



Análisis Numérico para Ingeniería

Clase Nro. 8



Ecuaciones Diferenciales

Temas a tratar:

- Resolución de Ecuaciones Diferenciales Parabólicas.
- Método Explícito.
- Método de Crank-Nicolson
- Resolución de Ecuaciones Diferenciales Hiperbólicas.



Diferencias entre Elípticas y Parabólicas

EDP Elípticas

- Poseen condiciones de borde.
- No dependen del tiempo.
- Se aplican para resolver problemas estacionarios, tales como:
 - *Distribución de calor en sólidos.*
 - *Difusión de Partículas.*
 - *Vibración de una membrana.*

EDP Parabólicas

- Poseen condiciones iniciales y de borde.
- Dependen del tiempo.
- Se aplican para resolver problemas, tales como:
 - *Conducción transitoria del calor.*
 - *Difusión transitoria de neutrones.*
 - *Comportamiento de Fluídos.*



EDDP Elípticas y Parabólicas

- Las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales Elípticas pueden considerarse como la contraparte de estado estacionario de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales Parabólicas.
- En ocasiones, para resolver una Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales Parabólica, se utilizan métodos numéricos de una Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales Elíptica como parte del esquema de solución.



Aplicación de las Diferencias Finitas

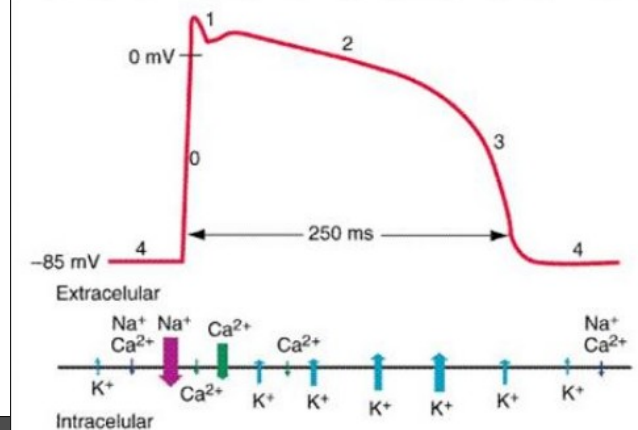
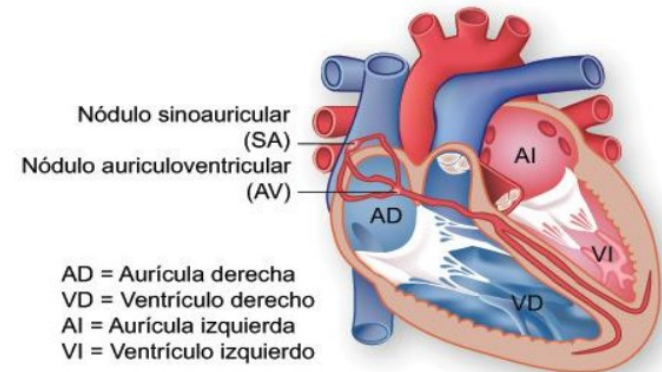
UN METODO DE DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS PARA SIMULAR LA ACTIVIDAD ELECTRICA DE UN TEJIDO CARDIACO

Autor: D. FRANCISCO VICENTE PAYÁ
Licenciado en Ciencias Geológicas por la U.C.M.

Director: Dr. D. LUIS GAVETE CORVINOS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA A LOS RECURSOS NATURALES

Madrid, Febrero 2013





Ejemplo de EDDP Parabólica

La Ecuación del flujo de Calor (Unidimensional) modela la variación de temperatura a lo largo de una barra de longitud L .

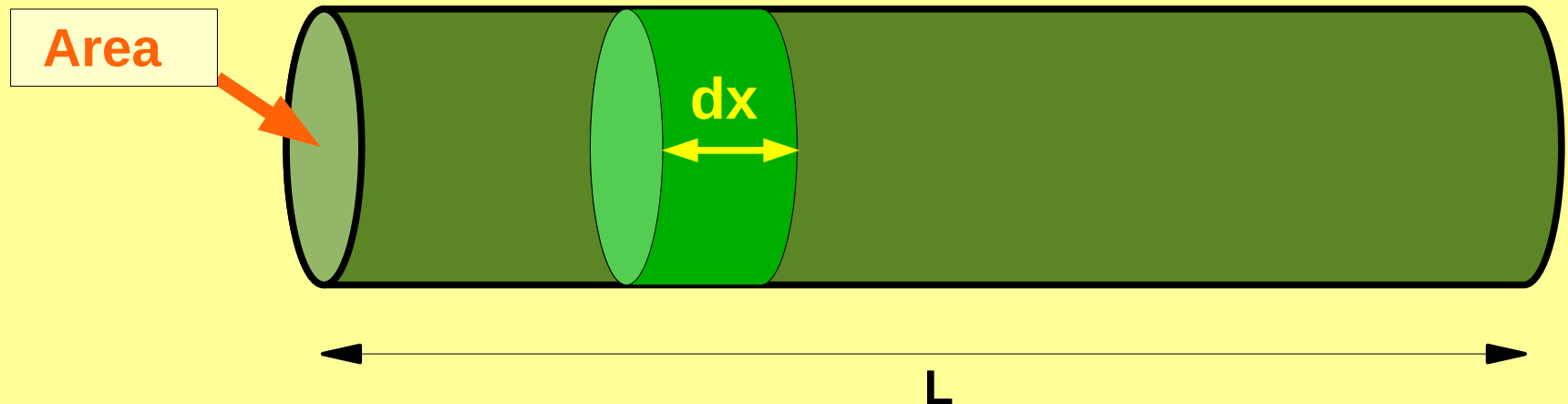
$$k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

Siendo:

k la conductividad térmica

c la capacidad calórica

ρ la densidad del material





EDDP Parabólicas en 2D y 3D

$$k \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

*La función solución del problema (función u) no solamente obedece a la ecuación diferencial dada, sino que además debe satisfacer una **condición inicial** y un **conjunto de condiciones de borde**.*

$$k \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$



Discretización de las Derivadas Parciales

Derivada Parcial de segundo orden expresada en forma de **diferencia centrada de orden 2.**

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2 \cdot u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_j)}{\partial x^4}$$

Y expresando sólo el orden del error, tenemos:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2 \cdot u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - O(h^2)$$



Discretización de las Derivadas Parciales

Derivada Parcial de primer orden expresada en forma de **diferencia en avance de orden 1**.

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2}$$

Y expresando sólo el orden del error, tenemos:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} - O(\Delta t)$$



Cálculo del Flujo de Calor

Utilizaremos la siguiente notación (Caso *Unidimensional*)

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=x_i \\ t=t_j}} = \frac{u_{i+1}^j - 2 \cdot u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} - O((\Delta x)^2)$$

Diferencia Central

Diferencia Ascendente

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\substack{x=x_i \\ t=t_j}} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - O(\Delta t)$$

Usamos subíndices para denotar **posición** y supraíndices para denotar **tiempo**.



Cálculo del Flujo de Calor

*La **Ecuación del flujo de Calor** (Unidimensional) modela las variaciones de temperatura a lo largo de una barra de longitud L .*

- Primero debemos considerar las **condiciones iniciales** que serán las temperaturas en todos los puntos a lo largo de la barra en el tiempo cero.

$$u(x,t)_{t=0} = u(x,0) = f(x)$$

- Las **condiciones de borde** describirán las temperaturas en cada extremo de la barra como funciones del tiempo.
Consideraremos el caso donde estas temperaturas son constantes:

$$u(0,t) = c_1 \quad u(L,t) = c_2$$



Cálculo del Flujo de Calor

***Métodos de
Resolución***

Método Explícito

Método Implícito
(Crank-Nicolson)



Método Explícito

La Ecuación del flujo de Calor (Unidimensional) modela las variaciones de temperatura a lo largo de una barra de longitud L .

$$k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{u_{i+1}^j - 2 \cdot u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$$

Usamos subíndices para denotar **posición** y supraíndices para denotar **tiempo**.



Método Explícito

Partiendo de la Ecuación del flujo de Calor (Unidimensional) discretizada.

$$k \cdot \left(\frac{u_{i+1}^j - 2 \cdot u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \right) = c \cdot \rho \cdot \left(\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \right)$$

Y agrupando convenientemente, obtenemos:

$$u_i^{j+1} = \frac{k \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2} \cdot (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + \left(1 - \frac{2 \cdot k \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2} \right) \cdot u_i^j$$

Usamos subíndices para denotar **posición** y supraíndices para denotar **tiempo**.



Método Explícito

$$u_i^{j+1} = \frac{k \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2} \cdot (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + \left(1 - \frac{2 \cdot k \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2} \right) \cdot u_i^j$$

Si denominamos:

$$r = \frac{k \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2}$$

Obtenemos finalmente:

$$u_i^{j+1} = r \cdot (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + (1 - 2 \cdot r) \cdot u_i^j$$



Método Explícito

A partir de esta expresión general

$$u_i^{j+1} = r \cdot (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + (1 - 2 \cdot r) \cdot u_i^j$$

- Si $r < 1/2$, tendremos una mejora en la exactitud.
- Se puede demostrar que eligiendo el $r = 1/6$ tiene una ventaja especial que minimiza el error de truncamiento.
- Esta exactitud está limitada por los errores dependientes del tamaño de Δx .
- Si $r > 1/2$, el método puede tornarse **inestable**.



Método Explícito

Esta expresión general:

$$u_i^{j+1} = r \cdot (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + (1 - 2 \cdot r) \cdot u_i^j$$

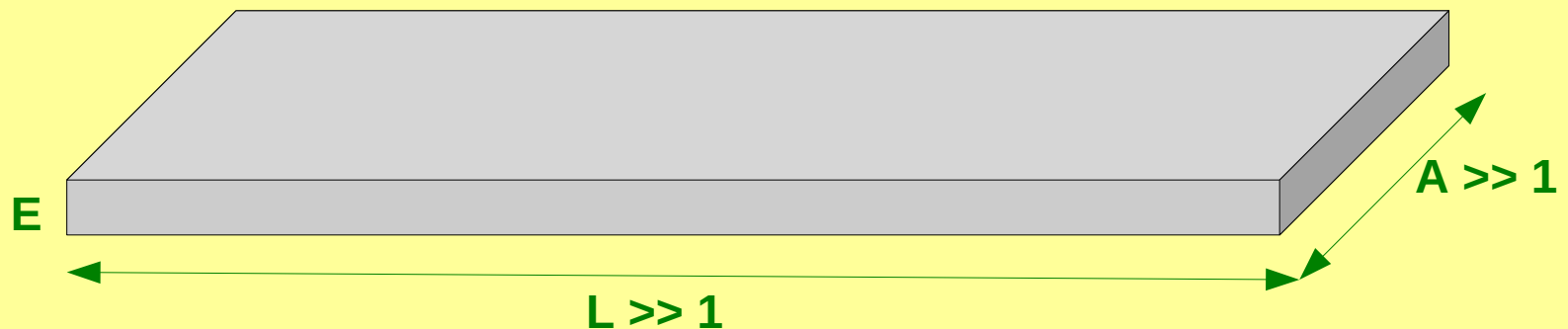
Si hacemos $r = 0.5$, nos queda:

$$u_i^{j+1} = \frac{(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j)}{2}$$



Ecuaciones Diferenciales Parabólicas

Una placa de acero, plana grande, de 2 cm. de espesor tiene una distribución inicial de temperaturas representada por una función de la distancia desde una de las caras, de acuerdo a: $u(x, 0) = 100.x$ para $0 \leq x \leq 1$ y $u(x, 0) = 100.(2-x)$ para $1 \leq x \leq 2$.



Ecuación de Flujo de Calor

$$k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

Para el acero tenemos:

Conductividad térmica $k=0.13$ cal/seg.cm. °C

Capacidad calórica $c=0.11$ cal/g °C

Densidad $\rho=7.8$ g/cm³



Discretización de las Derivadas Parciales

Derivada Parcial de segundo orden expresada en forma de **diferencia centrada de orden 2**.

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2 \cdot u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_j)}{\partial x^4}$$

Y expresando sólo el orden del error, tenemos:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2 \cdot u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - O(h^2)$$



Discretización de las Derivadas Parciales

Derivada Parcial de primer orden expresada en forma de **diferencia en avance de orden 1**.

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2}$$

Y expresando sólo el orden del error, tenemos:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} - O(\Delta t)$$



Cálculo del Flujo de Calor

Utilizaremos la siguiente notación (Caso Unidimensional)

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i, t=t_j} = \frac{u_{i+1}^j - 2 \cdot u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} - O((\Delta x)^2)$$

Diferencia Central

Diferencia Ascendente

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=x_i, t=t_j} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - O(\Delta t)$$

Usamos subíndices para denotar **posición** y supraíndices para denotar **tiempo**.



Método Explícito

Reemplazando en la Ecuación del flujo de Calor (Unidimensional), obtenemos:

$$k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{u_{i+1}^j - 2 \cdot u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$$

Usamos subíndices para denotar **posición** y supraíndices para denotar **tiempo**.



Método Explícito

Por lo tanto, la Ecuación del flujo de Calor (Unidimensional), queda como :

$$k \cdot \left(\frac{u_{i+1}^j - 2 \cdot u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \right) = c \cdot \rho \cdot \left(\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \right)$$

Agrupando convenientemente, obtenemos:

$$u_i^{j+1} = \frac{k \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2} \cdot (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + \left(1 - \frac{2 \cdot k \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2} \right) \cdot u_i^j$$

Usamos subíndices para denotar **posición** y supraíndices para denotar **tiempo**.



Método Explícito

$$u_i^{j+1} = \frac{k \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2} \cdot (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + \left(1 - \frac{2 \cdot k \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2} \right) \cdot u_i^j$$

Si denominamos:

$$r = \frac{k \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2}$$

Obtenemos finalmente:

$$u_i^{j+1} = r \cdot (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + (1 - 2 \cdot r) \cdot u_i^j$$



Método Explícito

De esta expresión general

$$u_i^{j+1} = r \cdot (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + (1 - 2 \cdot r) \cdot u_i^j$$

- Si $r < 1/2$, tendremos una mejora en la exactitud.
- Se puede demostrar que eligiendo el $r = 1/6$ tiene una ventaja especial que minimiza el error de truncamiento.
- Esta exactitud está limitada por los errores dependientes del tamaño de Δx .
- Si $r > 1/2$, el método puede tornarse **inestable**.



Método Explícito

Esta expresión general:

$$u_i^{j+1} = r \cdot (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + (1 - 2 \cdot r) \cdot u_i^j$$

Si hacemos **$r = 0.5$** , nos queda:

$$u_i^{j+1} = \frac{(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j)}{2}$$



Valores utilizados

Si adoptamos:

$$r = \frac{k \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$$

Y calculamos Δt , en base a los demás datos del problema de la placa de acero, obtenemos:

$$\Delta t = \frac{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2}{2 \cdot k} = 0,206 \text{ seg.}$$



Temperaturas Calculadas

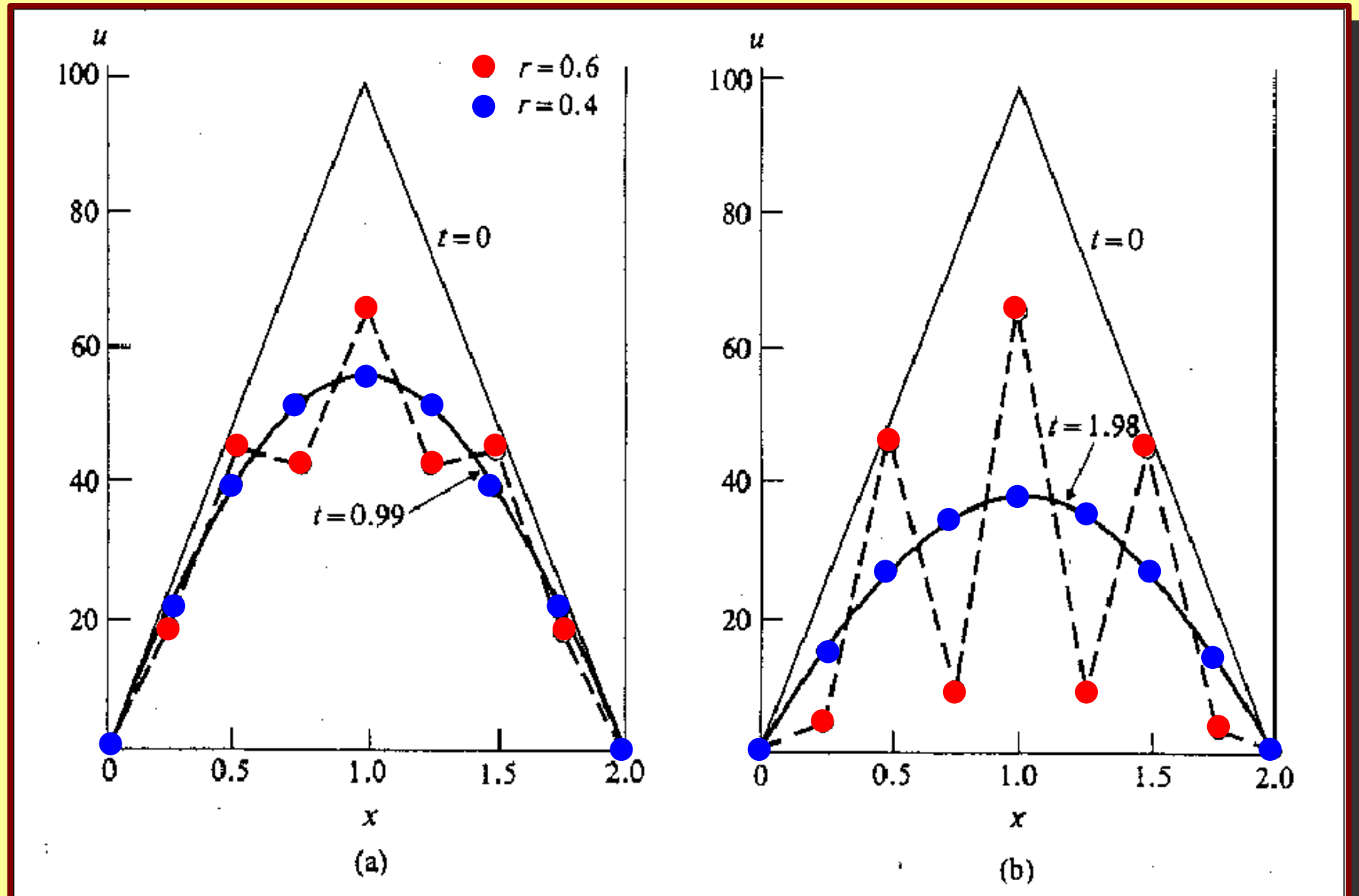
Condiciones iniciales: $u(x, 0) = 100.x$ para $0 \leq x \leq 1$
 $u(x, 0) = 100.(2-x)$ para $1 \leq x \leq 2$

La distribución de temperaturas es simétrica

t	x=0	X=0,25	X=0,50	X=0,75	x=1.0	x=1.25
0	0	25	50	75	100	75
0,206	0	25	50	75	75	75
0,412	0	25	50	62,5	75	62,5
0,619	0	25	43,75	62,5	62,5	62,5
0,825	0	21,88	43,75	53,12	62,5	53,12
1,031	0	21,88	37,5	53,12	53,12	53,12
1,238	0	18,75	37,5	45,31	53,12	45,31
1,444	0	18,75	32,03	45,31	45,31	45,31
1,65	0	16,015	32,03	38,67	45,31	38,67
1,856	0	16,015	27,34	38,67	38,67	38,67
2,062	0	13,67	27,34	33,01	38,67	33,01



Inestabilidad del Método Explícito





Inestabilidad del Método Explícito

- Los círculos rojos, para $r=0.6$, muestran extrema oscilación: los valores calculados son muy imprecisos. Los datos para $r=0.4$ son suaves y casi exactos con respecto a la solución analítica.
- La razón para esta gran diferencia en el comportamiento es que la utilización del radio $r=0.6$ introduce inestabilidad provocando gran crecimiento de los errores a medida que pasa el tiempo.
- Para valores de $t>2$, u toma valores negativos.
- Como vemos en la figura para $r=0.4$ los resultados son excelentes. En el gráfico anterior con $r=0.5$, se ha usado el valor límite para evitar inestabilidad.
- La oscilación de los puntos alrededor de la curva indica que la exactitud es apenas aceptable.



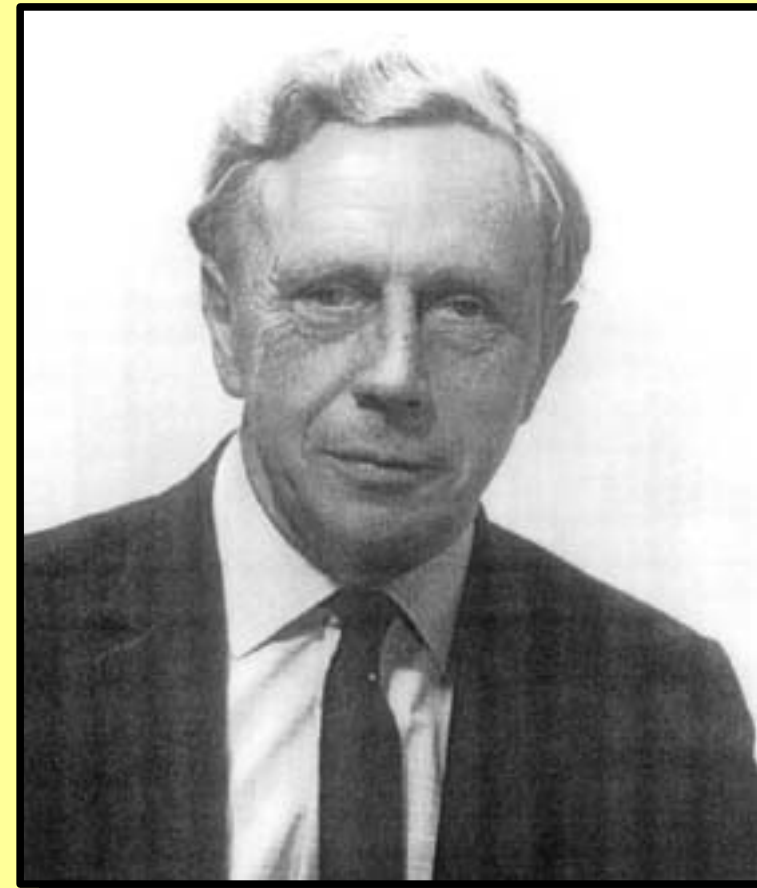
John Crank

Nació el 6 de febrero de 1916 en Hindley, Inglaterra.

Trabajó en balística durante la Segunda Guerra Mundial y posteriormente trabajó como físico-matemático en el Courtaulds Fundamental Research Laboratory desde 1945 hasta 1957.

En 1940, junto a Phyllis Nicolson perfeccionaron el método resolución de E.D.D.P. de Richardson.

Falleció el 3 de octubre de 2006 en Inglaterra.





Phyllis (Lockett) Nicolson

Nació el 21 de setiembre de 1917 en Macclesfield, Inglaterra.

Durante la Segunda Guerra Mundial trabajó en el desarrollo de la teoría del magnetrón.

En 1940, junto a John Crank perfeccionaron el método resolución de E.D.D.P. de Richardson.

Falleció el 6 de octubre de 1968 en Sheffield, Inglaterra.





Discretización de las Derivadas Parciales

Derivada Parcial de primer orden expresada en forma de **diferencia centrada de orden 1**.

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j-1}))}{2 \cdot \Delta t} - \frac{\Delta t^2}{6} \cdot \frac{\partial^3 u(x_i, \xi_j)}{\partial t^3}$$

Y expresando sólo el orden del error, tenemos:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j-1}))}{2 \cdot \Delta t} - O(\Delta t^2)$$



Diferencias Ascendentes y Centrales

Diferencia Ascendente

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=x_i, t=t_j} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - O(\Delta t)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=x_i, t=t_j} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2 \cdot \Delta t} - O(\Delta t^2)$$

Diferencia Central



Método de Crank-Nicolson

Si tomamos un desplazamiento en el tiempo igual a $(\Delta t/2)$ y escribimos la diferencia central de 1er. Orden en $t = (j + \frac{1}{2})$, tenemos:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\substack{x=x_i \\ t=t_{j+\frac{1}{2}}}} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\frac{2 \cdot \Delta t}{2}} - O\left(\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\right)$$

Diferencias Centrales en $t = (j + \frac{1}{2})$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\substack{x=x_i \\ t=t_{j+\frac{1}{2}}}} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - O\left(\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\right)$$

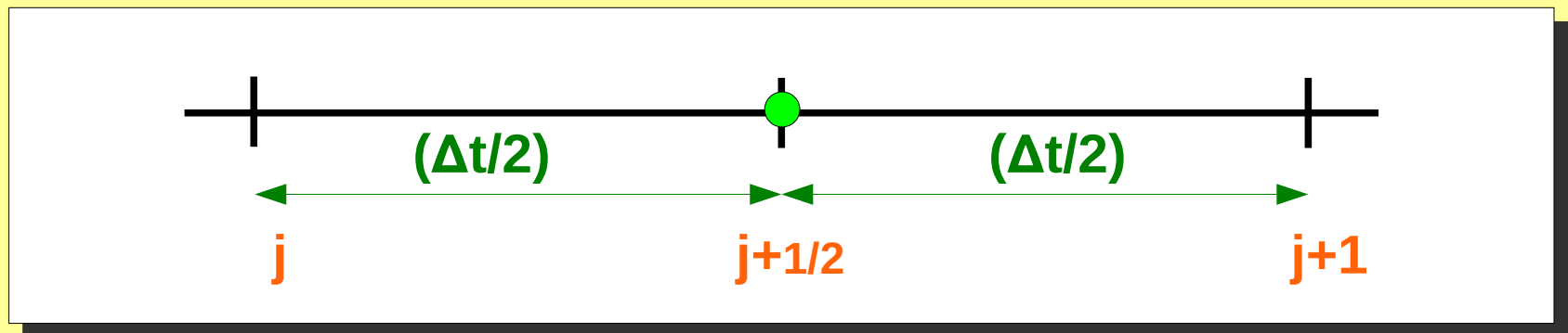


Método de Crank-Nicolson

Si tomamos un desplazamiento en el tiempo igual a $(\Delta t/2)$ y escribimos la diferencia central de 1er. Orden en $t = (j + \frac{1}{2})$, tenemos:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\substack{x=x_i \\ t=t_{j+\frac{1}{2}}}} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - O\left(\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\right)$$

Gráficamente



Usamos subíndices para denotar **posición** y supraíndices para denotar **tiempo**.



Método de Crank-Nicolson

Para obtener la **diferencia central de 2do. orden** en el tiempo **($\Delta t/2$)** hacemos un promedio entre las diferencias centrales de 2do. orden en **$t=j$** y **$t=j+1$** .

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i, t=t_{j+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u_{i+1}^j - 2 \cdot u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2 \cdot u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} \right) - O((\Delta x)^2)$$

Usamos subíndices para denotar **posición** y supraíndices para denotar **tiempo**.



Método de Crank-Nicolson

Por lo tanto:

$$k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

Se transforma en:

$$\frac{k}{2} \cdot \left(\frac{u_{i+1}^j - 2 \cdot u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2 \cdot u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} \right) = c \cdot \rho \cdot \left(\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \right)$$

Diferencia Central
en $t = j$

Diferencia Central
en $t = (j + 1)$

Diferencia Central
en $t = (j + \frac{1}{2})$



Método de Crank-Nicolson

Sabiendo que:

$$r = \frac{k \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot (\Delta x)^2}$$

Obtenemos finalmente:

Valores Próximos

$$-r \cdot u_{i-1}^{j+1} + (2 + 2 \cdot r) \cdot u_i^{j+1} - r \cdot u_{i+1}^{j+1} = r \cdot u_{i-1}^j + (2 - 2 \cdot r) \cdot u_i^j + r \cdot u_{i+1}^j$$

Valores Anteriores



Método de Crank-Nicolson

Nuevos Valores

$$-r \cdot u_{i-1}^{j+1} + (2 + 2 \cdot r) \cdot u_i^{j+1} - r \cdot u_{i+1}^{j+1} = r \cdot u_{i-1}^j + (2 - 2 \cdot r) \cdot u_i^j + r \cdot u_{i+1}^j$$

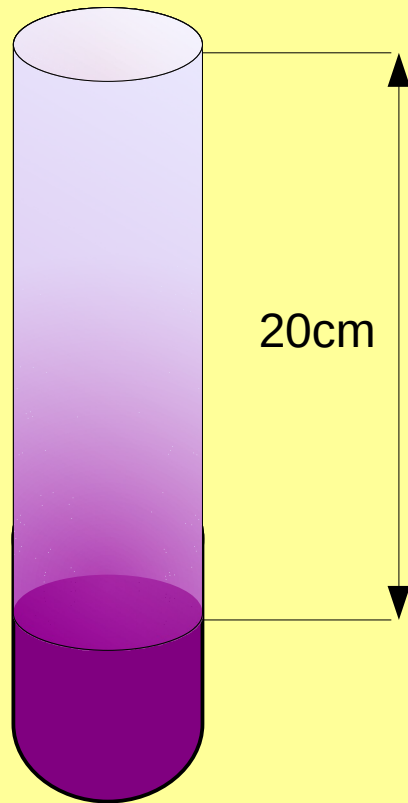
Valores Anteriores

Si hacemos $r = 1$, la expresión anterior se simplifica notablemente:

$$-u_{i-1}^{j+1} + 4 \cdot u_i^{j+1} - u_{i+1}^{j+1} = u_{i-1}^j + u_{i+1}^j$$



Ejemplo de Aplicación



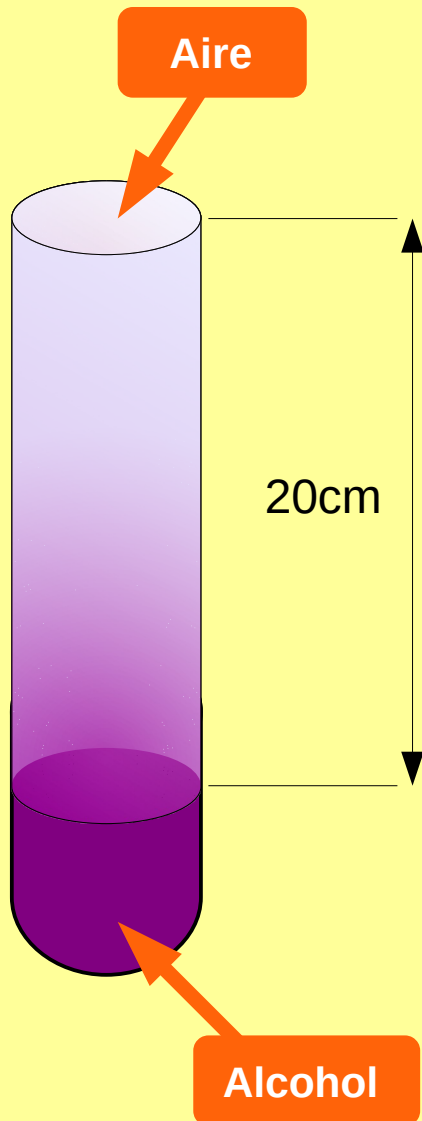
Un tubo de ensayo de 20 cm. de longitud es llenado inicialmente con aire conteniendo 2% de vapores de alcohol etílico. En el fondo del tubo hay un poco de alcohol que se evapora en el gas estancado arriba. El calor se transfiere al alcohol desde el ambiente para mantener una temperatura constante de 30° C ; la presión del vapor a esta temperatura es de 0.1 atmósferas.

La Ley de Difusión molecular establece el siguiente modelo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



Ejemplo de Aplicación



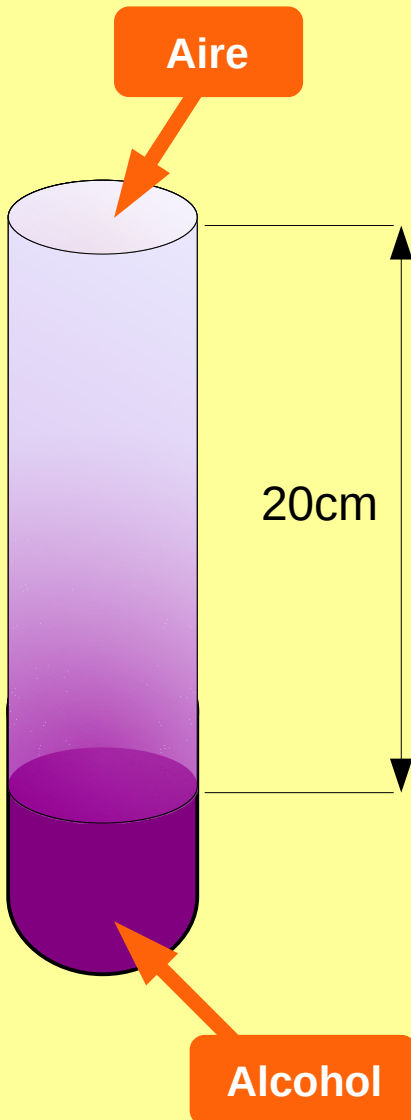
En el extremo superior del tubo, los vapores del alcohol se disipan en el aire exterior, por lo tanto la concentración es cero. Considerando solamente los efectos de la difusión molecular, determinar la concentración (u) de alcohol como función del tiempo y la distancia x medida desde la parte superior del tubo.

*Para el alcohol etílico $D=0.119 \text{ cm}^2/\text{seg}$ a 30°C y la presión del vapor es tal que el **10 %** del volumen del alcohol en el aire está presente en la superficie.*

Dividimos la longitud del tubo en 5 intervalos de 4 cm. cada uno.



Ejemplo de Aplicación



Considerando $r = 1$, hallamos el valor de Δt .

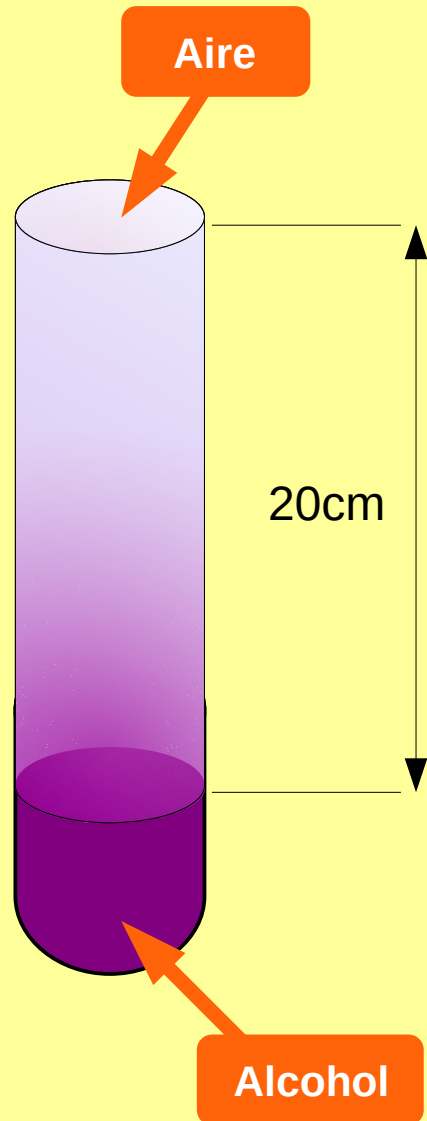
$$\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{D} = 134,4 \text{ seg.}$$

A partir de la siguiente expresión

$$-u_{i-1}^{j+1} + 4 \cdot u_i^{j+1} - u_{i+1}^{j+1} = u_{i-1}^j + u_{i+1}^j$$



Ejemplo de Aplicación



Y planteamos el sistema para $t = 134.4$ seg.

$$0.0 + 4 \cdot u_1 - u_2 = 0.0 + 2.0$$

$$-u_1 + 4 \cdot u_2 - u_3 = 2.0 + 2.0$$

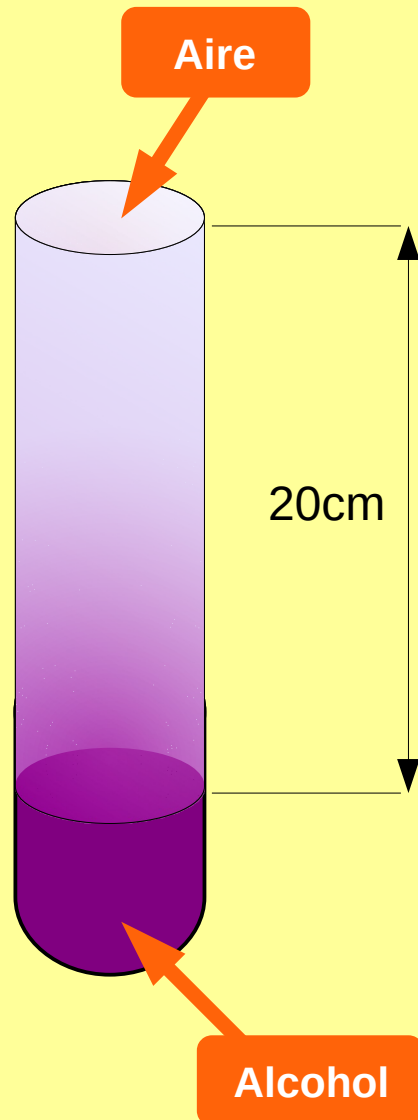
$$-u_2 + 4 \cdot u_3 - u_4 = 2.0 + 2.0$$

$$-u_3 + 4 \cdot u_4 - 10.0 = 2.0 + 10.0$$

*Este método requiere de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales para cada paso, afortunadamente se trata de un **sistema tri-diagonal**.*



Ejemplo de Aplicación



RESULTADOS OBTENIDOS

Tiempo (en seg.)	Valores de Concentración calculados en					
	x = 0	x = 4	x = 8	x = 12	x = 16	x = 20
0.0	0	2	2	2	2	10
134.4	0	0,98	2,019	3,072	5,992	10
268.8	0	1,07	2,363	4,305	6,555	10
403.2	0	1,276	2,861	4,762	6,962	10
537.6	0	1,471	3,165	5,115	7,159	10



Comparación entre métodos

Método Explícito

(+) Requiere pocos cálculos.

(-) Se vuelve inestable
para valores de $r > 0.5$.

Método de Crank-Nicolson

(+) Estable aún para grandes
valores de r .

(-) Requiere resolver un sistema
de ecuaciones lineales para
cada valor de t .



EDDP Hiperbólicas

La Ecuación de la Cuerda (Unidimensional) modela el desplazamiento que se produce al estirar y soltar una cuerda tensada en sus extremos.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T \cdot g}{w} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial x^2}$$

Siendo:

***T** la tensión aplicada
g la fuerza de gravedad
w el peso*

Comenzaremos reemplazando las derivadas parciales por sus equivalentes en diferencias finitas, con lo que obtenemos:

$$\frac{u_i^{j+1} - 2 \cdot u_i^j + u_i^{j-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{T \cdot g}{w} \cdot \left(\frac{u_{i+1}^j - 2 \cdot u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \right)$$



EDDP Hiperbólicas

$$\frac{u_i^{j+1} - 2 \cdot u_i^j + u_i^{j-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{T \cdot g}{w} \cdot \left(\frac{u_{i+1}^j - 2 \cdot u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \right)$$

A partir de la expresión anterior, despejamos el valor de la solución en $t = t_{j+1}$

$$u_i^{j+1} = \frac{T \cdot g \cdot (\Delta t)^2}{w \cdot (\Delta x)^2} \cdot (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1} + 2 \cdot \left(1 - \frac{T \cdot g \cdot (\Delta t)^2}{w \cdot (\Delta x)^2} \right) \cdot u_i^j$$



EDDP Hiperbólicas

$$u_i^{j+1} = \frac{T \cdot g \cdot (\Delta t)^2}{w \cdot (\Delta x)^2} \cdot (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1} + 2 \cdot \left(1 - \frac{T \cdot g \cdot (\Delta t)^2}{w \cdot (\Delta x)^2} \right) \cdot u_i^j$$

Ahora si hacemos:

$$\frac{T \cdot g \cdot (\Delta t)^2}{w \cdot (\Delta x)^2} = 1$$

Nos queda finalmente:

$$u_i^{j+1} = u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - u_i^{j-1}$$



EDDP Hiperbólicas

Por medio de la siguiente expresión:

$$\frac{T \cdot g \cdot (\Delta t)^2}{w \cdot (\Delta x)^2} = 1$$

Obtenemos el paso de avance temporal:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{\frac{T \cdot g}{w}}} = \Delta x \cdot \sqrt{\frac{w}{T \cdot g}}$$



EDDP Hiperbólicas

*De la expresión en diferencias finitas resultante se observa la necesidad de conocer los valores de u en $t = -\Delta t$, los cuales pueden obtenerse a partir de las **velocidades iniciales**.*

Diferencia Central

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=x_i, t=0} \approx \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2 \cdot \Delta t}$$

Este valor, que podemos denominar $v(x)$ es conocido, ya que forma parte de las condiciones iniciales:

$$u_i^{-1} = u_i^1 - 2 \cdot v(x) \cdot \Delta t$$



EDDP Hiperbólicas

A partir de esta expresión:

$$u_i^{-1} = u_i^1 - 2 \cdot v(x) \cdot \Delta t$$

Sustituyendo en:

$$u_i^{j+1} = u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - u_i^{j-1}$$

Para el instante inicial $j = 0$, obtenemos:

$$u_i^1 = u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0 - u_i^1 + 2 \cdot v(x) \cdot \Delta t$$



EDDP Hiperbólicas

Por lo tanto

$$u_i^1 = u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0 - u_i^1 + 2 \cdot v(x) \cdot \Delta t$$

Reordenando la expresión anterior, obtenemos:

$$u_i^1 = \frac{u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0}{2} + v(x) \cdot \Delta t$$

*Esta expresión se utiliza **únicamente** en el cálculo de los valores correspondientes al **primer paso** del método.*



Ejemplo de EDPP Hiperbólica

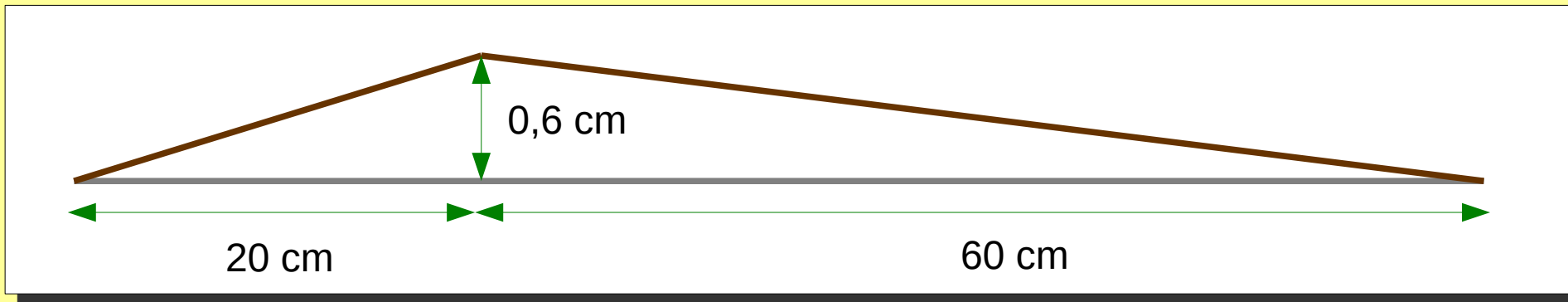
Una cuerda de banjo que mide **80 cm.** de largo y pesa **1.0 gr.** es traccionada con una fuerza **$F = 40 \text{ Kg.}$** , en un punto a **20 cm.** de un extremo, se tira de la cuerda **0.6 cm.** con respecto a la posición de equilibrio y luego se suelta.



Calcular los desplazamientos a lo largo de la cuerda como una función del tiempo, utilizando **$\Delta x = 10 \text{ cm.}$** ¿ En cuanto tiempo se completa un ciclo del movimiento vibratorio ? A partir de ese valor, calcular la frecuencia en la que vibra la cuerda.



Ejemplo de EDPP Hiperbólica



Como se supone que la cuerda se suelta luego de estirla, pero estando en reposo, la velocidad inicial de la misma, es nula, por lo tanto:

$$u_i^1 = \frac{u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0}{2}$$





Ejemplo de EDPP Hiperbólica

Condiciones Iniciales:

$u(0, 0) = 0$; $u(20, 0)=0,6$; por lo tanto $u(x) = 3*x/100$

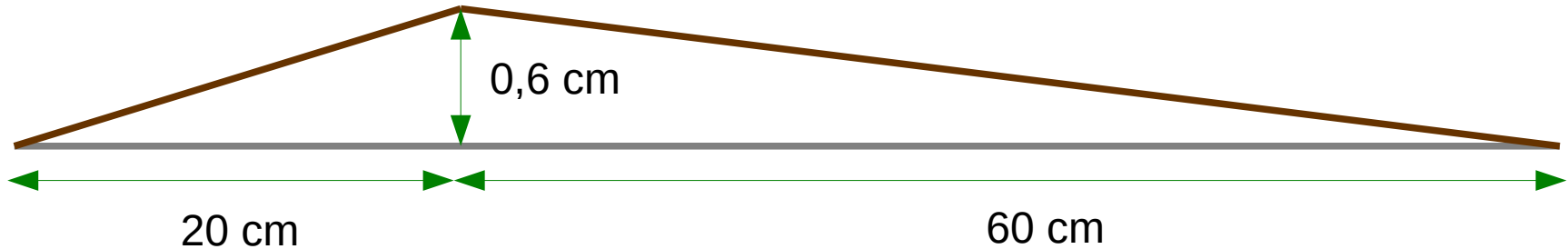
$U(20, 0) = 0,6$; $u(80, 0)=0$; por lo tanto $u(x) = (80-x)/100$

Período

ITER	0	10	20	30	40	50	60	70	80
0	0.00	0.30	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
1	0.00	0.30	0.40	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
2	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
3	0.00	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.00
4	0.00	-0.10	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.10	0.00
5	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.00
6	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10	0.00
7	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.50	-0.40	-0.30	0.00
8	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.50	-0.60	-0.30	0.00
9	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.50	-0.40	-0.30	0.00
10	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10	0.00
11	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.00
12	0.00	-0.10	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.10	0.00
13	0.00	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.00
14	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
15	0.00	0.30	0.40	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
16	0.00	0.30	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
17	0.00	0.30	0.40	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
18	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
19	0.00	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.00
20	0.00	-0.10	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.10	0.00



Ejemplo de EDPP Hiperbólica



Ahora podemos calcular el período T

$$T = \Delta x \cdot \sqrt{\frac{w}{F \cdot g}} = 10 \cdot \sqrt{\frac{1.0}{80 \cdot 40000 \cdot 980}}$$

$$T = 0,000179 \text{ seg} \Rightarrow \text{frec} = \frac{1}{16 \cdot \Delta t} = 350 \text{ Hz}$$





PREGUNTAS ...

