Tópico 04 – Filtros Digitais

O sinal com ruído aquisitado também pode ser filtrado por meio de um programa de computador. Nesse caso, se o ruído for de alta frequência, é preciso ficar atento para o teorema da amostragem, e ajustar adequadamente a frequência de amostragem. Uma vantagem dos filtros digitais é que, como são programas de computador, são flexíveis. Para alterar o filtro basta mudar o programa. Outra vantagem é que podem ser construídos filtros digitais que não tem equivalente em tempo contínuo, ampliando as opções de filtragem. As desvantagens são as mesmas de todo sistema digital, como a perda de informação devido à digitalização do sinal (amostragem e quantização), podendo levar a problemas numéricos. Filtros digitais são implementados em um programa de computador na forma de equações de diferenças.

$y[k]$: sinal já filtrado (saída do filtro)
$e[k]$: sinal a ser filtrado (entrada do filtro)

Exemplo de filtro digital
Um filtro digital comum é o de média móvel.

$$y[k] = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} e[k-i]$$

$y[k]$: sinal já filtrado (saída do filtro)
$e[k]$: sinal a ser filtrado (entrada do filtro)

Usar a expressão anterior diretamente leva a um atraso muito grande. Pode-se usar uma expressão recursiva:

$$y[k-1] = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} e[k-1-i]$$

$$y[k] - y[k-1] = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} e[k-i] - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} e[k-1-i]$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} e[k-i] - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} e[k-1-i] = \frac{1}{N}\left\{\sum_{i=0}^{N-1} e[k-i] - \sum_{i=0}^{N-1} e[k-1-i]\right\} = \frac{1}{N}\left(e[k] - e[k-N]\right)$$

$$y[k] = y[k-1] + \frac{1}{N}\left(e[k] - e[k-N]\right)$$

Observação: o filtro de média móvel é um exemplo de um filtro do tipo FIR (*Finite Impulse Response filter*).

FIR (*Finite Impulse Response filter*)
A duração da resposta a impulso do filtro é finita. Os filtros não recursivos são do tipo FIR (o valor de *y* no instante atual não depende dos valores anteriores de *y*).

IIR (*Infinity Impulse Response filter*)
A duração da resposta a impulso do filtro é infinita, embora a amplitude da resposta possa se tornar cada vez menor e ficar desprezível com o tempo.

Filtros como sistemas dinâmicos

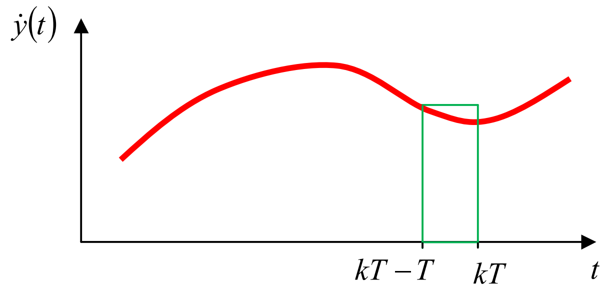
Outra abordagem para programar um filtro em um sistema digital é observar que o filtro é, basicamente, um sistema dinâmico modelado por equações diferenciais. Assim, uma forma de obter um sistema equivalente em tempo discreto é usar uma aproximação numérica. Esta aproximação numérica de um filtro analógico resulta em um filtro digital do tipo IIR (*Infinity Impulse Response filter*).

Exemplo
Seja um filtro de 1ª ordem, passa baixas:
$\dot{y}(t) = -\omega_c y(t) + \omega_c e(t)$
onde
$\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$: frequência de corte do filtro em rad/s
τ : constante de tempo do sistema de 1ª ordem
$y(t)$: sinal já filtrado (saída do filtro)
$e(t)$: sinal a ser filtrado (entrada do filtro)

Assim, a saída $y(t)$ pode ser obtida integrando $\dot{y}(t)$. E para a integração podemos usar as abordagens de cálculo numérico. Basicamente, $y(t)$ é a área embaixo da curva de $\dot{y}(t)$.

Aproximações:

"Forward rule" (Euler)
$y(kT) = y(kT-T) + \underbrace{T\,\dot{y}(kT-T)}_{\text{área do retângulo verde}}$



Lembrando que:
$\dot{y}(t) = -\omega_c y(t) + \omega_c e(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(kT-T) = \underbrace{-\omega_c y(kT-T) + \omega_c e(kT-T)}$

"Forward rule" (Euler)
$y(kT) = y(kT-T) + T[\dot{y}(kT-T)]$

Substituindo:
$y(kT) = y(kT-T) + T[-\omega_c y(kT-T) + \omega_c e(kT-T)]$

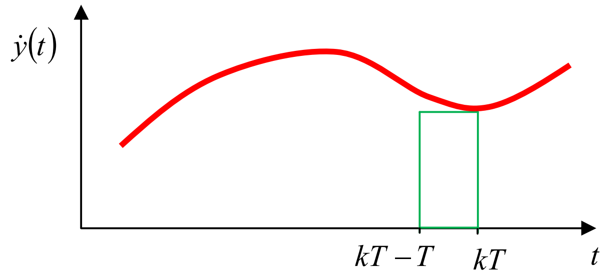
$y(kT) = (1-\omega_c T)y(kT-T) + \omega_c T e(kT-T)$

Em uma notação simplificada:

$y[k] = (1-\omega_c T)y[k-1] + \omega_c T e[k-1]$

"Backward rule"

$$y(kT) = y(kT - T) + T\,\dot{y}(kT)$$
$$y(kT) = y(kT - T) + T[-\omega_c y(kT) + \omega_c e(kT)]$$



Observe que $y(kT)$ aparece no lado direito da equação. Sendo uma equação linear, é possível isolá-lo, porém, se fosse um sistema não linear, a solução exigiria algum tipo de iteração.

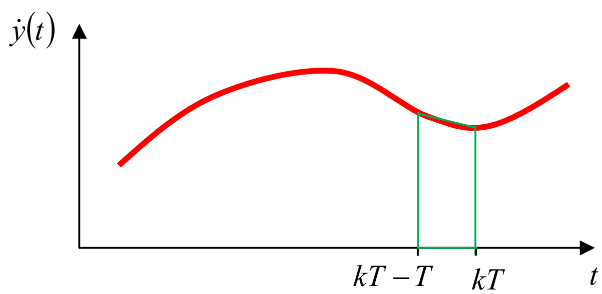
$$y(kT) + \omega_c T y(kT) = y(kT - T) + \omega_c T e(kT)$$
$$y(kT) = \frac{1}{1 + \omega_c T} y(kT - T) + \frac{1}{1 + \omega_c T} \omega_c T e(kT)$$

Usando notação simplificada:

$$y[k] = \left(\frac{1}{1 + \omega_c T}\right) y[k-1] + \left(\frac{1}{1 + \omega_c T}\right) \omega_c T\, e[k]$$

"Trapezoid rule" (Tustin, ou bilinear)

$$y(kT) = y(kT - T) + \underbrace{\frac{T}{2}[\dot{y}(kT - T) + \dot{y}(kT)]}_{\text{área do trapézio verde}}$$



Resultando em:

$$y[k] = \frac{1 - \left(\frac{\omega_c T}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\omega_c T}{2}\right)} y[k-1] + \frac{\left(\frac{\omega_c T}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\omega_c T}{2}\right)} (e[k-1] + e[k])$$

Observação:

A frequência no filtro digital obtido por transformação bilinear não corresponde exatamente à frequência no filtro analógico:

$$\omega_d = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

Ogata, K. **Discrete Time Control Systems**, 2nd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1994, pg 229.

Se ωT for suficientemente pequeno tal que $\tan \frac{\omega T}{2} \cong \frac{\omega T}{2}$, então:

$$\omega_d \cong \omega$$

Mas observe que, mesmo escolhendo T tal que a frequência de corte do filtro em tempo discreto seja a mesma do filtro em tempo contínuo, ainda haverá diferenças para frequências maiores.

Estudando as expressões usando Transformada de Laplace e Transformada Z:

Tempo contínuo, função de transferência (condições iniciais nulas):

$$\dot{y}(t) = -\omega_c y(t) + \omega_c e(t)$$

$$\mathcal{L}[\dot{y}(t)] = \mathcal{L}[-\omega_c y(t)] + \mathcal{L}[\omega_c e(t)]$$

$$sY(s) = -\omega_c Y(s) + \omega_c E(s) \Rightarrow sY(s) + \omega_c Y(s) = \omega_c E(s) \Rightarrow [s + \omega_c]Y(s) = \omega_c E(s)$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}}$$

Tempo discreto:

"Forward rule" (Euler)

$$y(kT) = (1 - \omega_c T)y(kT - T) + \omega_c Te(kT - T)$$

$$\mathcal{Z}[y(kT)] = \mathcal{Z}[(1 - \omega_c T)y(kT - T)] + \mathcal{Z}[\omega_c Te(kT - T)]$$

$$Y(z) = (1 - \omega_c T)z^{-1}Y(z) + \omega_c Tz^{-1}E(z) \Rightarrow Y(z) - (1 - \omega_c T)z^{-1}Y(z) = \omega_c Tz^{-1}E(z)$$

$$\left[1 - (1 - \omega_c T)z^{-1}\right] Y(z) = \omega_c Tz^{-1}E(z)$$

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c Tz^{-1}}{1 - (1 - \omega_c T)z^{-1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c}{\frac{(z-1)}{T} + \omega_c}}$$

"Backward rule"

$$y(kT) = \frac{1}{1 + \omega_c T} y(kT - T) + \frac{1}{1 + \omega_c T} \omega_c Te(kT)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 + \omega_c T} z^{-1}Y(z) + \frac{\omega_c T}{1 + \omega_c T} E(z)$$

Após alguma álgebra:

$$\boxed{\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c}{\frac{(z-1)}{Tz} + \omega_c}}$$

****
(Álgebra)

$$\Rightarrow Y(z) - \frac{1}{1+\omega_c T} z^{-1} Y(z) = \frac{\omega_c T}{1+\omega_c T} E(z)$$

$$\frac{1+\omega_c T}{1+\omega_c T} Y(z) - \frac{1}{1+\omega_c T} z^{-1} Y(z) = \frac{\omega_c T}{1+\omega_c T} E(z) \Rightarrow \frac{1+\omega_c T - z^{-1}}{1+\omega_c T} Y(z) = \frac{\omega_c T}{1+\omega_c T} E(z)$$

$$\left(1+\omega_c T - z^{-1}\right) Y(z) = \omega_c T E(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c T}{1+\omega_c T - z^{-1}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c T}{1+\omega_c T} \cdot \frac{1+\omega_c T}{1+\omega_c T - z^{-1}}$$

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c T}{1+\omega_c T} \cdot \frac{1}{\dfrac{1+\omega_c T}{1+\omega_c T} - \dfrac{z^{-1}}{1+\omega_c T}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c T}{1+\omega_c T} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z^{-1}}{1+\omega_c T}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c T z}{1+\omega_c T} \cdot \frac{1}{z\left(1 - \dfrac{z^{-1}}{1+\omega_c T}\right)}$$

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c T z}{1+\omega_c T} \cdot \frac{1}{z - \dfrac{1}{1+\omega_c T}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c T z}{1+\omega_c T} \cdot \frac{1}{\dfrac{z(1+\omega_c T)-1}{1+\omega_c T}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{E(z)} = \omega_c T z \cdot \frac{1}{z(1+\omega_c T)-1}$$

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c T z \dfrac{1}{Tz}}{\left[z(1+\omega_c T)-1\right]\dfrac{1}{Tz}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c}{\dfrac{z}{Tz} + \dfrac{\omega_c T z}{Tz} - \dfrac{1}{Tz}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c}{\dfrac{(z-1)}{Tz} + \omega_c}$$

****

“Trapezoid rule” (Tustin, ou bilinear)

$$y(kT) = \frac{1-\left(\dfrac{\omega_c T}{2}\right)}{1+\left(\dfrac{\omega_c T}{2}\right)} y(kT-T) + \frac{\left(\dfrac{\omega_c T}{2}\right)}{1+\left(\dfrac{\omega_c T}{2}\right)} \left[e(kT-T) + e(kT)\right]$$

$$Y(z) = \frac{1-\left(\dfrac{\omega_c T}{2}\right)}{1+\left(\dfrac{\omega_c T}{2}\right)} z^{-1} Y(z) + \frac{\left(\dfrac{\omega_c T}{2}\right)}{1+\left(\dfrac{\omega_c T}{2}\right)} \left[z^{-1} E(z) + E(z)\right]$$

Após alguma álgebra:

$$\boxed{\frac{y(z)}{E(z)} = \frac{\omega_c}{\dfrac{2}{T}\dfrac{(z-1)}{z+1} + \omega_c}}$$

Comparando:

Tempo contínuo

$$\frac{Y(s)}{E(s)}=\frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

"Forward rule" (Euler)

$$\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{\omega_c}{\frac{(z-1)}{T}+\omega_c} \qquad \boxed{\frac{Y(s)}{E(s)}=\frac{\omega_c}{s+\omega_c}}$$

"Backward rule"

$$\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{\omega_c}{\frac{(z-1)}{Tz}+\omega_c} \qquad \boxed{\frac{Y(s)}{E(s)}=\frac{\omega_c}{s+\omega_c}}$$

"Trapezoid rule" (Tustin, ou bilinear)

$$\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{\omega_c}{\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{z+1}+\omega_c} \qquad \boxed{\frac{Y(s)}{E(s)}=\frac{\omega_c}{s+\omega_c}}$$

Observa-se que:

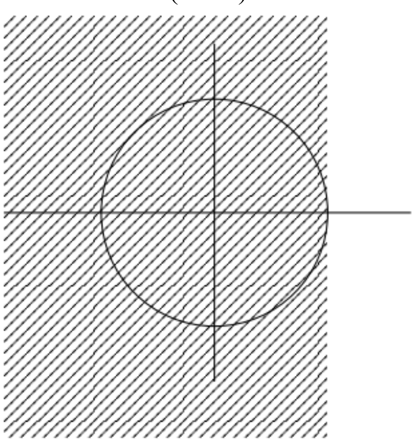
$$s=\frac{(z-1)}{T} \quad \Rightarrow \quad z=1+Ts$$

$$s=\frac{(z-1)}{Tz} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{1}{1-Ts}$$

$$s=\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{z+1} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$$

Mapeando o eixo imaginário do plano s no plano z (o círculo é centrado na origem e tem raio 1):

"Forward rule" (Euler)



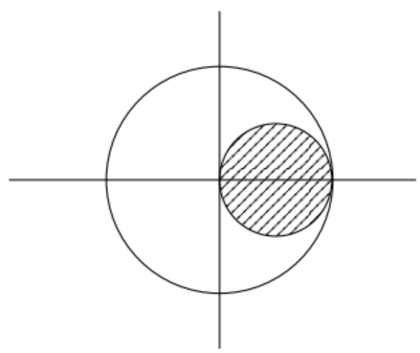
Sistemas **estáveis** em tempo contínuo podem resulter em aproximações **instáveis**.

Eixo imáginário: $s=j\omega$

$$z=1+Ts \Rightarrow z=1+Tj\omega$$

(eixo imaginário deslocado de 1 para a direita)

"Backward rule"

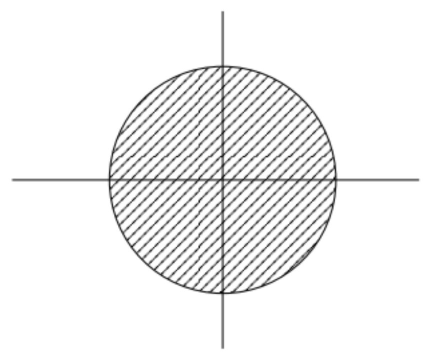


Sistemas **instáveis** em tempo contínuo podem resultar em aproximações **estáveis**.

Eixo imáginário: $s=j\omega$

$$z=\frac{1}{1-Ts} \Rightarrow z=\frac{1}{1-Tj\omega}$$

"Trapezoid rule" (Tustin, ou bilinear)



Todo o semi-plano esquerdo do plano s é mapeado dentro do círculo unitário no plano z.

Eixo imáginário: $s=j\omega$

$$z=\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s} \Rightarrow z=\frac{1+\frac{T}{2}j\omega}{1-\frac{T}{2}j\omega}$$

$|z|=1$ (círculo unitário)

Nota sobre "Backward rule"

$$z=\frac{1}{1-Ts}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{1-Ts}-\frac{1}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad z-\frac{1}{2}=\left[\frac{1}{1-Ts}\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\frac{1-Ts}{1-Ts}\right]=\frac{1}{2}\frac{1}{1-Ts}\left[2-(1-Ts)\right]$$

$$z-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-Ts}\left[2-1+Ts\right]=\frac{1}{2}\frac{1}{1-Ts}\left[1+Ts\right]=\frac{1}{2}\frac{1+Ts}{1-Ts} \underset{s=j\omega}{\Rightarrow} \boxed{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}}$$

(círculo de raio 1/2 com centro no ponto de coordenadas 1/2 + 0j)