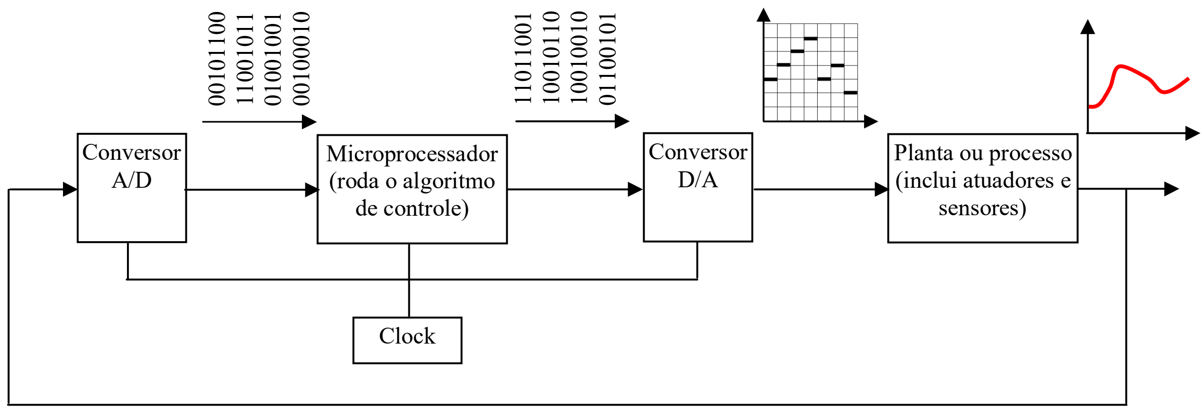
Tópico 06 – PID Digital
Controle em tempo discreto



O projeto de sistemas de controle usando modelos matemáticos da planta podem seguir duas abordagens básicas:

1. A partir do modelo em tempo contínuo da planta se projeta o controlador em tempo contínuo, e em seguida se determina um controlador em tempo discreto equivalente (e necessariamente aproximado) desse controlador em tempo contínuo.
2. Converte-se o modelo em tempo contínuo da planta em um modelo em tempo discreto, e se projeta o controlador diretamente em tempo discreto.

A primeira abordagem é conveniente, pois podem ser utilizadas as ferramentas já disponíveis e amplamente conhecidas de projeto de sistemas de controle em tempo contínuo. Porém, os controladores equivalentes aproximados em tempo discreto provavelmente irão precisar de ajustes para manter o desempenho previamente estabelecido. Em geral, esta abordagem funciona bem quando a taxa de amostragem é cerca de 30 vezes maior que as frequências de interesse.

A segunda abordagem exige conhecimento de projeto de sistemas de controle em tempo discreto que, devido à amostragem, apresentam uma base matemática um pouco mais complexa. Entretanto, ao considerar explicitamente o atraso devido ao tempo discreto, pode-se projetar sistemas de controle com taxas de amostragens menores e ainda assim ter um bom desempenho. Além disso, existem características específicas de controle em tempo discreto que não tem paralelo em tempo contínuo.

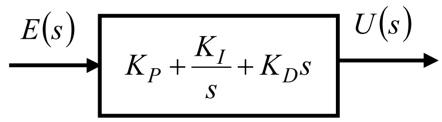
O que apresentaremos aqui é a primeira abordagem, ou seja, o sistema de controle é projetado em tempo contínuo, e depois se obtém um equivalente aproximado em tempo discreto.

Observando que o controlador (e filtros, compensadores, etc.) nada mais é que um sistema dinâmico que pode ser expresso por equações diferenciais, uma forma de obter um equivalente em tempo discreto é usar uma aproximação numérica de uma integração.

Ilustrando o conceito com o controlador PID em tempo contínuo:

$u(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t)dt + K_D \dot{e}(t)$

Ou, em diagrama de blocos:



$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

Observe que:

$\dot{u}(t) = K_P \dot{e}(t) + K_I e(t) + K_D \ddot{e}(t)$

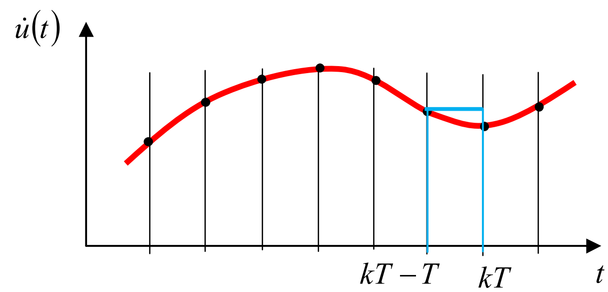
Assim, o sinal de controle $u(t)$ pode ser obtido integrando $\dot{u}(t)$. E para a integração podemos usar as abordagens de cálculo numérico. Basicamente, $u(t)$ é a área embaixo da curva de $\dot{u}(t)$.

Aproximações:

"Forward rule"

$u(kT) = u(kT-T) + T\dot{u}(kT-T)$

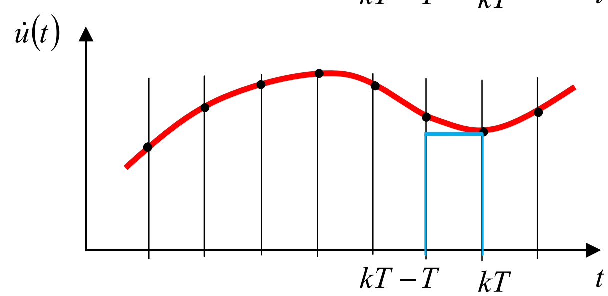
(Método de Euler explícito)



"Backward rule"

$u(kT) = u(kT-T) + T\dot{u}(kT)$

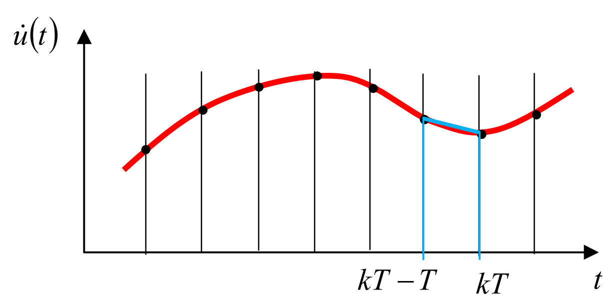
(Método de Euler implícito)



"Trapezoid rule"

$$u(kT) = u(kT-T) + \frac{T}{2}\left[\dot{u}(kT-T) + \dot{u}(kT)\right]$$

(Transformação bilinear ou Método de Tustin)



Observe que se trata do sinal em tempo discreto, ou seja, não temos os valores intermediários

Exemplo

Encontrar a aproximação em tempo discreto do controlador PID usando a “backward rule”:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t)dt + K_D \dot{e}(t)$$
$$\dot{u}(t) = K_P \dot{e}(t) + K_I e(t) + K_D \ddot{e}(t)$$

“Backward rule”

$$u(kT) = u(kT-T) + T\dot{u}(kT)$$
$$\dot{u}(kT) = \frac{1}{T}\left[u(kT) - u(kT-T)\right]$$

$$e(kT) = e(kT-T) + T\dot{e}(kT)$$
$$\dot{e}(kT) = \frac{1}{T}\left[e(kT) - e(kT-T)\right]$$

$$\dot{e}(kT) = \dot{e}(kT-T) + T\ddot{e}(kT)$$
$$\ddot{e}(kT) = \frac{1}{T}\left[\dot{e}(kT) - \dot{e}(kT-T)\right] = \frac{1}{T}\left\{\frac{1}{T}\left[e(kT) - e(kT-T)\right] - \frac{1}{T}\left[e(kT-T) - e(kT-2T)\right]\right\}$$

Substituindo:

$$\frac{1}{T}\left[u(kT) - u(kT-T)\right] = K_P\left\{\frac{1}{T}\left[e(kT) - e(kT-T)\right]\right\} + K_I e(kT) +$$
$$+ K_D \frac{1}{T}\left\{\frac{1}{T}\left[e(kT) - e(kT-T)\right] - \frac{1}{T}\left[e(kT-T) - e(kT-2T)\right]\right\}$$

$$\left[u(kT) - u(kT-T)\right] = K_P\left\{\left[e(kT) - e(kT-T)\right]\right\} + K_I T e(kT) +$$
$$+ \frac{K_D}{T}\left\{\left[e(kT) - e(kT-T)\right] - \left[e(kT-T) - e(kT-2T)\right]\right\}$$

$$\left[u(kT) - u(kT-T)\right] = K_P e(kT) - K_P e(kT-T) + K_I T e(kT) + \frac{K_D}{T}\left[e(kT) - 2e(kT-T) + e(kT-2T)\right]$$
$$u(kT) - u(kT-T) = K_P e(kT) - K_P e(kT-T) + K_I T e(kT) + \frac{K_D}{T} e(kT) - 2\frac{K_D}{T} e(kT-T) + \frac{K_D}{T} e(kT-2T)$$

$$u(kT) - u(kT-T) = \left(K_P + K_I T + \frac{K_D}{T}\right)e(kT) - \left(K_P + 2\frac{K_D}{T}\right)e(kT-T) + \frac{K_D}{T} e(kT-2T)$$

$$\boxed{u(kT) = u(kT-T) + \left(K_P + K_I T + \frac{K_D}{T}\right)e(kT) - \left(K_P + 2\frac{K_D}{T}\right)e(kT-T) + \frac{K_D}{T} e(kT-2T)}$$

Outra abordagem:

PID em tempo contínuo, na forma de função de transferência:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

"Backward rule"

$$s = \frac{(z-1)}{Tz} = \frac{(1-z^{-1})}{T}$$

Substituindo:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_P + \frac{K_I}{\frac{(1-z^{-1})}{T}} + K_D \frac{(1-z^{-1})}{T} = K_P + \frac{K_I T}{(1-z^{-1})} + \frac{K_D}{T}(1-z^{-1}) = \frac{K_P(1-z^{-1}) + K_I T + \frac{K_D}{T}(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})}$$

$$U(z)(1-z^{-1}) = E(z)\left[K_P(1-z^{-1}) + K_I T + \frac{K_D}{T}(1-z^{-1})^2\right]$$

$$U(z) - z^{-1}U(z) = E(z)\left[K_P - z^{-1}K_P + K_I T + \frac{K_D}{T}(1-2z^{-1}+z^{-2})\right]$$

$$U(z) - z^{-1}U(z) = E(z)\left[K_P - z^{-1}K_P + K_I T + \frac{K_D}{T}1 - 2\frac{K_D}{T}z^{-1} + z^{-2}\frac{K_D}{T}\right]$$

$$U(z) - z^{-1}U(z) = E(z)\left[\left(K_P + K_I T + \frac{K_D}{T}\right) - \left(K_P + 2\frac{K_D}{T}\right)z^{-1} + z^{-2}\frac{K_D}{T}\right]$$

$$u(kT) - u(kT-T) = \left(K_P + K_I T + \frac{K_D}{T}\right)e(kT) - \left(K_P + 2\frac{K_D}{T}\right)e(kT-T) + \frac{K_D}{T}e(kT-2T)$$

$$\boxed{u(kT) = u(kT-T) + \left(K_P + K_I T + \frac{K_D}{T}\right)e(kT) - \left(K_P + 2\frac{K_D}{T}\right)e(kT-T) + \frac{K_D}{T}e(kT-2T)}$$

Finalmente, pode-se implementar o PID de forma direta:
PID em tempo contínuo: $u(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t)dt + K_D \dot{e}(t)$

Seja $e_I = \int e(t)dt$:

$e_I(kT) = e_I(kT - T) + Te(kT - T)$ (Forward rule)

ou

$e_I(kT) = e_I(kT - T) + Te(kT)$ (Backward rule)

ou

$e_I(kT) = e_I(kT - T) + \frac{T}{2}[e(kT) + e(kT - T)]$ (Trapezoid rule)

Seja $e_D = \dot{e}(t)$:

$$e_D(kT) = \frac{1}{T}[e_I(kT) - e(kT - T)]$$

Com $e_I(kT)$, $e_D(kT)$ e $e(kT)$ podemos implementar a expressão diretamente:

$$\boxed{u(kT) = K_P e(kT) + K_I e_I(kT) + K_D e_D(kT)}$$