Análisis Numérico para Ingeniería

Clase Nro. 11

Integración Numérica

Temas a tratar:

- Métodos de Newton-Cotes.
- Método de los Trapecios.
- Método de 1/3 de Simpson.
- Método de 3/8 de Simpson.
- Método de Romberg.

Problema a resolver

Se desea calcular numéricamente:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\cdot dx$$

- Cuando la función a integrar no tiene anti-derivada explícita.
- La función antiderivada es muy complicada de calcular.
- La función está expresada en forma discreta.

Método de Resolución

El método básico utilizado para obtener el valor de una Integral definida, se denomina **cuadratura numérica** y está basado en la siguiente fórmula:

$$\sum_{i=0}^{n} H_i \cdot f(x_i)$$

Entonces tendremos:

$$I(f) = \int_a^b f(x) \cdot dx = \sum_{i=0}^{n} H_i \cdot f(x_i) + Error$$

Estrategias para Integrar Numéricamente

- Si se conocen los valores de las abscisas **x_i** con **i=0,1,...,n** y éstos son **equiespaciados**, se utilizarán las fórmulas de **Newton Cotes** para hallar los valores de **H_i**
- Otras forma de calcular los **H_i** se logran utilizando las fórmulas **Gauss-Legendre,** o de **Cuadratura Gaussiana**.
- Otra forma consiste en hallar la **Serie de Taylor** e integrar el polinomio resultante al truncar la misma.

Métodos de Newton-Cotes

La estrategia consiste en aproximar los puntos de la función **f(x)** y luego integrar el polinomio resultante:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\cdot dx \approx \int_a^b p_n(x)\cdot dx$$

Y considerando el error de interpolación, tendremos:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^b p_n(x)\cdot dx + \int_a^b E(x)\cdot dx$$

Métodos de Newton-Cotes

Teniendo en cuenta el error de interpolación para **puntos equiespaciados**, obtenemos la siguiente expresión para el **Error de Integración**:

$$Error = \int_b^a E(x)\cdot dx = \int_b^a \frac{s\cdot(s-1)\cdot(s-2)\cdots(s-n)}{(n+1)!}\cdot h^{n+1}\cdot f^{(n+1)}(\xi)\cdot dx$$

Métodos de Newton-Cotes

Esta fórmula puede utilizarse de diferentes formas, ya que el rango de ajuste del polinomio **no necesariamente** tiene que coincidir con el **intervalo de integración**.

$$I(f) = \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^b p_n(x) \cdot dx + \int_a^b E(x) \cdot dx$$

En el caso en que los extremos de integración coincidan con el intervalo de interpolación se llaman **fórmulas cerradas de Newton-Cotes**, de lo contrario se denominan **fórmulas abiertas**.

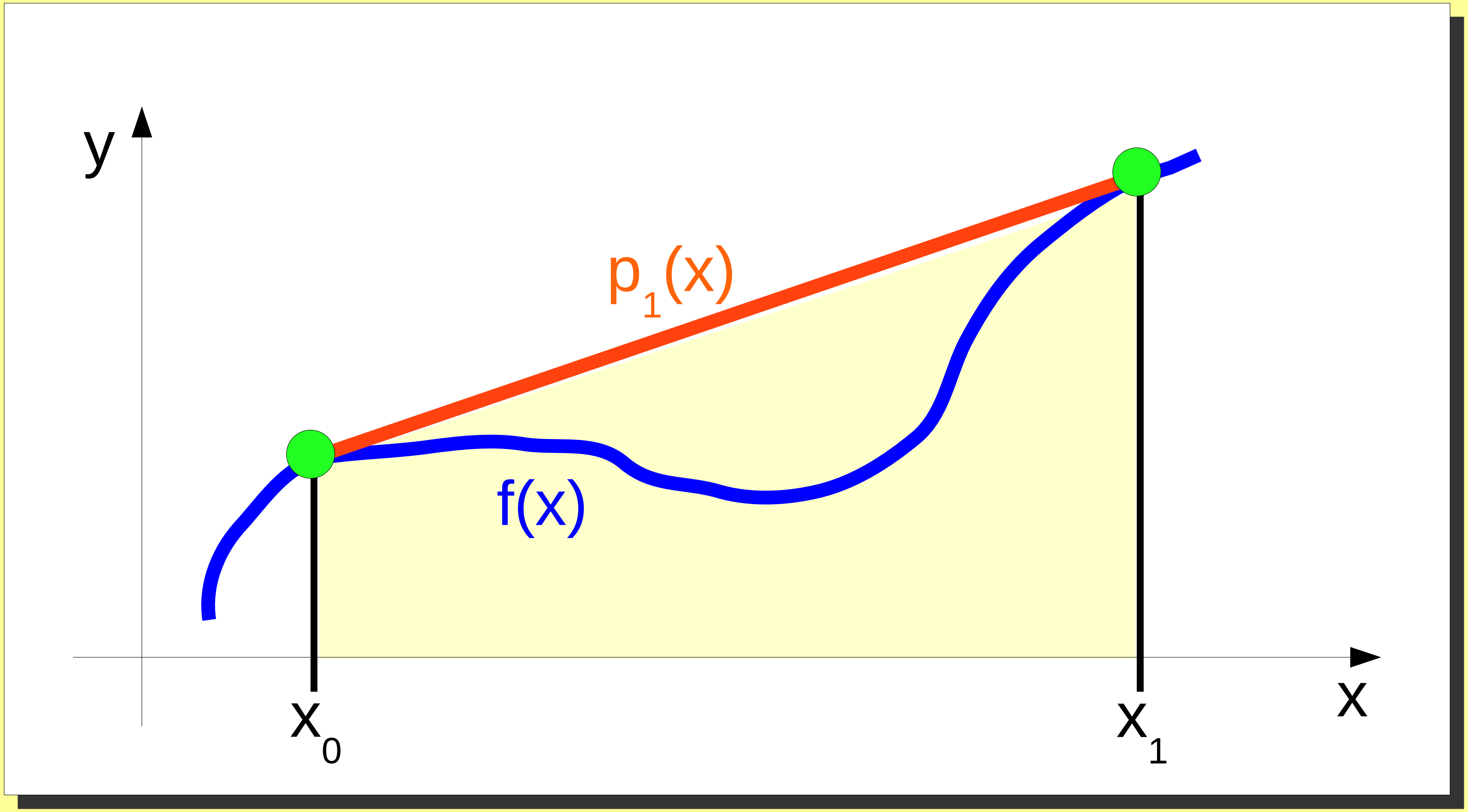
Métodos de Newton-Cotes

Las **fórmulas de Newton-Cotes** más utilizadas son aquellas que poseen **mejor ajuste** y **menor error de redondeo**, es decir, aquellas que utilizan un polinomio de interpolación de **grado bajo**.

$$NEWTON-COTES \quad CERRADAS \begin{cases} n=1 & Trapecios \\ n=2 & \dfrac{1}{3}\, de\, Simpson \\ n=3 & \dfrac{3}{8}\, de\, Simpson \end{cases}$$

Método de Trapecios

Dados **dos puntos** es posible aproximar por un polinomio interpolante de Newton de **grado 1**.



Método de Trapecios

Aproximando con un polinomio de **1er. Grado**, obtenemos:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot dx \approx \int_{x_0}^{x_1} (y_0 + s\cdot\Delta y_0)\cdot dx =$$

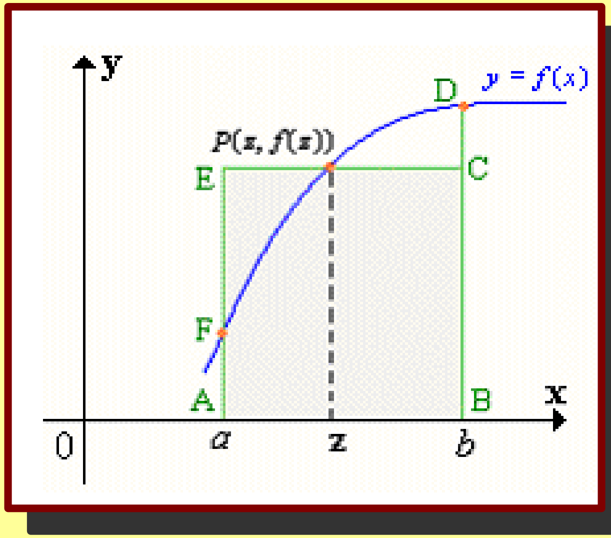
$$= h\cdot\left[y_0\cdot s\Big|_0^1 + \Delta y_0\cdot\frac{s^2}{2}\Bigg|_0^1\right] = h\cdot\left[y_0 + \frac{\Delta y_0}{2}\right] =$$

$$= h\cdot\left[y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2}\right] = \frac{h}{2}\cdot[y_1 + y_0]$$

Teorema del Valor Medio para Integrales

Si **f** es una función contínua en el intervalo **[a, b]** , entonces existe un número **z** en **[a, b]** tal que:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = f(z)\cdot(b-a)$$



Veamos una interpretación geométrica del teorema:

Supongamos que **f(x) ≥ 0** para todo **x** que pertenece a **[a, b]** , en este caso, la integral de **f(x)** se toma como el área de la región encerrada bajo la curva **f(x)** y las rectas **x=a** y **x=b**, entonces se demuestra que existe **al menos** un valor **z** que pertenece a **[a, b]** , que verifica que **f(z)*(b-a)** es igual al área antes mencionada.

Error en el Método de Trapecios

Por lo tanto, el error cometido en la integración es:

$$Error = \int_a^b E(x)\cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{s\cdot(s-1)}{2}\cdot h^2 f''(\xi)\cdot dx =$$

$$(\text{por TVM}) = h^3\cdot f''(\xi_1)\int_0^1 \frac{s\cdot(s-1)}{2}\cdot ds =$$

$$= h^3\cdot f''(\xi_1)\cdot\left(\frac{s^3}{6}-\frac{s^2}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{-h^3}{12}\cdot f''(\xi_1)$$

Donde $\mathbf{x_0 \leq \xi_1 \leq x_1}$

Método de Trapecios Compuestos

Si subdividimos el intervalo **[a, b]** en sub-intervalos, equiespaciados o no, la integral aproximada, será igual a la **suma de las áreas de los trapecios** correspondientes a cada uno de los sub-intervalos.

Por ejemplo, para dos puntos cualesquiera dentro del intervalo **[a, b]** , tenemos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cdot dx \approx \frac{h}{2}\cdot[y_i + y_{i+1}]$$

Método de Trapecios Compuestos

Por lo tanto, si extendemos esta expresión para calcular **la integral aproximada** dentro del intervalo **[a, b]** y considerando **n puntos equiespaciados**, tenemos :

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\cdot[y_i + y_{i+1}] =$$

$$= \frac{h}{2}\cdot[y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n] =$$

$$= \frac{h}{2}\cdot[y_0 + 2\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + \cdots + 2\cdot y_{n-1} + y_n]$$

Error en Trapecios Compuestos

El **error local** correspondiente a **un trapecio** es :

$$\text{Error local} = \frac{-h^3}{12} \cdot f''(\xi_1)$$

Por lo tanto, podemos calcular el **error global** del método, sumando todos los **errores locales** :

$$\text{Error global} = \frac{-h^3}{12} \cdot \left[f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \cdots + f''(\xi_{n-1}) + f''(\xi_n) \right]$$

Error en Trapecios Compuestos

Los ξ_i corresponden a cada uno de los subintervalos. Si asumimos que f ''(x) es contínua en (a, b), entonces habrá algún valor ξ perteneciente al intervalo (a, b), para el cual:

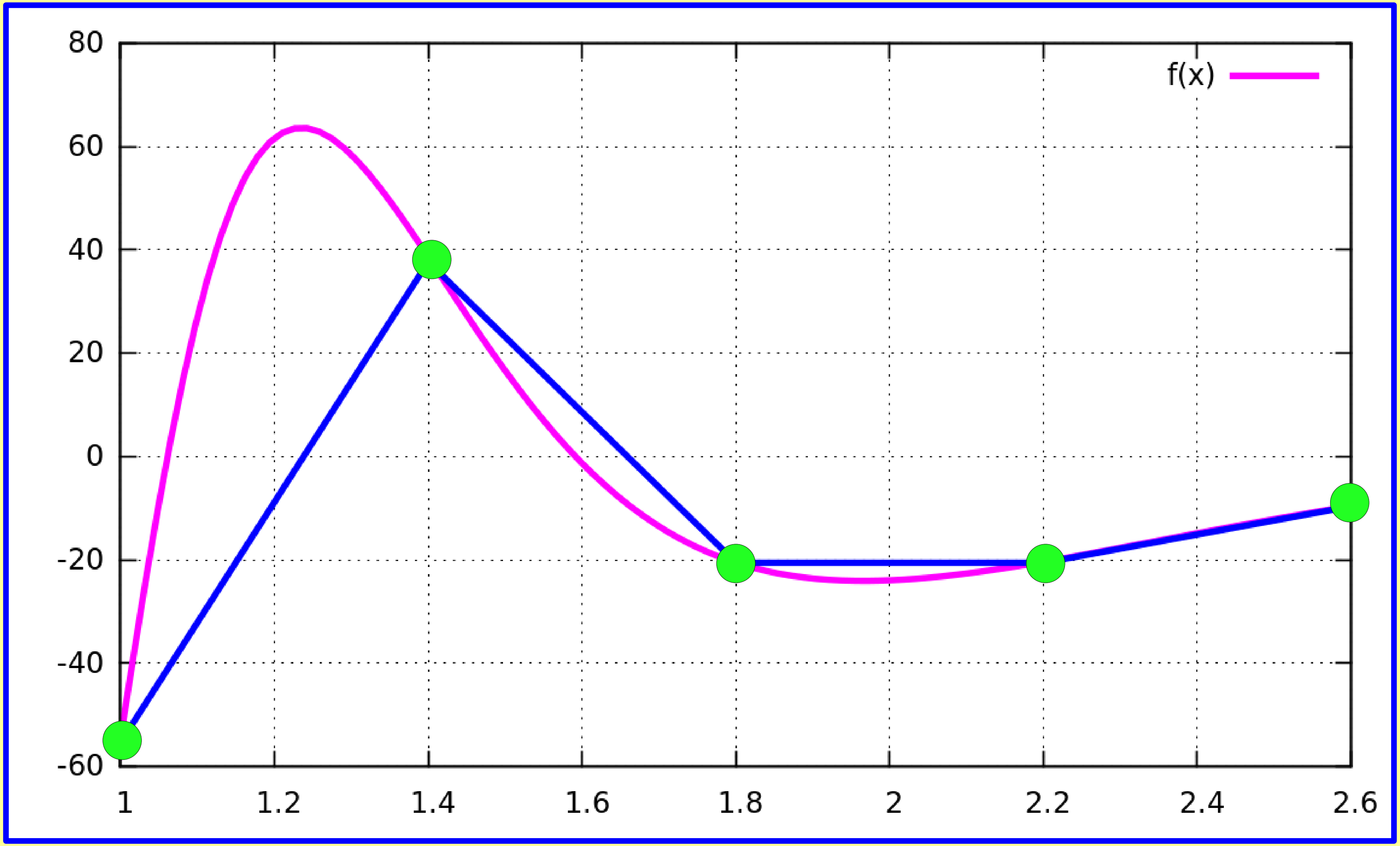
$$Error\ global = \frac{-h^3}{12}\cdot\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+\cdots+f''(\xi_{n-1})+f''(\xi_n)\right]=$$

$$= \frac{-h^3}{12}\cdot n\cdot f''(\xi) = \frac{-h^3}{12}\cdot\frac{(b-a)}{h}\cdot f''(\xi)$$

Por lo tanto, nos queda:

$$Error\ global = \frac{(a-b)}{12}\cdot h^2\cdot f''(\xi)$$

Ejemplo de Trapecios Compuestos



Método de los Trapecios Compuestos

```
FUNCTION trapecios(n, h, v)
! Función que calcula la integral numérica
! por el método de los Trapecios
INTEGER n
REAL(8) v(n)
REAL(8) trapecios, h

  trapecios = h*(v(1)+2*SUM(v(2:n-1))+v(n))/2.0

END FUNCTION
```

Método de 1/3 de Simpson

Aproximando con un polinomio de **2do. Grado,** obtenemos:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\cdot dx \approx \int_{x_0}^{x_2} \left(y_0 + s\cdot\Delta y_0 + \frac{s\cdot(s-1)}{2}\cdot\Delta^2 y_0\right)\cdot dx =$$

$$= h\cdot\int_0^2 \left(y_0 + s\cdot\Delta y_0 + \frac{s\cdot(s-1)}{2}\cdot\Delta^2 y_0\right)\cdot ds =$$

$$= \frac{h}{3}\cdot(y_0 + 4\cdot y_1 + y_2)$$

Error en 1/3 de Simpson

Si denominamos :

$$f(x) = F'(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x_2} f(x)\cdot dx = F(x_2) - F(x_0)$$

Desarrollando la integral de **f(x)** en Serie de Taylor, obtenemos:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\cdot dx = F'(x_0)\cdot(2h) + \frac{(2h)^2}{2}\cdot F''(x_0) + \frac{(2h)^3}{6}\cdot F'''(x_0) + $$
$$+ \frac{(2h)^4}{24}\cdot F^{iv}(x_0) + \frac{(2h)^5}{120}\cdot F^{v}(x_0) + \cdots$$

Error en 1/3 de Simpson

Reemplazando $F'(x_0) = f(x_0) = y_0$, finalmente nos queda :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) \cdot dx = (2\mathrm{h}) \cdot y_0 + 2\mathrm{h}^2 \cdot y'_0 + \frac{8}{6} \cdot h^3 \cdot y_0'' + $$

$$+ \frac{16}{24} \cdot h^4 \cdot y_0''' + \frac{32}{120} \cdot h^5 \cdot y_0^{iv} + \cdots$$

Error en 1/3 de Simpson

Para estimar el **error de truncamiento** del método, utilizaremos el desarrollo en **Serie de Taylor** del valor aproximado de la integral, obtenida por **1/3 de Simpson.**

$$\frac{h}{3}\cdot\left(y_0+4\cdot y_1+y_2\right) =$$

$$=\frac{h}{3}\cdot\left[y_0+4\cdot\left(y_0+h\cdot y_0'+\frac{h^2}{2!}\cdot y_0''+\frac{h^3}{3!}\cdot y_0'''+\frac{h^4}{4!}\cdot y_0^{iv}+\cdots\right)+\right.$$

$$\left.+\left(y_0+(2h)\cdot y_0'+\frac{(2h)^2}{2!}\cdot y_0''+\frac{(2h)^3}{3!}\cdot y_0'''+\frac{(2h)^4}{4!}\cdot y_0^{iv}+\cdots\right)=\right.$$

Error en 1/3 de Simpson

Realizando las simplificaciones correspondientes en la expresión anterior, tenemos:

$$= \frac{h}{3} \cdot [6 \cdot y_0 + 6 \cdot h \cdot y_0' + (\frac{4}{2} + \frac{4}{2}) \cdot h^2 \cdot y_0'' +$$

$$+ (\frac{4}{6} + \frac{8}{6}) \cdot h^3 \cdot y_0''' + (\frac{4}{24} + \frac{16}{24}) \cdot h^4 \cdot y_0^{iv} + \cdots] =$$

$$= \frac{h}{3} \cdot [6 \cdot y_0 + 6 \cdot h \cdot y_0' + 4 \cdot h^2 \cdot y_0'' + 2 \cdot h^3 \cdot y_0''' + \frac{5}{6} \cdot h^4 \cdot y_0^{iv} + \cdots]$$

Error en 1/3 de Simpson

Ahora, para obtener una expresión del **error** hacemos la diferencia entre la **integral exacta** y la **integral aproximada**.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\cdot dx - \frac{h}{3}\cdot\left(y_0 + 4\cdot y_1 + y_2\right) =$$

$$= \left(2\cdot h\cdot y_0 - \frac{6}{3}\cdot h\cdot y_0\right) + \left(2\cdot h^2\cdot y_0{}' - \frac{6}{3}\cdot h^2\cdot y_0{}'\right) +$$

$$+ \left(\frac{16}{24}\cdot h^4\cdot y_0{}''' - \frac{2}{3}\cdot h^4\cdot y_0{}'''\right) + \left(\frac{32}{120}\cdot h^5\cdot y_0^{vi} - \frac{5}{18}\cdot h^5\cdot y_0^{iv}\right) =$$

$$= \frac{-1}{90}\cdot h^5\cdot y_0^{iv} + \cdots$$

Error en 1/3 de Simpson

Este es el error de truncamiento de la serie.

$$Error\ de\ Truncamiento = \frac{-1}{90} \cdot h^5 \cdot y_0^{iv} + \cdots$$

Para estimar el **error local**, recordemos el término del error de interpolación para puntos equiespaciados. Al integrarlo, nos queda:

$$Error = \int_a^b E(x) \cdot dx = h^{n+2} \cdot \int_0^n s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdots (s-n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot ds$$

Error en 1/3 de Simpson

Uno esperaría que la integración de **1/3 de Simpson** sea exacta si **f(x)** es un polinomio de **grado menor o igual a 2**, sin embargo, **resulta exacta**, también para un polinomio de **grado 3**, ya que :

ERROR DE INTERPOLACIÓN PARA UN POLINOMIO DE GRADO 3

$$Error = h^4 \cdot \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot \int_0^2 s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot ds = 0$$

Error en 1/3 de Simpson

Por lo tanto, si calculamos el **error de interpolación** para un polinomio de **grado 4**, obtenemos :

$$Error \;=\; h^5 \cdot \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!} \cdot \int_0^2 s\cdot(s-1)\cdot(s-2)\cdot(s-3)\cdot ds \;=$$

$$=\; -h^5 \cdot \frac{f^{(iv)}(\xi)}{90}$$

Donde $\mathbf{x_0 \leq \xi \leq x_2}$

Método de 1/3 de Simpson Compuesto

Si tenemos un **número impar de puntos equiespaciados** dentro de nuestro intervalo de integración, podemos aplicar la regla de **1/3 de Simpson** en forma repetida, y si luego sumamos las áreas, obtenemos :

$$\int_a^b f(x)\cdot dx =$$

$$= \frac{h}{3}\cdot\left(y_0 + 4\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 4\cdot y_3 + \cdots + 2\cdot y_{n-2} + 4\cdot y_{n-1} + y_n\right) +$$

$$+ \text{ Error Global}$$

Error en 1/3 de Simpson Compuesto

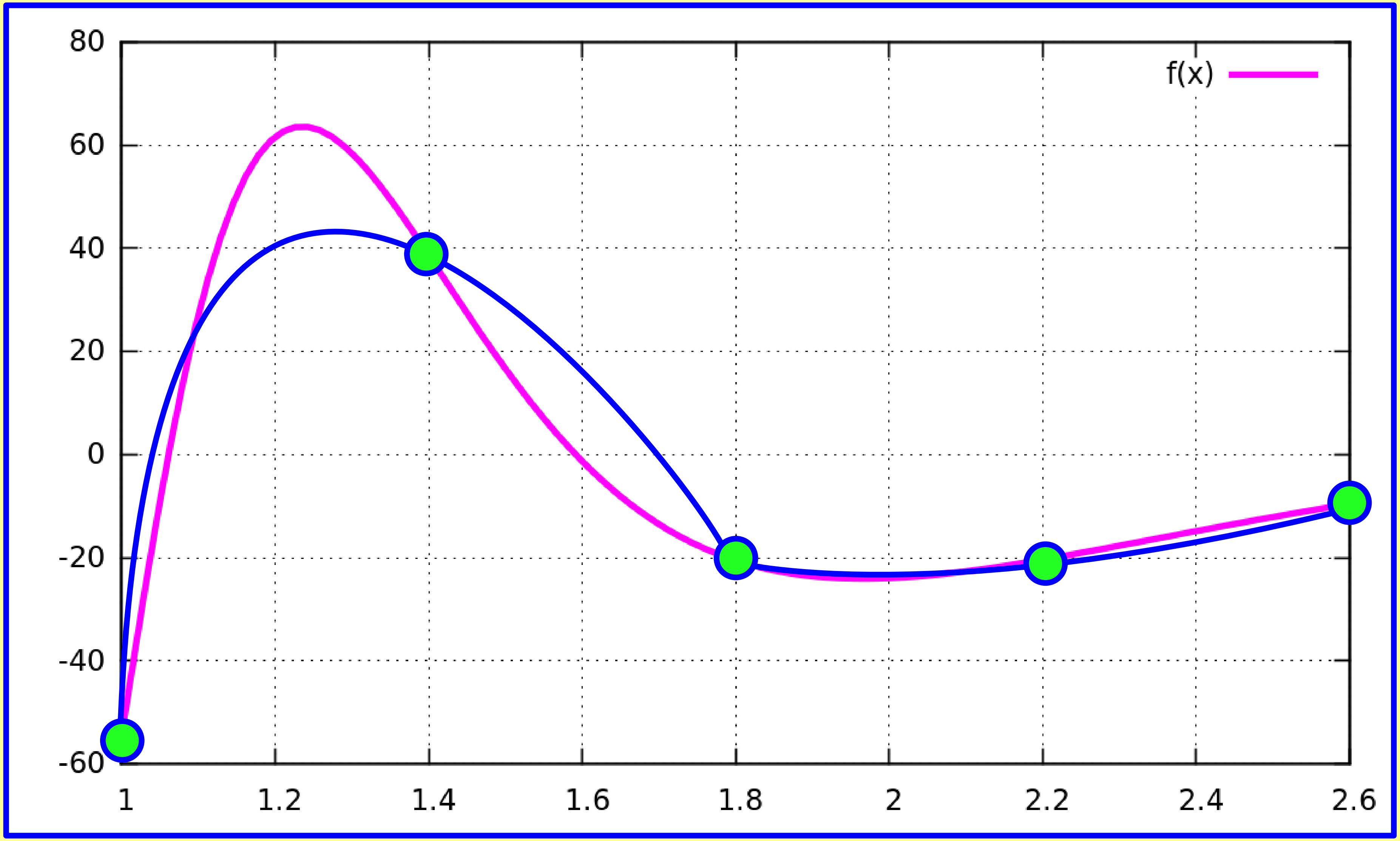
Sumando los errores locales de cada uno de los **arcos de parábola**, obtenemos una expresión para el **error global.**

$$Error\ Global = \frac{-h^5}{90}\cdot\left[f^{(iv)}(\xi_1)+f^{(iv)}(\xi_2)+\cdots+f^{(iv)}(\xi_{\frac{n}{2}})\right]=$$

$$=\frac{-h^5}{90}\cdot\frac{n}{2}\cdot f^{(iv)}(\xi)=\frac{-h^5}{90}\cdot\frac{\frac{b-a}{h}}{2}\cdot f^{(iv)}(\xi)=$$

$$=\frac{-h^5}{90}\cdot\frac{b-a}{2\cdot h}\cdot f^{(iv)}(\xi) = \frac{-(b-a)}{180}\cdot h^4\cdot f^{(iv)}(\xi)$$

Ejemplo de 1/3 de Simpson Compuesto



Método de 1/3 de Simpson Compuesto

```
FUNCTION simpson(n, h, v)
! Función que calcula la integral numérica
! por el método de 1/3 de Simpson
INTEGER n
REAL(8) v(n)
REAL(8) simpson, h

  simpson = h*(v(1)+4*SUM(v(2:n-1:2))+2*SUM(v(3:n-2:2))+v(n))/3.0

END FUNCTION
```

Método de 3/8 de Simpson

Está basado en la integral de una aproximación polinomica de **3er. Grado**:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\cdot dx \approx \int_{x_0}^{x_3} p_3(x)\cdot dx = \frac{3\cdot h}{8}\cdot\left(y_0 + 3\cdot y_1 + 3\cdot y_2 + y_3\right)$$

$$Error\ Local = \frac{-3}{80}\cdot h^5\cdot f^{(v)}(\xi)$$

Método de 3/8 de Simpson Compuesto

Sumando los errores locales de cada una de las **aproximaciones**, obtenemos una expresión para el **error global.**

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\cdot dx \approx \int_{x_0}^{x_3} p_3(x)\cdot dx = \frac{3\cdot h}{8}\cdot(y_0+3\cdot y_1+3\cdot y_2+$$

$$+2\cdot y_3+3\cdot y_4+3\cdot y_5+\cdots+2\cdot y_{n-2}+3\cdot y_{n-1}+y_n]$$

$$Error\,Global = \frac{-(b-a)}{80}\cdot h^4\cdot f^{(v)}(\xi)$$

Comparación de Errores

Si comparamos los errores globales de los diferentes métodos, tenemos :

$$Trapecios\,Compuestos = \frac{(a-b)}{12}\cdot h^{2}\cdot f''(\xi)$$

$$\frac{1}{3}Simpson\,Compuestos = \frac{-(b-a)}{180}\cdot h^{4}\cdot f^{(iv)}(\xi)$$

$$\frac{3}{8}Simpson\,Compuestos = \frac{-(b-a)}{80}\cdot h^{4}\cdot f^{(v)}(\xi)$$

Método de Romberg

Aunque el método de los trapecios es muy sencillo de aplicar, carece de la exactitud requerida habitualmente. La integración de **Romberg** es un método que utiliza inicialmente los valores obtenidos por el **método de los trapecios** y posteriormente aplica el proceso conocido como **”extrapolación de Richardson”** para obtener **correcciones** a las aproximaciones anteriores.

Sabemos que el error de ***Trapecios Compuestos*** es:

$$Error\ global = \frac{(a-b)}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi) = \frac{(a-b)^3}{12 \cdot n^2} \cdot f''(\xi)$$

Método de Romberg

Sean **n1** y **n2** dos cantidades de trapecios distintas. Y sea **I*** el verdadero valor de la integral y $\mathbf{I_n}$ el valor de la integral aproximada por **n** trapecios.

Entonces:

$$I^{*} = I_{n1} + E_{n1} = I_{n2} + E_{n2}$$

Método de Romberg

Entonces:

$$\frac{E_{n_2}}{E_{n_1}} = \frac{\dfrac{(b-a)^3}{12\cdot n_2^{\,2}}\cdot f''(\xi_2)}{\dfrac{(b-a)^3}{12\cdot n_1^{\,2}}\cdot f''(\xi_1)}$$

Donde $\boldsymbol{\xi_1}$ y $\boldsymbol{\xi_2}$ se encuentran en (a, b)

Método de Romberg

Asumiendo que **f ''(ξ$_1$) = f ''(ξ$_2$)** nos queda :

$$E_{n_2} = \left[\frac{n_1}{n_2}\right]^2 \cdot E_{n_1}$$

$$I_{n1} + E_{n1} - I_{n2} - E_{n2} = 0$$

$$I_{n1} + E_{n1} - I_{n2} - \left[\frac{n_1}{n_2}\right]^2 \cdot E_{n_1} = 0$$

Método de Romberg

$$\left(I_{n_1} - I_{n_2}\right) + E_{n_1} \cdot \left\{ 1 - \left[\frac{n_1}{n_2} \right]^2 \right\} = 0$$

Por lo tanto :

$$E_{n_1} = \frac{I_{n_2} - I_{n_1}}{1 - \left[\frac{n_1}{n_2} \right]^2}$$

Método de Romberg

$$I^{*} = I_{n_1} + \frac{I_{n_2} - I_{n_1}}{1 - \left[\frac{n_1}{n_2}\right]^2}$$

Por lo tanto, si hacemos $\mathbf{n_2 = 2*n_1}$:

$$I^{*} = \frac{4}{3} \cdot I_{n_2} - \frac{1}{3} \cdot I_{n_1}$$

Es de esperar que **I*** sea mejor que $\mathbf{I_{n1}}$ e $\mathbf{I_{n2}}$

Método de Romberg

Sistematizando este proceso denominado **Extrapolación de Richardson**, obtenemos el método de integración de **Romberg**.

Si tenemos 1 Trapecio **h = (b - a)**, por lo tanto:

$$T_{0,1} = \frac{(b-a)}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot [f(a)+f(b)]$$

Método de Romberg

Si tenemos 2 Trapecios **h = (b - a)/2**, por lo tanto:

$$T_{1,1} = \frac{(b-a)}{2}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot[f(a)+f(b)]+f(a+\frac{b-a}{2})\right\} =$$

$$= \quad \frac{1}{2}\cdot\left\{T_{0,1}+(b-a)\cdot f(a+\frac{b-a}{2})\right\}$$

Método de Romberg

Si tenemos **2^N** Trapecios **h = (b - a)/(2^N)**, por lo tanto:

$$T_{N,1} = \frac{1}{2}\cdot\left\{T_{N-1,1}+\frac{(b-a)}{2^{N-1}}\cdot\sum_{\substack{i=1\\ \Delta i=2}}^{2^N-1} f\left(a+\frac{b-a}{2^N}\cdot i\right)\right\}$$

Método de Romberg

Si tomamos dos valores consecutivos de estas aproximaciones, podemos aplicar la fórmula ya vista para encontrar una mejor aproximación.

$$T_{N,2} = \frac{4 \cdot T_{N+1,1} - T_{N,1}}{3}$$

Por ejemplo, si tomamos N=0, nos queda:

$$T_{0,2} = \frac{4 \cdot T_{1,1} - T_{0,1}}{3} = \frac{(b-a)}{6} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) + f(b) \right]$$

Método de Romberg

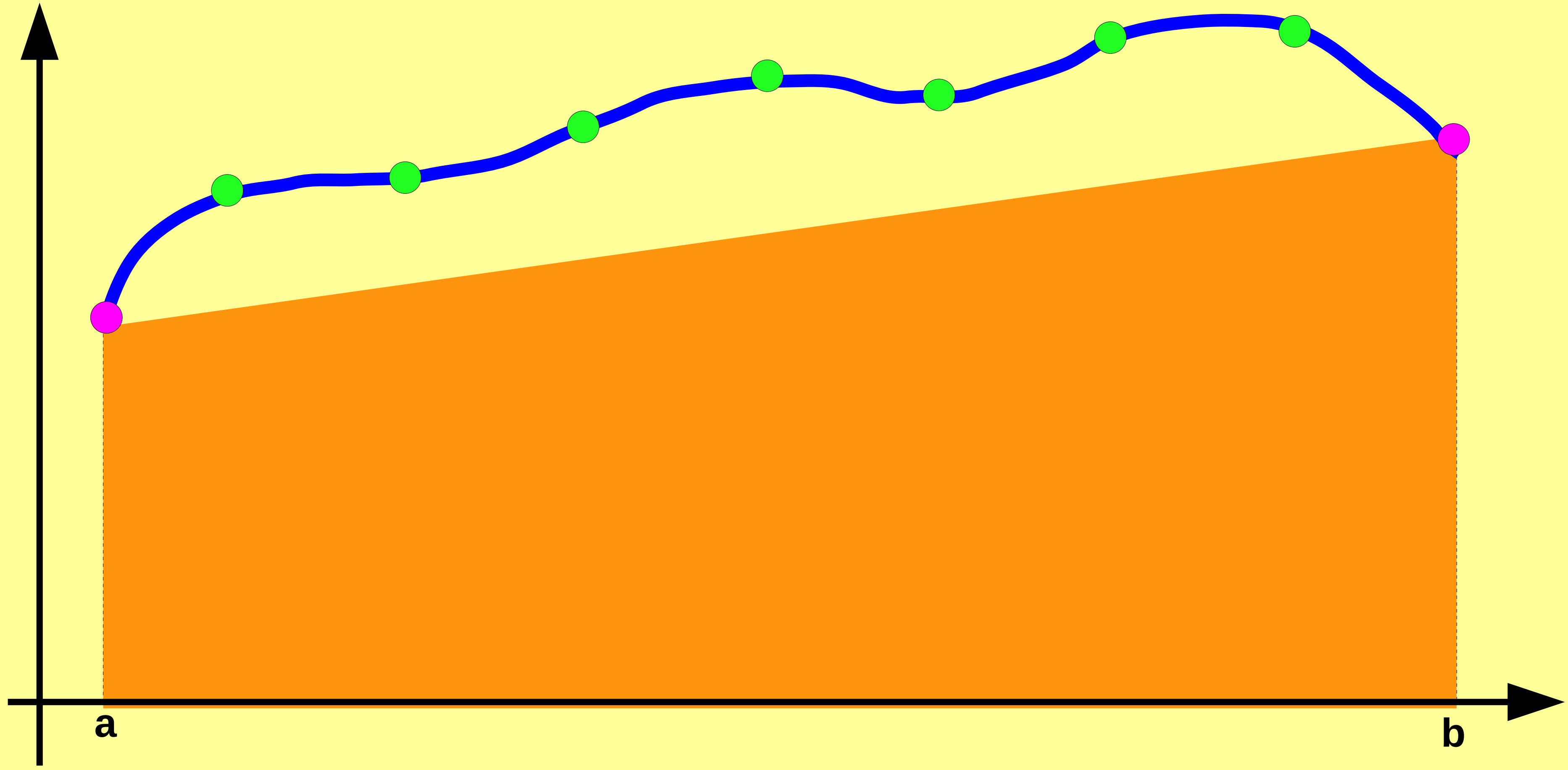
Ahora podemos generalizar el esquema visto, para **j ≥ 2**.

$$T_{N,j} = \frac{4^{j-1} \cdot T_{N+1,j-1} - T_{N,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

Donde **j** es el grado del polinomio aproximante y $\mathbf{2^N}$ es la **cantidad de Trapecios** utilizados para obtener dicha aproximación.

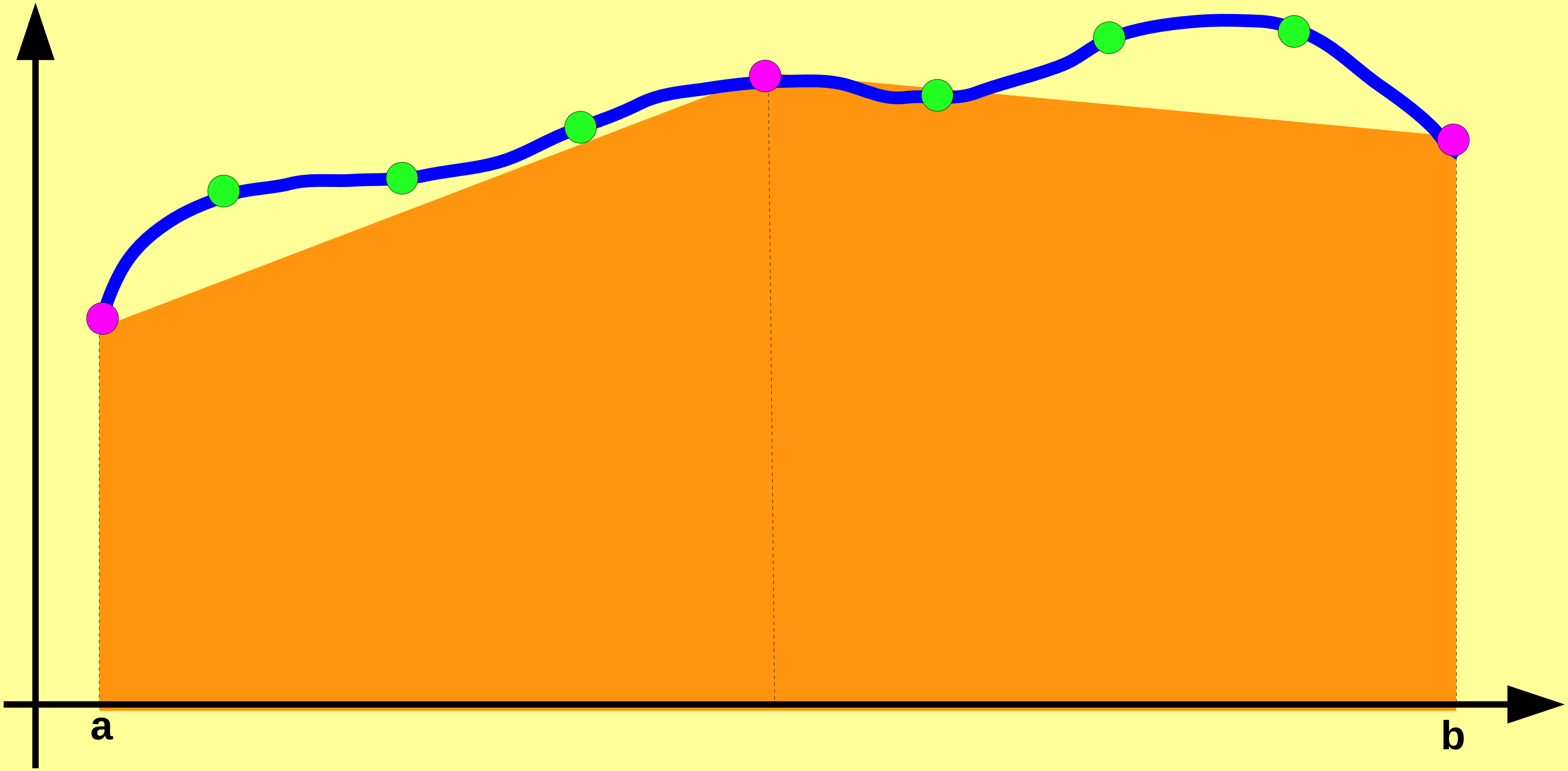
Método de Romberg paso 1

Cálculo del área de 1 trapecio, es decir, $T_{0,1}$



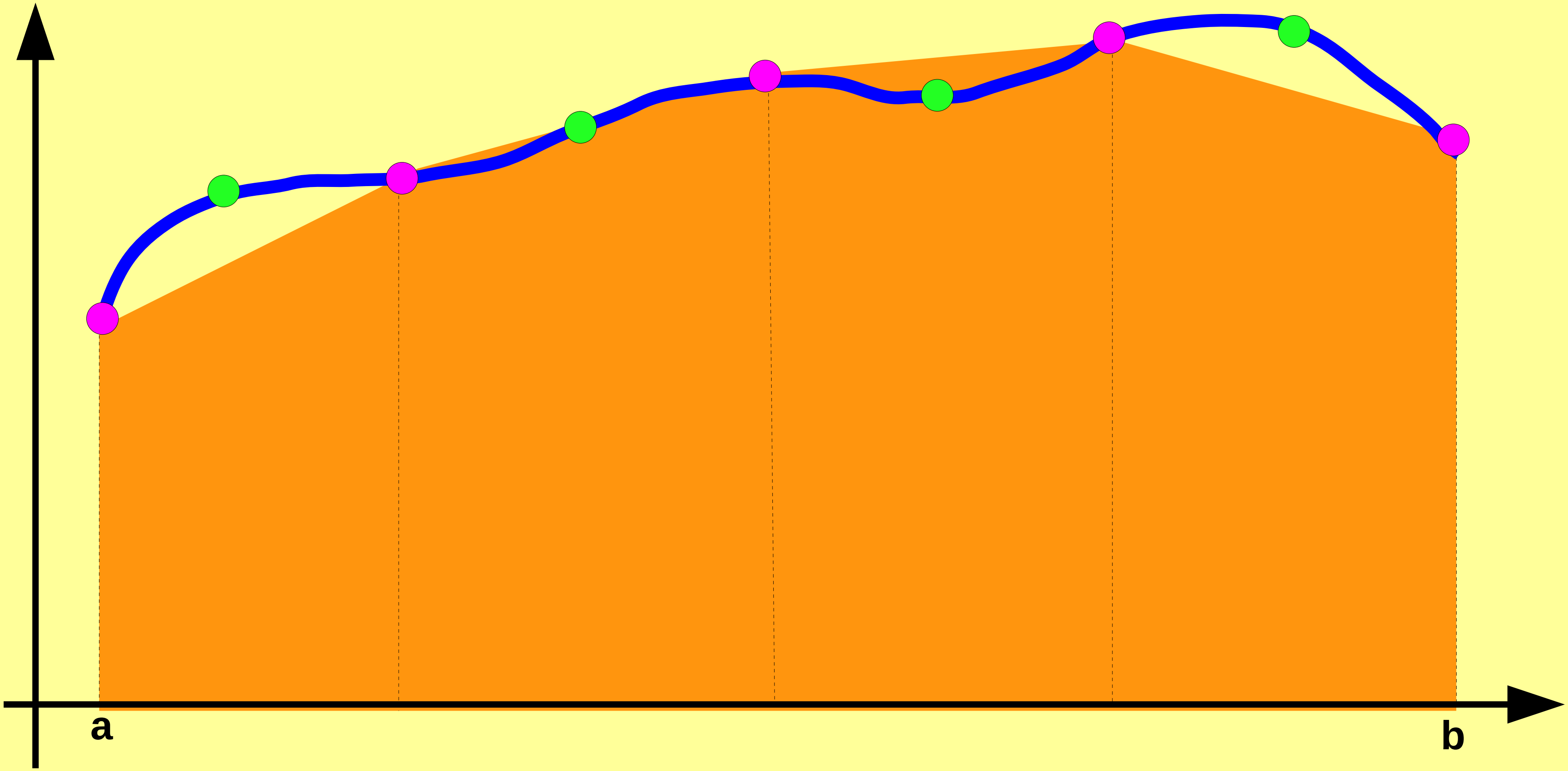
Método de Romberg paso 2

Cálculo del área de 2 trapecios, es decir, $T_{1,1}$



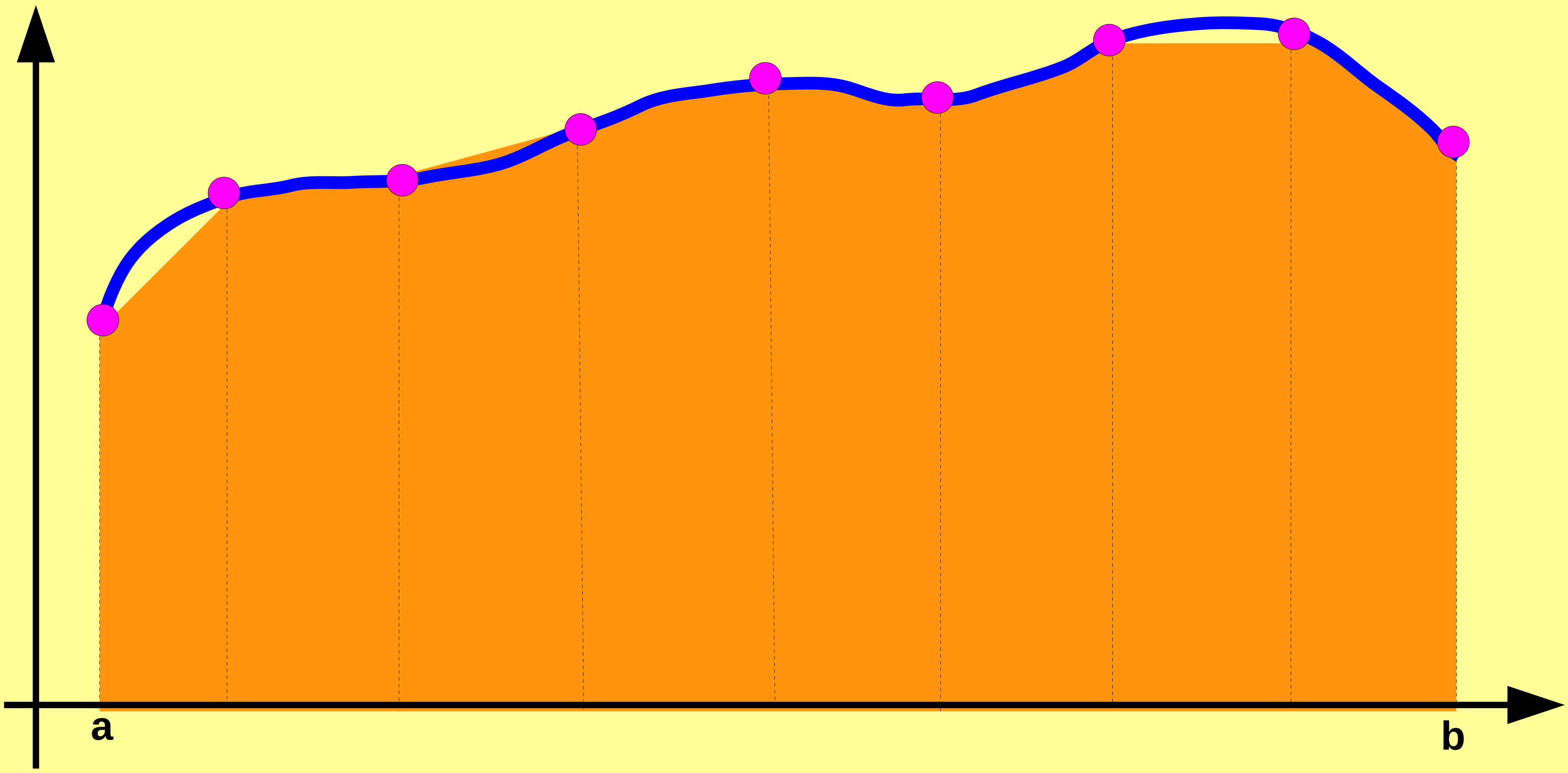
Método de Romberg paso 3

Cálculo del área de 4 trapecios, es decir, $T_{2,1}$



Método de Romberg paso 4

Cálculo del área de 8 trapecios, es decir, $T_{3,1}$



Método de Romberg

VALORES CALCULADOS POR TRAPECIOS

VALORES CALCULADOS POR ROMBERG

$T_{0,1}$			
	$T_{0,2}$		
$T_{1,1}$		$T_{0,3}$	
	$T_{1,2}$		$T_{0,4}$
$T_{2,1}$		$T_{1,3}$	
	$T_{2,2}$		
$T_{3,1}$			

VALOR FINAL DE LA INTEGRAL

Método de Romberg

Los valores de la segunda columna en adelante se calculan por medio de esta fórmula:

$T_{0,1}$			
	$T_{0,2}$		
$T_{1,1}$		$T_{0,3}$	
	$T_{1,2}$		$T_{0,4}$
$T_{2,1}$		$T_{1,3}$	
	$T_{2,2}$		
$T_{3,1}$			

Fórmula de cálculo

$$T_{N,j} = \frac{4^{j-1} \cdot T_{N+1,j-1} - T_{N,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

VALOR FINAL DE LA INTEGRAL

Ejemplo de Romberg

-56.5195								
	-50.8040							
-52.2328		-11.9705						
	-14.3976		-0.0828					
-23.8564		-0.2685		-1.33069				
	-1.1516		-1.3258		-1.42647			
-6.8278		-1.3093		-1.42638		-1.42604		
	-1.2994		-1.42598		-1.42604		-1.42603	
-2.6815		-1.42416		-1.42604		-1.42603		-1.42603
	-1.4164		-1.42604		-1.42603		-1.42603	
-1.7327		-1.42600		-1.42603		-1.42603		
	-1.4254		-1.42603		-1.42603			
-1.5022		-1.42602		-1.42603				
	-1.4226		-1.42603					
-1.4450		-1.42602						
	-1.4260							
-1.4308								

Ejemplo de Romberg (II)

En este caso vemos que aún tomando muchos menos puntos, **64** en lugar de los **256** de la tabla anterior, obtenemos casi el mismo resultado final.

-56.5195						
	-50.8040					
-52.2328		-11.9705				
	-14.3976		-0.0828			
-23.8564		-0.2685		-1.33069		
	-1.1516		-1.3258		-1.42647	
-6.8278		-1.3093		-1.42638		-1.42604
	-1.2994		-1.42598		-1.42604	
-2.6815		-1.42416		-1.42604		
	-1.4164		-1.42604			
-1.7327		-1.42600				
	-1.4254					
-1.5022						

Método de Romberg

```
FUNCTION romberg(n, h, v)
! Función que calcula la integral numérica
! por el método de Romberg
INTEGER n, i, j, nt, nv, step
REAL(8) h, romberg, v(n)
REAL(8), ALLOCATABLE :: t(:)

  step = n-1
  nt = LOG(REAL(step))/LOG(2.)
  ALLOCATE(t(0:nt))

  DO i=0, nt
    t(i) = trapecios(INT(2.**i)+1, step*h, v(::step))
    step = step/2
  ENDDO
```

Sique en la próxima página

Método de Romberg

```
    nv = nt-1

    DO j=2, nt+1
      DO i=0, nv
        t(i) = (4**(j-1)*t(i+1) - t(i))/(4**(j-1)-1)
      ENDDO
      nv = nv - 1
    ENDDO

    romberg = t(0)

END FUNCTION
```

Comparación entre métodos

- **TRAPECIOS**
  - Es sencillo de aplicar.
  - Puede utilizarse con cualquier cantidad de puntos.
  - No integra con demasiada exactitud, a menos que la distancia entre puntos sea muy pequeña.
- **1/3 de SIMPSON**
  - Es sencillo de aplicar.
  - Solo puede utilizarse con una cantidad impar de puntos.
  - El error de integración es muy pequeño.

Comparación entre métodos

- **3/8 de SIMPSON**
  - Su fórmula es apenas un poco más complicada que la de 1/3 de Simpson.
  - Solo puede utilizarse con una cantidad de puntos igual a **3*n+1**, siendo **n** el número de arcos.
  - Tiene un error ligeramente mayor que 1/3 de Simpson.
- **ROMBERG**
  - Se inicia con valores obtenidos por Trapecios.
  - Solo puede utilizarse con una cantidad de puntos igual a $\mathbf{2^N+1}$, siendo $\mathbf{2^N}$ el número máximo de trapecios.
  - El error de integración es muy pequeño.

PREGUNTAS ...