

Análisis Numérico para Ingeniería

Clase Nro. 6

*“Dímelo y lo olvidaré,
enséñame y lo recordaré,
involúcrame y lo aprenderé.”*

Benjamin Franklin

Temas a tratar en esta clase :

- Normas Vectoriales y Matriciales
- Análisis de Sensibilidad de Sistemas Lineales
- Número de Condición
- Estimación del Error Relativo de la Solución
- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel
- Análisis de Convergencia de Jacobi

Qué son las Normas Vectoriales y Matriciales ?

- El concepto de norma de una matriz o vector es una generalización del concepto de valor absoluto o de módulo de un número complejo.
- Las normas nos permiten calcular una magnitud asociada a vectores o matrices.
- Los vectores y matrices, a diferencia de los números escalares, están constituidos por varios elementos. Por lo tanto, como no es posible comparar directamente dos vectores o dos matrices, lo que se puede hacer es comparar sus normas.

Propiedades de las Normas Vectoriales

Para que una norma vectorial sea considerada como tal, debe cumplir lo siguiente:

- 1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall \quad x \in R^n$
- 2) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ es el vector nulo}$
- 3) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall \quad \alpha \in R \quad y \quad x \in R^n$
- 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall \quad \{x, y\} \in R^n$

Algunas Normas Vectoriales

Norma Infinito ó Norma M

$$\|x\|_M = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Norma Euclidiana ó Norma E

$$\|x\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Propiedades de las Normas Matriciales

Para que una norma matricial sea considerada como tal, debe cumplir lo siguiente:

- 1) $\|A\| \geq 0$ $\forall A \in R^{n \times n}$
- 2) $\|A\| = 0$ $\Leftrightarrow A$ es la matriz nula
- 3) $\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ $\forall \alpha \in R \text{ y } A \in R^{n \times n}$
- 4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ $\forall \{A, B\} \in R^{n \times n}$
- 5) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ $\forall \{A, B\} \in R^{n \times n}$

Henri León Lebesgue

Nació el 28 de Junio de 1875 en Beauvais, Francia.

Definió la integral de Lebesgue, que generaliza la noción de la integral de Riemann extendiendo el concepto de área bajo una curva para incluir funciones discontinuas.

En 1905 presentó una discusión sobre las condiciones de Lipschitz que Jordan habían utilizado para asegurar que $f(x)$ es la suma de su serie de Fourier.

Falleció el 26 de Julio de 1941 en Paris, Francia



Algunas Normas Matriciales

Norma Infinito ó Norma M

$$\|A\|_M = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Norma L (*por Henri Lebesgue*)

$$\|A\|_L = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

Norma de Frobenius

Posee una forma muy similar a la norma euclidiana para vectores

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2}$$

Sensibilidad

Se considera que un Sistema de Ecuaciones Lineales es sensible, si al modificar alguno de los coeficientes de la matriz ó de los términos independientes, la solución varía, pero en una proporción mayor.

Consideremos el siguiente Sistema:

$$\begin{bmatrix} 3.02 & -1.05 & 2.53 \\ 4.33 & 0.56 & -1.78 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.61 \\ 7.23 \\ -3.38 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sensibilidad (II)

Si ahora modificamos levemente uno de los coeficientes de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 3.00 & -1.05 & 2.53 \\ 4.33 & 0.56 & -1.78 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.61 \\ 7.23 \\ -3.38 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$x = \begin{bmatrix} 1.12767729 \\ 6.52208910 \\ 0.73326549 \end{bmatrix}$$

Sensibilidad (III)

La perturbación introducida en el sistema es:

$$\left\| \begin{bmatrix} 3.02 & -1.05 & 2.53 \\ 4.33 & 0.56 & -1.78 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.00 & -1.05 & 2.53 \\ 4.33 & 0.56 & -1.78 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{bmatrix} \right\|_M = 0.02$$

La variación de la solución es:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1.12767729 \\ 6.52208910 \\ 0.73326549 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_M = 4.52208910$$

Sensibilidad (IV)

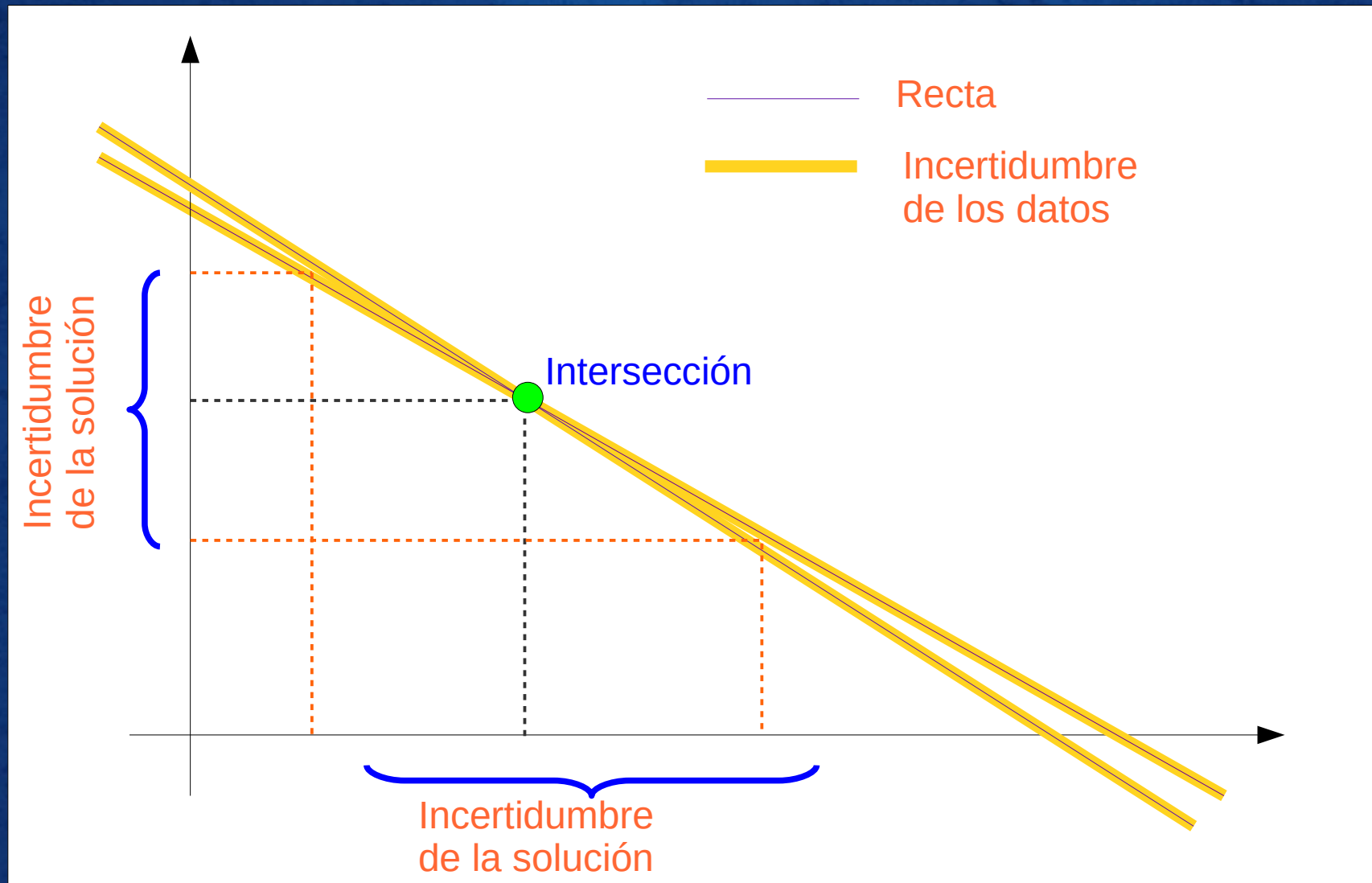
Una modificación de menos del 0,3 %, en la matriz A

$$\frac{\|A - A^*\|_M}{\|A\|_M} = \frac{0.02}{6.67} = 0.0029985 = 0.29985\%$$

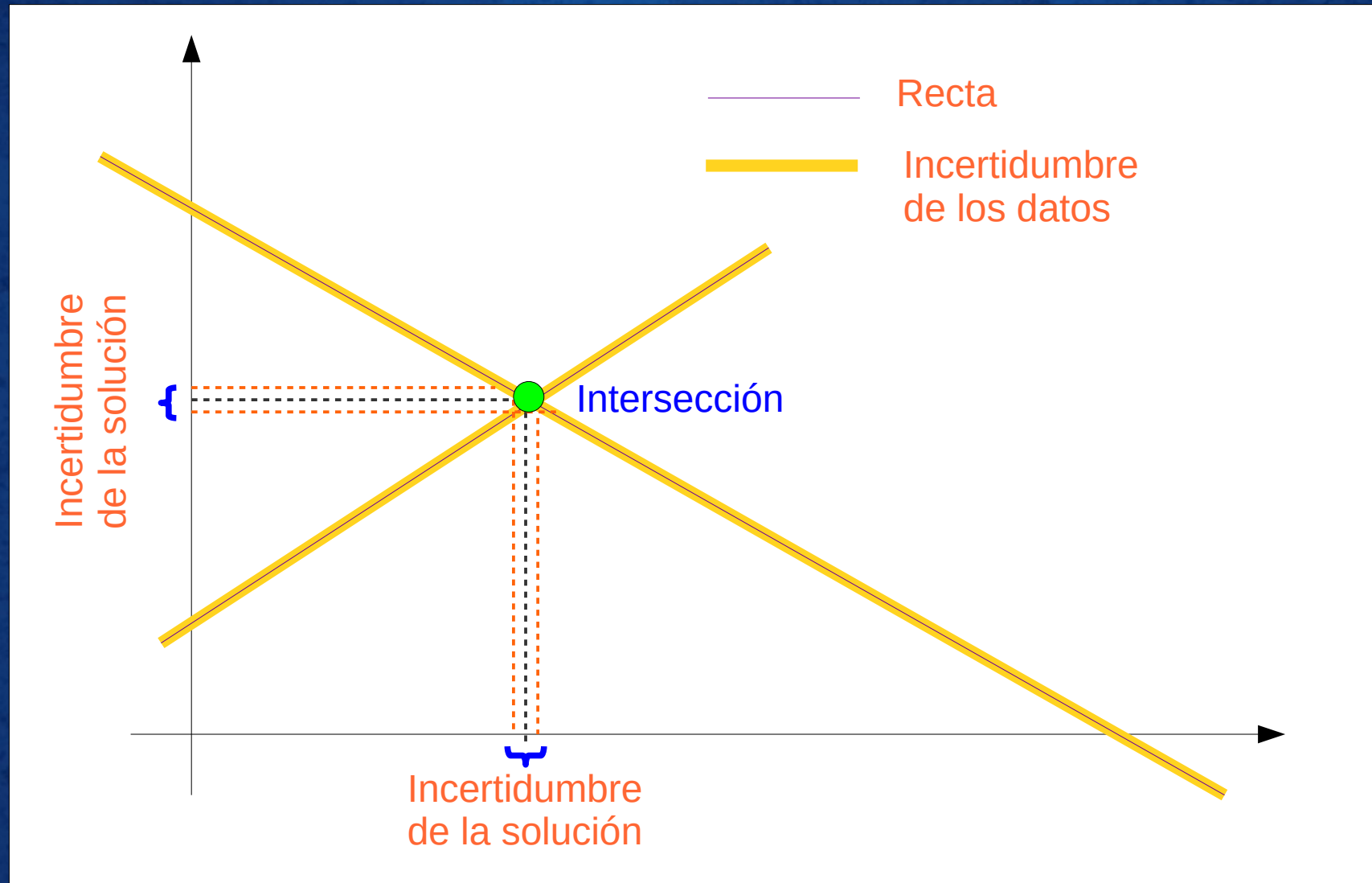
Produjo una variación del 226 %, en la solución.

$$\frac{\|X - X^*\|_M}{\|X\|_M} = \frac{4.52208910}{2} = 2.26104455 = 226.104455\%$$

Ejemplo gráfico de sensibilidad (I)



Ejemplo gráfico de sensibilidad (II)



Número de Condición

Cuando un sistema es **muy sensible**, pequeñas perturbaciones en la **matriz A**, o en el vector de términos independientes, provocan **grandes cambios** en la solución. Este fenómeno está a menudo asociado con un elevado **número de condición** de la matriz A.

Número de Condición de una Matriz

$$Cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Y se cumple que:

$$1 = \|I\| \cdot \|I^{-1}\| \leq Cond(A)$$

Análisis de Sensibilidad

Analizaremos la **sensibilidad** de un sistema en el cuál, los coeficientes de **A** y de **b** están **levemente perturbados**.

$$(A + \Delta A) \cdot (X + \Delta X) = (b + \Delta b)$$

Si las perturbaciones

$$\|\Delta A\|$$

y

$$\|\Delta b\|$$

son pequeñas

Se espera que

$$\|\Delta X\|$$

también lo sea.

Caso I - Perturbación solo en b

$$A \cdot (X + \Delta X) = (b + \Delta b)$$

Distribuyendo el producto, obtenemos:

$$A \cdot X + A \cdot \Delta X = b + \Delta b \Rightarrow \Delta X = A^{-1} \cdot \Delta b$$

Aplicando propiedades de las normas, tenemos:

$$\begin{aligned} \|\Delta X\| &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \\ \|b\| &\leq \|A\| \cdot \|X\| \end{aligned}$$

Y multiplicando miembro a miembro, obtenemos:

$$\|\Delta X\| \cdot \|b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \|X\|$$

Caso I - Perturbación solo en b

Reemplazamos por la definición de $\text{Cond}(A)$:

$$\|\Delta X\| \cdot \|b\| \leq \text{Cond}(A) \cdot \|\Delta b\| \cdot \|X\|$$

Y finalmente reordenamos, para obtener:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \text{Cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Caso II - Perturbación solo en A

Si la perturbación sólo se produce en los elementos de la matriz A:

$$(A + \Delta A) \cdot (X + \Delta X) = b$$

Mediante un razonamiento similar al anterior, obtenemos:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \text{Cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Caso III - Perturbación en A y b.

Si la perturbación se produce tanto en los elementos de la matriz A, como en los elementos del vector b :

$$(A + \Delta A) \cdot (X + \Delta X) = (b + \Delta b)$$

La **cota de error relativo** queda dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\text{Cond}(A)}{1 - \text{Cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left[\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right]$$

Sensibilidad de Sistemas

Cota de Error Relativo de la Solución

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\text{Cond}(A)}{1 - \text{Cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left[\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right]$$

Tener en cuenta que para que la expresión anterior sea válida debe cumplirse que :

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

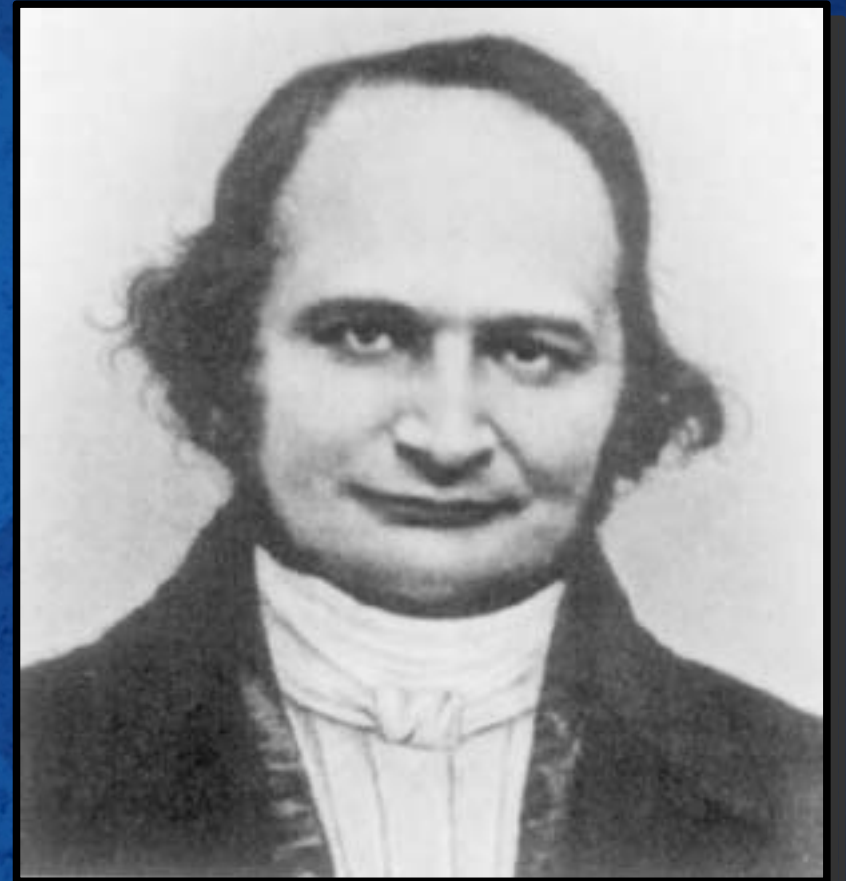
Carl Gustav Jakob Jacobi

Nació el 10 de diciembre de 1804 en Postdam, Alemania.

Contribuyó en diversos campos de la matemática, principalmente en el área de las funciones elípticas, álgebra, teoría de números y ecuaciones diferenciales.

Fue un destacadísimo pedagogo, considerándosele el profesor más estimulante de su tiempo.

Falleció el 18 de febrero de 1851 en Berlin, Alemania



Métodos Iterativos

Un método iterativo es un método que va calculando progresivamente aproximaciones a la solución de un problema.

Cada aplicación del método, se denomina **iteración** y se espera que la solución obtenida sea más aproximada que la de la iteración anterior.

Este proceso se repite hasta que se satisfaga cierta condición con respecto a la exactitud del resultado.

Métodos Iterativos

(continuación)

A diferencia de los métodos directos, los métodos iterativos, no finalizan luego de una secuencia finita de pasos, sino que se puede interrumpir el proceso, una vez alcanzada la exactitud deseada en la solución.

Los métodos iterativos se utilizan cuando no se conoce un método para obtener la solución en forma exacta, o su obtención requiere de mucho esfuerzo de cálculo.

También se utilizan cuando una respuesta aproximada es suficiente, y cuando el número de iteraciones es relativamente reducido.

Método Iterativo de Jacobi

Partiendo del
Sistema original

$$A \cdot x = b$$

Sustituimos A por:

$$A = C + D \Rightarrow (C + D) \cdot x = b$$

Donde **D** es una
matriz que contiene
sólo los elementos
de la diagonal de **A**

$$C \cdot x + D \cdot x = b$$

$$D^{-1} \cdot C \cdot x + D^{-1} \cdot D \cdot x = D^{-1} \cdot b$$

Método Iterativo de Jacobi (II)

$$D^{-1} \cdot C \cdot x + D^{-1} \cdot D \cdot x = D^{-1} \cdot b$$

Sustituyendo $D \cdot D^{-1}$, por la matriz identidad, nos queda:

$$D^{-1} \cdot C \cdot x + I \cdot x = D^{-1} \cdot b$$

Y finalmente, reordenando

$$x = -D^{-1} \cdot C \cdot x + D^{-1} \cdot b$$

Método Iterativo de Jacobi (III)

$$x = -D^{-1} \cdot C \cdot x + D^{-1} \cdot b$$

Renombrando a los productos obtenidos

$$B = -D^{-1} \cdot C \quad y \quad Z = D^{-1} \cdot b$$

Nos queda:

$$x = B \cdot x + Z$$

Método Iterativo de Jacobi (IV)

Partiendo de la siguiente expresión:

$$x = Z + B \cdot x$$

Y aplicando un esquema iterativo, de la forma:

$$x^{(k+1)} = Z + B \cdot x^{(k)}$$

Podremos obtener la solución del sistema, siempre y cuando dicho esquema resulte **convergente**.

Método Iterativo de Jacobi (V)

El esquema iterativo que hemos desarrollado:

$$x^{(k+1)} = Z + B \cdot x^{(k)}$$

Es simplemente:

$$x^{(k+1)} = D^{-1} \cdot b - (D^{-1} \cdot C) \cdot x^{(k)}$$

Es decir:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k)}$$

Método Iterativo de Jacobi (V)

El esquema iterativo que hemos desarrollado:

$$x^{(k+1)} = Z + B \cdot x^{(k)}$$

Es simplemente:

$$x^{(k+1)} = D^{-1} \cdot b - (D^{-1} \cdot C) \cdot x^{(k)}$$

Es decir:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k)}$$

Método Iterativo de Jacobi

Por lo tanto, el esquema iterativo de Jacobi, equivale a:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{1,1}} - \left(\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}\right)x_2^{(k)} - \left(\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}\right)x_3^{(k)} - \dots - \left(\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}\right)x_n^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{2,2}} - \left(\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}}\right) x_1^{(k)} - \left(\frac{a_{2,3}}{a_{2,2}}\right) x_3^{(k)} - \dots - \left(\frac{a_{2,n}}{a_{2,2}}\right) x_n^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3}{a_{3,3}} - \left(\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}\right) x_1^{(k)} - \left(\frac{a_{3,2}}{a_{3,3}}\right) x_2^{(k)} - \dots - \left(\frac{a_{3,n}}{a_{3,3}}\right) x_n^{(k)}$$

[illegible]

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{n,n}} - \left(\frac{a_{n,1}}{a_{n,n}}\right) x_1^{(k)} - \left(\frac{a_{n,2}}{a_{n,n}}\right) x_2^{(k)} - \dots - \left(\frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}}\right) x_{n-1}^{(k)}$$

Método Iterativo de Jacobi

Y sacando factor común:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{1,1}} \cdot [b_1 - a_{1,2} x_2^{(k)} - a_{1,3} x_3^{(k)} - \dots - a_{1,n} x_n^{(k)}]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{2,2}} \cdot [b_2 - a_{2,1} x_1^{(k)} - a_{2,3} x_3^{(k)} - \dots - a_{2,n} x_n^{(k)}]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{3,3}} \cdot [b_3 - a_{3,1} x_1^{(k)} - a_{3,2} x_2^{(k)} - \dots - a_{3,n} x_n^{(k)}]$$

....

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{n,n}} \cdot [b_n - a_{n,1} x_1^{(k)} - a_{n,2} x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1} x_{n-1}^{(k)}]$$

Algoritmo de Jacobi

```
SUBROUTINE jacobi(a, b, x, tol, max_iter)
```

! Subrutina de Jacobi

```
REAL(8), INTENT(IN), DIMENSION(:, :) :: a
```

```
REAL(8), INTENT(IN), DIMENSION(:) :: b
```

```
REAL(8), INTENT(INOUT), DIMENSION(:) :: x
```

```
REAL(8), INTENT(INOUT) :: tol
```

```
INTEGER, INTENT(INOUT) :: max_iter
```

```
REAL(8) error
```

```
INTEGER iter, n, i, j
```

```
REAL(8), ALLOCATABLE :: x_ant(:)
```


```
n = SIZE(a, DIM=1)
```

```
ALLOCATE(x_ant(n))
```

```
iter = 0
```

```
error = tol
```

Sigue en la
próxima página



Algoritmo de Jacobi

```
DO WHILE ((iter < max_iter) .AND. (tol <= error))
  x_ant = x
  DO i=1, n
    x(i) = b(i)
    DO j=1, i-1
      x(i) = x(i) - a(i,j) * x_ant(j)
    ENDDO
    DO j=i+1, n
      x(i) = x(i) - a(i,j) * x_ant(j)
    ENDDO
    x(i) = x(i) / a(i,i)
  ENDDO
  iter = iter + 1

  ! Calcula el error como la norma de la diferencia
  ! de dos iterados sucesivos
  error = norma_m_v(x_ant - x)
ENDDO
max_iter = iter
END SUBROUTINE jacobi
```

Philipp Ludwig von Seidel

Nació el 23 de octubre de 1821 en Zweibrücken, Alemania.

Astrónomo y matemático alemán, descompuso la aberración monocromática de primer orden en cinco aberraciones constituyentes, las cuales son comúnmente llamadas "Las cinco aberraciones de Seidel".

Falleció el 13 de agosto de 1896 en Múnich, Alemania.



Método Iterativo de Gauss-Seidel

El método iterativo de Gauss-Seidel, es una mejora del método de Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right]$$

Podemos re-escribir el esquema anterior de la siguiente manera:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right]$$

Método Iterativo de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right]$$

Como al calcular la incógnita i (para $i=2, 3, \dots, n$) en la iteración $(k+1)$, ya conocemos los valores de las incógnitas $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ correspondientes a dicha iteración, podemos utilizarlas en el cálculo, en lugar de los valores de la iteración anterior (k) .

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right]$$

Implementación de Gauss-Seidel

```
SUBROUTINE gauss_seidel(a, b, x, tol, max_iter)
```

! Subrutina de Gauss Seidel

```
REAL(8), INTENT(IN), DIMENSION(:, :) :: a
```

```
REAL(8), INTENT(IN), DIMENSION(:) :: b
```

```
REAL(8), INTENT(INOUT), DIMENSION(:) :: x
```

```
REAL(8), INTENT(INOUT) :: tol
```

```
INTEGER, INTENT(INOUT) :: max_iter
```

```
REAL(8) error
```

```
INTEGER iter, n, i, j
```

```
iter = 0
```

```
error = tol
```

Sigue en la
próxima página

Implementación de Gauss-Seidel

```
DO WHILE ((iter < max_iter) .AND. (tol <= error))
  DO i=1, n
    x(i) = b(i)
    DO j=1, i-1
      x(i) = x(i) - a(i,j) * x(j)
    ENDDO
    DO j=i+1, n
      x(i) = x(i) - a(i,j) * x(j)
    ENDDO
    x(i) = x(i) / a(i,i)
  ENDDO

  iter = iter + 1

  ! Calcula el error como la norma del residuo
  error = norma_m_v(MATMUL(a,x) - b)
ENDDO

max_iter = iter
END SUBROUTINE gauss_seidel
```


Detención del proceso iterativo

Existen diferentes formas de medir el acercamiento a la solución:

Medida 1:

$$\frac{\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|}{\|X^{(k)}\|} < \varepsilon$$

Medida 2:

$$\|r^{(k)}\| = \|A \cdot X^{(k)} - b\| < \varepsilon$$

Convergencia en Jacobi

Una matriz se considera **estrictamente diagonalmente dominante**, si se cumple que:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \text{para } i=1,2,\dots,n$$

sea $\bar{X} = [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n]$ la solución del sistema $A \cdot x = b$

Convergencia en Jacobi

$$\bar{x}_i = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot \bar{x}_j \right] \quad \text{para } i=1,2,\dots,n$$

La solución aproximada en la iteración **k**, es :

$$X^{(k)} = \left[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right]$$

Por lo tanto, el error de la componente **i**, en la iteración **k**, es :

$$\epsilon_i^{(k)} = \bar{x}_i - x_i^{(k)} \quad \text{para } i=1,2,\dots,n$$

Convergencia en Jacobi

Dado el esquema iterativo de Jacobi:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k-1)} \right]$$

Escribimos el error de la componente i, en la iteración k, es:

$$\epsilon_i^{(k)} = \bar{x}_i - x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot \bar{x}_j \right] - \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k-1)} \right]$$

Convergencia en Jacobi

Tomando al denominador como factor común, nos queda:

$$\epsilon_i^{(k)} = \bar{x}_i - x_i^{(k)} = \frac{-1}{a_{ii}} \cdot \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot \bar{x}_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k-1)} \right]$$

Y reordenando los elementos de la sumatoria, obtenemos:

$$\epsilon_i^{(k)} = \bar{x}_i - x_i^{(k)} = \frac{-1}{a_{ii}} \cdot \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot (\bar{x}_j - x_j^{(k-1)}) \right] = \frac{-1}{a_{ii}} \cdot \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot \epsilon_j^{(k-1)} \right]$$

Convergencia en Jacobi

Si llamamos $\epsilon_{\text{máx}}$ al máximo error producido en sus distintas componentes, tenemos:

$$|\epsilon_i^{(k)}| = \frac{1}{|a_{ii}|} \cdot \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot \epsilon_j^{(k-1)} \right| \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \cdot |\epsilon_{\text{máx}}^{(k-1)}| \leq \delta \cdot |\epsilon_{\text{máx}}^{(k-1)}|$$

Y si denominamos delta a la componente de mayor valor absoluto, tenemos:

$$\delta = \text{máx} \left\{ \frac{\sum_{j=2}^n |a_{1j}|}{|a_{11}|}, \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n |a_{2j}|}{|a_{22}|}, \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^n |a_{3j}|}{|a_{33}|}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^{n-1} |a_{nj}|}{|a_{nn}|} \right\}$$

Convergencia de Jacobi

Vemos entonces que para que el método resulte **convergente**, el error deberá ir **decreciendo**, conforme avancen las **iteraciones**. Y para que ello suceda deberá cumplirse que $\delta < 1$.

Y para que $\delta < 1$ deberá cumplirse que:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \text{para } i=1,2,\dots,n$$

Es decir, la matriz debería ser ***estrictamente diagonalmente dominante***.

Ejemplo de Aplicación

$$A = \begin{bmatrix} -8.26 & 1.26 & 5.30 & 1.02 & 0.04 \\ 0.96 & -12.03 & -3.6 & 2.54 & 0.60 \\ 1.28 & 2.90 & -12.81 & 2.49 & -1.03 \\ 3.60 & 1.26 & -1.62 & 8.67 & -1.10 \\ 2.04 & 1.17 & -2.31 & 0.30 & -9.67 \end{bmatrix}$$

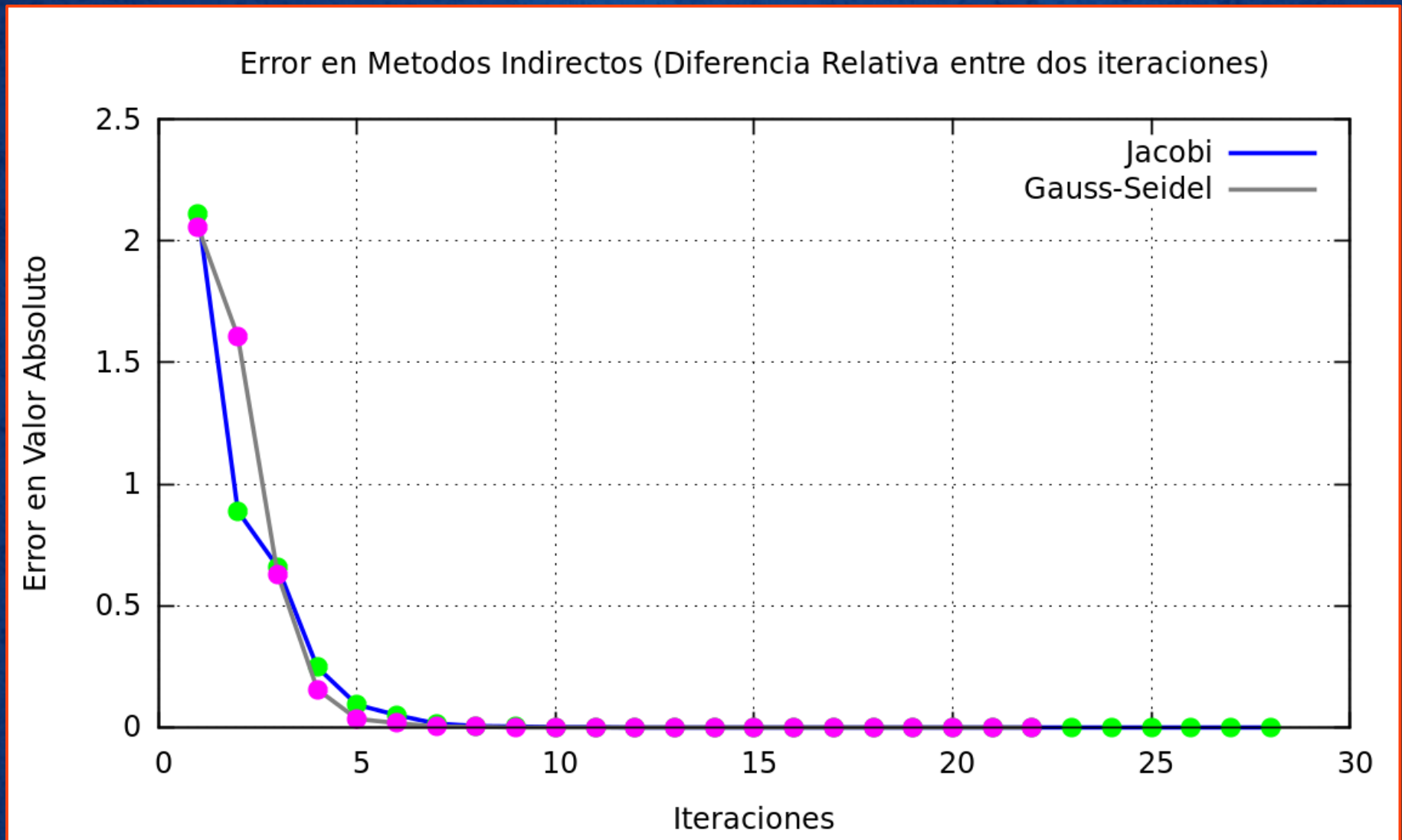
Valores Iniciales

$$b = \begin{bmatrix} 0.02 \\ -3.21 \\ 0.24 \\ 1.68 \\ -5.59 \end{bmatrix}$$

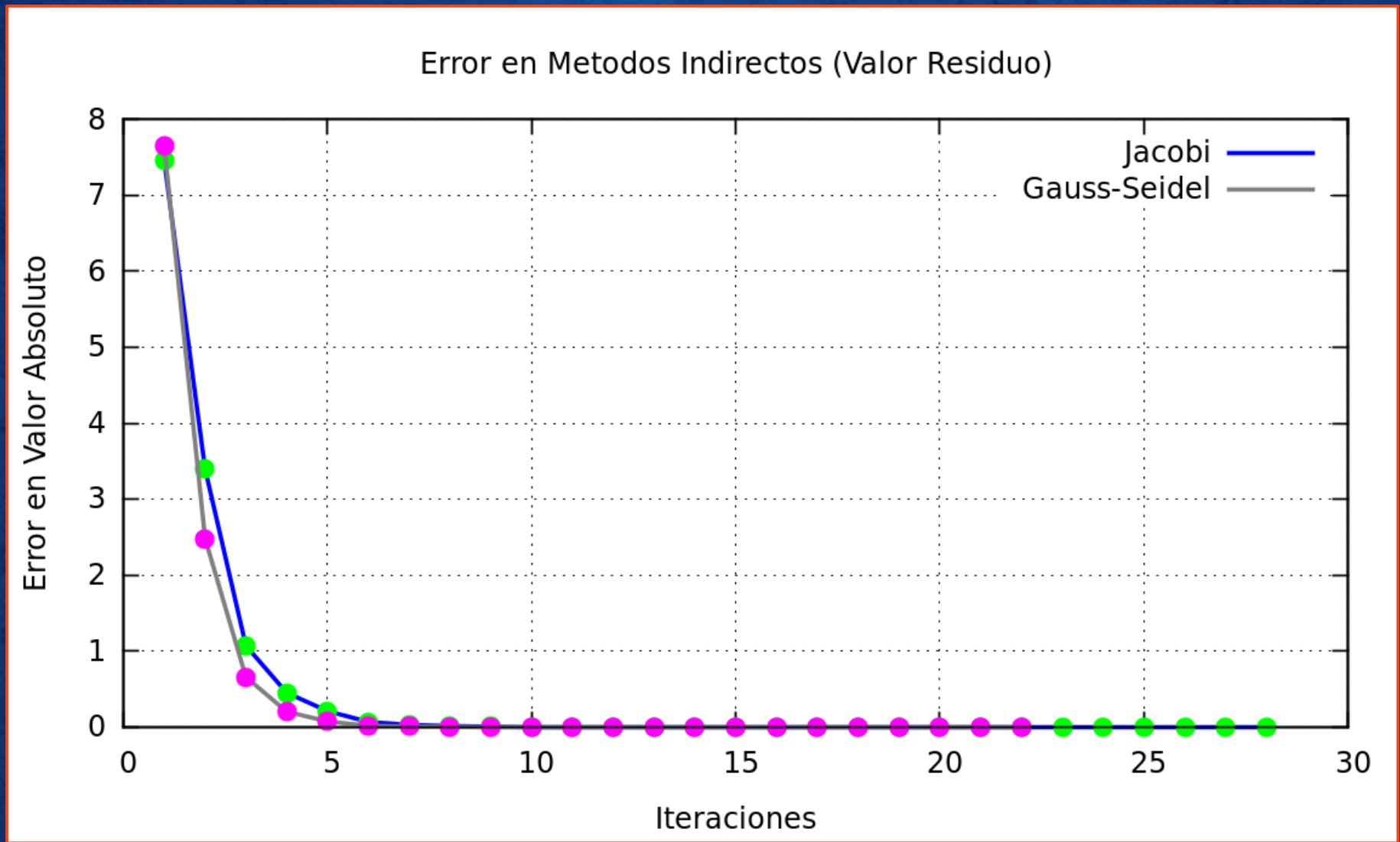
$$x_0 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Cota de error : 10^{-10}

Diferencia relativa entre dos iteraciones



Valor del Residuo



Comparación entre métodos

Cantidad de operaciones para resolver un Sistema de n Ecuaciones Lineales con $n \gg 1$.

- Métodos Directos : Cantidad de Operaciones = $(O) n^3 / 3$.
- Métodos Indirectos : Cantidad de Operaciones = $(O) n^2$.
- Métodos Indirectos adaptados a matrices muy ralas :
Cantidad de Operaciones = $(O) n$

Ventajas de los Métodos indirectos

- Necesitan una menor cantidad de operaciones que los métodos directos para resolver sistemas grandes.
- La solución se obtiene a partir del refinamiento de los valores iniciales propuestos, por lo tanto, son auto-correctivos.
- Son mucho menos sensibles a los errores acumulativos por redondeo, que los métodos directos.

Método de Relajación (SOR)

Los métodos SOR (Successive Over Relaxation) se crearon para acelerar la convergencia de Gauss-Seidel, sobre todo para cálculos manuales.

A partir del esquema de Gauss-Seidel, podemos reescribir la expresión como:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right]$$

Residuo en la iteración k

Método de Relajación (SOR)

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right]$$

Es el residuo en la iteración k

Por lo que nos queda como:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}$$

Método de Relajación (SOR)

Una de las estrategias para acelerar la convergencia consiste en hacer cero la componente de mayor valor absoluto del residuo.

Sin embargo, **Southwell** y sus colaboradores pronto observaron que llevar a cero a la componente máxima del residuo, era menos eficiente que "**relajarlo**" a un valor más allá de cero (*sobre-relajación*), pues una componente nula del residuo, puede hacer crecer a las demás componentes.

Partiendo de la expresión de Gauss Seidel, y afectando al residuo por un valor ω se puede obtener una mejora en la velocidad de convergencia.

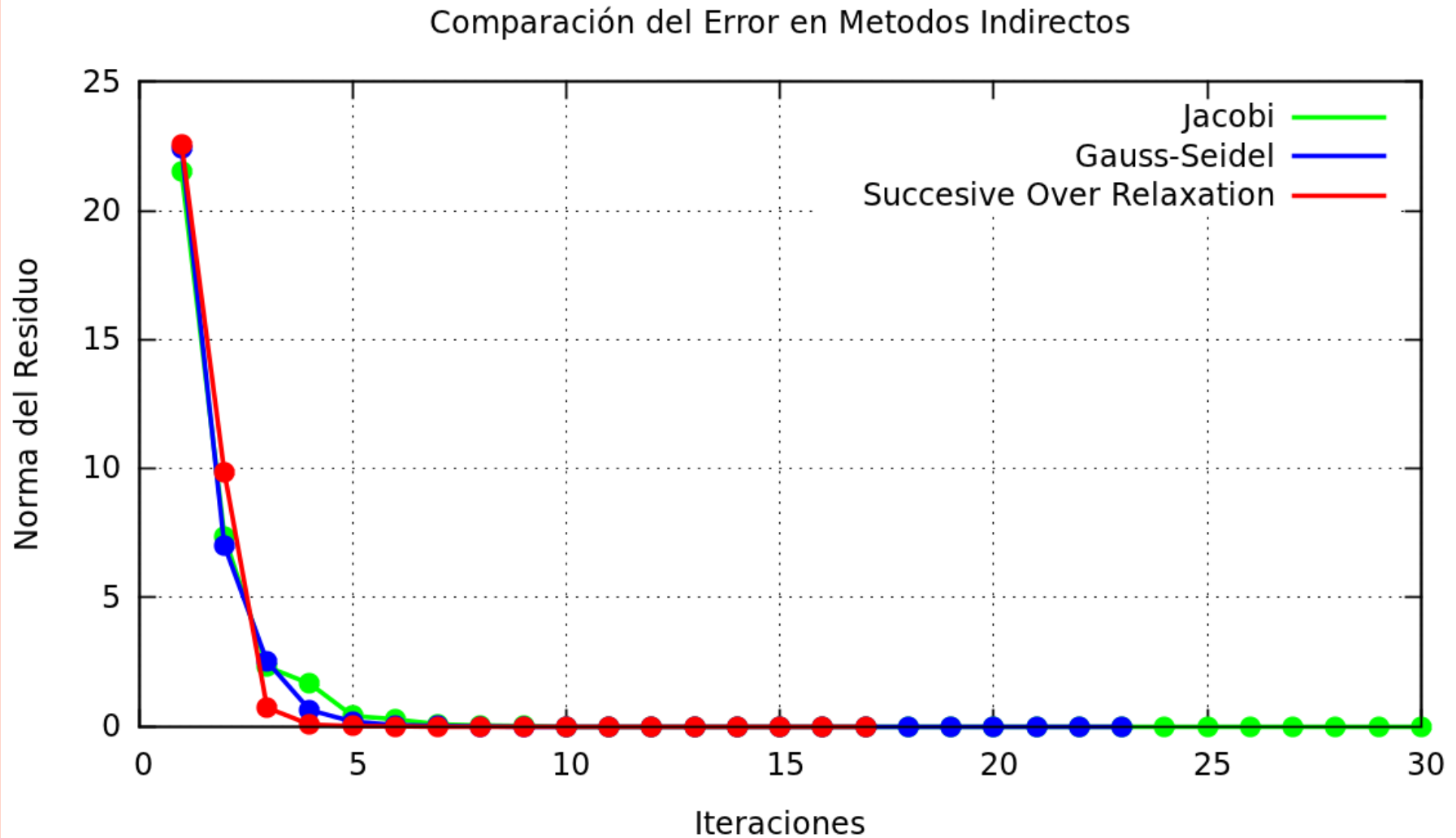
Método de Relajación (SOR)

Se puede demostrar que si el valor de ω mayor a 2 el método diverge.

Si el valor de ω es menor a 2 y mayor a 1 se denomina sobre-relajación y si es menor a 1 sub-relajación.

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega \cdot r_i^{(k)}}{a_{ii}}$$

Método de Relajación (SOR)



Preguntas . . .

