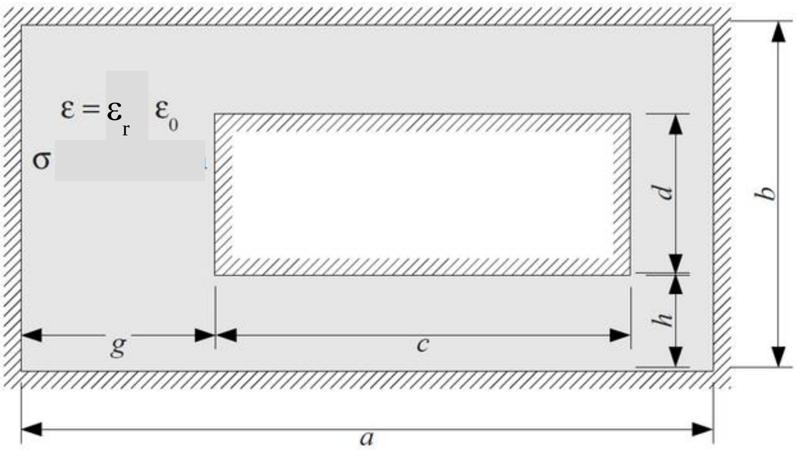
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

01/10/2019

**PTC-3213 - ELETROMAGNETISMO**
**1o. Exercício Computacional**
***Data máxima para entrega (online): 11 de outubro de 2019***

Determinar, utilizando o método das diferenças finitas[1] (bidimensional), a função potencial entre os condutores da figura ao lado.
Os valores das suas dimensões, assim como as propriedades físicas do problema, estão mostrados na tabela abaixo e deverão ser escolhidos de acordo com: (i) a sua turma de PTC-3213; (ii) os 3 últimos algarismos do seu número USP (nusp**1** é o *último* algarismo).




Este trabalho poderá ser realizado em grupos de no máximo **3** alunos (todos de uma mesma turma de PTC-3213) e, neste caso, o número USP do primeiro aluno, em ordem alfabética, deverá ser o utilizado para a escolha dos parâmetros. A dimensão $h$ é a mesma para todos e seu valor é determinado por: $h = (b-d)/2$.

| *a* (cm) | | *b* (cm) | *c* (cm) | | *d* (cm) | | *g* (cm) | | $\varepsilon_r$ | | $\sigma$ (mS/m) | | $\sigma_{dual}$ (mS/m) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Turma | | | nusp1 | | nusp2 | | nusp3 | | nusp1 | | nusp2 | | nusp3 | |
| Viviane | **11** | **5** | 0,1,2 | **3** | 0,1,2 | ***b*–4** | 0,1,2 | **2** | 0,1,2 | **2** | 0,1,2 | **2,5** | 0,1,2 | **3,0** |
| Leb | **10** | **6** | 3,4,5,6 | **4** | 3,4,5,6 | ***b*–3** | 3,4,5,6 | **3** | 3,4,5,6 | **2,5** | 3,4,5,6 | **3,0** | 3,4,5,6 | **3,5** |
| Juan | **10,5** | **7** | 7,8,9 | **5** | 7,8,9 | ***b*–2** | 7,8,9 | **4** | 7,8,9 | **3** | 7,8,9 | **3,5** | 7,8,9 | **4,0** |

O potencial do condutor interno deverá ser suposto igual a **100 V** e o do externo, igual a **0 V**. Após determinar os potenciais, os alunos deverão traçar as curvas equipotenciais (espaçadas de **10 V**) e as linhas de corrente, de forma a dividir a figura em quadrados curvilíneos (*Dica: utilize o valor numérico obtido para a resistência para determinar quantos tubos de corrente devem ser traçados*). Os valores da resistência e da capacitância (para 1 metro de espessura) entre os condutores deverão também ser determinados numericamente (NÃO USE OS QUADRADOS CURVILÍNEOS PARA ESSE FIM!).

Os alunos deverão entregar:

a) (1,0) a listagem Matlab do programa utilizado, em anexo, *destacando* as modificações efetuadas, e incluindo os dados faltantes (marcados com ?????);

b) (2,0) o mapa de quadrados curvilíneos (indicar na listagem com comentários);

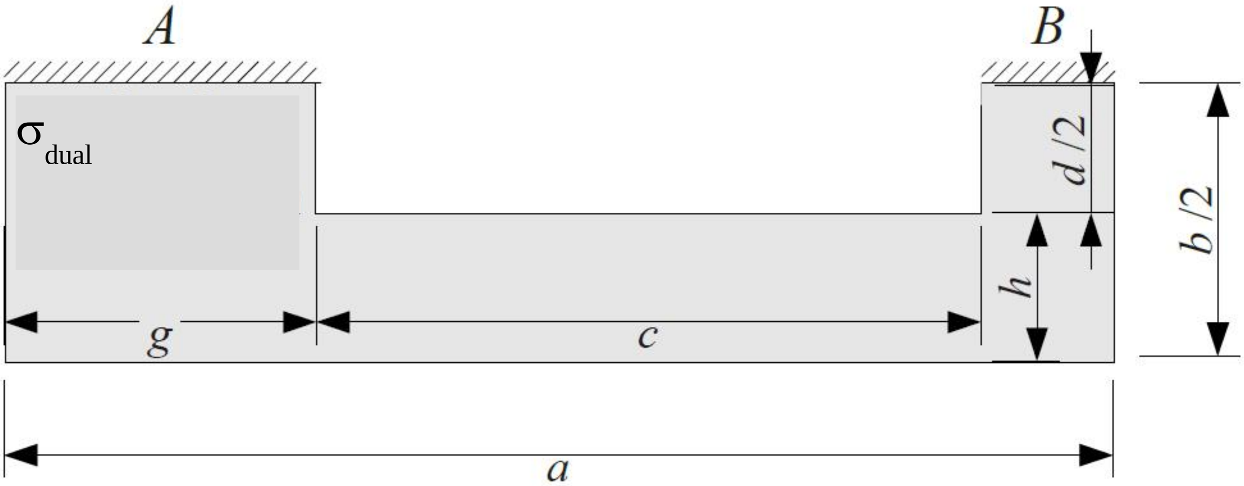
c) (1,0) o valor mínimo (negativo de maior módulo) da densidade superficial de carga sobre

1Vide livro texto do curso:"Eletromagnetismo" cap. 4.6

os condutores (indicar na listagem);

d) (2,0) Os valores da resistência $R$ e da capacitância $C$ entre os condutores, para uma profundidade de 1 m;

e) (1,0) O valor da resistência $\boldsymbol{R'}$ entre as placas condutoras, A e B, da figura abaixo (obtida *por dualidade* a partir de $R$, também para 1 metro de profundidade):




f) (3,0) Apresentação geral e análises. Seja conciso! Máximo de 2 páginas além da listagem, espaço 1,5, fonte Arial 10 pt. Cabeçalho com os dados dos integrantes do grupo em ordem alfabética, Turma e Data.

Execute o programa primeiramente com uma resolução de grade grosseira, e vá refinando aos poucos. Observe a evolução das iterações pelos gráficos gerados. Para isso, habilite as linhas de comando comentadas, que mostram o desenho da evolução dos potenciais com as iterações. Atenção: a execução dessas últimas figuras torna o processamento mais lento, mas permite visualizar e avaliar a progressão da solução e sua velocidade. Desabilite-a para resoluções de grade menores ($\Delta$<0,1 cm), se e quando já estiver seguro do resultado e desejar gerar a versão final. Use apenas as resoluções de grade indicadas na listagem!

Para visualizar o nível da discretização, habilite as linhas de código comentadas que geram as figuras de 1 a 5.

Analise também o efeito (convergência, resultado, etc) do "chute" inicial em cada caso: original e dual. *Comente seu impacto à luz das propriedades da Equação de Laplace*. Não deixe de tentar o valor '0'.

Não apresente todas as figuras auxiliares no documento final! Use-as apenas para a inspeção de seus resultados. Inclua somente as imagens e grandezas essenciais e relevantes.

***Os valores numéricos deverão apresentar erro inferior a 1% para serem considerados corretos!***

A entrega deste exercício valerá como um dos "testinhos" do curso, e uma das questões da 2ª prova versará sobre a execução e/ou análise dos resultados deste exercício.

## Listagem do Programa (Matlab apenas)

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%            PTC3213 - EC1 – 2019 – Método das Diferenças Finitas
%                        Solução da Equação de Laplace
%                          Turma 'X'  - Professor 'Y'
%
%    "Beltrano de Tal"  nUSP 11111111
%    "Ciclano de Tal"   nUSP 22222222
%    "Fulano de Tal"    nUSP 33333333
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear;
clf;
% define regiao:
% este dx e' a discretizacao utilizada (somente os valores abaixo são
% possíveis!)
%dx=0.05; % Tempo de execução longo!!
%dx=0.1;
%dx=0.25;
dx=0.5;

eps0= ????  ;
epsr= ????? ;
sigma= ???? ;
sigma_dual= ????  ;
dy=dx;
tol=1e-4;
maxit=1e4;
iter=0;
Vmin=    ?????   ;
Vmax=   ?????   ;
erro=0.0;
start= -1;       % chute inicial
start_Dual= -1;

a=  ??????  ;
b= ????   ;
c= ??????  ;
d= ??????  ;
g= ??????  ;
h= ??????  ;
lx=a;
ly=b;
Nx=round(lx/dx)+1;
Ny=round(ly/dx)+1;
%
% figura 1 – Geometria do condutor
%
% figure(1);
xv = [0 a a 0 0 NaN g g g+c g+c g];
yv = [0 0 b b 0 NaN h h+d h+d h h];
%
%  Traçado do problema
% plot(xv,yv,'LineWidth',2)
% text(a/4,b+1,'EC1 - Condutor retangular vazado - Geometria','Color','r')
% grid on
```

```
% axis ([-1 a+2 -1 b+2])
%
%   Discretização (geração da grade)
%
%
xgv=((1:Nx)-1)*dx;
ygv=((1:Ny)-1)*dx;
[x,y]=meshgrid(xgv,ygv);
[in,on] = inpolygon(x,y,xv,yv);
%
% figura 2 - Grade
%
% figure(2)
% plot(xv,yv)
% text(a/3,b+1,'Grade Regular','Color','r')
% axis ([-1 a+2 -1 b+2])
% hold on
% plot(x(in&~on),y(in&~on),'r+')
%
% plot(x(on),y(on),'k*')
%
% axis ([-1 a+2 -1 b+2])
% grid on
% hold off
%
% figura 3 - Pontos do Contorno
%
% figure(3)
% spy(on)
% text((g+c/6)/dx,(h+d/3)/dx,'Nós - Contorno','Color','r')
%
% figura 4 - Nós internos
%
% figure(4)
% spy(in&~on)
% text((g+c/8)/dx,(h+d/3)/dx,'Nós - Grade interna','Color','r')
%
%  Atribui Condicoes de ontorno
%
r=find(in);       % tudo
p=find(in-on);    %so' nós internos
q=find(on);       %so' fronteira
iVmax=find(((x(q)>0.99*g) & (x(q)<1.01*(g+c)) & (y(q)>0.99*h) & (y(q) <
1.01*(h+d))));
iFuro=find(((x(:,:)>g) & (x(:,:)<(g+c)) & (y(:,:)>h) & (y(:,:) < (h+d)))  );
Phi_prev=zeros(size(x));
Phi_new=zeros(size(x));
Phi_new(q(iVmax))= Vmax;
Phi_new(iFuro)= NaN;
Phi_new(p)= start;
%
%Contador de iterações
%
iter=0;
% Erro máximo entre duas iterações
erro=max(max(abs(Phi_new-Phi_prev)));
%Laço iterativo
while(erro > tol && iter < maxit)%Executa até convergir ou atingir o máximo de
iterações
    iter=iter+1; % Incrementa iteração
```

```
    % Atualiza o potencial dos nós internos pela média dos 4 vizinhos - Eq. Laplace
- M.D.F.
    for k=1:size(p);
        [i,j]=ind2sub(size(x),p(k));
            Phi_new(i,j)=(Phi_new(i-1,j)+Phi_new(i+1,j)+Phi_new(i,j-
1)+Phi_new(i,j+1))/4;
    end
    % Calcula maximo erro entre Phi_atual e Phi_prev de todo o dominio
    erro=max(max(abs(Phi_new-Phi_prev)));
    eps(iter)=erro;
    %Atualiza a matriz de potenciais
    Phi_prev=Phi_new;
    %Exibe a progressão da solução
    %(Execução lenta; use apenas com discretização grosseira)
%     figure (5);
%     imagesc(Phi_new);colorbar;
%     title(['Potenciais na iteracao no. ',int2str(iter),'   Erro = ',
num2str(erro)],'Color','k');
%     getframe;
end
niter1=iter;
if (niter1 == maxit && erro > tol)
      disp([' Número máximo de iterações atingido sem convergência :',
num2stg(niter1), '  iterações - Erro: \n', num2str(erro), 'Os resultados podem não
ter significado!\n']);
end
%
%
% Problema Dual (para traçado dos Quadrados Curvilíneos
%
% Atribui Condicoes de Contorno
iyDual=find( (y(:,:) < b/1.999) & (y(:,:) > b/2.001) );
iVmaxdual=find( (x(iyDual) > (-0.01)) & (x(iyDual) < (1.0001*g)));
i0=find( (x(iyDual)> (0.9999*(g+c))) & (x(iyDual)< (1.0001*a)) );
xfe=find(  x(q(iVmax))< 1.0001*min(x(q(iVmax))) );
xfd=find(  x(q(iVmax))> 0.9999*max(x(q(iVmax))) );
yfa=find(  y(q(iVmax))> 0.9999*max(y(q(iVmax))) );
yfb=find(  y(q(iVmax))< 1.0001*min(y(q(iVmax))) );
for k=1:size(iVmax);
    if ( abs( x(q(iVmax(k)))-min(x(q(iVmax))) )< tol && abs( y(q(iVmax(k)))-
min(y(q(iVmax))) )< tol)
             [ieb,jeb]=ind2sub(size(x), q(iVmax(k)));
     elseif (abs( x(q(iVmax(k)))-min(x(q(iVmax))) )< tol && abs( y(q(iVmax(k)))-
max(y(q(iVmax))) )< tol)
            [iea,jea]=ind2sub(size(x), q(iVmax(k)));
     elseif ( abs( x(q(iVmax(k)))-max(x(q(iVmax))) )< tol && abs( y(q(iVmax(k)))-
min(y(q(iVmax))) )< tol)
             [idb,jdb]=ind2sub(size(x), q(iVmax(k)));
     elseif (abs( x(q(iVmax(k)))-max(x(q(iVmax))) )< tol && abs( y(q(iVmax(k)))-
max(y(q(iVmax))) )< tol)
            [ida,jda]=ind2sub(size(x), q(iVmax(k)));
    end
 end
Dual_prev=zeros(size(x));
Dual_new=Dual_prev;
Dual_new(r)= -1;
Dual_new(iFuro)= NaN;
Dual_new(iyDual(iVmaxdual))=Vmax;
Dual_new(iyDual(i0))=Vmin;
p2=find(Dual_new(p) < 0);
```

```
Dual_new(r)= start_Dual;
Dual_new(iFuro)= NaN;
Dual_new(iyDual(iVmaxdual))=Vmax;
Dual_new(iyDual(i0))=Vmin;
%Contador de iterações - dual
iter2=0;
% Erro máximo entre Phi_new e Phi_prev (Dual)
erro2=max(max(abs(Dual_new-Dual_prev)));
%Laço iterativo (Problema Dual)
while(erro2 > 10*tol && iter2 < maxit)%Executa até convergir ou atingir o máximo de
iterações
    iter2=iter2+1; % Incrementa iteração
    %Atualiza o potencial das fronteiras
    Dual_new(1,:)=Dual_prev(2,:);
    Dual_new(Ny,:)=Dual_prev(Ny-1,:);
    Dual_new(:,1)=Dual_prev(:,2);
    Dual_new(2:Ny-1,Nx)=Dual_prev(2:Ny-1,Nx-1);
    for k=2:size(xfe)-1
        [ie,je]=ind2sub(size(Dual_new), q(iVmax(xfe(k))));
        Dual_new(ie,je)=Dual_new(ie,je-1);
    end
    for k=2:size(xfd)-1
        [id,jd]=ind2sub(size(Dual_new), q(iVmax(xfd(k))));
        Dual_new(id,jd)=Dual_new(id,jd+1);
    end
    for k=2:size(yfb)-1
        [ib,jb]=ind2sub(size(Dual_new), q(iVmax(yfb(k))));
        Dual_new(ib,jb)=Dual_new(ib-1,jb);
    end
    for k=2:size(yfa)-1
        [ia,ja]=ind2sub(size(Dual_new), q(iVmax(yfa(k))));
        Dual_new(ia,ja)=Dual_new(ia+1,ja);
    end
    Dual_new(iyDual(iVmaxdual))=Vmax;
    Dual_new(iyDual(i0))=Vmin;
    %
    % Atualiza o potencial dos nós internos pela média dos 4 vizinhos - Eq. Laplace
- M.D.F.
    for k=1:size(p2);
        [i,j]=ind2sub(size(x),p(p2(k)));
        Dual_new(i,j)=(Dual_new(i-1,j)+Dual_new(i+1,j)+Dual_new(i,j-
1)+Dual_new(i,j+1))/4;
    end
    %Cantos
    Dual_new(ieb,jeb)=(Dual_new(ieb-1,jeb)+Dual_new(ieb+1,jeb)+Dual_new(ieb,jeb-
1)+Dual_new(ieb,jeb+1))/4;
    Dual_new(iea,jea)=(Dual_new(iea-1,jea)+Dual_new(iea+1,jea)+Dual_new(iea,jea-
1)+Dual_new(iea,jea+1))/4;
    Dual_new(idb,jdb)=(Dual_new(idb-1,jdb)+Dual_new(idb+1,jdb)+Dual_new(idb,jdb-
1)+Dual_new(idb,jdb+1))/4;
    Dual_new(ida,jda)=(Dual_new(ida-1,jda)+Dual_new(ida+1,jda)+Dual_new(ida,jda-
1)+Dual_new(ida,jda+1))/4;
    % Calcula maximo erro entre Phi_atual e Phi_prev de todo o dominio
    erro2=max(max(abs(Dual_new-Dual_prev)));
    eps2(iter2)=erro2;
    %Atualiza a matriz de potenciais
    Dual_prev=Dual_new;
    %
    %Exibe a progressão da solução (execução do programa mais lenta!)
%     figure (6);
```

```
%      imagesc(Dual_new);colormap(cool);colorbar;
%      title(['Potenciais na iteracao no. ',int2str(iter2),' Erro = ',
num2str(erro2)],'Color','k');
%      getframe;
end
niter2=iter2;
if (niter2 == maxit && erro2 > 10*tol)
      disp([' Número máximo de iterações atingido sem convergência:  ',
num2stg(niter2), '  iterações - Erro: \n', num2str(erro2), 'Interprete este
resultado com ressalvas!\n']);
end
%
%Evolução das Iterações
figure (7)
% Traça a evolução das iterações
grid on
semilogy(eps, '*'); xlabel('Iterações'); ylabel('Erro');xlim([0,niter1]);
title('Evolução das Iterações')
hold on
semilogy(eps2, 'ro');xlim([0,max(niter1,niter2)]);
legend ('Original','Dual');
hold off
%
%    Corrente Total
%
Somat=sum(Phi_new(2,:))+sum(Phi_new(Ny-1,:))+sum(Phi_new(:,2))+sum(Phi_new(:,Nx-
1));
I=  ??????;
%
%   Resistencia
%
R=   ??????    ;
%
%   Capacitancia
%
Cap= ????????    ;
%
%      Resistencia dual
%
Rdual= ????????    ;
% Densidade de carga:
Dn=[Phi_new(2,1:Nx-1),Phi_new(1:Ny-1,Nx-1)',Phi_new(Ny-1,1:Nx-1),Phi_new(1:Ny-
1,2)']*epsr*eps0/dx*100;
ol=(1:length(Dn))-1;
%figure(8), plot(ol*dx,Dn), xlabel('l (m)'), ylabel ('  ?????   ');
%
%   Densidade Superficial de Carga Mínima
%
Rho_s_min =      ????????    ;
%
figure (7);
%
%     Traçado dos vetores de campo eletrico (apenas para visualização!)
%[ex,ey]=gradient(Phi_new);
% scale=2;
% Q=quiver(x,y,-ex,-ey, scale);
% c = Q.Color;
% Q.Color = 'red';
%
%  Equipotenciais
```

```
%
V=0:10:Vmax;
%V(1)=1e-6; V(11)=V(11)-1e-6;
[C,H]=contour(   ????????    );
clabel(C,V);
axis('equal');
hold on
%
% Equipotencias - Problema Dual (para traçado dos quadrados curvilíneos)
%
sp=   ?????   ;
ntubos = 5/sp;
disp(['Num. tubos = ',num2str(ntubos)]);
dV = Vmax/ntubos;
V = 0:dV:Vmax;
%V(1)=1e-6; V(11)=V(11)-1e-6;
[C,H]= contour(    ????????    );
axis('equal');
hold off
%
% Impressão de resultados  >>> Atenção para as unidades !!!!<<<<<
%
disp('EP - 1 : ');
fprintf('b= %d  c= %d  d= %d  g= %d  h= %1.1g  (valores em cm)\n', b,c,d,g,h);
fprintf('eps_r= %1.1g   Sigma = %1.1g mS/m   Sigma_dual = %1.1g mS/m \n',
epsr,sigma,sigma_dual);
disp(['Densidade superficial de Carga mínima = ',num2str(   ?????????    ),'
nC/m^2']);
disp(['Resistência = ',num2str(   ?????   ),'  ohms  ']);
disp(['Capacitância = ',num2str(    ??????    ),'  pF  ']);
disp(['Resistência Dual = ',num2str(   ?????    ),'  ohms    ']);
%
%  FIM
%
```