Łukasz Jezapkowicz

Rozwiązanie zadania numer 1

Przyjmijmy $I = [a, b]$,a,$b \in \mathbb{R}$,$a < b$ oraz odwzorowanie liniowe ciągłe:

$$D : C^1(I \to \mathbb{R}^d) \ni y \to Dy \in C^0(I \to \mathbb{R}^d)$$

takie, że $(Dy(x))_i = D(y_i)(x)$,$i = 1, ..., d$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Przyjmijmy również odwzorowanie ciągłe, którego wartościami są macierze:

$$I \ni x \to A(x) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$$

Wiemy również, że:

$$A \in C^0(I \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$$

Obserwacja 4**:**
1. Odwzorowanie:

$$C^0(I \to \mathbb{R}^d) \ni y \to Ay \in C^0(I \to \mathbb{R}^d)$$

spełnia warunek Lipschitza.
2. Odwzorowanie:

$$I \ni x \to A(x)y(x) \in \mathbb{R}^d \in C^0(I \to \mathbb{R}^d)$$

jest ciągłe dla każdego $y \in C^0(I \to \mathbb{R}^d)$**.**
3. Odwzorowanie:

$$B : C^1(I \to \mathbb{R}^d) \ni y \to B(y) = Dy - Ay \in C^0(I \to \mathbb{R}^d)$$

jest liniowe.

Dowód 2**:**
Z punktu 1 wiemy, że $y(x)$ jest funkcją ciągłą zaś z wcześniejszych założeń wiemy , że $x \to Ax$ jest również ciągłe. By wykazać ciągłość funkcji $f(x) = A(x)y(x)$ wystarczy więc pokazać, że iloczyn funkcji ciągłych jest ciągły. Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy w każdym punkcie dziedziny istnieje granica $\lim_{x\to x_0} f(x)$ i jest ona równa wartości funkcji w punkcie x_0 czyli $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Definicja Heinego mówi, że dla dowolnego punktu x_0 należącego do dziedziny (I) oraz dowolnego ciągu $x_n \in I$ takiego, że $x_n \to x_0$ funkcja jest ciągła w punkcie x_0 jeśli spełniony jest warunek $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. W przestrzeniach metrycznych jest to równoważne sprawdzeniu czy $\lim_{n\to\infty} \|f(x_n) - f(x_0)\| = 0$. W naszym przypadku sprowadza się do sprawdzenia czy $\lim_{n\to\infty} \|A(x_n)y(x_n) - A(x_0)y(x_0)\| = 0$. Przekształcając nasze wyrażenie mamy:

$$\|A(x_n)y(x_n)-A(x_0)y(x_0)\| = \|A(x_n)y(x_n)-A(x_n)y(x_0)+A(x_n)y(x_0)-A(x_0)y(x_0)\|$$

Dalej:

$$\|A(x_n)y(x_n) - A(x_n)y(x_0) + A(x_n)y(x_0) - A(x_0)y(x_0)\| = \\ \|A(x_n)[y(x_n) - y(x_0)] + [A(x_n) - A(x_0)]y(x_0)\|$$

Korzystając z nierówności trójkąta:

$$\|A(x_n)[y(x_n) - y(x_0)] + [A(x_n) - A(x_0)]y(x_0)\| \leq \\ \|A(x_n)[y(x_n) - y(x_0)\| + \|[A(x_n) - A(x_0)]y(x_0)\|$$

Korzystając z nierówności (85):

$$\|A(x_n)[y(x_n) - y(x_0)\| + \|[A(x_n) - A(x_0)]y(x_0)\| \leq \\ \|A(x_n)\| * \|y(x_n) - y(x_0)\| + \|A(x_n) - A(x_0)\| * \|y(x_0)\|$$

Ponieważ $y(x_0)$ oraz $A(x_n)$ są ciągłe to muszą istnieć takie stałe M i N, że:

$$\|y(x_0)\| \leq M \text{ oraz } \|A(x_n)\| \leq N$$

Z ciągłości y oraz A wiemy też, że:

$$\|y(x_n) - y(x_0)\| \to 0 \text{ oraz } \|A(x_n) - A(x_0)\| \to 0$$

Co w połączeniu daje:

$$\|A(x_n)\| * \|y(x_n) - y(x_0)\| + \|A(x_n) - A(x_0)\| * \|y(x_0)\| \leq \\ N * \|y(x_n) - y(x_0)\| + \|A(x_n) - A(x_0)\| * M \to 0$$

Wszystkie poprzednie nierówności dowodzą, że również:

$$\|A(x_n)y(x_n) - A(x_0)y(x_0)\| \to 0$$

Teza jest zatem prawdziwa.

Dowód 3**:**
Odwzorowanie Dy jest liniowe z założenia. Odwzorowanie Ay również jest odwzorowaniem liniowym, ponieważ iloczyn macierzy z wektorem daje wektor będący kombinacją liniową kolumn macierzy.

Niech V,W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $f : V \to W$ będzie odwzorowaniem. Mówimy, że f jest liniowe, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\text{1. Dla każdego } u, v \in V \;\; f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$\text{2. Dla każdego } \lambda \in \mathbb{K} \text{ oraz } v \in V \;\; f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

W naszym przypadku:

$$1. \forall y, z \in C^1(I \to \mathbb{R}^d)$$
$$B(y+z) = D(y+z) - A(y+z) = D(y) + D(z) - A(y) - A(z) =$$
$$D(y) - A(y) + D(z) - A(z) = B(y) + B(z)$$

Czyli nasze odwzorowanie spełnia pierwszy warunek.

$$2. \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ oraz } \forall y \in C^1(I \to \mathbb{R}^d)$$
$$B(\lambda y) = D(\lambda y) - A(\lambda y) = \lambda D(y) - \lambda A(y) = \lambda(D(y) - A(y)) = \lambda B(y)$$

Czyli nasze odwzorowanie spełnia również drugi warunek czyli jest liniowe.