



## Relatório 3

### PME3201 - Laboratório de Simulações Numéricas

Lucas Hattori da Costa - 10335847  
Gustavo Hott Carvalho - 10274360

5 de Outubro de 2018  
São Paulo-SP, Brasil

# Conteúdo

<b>Tarefa I</b>	<b>2</b>
a) . . . . .	2
b) . . . . .	2
c) . . . . .	2
d) . . . . .	10
e) . . . . .	11
f) . . . . .	11
<b>Tarefa II</b>	<b>12</b>
a) . . . . .	12
b) . . . . .	13
c) . . . . .	13
d) . . . . .	22
e) . . . . .	23
f) . . . . .	27
g) . . . . .	27
h) . . . . .	27
i) . . . . .	28
j) . . . . .	29
<b>Tarefa III</b>	<b>30</b>
a) . . . . .	30
b) . . . . .	30
c) . . . . .	30
d) . . . . .	35
e) . . . . .	35
<b>Anexo</b>	<b>36</b>
a) Códigos da tarefa I . . . . .	36
b) Códigos da tarefa II . . . . .	38
c) Códigos da tarefa III . . . . .	39

# Tarefa I

**a)**

Temos, do enunciado, as seguintes equações:

$$\begin{aligned} f(s) &= z = z_0 + \sin(\alpha).(s - s_0) \\ \ddot{s} + g.f'(s) &= 0 \implies \ddot{s} = -g.\sin(\alpha) \end{aligned} \quad (1)$$

A partir de (1) podemos escrever o vetor de estados iniciais:

$$S_0 = \begin{bmatrix} S_0(1) \\ S_0(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Integrando esse vetor utilizando o algoritmo mostrado no anexo obtemos (3), onde  $dS$  é uma função que recebe um vetor tempo, composto pelos tempos inicial e final e o passo, e um vetor de estado  $s$  da forma de (2), e devolve um espaço de estados:

$$dS = f(t, s) = \begin{bmatrix} dS(1) \\ dS(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \ddot{s} \end{bmatrix} \quad (3)$$

**b)**

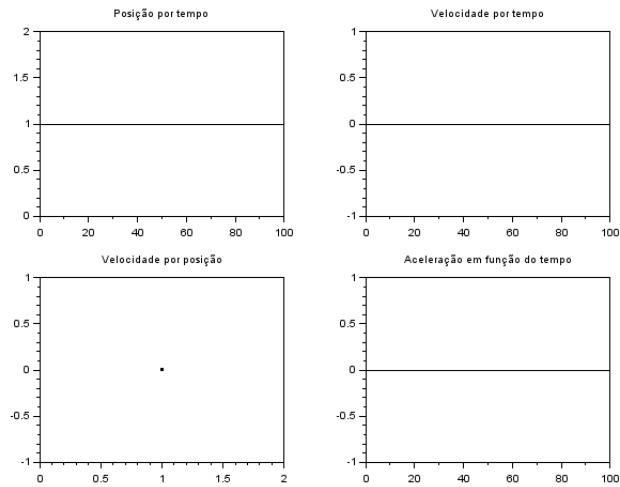
As condições de simulação estão listadas a seguir:

1.  $\alpha = 0rad$ ,  $s_0 = 1$  e  $\dot{s}_0 = 0$ ;
2.  $\alpha = 0rad$ ,  $s_0 = 1$  e  $\dot{s}_0 = 1$ ;
3.  $\alpha = \frac{\pi}{6}rad$ ,  $s_0 = 1$  e  $\dot{s}_0 = -1$ ;
4.  $\alpha = \frac{\pi}{36}rad$ ,  $s_0 = 1$  e  $\dot{s}_0 = 0$ ;
5.  $\alpha = \frac{\pi}{36}rad$ ,  $s_0 = 1$  e  $\dot{s}_0 = 5$ ;
6.  $\alpha = \frac{\pi}{2}rad$ ,  $s_0 = 1$  e  $\dot{s}_0 = 10$ ;

**c)**

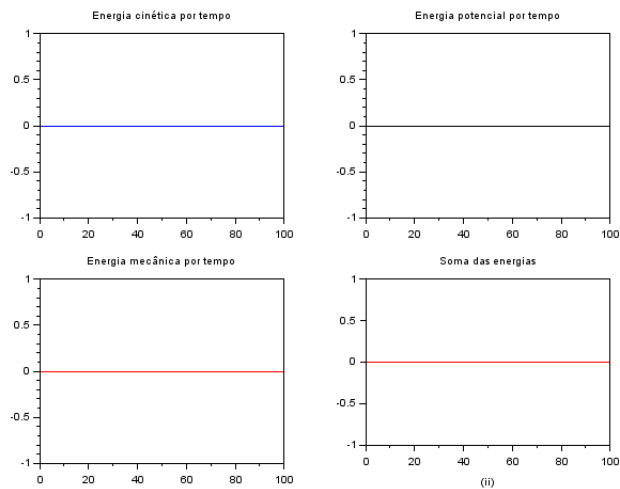
Os algoritmos representados no anexo geraram os seguintes gráficos, plotados na ordem de condições do item *b*.

- **Condição 1:**



**Figura 1:** (i) Posição da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração da partícula pelo tempo - Condição 1

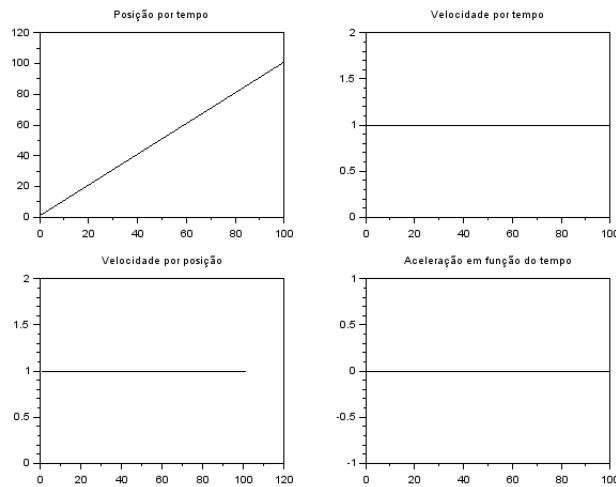
Na condição inicial 1, por ter velocidade inicial e ângulo nulos, não há movimento. Isso é facilmente percebido nos gráficos acima, que demonstram que a partícula M se encontra em equilíbrio estável, uma vez que o plano de fase do movimento é um único ponto.



**Figura 2:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 1

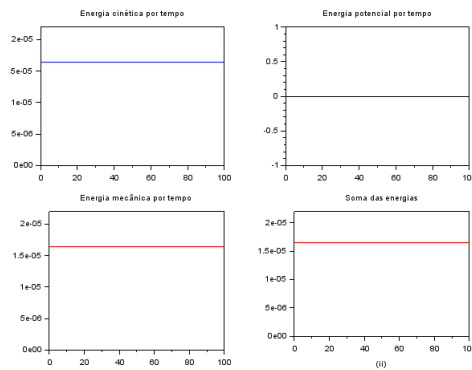
Como esperado, a análise energética da situação corrobora com diagnóstico de equilíbrio estático, com tanto a energia cinética quanto potencial gravitacional nulas.

- **Condição 2:**



**Figura 3:** (i) Posição da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração da partícula pelo tempo - Condição 2

O movimento descrito pelas condições iniciais 2 é semelhante ao anterior no sentido de que também não possui aceleração causada pela gravidade e nenhuma variação na energia gravitacional. Isso é devido ao ângulo nulo. Porém, em contraste com a situação anterior, a condição inicial em questão possui velocidade não-nula e constante, gerando um plano de fases que consiste em uma reta horizontal e um perfil linearmente variável no gráfico (i) da Figura 3.

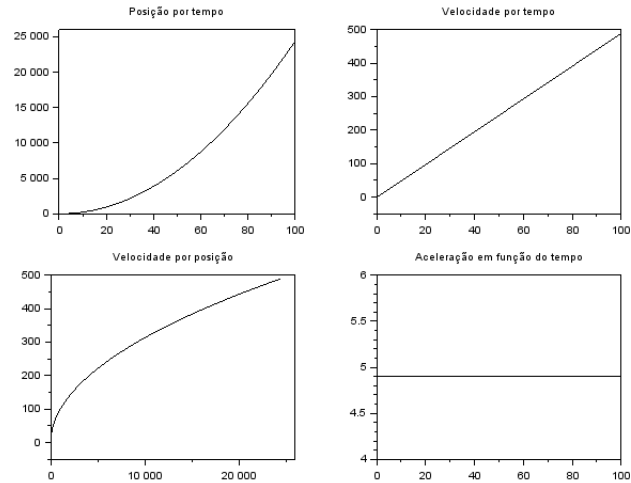


**Figura 4:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 2

Como analisado acima, a velocidade constante acarreta em um valor de energia cinética também constante, como exposto no gráfico (i) da Figura 4. Novamente, a energia

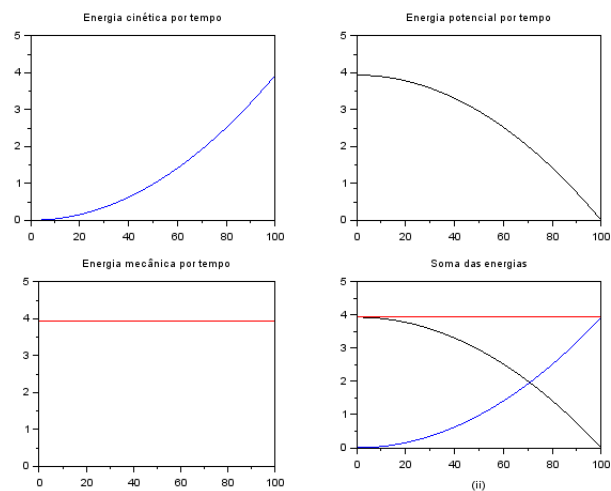
potencial gravitacional é constante e nula.

- **Condição 3:**



**Figura 5:** (i) Posição da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração da partícula pelo tempo - Condição 3

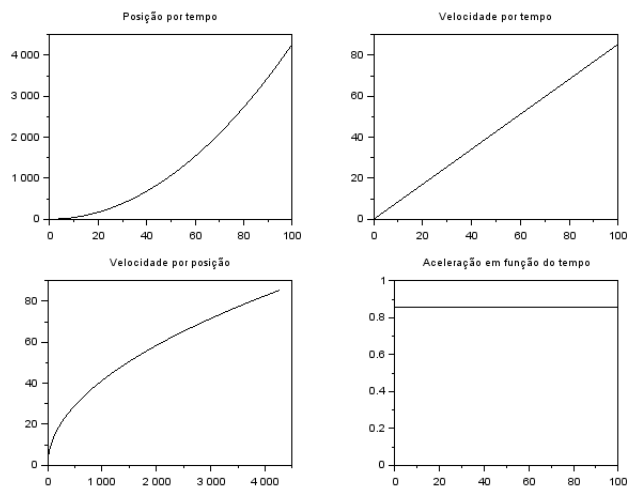
Ao contrário das condições tratadas anteriormente, a condição 3 possui ângulo não-nulo. Isso acarreta em uma aceleração não-nula e constante segundo a equação (??), o que pode ser observado no gráfico (iv) da Figura 5. Dado isso, os gráficos de velocidade em função do tempo e de posição em função do tempo têm perfis linear e parabólico, respectivamente, como demonstrado nos gráficos (i) e (ii) da mesma figura.



**Figura 6:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 3

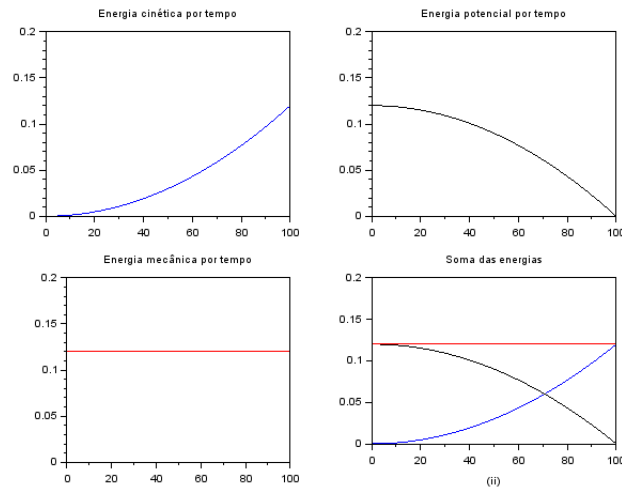
Em relação aos gráficos de energia, podemos ver que o sistema é conservativo (comprovado pelo energia mecânica constante no gráfico (iii) da Figura 6) e que, como esperado, a energia cinética cresce ao longo do movimento, enquanto a energia potencial gravitacional decresce.

- **Condição 4:**



**Figura 7:** (i) Posição da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração da partícula pelo tempo - Condição 4

A condição inicial 4 gera um movimento muito similar com o da condição inicial 3, uma vez que o ângulo é similar e a velocidade inicial também não é nula. Logo, apesar dos valores numéricos serem distintos os gráficos gerados possuem mesma forma que os da condição anterior. Como  $\alpha$  é menor na condição 4 que na condição 3, o valor da aceleração é maior (de acordo com (1)), atingindo um valor máximo de, aproximadamente,  $0,854m/s^2$ , como demonstrado no gráfico (iv) da Figura 7, enquanto na condição 3 o valor máximo é aproximadamente  $4,9m/s^2$ , como demonstrado no gráfico (iv) da Figura 5.

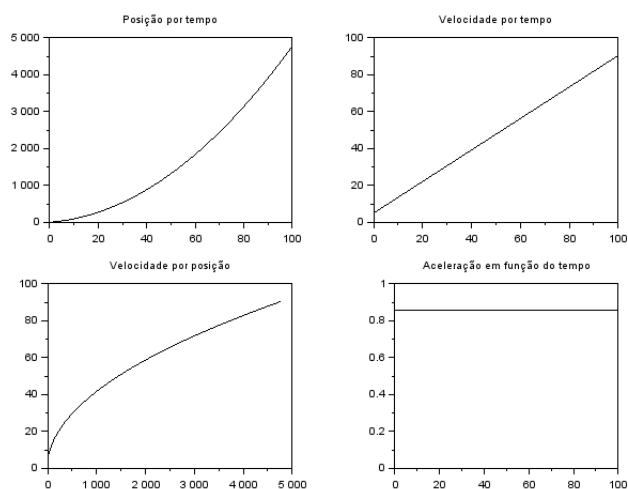


**Figura 8:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 4

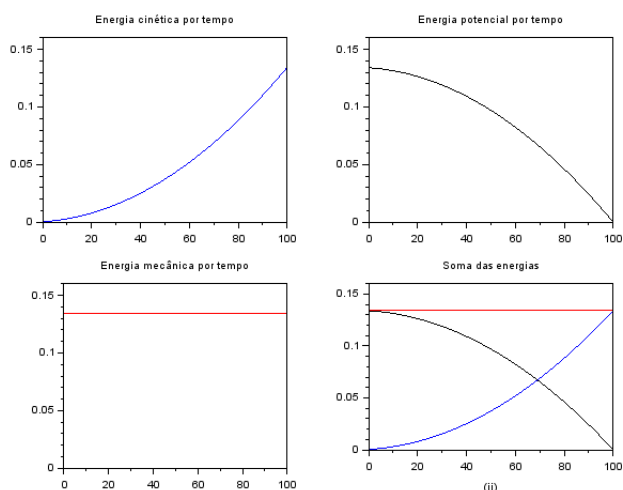
Ainda devido à diferença de  $\alpha$  de cada condição, observamos que a variação de energia potencial é maior na condição 3, uma vez que o ângulo define a diferença de altura dos pontos final e inicial, chegando a aproximadamente  $4J$  na condição 3, como mostra ??, e a aproximadamente  $0,12J$  na condição 4, como mostra ??.

- **Condição 5:**





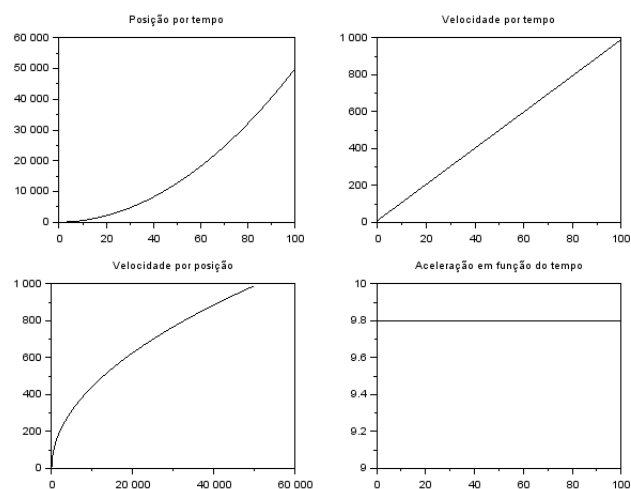
**Figura 9:** (i) Posição da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração da partícula pelo tempo - Condição 5



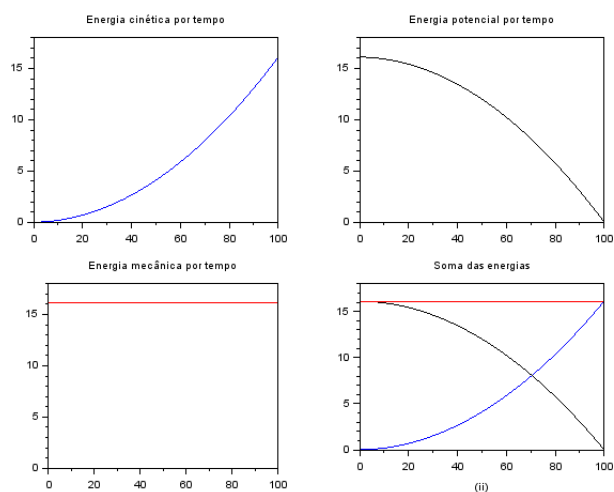
**Figura 10:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 5

A condição 5 é muito similar à 4, diferindo apenas na velocidade inicial  $s_0$ , que possui um valor de  $5m/s$ , enquanto que na condição 4 era de  $0m/s$ . As diferenças geradas são percebidas na maior distância percorrida no mesmo intervalo de tempo, chegando a valores superiores a  $4.500m$  como mostra o gráfico (i) da Figura 9. Os valores de energia mecânica também são superiores, chegando a aproximadamente  $0,134J$  (em Figura 10).

- **Condição 6:**



**Figura 11:** (i) Posição da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração da partícula pelo tempo - Condição 6



**Figura 12:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 6

A condição 6 representa o caso onde a partícula M se encontra em queda livre, o que é corroborado pelos gráficos da Figura 11, em especial o gráfico (iv) onde vê-se que a aceleração do movimento é numericamente igual à aceleração da gravidade (definida no enunciado como  $g = 9,80m/s^2$ ). Os gráficos restantes são compatíveis com o movimento uniformemente acelerado previsto.

d)

Calcula-se a força normal através do equilíbrio de forças na partícula M. A partir dessa análise, chega-se à equação seguinte:

$$|\vec{N}(t)| = m \cdot g \cdot \cos \alpha \quad (4)$$

Os gráficos requisitados foram obtidos através do algoritmo representado no Anexo, plotados aqui na ordem de condições do item b.

$$N = |\vec{N}(t)|$$

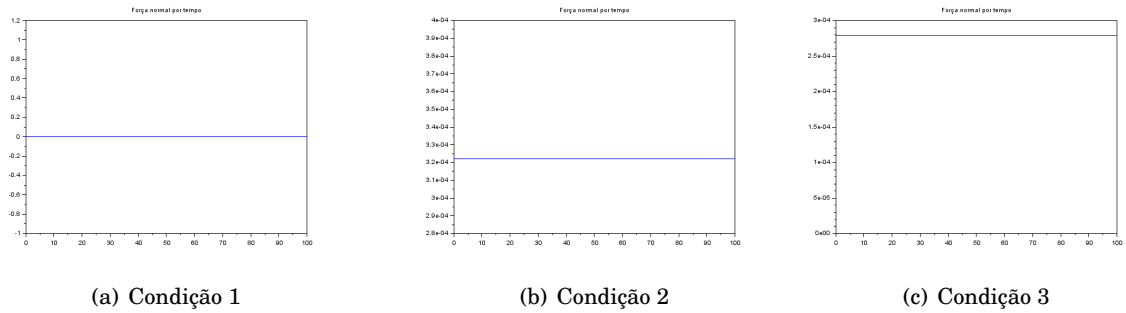


Figura 13: Força normal pelo tempo

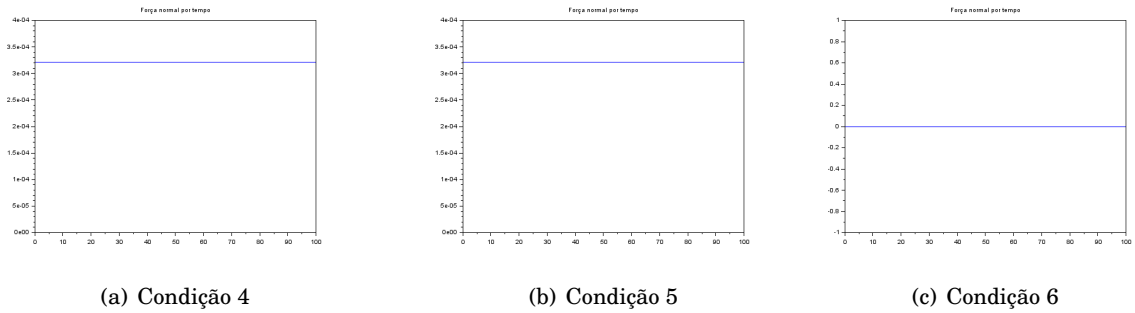


Figura 14: Força normal pelo tempo

Pode-se observar que todos os gráficos foram constituídos de retas horizontais, uma vez que para todos os casos  $\alpha$  se manteve constante durante todo o movimento, bem como a massa e a aceleração da gravidade. Vemos também que no caso 6 a força normal assume valor nulo. Isso ocorre porque a condição 6 simula o movimento de queda livre onde não há contato da partícula com a superfície.

e)

A função *comet* representa o trajeto percorrido pela partícula no eixo  $xz$ . Logo, podemos ver que na Figura 15(a) temos um único ponto pois na condição inicial 1 a partícula fica parada. De forma semelhante, as Figuras 15(b) a 16(c) representam retas rotacionadas de uma ângulo.

Os gráficos requisitados foram obtidos através do algoritmo representado no Anexo, plotados aqui na ordem de condições do item b.

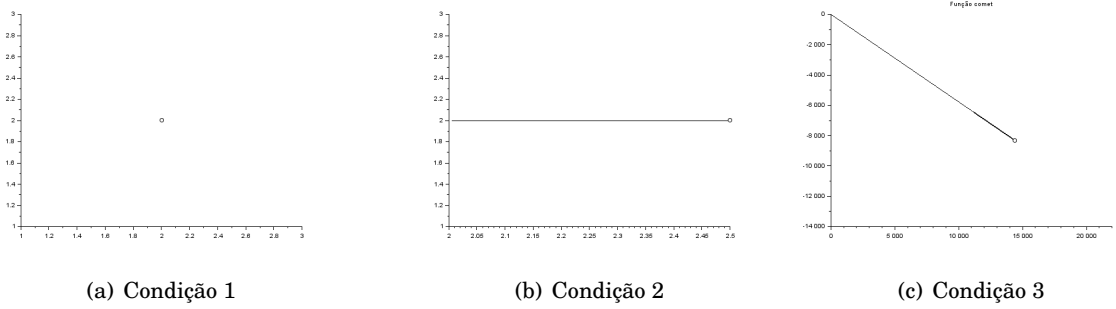


Figura 15: Trajetória da partícula M no plano  $xz$

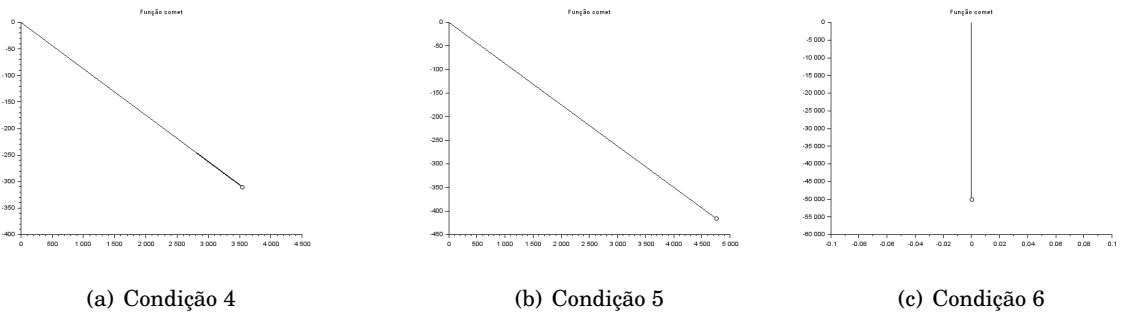


Figura 16: Trajetória da partícula M no plano  $xz$

f)

Em todas as condições do item b, a aceleração é positiva e constante ( $a(t) = -g \cdot \sin(\alpha) \geq 0$ , pois  $\sin(\alpha) \leq 0$  para  $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0$ ), como podemos observar nos gráficos das acelerações no item c. Nesse cenário, a única situação em que houve reversão no sentido de movimento é quando  $s_0 < 0$ , que ocorre na condição 3 do item b.

Analiticamente, podemos obter o instante em que ocorre a reversão através das seguintes equações, utilizando o fato de que a reversão ocorre quando  $\dot{s} = 0$ .

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= \dot{s}_0 + a \cdot t \\
0 &= 1 + (g \cdot \sin(\frac{\pi}{6})) \cdot t \\
0 &= 1 + \left( (-9,8) \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot t \Rightarrow t \approx 0,204s
\end{aligned} \tag{5}$$

Mudando os valores máximos e mínimos dos eixos do gráfico (i) da Figura 1, obtemos o seguinte gráfico, que corrobora com o resultado analítico, uma vez que o ponto mínimo da curva ocorre com a ordenada aproximadamente em 0,2s.

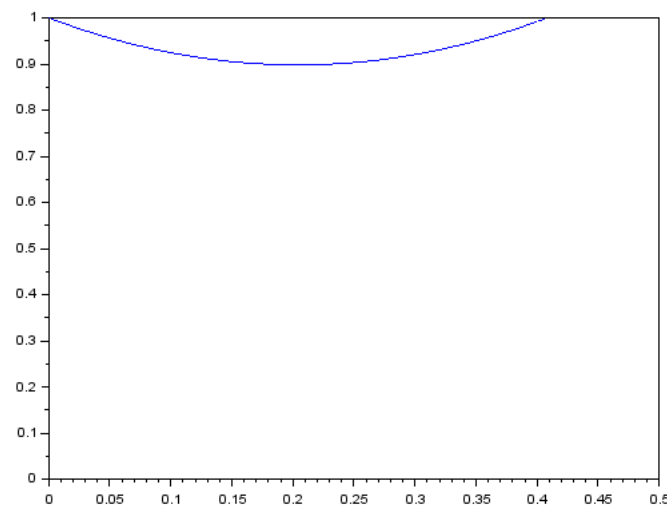


Figura 17: Posição da partícula M por tempo - Condição 1

## Tarefa II

a)

Temos, do enunciado, as seguintes equações:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \cdot \sin(\theta) \tag{6}$$

A partir de (6), que foi obtida através da equação de Lagrange com  $\theta$  como coordenada generalizada, podemos escrever o vetor de estados iniciais:

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Integrando esse vetor utilizando o algoritmo mostrado no Anexo obtemos (8), onde  $dS$  é uma função que recebe um vetor tempo, composto pelos tempos inicial e final e o passo, e um vetor de estado  $s$  da forma de (7), e devolve um espaço de estados:

$$d\theta = f(t, \theta_0) = \begin{bmatrix} d\theta(1) \\ d\theta(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{r} \cdot \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

## b)

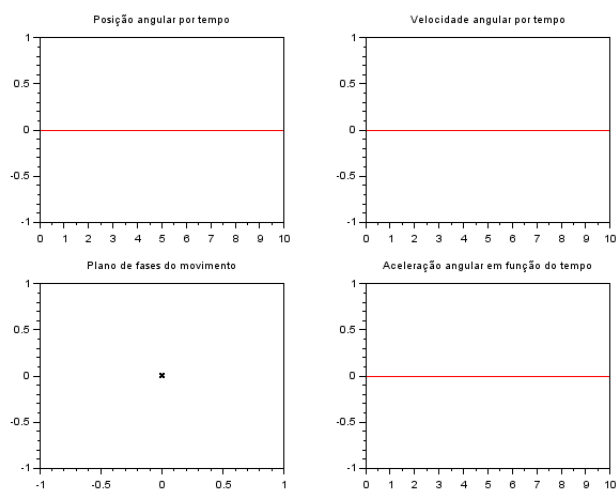
As condições de simulação estão listadas a seguir:

1.  $\theta_0 = 0$  e  $\dot{\theta}_0 = 0$ ;
2.  $\theta_0 = -\frac{\pi}{180}$  e  $\dot{\theta}_0 = 0$ ;
3.  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$  e  $\dot{\theta}_0 = 0$ ;
4.  $\theta_0 = \frac{5\pi}{6}$  e  $\dot{\theta}_0 = 0$ ;
5.  $\theta_0 = \pi$  e  $\dot{\theta}_0 = 0$ ;
6.  $\theta_0 = \pi$  e  $\dot{\theta}_0 = 1 \text{ rad/s}$
7.  $\theta_0 = 0$  e  $\dot{\theta}_0 = \omega_0$ , onde  $\omega_0$  é uma incógnita tal que, após um tempo tendendo ao infinito,  $M$  se aproxime assintoticamente da posição de equilíbrio instável;

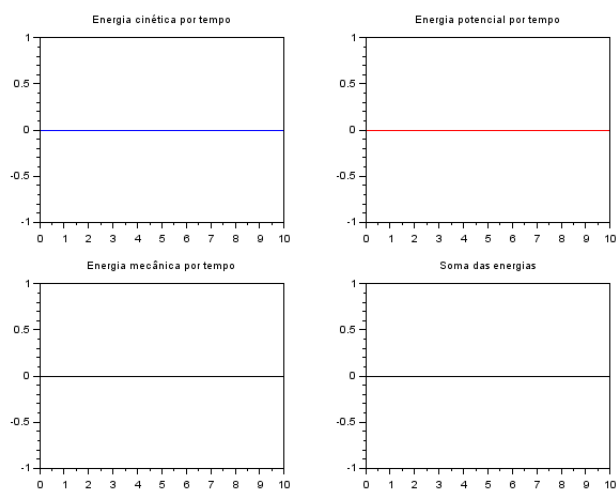
## c)

### • Condição 1:

Nessa condição, o ponto  $M$  está em uma situação singular no ponto de equilíbrio estável  $A$ , que corresponde a posição angular nula. Dessa forma, os gráficos terão valor nulo ao longo do tempo, e no caso em que a variável é a posição, o gráfico será constituído de apenas um ponto  $(0, 0)$ .

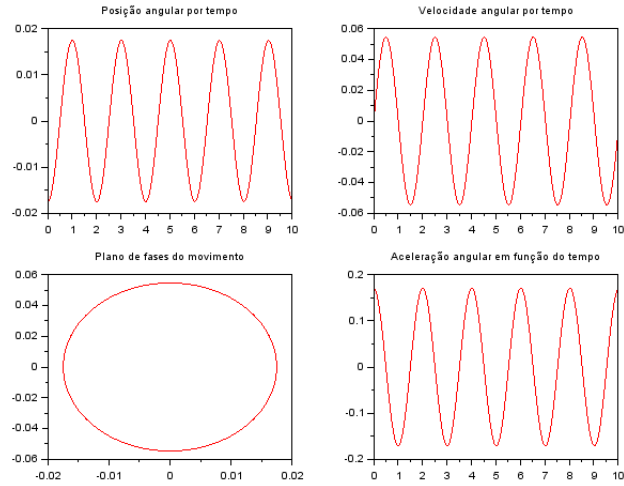


**Figura 18:** (i) Posição angular da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade angular da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração angular da partícula pelo tempo - Condição 1

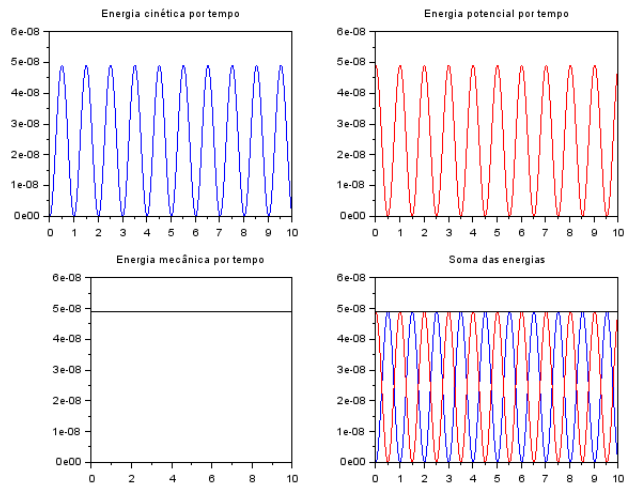


**Figura 19:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 1

- **Condição 2:**



**Figura 20:** (i) Posição angular da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade angular da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração angular da partícula pelo tempo - Condição 2



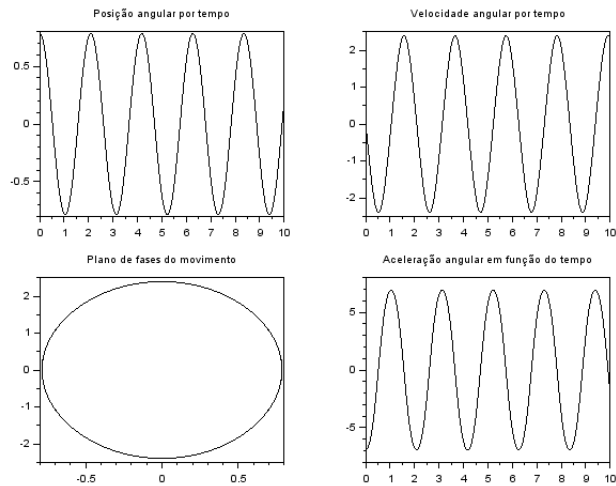
**Figura 21:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 2

Para esse caso, tem-se uma posição angular relativamente pequena e velocidade angular nula. Os gráficos caracterizam um movimento periódico entre as posições extremas correspondentes ao valor da posição inicial. Sendo assim, os gráficos de posição, velocidade, aceleração, energia cinética e energia potencial variam entre valores extremos segundo funções trigonométricas. A energia mecânica permanece constante ao longo do tempo por não haver forças dissipativas. O plano de fases caracteriza o movimento periódico em que

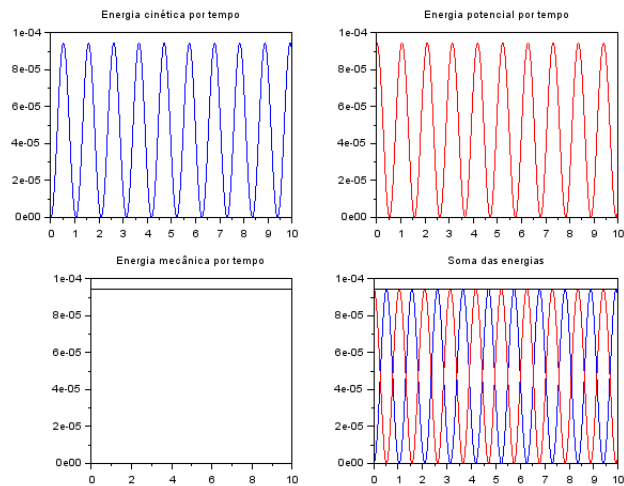


a velocidade se anula para a determinada posição e depois cresce em módulo até voltar à posição nula.

- **Condição 3:**



**Figura 22:** (i) Posição angular da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade angular da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração angular da partícula pelo tempo - Condição 3

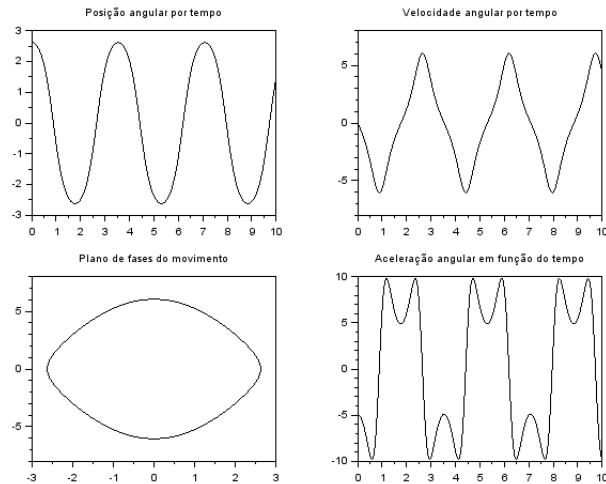


**Figura 23:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 3

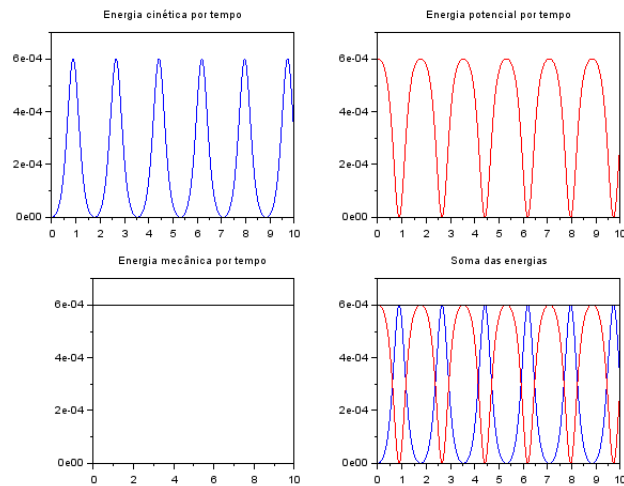
Situação análoga à da condição 2, mas dessa vez a posição inicial é positiva e maior em

módulo. Por ter um valor absoluto de posição maior, a amplitude do movimento aumento e haverá maiores valores de energia, posição, velocidade, etc. Os perfis dos gráficos, contudo, seguem o da condição 2.

- **Condição 4:**



**Figura 24:** (i) Posição angular da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade angular da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração angular da partícula pelo tempo - Condição 4

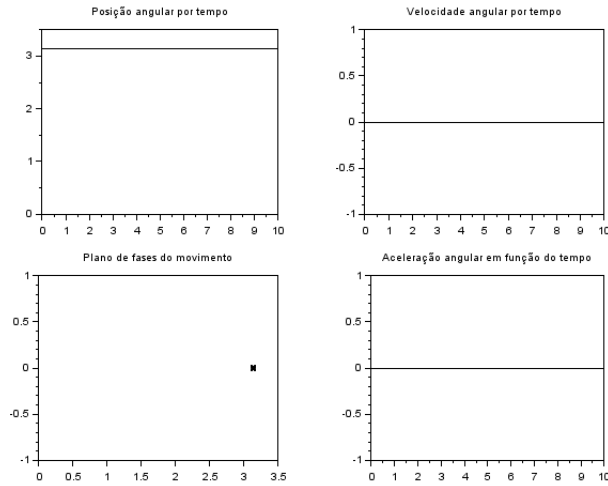


**Figura 25:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 4

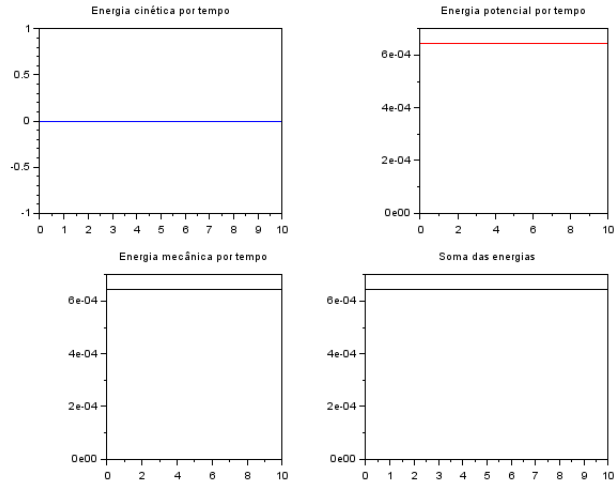
Para essa condição, o valor da posição inicial é de  $150^\circ$ . Portanto, o ponto M realizará um movimento periódico ao longo do perímetro do círculo, entre  $]-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[$ . Os gráficos que variavam entre extremos continuarão a variar dessa forma, porém com alterações devido à mudança no sentido da trajetória quando a posição é de  $90^\circ$  em módulo. Assim, os gráficos não seguem uma função trigonométrica básica como seno ou cosseno. A energia mecânica permanece constante

- **Condição 5:**

Nessa posição inicial, o ponto M se mantém em equilíbrio instável. Sendo assim, suas aceleração, velocidade e energia cinética permanecem constantes e iguais a zero, enquanto a posição, a energia potencial, e a energia mecânica permanecem com valores constantes diferentes de zero. Em caso que a velocidade é diferente de zero, o equilíbrio será desfeito. Nota-se também que, devido a ruídos e erros de integração numérica, os gráficos plotados, caso sejam feitos com valores baixos, apresentarão grande instabilidade nos instantes finais da simulação.

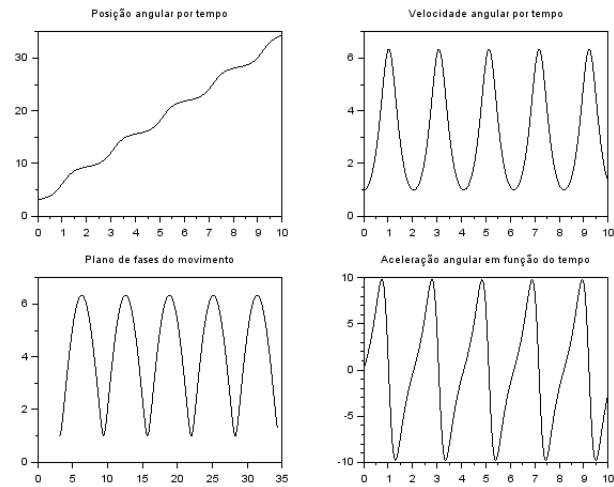


**Figura 26:** (i) Posição angular da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade angular da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração angular da partícula pelo tempo - Condição 5

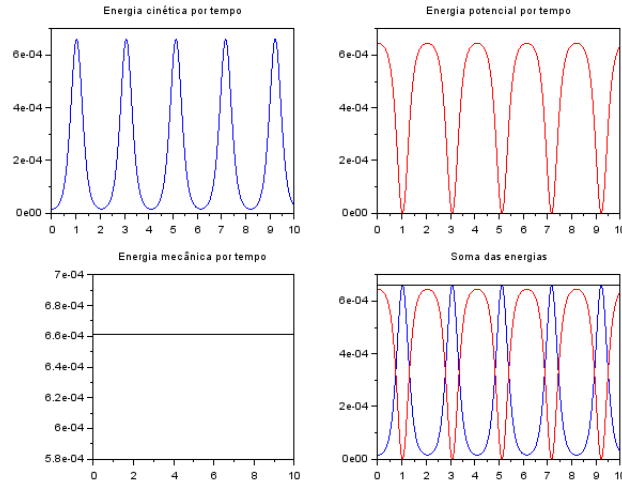


**Figura 27:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 5

- **Condição 6:**



**Figura 28:** (i) Posição angular da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade angular da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração angular da partícula pelo tempo - Condição 6



**Figura 29:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 6

A condição em questão se assemelha com a anterior no fato de que inicia seu movimento na posição de equilíbrio instável. Porém, diferentemente da condição 5, aqui a velocidade angular inicial ( $\dot{\theta}_0$ ) é não nula, o que tira a partícula do estado de equilíbrio da condição anterior. Sendo o movimento conservativo, pode-se concluir que a partícula possui energia mecânica suficiente para completar uma volta completa e continuar seu movimento. Devido a esse movimento que tende ao infinito, podemos ver no gráfico (i) da Figura 28 que a posição angular ( $\theta$ ) tende ao infinito também. Efeito semelhante pode ser observado no plano de fase do movimento, que, contrariamente aos casos anteriores, toma um formato periódico.

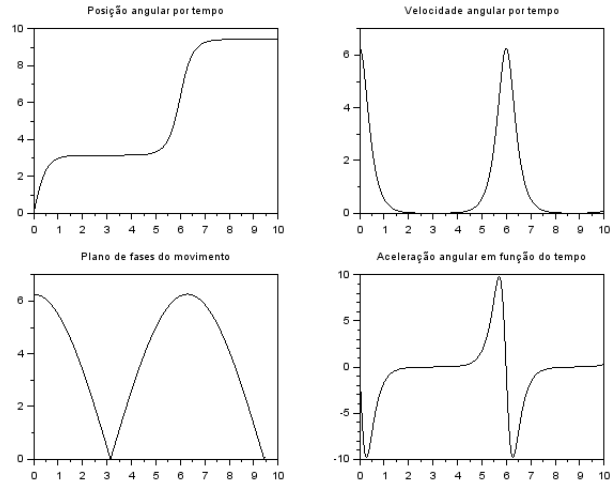
#### • Condição 7:

Antes de se plotar os gráficos dessa condição, deve-se encontrar analiticamente o valor de  $\omega_0$  que satisfaça o enunciado. De fato, a posição de equilíbrio instável (como ilustrada pela condição 5) se caracteriza por se situar na posição angular  $\theta = \pi$  e com velocidade angular nula. Logo, é possível afirmar que o valor de  $\omega_0$  buscado é tal que a energia cinética da partícula no início do movimento se transforme integralmente em energia potencial gravitacional, de forma que a partícula alcance o ponto de altura máxima com  $\omega = 0$ . Portanto, é válida a seguinte equação:

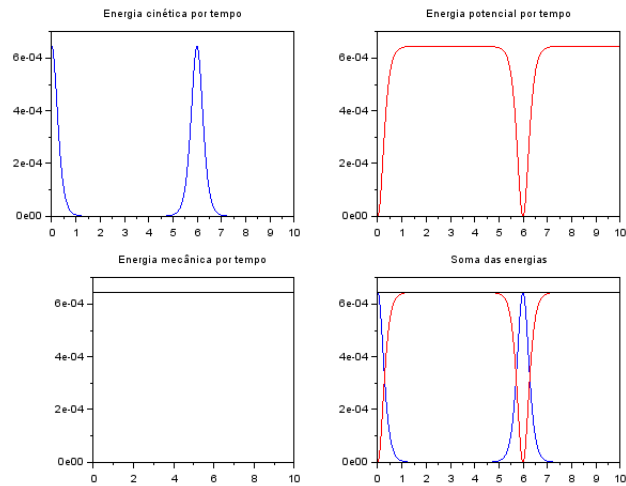
$$E_c^{\text{início}} = E_{pg}^{\text{final}} \Rightarrow \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot r^2}{2} = m \cdot g \cdot 2 \cdot r \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{4 \cdot g}{r}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot g}{r}} \quad (9)$$

Com o valor de (9), temos:



**Figura 30:** (i) Posição angular da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade angular da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração angular da partícula pelo tempo - Condição 7



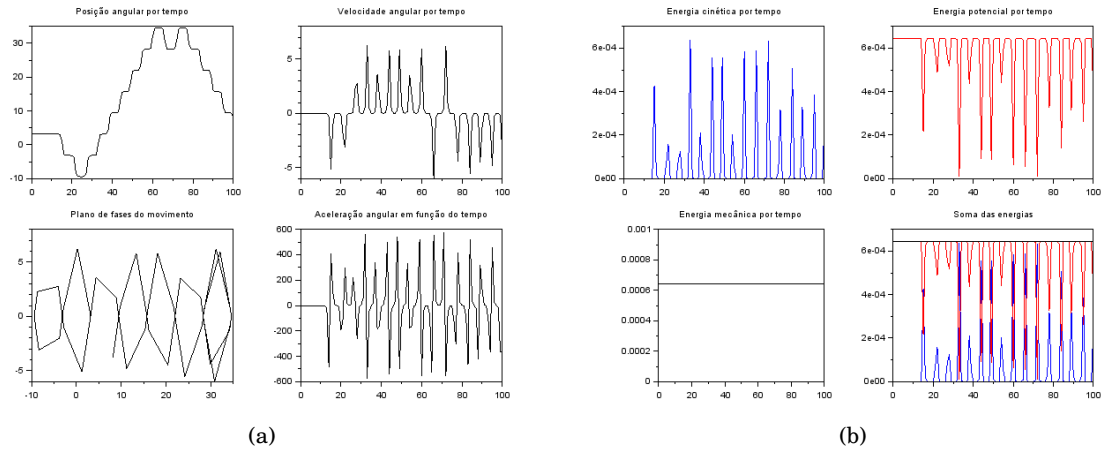
**Figura 31:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 7

Podemos ver que os gráficos não representam fielmente a previsão analítica de um movimento devido a ruídos e erros de integração numérica. Isso se dá pois, através da análise dos gráficos da Figura 31, vemos que em um  $t \approx 5s$ , a energia cinética que estava nula, sinalizando o equilíbrio instável, cresce rapidamente, indicando que o ponto material entrou em movimento novamente. Basicamente, o que ocorre é que a partícula atinge o ponto de altura máxima na trajetória e, logo em seguida, inicia um movimento de sentido

contrário em direção à posição inicial.

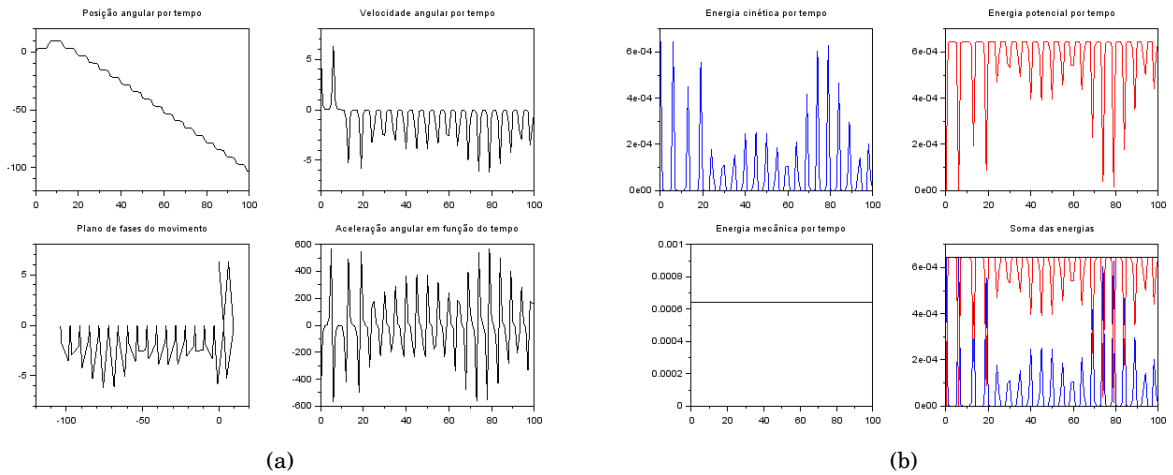
**d)**

Na condição 5, o intervalo de integração é crucial para a interpretação dos gráficos. Como podemos ver em nas Figuras 32(a) e 32(b), se avaliarmos em um intervalo 10 vezes com um passo igualmente maior, tem um ruído muito maior no plano de fases. Podemos ver no gráfico de posição angular por tempo que, a partir de um instante aproximadamente 15 segundos, o movimento deixa de ser constante.



**Figura 32:** Condição 5 com passo 1 s e intervalo de integração [0,100].

Semelhante à condição 5, na condição 7, o intervalo de integração altera completamente os resultados gráficos. Como observa-se nas Figuras 33(a) e 33(b), o ruído e os erros nas integrações numéricas se tornam muito maiores, gerando gráficos que não ilustram o movimento previsto analiticamente. Como exemplo, no gráfico de posição angular por tempo vemos que a curva tende a menos infinito, enquanto o mesmo movimento, se integrado com passo e intervalo menores (como mostra a Figura 30), tem comportamento crescente.



**Figura 33:** Condição 7 com passo 1 s e intervalo de integração [0,100].

**e)**

Os gráficos abaixo representam a mesma situação que os gráficos (i) das Figuras 18, 20, 22, 24, 26, 28 e 30, porém, acompanhados de seus respectivos gráficos inversos  $t = t(\theta)$ . Podemos observar que trazem conclusões semelhantes às do item c, porém com uma análise dos gráficos inversos podemos observar que nem sempre os gráficos representam exatamente a situação prevista analiticamente. Como exemplo, na Figura 37 vemos que o gráfico  $t = t(\theta)$  apresenta uma reta horizontal não prevista. Isso se dá pelo erro de integração numérica do *software* utilizado, de forma que consegue-se supor que nesse tempo há a inversão do movimento.

É válido ressaltar que apenas um quarto do movimento cíclico completo foi plotado, de forma a facilitar a implementação do código, como demonstrado no Anexo.



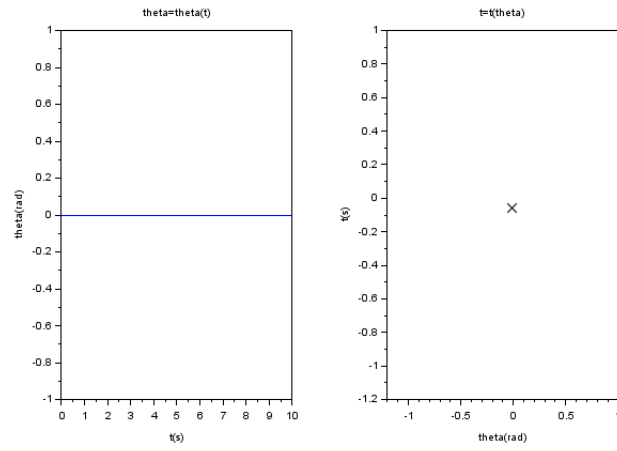


Figura 34: Gráficos de  $t = t(\theta)$  e  $\theta = \theta(t)$  - Condição 1

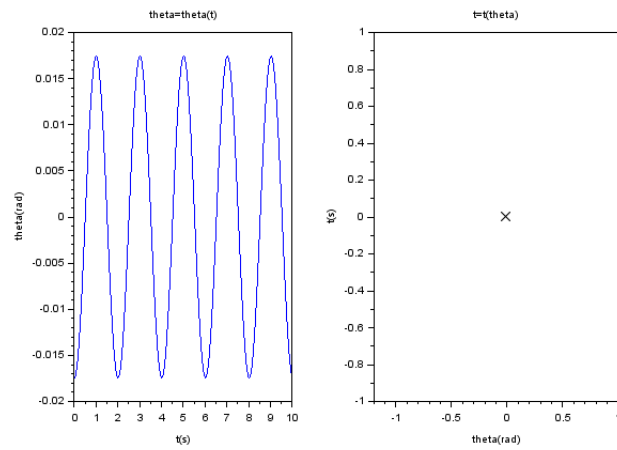


Figura 35: Gráficos de  $t = t(\theta)$  e  $\theta = \theta(t)$  - Condição 2

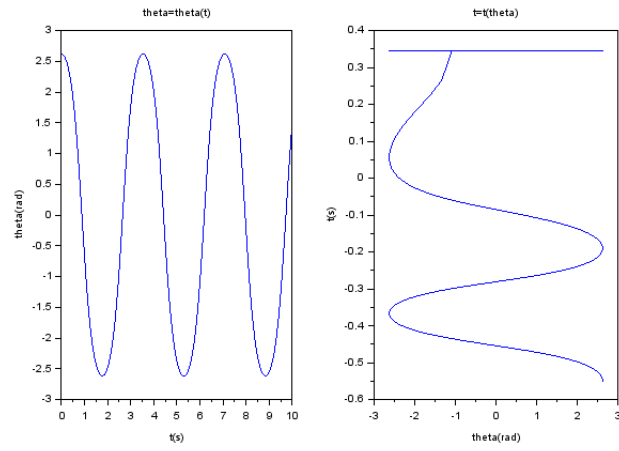


Figura 36: Gráficos de  $t = t(\theta)$  e  $\theta = \theta(t)$  - Condição 3

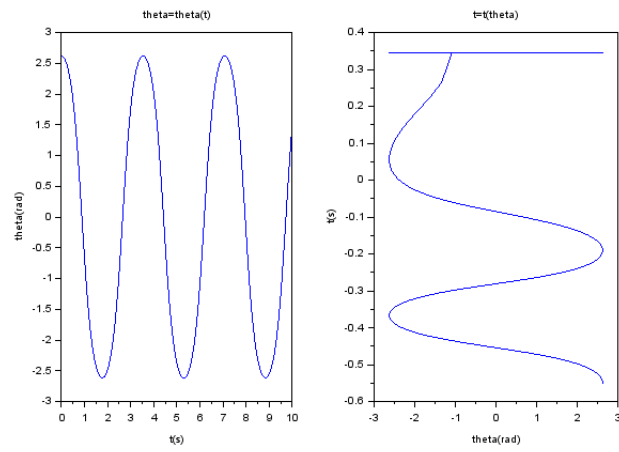


Figura 37: Gráficos de  $t = t(\theta)$  e  $\theta = \theta(t)$  - Condição 4

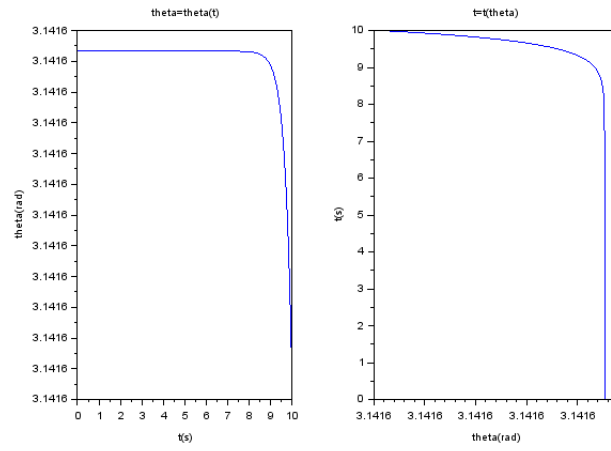


Figura 38: Gráficos de  $t = t(\theta)$  e  $\theta = \theta(t)$  - Condição 5

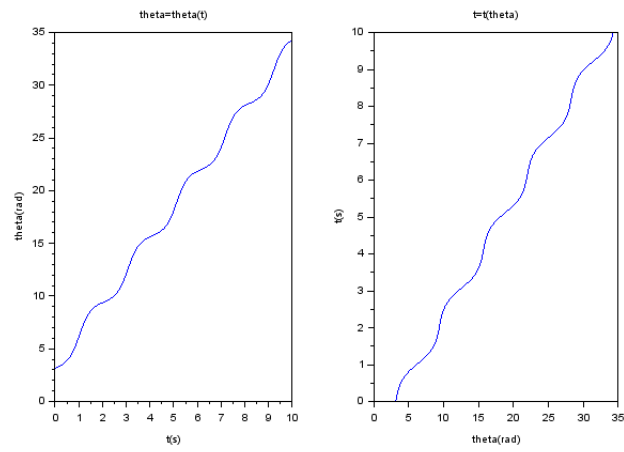


Figura 39: Gráficos de  $t = t(\theta)$  e  $\theta = \theta(t)$  - Condição 6

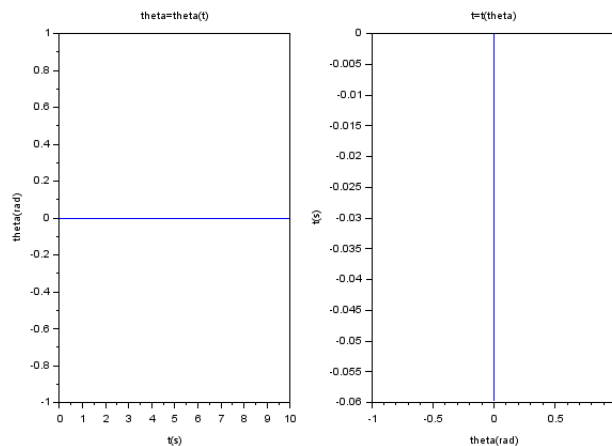


Figura 40: Gráficos de  $t = t(\theta)$  e  $\theta = \theta(t)$  - Condição 7

**f)**

Usando o algoritmo exposto no Anexo, obtem-se os seguintes valores para períodos. O princípio que foi utilizado é que nos gráficos da questão anterior foram plotados os dados referentes à um quarto do movimento cíclico completo, de forma que o período será 4 vezes a diferença entre o maior tempo e o menor nos gráficos  $t = t(\theta)$ :

Condição inicial	Período calculado (s)
1	0
2	0
3	2.1970158
4	3.5811447
5	1.7905715
6	2.3393632
7	4.2124351

Tabela 1: Períodos de cada movimento

**g)**

**h)**

A partir do diagrama de corpo livre indicado na Figura 41 , podemos equacionar da seguinte forma:

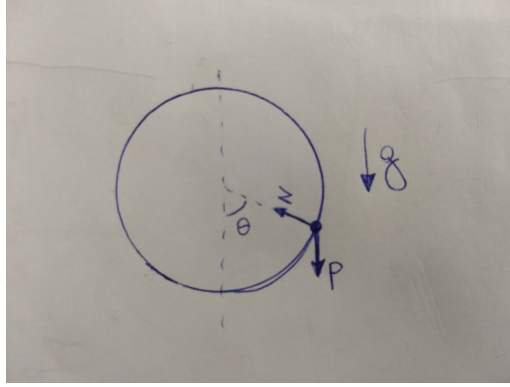
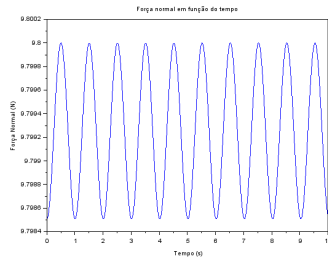


Figura 41: Diagrama de corpo livre da Tarefa II

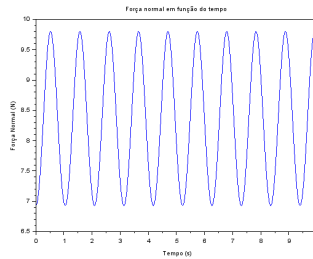
$$N - P \cdot \cos \theta = R_{cp} = m \cdot a_n \Rightarrow N = m \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot \cos \theta$$

$$N = m(r \cdot \dot{\theta}^2 + g \cdot \cos \theta) \quad (10)$$

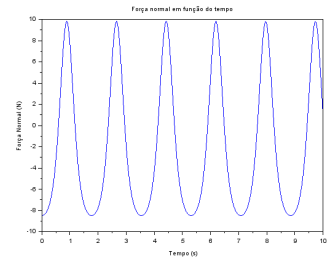
Com base na equação (10) e com o algoritmo mostrado no Anexo, construímos os seguintes gráficos:



(a) Condição 2



(b) Condição 3



(c) Condição 4

Figura 42: Força normal em função do tempo.

Os gráficos correspondem com a situação prevista analiticamente, uma vez que variam periodicamente com período igual ao do movimento periódico demonstrado nos gráficos de posição angular mostrados no item c.

i)

Construímos o retrato do espaço de fases com base no código descrito no Anexo, o que resulta na seguinte figura:

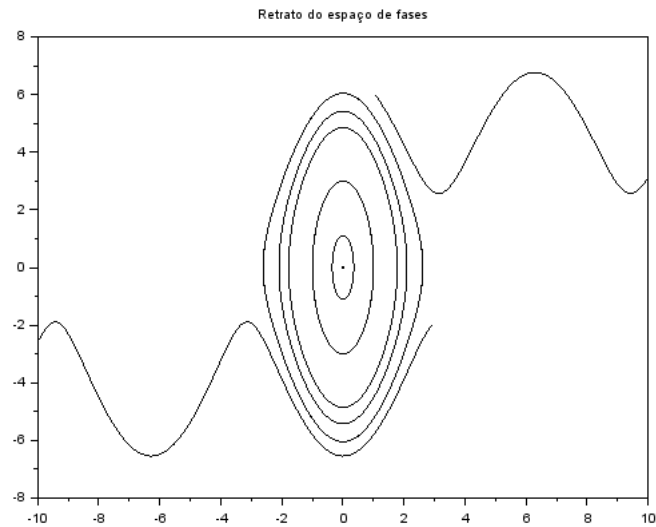


Figura 43: Retrato do espaço de fases - Todas condições

Na Figura 43 foram analisadas as seguintes condições iniciais:

$\theta_0$ (em rad)	$\omega_0$
0	0
$\frac{\pi}{180}$	0
$\frac{\pi}{4}$	1.8
$\frac{5\pi}{6}$	0
$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{2\pi}{3}$	0
0	3
$\frac{\pi}{10}$	0.5
$\frac{14\pi}{15}$	-2
$\frac{\pi}{3}$	6

Tabela 2: Condições iniciais

j)

A interpretação de 43 nos leva a entender que o movimento da partícula é cíclico para casos onde a energia mecânica da partícula  $M$  não é suficiente para que a mesma complete um ciclo inteiro. Podemos ver na mesma figura que existem casos onde o plano de fases não consiste em um figura fechada. Estes casos representam as condições iniciais onde a energia mecânica é suficiente para que a partícula exceda o ponto de equilíbrio instável  $\theta = \pi$ .

## Tarefa III

**a)**

Temos, do enunciado, as seguintes equações:

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4r}s \quad (11)$$

A partir de (11) podemos escrever o vetor de estados iniciais:

$$S_0 = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Integrando esse vetor utilizando o algoritmo mostrado no Anexo obtemos (13), onde  $dS$  é uma função que recebe um vetor tempo, composto pelos tempos inicial e final e o passo, e um vetor de estado  $s$  da forma de (12), e devolve um espaço de estados:

$$dS = f(t, s) = \begin{bmatrix} [H] \, dS(1) \\ dS(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \ddot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ -\frac{g}{4r}s \end{bmatrix} \quad (13)$$

**b)**

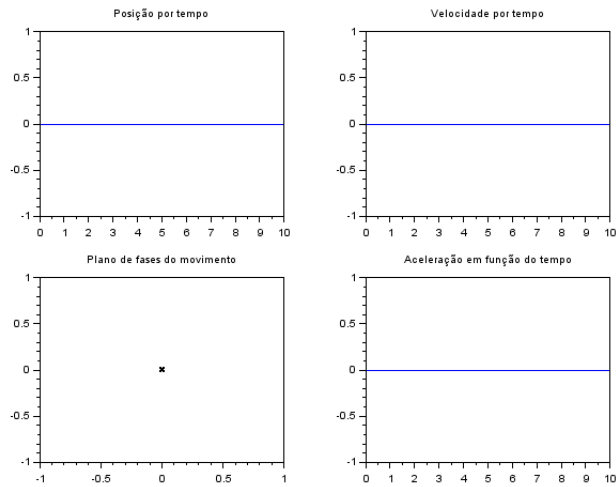
As condições de simulação estão listadas a seguir:

1.  $s_0 = 0, \dot{s}_0 = 0;$
2.  $s_0 = \frac{-r}{10}, \dot{s}_0 = 1;$
3.  $s_0 = -4r, \dot{s}_0 = 0;$
4.  $s_0 = -4r, \dot{s}_0 = 1;$

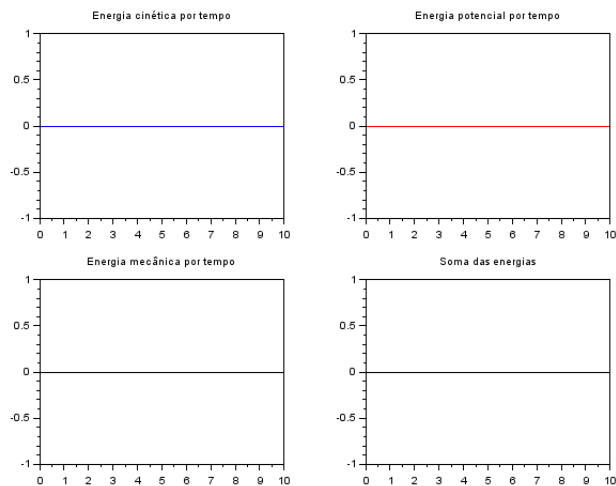
**c)**

Os algoritmos representados no anexo geraram os seguintes gráficos, plotados na ordem de condições do item *b*.

- **Condição 1:**



**Figura 44:** (i) Posição da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração da partícula pelo tempo - Condição 1

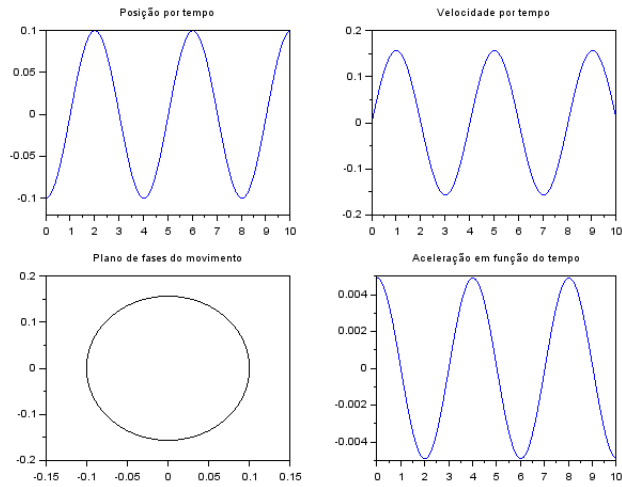


**Figura 45:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 1

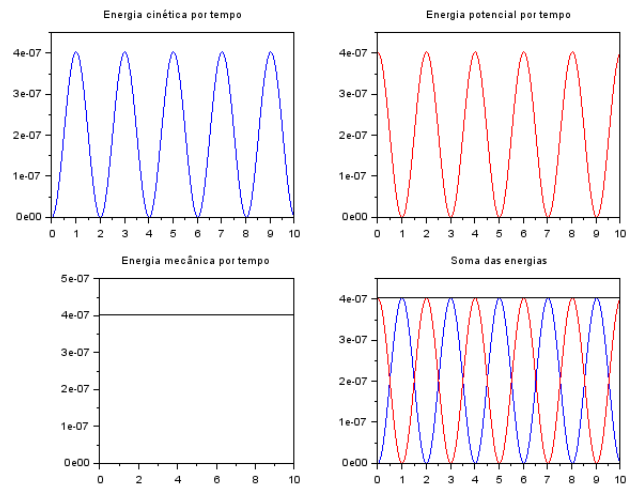
Na condição 1, a velocidade e a posição são nulas. Assim, os gráficos de posição, velocidade, aceleração, mostrados na Figura 44 e os de energia, na Figura 45 têm valor nulo ao longo do tempo. No caso do plano de fases, há apenas um ponto correspondente a (0,0) pois ambas as variáveis são nulas nesse caso. Os gráficos são facilmente previsíveis, dada a simplicidade da situação.



• **Condição 2:**



**Figura 46:** (i) Posição angular da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade angular da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração angular da partícula pelo tempo - Condição 2

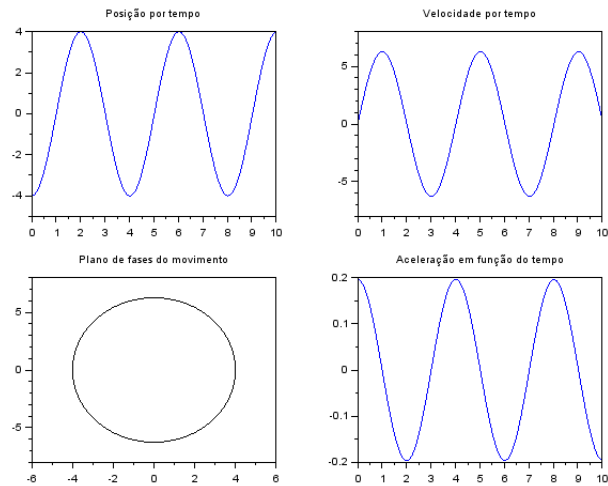


**Figura 47:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 2

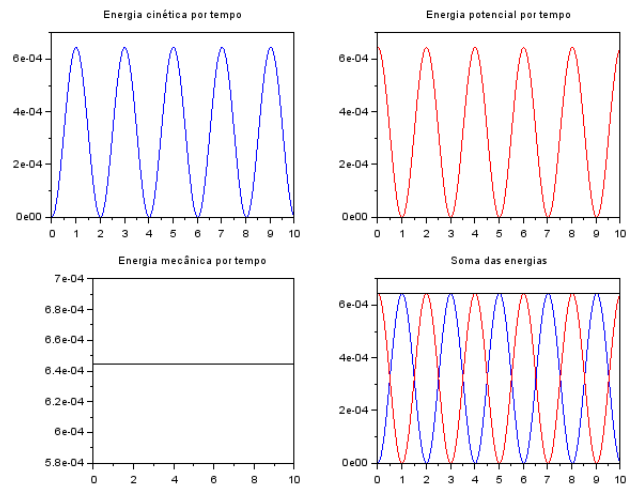
Na condição 2, o ponto M sai de  $s = -0.1m$ . O movimento é periódico e harmônico. Dessa forma, gráficos de posição, velocidade, aceleração, energia cinemática e energia potencial variam entre extremos segundo funções trigonométricas. A energia mecânica permanece

constante, embora apareça no gráfico variações ínfimas devido ao ruído, caso fosse utilizados limites relativamente pequenos no eixo  $y$  do gráfico (iii) da Figura 47.

- **Condição 3:**



**Figura 48:** (i) Posição angular da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade angular da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração angular da partícula pelo tempo - Condição 3

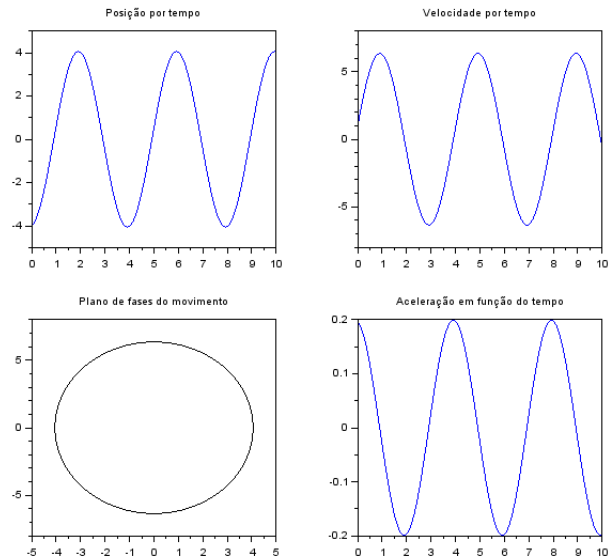


**Figura 49:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 3

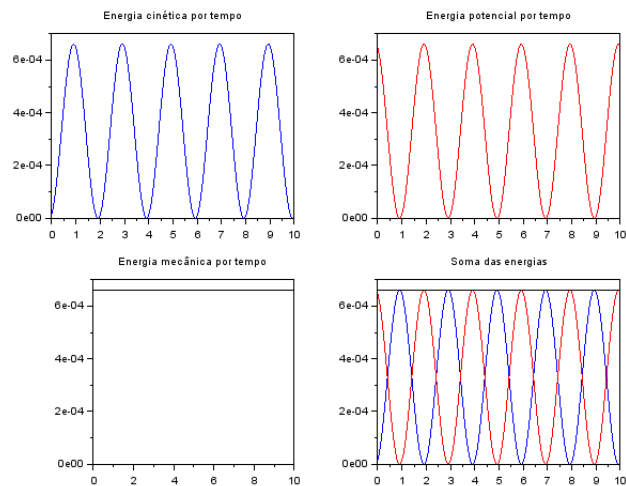
Na condição 3, o ponto M sai do limite do perímetro (ponto A). O movimento também é

periódico e harmônico, porém com maiores amplitudes devido às condições iniciais. Por isso, os gráficos desta condição são análogos aos da condição 2.

- **Condição 4:**



**Figura 50:** (i) Posição angular da partícula pelo tempo; (ii) Velocidade angular da partícula pelo tempo; (iii) Plano de fases do movimento; (iv) Aceleração angular da partícula pelo tempo - Condição 4



**Figura 51:** (i) Energia cinética da partícula pelo tempo; (ii) Energia potencial gravitacional da partícula pelo tempo; (iii) Energia mecânica pelo tempo; (iv) Sobreposição de i, ii e iii - Condição 4

Na condição 4, a posição inicial também é  $-4m$  como na condição 3, mas nesse caso há velocidade inicial. Isso altera o ponto em que o eixo  $y$  é cortado nos gráficos da velocidade e energia cinética. Os demais gráficos permanecem representando movimentos harmônicos.

#### d)

Pode-se usar a equação (26) do enunciado para determinar analiticamente o período do movimento de M:

$$T = 4.\pi.\sqrt{\frac{2.R}{g}} \Rightarrow T = 5,67s \quad (14)$$

Para ambas as simulações  $b-2$  e  $b-4$ , o período do movimento obtido foi de 4 segundos aproximadamente. Os valores são razoáveis para o fenômeno, porém consideravelmente diferentes de forma que o valor analítico é o maior dentre os dois. Na simulação numérica, o valor do período se aproxima do analítico, mas não o atinge devido ao passo de integração.

#### e)

Para ir de -4 a 0 (considerou-se  $r = 1\text{ m}$ ), o ponto M leva aproximadamente 1 segundo na simulação. Tal valor foi obtido pela análise do vetor de estados final após a simulação de 10 segundos com passo 0.001. O ponto M atinge o ponto O na 100ª iteração da simulação e por isso o tempo de deslocamento é  $100 \cdot 0.001 = 1$  segundo. Para se mover de A a B, o ponto M deveria ter uma velocidade inicial no sentido de AB. Para as condições iniciais pedidas, o ponto M não se move sobre a reta AB.

# Anexo

## a) Códigos da tarefa I

```
//Lista de exercício 3 - 1º Tarefa - (a),(b) e (c)
//Dados
pi = %pi
r = 0.001; // raio da esfera em metros
rho = 7850; //densidade do aço em kg/m^3
g = 9.8; //m/s^2
m = (4/3)*pi*(r^3)*7850 // massa em kg

//Condições iniciais
alfa = pi/6;
s0 = 1;
v0 = -1;
S0 = [s0;v0];

//Vetor tempo
t0 = 0;
tf = 100; //Vamos integrar pelo tempo de 0 a 20 segundos
dt = 0.01; //Define o passo, quanto menor mais preciso
t = t0:dt:tf;

//Espaço de estados
function dS=f(t, s)
//s é o vetor de estado, ou seja, s = [s, ds/dt]
dS1 = s(2);
dS2 = g*sin(alfa);
dS = [dS1; dS2];
endfunction
S = ode(S0,0,t,f);

//Energia Cinética
function cinetica=T(S)
cinetica = (1/2)*m*(S(2,:))**2
endfunction
```

```
//Energia Potencial
function potencial=U(S)
potencial = m*g*(S(1,S))*sin(alfa)-(S(1,:))*sin(alfa)*m*g
endfunction

//Energia Mecânica
function mecanica=E(U, T)
mecanica = U+T
endfunction

//Aceleração
a = diff(S(2,:))/0.01;
a(S+1) = a(S)

//Força Normal
N = m*g*cos(alfa)*ones(1,size(t)(2))

//Função comet
x0 = 0;
z0 = 0;
z = -S(1,:)*sin(alfa)+z0;
x = S(1,:)*cos(alfa)+x0;

//Plotar gráficos
scf(0)
subplot(2,2,1)
xlabel('Posição por tempo');
plot(t, S(1,:), 'k');

subplot(2,2,2)
xlabel('Velocidade por tempo')
plot(t, S(2,:), 'k')
```

```

subplot(2,2,3)
xtitle("Velocidade por posição")
plot(S(1,:), S(2,:), 'k')

subplot(2,2,4)
xtitle("Aceleração em função do tempo")
plot(t, a, 'k')

scf(1)
xtitle("Energias")
subplot(2,2,1)
xtitle("Energia cinética por tempo")
plot(t, T(S))
subplot(2,2,2)
xtitle("Energia potencial por tempo")
plot(t, U(S), 'k')
subplot(2,2,3)
xtitle("Energia mecânica por tempo")
plot(t, U(S)+T(S), 'r')
subplot(2,2,4)
xtitle("Soma das energias")
plot(t, T(S))
xlabel("(i)", 'fontsize', 1)
plot(t, U(S), 'k')
xlabel("(ii)", 'fontsize', 1)
plot(t, U(S)+T(S), 'r')

scf(2)
subplot(2,3,1)
xtitle("Normal - Condição 01")
plot(t, N)

```

## b) Códigos da tarefa II

```
//Lista de exercício 3 - 2ª Tarefa
//Dados
pi = %pi;
r_e = 0.001; // raio da esfera em metros
r = 1; // raio da pista circular
rho = 7850; //densidade do aço em kg/m^3
g = 9.8; //m/s^2
m = (4/3)*pi*(r_e^3)*7850 // massa em kg

//Condições iniciais
theta_inicial = -pi/180;
w0 = 0;
theta0 = [theta_inicial;w0];

//Vetor tempo
t0 = 0;
tf = 10; //Vamos integrar pelo tempo de 0 a 10 segundos
dt = 0.01; //Define o passo, quanto menor mais preciso
t = t0:dt:tf;

//Espaço de estados
function dtheta=f(t, v)
//s é o vetor de estado, ou seja, s = [s, ds/dt]
    dtheta1 = v(2);
    dtheta2 = -g*sin(v(1))/r;
    dtheta = [dtheta1; dtheta2];
endfunction
theta = ode(theta0,0,t,f);

//Energia Cinética
function ética = T(S)
    cinética = (1/2)*m*(S(2,:))^2
endfunction

//Aceleração angular
a = diff(theta(2,:))/0.01;
a(S+1) = a(S)

//Energia potencial
function potencial=V(S)
    potencial = m*g*r*(1-cos(S(1,:)))
endfunction

//Força Normal
function normal=N(S)
    normal = m*(r*S(2,:)^2) + g*cos(S(1,:))
endfunction
```

### c) Códigos da tarefa III

```
//Lista de exercício 3 - 3ª Tarefa
//Dados
pi = %pi
r = 0.001; // raio da esfera em metros
rho = 7850; //densidade do aço em kg/m^3
g = 9.8; //m/s^2
m = (4/3)*pi*(r^3)*7850 // massa em kg
R=1; //Raio da circunferencia geradora
//Condições iniciais
s0 = -4;
v0 = 1;
S0 = [s0;v0];
//Espaço de estados
function dS=f(t, s)
//s = [s, ds/dt]
    dS1 = s(2);
    dS2 = -g*s(1)/(4*R);
    dS = [dS1; dS2];
endfunction
t = linspace(0,10,1000)
S = ode(S0,0,t,f);
//Energia Cinética
function ética = T(S)
    cinética = (1/2)*m*(S(2,:))^2
endfunction
//Energia Potencial
function potencial=V(S)
    potencial=m*g*(S(1,:))^2/(8*R);
endfunction
//Energia Mecânica
function mecanica=E(S)
    mecanica=V(S)+T(S)
endfunction
//Aceleração
```

```
a = diff(S(2,:))/0.5;
a(S+1) = a(S)
//Plotar gráficos
clf()
scf(0)
subplot(2,2,1)
xlabel('Posição por tempo');
plot(t, S(1,:), 'b');
subplot(2,2,2)
xlabel('Velocidade por tempo');
plot(t, S(2,:), 'b')
subplot(2,2,3)
xlabel('Plano de fases do movimento');
plot(S(1,:), S(2,:), 'k')
subplot(2,2,4)
xlabel('Aceleração em função do tempo')
plot(t, a, 'b')
scf(1)
subplot(2,2,1)
xlabel('Energia cinética por tempo');
plot(t, T(S), 'b')
subplot(2,2,2)
xlabel('Energia potencial por tempo');
plot(t, V(S), 'r')
subplot(2,2,3)
xlabel('Energia mecânica por tempo');
plot(t, E(S), 'k')
subplot(2,2,4)
xlabel('Soma das energias')
plot(t, T(S), 'b')
plot(t, V(S), 'r')
plot(t, E(S), 'k')
```