



# **Análisis Numérico para Ingeniería**

Clase Nro. 7



# Ecuaciones Diferenciales

## ***Temas a tratar:***

- *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDDP)*
- *Método de las Diferencias Finitas*
- *Resolución de Ecuaciones Diferenciales Elípticas*



# Introducción a las EDDP

- Los fenómenos que varían en más de una dimensión espacial ó lo hacen con el tiempo y el espacio, a menudo son modelados como **ecuaciones diferenciales** que contienen derivadas parciales de una o más variables.
- De la gran cantidad de métodos numéricos disponibles, veremos solamente algunos basados en diferencias finitas, y los aplicaremos para resolver ciertos problemas, sobre dominios simples.



# Simeón Poisson

Nació el 21 de junio de 1781 en Pithiviers, Francia.

La primera memoria de Poisson sobre la electricidad fue en 1812, en que intentó calcular matemáticamente la distribución de las cargas eléctricas sobre la superficie de los conductores, y en 1824, también demostró que estas mismas formulaciones podían aplicarse de igual forma al magnetismo.

Falleció el 25 de abril de 1840 en Sceaux, Francia.





# Ecuaciones Diferenciales Elípticas

## Ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y)$$

*Permite modelar problemas estacionarios, es decir, invariables en el tiempo.*



# Ecuaciones Diferenciales Elípticas

*Por ejemplo, en Electrostática, la **Ecuación de Poisson** en 3D, liga el potencial Electrostático con la densidad de carga.*

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial z^2} = \frac{-\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

*Y si la densidad de carga es nula, se transforma en la **Ecuación de Laplace** :*

$$\nabla^2 \Phi(r) = 0$$



# Pierre Simón Laplace

Nació el 23 de marzo de 1749 en Beaumont-en-Auge, Francia.

Es recordado como uno de los máximos científicos de todos los tiempos, a veces referido como el Newton de Francia, con unas fenomenales facultades matemáticas no poseídas por ninguno de sus contemporáneos.

Con tan sólo 23 años de edad, Laplace demostró que la aceleración de Júpiter y el frenado de Saturno eran movimientos periódicos.

Falleció el 5 de marzo de 1827 en Paris, Francia.





# Ecuación de Laplace

La **ecuación de Laplace** es un caso particular de la **ecuación de Poisson**, en el que  $f(x, y, z) = 0$ .

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial z^2} = 0$$

Es decir,

$$\nabla^2 \Phi(r) = 0$$





# Ecuaciones Diferenciales Parabólicas

## Ecuación de Difusión

$$\frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial t} = k \cdot \left[ \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right]$$

*Permite modelar problemas de **difusión de calor** en medios homogéneos, variación de concentraciones, etc.*



# Ejemplo de Aplicación

*Considere una barra perfectamente aislada en su superficie lateral. La constante  $\alpha$  en la ecuación está determinada por las propiedades de conductividad del calor del material del que está compuesta la barra y se supone que es independiente de la posición de la barra.*

**Se desea conocer la variación del flujo de calor a través de la barra.**



# Condiciones del problema

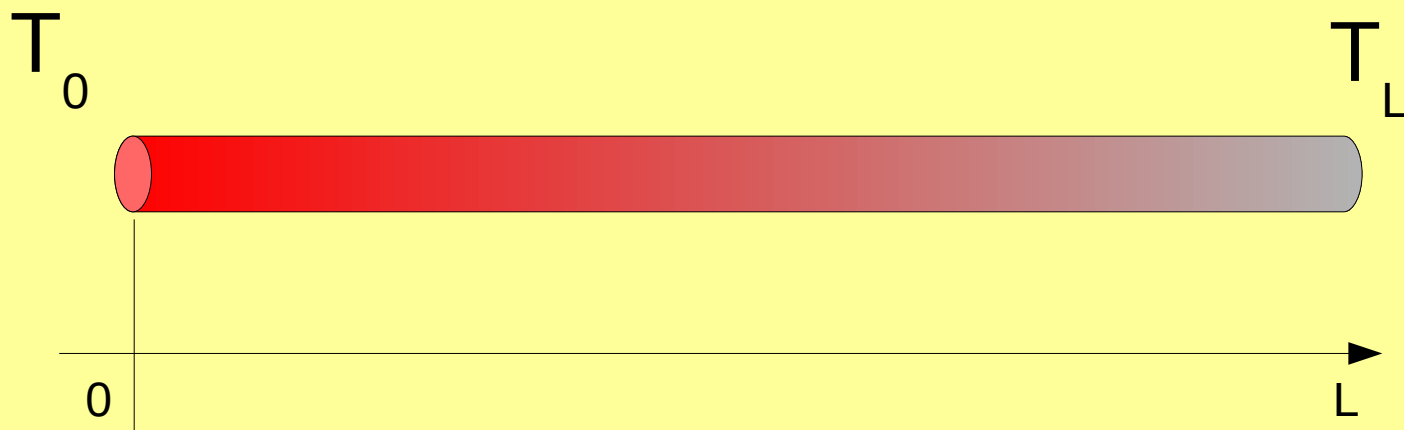
*En un problema como el anterior, debe especificarse un conjunto de condiciones para poder resolverlo, por ejemplo:*

- Especificar la distribución de calor para el tiempo cero. (**Condiciones Iniciales**)
- Especificar las condiciones en los extremos de la barra. (**Condiciones de Frontera**)



# Condiciones de Frontera

## Caso 1 (Temperaturas constantes)



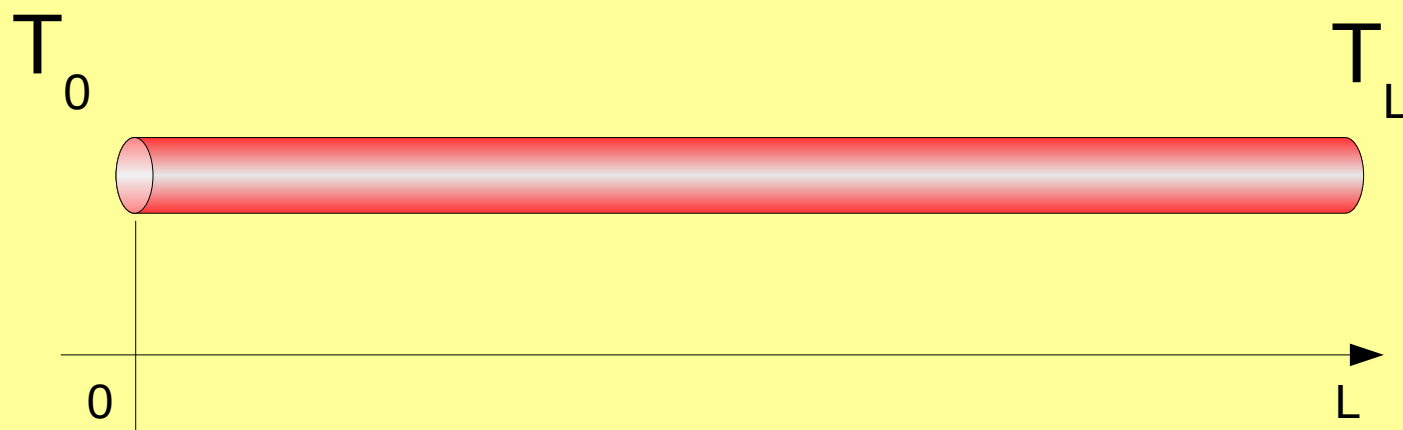
Si mantenemos los extremos de la barra a temperaturas constantes  $T_0$  y  $T_L$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = T_0 + \frac{(T_L - T_0)}{L} \cdot x$$



# Condiciones de Frontera

## Caso 2 (Aislamiento Térmico)



Si aislamos la barra de forma tal que el calor no fluya a través de sus extremos.

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0$$

La barra alcanzará finalmente una temperatura uniforme en toda su extensión.



# Ecuaciones Diferenciales Hiperbólicas

## Ecuación de Onda

$$\alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

( Unidimensional )

*Permite modelar problemas como el de una cuerda que vibra estando sujeta en sus extremos, líneas de transmisión de energía eléctrica, etc.*



# Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

Si  $u$  es una función de dos variables  $x$  e  $y$ , podemos encontrar tres derivadas parciales de segundo orden.

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} ; \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} ; \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$$

En las funciones con las que trataremos, no importa el orden de derivación.

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} ; \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x}$$



# Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

Las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales que veremos son las de 2do. Orden, cuya forma general es:

$$A \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2 \cdot B \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + C \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + D \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + E \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + F = 0$$

Los valores de los coeficientes **A**, **B** y **C** son los que determinan si una ecuación diferencial será del tipo **Elíptica**, **Parabólica** ó **Hiperbólica**.





# Clasificación

De acuerdo a los valores de los coeficientes de las derivadas de segundo orden, podemos clasificar a las ecuaciones diferenciales en:

- **Elípticas**                      si  $B^2 - 4.A.C < 0$
- **Parabólicas**                    si  $B^2 - 4.A.C = 0$
- **Hiperbólicas**                  si  $B^2 - 4.A.C > 0$

Si los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$  son funciones de  $x$  e  $y$ , y/o  $u$ , la ecuación puede cambiar desde una clasificación a otra en diversos puntos del dominio.



# Clasificación de EDDP de Segundo Orden

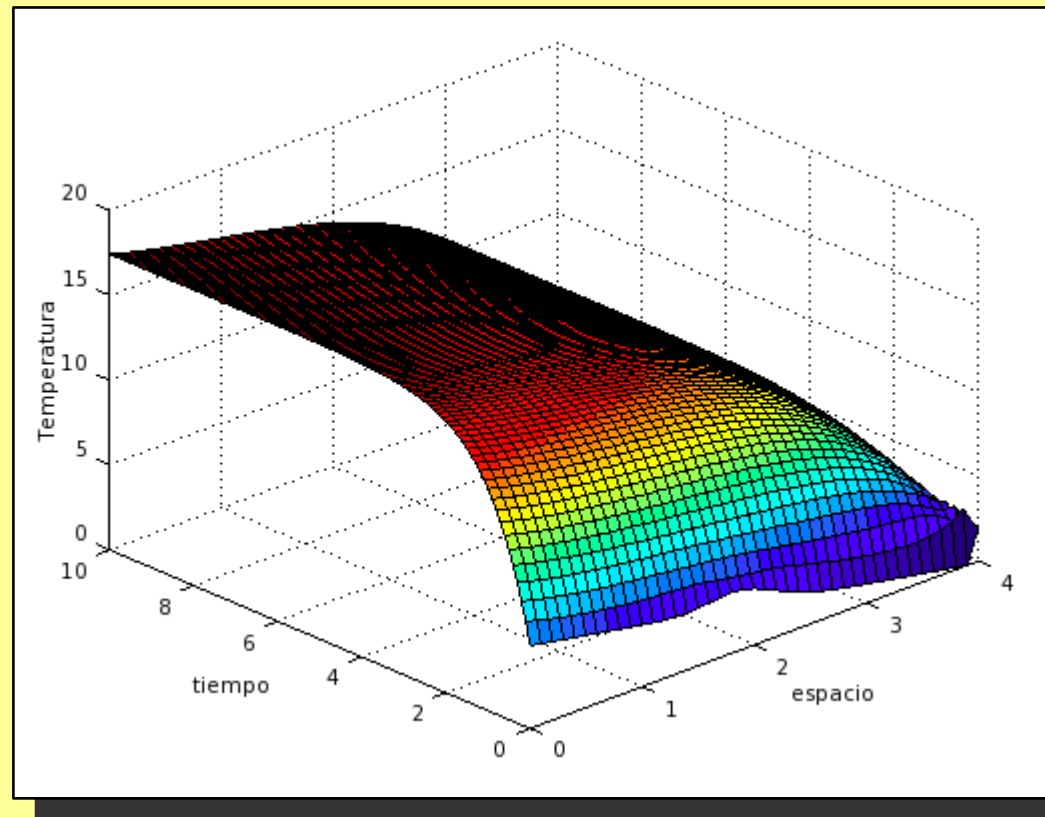
Ecuación	Nombre	Tipo
$\nabla^2 \mu = 0$	Laplace	Elíptica
$\nabla^2 \mu = f$	Poisson	Elíptica
$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 \mu$	Onda	Hiperbólica
$\frac{\partial \mu}{\partial t} = k \cdot \nabla^2 \mu$	Difusión	Parabólica
$\nabla^2 \mu = k \cdot \mu$	Helmholtz	Elíptica

El operador  $\nabla \mu = \left( \frac{\partial \mu}{\partial x}, \frac{\partial \mu}{\partial y}, \frac{\partial \mu}{\partial z} \right)$  se utiliza generalmente para describir problemas físicos.



# Método de las Diferencias Finitas

Consiste en reemplazar las **derivadas** por **diferencias finitas**, convirtiendo a la **ecuación diferencial** en una **ecuación en diferencias**.





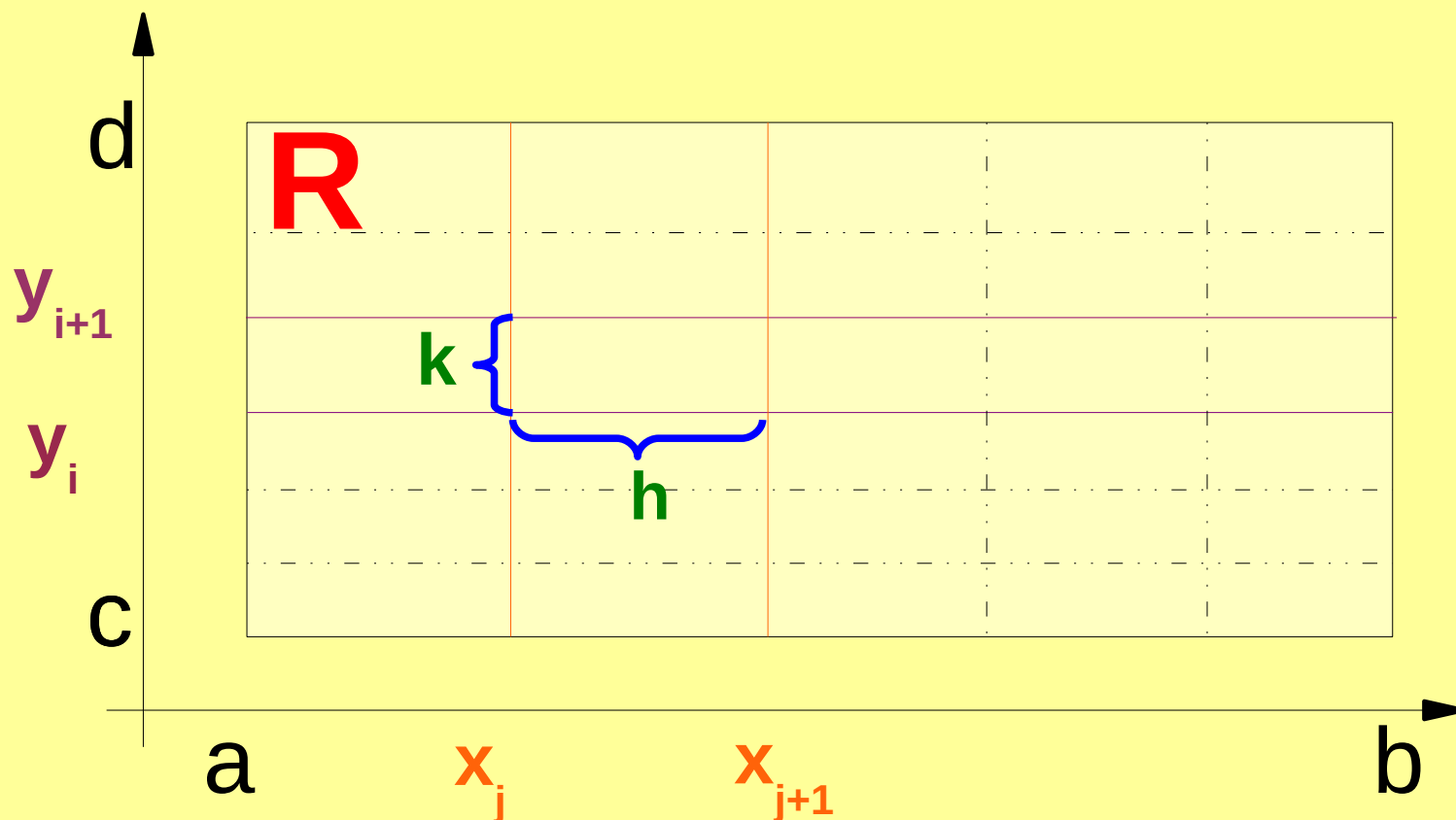
# Procedimiento

- Dividir la región de interés  $R$  en una grilla.
- Escribir la ecuación en diferencias correspondiente a cada punto en las *intersecciones* (nodos) de la grilla en la que se subdivide la región de interés  $R$ , en la cual los valores de función solución son desconocidos.
- Resolver el *sistema de ecuaciones lineales* resultantes, para obtener valores de la función solución en cada nodo. ( Obviamente serán aproximaciones al valor exacto ).



# Diferencias Finitas

El esquema fundamental del método de las **diferencias finitas** consiste en reemplazar las derivadas por **cocientes de diferencias**.





# Generación de la grilla de cálculo

Para generar la grilla de cálculo en un dominio ***R*** rectangular, se eligen dos valores enteros **m** y **n**, y se subdivide la región, con pasos **h** y **k** respectivamente.

Las **intersecciones** de dichas subdivisiones conformarán los **nodos**.

$$h = \frac{(b - a)}{n}$$

Los **nodos** son los puntos en los cuales calcularemos la solución de la **ecuación diferencial**.

$$k = \frac{(d - c)}{m}$$



# Diferencias Finitas

Desarrollamos la función **f** en **Serie de Taylor** alrededor del punto  $x_i$ .

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h \cdot f'(x_i) + h^2 \cdot \frac{f''(x_i)}{2!} + h^3 \cdot \frac{f'''(x_i)}{3!} + h^4 \cdot \frac{f^{iv}(\xi_1)}{4!}$$

Siendo:

$$x_i < \xi_1 < x_i + h$$



# Diferencias Finitas

De forma similar obtenemos:

$$f(x_i - h) = f(x_i) - h \cdot f'(x_i) + h^2 \cdot \frac{f''(x_i)}{2!} - h^3 \cdot \frac{f'''(x_i)}{3!} + h^4 \cdot \frac{f^{iv}(\xi_2)}{4!}$$

Siendo:

$$x_i - h < \xi_2 < x_i$$





# Diferencias Finitas

Y sumando ambas expresiones

$$f(x_i+h) = f(x_i) + h \cdot \cancel{f'(x_i)} + h^2 \cdot \frac{f''(x_i)}{2!} + h^3 \cdot \cancel{\frac{f'''(x_i)}{3!}} + h^4 \cdot \frac{f^{iv}(\xi_1)}{4!}$$

+

$$f(x_i-h) = f(x_i) - h \cdot \cancel{f'(x_i)} + h^2 \cdot \frac{f''(x_i)}{2!} - h^3 \cdot \cancel{\frac{f'''(x_i)}{3!}} + h^4 \cdot \frac{f^{iv}(\xi_2)}{4!}$$

=



# Diferencias Finitas

Por lo que obtenemos:

$$\frac{f(x_i+h) - 2 \cdot f(x_i) + f(x_i-h)}{h^2} = f''(x_i) + h^2 \cdot \frac{f^{iv}(\xi)}{12}$$

$$x_i - h < \xi < x_i + h$$

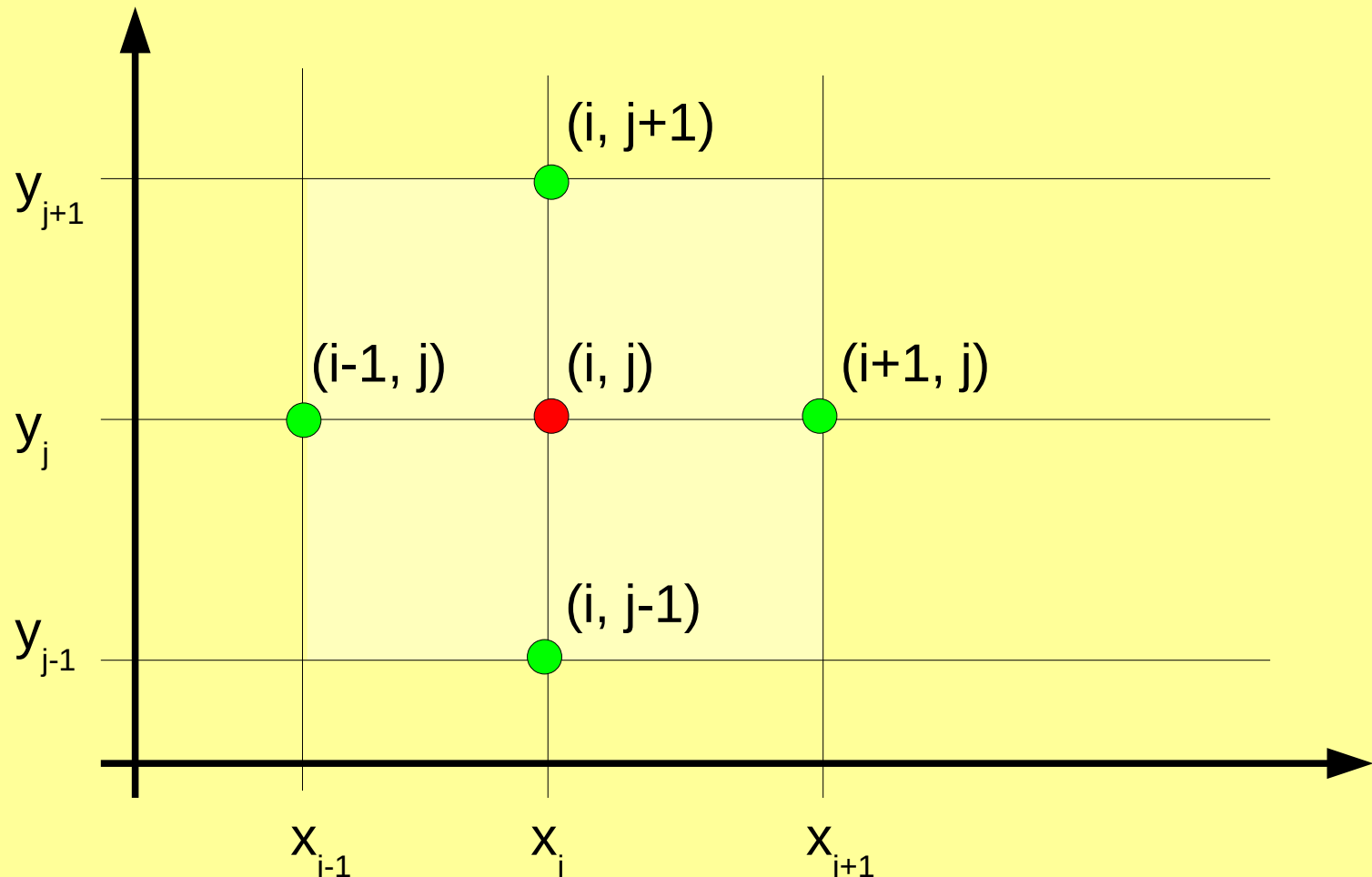
Usando notación para sub-índices:

$$\frac{f_{i+1} - 2 \cdot f_i + f_{i-1}}{h^2} = f_i'' + O(h^2)$$



# Ecuaciones Diferenciales Elípticas

Para resolver la ecuación de **Laplace** en una región del **plano xy**, subdividimos la región con líneas equiespaciadas, paralelas a **x** e **y**.





# Diferencias Finitas

Tomando a  $y$  como constante y conociendo los valores de la función en los puntos  $x_i-h$ ,  $x_i$ , y  $x_i+h$ , podemos obtener la expresión de la diferencia centrada:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u(\xi_i, y_j)}{\partial x^4}$$

$$x_{i-1} < \xi_i < x_{i+1}$$



# Diferencias Finitas

Procediendo de igual forma, pero manteniendo  $x$  constante:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u(x_i, \eta_j)}{\partial y^4}$$

$$y_{j-1} < \eta_j < y_{j+1}$$



# Ecuaciones Diferenciales Elípticas

## *Ecuación de Laplace*

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

Reemplazando en la ecuación anterior por su equivalente en diferencias, obtenemos:

$$\nabla^2 u(x, y) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} = 0$$



# Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u(x, y) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2} = 0$$

Podemos simplificar la notación, escribiendo sólo los sub-índices en **x** e **y**, de la siguiente forma :

$$\nabla^2 u(x, y) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 0$$



# Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u(x, y) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 0$$

Por último, si hacemos que los espaciamientos de la grilla sean iguales, es decir, **h = k**, la expresión anterior nos queda como:

$$\nabla^2 u(x, y) \approx \frac{1}{h^2} \cdot [u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}] = 0$$





# Condiciones de Contorno

En los problemas que se modelan utilizando la ecuación de Laplace, se pueden presentar diferentes casos de condiciones de Contorno:

- Condiciones de Contorno de Dirichlet.
- Condiciones de Contorno de Neumann.
- Condiciones de Contorno Mixtas.



# Condición de Contorno de Dirichlet.

En los problemas con condiciones de contorno de Dirichlet, se conocen los valores en **la frontera de  $u(x,y)$** , es decir, en la frontera de la región R.

- $u(x_1, y_j) = u_{1,j}$  para  $2 \leq j \leq m-1$  (a la izquierda)
- $u(x_i, y_1) = u_{i,1}$  para  $2 \leq i \leq n-1$  (abajo)
- $u(x_n, y_j) = u_{n,j}$  para  $2 \leq j \leq m-1$  (a la derecha)
- $u(x_i, y_m) = u_{i,m}$  para  $2 \leq i \leq n-1$  (arriba)



# Condición de Contorno de Neumann.

Se utilizan cuando se especifican valores de la derivada direccional de  $u(x,y)$  en la dirección perpendicular al contorno  $R$ .

- En un problema de transmisión de calor podría significar, por ejemplo, que en un contorno aislado no hay flujo de calor a través de él.
- Por ejemplo, para  $R=\{(x,y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ , la condición de contorno de la derivada para  $x = a$  es:

$$\frac{\partial u(x_n, y_j)}{\partial x} = u_x(x_n, y_j) = 0$$



# Condición de Contorno de Neumann.

La ecuación de diferencias de Laplace para  $(x_n, y_j)$

$$u_{n+1,j} + u_{n-1,j} - 4u_{n,j} + u_{n,j+1} + u_{n,j-1} = 0$$

Donde el valor  $u_{n+1,j}$  es desconocido pues está fuera del dominio R.

Sin embargo, podemos utilizar la aproximación por diferencias centrales de la derivada:

$$\frac{u_{n+1,j} - u_{n-1,j}}{2h} \approx u_x(x_n, y_j) = 0$$



# Condición de Contorno de Neumann.

Ahora bien, si

$$\frac{u_{n+1,j} - u_{n-1,j}}{2h} \approx u_x(x_n, y_j) = 0$$

entonces :

$$u_{n+1,j} \approx u_{n-1,j}$$

Por lo tanto, la ecuación de Laplace en diferencias para  $(x_n, y_j)$ , queda de la forma:

$$2u_{n-1,j} - 4u_{n,j} + u_{n,j+1} + u_{n,j-1} = 0$$



# Condiciones de Contorno Mixtas.

En ciertos problemas las condiciones de contorno pueden ser diferentes para cada borde. Por ejemplo, podríamos imaginar un dominio  $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 10\}$ , como el del problema de la placa anterior, pero con las siguientes condiciones de contorno:

- $u(0, y) = 0 \quad 0 < y < 10$  (Dirichlet)
- $u(20, y) = 100 \quad 0 < y < 10$  (Dirichlet)
- $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad 0 < x < 20$  (Neumann)
- $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 10) = 0 \quad 0 < x < 20$  (Neumann)



# Ejemplo de Aplicación

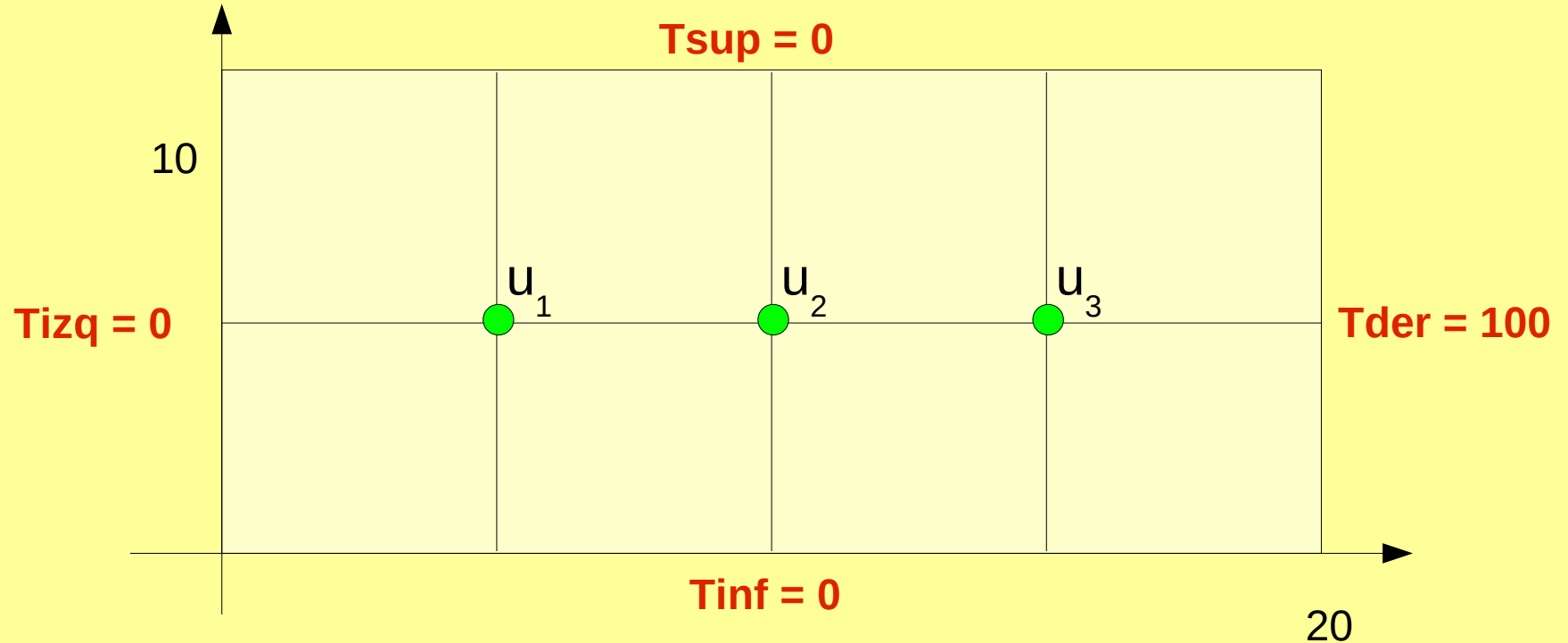
*Se desea calcular la distribución de temperaturas en estado estacionario de una placa fina de acero, de dimensiones 20cm x 10cm. Para ello se calienta uno de los bordes de 10cm a 100 °C, permaneciendo los demás bordes a 0 °C*

Debido a que no existe generación de calor en la superficie de la placa, el fenómeno en estudio se rige por la Ecuación de **Laplace**.

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$



# Cálculo con 3 nodos



$$\begin{aligned}\frac{1}{5^2} \cdot (0 + 0 + u_2 + 0 - 4 \cdot u_1) &= 0 \\ \frac{1}{5^2} \cdot (0 + 0 + u_3 + u_1 - 4 \cdot u_2) &= 0 \\ \frac{1}{5^2} \cdot (0 + 0 + 100 + u_2 - 4 \cdot u_3) &= 0\end{aligned}$$





# Sistema resultante

$$\frac{1}{5^2} \cdot (0 + 0 + u_2 + 0 - 4 \cdot u_1) = 0$$

$$\frac{1}{5^2} \cdot (0 + 0 + u_3 + u_1 - 4 \cdot u_2) = 0$$

$$\frac{1}{5^2} \cdot (0 + 0 + 100 + u_2 - 4 \cdot u_3) = 0$$

Y expresado en forma matricial, nos queda:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$



# Formato de Grabación

Para poder graficar el resultado con **spot**, los valores deben grabarse en un determinado formato.

Línea en blanco



x	y	Temperatura
0.00000	0.00000	0.00000
5.00000	0.00000	0.00000
10.00000	0.00000	0.00000
15.00000	0.00000	0.00000
20.00000	0.00000	100.00000
0.00000	5.00000	0.00000
5.00000	5.00000	1.78571
10.00000	5.00000	7.14286
15.00000	5.00000	26.78571
20.00000	5.00000	100.00000
0.00000	10.00000	0.00000
5.00000	10.00000	0.00000
10.00000	10.00000	0.00000
15.00000	10.00000	0.00000
20.00000	10.00000	100.00000

Línea en blanco





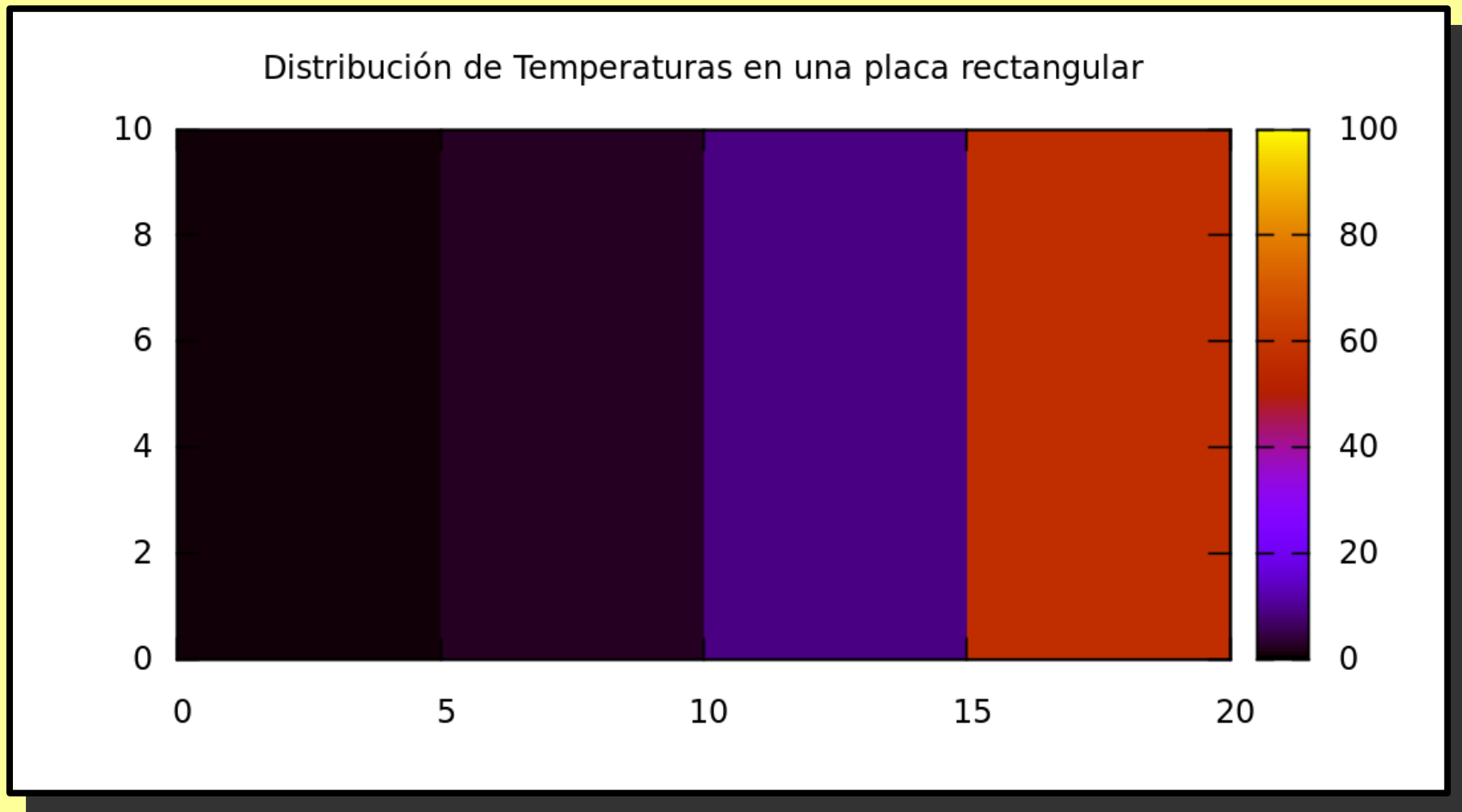
# Script Gnuplot

```
# Script para graficar la solución de una EDP-Elíptica  
# Ultima actualización: 13/05/14  
  
#set terminal png  
#set output 'imagen.png'  
  
set pm3d map  
set nokey  
set title "Distribución de Temperaturas en una placa rectangular"  
splot 'temp.dat'
```



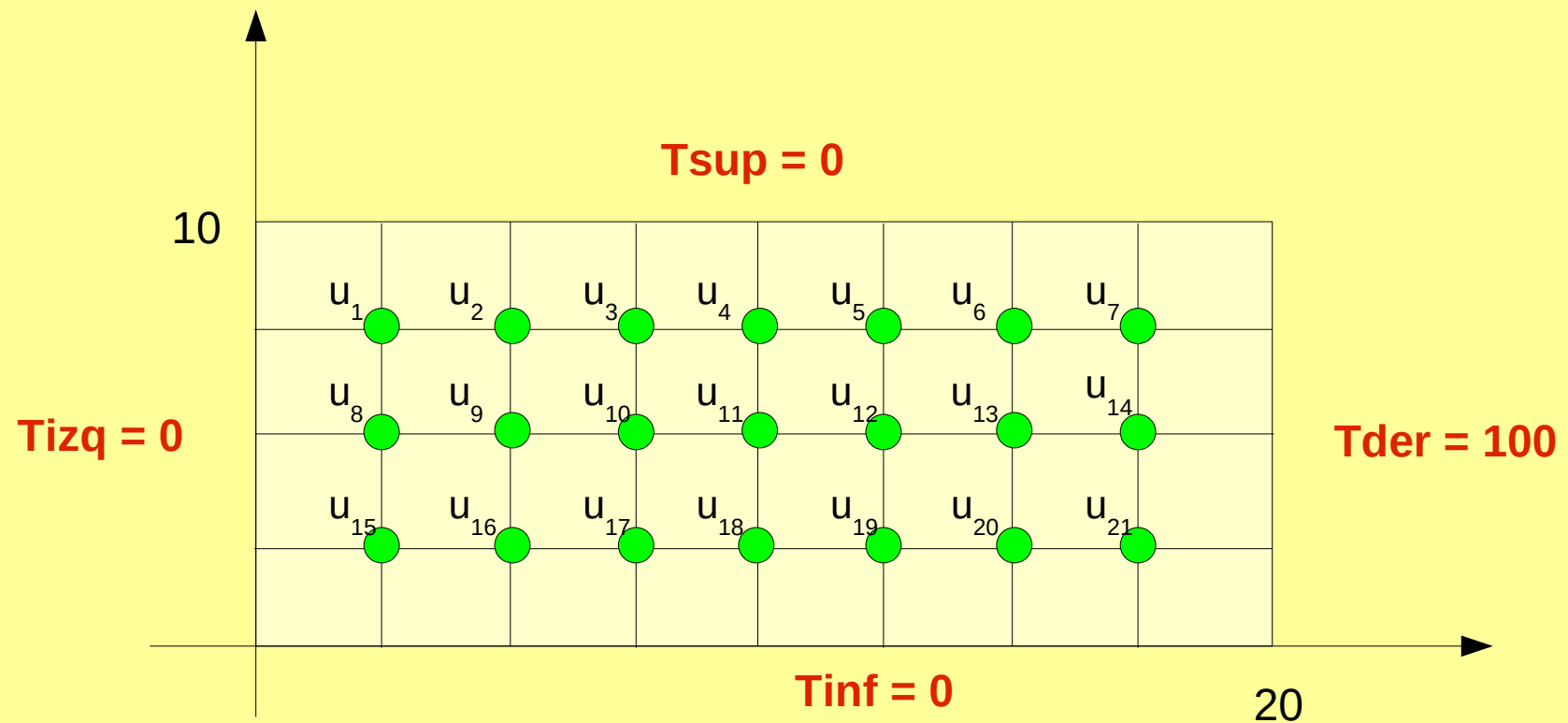
# Gráfico de la solución con GnuPlot

Gráfico de la solución con  $3 \times 1 = 3$  nodos





# Cálculo con 21 nodos





Mg. Ing. Francisco A. Lizarralde



# Solución con 21 puntos

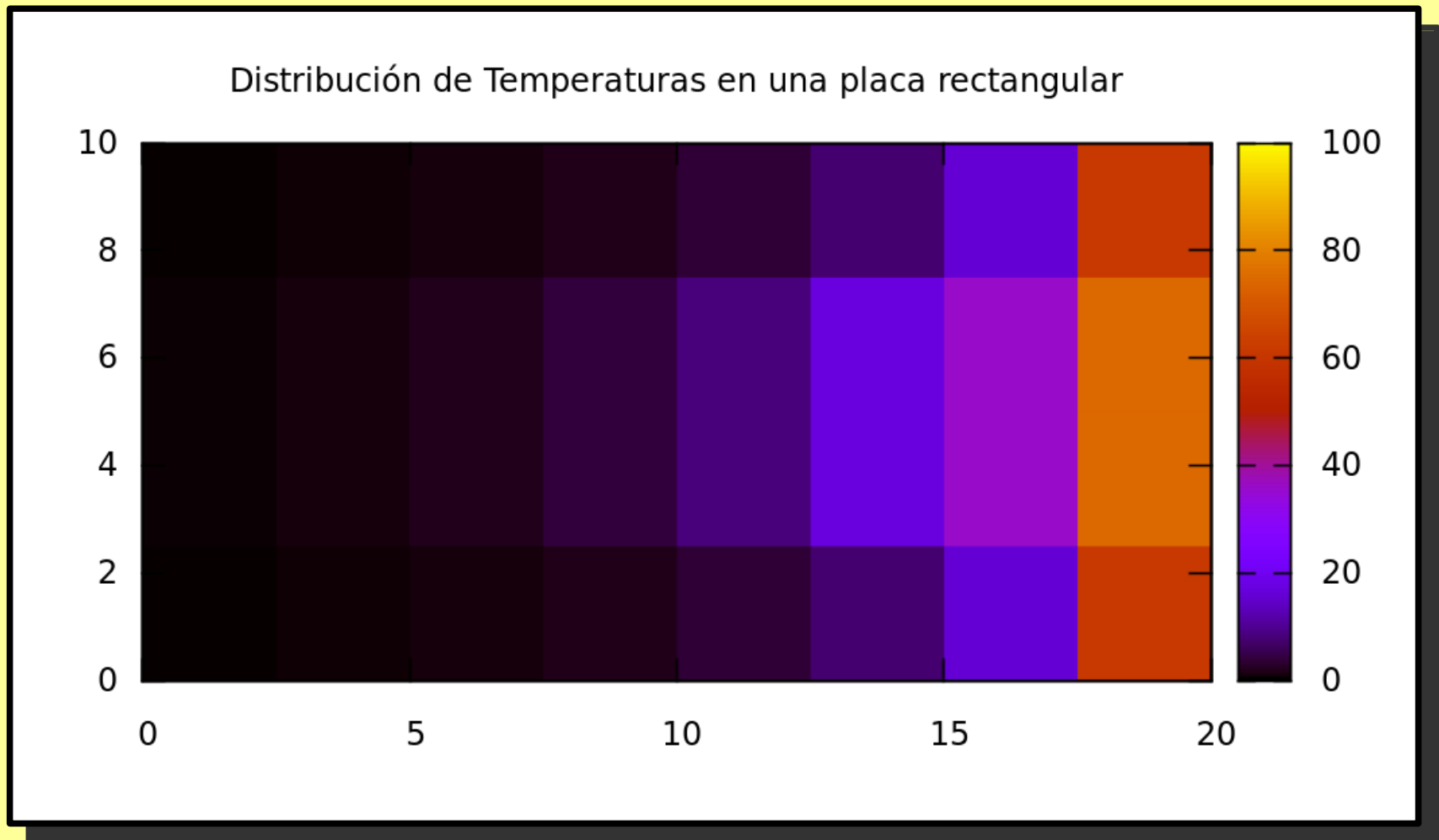
x	y	Temp
0.00000	0.00000	0.00000
2.50000	0.00000	0.00000
5.00000	0.00000	0.00000
7.50000	0.00000	0.00000
10.00000	0.00000	0.00000
12.50000	0.00000	0.00000
15.00000	0.00000	0.00000
17.50000	0.00000	0.00000
20.00000	0.00000	100.00000
0.00000	2.50000	0.00000
2.50000	2.50000	0.35301
5.00000	2.50000	0.91318
7.50000	2.50000	2.01031
10.00000	2.50000	4.29572
12.50000	2.50000	9.15317
15.00000	2.50000	19.66318
17.50000	2.50000	43.21015
20.00000	2.50000	100.00000
0.00000	5.00000	0.00000
2.50000	5.00000	0.49885
5.00000	5.00000	1.28939
7.50000	5.00000	2.83235
10.00000	5.00000	6.01939
12.50000	5.00000	12.65378
15.00000	5.00000	26.28939
17.50000	5.00000	53.17742

x	y	Temp
0.00000	7.50000	0.00000
2.50000	7.50000	0.35301
5.00000	7.50000	0.91318
7.50000	7.50000	2.01031
10.00000	7.50000	4.29572
12.50000	7.50000	9.15317
15.00000	7.50000	19.66318
17.50000	7.50000	43.21015
20.00000	7.50000	100.00000
0.00000	10.00000	0.00000
2.50000	10.00000	0.00000
5.00000	10.00000	0.00000
7.50000	10.00000	0.00000
10.00000	10.00000	0.00000
12.50000	10.00000	0.00000
15.00000	10.00000	0.00000
17.50000	10.00000	0.00000
20.00000	10.00000	100.00000



# Gráfico de la solución con GnuPlot

Gráfico de la solución con  $7 \times 3 = 21$  nodos

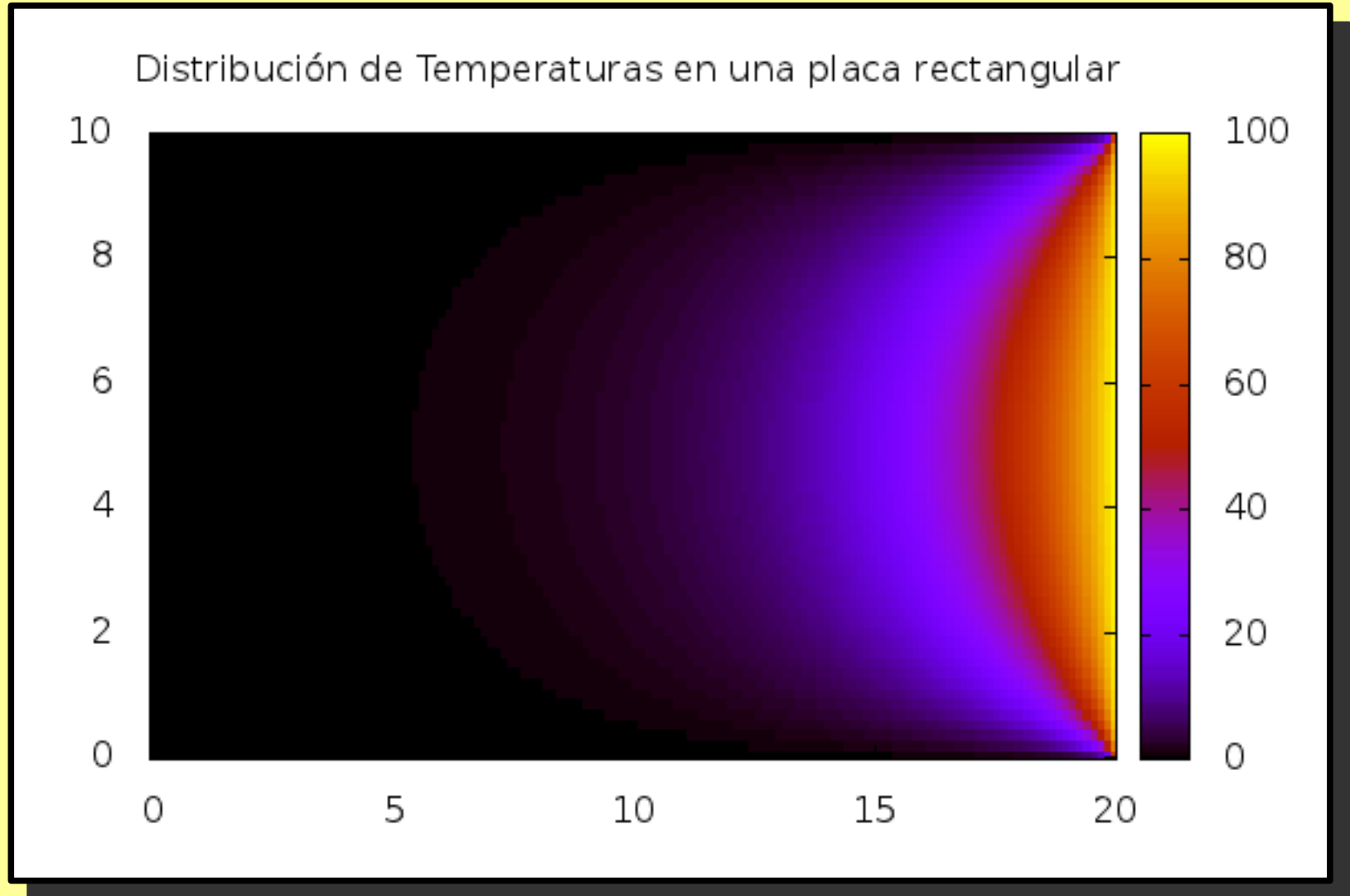






# Gráfico de la solución con una malla más fina

Gráfico de la solución con  $140 \times 60 = 8400$  nodos





# Para tener en cuenta

- Las matrices resultantes son *matrices de banda* (no tri-diagonales). No es conveniente utilizar métodos directos ya que los elementos fuera de las bandas se convertirán en elementos distintos de cero.
- Es preferible utilizar métodos indirectos. Gauss-Seidel podría ser una buena elección, ya que las matrices resultantes son diagonalmente dominantes.
- Si es necesario resolver grandes sistemas, se produce una significativa *reducción del tiempo de ejecución*, aunque depende fuertemente de la elección de un buen vector de valores iniciales y de la precisión deseada.



# Método de Relajación (SOR)

Los métodos SOR (Successive Over Relaxation) se crearon para acelerar la convergencia de Gauss-Seidel, sobre todo para cálculos manuales.

A partir del esquema de Gauss-Seidel, podemos reescribir la expresión como:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right]$$

Residuo en la iteración k



# Método de Relajación (SOR)

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right]$$

Es el residuo en la iteración k

Por lo que nos queda como:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}$$



# Método de Relajación (SOR)

Una de las estrategias para acelerar la convergencia consiste en hacer cero la componente de mayor valor absoluto del residuo.

Sin embargo, **Southwell** y sus colaboradores pronto observaron que llevar a cero a la componente máxima del residuo, era menos eficiente que "***relajarlo***" a un valor más allá de cero (*sobre-relajación*), pues una componente nula del residuo, puede hacer crecer a las demás componentes.

Partiendo de la expresión de Gauss Seidel, y afectando al residuo por un valor  $\omega$  se puede obtener una mejora en la velocidad de convergencia.



# Método de Sobre-Relajación (SOR)

Se puede demostrar que si el valor de  $\omega$  mayor a **2** el método diverge.

Si el valor de  $\omega$  es menor a **2** y mayor a **1** se denomina sobre-relajación y si es menor a **1** sub-relajación.

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega \cdot r_i^{(k)}}{a_{ii}}$$



# Técnica de Sobre-Relajación

Una técnica muy sencilla de aplicar es la técnica de sobre-relajación. La misma consiste en calcular los valores de los nodos de la malla en forma iterativa, en base al siguiente esquema.

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \omega \cdot r_{i,j}^{(k)}$$

$$1 < \omega < 2$$

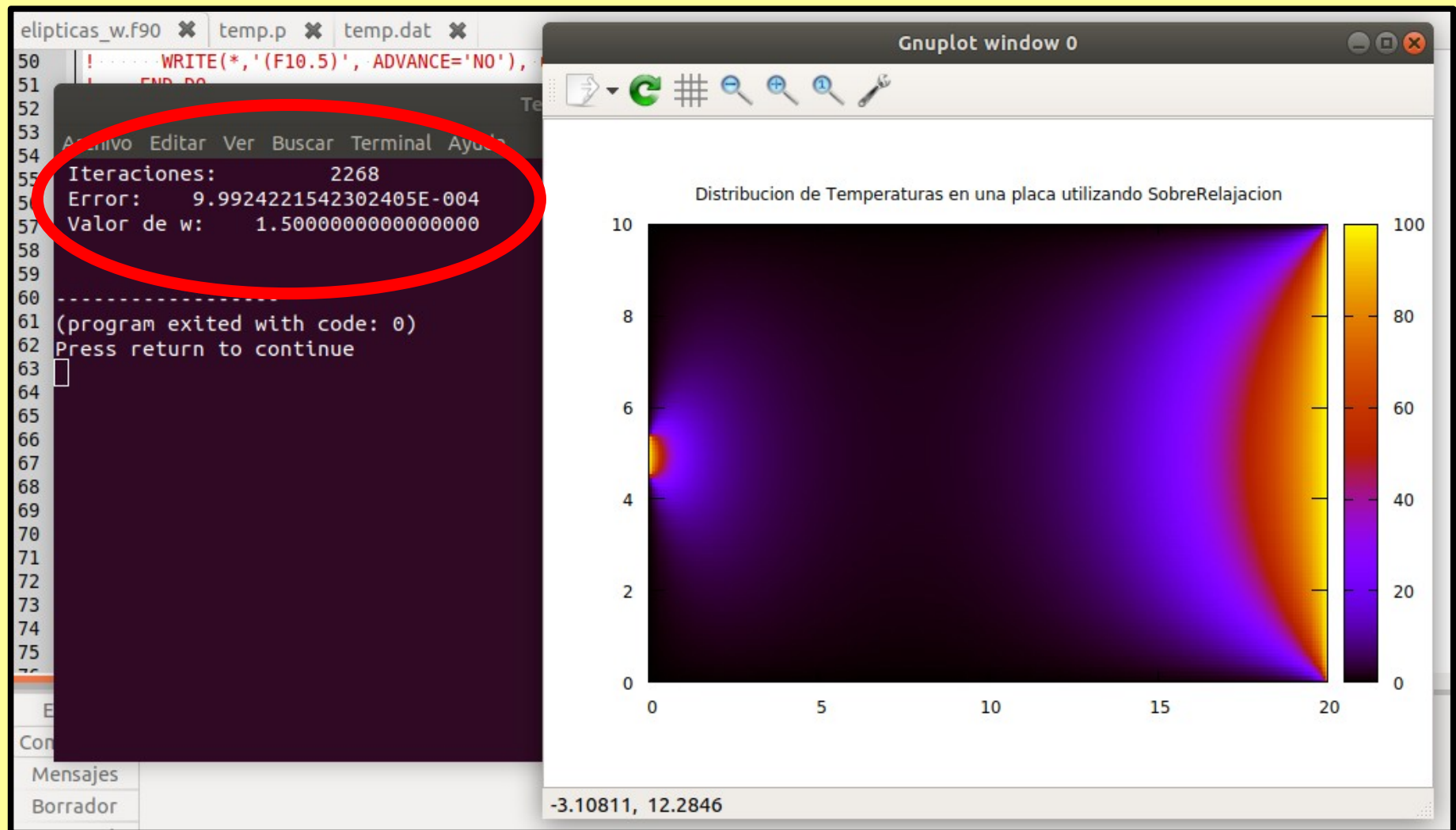
Donde:

$$r_{i,j}^{(k)} = \frac{u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} - 4 \cdot u_{i,j}^{(k)}}{4}$$



# Gráfico de la solución con Sobre-Relajación

Gráfico de la solución con  $280 \times 120 = 33600$  nodos







# Técnica de Sobre-Relajación

El factor de Sobre-Relajación  $\omega$  es un valor que se encuentra entre **1** y **2**.

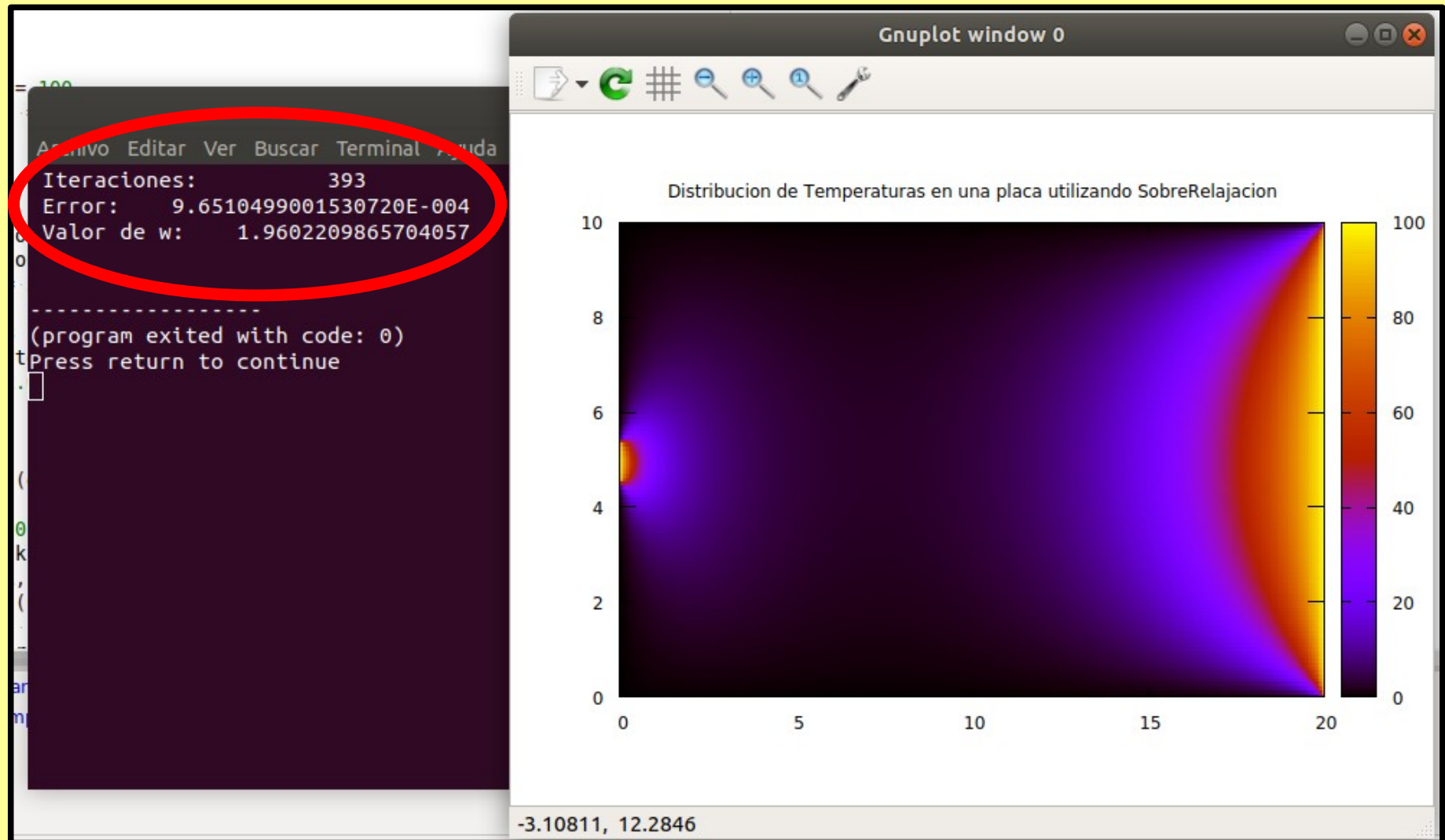
A continuación se muestra una fórmula para calcular dicho factor en función de **m** y **n** (cantidad de divisiones horizontales y verticales) de la grilla a resolver.

$$\omega = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - \left[ \cos\left(\frac{\pi}{m-1}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right) \right]^2}}$$



# Gráfico de la solución con Sobre-Relajación

Gráfico de la solución con  $280 \times 120 = 33600$  nodos





# Estimación de las condiciones iniciales

- Tener en cuenta que las temperaturas en cada punto son un promedio de las temperaturas de los puntos que lo rodean. Puesto que dentro del dominio no se genera energía, ningún punto puede tener mayor temperatura que la más alta, ni menor que la mínima de su entorno.
- Una técnica para encontrar los valores iniciales necesarios para la utilización de métodos indirectos de resolución de sistemas lineales, consiste en resolver el problema con una malla tosca, consiguiendo una rápida solución y utilizar los valores obtenidos como valores iniciales de una malla más fina.



# PREGUNTAS ...

