Temas: *Métodos Directos. Método de Triangulación de Gauss - Método de Diagonalización de Gauss-Jordan – Pivoteo Parcial*

Ejercicio 1

1. Escriba un programa que permita resolver un sistema de ecuaciones lineales por los métodos de Gauss y Gauss-Jordan con pivoteo parcial y calcule la solución de los siguientes sistemas.

$$
a)\ \begin{aligned}
&2x_1 = 3\\
&x_1 + 1{,}5x_2 = 4{,}5\\
&-3x_2 + 0{,}5x_3 = -6{,}6\\
&2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0{,}8
\end{aligned}
$$

Resolución

Breve introducción

Los métodos directos sirven para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Estos métodos están basados en la reducción de la matriz de los coeficientes del sistema a una matriz triangular superior (o inferior), para a continuación resolver este último sistema mediante un algoritmo.

Método de Triangulación de Gauss

El método de Triangulación de Gauss consiste en hacer una triangulación superior mediante la eliminación gaussiana que se logra dividiendo a los elementos por la diagonal principal.

Para ello se parte de la matriz ampliada del sistema original hasta llegar a una matriz triangular superior, mediante el uso de expresiones algebraicas.

$$
\left.\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4
\end{array}\right.
$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{matrix}\right| \begin{matrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \rightarrow F'_2 = F_2 - \frac{F_1}{a_{11}} \cdot a_{21} \\ \rightarrow F'_3 = F_3 - \frac{F_1}{a_{11}} \cdot a_{31} \\ \rightarrow F'_4 = F_4 - \frac{F_1}{a_{11}} \cdot a_{41} \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} \end{matrix}\right| \begin{matrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b''_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \rightarrow F''_3 = F'_3 - \frac{F'_2}{a'_{22}} \cdot a'_{32} \\ \rightarrow F''_4 = F'_4 - \frac{F'_2}{a'_{22}} \cdot a'_{42} \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} \end{matrix}\right| \begin{matrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b'''_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \rightarrow F'''_4 = F''_4 - \frac{F''_3}{a''_{33}} \cdot a''_{43} \end{matrix}$$

Obteniendo finalmente una matriz de triangulación superior.

A continuación, se muestra el código en FORTRAN que resuelve lo mencionado anteriormente:

```
SUBROUTINE Gauss(A,B,n,A2)
REAL(8) A(n,n),B(n),A2(n,n+1),aux
INTEGER n,i,j,k

 A2=A
 DO i=1,n
    A2(i,n+1)=B(i)
 END DO

 DO i=1,n
    CALL PivoteoParcialGauss(A2,n,i)
    DO j=i+1,n+1
       A2(i,j)=A2(i,j)/A2(i,i)
    END DO
    A2(i,i)=1
```

```
    DO k=i+1,n
       aux=A2(k,i)
       DO j=i+1,n+1
          A2(k,j)=A2(k,j)-(aux*A2(i,j))
       END DO
       A2(k,i)=0
    END DO

 END DO

 DO i=1,n
    DO j=1,n
       A(i,j)=A2(i,j)
    END DO
 END DO

 DO i=1,n
    B(i)=A2(i,n+1)
 END DO
```

¡Donde A es la matriz, B es el vector de términos independientes y A2 es la matriz ampliada

Método de Diagonalización de Gauss-Jordan

Este método es una variante del método de Gauss, en el que se buscar llegar a un sistema de ecuaciones lineales, equivalente al de partida, tal que la matriz de coeficientes sea diagonal, es decir que los únicos elementos no nulos de la matriz sean los de la diagonal principal.

$$\left.\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right.$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{cccc|cll} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 & & \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 & \rightarrow & F'_2=F_2-\frac{F_1}{a_{11}}\cdot a_{21} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & b'_3 & \rightarrow & F'_3=F_3-\frac{F_1}{a_{11}}\cdot a_{31} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & b'_4 & \rightarrow & F'_4=F_4-\frac{F_1}{a_{11}}\cdot a_{41} \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a''_{11} & 0 & 0 & a''_{14} & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & 0 & a''_{24} & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & b''_3 \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} & b'''_4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow F''_1 = F'_1 - \frac{F''_3}{a''_{33}} \cdot a'_{13} \\ \rightarrow F''_2 = F'_2 - \frac{F''_3}{a''_{33}} \cdot a'_{23} \\ \\ \rightarrow F'''_4 = F''_4 - \frac{F''_3}{a''_{33}} \cdot a''_{43} \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a'''_{11} & 0 & 0 & 0 & b'''_1 \\ 0 & a'''_{22} & 0 & 0 & b'''_2 \\ 0 & 0 & a'''_{33} & 0 & b'''_3 \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} & b'''_4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow F'''_1 = F''_1 - \frac{F'''_4}{a'''_{44}} \cdot a''_{14} \\ \rightarrow F'''_2 = F''_2 - \frac{F'''_4}{a'''_{44}} \cdot a''_{24} \\ \rightarrow F'''_3 = F''_3 - \frac{F'''_4}{a'''_{44}} \cdot a''_{34} \\ \\ \end{array}$$

A continuación, se muestra el código en FORTRAN que resuelve lo mencionado anteriormente:

```
SUBROUTINE GaussJordan(A,X,B,n,A2)
REAL(8) A(n,n),X(n),B(n),A2(n,n+1),aux
INTEGER n,i,j,k

 A2=A
 DO i=1,n
    A2(i,n+1)=B(i)
 END DO

 DO i=1,n
CALL PivoteoParcialGauss(A2,n,i)
    DO j=i+1,n+1
       A2(i,j)=A2(i,j)/A2(i,i)
    END DO
    A2(i,i)=1
    DO k=i+1,n
       aux=A2(k,i)
       DO j=i+1,n+1
          A2(k,j)=A2(k,j)-(aux*A2(i,j))
       END DO
       A2(k,i)=0
    END DO
 END DO

 DO j=n+1,1,-1
    DO i=j-2,1,-1
```

```
        A2(i,n+1)=A2(i,n+1)-(A2(i,j-1)*A2(j-1,n+1))
    END DO
    DO i=j-2,1,-1
        A2(i,j-1)=0
    END DO
 END DO

 DO i=1,n
    X(i)=A2(i,n+1)
 END DO
```

¡Donde A es la matriz, B es el vector de términos independientes y A2 es la matriz ampliada

Tácticas de pivoteo

Las tácticas de pivoteo se emplean para evitar la amplificación de los errores producidos por trabajar con aritmética finita. Por lo tanto, se busca que los elementos de mayor valor absoluto se encuentren en los pivotes.

Las estrategias de pivoteo más utilizadas son el pivoteo parcial por filas, o por columnas y el pivoteo total.

A continuación, se muestra el código en FORTRAN que ejecuta un pivoteo parcial como lo pide el enunciado:

```
SUBROUTINE PivoteoParcialGauss(A,n,i)
INTEGER n,h,nuevafila,i
REAL(8) A(n,n+1)
REAL(8) maximo,aux2

 maximo=0
 DO h=i,n
    IF (abs(A(i,h))>maximo) THEN
        maximo=abs(A(i,h))
        nuevafila=h
    END IF
 END DO

 DO h=i,n+1
    aux2=A(i,h)
    A(i,h)=A(nuevafila,h)
    A(nuevafila,h)=aux2
 END DO

END SUBROUTINE
```

Continuando con el ejercicio 1:

Inciso A

Escribiremos al sistema de ecuaciones de forma matricial;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0{,}5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4{,}5 \\ -6{,}6 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

Se ingresa la matriz y el vector de términos independientes al programa o por pantalla, según elección de cada uno.

Recordar que cuando pivoteas las filas de la matriz también se debe hacer en el vector de términos independientes. (el programa lo tiene en cuenta y lo hace)

Luego del pivoteo nuestro objetivo es reducir esta matriz a una equivalente mediante el uso de las operaciones llamadas elementales.

Mediante el método de Gauss se obtuvo el siguiente vector solución:

$$X = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}0 \\ -1{,}2 \\ 3{,}0 \end{bmatrix}$$

Mediante el método de Gauss-Jordan se obtuvo el siguiente vector solución:

$$X = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}0 \\ -1{,}2 \\ 3{,}0 \end{bmatrix}$$

Recuerden siempre a la hora de escribir el resultado en redondear al vector solución en la misma cantidad de decimales que tiene la matriz original.

Inciso B

Vector solución con ambos métodos:

$$X = \begin{bmatrix} 2{,}9398 \\ 0{,}0706 \\ -5{,}6773 \\ 4{,}3796 \end{bmatrix}$$

Recomendaciones

- Una forma de verificar el resultado es reemplazando el vector solución en el sistema de ecuaciones lineales y verificando que de lo mismo a ambos lados de la igualdad.
- Tengan en cuenta que si el pivoteo de la matriz está mal hecho el resultado no va a ser el correcto ya que no están minimizando el error de truncamiento.

Conclusiones

Se observa que el vector solución por ambos métodos da lo mismo. Entonces, uno podría resolver el sistema de ecuaciones mediante un método y verificarlo con el otro fijándote si da lo mismo no.