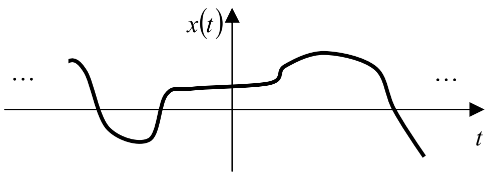
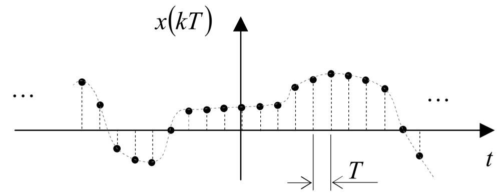
Tópico 01 – Revisão de PME3401 - Transformada Discreta de Fourier
(adaptado das notas de aula de PME3401 Medições de Grandezas Mecânicas)

Transformada de Fourier de sinal amostrado por impulso
Sinais amostrados no tempo, período de amostragem *T*:

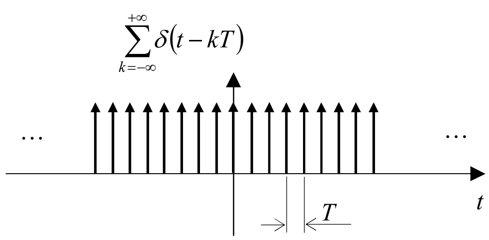
Sinal contínuo no tempo $x(t)$



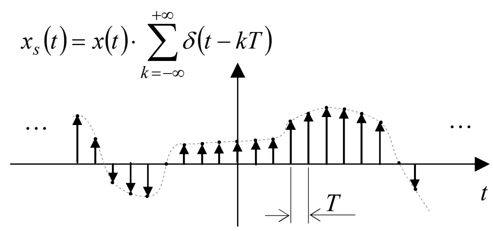
Sinal amostrado $x(kT)$



Trem de impulsos



Modelo do sinal amostrado,
sinal amostrado por impulso:



$$X_s(\omega)=\mathscr{F}[x_s(t)]=\mathscr{F}\left[x(t)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)\right]$$

Como já visto em PME3401, o resultado é:

$$\boxed{X_s(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(\omega-n\omega_s)}$$

Essa expressão permite observar os efeitos da amostragem (conforme visto na aula 01), mas não é adequada para definir uma aproximação numérica.

Aproximação numérica da Transformada de Fourier de sinal amostrado

Para o uso em computador, é preciso encontrar uma aproximação numérica da transformada de Fourier do sinal amostrado. Lembre que o computador trabalha com listas de números.

Modelo do sinal amostrado - sinal amostrado por impulso:

$$x_s(t)=x(t)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=x(kT)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$$

Observe que, devido às características da função impulso, podemos escrever:

$$x_s(t)=x(t)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=x(kT)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT)\delta(t-kT)$$

Transformada de Fourier do modelo do sinal amostrado, ou seja, do sinal amostrado por impulso:

$$X_s(\omega) = \mathscr{F}[x_s(t)] = \mathscr{F}\left[x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\right] = \mathscr{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t-kT)\right]$$

Como a transformada de Fourier é uma operação linear:

$$X_s(\omega) = \mathscr{F}[x_s(t)] = \mathscr{F}\left[x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\right] = \mathscr{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t-kT)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}[x(kT)\delta(t-kT)]$$

Para cada parcela da somatória, $x(kT)$ é um número, portanto:

$$X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}[x(kT)\delta(t-kT)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\mathscr{F}[\delta(t-kT)]$$

Propriedades da transformada de Fourier:
Se $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$, então $\mathscr{F}[f(t-kT)] = F(\omega) \cdot e^{-j\omega kT}$

Como $\mathscr{F}[\delta(t)] = 1$, então $\mathscr{F}[\delta(t-kT)] = 1 \cdot e^{-j\omega kT}$

Substituindo: $\boxed{X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)e^{-j\omega kT}}$ compare com $\boxed{X_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega - n\omega_s)}$

Essa é uma expressão exata da transformada de Fourier do sinal amostrado por impulso, e, portanto, continua não sendo adequada para uso em computador.

A expressão $X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)e^{-j\omega kT}$ usa diretamente $x(kT)$, podemos então vislumbrar uma aproximação numérica:

Primeiro, em um computador, há um limite de memória, logo, não podemos trabalhar no intervalo $[-\infty, \infty]$. É preciso truncar o sinal, e assim, definimos um intervalo $[0, N-1]$, supondo que o sinal amostrado tenha, portanto, N pontos.

Também, $X_s(\omega)$ é contínua em ω, e, portanto, não pode ser diretamente representada no computador. Definimos então uma variável discreta em ω:

$X_D(n\Delta\omega)$ onde $\Delta\omega = \dfrac{\omega_s}{N}$, lembrando que $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$ é a frequência de amostragem. Existe, portanto, uma resolução em frequência, ou seja, não conseguimos representar valores de frequência variando continuamente.

Podemos definir então a Transformada Discreta de Fourier (Discrete Fourier Transform - DFT):

$\boxed{X_D(n\Delta\omega) = \mathscr{DF}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT)e^{-jn\Delta\omega kT}}$, com $n = 0,1,2,3,4,\ldots,N-1$

$\boxed{x(kT) = \mathscr{DF}^{-1}[X_D(n\Delta\omega)] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_D(n\Delta\omega)e^{jn\Delta\omega kT}}$, com $k = 0,1,2,3,4,\ldots,N-1$

No computador, podemos ainda usar as seguintes expressões equivalentes usando:

$$\Delta\omega \cdot T = \frac{\omega_s}{N} T = \frac{2\pi}{NT} T = \frac{2\pi}{N}$$

$$\boxed{X_D[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}} \quad , \text{ com } n = 0,1,2,3,4,\ldots,N-1$$

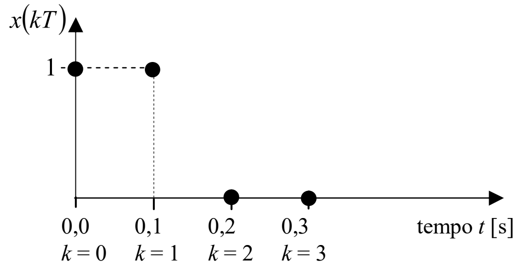
$$\boxed{x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_D[n] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}} \quad , \text{ com } k = 0,1,2,3,4,\ldots,N-1$$

Os algoritmos usados na FFT se valem do fato de que esses termos se repetem ciclicamente. Observe que essas expressões não dependem de *T*, reforçando que o algoritmo trabalha apenas com uma lista de números.

A sigla FFT significa Fast Fourier Transform, que apenas denomina genericamente a classe de algoritmos otimizados para calcular a DFT no computador.

Exemplo: calcular a DFT do seguinte sinal:

$x(0T)=1$
$x(1T)=1$
$x(2T)=0$
$x(3T)=0$



Usando a expressão da DFT: $X_D[n]=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot e^{-j2\pi\frac{n}{N}k}$

Para n = 0:

$$X_D[0]=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot e^{-j2\pi\frac{n}{N}k}=\sum_{k=0}^{3} x[k]\cdot e^{-j2\pi\frac{0}{4}k}=\sum_{k=0}^{3} x[k]\cdot e^{0}=\sum_{k=0}^{3} x[k]=x[0]+x[1]+x[2]+x[3]=1+1+0+0=2$$

Para n = 1:

$$X_D[1]=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot e^{-j2\pi\frac{n}{N}k}=\sum_{k=0}^{3} x[k]\cdot e^{-j2\pi\frac{1}{4}k}=x[0]e^{-j2\pi\frac{1}{4}0}+x[1]e^{-j2\pi\frac{1}{4}1}+x[2]e^{-j2\pi\frac{1}{4}2}+x[3]e^{-j2\pi\frac{1}{4}3}$$

$$X_D[1]=\underbrace{x[0]}_{1}\underbrace{e^{-j2\pi\frac{1}{4}0}}_{1}+\underbrace{x[1]}_{1}\underbrace{e^{-j2\pi\frac{1}{4}1}}_{\left(\underbrace{\cos\frac{2\pi}{4}}_{0}-j\underbrace{\text{sen}\frac{2\pi}{4}}_{1}\right)}+\underbrace{x[2]}_{0}e^{-j2\pi\frac{1}{4}2}+\underbrace{x[3]}_{0}e^{-j2\pi\frac{1}{4}3}=1-j$$

Para n = 2:

$$X_D[2]=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot e^{-j2\pi\frac{n}{N}k}=\sum_{k=0}^{3} x[k]\cdot e^{-j2\pi\frac{2}{4}k}=x[0]e^{-j2\pi\frac{2}{4}0}+x[1]e^{-j2\pi\frac{2}{4}1}+x[2]e^{-j2\pi\frac{2}{4}2}+x[3]e^{-j2\pi\frac{2}{4}3}$$

$$X_D[2]=\underbrace{x[0]}_{1}\underbrace{e^{-j2\pi\frac{2}{4}0}}_{1}+\underbrace{x[1]}_{1}\underbrace{e^{-j2\pi\frac{2}{4}1}}_{\left(\underbrace{\cos\frac{4\pi}{4}}_{-1}-j\underbrace{\text{sen}\frac{4\pi}{4}}_{0}\right)}+\underbrace{x[2]}_{0}e^{-j2\pi\frac{2}{4}2}+\underbrace{x[3]}_{0}e^{-j2\pi\frac{2}{4}3}=1-1=0$$

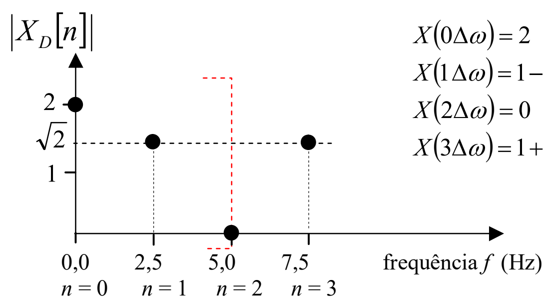
Para n = 3:

$$X_D[3]=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot e^{-j2\pi\frac{n}{N}k}=\sum_{k=0}^{3} x[k]\cdot e^{-j2\pi\frac{3}{4}k}=x[0]e^{-j2\pi\frac{3}{4}0}+x[1]e^{-j2\pi\frac{3}{4}1}+x[2]e^{-j2\pi\frac{3}{4}2}+x[3]e^{-j2\pi\frac{3}{4}3}$$

$$X_D[3]=\underbrace{x[0]}_{1}\underbrace{e^{-j2\pi\frac{3}{4}0}}_{1}+\underbrace{x[1]}_{1}\underbrace{e^{-j2\pi\frac{3}{4}1}}_{\left(\underbrace{\cos\frac{6\pi}{4}}_{0}-j\underbrace{\text{sen}\frac{6\pi}{4}}_{-1}\right)}+\underbrace{x[2]}_{0}e^{-j2\pi\frac{3}{4}2}+\underbrace{x[3]}_{0}e^{-j2\pi\frac{3}{4}3}=1+j$$

Graficamente:

Escala horizontal: $\Delta f=\frac{f_s}{N}=\frac{1}{NT}=\frac{1}{4\cdot 0{,}1}=\frac{10\text{ Hz}}{4}=2{,}5\text{ Hz}$ (essa é a resolução em frequência)



$X(0\Delta\omega)=2$
$X(1\Delta\omega)=1-j$
$X(2\Delta\omega)=0$
$X(3\Delta\omega)=1+j$