Metody obliczeniowe w nauce i technice - sprawozdanie 2

Łukasz Jezapkowicz

19.03.2020

1 Dane są trzy węzły interpolacji $(-2.9, 1)$, $(0, 1.5)$, $(2.3, 3.9)$, proszę obliczyć wielomian interpolacyjny 2-go stopnia, wykorzystując:

1.1 jednomiany

$(-2.9, 1), (0, 1.5), (2.3, 3.9)$

$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

Nasze punkty tworzą układ równań:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2.9 & 8.41 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 1 & 2.3 & 5.29 & 3.9 \end{array}\right] \Rightarrow a_0 = 1.5 \Rightarrow \begin{cases} 1.5 - 2.9a_1 + 8.41a_2 = 1 \\ 1.5 + 2.3a_1 + 5.29a_2 = 3.9 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -2.9a_1 + 8.41a_2 = -0.5 \\ 2.3a_1 + 5.29a_2 = 2.4 \quad / \cdot \frac{2.9}{2.3} \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -2.9a_1 + 8.41a_2 = -0.5 \\ 2.9a_1 + 6.67a_2 = \frac{348}{115} \end{cases}$$

$$15.08a_2 = \frac{581}{230} \Rightarrow a_2 = \frac{2905}{17342}$$

$$a_1 = \frac{22829}{34684}$$

$$a_0 = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{2905}{17342}x^2 + \frac{22829}{34684}x + \frac{3}{2}$$

1.2 wielomiany Lagrange'a

$(-2.9, 1), (0, 1.5), (2.3, 3.9)$, punkty to (x_i, y_i)

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$f(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \cdot \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Jak widać:

$f(\underbrace{-2.9}_{x_0}) = y_0 = 1$

$f(x_1 = 0) = y_1 = 1.5$

$f(x_2 = 2.3) = y_2 = 3.9$

Po uproszczeniu i pogrupowaniu

$$f(x) = \frac{2905}{17342} x^2 + \frac{22829}{34684} x + \frac{3}{2}$$

1.3 wielomiany wg wzoru Newton'a

$(-2.9, 1), (0, 1.5), (2.3, 3.9)$

$$f(x) = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)(x - x_1)$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
-2.9	1	$\frac{5}{29}$	$\frac{2905}{17342}$
0	1.5	$\frac{24}{23}$	—
2.3	3.9	—	—

$$f(x) = 1 + \frac{5}{29}(x + 2.9) + \frac{2905}{17342}(x + 2.9)(x - 0)$$

$$f(x) = \frac{2905}{17342} x^2 + \frac{22829}{34684} x + \frac{3}{2}$$

2 Wyrazić następujący wielomian metodą Hornera: $p(t) = 3t^3 – 7t^2 + 5t – 4$

2. $p(t) = 3t^3 - 7t^2 + 5t - 4 = t(3t^2 - 7t + 5) - 4 = t(t(3t - 7) + 5) - 4 =$
$= t(t(t(3) - 7) + 5) - 4.$

3 Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu $p(t)$ stopnia $n-1$ w danym punkcie t jeżeli wybieramy jako reprezentacje:

3.1 jednomiany

Doskonale widać z naszego przykładu w zadaniu 2, że dla ewaluacji wielomianu $p(t) = 3t^3 - 7t^3 + 5t - 4$ w danym punkcie t potrzebujemy trzech mnożeń. W ogólności dla każdego wielomianu wyrażonego metodą Hornera stopnia n potrzeba n mnożeń do jego ewaluacji w danym punkcie. Zatem dla wielomianu stopnia $n-1$ potrzebne jest $n-1$ mnożeń.

3.2 wielomiany Lagrange'a

Korzystając z wzoru:

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

łatwo zauważyć, że liczba mnożeń dla każdego wyrazu sumy wynosi $n-1$ dla wyrazu L_i plus jedno mnożenie z wartością y_i co daje nam razem n mnożeń. Wyrazów sumy jest n a więc całkowita liczba mnożeń wynosi $n * n = n^2$.

3.3 wielomiany wg wzoru Newton'a

Wielomian w postaci Newton'a to suma n wielomianów o stopniach kolejno $0, 1, ..., n-1$. Na każdy wielomian stopnia i potrzebujemy i mnożeń. Suma liczb naturalnych od 0 do $n-1$ wynosi $\frac{(n-1)n}{2}$. Ponadto każdy z tych wielomianów, oprócz wielomianu stopnia 0, mnożymy dodatkowo przez współczynnik c_i co daje nam kolejne $n-1$ mnożeń. Sumując:

$$n - 1 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2+n-2}{2} = \frac{(n+2)(n-1)}{2}.$$

Tyle też mnożeń należy wykonać.

4 Obliczyć wielomian interpolacyjny dla danych $(0.5, 5.5)$, $(1, 14.5)$, $(1.5, 32.5)$, $(2, 62.5)$

4.1 przy pomocy jednomianów

$(0.5, 5.5), (1, 14.5), (1.5, 32.5), (2, 62.5)$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 5.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 14.5 \\ 1 & 1.5 & 2.25 & 3.375 & 32.5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 62.5 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -w_1 \\ -w_1 \\ -w_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 5.5 \\ 0 & 0.5 & 0.75 & 0.875 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3.25 & 27 \\ 0 & 1.5 & 3.75 & 7.875 & 57 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -2w_2 \\ -3w_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 5.5 \\ 0 & 0.5 & 0.75 & 0.875 & 9 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.5 & 9 \\ 0 & 0 & 1.5 & 5.25 & 30 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ -3w_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 5.5 \\ 0 & 0.5 & 0.75 & 0.875 & 9 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 & 3 \end{array}\right]$$

$$0.75 a_3 = 3 \Rightarrow a_3 = 4$$

$$a_2 = 6$$

$$a_1 = 2 \qquad \Rightarrow f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$$

$$a_0 = 2.5$$

4.2 obliczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla tych samych danych i pokazać, że wielomian będzie ten sam co w (a)

$(0.5, 5.5), (1, 14.5), (1.5, 32.5), (2, 62.5)$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$f(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} + y_2 \cdot \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} + y_3 \cdot \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad f(x_3) = y_3$$

$$f(x) = -\frac{22}{3}(x-1)(x-1.5)(x-2) + 58(x-0.5)(x-1.5)(x-2) - 130(x-0.5)(x-1)(x-2) + \frac{250}{3}(x-0.5)(x-1)(x-1.5$$

$$f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$$

4.3 obliczyć wielomian interpolacyjny Newtona dla tych samych danych korzystając z metody używającej trójkąta różnic i metody różnic skończonych i pokazać, że każda metoda daje ten sam wynik

Trójkąt różnic:

$(0.5, 5.5), (1, 14.5), (1.5, 32.5), (2, 62.5)$ – równoodległe węzły

$$f(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + C_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

x	y	Δy	Δy^2	Δy^3
0.5	5.5	18	18	4
1	14.5	36	24	–
1.5	32.5	60	–	–
2	62.5	–	–	–

$$f(x) = 5.5 + 18(x - 0.5) + 18(x - 0.5)(x - 1) + 4(x - 0.5)(x - 1)(x - 1.5) =$$

$$= 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$$

Różnice skończone:

c) $(0.5, 5.5), (1, 14.5), (1.5, 32.5), (2, 62.5)$

$$f(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + C_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$C_0 = f[x_0] = f(x_0) = 5.5$$

$$C_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_2} = \frac{9}{0.5} = 18$$

$$C_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{36 - 18}{1} = 18$$

$$C_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \overset{*}{=}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} - \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} = \frac{60 - 36}{1} = 24$$

$$\overset{*}{=} \frac{24 - 18}{1.5} = 4.$$

$$f(x) = 5.5 + 18(x - 0.5) + 18(x - 0.5)(x - 1) + 4(x - 0.5)(x - 1)(x - 1.5) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$$

5 Dowieść, że wzór używający różnic skończonych $y_i = f[x_1, x_2, ..., x_j]$ rzeczywiście daje współczynnik j-tej funkcji bazowej w interpolującym wielomianie Newtona

$$W_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

Z definicji:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_j] = \frac{f[x_1, \ldots, x_j] - f[x_0, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_0} \overset{?}{=} c_j \quad \text{Trzeba udowodnić.}$$

Wprowadzam tożsamość

$$w_{i,j}(x) = \frac{(x-x_i)w_{i+1,j}(x) - (x-x_j)w_{i,j-1}(x)}{x_j - x_i} \Leftarrow z(x)$$

która opisuje wielomian interpolujący dla $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$. Dowód, że tak jest:

① $x = x_i \Rightarrow z(x_i) = \dfrac{-(x_i - x_j)w_{i,j-1}(x)}{x_j - x_i} = w_{i,j-1}(x) = f(x_i)$ □

② $x = x_j \Rightarrow z(x_j) = \dfrac{(x_j - x_i)w_{i+1,j}(x)}{x_j - x_i} = w_{i+1,j}(x_j) = f(x_j)$ □ $f(x_c)$

③ $x = x_{i+1}, \ldots = x_c \Rightarrow z(x_c) = \dfrac{(x_c - x_i)w_{i+1,j}(x_c) - (x_c - x_j)w_{i,j-1}(x_c)}{x_j - x_i} = \dfrac{f(x_c)(x_c - x_i - x_c + x_j)}{x_j - x_i} = f(x_c)$ □

Przyjmijmy, że $c_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_j]$ i pokażmy przez indukcję.

$c_0 = f[x_0] = f(x_0) \rightarrow$ ok

Wiemy, że

$$w_{0,n} = w_{0,n-1} + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$w_{0,n} = \frac{(x-x_0)w_{1,n}(x) - (x-x_n)w_{0,n-1}(x)}{x_n - x_0}$$

Widać, że a_n jest współczynnikiem przy x^n w wielomianie.
Z założenia indukcyjnego mamy, że współczynniki przy x^{n-1} w wielomianach $w_{1,n}$, $w_{0,n-1}$ ~~należą od~~ są oparte o $f[x_1, \ldots, x_n]$ oraz $f[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ a więc

$$a_n = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \; \square.$$

6 Wykonać interpolację funkcji $f(x) = |sin(x)|$ w przedziale $[-4, 4]$ przy użyciu wielomianów Lagrange'a 2-go, 5-go oraz 10-go stopnia, dla równoodległych węzłów interpolacji. Narysować wykres na papierze w kratkę oraz go zinterpretować

a) $f(x) = |\sin x| \quad x \in [-4,4]$ w. 2 stopnia

$(-4, -\sin 4), (0, 0), (4, -\sin 4)$

$$f(x) = -\sin 4 \cdot \frac{x(x-4)}{-4 \cdot -8} + 0 - \sin 4 \cdot \frac{(x+4)x}{8 \cdot 4} = \frac{-\sin 4}{16} \cdot x^2$$

b) $f(x) = |\sin x| \quad x \in [-4,4]$

5 stopnia: $(-4, -\sin 4), (-\frac{12}{5}, \sin\frac{12}{5}), (-\frac{4}{5}, \sin\frac{4}{5}), (\frac{4}{5}, \sin\frac{4}{5}), (\frac{12}{5}, \sin\frac{12}{5}), (4, -\sin 4)$

$$f(x) = -\sin 4 \cdot \frac{(x+\frac{12}{5})(x+\frac{4}{5})(x-\frac{4}{5})(x-\frac{12}{5})(x-4)}{\frac{-8}{5} \cdot \frac{-16}{5} \cdot \frac{-24}{5} \cdot \frac{-32}{5} \cdot \frac{-40}{5}} + \sin\frac{12}{5} \cdot \frac{(x+4)(x+\frac{4}{5})(x-\frac{4}{5})(x-\frac{12}{5})(x-4)}{\frac{8}{5} \cdot \frac{-8}{5} \cdot \frac{-16}{5} \cdot \frac{-24}{5} \cdot \frac{-32}{5}} + \sin\frac{4}{5} \cdot \frac{(x+4)(x+\frac{12}{5})(x-\frac{4}{5})(x-\frac{12}{5})(x-4)}{\frac{16}{5} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{-8}{5} \cdot \frac{-16}{5} \cdot \frac{-24}{5}}$$

$$+ \sin\frac{4}{5} \cdot \frac{(x+4)(x+\frac{12}{5})(x+\frac{4}{5})(x-\frac{12}{5})(x-4)}{\frac{24}{5} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{-8}{5} \cdot \frac{-16}{5}} + \sin\frac{12}{5} \cdot \frac{(x+4)(x+\frac{12}{5})(x+\frac{4}{5})(x-\frac{4}{5})(x-4)}{\frac{32}{5} \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{-8}{5}} - \sin 4 \cdot \frac{(x+4)(x+\frac{12}{5})(x+\frac{4}{5})(x-\frac{4}{5})(x-\frac{12}{5})}{\frac{40}{5} \cdot \frac{32}{5} \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{8}{5}}$$

- Wyznaczenie jawnego wzoru jest zadaniem bardzo trudnym.

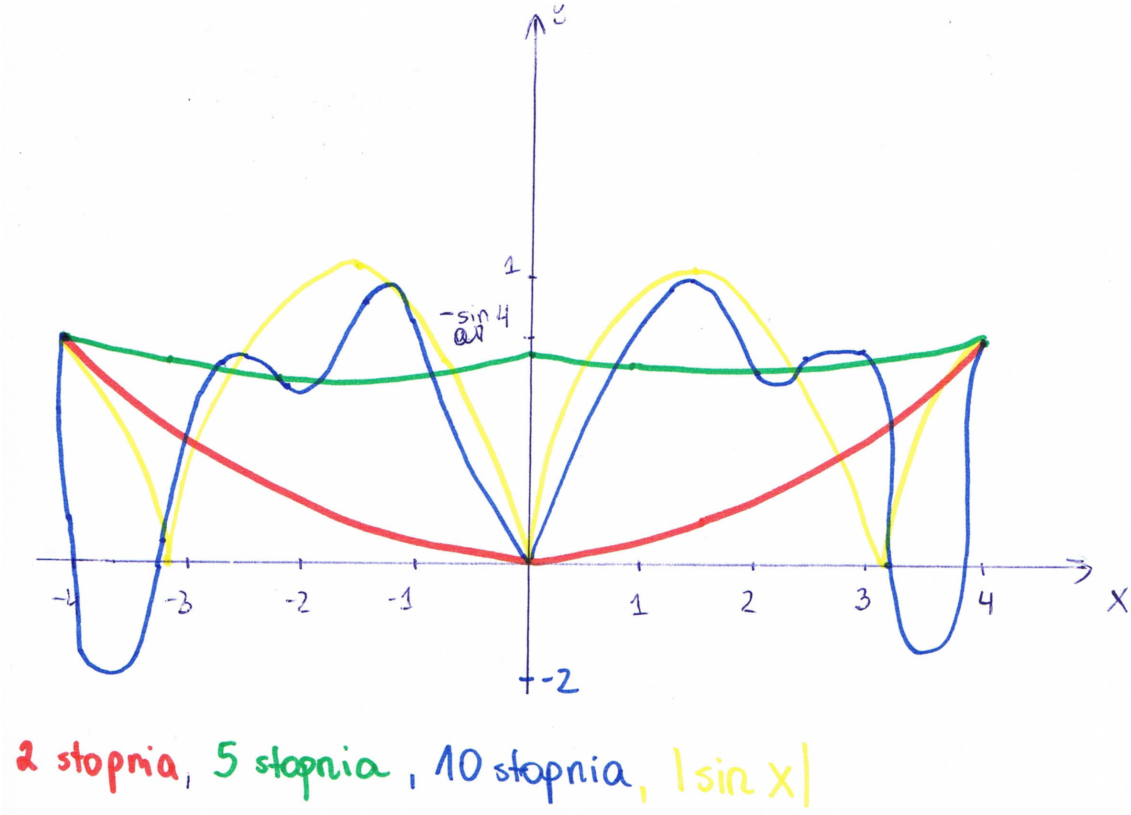
c) $f(x) = |\sin x| \quad x \in [-4,4]$

10 stopnia:

x	-4	-3.2	-2.4	-1.6	-0.8	0	0.8	1.6	2.4	3.2	4
y	-sin 4	-sin(3.2)	sin(2.4)	sin(1.6)	sin(0.8)	0	sin(0.8)	sin(1.6)	sin(2.4)	-sin(3.2)	sin(4)

$$f(x) = -\sin 4 \cdot \frac{(x+3.2)}{-0.8}\,\frac{(x+2.4)}{-1.6}\,\frac{(x+1.6)}{-2.4}\,\frac{(x+0.8)}{-3.2}\,\frac{x}{-4}\,\frac{(x-0.8)}{-4.8}\,\frac{(x-1.6)}{-5.6}\,\frac{(x-2.4)}{-6.4}\,\frac{(x-3.2)}{-7.2}\,\frac{(x-4)}{-8} + \dots$$

Wyznaczenie wzoru jawnego jest bardzo trudne.



Jak widać, wraz ze zwiększeniem liczby węzłów rośnie dokładność naszej interpolacji. Przybliżona funkcja coraz bardziej przypomina funkcję $f(x) = |sinx|$. Dla wielomianu stopnia 2 funkcja przybrała całkiem inny kształt, dla wielomianu 5 stopnia funkcja była niemal stała a dla wielomianu stopnia 10 pojawiły się wartości ujemne. Wielomian 10 stopnia przybliża dobrze funkcję w przedziale $[-2, 2]$ zaś poza tym przedziałem jakość interpolacji jest zła, czego powodem jest efekt Rungego.