

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Cel ćwiczenia</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Wstęp teoretyczny</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Układ pomiarowy</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Przebieg ćwiczenia</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Wyniki pomiarów</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Opracowanie wyników pomiarowych dla kondensatora płaskiego</b>	<b>7</b>
6.1	Obliczenie średnich wartości potencjałów oraz wartości doświadczalnych natężenia pola . . . . .	7
6.2	Wykresy zależności potencjału $V$ i natężenia pola elektrycznego $E$ od odległości $x$	8
6.3	Obszar na zewnątrz kondensatora . . . . .	9
6.4	Linie ekwipotencjalne oraz linie pola . . . . .	9
<b>7</b>	<b>Opracowanie wyników pomiarowych dla kondensatora cylindrycznego</b>	<b>10</b>
7.1	Obliczenie średnich wartości potencjałów oraz wartości doświadczalnych natężenia pola . . . . .	10
7.2	Wykresy zależności potencjału $V$ i natężenia pola elektrycznego $E$ od odległości $x$	11
7.3	Linie ekwipotencjalne oraz linie pola . . . . .	12
<b>8</b>	<b>Wnioski</b>	<b>12</b>

# 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było poznanie podstawowych wielkości opisujących pole elektrostatyczne oraz wyznaczenie powierzchni ekwipotencjalnych i wektorów natężenia pola elektrycznego na płaszczyźnie różnych konfiguracji elektrod.

## 2 Wstęp teoretyczny

Rozpatrzmy zamkniętą powierzchnię obejmującą dwa ładunki  $Q_1$  i  $Q_2$ . Całkowity strumień (liczba linii sił) przechodzący przez powierzchnię otaczającą ładunki  $Q_1$  i  $Q_2$  jest równy:

$$\phi_c = \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E}_1 d\mathbf{S} + \oint \mathbf{E}_2 d\mathbf{S},$$

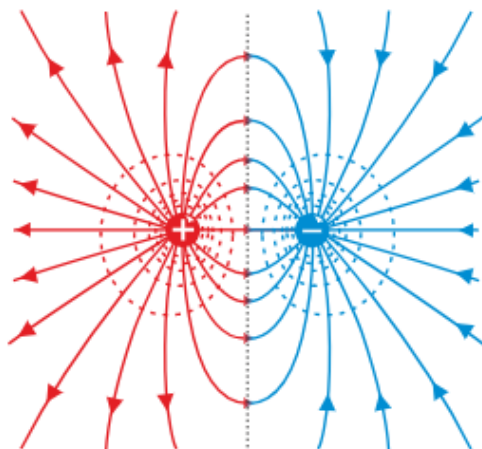
gdzie pole  $E_1$  jest wytwarzane przez  $Q_1$ , a pole  $E_2$  przez  $Q_2$ . Kółko na znaku całki oznacza, że powierzchnia całkowania jest zamknięta. Zachodzi wtedy:

$$\phi_c = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}$$

Całkowity strumień pola elektrycznego przez zamkniętą powierzchnię jest więc równy całkowitemu ładunkowi otoczonemu przez tę powierzchnię podzielonemu przez  $\varepsilon_0$ . Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnej liczby ładunków wewnątrz dowolnej zamkniętej powierzchni. Otrzymujemy więc ogólny związek znany jako prawo Gaussa:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi k Q_{wewn.} = \frac{Q_{wewn.}}{\varepsilon_0}$$

Układ dwóch jednakowych co do wartości ładunków elektrycznych, mających przeciwne znaki nazywany jest dipolem elektrycznym. W przypadku dipola ładunki znajdują się na tyle blisko siebie, że pola elektrostatyczne przez nie wytworzone wpływają wzajemnie na siebie, w wyniku czego linie pola centralnego pojedynczych ładunków ulegają zakrzywieniu.



**Rys. 1:** Powierzchnie ekwipotencjalne (linie przerywane) i linie sił pola (linie ciągłe) dipola elektrycznego

Powierzchnie ekwipotencjalne (linie przerywane) i linie sił pola (linie ciągłe) dipola elektrycznego; linie ekwipotencjalne oznaczają przecięcia powierzchni ekwipotencjalnych z płaszczyzną rysunku. Mówimy, że w danym obszarze istnieje jednorodne pole elektryczne, jeżeli w każdym punkcie tego obszaru wartość natężenia pola jest jednakowa. Jednorodne pole elektryczne wytwarzamy na przykład między okładkami kondensatora płaskiego.

Kondensator płaski tworzą dwie równoległe naładowane płyty metalowe (każda z płyt ma ładunek przeciwny do drugiej). Linie sił pola jednorodnego są wzajemnie równoległe. W jednorodnym polu elektrycznym zależność między natężeniem pola elektrycznego a różnicą potencjałów wyraża się wzorami:  $E = \frac{\Delta V}{d}$  lub  $E = \frac{U}{d}$  gdzie  $\Delta V$  to różnica potencjałów płyt kondensatora (inaczej napięcie  $U$ ), zaś  $d$  to odległość płyt kondensatora.

Przybliżoną wartość natężenia pola  $E$  możemy uzyskać obliczając numerycznie gradient potencjału:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{V(x+h,y)-V(x,y)}{h}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \approx \frac{V(x,y+k)-V(x,y)}{k},$$

gdzie  $h$  i  $k$  są krokami siatki.

Wewnątrz kondensatora płaskiego pole elektryczne jest jednorodne, o wartości:

$$E = \frac{U}{d}$$

Potencjał rośnie liniowo od zera do wartości napięcia zasilacza  $U$ :

$$V(x) = \frac{U}{d}x$$

Na zewnątrz kondensatora płaskiego pole jest niejednorodne oraz rozproszone.

Wewnątrz kondensatora cylindrycznego natężenie pola elektrycznego jest dane wzorem:

$$E(x) = \frac{U}{x \cdot \ln\left(\frac{r_z}{r_w}\right)}$$

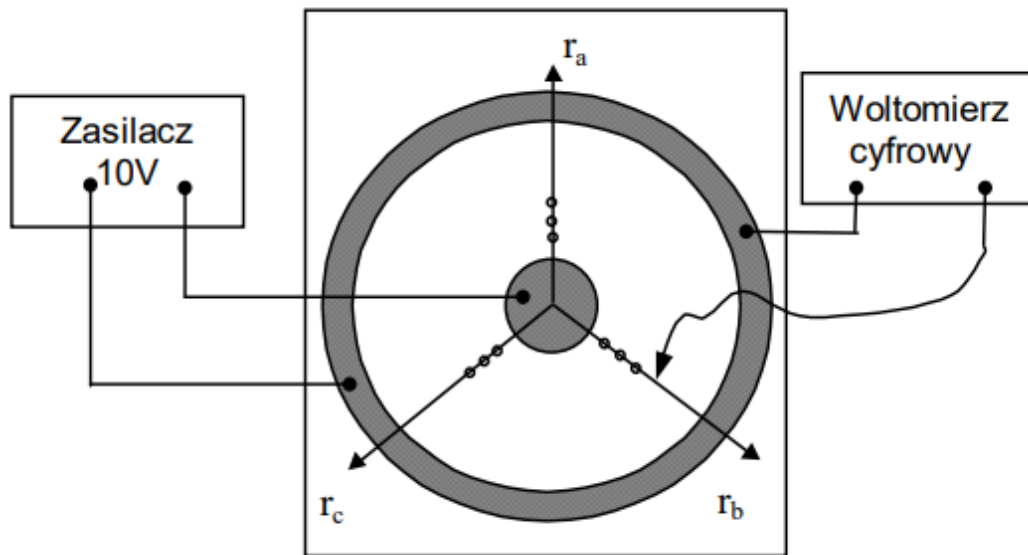
Poprzez obliczenie pochodnej z wzoru  $E(x)$  otrzymujemy wyrażenie na potencjał:

$$V(x) = \frac{U}{\ln\left(\frac{r_z}{r_w}\right)} \ln\left(\frac{x}{r_z}\right)$$

### 3 Układ pomiarowy

Przyrządy potrzebne do wykonania doświadczenia (Rys. 2):

1. Płyty modelowe będące modelami kondensatorów: płaskiego, cylindrycznego oraz o dowolnym kształcie elektrod.
2. Zasilacz 10V
3. Woltomierz cyfrowy

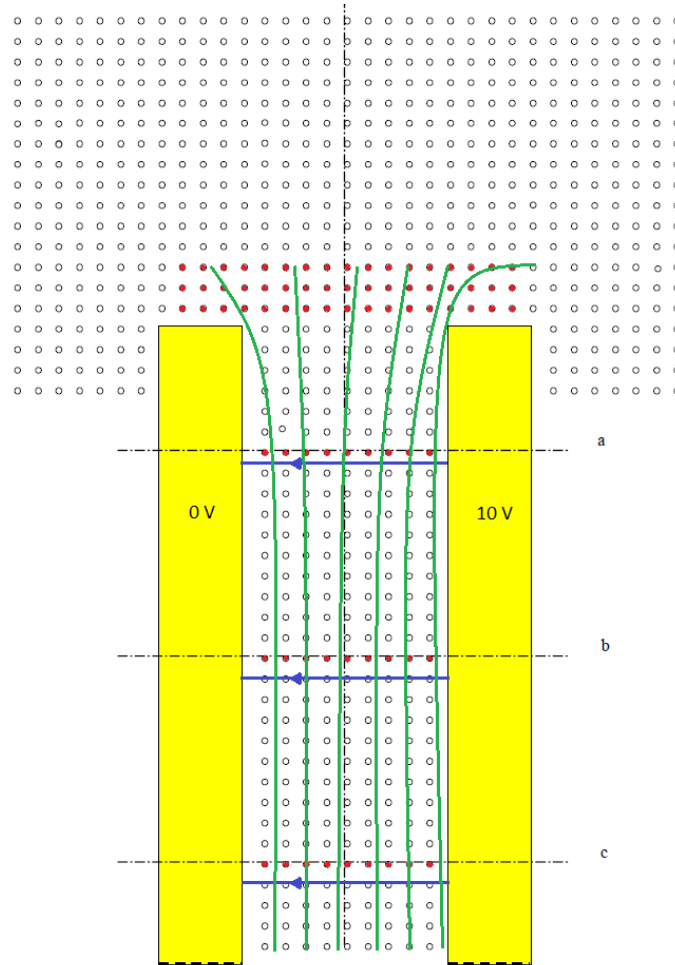


Rys. 2: Schemat połączeń układu pomiarowego do modelowania pola elektrycznego

### 4 Przebieg ćwiczenia

Na początku połączyliśmy obwód elektryczny tak jak na Rys. 2 używając płyty modelowej dla kondensatora płaskiego oraz sprawdziliśmy czy napięcie zasilacza wynosi 10 V. Przy pomocy sondy upewniliśmy się, że dobrze podłączyliśmy płytę modelową. Następnie zmierzaliśmy wartości potencjału wzdłuż trzech różnych kierunków wewnątrz kondensatora oraz wartości 51 punktów na zewnątrz kondensatora (Prostokąt 3×17). Po wykonaniu tego podłączyliśmy płytę modelową dla kondensatora cylindrycznego oraz zmierzaliśmy wyniki wzdłuż trzech promieni. Wszystkie wyniki zapisaliśmy.

## 5 Wyniki pomiarów



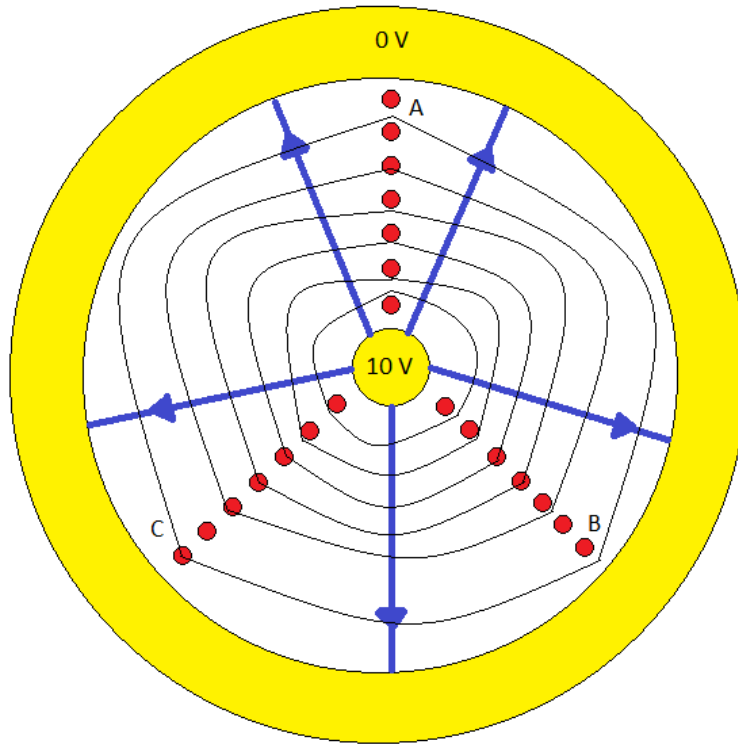
**Rys. 3:** Płaski układ elektrod z zaznaczonymi punktami pomiarów. Odległość między punktami jest równa  $5\text{ mm}$ . Na rysunku narysowano również linie ekwipotencjalne zielonym kolorem ( $1.5\text{ V}$ ,  $3\text{ V}$ ,  $4.5\text{ V}$ ,  $6\text{ V}$ ,  $7.5\text{ V}$ ,  $9\text{ V}$ )

Wynik pomiaru [V]																
1.093	1.452	1.392	1.923	2.553	2.903	3.052	3.771	4.360	4.902	5.521	6.098	6.742	7.528	8.323	8.492	8.439
1.023	1.301	1.102	2.032	2.705	2.598	3.251	4.011	4.302	5.019	5.742	6.204	6.923	7.506	8.420	8.820	8.723
0.831	1.220	1.052	1.982	2.803	2.702	3.452	4.157	4.790	4.917	5.871	6.787	7.387	7.682	8.447	8.762	8.895

**Tab. 1:** Wyniki pomiarów potencjału dla kondensatora płaskiego na zewnątrz kondensatora. Wyniki podane w takiej samej kolejności jak na rysunku.

Wynik pomiaru [V]									
Linia a	1.124	2.060	3.145	3.865	4.660	5.560	6.585	7.517	8.428
Linia b	1.144	2.083	2.930	4.029	4.798	5.693	6.556	7.500	8.360
Linia c	0.982	1.934	2.938	3.896	4.722	5.747	6.536	7.489	8.302

**Tab. 2:** Wyniki pomiarów potencjału dla kondensatora płaskiego wewnątrz kondensatora.



**Rys. 4:** Cylindryczny układ elektrod z zaznaczonymi punktami pomiarów. Odległość między punktami jest równa w przybliżeniu  $7 - 8 \text{ mm}$ . Na rysunku narysowano również linie ekwipotencjalne czarnym kolorem ( $6 \text{ V}$ ,  $5 \text{ V}$ ,  $4 \text{ V}$ ,  $3 \text{ V}$ ,  $2 \text{ V}$ ,  $1 \text{ V}$ )

Wynik pomiaru [V]							
Linia A	6.482	4.883	3.710	2.839	1.990	1.543	0.877
Linia B	6.514	5.112	4.003	3.092	2.410	1.598	1.122
Linia C	6.664	5.146	3.998	3.001	2.260	1.627	1.016

**Tab. 3:** Wyniki pomiarów potencjału dla kondensatora cylindrycznego.

## 6 Opracowanie wyników pomiarowych dla kondensatora płaskiego

### 6.1 Obliczenie średnich wartości potencjałów oraz wartości doświadczalnych natężenia pola

Dla obszaru wewnątrz kondensatora obliczyliśmy średnie wartości potencjału jako średnią arytmetyczną trzech zmierzonych wartości potencjału. Dla przykładu, dla  $x = 5 \text{ mm}$ :

$$V_{dosw} = \frac{V_a + V_b + V_c}{3} = \frac{1.124 \text{ V} + 1.144 \text{ V} + 0.982 \text{ V}}{3} = 1.083 \text{ V}$$

Pozostałe wyniki, obliczone w identyczny sposób, wpisaliśmy do Tab. 4.

Następnie obliczyliśmy wartości doświadczalne natężenia pola korzystając ze wzoru:

$$E_{dosw} = \frac{V_{n+1} - V_n}{x_{n+1} - x_n}$$

Dla  $x_1 = 5 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 10 \text{ mm}$ ,  $V_1 = 1.083 \text{ V}$  oraz  $V_2 = 2.026 \text{ V}$ :

$$x^* = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} = \frac{10 \text{ mm} + 5 \text{ mm}}{2} = 7.5 \text{ mm}$$

$$E_{dosw} = \frac{V_{n+1} - V_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{2.026 \text{ V} - 1.083 \text{ V}}{10 \text{ mm} - 5 \text{ mm}} = 188.6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Pozostałe wyniki, obliczone w identyczny sposób, wpisaliśmy do Tab. 4.

Na końcu policzyliśmy wartości teoretyczne używając wzorów:

$$V_{teor} = \frac{U}{d}x \text{ oraz } E_{teor} = \frac{U}{d}$$

Dla powyższych przykładów:

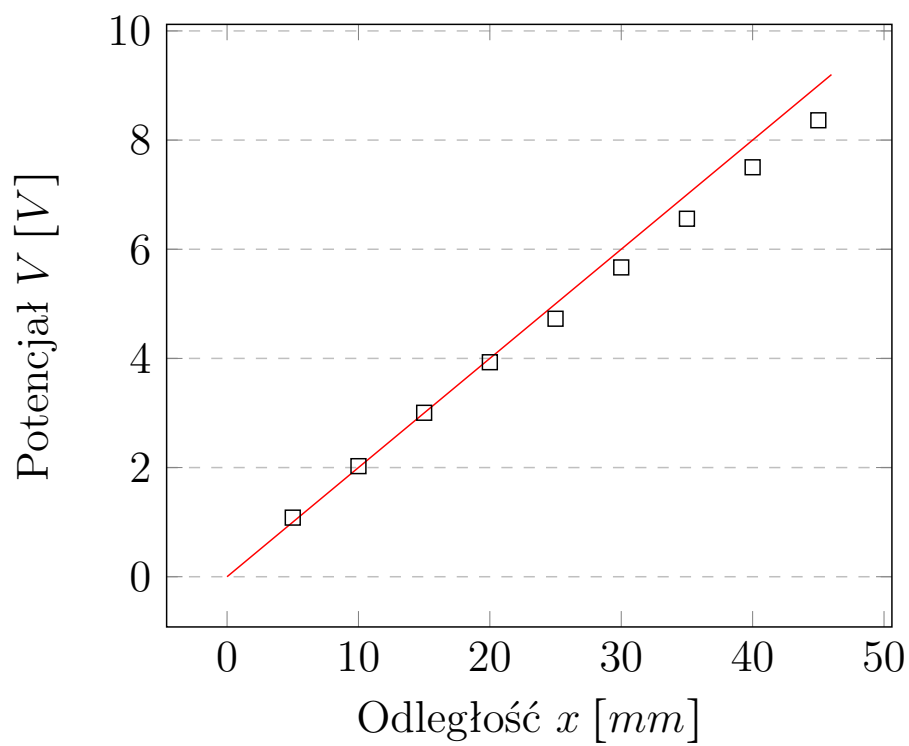
$$V_{teor} = \frac{U}{d}x = \frac{10 \text{ V}}{50 \text{ mm}} * 5 \text{ mm} = 1 \text{ V}$$

$$E_{teor} = \frac{U}{d} = \frac{10 \text{ V}}{50 \text{ mm}} = 200 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

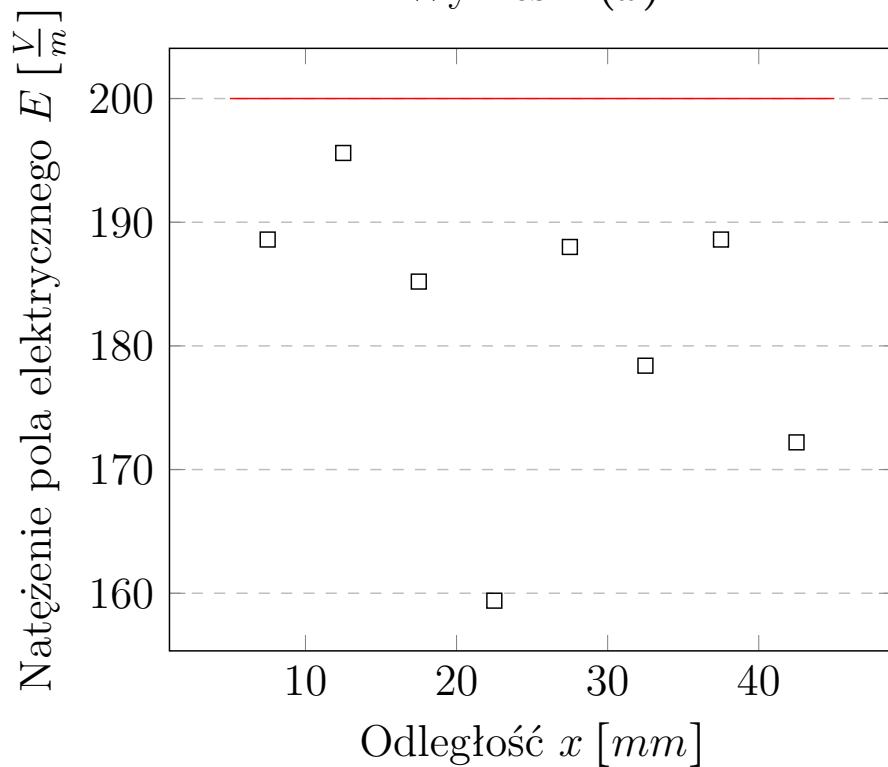
Wszystkie wyniki teoretyczne, obliczone w identyczny sposób, wpisaliśmy do Tab. 4.

## 6.2 Wykresy zależności potencjału $V$ i natężenia pola elektrycznego $E$ od odległości $x$

Wykres  $V(x)$



Wykres  $E(x)$





### 6.3 Obszar na zewnątrz kondensatora

Wartość składowych wektora  $E$  można obliczyć korzystając ze wzorów:

$$E_x = \frac{V(x+h,y)-V(x,y)}{h} \text{ oraz } E_y = \frac{V(x,y+k)-V(x,y)}{k},$$

gdzie  $h$  i  $k$  są krokami siatki. U nas  $h = k = 5 \text{ mm}$ . Dla ostatniego punktu w pierwszym wierszu Tab. 1:

$$V(0,0) = 8.439 \text{ V}, V(5,0) = 8.723 \text{ V}, V(0,5) = 8.492 \text{ V}$$

$$E_x = \frac{8.723 \text{ V} - 8.439 \text{ V}}{5 \text{ mm}} = 56.8 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_y = \frac{8.492 \text{ V} - 8.439 \text{ V}}{5 \text{ mm}} = 10.6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Obliczenia powtórzono dla kilku innych punktów oraz zaznaczono wektor natężenia pola wraz ze składowymi na Rys. 3.

### 6.4 Linie ekwipotencjalne oraz linie pola

Linie ekwipotencjalne oraz linie pola zostały pokazane na Rys. 3.

L.p	x [mm]	$V_{\text{dośw}} = (V_a + V_b + V_c)/3$ [V]	$V_{\text{teor}}$ [V]
1	5	1.083	1
2	10	2.026	2
3	15	3.004	3
4	20	3.930	4
5	25	4.727	5
6	30	5.667	6
7	35	6.559	7
8	40	7.502	8
9	45	8.363	9

L.p	$x^*$ [mm]	$E_{\text{dośw}}$ [V/m]	$E_{\text{teor}}$ [V/m]
1	7.5	188.6	200
2	12.5	195.6	200
3	17.5	185.2	200
4	22.5	159.4	200
5	27.5	188.0	200
6	32.5	178.4	200
7	37.5	188.6	200
8	42.5	172.2	200

**Tab. 4:** Wyniki obliczeń dla kondensatora płaskiego

## 7 Opracowanie wyników pomiarowych dla kondensatora cylindrycznego

### 7.1 Obliczenie średnich wartości potencjałów oraz wartości doświadczalnych natężenia pola

Dla obszaru wewnątrz kondensatora obliczyliśmy średnie wartości potencjału jako średnią arytmetyczną trzech zmierzonych wartości potencjału. Dla przykładu, dla  $x = 35 \text{ mm}$ :

$$V_{dosw} = \frac{V_a + V_b + V_c}{3} = \frac{6.482 \text{ V} + 6.514 \text{ V} + 6.664 \text{ V}}{3} = 6.533 \text{ V}$$

Pozostałe wyniki, obliczone w identyczny sposób, wpisaliśmy do Tab. 5.

Następnie obliczyliśmy wartości doświadczalne natężenia pola korzystając ze wzoru:

$$E_{dosw} = \frac{V_{n+1} - V_n}{x_{n+1} - x_n}$$

Dla  $x_1 = 35 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 44 \text{ mm}$ ,  $V_1 = 6.533 \text{ V}$  oraz  $V_2 = 5.047 \text{ V}$ :

$$x^* = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} = \frac{35 \text{ mm} + 44 \text{ mm}}{2} = 39.5 \text{ mm}$$

$$E_{dosw} = \frac{V_{n+1} - V_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{5.047 \text{ V} - 6.533 \text{ V}}{44 \text{ mm} - 35 \text{ mm}} = -165.11 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Pozostałe wyniki, obliczone w identyczny sposób, wpisaliśmy do Tab. 5.

Na końcu policzyliśmy wartości teoretyczne używając wzorów:

$$V_{teor} = \frac{U}{\ln(\frac{r_z}{r_w})} \ln\left(\frac{x}{r_z}\right) \text{ oraz } E_{teor} = -\frac{U}{x \ln(\frac{r_z}{r_w})}$$

Dla powyższych przykładów oraz  $r_w = 21 \text{ mm}$ ,  $r_z = 91 \text{ mm}$ :

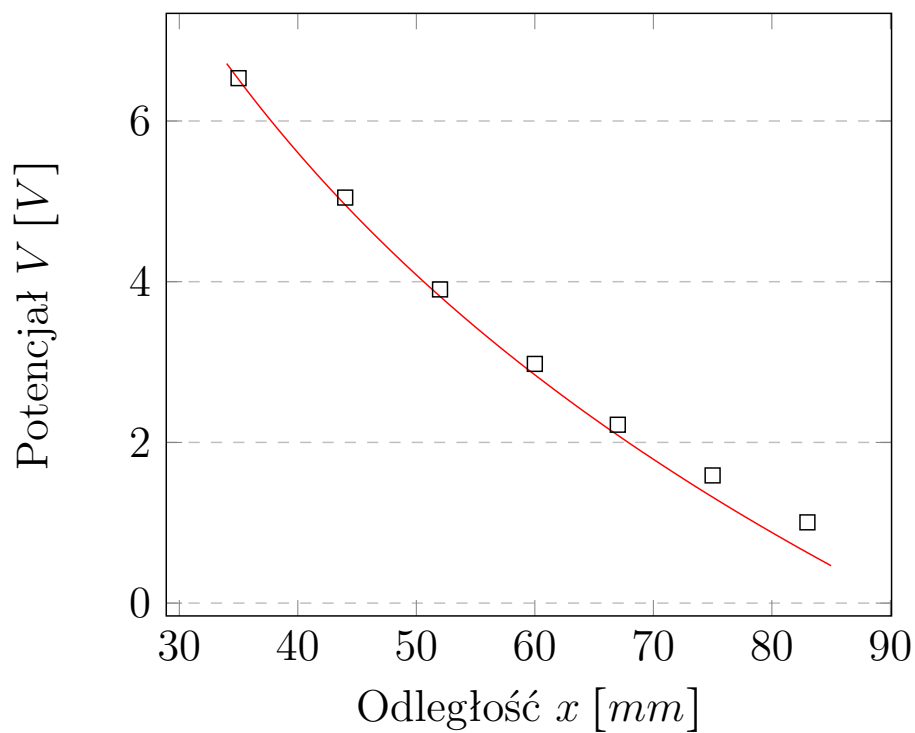
$$V_{teor} = \frac{U}{\ln(\frac{r_z}{r_w})} \ln\left(\frac{x}{r_z}\right) = \frac{10 \text{ V}}{\ln(\frac{91 \text{ mm}}{21 \text{ mm}})} \ln\left(\frac{35 \text{ mm}}{91 \text{ mm}}\right) = -6.516 \text{ V}$$

$$E_{teor} = -\frac{U}{x \ln(\frac{r_z}{r_w})} = -\frac{10 \text{ V}}{35 \text{ mm} * \ln(\frac{91 \text{ mm}}{21 \text{ mm}})} = -178.31 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

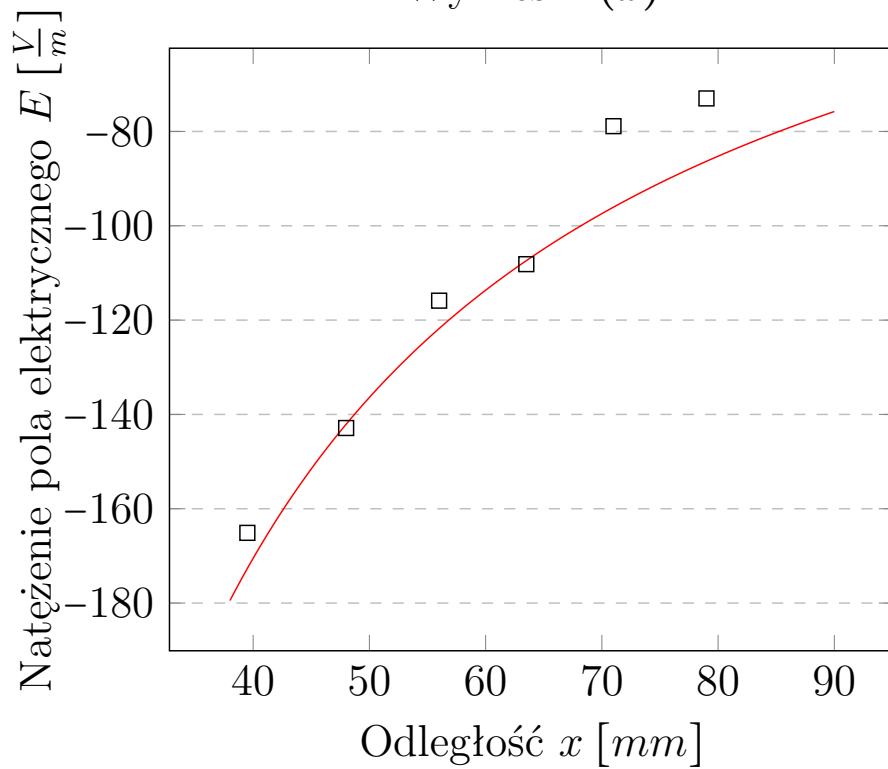
Wszystkie wyniki teoretyczne, obliczone w identyczny sposób, wpisaliśmy do Tab. 5. Ponieważ wzór użyty do obliczenia  $V_{teor}$  jest innego punktu odniesienia, niż ten który był mierzony w doświadczeniu, w Tab.6 podaliśmy wartość przeciwną  $V_{teor}$ .

## 7.2 Wykresy zależności potencjału $V$ i natężenia pola elektrycznego $E$ od odległości $x$

Wykres  $V(x)$



Wykres  $E(x)$



### 7.3 Linie ekwipotencjalne oraz linie pola

Linie ekwipotencjalne oraz linie pola zostały pokazane na Rys. 4.

L.p	x [mm]	$V_{\text{dośw}}=(V_a+V_b+V_c)/3$ [V]	$V_{\text{teor}}$ [V]
1	35	6.533	6.516
2	44	5.047	4.956
3	52	3.904	3.816
4	60	2.977	2.841
5	67	2.220	2.088
6	75	1.589	1.319
7	83	1.005	0.628

L.p	$x^*$ [mm]	$E_{\text{dośw}}$ [V/m]	$E_{\text{teor}}$ [V/m]
1	39.5	-165.11	-178.31
2	48	-142.88	-146.73
3	56	-115.88	-125.77
4	63.5	-108.14	-110.92
5	71	-78.88	-99.20
6	79	-73.00	-89.15

**Tab. 5:** Wyniki obliczeń dla kondensatora płaskiego

## 8 Wnioski

Uzyskane wyniki dla kondensatora płaskiego okazały się nie do końca zgodne z wartościami teoretycznymi. Wewnątrz kondensatora nie wszystkie punkty pomiaru pokryły się z linią teoretyczną wyznaczoną przez wzór  $V = \frac{U}{d}x$ . Na zewnątrz zaś wyniki czasami malały, zamiast rosnąć. Wykres natężenia pola elektrycznego od położenia  $E(x)$  nie jest linią stałą, a wszystkie obliczone punkty znajdują się pod linią teoretyczną  $E = \frac{U}{d}$ . Wyniki dla kondensatora cylindrycznego okazały się bardziej zgodne, ale mimo tego nadal odbiegały od teoretycznych. Prawie wszystkie punkty pokryły się z linią teoretyczną wyznaczoną przez wzór  $V = \frac{U}{\ln(\frac{r_z}{r_w})} \ln(\frac{x}{r_z})$ . Gorzej wypadł wykres natężenia pola elektrycznego w zależności od położenia  $E(x)$ , w którym jedynie dwa punkty pokryły się z linią teoretyczną  $E = -\frac{U}{x \ln(\frac{r_z}{r_w})}$ . Niezgodności te mogą być spowodowane uszkodzeniami płyt modelowych (możliwe uszkodzenia przy zbyt mocnym nacisku sondy), zbyt małą dokładnością pomiarów przy użyciu sondy (za słabe/mocne dociśnięcie sondy) oraz niedokładności woltomierza.