Relatório 4

PME3201 - Laboratório de Simulações Numéricas

Lucas Hattori da Costa - 10335847
Gustavo Hott Carvalho - 10274360

22 de Novembro de 2018
São Paulo-SP, Brasil

Tarefa I

Condições dadas no enunciado: circuito inicialmente descarregado; $L = 0,1H$; $V_0 = 10V$; $C = 0,001F$; $t_0 = 0,1s$ (tempo de acionamento da fonte de tensão V_0

a)

Como a corrente é constante no circuito e os parâmetros também, pode-se aplicar a Lei de Kirchhoff resultando em (1).

$$\begin{aligned} V &= V_0 - V_R - V_L \\ V &= V_0 - R.i - L.\frac{di}{dt} \end{aligned} \tag{1}$$

Porém, com a equação do capacitor ideal dada no enunciado, chegamos a (2).

$$V = V_0 - R.C.\frac{dV}{dt} - L.C.\frac{d^2V}{dt^2} \tag{2}$$

A equação (2) representa o comportamento dinâmico do sistema.

b)

Com o código 1 foi obtido a seguinte resposta gráfica 2 no *software* Modelica.

```
  parameter Real L = 0.1;
  parameter Real C = 0.0001;
  parameter Real R = 10;
  Real i(start = 0.0);
  Real V(start = 0.0);
  Real VR, VL, V0;
equation
  V0 = if time>0.1 then 10 else 0.0;
  V = V0 - VL - VR;
  VL = L*der(i);
  VR = R*i;
  i = C*der(V);
```

Figura 1: Código do item *b*

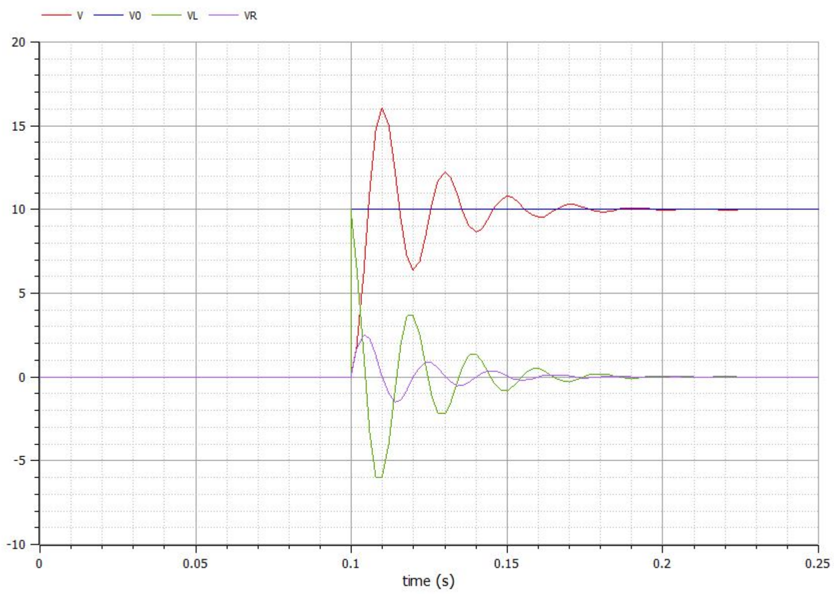


Figura 2: Tensões em função do tempo

O gráfico obtido é condizente com a interpretação física da situação. A tensão fornecida pela fonte é nula até o instante $t = 0.1s$ onde salta para 10V. Nesse instante, as tensões V_R, V e V_L começam a oscilar devido ao indutor de forma amortecida pelo resistor. Esse comportamento é facilmente entendido como um fenômeno análogo à um MHS amortecido subcrítico, uma vez que a equação diferencial que descreve a situação é igualmente análoga à $m\ddot{x} = -kx - \rho.\dot{x}$. No caso simulado, a inequação $\frac{\rho}{m} < 2.\omega_0$, ou seja, $\frac{RC}{LC} < 2.\sqrt{\frac{1}{RC}}$, é verdadeira, o que justifica o comportamento subcrítico do amortecimento.

c)

O código 3 resultou nos seguintes gráficos 4. Como a situação é a mesma do item b, todas as interpretações feitas anteriormente são igualmente válidas.

```
  import si = Modelica.SIunits;
  parameter si.Inductance L = 0.1;
  parameter si.Capacitance C = 0.0001;
  parameter si.Resistance R = 10;
  si.Current i(start = 0.0);
  si.Voltage V(start = 0.0);
  si.Voltage VR, VL, V0;
equation
  V0 = if time>0.1 then 10 else 0.0;
  V = V0 - VL - VR;
  VL = L*der(i);
  VR = R*i;
  i = C*der(V);
```

Figura 3: Código do item c

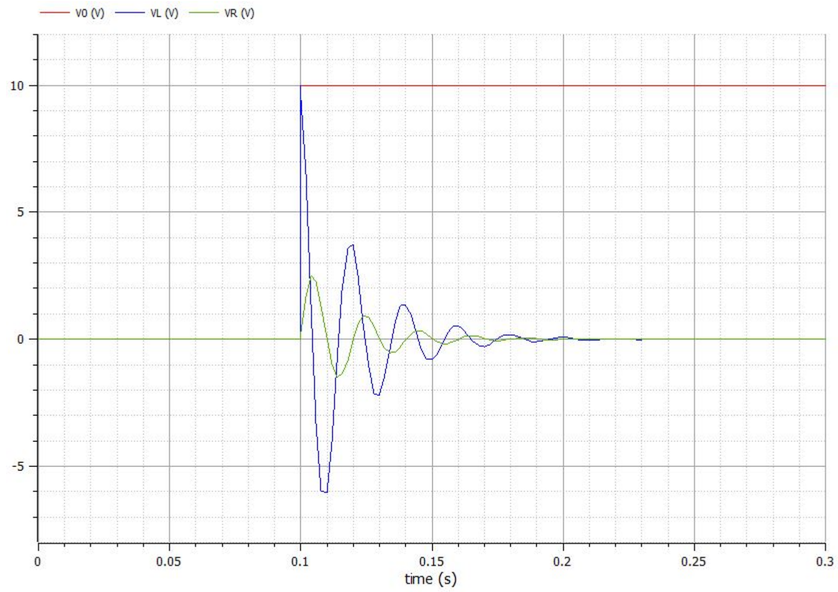


Figura 4: Tensões em função do tempo

d)

O código dos itens *c* e *b* foi transposto para o ambiente de blocos do *software* Modelica, resultando em 5, que levou ao gráfico 6. Logo, novamente, as interpretações para os resultados são as mesmas relatadas no item *b*.

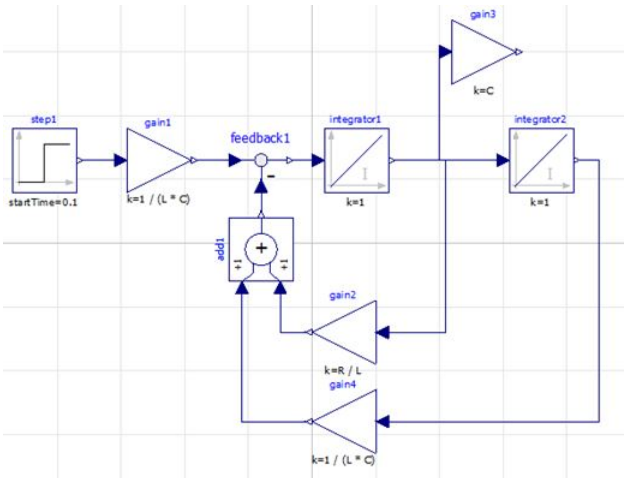


Figura 5: Código do item *d*

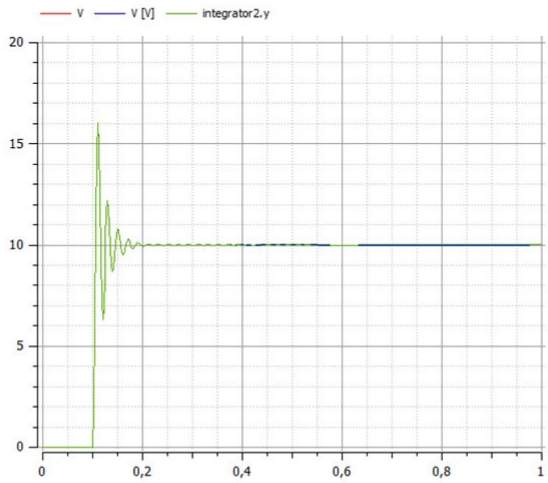


Figura 6: Tensões em função do tempo

e)

Os componentes foram modelados, como descrito nos códigos das figuras 7 a 12, resultando, ao final, no sistema descrito pelo código na figura 13. Os resultados gráficos estão demonstrados na figura 14 e são iguais aos obtidos nos itens anteriores, sendo igualmente válida a análise feita no item *b*.

```
connector ElectricalPin
  Modelica.SIunits.Voltage V;
  flow Modelica.SIunits.Current i;
  annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100,
100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2,
2})), Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}},
preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2, 2})));
end ElectricalPin;
```

Figura 7: Código do componente *Electrical Pin*

```
model Fonte
  ElectricalPin p, n;
equation
  p.V - n.V = if time > 0.1 then 10 else 0.0;
  p.i + n.i = 0;
  annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100,
100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2,
2})), Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}},
preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2, 2})));
end Fonte;
```

Figura 8: Código do componente *Fonte*

```
model Resistor
  import Modelica.SIunits;
  parameter SIunits.Resistance R = 10 "Resistencia";
  ElectricalPin p, n;
equation
  p.V - n.V = R * p.i;
  p.i + n.i = 0;
  annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100,
100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2,
2})), Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100,
100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2,
2})));
end Resistor;
```

Figura 9: Código do componente *Resistor*

```
model Indutor
  import Modelica.SIunits;
  parameter SIunits.Inductance L = 0.1 "Indutancia";
  ElectricalPin p, n;
equation
  p.V - n.V = L * der(p.i);
  p.i + n.i = 0;
  annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100,
100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2,
2})), Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100,
100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2,
2})));
end Indutor;
```

Figura 10: Código do componente *Indutor*

```
model Capacitor
  import Modelica.SIunits;
  parameter SIunits.Capacitance C = 0.0001;
  ElectricalPin p, n;
  SIunits.Voltage Vc;
equation
  Vc = p.V - n.V;
  p.i = C * der(Vc);
  p.i + n.i = 0;
  annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100,
100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2,
2})), Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100,
100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2,
2})));
end Capacitor;
```

Figura 11: Código do componente *Capacitor*

```
model Terra
  ElectricalPin ground;
equation
  ground.V = 0;
  annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100,
100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2,
2})), Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}},
preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2, 2})));
end Terra;
```

Figura 12: Código do componente *Terra*

```
model RLC1e
  Resistor R(R = 10);
  Indutor L;
  Capacitor C;
  Fonte Vb;
  Terra g;
equation
  connect(Vb.n, g.ground);
  connect(Vb.p, R.p);
  connect(R.n, L.p);
  connect(L.n, C.p);
  connect(C.n, g.ground);
  annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100,
100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2,
2})), Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100,
100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale = 0.1, grid = {2,
2})));
end RLC1e;
```

Figura 13: Sistema composto.

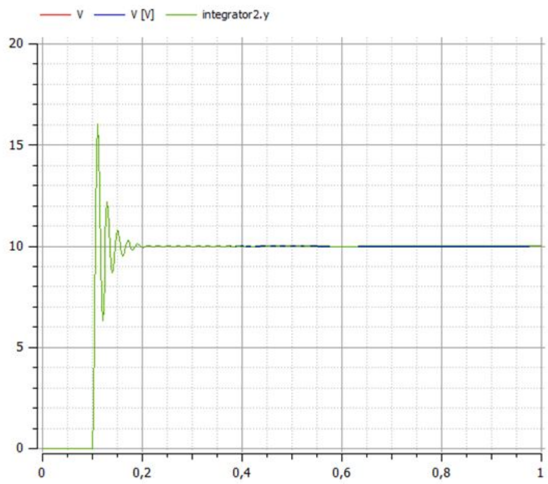
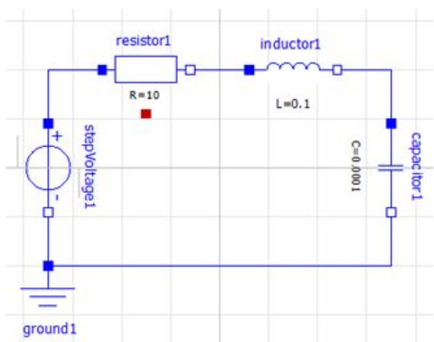


Figura 14: Tensões em função do tempo

f)

Utilizando a biblioteca MSL já contida no software, obtêm-se o modelo descrito na figura a seguir.



g)

É fácil observar que as respostas gráfica obtidas em todos os itens anteriores são análogas, o que comprova que as diferentes abordagens adotadas representam, de fato, o mesmo sistema. Como dito no item b, se trata de um sistema harmônico amortecido subcriticamente por ser análogo à $m\ddot{x} = -kx - \rho.\dot{x}$. No caso simulado, a tensão fornecida pela fonte é nula até o instante $t = 0.1s$ onde salta para 10V. Nesse instante, as tensões V_R, V e V_L começam a oscilar com as amplitudes decaindo exponencialmente devido ao indutor de forma amortecida pelo resistor. Como dito anteriormente, a inequação $\frac{\rho}{m} < 2.\omega_0$, ou seja, $\frac{RC}{LC} < 2.\sqrt{\frac{1}{RC}}$, é verdadeira, o que justifica o comportamento subcrítico do amortecimento. Caso fosse utilizado um resistor de maior resistência, como 100 Ohms, por exemplo, a inequação se tornaria falsa, caracterizando um amortecimento supercrítico.

Apesar disso, houve diferenças entre cada uma das formas de representação, principalmente no que tange à praticidade na implementação. Por exemplo, criar um biblioteca inteiramente nova de componentes foi um processo longo e demorado, devido ao fato de depender de muita programação, além de ter que saber todas as equações que regem o sistema. Por outro lado, utilizar a biblioteca do MSL (que é bem extensa) foi um processo extremamente intuitivo e eficaz, apesar de que, para problemas mais complexos, a bibliotece pode não ser o suficiente. Ademais, o modelo plano foi prático devido ao uso direto das equações sem necessidade de manipulações algébricas enquanto o diagrama de blocos foi um menos conveniente por requisitar um maior uso de manipulação algébrica para caracterizar o sistema.

Tarefa II

Condições iniciais e parâmetros:

- $R_1 = 10\,\Omega$
- $R_2 = 500\,\Omega$
- $L = 0,1\,H$
- $C = 0,0001\,F$
- $V_o = 10\,V$
- $t_o = 0,1\,s$

a)

A equação diferencial que descreve o circuito é encontrada da seguinte forma:

$$V_{r1} = R_1 \cdot i_1 \tag{3}$$

$$V_{r2} = R_2 \cdot i_2 \tag{4}$$

$$V_L = L\frac{di_1}{dt} \tag{5}$$

$$i_1 = C\frac{dV}{dt} \tag{6}$$

$$i = i_1 + i_2$$

$$i_2 = i - C\frac{dV}{dt} \tag{7}$$

Considerando o circuito que passa i e i_2 como I e o que passa i e i_1 como II:
Aplicando-se Kirchhoff em I:

$$V_o - V_{r1} - V_{r2} = 0$$

Aplicando 3 e 4:

$$V_o - R_1 i - R_2 i_2 = 0$$

Com 7:

$$V_o - R_1 i - R_2\left(i - C\frac{dV}{dt}\right) \tag{8}$$

Aplicando-se Kirchhoff em II:

$$V_o - V_{r1} - V_L = V$$

Aplicando 3 e 5:

$$V_o - R_1 i - L\frac{di_1}{dt} = V$$

Com 6:

$$V_o - R_1 i - LC\frac{d^2V}{dt^2} = V \tag{9}$$

Subtraindo 8 de 9:

$$R_2 i - R - 2C\frac{dV}{dt} - LC\frac{d^2V}{dt^2} = V$$

Ao isolar i, chegamos em:

$$i = C\frac{dV}{dt} + \frac{LC}{R_2}\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{V}{R_2} \tag{10}$$

Com 10 e 9:

$$V_o - R_1 C\frac{dV}{dt} - \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) LC\frac{d^2V}{dt^2} - V\frac{R_1}{R_2} = V$$

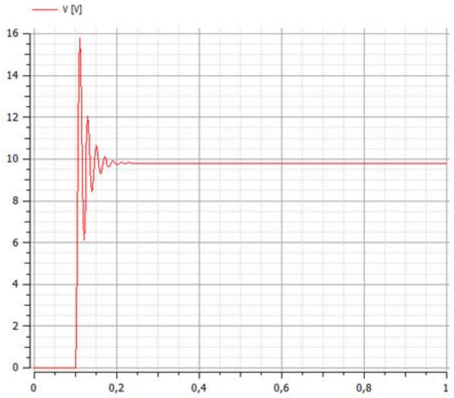
Ao isolar $\frac{d^2V}{dt^2}$, chegamos a:

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{V_o}{\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) LC} - \frac{V}{LC} - \frac{R_1}{L\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)} \cdot \frac{dV}{dt}$$

b)

O modelo plano é descrito pelo código da figura a seguir, resultando na figura **??**

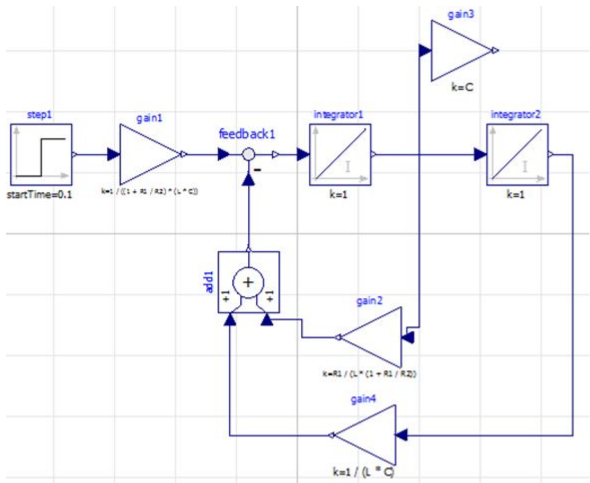
```
model RLC2b "Modelo MSL"
  import SI = Modelica.SIunits;
  parameter SI.Voltage Vb = 10 "fonte de tensão da bateria";
  parameter SI.Resistance R1 = 10;
  parameter SI.Resistance R2 = 500;
  parameter SI.Inductance L = 0.1;
  parameter SI.Capacitance C = 0.0001;
  parameter SI.Time to = 0.1;
  SI.Voltage V(start = 0.0);
  SI.Current i(start = 0.0);
  SI.Current i1, i2;
  SI.Voltage Vr1, Vr2, Vl, Vo;
equation
  Vo = if time > to then Vb else 0.0;
  Vr1 = R1 * i;
  Vr2 = R2 * i2;
  Vl = L * der(i1);
  i1 = C * der(V);
  Vo - Vr1 - Vr2 = 0;
  Vo - Vr1 - Vl = V;
  i = i1 + i2;
```



Os resultados gráficos são condizentes, afinal, a resistência no novo trecho é muito alta e, portanto, há pouco desvio de corrente no início, que majoritariamente continua indo para o capacitor como na questão 1, por isto apenas uma pequena variação de um gráfico para o outro, sendo esta evidenciada pela estabilização da voltagem no capacitor um pouco abaixo da voltagem fornecida (10 V).

c)

Foi elaborado o seguinte diagrama de blocos:



Os resultados obtidos são idênticos ao obtido no item anterior, de forma que a análise feita é igualmente válida.

d)

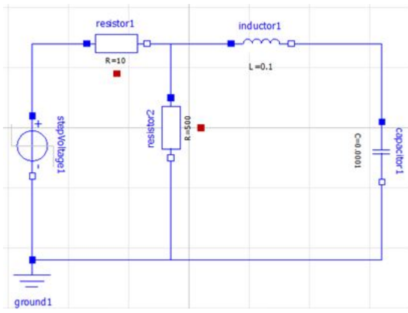
Utilizando a biblioteca previamente criada foi elaborado o seguinte código:

```
model RLC2d
  Resistor R1(R = 10);
  Resistor R2(R = 500);
  Indutor L;
  Capacitor C;
  Fonte Vb;
  Terra g;
equation
  connect(Vb.n, g.ground);
  connect(Vb.p, R1.p);
  connect(R1.n, L.p);
  connect(L.n, C.p);
  connect(C.n, g.ground);
  connect(R1.n, R2.p);
  connect(R2.n, g.ground);
```

Os resultados obtidos são idênticos ao obtido no item anterior, de forma que a análise feita é igualmente válida.

e)

Utilizando a biblioteca da MSL foi elaborado o seguinte código:



Os resultados obtidos são idênticos ao obtido no item anterior, de forma que a análise feita é igualmente válida.

f)

Há oscilações com amortecimento subcrítico da tensao no capacitor que irão divergir aos poucos até se estabilizarem em valores parcialmente diferentes. Também pode se analisar a divisão da corrente:a corrente que passa pelo *resistor 1* é a corrente total e se divide para passar pelo *resistor 2* e pelo *indutor*. Pelo *diagrama de blocos* se tornou mais complicado que no caso anterior, apesar da mesma aparência. Isso se deve ao fato da equação diferencial que rege o sistema ser completamente diferentee do sistema anterior e necessitar de novos cálculos para se chegar às equações que devem ser colocadas em cada bloco. No *modelo plano*, a acálise continuou simples mas com variáveis a mais. Por fim, utilizando a *biblioteca MSL* o exercício se tornou bem mais simples, evidenciando novamente como essa ferramenta ´é intuitiva e prática.

g)

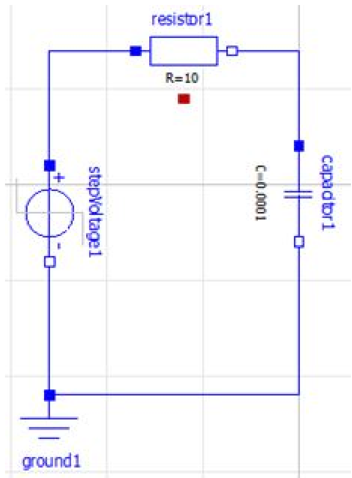
Como dito no item anterior, o *diagrama de blocos* não se mostra tão eficiente por ser necessário recalcular todas as equações diferenciais do sistema. A representação pela *biblioteca MSL* é mais direto, mas é preciso que já exista na biblioteca previamente. O *modelo plano* também não é tão eficiente devido à necessidade de retrabalho assim como no *diagrama de blocos*.

Tarefa III

Condições iniciais e parâmetros do sistema:

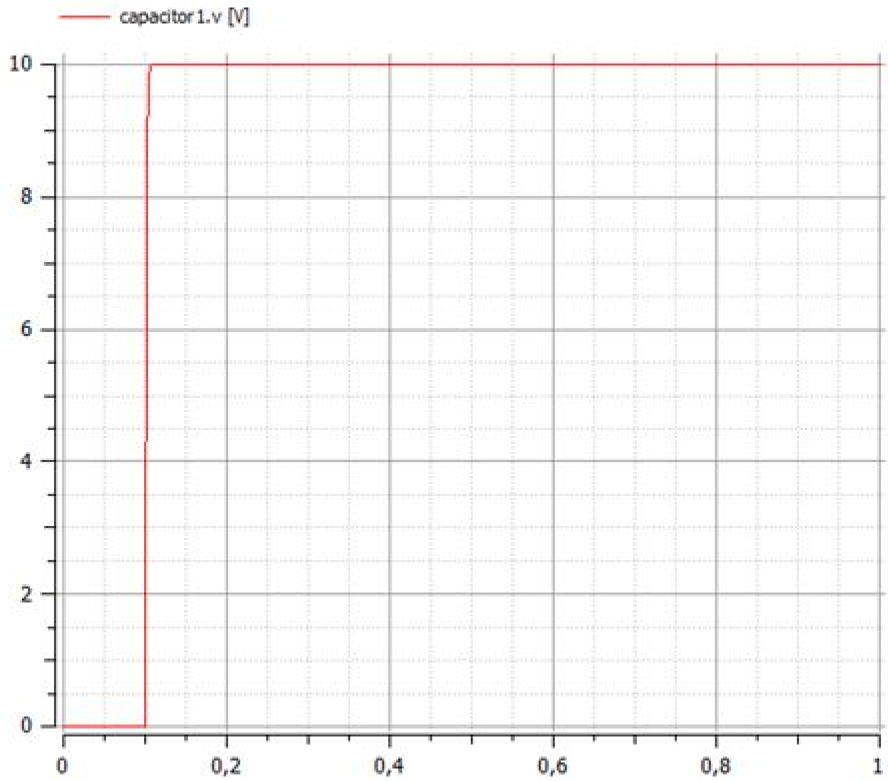
- $R = 10\,\Omega$
- $C = 0,0001\,F$
- $V_o = 10\,V$
- $t_o = 0,1\,s$

a)



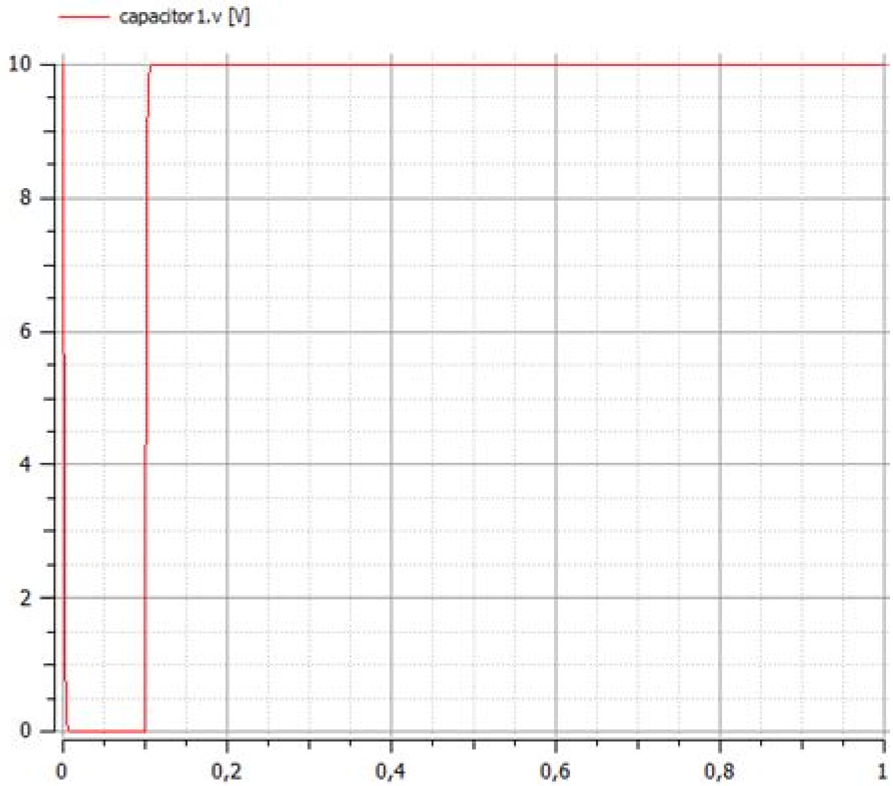
b)

O capacitor carrega exponencialmente e então não há mais diferença de potencial no sistema, a corrente zera e o sistema se estabiliza.



c)

Considerando o circuito inicialmente carregado com o mesmo Vo (10V) e mantendo que a fonte de tensão é ligada em 0,1s, gera-se os seguintes resultados gráficos

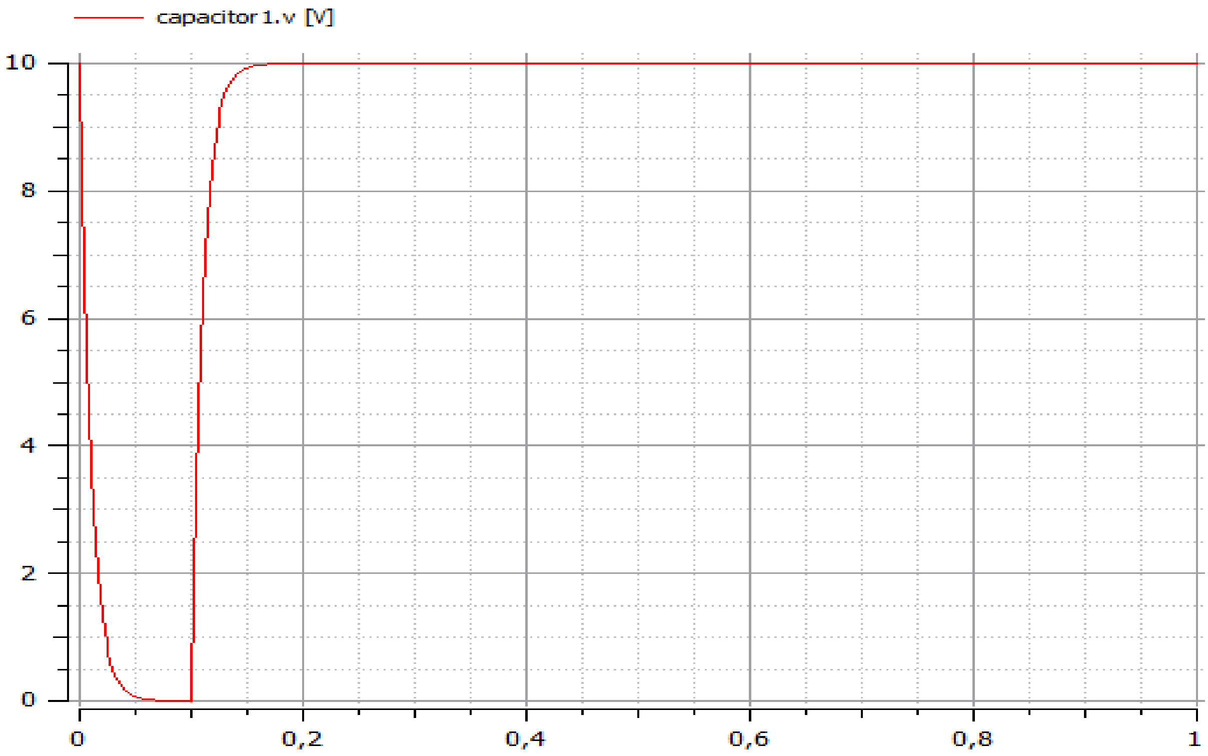


d)

Serão avaliadas os efeitos de 3 aspectos distintos: aumento da resistência, da capacitância e alterar a V_0.

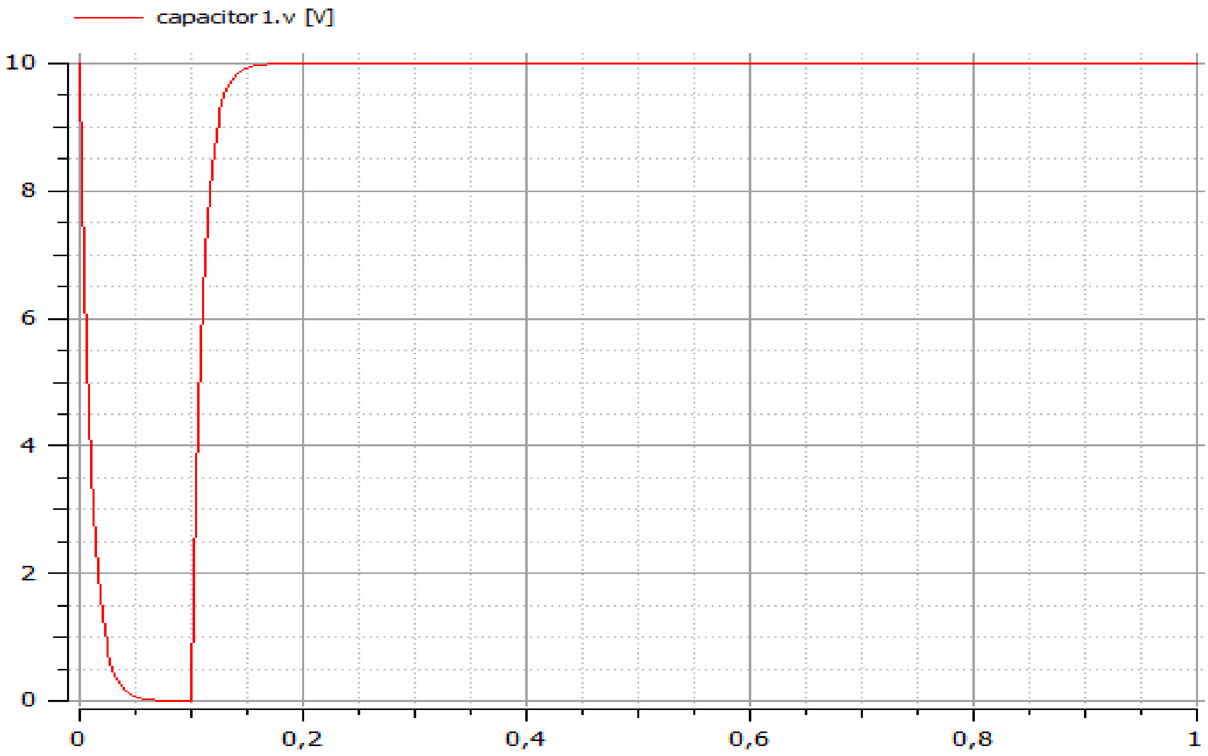
i. O módulo da derivada das curvas de carga e descarga diminui, o que representa o aumento da dificuldade para a corrente fluir no sistema.

Figura 15: Tensões dos capacitores pelo tempo - Alterando a resistência



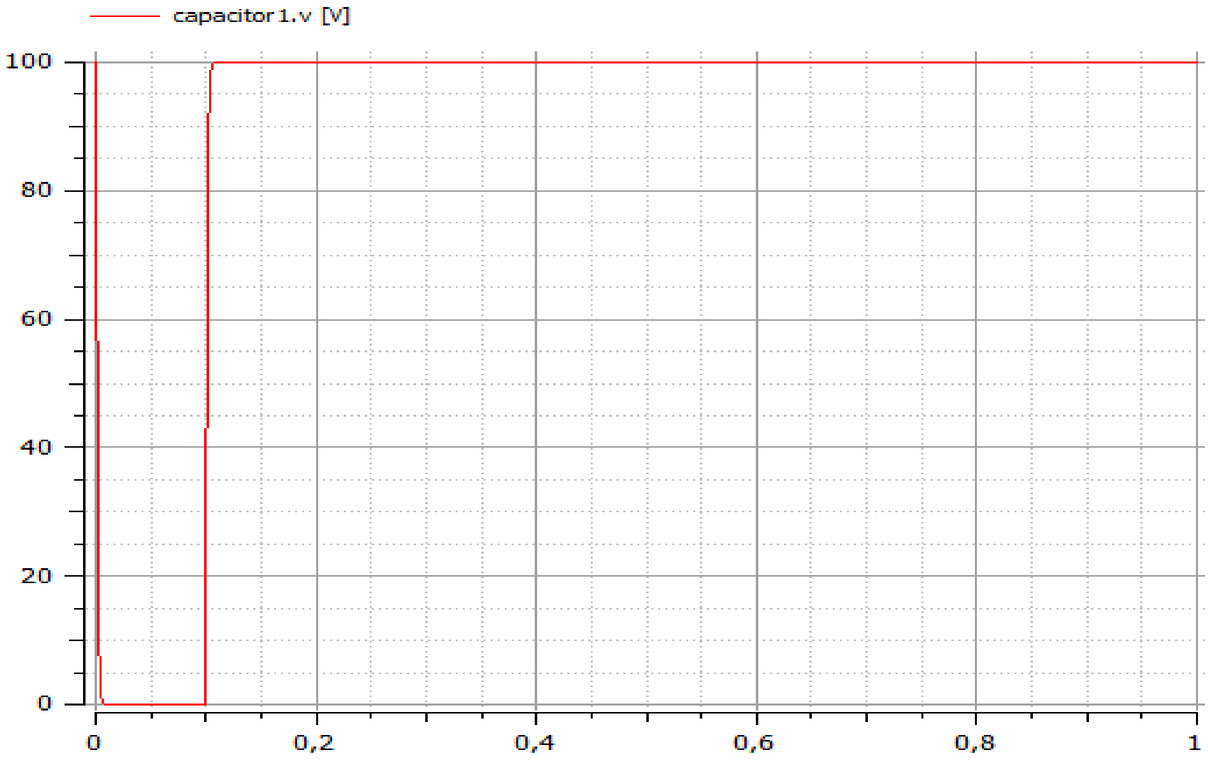
ii. Observa-se a mesma diferença analisada na mudança *i*. Isso ocorre devido à constante do tempo de um circuito RC, que influencia o tempo de carga e descarga devido à presença de um termo nas equações que descrevem estes processos. Portanto, tanto a variação da resistância quanto da capacitância mudam igualmente o tempo para o sistema atingir um novo equilíbrio.

Figura 16: Tensões dos capacitores pelo tempo - Alterando a capacitância



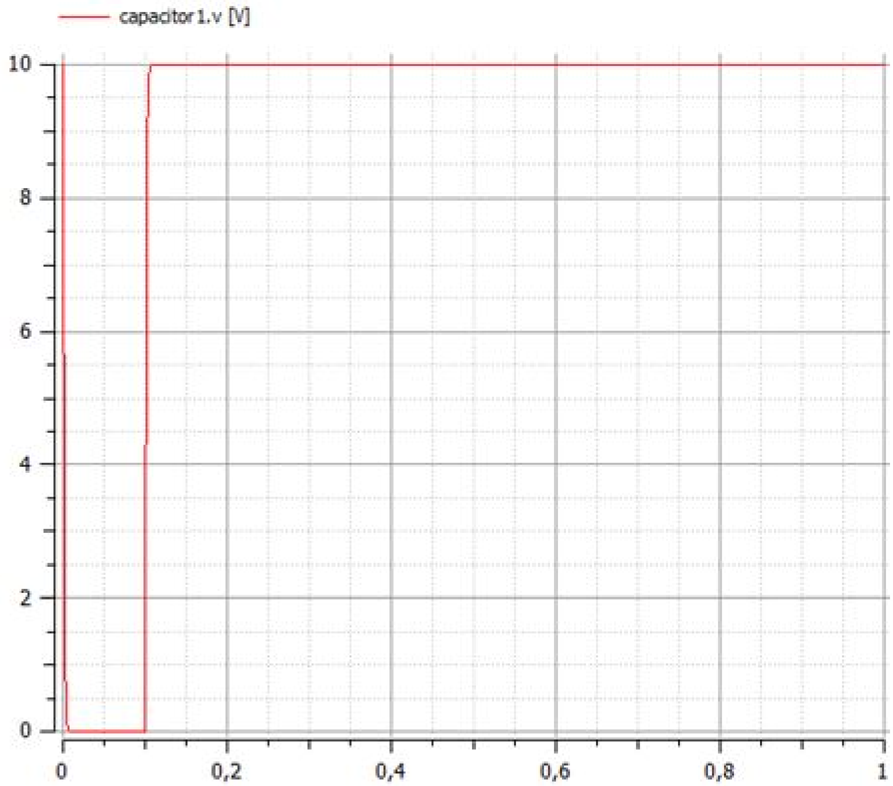
iii. As alterações em Vo só alteram o tamanho do patamar no gráfico de tensão.

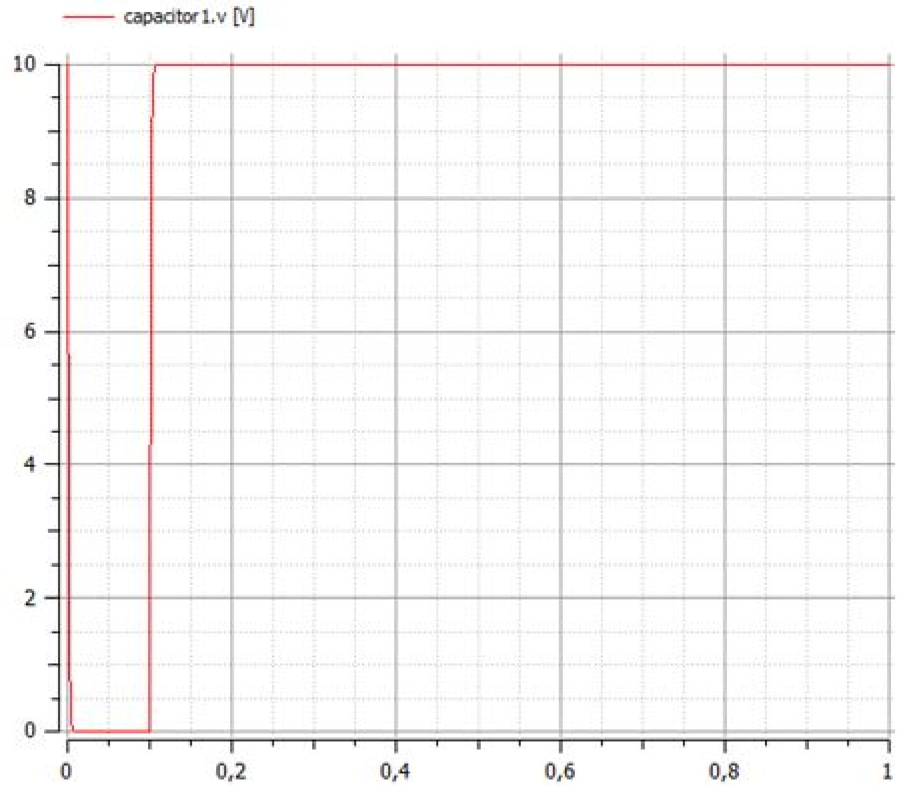
Figura 17: Tensões dos capacitores pelo tempo - Alterando V_o



e)

Simulou-se a dinâmica do circuito com as seguintes condições: $V_0 = 10V$ e $f_0 = 10Hz$. Obteve-se as seguintes respostas gráficas e o seguinte código:


capacitor1.v [V]
10
8
6
4
2
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1


capacitor1.v [V]
10
8
6
4
2
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1