Análisis Numérico para Ingeniería

Clase Nro. 9

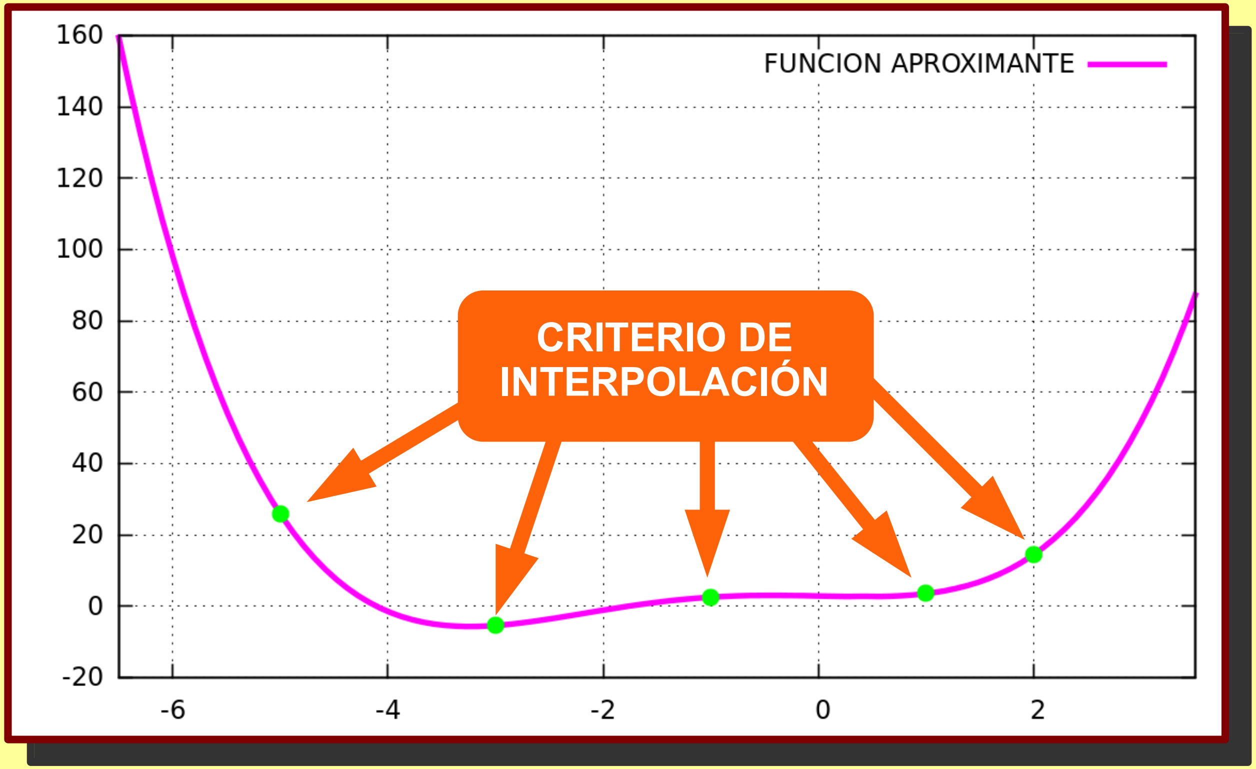
Aproximación de Funciones

Temas a tratar:

- Funciones Aproximantes.
- Criterios de Aproximación.
- Aproximación por Interpolación.
- Error en la Interpolación.
- Polinomios de Lagrange.
- Polinomios de Newton.

Problema a resolver

Dada una **función discreta** *(puntos dato)*, se desea obtener una **función contínua** que aproxime a la primera, de acuerdo a un cierto **criterio de aproximación.**



Interrogantes

- ***CON QUÉ APROXIMO ?***

  Elección de la **función aproximante**.

- ***CÓMO APROXIMO ?***

  Elección del **criterio de aproximación**.

- ***DÓNDE APROXIMO ?***

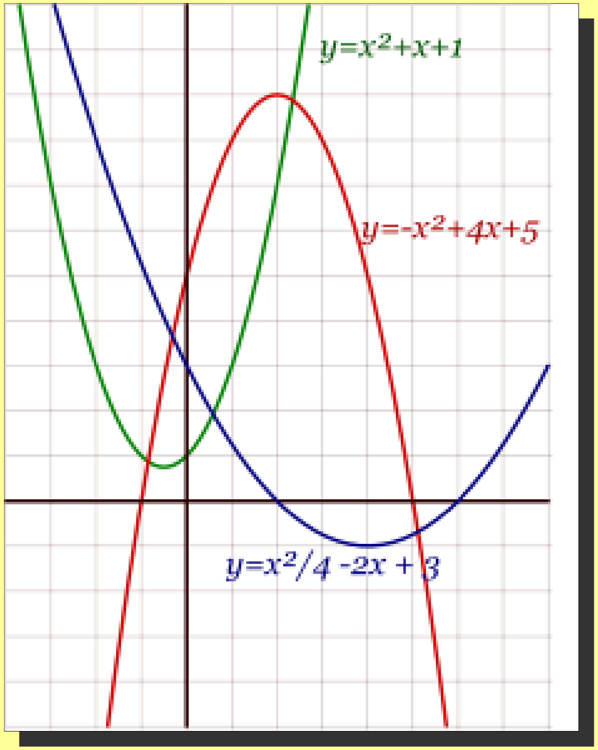
  Elección del **intervalo de aproximación**.

Funciones Aproximantes

- ***Funciones Polinómicas***
- ***Funciones trigonométricas*** *(Series de Fourier)*
- ***Funciones exponenciales***
- ***Funciones Racionales***
- ***Funciones definidas por partes***

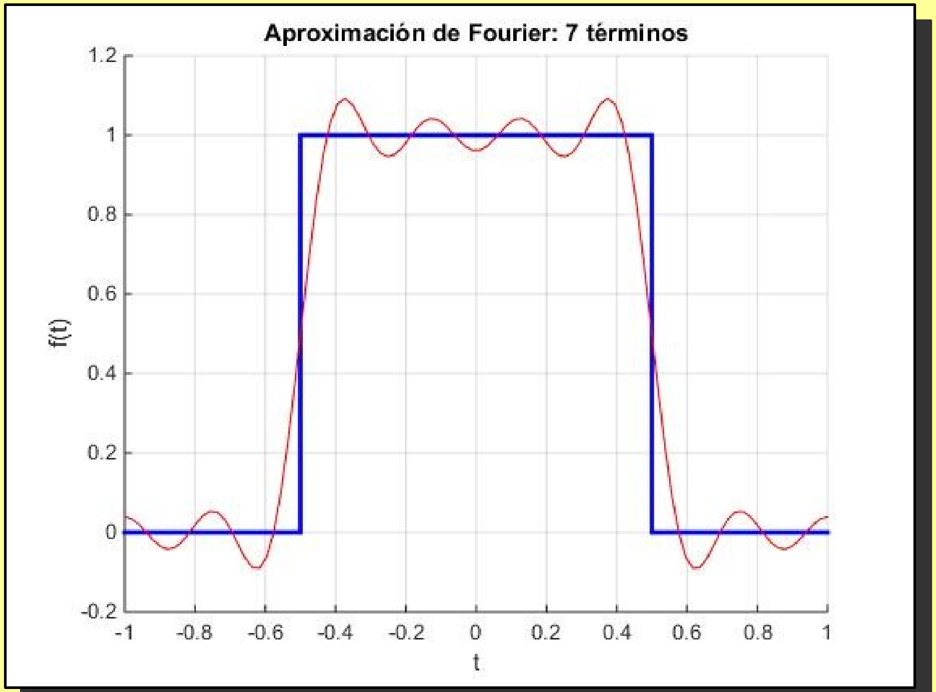
Funciones Polinómicas

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n$$



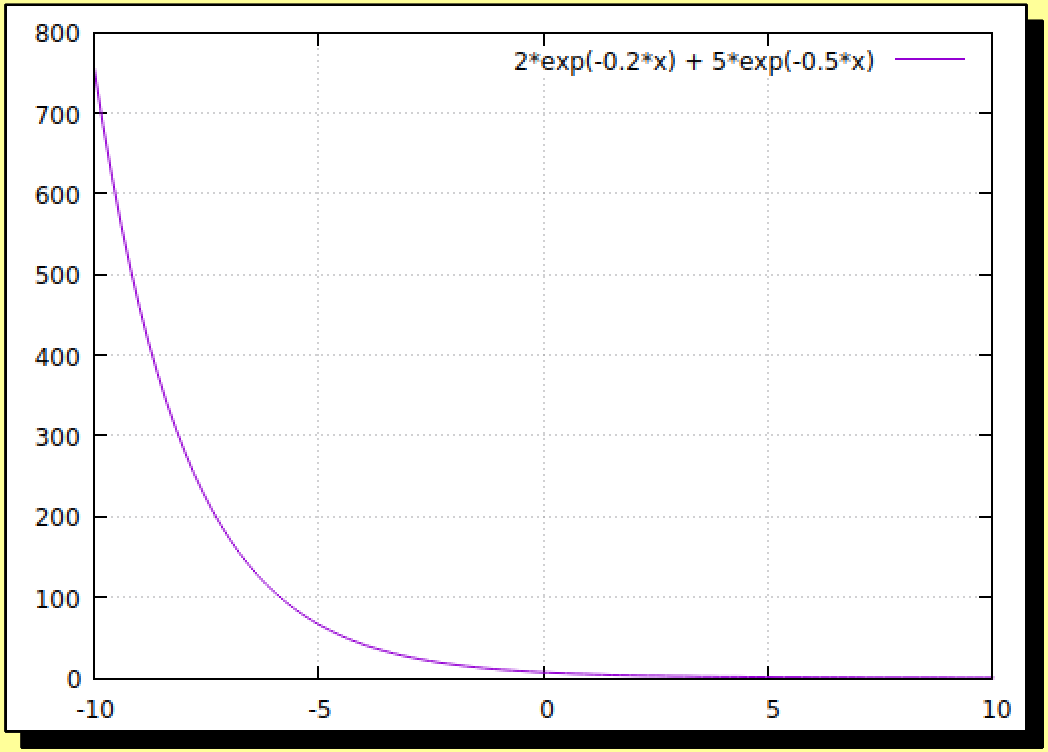
Funciones Trigonométricas

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \cos(i \cdot x) + b_i \cdot \sin(i \cdot x)$$



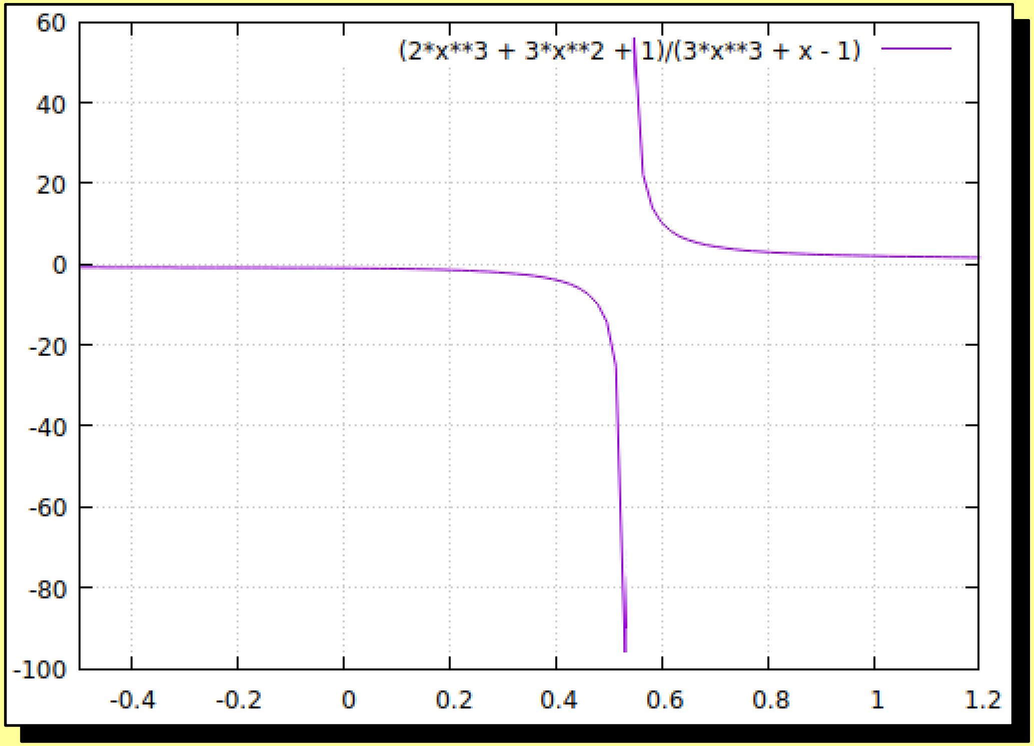
Funciones Exponenciales

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot e^{(b_i \cdot x)}$$



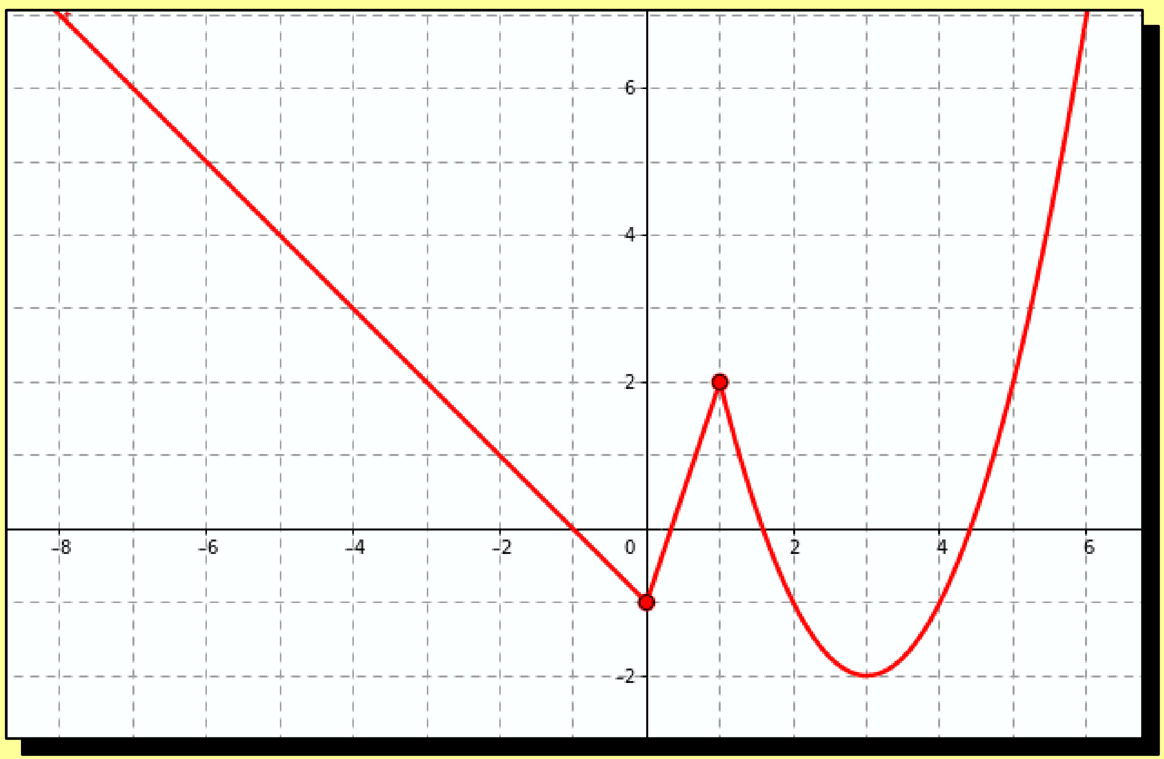
Funciones Racionales

$$p(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i}{\sum_{i=0}^{n} b_j \cdot x^j}$$



Funciones definidas por partes

$$p(x) = \begin{cases} f_1(x) = -1-x & \forall \quad x<0 \\ f_2(x) = 3x-1 & \forall \quad 0 \leqslant x < 1 \\ f_3(x) = -1-x & \forall \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$



Criterios de Aproximación

La base del problema de aproximación es el **criterio** utilizado para **determinar las constantes de la función aproximante**.

Algunos de los criterios de aproximación son:

- *Aproximación por Interpolación.*
- *Aproximación por Splines Cúbicos.*
- *Aproximación por Mínimos Cuadrados.*
- *Aproximación por Error Mínimo (MiniMax).*

Aproximación por Taylor

Esta aproximación encuentra un **polinomio de grado n** que **"aproxima bien"** a **f(x)** alrededor del punto $\mathbf{x_0}$.

"Aproximar bien" significa que $\mathbf{p_n(x)}$ coincide con **f(x)** en el punto $\mathbf{x_0}$ y esto también se cumple para sus **k** derivadas.

$$p(x_0)=f(x_0)$$

$$p_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0) \quad para \quad k=1,2,3,\ldots$$

Aproximación por Taylor

Expresando el desarrollo de Taylor de **f(x)** alrededor del punto $\mathbf{x_0}$, tenemos :

$$p(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$$

Cuyo término de error es :

$$p(x)-f(x)=R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

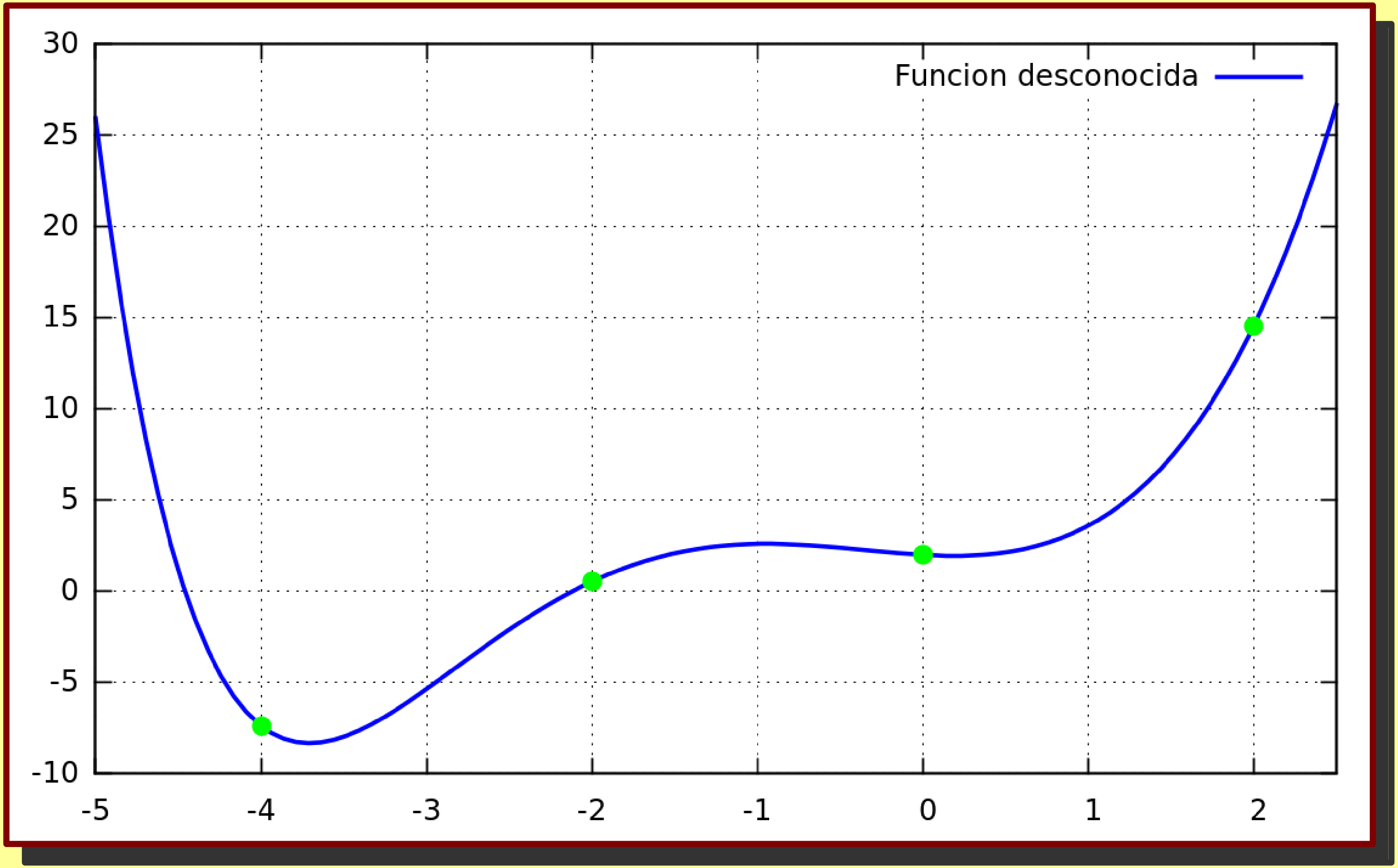
Problema a resolver

Se tiene un conjunto de **4 puntos** pertenecientes a una **función f(x) desconocida**.

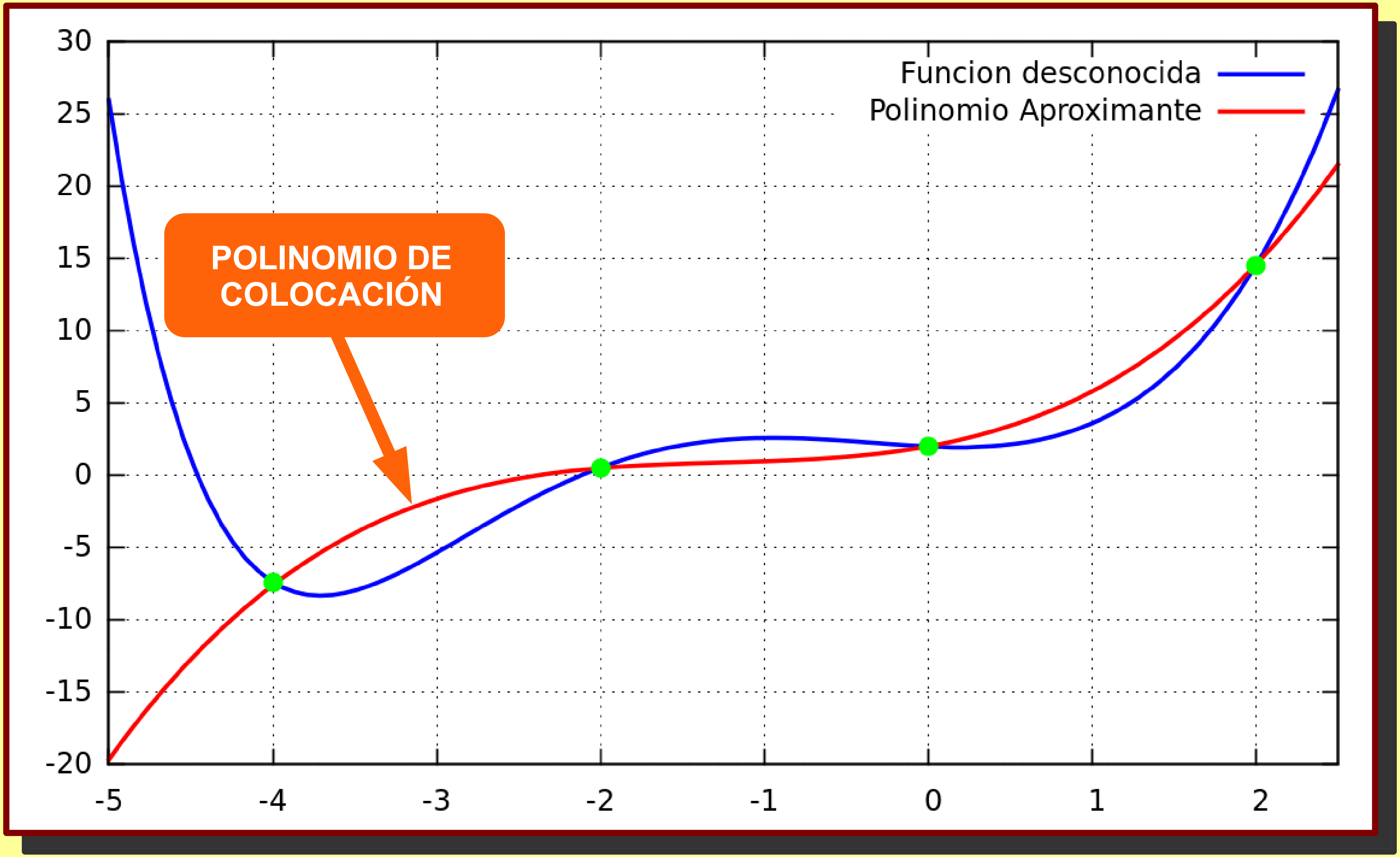
i	x	f(x)	p(x)
0	-4,00	-7,38	-7,38
1	-2,00	0,52	0,52
2	0,00	2,00	2,00
3	2,00	14,52	14,52

Se desea obtener un **polinomio p(x)** que pase por **todos los puntos dato**.

Polinomio Interpolante



Interpolación Polinómica



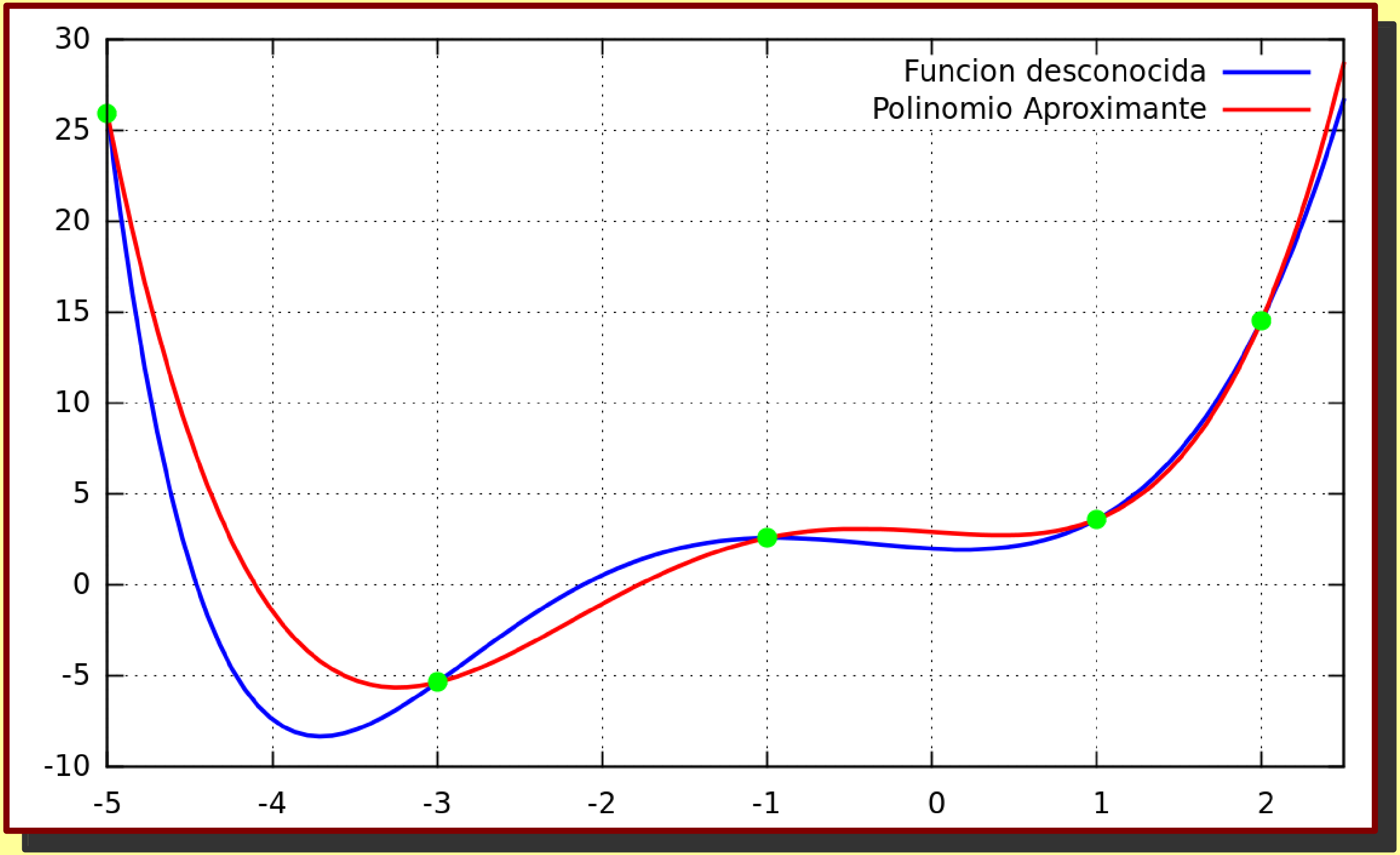
Problema a resolver

Se tiene un conjunto de **5 puntos** pertenecientes a una función **f(x)** desconocida.

i	x	f(x)	p(x)
0	-5,00	25,92	25,92
1	-3,00	-5,36	-5,36
2	-1,00	2,58	2,58
3	1,00	3,59	3,59
4	2,00	14,52	14,52

Se desea obtener un polinomio **p(x)** que pase por todos los puntos dato.

Interpolación Polinómica



Polinomios Aproximantes

Para calcular los **polinomios interpolantes** vistos anteriormente, se ha utilizado el siguiente criterio:

$$f(x_i) = p_n(x_i) \quad para \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$$

Es decir, dados **n+1** puntos, debemos hacer coincidir los valores del polinomio aproximante $\mathbf{p_n(x)}$ con la función aproximada **f(x),** en cada punto $\mathbf{x_i}$.

Determinación de los coeficientes

Se tiene un conjunto de 4 **puntos** pertenecientes a una función **f(x)** desconocida.

i	x	f(x)	p(x)
0	-4,00	-7.38	-7.38
1	-2,00	0.52	0.52
2	0,00	2,00	2,00
3	2,00	14,52	14,52

Se desea calcular los coeficientes del polinomio **p(x)** que pase por todos los puntos dato.

Polinomios Aproximantes

Para calcular los coeficientes del polinomio aproximante :

$$p_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$$

Podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1.00 & -4.00 & 16.00 & -64.00 \\ 1.00 & -2.00 & 4.00 & -8.00 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 & 8.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.38 \\ 0.52 \\ 2.00 \\ 14.52 \end{bmatrix}$$

Polinomios Aproximantes

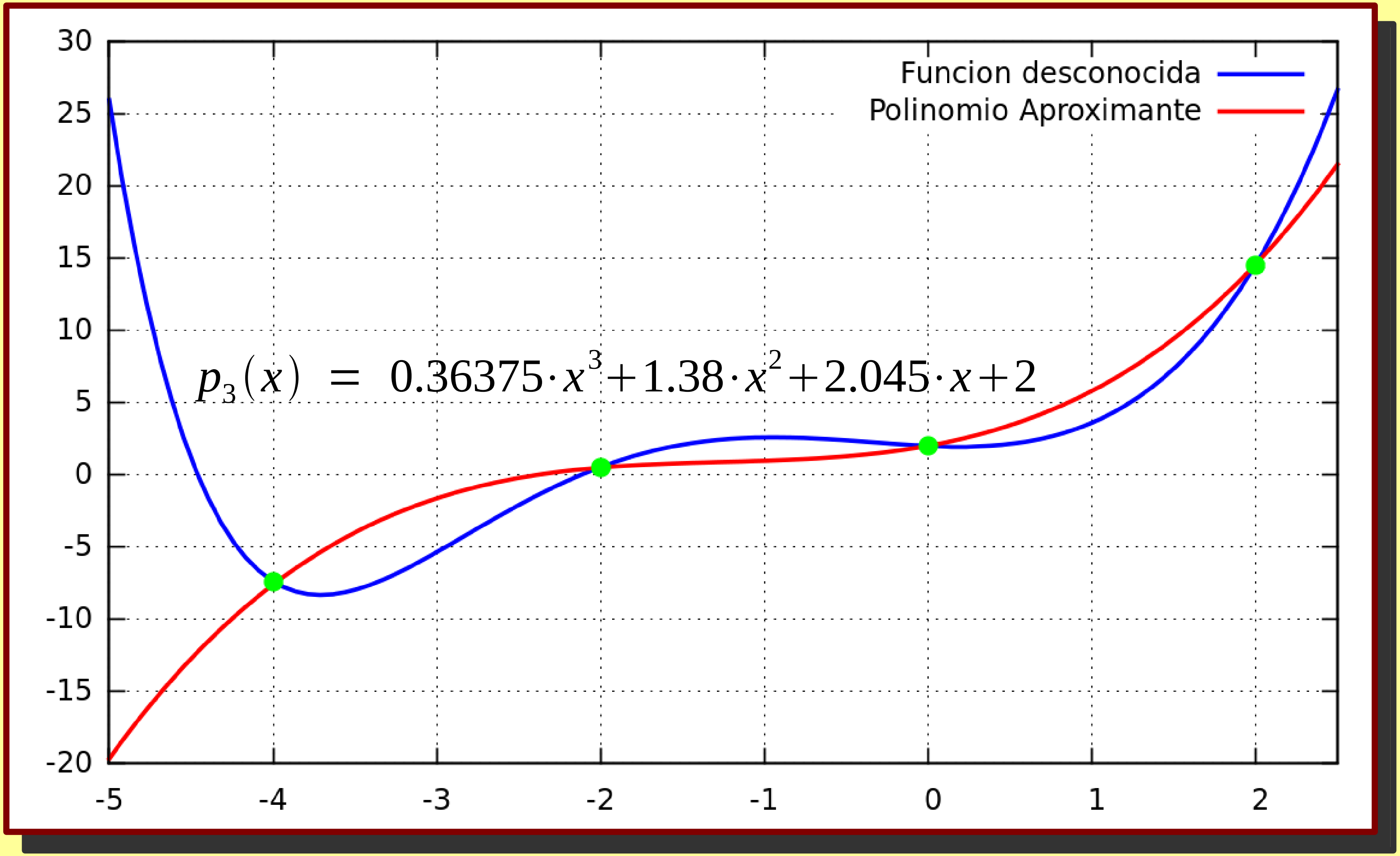
Resolviendo el sistema obtenemos los valores de los coeficientes :

$$a_0 = 2;\quad a_1 = 2.045;\quad a_2 = 1.38;\quad a_3 = 0.36375$$

Por lo que el **polinomio aproximante** queda de la forma :

$$p_3(x) \;=\; 0.36375 \cdot x^3 + 1.38 \cdot x^2 + 2.045 \cdot x + 2$$

Interpolación Polinómica



Unicidad del Polinomio Interpolante

Dados ***n+1*** *puntos de la función* ***f(x)****, el polinomio interpolante que pasa por todos ellos* ***es único****:*

<u>Demostración por el absurdo:</u>

1) Supongamos que existan **dos** polinomios interpolantes $\mathbf{p_n(x)}$ y $\mathbf{q_n(x)}$ que pasan por los **n+1** puntos de **f(x).**

2) Entonces creamos un polinomio $\mathbf{d_n(x) = p_n(x) - q_n(x)}$

3) Dado que $\mathbf{d_n(x)}$ proviene de la diferencia de dos polinomios de **grado n**, el grado del mismo será menor o igual a **n**.

Unicidad del Polinomio Interpolante

*Dados **n+1** puntos de la función **f(x)**, el polinomio interpolante que pasa por todos ellos **es único**:*

<u>Continuación de la Demostración por el absurdo:</u>

4) Las raíces de $\mathbf{d_n(x)}$ coinciden con las abscisas de los puntos dato, en cuyo caso, $\mathbf{d_n(x)}$ debería tener **n+1 raíces**.

Por lo tanto, es imposible que siendo $\mathbf{d_n(x)}$ un polinomio de **grado n**, el mismo posea **n+1 raíces**.

A menos que se trate del polinomio nulo, en cuyo caso se cumplirá que $\mathbf{p_n(x) = q_n(x)}$.

Polinomio de Lagrange

Sea el polinomio :

$$A(x) = (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Por lo tanto todos los $\boldsymbol{x_i}$ *serán ceros de dicho polinomio. Además podemos definir otro polinomio* $\boldsymbol{A_k}$*, en el cuál todos los* $\boldsymbol{x_i}$ *serán ceros de dicho polinomio, menos* $\boldsymbol{x_k}$*:*

$$A_k(x) = (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x-x_i)$$

Método de Lagrange

*Por lo tanto, definimos a los coeficientes **L_k(x)** del polinomio de **LAGRANGE** como:*

$$L_k(x) = \frac{A_k(x)}{A_k(x_k)} = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})\cdot(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

*Donde los coeficientes **L_k(x)** del polinomio de **LAGRANGE** sólo dependen de los **nodos** y toman los siguientes valores :*

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

Método de Lagrange

*Por lo tanto el polinomio de **LAGRANGE** nos queda como :*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) \cdot f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \left[\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \right] \cdot y_k$$

Donde se cumple la condición :

$$f(x_i) = p_n(x_i) = y_i$$

Ejemplo de Aplicación

Dado este conjunto de puntos, se desea calcular el polinomio de interpolación de LAGRANGE

i	x	f(x)	p(x)
0	-4,00	-7,38	-7,38
1	-2,00	0,52	0,52
2	0,00	2,00	2,00
3	2,00	14,52	14,52

$$p_n(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-2)}{(-4+2)(-4-0)(-4-2)}\cdot(-7.38) + \frac{(x+4)(x-0)(x-2)}{(-2+4)(-2-0)(-2-2)}\cdot(0.52) +$$

$$+ \frac{(x+4)(x+2)(x-2)}{(0+4)(0+2)(0-2)}\cdot(2.00) + \frac{(x+4)(x+2)(x-0)}{(2+4)(2+2)(2-0)}\cdot(14.52) =$$

$$= 0.36375\,x^3 + 1.38\,x^2 + 2.045\,x + 2$$

Método de Lagrange

Para nodos equiespaciados, la expresión anterior puede simplificarse, reemplazando ***x = x₀ + sh*** *:*

$$p_n(s) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x_0 + s \cdot h) \cdot f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}}{n!} \binom{n}{k} \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (s-i) \cdot y_k =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \cdot s \cdot (s-1) \cdots (s-n) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot \binom{n}{k}}{(s-k)} \cdot y_k$$

Error en la Interpolación

*A continuación, vamos a demostrar que la expresión del **error de interpolación** en **cualquier valor x** es :*

$$E(x) = (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdots(x-x_n)\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

*Pues, como se sabe, el error **es nulo** en cada uno de los nodos, pues **$p_n(x_i)$** coincide con **$f(x_i)$.***

Error en la Interpolación

TEOREMA

Si $\boldsymbol{x_0, x_1, \ldots, x_n}$, *son distintos en el intervalo* **[a, b]** *y si* $\boldsymbol{f \in C^{n+1}}$ **[a, b]**, *entonces, para cada* $\boldsymbol{x}$ *en* **[a, b]** *existe un número* $\boldsymbol{\xi(x)}$ *en* **(a, b)** *tal que verifica :*

$$f(x) = P(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{\textit{Error de Interpolación}}$$

Error en la Interpolación

DEMOSTRACIÓN

Vemos que si $\boldsymbol{x=x_k}$*, para* **k = 0, 1, …, n** *entonces* $\boldsymbol{f(x_k)=P(x_k)}$ *y eligiendo* $\boldsymbol{\xi\,(x_k)}$ *arbitrariamente en* **(a, b)***, se satisface la ecuación anterior.*

Ahora bien, si $\boldsymbol{x\neq x_k}$ *para cualquier* **k = 0, 1, …, n** *definiremos la función* **g(t)** *en* **[a, b]** *de la siguiente forma :*

$$g(t)=f(t)-P(t)-[f(x)-P(x)]\cdot\frac{(t-x_0)\cdot(t-x_1)\cdots(t-x_n)}{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdots(x-x_n)}$$

Error en la Interpolación

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \cdot \prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}$$

Como ***f*** ∈ ***C****ⁿ⁺¹* ***[a, b]****,* ***P*** ∈ ***C****∞* ***[a, b]****, y* $\boldsymbol{x \neq x_k}$, *para cualquier* ***k*** *se establece que* ***g*** ∈ ***C****ⁿ⁺¹*. *Por lo tanto, para* $\boldsymbol{t = x_k}$ *se verifica que :*

$$g(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - [f(x) - P(x)] \cdot \prod_{i=0}^{n} \frac{(x_k - x_i)}{(x - x_i)} =$$

$$= 0 - [f(x) - P(x)] \cdot 0 = 0$$

Error en la Interpolación

Y también se verifica que :

$$g(x) = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] \cdot \prod_{i=0}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x - x_i)} =$$

$$= f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] = 0$$

Teorema de ROLLE

Establece que si se cumple que :

- **f** es una función contínua en un intervalo **[a, b]**
- **f** es derivable en un intervalo **(a, b)**
- **f(a) = f(b)**

Entonces:

- Existe al menos un valor **c** perteneciente al intervalo **(a, b)** tal que **f ' (c) = 0**.

Error en la Interpolación

Por lo tanto $\boldsymbol{g} \in C^{n+1}[a,b]$, *y* $\boldsymbol{g}$ *se anula en los* **n+2** *números distintos* $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$. *Por el teorema de ROLLE generalizado existe* $\xi \equiv \xi(x)$ *en* (a,b) *tal que* $g^{(n+1)}(\xi)=0$. *Evaluando* $g^{(n+1)}(\xi)$ *da :*

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) =$$

$$= f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - P(x)] \cdot \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \cdot \left(\prod_{i=0}^{n} \frac{(t-x_i)}{(x-x_i)} \right)_{t=\xi}$$

Error en Interpolación

*Como **P** es un polinomio de **grado n** o menor , la derivada **(n+1)**, es decir, $P^{(n+1)}$ será igual a **cero**.*

Además :

$$\prod_{i=0}^{n} \frac{(t-x_i)}{(x-x_i)}$$

*Esta productoria es un polinomio de grado **(n+1)**, entonces :*

Error en Interpolación

$$\prod_{i=0}^{n} \frac{(t-x_i)}{(x-x_i)} = \frac{t^{n+1}}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)} + \text{(términos de menor grado en t)}$$

*Por lo que la derivada de los términos de **grado n** o menor, son iguales a cero.*

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \cdot \prod_{i=0}^{n} \frac{(t-x_i)}{(x-x_i)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

Error en Interpolación

$$0 \;=\; g^{(n+1)}(\xi) \;=$$

$$= \; f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - P(x)] \cdot \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \cdot \left(\prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \right)_{t=\xi}$$

La ecuación anterior se transforma en:

$$0 = [f^{(n+1)}(\xi) - 0] - [f(x) - P(x)] \cdot \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}$$

Error en Interpolación

*Y reordenando y despejando **f(x)**, obtenemos finalmente la siguiente expresión, que representa la aproximación **P(x)** y el error de interpolación :*

$$f(x) = P(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}_{\text{Error de Interpolación}}$$

*La fórmula anterior es un **resultado teórico** muy importante, ya que los polinomios de **LAGRANGE** son extensamente utilizados para desarrollar métodos numéricos de derivación e integración.*

Comparación con el polinomio de TAYLOR

*Nótese que la forma del **error** para el polinomio de **LAGRANGE** es muy similar a la del polinomio de **TAYLOR**. El polinomio de **TAYLOR** de **grado n** alrededor de $\boldsymbol{x_0}$ concentra toda la información conocida en $\boldsymbol{x_0}$ y tiene un término de **error** de la forma :*

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

*Error de Interpolación del polinomio de **TAYLOR***

Error en Interpolación

*El polinomio de **LAGRANGE** de grado **n** utiliza la información de los diferentes valores $\boldsymbol{x_0, x_1, \ldots, x_n}$, en vez de $\boldsymbol{(x - x_0)^n}$ su fórmula de error contiene un producto de **n+1** términos :*

$$Error = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

*Error de Interpolación del polinomio de **LAGRANGE***

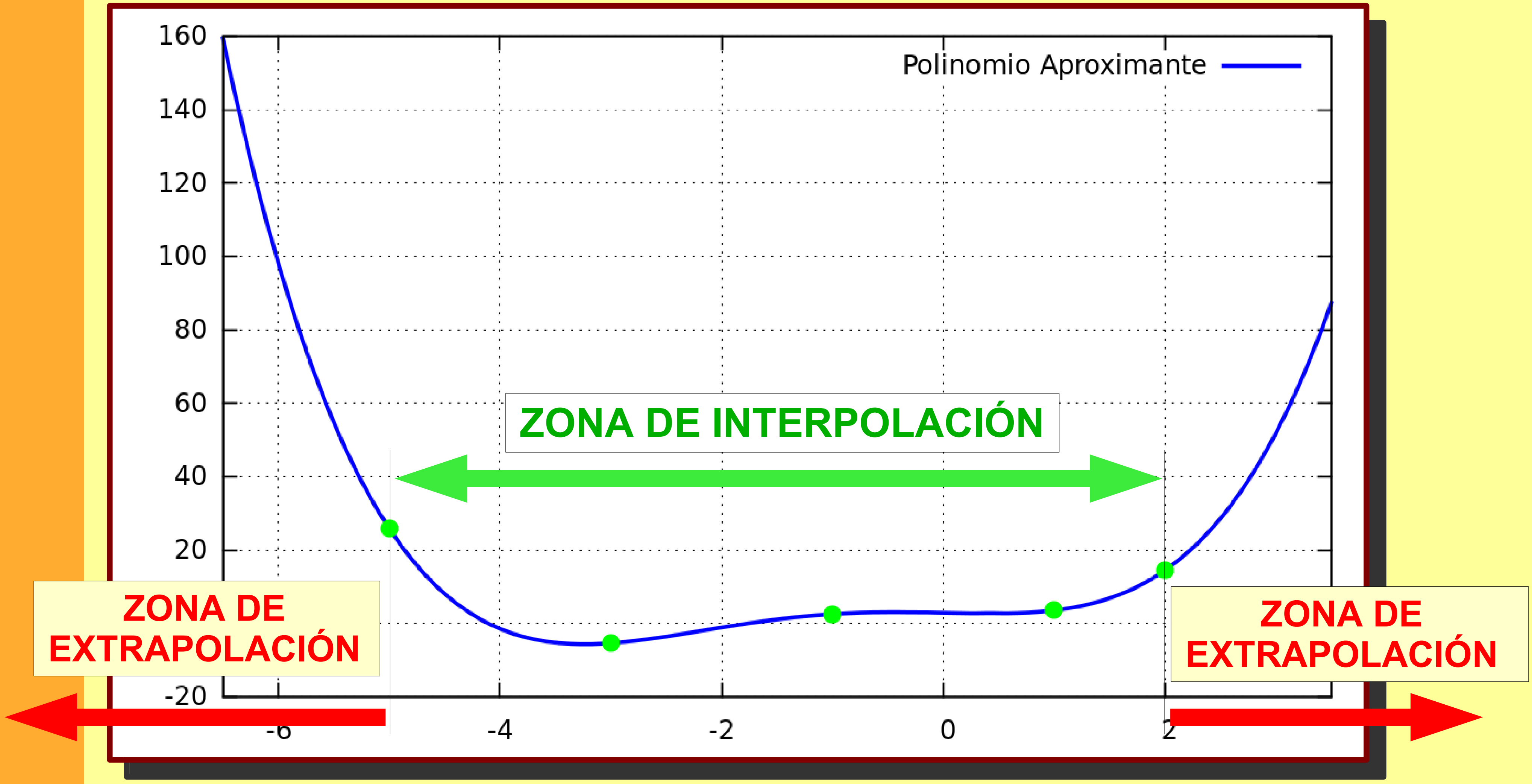
Error en Interpolación

*A pesar de que la fórmula del error en los polinomios de **LAGRANGE** constituye un resultado teórico importante, su uso práctico está restringido a aquellas funciones cuyas derivadas tengan cotas conocidas, como las funciones **trigonométricas** ó **logarítmicas**.*

Por último, para el caso de puntos equiespaciados, nos queda:

$$Error = \frac{s\cdot(s-1)\cdot(s-2)\cdots(s-n)}{(n+1)!}\cdot h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

Interpolación y Extrapolación



Interpolación con Diferencias Finitas

Para puntos ***equiespaciados*** *únicamente y utilizando* ***diferencias ascendentes****, tenemos :*

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) =$$
$$= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2\mathrm{h}) - f(x+h) - f(x+h) + f(x) =$$
$$= f(x+2\mathrm{h}) - 2 \cdot f(x+h) + f(x)$$

$$\Delta^n = \Delta(\Delta^{(n-1)} f(x))$$

Tabla de Diferencias

i_{ASC}	i_{DESC}	x_i	$f(x_i)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0	-5	5,1	0,37798					
				0,09054				
1	-4	5,2	0,46852		-0,00469			
				0,08585		-0,00084		
2	-3	5,3	0,55437		-0,00553		0,00003	
				0,08032		-0,00081		0,00004
3	-2	5,4	0,63469		-0,00634		0,00007	
				0,07398		-0,00074		
4	-1	5,5	0,70867		-0,00708			
				0,0669				
5	0	5,6	0,77557					

Newton con Diferencias Ascendentes

Esta expresión nos permite obtener el polinomio interpolante de ***Newton****, con* ***diferencias ascendentes****. La misma puede utilizarse únicamente si los puntos dato* ***son equiespaciados****.*

Siendo: $s=\dfrac{x-x_0}{h}$

$$p_n(s)=y_0+s\cdot\Delta y_0+\frac{s\cdot(s-1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0+\cdots+\frac{s\cdot(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}\cdot\Delta^n y_0$$

Diferencias Ascendentes

i_{ASC}	i_{DESC}	x_i	$f(x_i)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0	-5	5,1	0,37798					
				0,09054				
1	-4	5,2	0,46852		-0,00469			
				0,08585		-0,00084		
2	-3	5,3	0,55437		-0,00553		0,00003	
				0,08032		-0,00081		0,00004
3	-2	5,4	0,63469		-0,00634		0,00007	
				0,07398		-0,00074		
4	-1	5,5	0,70867		-0,00708			
				0,0669				
5	0	5,6	0,77557					

Newton con Diferencias Descendentes

*Esta expresión nos permite obtener el polinomio interpolante de **Newton**, con **diferencias descendentes**. La misma puede utilizarse únicamente si los puntos dato **son equiespaciados**.*

Siendo: $s=\dfrac{x-x_0}{h}$

$$p_n(s)=y_0+s\cdot\Delta y_{-1}+\frac{s\cdot(s+1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_{-2}+\cdots+\frac{s\cdot(s+1)\cdots(s+n+1)}{n!}\cdot\Delta^n y_{-n}$$

Diferencias Descendentes

i_{ASC}	i_{DESC}	x_i	$f(x_i)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0	-5	5,1	0,37798					
				0,09054				
1	-4	5,2	0,46852		-0,00469			
				0,08585		-0,00084		
2	-3	5,3	0,55437		-0,00553		0,00003	
				0,08032		-0,00081		0,00004
3	-2	5,4	0,63469		-0,00634		0,00007	
				0,07398		-0,00074		
4	-1	5,5	0,70867		-0,00708			
				0,0669				
5	0	5,6	0,77557					

Interpolación con Diferencias Divididas

*Para **puntos no equiespaciados** se puede utilizar **diferencias divididas**.*

$$Df(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$D^n f(x_i) = \frac{D^{n-1} f(x_{i+1}) - D^{n-1} f(x_i)}{x_{i+n} - x_i}$$

Newton con Diferencias Finitas

*Esta expresión nos permite obtener el polinomio interpolante de **Newton**, con **diferencias divididas**. La misma puede utilizarse con puntos dato **equi-espaciados** o **no**.*

$$p_n(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot D\,y_0 + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot D^2\,y_0 + \cdots +$$
$$+ (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \cdot D^n\,y_0$$

Tabla de Diferencias Divididas

x_i	$f(x_i)$	D	D^2	D^3	D^4	D^5
5,1	0,37798					
		0,9054				
5,2	0,46852		-0,2345			
		0,8585		-0,14		
5,3	0,55437		-0,2765		0,0125	
		0,8032		-0,135		0,03333
5,4	0,63469		-0,317		0,029167	
		0,7398		-0,12333		
5,5	0,70867		-0,354			
		0,669				
5,6	0,77557					

PREGUNTAS ...