# UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Moacyr Vieira Botelho Junior

Modelo estatístico para desenvolvimento de chuveiros atmosféricos extensos

São Carlos

### Moacyr Vieira Botelho Junior

# Modelo estatístico para desenvolvimento de chuveiros atmosféricos extensos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Luiz Vitor de Souza Filho Coorientador: Prof Dr. Leonardo Paulo Maia

Versão corrigida (Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos 2019 AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Botelho Junior, Moacyr Vieira

Modelo estatístico para desenvolvimento de chuveiros atmosféicos extensos / Moacyr Vieira Botelho Junior; orientador Luiz Vitor de Souza Filho; co-orientador Leonardo Paulo Maia - versão corrigida -- São Carlos, 2019.

93 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Raios cósmicos. 2. Observatório Pierre Auger. 3. Chuveiros atmosféricos extensos. 4. Processos de ramificação. I. de Souza Filho, Luiz Vitor , orient. II. Paulo Maia, Leonardo, co-orient. III. Título.

Dedico esse trabalho à todas as pessoas que apoiam o desenvolvimento da ciência em nosso país.

#### **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por me ajudar a superar todos os desafios ao longo de todo esse tempo de estudos.

Agradeço muito também às duas pessoas mais importantes na minha vida, minha mãe Fátima, que sempre me apoiou e incentivou a seguir com minha graduação e agora com o mestrado e à minha namorada Giovana, que também sempre compartilhou comigo alegrias e dificuldades ao longo desses 2 anos de mestrado.

Ao meu orientador, o professor Vitor, por me aceitar como aluno no mestrado, me ajudando e incentivando durante todo esse tempo do projeto. Sou muito grato por me mostrar como é ser, de fato, um cientista, ampliando o conhecimento que adquiri ao longo da graduação e me motivando a buscar novos resultados. O mesmo posso dizer ao professor Leonardo Maia, meu coorientador, que me ensinou muitas coisas ao longo do meu projeto, sua ajuda foi fundamental.

Aos meus colegas de grupo tenho a dizer que foi muito bom trabalhar ao lado de vocês ao longo do mestrado. Vocês também me ajudaram muito, seja na parte pessoal ou profissional. Em especial, gostaria de agradecer aos amigos Luan, Raul e Rodrigo, que contribuíram muito no início e ao longo do meu trabalho, principalmente na parte de programação e simulações computacionais.

Também agradeço a cada um dos amigos de longa data e também os que conheci nesse tempo que estive em São Carlos, pois com vocês tudo ficou mais fácil. São muitos nomes para citar, mas sintam-se agradecidos de minha parte por todos os estudos em grupo, por todas dificuldades superadas e por todas as comemorações e alegrias.

À todos os professores que fizeram parte da minha formação, pois foi com vocês que adquiri todo o conhecimento básico que possuo hoje. Em particular agradeço aos professores Attilio, Diogo e Sebastião. Os dois primeiros, pois foram meus orientadores nas iniciações científicas que fiz na graduação, com os quais também aprendi muitas coisas, complementando o conhecimento obtido ao longo do curso. Ao último, por ter me aceito como monitor e estagiário PAE de física I, onde aprendi muitas coisas, entre elas um pouco sobre como é lecionar em uma sala de aula.

Ao CNPq, que foi a agência de fomento que financiou este projeto de mestrado, me auxiliando com a bolsa de estudos.

Para encerrar, agradeço à FAPESP, em especial, pelo processo 2015/15897-1.



#### **RESUMO**

BOTELHO JUNIOR, M. V. **Modelo estatístico para desenvolvimento de chuveiros atmosféricos extensos**. 2019. 93p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Os raios cósmicos são objeto de estudo no campo da astrofísica de partículas e, em especial, o Observatório Pierre Auger dedica-se à detecção de partículas geradas nos chuveiros atmosféricos extensos iniciados por primários com energias superiores a 10<sup>17</sup> eV. Conhecer o número médio e a variância de partículas que compõem os chuveiros é uma árdua tarefa, devido à estocasticidade e ao alto número de partículas ali presente. Atualmente, existem muitas pesquisas que buscam entender a física dos chuveiros atmosféricos utilizando simulações computacionais, como é feito com o CONEX. Em contrapartida, existem modelos analíticos que buscam explicar a física de forma simplificada, mas explorando conceitos importantes da interação de partículas. O mais conhecido é o modelo de Heitler-Matthews, o qual possui equações analíticas para o número de múons e profundidade de máximo de um chuveiro de origem hadrônica. Este projeto visou a modelagem do desenvolvimento de um chuveiro atmosférico empregando o método de dinâmica de populações. Em particular, os processos de ramificação fornecem equações de recorrência para média e variância de uma população. Com este método, foram obtidos resultados para o valor médio  $(N_{\mu})$  e desvio relativo  $(\sigma/N_{\mu})$  do número de múons em um chuveiro, bem como a profundidade de máxima produção de múons  $(X_{\text{max}}^{\mu})$ . Foram feitas análises sobre parâmetros físicos, como diferentes primários, diferentes modelos de interação hadrônica e efeito de partícula líder, a fim de determinar alterações nos observáveis físicos. Também foram comparados os resultados obtidos com o modelo de ramificação com os de simulações de Monte Carlo do CONEX, além do modelo analítico de Heitler-Matthews. O resultado para  $N_{\mu}$  esteve em bom acordo com o das simulações mais sofisticadas, enquanto o resultado para o desvio relativo indicou divergências, tanto em um modelo com distribuição uniforme de energia quanto em um que considera efeito de partícula líder. Para  $X_{\max}^{\mu}$  os resultados foram satisfatórios, dentro das limitações do modelo.

**Palavras-chave**: Raios cósmicos. Observatório Pierre Auger. Chuveiros atmosféricos extensos. Processos de ramificação.

#### **ABSTRACT**

BOTELHO JUNIOR, M. V. **Statistical model for development of extensive air showers**. 2019. 93p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Cosmic rays are an object of studies in the field of astroparticle physics and, in particular, the Pierre Auger Observatory is dedicated to the detection of particles generated in atmospheric air showers started by primary particles with energies above 10<sup>17</sup> eV. To determine the average number of particles composing an air shower and its variance is an arduous task due to the stochasticity and the large number of particles in this phenomenon. Currently, there are many researches that seek to understand the physics of air showers using computacional simulations, as it is done in CONEX. On the other hand, there are analytical models that try to explain the physics in a simplified manner, but exploring important concepts of particle interactions. Among those, the most known is the Heitler-Matthews model, which delivers analitical equations for computing the number of muons and depth of maximum of a shower of hadronic origin. This project aimed to describe the development of an air shower using population growth method. In particular, the branching process provides recurrence equations for the average and the variance of a population. With this method, results were obtained for the mean value  $(N_{\mu})$  and the relative fluctuation  $(\sigma/N_{\mu})$  of muon content in an air shower. The depth of maximum muon production is described as well. Analysis were made about physical parameters, like different primary particles, different hadronic models and the inclusion of leading particle effects, aiming to determine changes in physical observables. We also compare the results obtained with the branching model which those obtained in CONEX Monte Carlo simulations, and, in addition to those of Heitler-Matthews analytical model. The results for  $N_{\mu}$  were in good agreement with that from the more sofisticated simulations, while the result for relative deviations showed some divergences both in a model with uniform energy distribution and also when leading particle effects are taken into account. For  $X_{\text{max}}^{\mu}$  the results were satisfactory within the limitations of the model.

**Keywords**: Cosmic Rays. Pierre Auger Observatory. Extensive air showers. Branching processes.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Diagrama de Hillas que indica a energia máxima que uma partícula pode adquirir ao ser acelerada. A ilustração indica três curvas, duas para $p$ de diferentes energias e uma para Fe, na qual é possível concluir que há poucas fontes capazes de acelerar um próton até adquirir 1 ZeV	22
Figura 2 –	Espectro de raios cósmicos. A figura mostra o fluxo multiplicado por uma potência $E^{2.5}$ , de forma que seja mais nítido as estruturas como o "joelho"e o "tornozelo"	23
Figura 3 –	Do lado esquerdo da figura está uma imagem ilustrativa de uma cascata de partículas. Ao lado direito, uma imagem com um perfil longitudinal de chuveiros para diferentes tipos de partículas	25
Figura 4 –	Medidas de $\langle X_{\text{max}} \rangle$ obtidas nos observatórios com detectores Cherenkov (Tunka, Yakutsk e CASA-BLANCA) e com detectores de luz fluorescente (HiRes/MIA, HiRes, Auger e TA). Os dados são comparados a simulações de interações hadrônicas (QGSJet-II-03, EPOSv1.6 e Sibyll2.1) para analisar a composição dos raios cósmicos	27
Figura 5 –	Média logarítmica da massa $A$ extraída da análise de $X_{\text{max}}$ em observatórios e simulações computacionais	27
Figura 6 –	Figura esquemática da distribuição dos detectores no Observatório Pierre Auger. Os pontos vermelhos ilustram os tanques e as linhas verdes indicam o ângulo de observação de um telescópio de fluorescência	30
Figura 7 –	Imagem ilustrativa de um detector de superfície. Nela é possível verificar o arranjo dos três PMTs que captam a luz Cherenv emitida quando as partículas carregadas entram em contato com a água no tanque.	31
Figura 8 –	Imagem ilustrativa de um telescópio de fluorescência do Observatório Pierre Auger.	32
Figura 9 –	Fluxo escalado de raios cósmicos em altíssima energia. Nessa figura os pontos são os dados do Auger e a linha cheia é uma combinação de três curvas, com valores de $\gamma$ distintos nas regiões do espectro. Os locais onde há mudanças	
	no índice espectral é no tornozelo e na supressão	33
Figura 10 –	<ul> <li>Mapa de direção de chegadas de raios cósmicos vindo de direções do universo.</li> <li>É possível observar uma anisotropia (região azul e vermelha do mapa)</li> </ul>	35
Figura 11 –	Imagem que mostram os limites superiores para o fluxo de fótons. O nível de confiança desses limites, para o Auger, é de 95%.	35
Figura 12 –	Imagem ilustrativa de uma um chuveiro puramente eletromagnético, o qual é o objeto de modelagem pelo modelo de Heitler.	38

Figura 13 –	Imagem ilustrativa de um chuveiro hadrônico, contendo píons neutros e	4.0
Eiguro 14	carregados	40
riguia 14 –	Comparação entre os resultados do modelo de Matthews-Heitler (curvas tracejadas) com o de simulações computacionais (curvas cheias). As tracejadas estão deslocadas de 100 g/cm <sup>2</sup>	42
Figura 15 –	Imagem que ilustra um Pomeron geral (à esquerda) como sendo a soma de um Pomeron duro, ao centro, e outro semi-duro (ao lado direito)	43
Figura 16 –	Diagrama que ilustra o desenvolvimento populacional no qual um indivíduo sucessivamente dá origem a uma prole de indivíduos idênticos	46
Figura 17 –	Comparação entre o $X_{\text{max}}^{\mu}$ (linhas cheias) e o $X_{\text{max}}$ (linhas pontilhadas). As curvas foram obtidas através do CONEX, do lado esquerdo utilizando o QGSJet-II-04 e do lado direito, o EPOS-LHC	53
Figura 18 –	Distribuição do número de píons carregados gerados na colisão de um próton (à esquerda) ou píon (à direita) com um núcleo de Nitrogênio. Cada linha, de cima para baixo representa partículas incidentes com de energia $10^4$ GeV, $10^7$ GeV e $10^{10}$ GeV. A curva azul ilustra os resultados usando o QGSJet-II-04 e a vermelha com o EPOS-LHC.	55
Figura 19 –	Distribuição do número de píons carregados gerados em uma colisão de um núcleo de ferro com um núcleo de nitrogênio. Em azul os resultados usando o QGSJet-II-04 e em vermelho com o EPOS-LHC. As energias do projétil desses histogramas foram 10 <sup>3</sup> GeV, 10 <sup>5</sup> GeV, 10 <sup>7</sup> eV e 10 <sup>9</sup> eV, que seguem a respectiva sequência esquerda superior, direita superior, esquerda inferior e direita inferior.	56
Figura 20 –	Média e variância da multiplicidade de píons em função da energia primária. Na imagem do topo estão três curvas: o modelo de Montanus, e os resultados de simulações utilizando o QGSJet-II-04 e o EPOS-LHC, a fim de comparar os resultados para multiplicidade de $\pi_{ch}$ geradas em colisões p-N. Logo abaixo desta, estão as duas curvas para a variância da multiplicidade de píons. As duas imagens de baixo seguem o mesmo raciocínio, porém tratando uma colisão $\pi$ -N.	58
Figura 21 –	Multiplicidade média e variância em função da energia primária. Na imagem superior estão duas curvas, dos resultados de simulações utilizando o QGSJet-II-04 e o EPOS-LHC, para colisões entre Fe-N. Logo abaixo desta, estão as duas curvas para a variância da multiplicidade de píons	59
Figura 22 –	Livre caminho médio em função do logaritmo da energia. Estão ilustrados $\lambda_I$ para colisões entre um próton, ou píon ou um núcleo de Ferro com o ar. Os pontos denotam o valor calculado pelo CONEX e as linhas, os ajustes feitos	
	para os dois modelos de interação hadrônica	60

Figura 23 –	Média do número de múons para próton primário. Pontos são o resultado do modelo de ramificação, a linha cheia são simulações com CONEX e a linha tracejada é o modelo Heitler-Matthews	62
Figura 24 –	Média do número de múons para núcleos de ferro primário. Pontos são o resultado do modelo de ramificação, a linha cheia são simulações com CONEX e a linha tracejada é o modelo Heitler-Matthews	62
Figura 25 –	Logaritmo da variância do número de múons para chuveiros iniciados por próton (à esquerda) e por Ferro (à direita)	63
Figura 26 –	Desvio relativo do número de múons, para chuveiros iniciados por próton (à esquerda) e por Ferro (à direita).	63
Figura 27 –	Comparação dos valores de $X_{\text{max}}^{\mu}$ entre o modelo de ramificação (linhas tracejadas) e as simulações do CONEX (linhas cheias). À esquerda estão os resultados utilizando o QGSJet-II-04 e à direita o EPOS-LHC. As linhas roxas referem-se a chuveiros iniciados por próton e as verdes, por um núcleo de Ferro	64
Figura 28 –	Ilustração de uma distribuição aleatória de dois pontos em um segmento	66
Figura 29 –	Comparação entre $Q_{\text{teo}}(n)$ e $Q_{\text{emp}}(E_0 n)$ , em função da multiplicidade de píons carregados gerados. À esquerda o resultado para uma energia inicial de $10^{13}$ eV e à direita para $10^{16}$ eV. Ambos os gráficos obtidos para colisões p-N.	69
Figura 30 –	Comparação entre $Q_{\text{teo}}(n)$ e $Q_{\text{emp}}(E_0)$ . Os pontos foram obtidos via simulações com parâmetros do QGSJet-II-04 ou EPOS-LHC, para colisões entre próton e Nitrogênio	70
Figura 31 –	Imagem ilustrativa de um chuveiro considerando a hipótese de que haja uma partícula líder na primeira interação.	71
Figura 32 –	Número médio de múons obtido com o modelo de dois tipos, tendo o próton como primário. Para cada gerador de eventos existem três curvas, com diferentes $\kappa_{el}$ , comparando o resultado com aquele do CONEX	72
Figura 33 –	Número médio de múons obtido com o modelo de dois tipos, tendo o Ferro como primário. Para cada gerador de eventos existem três curvas, com diferentes $\kappa_{\rm el}$ , comparando o resultado com aquele do CONEX	73
Figura 34 –	Logaritmo da Variância para diferentes $\kappa_{\rm el}$ em chuveiros iniciados por próton. As linhas tracejadas foram obtidas com o modelo de ramificação de dois tipos	
Figura 35 –	e a linha cheia, com as simulações do CONEX	74
	cação de dois tipos e a linha cheia, com as simulações do CONEX	74
Figura 36 –	Curvas para diferentes $\kappa_{el}$ com o desvio relativo do número médio de múons em chuveiros iniciados por próton.	75

Figura 37 –	Curvas para diferentes $\kappa_{\rm el}$ com o desvio relativo do número médio de múons	
	em chuveiros iniciados por Ferro	75
Figura 38 –	Profundidade de máxima produção de múons, em função da energia. À	
	esquerda estão os resultados para diferentes $\kappa_{\mathrm{el}}$ , com parâmetros do QGSJet-	
	II-04, e à direita, para os do EPOS-LHC	77

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	RAIOS CÓSMICOS	21
2.1	Fontes e mecanismos de aceleração	21
2.2	O espectro de energia	22
2.3	Chuveiros atmosféricos	24
2.4	O Modelo de superposição	25
3	O OBSERVATÓRIO PIERRE AUGER	29
3.1	Estrutura do Observatório	29
3.2	O Detector de Superfície	30
3.3	O Detector de Fluorescência	31
3.4	Resultados Importantes	32
3.4.0.1	O espectro em altíssimas energias	33
3.4.0.2	Composição de massa	33
3.4.0.3	A anisotropia do fluxo de Raios Cósmicos	34
3.4.0.4	Limite superior no fluxo de fótons	34
4	MODELOS ANALÍTICOS E MODELOS COMPUTACIONAIS	37
4.1	O modelo de Heitler	37
4.2	O modelo de Heitler-Matthews	38
4.2.1	Modelo de Heitler-Matthews para núcleos primários	41
4.3	Modelos Computacionais	42
4.3.1	O simulador de chuveiros atmosféricos CONEX	44
5	PROCESSOS DE RAMIFICAÇÃO	45
5.1	Método da Função Geradora na ramificação simples	45
5.2	Método da Função Geradora na ramificação com gerações hetero-	
	gêneas	49
6	O MODELO DE DINÂMICA POPULACIONAL APLICADO A CHU-	
	VEIROS ATMOSFÉRICOS	51
6.1	Modelagem do desenvolvimento do chuveiro atmosférico	51
6.1.1	Cálculo das quantidades física necessárias para a implementação do modelo	
	de ramificação	53
6.1.1.1	Parametrização da média e variância da multiplicidade de múons	53
6.1.1.2	Parametrização do livre caminho médio de píons	57

6.1.1.3	Parametrização da energia crítica de píons	57
6.2	Resultados e comparações do modelo de ramificação de um tipo .	60
6.2.1	Resultados para o número de múons	60
6.2.2	Resultados para o $X^\mu_{ m max}$	61
7	O MODELO DE RAMIFICAÇÃO DE DOIS TIPOS	65
7.1	A estatística de Ordem no modelo de ramificação	65
7.1.1	Modelo nulo de "quebra uniforme"	65
7.1.2	Comparação entre os modelos	67
7.2	O Modelo de ramificação de dois tipos	69
7.3	Testes do modelo Líder-traço	72
8	CONCLUSÃO	79
8.1	Considerações finais sobre o Modelo de ramificação de um tipo	79
8.2	Considerações finais sobre o Modelo de ramificação de dois tipos .	80
	REFERÊNCIAS	83
	APÊNDICES	87
	APÊNDICE A – MODELO DE HEITLER-MATTHEWS COMO UM LIMITE DA DINÂMICA DE POPULAÇÕES	89
	APÊNDICE B – A ESTATÍSTICA DE ORDEM NO MODELO LÍDER	-
	TRAÇO	91
B.1	Segmento periférico	91
B.2	Equidistribuição dos segmentos	92
B.3	Fração energética máxima	92

### 1 INTRODUÇÃO

Uma definição para raios cósmicos é que são partículas carregadas, provenientes do espaço interestelar e que atingem a atmosfera da Terra. (1) A origem exata dos raios cósmicos ainda é um mistério. As teorias mais aceitas atualmente indicam que algumas das partículas menos energéticas (valores inferiores a  $10^{16}$  eV) provém de fontes na nossa galáxia, como remanescentes de Supernovas ou pulsares, e as de maior energia (acima de  $10^{18}$  eV), de fontes extragaláticas. (2)

No início do século XX, cientistas que estudavam a radioatividade de materiais notaram que mesmo sem uma fonte de radiação as placas de um eletroscópio eram descarregadas, colapsando lentamente. De início foi pensado que essa radiação vinha de elementos radioativos presentes na crosta terrestre. Entretanto, em 1912, o físico Victor Hess fazia estudos sobre a ionização da atmosfera em um balão e percebeu que quanto maior a altitude alcançada, maior era a quantidade de radiação detectada. A conclusão obtida foi que a radiação medida era proveniente de fontes extraterrestres, daí o nome "raios cósmicos", introduzido por Robert Millikan alguns anos após a descoberta feita por Hess. (3)

Em meados da década de 1930, Carl Anderson e Seth Neddermeyer observaram que os raios cósmicos continham um tipo de partícula com poder de penetração bem maior que do elétron e do pósitron. Esses léptons possuíam carga elétrica e um valor de massa intermediário entre a do elétron e do próton. Alguns anos após o término da Segunda Guerra, Cecil Powell e sua equipe detectaram rastros deixados por dois tipos de mésons carregados em uma chapa fotográfica. Era, possivelmente, a descoberta experimental da partícula de Yukawa que intermediaria a força forte. Os resultados obtidos indicaram que a massa das partículas podiam ser estimadas pela densidade de pontos deixados na placa. Denominaram a partícula mais massiva de méson  $\pi$  e constataram que esta decaía em outra mais leve, denominada  $\mu$ . O brasileiro César Lattes, que era um dos integrantes do grupo de Powell, também constatou posteriormente que a colisão de partículas alfa com núcleos de carbono geravam mésons  $\pi$ . Nesses experimentos realizados em Berkeley, os píons eram gerados através de uma fonte artificial, ou seja, de partículas que eram aceleradas no ciclotron. (3,4) Esses acontecimentos foram de extrema importância para o nascimento dos estudos em física de partículas, pois com os resultados obtidos houve um aumento do interesse da comunidade científica e um grande desenvolvimento dos aceleradores de partículas. Atualmente o maior deles é o Large Hadron Collider (LHC), mas sua energia, quando comparada no mesmo referencial, é muito menor que os raios cósmicos das mais altas energias\*.

<sup>\*</sup> A energia alcançada em colisões *pp* no LHC, atualmente, é de 14 TeV, no referencial do centro de massa. As medições de raios cósmicos de altíssima energia são obtidas no referencial do laboratório. Dessa forma, a energia equivalente dos raios cósmicos, no centro de massa da colisão, é cerca de 500 TeV, ou seja, 40 vezes maior que das colisões no LHC.

Os raios cósmicos de altíssima energia têm sua importância na física teórica, por exemplo, na busca por um melhor entendimento da interação hadrônica de partículas com energia superior a dos aceleradores atuais. Na área de astrofísica há diversos motivos que contribuem para o interesse nesse tipo de pesquisa. Entre eles, buscar entender mecanismos de aceleração e propagação de partículas em campos eletromagnéticos intensos, como os de Supernovas ou núcleos ativos de galáxias e a detecção de matéria escura. (5) No capítulo 2 será apresentada uma das teorias para a produção e aceleração de raios cósmicos e, em mais detalhes, sua propagação na atmosfera terrestre.

Ao entrar na atmosfera, os raios cósmicos colidem com as partículas do ar, gerando assim um chuveiro atmosférico extenso (EAS, do inglês, Extensive Air Shower). O fluxo de partículas primárias incidentes é uma lei de potência que diminui com a energia e, para energias superiores a 10<sup>15</sup> eV, é muito raro a detecção direta de primários. As cascatas de partículas são, de fato, observadas em experimentos no solo. Os mais recentes nessa área, como os que são realizados no observatório Pierre Auger, (6) indicam que o espectro de energia pode atingir valores de pelo menos  $10^{20}$  eV. Uma explicação mais detalhada sobre esse observatório será dada no capítulo 3. Os EAS contém um alto número de partículas geradas nas colisões (da ordem de  $10^{10}$  para uma energias na faixa de EeV. (7) Dessa forma, torna-se importante o auxílio de simulações computacionais que descrevam da melhor maneira as colisões entre as partículas e principalmente a estocasticidade contida nos EAS. Essas simulações são baseadas em dados dos aceleradores de partículas e em extrapolações para energias superiores às que são lá alcançadas. Uma dificuldade de utilizar um programa muito detalhado é que a simulação exige um alto custo computacional. Isto é devido ao alto número de partículas em um chuveiro. Além disso, é extremamente complicado entender o que de fato está sendo levado em conta na obtenção dos resultados de cada um desses algoritmos. Para isso, existem modelos analíticos simplificados que facilitam o entendimento e exploram os conceitos envolvidos na física dos chuveiros de partículas. O mais conhecido é o de Heitler-Matthews (8) e será discutido com mais detalhes no capítulo 4.

Esse modelo analítico fornece equações para observáveis, tais como o número de múons e profundidade de máximo do chuveiro. Embora as equações forneçam médias, não é discutida a variância do número de partículas ou a estocasticidade presentes em um chuveiro atmosférico. Neste trabalho, será discutido um modelo semi-analítico, baseado em dinâmica de populações e que fornece média e variância do número de partículas da componente muônica em um chuveiro, buscando ser uma extensão do modelo de Heitler-Matthews, mas ainda uma simplificação dos resultados de simulações. Algumas das vantagens são a análise de parâmetros que influenciam diretamente no resultado de observáveis físicos em um chuveiro (como diferentes partículas primárias ou efeito de partícula líder). Há também a possibilidade de alcançar resultados que satisfaçam o que é obtido nas simulações e nas medições realizadas pelos observatórios através de conceitos básicos de física de partículas e estatística e com um baixo custo computacional.

#### 2 RAIOS CÓSMICOS

#### 2.1 Fontes e mecanismos de aceleração

Supernovas e pulsares são corpos extremamente massivos e com um campo eletromagnético intenso. Na presença desses campos, partículas carregadas podem ser aceleradas e esse é um dos motivos que levam as teorias a predizer que raios cósmicos provém de fontes em meios interestelares. Edward Teller e Robert Richtmyer acreditavam que os raios cósmicos tinham origem dentro do sistema solar (9), no entanto, Enrico Fermi (10) defendia que sua origem provinha de todo espaço intergalático.

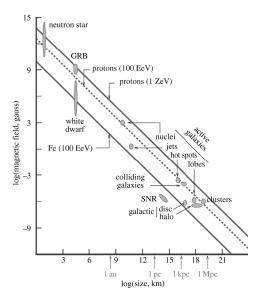
Apesar de não serem conhecidas exatamente as fontes que geram raios cósmicos, existem alguns modelos que buscam explicar sua origem. As duas classes que serão aqui discutidas são a "top-down"(11) e a "bottom-up"(12). Uma motivação para a elaboração dessas teorias é o critério de Hillas, o qual diz que a energia máxima em que uma partícula carregada pode ser acelerada é limitada pelo raio de movimento R e pela intensidade do campo magnético B, tal que

$$E_{max} \sim \beta Z_e RB,$$
 (2.1)

onde  $\beta$  é a razão entre a velocidade da onda de choque e c, e  $Z_e$  é a carga elétrica da partícula.

O digrama de Hillas mostrado na figura 1 indica que uma partícula só pode ser acelerada até determinada energia E, caso a elipse ou círculo (que representam o tipo de fonte) esteja acima ou sobre a linha diagonal. Analisando o diagrama, conclui-se que existem poucas fontes capazes de acelerar um próton a uma energia superior a  $10^{20}$  eV. Como são, de fato, observados alguns eventos com energia acima de 100 EeV, os modelos do tipo top-down propõe que os mais energéticos provém do decaimento de partículas X supermassivas, geradas no universo primordial. Atualmente, essa classe não é tão bem aceita, uma vez que o fluxo de fótons primários, provenientes do decaimento de partículas X, esperado é muito maior que limites de fluxo de fótons impostos pelo Observatório Pierre Auger. (13)

A outra classe,"bottom-up", baseia-se na aceleração de partículas via fontes astrofísicas na qual esta é explicada pelo mecanismo de aceleração de Fermi. (10, 12) Assume-se que o meio intergalático contém partículas com uma densidade muito pequena, da ordem de 10<sup>-24</sup> g/cm³, porém distribuída de maneira não uniforme. Essa assimetria na densidade leva a uma aglomeração de partículas formando nuvens localizadas. Essas nuvens são constituídas, em sua grande parte, por hidrogênio que ao receber fótons emitidos por estrelas, ioniza-se. Quando uma partícula carregada adentra na região de campo magnético desse meio interestelar, ela é acelerada e pode percorrer uma distância média de 10<sup>10</sup> m, até colidir com um alvo. Nessas colisões pode haver ganho ou perda de energia, de forma estocástica. Entretanto, em média, há mais ganho do que perda de energia devido às irregularidades e variações no campo magnético do meio. O



**Figura 1** – Diagrama de Hillas que indica a energia máxima que uma partícula pode adquirir ao ser acelerada. A ilustração indica três curvas, duas para *p* de diferentes energias e uma para Fe, na qual é possível concluir que há poucas fontes capazes de acelerar um próton até adquirir 1 ZeV.

Fonte: FRASCHETTI (12)

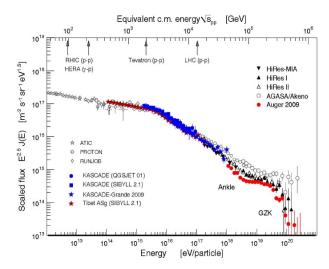
mecanismo de Fermi também conclui que quanto maior a energia da partícula que colide com a nuvem, maior o ganho de energia com as sucessivas colisões, uma vez que o ganho de energia aumenta exponencialmente com a velocidade de incidência  $\beta c$ , segundo a equação

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{4}{3}\beta^2. \tag{2.2}$$

#### 2.2 O espectro de energia

O espectro de energia dos raios cósmicos é bem amplo, possuindo desde partículas com energia da ordem de alguns GeV até outras com energia acima de  $10^{20}$  eV (14), como mostrado na figura 2. Porém, a ocorrência de eventos com altíssimas energias é muito rara. O fluxo de raios cósmicos é o número médio de partículas por unidade de área, de tempo e ângulo sólido, que atinge a Terra e pode ser descrito como uma lei de potência do tipo  $\frac{dN}{dE} \propto E^{-\gamma}$ , onde  $\gamma$  é o índice espectral.

É possível classificar o espectro de energia dos raios cósmicos em três estruturas principais. A primeira, conhecida como "primeiro joelho", está próxima a  $10^{15}$  eV e possui uma mudança no índice espectral de 2,7 para 3,1. O fluxo de raios cósmicos incidentes na Terra, que possuem energia próxima dessa faixa, é da ordem de uma partícula por metro quadrado por ano. O "segundo joelho" localiza-se em  $10^{17}$  eV e possui uma leve alteração no índice espectral. (15) Nas proximidades de  $10^{18}$  a  $10^{19}$  eV, está localizada a estrutura conhecida como "tornozelo" do espectro, na qual há uma nova alteração do índice espectral de 3,0 para 2,7,



**Figura 2** – Espectro de raios cósmicos. A figura mostra o fluxo multiplicado por uma potência  $E^{2.5}$ , de forma que seja mais nítido as estruturas como o "joelho"e o "tornozelo".

Fonte: FRASCHETTI (12)

novamente. Para essa faixa de energia, o fluxo de partículas é muito menor, comparado as do primeiro e segundo joelho, sendo da ordem de uma partícula por quilômetro quadrado por ano. Em energias acima de  $10^{19}$  eV, existe a supressão do fluxo de partículas, possivelmente devido a uma limitação no mecanismo de aceleração das fontes de raios cósmicos (16) e também ao efeito GZK \*(17, 18). Este pode ser exemplificado em um evento, no qual um próton de altíssima energia interage com um fóton da radiação cósmica de fundo. É possível que ocorram os processos:  $p + \gamma_{\rm CMB} \rightarrow n + \pi^+$  ou  $p + \gamma_{\rm CMB} \rightarrow p + \pi^0$ , desde que a energia mínima do próton seja de aproximadamente  $4 \times 10^{19}$  eV. Dessa forma, há uma supressão do fluxo de prótons que incide na Terra com energia acima desse valor, uma vez que são gerados píons com energia inferior à da partícula inicial. Algumas das importâncias de conhecer a quantidade e composição do fluxo médio de partículas é descobrir se as partículas vieram de fontes localizadas dentro ou fora da galáxia e obter resultados para concretizar teorias sobre mecanismos de aceleração.

Acredita-se que o joelho seja uma região na qual ocorre uma saturação na aceleração de primários mais leves (Z < 6) por remanescentes de Supernovas dentro na nossa galáxia, uma vez que a aceleração de uma partícula carregada depende diretamente de sua carga elétrica. Há ainda um "segundo joelho" nas proximidade de  $8 \times 10^{16}$  eV. (15) Analogamente ao primeiro joelho, aqui ocorre um limite para aceleração de primários mais pesados e, consequentemente, uma leve diminuição do fluxo de raios cósmicos. No tornozelo há uma nova mudança no índice espectral e uma possível explicação para esse fato é que o fluxo de partículas aceleradas em fontes galáticas, a essa energia, iguala-se ao fluxo de fontes extragaláticas. No entanto, ainda não há confirmação sobre esse fato.

<sup>\*</sup> Efeito Greisen–Zatsepin–Kuzmin.

#### 2.3 Chuveiros atmosféricos

Quando uma partícula carregada adentra na atmosférica da Terra, ela colide com moléculas de ar ali presentes (núcleos de Nitrogênio, Oxigênio, etc). Essa colisão gera uma cascata de partículas secundárias denominada como chuveiro atmosférico extenso (EAS†). O primeiro cientista a observar esse fenômeno foi Pierre Auger. (19) Através de cintiladores separados, ele e seus colaboradores investigaram o fluxo de partículas no solo, motivando experimentos, que dessa forma, detectariam partículas que compõe os chuveiros atmosféricos. (1)

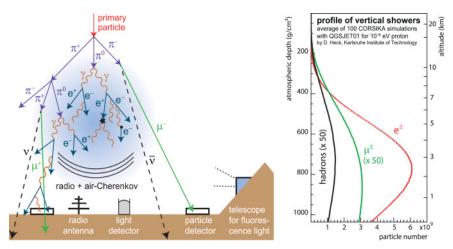
Como o fluxo de raios cósmicos de altíssima energia é extremamente baixo, torna-se inviável sua detecção direta, como as que são feitas com balões, daí a importância de construir experimentos no solo capazes de detectar cascatas geradas por primários. Após a descoberta inicial, investiu-se em observatórios que pudessem detectar os EAS no solo e investigar algumas das suas características. O primeiro a ser construído com essa finalidade foi o Volcano Ranch, localizado no Novo México a uma altitude de 1800 m acima do nível do mar. (20) Atualmente, dois dos maiores observatórios para detecção de raios cósmicos são o Pierre Auger (6), no hemisfério sul e o Telescope Array (21), no norte.

Um dos objetivos do estudo de chuveiros atmosféricos é conhecer a composição do fluxo primário que incide na Terra e também obter um melhor conhecimento na interação hadrônica, uma vez que a energia dos primários é 40 vezes maior que as atingidas no LHC (comparadas no referencial do centro de massa). Os EAS, ilustrados na figura 3 possuem três componentes: a eletromagnética, hadrônica e muônica.

A interação da partícula primária com o núcleo de um átomo da atmosfera é de origem essencialmente hadrônica. Nessa colisão são geradas diversas partículas secundárias, tais como mésons K e  $\eta$ , mas principalmente  $\pi^{\pm}$  e  $\pi^{0}$ . (14) Os píons neutros são os maiores responsáveis pelo desenvolvimento da cascata eletromagnética. Seu tempo de vida média é da ordem de  $10^{-16}$  s, implicando que seu decaimento em um par de fótons é praticamente instantâneo. Os fótons, por sua vez, geram pares elétron-pósitron e estes emitem radiação bremsstrahlung, ao interagir com a matéria. Esse processo continua até que a perda de energia devido a ionização seja comparável com a da emissão bremsstrahlung. Essa energia  $\xi_c^e$  é conhecida por energia crítica e gira em torno de 85 MeV, no ar.

Os píons carregados possuem um tempo de vida média maior que os neutros. Dessa forma, eles conseguem percorrer uma distância de 7,8m, em seu referencial, antes de decair. Quando um conjunto de  $\pi^{\pm}$  é criado, estes interagem novamente com os núcleos de ar da atmosfera, gerando novos píons, carregados e neutros. Os neutros decaem em fótons, alimentando a componente eletromagnética do chuveiro, e os carregados interagem novamente até atingirem um limiar de energia e quando o isso ocorre, decaem em múons e liberam neutrinos. A grande maioria dos múons produzidos no chuveiro deve-se à cascata hadrônica (mésons e núcleons). Apenas

Extensive Air Shower.



**Figura 3** – Do lado esquerdo da figura está uma imagem ilustrativa de uma cascata de partículas. Ao lado direito, uma imagem com um perfil longitudinal de chuveiros para diferentes tipos de partículas.

Fonte: SCHRÖDER (22)

componentes eletromagnéticas e muônicas do chuveiro são detectados em observatórios no solo, uma vez que essas partículas são fracamente interagentes.

Uma das características analisadas pelos observatórios são os perfis lateral e longitudinal do chuveiro. A profundidade longitudinal *X* que um chuveiro atravessa de matéria é definida como

$$X = \int_{l}^{\infty} \rho(l')dl', \tag{2.3}$$

na qual l é a distância percorrida e  $\rho$ , a densidade do meio. Quando o número de partículas produzidas é máximo, denomina-se  $X_{\text{max}}$  a profundidade máxima atravessada por essa cascata. O valor de  $X_{\text{max}}$  depende da energia primária, como será discutido em mais detalhes no capítulo 4. Conhecendo o valor médio dessa grandeza é possível estimar qual a composição dos raios cósmicos incidentes, não chuveiro a chuveiro, mas sim de um conjunto.

#### 2.4 O Modelo de superposição

Os raios cósmicos são compostos por partículas de origem extraterrestre, sejam prótons, pósitrons ou núcleos de Ferro, por exemplo. Saber qual o tipo de primário gerou o chuveiro faz toda a diferença, uma vez que a interação primário-ar resulta em diferentes números de secundários e de profundidade atmosférica. O caso mais simples, para se desenvolver um modelo que descreva esse fenômeno, é a colisão de um próton primário. No entanto, como a energia do primário é muito maior que a energia de ligação atômica, é possível estender a validade desse resultado para átomos mais pesados. É necessário considerar um núcleo de massa atômica *A* como sendo a interação de *A* núcleons independentes com o ar. Essa simplificação é conhecida

como modelo de superposição e descreve de forma satisfatória grandezas observáveis, como número de múons e  $X_{\rm max}$ .

Com esse resultado do modelo de superposição, uma maneira de se estimar a composição de um conjunto de primários é conhecendo a taxa de elongação *D*. A taxa de elongação é definida como sendo a variação da profundidade máxima pelo logaritmo da energia primária ou, de forma matemática (7)

$$D = \frac{d\langle X_{\text{max}} \rangle}{d(\ln E)}.$$
 (2.4)

Com a definição acima e assumindo que, para um núcleo de massa A, valha a relação E'=E/A, temos

$$\langle X_{\text{max}}^p \rangle = D_p \ln E + c, \tag{2.5}$$

$$\langle X_{\text{max}}^A \rangle = D_p \ln E - D_p \ln A + c. \tag{2.6}$$

Considerando um conjunto de primários que dão origem a chuveiros, é possível obter uma relação de  $\langle X_{\rm max} \rangle$  com o logaritmo da massa

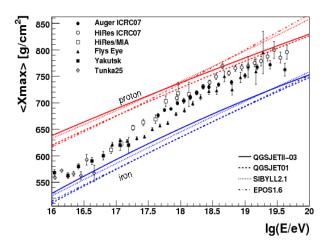
$$\langle X_{\text{max}} \rangle \approx \sum_{i} f_i \langle X_{\text{max}}^{A_i} \rangle = \langle X_{\text{max}}^p \rangle - D_p \langle \ln A \rangle,$$
 (2.7)

onde  $f_i$  é a fração de chuveiros que são gerados por um núcleo de massa atômica  $A_i$ . Como  $X_{\text{max}}$  é um observável, é possível fazer uma estimativa média da composição que gerou os chuveiros utilizando as equações (2.5) e (2.7)

$$\langle \ln A \rangle = \frac{\langle X_{\text{max}}^p \rangle - \langle X_{\text{max}} \rangle}{\langle X_{\text{max}}^p \rangle - \langle X_{\text{max}}^A \rangle} \ln A. \tag{2.8}$$

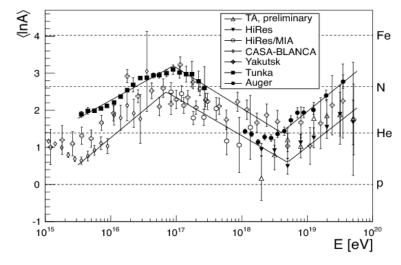
Diversos estudos têm sido realizados sobre a composição e origem dos raios cósmicos. (7) A figura 4 mostra uma comparação de dados de observatórios com detector Cherenkov (Tunka, Yakutsk,e CASA-BLANCA) e com detectores de luz fluorescente (HiRes/MIA, HiRes, Auger e TA) com os modelos computacionais de interação hadrônica QGSJet-II-03, EPOSv1.6 e Sibyll2.1. O intuito dessa análise é buscar uma possível estimativa da composição de primários que deram origem a uma cascata de partículas observando se no espectro a composição aproxima-se mais do próton ou do ferro.

A figura 5 mostra a média do logaritmo da massa de partículas primárias em função da energia. Nessa figura, o modelo EPOS1.6 foi utilizado para comparar com os dados dos observatórios, a partir de resultados obtidos do  $X_{\rm max}$  da figura 4. É interessante notar que desde  $10^{15}$  eV até  $10^{17}$  eV a massa média aumenta com aumento da energia inicial, uma vez que a aceleração e ganho de energia dependem diretamente da carga da partícula. Esses valores



**Figura 4** – Medidas de  $\langle X_{\text{max}} \rangle$  obtidas nos observatórios com detectores Cherenkov (Tunka, Yakutsk e CASA-BLANCA) e com detectores de luz fluorescente (HiRes/MIA, HiRes, Auger e TA). Os dados são comparados a simulações de interações hadrônicas (QGSJet-II-03, EPOSv1.6 e Sibyll2.1) para analisar a composição dos raios cósmicos.

Fonte: KAMPERT (7)



**Figura 5** – Média logarítmica da massa A extraída da análise de  $X_{\text{max}}$  em observatórios e simulações computacionais.

Fonte: KAMPERT (7)

coincidem com o primeiro e segundo joelho do espectro, onde há uma possível saturação na aceleração de partículas leves e pesadas, respectivamente, como fora discutido anteriormente. Seguinte a essa região, a composição de primários começa a ficar mais leve, indicando uma possível mudança nas fontes que aceleram as partículas primárias. Novamente, há uma mudança no comportamento do espectro quando a energia está próxima a  $10^{18.8}$  eV. Essa região coincide com o "tornozelo" no fluxo de raios cósmicos e por isso pode ser interpretado como sendo uma mudança de meio galático para extragalático nas fontes que geram os primários. (23)

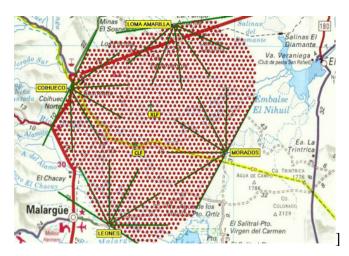
#### 3 O OBSERVATÓRIO PIERRE AUGER

Eventos ultra energéticos são extremamente raros, conforme foi apresentado na seção anterior. A detecção direta de raios cósmicos com energias acima de 10<sup>18</sup> eV torna-se inviável, uma vez que o fluxo nessa faixa de energia é, em média, uma partícula por metro quadrado por ano e é ainda menor para maiores energias. Uma forma de detectar grandezas observáveis em raios cósmicos é medindo a cascata de partículas geradas por estes. Os observatórios no solo tornam-se a melhor solução para realizar experimentos nessas condições, uma vez que podem ter uma vasta área com detectores de partículas. Atualmente, os dois observatórios que realizam medições nas energias mais altas são o Telescope Array (TA) (21), no hemisfério norte e o Observatório Pierre Auger (6), no sul. Nesta seção, serão apresentados detalhes da estrutura e formas de detecção de raios cósmicos pelo Observatório Pierre Auger, além de mostrar sua importância para as pesquisas em astrofísica.

#### 3.1 Estrutura do Observatório

O Observatório Pierre Auger localiza-se em Malargüe, província de Mendoza, na região oeste da Argentina. O projeto de construção teve inicio em 2002 e foi concluído em 2008, porém desde 2004 já houve um início na obtenção de dados. Com a colaboração de 18 países, entre eles o Brasil, e mais de 350 pesquisadores, o objetivo era construir um observatório que fosse capaz de explorar em mais detalhes a região do espectro de energia acima de 10<sup>19</sup> eV. Conhecer a direção de chegada dos raios cósmicos, a composição dos primários e buscar um melhor entendimento da supressão no fluxo de raios cósmicos em altíssimas energias foram alguns dos elementos que também motivaram esse a realização desse projeto.

Para obter melhores resultados, o Pierre Auger conta com um sistema híbrido de detecção, com o detector de superfície (SD, do inglês *Surface Detector*) e o detector de fluorescência (FD, do inglês *Fluorescence Detector*). Dessa forma, raios cósmicos podem ser detectados simultaneamente por meio de suas técnicas distintas, implicando em uma medida mais precisa. O SD é composto de 1660 tanques de água que cobrem uma área de aproximadamente 3000 Km² (aproximadamente duas vezes a área do município de São Paulo) e o FD é, atualmente, formado por 27 detectores de fluorescência distribuídos em quatro estações. A figura 6 mostra um esquema de como estão distribuídos os detectores do observatório. Os pontos em vermelho são os mais de 1600 tanques de água, que constituem o detector de superfície. Em verde, estão as linhas que indicam o ângulo de observação dos telescópios de fluorescência. Em cada uma das quatro estações: Coihueco, Los Leones, Los Morados e Loma Amarilla, estão seis telescópios de fluorescência de forma que estes cubram um ângulo de visão de 180°. A seguir será feita uma explicação mais detalhada de como funcionam os detectores no observatório Pierre Auger.



**Figura 6** – Figura esquemática da distribuição dos detectores no Observatório Pierre Auger. Os pontos vermelhos ilustram os tanques e as linhas verdes indicam o ângulo de observação de um telescópio de fluorescência.

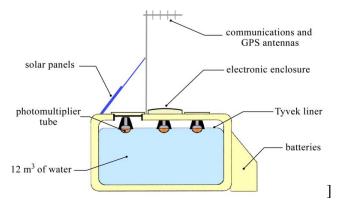
Fonte: THE PIERRE AUGER COLLABORATION (6)

#### 3.2 O Detector de Superfície

A estação com SD conta com 1660 tanques, contendo água pura, cuja capacidade é de 12000 litros. Cada tanque desse possui um diâmetro de 3.6 m e uma altura de 1.2 m, como pode ser visto na figura 7. O seu sistema de detecção consiste em três tubos fotomultiplicadores (PMTs, do inglês *photomultiplier tubes*) Photonis XP1805/D1 distribuídos simetricamente em relação ao eixo central da tampa do tanque. Quando um frente de onda com partículas secundárias atinge um desses tanques, é liberado um cone de luz Cherenkov, uma vez que a velocidade de partículas carregadas é maior que a da luz nesse meio. Para medir essa radiação Cherenkov os PMTs contam com um fotocatodo e oito dínodos. A luz medida pelas PMTs e esse sinal é convertido em unidade de VEM (*Vertical Equivalent Muon*, do inglês). Essa unidade de medida é baseada na quantidade de múons que atravessam o tanque de verticalmente liberando luz Cherenkov. A utilização de VEM como unidade é para calibração dos aparelhos, sendo possível assim ter uma referência comum entre os tanques. Também é possível medir chuveiros iniciados por fótons de altíssimas energias.

Medir a função de distribuição lateral (LDF, do inglês *Lateral Distribuction Function*) de um chuveiro e conhecer a direção de chegada das partículas primárias são as principais aplicações do SD. A LDF indica o quanto um chuveiro de partículas se distanciou do seu eixo central. Conhecendo a intensidade de sinal que passa por tanques em uma dada distância, é possível estimar a distribuição de energia das partículas primárias.

O ciclo de funcionamento dos SD é praticamente de 100%. Diferentemente dos FD, eles conseguem operar mesmo durante o dia e em clima chuvoso. Uma célula de energia solar com potência de 10 W em cada SD alimenta os PMTs e outros componentes eletrônicos, tais como



**Figura 7** – Imagem ilustrativa de um detector de superfície. Nela é possível verificar o arranjo dos três PMTs que captam a luz Cherenv emitida quando as partículas carregadas entram em contato com a água no tanque.

Fonte: VICHA (24)

processador de dados, GPS e controladores de potência. Quanto à manutenção dos detectores, o maior problema é em relação aos PMTs, que estão sujeitos a condições climáticas adversas, tais como grandes variações de temperatura e alta umidade nos tanques. Ainda assim, a taxa de PMTs que se tornam inoperáveis é, em média, 20 por ano, o que significa menos de 0.5% do total.

#### 3.3 O Detector de Fluorescência

Os 27 telescópios de fluorescência que compõe o FD estão distribuídos em quatro sítios. Cada um dos telescópios possui um ângulo de visão azimutal de  $30^{\circ} \times 30^{\circ}$  e um ângulo de elevação de  $30^{\circ}$ , porém, com elevação horizontal mínima de  $1.5^{\circ}$ . Dessa forma os seis telescópios localizados em cada sítio compreendem um ângulo azimutal de cobertura de  $180^{\circ}$  no total. Até o ano de 2009 haviam apenas 24 telescópios, divididos igualmente entre as quatro estações e naquele ano foram incluídos mais três na estação de Coihueco. A extensão foi chamada de HEAT (do inglês *High Elevation Auger Telescopes*), onde cada cada um dos telescópios possui um ângulo de detecção entre  $30^{\circ}$  e  $60^{\circ}$ . O objetivo é detectar raios cósmicos com energias inferiores às detectadas pelos instrumentos anteriores, ou seja, na faixa entre  $10^{17}$  eV e  $10^{18.5}$  eV.

Uma das principais funções do FD é a medição do perfil longitudinal de chuveiros atmosféricos. Quando uma partícula carregada colide com o ar na atmosfera terrestre há liberação de radiação ultra violeta, uma vez que as moléculas de nitrogênio ou oxigênio, por exemplo, excitam-se na colisão e liberam fótons ao voltar para o estado fundamental. A energia liberada pelas moléculas de ar é proporcional à energia transmitida durante a colisão com partículas carregadas do chuveiro. O perfil longitudinal é a taxa com que a energia das partículas do chuveiro dissipa-se no ar ao longo da profundidade atmosférica. Dessa forma, é possível obter parâmetros que, utilizando a função de Gaisser-Hillas, fornecem observáveis tais como a energia

da partícula primária, a profundidade máxima de um chuveiro,  $X_{\text{max}}$  e a composição de massa de raios cósmicos incidentes. (13)

O princípio de funcionamento baseia-se na reflexão da radiação que incide sobre os espelhos dos detectores. Cada telescópio possui um conjunto de espelhos com 3.7 m de diâmetro total e quando a luz incide sobre este, o feixe é focalizado sobre um conjunto de sensores que transforma a luz em sinal elétrico. Uma imagem ilustrativa de um telescópio de fluorescência pode ser visto da figura 8.

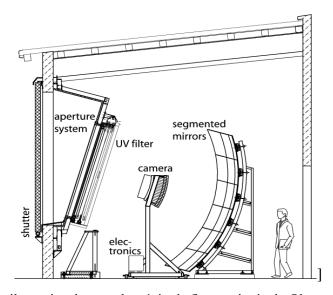


Figura 8 – Imagem ilustrativa de um telescópio de fluorescência do Observatório Pierre Auger.

Fonte: ROULET (25)

Como a radiação emitida pelas moléculas tem uma baixa intensidade comparado a emitida pelo sol ou mesmo pela lua, implicando que o ciclo de funcionamento dos FD é de aproximadamente 15%. A obtenção de dados é realizada apenas em noites não chuvosas ou naquelas em que o brilho da lua é baixo suficiente.

Para mais detalhes técnicos sobre a eletrônica dos instrumentos, calibração dos detectores e detalhes na obtenção de dados no observatório Pierre Auger o leitor pode verifica-los nas referências (6, 26).

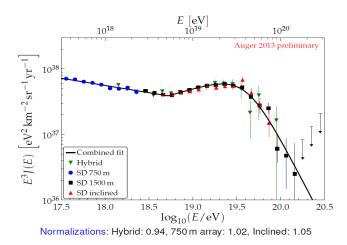
#### 3.4 Resultados Importantes

Desde o ano de 2004 o observatório Pierre Auger tem realizado tomadas de dados. Os resultados encontrados foram de grande importância para comunidade científica enaltecendo assim a relevância dos experimentos lá realizados. Alguns dos feitios importantes foram as pesquisas em altíssimas energias verificando as duas estruturas presentes nessa região do espectro, os estudos sobre a composição das partículas primárias que atingem a Terra, a descoberta da

anisotropia no fluxo de raios cósmicos e um limite superior para o fluxo de fótons. A seguir será feita uma breve explicação desses acontecimentos.

#### 3.4.0.1 O espectro em altíssimas energias

Um dos principais resultados obtidos pelo Observatório Pierre Auger foram as pesquisas relativas ao estudo do fluxo de raios cósmicos em altíssimas energias. O Auger detectou eventos com energias acima de  $10^{17}$  eV indo até valores na região de  $10^{20}$  eV. Essa região do espectro é onde estão localizadas duas estruturas, um tornozelo do espectro e uma supressão no fluxo. O tornozelo está em  $5 \times 10^{18}$  eV e caracteriza-se pela mudança no índice espectral passando de  $\gamma = 3.23$  para  $\gamma = 2.63$ , como pode ser visto na figura 9.



**Figura 9** – Fluxo escalado de raios cósmicos em altíssima energia. Nessa figura os pontos são os dados do Auger e a linha cheia é uma combinação de três curvas, com valores de γ distintos nas regiões do espectro. Os locais onde há mudanças no índice espectral é no tornozelo e na supressão.

Fonte: ROULET (25)

Ainda não é totalmente conhecido o motivo que leva a essa mudança no índice espectral, mas as teorias mais aceitas indicam que é uma passagem de fontes que aceleram raios cósmicos localizadas meio galático para o extragalático. Fato esse que é motivado devido a mudança de composição dos primários que atingem a Terra e também à anisotropia do fluxo em altíssimas energias, que será discutido adiante. Como fora apresentado no capítulo anterior, o fluxo de raios cósmicos é descrito como uma lei de potência e acima de  $4 \times 10^{19}$  eV há uma supressão nesse fluxo e que foi verificada pelo Observatório Pierre Auger. Acredita-se que essa supressão é devida principalmente a dois motivos. Um deles é o efeito GZK e o outro é um limiar para aceleração máxima a que uma partícula pode ser submetida nas fontes.

#### 3.4.0.2 Composição de massa

No observatório Pierre Auger é possível investigar a região de mais altas energias do espectro. Entretanto, não é possível medir diretamente a massa da partícula primária, mas sim a

distribuição do perfil longitudinal dos chuveiros. Para fazer uma estimativa da massa média das partículas que deram origem a chuveiros, é feito primeiramente um ajuste que melhor se adéque a função de Gaisser-Hillas

$$\frac{dE(x)}{dx} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{max}} \left(\frac{X - X_0}{X_{\text{max}} - X_0}\right)^{\frac{X_{\text{max}} - X_0}{\lambda}} e^{\frac{X_{\text{max}} - X}{\lambda}},\tag{3.1}$$

na qual existem quatro parâmetros livres:  $X_0$ ,  $X_{\text{max}}$ ,  $\lambda$  e  $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{max}}$ . A distribuição de  $X_{\text{max}}$  é parametrizada e, utilizando o modelo de superposição, a primeira aproximação feita é

$$\langle X_{\text{max}} \rangle = \langle X_{\text{max}}^p \rangle - D_p \langle \ln A \rangle.$$
 (3.2)

Esta equação que fornece o primeiro momento da distribuição de  $X_{\text{max}}$  é comparada com resultados de simulações de Monte Carlo, tais como EPOS-LHC e QGSJet-II-04, e dessa maneira são obtidos os perfis para a massa média de um conjunto de chuveiros.

Os dados obtidos no Auger mostraram que, após o tornozelo do espectro, a composição média da massa começa a aumentar. Esse fato, possivelmente indica a passagem de fontes aceleradoras do meio galático para o extragalático.

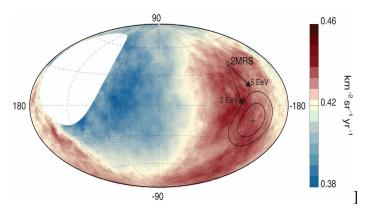
#### 3.4.0.3 A anisotropia do fluxo de Raios Cósmicos

Um dos desafios atuais em astrofísica é conhecer as fontes de raios cósmicos. Para partículas carregadas essa tarefa torna-se ainda mais complicada, uma vez que raios cósmicos interagem com campos eletromagnéticos e serem desviados de sua trajetória inicial. No entanto, mesmo que a trajetória dos raios cósmicos seja alterada, é possível identificar uma anisotropia na distribuição da direção de incidência, desde que a distribuição angular seja em grande escalas angulares. Uma análise do Pierre Auger foi feita baseando-se em mais de 5500 eventos com energia superiores a 20 EeV e constatou que há um desfavorecimento para a isotropia da direção de chegadas de raios cósmicos. (27) O resultado do Auger foi comparado com dados obtidos de duas fontes galáticas emissoras de raios gama comprovando a anisotropia, com pelo menos 4.0 $\sigma$  de confiança.

Foi observado também que em eventos com energia superior a 8 EeV, a anisotropia pode ser representada com um dipolo na direção de chegadas dos raios cósmicos. É possível ver essa anisotropia ilustrada na figura 10.

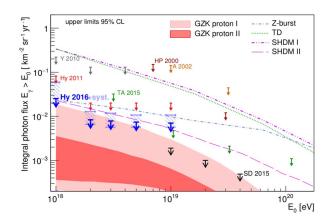
#### 3.4.0.4 Limite superior no fluxo de fótons

O estudo de fótons de altas energias também é muito importante dentro do contexto astrofísico. Uma das razões para fazer experimentos que os detectem é conhecer a direção da fonte que os emitiu. Diferentemente dos raios cósmicos carregados, os raios gama (fótons) não sofrem alteração na sua propagação mesmo quando em contato com campos eletromagnéticos. O observatório Pierre Auger tem se dedicado a medir fótons primários de altíssima energia, mas



**Figura 10** – Mapa de direção de chegadas de raios cósmicos vindo de direções do universo. É possível observar uma anisotropia (região azul e vermelha do mapa).

Fonte: AAB et al. (2)



**Figura 11** – Imagem que mostram os limites superiores para o fluxo de fótons. O nível de confiança desses limites, para o Auger, é de 95%.

Fonte: AAB et al. (13)

apenas três candidatos em nove anos de coletas de dados foram encontrados. (13) Os modelos top-down predizem um grande fluxo de fótons devido ao decaimento de matéria exótica. Limites superiores, como na figura 11 foram impostos pelo Pierre Auger, de tal forma que se, de fato, houvesse um fluxo esperado acima desse corte, esses eventos já teriam sido detectados. Esse resultado leva a acreditar que essa classe de modelos não é compatível com o que é visto na natureza.

# **4 MODELOS ANALÍTICOS E MODELOS COMPUTACIONAIS**

Nas seções anteriores foram discutidos aspectos gerais sobre os raios cósmicos, bem como a importância dos experimentos realizados pelo Observatório Pierre Auger. Neste capítulo, será apresentado o modelo de Heitler-Matthews (8), que fornece equações analíticas para determinar grandezas físicas presentes em um EAS, tais como o número médio de partículas e sua profundidade longitudinal máxima. Também será discutido a física por trás de alguns dos pacotes geradores de eventos utilizados para simulações computacionais de chuveiros.

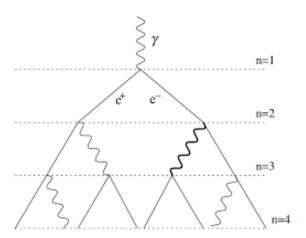
## 4.1 O modelo de Heitler

Os chuveiros de partículas são fenômenos físicos extremamente complexos. As partículas secundárias, geradas nas colisões com o gás atmosférico, podem ser de natureza eletromagnética, tais como elétrons ou pósitrons, ou de origem hadrônica, como káons e píons, por exemplo. A estocasticidade aliada ao grande número de partículas presentes em uma cascata torna inviável o cálculo analítico rigoroso do desenvolvimento do chuveiro ao longo da atmosfera. (14, 28) Por isso, hoje em dia, os pacotes computacionais que empregam o método de Monte Carlo são amplamente utilizados para simular interações de partículas e, consequentemente, chuveiros atmosféricos.

Em meados do século XX, antes da existência de computadores que realizam cálculos com ultra rapidez, Walter Heitler desenvolveu um modelo analítico que buscava descrever um chuveiro eletromagnético de forma simples, explorando aspectos físicos ali presentes, sem maiores detalhes. Este é um *toy-model* que consiste em um tipo de partícula, com energia  $E_0$ , que pode representar um fóton, elétron ou pósitron. O fóton gera um elétron e um pósitron via produção de pares. O par  $e^-e^+$  por sua vez, percorre uma distância fixa  $d=\lambda_r \ln 2$ , onde  $\lambda_r$  é o comprimento médio de radiação, antes de colidir com partículas na atmosfera, radiando um fóton, via bremsstrahlung. Uma imagem ilustrativa pode ser vista na figura 12. Após percorrer n camadas o número total de partículas é  $2^n$ , cujas energias individuais são igualmente distribuídas. Ao atingir uma energia crítica  $\xi_c$ , a produção de novas partículas cessa. Essa energia crítica é o valor no qual a perda de energia via radiação torna-se inferior às perdas devido a colisões. Na atmosfera terrestre esse valor de  $\xi_c$  é aproximadamente 85 MeV.

Esse modelo de cascata eletromagnética, apesar de muito simplificado, possui resultados interessantes. Um deles é que o número máximo de partículas aumenta linearmente com  $E_0$  e o outro é que a profundidade máxima  $X_{\rm max}$  é proporcional ao logaritmo da energia inicial. É possível verificar isso da seguinte forma: seja  $E_0$  a energia da partícula primária. Quando o chuveiro está em sua profundidade máxima, a energia de cada uma das partículas é  $\xi_c$ , logo

$$E_0 = N_{\text{max}} \, \xi_c \Rightarrow N_{\text{max}} = \frac{E_0}{\xi_c},\tag{4.1}$$



**Figura 12** – Imagem ilustrativa de uma um chuveiro puramente eletromagnético, o qual é o objeto de modelagem pelo modelo de Heitler.

Fonte: MATTHEWS (8)

ou seja, o número máximo de partículas na cascata é diretamente proporcional à energia primária.

As camadas nesse modelo possuem tamanho d, fixo. Dessa forma, é possível afirmar que, tendo percorrido n camadas, a profundidade é

$$x = nd = n\lambda_r \ln 2. \tag{4.2}$$

Aplicando o resultado da equação (4.1) e mais o fato de que o número total de partículas é  $N_{\text{max}} = 2^{n_c}$ , onde  $n_c$  é o número da camada onde as partículas atingiram a energia crítica, a profundidade longitudinal máxima é dada por

$$X_{\text{max}}^{EM} = n_c \lambda_r \ln 2 = \lambda_r \ln \left( \frac{E_0}{\xi_c} \right). \tag{4.3}$$

O índice superior foi utilizado para enfatizar que este é o resultado para o máximo de um chuveiro puramente eletromagnético. Como fora dito anteriormente, esses resultados para  $N_{\text{max}}$  e  $X_{\text{max}}$  são interessantes, pois fornecem resultados muito bons comparando com simulações de chuveiros iniciados por partículas eletromagnéticas. (8)

#### 4.2 O modelo de Heitler-Matthews

O modelo de Heitler é uma modelagem para chuveiros eletromagnéticos. Entretanto, é conhecido que as cascatas de partículas também são iniciadas por hádrons, como prótons ou píons, por exemplo, e também por núcleos mais pesados. Motivado por esse fato, James Matthews buscou implementar o modelo de Heitler estendendo-o para chuveiros iniciados por um próton. Neste modelo a ideia é análoga: um próton primário colide com partículas na atmosfera gerando uma cascata de partículas secundárias. Aqui, os produtos dessa colisão são píons, neutros e carregados. Estes por sua vez percorrem sempre uma distância fixa  $d = \lambda_I \ln 2$ ,

com  $\lambda_I$  (aproximadamente 120 g/cm² no ar, e constante para partículas com energia entre 10 e  $10^3$  GeV) sendo o comprimento médio de interação. Uma imagem ilustrativa pode ser vista na figura 13. Esse processo de produção de novas partículas continua até que os píons carregados atinjam uma energia crítica e então, decaiam em múons. A energia crítica  $\xi_c^{\pi}$ , aqui é caracterizada por ser o valor onde o comprimento de decaimento torna-se menor do que o comprimento de interação no ar.

A razão de produção média de píons carregados em relação aos neutros é de 2:1, ou seja a cada 3 píons criados, dois serão carregados e um neutro. Píons carregados podem gerar outros píons carregados e neutros. Já os  $\pi_0$  decaem muito rapidamente em um par de fótons. Dessa forma, a energia de um  $\pi^{\pm}$  da n-ésima camada é

$$E_{\pi} = \frac{E_0}{\left(\frac{3}{2}N_{ch}\right)^n}. (4.4)$$

Na equação acima,  $N_{ch}$  é o total de píons carregados que existem nessa camada e o fator 3/2 é porque a cada interação apenas 2/3 da energia total está disponível para píons carregados. O valor de  $\xi_c^{\pi}$ , no qual cessa a produção de novas partículas varia com a energia primária, mas está em torno de 20 GeV para primários com a energia na região entre o primeiro joelho e o tornozelo do espectro de raios cósmicos. Considerando o chuveiro em sua última camada e aplicando logaritmo na equação (4.4), temos

$$n_c = \frac{\ln(E_0/\xi_c^{\pi})}{\ln\left(\frac{3}{2}N_{ch}\right)}.$$
(4.5)

Essa equação fornece o número de camadas que um chuveiro iniciado por próton atingirá, dados os parâmetros como a energia inicial e o número médio de píons gerados,  $N_{ch}$ . O número de píons carregados ao atingir a energia crítica e, consequentemente o número de múons, é dado por (8)

$$N_{\mu} = (N_{ch})^{n_c} = \left(\frac{E_0}{\xi_c^{\pi}}\right)^{\beta}.$$
 (4.6)

Nesta equação  $\beta$  é dado pela razão entre os logaritmos do número de píons carregados pelo número total de píons, e que possui um valor próximo de  $0.85^*$ . Ainda na equação (4.6), verificase também a dependência exponencial do número de múons com a energia primária,  $E_0$ .

Para determinar o  $X_{\rm max}$ , a tarefa é um pouco mais complicada. Por definição, o  $X_{\rm max}$  de um chuveiro é a profundidade atmosférica na qual o número de partículas é máximo. No modelo de Heitler, o  $X_{\rm max}$  foi obtido somando todas as contribuições de energia tratando o sistema como um único chuveiro. Já no modelo hadrônico de chuveiros, existem sub-chuveiros, uma vez que há tanto a componente dos hádrons quanto a eletromagnética. O que de fato é feito, é considerar

<sup>\*</sup> Esse valor de  $\beta = 0.85$  é válido ao longo do espectro porque esse parâmetro não varia muito com a energia. No regime de altíssimas energias  $\beta = 0.92$ .

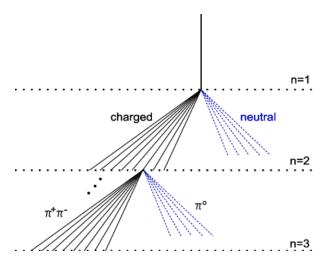


Figura 13 – Imagem ilustrativa de um chuveiro hadrônico, contendo píons neutros e carregados.

Fonte: ULRICH; ENGEL; UNGER (29)

os efeitos na primeira interação para estimar o valor de  $X_{\rm max}$ . Na primeira interação, os píons neutros contém 1/3 da energia primária e no desenvolvimento do chuveiro ao longo da atmosfera esse valor vai ampliando, uma vez que a colisão de píons carregados também gera píons neutros. Devido a esse efeito de sub-chuveiros não ser levado em conta, o valor da profundidade máxima no modelo de Matthews-Heitler é inferior ao valor obtido por simulações mais detalhadas. Dessa forma, a profundidade de máximo do chuveiro iniciado por um próton é

$$X_{\text{max}}^p = X_0 + \lambda_r \ln \left( \frac{E_0}{3N_{ch}\xi_c} \right). \tag{4.7}$$

Essa fórmula é análoga à (4.3), porém aqui a energia disponível é  $E_0/(3N_{ch})$  e há um comprimento de primeira interação  $X_0 = \lambda_I \ln 2$ . Incluindo valores para os parâmetros livres, os cálculos indicam um valor de 100 g/cm² inferior aos resultados de pacotes de simulações, como o QGSJet-II-04 (30) e o SIBYLL (31, 32). Essa diferença é devida à contribuições dos sub-chuveiros eletromagnéticos, cujos efeitos estão além dos objetivos do modelo.

Um resultado importante que o modelo de Heitler-Matthews fornece é o da taxa de elongação. Reescrevendo a equação (4.7) em termos da (4.3) obtemos uma comparação entre chuveiros desencadeados por prótons e por fótons, ou seja

$$X_{\text{max}}^{p} = X_0 + X_{\text{max}}^{EM} - \lambda_r \ln(3\xi_c). \tag{4.8}$$

A taxa de elongação pode ser escrita como

$$D^{p} = D^{EM} + \frac{d}{d \log_{10}(E_0)} [X_0 - \lambda_r \ln(3\xi_c)]. \tag{4.9}$$

Os resultados de simulações fornecem um resultado de 58 g/cm<sup>2</sup> por década, assim como o modelo de Heitler-Matthews. Em outras palavras, o valor para a profundidade máxima está abaixo do valor mais exato, porém a maneira com que a profundidade aumenta com a energia primária está em acordo.

# 4.2.1 Modelo de Heitler-Matthews para núcleos primários

A discussão para explicar o modelo de chuveiros hadrônicos foi feita partindo do pressuposto de que a partícula primária era um próton. Para aplicar esse modelo para primários que sejam núcleos atômicos, tal como Carbono ou Ferro, deve-se fazer uso do modelo de superposição. Se um núcleo tiver massa atômica A e energia  $E_0$ , assume-se que esse caso pode ser tratado como A núcleons simples com energia  $E_0/A$ , interagindo individualmente com o gás atmosférico.

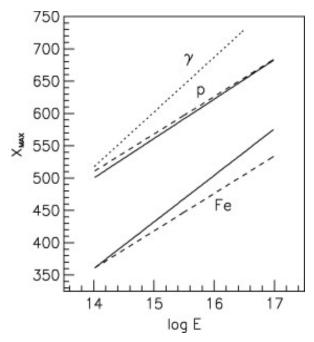
Assim, é possível obter o número de múons e o  $X_{\text{max}}$  de forma análoga ao que foi feito, cujas expressões são dadas por (8)

$$N_{\mu}^{A} = N_{\mu}^{p} A^{0.15}, \tag{4.10}$$

$$X_{\text{max}}^A = X_{\text{max}}^p - \lambda_r \ln(A). \tag{4.11}$$

Essas duas expressões acima indicam que o número de múons em um chuveiro gerado por um núcleo é maior que o aqueles gerados por um próton e que o  $X_{\rm max}$  de um chuveiro iniciado por próton é maior que um iniciado por núcleo de mesma energia  $E_0$ . A explicação para o primeiro fato é que os A núcleons de energia  $E_0/A$  iniciais geram seus secundários. No entanto, esse chuveiro percorre menos camadas que um chuveiro iniciado por próton, uma vez que a energia primária é "menor". A consequência é que percorrendo uma menor profundidade média há menos perda de energia da componente hadrônica para a componente eletromagnética, favorecendo um maior número de múons provenientes do decaimento de píons carregados.

A justificativa para que o  $X_{\max}^A$  seja menor que  $X_{\max}^p$  é que a seção de choque de núcleos mais pesados é maior. Isso implica que o livre caminho médio de interação é menor, uma vez que este é inversamente proporcional à seção de choque. O gráfico na figura 14 ilustra os valores de  $X_{\max}$  para chuveiros iniciados por prótons, ferro (linha tracejada) e fótons (linha pontilhada) utilizando o modelo de Heitler-Matthews e comparando com resultados de simulações completas de chuveiro (linhas cheias). Um detalhe é que as curvas obtidas com o modelo analítico de chuveiros hadrônicos está deslocada de  $100 \text{ g/cm}^2$ , que provém justamente de neglicenciar os efeitos dos sub-chuveiros. A conclusão é que, dentro de suas limitações os resultados analíticos estão em bom acordo com os de simulações completas.



**Figura 14** – Comparação entre os resultados do modelo de Matthews-Heitler (curvas tracejadas) com o de simulações computacionais (curvas cheias). As tracejadas estão deslocadas de 100 g/cm<sup>2</sup>.

Fonte: MATTHEWS (8)

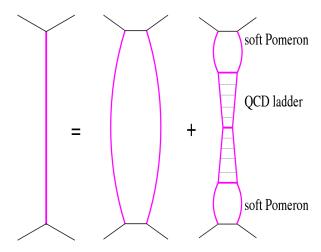
## 4.3 Modelos Computacionais

Com os modelos analíticos, vimos que é possível extrair resultados para grandezas físicas, como a taxa de elongação, número de múons e a profundidade atmosférica máxima. Esses buscam explorar a física de maneira simplificada e, justamente por esse fato, possuem certas limitações. Com o desenvolvimento de computadores com a capacidade de realizar milhares de cálculos por segundo, foi-se dando menos importância para os modelos analíticos. As simulações computacionais fornecem resultados muito mais precisos e com maiores detalhes, além de permitir que se leve em conta características estocásticas dos chuveiros. Ainda hoje em dia, os cálculos exigem alto custo computacional, como grande uso da memória da máquina e um tempo muito elevado para realizar todo processo. As simulações de EAS são feitas utilizando programas como o CORSIKA (33, 34) e o CONEX (35, 36). Esses dois, em particular, utilizam pacotes geradores de eventos Monte Carlo, os quais são baseados em teorias que regem interações hadrônicas e parâmetros provenientes de experimentos pós-LHC. Atualmente, os três mais utilizados são o Sibyll 2.3c (32), o QGSJet-II-04 (30, 37) e o EPOS-LHC (38, 39), dos quais os dois últimos serão discutidos em mais detalhes a seguir. Ambos modelos são baseados na teoria de campos de Gribov-Regge (28). Os eventos desses modelos geram colisões entre partículas e a partir dessas informações o CORSIKA e o CONEX fazem o desenvolvimento do chuveiro cada qual com sua metodologia.

A teoria física que rege efeitos devido às interações hadrônicas é a Cromodinâmica

Quântica (do inglês, QCD). Para processos duros, a QCD perturbativa fornece resultados muito precisos, relativos à produção de hádrons. (28) Um processo que possui grande transferência de momento transversal, também é dito processo duro e uma de suas características é a constante de acoplamento da força forte  $\alpha_s$  possuir um valor pequeno.

A teoria de campos de Gribov-Regge foi construída tratando as colisões como múltiplos processos de espalhamento, nos quais há troca de Pomerons microscópicos. Um Pomeron semiduro, da teoria de Gribov-Regge, nessa abordagem é visto como uma escada QCD de Pártons, que contém termos perturbativos e não perturbativos. (37) A figura 15 ilustra esse conceito. O QGSJet-II-04 e o EPOS-LHC baseiam-se em resultados aliando elementos da teoria de Regge com o modelo de pártons da QCD perturbativa para realizar os cálculos de espalhamento hádron-hádron.



**Figura 15** – Imagem que ilustra um Pomeron geral (à esquerda) como sendo a soma de um Pomeron duro, ao centro, e outro semi-duro (ao lado direito).

Fonte: OSTAPCHENKO (37)

O QGSJet-II-04 é um pacote gerador de eventos Monte Carlo que se baseia na fenomenologia de Pomerons. O modelo é fundamentado em uma implementação da Teoria de Gribov-Regge aliada a um modelo de pártons, da QCD. As colisões hadrônicas são descritas por contribuição de múltiplos diagramas (em todas as ordens), os quais são caracterizados pela troca de Pomerons. Uma das características mais importantes do QGSJet-II-04 em relação a outros modelos é o tratamento de efeitos não lineares em interações Pomeron-Pomeron, baseado nos diagramas da Teoria de Campos de Regge. (40) Outro fato é que a energia conserva-se somente na configuração dos estados finais.

O EPOS-LHC, diferentemente do QGSJet-II-04, preocupa-se em detalhar melhor o estado final entre colisões hadrônicas. (39) É imposta a conservação de energia já no cálculo da amplitude de espalhamento para que assim a energia total reparta-se entre as interações fundamentais. Esse fato leva à supressão dos diagramas com grandes números de Pomerons, implicando em um corte na quantidade de secundários que serão gerados.

Os parâmetros livres desses dois modelos são obtidos de experimentos de física de partículas. No entanto, o LHC, que é o maior acelerador de partículas atualmente, consegue realizar experimentos com  $\sqrt{s}=14$  TeV, no referencial do centro de massa de colisões prótonpróton. Para simular um chuveiro, que pode possuir energias acima de  $10^{20}$  eV (no referencial do laboratório)<sup>†</sup>, é necessário que esses modelos façam extrapolações. Essa extrapolação varia de modelo a modelo, gerando algumas divergências nos resultados das simulações.

#### 4.3.1 O simulador de chuveiros atmosféricos CONEX

O CONEX2r5.40 (35) é um simulador híbrido de chuveiros atmosféricos. Nas primeiras interações ele utiliza o método de Monte Carlo, para incluir o aspecto estocástico presente em um chuveiro. Para gerar essas colisões ele utiliza geradores de eventos, como o QGSJet-II-04, EPOS-LHC ou Sibyll 2.3c. Após atingir um limiar de energia de 10% da  $E_0$ , a solução que segue é numérica, ou seja, os sub-chuveiros são calculados com equações de cascata para se determinar a profundidade e o número de partículas ao longo da profundidade atmosférica. (35) Uma das vantagens é a rapidez nos cálculos, pois se fosse utilizado um algoritmo puramente baseado em Monte Carlo, as simulações teriam um custo computacional muito maior, uma vez que a quantidade de partículas ali aumenta cada vez mais ao longo do eixo do chuveiro. Estudos comparando o CORSIKA e o CONEX indicam um ótimo acordo nos resultados referentes à componente hadrônica e flutuações no chuveiro. (36) Algumas das desvantagens do CONEX com relação ao CORSIKA são a impossibilidade da descrição espacial do chuveiro e a informação do espectro de energia das partículas, parcialmente perdido. O primeiro fator é devido ao CONEX ser um simulador unidimensional. Este não leva em conta a distribuição lateral de chuveiros atmosféricos, apenas o perfil longitudinal.

Para a finalidade que será tratada nesse projeto, as informações que o CONEX fornece são mais que suficientes. Dessa forma, o CONEX é um ótimo padrão para comparar os resultados do modelo desenvolvido nesse projeto, aliando elementos probabilísticos do chuveiros, com rapidez e cálculos mais detalhados que um modelo puramente analítico.

Estes são alguns dos aspectos mais gerais sobre a física desses modelos. Mais adiante, esses dois modelos de interação hadrônica serão utilizados para o desenvolvimento do projeto. Por isso há importância em saber aspectos básicos de cada um e suas implicações no resultado referente à produção da partículas em colisões entre um projétil e um alvo fixo. Para um leitor que queira mais detalhes sobre os cálculos teóricos e eventuais procedimentos computacionais, pode-se encontra-los nas referências (28, 37, 39–41).

<sup>†</sup> Cerca de 430 TeV, no centro de massa.

# 5 PROCESSOS DE RAMIFICAÇÃO

Antes de discutir o modelo estatístico aplicado a chuveiros atmosféricos, é importante ter um panorama geral sobre o assunto. Nesta seção, será apresentado o formalismo matemático utilizado para descrever dinâmica de populações. Os processos de ramificações são muito importantes no estudo sobre dinâmica estocástica de populações. Tais processos possuem diversas aplicações bem sucedidas, embora sua modelagem pode eventualmente ser muito complexa, devido às particularidades de cada caso. (42) O que será explicado neste capítulo é como descrever o desenvolvimento de uma população que é regida por meio de variáveis aleatórias discretas através do Método da Função Geradora. (43)

O processo de ramificação simples, elementar, inicia-se com um único indivíduo que dá origem a uma prole de indivíduos idênticos, que por sua vez também irão gerar outros, como no esquema da figura 16. Cada indivíduo morre ao dar origem à sua prole, de modo que não há superposição de gerações. Os indivíduos são independentes, ou seja, o tamanho da prole de cada indivíduo é independente do tamanho da prole dos demais indivíduos de qualquer geração. A distribuição de probabilidade  $p_k \equiv \mathbb{P}(X_j = k)$  determina o tamanho k da prole gerada por qualquer indivíduo (aqui indexado genericamente como "j") em qualquer geração. Dadas essas hipóteses, o Método da Função Geradora pode, em princípio, determinar a distribuição de probabilidade do tamanho total da população em qualquer geração.

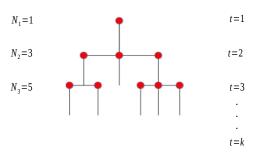
Porém, a física de chuveiros atmosféricos extensos exige um relaxamento dessas hipóteses. A inevitável divisão de energia entre as partículas geradas nos sucessivos estágios de um chuveiro exige que a distribuição de probabilidade do tamanho da prole gerada por um indivíduo dependa da geração, pelo menos. Neste capítulo, mostraremos também que o Método da Função Geradora pode ser aplicado a esse processo de ramificação generalizado para calcular, se não a distribuição de probabilidade completa, pelo menos a média e a variância do número total de indivíduos da população em cada geração. Felizmente, estas são as grandezas efetivamente observáveis empiricamente.

# 5.1 Método da Função Geradora na ramificação simples

Seja  $N_t$  o número total de indivíduos na t-ésima geração. Como podemos impor que  $N_0 = 1$  (o que corresponde à partícula primária de um chuveiro atmosférico), a probabilidade de termos k indivíduos na geração t = 1 é dada por

$$\mathbb{P}(N_1 = k) = p_k,\tag{5.1}$$

onde  $k = \{0, 1, 2...\}$ . Ou seja, a distribuição de  $N_1$  coincide com  $p_k$ . Porém, a partir de t = 2, o estudo da população torna-se mais complexo.



**Figura 16** – Diagrama que ilustra o desenvolvimento populacional no qual um indivíduo sucessivamente dá origem a uma prole de indivíduos idênticos.

Se repetirmos o raciocínio para calcular o número de indivíduos na geração 2 (t=2), teremos que levar em consideração a probabilidade de cada um dos k indivíduos da geração 1 produzir quantidades diferentes de indivíduos na geração 3, embora cada um deles obedecendo a mesma distribuição  $p_k$ . Esse exemplo com apenas duas gerações mostra que a descrição da probabilidade de termos um certo número total de indivíduos em uma geração qualquer é uma soma de uma quantidade <u>aleatória</u> de números aleatórios. A complexidade do problema cresce rapidamente com o número de camadas, exigindo o desenvolvimento de ferramentas mais poderosas de cálculo.

Esse problema pode ser analisado mediante o uso de funções geradoras. (43) Uma função geradora nada mais é do que um tipo de transformada, como as de Fourier ou de Laplace. Da mesma forma como uma transformada de Fourier é efetiva na análise de uma convolução de sinais independentes, por exemplo, uma função geradora permite estabelecer relações entre grandezas de um processo de ramificação.

Uma função geradora "codifica" uma distribuição de probabilidade nos inteiros não negativos usando cada peso  $p_k$  como um coeficiente de uma série de potências de uma "variável transformada", z nesta dissertação. Para a distribuição de probabilidade do tamanho da prole de um indivíduo, sua função geradora é

$$\psi(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X_j = k). \tag{5.2}$$

O índice *j* de cada indivíduo é irrelevante, pois todos eles são estatisticamente idênticos. Analogamente, as infinitas funções geradoras dos tamanhos totais da população nas diversas gerações

são construídas como

$$\varphi_t(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} z^k \, \mathbb{P}(N_t = k). \tag{5.3}$$

Embora os tamanhos totais das populações de duas gerações consecutivas sejam evidentemente dependentes, o fato de cada indivíduo reproduzir-se independentemente dos demais contém "simplicidade estatística" suficiente para que, no "espaço transformado", exista uma relação funcional recursiva simples envolvendo as funções geradoras das populações de duas gerações sucessivas e a função geradora do tamanho da prole. Descreveremos alguns detalhes desse raciocínio porque ele ainda será válido mesmo quando a distribuição de probabilidade do tamanho da prole gerada por um indivíduo depender da geração.

A lei da probabilidade total (43), aplicada neste contexto, estabelece que

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \sum_{j} \mathbb{P}(N_t = k | N_{t-1} = j) \, \mathbb{P}(N_{t-1} = j) \,, \tag{5.4}$$

onde a primeira parcela dentro do somatório é uma probabilidade condicional. Essa distribuição condicional envolve a soma de *j* variáveis aleatórias independentes, as proles de *j* indivíduos,

$$\mathbb{P}(N_t = k | N_{t-1} = j) = \mathbb{P}\left(\sum_{m=1}^{j} X_m = k\right).$$
 (5.5)

Assim, substituindo a Eq. (5.5) na Eq. (5.4), multiplicando por  $z^k$  e somando em k ambos os lados da equação resultante e, ainda por cima, invertendo a ordem dos dois somatórios do lado direito de tal equação, resulta que

$$\sum_{k} z^{k} \mathbb{P}(N_{t} = k) = \sum_{j} \mathbb{P}(N_{t-1} = j) \left\{ \sum_{k} z^{k} \mathbb{P}\left(\sum_{m=1}^{j} X_{m} = k\right) \right\}.$$
 (5.6)

O lado esquerdo da equação acima nada mais é do que a função geradora expressa pela Eq. (5.3). O termo entre chaves é a função geradora de uma soma de variáveis independentes, que, por convolução, é o produto das geradoras das parcelas da soma (43), exatamente como ocorre na transformada de Fourier (como aqui tais parcelas são igualmente distribuídas, emerge uma potência no lugar do produtório). Desse modo,

$$\varphi_t(z) = \sum_{j} \mathbb{P}(N_{t-1} = j) \{ \psi(z) \}^{j}.$$
 (5.7)

Ora, mas o lado direito da equação acima é exatamente o lado direito da Eq. (5.3) com  $t \to t-1$  e  $z \to \psi(z)$ . Finalmente, concluímos que

$$\varphi_t(z) = \varphi_{t-1}((\psi(z)),$$
 (5.8)

que é a desejada relação funcional recursiva "simples" que viabiliza o estudo de processos de ramificação. Essa relação só pode ser resolvida analiticamente (escrever  $\varphi(z)$  como uma

expressão explícita em *z*) em alguns raros casos de pouco interesse científico, mas ela contém toda a informação probabilística do processo e, em particular, ela permite uma análise exata da dinâmica temporal dos primeiros momentos estatísticos da população.

Seja Y uma variável aleatória qualquer (nos inteiros não negativos) e denotemos por  $f(z) = \sum_k z^k \mathbb{P}(Y=k)$  sua função geradora. É fácil ver, pela própria definição de uma função geradora, que

$$f(1) = 1, (5.9)$$

que a média de Y é dada por

$$f'(1) = \langle Y \rangle \tag{5.10}$$

e que

$$f''(1) = \langle Y(Y-1) \rangle, \tag{5.11}$$

de modo que a variância de Y é

$$var(Y) = f''(1) + f'(1) - [f'(1)]^{2}.$$
(5.12)

Podemos derivar a Eq. (5.8) uma vez, obtendo

$$\varphi_t'(z) = [\varphi_{t-1}(\psi(z))]' = \varphi_{t-1}'(\psi(z))\psi'(z), \tag{5.13}$$

ou duas vezes, chegando a

$$\varphi_t''(z) = \varphi_t''(\psi(z)) [\psi'(z)]^2 + \varphi'(\psi(z)) \psi''(z). \tag{5.14}$$

Se fizermos z=1 em ambas as equações acima e utilizarmos as Eqs. (5.9), (5.10) e (5.12), denotando respectivamente a média e a variância do tamanho da prole de cada indivíduo por  $v \in s^2$ , e por  $\mu_t \in \sigma_t^2$  a média e a variância do tamanho total da população na geração t, respectivamente, obtemos as equações

$$\mu_t = \nu \mu_{t-1} \tag{5.15}$$

e

$$\sigma_t^2 = v^2 \sigma_{t-1}^2 + s^2 \mu_{t-1},\tag{5.16}$$

após manipulações algébricas um pouco extensas, mas rotineiras. Esse par de recorrências acopladas pode ser facilmente resolvido (a média populacional evolui independentemente da variância), mas não precisaremos dessas soluções. Vamos agora generalizar esses resultados para o caso de interesse na modelagem de chuveiros atmosféricos, em que as perdas energéticas nos sucessivos estágios da cascata de partículas são incompatíveis com uma distribuição de tamanho de prole constante ao longo das gerações.

# 5.2 Método da Função Geradora na ramificação com gerações heterogêneas

Vamos construir um processo de ramificação em que os indivíduos continuam a reproduzirse independentemente uns dos outros e no qual todos aqueles que vivem na mesma geração têm as mesmas propriedades estatísticas. Porém, tais propriedades agora mudarão de uma geração para outra. Agora, a média e a variância do tamanho da prole de um indivíduo devem indicar a geração pertinente, e serão denotadas por  $v_t$  e  $s_t^2$  na geração t. De forma mais ampla, a própria função geradora do tamanho da prole ganha um índice temporal,  $\psi(z) \rightarrow \psi_t(z)$ .

Uma análise atenta revela que, felizmente, os cálculos realizados a partir da introdução da lei da probabilidade total em nada são afetados pela dependência temporal de  $\psi_t(z)$ . Em particular, vale uma nova relação fundamental,

$$\varphi_t(z) = \varphi_{t-1}((\psi_{t-1}(z)),$$
 (5.17)

as Eqs. (5.13) e (5.14) continuam válidas se  $\psi(z) \to \psi_{t-1}(z)$  e a repetição do estudo de média e variância com z=1 leva às novas recorrências

$$\mu_t = \mu_{t-1} \nu_{t-1} \tag{5.18}$$

e

$$\sigma_t^2 = v_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2 + \mu_{t-1} s_{t-1}^2, \tag{5.19}$$

que, notavelmente, são lineares. A primeira, trivialmente desacoplada, admite a solução

$$\mu_t = \prod_{j=1}^{t-1} \nu_j, \tag{5.20}$$

de modo que a segunda relação pode ser vista como uma recorrência linear de 1a. ordem e não homogênea. Utilizando métodos de solução de equações diferenciais ordinárias lineares (decompor a solução geral como a soma de uma solução particular com uma solução da equação homogênea associada), podemos mostrar que

$$\sigma_t^2 = \left(\prod_{\tau=1}^{t-1} v_\tau\right) \sigma_0^2 + \sum_{n=1}^t \frac{s_{n-1}^2}{v_n} \left(\prod_{\tau=1}^t v_\tau\right) \left(\prod_{\tau=n+1}^t v_\tau\right), \tag{5.21}$$

embora numericamente possa ser mais eficiente iterar diretamente a Eq. (5.19) do que usar o resultado acima.

Interpretando a solução para  $\sigma_t^2$ , temos o primeiro termo que é uma incerteza proveniente do aumento do número de indivíduos, que leva a um aumento na variância para a geração posterior. O segundo termo é devido à incerteza na criação de prole que cada uma das gerações propaga.

# 6 O MODELO DE DINÂMICA POPULACIONAL APLICADO A CHUVEIROS ATMOSFÉRICOS

Descrições (semi-) analíticas do desenvolvimento do chuveiro possuem grande importância nos estudos sobre chuveiros atmosféricos pois revelam de uma maneira relativamente simples as correlações entre a física fundamental e os observáveis. Entretanto, nenhum modelo (semi-) analítico, incluindo o modelo de Heitler-Matthews (8), descreve as flutuações dos observáveis, tais como, profundidade do máximo e número de múons. Motivados por esta limitação, buscamos encontrar uma descrição do chuveiro baseada em um processo de ramificação que nos permita obter não apenas o número médio de partículas em uma determinada camada do chuveiro mas também a variância associada.

O desenvolvimento do chuveiro é muito similar ao crescimento de populações: há um único fundador (partícula primária) que dá origem a uma prole de indivíduos (partículas secundárias). Desta forma, podemos aplicar as equações de dinâmica de população desenvolvidas no Capítulo 5 para descrever o desenvolvimento do chuveiro se mapearmos as variáveis daquele desenvolvimento matemático nas grandezas físicas relevantes para o chuveiros atmosféricos.

Neste mapeamento, a média do número total de indivíduos dada pela equação (5.20) pode representar o número médio de partículas em uma camada t do chuveiro se a variável aleatória  $v_t^{(j)}$  (tamanho da prole de um indivíduo) for interpretada como a multiplicidade de partículas geradas em cada interação. Da mesma forma, podemos descrever a variância do número total de partículas em uma dada camada pela equação (5.19) se interpretarmos o parâmetro  $s_j^2$  como a variância da multiplicidade.

Focaremos nossa atenção na descrição do desenvolvimento dos múons e compararemos nossos resultados com o modelo de Heitler-Matthews (quando for possível) e com simulações de Monte Carlo. Especificamos nas próximas seções os detalhes do modelo de dinâmica de populações aplicado ao desenvolvimento de chuveiros.

# 6.1 Modelagem do desenvolvimento do chuveiro atmosférico

Assumindo uma partícula inicial com energia  $E_0$  que ao colidir com um núcleo atômico na atmosfera gera outras partículas secundárias usaremos as equações (5.20) e (5.19) para a evolução do número médio e da variância da componente muônica do chuveiro atmosférico. A interação da partícula primária e as subsequentes interações das partículas secundárias geram um jato de partículas com mésons ( $K^{\pm}$ ,  $\eta$  etc), bárions, léptons e luz. (14) Entre todos os produtos da interação, a taxa de produção de píons é maior e mais relevante para o problema em questão. (28)

Os três tipos de píons são gerados no chuveiros:  $\pi^0$  e  $\pi^\pm$ . Os  $\pi^0$  decaem rapidamente em dois raios gamas alimentando a cascata eletromagnética do chuveiro. Os  $\pi^\pm$  decaem em

múons, assim, considerando equipartição de energia entre os três tipos de píons, temos que 2/3 da energia do chuveiro tem múons como canal de escoamento.

Nosso modelo de chuveiro considera a contínua interação dos píons secundários produzindo mais píons. Consideramos neste capítulo que todos os píons carregados da mesma geração (camada) tem a mesma energia e não faremos distinção entre cargas positivas e negativas. A multiplicação de partículas prossegue até que os píons atinjam a energia crítica ( $\xi_c^{\pi}$ ) definida como a energia na qual a probabilidade de decaimento é igual à probabilidade de interação a partir da qual supomos que todos os píons decaem instantaneamente em múons.

Com essas suposições, podemos aplicar as equações (5.20) e (5.19) para calcular a média e a variância do número de múons em cada camada t de forma recursiva. Para tal, tomando  $v_t^{(j)}$  e  $s_t^2$  respectivamente como a multiplicidade e a variância da multiplicidade de píon em cada camada t. Suporemos que todos os píons (j) em uma dada camada (t) têm a mesma energia, assim a multiplicidade que é função da energia passa a ser uma função da camada. Usaremos os símbolos  $\langle M_{ch} \rangle$  e  $s^2[M_{ch}]$  \* para a média e variância da multiplicidade de píons que podem ser parametrizadas:

$$\langle M_{ch} \rangle = \alpha E^{\beta} \tag{6.1}$$

e

$$s^2[M_{ch}] = \gamma E^{\delta} \tag{6.2}$$

de acordo com Montanus (44) na qual  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros a serem determinados em simulações computacionais. Assim, podemos escrever:

$$\langle N_{\mu} \rangle = \prod_{t=0}^{n_c - 1} \langle M_{ch} \rangle_t, \tag{6.3}$$

$$\sigma^{2}[N_{\mu}] = \langle M_{ch} \rangle_{n_{c}-1} \sigma_{n_{c}-1}^{2} + \mu_{n_{c}-1} s_{n_{c}-1}^{2}.$$
(6.4)

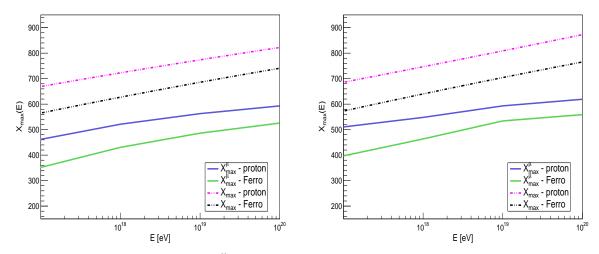
onde o índice  $n_c - 1$  indica o número da camada anterior à camada crítica e  $\mu_{n_c-1}$  é o número de píons carregados na camada  $n_c - 1$ .

A profundidade na qual o chuveiro atinge o máximo número de píons, que é a mesma profundidade na qual o chuveiro atinge o número máximo de múons  $(X_{\max}^{\mu})$ , é obtida somando o comprimento de cada camada até aquela na qual a energia crítica foi atingida. Note que  $X_{\max}^{\mu}$  não é igual a profundidade na qual o chuveiro atinge o máximo número de partículas  $(X_{\max})$  dado que o número total de partículas no chuveiro é determinado pela componente eletromagnética muito mais abundante que os múons (veja figura 17. No modelo a ser implementado, o comprimento de cada camada será considerado como o livre caminho médio  $(\lambda_I)$  de píons na atmosfera.

<sup>\*</sup> O subíndice "ch" será utilizado para denotar grandezas referentes aos píons carregados do chuveiro.

O modelo desenvolvido neste capítulo pode ser classificado como um "Modelo de Ramificação de um Tipo" pois o desenvolvimento do chuveiro é descrito com base no comportamento de só uma partícula: píons carregados com energia igual em cada camada, ou seja, todos os píons de uma camada são idênticos. No capítulo seguinte, implementaremos uma melhoria do modelo que diferenciará os píons líderes.

O modelo aqui implementado se assemelha ao modelo de Heitler-Matthews em alguns aspectos. No apêndice A mostramos que as equações acima correspondem matematicamente à equação da média do número de múons do modelo de Heitler-Matthews no limite  $\beta \to 0$ , ou seja, considerando que todos os píons em todas as camadas tem a mesma distribuição de energia. No modelo aqui apresentado, consideraremos a evolução da energia média de píons na sequência de camadas.



**Figura 17** – Comparação entre o  $X_{\text{max}}^{\mu}$  (linhas cheias) e o  $X_{\text{max}}$  (linhas pontilhadas). As curvas foram obtidas através do CONEX, do lado esquerdo utilizando o QGSJet-II-04 e do lado direito, o EPOS-LHC.

Fonte: Elaborada pelo autor

# 6.1.1 Cálculo das quantidades física necessárias para a implementação do modelo de ramificação

Quatro funções são necessárias para alimentar as equações (6.3) e (6.4) e calcular a média e a variância do número de múons em cada camada e  $X_{\rm max}^{\mu}$ . São elas: média e variância da multiplicidade de píons em função da energia, livre caminho médio de píons em função da energia e energia crítica de píons. Calculamos abaixo em cada subseção essas funções.

#### 6.1.1.1 Parametrização da média e variância da multiplicidade de múons

As equações de recorrência (6.3) e (6.4), para a média e variância do número total de múons, respectivamente, dependem de parametrizações para  $\langle M_{ch} \rangle$  e  $s^2[M_{ch}]$  em função da

energia. Para encontrar os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ , utilizamos o programa CRMC V1.2 <sup>†</sup>(45) para simular a colisão de prótons, píons e núcleos de ferro com átomos de nitrogênio (elemento mais abundante na atmosfera). Faremos a parametrização de  $\langle M_{ch} \rangle$  e  $s^2[M_{ch}]$  na colisão de prótons e núcleos de ferro com nitrogênio para tratarmos a primeira interação do chuveiro atmosférico e para tal escolhemos os primários extremo no espectro de massas possíveis. A parametrização da colisão píon com nitrogênio será utilizada para descrever o desenvolvimento do chuveiro depois da primeira interação.

A simulação realiza a colisão e calcula as características das partículas resultantes. Dois modelos de interação hadrônica foram utilzados: QGSJet-II-04 (30, 37) e EPOS-LHC (38, 39). Simulamos um total de 50 mil eventos para cada primário (próton, píon e núcleo de ferro) e para cada valor fixo de energia, variando desde 100 GeV até 10 EeV, em intervalos de  $\log(E) = 1$ .

As figuras 18 e 19 mostram exemplos das distribuições de número de píons carregados gerados pelo CRMC em cada caso.

Nas figuras 18 e 19, nota-se que a produção de píons em colisões do QGSJet-II-04 é maior que as no EPOS-LHC, não apenas nas colisões p-N, mas também nas  $\pi$ -N e Fe-N. Este resultado é conhecido (28,46) e sua discussão está além do escopo dessa dissertação. Nos limitaremos portanto a utilizar os resultados e explorar as diferenças entre os modelos.

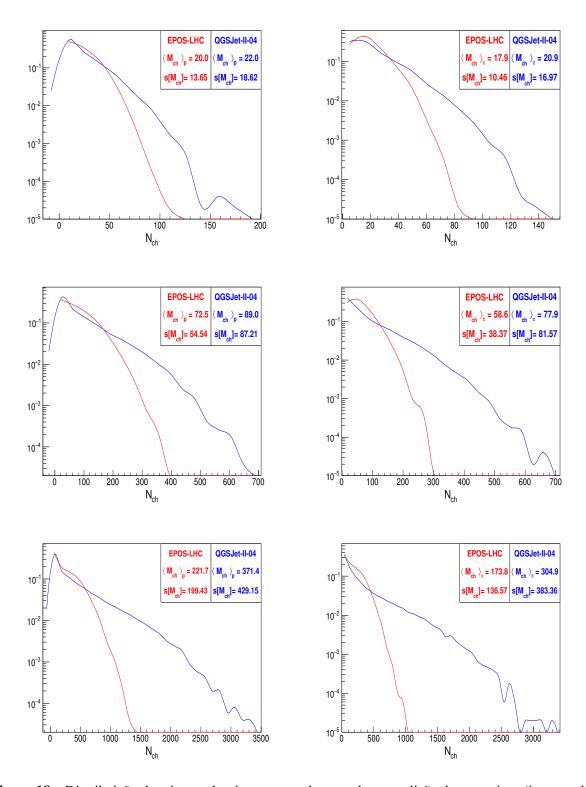
As figuras 20 e 21 mostram e evolução de  $\langle M_{ch} \rangle$  e  $s^2[M_{ch}]$  com a energia. Mostramos no mesmo gráfico a parametrização do modelo de Montanus (44) para a média da multiplicidade de píons carregados nas colisões  $\pi$ -ar ( $\langle M_{ch} \rangle = 0, 1E^{0,18}$  para comparação com os resultados obtidos aqui).

Ajustamos as equações(6.3) e (6.4) nos pontos obtidos calculando os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ :

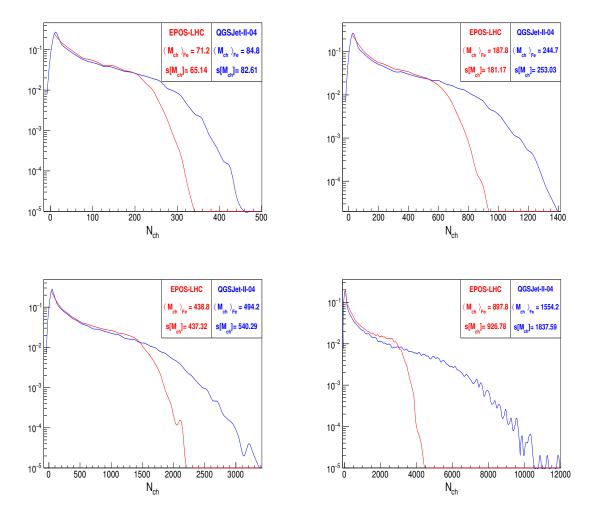
QGSJet-II-04 
$$\begin{cases} \langle M_{ch} \rangle_{p-N} = 2.69 E^{0.22}, \\ \langle M_{ch} \rangle_{\pi-N} = 3.34 E^{0.20}, \\ \langle M_{ch} \rangle_{Fe-N} = 3.84 E^{0.31}, \end{cases}$$
(6.5)

EPOS-LHC 
$$\begin{cases} \langle M_{ch} \rangle_{p-N} = 3.35 E^{0.19}, \\ \langle M_{ch} \rangle_{\pi-N} = 3.92 E^{0.17}, \\ \langle M_{ch} \rangle_{Fe-N} = 17.2 E^{0.20}. \end{cases}$$
(6.6)

Cosmic Rays Monte Carlo.



**Figura 18** – Distribuição do número de píons carregados gerados na colisão de um próton (à esquerda) ou píon (à direita) com um núcleo de Nitrogênio. Cada linha, de cima para baixo representa partículas incidentes com de energia  $10^4~{\rm GeV},\,10^7~{\rm GeV}$  e  $10^{10}~{\rm GeV}$ . A curva azul ilustra os resultados usando o QGSJet-II-04 e a vermelha com o EPOS-LHC.



**Figura 19** – Distribuição do número de píons carregados gerados em uma colisão de um núcleo de ferro com um núcleo de nitrogênio. Em azul os resultados usando o QGSJet-II-04 e em vermelho com o EPOS-LHC. As energias do projétil desses histogramas foram 10<sup>3</sup> GeV, 10<sup>5</sup> GeV, 10<sup>7</sup> eV e 10<sup>9</sup> eV, que seguem a respectiva sequência esquerda superior, direita superior, esquerda inferior e direita inferior.

QGSJet-II-04 
$$\begin{cases} s^{2}[M_{ch}]_{p-N} = 3.01E^{0.49}, \\ s^{2}[M_{ch}]_{\pi-N} = 2.69E^{0.48}, \\ s^{2}[M_{ch}]_{Fe-N} = 12.4E^{0.31}. \end{cases}$$
(6.7)

EPOS-LHC 
$$\begin{cases} s^{2}[M_{ch}]_{p-N} = 4.32E^{0.40}, \\ s^{2}[M_{ch}]_{\pi-N} = 3.17E^{0.38}, \\ s^{2}[M_{ch}]_{Fe-N} = 360E^{0.38}. \end{cases}$$
(6.8)

# 6.1.1.2 Parametrização do livre caminho médio de píons

Para calcularmos a profundidade na qual o chuveiro atinge o máximo número de múons  $(X_{\max}^{\mu})$  somaremos o comprimento de cada camada até aquela na qual a energia crítica foi atingida. Tomamos como o comprimento de cada camada o livre caminho médio dos píons naquela camada. O livre caminho médio é função da energia e portanto o tamanho de cada camada varia de acordo com a evolução da energia dos píons em cada camada.

Realizamos simulações com o programa CONEX aproveitando uma interface para os modelos de interação hadrônica, no qual é possível extrair a seção de choque de uma interação e o livre caminho médio. Calculamos o livre caminho médio de cada energia variando entre  $10^{12}$  eV até  $10^{20}$  eV. As figuras 22 mostram a variação do livre caminho médio com a energia. Ajustamos as funções abaixo no gráficos obtendo a dependência com a energia:

$$QGSJet-II-04 \begin{cases} \lambda_{p-ar} = 231 - 16.3 \log(E/eV) + 0.3 [\log(E/eV)]^2, \\ \lambda_{\pi-ar} = 359 - 28.3 \log(E/eV) + 0.6 [\log(E/eV)]^2, \\ \lambda_{Fe-ar} = 19.9 - 0.68 \log(E/eV). \end{cases}$$
(6.9)

$$\text{EPOS-LHC} \begin{cases} \lambda_{\text{p-ar}} = 223 - 14.7 \log(E/\text{eV}) + 0.3 [\log(E/\text{eV})]^2, \\ \lambda_{\pi\text{-ar}} = 331 - 23.9 \log(E/\text{eV}) + 0.5 [\log(E/\text{eV})]^2, \\ \lambda_{\text{Fe-ar}} = 20 - 0.69 \log(E/\text{eV}). \end{cases}$$
 (6.10)

# 6.1.1.3 Parametrização da energia crítica de píons

Utilizamos a parametrização feita na referência (44) sem repetirmos as simulações. Os valores de energia crítica não variam muito com a energia, portanto não acreditamos ser necessário uma simulação específica para calcular esse valor.

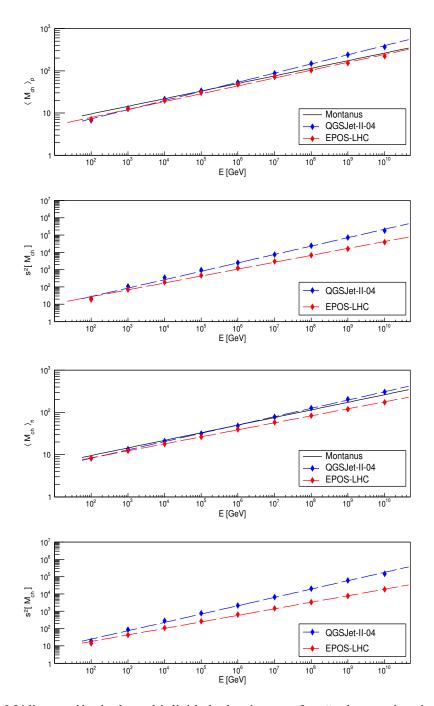
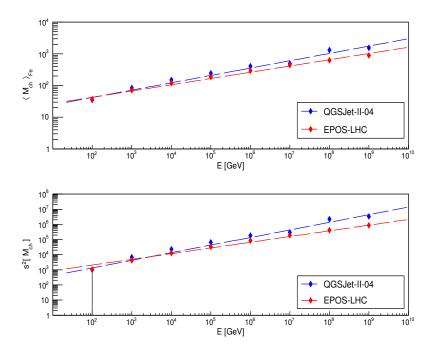
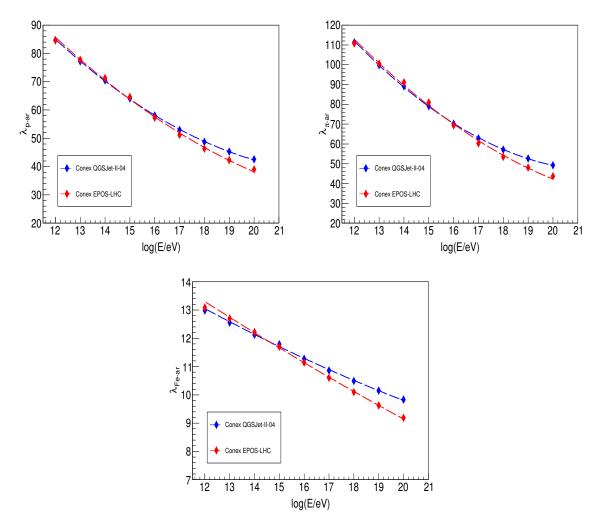


Figura 20 – Média e variância da multiplicidade de píons em função da energia primária. Na imagem do topo estão três curvas: o modelo de Montanus, e os resultados de simulações utilizando o QGSJet-II-04 e o EPOS-LHC, a fim de comparar os resultados para multiplicidade de  $\pi_{ch}$  geradas em colisões p-N. Logo abaixo desta, estão as duas curvas para a variância da multiplicidade de píons. As duas imagens de baixo seguem o mesmo raciocínio, porém tratando uma colisão  $\pi$ -N.



**Figura 21** – Multiplicidade média e variância em função da energia primária. Na imagem superior estão duas curvas, dos resultados de simulações utilizando o QGSJet-II-04 e o EPOS-LHC, para colisões entre Fe-N. Logo abaixo desta, estão as duas curvas para a variância da multiplicidade de píons

Para chuveiros iniciados por um próton ou por um núcleo de ferro, o critério adotado para cessar a produção de novos píons foi determinar a camada crítica. O modelo de Heitler-Matthews fornece a equação (4.5) para o cálculo da camada crítica. Como essa equação depende do valor da energia crítica, este foi baseado em valores adotados pela referência (44), dada a energia  $E_0$ .



**Figura 22** – Livre caminho médio em função do logaritmo da energia. Estão ilustrados  $\lambda_I$  para colisões entre um próton, ou píon ou um núcleo de Ferro com o ar. Os pontos denotam o valor calculado pelo CONEX e as linhas, os ajustes feitos para os dois modelos de interação hadrônica.

# 6.2 Resultados e comparações do modelo de ramificação de um tipo

Nesta seção comparamos as predições da média e variância do número de múons e de  $X_{\max}^{\mu}$  com as predições do modelo de Heitler-Matthews e simulações de Monte Carlo.

As predições do modelo de ramificação são resultado direto da aplicação das equações (6.5), (6.6), (6.7) e (6.8) substituídas em (6.3) e (6.4). Temos relações recursivas que podem ser calculadas utilizando um simples e rápido algoritmo.

## 6.2.1 Resultados para o número de múons

Nas figuras 23, 24 e 25 estão os resultados para a média e variância do número de múons em função da energia primária para chuveiros iniciados por próton e núcleos de ferro,

respectivamente. A figura 26 mostra a divisão da variância pela média o que é normalmente chamado de desvio relativo. Os pontos são os valores para o modelo de ramificação implementado aqui que estão comparados com o modelos de Heitler-Matthews e simulações de Monte Carlo.

Os resultados das simulações foram obtidos com o software CONEX. (35) Simulamos 2000 chuveiros para cada primário. O índice espectral adotado foi 0, pois dessa forma o CONEX simula chuveiros com energia variando aleatoriamente no intervalo de energia de interesse, ou seja, entre  $10^{13}$  eV e  $10^{20}$  eV. O ângulo zenital adotado foi de  $60^{o}$ . O número de múons foi amostrado em camadas de  $10g/\text{cm}^{2}$ .  $X_{\text{max}}^{\mu}$  e  $N_{\mu}$  de cada chuveiro foram determinados ajustando um polinômio de segundo grau em torno da profundidade com maior número de múons.

As descontinuidades dos valores calculados pelo modelo de ramificação são decorrência do caráter discreto da soma que depende do número de camadas até que os píons atinjam a camada crítica.

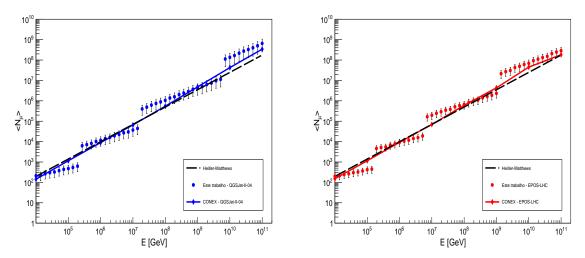
Os gráficos 23 e 24 mostram uma concordância aceitável entre nosso modelo de dinâmica de populações o modelo de Heitler-Matthews e as simulações do CONEX. A discretização utilizada em nosso modelo se revela no resultado final e prejudica uma comparação direta. No entanto, um tratamento mais adequado no cálculo do número de camadas até a energia crítica, ou mesmo uma média dentro da mesma camada poderiam levar a um resultado idêntico aos da simulação de Monte Carlo. Em suma, não há uma discrepância no calculo da média do número de múons entre nosso modelo e as simulações de Monte Carlo, o que mostra a utilidade e correteza da implementação da proposta desta dissertação.

Os gráficos 25 e 26 mostram uma discrepância significativa entre o nosso modelo e as simulações de Monte Carlo. Note que os modelos semi-analíticos (Heitler-Matthews) não oferecem estimativas da variância e por isso não estão mostrados nesta figura. Isso por si só, já é um aprimoramento da modelagem proposta neste dissertação.

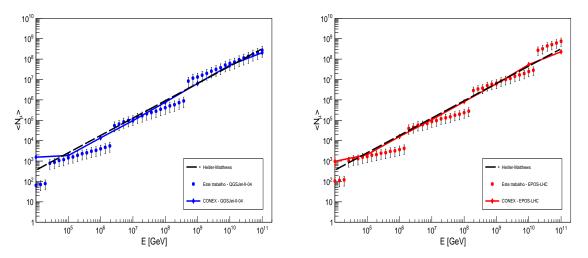
A variância do número de múons calculada pelo nosso modelo é muito maior que os valores obtidos pela simulação de Monte Carlo. No próximo capítulo, acrescentaremos elementos no nosso modelo com vistas de melhorar esta estimativa.

# 6.2.2 Resultados para o $X_{\text{max}}^{\mu}$

A figura 27 ilustra os resultados para um chuveiro iniciado por um próton ou por um núcleo de Ferro. Assim como para o número médio de múons, a função que descreve  $X_{\rm max}^{\mu}$ , obtida do modelo de ramificação, é descontínua, pois as camadas são discretas. Na figura 27, foi feito um ajuste sobre esses pontos ao longo da energia para assim obter a curva contínua, representado pelas linhas tracejadas roxas (próton primário) e verdes (Ferro primário). Apesar da simplicidade do modelo para o cálculo de  $X_{\rm max}^{\mu}$  baseado na soma dos livre caminho médios, o resultado é compatível com as simulações de Monte Carlo. Obtivemos a tendência correta com a energia, entretanto uma diferença que aumenta com a energia atingindo valores máximo de



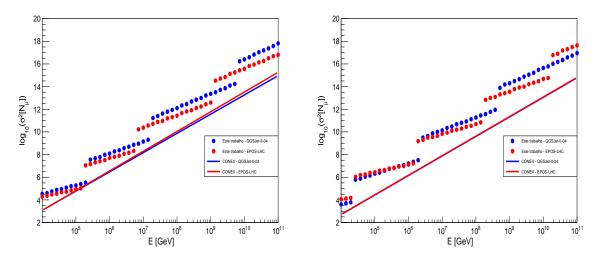
**Figura 23** – Média do número de múons para próton primário. Pontos são o resultado do modelo de ramificação, a linha cheia são simulações com CONEX e a linha tracejada é o modelo Heitler-Matthews.



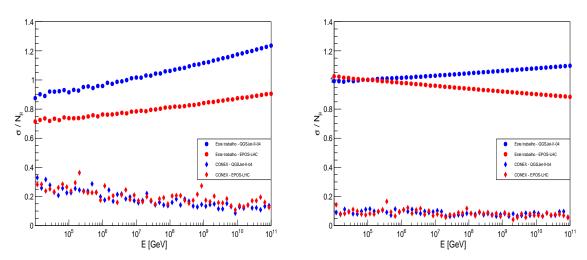
**Figura 24** – Média do número de múons para núcleos de ferro primário. Pontos são o resultado do modelo de ramificação, a linha cheia são simulações com CONEX e a linha tracejada é o modelo Heitler-Matthews.

Fonte: Elaborada pelo autor.

discrepância da ordem de 100g/cm<sup>2</sup>.

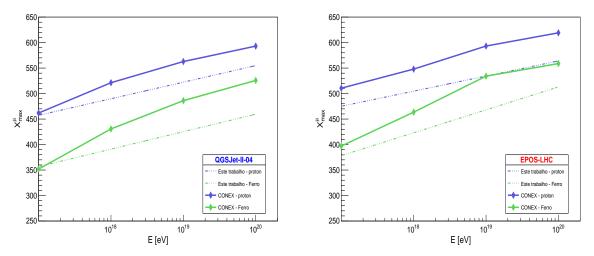


**Figura 25** – Logaritmo da variância do número de múons para chuveiros iniciados por próton (à esquerda) e por Ferro (à direita).



**Figura 26** – Desvio relativo do número de múons, para chuveiros iniciados por próton (à esquerda) e por Ferro (à direita).

Fonte: Elaborada pelo autor



**Figura 27** – Comparação dos valores de  $X^{\mu}_{max}$  entre o modelo de ramificação (linhas tracejadas) e as simulações do CONEX (linhas cheias). À esquerda estão os resultados utilizando o QGSJet-II-04 e à direita o EPOS-LHC. As linhas roxas referem-se a chuveiros iniciados por próton e as verdes, por um núcleo de Ferro.

# 7 O MODELO DE RAMIFICAÇÃO DE DOIS TIPOS

No capítulo anterior foram desenvolvidas equações que descrevem a média e variância de píons carregados em um chuveiro atmosférico. No entanto, estas eram válidas para um modelo no qual a energia era distribuída igualmente entre partículas na mesma camada, ou seja, todos os píons de uma camada tem energia igual.

Sabemos que as flutuações da primeira interação podem dominar as flutuações do número de múon(8, 14, 44). Assim, desenvolveremos aqui um modelo que possibilite o cálculo da média e da variância do número de múons que melhor descreve a distribuição de energia na primeira interação. As mesmas referências acima sugerem que nas primeiras interações, poucas partículas líderes carregam grandes porcentagens da energia dos pais. Nestes casos, a energia dos filhos é longe de ser uma equidistribuição de energia. Em linguagem de dinâmica de populações podemos desenvolver um modelo baseado em dois tipos: líder e traço.

Será apresentada inicialmente uma seção que motiva o uso de uma distribuição não uniforme de energia entre as partículas do chuveiro. Também será feita uma análise sobre as implicações nos resultados de  $N_{\mu}$ ,  $\sigma^2$  e  $X^{\mu}_{\rm max}$ , devido à inclusão de um novo parâmetro físico no modelo, comparando os novos resultados com os do modelo de um tipo e também com as simulações do CONEX.

# 7.1 A estatística de Ordem no modelo de ramificação

## 7.1.1 Modelo nulo de "quebra uniforme"

Primeiramente, abordaremos a questão de quando é importante utilizar um modelo de dois tipos (líder-traço). Explicitamente, argumentaremos que o modelo líder-traço só deve ser considerado em condições em que a partícula secundária mais energética exceda a concentração esperada na chamada estatística de ordem do máximo. Como veremos, essas condições correspondem à energia do primário maiores que  $10^{12}$  eV.

Mesmo em um contexto de fracionamento uniforme da energia total do primário, naturalmente sempre há uma partícula que carrega mais energia do que as demais. Isso é mais naturalmente ilustrado em um simples problema de geometria. Por exemplo, na figura 28, dois pontos são escolhidos uniformemente no intervalo [0,1] e induzem sua quebra em 3 intervalos menores, de tamanhos distintos. Os tamanhos desses intervalos equivalem às frações energéticas das partículas secundárias, enquanto a energia  $E_0$  do primário corresponde ao comprimento unitário inicial. Emergem intervalos distintos entre si mesmo sob uniformidade e um deles realiza-se como o maior de todos (no exemplo da figura 28, claramente trata-se do terceiro intervalo, da esquerda para a direita). De forma talvez surpreendente, os tamanhos dos intervalos são equidistribuídos, independentemente de fixarmos a atenção em um intervalo mais central



Figura 28 – Ilustração de uma distribuição aleatória de dois pontos em um segmento.

ou mais periférico \* . Assim, cada intervalo é um candidato tão bom quanto os demais para realizar-se como o maior de todos.

Esse resultado é demonstrado no apêndice B, onde se mostra também que, se o intervalo unitário é particionado em n segmentos pelo posicionamento uniforme e independente de n-1 "pontos de quebra", a densidade de probabilidade marginal comum a cada um dos segmentos é

$$\rho(x) = (n-1)(1-x)^{n-2} \tag{7.1}$$

onde  $0 \le x \le 1$ . Porém, essa não é a distribuição de interesse direto neste estudo, pois ela não descreve o tamanho do maior segmento. A lei acima valeria, por exemplo, para descrever probabilisticamente o tamanho do segmento da esquerda na figura 28 após um grande número de repetições do experimento aleatório de quebra uniforme do segmento [0,1] em três partes. Em cerca de dois terços das observações, aquele particular segmento mais à esquerda não será o maior de todos. Ao longo das sucessivas repetições do experimento, seu tamanho x "explora" o domínio  $0 \le x \le 1$ .

A construção do modelo nulo de máxima concentração energética ainda sob uniformidade (puramente geométrico) para avaliação do modelo líder-traço (que mostraremos ser necessário para a descrição da física dos chuveiros) exige a construção da distribuição de probabilidade que descreve, independentemente da sua posição, o tamanho do maior segmento que emerge após um grande número de repetições do experimento aleatório de quebra uniforme do segmento [0,1] em n partes. Claramente, o maior segmento deve realizar-se com um tamanho entre 1/n e 1 (n segmentos, todos com tamanhos estritamente menores do que 1/n, jamais poderiam constituir um intervalo de comprimento unitário) e isso ilustra uma complicação adicional.

Há uma teoria bem estabelecida para descrever a distribuição de probabilidade do máximo valor que pode ser realizado em um conjunto de variáveis aleatórias estatisticamente

<sup>\*</sup> No modelo físico, as partículas secundárias receberiam suas frações energéticas de forma equânime.

independentes entre si, descrevendo as assim chamadas **estatísticas de ordem** (*order statistics*). Essa teoria é utilizada na demonstração da eq. (7.1), no apêndice. Porém, no modelo geométrico de fracionamento uniforme aqui discutido os comprimentos dos intervalos são claramente dependentes entre si, o que requer uma análise mais cuidadosa (encontrada apenas em literaturas especializadas, como (47), que também será apresentada apenas no apêndice B. Em particular, o valor médio do tamanho do maior intervalo é dado por

$$\mu_{max}(n) = \frac{1}{n} H_n \tag{7.2}$$

e

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \tag{7.3}$$

é conhecido como o n-ésimo número harmônico.

Quão grande é uma particular realização de um intervalo máximo? Parece natural compará-lo com o tamanho típico, médio, de um intervalo qualquer, que vale claramente 1/n, por razões de simetria. Vamos denominar Fator de Qualidade teórico  $Q_{\text{teo}}(n)$  o valor médio do quociente entre os valores máximo e típico,  $\mu_{max}(n)/(1/n)$ . Ora, mas isso leva exatamente aos números harmônicos! Assim,

$$Q_{\text{teo}}(n) = H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
 (7.4)

é uma medida natural da concentração energética esperada pela partícula secundária de maior energia que deveria surgir em um estágio de um chuveiro na ausência de processos físicos particulares que violem a equidistribuição da energia do primário. Por definição,  $Q_{\text{teo}}(n) > 1$  e sua dependência em n será ilustrada na próxima seção, já em comparação com os resultados de modelos de simulação computacional da física de chuveiros de partículas.

## 7.1.2 Comparação entre os modelos

O ponto essencial da argumentação para validar o modelo líder-traço é comparar os Fatores de Qualidade nos eventos gerados pelas simulações dos modelos QGSJet-II-04 e EPOS-LHC com o mesmo fator no "modelo nulo", de "quebra uniforme" da energia total,  $Q_{\text{teo}}(n)$ . Porém, o cálculo desses Fatores de Qualidade computacionais, que chamaremos de "empíricos", exige cuidados adicionais.

Para definir formalmente esses Fatores de Qualidade empíricos iremos nos apoiar em alguns elementos básicos da física de partículas. O conceito de partícula líder vem simplesmente de considerar qual das partículas geradas em uma colisão é a que carrega mais energia, independente de qual seja essa fração energética. Podemos definir então que a fração da energia inicial que a partícula secundária mais energética carrega é

$$\kappa_{\rm el} = \frac{E_{\rm lead}}{E_0},\tag{7.5}$$

onde a grandeza  $\kappa_{\rm el}$  é conhecida como elasticidade. O primeiro passo é analisar as simulações no CRMC, descritas na seção 6.2, a fim de determinar qual é a fração média de energia que um píon carregado líder leva, após uma colisão p-N ou Fe-N, para dada energia  $E_0$ . A cada evento i, é verificado se a partícula secundária mais energética é um píon carregado. Se essa condição for satisfeita, é computada sua elasticidade  $(\kappa_{el})_i$ , que é análoga a um particular tamanho de intervalo máximo no modelo nulo. Agora, contudo, mesmo com a energia do primário fixada em dado  $E_0$ , o número de píons carregados gerados na i-ésima simulação de uma colisão de primário com a atmosfera é uma variável aleatória, realizada como  $(M_{ch})_i$ , em contraste com o bem definido n do modelo nulo.

Assim, para cada modelo, há duas análises possíveis: ou os Fatores de Qualidade de um mesmo  $E_0$  são discriminados em termos de  $M_{ch}$ , de modo que cada energia de primário gere uma curva  $Q_{\rm emp}(E_0|n)$  em função de  $n \equiv M_{ch}$  que pode ser comparada com a curva  $Q_{\rm teo}(n)$  em função de n, ou define-se um escalar  $Q_{\rm emp}(E_0)$  que contemple a variação na quantidade de píons carregados e corresponda a  $\langle M_{ch}(E_0) \rangle$ . Como este número não é um inteiro,  $Q_{\rm emp}(E_0)$  deve ser comparado com  $Q_{\rm teo}(n^*)$ , onde  $n^*$  é o inteiro mais próximo de  $\langle M_{ch}(E_0) \rangle$ .

No primeiro caso,

$$Q_{\text{emp}}(E_0|n) = \frac{1}{\sum_{j} \delta_{n,(M_{ch})_{j}}} \sum_{i} \frac{(\kappa_{el})_{i}}{1/(M_{ch})_{i}} \delta_{n,(M_{ch})_{i}} = n \frac{\sum_{i} (\kappa_{el})_{i} \delta_{n,(M_{ch})_{i}}}{\sum_{j} \delta_{n,(M_{ch})_{j}}}$$
(7.6)

e os somatórios envolvem cada um dos eventos simulados, para um dado modelo e uma dada energia de primário  $E_0$ . As deltas de Kronecker servem para selecionar apenas os eventos com um número n bem definido de píons secundários carregados.

O segundo caso é mais simples,

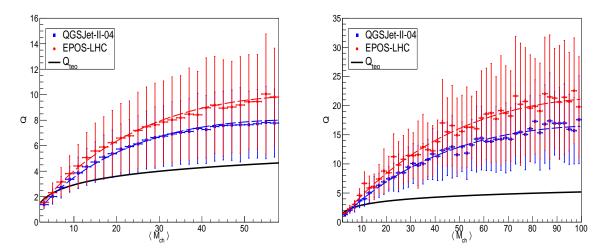
$$Q_{\text{emp}}(E_0) = \left\langle \frac{\kappa_{el}}{1/M_{ch}} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{(\kappa_{el})_i}{1/(M_{ch})_i}, \tag{7.7}$$

pois todos os N eventos simulados para um dado modelo e uma dada energia de primário  $E_0$  são considerados. Neste caso, é claro que

$$\langle M_{ch}(E_0) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (M_{ch})_i.$$
 (7.8)

Logo adiante serão apresentados os gráficos para as duas abordagens apresentadas, ou seja, os casos em que  $Q_{\rm emp}(E_0|n)$  e  $Q_{\rm emp}(E_0)$ . Com a segunda abordagem ficará claro em quais casos surge a necessidade de considerar o efeito de partícula líder em um chuveiro atmosférico.

A figura 29 ilustra dois exemplos, com colisões p-N utilizando os dois modelos de interação hadrônica, para os resultados de  $Q_{\rm emp}(E_0|n)$ , em função do número de píons carregados gerados em um evento i. Cada gráfico foi feito para uma energia inicial fixa, à esquerda para  $10^{13}$  eV e à direta para uma energia de  $10^{16}$  eV. As curvas tracejadas, em azul e vermelho, são ajustes sobre os pontos de  $Q_{\rm emp}$  e a linha cheia é a curva de  $Q_{\rm teo}$ , desenhada através da equação 7.4.



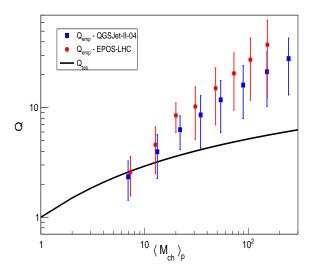
**Figura 29** – Comparação entre  $Q_{\text{teo}}(n)$  e  $Q_{\text{emp}}(E_0|n)$ , em função da multiplicidade de píons carregados gerados. À esquerda o resultado para uma energia inicial de  $10^{13}$  eV e à direita para  $10^{16}$  eV. Ambos os gráficos obtidos para colisões p-N.

Para cada uma das energias primária (descritas na seção 6.2) foi construído um gráfico, como os que estão representados na figura 29. No entanto, a maneira mais evidente de verificar que a concentração energética de um líder anômalo excede a de um líder típico é analisando a curva de  $Q_{\rm emp}(E_0)$  tomando a multiplicidade média de píons carregados para aquela energia inicial. A figura 30 traz essa informação.

Nessa figura os pontos foram obtidos adotando os valores médios da elasticidade e multiplicidade de píons carregados, conforme a equação (7.7). Dessa forma, podemos comparar o resultado do  $Q_{\text{teo}}$ , uma vez que este é uma função de n, com o resultado de  $Q_{\text{emp}}(E_0)$ . Uma vez conhecendo  $E_0$  há uma correspondência direta desta com a multiplicidade média, verificadas nas figuras 18 e 20, da seção 6.2. Por isso, mesmo sendo um gráfico  $Q \times \langle M_{ch} \rangle$ , implicitamente estamos também fazendo o gráfico em função da energia primária  $E_0$ . Ainda na figura 30, verifica-se que para  $\langle M_{ch} \rangle \approx 8$  (que corresponde a uma energia inicial de  $10^{11}$  eV) a curva de  $Q_{\text{teo}}$  está acima do valor dos pontos, para ambos modelo de interação hadrônica. Para os pontos com energias superiores a  $10^{12}$  eV, conclui-se que a concentração energética média é superior àquela no qual é esperada para uma líder típica.

## 7.2 O Modelo de ramificação de dois tipos

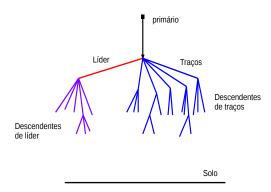
Dada a motivação na seção anterior, sabemos que em energias superiores a  $10^{12}$  eV é justificável aplicar um modelo que leve em conta o efeito de partícula líder. As equações (6.3) e (6.4) eram válidas no modelo de um único tipo de partícula. Agora, com o modelo de dois tipos, serão ditas as eventuais considerações que devem ser feitas para a aplicação de equações que



**Figura 30** – Comparação entre  $Q_{\text{teo}}(n)$  e  $Q_{\text{emp}}(E_0)$ . Os pontos foram obtidos via simulações com parâmetros do QGSJet-II-04 ou EPOS-LHC, para colisões entre próton e Nitrogênio.

forneçam o número médio e variância de múons.

Por simplicidade, consideraremos uma partícula líder apenas na primeira interação. Como as flutuações no número de múons são dominadas pela primeira interação, (41) é interessante considerar o efeito de partícula líder na interação primária e verificar se surgem mudanças significativas no número médio de múons, em seu desvio relativo e na profundidade de máxima produção de múons. O modelo de dois tipos considera que uma partícula primária colide com algum núcleo de Nitrogênio da atmosfera gerando deterministicamente um único líder e um conjunto de traços, conforme a figura 31. Esse número de traços gerados depende da energia da partícula predecessora e é determinado pelas parametrizações apresentadas na seção 6.2 do capítulo anterior. Em outras palavras, utiliza-se da multiplicidade média  $\langle M_{ch} \rangle$  na colisão p-N, por exemplo, e desse total uma partícula é definida como líder e as demais formam o conjunto de traços. Para essas partículas rastro, será assumido que a energia é distribuída uniformemente. Já para a partícula líder, sua energia será diferente das demais. Esta será uma fração  $\kappa_{el}$ , onde o parâmetro  $\kappa_{\rm el}$  é a elasticidade. Fora mostrado na seção 7.1 que a menor fração energética que um conjunto de partículas pode ter, em média, é aquela da equidistribuição de energia, ou seja,  $n_{ch}^{-1} \le \kappa_{\rm el} < 1$ . Mediante esse fato, podem ser analisados três regimes: o de equidistribuição de energia, o de efeito fraco de partícula líder e o de efeito forte de partícula líder. Esse efeito, que é considerado apenas na primeira interação, faz com que nas seguintes existam dois tipos de partículas, que apesar de serem píons carregados, possuem diferentes energias. A energia é igualmente distribuída entre as partículas de um mesmo tipo para as seguintes interações. No instante em que um grupo atinge a energia crítica, imediatamente as partículas que o compõe decaem em múons. Somando o número de píons carregados que descenderam da líder mais as



**Figura 31** – Imagem ilustrativa de um chuveiro considerando a hipótese de que haja uma partícula líder na primeira interação.

que descenderam de traços, obtemos o número total de múons, na camada crítica. Essa será a forma de obter  $N_{\mu}$  do chuveiro atmosférico

$$N_{\mu} = \langle N_{\mu} \rangle_{\text{lead}} + \langle N_{\mu} \rangle_{\text{trail}}. \tag{7.9}$$

Mesmo considerando partículas dos tipos líder e traço, a equação para o número médio de múons (6.3) é aplicável, uma vez que este é uma grandeza linear. Para a variância devem ser tomados alguns cuidados, pois caso haja correlação entre os dois tipos de partículas, a equação (6.4) não será mais válida.

Uma consequência de assumir o efeito líder-traço apenas na primeira interação é, justamente, a ausência de correlação entre os tipos de partículas. Como o número de píons líderes é deterministicamente dado como sendo 1, e deste píon desenvolver-se-a um novo sub-chuveiro, essa cascata de píons não possuirá relação alguma com os sub-chuveiros iniciados pelas outras partículas traço. Dessa forma é possível aplicar a já conhecida equação (6.4) para calcular a variância total do chuveiro como sendo a variância do número de píons do tipo descendente de traço e do tipo descendente de líder, na camada crítica

$$\sigma^2[N_{\mu}] = \sigma_{\text{lead}}^2 + \sigma_{\text{trail}}^2. \tag{7.10}$$

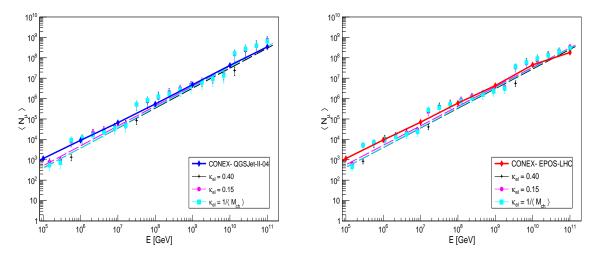
Para a obtenção de  $X_{\text{max}}^{\mu}$  é necessário adotar mais algumas simplificações. O método para determinar a profundidade de máxima produção de múons é análoga ao que foi feito no modelo de ramificação de um tipo. Somando o tamanho das camadas, dadas pelo comprimento de interação  $\lambda_{\text{I}}$ , obtém-se o  $X_{\text{max}}^{\mu}$ . Porém, agora existem dois tipos de partículas, que são descendentes de uma líder ou de um conjunto de rastros. A principal implicação desse fato é que existirão dois grupos de partículas com energias distintas e consequentemente os comprimentos de interação

serão diferentes, uma vez que esse modelo considera que  $\lambda_{\rm I}$  depende da energia da partícula. Pela definição do modelo de Heitler-Matthews, a profundidade de máximo é aquela na qual há o número máximo de partículas no chuveiro. Para nosso modelo, que só considera píons carregados, será levado em conta qual componente (rastro ou líder) possui maior número de partículas. Aquela que atingir a energia crítica com maior número de píons determinará o  $X_{\rm max}^{\mu}$  como sendo a soma dos comprimentos de interação.

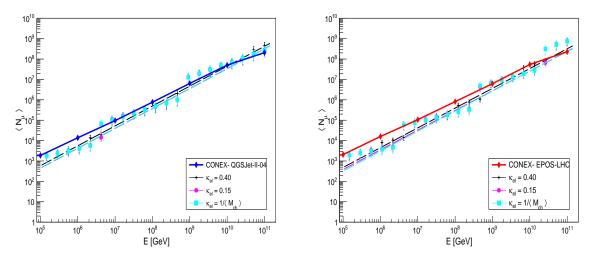
Mencionadas as novas hipóteses do modelo, serão apresentados os resultados para os observáveis físicos para verificar mudanças com relação ao modelo de um tipo e também fazer comparações com os resultados do CONEX.

## 7.3 Testes do modelo Líder-traço

De início, serão apresentados os resultados para o número médio de múons e sua variância e desvio relativo para diferentes valores de elasticidade. A figura 32 traz os resultados para o número médio de múons com diferentes valores de  $\kappa_{\rm el}$ , em colisões p-N. O número médio de múons, representados por pontos, foram calculados com a equação (6.3) aliado à equação (7.9) e também ao fato contido na equação (7.5). Nessa figura também foi feito um ajuste sobre os pontos para facilitar a comparação entre o resultado do modelo de dois tipos com o CONEX. A linha ciano ilustra a curva para o modelo em que o  $\kappa_{\rm el}$  é ajustado para que todas as partículas secundárias possuam a mesma energia ao longo do chuveiro. Isso nada mais é que o modelo de um tipo, indicado na legenda como  $1/\langle M_{ch} \rangle$ . As linhas magenta e preta indicam os resultados para o número médio de múons para um efeito fraco e forte de líder, respectivamente.



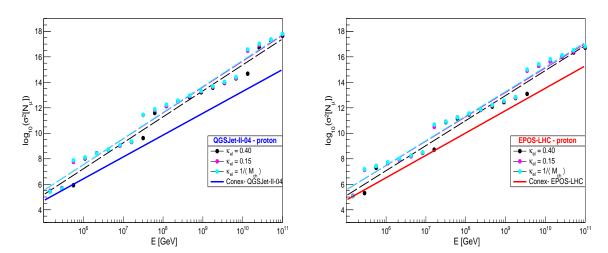
**Figura 32** – Número médio de múons obtido com o modelo de dois tipos, tendo o próton como primário. Para cada gerador de eventos existem três curvas, com diferentes  $\kappa_{el}$ , comparando o resultado com aquele do CONEX.



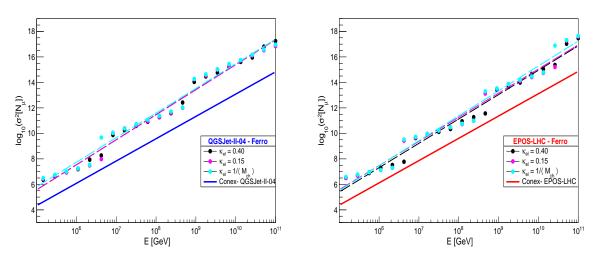
**Figura 33** – Número médio de múons obtido com o modelo de dois tipos, tendo o Ferro como primário. Para cada gerador de eventos existem três curvas, com diferentes  $\kappa_{el}$ , comparando o resultado com aquele do CONEX.

A figura 33 também traz o número médio de múons, porém para um chuveiro iniciado por um núcleo de Ferro. O número de partículas na camada crítica também foi obtido via equação de recursão (6.3) considerando o efeito líder-traço. O número de múons foi dado seguindo a equação (7.9) e está representado por pontos. Para facilitar a visão do leitor também foram traçados ajustes sobre cada um desses pontos de diferentes elasticidades e fim de comparar este resultado com o do CONEX, simbolizados pelos pequenos losangos.

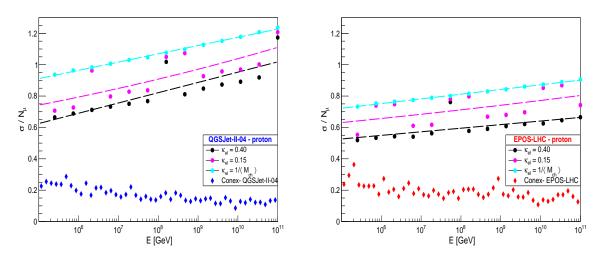
As figuras 34 e 35 contemplam o resultado para o logaritmo da variância do número de múons. A forma de obter  $\sigma^2[N_\mu]$  é análoga ao que foi feito no modelo de um tipo. Determina-se a variância do número total de partículas de um tipo na camada crítica, utilizando a equação (6.4). Somam-se as variâncias, conforme a equação (7.10), para assim determinar a variância do número de múons do chuveiro. Nessas figuras, os pontos referem-se às três elasticidades consideradas no modelo líder-traço, para os dois modelos de interação hadrônica e para ambos primários, e as linhas cheias são ajustes sobre os pontos obtidos com as simulações do CONEX. Essa linha indica qual é a variância do número de múons na profundidade de sua máxima produção. Já as figuras 36 e 37 mostram os resultados para o desvio relativo calculado com o modelo de ramificação de dois tipos, para um próton e um núcleo de Ferro primário, respectivamente. Obtidos  $\langle N_\mu \rangle$  e  $\sigma^2[N_\mu]$ , basta tomar a razão e obter as flutuações relativas ao número de múons. Nas figuras 36 e 37, os pontos referem-se aos resultados obtidos com o modelo de dois tipos, à esquerda para parâmetros do QGSJet-II-04 e à direta, do EPOS-LHC. Os losangos são pontos obtidos das simulações no CONEX, conforme o descrito na seção 6.2.



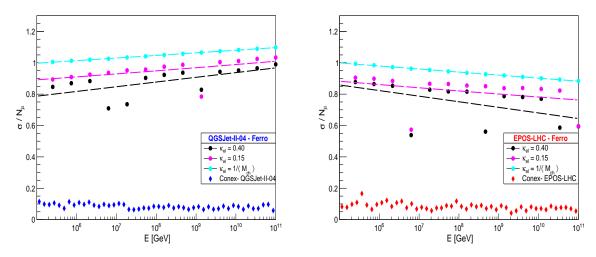
**Figura 34** – Logaritmo da Variância para diferentes  $\kappa_{el}$  em chuveiros iniciados por próton. As linhas tracejadas foram obtidas com o modelo de ramificação de dois tipos e a linha cheia, com as simulações do CONEX.



**Figura 35** – Logaritmo da Variância para diferentes  $\kappa_{el}$  em chuveiros iniciados por um núcleo de Ferro. As linhas tracejadas foram obtidas com o modelo de ramificação de dois tipos e a linha cheia, com as simulações do CONEX.



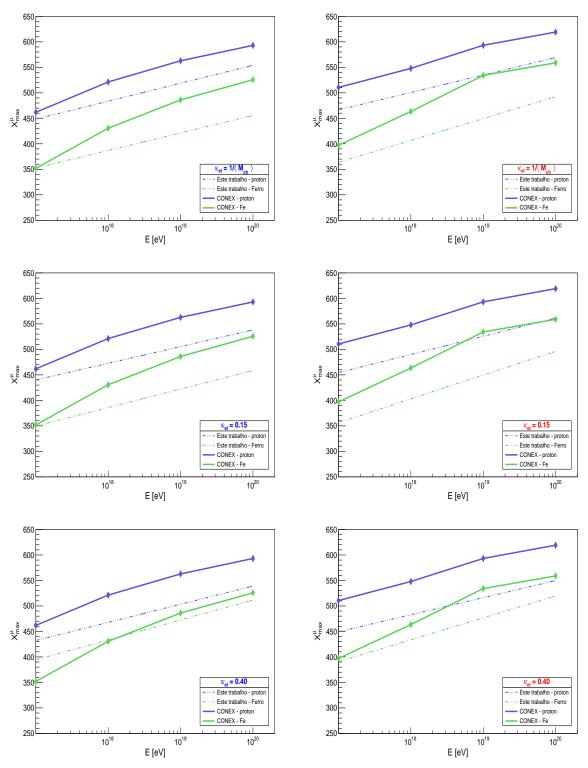
**Figura 36** – Curvas para diferentes  $\kappa_{el}$  com o desvio relativo do número médio de múons em chuveiros iniciados por próton.



**Figura 37** – Curvas para diferentes  $\kappa_{el}$  com o desvio relativo do número médio de múons em chuveiros iniciados por Ferro.

A figura 38 ilustra os resultados para a profundidade de máxima produção de múons para diferentes valores de elasticidade na interação primária, utilizando eventos gerados com o QGSJet-II-04 com os do EPOS-LHC. Os valores de  $X^{\mu}_{\rm max}$ , para cada energia primária, foram calculados somando os comprimentos de interação. Como existem dois tipos de partículas, a que determina o valor da profundidade máxima é a que possui o maior número de píons carregados na camada crítica. As linhas tracejadas são um ajuste sobre pontos de  $X^{\mu}_{\rm max}$  ao longo do espectro de energia. Como a distribuição dos pontos também possui um efeito escada, por consequência do modelo, visualmente é mais útil utilizar o ajuste para fazer comparações entre o modelo de ramificação e o resultado do CONEX. Este resultado das simulações está também representado nos gráficos da figura 38 como linhas cheias, em lilás para chuveiros iniciados por próton e em verde para os inciados por um núcleo de Ferro.

Os resultados obtidos com o modelo de dois tipos não é significativamente diferente do modelo de um tipo. Ou seja, incluir a partícula líder na primeira interação não resultou em melhorias dos resultados.



**Figura 38** – Profundidade de máxima produção de múons, em função da energia. À esquerda estão os resultados para diferentes  $\kappa_{el}$ , com parâmetros do QGSJet-II-04, e à direita, para os do EPOS-LHC.

### 8 CONCLUSÃO

Neste projeto foi apresentado um novo método baseado em dinâmica de populações, cujo objetivo era fornecer equações para os observáveis de um chuveiro atmosférico, tais como o número médio de múons e, de forma inovadora, sua variância. De início as perspectivas eram analisar quais seriam as influências de certos parâmetros iniciais nos chuveiros sobre os observáveis físicos. Comparar os resultados obtidos através do modelo de ramificação com os das simulações do CONEX também foi um objetivo, uma vez que dessa forma seria possível ver se esse modelo descreve bem o fenômeno físico, comparado às simulações mais sofisticadas. A seguir serão feitas as considerações finais sobre cada um dos resultados obtidos, com o Modelo de ramificação de um tipo e com o de dois tipos.

### 8.1 Considerações finais sobre o Modelo de ramificação de um tipo

As equações de dinâmica de população foram interpretadas no contexto de chuveiros atmosféricos e aplicadas para determinar  $\langle N_{\mu} \rangle$  e  $\sigma^2[N_{\mu}]$ . Apesar desse modelo não fornecer uma equação para a duração de tempo de geração de nova prole, o contexto físico nos permitiu fazer uma interpretação deste intervalo temporal como sendo camadas discretas de um chuveiro, de modo que ao final do processo pudemos obter  $X_{\rm max}^{\mu}$ . Quanto à analise de condições iniciais, foi visto que para os dois tipos de partículas primárias estudadas o resultado para o número médio de múons possui um resultado bem coerente com o que é visto em simulações do CONEX. O mesmo pode ser afirmado para chuveiros desenvolvidos com diferentes modelos de interação hadrônica, no caso, QGSJet-II-04 e EPOS-LHC. Foram feitas também análises sobre semelhanças e diferenças de  $N_{\mu}$  em um chuveiro iniciado por próton ou por um núcleo de Ferro.

Uma das inovações desse modelo foi a inclusão da estocasticidade no desenvolvimento do chuveiro, uma vez que era possível calcular a variância do número de partículas em qualquer camada, sem a necessidade de utilizar o método de Monte Carlo. Foram feitos gráficos com o logaritmo da variância do número de múons calculados com o modelo de ramificação e comparados com a mesma grandeza, obtida na profundidade de máxima produção de múons, com o CONEX. Ambos resultados indicam que a variância aumenta com a energia, porém para o modelo de ramificação esse valor aparentava ser maior que o das simulações de chuveiros. Para investigar mais profundamente, foi analisado o desvio relativo do número de múons, uma vez que era conhecido que o resultado para  $N_{\mu}$  do modelo de dinâmica de população estava em bom acordo com o CONEX. A conclusão é que, de fato,  $\sigma/N_{\mu}$  obtido com nosso modelo possui um valor acima daquele fornecido pelas simulações. Este resultado pode ser verificado para ambos primários estudados e também para os dois modelos de interação hadrônica. Apesar do comportamento qualitativo ser coerente com as simulações, quantitativamente isso não foi observado.

Para encerrar essa etapa inicial, foi feita uma análise para o resultado da profundidade de máxima produção de múons. Comparando com valores do CONEX, notou-se que, para chuveiros iniciados por próton, os resultados estão em bom acordo, dentro das limitações. O resultado obtido com o modelo de dinâmica de população possui camadas discretas e este é um fator para o resultado de  $X_{\rm max}^{\mu}$  ser um tanto impreciso. Para chuveiros iniciados por um núcleo de Ferro foi visto uma maior imprecisão entre o resultado do modelo de ramificação e o das simulações do CONEX. Também foi possível verificar que os resultados obtidos com parametrizações do QGSJet-II-04 são um pouco melhores que as do EPOS-LHC. Como conclusão, é possível afirmar que os resultados são satisfatórios, uma vez que o modelo de dinâmica de populações não fornece uma equação específica para o cálculo de  $X_{\rm max}^{\mu}$  e ainda assim estes possuem um valor relativamente próximo ao das simulações.

### 8.2 Considerações finais sobre o Modelo de ramificação de dois tipos

Motivados por buscar um resultado melhor para a variância e desvio relativo do número de múons, o efeito de partícula líder foi um novo parâmetro a ser considerado. Ao longo do capítulo 6 foram apresentadas justificativas sobre a interação inicial ser a maior responsável sobre alterações nas flutuações do número de múons ao final do chuveiro. Como uma primeira aproximação, foi adotado um modelo que considerava o efeito de partícula líder apenas na interação inicial. Caso não fosse assumida essa simplificação, a equação para variância deveria ser alterada, uma vez que, possivelmente, haveria correlação entre o tipos de partículas.

Assim como no modelo de um tipo, foram analisados resultados para os mesmo observáveis físicos. Para o número de múons, foi visto que o resultado não se altera significativamente para diferentes valores de elasticidade. Esse fato é verificado em chuveiros iniciados por prótons e por um núcleo de Ferro, para ambos modelos QGSJet-II-04 e EPOS-LHC. Assim como o modelo de ramificação de um tipo, o modelo de dois tipos também reproduz bem o que é visto nas simulações do CONEX.

Os resultados para  $\sigma^2[N_\mu]$  e  $\sigma/N_\mu$  para o modelo de dois tipos ficaram mais próximos aos das simulações no CONEX, comparando com o modelo e distribuição uniforme de energia. Ainda assim, tanto para  $\kappa_{\rm el}=0.40$  e  $\kappa_{\rm el}=0.15$ , que foram as elasticidades médias consideradas em nosso modelo, os resultados para  $\sigma/N_\mu$  ficaram acima de 0.8 para um próton primário e acima de 0.6 para chuveiros iniciados por um núcleo de Ferro. Valores esses consideravelmente maiores que os das simulações do CONEX. Também foi mostrado que a variância do número de múons é bem sensível às variações de energia. Possivelmente existem outros efeitos que não foram considerados neste modelo de dinâmica de população mas que certamente devem alterar o resultado das flutuações no número de múons, aproximando-o ainda mais do resultado das simulações computacionais de chuveiros atmosféricos. Uma das possibilidades é fazer um ajuste, como o que foi feito nas figuras 20 e 21, separando o regime de baixas energias do de altíssimas energias, ou ainda levar em consideração alterações na fração de píons carregados sobre número

total de píons, para diferentes energias de primários. (29)

Para finalizar o trabalho, as análises sobre  $X^{\mu}_{max}$  levaram a constatar que os resultados, para ambos primários, não indicam uma tendência única ao considerar o fator da elasticidade no modelo de ramificação. Obter uma melhora apenas por considerar dois tipos de partículas não seria um fator fundamental para que os valores de  $X^{\mu}_{max}$  do modelo de ramificação reproduzissem mais fielmente os das simulações do CONEX, uma vez que a maior imprecisão vem da discretização das camadas e ajustes sobre os pontos de  $X^{\mu}_{max}$  ao longo do espectro de energia.

### **REFERÊNCIAS**

- 1 STANEV, T. **High energy cosmic rays**. New York: Springer Science & Business Media, 2010.
- 2 AAB, A. et al. Observation of a large-scale anisotropy in the arrival directions of cosmic rays above 8× 1018 ev. **Science**, v. 357, n. 6357, p. 1266–1270, 2017. doi: 10.1126/science.aan4338.
- 3 NE'EMAN, Y. et al. **The particle hunters**. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- 4 LATTES, C. M. G. et al. Observations on the tracks of slow mesons in photographic emulsions. **Nature**, v. 160, n. 4067, p. 486, 1947.
- 5 BERTONE, G. et al. Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. **Physics Reports**, v. 405, n. 5-6, p. 279–390, 2005.
- 6 THE PIERRE AUGER COLLABORATION. The Pierre Auger cosmic ray observatory. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A**, v. 798, p. 172–213, 2015.
- 7 KAMPERT, K.-H.; UNGER, M. Measurements of the cosmic ray composition with air shower experiments. **Astroparticle Physics**, v. 35, n. 10, p. 660–678, 2012.
- 8 MATTHEWS, J. A Heitler model of extensive air showers. **Astroparticle Physics**, v. 22, n. 5-6, p. 387–397, 2005.
- 9 RICHTMYER, R.; TELLER, E. On the origin of cosmic rays. **Physical Review**, v. 75, n. 11, p. 1729, 1949.
- 10 FERMI, E. On the origin of the cosmic radiation. **Physical Review**, v. 75, n. 8, p. 1169, 1949.
- DREES, M. The top-down interpretation of ultra-high energy cosmic rays. **Journal of the Physical Society of Japan**, v. 77, n. Suppl. B, p. 16–18, 2008.
- 12 FRASCHETTI, F. On the acceleration of ultra-high-energy cosmic rays. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A**, v. 366, n. 1884, p. 4417–4428, 2008.
- 13 AAB, A. et al. Search for photons with energies above 1018 ev using the hybrid detector of the Pierre Auger observatory. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2017, n. 04, p. 009, 2017.
- 14 ENGEL, R. et al. Extensive air showers and hadronic interactions at high energy. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, v. 61, p. 467–489, 2011. doi: 10.1146/annurev.nucl.012809.104544.
- 15 APEL, W. et al. Kneelike structure in the spectrum of the heavy component of cosmic rays observed with kascade-grande. **Physical Review Letters**, v. 107, n. 17, p. 171104, 2011.
- 16 KAMPERT, K.-H.; Pierre Auger Collaboration. Ultra-high energy cosmic rays: recent results and future plans of Auger. **AIP Conference Proceedings**, v. 1852, n. 1, p. 040001, 2017. doi: 10.1063/1.4984858.

84 Referências

17 GREISEN, K. End to the cosmic-ray spectrum? **Physical Review Letters**, APS, v. 16, n. 17, p. 748, 1966.

- 18 ZATSEPIN, G. T.; KUZMIN, V. A. Upper limit of the spectrum of cosmic rays. **Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters**, v. 4, n. 3, p. 78–80, 1966.
- 19 AUGER, P. et al. Extensive cosmic-ray showers. **Reviews of Modern Physics**, v. 11, p. 288–291, 1939. doi: 10.1103/RevModPhys.11.288.
- 20 LINSLEY, J. et al. Extremely energetic cosmic-ray event. **Physical Review Letters**, v. 6, p. 485–487, 1961.
- 21 ABU-ZAYYAD, T. et al. The cosmic-ray energy spectrum observed with the surface detector of the telescope array experiment. **Astrophysical Journal Letters**, v. 768, n. 1, p. L1, 2013.
- 22 SCHRÖDER, F. G. Radio detection of cosmic-ray air showers and high-energy neutrinos. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 93, p. 1–68, 2017.
- 23 ABRAHAM, J. et al. Measurement of the energy spectrum of cosmic rays above 1018 ev using the Pierre Auger observatory. **Physics Letters B**, v. 685, n. 4-5, p. 239–246, 2010.
- 24 VÍCHA, J. et al. Data processing at the Pierre Auger observatory. **Journal of Physics**, v. 608, n. 1, p. 012077, 2015.
- 25 ROULET, E. et al. Recent results from the Pierre Auger observatory. **Journal of Physics**, v. 136, n. 2, p. 022051, 2008.
- 26 THE PIERRE AUGER COLLABORATION. **Depth of Maximum of Air-Shower Profiles at the Pierre Auger Observatory: measurements at Energies above 10^17.8 eV**, 2014. Disponível em: <a href="https://arxiv.org/pdf/1409.4809.pdf">https://arxiv.org/pdf/1409.4809.pdf</a>>. Acesso em: 23 jan. 2019.
- 27 AAB, A. et al. An indication of anisotropy in arrival directions of ultra-high-energy cosmic rays through comparison to the flux pattern of extragalactic gamma-ray sources. **Astrophysical Journal Letters**, v. 853, n. 2, p. L29, 2018.
- 28 CALCAGNI, L. et al. Lhc updated hadronic interaction packages analyzed up to cosmic-ray energies. **Physical Review D**, v. 98, n. 8, p. 083003, 2018.
- 29 ULRICH, R. et al. Hadronic multiparticle production at ultrahigh energies and extensive air showers. **Physical Review D**, v. 83, n. 5, p. 054026, 2011.
- 30 OSTAPCHENKO, S. Qgsjet-ii: towards reliable description of very high energy hadronic interactions. **Nuclear Physics B**, v. 151, n. 1, p. 143–146, 2006.
- 31 FLETCHER, R. et al. s i b y l l: an event generator for simulation of high energy cosmic ray cascades. **Physical Review D**, v. 50, n. 9, p. 5710, 1994.
- 32 RIEHN, F. et al. **The hadronic interaction model SIBYLL 2.3 c and Feynman scaling**, 2017. Disponível em: <a href="https://arxiv.org/pdf/1709.07227.pdf">https://arxiv.org/pdf/1709.07227.pdf</a>>. Acesso em: 23 jan. 2019.
- 33 HECK, D. et al. **CORSIKA**: a Monte Carlo code to simulate extensive air showers. Karlsruhe, 1998. Disponível em: <a href="http://inspirehep.net/record/469835/files/FZKA6019.pdf">http://inspirehep.net/record/469835/files/FZKA6019.pdf</a>>. Acesso em: 25 mai. 2019.

Referências 85

34 CAPDEVIELLE, J. et al. Simulation of extensive air showers at ultra-high energy using the CORSIKA Monte Carlo code. **Astroparticle Physics**, v. 13, n. 4, p. 259–275, 2000.

- 35 PIEROG, T. et al. First results of fast one-dimensional hybrid simulation of eas using conex. **Nuclear Physics B**, v. 151, p. 159–162, 2006.
- 36 BERGMANN, T. et al. One-dimensional hybrid approach to extensive air shower simulation. **Astroparticle Physics**, v. 26, p. 420–432, 2007.
- 37 OSTAPCHENKO, S. Nonlinear screening effects in high energy hadronic interactions. **Physical Review D**, v. 74, n. 1, p. 014026, 2006.
- 38 PIEROG, T.; WERNER, K. Epos model and ultra high energy cosmic rays. **Nuclear Physics B**, v. 196, p. 102–105, 2009.
- 39 D'ENTERRIA, D. et al. Constraints from the first lhc data on hadronic event generators for ultra-high energy cosmic-ray physics. **Astroparticle Physics**, v. 35, n. 2, p. 98–113, 2011.
- 40 OSTAPCHENKO, S. High energy cosmic ray interactions an overview. **Journal of Physics**, v. 60, p. 167–170, 2007.
- 41 CAZON, L. et al. Probing the energy spectrum of hadrons in proton air interactions at ultrahigh energies through the fluctuations of the muon content of extensive air showers. **Physics Letters B**, v. 784, p. 68–76, 2018.
- 42 MAIA, L. P. **Uma introdução à dinâmica estocástica de populações**. São Carlos: SBMAC, 2008. Disponível em: <a href="http://www.sbmac.org.br/boletim/arquivos2008/MC-35.pdf">http://www.sbmac.org.br/boletim/arquivos2008/MC-35.pdf</a>>. Acesso em: 23 Jul. 2019.
- 43 GRIMMETT, G.; WELSH, D. **Probability**: an introduction. Oxford: Oxford University Press, 2014.
- 44 MONTANUS, J. An extended heitler–matthews model for the full hadronic cascade in cosmic air showers. **Astroparticle Physics**, v. 59, p. 4–11, 2014.
- 45 BAUS, C.; ULRICH, R. **CRMC**. Disponível em: <a href="https://web.ikp.kit.edu/rulrich/crmc.html">https://web.ikp.kit.edu/rulrich/crmc.html</a>>. Acesso em: 1 jul. 2019.
- 46 ARBELETCHE, L. et al. Investigating the influence of diffractive interactions on ultrahigh-energy extensive air showers. **International Journal of Modern Physics A**, v. 33, n. 26, p. 1850153, 2018.
- 47 DAVID, H.; NAGARAJA, H. Order statistics. 3rd. ed. Hoboken: John Wiley, 2004.
- 48 BOESE, F. G. On ordinary difference equations with variable coefficients. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 273, n. 2, p. 378–408, 2002.



# APÊNDICE A - MODELO DE HEITLER-MATTHEWS COMO UM LIMITE DA DINÂMICA DE POPULAÇÕES

Mostramos aqui como o modelo de Heitler-Matthews pode ser obtido como um limite das equações deduzidas através da dinâmica de populações. É possível escrever o número de píons na t-ésima camada como

$$\mu_t = \mu_{t-1} \langle M_{ch} \rangle_{t-1} = (\mu_{t-1})^{1-\beta} \alpha E_0^{\beta}.$$
 (A.1)

Aqui foi usada a equação (6.1) mais o fato de que a energia é equidistribuída. Com métodos conhecidos para resolução de equações de recorrência (48), a solução encontrada é

$$\mu_t = (\alpha E_0^{\beta})^{\frac{1 - (1 - \beta)^t}{\beta}}.\tag{A.2}$$

Nesta equação, a base é essencialmente a multiplicidade de produção de partículas e o expoente, um termo mais complexo e que depende do parâmetro  $\beta$  e do índice t da camada. No modelo de Heitler-Matthews  $\beta$  é nulo, uma vez que a produção de novos píons independe da energia. Tomando o limite de  $\beta \to 0$  na equação (A.2), o resultado obtido é

$$\mu_t(\beta \to 0) = \alpha^t, \tag{A.3}$$

que é um resultado análogo ao da equação (4.6). O parâmetro  $\alpha$  provém das simulações, porém a não dependência com a energia, quando toma-se  $\beta = 0$ , mostra que o resultado para o número de píons obtido da equação (A.2) é uma extensão do modelo de Heitler-Matthews.

Quanto ao resultado para a camada crítica, temos

$$\xi_c^{\pi} = \frac{E_0}{\mu_{n_c}} \Rightarrow (\alpha E_0^{\beta})^{\frac{1 - (1 - \beta)^{n_c}}{\beta}} = \frac{E_0}{\xi_c^{\pi}}.$$
 (A.4)

Aplicando logaritmo e utilizando outros artifícios algébricos, a equação para o número de camadas  $n_c$ , no máximo do chuveiro, é

$$n_c = \frac{1}{\ln(1-\beta)} \ln\left(1 - \frac{\beta \ln(E_0/\xi_c^{\pi})}{\ln(\alpha E_0^{\beta})}\right). \tag{A.5}$$

Novamente, pode ser feita uma comparação entre o resultado na equação (A.5) e na (4.5), do modelo de Heitler-Matthews. Fazendo uma expansão de Taylor para  $\beta$  muito pequeno,\* o

<sup>\*</sup> A aproximação feita aqui é que  $ln(1-x) \approx -x$ , para  $x \ll 1$ .

resultado obtido para o número máximo de camadas é

$$n_c = \frac{\ln(E_0/\xi_c^{\pi})}{\ln(\alpha)}.$$
 (A.6)

A equação para  $n_c$  aqui é idêntica à (4.5), do modelo de Heitler-Matthews. A dependência logarítmica com a energia inicial indica isso, aliado ao fato de que a constante  $\alpha$  é interpretada como a produção média de partículas (de forma independente da energia). Aqui não foi necessário o fator 3/2 que existe na equação (4.5). O parâmetro  $\alpha$  já leva isso em conta, uma vez que este considera apenas píons carregados provenientes das colisões.

De maneira análoga, esse cálculo pode ser aplicado também à variância do número de partículas no chuveiro. A solução geral de uma equação de recorrência de primeiro grau pode ser dada por (48)

$$\sigma_t^2 = \sigma^2(X,0) + \sigma^2(0,b).$$
 (A.7)

Pelas condições impostas no modelo, o primeiro termo é nulo, visto que X é o parâmetro inicial  $\sigma_0^2$ , e que no modelo de ramificação é igual a zero. Logo, o segundo termo dessa equação pode ser escrito como

$$\sigma_t^2(0,b) = \sum_{k=0}^{t-1} v_{t-1}^2 \dots v_k^2 \left( \mu_{k-1} s_{k-1}^2 \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \prod_{j=0}^{n-1} v_j^2 \left( \mu_{k-1} s_{k-1}^2 \right) \right). \tag{A.8}$$

Os parâmetros  $v_j$  podem ser reescritos em termos das médias  $\mu_j$ , segundo a equação (5.20), que por sua ver podem ser reescritas segundo a parametrização da (6.1). A equação (6.2) também parametriza a forma de se reescrever  $s_k^2$ . Com isso, mais um pouco de álgebra, finalmente obtemos

$$\sigma_n^2 = \gamma E_0^{\delta} (\alpha E_0^{\beta})^{\frac{2[1 - (1 - \beta)^n]}{\beta}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha E_0^{\beta})^{\frac{-1 - \delta + (1 + \delta)(1 - \beta)^{k-1} + 2(1 - \beta)^k}{\beta}} \right). \tag{A.9}$$

Os resultados analíticos para um chuveiro de partículas são interessantes por serem expressões relativamente simples, como as equações encontradas para o número de partículas e camada crítica. Elas descrevem um fenômeno bem complexo, apesar das simplificações adotadas, de forma satisfatória. No entanto, elas podem também ser expressões mais complicadas, como a equação (A.9), na qual torna-se uma árdua tarefa tirar conclusões físicas à primeira vista. Para alguns casos, as recorrências são mais simples de se resolver já em outros, as equações analíticas são mais interessantes.

## APÊNDICE B - A ESTATÍSTICA DE ORDEM NO MODELO LÍDER-TRAÇO

Discutiremos neste apêndice diversos detalhes técnicos relativos à seção 7.1. Em particular, serão demonstrados os resultados (7.1) e (7.2) da subseção 7.1.1.

O modelo geométrico de fragmentação uniforme introduzido na seção 7.1 é baseado na incidência de n-1 pontos de quebra uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], o que induz a formação de n segmentos. Inicialmente, determinaremos a distribuição de probabilidade do segmento mais à esquerda de [0,1]. Posteriormente, com um raciocínio recursivo aplicado a uma sequência de intervalos "decimados", cada vez menores pela sucessiva exclusão do segmento à esquerda, chegaremos à conclusão que os n segmentos são equidistribuídos. Finalmente, como os tamanhos dos segmentos são grandezas vinculadas, precisaremos usar uma técnica de análise combinatória denominada princípio de inclusão-exclusão para determinar a distribuição de probabilidade do maior segmento.

### B.1 Segmento periférico

Associada a qualquer família de variáveis aleatórias  $\{X_i\}_{i=1,\dots,m}$  há a família das **estatísticas de ordem** de  $\{X_i\}$ , denotada por  $\{X_{(j)}\}_{j=1,\dots,m}$ .

Por exemplo,  $X_{(1)}$  representa o mínimo de  $\{X_i\}$ : para cada realização conjunta das m variáveis originais, o valor mínimo realizado é denotado  $x_{(1)}$ , independentemente do índice da variável que efetivamente o realizou. A distribuição de probabilidade de  $X_{(1)}$  é aquela que descreve os possíveis valores de  $x_{(1)}$  com seus pesos associados.

Uma realização do mínimo excede um dado valor x se e somente se todas as variáveis originais  $X_i$  excedem aquele valor mesmo valor, ou seja,

$$\mathbb{P}(X_{(1)} > x) = \mathbb{P}(\{X_i > x\}). \tag{B.1}$$

Analogamente para o máximo  $X_{(m)}$ ,

$$\mathbb{P}(X_{(n)} \le x) = \mathbb{P}(\{X_i \le x\}). \tag{B.2}$$

Estas duas últimas equações são bem gerais e, se seus lados direitos puderem ser reduzidos a expressões analíticas simples, elas podem levar às densidades de probabilidade do mínimo e do máximo, haja vista que, para qualquer variável aleatória *Y*,

$$\rho_Y(y) = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{y} \rho_Y(y') \, dy' = \frac{d}{dy} \, \mathbb{P}(Y \le y). \tag{B.3}$$

Em particular, se a família  $\{X_i\}$  for composta por variáveis independentes e identicamente

distribuídas,

$$\rho_{X_{(1)}}(x) = \frac{d}{dx} \left\{ 1 - \mathbb{P}(\{X_i > x\}) \right\} = \frac{d}{dx} \left\{ 1 - [1 - \mathbb{P}(X_1 \le x)]^m \right\}$$

$$= m[1 - \mathbb{P}(X_1 \le x)]^{m-1} \rho_{X_1}(x). \tag{B.4}$$

Vamos aplicar este resultado para o caso de k-1 variáveis aleatórias  $\{U_i\}_{i=1,\cdots,k-1}$  uniformemente distribuídas no intervalo  $[0,L_k]$  segmentado em k partes, ou seja, com m=k-1,  $\rho_{U_1}(x)=1/L_k$  e  $\mathbb{P}(U_1\leq x)=x/L_k$ . Nessas condições,

$$\rho_{U_{(1)}}(x) = (k-1) \left[ 1 - \frac{x}{L_k} \right]^{k-2} \frac{1}{L_k}$$
(B.5)

e a Eq. (7.1) emerge com  $k \rightarrow n$  e  $L_n = 1$ .

### B.2 Equidistribuição dos segmentos

Se  $U_{(0)}\equiv 0$  e  $U_{(n)}\equiv 1$ , seja  $V_i\equiv U_{(i)}-U_{(i-1)}$  o tamanho aleatório do i-ésimo segmento do intervalo  $[0,1],\,i=1,\cdots,n$ .

A distribuição de  $V_2$  condicionada em uma particular realização  $V_1 = v_1$  é aquela dada pela Eq. (B.5), agora com apenas n-2 "pontos de quebra" remanescentes e comprimento  $L_{n-1}=1-v_1$ . Esse raciocínio recursivo aplicado a uma sequência de intervalos "decimados", cada vez menores pela sucessiva exclusão do segmento à esquerda, determina a distribuição de qualquer  $V_i$  condicionada nas realizações  $V_1=v_1,\cdots,V_{i-1}=v_{i-1}$  também pela Eq. (B.5), com n-i "pontos de quebra" e comprimento  $L_{n-i+1}=1-v_1-\cdots-v_{i-1}$ . Explicitamente, a partir da Eq. (B.5),

$$\rho_{V_i|V_1,\dots,V_{i-1}}(v_i;v_1,\dots,v_{i-1}) = (n-i)\left[1 - \frac{v_i}{L_{n-i+1}}\right]^{n-i-1} \frac{1}{L_{n-i+1}}.$$
(B.6)

A identidade probabilística

$$\rho_{V_1,\dots,V_{n-1}}(v_1,\dots,v_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} \rho_{V_i|V_1,\dots,V_{i-1}}(v_i;v_1,\dots,v_{i-1})$$
(B.7)

combinada à Eq. (B.6) determina a distribuição conjunta de todos os  $V_i$  como uma constante,

$$\rho_{V_1,\dots,V_{n-1}}(v_1,\dots,v_{n-1}) = (n-1)!$$
 (B.8)

para quaisquer  $v_i \ge 0$  tais que  $\sum_{i=1}^{n-1} v_i \le 1$ . A simetria desta expressão assegura a equidistribuição dos segmentos.

### B.3 Fração energética máxima

A Eq. (B.4) foi desenvolvida a partir da Eq. (B.1) com base na independência das variáveis envolvidas. Nas mesmas condições, a distribuição do máximo poderia ser determinada

a partir da Eq. (B.2). Porém, aquela independência não se aplica ao conjunto  $\{V_i\}$ . Embora a Eq. (B.2) ainda seja válida e os segmentos sejam equidistribuídos, o vínculo entre seus tamanhos exige um tratamento diferenciado na determinação da distribuição de probabilidade do maior segmento.

Em contraste com a Eq. (B.2), torna-se conveniente caracterizar o máximo de variáveis dependentes por excessos, ao invés de limitantes superiores: o máximo excede um dado valor x se e somente se pelo menos uma variável original  $X_i$  exceder aquele mesmo valor, o que equivale à união de diversas combinações de eventos. Ora, probabilidades de uniões de eventos são dadas pela fórmula de Boole, que segue do princípio de inclusão-exclusão, da análise combinatória.

Dados *n* eventos quaisquer  $A_1, \dots, A_n$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i}) - \sum_{j} \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_{i}A_{j}) + \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_{1}, \dots, A_{n}).$$
 (B.9)

Identificaremos o evento  $A_i$  como  $V_i > x$ . Isso, juntamente com a simetria entre os membros da família  $\{V_i\}$  destacada na Eq. (B.8), leva à expressão

$$\mathbb{P}(V_{(n)} > x) = n\mathbb{P}(V_1 > x) - \binom{n}{2}\mathbb{P}(V_1 > x, V_2 > x) + \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(V_1 > x, \dots, V_n > x).$$
(B.10)

Se as diversas probabilidades na expressão acima forem calculadas com a Eq. (B.8) adaptada para uma quantidade ajustável de fatores,

$$\mathbb{P}\left(V_{(n)} > x\right) = n\left(1 - x\right)^{n-1} - \binom{n}{2}\left(1 - 2x\right)^{n-1} + \cdots + (-1)^{i-1}\binom{n}{i}\left(1 - ix\right)^{n-1} + \cdots$$
(B.11)

onde a série estende-se apenas enquanto 1 - ix > 0.

O cálculo do valor médio de  $V_{(n)}$  a partir da expressão acima leva ao resultado do texto principal.