Temas: Polinomio de Lagrange

Ejercicio 3

Dada la siguiente tabla de valores:

i	xi	f(xi)
0	0	0,9162
1	0,25	0,8109
2	0,5	0,6931
3	0,75	0,5596
4	1,0	0,4055

a) Calcules los coeficientes del polinomio de Lagrange que pase por los puntos i=1,2 y 3.
b) Si la tercera derivada de la función en i=2 es f'''=-0,26 estime el error de interpolación de Lagrange obtenido en x = 0,6.
c) Calcule los coeficientes de Lagrange usando todos los puntos.
d) Calcule el valor de p(0,6) con la aproximación obtenida en el inciso c) y compare con el valor hallado en el inciso a).

Resolución

El método de interpolación de Lagrange permite obtener un polinomio en el que se interpretan a los puntos como si fueran las raíces de una ecuación. A partir de allí observando las ecuaciones planteadas en la teoría se encuentran los valores de los coeficientes de Lagrange. Luego, se forma el polinomio de aproximación, conocido como el polinomio de interpolación de Lagrange.

Se muestra a continuación parte del código FORTRAN que resuelve el polinomio de Lagrange:

```
SUBROUTINE Poli_Lagrange(N, x, f, P)

!Variables
REAL(8), DIMENSION(0:N-1) :: x, f, P, L
REAL(8) denom
INTEGER N, i, j, k

!Cuerpo
P = 0.
DO k=0, N-1
```

```
   L = 0.
   L(0) = 1.
   j = 1 ! Tamaño real del polinomio hasta el momento
   denom = 1.
   DO i=0, N-1
      IF (k /= i) THEN
CALL Mult_Vec_Bin(N, j-1, L, -x(i)) !Llamo con j-1 que será el indice de la última
!componente a mover (todas las anteriores se moverán también)
         denom = denom * (x(k) - x(i))
         j = j + 1
      END IF
   END DO
   L = L * f(k) / denom
   P = P + L
END DO
```

Además, se adiciona el código FORTRAN para calcular el error de interpolación:

```
FUNCTION Error_estimado(x, N, Punto_a_est, Derivada)

!Variables
REAL(8), DIMENSION(0:N) :: x
REAL(8) :: Punto_a_est, Derivada, Producto, Error_estimado
INTEGER :: N, i

   Producto = 1.
   DO i=0, N
      Producto = Producto * (Punto_a_est - x(i))
   END DO
   Error_estimado = Producto * Derivada / Factorial(N+1)

END FUNCTION Error_estimado
```

El problema nos pide realizar la interpolación solo con los 3 puntos del medio, entonces vamos a obtener un polinomio de grado 2. Esto se debe a que al ser un polinomio interpolante el grado es (n-1), siendo n la cantidad de puntos utilizados.

Luego, el Polinomio de interpolación de Lagrange calculado es:

$$f(x) = -0{,}125x^2 - 0{,}377x + 0{,}91$$

Dicho polinomio evaluado en x=0,6 es f(0,6)=0,6415833399

El error estimado en la interpolación de Lagrange en el x=0,6 es de 0,0002275555 (del orden de 10^{-4}).

Ahora, se nos solicita realizar lo mismo pero esta vez con todos los puntos (5 en total) entonces, por lo explicado anteriormente, obtendremos un polinomio de grado 4.

Luego, el Polinomio de interpolación de Lagrange obtenido es:

$$f(x) = -0{,}018133x^4 - 0{,}006993x^3 - 0{,}086866x^2 - 0{,}398766x + 0{,}9162$$

Dicho polinomio evaluado en x=0,6 es f(0,6)=0,64182031

El error estimado en la interpolación de Lagrange en el x=0,6 es de 0,00000273 (del orden de 10^{-6}).

Al observar el orden de los errores calculados, se puede concluir que el orden del error es de $10^{-(n+1)}$, siendo n la cantidad de puntos. Por lo tanto, se puede concluir que el polinomio de mayor grado nos brindará un valor más acertado de el valor de la función en el punto solicitado (x=0,6).