Tópico 03 – Transformada Z

Base matemática – Equações de diferenças – Estabilidade (polos)

Equações diferenciais ordinárias

Considere uma equação diferencial ordinária linear, homogênea, a parâmetros constantes, e de primeira ordem:

$\dot{y}(t) - ay(t) = 0$

Observe que a solução $y(t)$ e sua derivada devem se anular. Assim, uma candidata a solução é:

$y(t) = ce^{\lambda t}$

Desse modo: $\dot{y}(t) = \lambda ce^{\lambda t}$

Substituindo: $\left(\lambda ce^{\lambda t}\right) - a\left(ce^{\lambda t}\right) = 0$

Colocando $ce^{\lambda t}$ em evidência: $(\lambda - a)ce^{\lambda t} = 0$

Supondo que não queremos a solução trivial ($c = 0$), e observando que $e^{\lambda t} \neq 0$, devemos ter:

$\lambda - a = 0$

Trata-se da equação característica. A solução é, portanto: $y(t) = ce^{at}$

Impondo uma condição inicial: $y(0) = y_0$

$y(0) = ce^{a0} = c = y_0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 e^{at}$

Observe que $y(t) = y_0 e^{at}$ converge para zero (é assintoticamente estável) se $\lambda < 0$ (ou, generalizando, se a parte real da raiz for negativa), ou seja, se $a < 0$.

Equações de diferenças

Considere uma equação de diferenças linear, homogênea, a parâmetros constantes, e de primeira ordem:

$y(k) - ay(k-1) = 0$

Veja, essa equação é a equação dos juros. Considere que $y(k-1)$ seja o seu dinheiro no mês passado, e que a taxa mensal seja b. Assim seu rendimento é $by(k-1)$. Dessa forma, o valor que você tem hoje é:

$y(k) = y(k-1) + by(k-1)$

Ou

$y(k) = (1+b)y(k-1)$

Chamando $a = (1+b)$, temos a seguinte equação de diferenças:

$y(k) = ay(k-1) \quad$ ou $\quad y(k) - ay(k-1) = 0$

Supondo que uma candidata a solução seja: $y(k) = c\lambda^k$

Desse modo: $y(k-1) = c\lambda^{k-1} = c\lambda^k \lambda^{-1}$

Substituindo: $c\lambda^k - ac\lambda^k \lambda^{-1} = 0$

Colocando $c\lambda^k \lambda^{-1}$ em evidência: $(\lambda - a)c\lambda^k \lambda^{-1} = 0$

Supondo que não queremos a solução trivial ($c = 0$), temos que: $\lambda - a = 0$

Trata-se da equação característica. Portanto, para $\lambda = a$:

$y(k) = ca^k$

Impondo uma condição inicial $y(0) = y_0$:

$y(0) = ca^0 = c = y_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(k) = y_0 a^k}$

Observe que $y(k) = y_0 a^k$ converge para zero (é assintoticamente estável) se $|\lambda| = |a| < 1$.

Vamos supor hipoteticamente que o valor inicial seja de R$1,00, e que os juros mensais sejam de 100%:

$y(k) - ay(k-1) = 0$

Assim:

$y(0) = 1$

$a = (1+1) = 2$

$y(k) - 2y(k-1) = 0 \quad \text{com} \quad y(0) = 1$

$y(k) = 2y(k-1)$

Portanto:

$y(0) = 1$

$y(1) = 2y(0) = 2$

$y(2) = 2y(1) = 4$

$y(3) = 2y(2) = 8$

Mas, resolvendo a equação, obtemos uma fórmula fechada:

$y(k) - ay(k-1) = 0 \quad \text{com} \quad y(0) = y_0$

$y(k) = y_0 a^k$

Logo, para:

$y(k) - 2y(k-1) = 0 \quad \text{com} \quad y(0) = 1$

Temos a seguinte solução:

$y(k) = 2^k$

Calculando:

$y(0) = 1$

$y(1) = 2$

$y(2) = 4$

$y(3) = 8$

A vantagem da fórmula fechada é poder calcular o valor para um "*k*" qualquer, sem passar pelos valores anteriores:

Por exemplo, para $k = 20$:

$y(20) = 2^{20} = 1.048.576$

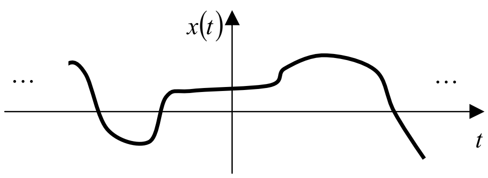
Oberve ainda que para a expressão matemática, não foi necessário saber se o período era de 1 mês. Poderíamos muito bem dizer que era 1 ano, sem que isso alterasse a solução.

Transformada Z
Transformada de Laplace de sinal amostrado

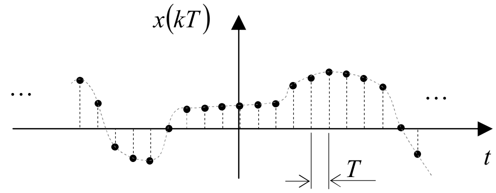
No computador se trabalha com sinais digitalizados, ou seja, amostrados e quantizados. Pela dificuldade teórica, iremos nos limitar a estudar sinais apenas amostrados no tempo, mas não quantizados.

Sinais amostrados no tempo, período de amostragem T:

Sinal contínuo no tempo $x(t)$



Sinal amostrado $x(kT)$

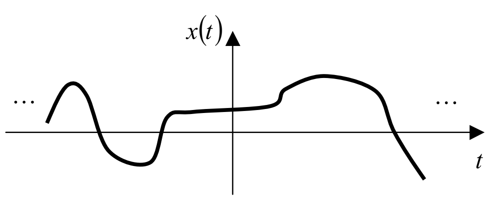


Tentando aplicar a transformada de Laplace no sinal amostrado:

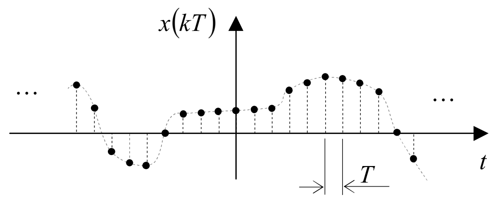
$X_{amotrado}(s) = \mathcal{L}[x(kT)] = \int_0^{\infty} x(kT)e^{-st}dt = 0$, pois a integral corresponde à área embaixo da curva, que, em caso de pontos isolados, é nula. Não é possível usar essa fundamental ferramenta matemática em sinais amostrados!

Felizmente, pode-se usar um modelo matemático que represente a amostragem. Esse modelo matemático da amostragem é, como o nome diz, um modelo do sinal amostrado, e não o sinal amostrado em si, porém o modelo retém a característica importante de amostragem, e permite o uso da transformada de Laplace, de tal forma que o efeito da amostragem pode ser estudado.

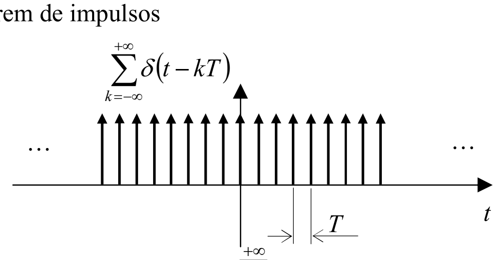
Sinal contínuo no tempo:



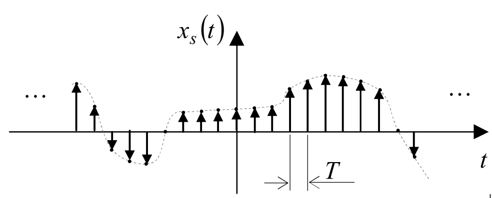
Sinal amostrado:



Trem de impulsos



Modelo do sinal amostrado → sinal amostrado por impulso:



Trem de impulsos: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$

Sinal amostrado por impulso: $x_s(t) = x(t)\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$

Como $\delta(t-kT)=0$ para $t \neq kT$, observe que:

$$x_s(t) = x(t)\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) = x(kT)\cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT)\cdot\delta(t-kT)$$

Calculando a transformada de Laplace do modelo do sinal amostrado, ou seja, do sinal amostrado por impulso:

Aqui estamos considerando apenas o caso em que as funções são nulas para tempo negativo (transformadas laterais – se considerarmos tempo negativo, são as transformadas bilaterais). Em engenharia sempre podemos estabelecer um tempo inicial e chamá-lo de instante zero.

Nesse caso:

$$X_s(s) = \mathcal{L}[x_s(t)] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\cdot\delta(t-kT)\right] =$$
$$\mathcal{L}[x(0T)\cdot\delta(t-0T)] + \mathcal{L}[x(1T)\cdot\delta(t-1T)] + \mathcal{L}[x(2T)\cdot\delta(t-2T)] + \mathcal{L}[x(3T)\cdot\delta(t-3T)] + \cdots =$$
$$x(0T)\mathcal{L}[\delta(t-0T)] + x(1T)\mathcal{L}[\delta(t-1T)] + x(2T)\mathcal{L}[\delta(t-2T)] + x(3T)\mathcal{L}[\delta(t-3T)] + \cdots =$$
$$x(0T)\cdot 1 + x(1T)\cdot e^{-Ts} + x(2T)\cdot e^{-2Ts} + x(3T)\cdot e^{-3Ts} + \cdots =$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\cdot e^{-kTs}$$

Definindo $z = e^{Ts}$, temos:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\cdot e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\cdot\left(e^{Ts}\right)^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\cdot z^{-k}$$

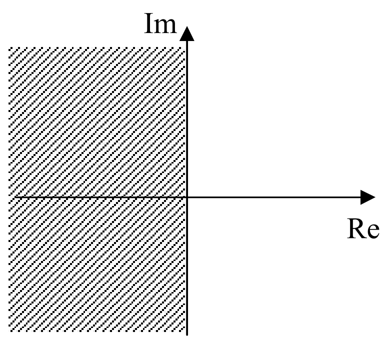
Observe que $s = \frac{1}{T}\ln z$, e teremos:

$$X_s(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\cdot z^{-k}$$

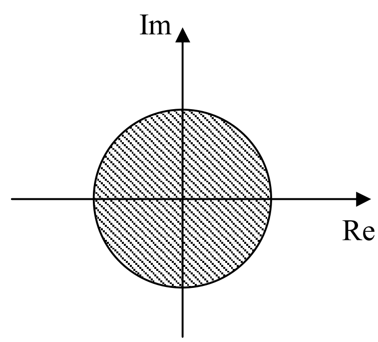
Consequência de $z = e^{Ts}$:

Para $s = j\omega$, temos $z = e^{Tj\omega} \Rightarrow |z| = \left|e^{Tj\omega}\right| = 1$

Plano *s*:



Plano *z*:



O eixo imaginário é $s = j\omega$.

Trata-se da fronteira entre polos estáveis e polos instáveis.

É uma circunferência centrada na origem e de raio 1.
O semi-plano esquerdo do plano *s* é mapeado no interior do círculo unitário no plano *z*.

Definição de Transformada Z

$$\mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \mathcal{Z}[x(k)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

Admite-se que $x(t) = 0$ para $t < 0$

Propriedade:

$$\mathcal{Z}[x(kT - T)] = \mathcal{Z}[x(k-1)] = z^{-1} X(z)$$

Pela definição:

$$\mathcal{Z}[x(k-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1) z^{-k} = x(0-1)z^{-0} + x(1-1)z^{-1} + x(2-1)z^{-2} + x(3-1)z^{-3} + \ldots =$$

Lembrando que $x(t) = 0$ para $t < 0$

$$\mathcal{Z}[x(k-1)] = 0z^{0} + x(0)z^{-1} + x(1)z^{-2} + x(2)z^{-3} + \ldots = z^{-1}\{x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots\}$$

Observe que:

$$x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots = x(0)z^{-0} + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = X(z)$$

Logo:

$$\mathcal{Z}[x(kT - T)] = \mathcal{Z}[x(k-1)] = z^{-1} X(z)$$

De forma similar:

$$\mathcal{Z}[x(kT + T)] = \mathcal{Z}[x(k+1)] = zX(z) - zx(0)$$

Comparando com a transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$ (supondo que a integral de $f(t)$ para $t = 0$ é nula)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d f(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

Ou seja, a transformada Z tem, para equações de diferenças, um papel análogo ao da transformada de Laplace para equações diferenciais.

Em ambos os casos admite-se que a função a ser transformada é nula para tempo negativo. Existem também as definições bilaterais, com k variando de $-\infty$ a $+\infty$, e a integral em t variando de de $-\infty$ a $+\infty$.

Também em ambos os casos, as funções de transferências são, em geral, uma razão entre polinômios. Dessa forma, as transformadas inversas podem ser realizadas pela expansão em frações parciais.

Observação:

$$\mathcal{Z}[x(kT - T)] = z^{-1} X(z) = z^{-1} \mathcal{Z}[x(kT)]$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}[x(kT)]} \boxed{z^{-1}} \xrightarrow{\mathcal{Z}[x(kT-T)]}$$

Ou seja, z^{-1} é o operador de atraso no tempo.

O que fizemos anteriormente foi encontrar uma função de transferência. Usando outro exemplo:

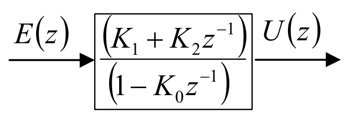
Seja o modelo de um sistema na forma de equações de diferenças:
$u(kT) = K_0 u(kT - T) + K_1 e(kT) + K_2 e(kT - T)$

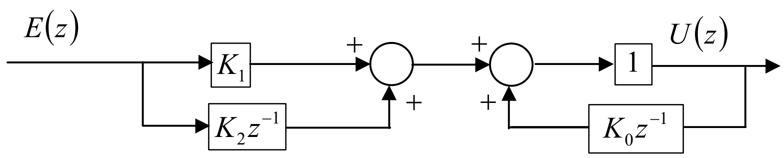
Aplicando a transformada Z:
$\boxed{U(z) = K_0 z^{-1} U(z) + K_1 E(z) + K_2 z^{-1} E(z)}$
$U(z) - K_0 z^{-1} U(z) = (K_1 + K_2 z^{-1}) E(z)$
$(1 - K_0 z^{-1}) U(z) = (K_1 + K_2 z^{-1}) E(z)$

$$\boxed{\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{(K_1 + K_2 z^{-1})}{(1 - K_0 z^{-1})} = \frac{(K_1 z + K_2)}{(z - K_0)}}$$

Observe que se trata de uma razão entre polinômios em z, similar à função de transferência em tempo contínuo obtida usando-se transformada de Laplace.

Em diagrama de blocos:





Usando a transformada Z para resolver a equação de diferenças usada como exemplo:
$y(k) - 2y(k-1) = 0$
$y(0) = 1$

Vamos usar a seguinte propriedade:
$\mathcal{Z}[x(kT + T)] = \mathcal{Z}[x(k+1)] = zX(z) - zx(0)$

Para tanto, note que podemos escrever:
$y(k+1) - 2y(k) = 0$
Aplicando a transformada Z:
$y(k+1) - 2y(k) = 0$
$zY(z) - zy(0) - 2Y(z) = 0$
$(z - 2)Y(z) = zy(0) = z$
$$Y(z) = \frac{z}{(z-2)}$$
Usando uma tabela de transformadas Z:
$y(k) = 2^k$