Relatório 2
PME3201 - Laboratório de Simulações Numéricas

Lucas Hattori da Costa - 10335847
Gustavo Hott Carvalho - 10274360

19.set.2018
São Paulo-SP, Brasil

1. Questão 01

1.1 Letra A

1.2 Letra B

A partir do diagrama de corpo livre (DCL) representado no item anterior, podemos escrever a seguinte equação, usando a 2ª Lei de Newton para o eixo x:

$$m.\ddot{x} = mgsin(\theta) - \frac{1}{2}.\rho_a.C_D.A.v^2.\hat{v}$$
$$\ddot{x} = gsin(\theta) - \frac{\frac{1}{2}.\rho_a.C_D.A.\dot{x}^2.\hat{\dot{x}}}{m}$$

1.3 Letra C

Os parâmetros necessários ao problema são:
m : Massa do carrinho, estimada em 33 gramas
C_D : Coeficiente de arrasto, estimada em 0.3
θ : Ângulo do plano inclinado, estimado em $\frac{\pi}{6}$
A : Área da seção transversal do carrinho, estimada em $3.10^{-4}\ m^2$

1.4 Letra D

Temos as seguintes equações:

$$\frac{dv}{dt} = \ddot{x} = gsin(\theta) - \frac{\frac{1}{2}.\rho_a.C_D.A.\dot{x}^2.\hat{\dot{x}}}{m} \tag{1.1}$$
$$\frac{ds}{dt} = \dot{x} \tag{1.2}$$

A partir de (1.1) e de (1.2) obtemos:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{gsin(\theta}{\dot{x}} - \frac{\frac{1}{2}.\rho_a.C_D.A.\dot{x}.\hat{\dot{x}}}{m} \tag{1.3}$$

A equação (1.3) representa o plano de fase que pode ser esboçado da seguinte forma:

1.5 Letra E

Temos que $v(t) = V_h(t) + V_p(t)$, onde $V_h(t)$ representa a solução homogênea da equação e $V_p(t)$ representa a solução particular.
Resolvendo primeiramente a solução homogênea:

$$\frac{dV_h}{d_t} = \frac{\frac{1}{2}.\rho_a.C_D.A.\dot{x}^2.\hat{\dot{x}}}{m} \longrightarrow \frac{dv}{v^2} = \frac{-\rho_a.C_D.A}{m}$$

Integrando ambos os lados:

$$\frac{-1}{v} = -\rho_a.C_D.A.t + K_1 \Longrightarrow v = (\rho_a.C_D.A.t + K_1)^{-1} \tag{1.4}$$

Onde K_1 é uma constante de integração. Podemos descobrir seu valor fazendo $v(0) = 0$ o que leva a $K_1 = v(0)^{-1}$
Partindo para a solução particular, tomamos um ponto onde $V_p = B$ onde B é uma constante:

$$0 = mgsin(\theta) - \frac{1}{2}.\rho_a.C_D.A.\dot{B}^2$$
$$B = \sqrt{\frac{2mgsin(\theta)}{\rho_a.C_D.A}} \tag{1.5}$$

A solução geral é obtida a partir da soma de (1.4) e (1.5), que resulta em:

$$V(t) = (\rho_a.C_D.A.t + K_1)^{-1} + B$$

Que, por fim, leva a solução analítica:

$$V(t) = (\rho_a.C_D.A.t + K_1)^{-1} + \sqrt{\frac{2mgsin(\theta)}{\rho_a.C_D.A}} \tag{1.6}$$

Integrando (1.6):

$$X(t) = \frac{\ln(\rho_a.C_D.A.t + K_1)}{\rho_a.C_D.A} + t.\sqrt{\frac{2mgsin(\theta)}{\rho_a.C_D.A}} + K_2 \tag{1.7}$$

Podemos descobrir K_2 usando que $X(0) = 0$ o que leva a $K_2 = -ln(K_1)$.

1.6 Letra F

2. Questão 2

As condições iniciais das questões seguintes estão representadas abaixo.

```
//Condições iniciais
s0=0;
vs0=1;
S0=[s0,vs0];
g=9.78;
m=0.033;
c=0.01;
t0=0;
tf=5;
teta=(π)/6;
ro=1.2;
Cd=0.3;
A=0.0003;
//Passo de integração
h=0.5;
dt=h;
t=t0:dt:tf;
```

2.1 Letra A

O algoritmo está representado a seguir:

```
//Método de Euler Exlplícito
final=length(t)-1;
Evs(1)=vs0;
Es(1)=s0;
Et(1)=t0;
for i=1:final
    Evs(i+1)=Evs(i)+(g*sin(teta)-(Evs(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))*(dt);
    Et(i+1)= dt +Et(i);
    Es(i+1)=Es(i)+(Evs(i))*(dt);
end
```

2.2 Letra B

O algoritmo desenvolvido foi o seguinte:

```
 function dS=f(t,S)
    ds1=S(2);
    ds2=g*sin(teta)-(S(2)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m);
    dS=[ds1;ds2];
endfunction
//Método de Euler Implícito
final=length(t)-1;
Evs(1)=vs0;
Es(1)=s0;
```

```
Et(1)=t0;
for i=1:final
    Evs(i+1)=Evs(i)/(1+(dt)*(g*sin(teta)-(Evs(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m)));
    Et(i+1)= dt +Et(i);
    Es(i+1)=Es(i)+(Evs(i))*(dt);
end
```

2.3 Letra C

O algoritmo para encontrar o plano de fases está representado a seguir:

```
xr=0:4:60;
yr=0:1:16;
scf(2);
fchamp(f,t,xr,yr);
xtitle('Plano de fase dvs por ds');
```

Tal código resulta em:

c-2-pf.JPG

2.4 Letra D

Através do algoritmo demonstrado na letra A podemos refazer os gráficos da questão anterior.Usando as condições iniciais de $v_0 = 0$ e $s_0 = 0$, obtemos os seguintes resultados:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo.

Usando as condições iniciais de $v_0 = 1$ e $s_0 = 0$, obtemos os seguintes resultados:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo.

Usando as condições iniciais de $v_0 = -1$ e $s_0 = 0$, obtemos os seguintes resultados:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo.

2.5 Letra E

Utilizando o algoritmo descrito na letra a e diferentes passos de integração, obtem-se os seguintes gráficos. Usando passo h = 1s obtemos os seguintes gráficos:Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo.
Usando passo h = 0,1s obtemos os seguintes gráficos:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

e-2-0,1-st.JPG

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo.

Usando passo h = 0,01s obtemos os seguintes gráficos:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo.

A partir da leitura dos gráficos acima, pode-se concluir que o passo é crucial para que as simulações tenham veracidade.

2.6 Letra F

Os resultados foram coerentes com o esperado. De fato, esperávamos que ao usar um passo de h = 0 teria-se uma grande diferença entre o gráfico e a realidade, uma vez que o passo é muito alto em relação ao período de tempo analisado. Por outro lado, um passo de h = 0.01 também contaria com um erro grande, causado pelo acúmulo no erro de truncamento.
Em contrapartida, um passo de h = 0.1 atnige o meio termo e apresenta bons resultados, ou seja, compatíveis com os resultados obtidos analiticamente.

3. Questão 3

3.1 Letra A

Para efetuar tal comparação, implementamos o método de Adams e o método de Runge-Kutta com o seguinte algoritmo:

```
//Função para cálculo das derivadas temporais
function dS=f(t,S)
    ds1=S(2);
    ds2=g*sin(teta)-c*S(2)/m;
    dS=[ds1;ds2];
endfunction
//Método de Adams
S=ode("adams", S0,t0,t,f);
scf(0);
```

```
xtitle('Adams: Posição x (m) para h = '+string(h)+' e para vx0 = '+string(vs0));
plot(t,S(1,:),'y')
scf(1);
xtitle('Adams: Velocidade Vx (m/s) para h = '+string(h)+' e para vx0 = '+string(vs0));
plot(t,S(2,:), 'y')
//Método de Runge Kutta
T=ode("rk", S0,t0,t,f);
scf(2);
xtitle('Runge-Kutta: Posição s (m) por tempo (s) para h = '+string(h)+' e para vx0 =
'+string(vs0));
plot(t,S(1,:),'y')
scf(3);
xtitle('Runge-Kutta: Velocidade Vs (m/s) por tempo (s) para h = '+string(h)+' e para vx0 =
'+string(vs0));
plot(t,S(2,:),'y')
```

Com o uso desse algoritmo chegamos aos seguintes gráficos.

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo pelo método Adams

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo pelo método Adams

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo pelo método Runge-Kutta.

runge-st.JPG

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo pelo método Runge-Kutta.

Como pode-se observar, os resultados obtidos com esses dois métodos são extremamente semelhantes. Também pode-se ver que condizem com os resultados analíticos e com os resultados obtidos utilizando *ode*.

3.2 Letra B

O diagrama de blocos correspondente as equações diferenciais do movimento é:

3.3 Letra C

O *Xcos* proporcionou uma resposta muito semelhante com a obtida anteriormente. Tal fato se torna evidente com os gráficos gerados pelo diagrama de blocos, onde a velocidade tende para um valor de $16\frac{m}{s}$ e a curva do espaço por tempo tende ao infinito.

4. Questão 4

4.1 Letra A

a-4.jpeg

4.2 Letra B

No diagrama de corpo livre da roda (DCL), podemos obsercar que a força normal média, $\tilde{N}$ produz um momento resistivo em cada roda. Esse momento M está atrelado com o ângulo ϕ pela equação $M = \tilde{N}(R.sin(\phi))$. É fácil percerber que, quando ϕ for muito pequeno e tender a zero, seu seno também tenderá e, por fim, M também. Dessa forma, o atrito de rolamento entre a roda e a pista possui valor numérico desprezível. Nessa situação, pode-se escrever as equações de energia do corpo ignorando os termos de rotação, pois estes também serão desprezíveis.Logo:

$$T = \frac{1}{2}.m.\dot{x}^2$$
$$V = mg(l-x)sin(\theta)$$

Aplicando a Equação Lagrangeana para a variável x e sabendo os esforços externos são devido apenas à força de atrito seco no mancal F_n =:

$$L = T - V = \frac{1}{2}.m.\dot{x}^2 - mg(l-x)sin(\theta)$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) + \frac{\partial L}{\partial x} = -4.F_n = -4.\mu_0.\tilde{N} \tag{4.8}$$

Substituindo L em (4.8) e resolvendo suas respectivas derivadas, chegamos a:

$$m.\ddot{x} - mgsin(\theta) = -4.\mu_0.\tilde{N} \Longrightarrow \ddot{x} = \frac{-4.\mu_0.\tilde{N}}{m} + gsin(\theta) \tag{4.9}$$

Finalmente, (4.9) representa a equação diferencial do movimento do carrinho.

4.3 Letra C

Os parâmetros envolvidos nesse problema são:
m : Massa do carrinho, estimada em 33 gramas
μ_0 : Coeficiente de atrito dinâmico entre o mancal e o munhão, estimado em 0,15 (o valor base para coeficiente de atrito dinâmico entre um plástico e metais genéricos)
μ_R : Coeficiente de atrito de rolamento, estimado em 0,25
N : A resultante normal da pressão de contato, estimada em 0,071 N. Essa estimativa veia decomposição do vetor P e da distribuição homogênea de massa no corpo.
$\tilde{N}$: A força normal de contato entre as duas partes, estimada em 0,08 N. Essa estimativa levou em consideração o peso do carrinho sem as rodas.

4.4 Letra D

Usando (4.9) e integrando-a por dt nos dois lados da equação, chegamos a:

$$\int \ddot{x} = \dot{x} = \int (\frac{-4.\mu_0.\tilde{N}}{m} + gsin(\theta)) = (\frac{-4.\mu_0.\tilde{N}}{m} + gsin(\theta)).t \tag{4.10}$$

Logo, podemos escrever:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt}.\frac{dt}{ds} = \ddot{x}.\frac{1}{\dot{x}} = t \tag{4.11}$$

Logo, o plano de fase tem esboço semelhante ao representado a seguir:

4.5 Letra E

Retomando (4.9), podemos integrá-la por dt novamente nos dois lados, resultando em (4.10). Porém, nessa equação ainda há um termo constante, resultante do processo de integração. Esse termo possui mesmo valor do que $\dot{x}(0)$. Repetindo o processo chegamos em:

$$x = (\frac{-4.\mu_0.\tilde{N}}{m} + gsin(\theta)).\frac{t^2}{2} + K_1.t + K_2 \tag{4.12}$$

As constantes K_1 e K_2 são respectivamente, $\dot{x}(0)$ e $x(0)$.

4.6 Letra F

Os gráficos pedidos estão representados a seguir:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

f-st.JPG

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo.

f-vt.JPG

4.7 Letra G

Os gráficos pedidos estão representados a seguir:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

g-st.JPG

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo.

g-vt.JPG

4.8 Letra H

Os gráficos pedidos estão representados a seguir:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

h-st.JPG

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo.

h-vt.JPG

4.9 Letra I

Podemos observar que a curva da velocidade em função do tempo possui forma retilínea, enquanto a curva do espaço em função do tempo possui forma quadrática. Em todos os casos iniciais, a velocidade e o espaço possui comportamento crescente e divergem para o infinito. A condição imposta na letra H implica em um ponto, aproximadamente em 0.25 segundos, a velocidade se anula e o sentido de percurso se reverte.

5. Questão 5

5.1 Letra A

O algoritmo a seguir retorna um vetor de dimensão 2 no qual o primeiro termo se refere à $\frac{ds}{dt}$ e o segundo à $\frac{dv}{dt}$.

```
//Função para cálculo das derivadas temporais
function dS=f(t,S)
    ds1=S(2);
    ds2=g*sin(teta)-4*mu0*Nt*(1/m);
    dS=[ds1;ds2];
endfunction
```

5.2 Letra B

O plano de fase do movimento pode ser descrito utilizando o seguinte algoritmo:

```
//´Plano de fase
xr=0:4:60;
yr=0:1:16;
scf(2);
fchamp(f,t,xr,yr);
xtitle('Plano de fase dvs por ds');
```

Com tal algoritmo é possível desenvolver o seguinte gráfico:

5.3 Letra C

Através do algoritmo demonstrado na letra A da questão 2 podemos refazer os gráficos da questão anterior.Usando as condições iniciais de $v_0 = 0$ e $s_0 = 0$, obtemos os seguintes resultados:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo.

Usando as condições iniciais de $v_0 = 1$ e $s_0 = 0$, obtemos os seguintes resultados:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo.

Usando as condições iniciais de $v_0 = -1$ e $s_0 = 0$, obtemos os seguintes resultados:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo.

5.4 Letra D

Utilizando o algoritmo descrito na letra a da questão 2 e diferentes passos de integração, obtem-se os seguintes gráficos. Usando passo h = 1s obtemos o seguinte gráfico:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

Usando passo h = 0,1s obtemos o seguinte gráfico:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

d-5-0,1-st.JPG

Usando passo h = 0,01s obtemos o seguinte gráfico:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo.

5.5 Letra E

De forma semelhante à questão 2, os resultados foram coerentes com o esperado. De fato, esperávamos que ao usar um passo de h = 0 teria-se uma grande diferença entre o gráfico e a realidade, uma vez que o passo é muito alto em relação ao período de tempo analisado. Por outro lado, um passo de h = 0.01 também contaria com um erro grande, causado pelo acúmulo no erro de truncamento. Em contrapartida, um passo de h = 0.1

atnige o meio termo e apresenta bons resultados, ou seja, compatíveis com os resultados obtidos analiticamente.
Em outro aspecto, o plano de fases elaborado pela função *fchamp* descreve de forma verossímil a situação real prevista analiticamente.

6. Questão 6

6.1 Letra A

Os métodos de Adams e Runge-Kutta fornecem os seguintes gráficos:

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo pelo método Adams

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo pelo método Adams

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo pelo método Runge-Kutta.

a-runge-st.JPG

Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo pelo método Runge-Kutta.

Novamente, os resultados gerados pelos métodos Adams e Runge-Kutta são extremamente semelhantes entre si e também compatíveis com os resultados gerados em outras soluções, analíticas ou não.