

Modelagem e simulação do movimento de um ponto material vinculado a uma curva plana

1. Introdução

Nesta atividade, analisaremos o movimento de uma pequena esfera M no interior de um tubo fixo e isento de atrito.

Admitiremos que a esfera seja uma partícula material e que o tubo seja um objeto unidimensional cuja forma se assimile à de uma curva plana e fixa no espaço e representada pela equação

$$z = f(s),$$

sendo s a abscissa curvilínea medida ao longo de e .

(Nas condições expostas acima, o tubo deve ser interpretado como um vínculo bidirecional independente do tempo.)

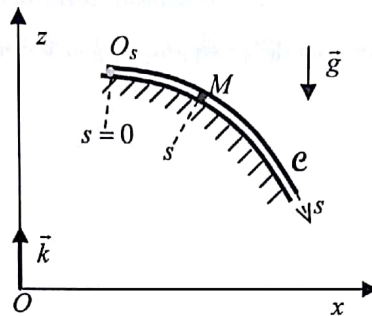


Figura 1. Ponto móvel sobre curva fixa.

Fixaremos, ainda, os valores de algumas das variáveis físicas e geométricas do problema, valores esses que deverão ser utilizados sempre que se fizerem necessários. São eles:

- raio da esfera: $r = 1 \times 10^{-3} m$
- densidade do material (aço) da esfera: $\rho = 7850 kg / m^3$
- aceleração da gravidade: $g = 9,80 m / s^2$

2. Modelagem matemática

Adotaremos a abordagem lagrangeana para obter as equações diferenciais do movimento. Utilizaremos ainda o Teorema da Energia Cinética com o propósito de obter informações adicionais que facilitem a análise do problema.

Ao final, exploraremos esse conjunto de equações, aplicando-as a algumas curvas vinculares específicas.

2.1 Equações de Lagrange

A energia cinética de M , é dada por:

$$T = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 \quad (1)$$

Sendo

$$z = f(s) \quad (2)$$

a equação vincular algébrica que restringe o movimento de M , o trabalho elementar realizado pela força-peso em um deslocamento virtual admissível

$$\delta z = \frac{\partial f}{\partial s} \delta s = f'(s) \delta s \quad (3)$$

é dado por:

$$\delta \tau = -mg \vec{k} \cdot \delta \vec{z} = -mg f'(s) \delta s \quad (4)$$

O trabalho virtual calculado acima pode ser expresso como:

$$\delta \tau = Q_s \delta s \quad (5)$$

em que

$$Q_s = -mg f'(s) \quad (6)$$

é a força generalizada atuante ao longo da coordenada generalizada s .

Calculando-se os termos da equação de Lagrange para a coordenada s , tem-se:

- $\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}$
- $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = m\ddot{s}$
- $\frac{\partial T}{\partial s} = 0$
- $Q_s = -mg f'(s)$

Portanto, o movimento de M é regido pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{s} \end{bmatrix} = X, \quad dX = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \ddot{s} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ou seja:

$$m\ddot{s} = -mg f'(s) \Rightarrow \ddot{s} + g f'(s) = 0 \quad (8)$$

A equação diferencial de segunda ordem acima deverá ser transformada em um par de equações diferenciais de primeira ordem para que se possam aplicar os métodos numéricos de integração requeridos nas etapas de *simulação do movimento*.

2.2 Aplicação do Teorema da Energia Cinética

Esse teorema fornece uma integral primeira, a partir da qual poderemos identificar características do problema úteis à análise.

Admitindo-se que, no instante inicial $t(0)=0$, a posição e a velocidade de M sejam, respectivamente,

$$s(0) = s_0$$

$$\dot{s}(0) = \dot{s}_0$$

podemos calcular a variação da energia cinética e o trabalho realizado desde o instante inicial até um instante t arbitrário:

$$\Delta T = T(t) - T(0) = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 - \dot{s}_0^2)$$

$$\tau_0' = -mg \int_{s_0}^s f'(s) ds = -mgf(s) \Big|_{s_0}^s = -mg[f(s) - f(s_0)]$$

Assim, o Teorema da Energia Cinética fornece

$$\frac{1}{2} m(\dot{s}^2 - \dot{s}_0^2) = -mg[f(s) - f(s_0)] \Rightarrow \dot{s}^2 = 2\dot{s}_0^2 + 2gf(s_0) - 2gf(s) = 2(\dot{s}_0^2 + gz_0) - 2gf(s) \quad (9)$$

Agrupando-se os termos constantes na forma

$$h = 2[\dot{s}_0^2 + gz_0], \quad (10)$$

a equação diferencial (9) pode ser escrita como:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = h - 2gf(s) \quad (11)$$

Separando-se os termos dependentes do tempo e da coordenada curvilínea, obtém-se:

$$dt = \pm \frac{ds}{\sqrt{h - 2gf(s)}},$$

ou seja:

$$t = \pm \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{h - 2gf(s)}} \quad (12)$$

Observe-se que a equação anterior fornece o tempo requerido para que a partícula se desloque sobre a curva c desde a abscissa s_0 até a abscissa s . Os sinais '+' ou '-' devem ser adotados em percursos segundo valores crescentes ou decrescentes de s , respectivamente.

Dependendo da forma da curva, ou seja, da função

$$z = f(s),$$

a integral

$$\int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{h - 2gf(s)}}$$

poderá ser determinada de forma analítica ou somente pela via numérica.

2.3 Seleção de curvas vinculares

Analisaremos o movimento do ponto material considerando as equações (8) e (12) aplicadas às seguintes curvas vinculares:

- reta
- circunferência
- cicloide

2.3.1 Ponto material movendo-se no interior de tubo reto

Nesse caso (vide Fig.3), a função

$$z = f(s)$$

pode ser representada como

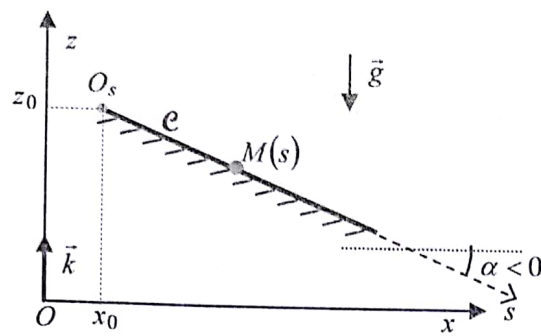


Figura 3: Ponto material vinculado a reta fixa.

$$\frac{z - z_0}{s - s_0} = \sin \alpha \Rightarrow z = z_0 + \sin \alpha (s - s_0) \quad (13)$$

e a equação (8) adquire a forma:

$$\ddot{s} + g \sin \alpha = 0 \Rightarrow \ddot{s} + g \sin \alpha = 0,$$

$$V = m g (z - z_0) = m g (s - s_0) \sin \alpha \quad (14)$$

de modo que:

$$\dot{s} - \dot{s}_0 = (g \sin \alpha) t \Rightarrow s = s_0 + \dot{s}_0 t + \frac{1}{2} (g \sin \alpha) t^2,$$

ou seja, o ponto descreve um movimento retilíneo uniformemente acelerado, conforme o esperado.

I. TAREFA 1

- Represente a equação diferencial de segunda ordem $\ddot{s} + g \sin \alpha = 0$ no espaço de estados.
- Considere que o ponto M esteja vinculado a uma pista reta de extensão infinita cuja origem O_s da abscissa curvilínea s se situe na posição $(x_{O_s}, z_{O_s}) = (1, 2)$. Adote as seguintes iniciais: 1) $\alpha = 0, s_0 = 1$ e $\dot{s}_0 = 0$; 2) $\alpha = 0, s_0 = 1$ e $\dot{s}_0 = 1$; 3) $\alpha = \pi/6, s_0 = 1, \dot{s}_0 = -1$; 4) $\alpha = \pi/36, s_0 = 1, \dot{s}_0 = 0$; 5) $\alpha = \pi/36, s_0 = 1, \dot{s}_0 = 5$; 6) $\alpha = \pi/2, s_0 = 1, \dot{s}_0 = 10$.
- Para cada uma das condições iniciais indicadas no item (b), simule o movimento de M por um período de 10s e, com auxílio da função `plot`, construa os seguintes gráficos: 1) $s = s(t)$; 2) $\dot{s} = \dot{s}(t)$; 3) $\ddot{s} = \ddot{s}(t)$; 4) $T = T(t)$; 5) $V = V(t)$; 6) $E(t) = T(t) + V(t)$; 7) $\dot{s} = \dot{s}(s)$.
- Determine a expressão do módulo da força normal \vec{N} exercida pela pista sobre o ponto material M e construa, para cada uma das condições do item b, os gráficos de $N = |\vec{N}(t)|$.
- Para cada uma das condições iniciais indicadas no item (b), desenhe a trajetória de M utilizando a função `comet`, do Scilab.
- Para os casos pertinentes do item (d), determine, analiticamente, os instantes em que ocorre reversão do sentido do movimento, comparando esses valores com os obtidos pelo método numérico.

2.3.2. Ponto material movendo-se no interior de tubo circular

Nesse caso (vide Fig.4), é conveniente adotar θ como coordenada generalizada, ao invés de s , coordenada natural para as situações em que a curva vincular possui forma absolutamente arbitrária.

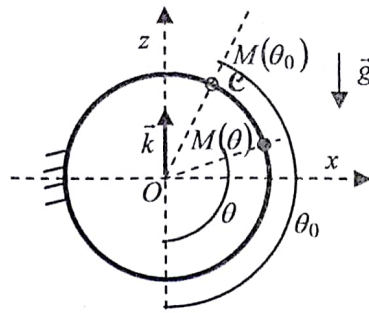


Figura 4. Ponto material vinculado a circunferência fixa.

Aplicando-se o método de Lagrange a esse problema, tem-se:

$$T = \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt} (s(\theta)) \right]^2 = \frac{1}{2} m [\dot{s}(\theta)]^2 = \frac{1}{2} m [r\dot{\theta}]^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = mgr(1 - \cos \theta)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - mgr(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + mgr \cos \theta - mgr$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m r^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \theta \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{1}{r} \sin \theta \end{bmatrix}$$

Logo, a equação do movimento, descrita em função da coordenada generalizada θ , adquire a forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \sin \theta = 0 \quad (15)$$

O Teorema da Energia Cinética permite evidenciar alguns aspectos do problema bastante úteis à análise. A variação da energia cinética entre o instante inicial e um instante genérico t , é dada por:

$$\frac{1}{2} m [v(\theta)]^2 - \frac{1}{2} m [v(\theta_0)]^2 = mgz(\theta_0) - mgz(\theta)$$

ou seja:

$$[v(\theta)]^2 = [v(\theta_0)]^2 + 2gz(\theta_0) - 2gz(\theta) = 2g \left\{ \frac{[v(\theta_0)]^2}{2g} + z(\theta_0) - z(\theta) \right\} \quad (16)$$

Para facilitar a análise, definiremos o parâmetro

$$a = \frac{[v(\theta_0)]^2}{2g} + z(\theta_0) = \frac{r^2 (\dot{\theta}_0)^2}{2g} + r \sin \theta_0, \quad (17)$$

de modo a que a equação (16) adquira a forma:

$$[v(\theta)]^2 = 2g[a - z(\theta)] \Rightarrow r^2 \dot{\theta}^2 = 2g[a - r \sin \theta] \quad (18)$$

Consideremos, agora, a reta

$$z = a$$

e analisemos os quatro casos ilustrados na Fig.5.

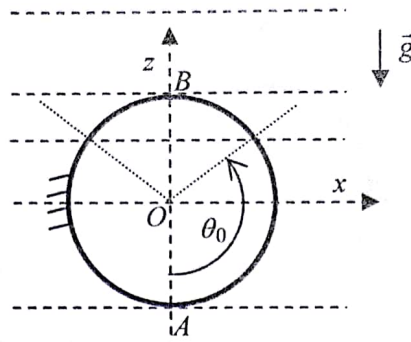


Figura 5. Movimentos característicos de um ponto material vinculado a uma circunferência.

(i) $z = -r$

Nesta situação singular, em que $\dot{\theta}_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$, M mantém-se permanentemente no ponto de equilíbrio estável A , correspondente a $\theta_0 = 0$.

(ii) $-r < z < r$

Nesta situação, o ponto M realiza movimento oscilatório e periódico entre as posições angulares extremas $\theta = \theta_0$ e $\theta = -\theta_0$.

iii. $z = r$

Se $\dot{\theta}_0 = 0$ e $\theta_0 = \pi$, M mantém-se no ponto de equilíbrio instável B , correspondente a $\theta_0 = \pi$. No entanto, se $\dot{\theta}_0 \neq 0$ e $\theta_0 \neq \pi$, mas $z = r$, então M move-se tendendo, assintoticamente, ao ponto de equilíbrio instável B , sem jamais atingi-lo.

iv. $z > r$

Nesta situação, o ponto M realiza movimento rotativo contínuo e de mesmo sentido ao longo do perímetro do círculo.

Retornando, agora, à equação (18), ou seja,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{r^2} [a - r \sin \theta],$$

obtemos a função $t = t(\theta)$ através de uma simples integração, ou seja,

$$t = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{rd\theta}{\sqrt{2g(a - r \sin \theta)}}, \quad (19)$$

em que o sinal '+' deve ser usado quando a trajetória for percorrida no sentido dos arcos crescentes e o sinal '-' em caso contrário.

Embora essa equação possua solução analítica¹, é mais simples obter a curva $t = t(\theta)$ por meio da aplicação de métodos de integração numérica à integral

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{rd\theta}{\sqrt{2g(a - r \sin \theta)}} \quad (20)$$

¹ A solução analítica dessa equação pode ser obtida mediante a utilização de integrais elípticas de Jacobi, assunto que foge ao escopo desta disciplina.

II. TAREFA 2

- (a) Represente em espaço de estados a equação diferencial de segunda ordem (15).
- (b) Considere que o ponto M esteja vinculado a uma pista circular de raio $r=1m$ e adote as seguintes condições iniciais: 1) $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$; 2) $\theta_0 = -\pi/180$ e $\dot{\theta}_0 = 0$; 3) $\theta_0 = \pi/4$ e $\dot{\theta}_0 = 0$; 4) $\theta_0 = 5\pi/6$ e $\dot{\theta}_0 = 0$; 5) $\theta_0 = \pi$ e $\dot{\theta}_0 = 0$; 6) $\theta_0 = \pi$ e $\dot{\theta}_0 = 1 \text{ rad/s}$; 7) $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = \omega_0$ (ω_0 incógnita) tal que, após um tempo tendendo a infinito, M se aproxime assintoticamente da posição de equilíbrio instável.
- (c) Para cada uma das condições iniciais indicadas no item (b), simule o movimento de M por um período de 10s e, com auxílio da função *plot*, construa os seguintes gráficos: 1) $\theta = \theta(t)$; 2) $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$; 3) $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(t)$; 4) $T = T(t)$; 5) $V = V(t)$; 6) $E(t) = T(t) + V(t)$; 7) $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$.
- (d) Investigue o efeito do valor do intervalo de integração sobre os resultados da simulação dos casos b-5 e b-7.
- (e) Para cada uma das condições iniciais indicadas no item (b), utilize a equação (19) para construir a curva $t = t(\theta)$ e a sua inversa $\theta = \theta(t)$. Utilize, para tanto, a função *integrate*, do Scilab.
- (f) Para cada uma das condições iniciais indicadas no item (b), utilize apropriadamente a equação (19) para determinar o período do movimento.
- (g) Sendo Π o período do movimento, construa o gráfico $\Pi = \Pi(\theta_0)$.
- (h) A partir do diagrama de corpo livre, obtenha a expressão geral do módulo da força normal $N = |N(\theta)|$ exercida pela pista sobre M (lembre-se de que a aceleração normal do ponto M é dada por $a_n = \dot{s}^2/r = r\dot{\theta}^2$). Em seguida, construa os gráficos de $N = |N(\theta)|$ para os casos b-2, b-3 e b-4.
- (i) Construa o retrato do espaço de fases do movimento, ou seja, o mapa $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$ abrangendo variadas condições iniciais $\theta_0, \dot{\theta}_0$ (vide exemplo mostrado na Fig.6).
- (j) Tomando como referência o retrato do espaço de fases gerado no item (h), descreva o movimento do ponto M .

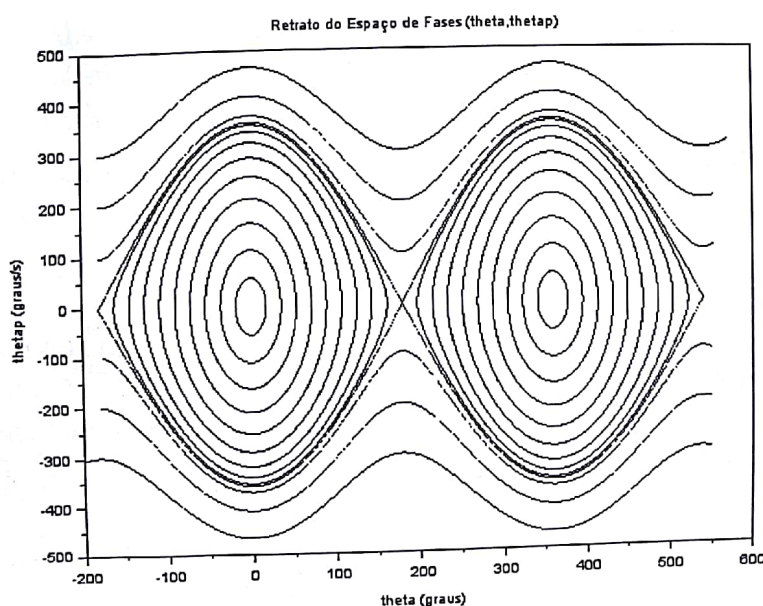


Figura 6. Retrato do plano de fases.

- para $M \equiv O$, $\theta = 0$;
- para $M \equiv A$, $\theta = -\pi$;
- para $M \equiv B$, $\theta = \pi$.

Na forma vetorial, as equações (27) podem ser escritas como:

$$\vec{M}(\theta) = x_M \vec{i} + z_M \vec{k} = (r\theta - r \sin \theta) \vec{i} + (r - r \cos \theta) \vec{k} \quad (28)$$

A partir da equação vetorial (28) podem ser determinadas características geométricas relevantes da cicloide.

O comprimento do arco curvilíneo s , medido entre as posições angulares θ_0 e θ , é dado por:

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} |\vec{M}'(\theta)| d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{(r - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} d\theta = r \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{2 - 2 \cos \theta} d\theta = 4r \left(\cos \frac{\theta_0}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (29)$$

em que a apóstrofe representa o operador $d/d\theta$.

O raio de curvatura, correspondente à posição angular θ , se obtém de:

$$\rho(\theta) = \frac{[x'_M(\theta)]^2 + [z'_M(\theta)]^2}{|\vec{M}'(\theta) \wedge \vec{M}''(\theta)|}^{3/2} \quad (30)$$

III. TAREFA 3

- Represente em espaço de estados a equação diferencial de segunda ordem (24).
- Considere que o ponto M esteja vinculado a uma pista em forma de cicloide, gerada por uma circunferência de raio $r = 1m$ e adote as seguintes condições iniciais: 1) $s_0 = 0$ e $\dot{s}_0 = 0$; 2) $s_0 = -r/10$ e $\dot{s}_0 = 0$; 3) $s_0 = -4r$ e $\dot{s}_0 = 0$; 4) $s_0 = -4r$ e $\dot{s}_0 = 1$.
- Para cada uma das condições iniciais indicadas no item (b), simule o movimento de M por um período de 10s e, com auxílio da função *plot*, construa os seguintes gráficos: 1) $s = s(t)$; 2) $\dot{s} = \dot{s}(t)$; 3) $\ddot{s} = \ddot{s}(t)$; 4) $T = T(t)$; 5) $V = V(t)$; 6) $E(t) = T(t) + V(t)$; 7) $\dot{s} = \dot{s}(s)$. Em todos esses casos, verifique a possibilidade de o ponto M vir a abandonar a pista e, lembrando-se de que o perímetro de uma cicloide é $\lambda = 8r$, interrompa a simulação (utilize a opção '*roots*', da função '*ode*') caso isso venha a acontecer.
- Determine analiticamente o período do movimento de M e compare esse valor com o resultante das simulações dos casos b-2 a b-4.
- Considere a simulação do caso b-3. Determine o tempo $t_{cicloide}^{AO}$ gasto por M para mover-se sobre a cicloide entre os pontos A e O indicados na Fig.7. Compare esse tempo com o que M gastaria caso se movesse sobre a reta AB partindo das mesmas condições iniciais.
- Opcional:** Utilizando a função *comet*, do *Scilab*, desenhe a trajetória descrita pelo ponto M para os casos b-2 e b-3. Sugere-se o seguinte método: i) a partir da função $s = s(t)$ e da equação (29), determine a função $\theta = \theta(t)$ (analise o sinal!); ii) utilizando $\theta = \theta(t)$ nas equações (27), determine as funções $x = x(t)$ e $z = z(t)$.
- Opcional:** Determine a expressão do módulo da força normal \vec{N} exercida pela pista sobre o ponto material M em função do tempo, ou seja, a função $N = |\vec{N}(s(t))|$. Obtenha os respectivos gráficos para os casos b-2 e b-3. Sugestão: i) encontre a expressão geral de N com auxílio do diagrama de corpo livre; ii) utilize as funções $x = x(t)$ e $z = z(t)$ obtidas no item (e) para calcular

$\rho = \rho(t)$; iii) lembrando que a aceleração normal é dada por $a_n(t) = \dot{s}^2(t)/\rho(s(t))$, utilize-a na expressão geral de N para obter $N = |\tilde{N}(s(t))|$.

- (h) **Opcional:** Construa a equação diferencial do movimento de M para as situações em que esse ponto se desvincula da cicloide.
- (i) **Opcional:** Simule o movimento completo do ponto M para as condições iniciais do item b-4 e construa os gráficos correspondentes solicitados no item c. Para tanto, recomendam-se um dos dois procedimentos indicados a seguir: i) Utilizando a opção 'roots' da função *ode* do *Scilab*, integre as equações diferenciais do movimento sobre a cicloide enquanto M se mantém vinculado a essa curva. A partir do instante em que o vínculo for rompido, inicie um novo processo de integração numérica utilizando as equações diferenciais que governam o movimento livre de M ; ii) Inclua na função que define as equações do espaço de estados um conjunto de comandos de desvio condicional (*if then else*) que modifica adequadamente as equações diferenciais quando M se desvincular da curva ou quando se vincular a ela. (O segundo procedimento é mais abrangente que o primeiro).

Bom trabalho !

Datas de entrega : 28/09 (até às 23:59h)

Enviar 1 único arquivo .pdf (texto de referência + 1 apêndice com código)
para flavio.martins@usp.br.

Critérios de avaliação:

- lógica: zero - todos os envios
- Nº de subtarefas corretamente realizadas
- Qualidade das análises
- Organização
- Qualidade do texto

