

Tema: Aproximación de Funciones

Ejercicio Ejemplo de Parcial

Se desea construir una nueva ruta en una zona montañosa. Para establecer su traza se posee una serie de puntos tomados por GPS, por los cuales debe pasar obligatoriamente (**Tabla 1**). Además, se sabe que en la zona de construcción existe un río del cual se posee aproximadamente su ubicación (**Tabla 2**). Ver **Fig 1**.

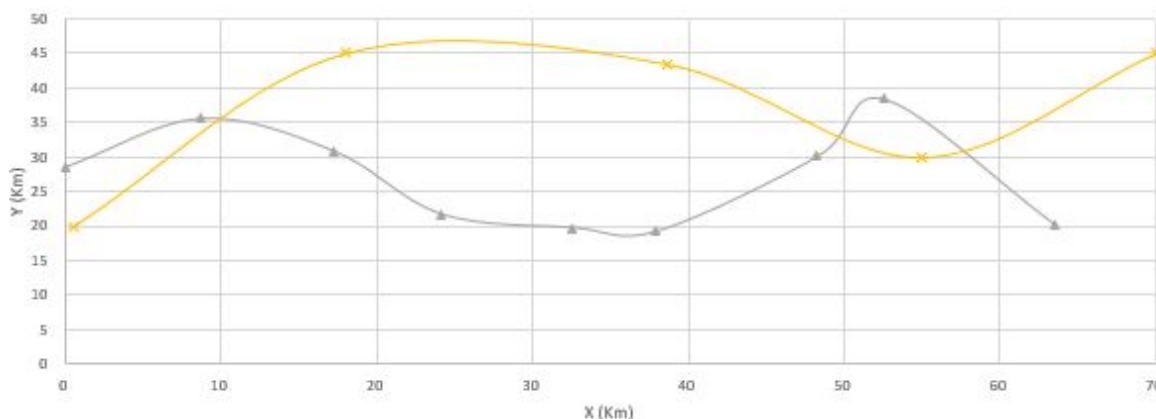


Figura 1: Esquema de la zona de construcción de la ruta.

Tabla 1: Puntos Traza de la Ruta (Km).

x	y	x	y
0	28,53	37,92	19,18
8,71	35,64	48,27	30,12
17,22	30,88	52,58	38,37
24,12	21,66	63,45	20,11
32,58	19,71	-	-

Tabla 2: Coordenadas aproximadas del río (Km).

x	y
0,6	20
18	45
38,6	43,5
55	30
70	45

- Aproximar la trayectoria de la ruta. Reportar la coordenada de la ruta en los puntos $X=15$, 50 y 60 Km. Indicar el método y los polinomios utilizados para encontrar dichas coordenadas.
- Aproximar la trayectoria del río. Indicar método utilizado y la función obtenida.
- Se deben construir puentes en la zona en donde la ruta cruzará el río y es por eso que se desea conocer la coordenada (x, y) de la intersección ruta-río. Reportar el punto (x, y) de la intersección e indicar el método utilizado.

Resolución

a) Se utilizó el método de Spline Cúbico, puesto que se requiere que la trayectoria encontrada pase necesariamente por los puntos y que, al mismo tiempo, dicha trayectoria sea suave y óptima. Los polinomios utilizados poseen la siguiente forma:

$$S_j(x) = A_j + B_j(X-X_j) + C_j(X-X_j)^2 + D_j(X-X_j)^3 \quad \text{Ec. 1}$$

Para encontrar las coordenadas en los puntos solicitados, $X=15$, 50 y 60 Km, se utilizaron los polinomios S_2 , S_7 y S_8 . En la **Tabla 3** se muestran los coeficientes de los polinomios obtenidos. Las coordenadas solicitadas se muestran en la **Tabla 4**.

Tabla 3: Coeficientes de los polinomios obtenidos mediante el método de Spline Cúbico.

	x	a	b	c	d	x	y
s1	0	28,53	1,1077	0	-0,0038	5	33,59
s2	8,71	35,64	0,2334	-0,1004	0,0008	15	33,33
s3	17,22	30,88	-1,2907	-0,0787	0,0104	20	26,91
s4	24,12	21,66	-0,8842	0,1376	-0,0071	30	19,77
s5	32,58	19,71	-0,0875	-0,0435	0,0077	35	19,35
s6	37,92	19,18	0,1095	0,0804	0,0011	40	19,77
s7	48,27	30,12	2,1203	0,1139	-0,0375	50	33,93
s8	52,58	38,37	1,0109	-0,3713	0,0114	60	30,09

Tabla 4: Coeficientes de los polinomios obtenidos mediante el método de Spline Cúbico.

Intersección	Polinomio utilizado	Coordenada (x,y)
1	$S_2(x) = 35,64 + 0,2334 \cdot (X-8,71) - 0,1004 \cdot (X-8,71)^2 + 0,0008 \cdot (X-8,71)^3$	(15, 33,33)
2	$S_7(x) = 30,12 + 2,1203 \cdot (X-48,27) + 0,1139 \cdot (X-48,27)^2 - 0,0375 \cdot (X-48,27)^3$	(50, 33,93)
3	$S_8(x) = 38,37 + 1,0109 \cdot (X-52,58) - 0,3713 \cdot (X-52,58)^2 + 0,0114 \cdot (X-52,58)^3$	(60, 30,09)

b)

A fin de aproximar la trayectoria del río, se utilizó el método de mínimos cuadrados puesto que no es necesario que el polinomio obtenido pase por los puntos.

El polinomio que se obtiene es de la forma:

$$P(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 + e \cdot x^4 \quad \text{Ec. 2}$$

En la **Tabla 5**, se presentan los diferentes polinomios obtenidos con sus respectivas varianzas. Se utilizó el polinomio de grado 3 dado que presenta la menor varianza y ajusta razonablemente los puntos datos. Ver **Fig. 2**.

La función obtenida fue la siguiente:

$$P(x) = 17,6507 + 3,1131 \cdot x - 0,0979 \cdot x^2 + 0,0008 \cdot x^3 \quad \text{Ec. 3}$$

Tabla 5: Coeficientes de los polinomios obtenido mediante mínimos cuadrados.

Grado	Coeficiente					Varianza	Comentario
	a	b	c	d	e		
1	29,47819	0,19818	-	-	-	128,681	
2	24,43872	0,77621	-0,00823	-	-	152,093	
3	17,65066	3,11314	-0,09791	0,00084	-	21,472	
4	18,93951	1,76563	0,00398	-0,0015	0,00002	-	polinomio interpolante

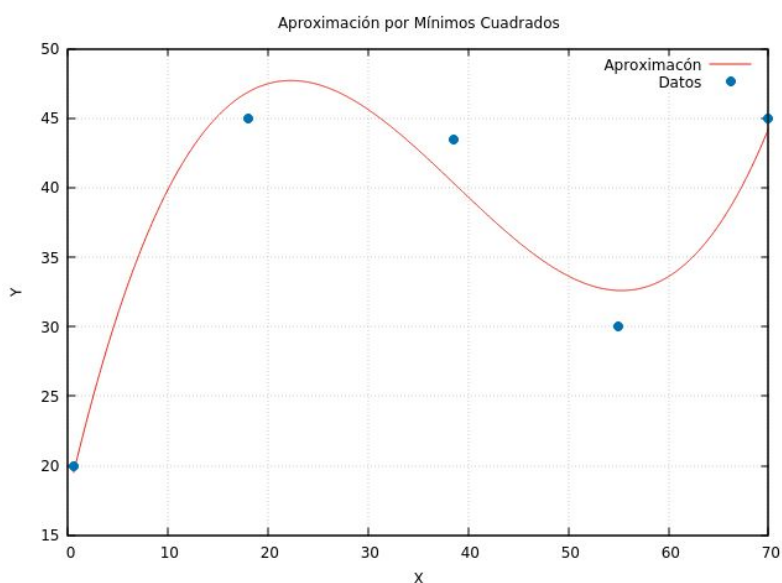


Figura 1: Polinomio de grado 3 obtenido mediante mínimos cuadrados y puntos dato. $P(x) = 17,6507 + 3,1131.x - 0,0979.x^2 + 0,0008.x^3$

c)

Con el objetivo de obtener los puntos de intersección entre el río y la ruta, se utilizó el método de bisección. Se igualó la **Ec. 3** con los polinomios S correspondientes a cada tramo. En la **Tabla 6** se presentan los resultados obtenidos.

Tabla 6: Intersecciones obtenidas entre la función de aproximación del río, Ec.3, y los polinomios S.

(x , y)		Iteraciones	Intervalo utilizado		Polinomio S utilizado
			a	b	
Intersección 1	(7,047 , 35,021)	7	4	10	S1
Intersección 2	(49,22 , 33,844)	13	46	52	S6
	(48,154 , 34,321)	13	46	52	S7

Intersección 3	(61,833 , 34,386)	12	58	62	S8
-----------------------	---------------------	----	----	----	----