| | |
|---|---|
| **Nr ćwiczenie** | 5 |
| **Temat ćwiczenia** | Metoda elementów skończonych |
| **Cel ćwiczenia** | Zapoznanie z metodą przybliżonego rozwiązywania jednowymiarowych równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego z pomocą metody elementów skończonych |

## Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest utrwalenie zagadnień zaprezentowanych w Ćwiczeniu 4,
poprzez zastosowanie metody elementów skończonych do rozwiązania ogólnego jednowymiarowego równania różniczkowego liniowego rzędu drugiego.

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z metodą rozwiązywania jednowymiarowych równań różniczkowych liniowych cząstkowych metodą elementów skończonych.

Ćwiczenie ilustruje sposób wyprowadzania sformułowania wariacyjnego dla jednowymiarowych równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego, oraz rozwiązywanie przybliżone sformułowania wariacyjnego z pomocą MES, w którym to rozwiązanie sformułowania wariacyjnego przybliżane jest z pomocą kombinacji funkcji skonstruowanych w oparciu o węzły siatki obliczeniowej.

## Wprowadzenie teoretyczne

Ćwiczenia opierają się na fragmentach wykładu z przedmiotu „Równania różniczkowe i różnicowe" dotyczacych sformułowań wariacyjnych i metody Galerkina.

Wykorzystywany jest rozdział 1 z książki Leszka Demkowicza „Computing with *hp* Adaptive Finite Element Method. Part I. One and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems", oraz fragmenty rozdziału 2 i rozdziału 3.

## Plan ćwiczenia

Proszę rozwiązać metodą elementów skończonych następujące równanie różniczkowe

$$\left(a(x)u'(x)\right)' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

dla $x \in [0,1]$ przy założeniu $-a(0)u'(0) + \beta u(0) = \gamma$ oraz $u(1) = u_1$

Parametry programu to funkcję $R \ni x \to a(x) \in R$, $R \ni x \to b(x) \in R$, $R \ni x \to c(x) \in R$, $R \ni x \to f(x) \in R$ stałe $\beta$ $\gamma$ oraz $u_1$, a także *N* ilość elementów skończonych użytych do dyskretyzacji problemu na przedziale [0,1].

Rozwiązanie składa się z następujących etapów

1. Proszę wyprowadzić sformułowanie wariacyjne dla przedstawionego układu równań liniowych
2. Proszę parametry programu – funkcję $R \ni x \to a(x) \in R$, $R \ni x \to b(x) \in R$, $R \ni x \to c(x) \in R$, $R \ni x \to f(x) \in R$ przedstawić w postaci funkcji
   np. w MATLABIE
```
function [a] = function_a(x)

function [b] = function_b(x)

function [c] = function_c(x)

function [f] = function_f(x)
```
3. Proszę napisać procedurę generującą układ równań liniowych, rozwiązującą wygenerowany układ równań (w MATLABie poleceniem `u=A\f'`, lub z pomocą solvera z programu KonwekcjaDyfuzja.m dostępnego na moodle) oraz rysujący wykres rozwiązania.
   Procedura w MATLABie będzie mieć następującą postać:
```
function [u] = MES(n)
```
4. Proszę sprawdzić działanie programu rozwiązując równanie
   $u''=0 \quad u'(0)=0 \quad u(1)=1$

   (przyjmując parametry $a(x)=1, b(x)=c(x)=f(x)=0, \beta=0, \gamma=0, u_1=1$)

   Rozwiązanie to $u(x)=1$
   (proszę wyprowadzić to rozwiązanie całkując dwa razy podane równanie i stosując warunki brzegowe do wyznaczenia stałych)

## Sposób oceny

1. Poprawność wyprowadzonego sformułowania wariacyjnego
2. Poprawność skonstruowanych funkcji kształtu
3. Poprawne obliczenie całek – wyrazów macierzy sztywności i wektora prawej strony
4. Poprawne zakodowanie wzorów na wyrazy macierzy sztywności i wektora prawej strony w programie
5. Poprawne działanie programu sprawdzone na kilku przykładowych równaniach (np. na równaniu transportu ciepła)

## Literatura

1. Leszek Demkowicz „Computing with *hp* Adaptive Finite Element Method. Part I. One and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems" CRC Press 2007.