



Relatório 2

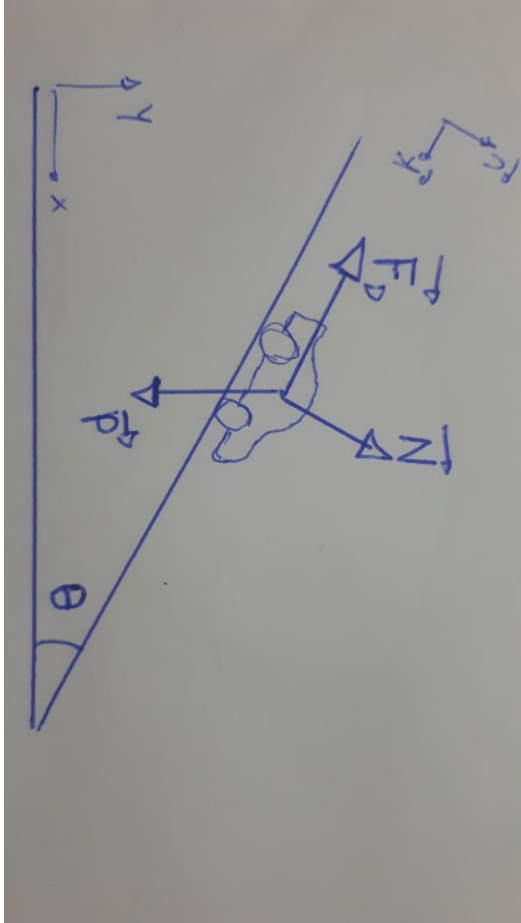
PME3201 - Laboratório de Simulações Numéricas

Lucas Hattori da Costa - 10335847
Gustavo Hott Carvalho - 10274360

19.set.2018
São Paulo-SP, Brasil

1. Questão 01

1.1 Letra A



1.2 Letra B

A partir do diagrama de corpo livre (DCL) representado no item anterior, podemos escrever a seguinte equação, usando a 2ª Lei de Newton para o eixo x :

$$m \cdot \ddot{x} = mg \sin(\theta) - \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot C_D \cdot A \cdot v^2 \cdot \hat{v}$$
$$\ddot{x} = g \sin(\theta) - \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot C_D \cdot A \cdot \dot{x}^2 \cdot \hat{x}}{m}$$

1.3 Letra C

Os parâmetros necessários ao problema são:

m : Massa do carrinho, estimada em 33 gramas

C_D : Coeficiente de arrasto, estimada em 0.3

θ : Ângulo do plano inclinado, estimado em $\frac{\pi}{6}$

A : Área da seção transversal do carrinho, estimada em $3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

1.4 Letra D

Temos as seguintes equações:

$$\frac{dv}{dt} = \ddot{x} = g \sin(\theta) - \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot C_D \cdot A \cdot \dot{x}^2 \cdot \hat{x}}{m} \quad (1.1)$$

$$\frac{ds}{dt} = \dot{x} \quad (1.2)$$

A partir de (1.1) e de (1.2) obtemos:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{g \sin(\theta)}{\dot{x}} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot C_D \cdot A \cdot \dot{x} \cdot \hat{x}}{m} \quad (1.3)$$

A equação (1.3) representa o plano de fase que pode ser esboçado da seguinte forma:

1.5 Letra E

Temos que $v(t) = V_h(t) + V_p(t)$, onde $V_h(t)$ representa a solução homogênea da equação e $V_p(t)$ representa a solução particular.

Resolvendo primeiramente a solução homogênea:

$$\frac{dV_h}{dt} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot C_D \cdot A \cdot \dot{x}^2 \cdot \hat{x}}{m} \longrightarrow \frac{dv}{v^2} = \frac{-\rho_a \cdot C_D \cdot A}{m}$$

Integrando ambos os lados:

$$\frac{-1}{v} = -\rho_a \cdot C_D \cdot A \cdot t + K_1 \implies v = (\rho_a \cdot C_D \cdot A \cdot t + K_1)^{-1} \quad (1.4)$$

Onde K_1 é uma constante de integração. Podemos descobrir seu valor fazendo $v(0) = 0$ o que leva a $K_1 = v(0)^{-1}$

Partindo para a solução particular, tomamos um ponto onde $V_p = B$ onde B é uma constante:

$$0 = mg \sin(\theta) - \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot C_D \cdot A \cdot \dot{B}^2$$
$$B = \sqrt{\frac{2mg \sin(\theta)}{\rho_a \cdot C_D \cdot A}} \quad (1.5)$$

A solução geral é obtida a partir da soma de (1.4) e (1.5), que resulta em:

$$V(t) = (\rho_a \cdot C_D \cdot A \cdot t + K_1)^{-1} + B$$

Que, por fim, leva a solução analítica:

$$V(t) = (\rho_a \cdot C_D \cdot A \cdot t + K_1)^{-1} + \sqrt{\frac{2mg \sin(\theta)}{\rho_a \cdot C_D \cdot A}} \quad (1.6)$$

Integrando (1.6):

$$X(t) = \frac{\ln(\rho_a \cdot C_D \cdot A \cdot t + K_1)}{\rho_a \cdot C_D \cdot A} + t \cdot \sqrt{\frac{2mg \sin(\theta)}{\rho_a \cdot C_D \cdot A}} + K_2 \quad (1.7)$$

Podemos descobrir K_2 usando que $X(0) = 0$ o que leva a $K_2 = -\ln(K_1)$.

2. Questão 2

As condições iniciais das questões seguintes estão representadas abaixo.

// Condições iniciais

s0=0;

vs0=1;

S0=[s0,vs0];

g=9.78;

m=0.033;

c=0.01;

t0=0;

tf=5;

teta=(pi)/6;

ro=1.2;

Cd=0.3;

A=0.0003;

// Passo de integração

h=0.5;

dt=h;

t=t0:dt:tf;

2.1 Letra A

O algoritmo está representado a seguir:

// Método de Euler Explícito

final=length(t)-1;

```

Evs(1)=vs0;
Es(1)=s0;
Et(1)=t0;
for i=1:final
    Evs(i+1)=Evs(i)+(g*sin(teta)-(Evs(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))*(dt);
    Et(i+1)= dt +Et(i);
    Es(i+1)=Es(i)+(Evs(i))*(dt);
end

```

2.2 Letra B

O algoritmo desenvolvido foi o seguinte:

```

function dS=f(t,S)
    ds1=S(2);
    ds2=g*sin(teta)-(S(2)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m);
    dS=[ds1;ds2];
endfunction
// Método de Euler Implícito
final=length(t)-1;
Evs(1)=vs0;
Es(1)=s0;
Et(1)=t0;
for i=1:final
    Evs(i+1)=Evs(i)/(1+(dt)*(g*sin(teta)-(Evs(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m)));
    Et(i+1)= dt +Et(i);
    Es(i+1)=Es(i)+(Evs(i))*(dt);
end

```

2.3 Letra C

O algoritmo desenvolvido foi o seguinte:

```

// Passo de integração
h=0.5;
dt=h;
t=t0:dt:tf;
function dS=f(t,S)
    ds1=S(2);
    ds2=g*sin(teta)-(S(2)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m);
    dS=[ds1;ds2];
endfunction
// Método de Heun
final=length(t)-1;
Evs(1)=vs0;
Es(1)=s0;

```

```

Et(1)=t0;
Evs2(1)=0+(g*sin(teta)-(vs0**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))*(dt);
for i=1:final
    Evs2(i)=Evs(i)+(g*sin(teta)-(Evs(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))*(dt);
    Evs(i+1)=Evs(i)+(dt/2)*((g*sin(teta)-(Evs(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))+(g*sin(teta)-
(Evs2(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m)));
    Et(i+1)= dt +Et(i);
    Es(i+1)=Es(i)+(Evs(i)+Evs2(i))*(dt/2);
end

```

2.4 Letra D

O algoritmo desenvolvido foi o seguinte:

```

// Passo de integração
h=0.5;
dt=h;
t=t0:dt:tf;
function dS=f(t,S)
    ds1=S(2);
    ds2=g*sin(teta)-(S(2)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m);
    dS=[ds1;ds2];
endfunction
// Método de Euler melhorado
final=length(t)-1;
Evs(1)=vs0;
Es(1)=s0;
Et(1)=t0;
Evs2(1)=0-(g*sin(teta)-(vs0**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))*(dt/2);
for i=1:final
    Evs2(i)=Evs(i)-(g*sin(teta)-(Evs(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))*(dt/2);
    Evs(i+1)=Evs(i)+(g*sin(teta)-(Evs2(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))*(dt);
    Et(i+1)= dt +Et(i);
    Es(i+1)=Es(i)+(g*sin(teta)-(Evs2(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))*(dt);
end

```

2.5 Letra E

O algoritmo desenvolvido foi o seguinte:

```

// Passo de integração
h=0.5;
dt=h;
t=t0:dt:tf;
function dS=f(t,S)
    ds1=S(2);

```

```

ds2=g*sin(teta)-(S(2)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m);
dS=[ds1;ds2];
endfunction
// Método de Runge-Kutta de segunda ordem
final=length(t)-1;
Evs(1)=vs0;
Es(1)=s0;
Et(1)=t0;
Evs2(1)=0+(g*sin(teta)-(vs0**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))*(dt);
Evs3(1)=0+(g*sin(teta)-(Evs2(1)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))*(dt);
for i=1:final
    Evs2(i)=Evs(i)-(g*sin(teta)-(Evs(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))*(dt/2);
    Evs3(i)=Evs(i)-(g*sin(teta)-(Evs2(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m))*(dt/2);
    Evs(i+1)=Evs(i)/(1+(dt)*(g*sin(teta)-(Evs(i)**2)*(ro)*(Cd)*(A)*(0.5)/(m)));
    Et(i+1)= dt +Et(i);
    Es(i+1)=Es(i)+(Evs(i))*(dt);
end

```

2.6 Letra F

Gráfico da posição do carrinho pelo tempo pelo método Euler Explícito

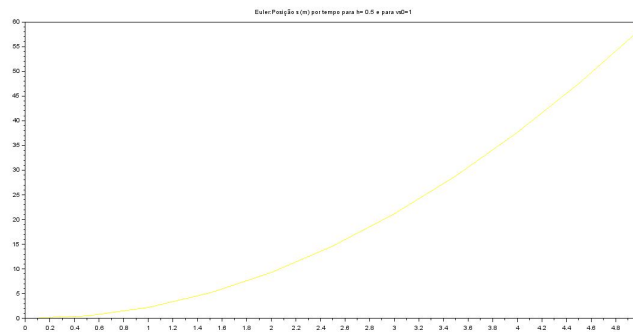


Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo pelo método Euler Explícito

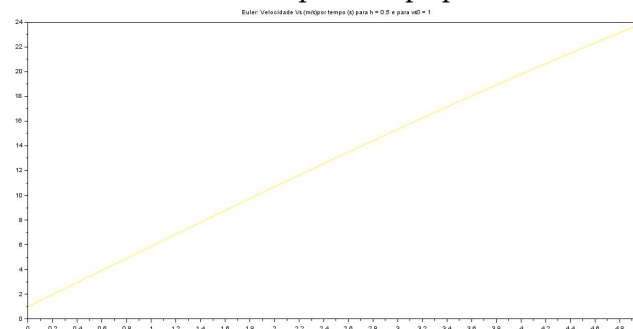


Gráfico da posição do carrinho pelo tempo pelo método Euler melhorado.

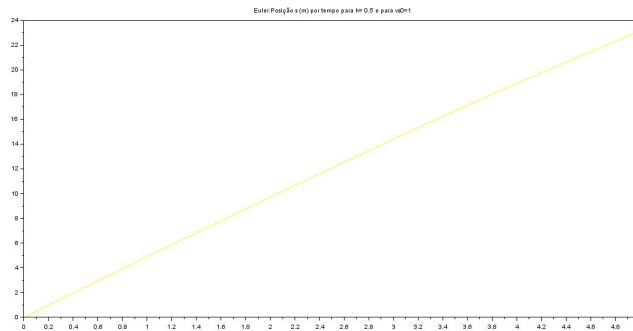


Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo pelo método Euler melhorado

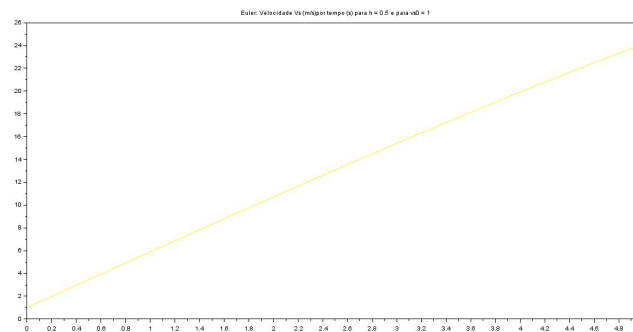


Gráfico da posição do carrinho pelo tempo pelo método Heun

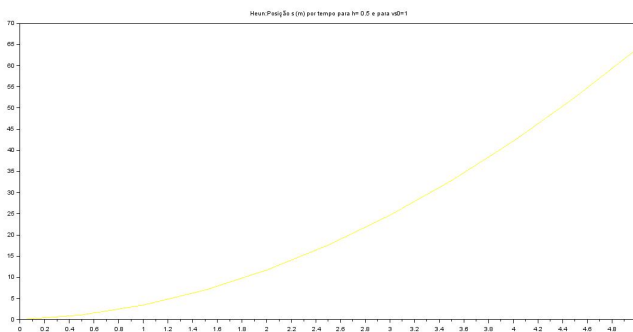
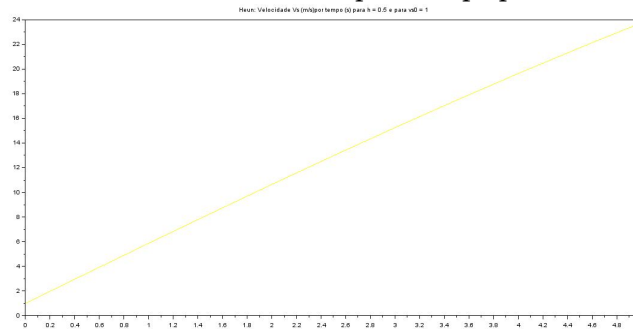


Gráfico da velocidade do carrinho pelo tempo pelo método Heun



3. Questão 3

3.1 Letra A

Resolve-se utilizando o seguinte algoritmo:

```
// Método de Adams  
S=ode("adams",S0,t0,t,f);  
plot(t,S(1,:), 'y');
```

3.2 Letra B

Resolve-se utilizando o seguinte algoritmo:

```
// Método de Runge Kutta de quarta ordem  
S=ode("rk4",S0,t0,t,f);  
plot(t,S(1,:), 'y');
```

3.3 Letra C

Resolve-se utilizando o seguinte algoritmo:

```
// Método de Runge Kutta de Fehlberg de ordens 4 e 5  
S=ode("rkf45",S0,t0,t,f);  
plot(t,S(1,:), 'y');
```

4. Questão 4

4.1 Letra A

Os métodos de Euler Explícito e Implícito, Heun, Euler Melhorado e Runge-Kutta são, portanto, extensões da série de Taylor. Assim, temos que o erro local de cada um destes métodos terá a ordem do termo seguinte da série de Taylor e o erro global terá a ordem do último termo do método. Portanto, para os métodos de Euler Explícito e Implícito a ordem do erro local será $O(2)$ e a ordem do erro global será $O(1)$; para os métodos de Heun, Euler Melhorado e Runge-Kutta de segunda ordem a ordem do erro local será $O(3)$ e a ordem do erro global será $O(2)$; para o método de Runge-Kutta de quarta ordem a ordem do erro local será $O(5)$ e a ordem do erro global será $O(4)$, os quais são também os erros local e global do método de Adams; para o método de Runge-Kutta de Fehlberg a ordem do erro local será $O(6)$ e a ordem do erro global será $O(5)$.

5. Questão 5

5.1 Letra A

Analisando as convergências entre os dois tipos de métodos de Euler (explícito e implícito) temos que, para n interações, vale:

$$v_x(t + nh) = v_x(t) \cdot \left(1 - \frac{h}{\tau}\right)^n \quad (5.8)$$

$$v_x(t + nh) = v_x(t) \cdot \left(1 + \frac{h}{\tau}\right)^n \quad (5.9)$$

Onde (5.8) se refere ao método explícito e (5.9) se refere ao método implícito.

5.2 Letra C

Com $n \rightarrow \infty$, temos no método implícito que $v_x \rightarrow 0$ para qualquer passo a ser adotado, sendo este portanto estável. Já no método explícito, para valores de $h > \tau$ cria-se um caráter oscilatório e se $h > 2\tau$ (igual para os métodos de Heun, Euler Melhorado e RungeKutta de segunda ordem), v_x terá caráter oscilatório e de módulo crescente. Caso $h < \tau$, então $v_x \rightarrow 0$. Assim, podemos concluir que o método explícito de Euler é instável para $h > \tau$.

