Metody obliczeniowe w nauce i technice - sprawozdanie 4

Łukasz Jezapkowicz

03.04.2020

1 Obliczyć $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ wg wzoru prostokątów, trapezów i wzoru Simpsona (zwykłego i złożonego $n = 3, 5$). Porównać wyniki i błędy.

1. Wzór prostokątów

$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2 = 0.6931471$

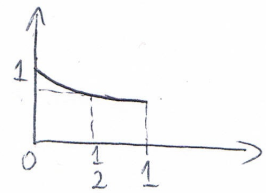
ZWYKŁY $\Rightarrow n = 1$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$

$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = 0.6666666$

Bł. bezwz. = 0.0264805

Bł. wzgl = 3,8203%



Złożone $\Rightarrow n = 3$

$f(\frac{1}{6}) = \frac{6}{7}$

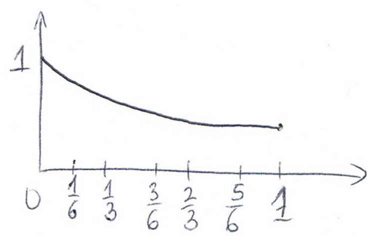
$f(\frac{3}{6}) = \frac{6}{9}$

$f(\frac{5}{6}) = \frac{6}{11}$

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{3}(\frac{6}{7} + \frac{6}{9} + \frac{6}{11}) = 0.6897546$

Bł. bezwz. = 0.0033925

Bł. wzgl. = 0.4891%



Złożone $n \Rightarrow 5$

$f(\frac{1}{10}) = \frac{10}{11}$

$f(\frac{3}{10}) = \frac{10}{13}$

$f(\frac{5}{10}) = \frac{10}{15}$

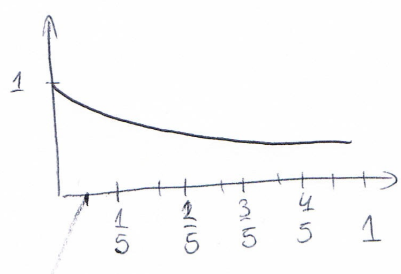
$f(\frac{7}{10}) = \frac{10}{17}$

$f(\frac{9}{10}) = \frac{10}{19}$

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{5}(\frac{10}{11} + \frac{10}{13} + \frac{10}{15} + \frac{10}{17} + \frac{10}{19}) = 0.6919078$

Bł. bezwz. = 0.0012393

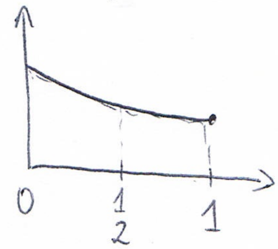
Bł. wzgl. = 0.1782%



Warto zwiększyć n.

1. Wzór trapezów

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0.6931471$



Zwykły $\to n=2$.

$f(0) = 1,\ f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3},\ f(1) = \frac{1}{2}$

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{5}{3}}{2} + \frac{\frac{7}{6}}{2}\right) = 0.7083333$

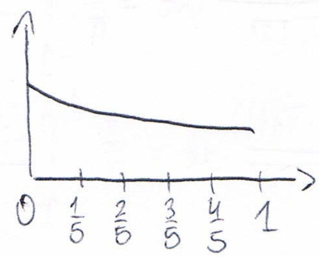
Bł. bezwzgl. = 0.0151862

Bł. wzgl = 2,191%

Złożone $\to n=3$

$f(0) = 1,\ f(\frac{1}{3}) = \frac{3}{4},\ f(\frac{2}{3}) = \frac{3}{5},\ f(1) = \frac{1}{2}$

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) = 0.7000000$



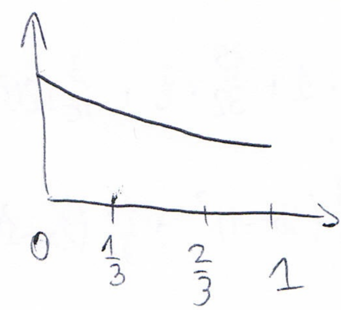
Bł. bezw. = 0.0068528

Bł. wzgl. = 0.988%

Złożone $n \to 5$

$f(0) = 1,\ f(\frac{1}{5}) = \frac{5}{6},\ f(\frac{2}{5}) = \frac{5}{7},\ f(\frac{3}{5}) = \frac{5}{8},\ f(\frac{4}{5}) = \frac{5}{9},\ f(1) = \frac{1}{2}$

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \frac{10}{6} + \frac{10}{7} + \frac{10}{8} + \frac{10}{9} + \frac{1}{2}\right) = 0.6956349$



Bł. bezw = 0.0024877

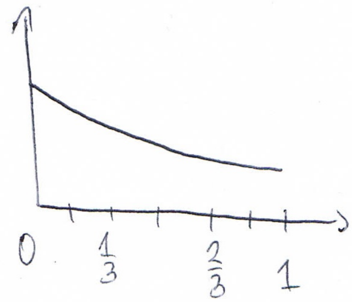
Bł. wzgl = 0.358%

Warto zwiększać n.

1. Metoda Simpsona

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 \doteq 0.6931471$$

Zwykła → $n=3$



$f(0)=1,\ f(\frac{1}{6})=\frac{6}{7},\ f(\frac{1}{3})=\frac{3}{4},\ f(\frac{1}{2})=\frac{2}{3}$

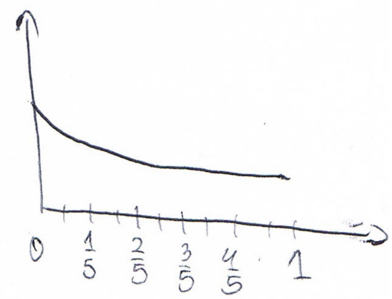
$f(\frac{2}{3})=\frac{3}{5},\ f(\frac{5}{6})=\frac{6}{11},\ f(1)=\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\left(1+\frac{6}{4}+\frac{6}{5}+\frac{1}{2}+4\left(\frac{6}{7}+\frac{2}{3}+\frac{6}{11}\right)\right)=0.6931697$$

Bł. bezwz. = 0.0000225

Bł. wzgl = 0.00326%

Złożona → $n=5$



$f(0)=1,\ f(\frac{1}{10})=\frac{10}{11},\ f(\frac{1}{5})=\frac{5}{6},\ f(\frac{3}{10})=\frac{10}{13},\ f(\frac{2}{5})=\frac{5}{7},\ f(\frac{1}{2})=\frac{2}{3}$

$f(\frac{3}{5})=\frac{5}{8},\ f(\frac{7}{10})=\frac{10}{17},\ f(\frac{4}{5})=\frac{5}{9},\ f(\frac{9}{10})=\frac{10}{19},\ f(1)=\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\left(1+\frac{10}{6}+\ldots+\frac{1}{2}+4\left(\frac{10}{11}+\ldots\right)\right)=0.6931502$$

Bł. bezwz. = 0.0000031

Bł. wzgl. = 0.00044%

Warto zwiększać n.

Metoda:	n=3	n=5
Prostokątów	0.4891%	0.1782%
Trapezów	0.988%	0.358%
Simpsona	0.00326%	0.00044%

Jak widać, metoda Simpsona okazała się najdokładniejszą metodą (z podanych) do obliczeń numerycznych. Błędy są **znacząco** mniejsze niż dla innych metod.

2 Obliczyć całkę $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx$ korzystając z wielomianów ortogonalnych (np. Legendre'a) dla $n = 8$.

2. $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}\, 1 - \text{arctg}\, {-1} = \frac{\pi}{2} = 1.570796326794896$

Wielomiany Legendr'a (Wikipedia)

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$

$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$

$P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35)$

Funkcja aproksymująca:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{8} c_i \cdot P_i(x), \quad x \in [-1,1], \text{ gdzie } c_i = \frac{\int_{-1}^{1} f(x) \cdot L_i(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} L_i^2(x)\,dx}.$$

Wielomian znaleziony przy pomocy programu w Pythonie.

$f(x) = 0.17045x^8 - 0.56681x^6 + 0.88555x^4 - 0.98846x^2 + 0.99981$

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} \approx \int_{-1}^{1} f(x)dx = 1.570833968253968$

Bł. bezwz. $= 0.000037641459071$

Bł. wzgl. $= 0.0023963297 1053\,\%$

```python
def f(x):
    return 1/(1+x**2)

def approx(n):
    L = legendre(n)
    c = []
    fa = [np.poly1d([0])]
    for i in range(n):
        c.append(quadrature((lambda x:f(x)*L[i](x)),-1,1)[0]
                      /quadrature((lambda x:L[i](x)**2),-1,1)[0])
        fa.append(c[i]*L[i])
    return sum(fa)
```

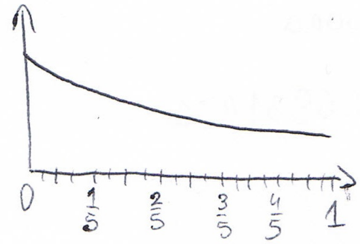
```python
def legendre(n):
    P = []
    P.append(np.poly1d([1]))
    P.append(np.poly1d([1,0]))
    x = np.poly1d([1,0])
    for i in range(1,n):
        P.append((2*i+1)/(i+1)*P[i]*x-(i/(i+1))*P[i-1])
    return P
```

Kod programu w Pythonie

3 Obliczyć całkę $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ korzystając ze wzoru prostokątów, trapezów i wzoru Simpsona dla $h = 0.1$.

3. Metoda prostokątów $h = 0.1$

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \text{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4} = 0.7853981$



x	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$
y	$\frac{400}{401}$	$\frac{400}{409}$	$\frac{16}{17}$	$\frac{400}{449}$	$\frac{400}{481}$

$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

x	$\frac{11}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{19}{20}$
y	$\frac{400}{521}$	$\frac{400}{569}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{400}{689}$	$\frac{400}{761}$

$I = \frac{1}{10}\left(\frac{400}{401} + \frac{400}{409} + \dots\right) = 0.7856064 \to$ Bł. wzgl. $= 0,02653\%$

Metoda trapezów

x	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	1
y	1	$\frac{100}{101}$	$\frac{25}{26}$	$\frac{100}{109}$	$\frac{25}{29}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{25}{34}$	$\frac{100}{149}$	$\frac{25}{41}$	$\frac{100}{181}$	$\frac{1}{2}$

$I = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\left(1 + \frac{200}{101} + \dots + \frac{1}{2}\right) = 0.7849814 \to$ Bł. wzgl. 0.05305%

Metoda Simpsona

$I = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}\left(1 + 4\cdot\frac{400}{401} + \frac{100}{101} + \dots\right) = 0.7853981 \to$ Bł. wzgl. 0% !! (dla 7 miejsc po przecinku)

4 Metodą Gaussa obliczyć następującą całkę $I = \int_0^1 \frac{1}{x+3} dx$ dla $n = 4$. Oszacować resztę kwadratury.

4. $\int_0^1 \frac{dx}{x+3} = \ln\frac{4}{3} = 0.28768207245178 09$

Metoda Gaussa – Legendre'a:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+3} \approx \sum_{i=1}^{4} a_i f(x_i) \qquad , w(x) = 1$$

Wielomiany Legendre'a:

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$.

Znajduje miejsca zerowe $P_4(x)$:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}} \approx \pm 0.3399810$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}} \approx \pm 0.8611363$$

Znajduję $\int_{-1}^{1} w(x) \cdot \phi_0(x) dx$

$$\int_{-1}^{1} w(x) \cdot \phi_0(x) dx = 2.$$

Poszukuję współczynników kwadratury Gaussa

$$\begin{bmatrix} P_0(x_1) & P_0(x_2) & P_0(x_3) & P_0(x_4) \\ P_1(x_1) & P_1(x_2) & P_1(x_3) & P_1(x_4) \\ P_2(x_1) & P_2(x_2) & P_2(x_3) & P_2(x_4) \\ P_3(x_1) & P_3(x_2) & P_3(x_3) & P_2(x_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} w(x)\phi_0(x) dx \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Po użyciu programu w Pythonie

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6521451 \\ 0.6521451 \\ 0.3478548 \\ 0.3478548 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+3} = \left| \begin{array}{l} t=2x-1 \\ x=\frac{t+1}{2} \\ dx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{dt}{2}}{\frac{t+1}{2}+3} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t+7}$$

$$f_t(t) = \frac{1}{t+7}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t+7} \approx \sum_{i=1}^{4} a_i \cdot f_t(t_i) = 0.2876820431889853$$

Błąd bezwzl. $= 2{,}93 \cdot 10^{-8}$

Błąd wzgl. $= 1{,}02 \cdot 10^{-5}\,\%$

Błąd kwadratury $= 2.93 \cdot 10^{-8}$

Metoda jest mocno dokładna nawet dla $n=4$.

```
x1=0.3399810
x2=-0.3399810
x3=0.8611363
x4=-0.8611363
```

```
def legendre(n):
    P = []
    P.append(np.poly1d([1]))
    P.append(np.poly1d([1,0]))
    x = np.poly1d([1,0])
    for i in range(1,n):
        P.append((2*i+1)/(i+1)*P[i]*x-(i/(i+1))*P[i-1])
    return P
```

```
def find_coefficients(x1,x2,x3,x4):
    P = legendre(3)
    A = np.array([[P[0](x1),P[0](x2),P[0](x3),P[0](x4)],
                  [P[1](x1),P[1](x2),P[1](x3),P[1](x4)],
                  [P[2](x1),P[2](x2),P[2](x3),P[2](x4)],
                  [P[3](x1),P[3](x2),P[3](x3),P[3](x4)]])
    B = np.array([2,0,0,0])
    return np.linalg.solve(A,B)
```

```
find_coefficients(x1,x2,x3,x4)
```

```
array([0.65214511, 0.65214511, 0.34785489, 0.34785489])
```

Kod programu w Pythonie