Metody obliczeniowe w nauce i technice - sprawozdanie 3

Łukasz Jezapkowicz

01.04.2020

1 Aproksymować funkcję $f(x) = 1+x^3$ w przedziale $[0,1]$ wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla $w(x) = 1$.

1. $f(x) = 1 + x^3$, $x \in [0,1]$, $p(x) = 1$

$$q(x) = c_0 + c_1 x$$

$$\sum_{i=0}^{1} c_i \int_0^1 p(x)\cdot \varphi_i(x)\cdot \varphi_j(x)\,dx = \int_0^1 p(x)\cdot f(x)\cdot \varphi_j(x)\,dx, \quad j=0,1, \quad \varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = x$$

$$\int_0^1 p(x)\cdot \varphi_0(x)\cdot \varphi_0(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$

$$\int_0^1 p(x)\cdot \varphi_1(x)\cdot \varphi_0(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = \int_0^1 p(x)\,\varphi_0(x)\cdot \varphi_1(x)\,dx$$

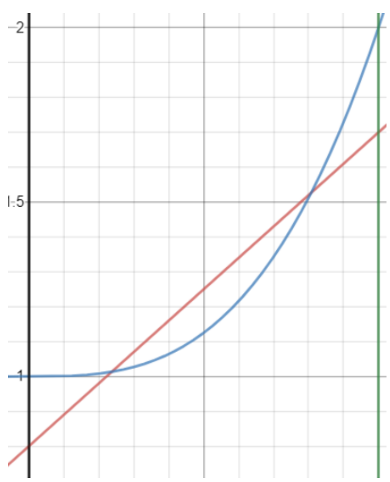
$$\int_0^1 p(x)\cdot \varphi_1(x)\cdot \varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 p(x) f(x)\,\varphi_0(x)\,dx = \int_0^1 1+x^3\,dx = \frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 p(x) f(x)\,\varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 x+x^4\,dx = \frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_0 + \frac{1}{2}c_1 = \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{3}c_1 = \frac{7}{10} \end{cases} \Rightarrow c_0 = \frac{4}{5},\ c_1 = \frac{9}{10}$$

$$\underline{q(x) = \frac{4}{5} + \frac{9}{10}x}$$



Funkcja aproksymująca (czerwona) i aproksymowana (niebieska)

2 Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale $[0,1]$ wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Czebyszewa.

2. $f(x) = 1 + x^3$, $x \in [0,1]$

Podstawienie $x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ $(t = 2x - 1)$

wtedy $t \in [-1, 1]$

$f(t) = 1 + \frac{1}{8}(t+1)^3$

$T_0(t) = 1$

$T_1(t) = t$

$T_2(t) = 2t^2 - 1$

$$f(t) \approx \sum_{j=0}^{2} c_j \cdot T_j(t)$$

Z wykładu:

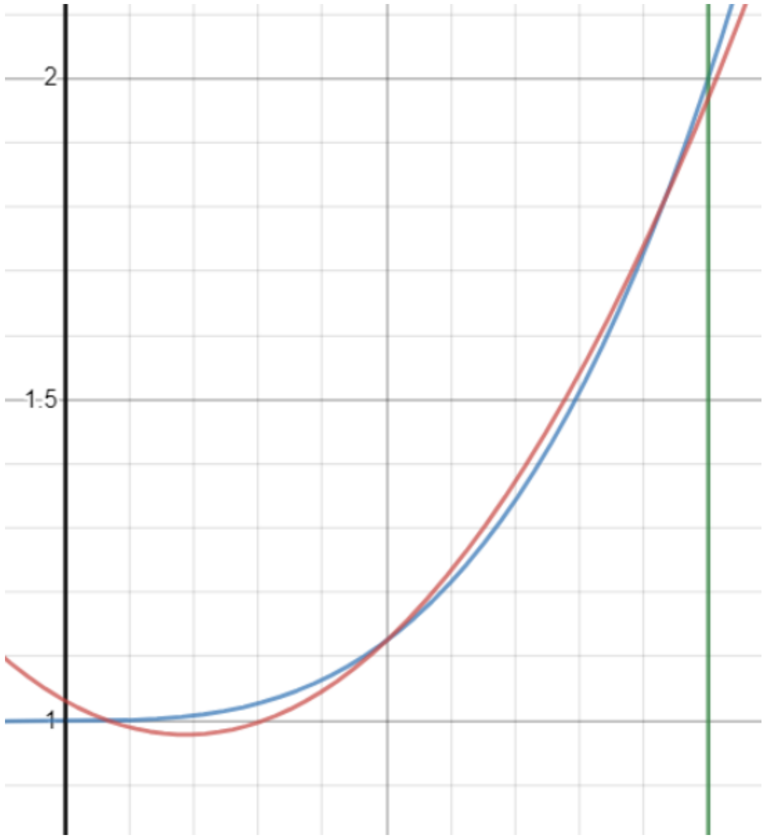
$$c_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{f(t) \cdot T_0(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{[1 + \frac{1}{8}(t+1)^3] \cdot 1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{21}{16}\pi = \frac{21}{16}$$

$$c_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{f(t) \cdot T_1(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{[1 + \frac{1}{8}(t+1)^3] \cdot t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{15}{64}\pi = \frac{15}{32}$$

$$c_2 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{f(t) \cdot T_2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{[1 + \frac{1}{8}(t+1)^3](2t^2-1)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{3}{32}\pi = \frac{3}{16}$$

$$q(t) = \frac{21}{16} + \frac{15}{32}t + \frac{3}{16}(2t^2 - 1) = \frac{3}{8}t^2 + \frac{15}{32}t + \frac{9}{8}$$

$$q(x) = \frac{3}{8}(2x-1)^2 + \frac{15}{32}(2x-1) + \frac{9}{8} = \underline{\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{33}{32}}$$



Funkcja aproksymująca (czerwona) i aproksymowana (niebieska)

3 **Obliczyć $4-5$ współczynników aproksymacji funkcji $|x|$ w przedziale $[-1,1]$ wielomianami Czebyszewa. Obliczyć błąd aproksymacji w równoodległych punktach z odstępem 0.2, poczynając od punktu -0.8. Narysować na papierze kratkowanym funkcię aproksymowaną i aproksymującą.**

3. $f(x) = |x|, \quad x \in [-1,1]$

$T_0(x) = 1, \; T_1(x) = x, \; T_2(x) = 2x^2 - 1, \; T_3(x) = 4x^3 - 3x, \; T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{4} c_j \cdot T_j(x)$$

Z wykładu:

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{f(x) \cdot T_0(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi}$$

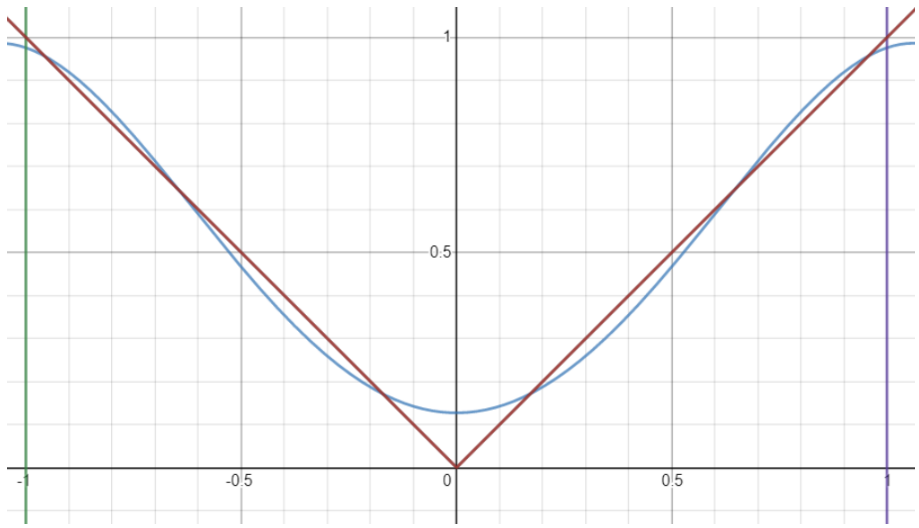
$$c_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{f(x) \cdot T_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$$

$$c_2 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{f(x) \cdot T_2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{4}{3\pi}$$

$$c_3 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{f(x) \cdot T_3(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$$

$$c_4 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{f(x) \cdot T_4(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{4}{15\pi}$$

$$q(x) = \frac{-32}{15\pi} x^4 + \frac{24}{5\pi} x^2 + \frac{2}{5\pi}.$$



Funkcja aproksymująca (niebieska) i aproksymowana (czerwona)

x	q(x)	y = |x|	Błąd bezwględny	Błąd względny
-0.8	0.827029	0.800000	0.027029	3.378 %
-0.6	0.589357	0.600000	0.010643	1.773 %
-0.4	0.354402	0.400000	0.045598	11.399 %
-0.2	0.187353	0.200000	0.012647	6.323 %
0	0.127324	0.000000	0.127324	∞ %
0.2	0.187353	0.200000	0.012647	6.323 %
0.4	0.354402	0.400000	0.045598	11.399 %
0.6	0.589357	0.600000	0.010643	1.773 %
0.8	0.827029	0.800000	0.027029	3.378 %
1.0	0.976150	1.000000	0.023850	2.385 %

Całkowity błąd bezwględny : 0.343008
Całkowity błąd względny : 5.716 %

Jak widać, całkowity błąd względny jest stosunkowo duży (5.716%). Warto więc wyliczyć kolejne kilka współczynników parzystych (nieparzyste równe są 0) żeby ten błąd zmniejszyć jeszcze bardziej. Wykresy funkcji aproksymujących oraz aproksymowanych są relatywnie podobne.

4 Wykonać aproksymację funkcję $|sin(x)|$ funkcjami trygonometrycznymi w zakresie $[-\pi, \pi]$.

Funkcja $|sinx|$ spełnia warunki Dirichleta na przedziale $[-\pi, \pi]$:
- jest bezwględnie całkowalna (skończona całka z modułu funkcji na przedziale $[-\pi, \pi]$
- ma skończoną liczbę maksimów i minimów lokalnych
- ma skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju.

Możemy ją zatem rozwinąć w szereg Fouriera (dokładniej szereg cosinusów, ponieważ funkcja jest parzysta).
Mamy zatem:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|sinx|cosnxdx = \frac{-(2(cos(\pi n)+1))}{\pi(n^2-1)}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|sinx|cosnxdx = \frac{-(2((-1)^n+1))}{\pi(n^2-1)}$$

Jak widać, dla nieparzystych n wartość $a_n = 0$ natomiast dla wartości parzystych n wartość $a_n = \frac{-4}{\pi(n^2-1)}$. Nasz szereg przybiera wówczas formę:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{i=1}^{n} a_n cosnx$$

Biorąc 5 początkowych wyrazów szeregu różnych od zera:

$$a_2 = \frac{-4}{3\pi}$$

$$a_4 = \frac{-4}{15\pi}$$

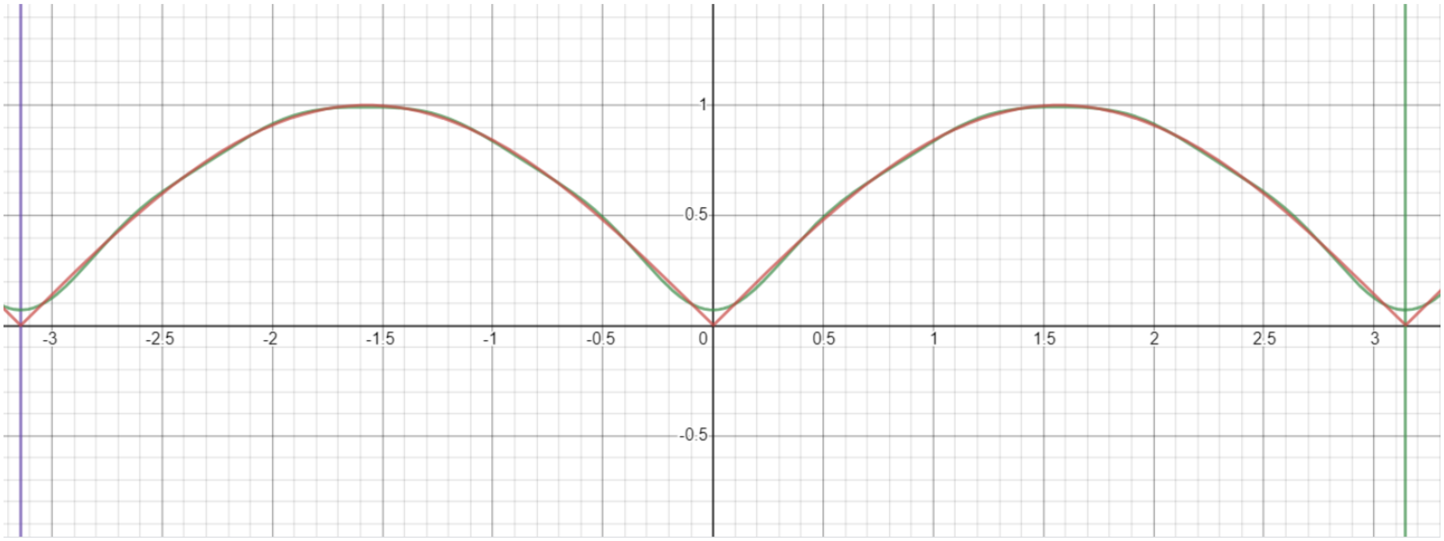
$$a_6 = \frac{-4}{35\pi}$$

$$a_8 = \frac{-4}{63\pi}$$

otrzymujemy przybliżenie dane przez szereg cosinusów:

$$S_8(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi}cos(2x) - \frac{4}{15\pi}cos(4x) - \frac{4}{35\pi}cos(6x) - \frac{4}{63\pi}cos(8x)$$

Na następnej stronie widoczny rysunek pokazujący funkcję aproksymowaną oraz funkcję aproksymującą.



Funkcja aproksymująca (zielona) i aproksymowana (czerwona)