Guía Nro. 3

1. Escriba un programa que permita resolver un sistema de ecuaciones lineales por los métodos de Gauss y Gauss-Jordan con pivoteo parcial y calcule la solución de los siguientes sistemas.

   a) $2x_1 = 3$
   $x_1 + 1{,}5x_2 = 4{,}5$
   $-3x_2 + 0{,}5x_3 = -6{,}6$
   $2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0{,}8$

   b) $2{,}1756x_1 + 4{,}0231x_2 - 2{,}1732x_3 + 5{,}1967x_4 = 17{,}102$
   $-4{,}0231x_1 + 6{,}0000x_2 + 1{,}1973x_4 = -6{,}1593$
   $-1{,}0000x_1 - 5{,}2107x_2 + 1{,}1111x_3 = 3{,}0004$
   $6{,}0235x_1 + 7{,}0000x_2 - 4{,}1561x_4 = 0{,}0000$

2. Escriba un programa que resuelva sistema de ecuaciones lineales mediante el método de factorización LU de Crout. Factorice las matrices del ejercicio anterior y luego encuentre su solución. Compare con los valores hallados en el ejercicio anterior.

3. Escriba un programa que resuelva sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Thomas. Dada una matriz tri-diagonal de 10x10 que posee 4 en todos los elementos de la diagonal principal y 1 en los de las diagonales secundarias y cuyo vector de términos independientes es igual a $[10, 20, 30, 10, 5, 5, 10, 30, 20, 10]^T$. Halle la solución del sistema por medio del método de Thomas.

4. Utilizando el método de Gauss-Jordan halle la inversa de las siguientes matrices y determine la matriz residuo en cada caso.

   a) $$\begin{bmatrix} 4{,}5556 & 0{,}0345 & 12{,}0009 & -1{,}9987 \\ 0{,}567 & 1{,}3456 & 1234{,}9 & 34{,}5 \\ 4{,}56 & 0{,}1 & 12 & -2 \\ 38{,}01 & -3{,}67 & 2{,}10 & -3 \end{bmatrix}$$

   b) $$\begin{bmatrix} 1,279 & 2,905 & -12,813 & 2,492 & -1,029 \\ 2,036 & 1,172 & -2,313 & 0,301 & -9,671 \\ -8,258 & 1,257 & 5,302 & 1,018 & 0,041 \\ 0,958 & -12,031 & -3,597 & 2,539 & 0,603 \\ 3,597 & 1,258 & -1,619 & 8,692 & -1,102 \end{bmatrix}$$

5. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, cuya única solución es $[1, 3, 2]^T$

   $6x_1 + 6x_2 + 3{,}00001x_3 = 30{,}00002$
   $10x_1 + 8x_2 + 4{,}00003x_3 = 42{,}00006$
   $6x_1 + 4x_2 + 2{,}00002x_3 = 22{,}00004$

   Si efectuamos una perturbación que solo afecte a los segundos miembros del sistema, llevándolos respectivamente a 30, 42 y 22 (dejando intactos a los demás elementos), se observa que la solución del sistema se modifica notablemente, siendo ahora igual a $[1, 4, 0]^T$

a) Calcule el número de condición de la matriz. ¿ Es consistente con el resultado mencionado ?
b) Calcule el error relativo $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}$, utilizando la norma M.
c) Estime el valor de la cota teórica del error relativo.
d) ¿ Qué tamaño máximo (medido en norma M) podrá tener una eventual perturbación que afecte a la matriz del sistema, si se quiere que el mismo, siga teniendo una única solución ?

6. Calcule los números de condición de las siguientes matrices. ¿ Qué conclusiones puede sacar a partir de los valores obtenidos ?

a) $\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}35 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4{,}5556 & 0{,}0345 & 12{,}0009 & -1{,}9987 \\ 0{,}567 & 1{,}3456 & 1234{,}9 & 34{,}5 \\ 4{,}56 & 0{,}1 & 12 & -2 \\ 38{,}01 & -3{,}67 & 2{,}10 & -3 \end{bmatrix}$

c) Una matriz de Hilbert de **nxn**, para n=5 y 10. Genere las matrices por medio de la subrutina implementada en prácticas anteriores.

7. Considere al siguiente sistema como “original”

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}7 \end{bmatrix}$$

Y al siguiente como "perturbado"

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}01 \\ 0{,}69 \end{bmatrix}$$

La solución exacta del primero es $\begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}^T$, en tanto que la del segundo es $\begin{bmatrix} -0{,}17 & 0{,}22 \end{bmatrix}^T$.

a) Calcule el número de condición de la matriz “original”. ¿ Es consistente con el resultado mencionado ?
b) Calcule el error relativo $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}$, utilizando la norma M.
c) Estime el valor de la cota teórica del error relativo.
d) ¿ Qué tamaño máximo (medido en norma M) podrá tener una eventual perturbación que afecte a la matriz del sistema, si se quiere que el mismo, siga teniendo una única solución ?

8. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
&10{,}1x_1 + 6{,}99x_2 + 8{,}01x_3 + 6{,}99x_4 = 32{,}01\\
&6{,}99x_1 + 5{,}01x_2 + 5{,}99x_3 + 5{,}01x_4 = 23{,}02\\
&8{,}01x_1 + 5{,}99x_2 + 10{,}01x_3 + 8{,}99x_4 = 32{,}99\\
&6{,}99x_1 + 5{,}01x_2 + 8{,}99x_3 + 10{,}01x_4 = 30{,}99
\end{aligned}$$

   Suponga que se redondean todos los coeficientes, tanto de la matriz como del vector de términos independientes, a valores enteros. Resuelva para estos datos. Calcule la cota teórica del error relativo de la solución. Justifique la respuesta obtenida.

9. Programe el método de Jacobi, y resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Utilice $x^{(0)} = 0$ y considere una tolerancia de $5 \cdot 10^{-6}$.

   - $$\begin{aligned}
&4x_1 - 2x_2 - x_4 = 0\\
&x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 5\\
&x_2 + 4x_3 - x_6 = 0\\
&-x_1 + 4x_4 - x_5 = 6\\
&-x_2 - x_4 + x_5 - x_6 = -2\\
&-x_3 - x_5 + 4x_6 = 6
\end{aligned}$$

   - $$\begin{aligned}
&-x_3 - x_5 + 4x_6 = 0\\
&4x_1 - x_2 - x_4 = 100\\
&-x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 0\\
&-x_1 + 4x_4 - x_5 = 100\\
&-x_2 - x_4 - x_6 = 0\\
&-x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 = 0
\end{aligned}$$

10. Programe el método de Gauss-Seidel y resuelva los sistemas del ejercicio anterior. Compare el número de iteraciones obtenido en cada inciso con los correspondientes al ejercicio anterior.

11. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 1{,}28 & 2{,}9 & -12{,}8 & 2{,}5 \\ -8{,}26 & 1{,}26 & 5{,}3 & 1{,}02 \\ 0{,}96 & -12{,}03 & -3{,}6 & 2{,}54 \\ 3{,}6 & 1{,}26 & -1{,}62 & 8{,}69 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}25 \\ 1{,}69 \\ -5{,}6 \end{bmatrix}$$

    Encuentre su solución utilizando el método de Jacobi, partiendo de un vector inicial nulo. Indique cual es la primera iteración que verifica $\|r\|_M < 10^{-7}$. Si se descubre posteriormente que el elemento (3,4), debido a un error, posee signo contrario, considere a este sistema como perturbado y estime la cota teórica de error relativo de la solución. Justifique.

12. Resuelva el problema anterior, pero con el método de Gauss-Seidel. Compare ambos resultados.

13. En la figura 4 se observa un sistema de juntas puntuales estáticamente determinado. La tensión F_i de cada uno de los miembros puede obtenerse resolviendo el sistema propuesto debajo. (Las ecuaciones resultan de

igualar a cero la suma de todas las fuerzas que actúan horizontal y verticalmente en cada punto).

$$
\begin{bmatrix}
0{,}7071 & 0 & 0 & -1 & -0{,}8660 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}7071 & 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7071 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0{,}7071 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}8660 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}7071
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

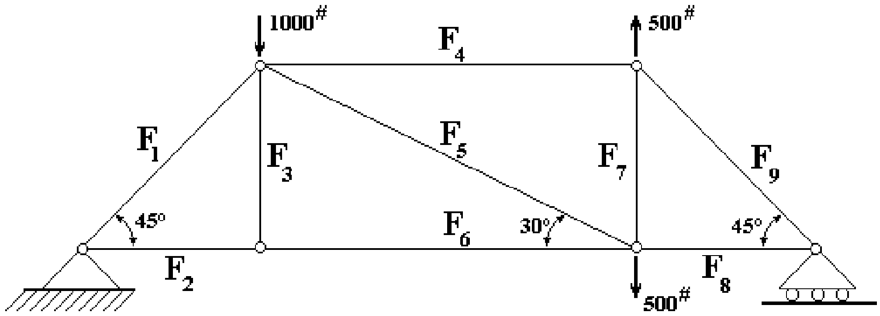

Figura 4: Sistema de juntas puntuales

14. El circuito de la figura 5, conocido como puente de Wheatstone, se utiliza para medir resistencias desconocidas mediante el equilibrio de los brazos del puente.

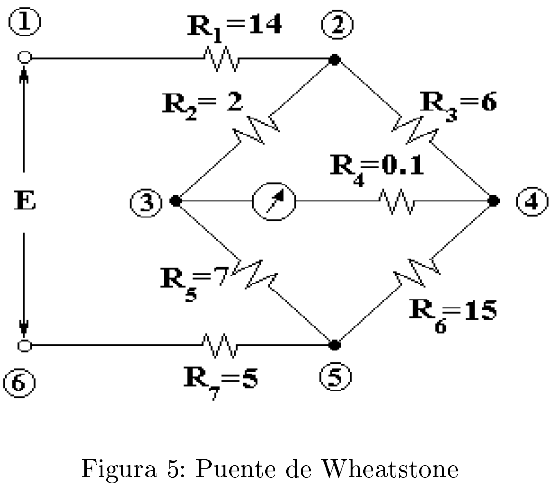

Figura 5: Puente de Wheatstone

Determine la corriente que circula por R_4, resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido al aplicar la Ley de Kirchoff.

Siendo $V_1 = 1Volt$ y $V_6 = 0Volt$

$$\frac{1}{R_1}(V_1 - V_2) + \frac{1}{R_2}(V_3 - V_2) + \frac{1}{R_3}(V_4 - V_2) = 0$$
$$\frac{1}{R_2}(V_2 - V_3) + \frac{1}{R_4}(V_4 - V_3) + \frac{1}{R_5}(V_5 - V_3) = 0$$
$$\frac{1}{R_3}(V_2 - V_4) + \frac{1}{R_4}(V_3 - V_4) + \frac{1}{R_6}(V_5 - V_4) = 0$$
$$\frac{1}{R_7}(V_6 - V_5) + \frac{1}{R_5}(V_3 - V_5) + \frac{1}{R_6}(V_4 - V_5) = 0$$

15. Una empresa necesita disponer de 15400 litros de Gas Oil, 17500 litros de Nafta y 33000 litros de Fuel Oil. Los cuales son provistos por tres refinerías. Considerando que no hay combustible acumulado y que la REF.1 procesa 1250 litros/hora de petróleo, la REF.2 procesa 1500 litros/hora y la REF.3 procesa 1800 litros/hora. ‘? En cuántas horas, suponiendo que las refinerías trabajan simultáneamente las 24 horas, puede la empresa disponer del combustible necesario si los rendimientos de las refinerías son los que se detallan en la siguiente tabla.

	REF.1	REF.2	REF.3
Nafta	26 %	30 %	20 %
Fuel Oil	40 %	37 %	50 %
Gas Oil	20 %	19 %	22 %
Kerosene	12 %	13 %	15 %
Gases	2 %	1 %	3 %

- Utilice un método indirecto para hallar la solución con dos decimales exactos.
- Si la REF.2 cambia su rendimiento en 31 % para nafta y 36 % para fuel oil. Estime la variación del tiempo necesario para obtener el combustible. Justifique.
- Encuentre la solución al nuevo sistema planteado, por el método que considere más adecuado y verifique la estimación realizada en el inciso anterior.