PME 3402
Laboratório de Medições e Controle Discreto
Tranformada $\mathcal{Z}$: conceitos básicos

F. Trigo

1 Equações de diferenças

Suponha que um sinal $e(t)$, contínuo, seja amostrado através de um conversor analógico-digital (A/D) a instantes discretos $t_k = kT$, onde T é o período de amostragem e k é o número da amostra, para ser enviado a um computador.

Supondo-se que os sinais de entrada sejam denominados $e_0, e_1, \ldots, e_K$ (até o instante $t_k = kT$ e que os sinais de saída anteriores ao instante $t_k = kT$ sejam $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ o computador irá fornecer

$$u_k = f(e_0, e_1, \ldots, e_k; u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}) \tag{1}$$

Supondo ainda que a função f seja linear e que o computador possa armazenar somente um número finito de "$e's$" e de "$u's$" passados, a equação 1 toma a forma

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - \ldots - a_n u_{k-n} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_m u_{k-m} \tag{2}$$

A expressão 2 é uma equação de recorrência ou, simplesmente, equação de diferenças. Se os coeficientes forem constantes, trata-se de uma equação de diferenças a coeficientes constantes.

Estas equações são utilizadas no controle de sistemas dinâmicos (um exemplo de diagrama de um sistema de controle em malha fechada, incluindo conversores analógico/digital e digital/analógico é mostrado na fig. 1) lineares e invariantes no tempo, bem como nas tarefas de filtragem digital. Pode-se, também, dizer que possuem correspondência direta com as equações diferenciais ordinárias (EDOs) para sistemas contínuos, como veremos adiante.

A solução de uma equação de diferenças a coeficientes constantes pode ser obtida utilizando a própria fórmula de recorrência. Por exemplo, seja a equação de diferenças (que não depende da entrada) dada por

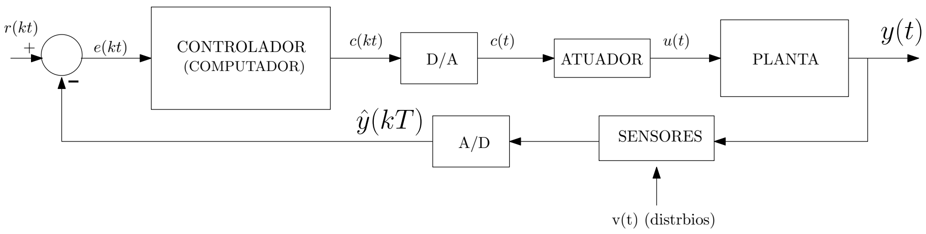

Figura 1: Diagrama simplificado de um sistema de controle em malha fechada

$$
\begin{aligned}
u_k &= u_{k-1} + u_{k-2} \\
k = 2 \rightarrow u_2 &= u_1 + u_0 \\
k = 3 \rightarrow u_3 &= u_2 + u_1 = 2u_1 + u_0 \\
k = 4 \rightarrow u_4 &= u_3 + u_2 = 2u_1 + u_0 + u_1 + u_0 = 3u_1 + 2u_0
\end{aligned} \tag{3}
$$

e assim por diante. Supondo valores iniciais $u_0 = u_1 = 1$ temos $u_0 = 1; u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = 3; u_4 = 5; u_5 = 8\ldots$. Como se percebe, a série cresce indefinidamente à medida que k aumenta. Na verdade, o modelo da eq. 3 foi utilizado para descrever a reprodução de coelhos em ambiente controlado supondo 1 par inicial, sem mortes e início do período fértil após um ciclo de tempo, e representa a chamada série de Fibonacci (aprox. 1200 d.C).

Na nomenclatura de sistemas dinâmicos, diz-se que ele é instável pois sua resposta cresce sem limites dadas condicões iniciais limitadas. É usual, também em controle, conhecer a resposta de um sistema a uma entrada finita *sem* ter necessidade de efetuar uma simulação (numérica ou ensaio de teste) para saber se este é estável ou instável e, também, conhecer a forma geral da solução da equação diferencial (ou de diferenças) que rege sua dinâmica.

Uma das maneiras de se fazer isso é assumir uma forma para essa solução com constantes arbitrárias e resolver a equação algébrica resultante de modo a satisfazer as condições iniciais. Para EDOs (portanto, contínuas) a solução do tipo e^{sT} é utilizada, $s = \sigma + j\omega$, com $j \equiv$ variável complexa.

No caso de equações de diferenças, as soluções envolvem z^k, com $z \sim s$ e $k \sim t$. Especificamente em relação à eq. 3 segue que, supondo a solução $u(k) = Az^k$,

$$
Az^k = Az^{k-1} + Az^{k-2} \tag{4}
$$

Dividindo a eq. 4 por A (supondo $A \neq 0$) e multiplicando por z^{-k} (supondo $z \neq 0$) vem,

$$\begin{aligned} z^k &= z^{k-1} + z^{k-2} \quad (\times z^{-k}) \\ 1 &= z^{-1} + z^{-2} \quad (\times z^2) \\ &\Longrightarrow z^2 - z - 1 = 0, \end{aligned}$$

polinômio em z cujas raízes são $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como a equação é linear, a soma de soluções particulares é também solução, portanto,

$$u(k) = A_1 z_1^k + A_2 z_2^k \tag{5}$$

Impondo as condições iniciais, temos

$$\begin{aligned} u(k=0) = 1 &\Longrightarrow 1 = A_1 + A_2 \\ u(k=1) = 1 &\Longrightarrow 1 = A_1 z_1 + A_2 z_2, \end{aligned}$$

sistema linear cuja solução é

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ A_2 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Assim,

$$u(k) = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} z_1^k + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} z_2^k$$

Observa-se que, como $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, a solução com z_1^k irá crescer indefinidamente, confirmando que o sistema é instável.

Generalização

Utilizando-se $u = z^k$ em uma equação de diferenças, obtém-se um polinômio em z denominado polinômio característico ou equação característica. Se qualquer solução dessa equação tiver módulo maior do que 1 (isto é, for externo ao círculo unitário no plano complexo), a equação de diferenças correspondente será *instável*.

Exemplo 1

Verificar a estabilidade da seguinte equação de diferenças:

$$u(k) = 0,9u(k-1) - 0,2u(k-2) \tag{6}$$

A equação característica é $z^2 - 0,9z + 0,2 = 0$ cujas soluções são $z_1 = 0,5$ e $z_2 = 0,4$. Como $|z_1| < 1$ e $|z_2| < 1$, a equação é estável.

2 Transformada $\mathscr{Z}$

Vimos, até aqui, que a utilização de uma variável z torna a solução de uma equação de diferenças discretas possível. A questão é se a variável compleza z não poderia ser entendida como a equivalente discreta da virável s, tratada no âmbito das transformadas de Laplace. A resposta é sim, e a correspondência será mostrada a seguir.

Define-se a transformada Z de uma função discreta $u_k = u(t_k = kT) = u(kT)$, como

$$U(z) \triangleq \mathscr{Z}(u_k) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} u_k z^{-k},\ r_0 < |z| < R, \tag{7}$$

r_0 e R são os limites para os quais a série da eq. 7 converge. Essa transformação é a mais genérica, denominada bilateral. Para sistemas causais, $u_k = 0$ para $k < 0$ e há necessidade de especificações das condições iniciais.

A fundamentação para a existência de uma transformação para sinais discretos análoga à dos sinais contínuos é apresentada na sequência.

Inicialmente, define-se a variável complexa

$$z = e^{sT} \tag{8}$$

onde T é o intervalo entre amostragens consecutivas (tempo de amostragem, ou período de amostragem). Em decorrência disso,

$$z^{-k} = e^{-skT}, \tag{9}$$

e, voltando à eq. 7,

$$U(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} u_k . e^{-skT} \tag{10}$$

Para que o sinal u_k seja contínuo e a transformada de Laplace possa ser aplicada, é necessário que $T \to 0$. Definindo-se

$$\Delta_T(t) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

um trem de impulsos e

$$u_k(t) = u(t).\Delta_T(t) = u(t).\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\delta(t-kT), \tag{11}$$

onde $u(k) = u(kT)$, é possível efetuar a transformação de Laplace:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = [u_k(t)] = U(s) &= \int_0^\infty u_k(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\delta(t-kT)e^{-st}dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\int_0^\infty \delta(t-kT)e^{-st}dt \Longrightarrow \end{aligned} \tag{12}$$

A integral do lado direito da eq. 12 nada mais é do que a soma dos valores assumidos por e^{-st} a cada instante $t_k = kT$ conforme a passagem do trem de impulsos. Com isso, pode-se estender a somatória ao produto e escrever

$$\mathscr{L}\left[u_k(t)\right] = U(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)e^{-skT} \tag{13}$$

Como $z = e^{sT}$, decorre que

$$U(s) = \sum_{k=0}^{k=\infty} u(k)z^{-k} = U(z) \tag{14}$$

Exemplo 2
Obter a transformada $\mathscr{Z}$ de um sinal $u(t) = 1(t).e^{-at}$, com $1(t) \triangleq$ degrau unitário em $t = 0$, amostrado em períodos iguais a T.
Solução
Pela definição,

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}.z^{-k} \\ U(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-aT}z^{-1})^k \\ U(z) = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} &+ e^{-3aT}z^{-3} + \ldots \\ U(z) = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}, &\quad e^{-aT} < |z| < \infty \text{ ou} \\ U(z) &= \frac{z}{z-e^{-aT}}, |z| > e^{-aT} \end{aligned}$$

Uma importante propriedade da transformada $\mathscr{Z}$ pode ser observada diretamente a partir da sua aplicação à eq. 2, tendo em conta que $u_{k-n} = u(kT-n)$, relação que também é válida para e_{k-m}, m, n inteiros:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}(u_k) = U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} \\
= \mathcal{Z}(-a_1 u_{k-1} \ldots - a_n u_{k-n} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_m u_{k-m}) \\
= \sum_{k=0}^{\infty} (-a_1 u_{k-1} z^{-k}) \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} (-a_n u_{k-n} z^{-k}) \\
+ \sum_{k=0}^{\infty} (b_0 e_k z^{-k}) + \sum_{k=0}^{\infty} (b_1 e_{k-1} z^{-k}) + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} (b_m u_{k-m} z^{-k})
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Cada um dos termos do lado direito da eq. 15 pode ser resolvido individualmente. Por exemplo, para o primeiro termo desse lado, fazendo a mudança de variáveis $k-1=r$, pode-se escrever

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} (-a_1 u_{k-1} z^{-k}) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} (-a_1 u_r z^{-r-1}) \\
&= -a_1 z^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} (u_r z^{-r}) \\
&= -a_1 z^{-1} U(z)
\end{aligned}
$$

Procedimento análogo aplicado aos demais termos da eq. 15 permite enunciar a *propriedade de deslocamento temporal*:

$$
\mathcal{Z}(u_{k-n}) = z^{-n} U(z) \tag{16}
$$

Essa propriedade será particularmente importante no projeto de filtros digitais, etapa posterior do curso. Cabe aqui ressaltar que, na eq. 6, no primeiro exemplo, ela foi implicitamente utilizada na obtenção do polinômio característico.

Referências

[1] Franklin, G.F., Powel, D.J. e Workman, M. Digital Control of Dynamic Systems. Addison-Wesley, 1988 (3rd. Ed.)

[2] Ogata, K. Discrete-Time Control Systems. Pearson, 1995 (2nd. ed).