PME 3402
Laboratório de Medições e Controle Discreto
Suplemento: PID em tempo discreto

F. Trigo

1 Introdução

O objetivo primordial de um sistema de controle é manter as condições de operação de um determinado processo (planta) dentro da faixa para a qual ele foi projetado. Um exemplo de sistema de controle é dado na fig. 1. A parte do sistema de controle responsável por gerar o conjunto de ações que deve ser executado pelos atuadores, de modo a manter a dinâmica do processo conforme especificação, é o controlador.

Aproveitando a nomenclatura da fig. 1, o controlador recebe um sinal proveniente dos sensores $\hat{y}_(kT)$ e o compara ao desejado, isto é, ao sinal de referência, $r(kT)$. Essa comparação gera um erro $e(kT)$ que é matematicamente tratado no controlador, resultando em uma ação de controle, conforme mencionado acima. Um dos tipos de controladores mais comuns é o Proporcional-Integral-Derivativo (PID), cujas ações de controle são obtidas a partir do erro (proporcional), de sua integral (integral) e de sua derivada (derivativo).

Controladores PID são largamente utilizados em processos industriais pois possuem baixo custo e ajustam-se praticamente a qualquer processo, desde aqueles nos quais a dinâmica é bem conhecida e modelada até aqueles para os quais não há qualquer modelo analítico, seja pela complexidade do fenômeno ou pelo nível de complexidade que seria necessário para desenvolvê-lo.

Assim, dando continuidade ao estudo dos sistemas de controle discreto, pretende-se apresentar, de maneira bastante sucinta, as equações correspondentes à implementação digital da estratégia de controle por PID. Para tanto, utilizam-se os conhecimentos e relativos às transformadas $\mathscr{Z}$, vistos em aulas anteriores.

2 PID no domínio discreto

Com relação à fig 1, sendo $e(kT) = e_k$, vamos supor que as ações $u(kT) = u_k$ sejam geradas pelo controlador sejam dadas genericamente por

$$u_k = f(e_0, e_1, \ldots, e_k; u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}) \tag{1}$$

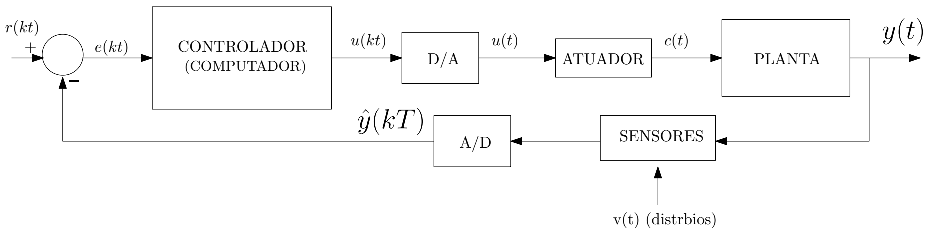

Figura 1: Diagrama simplificado de um sistema de controle em malha fechada

Supondo ainda que a função f seja linear e que o computador possa armazenar somente um número finito de "$e's$" e de "$u's$" passados, a equação 1 toma a forma

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - \ldots - a_n u_{k-n} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_m u_{k-m} \tag{2}$$

Estamos, agora, interessados em obter uma função de transferência discreta entre os sinais de saída u_k e os sinais de entrada e_k.

Aplicando as transformadas $\mathcal{Z}$ a todos os termos da eq. 2, vamos obter, a partir da definição $U(z) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k}$ e utilizando a propriedade de deslocamento no tempo,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[u_k] = \mathcal{Z}[-a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - \ldots - a_n u_{k-n} + b_0 e_k] + \\ \mathcal{Z}[b_1 e_{k-1} + \ldots + b_m e_{k-m}] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U(z) = -a_1 z^{-1} U(z) - a_2 z^{-2} U(z) - \ldots - a_n z^{-n} U(z) + \\ + b_0 E(z) + b_1 z^{-1} E(z) + \ldots + b_m z^{-m} E(z) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U(z)\left(a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}\right) = \\ E(z)\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}\right)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}}, \tag{3}$$

que é a função procurada.

Levando em conta essa argumentação, o controle PID no tempo discreto pode ser deduzido diretamente a partir da aplicação das transformadas $\mathcal{Z}$ à equação de diferenças que o define, como uma soma das parcelas proporcional, integral e derivativa

Utilizando as propriedades da transformada $\mathcal{Z}$,

Por exemplo, a eq. e utilizando a regra do trapézio

$$u_k = u_{k-1} + T\left(\frac{e_{k-1} + e_k}{2}\right) \tag{4}$$

vamos obter

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k-1} z^{-k} + \frac{T}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} e_{k-1} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k} \right) \tag{5}$$

2 é uma equação de recorrência ou, simplesmente, equação de diferenças. Se os coeficientes forem constantes, trata-se de uma equação de diferenças a coeficientes constantes.

Estas equações são utilizadas no controle de sistemas dinâmicos (um exemplo de diagrama de um sistema de controle em malha fechada, incluindo conversores analógico/digital e digital/analógico é mostrado na fig. **??**)lineares e invariantes no tempo, bem como nas tarefas de filtragem digital. Pode-se, também, dizer que possuem correspondência direta com as equações diferenciais ordinárias (EDOs) para sistemas contínuos, como veremos adiante.

A solução de uma equação de diferenças a coeficientes constantes pode ser obtida utilizando a própria fórmula de recorrência. Por exemplo, seja a equação de diferenças (que não depende da entrada) dada por

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} + u_{k-2} \\ k = 2 \rightarrow u_2 &= u_1 + u_0 \\ k = 3 \rightarrow u_3 &= u_2 + u_1 = 2u_1 + u_0 \\ k = 4 \rightarrow u_4 = u_3 + u_2 &= 2u_1 + u_0 + u_1 + u_0 = 3u_1 + 2u_0 \end{aligned} \tag{6}$$

e assim por diante. Supondo valores iniciais $u_0 = u_1 = 1$ temos $u_0 = 1; u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = 3; u_4 = 5; u_5 = 8\ldots$. Como se percebe, a série cresce indefinidamente à medida que k aumenta. Na verdade, o modelo da eq. 6 foi utilizado para descrever a reproduç ao de coelhos em ambiente controlado supondo 1 par inicial, sem mortes e início do período fértil após um ciclo de tempo, e representa a chamada série de Fibonacci (aprox. 1200 d.C).

Na nomenclatura de um sistema de contre, diz-se que ele é instável pois sua resposta cresce sem limites dadas condicões iniciais limitadas. É usual, também em controle, conhecer a resposta a uma entrada finita *sem* ter necessidade de resolvê-lo para saber se é estável ou instável e, também, conhecer a forma geral da solução.

Uma das maneiras de se fazer isso é assumir uma forma para a solução com constantes arbitrárias e resolver a equação algébrica resultante de modo a satisfazer as condições iniciais. Para EDOs (portanto, contínuas) a solução do tipo e^{sT} é utilizada, $s = \sigma + j\omega$, com $j \equiv$ variável complexa.

No caso de equações de diferenças, as soluções envolvem z^k, com $z \sim s$ e $k \sim t$. Especificamente em relação à eq. 6 segue que, supondo a solução $u(k) = Az^k$,

$$Az^k = Az^{k-1} + Az^{k-2} \tag{7}$$

Dividindo a eq. 7 por A (supondo $A \neq 0$) e multiplicando por z^{-k} (supondo $z \neq 0$) vem,

$$\begin{aligned} z^k &= z^{k-1} + z^{k-2} \quad (\times z^{-k}) \\ 1 &= z^{-1} + z^{-2} \Longrightarrow z^2 - z - 1 = 0, \end{aligned}$$

polinômio em z cujas raízes são $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como a equação é linear, a soma de soluções particulares é também solução, portanto,

$$u(k) = A_1 z_1^k + A_2 z_2^k \tag{8}$$

Impondo as condições iniciais, temos

$$\begin{aligned} u(k=0) = 1 &\Longrightarrow 1 = A_1 + A_2 \\ u(k=1) = 1 &\Longrightarrow 1 = A_1 z_1 + A_2 z_2, \end{aligned}$$

sistema linear cuja solução é

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ A_2 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Assim,

$$u(k) = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} z_1^k + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} z_2^k$$

Observa-se que, como $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, a solução com z_1^k irá crescer indefinidamente, confirmando que o sistema é instável.

Generalização

Utilizando-se $u = z^k$ em uma equação de diferenças, obtém-se um polinômio em z denominado polinômio característico ou equação característica. Se qualquer solução dessa equação tiver módulo maior do que 1 (isto é, for externo ao círculo unitário no plano complexo), a equação de diferenças correspondente será *instável*. Como exemplo, verifiquemos a estabilidade da seguinte equação de diferenças:

$$u(k) = 0,9u(k-1) - 0,2u(k-2)$$

A equação característica é $z^2 - 0,9z + 0,2 = 0$ cujas soluções são $z_1 = 0,5$ e $z_2 = 0,4$. Como $|z_1| < 1$ e $|z_2| < 1$, a equação é estável.

3 Transformada z

Vimos, até aqui, que a utilização de uma variável z torna a solução de uma equação de diferenças discretas possível. A questão é se a variável compleza z não poderia ser entendida como a equivalente discreta da virável s, tratada no âmbito das trnasformadas de Laplace. A resposta é sim, e a correspondência será mostrada a seguir.

Define-se a transformada z de uma função e_k como

$$E(z) \triangleq Z(e_k) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e_k z^{-k},\ r_0 < |z| < R, \tag{9}$$

r_0 e R são os limites para os quais a série da eq. 9 converge. Essa transformação é a mais genérica, denominada bilateral. Para sistemas causais, $e_k = 0$ para $k < 0$ e há necessidade de especificações das condições iniciais.

Fazendo $e_k = e(kT)$, onde T é o intervalo de amostragens consecutivas (tempo de amostragem, ou período de amostragem) e voltando à eq. 9, segue que

$$E(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} e(kT).e^{-k} \tag{10}$$

Definindo agora

$$z = e^{sT} \tag{11}$$

e retornando à eq. 10, temos

$$E(e^{sT}) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \tag{12}$$

Para que e_k seja contínuo, é necessário que $T \to 0$. Definindo-se

$$\Delta_T(t) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$$

um trem de impulsos e

$$e_k(t) = e(t).\Delta_T(t) = e(t).\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} e(k)\delta(t-kT), \tag{13}$$

onde $e(k) = e(kT)$, efetuando a transformação de Laplace obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = [e_k(t)] = E(s) &= \int_0^{\infty} e_k(t) e^{-st} dt \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e(k)\delta(t-kT) e^{-st} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e(k) \int_0^{\infty} \delta(t-kT) e^{-st} dt \Longrightarrow \\
\mathscr{L}[e_k(t)] = E(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} e(k) e^{-skT}
\end{aligned} \tag{14}$$

Como $z = e^{sT}$, decorre que

$$E(s) = \sum_{k=0}^{k=\infty} e(k)e^{-k} = E(z) \tag{15}$$