com baixa oscilação e suficientemente rápida para o problema proposto.

A matriz de transição para o caso em malha fechada por alocação de polos foi calculada de forma análoga ao caso em malha aberta, discutido na Seção 5.2, e pode ser vista abaixo. A diferença é que a operação de expansão em Série de Taylor é feita com a matriz  $F_{ap} = A - K_{ap}B$ , com  $K_{ap}$  sendo o vetor de ganho, calculado a partir dos novos polos e exposto na Equação (6.2).

$$K_{ap} = \begin{bmatrix} 1552,6186 & 251,2653 & 6,0688 & 19,3935 & 20,6043 & 6,497 \\ 298,3744 & 49,2883 & 52,7121 & 14,9268 & 8,8416 & 4,3328 \\ 77,4019 & 12,5454 & 1,5319 & 1,1745 & 1,969 & 2,1666 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$\Phi_{ap} = \begin{bmatrix} 9,9809 \cdot 10^{-1} & 4,6919 \cdot 10^{-3} & 2,5209 \cdot 10^{-4} & 2,0465 \cdot 10^{-5} & 2,7571 \cdot 10^{-4} & 4,0398 \cdot 10^{-9} \\ -7,469 \cdot 10^{-1} & 8,7873 \cdot 10^{-1} & 9,7695 \cdot 10^{-2} & 7,9292 \cdot 10^{-3} & 1,0728 \cdot 10^{-5} & 1,5717 \cdot 10^{-6} \\ 3,1701 \cdot 10^{-4} & 2,5202 \cdot 10^{-5} & 9,9824 \cdot 10^{-1} & 4,7025 \cdot 10^{-3} & -2,0167 \cdot 10^{-8} & -2,9716 \cdot 10^{-9} \\ 1,2287 \cdot 10^{-1} & 9,7668 \cdot 10^{-3} & -6,9135 \cdot 10^{-1} & 8,8283 \cdot 10^{-1} & -7,8414 \cdot 10^{-6} & -1,1553 \cdot 10^{-6} \\ 3,5143 \cdot 10^{-7} & 2,8496 \cdot 10^{-8} & -2,0022 \cdot 10^{-7} & -1,5749 \cdot 10^{-8} & 9,9950 \cdot 10^{-1} & 4,8401 \cdot 10^{-3} \\ 1,3740 \cdot 10^{-4} & 1,1140 \cdot 10^{-5} & -7,8247 \cdot 10^{-5} & -6,1530 \cdot 10^{-6} & -1,996 \cdot 10^{-1} & 9,3657 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

### 6.2.2 Parâmetros e matriz de transição para método LQ

Para o controle por método LQ, o sistema de realimentação em malha fechada é feito de forma que o sistema passe a possuir matrizes de ponderação de estado, Q, e de controle, R. O controlador em questão busca minimizar a função apresentada na Equação (6.3).

$$J = \int_0^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (6.3)$$

Em geral, a determinação dos pesos dessas matrizes de ponderação é realizada iterativamente, considerando aspectos característicos do sistema e a resposta desejada para as entradas de controle (LUO; LAN, 1995). Assim, buscou-se de forma iterativa um sistema que apresentasse, assim como em alocação de polos, resposta rápida, dentro das limitações de projeto. Para tal, foi determinada uma matriz Q diagonal, apresentada na Equação (6.4), cujos valores  $q_{11}$ ,  $q_{33}$  e  $q_{55}$ , implicam diretamente na resposta em deslocamentos, são consideravelmente superiores aos demais (relacionados às velocidades) (LUO; LAN, 1995). Além disso, buscou-se atribuir um valor para R baixo, reduzindo as oscilações do sistema, como apresentado na Equação (6.4).

$$Q = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \quad R = 0,005 \quad (6.4)$$

O cálculo para a obtenção da matriz de transição se deu de forma análoga à utilizada para o sistema em malha aberta. A operação de expansão em Série de Taylor é feita com a matriz  $F_{LQ} = A - K_{LQ}B$ , com  $K_{LQ}$  sendo o vetor de ganho, calculado a partir dos novos polos do sistema. As Equações (6.5) a (6.7) ilustram tais novos polos e  $K_{LQ}$ .

$$K_{LQ} = \begin{bmatrix} 555,7693 & 135,28 & 62,575 & 14,7676 & 8,582 & 3,7363 \\ -300,1413 & -40,1756 & 93,9713 & 14,2771 & 15,2333 & 6,1845 \\ 32,1828 & 5,5057 & -66,9939 & -5,9662 & 34,7045 & 10,8674 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$\text{Polos}_{LQ} = [-100, 96; -38, 94; -6, 16 \pm 3,8i; -8, 05; -3, 97] \quad (6.6)$$

$$\Phi_{LQ} = \begin{bmatrix} 0,99777 & 0,0045828 & 0,00043654 & 4,0253 \cdot 10^{-5} & -2,0038 \cdot 10^{-5} & -5,5626 \cdot 10^{-6} \\ -0,85502 & 0,83909 & 0,16244 & 0,015032 & -0,0059627 & -0,0016824 \\ 0,010467 & 0,0016387 & 0,99478 & 0,0044353 & 0,0010709 & 0,00028285 \\ 3,9105 & 0,61404 & -1,9377 & 0,78769 & 0,38458 & 0,1017 \\ -0,00012823 & 0,00013023 & 0,0053571 & 0,00052032 & 0,99697 & 0,0041678 \\ 0,10927 & 0,073316 & 1,9348 & 0,18898 & -1,1239 & 0,69032 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

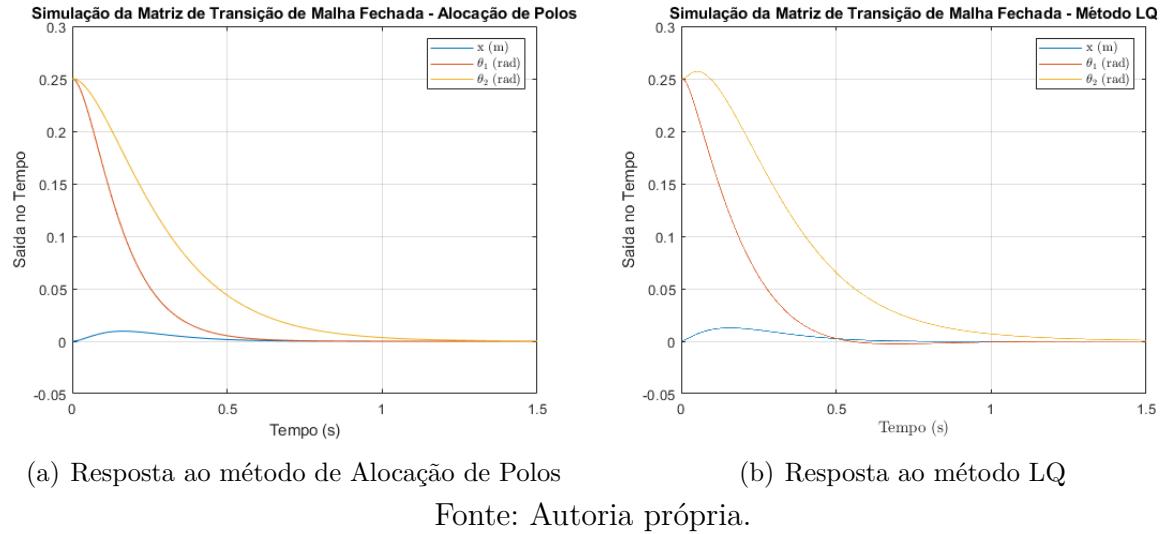
### 6.2.3 Simulação e comparação da velocidade dos sistemas em malha fechada

Após a determinação das matrizes de transição características do sistema para cada um dos casos de controle em malha fechada, foi possível simular o comportamento de resposta do sistema para condições iniciais específicas. Foram utilizadas na simulação as condições limites impostas para o Estado de Espera, já anteriormente mencionados na Seção 1.1, ou seja:  $\theta_1 = 0,25 \text{ rad}$  e  $\theta_2 = 0,25 \text{ rad}$  e os demais valores zerados.

Os gráficos de resposta no tempo quanto ao deslocamento para o caso de controle por alocação de polos e por método LQ podem ser vistos na Figura 10. Na Figura 11, observam-se as respostas referentes às saídas de velocidade. Como pode-se notar, há uma grande similaridade entre as respostas para ambos os métodos, a qual foi intencionalmente visada, buscando atingir o controle mais rápido possível dentro das limitações estabelecidas pelos motores.

O sistema leva em torno de 1,5 s para estabilização completa, para ambos os métodos de controle. Dessa forma, o resultado obtido é compatível com o tempo de espera para o jogo de tênis de mesa, havendo baixo nível de oscilação e um valor de sobressinal ínfimo.

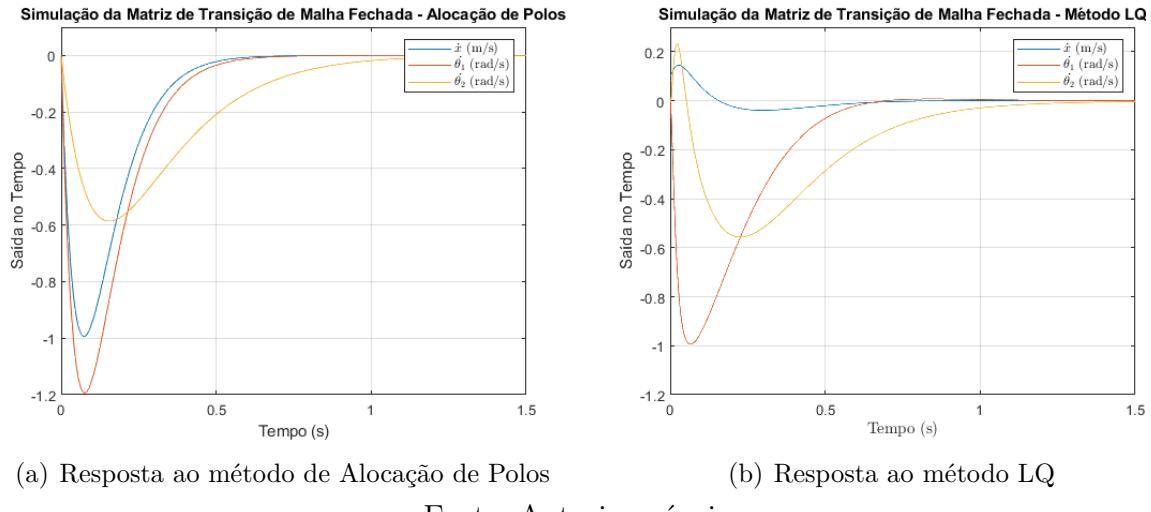
Figura 10 – Resposta dos deslocamentos no tempo do sistema



Fonte: Autoria própria.

Como se pode observar, as velocidades obtidas pelo sistema em ambos os modelos não são muito elevadas, atingindo módulos de, no máximo,  $0,45 \text{ rad/s}$  e  $0,05 \text{ m/s}$ . Isso, conforme será visto na análise dos atuadores, implicam em uma baixa necessidade de potência. Contudo, dada a rápida frenagem do sistema, os torques são mais elevados.

Figura 11 – Resposta das Velocidades no tempo do sistema



Fonte: Autoria própria.

Como esperado, ambos os métodos de controle são capazes de atingir resultados similares e adequados às restrições e requisitos do sistema. Dessa forma, o método a ser escolhido para realização do controle fica a critério do operador.

### 6.3 Observador de Estado

Conforme já abordado na Seção 4.2.5, o sistema aqui estudado dispõe de apenas três saídas observadas, referentes ao deslocamento linear  $x$  e às velocidades angulares  $\dot{\theta}_1$  e  $\dot{\theta}_2$ , sendo ratificado na Seção 6.1 o fato de que o sistema é completamente observável. Dessa forma, faz-se necessário o projeto de um observador de estados, capaz de eficientemente devolver ao sistema estimações precisas relativas aos demais estados não observados pelos sensores  $\hat{x}$ ,  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$ . Conforme também já citado em Seção 6.2.1, o princípio da separação permite que o projeto do controlador seja feito de maneira independente ao do observador.

Sendo assim, implementou-se esse recurso por alocação de polos e pelo método LQ, de maneira similar ao realizado com os controladores. Quanto à simulação a condições iniciais, pode-se simular o comportamento do sistema com a ferramenta da matriz de transição já apresentada e utilizando também a matriz  $\Lambda$  descrita na Equação (6.8).

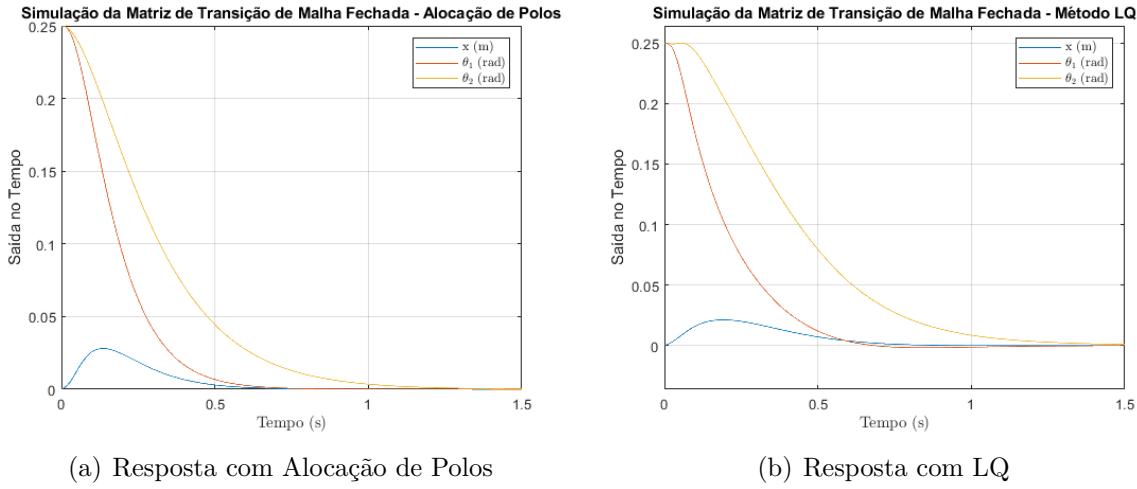
$$\Lambda = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_o C \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Com isso, tentou-se inicialmente elaborar o observador/regulador utilizando os polos previamente alocados e selecionando os polos de observação com módulo dez vezes maior que os anteriores ( $\mu_1 = -55$ ,  $\mu_2 = -75$ ,  $\mu_3 = -95$ ,  $\mu_4 = -115$ ,  $\mu_5 = -135$ ,  $\mu_6 = -155$ ). Novamente, escolheu-se, aqui, apenas polos reais e de módulos bastante elevados, com o intuito de obter-se uma convergência rápida e direta do erro para zero. Para as matrizes do observador pelo método LQ, foram utilizados valores elevados para os valores referentes às variáveis não medidas, visando reduzir o tempo de convergência do erro. Para tanto, utilizou-se a matriz de ponderação  $Q$  diagonal com valores:  $q_{11} = 1$ ,  $q_{22} = 100$ ,  $q_{33} = 100$ ,  $q_{44} = 1$ ,  $q_{55} = 100$  e  $q_{66} = 1$ ; e mantendo  $R = 0,005$ .

Os resultados das simulações em matriz de transição encontram-se nas Figuras 12 e 13.

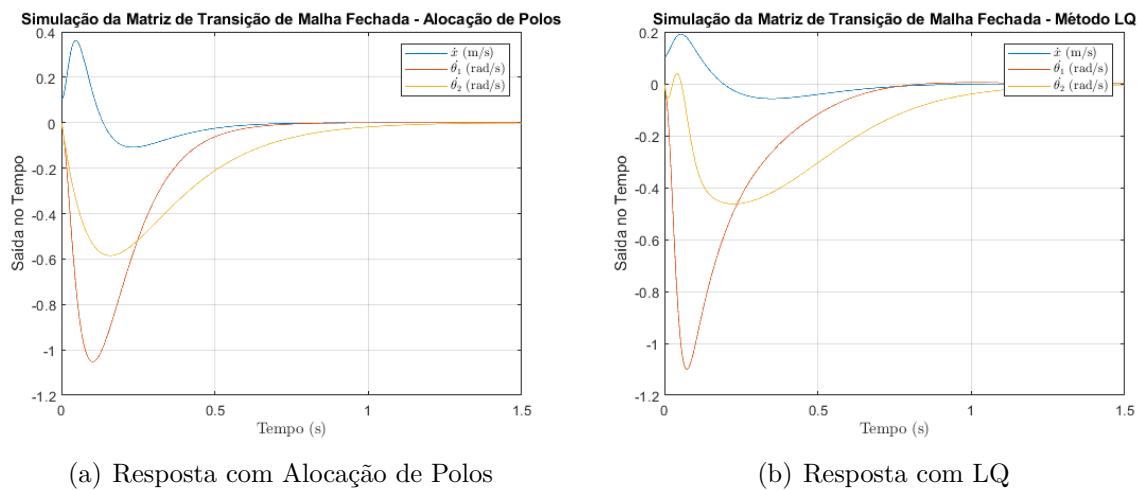
Como se pode observar, as respostas obtidas são muito similares aos valores apresentados para o sistema sem observador. Isso é justificado pela convergência muito rápida dos erros iniciais dos parâmetros estimados, os quais convergem em aproximadamente 0,15 e 0,4 segundos para AP e LQ, respectivamente, como apresentado na Figura 14. Essa resposta quase instantânea, implica em uma variação da resposta do sistema quase imperceptível.

Figura 12 – Resposta no tempo dos deslocamentos com observador



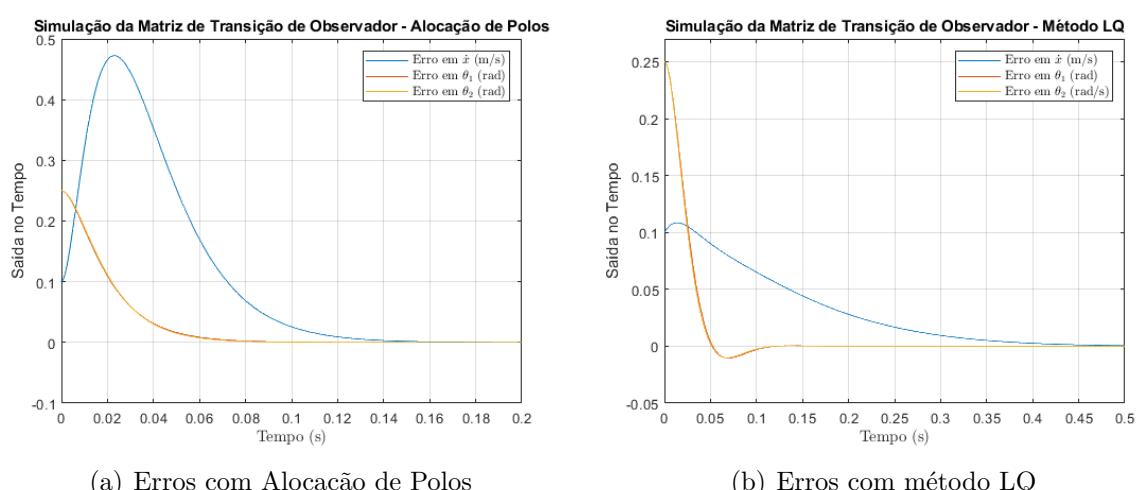
Fonte: Autoria própria.

Figura 13 – Resposta no tempo das velocidades com observador



Fonte: Autoria própria.

Figura 14 – Convergência dos erros do observador



Fonte: Autoria própria.

Dessa forma, conclui-se que o controlador e o observador projetados são efetivamente adequados para o propósito estipulado. É interessante, ainda, avaliar o comportamento do sistema num problema de seguidores e, principalmente, averiguar se há e quais são os atuadores de mercado mais apropriados para o braço robótico.

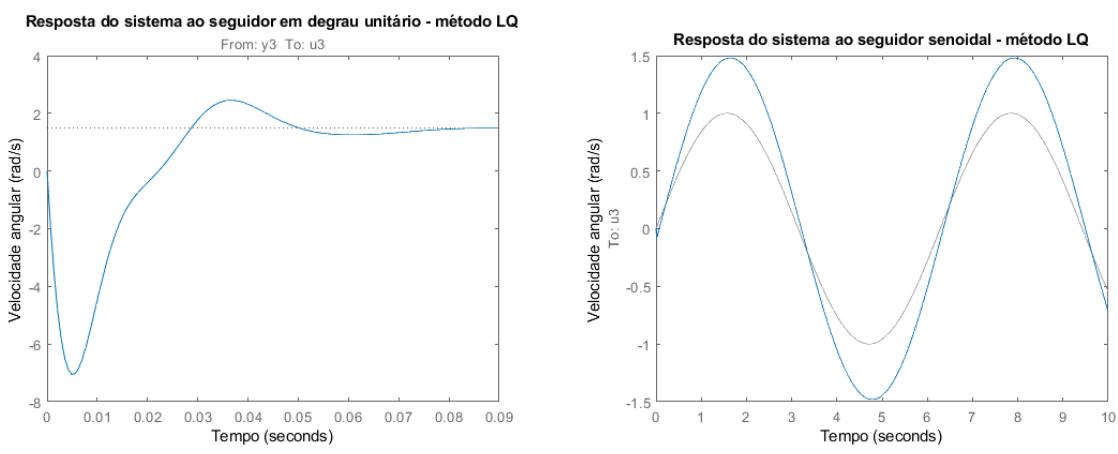
## 6.4 Seguidores de referência

Além do problema de regulador, estudado nas seções anteriores, é fundamental que se avalie a resposta do sistema ao ser requisitado que ele siga uma trajetória, seja ela constante ou móvel. Essa ferramenta permite avaliar a robustez do controlador projetado, além de representar o comportamento do sistema em condição diferente a apenas retornar ao repouso, como no caso do regulador.

Dessa forma, com o intuito de facilitar a visualização da resposta, optou-se por simular uma das nove funções de transferência obtidas já do modelo de espaço de estados controlado e observado pelo método linear quadrático, correspondente à relação entre a entrada  $T_2$  e a saída  $\dot{\theta}_2$ , com o fito de observar se o sistema de fato segue as trajetórias impostas.

Assim, para a trajetória constante, observou-se a resposta do sistema a uma entrada do tipo degrau unitário, para a qual a resposta deveria ser eficientemente estabilizada na amplitude unitária. Já para a trajetória móvel, a entrada escolhida foi senoidal de frequência angular de  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , sendo esperado que o sistema acompanhe esse sinal de entrada. A Figura 15 exibe o comportamento do sistema para ambos os casos.

Figura 15 – Resposta da função de transferência  $G_{T_2, \dot{\theta}_2}$  aos sinais constante e móvel.



(a) Resposta ao sinal constante - degrau unitário    (b) Resposta ao sinal variável no tempo - senoidal  
Fonte: Autoria própria.

A observação da figura permite inferir que, para a referência constante, a resposta é bastante esdrúxula, estabilizando-se em um valor próximo, mas não exatamente igual a

1 (valor da referência), o que caracteriza um erro considerável em regime permanente. Já para o sinal móvel, a resposta apresentada é melhor e bem sincronizada com o sinal de entrada, com a única discrepância sendo a presença de sobressinais significantes nos picos.

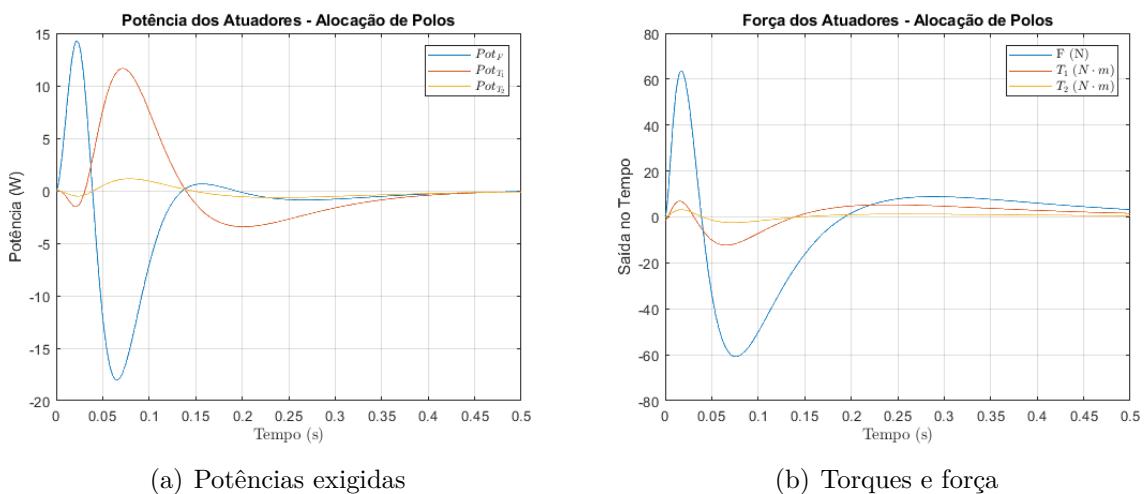
Um olhar crítico para as respostas apresentadas na Figura 15 indica que, embora tenha apresentado excelentes respostas para condições iniciais, o que compreende o cerne do problema estudado, o conjunto controlador/observador projetado não é o mais adequado para o problema de seguidor.

## 6.5 Definição dos Atuadores

A partir dos resultados obtidos anteriormente para o problema do regulador, é possível e necessário realizar o dimensionamento dos atuadores capazes de movimentar o sistema de maneira adequada. Assim, estimou-se as potências e os torques exigidos ao longo do movimento, de forma que o resultado pode ser observado nas Figuras 17(a) e 17(b).

Esse cálculo foi feito tomando os valores numéricos das acelerações  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{\theta}_1$  e  $\ddot{\theta}_2$  através de um método numérico de derivação das velocidades. Com o auxílio das Equações (4.11) a (4.13) e com estes valores numéricos, pode-se calcular os esforços exigidos pelos motores (força, no caso do atuador alocado para movimentar a base, e torque, no caso dos atuadores responsáveis por rotacionar as duas barras) e, ao multiplicar esses valores pelas respectivas velocidades, obtém-se as potências ao longo do tempo.

Figura 16 – Potências, Toques e Forças exigidas dos atuadores ao longo do movimento



Fonte: Autoria própria.

Assim, é possível elaborar a Tabela 4 contendo os valores máximos exigidos de cada um dos atuadores. A saber, identificou-se como motor 1 o atuador alocado na base para movimento horizontal do mesmo; motor 2 para o atuador responsável pela rotação

da barra superior e motor 3 para aquele que rotaciona a barra inferior, sendo alocado na ponta da barra superior.

Tabela 4 – Valores máximos exigidos de cada um dos atuadores.

Atuador	Potência	Esforço (Força/Torque)	Velocidade (linear/angular)
Motor 1	18,03 W	63,57 N	0,36 m/s
Motor 2	11,64 W	12,29 Nm	10,03 rpm
Motor 3	1,14 W	3,16 Nm	5,58 rpm

Com isso, foi escolhido para o motor 1, o modelo I56 de 1/8 cv de potência da fabricante Ibram®, já conhecida pelo grupo. As informações a respeito dele são expostas na Tabela 5. Para o motor 2, escolheu-se o modelo Motoredutor 82 da fabricante R11®, cujas informações estão expostas na Tabela 6. Por fim, para o motor 3, escolheu-se o modelo de número de peça 111.3761.30.00E da fabricante DOGA®, cujas informações estão expostas na Tabela 7. Para este último, os maiores limitantes são o peso (que deve ser baixo o suficiente para atender às hipóteses simplificadores estabelecidas no início do relatório) e o torque, que é relativamente alto para a potência requerida.

Mais informações acerca dos atuadores estão disponíveis no Apêndice E.

Tabela 5 – Características do Motor 1

Potência	91,9 W	Frequência de rede	60 Hz
Tensão	110/220 V	Corrente	1,00/0,55 A
Nº de Polos	4	Massa aproximada	2,9 kg
Rotação síncrona	1620 rpm	Material da carcaça	Alumínio

Fonte: Ibram®.

Tabela 6 – Características do Motor 2

Voltagem	12V DC	Rotação síncrona	82 rpm
Corrente máxima	20 A	Corrente nominal	5A
Torque nominal	6 Nm	Torque máximo	35 Nm
Massa aproximada	1,5 kg	Dimensões aproximadas	0,200x0,065x0,060 m

Fonte: R11®.

Tabela 7 – Características do Motor 3

Potência	20W	Voltagem	24V DC
Corrente nominal	20A	Torque máximo	5 Nm
Rotação síncrona	40 rpm	Dimensões aproximadas	0,178x0,101x0,060 m

Fonte: DOGA®.

# 7 CONTROLE CLÁSSICO

## 7.1 Função de Transferência analisada

Como já discutido na Seção 5.1.1, o sistema dispõe de nove funções de transferência, que relacionam as três entradas com as três saídas. Para a análise do sistema utilizando ferramentas de controle clássico, faz-se necessário escolher apenas a mais relevante para o sistema para ser analisada. Com isso, opta-se por tomar como função a ser estudada  $G_{T_2, \dot{\theta}_2}$ , explicitada abaixo.

$$G_{T_2, \dot{\theta}_2} = \frac{7,281s^5 + 0,01002s^4 + 238,1s^3 + 0,1695s^2}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (7.1)$$

Tal função foi adotada para análise por duas principais razões. Primeiramente, relaciona uma entrada com uma das saídas com as quais possuem relação mais direta, isto é, o torque aplicado no motor 3 tem uma influência visível e óbvia sobre a angulação que a segunda barra faz com a vertical. Ademais, entende-se que o sistema exige mais precisão e velocidade nas saídas relacionadas com  $\dot{\theta}_2$  do que, por exemplo, nas saídas de  $x$  ou  $\dot{x}$ , pois variam mais ao longo do movimento e impactam diretamente na forma com a qual a raquete vai se portar no estágio modelado. Dessa forma, entende-se que a função de transferência  $G_{T_2, \dot{\theta}_2}$  é a ideal para essa análise, sendo problemática na medida em que representa uma saída que se encontra na “ponta” do sistema e está bastante sujeita a todos os efeitos de inércia dos outros corpos e, portanto, um controle efetivamente realizado com ela apresenta robustez e otimização do controlador.

## 7.2 Sintonização do Controlador PID

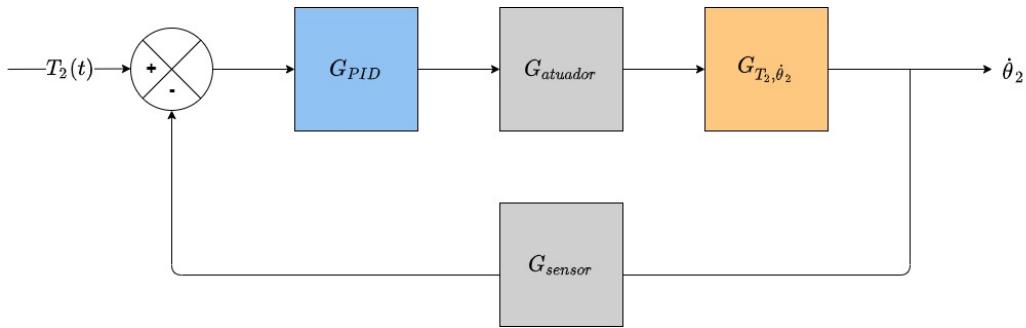
A seguir, serão avaliados diferentes métodos de sintonia para projetar um controlador do PID para o sistema. Tal controlador pode ser sintetizado pela Equação (7.2) e pela Figura 17. Pela equação citada, vê-se que a função de transferência do sistema resultante pode ser entendida como a função original da planta acrescida de um par de zeros complexos e de um integrador puro (polo na origem do plano s).

Ressalta-se que o controlador PID não é, necessariamente, a melhor opção para qualquer sistema, podendo haver casos em que um controlador PI ou um compensador, representado apenas por um polo e um zero reais, pode ser mais adequado. Assim, é necessário uma análise para entender quais ganhos (integral, derivativo ou proporcional)

são necessários para o controlador PID. Quanto ao ganho derivativo, avaliar-se-á sua necessidade conforme os ganhos  $K_P$  e  $K_I$  forem sintonizados por cada um dos métodos.

$$\begin{aligned} u(t) &= K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int_0^{\tau} e(t) dt \\ U(s) &= K_p E(s) + K_d E(s)s + K_i \frac{E(s)}{s} \\ \therefore G_{PID} &= \frac{K_I + K_P \cdot s + K_D \cdot s^2}{s} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Figura 17 – Diagrama de blocos simplificado para controlador PID na planta.



Fonte: Autoria própria.

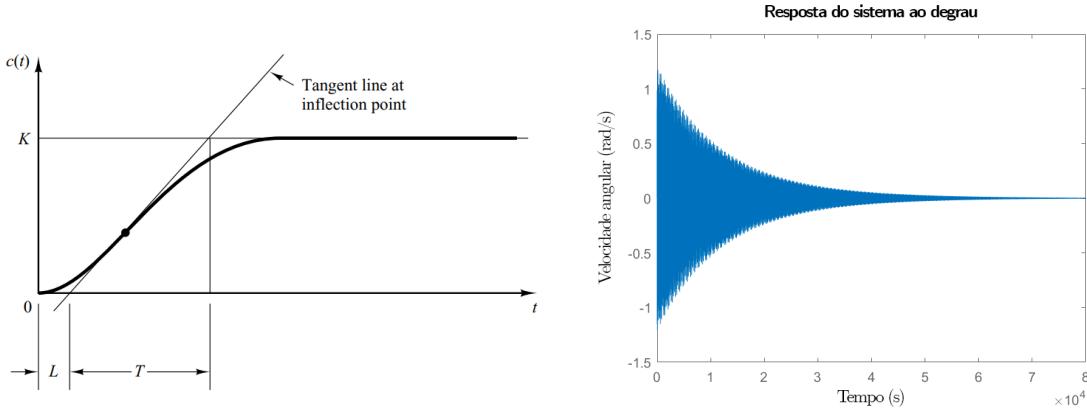
### 7.2.1 Método de Ziegler-Nichols

Ziegler e Nichols (1942) estabeleceram dois métodos para a determinação dos ganhos de controladores P, PI e PID operando em malha fechada. Tais métodos são apresentados a seguir.

#### 7.2.1.1 Método da curva de reação

Para este primeiro método, tem-se como requisito que a resposta em malha aberta para uma entrada em degrau possua um formato de  $S$ , exemplificado na Figura 18. Porém, para a função analisada, a resposta possui formato muito distinto, impossibilitando o uso desse método. Ademais, Ogata (1982) indica que esse requisito só será atingido caso o sistema não possua integradores nem polos conjugados complexos dominantes, o que não é o caso do presente sistema.

Figura 18 – Resposta em formato  $S$  esperada pelo método e resposta ao degrau da FT estudada.

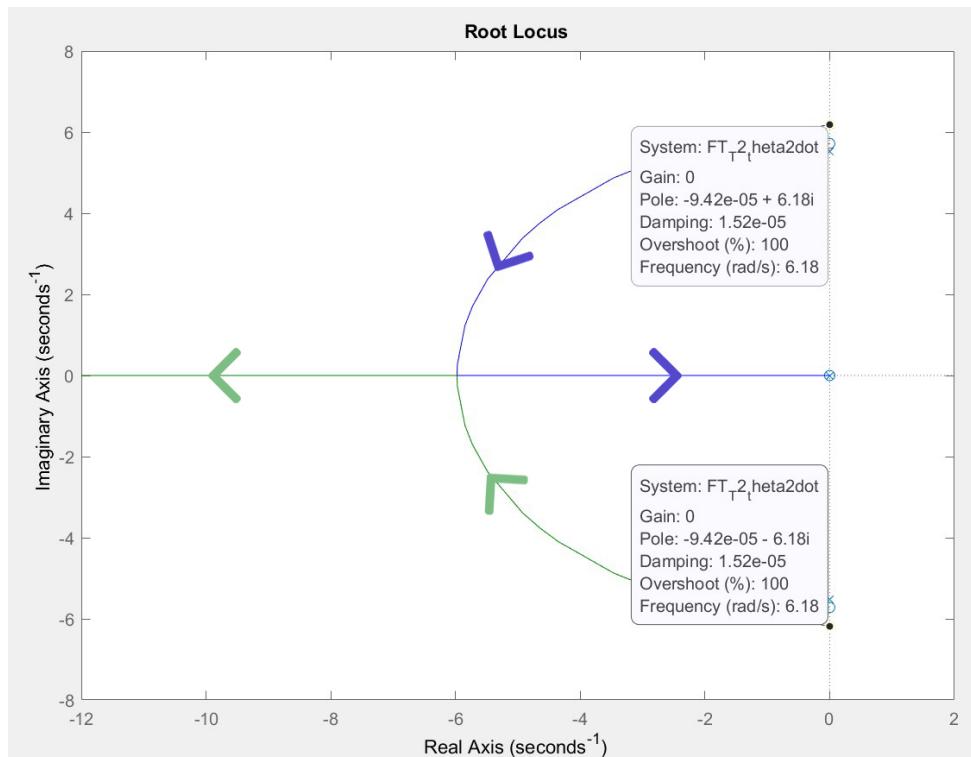


Fonte: (OGATA, 1982) e autoria própria.

### 7.2.1.2 Método do Ganho Limite

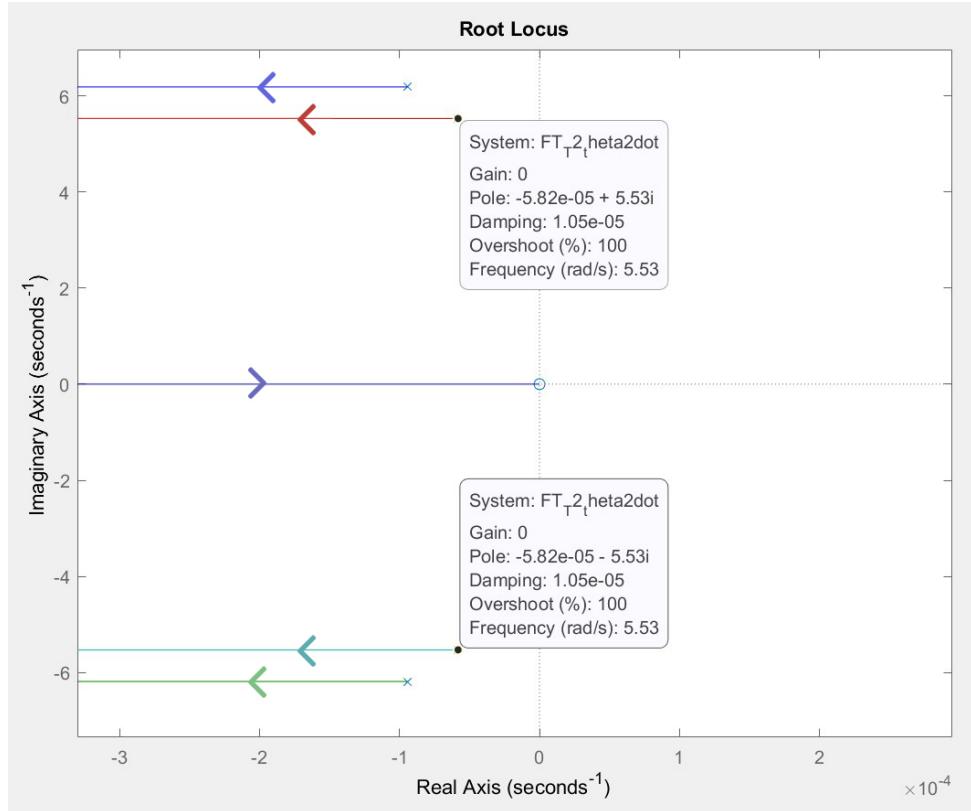
O segundo método proposto por Ziegler-Nichols se baseia em determinar o ganho crítico de forma que o sistema em malha fechada produza uma resposta harmônica, puramente oscilatória. Porém, ao traçar o lugar das raízes para a função vê-se, na Figura 19 em detalhe, que para nenhum ganho o sistema assume tal característica, uma vez que não existe  $K_{cr}$  finito para o qual os polos estejam no eixo imaginário. Isso é reiterado graficamente nas Figuras 19 e 20.

Figura 19 – Lugar das Raízes para a FT estudada



Fonte: Autoria própria.

Figura 20 – Detalhe das proximidades do eixo imaginário



Fonte: Autoria própria.

### 7.2.2 Sintonia por Lugar das Raízes

A sintonia do controlador via Lugar das Raízes (LR) foi feita utilizando o ambiente *Control System Designer* do MATLAB®. Nele, é possível editar o LR plotado ajustando valores de ganhos e adicionando polos e zeros, enquanto a resposta ao degrau é atualizada simultaneamente. Dessa forma, com ele, os ganhos puderam ser sintonizados de forma a garantir a melhor resposta ao degrau possível, ou seja, a resposta que apresentasse menor tempo de acomodação e menor erro no regime permanente.

Primeiramente, considerou-se o caso de se projetar apenas um ganho proporcional, apenas alterando os valores de ganho na diagrama de Lugar das Raízes. O próximo passo foi projetar um controlador do tipo PI e outro do tipo PID, ainda seguindo a mesma metodologia de alterar o LR no ambiente *Control System Designer* observando as respostas. Para sintonizar um PI acrescentou-se ao LR um integrador puro e um zero real; já para o caso PID, acrescentou-se um integrador e um zero complexo.

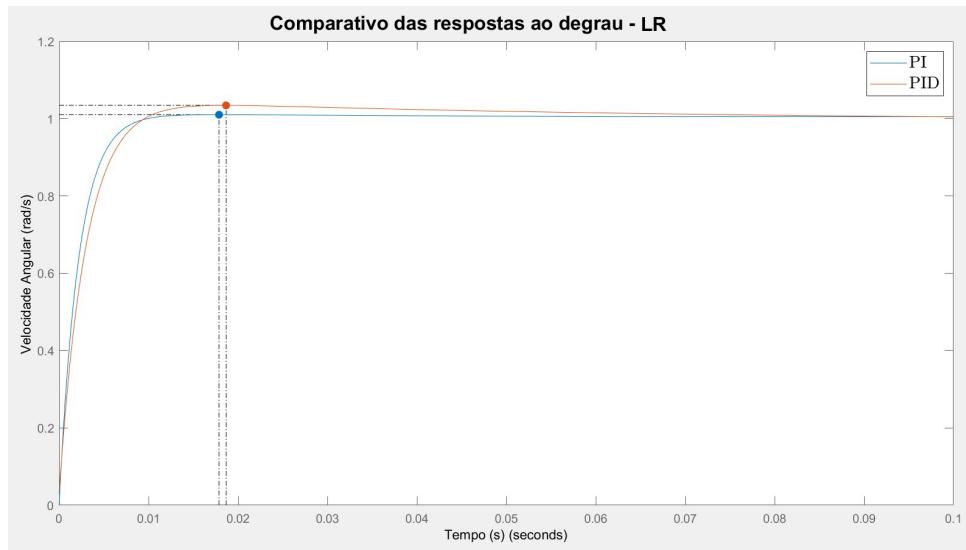
Com isso, obteve-se os valores de ganho apresentados na Tabela 8. Com tais valores, obteve-se as respostas apresentadas na Figura 21. Ainda na Tabela 8, estão representadas as características de resposta de cada um dos sistemas projetados.

Tabela 8 – Diferentes projetos de controladores PID pelo método LR.

Controlador	$K_P$	$K_I$	$K_D$	Tempo de pico	Tempo de acomodação	Erro aproximado no RP
P	1,65	-	-	0,1662	1,0919	0,9966
PI	63,05	355,8	-	0,0179	0,0521	0,0061
PID	49,20	782,1	0,86	0,0187	0,0660	0,0013

Com os valores apresentados acima, e reiterando as restrições e os requisitos do projeto estabelecidos, toma-se o sistema com controlador PI como o mais adequado.

Figura 21 – Resposta ao degrau para sistema com controlador PID e PI sintonizado via LR



Fonte: Autoria própria.

### 7.2.3 Sintonia via *PID Tuner*

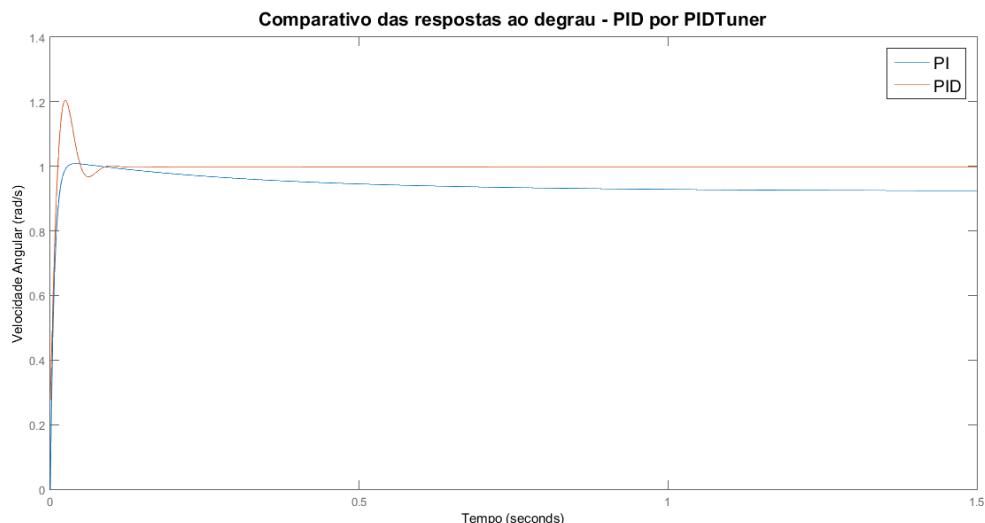
Para efeitos de comparação adicional, faz sentido a utilização da ferramenta *PID Tuner* do MATLAB®, a qual permite o projeto de controladores iterativamente a partir do ajuste da velocidade da resposta e da robustez do sistema, observando a resposta ao degrau para a malha fechada. Dessa forma, analogamente à sintonia por LR, foram projetados controladores PI e PID, de modo a comparar as respostas. Na Tabela 9, observa-se os ganhos projetados e algumas características das suas respectivas respostas ao degrau.

Tabela 9 – Diferentes projetos de controladores a partir do *PID Tuner*.

Controlador	$K_P$	$K_I$	$K_D$	Tempo de pico	Tempo de acomodação	Erro aproximado no RP
PI	21,6	59,5	-	0,0415	0,5515	0,0753
PID	19,5	1822,4	0,05	0,0242	0,0756	0,0027

A análise dos dados da tabela revela, em contrapartida ao observado na sintonização por Lugar das Raízes, que o controlador projetado por PID apresenta uma resposta consideravelmente melhor que o PI, sendo melhor em todos os parâmetros escolhidos. É interessante ressaltar, também, que o controlador PI projetado nesse ambiente não foi tão eficiente para mitigar o erro em regime permanente. Os gráficos das respostas ao degrau supracitadas encontram-se na Figura 22.

Figura 22 – Resposta ao degrau para sistema com controlador PID e PI sintonizado via *PID Tuner*.



Fonte: Autoria própria.

### 7.2.4 Sintonia por Alocação de Polos

Tal método de projeto de controle consiste na determinação dos ganhos proporcional, integrativo e derivativo com o fito de tornar a equação característica do sistema em malha fechada igual à correspondente a um sistema com os polos escolhidos pelo projetista, a partir da resolução de um sistema linear. Há de se notar, no entanto, que esse procedimento, pela limitação no número de incógnitas, é exato apenas para sistemas de baixa ordem, o que não é o caso deste trabalho e portanto exige uma aproximação da solução via método dos mínimos quadrados, redução de ordem do sistema ou uma combinação dos dois.

#### 7.2.4.1 Redução de Ordem

Conforme já destacado na seção anterior, uma redução de ordem adequada do sistema causa uma redução do número de incógnitas do sistema a ser resolvido e, consequentemente, melhora a aproximação pelo método dos mínimos quadrados, o MMQ.

Com isso, utilizou-se o método da norma de Hankel, no qual busca-se a observação dos autovalores do sistema balanceado, eliminando-se os menores valores e verificando

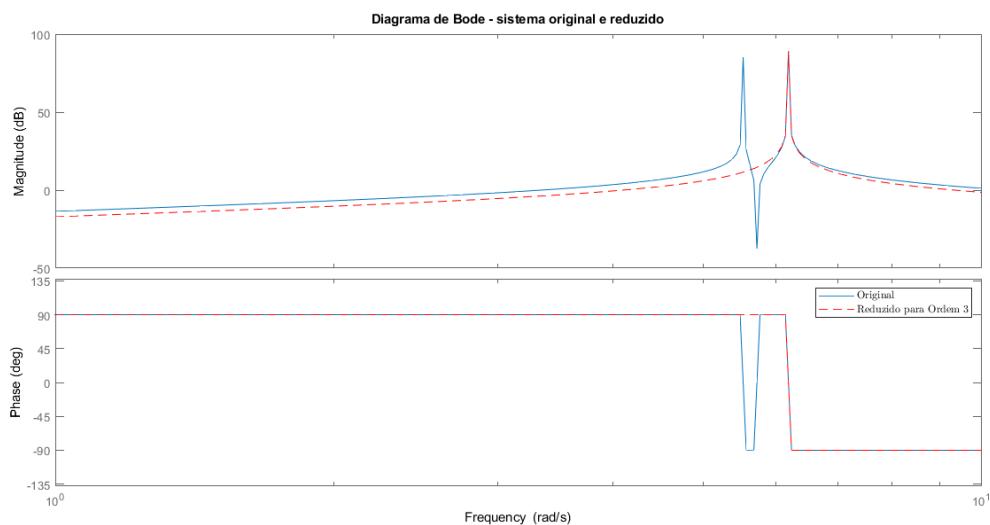
sempre a validade da redução via diagrama de Bode. Dessa forma, utilizando os comandos *balreal()* e *modred()* do MATLAB ®, obtém-se os valores  $g$  da norma de Hankel descritos na Equação (7.3).

$$g' = 1 \cdot 10^4 \times [Inf \ 1,3890 \ 1,3890 \ 0,8786 \ 0,8786 \ 0] \quad (7.3)$$

Dessa forma, observa-se que, tirando o último valor, nulo, e o primeiro, infinito, não há discrepâncias muito grandes entre os valores intermediários, não havendo eliminações óbvias entre eles. Como eliminar apenas o polo em zero reduziria pouco a ordem do sistema e eliminar todos os valores excetuando-se o infinito reduzi-la-ia demais, optou-se pelo teste de uma redução intermediária, eliminando-se os três últimos valores e chegando-se ao sistema reduzido explicitado na Equação (7.4). Como supracitado, a avaliação da adequação do sistema reduzido é realizada a partir da comparação das respostas de ambos os sistemas no diagrama de Bode, conforme ilustrado pela Figura 23, na qual pode ser observado que o sistema reduzido representa bem o original em sua faixa de frequências relevante, mas não contempla algumas variações bruscas de ganho e de fase, entre as duas frequências naturais.

$$G_{r,3} = \frac{5,236s^2 + 0,0237s}{s^3 + (1,885 \cdot 10^{-4})s^2 + 38,25s} \quad (7.4)$$

Figura 23 – Comparaçõa entre as respostas em frequênciā do sistema original e reduzido à terceira ordem.



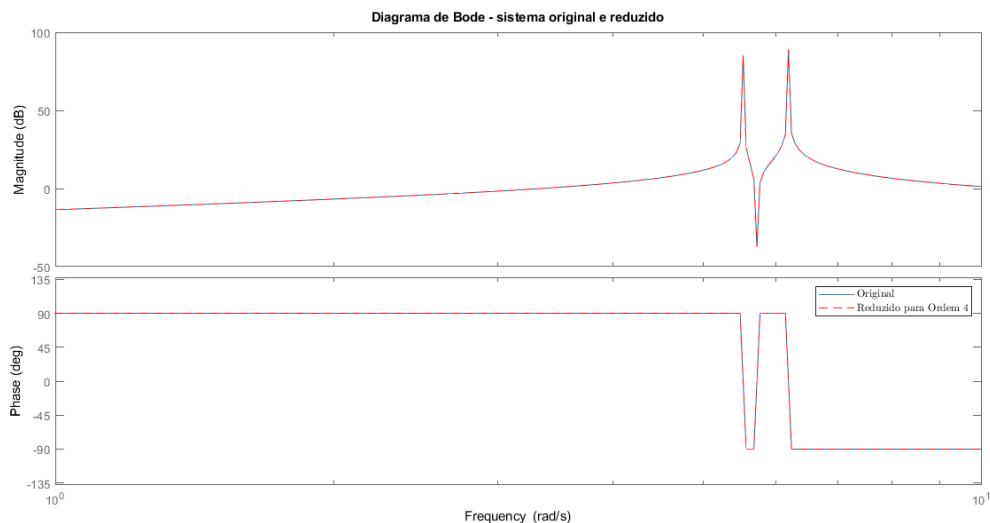
Fonte: Autoria própria.

Observa-se que, da tentativa de obtenção de uma função de transferência ainda reduzida, mas de ordem maior e mais aproximada da original, decorre que necessariamente

haverá uma redução de precisão advinda do MMQ, ao passo que a própria redução de ordem, se não contemplar tão bem o sistema também pode ser fonte de imprecisões no projeto do controlador. Por isso, optou-se por, utilizando o ambiente *Model Reducer* do MATLAB®, obter-se uma outra aproximação, de quarta ordem, do sistema, por meio ainda do método da norma Hankel e garantindo uma similaridade maior justamente na faixa de frequências entre 1 e 10 rad/s. Com isso, obtém-se a função de transferência reduzida explicitada na Equação (7.5) e também a ratificação da aproximação muito maior através no diagrama de Bode da Figura 24. Com essas duas funções de transferência reduzidas, será operacionalizada a sintonia por alocação de polos, de modo a averiguar-se qual fornece a melhor resposta.

$$G_{r,4} = \frac{7,281s^3 + 0,004831s^2 + 238,1s - 1,32 \cdot 10^{-10}}{s^4 + 0,0003049s^3 + 68,78s^2 + 0,01021s + 1168} \quad (7.5)$$

Figura 24 – Comparação entre as respostas em frequência do sistema original e reduzido à quarta ordem.



Fonte: Autoria própria.

#### 7.2.4.2 Método dos Mínimos Quadrados e obtenção dos ganhos do controlador

Com isso, foram elaboradas rotinas no MATLAB® e em *Python* para a resolução de ambos os sistemas sobredeterminados referentes aos dois sistemas reduzidos. Assim, partindo-se de polos similares aos alocados na Seção 6.2.1, realizaram-se iterações por tentativa e erro para a determinação de polos a serem alocados que fornecessem uma resposta adequada. Novamente, vale ressaltar que, da imprecisão dos resultados via MMQ e também da redução de ordem, decorre que os valores obtidos para os ganhos não tornam de fato a resposta do sistema como a pretendida. A sequência de polos iterados e resultados encontram-se, respectivamente nas Tabelas 10 e 11, observando-se que, como a função

de transferência reduzida de terceira ordem apresenta um polo em zero, só foi possível a escolha de três polos para esse caso. A Figura 25 também fornece uma interpretação de todas as tentativas realizadas, exceto a primeira, que demora consideravelmente mais que as outras para convergir.

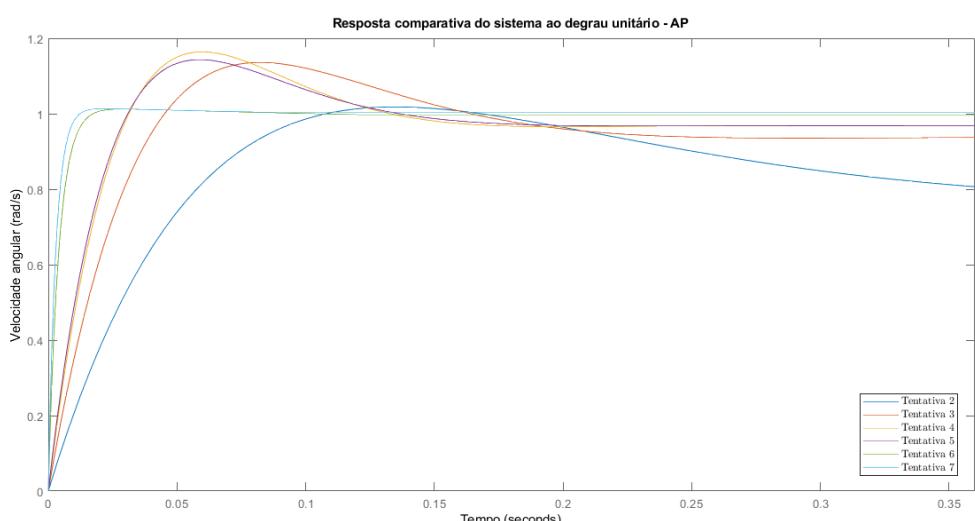
Tabela 10 – Valores de polos utilizados, já considerando dois polos em zero.

Iterações	Ordem da FTMA reduzida	Polo 1	Polo 2	Polo 3	Polo 4	Polo 5
1	3	-1,5	-3,5	-11,5	-	-
2	3	-5,5	-7,5	-9,5	-	-
3	3	-10+10i	-10-10i	-20	-	-
4	3	-15+15i	-15-15i	-25	-	-
5	3	-15	-20	-25	-	-
6	4	-5,5	-7,5	-9,5	-11,5	-13,5
7	4	-7,5+7,5i	-7,5-7,5i	-9,5	-11,5	-13,5

Tabela 11 – Valores encontrados e resultados do degrau para o controlador PID por AP.

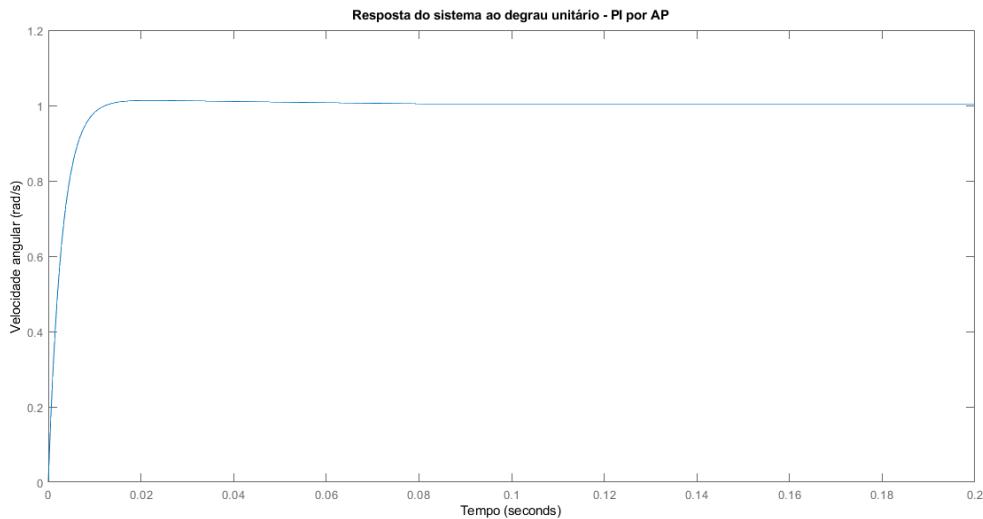
Iterações	$K_P$	$K_I$	$K_D$	Tempo de pico	Tempo de acomodação	Erro aproximado no RP
1	3,15	4,72	$1,07 \cdot 10^{-6}$	$3,26 \cdot 10^3$	$1,94 \cdot 10^5$	0,0019
2	4,30	24	$6,93 \cdot 10^{-6}$	0,1352	0,4126	0,229
3	7,62	111	$7,08 \cdot 10^{-5}$	0,0831	0,366	0,062
4	10,50	232	$2 \cdot 10^{-4}$	0,0606	0,284	0,03
5	11,43	224	$10^{-4}$	0,0585	0,1662	0,032
6	33,60	144	-	0,0294	0,0814	0,0125
7	47,20	274	-	0,0222	0,0774	0,0099

Figura 25 – Comparaçāo das respostas ao degrau unitário das tentativas realizadas.



A partir da observação dos dados de ambas as tabelas, é interessante notar que o próprio método dos mínimos quadrados para o sistema reduzido à quarta ordem indica um controlador PI, com os ganhos  $K_D$  podendo ser considerados bem baixos. Além disso, vê-se que a sétima iteração foi a que forneceu os melhores resultados e cuja resposta ao degrau encontra-se isolada na Figura 26.

Figura 26 – Resposta ao degrau da melhor iteração por AP.



Fonte: Autoria própria.

### 7.2.5 Sintonia por ITAE

A sintonização por controle ótimo, ou índice ITAE, utiliza de coeficientes pré-determinados que acarretam no melhor desempenho de um sistema dada uma entrada em degrau ou rampa. Dessa forma, o primeiro passo é identificar a ordem do sistema controlado, o que se obtém facilmente realizando multiplicando a função de transferência do sistema (Equação (7.1)) pela função do ganho PID (Equação (7.2)):

$$GH_{PID} = G_{T_2, \dot{\theta}_2} \cdot \frac{K_I + K_P \cdot s + K_D \cdot s^2}{s}$$

Como nosso sistema original apresenta um denominador de sexta ordem e a função de PID adiciona um novo polo, o sistema se torna de sétima ordem. Sendo assim, os coeficientes do controle ótimo seriam:

$$\text{Coef: } s^7 + 2,217\omega_n s^6 + 6,745\omega_n^2 s^5 + 9,349\omega_n^3 s^4 + 11,580\omega_n^4 s^3 + 8,680\omega_n^5 s^2 + 4,323\omega_n^6 s + \omega_n^7$$

Para poder obter uma comparação direta do sistema com estes coeficientes, contudo, seria necessária manipulação algébrica de filtro, para reduzir o numerador, assim como

solucionar um sistema sobre-determinado de sete equações. Claramente, este procedimento exige grande custo, se tratando de um sistema com tamanha ordem, não sendo pois o procedimento mais adequado.

Dessa forma, o índice ITAE será aplicado de forma iterativa, utilizando-se de sua definição, apresentada na Equação (7.6), onde  $t$  representa o tempo decorrido e  $e(t)$  o erro ao longo do tempo.

$$ITAE = \int_0^T t \cdot |e(t)| dt \quad (7.6)$$

Conhecido o diagrama de local das raízes do sistema, será selecionada uma margem de ganhos que levam os polos à maior estabilidade. Com essa margem, será realizado um processo iterativo de alteração dos valores de ganhos do controle PID, buscando determinar o conjunto que implica em menor índice ITAE, ou seja, menor acúmulo de erro.

Dessa forma, foram analisadas inúmeras combinações de ganhos para as seguintes faixas de valores:

$$0 \leq K_D \leq 0,1 \quad 55 \leq K_P \leq 65 \quad 850 \leq K_I \leq 1250$$

Os melhores resultados encontrados são apresentados na Tabela 12.

Tabela 12 – 20 melhores resultados do método iterativo com ITAE

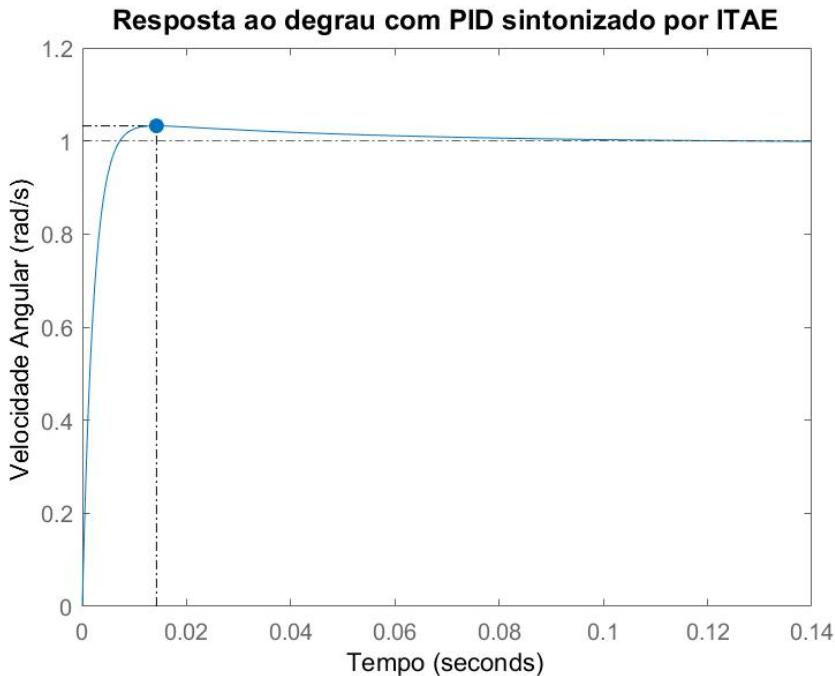
$K_D$	$K_P$	$K_I$	ITAE
0	65	1250	0,1960
0,0100	65	1250	0,1960
0,0200	65	1250	0,1960
0,0300	65	1250	0,1960
0,0400	65	1250	0,1960
0,0500	65	1250	0,1961
0,0600	65	1250	0,1961
0,0700	65	1250	0,1961
0,0800	65	1250	0,1961
0,0900	65	1250	0,1962
0,1000	65	1250	0,1963
0	60	1250	0,1970
0,0100	60	1250	0,1970
0,0200	60	1250	0,1970
0,0300	60	1250	0,1970
0,0400	60	1250	0,1971
0,0500	60	1250	0,1971
0,0600	60	1250	0,1971
0,0700	60	1250	0,1972
0,0800	60	1250	0,1973

Com isso, observou-se que a melhor combinação seria o uso dos valores:

$$K_D = 0 \quad K_P = 65 \quad K_I = 1250$$

Como se pode observar, o melhor resultado apresentou valor de  $K_D$  nulo, o que se assemelha ao resultado obtido com controle por LR, como era de se esperar.

Figura 27 – Resposta ao degrau com uso do método ITAE



Fonte: Autoria própria.

Uma validação final do resultado obtido foi feita com uso da resposta ao degrau. Novamente, com uso do *software* MATLAB®, foi obtida a resposta apresentada na Figura 27. As características de tal resposta estão explicitadas na Tabela 13

Tabela 13 – Características da resposta ao degrau do PID sintonizado por ITAE

Tempo de pico	Tempo de acomodação	Erro aproximado no RP	Pico
0,0142	0,0462	$3,2436 \cdot 10^{-4}$	1,0325

## 7.2.6 Sintonização de um Compensador

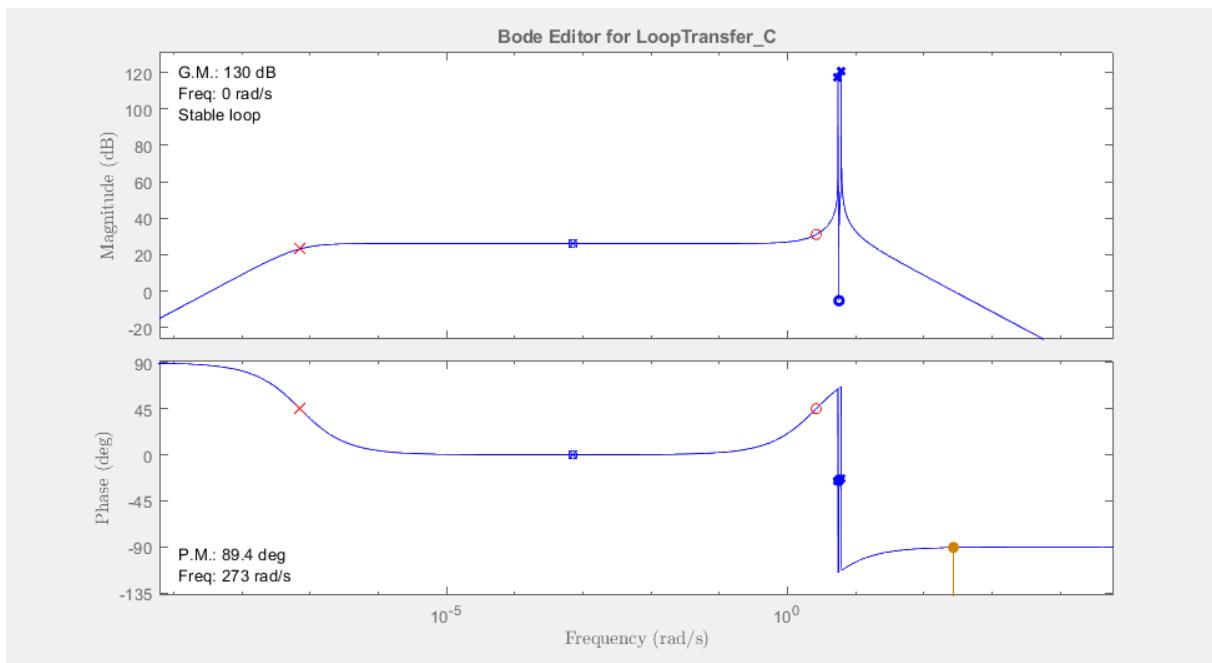
Até aqui, manteve-se o foco do projeto inteiramente no projeto de controladores PI ou PID, cuja função de transferência já foi explicitada em Equação (7.2), composta de um integrador puro e um par de zeros complexos. Nesta seção, realiza-se o projeto do

controlador a partir de um compensador, cujo modelo base está exposto na Equação (7.7), compreendendo um zero e um polo, ambos reais, além de um ganho proporcional.

$$G_{comp} = K_c \cdot \frac{s + z}{s + p} \quad (7.7)$$

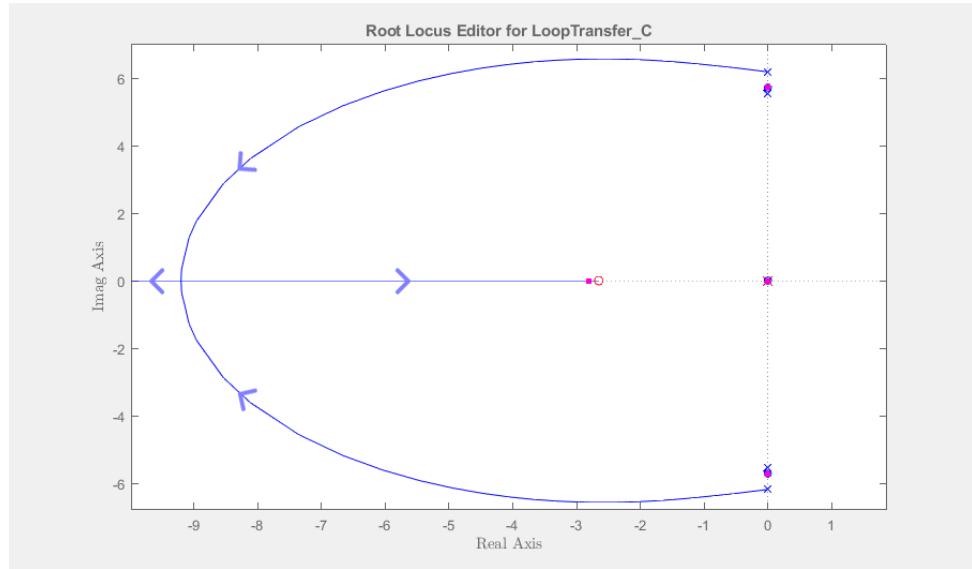
Para tanto, foi utilizado o ambiente previamente mencionado *Control System Designer* do software MATLAB®, no qual é possível interativamente ajustar o valor do ganho e as posições do polo e do zero, observando-se as mudanças nas margens de estabilidade, nos diagramas de Bode e de Lugar das Raízes, além da resposta em degrau do sistema compensado em malha fechada. Assim, tais parâmetros foram manipulados de modo que pelo Lugar das Raízes passassem polos interessantes para a resposta do sistema e, além disso, apresentassem margens de ganho e de fase adequadas. As Figuras 28 e 29 ilustram, respectivamente, o diagrama de Bode e o Lugar das Raízes do compensador final projetado, com o x vermelho indicando o ponto de manipulação do polo, o círculo vermelho indicando o ponto de manipulação do zero, sendo o ganho controlado pela movimentação de toda a parte de ganho do diagrama de Bode ou pela movimentação dos pontos magenta do diagrama de Lugar das Raízes.

Figura 28 – Diagrama de Bode interativo, no ambiente do *Control System Designer*.



Fonte: Autoria própria.

Figura 29 – Diagrama de Lugar das Raízes interativo, no ambiente do *Control System Designer*.

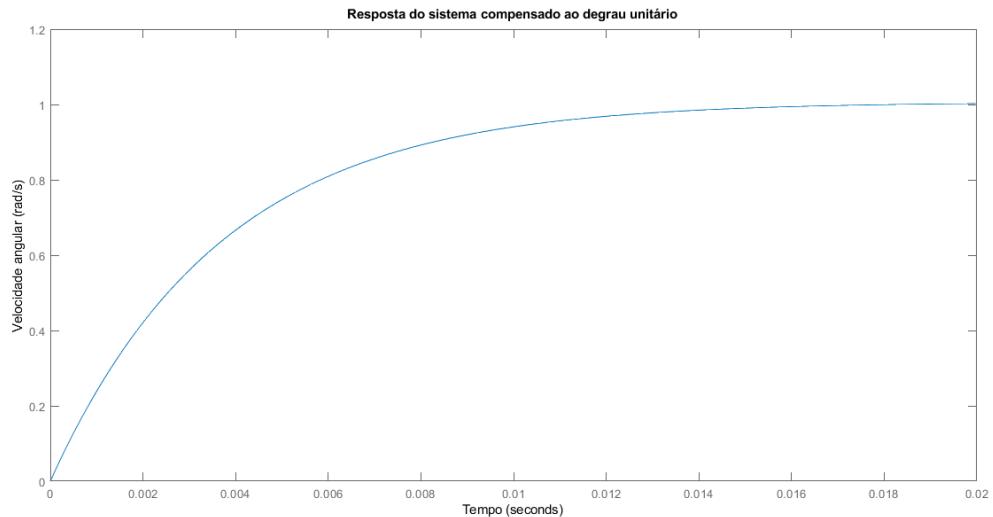


Fonte: Autoria própria.

Dessa forma, foi possível projetar o compensador indicado na Equação (7.8), apresentando  $p = 7,05 \cdot 10^{-8}$ ,  $z = 2,44$  e  $K_c = 37,43$  e cuja resposta ao degrau unitário encontra-se na Figura 30.

$$G_{comp} = 37,43 \cdot \frac{s + 2,44}{s + 7,05 \cdot 10^{-8}} \quad (7.8)$$

Figura 30 – Resposta do sistema ao compensador projetado

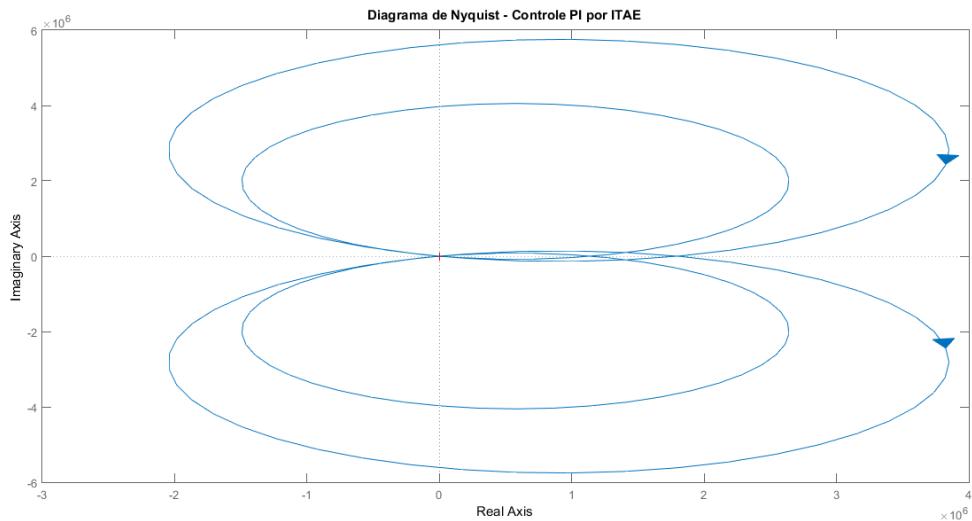


## 7.3 Análise de Estabilidade

### 7.3.1 Estabilidade Absoluta

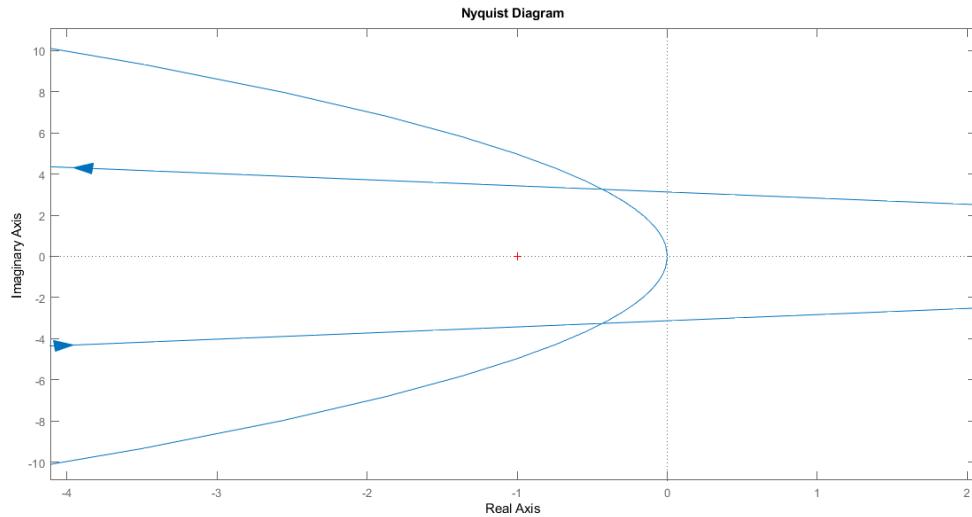
Nyquist (1932) define um critério gráfico para a averiguação da estabilidade absoluta em malha fechada no domínio da frequência, além de um critério que aborda a estabilidade relativa. No tocante à absoluta, em suma, trata-se de averiguar a quantidade líquida de voltas positivas que a curva de Nyquist dá em torno do ponto -1 do eixo real e compará-la com a quantidade de polos positivos em malha aberta: o sistema é absolutamente estável se o total de voltas em torno desse ponto for menor ou igual a zero e equivalente à quantidade de polos positivos em malha aberta. Como averiguado em Seção 5.1.2, não há polos positivos para o sistema em malha aberta, então os sistemas controlados serão estáveis se, e somente se, o número de voltas em torno de -1 for nulo. Assim, a Figura 31 mostra a resposta do sistema controlado pelo PI projetado por ITAE, verificando-se que não há, de fato, qualquer volta em torno do ponto -1, o que garante a estabilidade absoluta do sistema. Pela resposta ser de difícil visualização, embora facilitada pela visão em detalhe fornecida pela Figura 32, optou-se por ratificar a não envoltura do ponto pela função *nyqlog* (ANDRESEN, 2020). Os diagramas de Nyquist obtidos para as demais sintonizações encontram-se no Apêndice G.1, todos tendo suas estabilidades absolutas garantidas.

Figura 31 – Diagrama de Nyquist de malha aberta para o sistema sintonizado por ITAE.



Fonte: Autoria própria.

Figura 32 – Detalhe do diagrama de Nyquist de malha aberta para o sistema sintonizado por ITAE, mostrando a não envoltura do ponto -1.



Fonte: Autoria própria.

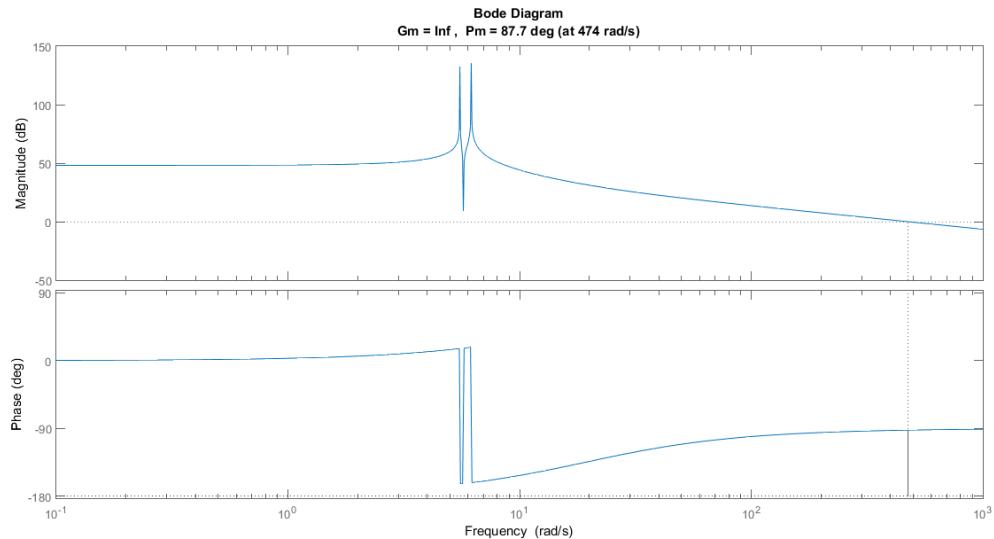
### 7.3.2 Estabilidade Relativa

A análise da estabilidade relativa foi realizada a partir dos gráficos de Bode dos sistemas controlados em malha aberta. Para todos os casos estudados, não foi calculada qualquer margem de ganho, já que os gráficos de fase não chegam a cruzar  $-180^\circ$ . Em relação às margens de fase, a reunião de seus valores encontra-se na Tabela 14. Analogamente à seção anterior, a figura Figura 33 exibe o diagrama de Bode do sistema controlado pelo PI projetado com Lugar das Raízes, enquanto os outros diagramas encontram-se no Apêndice G.2.

Tabela 14 – Valores das Margens de Fase para os controladores projetados

Método	Controle	Margem de Fase
Lugar das Raízes	PI	89,3°
Lugar das Raízes	PID	89,3°
PID Tuner	PI	82,7°
PID Tuner	PID	76,1°
Alocação de Polos	PI	89°
ITAE	PI	87,7°

Figura 33 – Diagrama de Bode para o sistema em malha aberta controlado com o PI por ITAE, com as margens de ganho e fase assinaladas.



Fonte: Autoria própria.

Dessa forma, observa-se que o controlador projetado por alocação de polos apresenta a maior margem de fase, enquanto a menor foi apresentada pelo controlador PID sintonizado no *PIDTuner*. Mesmo assim, é trivial notar que todos os valores são bastante altos e reafirmam a grande margem de estabilidade dos controladores projetados.

## 7.4 Comparação entre Controladores Clássicos

Com as sintonizações realizadas, pode-se condensar as informações afim de realizar uma comparação holística, como mostra a Tabela 15. Nela, é possível ver que a sintonização via ITAE apresenta os melhores tempos, tanto de pico quanto por acomodação, e o menor erro no regime permanente. Para o sistema avaliado, esses quesitos são os mais importantes pela rápida dinâmica do jogo de tênis de mesa. Assim, **foi escolhida a opção ITAE como sendo a mais adequada para o projeto.**

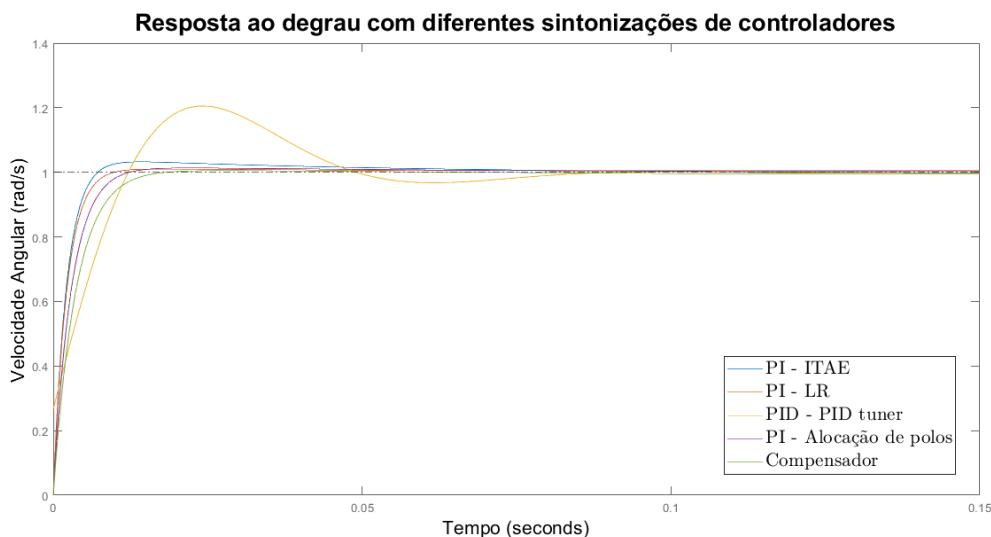
É notável que o controlador escolhido é do tipo PI e não PID. Como mencionado anteriormente, avaliou-se caso a caso a necessidade de um ganho derivativo. Nas sintonizações com melhores respostas o ganho derivativo não se faz necessário, mostrando que apenas os ganhos proporcional e integral já são suficientes para atingir bons resultados nos regimes transiente e permanente.

Tabela 15 – Comparação entre métodos de sintonização para controlador PID

Método de Sintonização	$K_P$	$K_I$	$K_D$	Tempo de pico	Tempo de acomodação	Erro aproximado no RP
ITAE	65	1250	-	0,0142	0,0462	$0,32 \cdot 10^{-3}$
LR	63,05	355,8	-	0,0179	0,0521	$6,1 \cdot 10^{-3}$
PID Tuner	19,5	1822,4	0,05	0,0242	0,0756	$2,7 \cdot 10^{-3}$
AP	47,2	274	-	0,0222	0,0774	$9,9 \cdot 10^{-3}$
Compensador	-	-	-	0,0278	0,0328	$1,9 \cdot 10^{-3}$

A Figura 34 corrobora com a escolha do controlador, demonstrando ilustrativamente as características explicitadas na Tabela 15.

Figura 34 – Respostas ao degrau para diferentes sintonizações de controladores.



Fonte: Autoria própria.

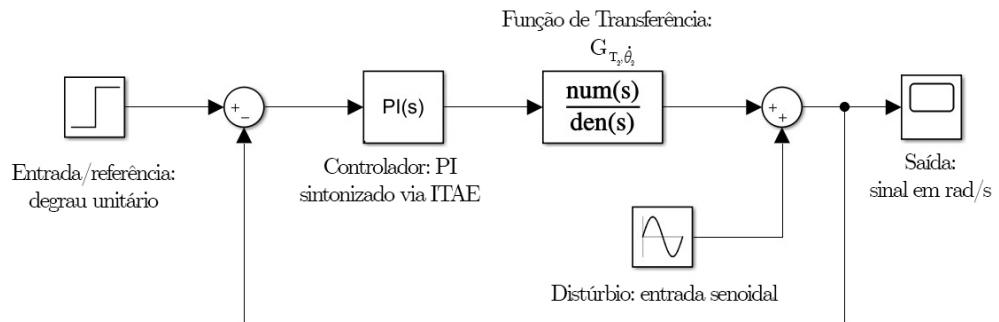
## 7.5 Capacidade de seguir referência e rejeitar distúrbios

Para avaliar a robustez do sistema projetado frente a referências e distúrbios, foram modelados uma referência do tipo degrau unitário e um distúrbio senoidal. Para o distúrbio, de equação  $A \cdot \sin(\omega t)$ , utilizou-se arbitrariamente  $A = 30 \text{ rad/s}$  e  $\omega = 5.5 \text{ rad/s}$ . Tais valores foram escolhidos propositalmente altos de forma a maximizar os efeitos do distúrbio e facilitar a capacidade do sistema em rejeitá-lo. Dado que o sistema projetado consegue atenuar de forma satisfatória até mesmo esses valores, como mostra a Figura 36, tem-se que ele é capaz de seguir referências e rejeitar distúrbios variáveis no tempo adequadamente.

Tal procedimento foi realizado através do ambiente *Simulink* do MATLAB®, onde a planta, com o controlador PID sintonizado via ITAE, foi simulada, como mostra a

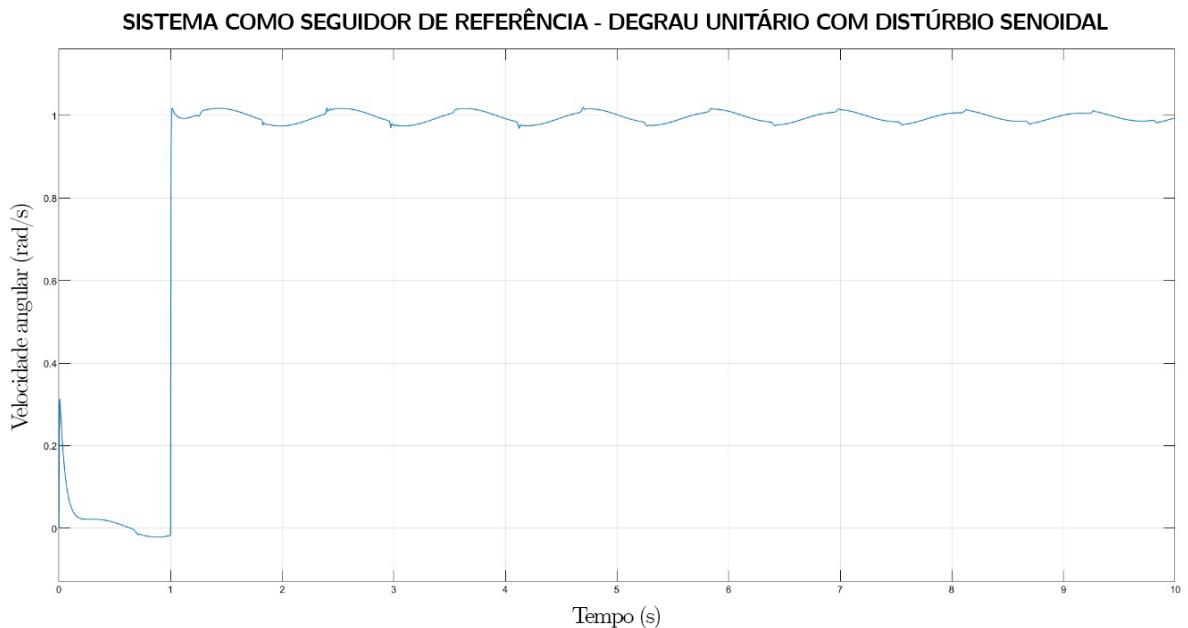
Figura 35. A Figura 36 apresenta a resposta do sistema para a referência imposta (degrau unitário) e com o distúrbio modelado.

Figura 35 – Diagrama de blocos construído no *Simulink*



Fonte: Autoria própria

Figura 36 – Resposta do sistema ao degrau unitário com distúrbio senoidal



Fonte: Autoria própria

## 8 CONCLUSÃO

O presente relatório se dispôs a analisar o sistema proposto de um robô para aplicação ao jogo de tênis de mesa mediante diversos aspectos. O objetivo holístico de tal análise se baseia na proposta da determinação de um controle adequado, capaz de prover uma resposta rápida do sistema e com baixo nível de oscilação.

Inicialmente, portanto, foi realizada a modelagem completa do sistema, tanto matemática quanto física, obtendo-se um modelo similar ao apresentado por Mullin Jens Kobe (2011), porém de forma direcionada e simplificada para o estágio de jogo determinado.

A partir disto, o estudo acerca do controle de tal sistema se deu de forma mais intensa, a começar pela análise do sistema em malha aberta. Tal análise apontou que o modelo era estável, com polos ditos lentos, fato que não é conclusão imediata e intuitiva tirada do sistema, mas que pode ser explicado pela possibilidade da posição horizontal  $x$  oscilar em torno de um ponto qualquer, dado que se encontra sobre uma reta horizontal.

Em seguida, foi realizada a análise em malha fechada, adotando o modelo moderno e o modelo clássico de controle. Inicialmente, foi realizado utilizando o controle moderno, no domínio do tempo para controlar o sistema. Comparou-se os métodos de alocação de polos e linear quadrático, obtendo resultados rápidos e dentro das restrições desejadas, muito semelhantes para ambos os métodos, e avaliou-se a aplicação de observador de estado para as saídas não medidas. Os resultados obtidos foram muito satisfatórios, com velocidade de resposta alta. Claramente, o controle ainda é distante dos modelos mais recentes de robôs, como o da empresa Omron®, a qual emprega tecnologias extremamente modernas e que abrem margem para aprimoramentos do presente projeto.

Posteriormente, foi realizado e testado o controle clássico para o sistema em questão. Como explicitado, foi realizada a seleção da principal função de transferência do sistema, porém as demais funções de transferência seguiriam o mesmo procedimento. Foram empregados os métodos de Lugar das Raízes, Alocação de Polos, ITAE, PID Tuner (MATLAB®) e uso de compensador, obtendo-se respostas adequadas em todos os modelos, comparando-as por meio da simulação de resposta ao degrau. Ficou claro que o valor do termo derivativo deveria ser reduzido, de tal forma que, seguindo o modelo PID, o uso de um controlador PI seria suficiente. Dentre os métodos, o ITAE se sobressaiu, apresentando a resposta com menor tempo de pico e de acomodação.

Comparativamente, são notórias algumas diferenças entre o procedimento e os resultados obtidos para o controle clássico e moderno. A principal divergência consiste na versatilidade do controle moderno, o qual avalia o sistema e seu vetor de estados completo,

em oposição ao procedimento do controle clássico, que atua individualmente em cada função de transferência. Com isso o procedimento se torna mais simples e barato. Além disso, ressalta-se que o controle moderno trabalha no domínio do tempo, o que é muito benéfico, dado o contexto do presente projeto. Assim, acredita-se que o controle moderno seja mais coerente para o projeto de controle deste robô.

Vale ressaltar que o trabalho não engloba o comportamento do sistema para posições e velocidades do robô nas proximidades do contato com a bolinha. Este estágio de jogo, de grande interesse a diversos estudos como o de Hashimoto et al. (1987), abre campo para novos estudos e aprimoramentos do modelo. Sendo assim, acredita-se que se possa dar prosseguimento do estudo do tema por meio da abordagem de controle do robô quando há contato entre a raquete e a bolinha, assim como assuntos mais diversos, como visão computacional e predição de trajetória.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACOSTA, L. et al. Ping-Pong Player Prototype. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2003. Citado na página 2.
- ANDERSSON, R. L. Dynamic sensing in a ping-pong playing robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 5, n. 6, p. 728–739, Dec 1989. ISSN 2374-958X. Citado na página 2.
- ANDRESEN, T. Nyquist plot with logarithmic amplitudes. *MATLAB Central File Exchange*, MATLAB, 2020. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7444-nyquist-plot-with-logarithmic-amplitudes>>. Citado na página 44.
- BARRETT. *Inertial Data for the WAM arm*. 2008. Catalogue. Citado na página 14.
- BODE, H. W. Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design. *The Bell System Technical Journal*, Nokia Bell Labs, v. 19, n. 3, p. 421–454, 1940. Citado na página 17.
- CRAIG, J. J. *Introduction to Robotics - Mechanics and Control*. [S.l.: s.n.], 2005. 1410-1415 p. Citado na página 3.
- EL-MARHOMY, A. A.; ABDEL-SATTAR, N. E. Stability analysis of rotor-bearing systems via routh-hurwitz criterion. *Applied Energy*, Elsevier, v. 77, n. 3, p. 287–308, 2004. Citado na página 17.
- FRANÇA, L.; MATSUMURA, A. *Mecânica geral*. Edgard Blücher, 2011. ISBN 9788521203414. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=IUnSAwAACAAJ>>. Citado na página 9.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 7th. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall Press, 2014. ISBN 0133496597, 9780133496598. Citado 3 vezes nas páginas 10, 17 e 21.
- HASHIMOTO, H. et al. Development Of A Pingpong Robot System Using 7 Degrees Of Freedom Direct Drive Arm. In: ABRAMOVICH, A. (Ed.). *IECON '87: Industrial Applications of Robotics & Machine Vision*. SPIE, 1987. v. 0856, p. 608 – 615. Disponível em: <<https://doi.org/10.1117/12.943016>>. Citado 3 vezes nas páginas 2, 3 e 50.
- KULAKOWSKI, B.; GARDNER, J.; SHEARER, J. *Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9781139464239. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=9bforCnE8HUC>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- LUO, J.; LAN, C. E. Determination of weighting matrices of a linear quadratic regulator. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 18, n. 6, p. 1462–1463, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 22.
- MATSUSHIMA, M. et al. A learning approach to robotic table tennis. *IEEE Transactions on Robotics*, v. 21, n. 4, p. 767–771, Aug 2005. ISSN 1941-0468. Citado na página 1.

- MULLIN JENS KOBE, J. P. K. A biomimetic approach to robot table tennis. *Adaptive Behavior*, p. 359–376, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 13 e 49.
- MÜLLING, K.; PETERS, J. A computational model of human table tennis for robot application. In: DILLMANN, R. et al. (Ed.). *Autonome Mobile Systeme 2009*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 57–64. ISBN 978-3-642-10284-4. Citado 3 vezes nas páginas 1, 6 e 7.
- NAKASHIMA, A. et al. Hitting back-spin balls by robotic table tennis system based on physical models of ball motion. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 45, n. 22, p. 834 – 841, 2012. ISSN 1474-6670. 10th IFAC Symposium on Robot Control. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016337132>>. Citado na página 3.
- NAKASHIMA, A. et al. Robotic table tennis based on physical models of aerodynamics and rebounds. *2011 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, p. 2348–2354, 2011. Citado na página 3.
- NYQUIST, H. Regeneration theory. *The Bell System Technical Journal*, v. 11, n. 1, p. 126–147, 1932. Citado na página 44.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Prentice Hall do Brasil, 1982. ISBN 9788587918239. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=fXmIPQAAQAAJ>>. Citado 7 vezes nas páginas 11, 15, 16, 17, 20, 31 e 32.
- PARASKEVOPOULOS, P. N. *Modern Control Engineering*. 3th. ed. [S.l.]: Marcel DEkker, 2002. Citado na página 16.
- RAMANANTSOA, M.; DUREY, A. Towards a stroke construction model. *Journal of Table Tennis Science* 2, 1994. Citado na página 4.
- SABER FERAT SAHIN, K. P. M. E. An Application of Human Robot Interaction: Development of a Ping-Pong Playing Robotic Arm. 2005. Citado na página 2.
- SAINI, S. C. et al. Comparison of pole placement and lqr applied to single link flexible manipulator. p. 843–847, 2012. Citado na página 3.
- SEQUEIRA, J. L. Sistema para a verificação lógica de controle. *FEUP - Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto*, p. 4, Dez. 2013. Citado na página 18.
- SINGH, K.; AGNIHOTRI, G. *System Design Through Matlab®, Control Toolbox and Simulink®*. Springer London, 2001. ISBN 9781852333379. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=D1c\AQAAIAAJ>>. Citado na página 21.
- ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme*, v. 115, p. 220–222, 1942. Citado na página 31.

# Apêndices

# APÊNDICE A – CÓDIGOS

## A.1 Simulações em Malha Aberta

```

1 %% Deixa os eixos em LaTeX
2 set(groot, 'defaultLegendInterpreter','latex');
3
4 %%Espaço de estados
5 clear; close all; clc;
6
7 m = 2;
8 Mbase = 6;
9 L = 0.5;
10 c = 8.5e-5;
11 b = 7.12e-3;
12 g = 9.81;
13
14 M = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
       0, 1, 0, 0, 0; 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 0, 1,
       0; 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
15
16 I = eye(6);
17
18 Minv = I/M;
19
20 Atil = [0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, -b*L, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3*m
           *L*g/2, -c, -m*L*g/2, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
21
22 Btil = [0, 0, 0; L, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 1];
23
24 A = Minv*Atil;
25
26 B = Minv*Btil;
27
28 C = [1, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1];
29
30 D = 0;
31
32 ee = ss(A,B,C,D);
33
34 %% Matriz de Controlabilidade
35 Cont = ctrb(A,B);
36 Posto = rank(Cont);
37

```

```
38 %% Matriz de Observabilidade
39 Ob = obsv(A,C);
40 Posto2 = rank(Ob);
41
42 %% Matriz de Transição
43 Dt = 0.01;
44 Phi = expm(A*Dt);
45 ti = 0;
46 tf = 10;
47 t = ti:Dt:tf;
48 x = zeros(size(t));
49 x(1,1) = 0;
50 x(2,1) = 0;
51 x(3,1) = 0.1;
52 x(4,1) = 0;
53 x(5,1) = 0.2;
54 x(6,1) = 0;
55
56 for i=1:(tf/Dt)
57     x(:,i+1) = Phi*x(:,i);
58 end
59
60 p = pole(ee);
61
62 % %% Plots
63 % figure
64 % plot(p,'x')
65 % axis([-0.001 0 -7 7])
66 % xlabel('Re')
67 % ylabel('Im')
68 % title('Polos do Sistema em Malha Aberta')
69 %
70 % figure
71 % plot(t,x(1,:),t,x(3,:),t,x(5,:))
72 % xlabel('Tempo (s)')
73 % ylabel('Saída no Tempo (m ou rad)')
74 % title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Aberta')
75 % legend('x','\theta_1','\theta_2')
76 %
77 % figure
78 % plot(t,x(2,:),t,x(4,:),t,x(6,:))
79 % xlabel('Tempo (s)')
80 % ylabel('Saída no Tempo (m/s ou rad/s)')
81 % title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Aberta')
82 % legend('\dot{x}','\dot{\theta_1}','\dot{\theta_2}')
83
84 % matriz_latex(Phi,'C:\Users\Lucas Paiva\Documents\USP\Trabalhos\Controle\'
```

```
    T2\Matlabs\Phi.txt')
85 % matriz_latex(Cont, 'C:\ Users\Lucas Paiva\Documents\USP\Trabalhos\Controle\
     T2\Matlabs\Contr.txt')
86 % matriz_latex(Ob, 'C:\ Users\Lucas Paiva\Documents\USP\Trabalhos\Controle\T2
     \T2_controlao\enviados\Obsv.txt')
87
88 % figure
89 % rlocus(ee)
90 % sggrid
91 % axis([-0.5 0.5 -8 8])
92 % title('Lugar das raízes para o sistema')
93 % xlabel('Re')
94 % ylabel('Im')
```

## A.2 Simulações em Malha Fechada

```

1 clear; close all; clc;
2
3 %% Deixa os eixos em LaTeX
4 set(groot, 'defaultLegendInterpreter','latex');
5
6 %% Parametros
7 m = 2;
8 Mbase = 6;
9 L = 0.5;
10 c = 8.5e-5;
11 b = 7.12e-3;
12 g = 9.81;
13
14 %% Espaco de estados
15
16 M = [1, 0, 0, 0, 0, 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
       0, 1, 0, 0, 0, 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 1,
       0, 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
17
18 I = eye(6);
19
20 Minv = I/M;
21
22 Atil = [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -b*L, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -3*m
           *L*g/2, -c, -m*L*g/2, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
23
24 Btil = [0, 0, 0; L, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 1];
25
26 A = Minv*Atil;
27
28 B = Minv*Btil;
29
30 C = [1, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1];
31
32 D = 0;
33
34 ee = ss(A,B,C,D); % Espaço de Estados de malha aberta
35
36 %% Ganhos de Controle por alocação
37 %% Polos desejados
38 polos = [-5.5, -7.5, -9.5, -11.5, -13.5, -15.5];
39
40
41 %% Alocação
42 K = place(A,B,polos);
43 F = A - B*K;

```

```

44 ee_fechada = ss(F,B,C,D); % Espaco de estados por alocacao
45
46 %% Matrizes de Transição
47 Dt = 0.005;
48 Phi = expm(F*Dt);
49 ti = 0;
50 tf = 1.5;
51 t = ti:Dt:tf;
52 x = zeros( size(t));
53
54 %% Estado sem observador
55 x(1,1) = 0.2;
56 x(2,1) = 0;
57 x(3,1) = 0.25;
58 x(4,1) = 0;
59 x(5,1) = 0.25;
60 x(6,1) = 0;
61
62 for i=1:(tf/Dt)
63     x(:,i+1) = Phi*x(:,i);
64 end
65
66 %% Acelerações
67
68 xdd = diff(x(2,:))/diff(t(1,:));
69 theta1dd = diff(x(4,:))/diff(t(1,:));
70 theta2dd = diff(x(6,:))/diff(t(1,:));
71 figure
72 plot(t(1:end-1),xdd,t(1:end-1),theta1dd,t(1:end-1),theta2dd)
73 grid on
74 xlabel('Tempo (s)')
75 ylabel('Saída no Tempo (m/s^2 e rad/s^2)')
76 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de Polos')
77 legend('$\ddot{x} \text{ (m/s}^2\text{)}$, $\dot{\theta}_1 \text{ (rad/s}^2\text{)}$, $\dot{\theta}_2 \text{ (rad/s}^2\text{)}$')
78
79 %% Forças
80
81 Flin = ((2*m+Mbase)*L*xdd + b*L*x(2,1:end-1) + (3*m*(L^2)/2)*theta1dd + (m*(L^2)/2)*theta2dd)/L;
82 Torq1 = (3*m*(L^2)/2)*theta1dd + (m*(L^2))*theta2dd + 2*m*L*xdd + (3*m*L*g/2)*x(3,1:end-1) + c*x(4,1:end-1) + (m*L*g/2)*x(5,1:end-1);
83 Torq2 = (m*(L^2)/3)*theta2dd + (m*(L^2)/6)*theta1dd + (m*L/2)*xdd - c*x(4,1:end-1) + (m*L*g/2)*x(5,1:end-1) + c*x(6,1:end-1);
84
85 figure

```

```

86 plot(t(1:end-1),Flin,t(1:end-1),Torq1,t(1:end-1),Torq2)
87 grid on
88 xlabel('Tempo (s)')
89 ylabel('Saída no Tempo')
90 title('Força dos Atuadores – Alocação de Polos')
91 legend('F (N)', '$T_1 \cdot (N \cdot m)$', '$T_2 \cdot (N \cdot m)$')
92
93 %% Potencias
94
95 Pot1 = Flin.*x(2,1:end-1);
96 Pot2 = Torq1.*x(4,1:end-1);
97 Pot3 = Torq2.*x(6,1:end-1);
98
99 figure
100 plot(t(1:end-1),Pot1,t(1:end-1),Pot2,t(1:end-1),Pot3)
101 grid on
102 xlabel('Tempo (s)')
103 ylabel('Potência (W)')
104 title('Potência dos Atuadores – Alocação de Polos')
105 legend('$Pot_F$', '$Pot_{T_1}$', '$Pot_{T_2}$')
106
107 %% Plots
108
109 figure
110 plot(t,x(1,:),t,x(3,:),t,x(5,:))
111 grid on
112 xlabel('Tempo (s)')
113 ylabel('Saída no Tempo')
114 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de Polos')
115 legend('x (m)', '$\theta_1$ (rad)', '$\theta_2$ (rad)')
116
117 figure
118 plot(t,x(2,:),t,x(4,:),t,x(6,:))
119 grid on
120 xlabel('Tempo (s)')
121 ylabel('Saída no Tempo')
122 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de Polos')
123 legend('$\dot{x}$ (m/s)', '$\dot{\theta}_1$ (rad/s)', '$\dot{\theta}_2$ (rad/s)')
124 axis([0 1.5 -1.2 0.1])
125
126
127 %% Vídeo da Animação
128 % xA = x(1,:);
129 % yA = zeros(1,length(xA));

```

```

130 % yA = yA + 2;
131 % xB = xA + L*sin(x(3,:));
132 % yB = yA - L*cos(x(3,:));
133 % xC = xB + L*sin(x(5,:));
134 % yC = yB - L*cos(x(5,:));
135 % n=length(xA);
136 % v = VideoWriter('C:\Users\Lucas Paiva\Documents\USP\Trabalhos\Controle\T2
    \Imagens\GIF.avi');
137 % v.Quality = 95;
138 % v.FrameRate = 1/Dt;
139 % open(v);
140 % for i=1:n
141 % Pxa = [xA(i), xB(i)];
142 % Pya = [yA(i), yB(i)];
143 % Pxb = [xB(i), xC(i)];
144 % Pyb = [yB(i), yC(i)];
145 % PC1 = [xA(i)+0.15, xA(i)+0.15];
146 % PC2 = [yA(i)+0.03, yA(i)-0.03];
147 % PC3 = [xA(i)+0.15, xA(i)-0.15];
148 % PC4 = [yA(i)+0.03, yA(i)+0.03];
149 % PC5 = [xA(i)-0.15, xA(i)-0.15];
150 % PC6 = [yA(i)+0.03, yA(i)-0.03];
151 % PC7 = [xA(i)+0.15, xA(i)-0.15];
152 % PC8 = [yA(i)-0.03, yA(i)-0.03];
153 % plot(xA, yA, xA(i),yA(i),'o', xB, yB, xB(i),yB(i),'o', xC, yC, xC(i),yC(i)
    ),'o')
154 % axis([-0.6 0.6 0.9 2.1])
155 % grid on
156 % line(Pxa,Pya)
157 % line(Pxb,Pyb)
158 % line(PC1, PC2)
159 % line(PC3, PC4)
160 % line(PC5, PC6)
161 % line(PC7, PC8)
162 % frame = getframe(gcf);
163 % writeVideo(v,frame);
164 % end
165 % close(v)

```

### A.3 Simulações com Observador

```

1 clear; close all; clc;
2
3 %% Deixa os eixos em LaTeX
4 set(groot, 'defaultLegendInterpreter','latex');
5
6 %% Parametros

```

```

7 m = 2;
8 Mbase = 6;
9 L = 0.5;
10 c = 8.5e-5;
11 b = 7.12e-3;
12 g = 9.81;
13
14 %% Espaco de estados
15 M = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
       0, 1, 0, 0, 0; 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 1,
       0; 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
16 I = eye(6);
17 Minv = I/M;
18 Atil = [0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, -b*L, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0,
           -3*m*L*g/2, -c, -m*L*g/2; 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
19 Btil = [0, 0, 0, 0, 0; L, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0,
           0; 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0, 0];
20
21 A = Minv*Atil;
22 B = Minv*Btil;
23 C = [1, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1];
24 D = 0;
25
26 ee = ss(A,B,C,D); % Espaço de Estados de malha aberta
27
28 %% Alocação
29 %% Polos desejados
30 polos = [-5.5, -7.5, -9.5, -11.5, -13.5, -15.5]; %terceira
31 K = place(A,B,pulos);
32 F = A - B*K;
33 ee_fechada = ss(F,B,C,D); %Terceiro
34
35 %% Controle LQ
36 Q = diag([2000, 50, 100, 0.7, 10, 0.7]); %Ref no relatorio
37 R = 0.005;
38 Klq = lqr(ee,Q,R);
39 Flq = A - B*Klq;
40 ee_LQ = ss(Flq,B,C,D); % Espaço de estados por LQ
41
42 %% Alocacao do Observador
43 polos_ob = [-55, -75, -95, -115, -135, -155]; % Primeira alocacao observ
44 Ko = (place(A',C',polos_ob))';
45
46 %% Observador LQ
47 Qo = diag([1, 100, 100, 1, 100, 1]);
48 Ro = 0.005;
49 Ko_lq = (lqr(A',C',Qo,Ro))';

```

```
50
51 %% Composicao de Lambda
52 L11 = A - B*K;
53 L12 = B*K;
54 L21 = zeros(6);
55 L22 = A - Ko*C;
56 La = [ L11 , L12 ; L21 , L22 ] ;
57
58 %% Lambda LQ
59 L11_lq = A - B*Klq;
60 L12_lq = B*Klq;
61 L21_lq = L21;
62 L22_lq = A - Ko_lq*C;
63 L_lq = [L11_lq, L12_lq; L21_lq, L22_lq];
64
65
66 %% Matrizes de Transição
67 Dt = 0.0005;
68 Phi_lambda = expm(La*Dt);
69 Phi_lambda_lq = expm(L_lq*Dt);
70 ti = 0;
71 tf = 1.5;
72 t = ti:Dt:tf;
73 x = zeros(size(t));
74 xo = x;
75 %% Estado com observador
76 xo(1,1) = 0;
77 xo(2,1) = 0.1;
78 xo(3,1) = 0.25;
79 xo(4,1) = 0;
80 xo(5,1) = 0.25;
81 xo(6,1) = 0;
82 %% Observador
83 xo(7,1) = 0;
84 xo(8,1) = xo(2,1);
85 xo(9,1) = xo(3,1);
86 xo(10,1) = 0;
87 xo(11,1) = xo(5,1);
88 xo(12,1) = 0;
89
90 xo_LQ = xo;
91
92 for i=1:(tf/Dt)
93     xo(:,i+1) = Phi_lambda*xo(:,i);
94     xo_LQ(:,i+1) = Phi_lambda_lq*xo_LQ(:,i);
95 end
96
```

```

97 %% Plots das matrizes de transição
98 %% Com Observ v1
99 figure
100 plot(t,xo(1,:), t,xo(3,:), t,xo(5,:))
101 grid on
102 xlabel('Tempo (s)')
103 ylabel('Saída no Tempo')
104 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de
    Polos')
105 legend('x (m)', '$\theta_1$ (rad)', '$\theta_2$ (rad)')
106 % ylim([-0.05 0.3])
107
108 figure
109 plot(t,xo(2,:), t,xo(4,:), t,xo(6,:))
110 grid on
111 xlabel('Tempo (s)')
112 ylabel('Saída no Tempo')
113 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de
    Polos')
114 legend('$\dot{x}$ (m/s)', '$\dot{\theta}_1$ (rad/s)', '$\dot{\theta}_2$ (rad/
    s)')
115 % ylim([-1.2 0.3])
116
117 figure
118 plot(t,xo(8,:), t,xo(9,:), t,xo(11,:))
119 grid on
120 xlabel('Tempo (s)')
121 ylabel('Saída no Tempo')
122 title('Simulação da Matriz de Observador – Alocação de Polos')
123 legend('Erro em $\dot{x}$ (m/s)', 'Erro em $\theta_1$ (rad)', 'Erro em $\theta_2$ (rad)')
124 xlim([0 0.2])
125 ylim([-0.1 0.5])
126
127 %% Com Observ LQ
128 figure
129 plot(t,xo_LQ(1,:),t,xo_LQ(3,:),t,xo_LQ(5,:))
130 grid on
131 xlabel('Tempo (s)')
132 ylabel('Saída no Tempo')
133 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Método LQ')
134 legend('x (m)', '$\theta_1$ (rad)', '$\theta_2$ (rad)')
135
136 figure
137 plot(t,xo_LQ(2,:),t,xo_LQ(4,:),t,xo_LQ(6,:))
138 grid on
139 xlabel('Tempo (s)')

```

```

140 ylabel('Saída no Tempo')
141 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Método LQ')
142 legend('$\dot{x}$ (m/s)', '$\dot{\theta}_1$ (rad/s)', '$\dot{\theta}_2$ (rad/s)')
143 % ylim([-1.2 0.3])
144
145 figure
146 plot(t,xo_LQ(8,:),t,xo_LQ(9,:),t,xo_LQ(11,:))
147 grid on
148 xlabel('Tempo (s)')
149 ylabel('Saída no Tempo')
150 title('Simulação da Matriz de Transição de Observador – Método LQ')
151 legend('Erro em $\dot{x}$ (m/s)', 'Erro em $\theta_1$ (rad)', 'Erro em $\theta_2$ (rad/s)')
152 xlim([0 0.5])
153 ylim([-0.05 0.27])
154
155 %% Salva as matrizes de Transição em formato LaTeX
156 % matriz_latex(Phi_lambda, 'Phi_lambda.txt')
157 % matriz_latex(Phi_lambda_lq, 'Phi_lambda_lq.txt')
158 % matriz_latex(Phi_lambda_v2, 'Phi_lambda_v2.txt')
159
160 % %DESCOMENTAR PARA VER O VÍDEO DO OBSERVADOR 1
161 % x = xo;
162 % %DESCOMENTAR PARA VER O VÍDEO DO OBSERVADOR LQ
163 % x = xo_LQ;
164 % %DESCOMENTAR PARA VER O VÍDEO DO OBSERVADOR 2
165 % x = xo_v2;
166
167 %% Vídeo da Animação
168 % xA = x(1,:);
169 % yA = zeros(1,length(xA));
170 % yA = yA + 2;
171 % xB = xA + L*sin(x(3,:));
172 % yB = yA - L*cos(x(3,:));
173 % xC = xB + L*sin(x(5,:));
174 % yC = yB - L*cos(x(5,:));
175 % n=length(xA);
176 % v = VideoWriter('GIF.avi');
177 % v.Quality = 95;
178 % v.FrameRate = 1/Dt;
179 % open(v);
180 % figure
181 % for i=1:n
182 % Pxa = [ xA(i), xB(i) ];
183 % Pya = [ yA(i), yB(i) ];
184 % Pxb = [ xB(i), xC(i) ];

```

```

185 % Pyb = [ yB(i) , yC(i) ];
186 % PC1 = [ xA(i)+0.15 , xA(i)+0.15];
187 % PC2 = [ yA(i)+0.03 , yA(i)-0.03];
188 % PC3 = [ xA(i)+0.15 , xA(i)-0.15];
189 % PC4 = [ yA(i)+0.03 , yA(i)+0.03];
190 % PC5 = [ xA(i)-0.15 , xA(i)-0.15];
191 % PC6 = [ yA(i)+0.03 , yA(i)-0.03];
192 % PC7 = [ xA(i)+0.15 , xA(i)-0.15];
193 % PC8 = [ yA(i)-0.03 , yA(i)-0.03];
194 % plot(xA, yA, xA(i),yA(i), 'o', xB, yB, xB(i),yB(i), 'o', xC, yC, xC(i),yC(i), 'o')
195 % axis([-0.6 0.6 0.9 2.1])
196 % grid on
197 % line(Pxa,Pya)
198 % line(Pxb,Pyb)
199 % line(PC1, PC2)
200 % line(PC3, PC4)
201 % line(PC5, PC6)
202 % line(PC7, PC8)
203 % frame = getframe(gcf);
204 % writeVideo(v,frame);
205 % end
206 % close(v)

```

```

1 clear; close all; clc;
2
3 %% Deixa os eixos em LaTeX
4 set(groot, 'defaultLegendInterpreter','latex');
5
6 %% Parametros
7 m = 2;
8 Mbase = 6;
9 L = 0.5;
10 c = 8.5e-5;
11 b = 7.12e-3;
12 g = 9.81;
13
14 %% Espaco de estados
15 M = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
       0, 1, 0, 0, 0; 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 1,
       0; 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
16 I = eye(6);
17 Minv = I/M;
18 Atil = [0, 1, 0, 0, 0; 0, -b*L, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
           -3*m*L*g/2, -c, -m*L*g/2, 0; 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
19 Btil = [0, 0, 0, 0, 0; L, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0, 0, 0;
           0, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0, 0, 0];
20

```

```

21 A = Minv*Atil;
22 B = Minv*Btil;
23 C = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1];
24 D = 0;
25
26 ee = ss(A,B,C,D); % Espaço de Estados de malha aberta
27
28 %% Alocação
29 %% Polos desejados
30 polos = [-5.5, -7.5, -9.5, -11.5, -13.5, -15.5]; %terceira
31 K = place(A,B,pulos);
32 F = A - B*K;
33 ee_fechada = ss(F,B,C,D); %Terceiro
34
35 %% Controle LQ
36 Q = diag([2000, 50, 100, 0.7, 10, 0.7]); %Ref no relatorio
37 R = 0.005;
38 Klq = lqr(ee,Q,R);
39 Flq = A - B*Klq;
40 ee_LQ = ss(Flq,B,C,D); % Espaco de estados por LQ
41
42 %% Alocacao do Observador
43 polos_ob = [-55, -75, -95, -115, -135, -155]; % Primeira alocacao observ
44 Ko = (place(A',C',polos_ob))';
45
46 %% Observador LQ
47 Qo = diag([1, 100, 100, 1, 100, 1]);
48 Ro = 0.005;
49 Ko_lq = (lqr(A',C',Qo,Ro))';
50
51 %% Composicao de Lambda
52 L11 = A - B*K;
53 L12 = B*K;
54 L21 = zeros(6);
55 L22 = A - Ko*C;
56 La = [ L11 , L12 ; L21 , L22 ] ;
57
58 %% Lambda LQ
59 L11_lq = A - B*Klq;
60 L12_lq = B*Klq;
61 L21_lq = L21;
62 L22_lq = A - Ko_lq*C;
63 L_lq = [L11_lq, L12_lq; L21_lq, L22_lq];
64
65
66 %% Matrizes de Transição
67 Dt = 0.0005;

```

```

68 Phi_lambda = expm(La*Dt);
69 Phi_lambda_lq = expm(L_lq*Dt);
70 ti = 0;
71 tf = 1.5;
72 t = ti:Dt:tf;
73 x = zeros(size(t));
74 xo = x;
75 %% Estado com observador
76 xo(1,1) = 0;
77 xo(2,1) = 0.1;
78 xo(3,1) = 0.25;
79 xo(4,1) = 0;
80 xo(5,1) = 0.25;
81 xo(6,1) = 0;
82 %% Observador
83 xo(7,1) = 0;
84 xo(8,1) = xo(2,1);
85 xo(9,1) = xo(3,1);
86 xo(10,1) = 0;
87 xo(11,1) = xo(5,1);
88 xo(12,1) = 0;
89
90 xo_LQ = xo;
91
92 for i=1:(tf/Dt)
93     xo(:,i+1) = Phi_lambda*xo(:,i);
94     xo_LQ(:,i+1) = Phi_lambda_lq*xo_LQ(:,i);
95 end
96
97 %% Acelerações
98
99 xdd = diff(xo(2,:))./diff(t(1,:));
100 theta1dd = diff(xo(4,:))./diff(t(1,:));
101 theta2dd = diff(xo(6,:))./diff(t(1,:));
102 figure
103 plot(t(1:end-1),xdd,t(1:end-1),theta1dd,t(1:end-1),theta2dd)
104 grid on
105 xlabel('Tempo (s)')
106 ylabel('Saída no Tempo')
107 title('Simulação da Matriz de Transição de Malha Fechada – Alocação de Polos')
108 legend('$\ddot{x}_1$ $(m/s^2)$', '$\ddot{\theta}_1$ $(rad/s^2)$', '$\ddot{\theta}_2$ $(rad/s^2)$')
109
110 %% Forças
111
112 Flin = ((2*m+Mbase)*L*xdd + b*L*xo(2,1:end-1) + (3*m*(L^2)/2)*theta1dd + (m

```

```

*(L^2)/2)*theta2dd)/L;
113 Torq1 = (3*m*(L^2)/2)*theta1dd + (m*(L^2))*theta2dd + 2*m*L*xdd + (3*m*L*g
    /2)*xo(3,1:end-1) + c*xo(4,1:end-1) + (m*L*g/2)*xo(5,1:end-1);
114 Torq2 = (m*(L^2)/3)*theta2dd + (m*(L^2)/6)*theta1dd + (m*L/2)*xdd - c*xo
    (4,1:end-1) + (m*L*g/2)*xo(5,1:end-1) + c*xo(6,1:end-1);

115
116 figure
117 plot(t(1:end-1),Flin,t(1:end-1),Torq1,t(1:end-1),Torq2)
118 grid on
119 xlabel('Tempo (s)')
120 ylabel('Saída no Tempo')
121 title('Força dos Atuadores – Alocação de Polos')
122 legend('F (N)', '$T_1$; $(N \cdot m)$', '$T_2$; $(N \cdot m)$')
123 axis([0 0.5 -80 80])
124

125 %% Potencias
126
127 Pot1 = Flin.*xo(2,1:end-1);
128 Pot2 = Torq1.*xo(4,1:end-1);
129 Pot3 = Torq2.*xo(6,1:end-1);
130
131 figure
132 plot(t(1:end-1),Pot1,t(1:end-1),Pot2,t(1:end-1),Pot3)
133 grid on
134 xlabel('Tempo (s)')
135 ylabel('Potência (W)')
136 title('Potência dos Atuadores – Alocação de Polos')
137 legend('$P_F$', '$P_{T_1}$', '$P_{T_2}$')
138 axis([0 0.5 -20 15])

```

## A.4 Sintonizações PID

```

1 %% Start
2
3 clear; close all; clc;
4
5 %% Deixa os eixos em LaTeX
6 set(groot, 'defaultTextInterpreter','latex');
7
8 %% Definindo FT's
9
10 %% Parametros
11 m = 2;
12 Mbase = 6;
13 L = 0.5;
14 c = 8.5e-5;
15 b = 7.12e-3;

```

```

16 g = 9.81;
17
18 %% Espaco de estados
19
20 M = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
       0, 1, 0, 0, 0; 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 1,
       0; 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
21
22 I = eye(6);
23
24 Minv = I/M;
25
26 Atil = [0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, -b*L, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -3*m
           *L*g/2, -c, -m*L*g/2, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
27
28 Btil = [0, 0, 0; L, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 1];
29
30 A = Minv*Atil;
31
32 B = Minv*Btil;
33
34 C = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1];
35
36 D = zeros(3);
37
38 ee = ss(A,B,C,D); % Espaco de Estados de malha aberta
39
40 fts = tf(ee); % Mudanca para FTs
41
42 FT_T2_theta2dot = fts(3,3); % FT relacionando thetadot2 x T2
43
44 %% Consertando FT1
45
46 [num,den]=tfdata(FT_T2_theta2dot, 'v');
47 num2 = [num 0];
48 den2 = [den 0];
49 FT_T2_theta2dot = tf(num2,den2);
50
51 %% Controladores
52
53 PID_ITAE = pid(65,1250);
54 PID_LR = pid(63.049, 63.049*5.643);
55 PID_tuner = pid(19.5, 1822.4, 0.05);
56 PID_aloc = pid(47.2, 274, 0);
57 C_csd = tf([37.43 91.2395],[1 7.047e-08]);
58
59 %% FTMF

```

```
60 FTMF_ITAE = feedback(PID_ITAE * FT_T2_theta2dot,1);
61 FTMF_LR = feedback(PID_LR * FT_T2_theta2dot,1);
62 FTMF_tuner = feedback(PID_tuner * FT_T2_theta2dot,1);
63 FTMF_aloc = feedback(PID_aloc * FT_T2_theta2dot,1);
64 FTMF_comp = feedback(C_csd * FT_T2_theta2dot,1);
65
66 %% Plots de PID
67
68 step(FTMF_ITAE)
69 hold on
70 step(FTMF_LR)
71 hold on
72 step(FTMF_tuner)
73 hold on
74 step(FTMF_aloc)
75 hold on
76 step(FTMF_comp)
77 yline(1,'-.');
78 title({'Resposta ao degrau com diferentes sintonizações de controladores'},'FontSize', 20)
79 xlabel('Tempo','FontSize',16)
80 xlim([0 0.15])
81 ylabel('Velocidade Angular (rad/s)', 'FontSize',16)
82 legend({'PI - ITAE','PI - LR','PID - PID tuner','PI - Aloca\c{c}\{c}\~{a}o de polos','Compensador'}, 'FontSize', 16)
83
84 %% Parametros do Step
85
86 disp('ITAE: ')
87
88 (PID_ITAE)
89
90 stepinfo(FTMF_ITAE)
91
92 [resposta, ~] = step(FTMF_ITAE);
93 erro_RP = abs(1.0 - resposta(length(resposta)))
94
95 disp('LR: ')
96
97 (PID_LR)
98
99 stepinfo(FTMF_LR)
100
101 [resposta, ~] = step(FTMF_LR);
102 erro_RP = abs(1.0 - resposta(length(resposta)))
103
104 disp('Tuner: ')
```

```

105
106 (PID_tuner)
107
108 stepinfo(FTMF_tuner)
109
110 [resposta, ~] = step(FTMF_tuner);
111 erro_RP = abs(1.0 - resposta(length(resposta)))
112
113 disp('Aloc: ')
114
115 (PID_aloc)
116
117 stepinfo(FTMF_aloc)
118
119 [resposta, ~] = step(FTMF_aloc);
120 erro_RP = abs(1.0 - resposta(length(resposta)))
121
122 disp('Comp: ')
123
124 (C_csd)
125
126 stepinfo(FTMF_comp)
127
128 [resposta, ~] = step(FTMF_comp);
129 erro_RP = abs(1.0 - resposta(length(resposta)))

```

## A.5 Solução numérica de sistema para sintonização PID por AP

```

1 # Alocacao de polos
2 import numpy as np
3
4 def PID_AP():
5     # Kd, Ki, Kp
6     A = np.array(
7         [[7.281, 0, 0], # s^5
8          [0.0048, 0, 7.281], # s^4
9          [238.1, 7.281, 0.0048], # s^3
10         [1.32*(10**-10), 0.0048, 238.1], # s^2
11         [0, 238.1, 1.32*(10**-10)], # s^1
12         [0, 1.32*(10**-10), 0]] # s^0
13     )
14
15     B = np.array([
16         [-1 + 1], # s^5
17         [-0.0003 + 49.5], # s^4
18         [-68.78 + 1022.75], # s^3
19         [-0.01021 + 11247.375], # s^2

```

```

20 [-1168    + 66307.5], # s^1
21 [-0 + 165923.4375]]) # s^0
22
23 [KD, KI, KP] = np.linalg.lstsq(A,B, rcond=None)[0]
24
25 return KD, KI, KP

```

## A.6 Redução de Ordem

```

1 %% Start
2
3 clear; close all; clc;
4
5 %% Deixa os eixos em LaTeX
6 set(groot, 'defaultTextInterpreter','latex');
7
8 %% Definindo FT's
9
10 %% Parametros
11 m = 2;
12 Mbase = 6;
13 L = 0.5;
14 c = 8.5e-5;
15 b = 7.12e-3;
16 g = 9.81;
17
18 %% Espaco de estados
19
20 M = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
        0, 1, 0, 0, 0; 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 1,
        0; 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
21
22 I = eye(6);
23
24 Minv = I/M;
25
26 Atil = [0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, -b*L, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, -3*m
        *L*g/2, -c, -m*L*g/2, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
27
28 Btil = [0, 0, 0; L, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 1];
29
30 A = Minv*Atil;
31
32 B = Minv*Btil;
33
34 C = [1, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1];
35

```

```

36 D = zeros(3);
37
38 ee = ss(A,B,C,D); % Espaco de Estados de malha aberta
39
40 fts = tf(ee); % Mudanca para FTs
41
42 FT_T2_theta2dot = fts(3,3); % FT relacionando thetadot2 x T2
43
44 %% Consertando FT1
45
46 [num,den]=tfdata(FT_T2_theta2dot, 'v');
47 num2 = [num 0];
48 den2 = [den 0];
49 FT_T2_theta2dot = tf(num2,den2);
50
51 %% Reducao de Ordem
52
53 %% Terceira ordem
54 [sysb,g] = balreal(FT_T2_theta2dot);
55 sysr3 = modred(sysb,[4 5 6], 'del');
56 sysr3 = zpk(sysr3);
57 figure
58 bodeplot(FT_T2_theta2dot,sysr3, 'r—')
59 title('Diagrama de Bode – sistema original e reduzido')
60 legend('Original', 'Reduzido para Ordem 3')
61 xlim([1 10])
62
63 %% Quarta ordem
64 num_red = [7.281 0.004831 238.1 -1.32e-10];
65 den_red = [1 0.0003049 68.78 0.01021 1168];
66 figure
67 sysr4 = tf(num_red,den_red);
68 bodeplot(FT_T2_theta2dot,sysr4, 'r—')
69 title('Diagrama de Bode – sistema original e reduzido')
70 legend('Original', 'Reduzido para Ordem 4')
71 xlim([1 10])

```

## A.7 Compensador

```

1 %% Start
2
3 clear; close all; clc;
4
5 %% Deixa os eixos em LaTeX
6 set(groot, 'defaultTextInterpreter', 'latex');
7
8 %% Definindo FT's

```

```

9
10 %% Parametros
11 m = 2;
12 Mbase = 6;
13 L = 0.5;
14 c = 8.5e-5;
15 b = 7.12e-3;
16 g = 9.81;
17
18 %% Espaco de estados
19
20 M = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, (2*m+Mbase)*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, m*(L^2)/2; 0,
       0, 1, 0, 0, 0; 0, 2*m*L, 0, 3*m*(L^2)/2, 0, 2*m*(L^2)/3; 0, 0, 0, 0, 1,
       0; 0, m*L/2, 0, m*(L^2)/6, 0, m*(L^2)/3];
21
22 I = eye(6);
23
24 Minv = I/M;
25
26 Atil = [0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, -b*L, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0,
           *L*g/2, -c, -m*L*g/2, 0; 0, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, c, -m*L*g/2, c];
27
28 Btil = [0, 0, 0; L, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 1];
29
30 A = Minv*Atil;
31
32 B = Minv*Btil;
33
34 C = [1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1];
35
36 D = zeros(3);
37
38 ee = ss(A,B,C,D); % Espaco de Estados de malha aberta
39
40 fts = tf(ee); % Mudanca para FTs
41
42 FT_T2_theta2dot = fts(3,3); % FT relacionando thetadot2 x T2
43
44 %% Consertando FT1
45
46 [num,den]=tfdata(FT_T2_theta2dot, 'v');
47 num2 = [num 0];
48 den2 = [den 0];
49 FT_T2_theta2dot = tf(num2,den2);
50
51 %% Compensadores
52

```

```
53 %% controlSystemDesigner
54 C_csd = tf([37.43 91.2395],[1 7.047e-08]);
55 FTMF_csd = feedback(C_csd*FT_T2_theta2dot,1);
56 figure
57 step(FTMF_csd)
58 title('Resposta do sistema compensado ao degrau unitário')
59 xlabel('Tempo')
60 ylabel('Velocidade angular (rad/s)')
61
62 %% Avanço
63 phi = 80; % graus
64 alpha = 130.646;
65 wn = 0.431; % rad/s
66 z = wn/sqrt(alpha);
67 p = z*alpha;
68 C_av = alpha*tf([1 z],[1 p]);
69 figure
70 margin(C_av*FT_T2_theta2dot)
71 hold
72 bode(FT_T2_theta2dot)
73 legend('Compensado','N~{a}o compensado')
```

# APÊNDICE B – FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

$$G_{F,x} = \frac{0,1573s^4 - 3,438e^{-05}s^3 + 9,259s^2 - 0,0006746s + 116,8}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.1})$$

$$G_{F,\theta_1} = \frac{-0,2697s^4 + 0,0002751s^3 - 11,9s^2 + 1,047e - 18s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.2})$$

$$G_{F,\theta_2} = \frac{-0,3371s^4 - 0,0003438s^3 - 11,9s^2 + 2,662e - 18s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.3})$$

$$G_{T_1,x} = \frac{-0,3371s^4 + 0,0001375s^3 - 11,9s^2 - 2,118e - 10s - 1,496e - 13}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.4})$$

$$G_{T_1,\theta_1} = \frac{2,292s^4 + 0,0005447s^3 + 79,36s^2 + 0,05651s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.5})$$

$$G_{T_1,\theta_2} = \frac{-0,1348s^4 + 0,0004153s^3 + 9,792e - 07s^2 + 4,513e - 19s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.6})$$

$$G_{T_2,x} = \frac{0,2022s^4 - 6,876e - 05s^3 + 1,738e - 13s^2 + 4,75e - 09s + 3,24e - 12}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.7})$$

$$G_{T_2,\theta_1} = \frac{-3,775s^4 - 0,00384s^3 - 79,36s^2 - 0,05651s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.8})$$

$$G_{T_2,\theta_2} = \frac{7,281s^4 + 0,01002s^3 + 238,1s^2 + 0,1695s}{s^6 + 0,001017s^5 + 68,78s^4 + 0,05918s^3 + 1168s^2 + 0,8315s} \quad (\text{B.9})$$

## Zeros das FT's

Tabela 16 – Zeros das funções de transferência

	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$g_{11}$	0,00010283-6,3682i	0,00010283+6,3682i	6,4524e-06-4,2786i	6,4524e-06+4,2786i
$g_{12}$	0,000204-5,9427i	0,000204+5,9427i	-8,8949e-12-1,1211e-07i	-8,8949e-12+1,1211e-07i
$g_{13}$	0,0017494-0,0025051i	0,0017494+0,0025051i	-0,0024616	-0,00069717
$g_{41}$	0	0,00051-6,6442i	0,00051+6,6442i	8,7923e-20
$g_{42}$	0	0,00023718-5,8842i	0,00023718+5,8842i	-0,000712
$g_{43}$	0	-0,00015257-4,5849i	-0,00015257+4,5849i	-0,000712
$g_{61}$	0	-0,00051-5,9427i	-0,00051+5,9427i	2,2362e-19
$g_{62}$	0	0,0046439	-0,0015639	-4,609e-13
$g_{63}$	0	-0,00033178-5,7184i	-0,00033178+5,7184i	-0,000712

# APÊNDICE C – MATRIZES DE CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

Matriz de Controlabilidade  $\mathcal{C}$  do sistema:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,0002 & -0,0003 & 0,0002 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0016 \\ 0,0002 & -0,0003 & 0,0002 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0016 & 0,0113 & -0,0139 & 0,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0003 & 0,0023 & -0,0038 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & 0,0066 \\ -0,0003 & 0,0023 & -0,0038 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & 0,0066 & -0,0783 & 0,1803 & -0,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0003 & -0,0001 & 0,0073 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0113 \\ -0,0003 & -0,0001 & 0,0073 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0113 & 0,0093 & -0,2627 & 0,0000 \\ 0,0113 & -0,0139 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0404 & -0,3822 & 0,7206 & \\ -0,0000 & 0,0000 & 0,0404 & -0,3822 & 0,7206 & -0,0002 & 0,0011 & -0,0012 & \\ -0,0783 & 0,1803 & -0,0000 & 0,0001 & -0,0000 & -0,1420 & 2,7081 & -7,9925 & \\ 0,0001 & -0,0000 & -0,1420 & 2,7081 & -7,9925 & 0,0013 & -0,0064 & 0,0017 & \\ 0,0093 & -0,2627 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0002 & -0,3822 & -0,4804 & 9,5656 & \\ -0,0000 & -0,0002 & -0,3822 & -0,4804 & 9,5656 & -0,0006 & 0,0021 & 0,0087 & \end{bmatrix}$$

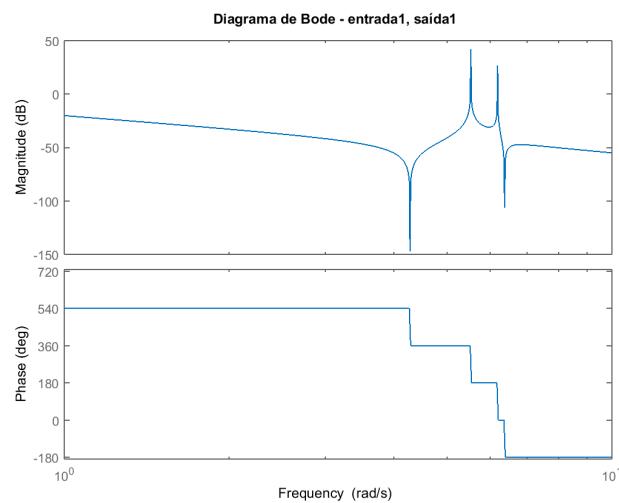
Matriz de observabilidade  $\mathcal{O}$  do sistema:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00192 & -33,7288 & -0,00051573 & 7,2748 & -0,0003209 \\ 0 & 0,0024 & 1,984 & 0,00063034 & -35,0515 & 0,00061888 \\ 0 & -0,00112 & 4,9601 & 4,5843 \cdot 10^{-5} & 0,66135 & 1,7191 \cdot 10^{-5} \\ 0 & -3,9108 \cdot 10^{-6} & 0,026282 & -33,7288 & 0,0087659 & 7,2748 \\ 0 & 7,5506 \cdot 10^{-9} & -0,0081283 & 1,984 & -0,01552 & -35,0515 \\ 0 & 1,3837 \cdot 10^{-6} & -0,0070674 & 4,9601 & -0,0010098 & 0,66135 \\ 0 & -0,0473 & 1152,0631 & 0,048262 & -500,3645 & 0,024092 \\ 0 & -0,080314 & -136,4631 & -0,031246 & 1243,0385 & -0,037849 \\ 0 & 0,011111 & -165,9863 & -0,0092086 & 12,9028 & -0,0021922 \\ 0 & 0,00020346 & -1,8146 & 1152,0631 & -0,52463 & -500,3645 \\ 0 & -6,0877 \cdot 10^{-5} & 0,58042 & -136,4631 & 1,0462 & 1243,0385 \\ 0 & -3,5386 \cdot 10^{-5} & 0,36136 & -165,9863 & 0,017196 & 12,9028 \\ 0 & 1,0111 & -39850,4085 & -2,7242 & 25919,5731 & -1,204 \\ 0 & 2,7213 & 7068,9747 & 1,4343 & -44563,0598 & 1,8593 \end{bmatrix}$$

# APÊNDICE D – DIAGRAMAS DE BODE EM MALHA ABERTA

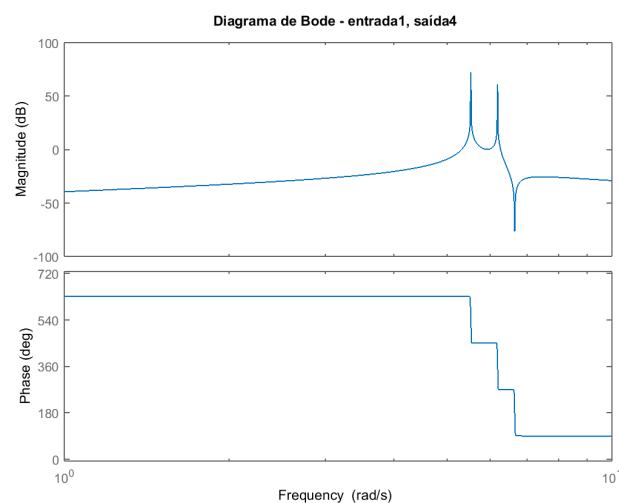
Diagramas de Bode para a entrada F:

Figura 37 – Diagrama de Bode - x, F

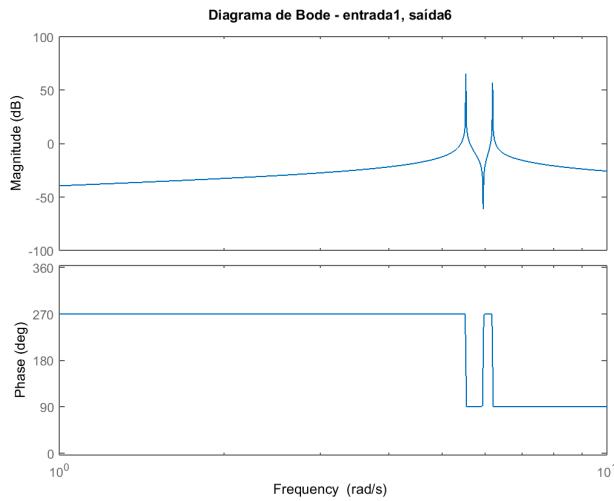


Fonte: Autoria própria.

Figura 38 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_1$ , F

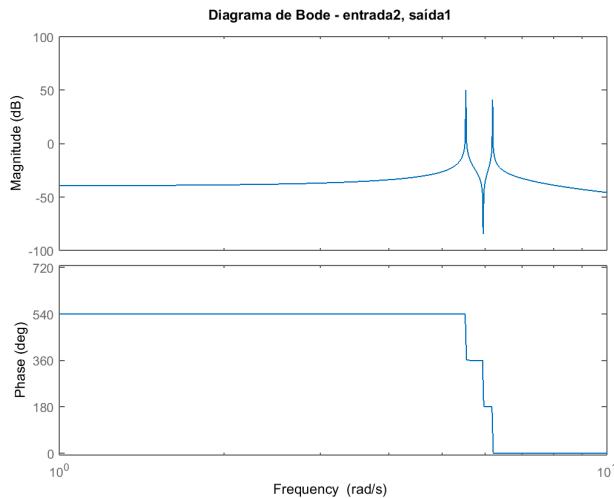


Fonte: Autoria própria.

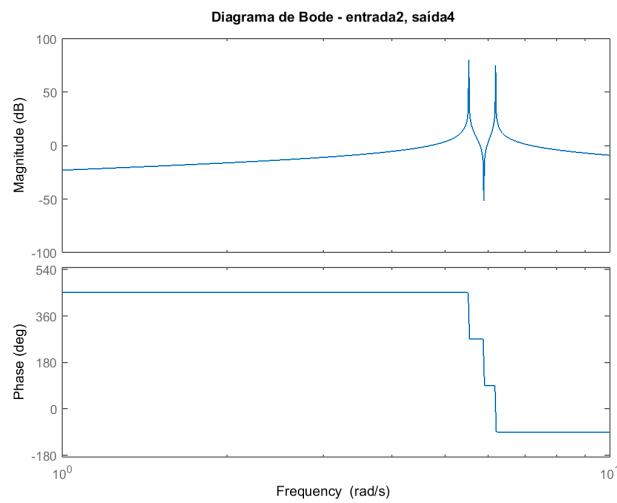
Figura 39 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_2$ , F

Fonte: Autoria própria.

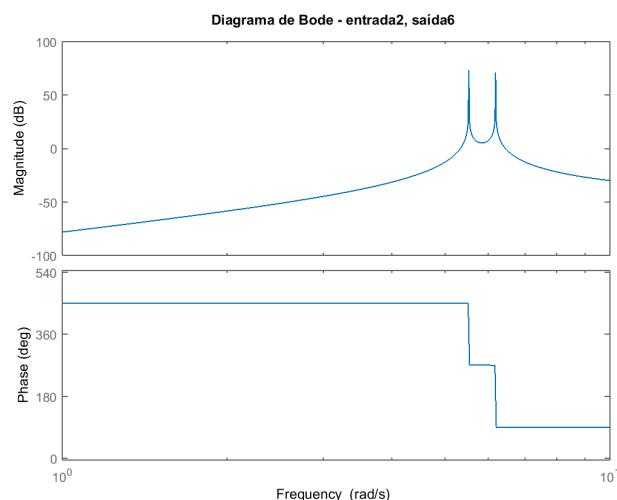
Diagramas de Bode para a entrada  $T_1$ :

Figura 40 – Diagrama de Bode - x,  $T_1$ 

Fonte: Autoria própria.

Figura 41 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_1$ ,  $T_1$ 

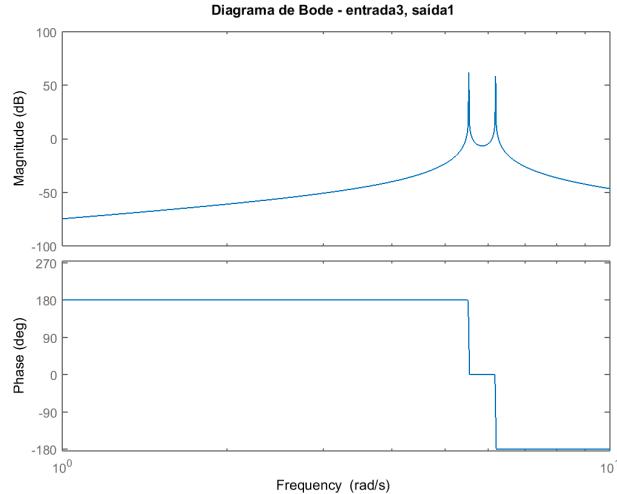
Fonte: Autoria própria.

Figura 42 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_2$ ,  $T_1$ 

Fonte: Autoria própria.

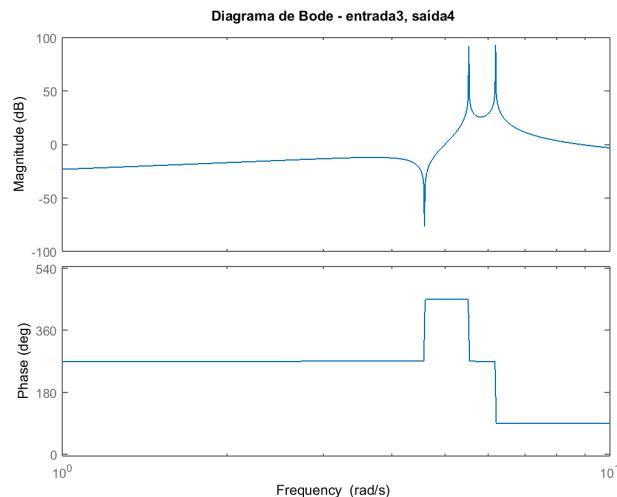
Diagramas de Bode para a entrada  $T_2$ :

Figura 43 – Diagrama de Bode - x,  $T_2$

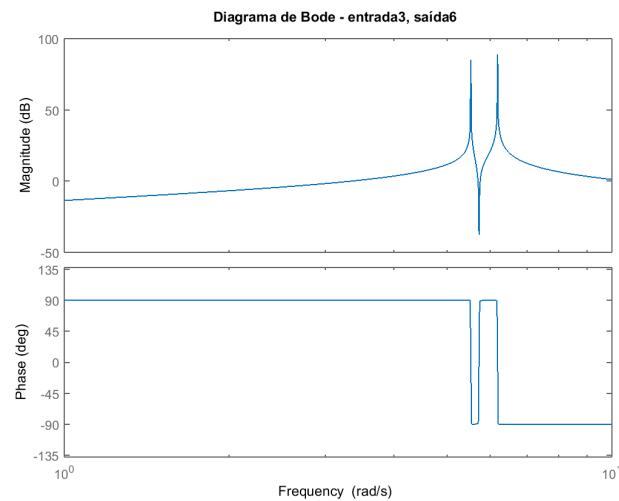


Fonte: Autoria própria.

Figura 44 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_1$ ,  $T_2$



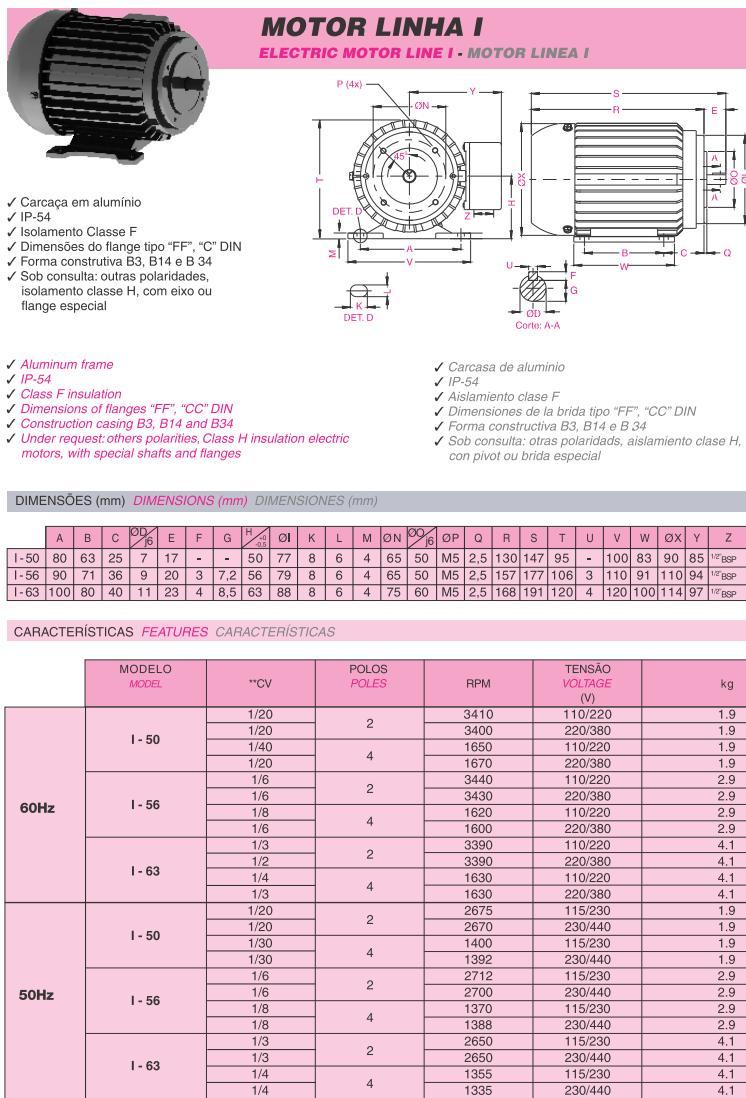
Fonte: Autoria própria.

Figura 45 – Diagrama de Bode -  $\dot{\theta}_2$ ,  $T_2$ 

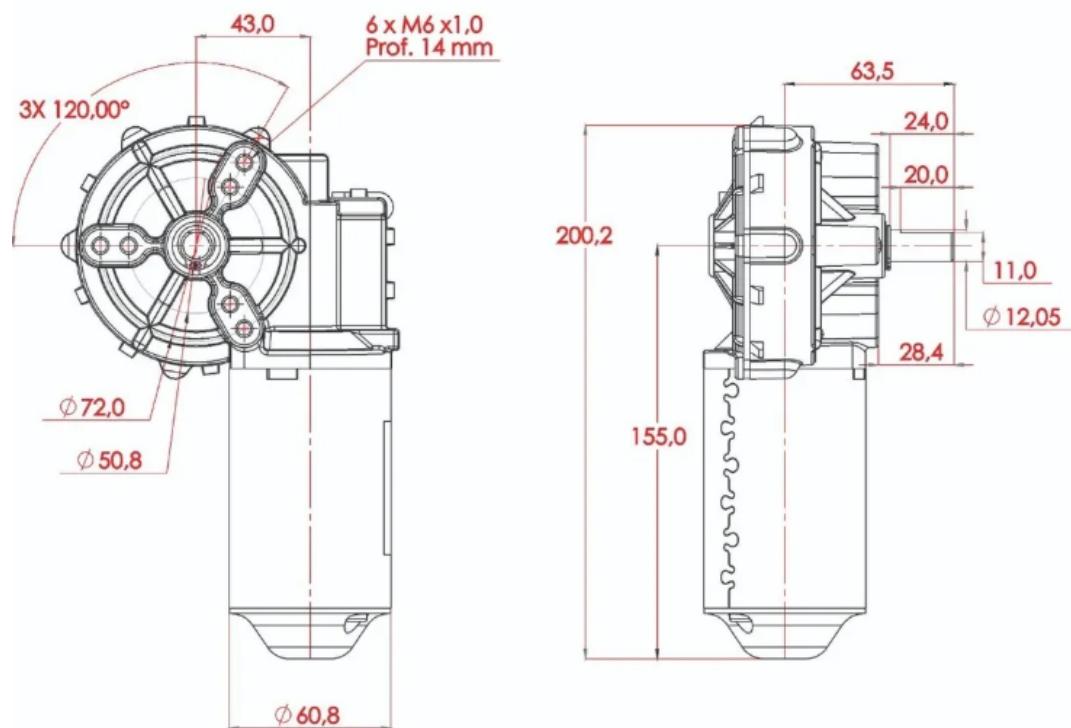
Fonte: Autoria própria.

## APÊNDICE E – ATUADORES

## Motor 1



## Motor 2

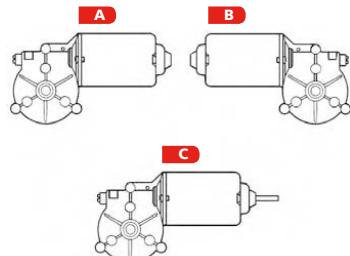


## Motor 3

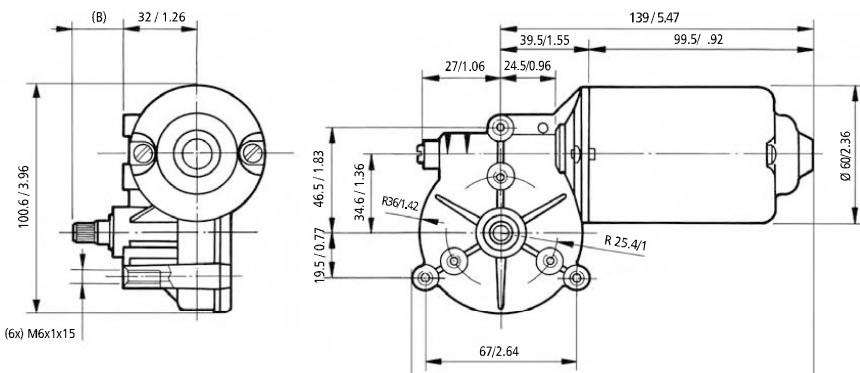
111

**MOTORREDUCTOR C.C.  
D.C. MOTOR WITH GEAR  
MOTOREDUCTEUR C.C.  
GLEICHSTROMGETRIEBEMOTOR**

**DOGA**



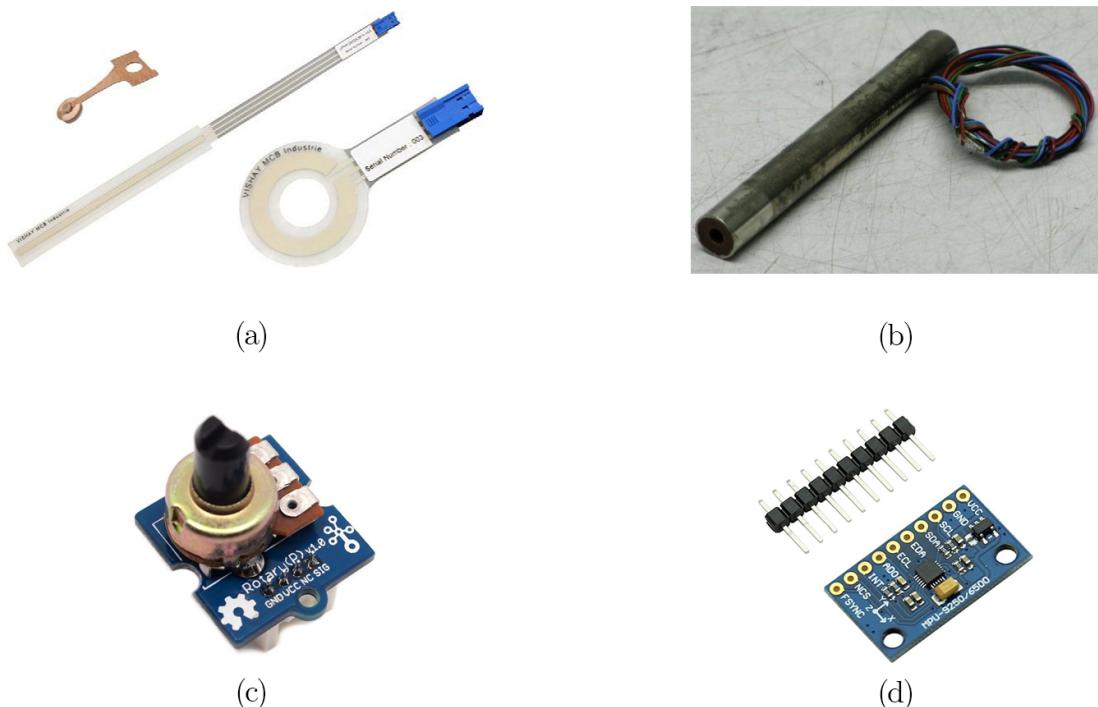
REFERENCIA REFERENCE NUMBER REFERENZNUMMERN	TENSION NOMINAL REFERENCE TENSION REFERENZTENSION	CORRIENTE NOMINAL REFERENCE CURRENT REFERENZSTROM	VELOCIDAD NOMINAL REFERENCE SPEED REFERENZSPEED	PAR NOMINAL REFERENCE TORQUE REFERENZDURCHMOMENT	GECHWINDIGKEIT NOMINALE REFERENCE TORQUE REFERENZDURCHMOMENT	CORRIENTE NOMINAL REFERENCE CURRENT REFERENZSTROM	PAR DE ARRANQUE REFERENCE STARTING TORQUE REFERENZDURCHMOMENT	CORRIENTE DE ARRANQUE REFERENCE STARTING CURRENT REFERENZDURCHSTRÖMUNG	CORRIENTE DE DEMARQUE REFERENCE STARTING CURRENT REFERENZDURCHSTRÖMUNG	CORRIENTE DE ARRANQUE REFERENCE STARTING CURRENT REFERENZDURCHSTRÖMUNG	ELÉCTRICA WELLE	CONEXIONES CONNECTIONS ANSCHLÜSSE	ESQUEMA ELECTRICO WIRKUNGSDIAGRAMM SCHEMÉ ÉLECTRIQUE SCHAUBILD	RELACION DE REDUCCION TRANSMISIONSVERHÄLT RAPPORT DE RÉDUCTION ÜBERSETZUNG	i	P (kg/lb.t)	IP	PLA	a	1
Un (V)	Mn (N.m./lb.ft)	In (r.p.m.)	Ia (A)	Ma (N.m./lb.ft)	Ia (A)															
111.3711.20.00	12	5 / 44.2	40	5	25 / 221.2	25	E22	C25	EE2	62:1	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	1					
111.3711.30.00	24	5 / 44.2	40	2.5	25 / 221.2	13	E22	C25	EE2	62:1	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	1					
111.3761.20.00	12	5 / 44.2	40	5	25 / 221.2	25	E23	C25	EE2	62:1	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	1					
111.3761.30.00	24	5 / 44.2	40	2.5	25 / 221.2	13	E23	C25	EE2	62:1	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	1					
111.3761.20.00E	12	5 / 44.2	40	5	25 / 221.2	25	E23	C25	F2	62:1	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	1					
111.3761.30.00E	24	5 / 44.2	40	2.5	25 / 221.2	13	E23	C25	F2	62:1	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	1					
111.3763.20.00	12	6 / 53.1	25	4	25 / 221.2	15	E23	C25	EE2	62:1	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	3					
111.3763.30.00	24	6 / 53.1	25	2	25 / 221.2	8	E23	C25	EE2	62:1	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	3					
111.4761.30.00	24	5 / 44.2	40	2.5	25 / 221.2	13	E23	C25	EE2	62:1	1.25 / 3.34	IP53	PLA	b	1					
111.9031.20.00	12	3 / 26.5	70	6	25 / 221.2	34	E23	C25	EE2	62:1	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	2					
111.9031.30.00	24	3 / 26.5	70	3	25 / 221.2	17	E23	C25	EE2	62:1	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	2					
111.9039.20.00	12	1.5 / 13.2	240	8	14 / 123.9	46	E23	C26	EE1	49:4	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	4					
111.9039.30.00	24	1.5 / 13.2	240	4	14 / 123.9	23	E23	C26	EE1	49:4	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	4					
111.9041.30.00	24	5 / 44.2	40	2.5	25 / 221.2	13	E24	C25	EE2	62:1	1.30 / 3.48	IP53	BRO	a	1					
111.9094.20.00	12	5 / 44.2	40	5	25 / 221.2	25	E52	C2	EE2	62:1	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	1					
111.9107.30.00	24	1.5 / 13.2	240	4	14 / 123.9	23	E24/E53	C26	EE1	49:4	1.25 / 3.34	IP40	CEL	c	4					
111.9199.20.00	12	3 / 26.5	100	6	20 / 177.01	48	E24	C26	F3	59:2	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	59					
111.9199.30.00	24	3 / 26.5	100	3	20 / 177.01	24	E24	C26	F3	59:2	1.25 / 3.34	IP53	PLA	a	59					



mm / in

## APÊNDICE F – SENSORES

Figura 46 – (a) Sensor *Vishay* de deslocamento linear; (b) Sensor *Transtek* de velocidade linear; (c) Sensor *Grove* de deslocamento angular; (d) Sensor *HiLetgo* de velocidade angular.

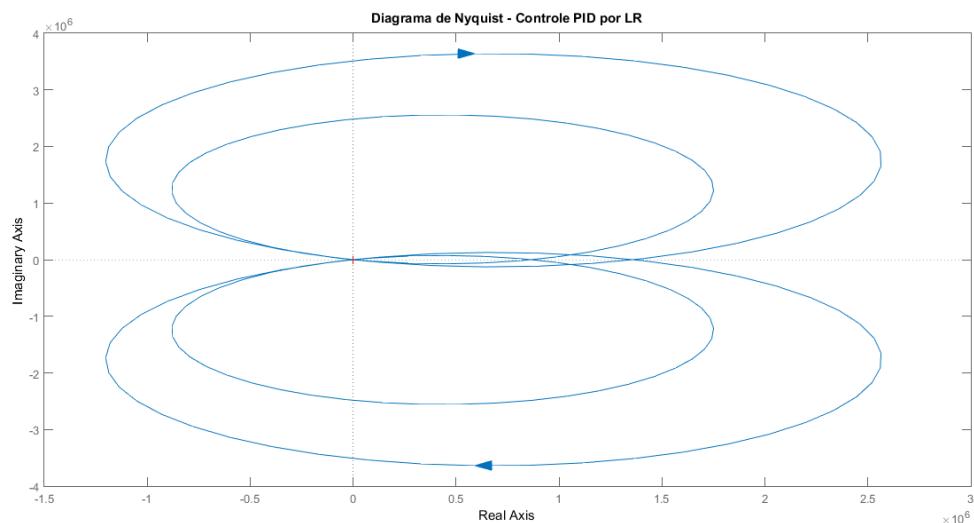


Fontes: (a) Mouser; (b) Amazon; (c) SeedStudio; (d) Amazon.

# APÊNDICE G – GRÁFICOS DE ESTABILIDADE

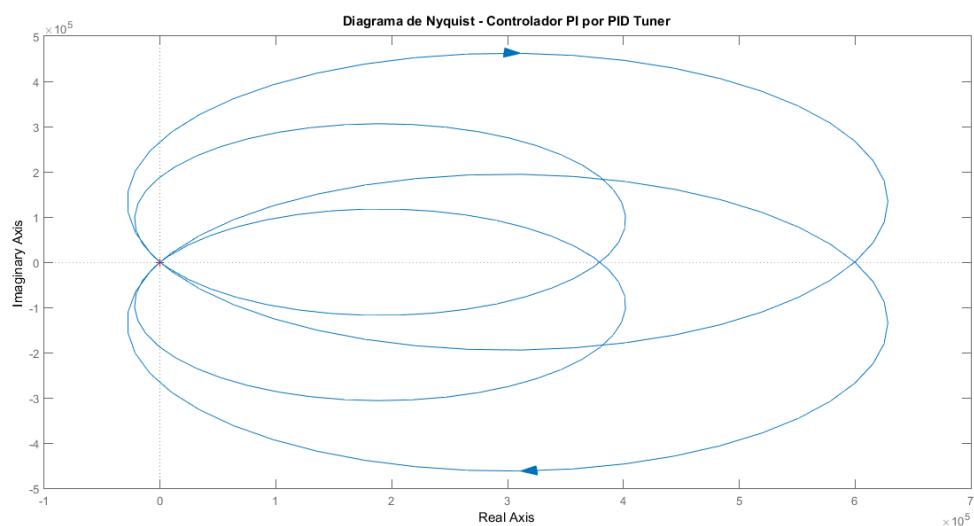
## G.1 Diagramas de Nyquist

Figura 47 – Diagrama de Nyquist para o controlador PID projetado por LR.



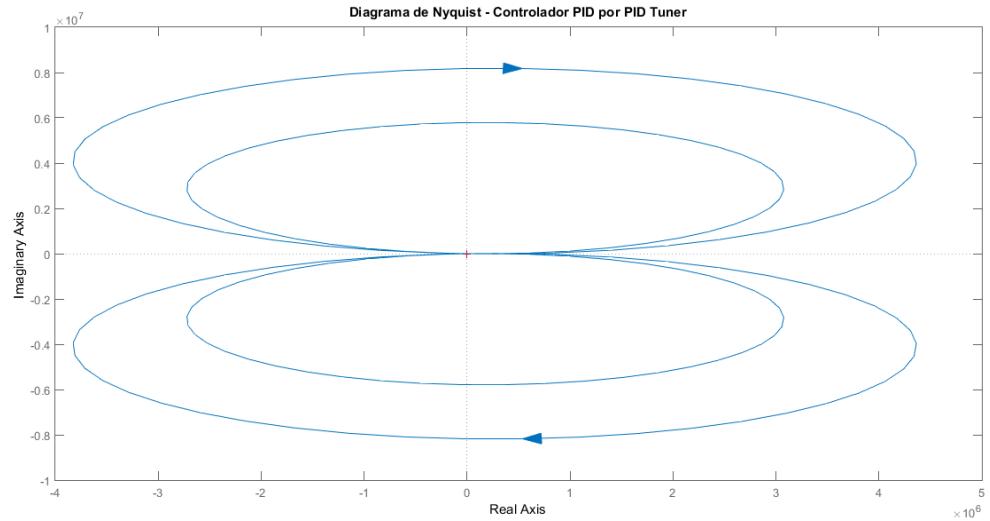
Fonte: Autoria própria.

Figura 48 – Diagrama de Nyquist para o controlador PI projetado pelo PID Tuner.



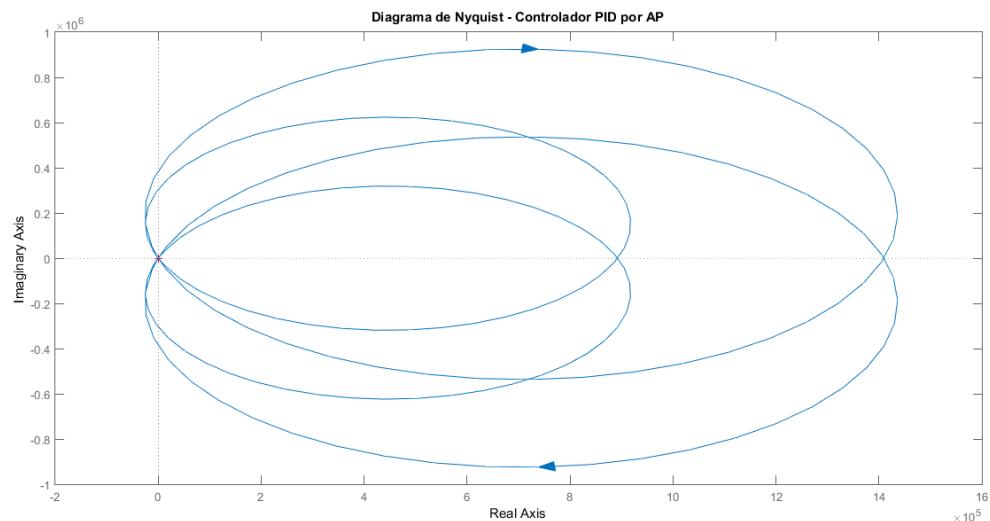
Fonte: Autoria própria.

Figura 49 – Diagrama de Nyquist para o controlador PID projetado pelo PID Tuner.



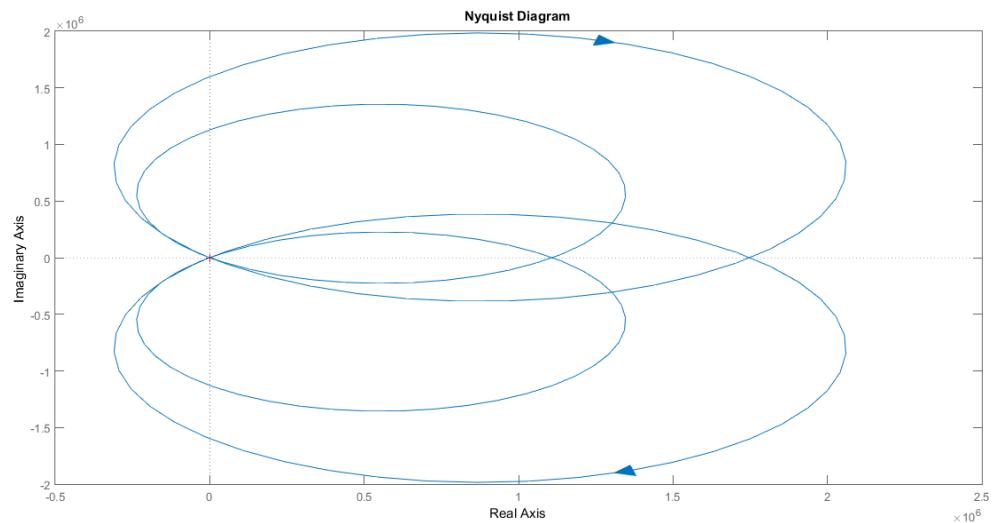
Fonte: Autoria própria.

Figura 50 – Diagrama de Nyquist para o controlador PID projetado por AP.



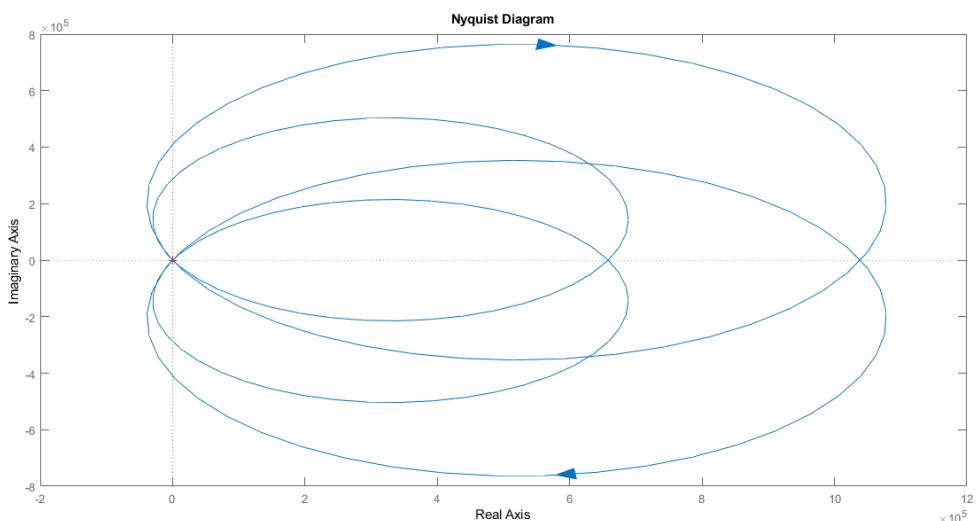
Fonte: Autoria própria.

Figura 51 – Diagrama de Nyquist para o controlador PI projetado por LR.



Fonte: Autoria própria.

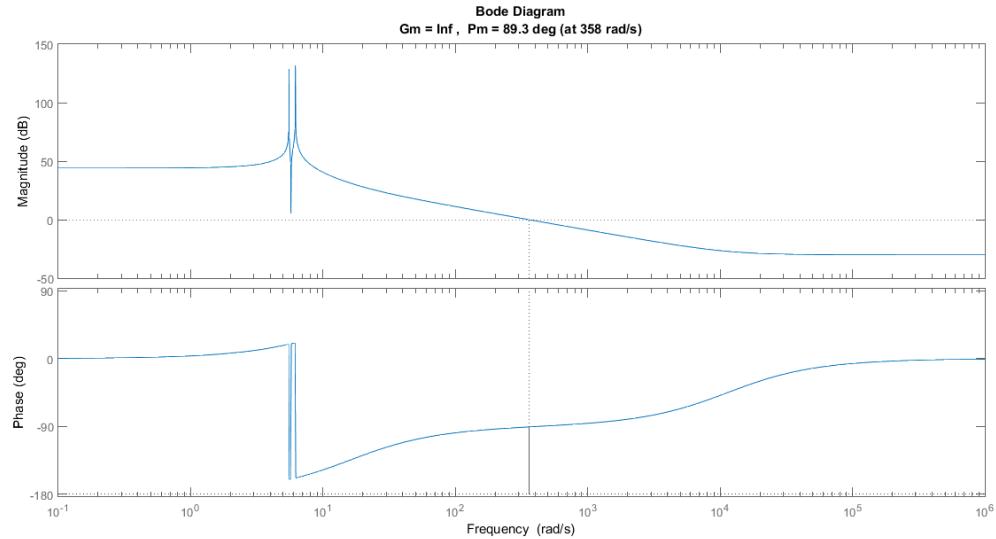
Figura 52 – Diagrama de Nyquist para o compensador.



Fonte: Autoria própria.

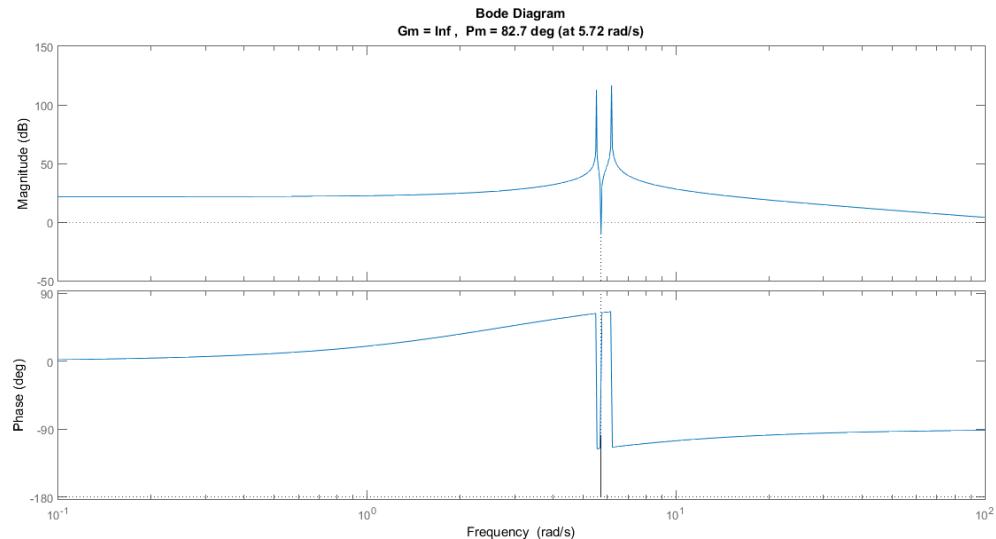
## G.2 Diagramas de Bode com margens de estabilidade

Figura 53 – Diagrama de Bode para o controlador PID projetado por LR.



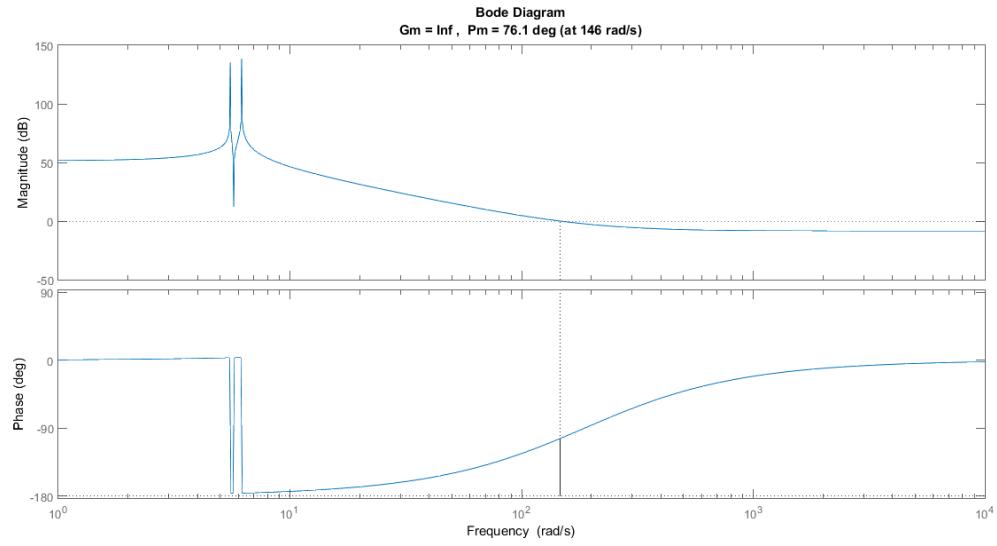
Fonte: Autoria própria.

Figura 54 – Diagrama de Bode para o controlador PI projetado pelo PID Tuner.



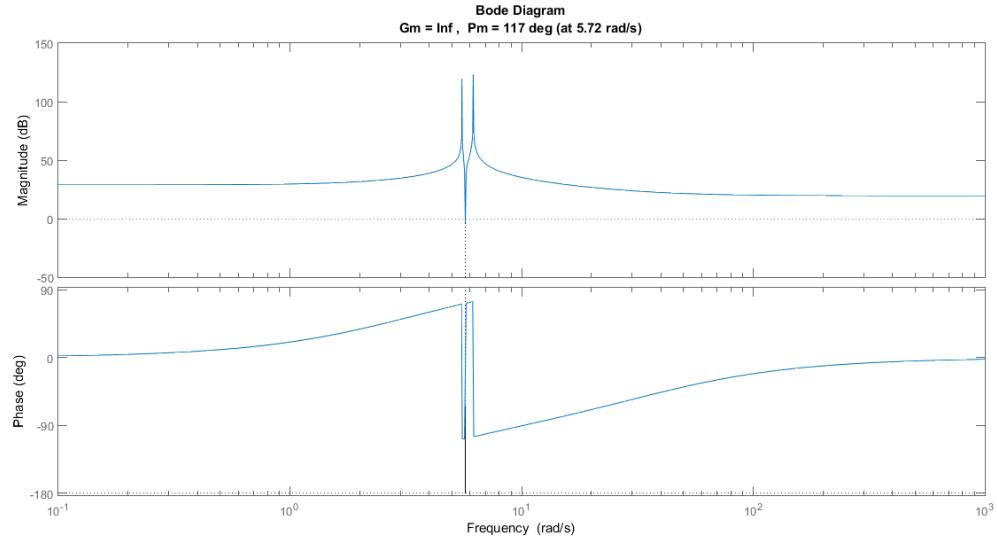
Fonte: Autoria própria.

Figura 55 – Diagrama de Bode para o controlador PID projetado pelo PID Tuner.



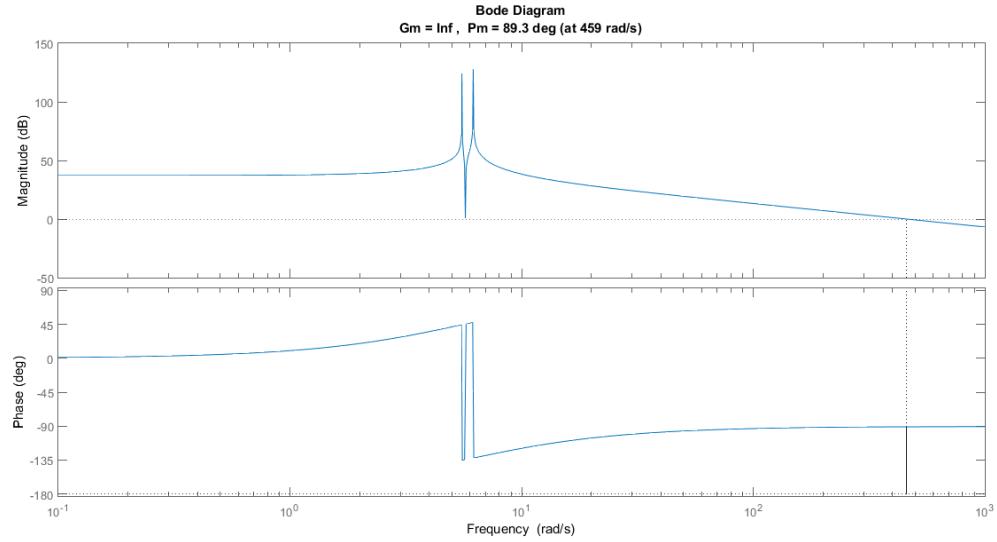
Fonte: Autoria própria.

Figura 56 – Diagrama de Bode para o controlador PID projetado por AP.



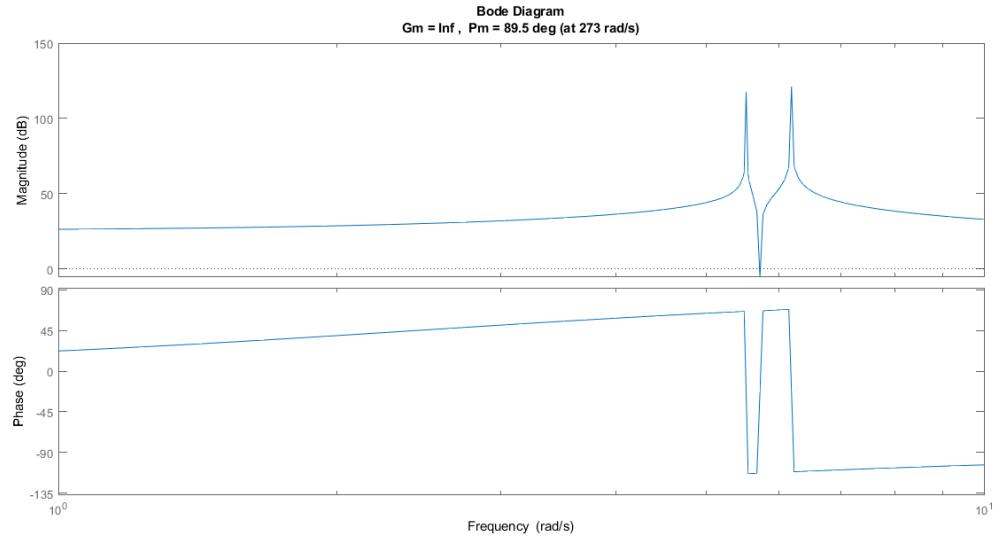
Fonte: Autoria própria.

Figura 57 – Diagrama de Bode para o controlador PI projetado por LR.



Fonte: Autoria própria.

Figura 58 – Diagrama de Bode para o compensador.



Fonte: Autoria própria.