Práctica 3 - Circuitos Aritméticos

Sistemas Digitales - FIUBA

April 26, 2021

Herramientas
EDAplayground: `https://www.edaplayground.com/`
GTKWave, GHDL: `https://www.youtube.com/watch?v=H2GyAIYwZbw`
Modelsim: `https://www.mentor.com/company/higher_ed/modelsim-student-edition`

Notación:
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Ejercicio 1 - Dar las expresiones aritméticas de los siguientes formatos numéricos:

- Sin signo (unsigned, US)
- Signo y magnitud (SM)
- Complemento a dos (two's complement 2C)
- Dígito Signado (SD)

Ejercicio 2 - Cuáles de las codificaciones del ejercicio 1 son unívocas?

Ejercicio 3 - Cuáles son los rangos de representación de las codificaciones del ejercicio 1?

Ejercicio 4 - Demostrar el teorema de extensión de signo para la codificación 2C.

Ejercicio 5 - Dar las expresiones aritméticas de las siguientes representaciones en punto fijo:

- Sin signo, $uI.F$, donde $I, F \in \mathbb{Z}$, $N = I + F$ es la cantidad de bits de representación.
- Con signo, $uI.F$, donde $I, F \in \mathbb{Z}$, $N = I + F$ es la cantidad de bits de representación.

Ejercicio 6 - Cuáles son los rangos de representación de las codificaciones del ejercicio 5? Determinar también el tamaño numérico del LSB.

Ejercicio 7 - Implementar en VHDL un multiplicador de N bits (genérico) de acuerdo a la arquitectura presentada en el apéndice H “Computer Arithmetic” (A Quantitative Approach - Hennessy Patterson).

Ejercicio 8 - Implementar en VHDL un divisor de N bits (genérico) con restauración de acuerdo a la arquitectura presentada en el apéndice H “Computer Arithmetic” (A Quantitative Approach - Hennessy Patterson).

Ejercicio 9 - Implementar en VHDL un divisor de N bits (genérico) sin restauración de acuerdo a la arquitectura presentada en el apéndice H “Computer Arithmetic” (A Quantitative Approach - Hennessy Patterson).

Ejercicio 10 - Implementar en VHDL un multiplicador de N bits (genérico), con operandos signados utilizando la codificación de Booth.

Ejercicio 11 - Implementar en VHDL un barrel shifter de N bits con M líneas indicativas del desplazamiento ($N = 2^M$). Además debe permitir desplazamiento tanto a derecha como a izquierda, teniendo en cuenta el tipo (aritmético o lógico).

Ejercicio 12 - Dar las expresiones aritméticas de la representación en punto flotante de tamaño de significando N_F y exponente N_e.

Ejercicio 13 - De acuerdo a la norma IEEE-754, indicar qué número de precisión simple representa la siguiente palabra de 32 bits:

1	10000011	11000000000000000000000

Ejercicio 14 - Aplicar los cuatro modos de redondeo a los siguientes valores (aritmética decimal con redondeo a 3 cifras):

Valor	**+8**	**-8**	**0**	**Nearest Even**
2,452				
2,455				
2,465				
-2,452				

Ejercicio 15 - Calcular en binario (4 bits) el producto entre $-1.011_2 \times 2^2$ y $1.011_2 \times 2^3$. Aplicar al resultado los cuatro métodos de redondeo.

Ejercicio 15 - . Calcular en binario (5 bits) el producto entre $1.1001_2 \times 2^5$ y $1.0010_2 \times 2^2$. Aplicar al resultado los cuatro métodos de redondeo.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 - Dar las expresiones aritméticas de los siguientes formatos numéricos:

- Sin signo (unsigned, US)

  Sea $x \in \mathbb{N}_0$, $x_i \in \{0, 1\}$

$$x = \sum_{i=0}^{N-1} x_i 2^i \tag{1}$$

- Signo y magnitud (SM)

  Sea $x \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \{0, 1\}$

$$x = -1^{x_{N-1}} . \left(\sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i \right) \tag{2}$$

- Complemento a dos (two's complement 2C)

  Sea $x \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \{0, 1\}$

$$x = -x_{N-1} 2^{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i \tag{3}$$

- Dígito Signado (SD)

  Sea $x \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \{-1, 0, 1\}$

$$x = \sum_{i=0}^{N-1} x_i 2^i \tag{4}$$

Ejercicio 4

Teorema de extensión de signo para 2C:

Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que tiene un representación 2C de N bits dada por

$$x = -x_{N-1}2^{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i \tag{5}$$

Entonces la representación 2C de $M > N$ bits estará dada por

$$x = -x_{N-1}2^{M-1} + \sum_{i=N-1}^{M-2} x_{N-1}2^i + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i \tag{6}$$

Es decir, que la nueva representación en $M > N$ bits se obtiene repitiendo el MSB de x por $M - N$ veces.

Ejemplo:

$x = -10_D$, $N = 5$, $M = 7$

Entonces

$x = -10_D = 10110_{2C-N} = 1110110_{2C-M}$

Demostración:

Basta con ver que si $x_{N-1} \neq 0$ entonces

$$\begin{array}{rcl} -x_{N-1}2^{M-1} + \sum_{i=N-1}^{M-2} x_{N-1}2^i & = & -2^{M-1} + \left(2^{N-1} + 2^N + \ldots + 2^{M-3} + 2^{M-2}\right) \\ & = & -2^{N-1}2^{M-N} + 2^{N-1}\left(1 + 2 + \ldots + 2^{M-N-1}\right) \\ & = & -2^{N-1}2^{M-N} + 2^{N-1}\left(2^{M-N} - 1\right) \\ & = & 2^{N-1}\left(-2^{M-N} + 2^{M-N} - 1\right) \\ & = & -2^{N-1} \end{array} \tag{7}$$

Por el contrario, si $x_{N-1} = 0$ entonces

$$-x_{N-1}2^{M-1} + \sum_{i=N}^{M-2} x_{N-1}2^i = 0 \tag{8}$$

Luego,

$$x = -x_{N-1}2^{M-1} + \sum_{i=N-1}^{M-2} x_{N-1}2^i + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i = -2^{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i \tag{9}$$

Ejercicio 5

Dar las expresiones aritméticas de las siguientes representaciones en punto fijo:

- Sin signo, $uI.F$, donde $I, F \in \mathbb{Z}$, $N = I + F$ es la cantidad de bits de representación.

$$\begin{aligned} x &= \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i 2^i\right) 2^{-F} \\ x &= \sum_{i=0}^{N-1} x_i 2^{i-F} \end{aligned} \tag{10}$$

- Con signo, $sI.F$, donde $I, F \in \mathbb{Z}$, $N = I + F$ es la cantidad de bits de representación.

$$\begin{aligned} x &= \left(-x_{N-1} 2^{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i\right) 2^{-F} \\ &= -x_{N-1} 2^{I-1} + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^{i-F} \end{aligned} \tag{11}$$