Tema: *Aproximación de Funciones e Integración Numérica*

Ejercicio 13

(Resuelto por Ay. Alum. Ignacio Jozami)

Un automóvil que viaja por una carretera recta es cronometrado en algunos puntos. Los datos de las observaciones se dan en la siguiente tabla donde el tiempo está en segundos, la distancia en pies y la velocidad en pies sobre segundo:

Tiempo	0	3	5	8	13
Distancia	0	225	383	623	993
Velocidad	75	77	80	74	72

Utilice un polinomio cúbico spline para predecir la posición del automóvil y su velocidad en t=10 seg. Determinar si el automóvil excede en algún momento la velocidad límite de 55 millas/h. ¿ Cuál es la velocidad máxima predicha para el coche ? Considere 1 milla cómo 5280 pies.

Resolución

Se pide resolver utilizando un polinomio cúbico spline. Los polinomios utilizados poseen la siguiente forma:

$$S_j(x)= a_j + b_j*(x-x_j) + c_j*(x-x_j)^2 + d_j*(x-x_j)^3$$

Se trabaja con 5 pares de datos, por lo que se obtienen 4 polinomios S(x). Para calcular los coeficientes de los polinomios se tiene en cuenta que deben cumplirse las siguientes condiciones:

1. Criterio de interpolación: polinomio interpolante pasa por todos los puntos datos.
   → $S_j(x_j) = f(x_j) = y_j$ donde j= 0, 1,…, 4 (cantidad de puntos-1)
2. Continuidad en los nodos interiores:
   → $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$ donde j= 0, 1,…, 3 (cantidad de puntos-2)
3. Derivabilidad en los nodos interiores (igual pendiente):
   → $S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1})$ donde j= 0, 1,…, 3 (cantidad de puntos-2)
4. Continuidad de la primera derivada para conservar concavidad en la vecindad de los nodos internos:
   → $S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})$ donde j= 0, 1,…, 3 (cantidad de puntos-2)
5. Se debe satisfacer alguna de las siguientes condiciones de frontera o borde:
   a. FRONTERA LIBRE o NATURAL: $S_0''(x_0) = 0$ y $S_3''(x_4) = 0$
   b. FRONTERA SUJETA: $S_0'(x_0) = f'(x_0)$ y $S_3'(x_4) = f'(x_4)$

A partir de las condiciones impuestas, se deducen las siguientes expresiones generales:

- $a_j = f(x_j)$
- $b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$
- $d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}$
- $h_j = x_{j+1} - x_j$

Luego, haciendo uso de las expresiones generales y la condición de frontera (libre o sujeta), es posible armar el sistema de ecuaciones A*x= b para obtener los coeficientes de los polinomios Spline a determinar.

A partir de los puntos dato, se obtienen los coeficientes a, se calculan los h y se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2\,(h_{j-1} - h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$$

para cada j=1, 2, .., 4 (cantidad de puntos-1).

Sólo hace falta conocer la condición de borde para poder armar un sistema de ecuaciones con solución única. En este ejercicio se presentan los siguientes casos:

1. Para hallar los polinomios de spline para predecir la posición del vehículo en función del tiempo se conocen los valores de velocidad en los extremos del intervalo de estudio. Por lo tanto, es posible aplicar la condición de frontera sujeta:

<u>Frontera inicial:</u> $S_0'(x_0) = \frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$

$$\rightarrow \quad -h_0 S_0'(x_0) + a_1 - a_0 = \frac{2}{3}h_0^2 c_0 + \frac{1}{3}h_0^2 c_1$$

<u>Frontera final:</u> $S_3'(x_4) = b_3 + 2c_3 h_3 + 3d_3 h_3^2$

$$= \frac{a_4 - a_3}{h_3} - \frac{h_3}{3}(2c_3 + c_4) + 2c_3 h_3 + 3\frac{c_4 - c_3}{3h_3}h_3^2$$

$$= \frac{a_4 - a_3}{h_3} - \frac{h_3}{3}(2c_3 + c_4) + 2c_3 h_3 + (c_4 - c_3)h_3$$

$$S_3'(x_4) = \frac{a_4 - a_3}{h_3} + \frac{1}{3}c_3 h_3 + \frac{2}{3}c_4 h_3$$

$$\rightarrow \quad h_3 S_3'(x_4) + a_3 - a_4 = \frac{1}{3}h_3^2 c_3 + \frac{2}{3}h_3^2 c_4$$

Finalmente, se arma el sistema de ecuaciones y se resuelve:

Tabla 1. Coeficientes de los polinomios cúbicos spline obtenidos para posición vs tiempo.

j	x	a=y	b	c	d
0	0.000	0.00000	75.00000	-0.65929	0.21976
1	3.000	225.00000	76.97788	1.31858	-0.15376
2	5.000	383.00000	80.40708	0.39602	-0.17724
3	8.000	623.00000	77.99779	-1.19912	0.07991
4	13.000	993.00000			

Para conocer la posición del automóvil a los 10 seg se usa el polinomio 3 y se obtiene:

$$S_3(x=10)= a_3 + b_3*(10-x_3) + c_3*(10-x_3)^2 + d_3*(10-x_3)^3 = 774.838390$$

2. Para hallar los polinomios de spline para predecir la velocidad del vehículo en función del tiempo es necesario considerar la condición de frontera libre:

Frontera inicial: $S_0''(x_0) = 2\,c_0 + 6\,(x_0 - x_0) = 0$

$$\rightarrow\ c_0 = 0$$

Frontera final: $S_3''(x_4) = 2c_3 + 6d_3h_3$ y $S_4''(x_4) = 2\,c_4$

$$S_3''(x_4) = S_4''(x_4) = 0$$

$$2c_4 = 0$$

$$\rightarrow\ c_4 = 0$$

Finalmente, se arma el sistema de ecuaciones y se resuelve:

Tabla 2. Coeficientes de los polinomios cúbicos spline obtenidos para velocidad vs tiempo.

j	x	a=y	b	c	d
0	0.000	75.00000	0.15332	0.00000	0.05704
1	3.000	77.00000	1.69336	0.51335	-0.30501
2	5.000	80.00000	0.08658	-1.31674	0.20707
3	8.000	74.00000	-2.22296	0.54689	-0.03646
4	13.000	72.00000			

Para conocer la posición del automóvil a los 10 seg se usa el polinomio 3 y se obtiene:

$$S_3(x=10)= a_3 + b_3*(10-x_3) + c_3*(10-x_3)^2 + d_3*(10-x_3)^3 = 71.449959$$

La velocidad máxima del coche resulta de 80.00142 pies/seg y se alcanza a un tiempo de 5.030 seg. Para verificar si la velocidad máxima permitida fue superada se hace el cambio de unidades:

vel= 80.00142 pies/seg = 54.555 millas/h → No se excede la velocidad máxima

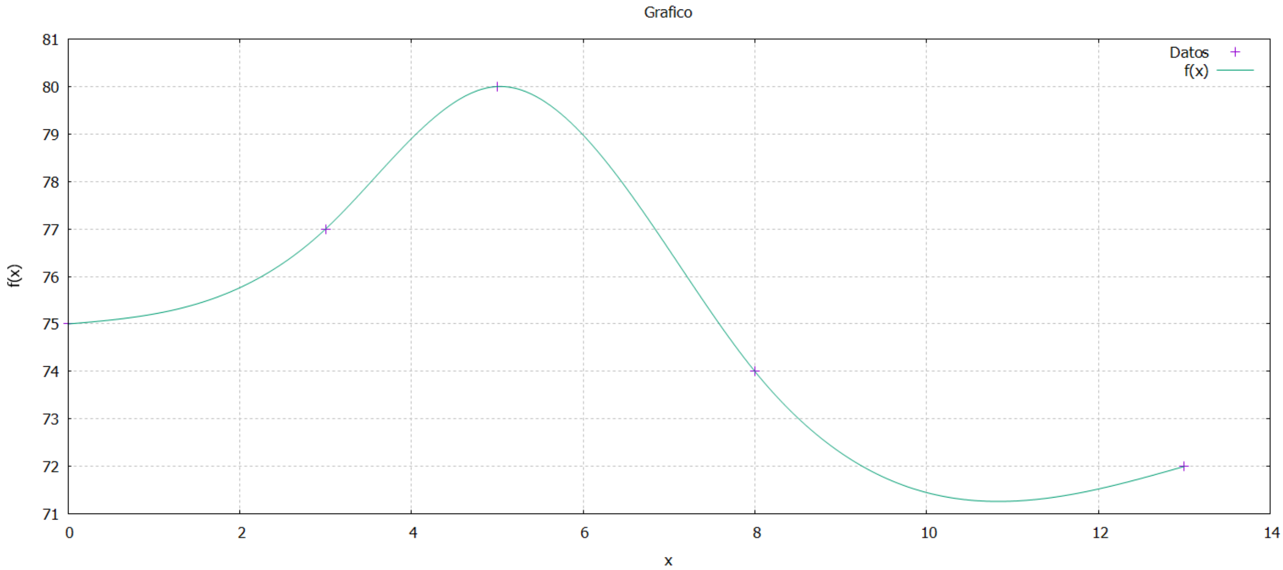

Figura 1. Curva obtenida de velocidad de vehículo vs tiempo.