Tema: ***INTEGRACIÓN.*** *Método de Trapecios, 1/3 Simpson y 3/8 Simpson compuesto.*

Ejercicio

Evalúe la integral de los siguientes datos tabulados:

Puntos	x	y=f(x)
0	0	1
1	0,1	7
2	0,2	4
3	0,3	3
4	0,4	5
5	0,5	2

a) Por el método del trapecio.
b) Integrando por el método de 1/3 Simpson compuesto.
c) Integrando por el método de 3/8 Simpson compuesto.

Resolución

Repasar previamente lo visto en teoría sobre integración numérica y los métodos de Newton-Cotes cerrados.

a) **Por el método del trapecio**

- Primero, verifico cómo son los intervalos entre las x_i , en este caso son constantes, es decir que los datos están igualmente espaciados a h=0,1.
- Tengo 6 pares de datos o puntos, por lo tanto la cantidad de segmentos es n=5 y se obtiene de la siguiente expresión:

$$h=(b-a)/n$$

donde
h: espaciado en eje de las x
a y b: extremos de intervalo de integración en x, izquierdo y derecho, respectivamente
n: cantidad de segmentos
Despejando

$$n=(b-a)/h$$
$$n= (0,5-0)/0,1$$
$$n=5$$

Luego, la fórmula de trapecios compuestos para datos igualmente espaciados es:

$$I = \frac{h}{2} \times \left[f(x_0) + 2 \times \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Aplicándola a nuestros datos

$$I = \int_{a=x_0}^{b=x_5} f(x)dx = \frac{h}{2} \times \left[f(x_0) + 2 \times \sum_{i=1}^{4} f(x_i) + f(x_5) \right]$$

Desarrollando resulta

$$I = \frac{h}{2} \times \left[f(x_0) + 2 \times \left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) \right) + f(x_5) \right]$$

Reemplazando por los valores correspondientes de la tabla de datos

I= (0,1/2)*[1+2*(7+4+3+5)+2] = 0,05*[1+2*19+2]=0,05*[1+38+2]=0,05*41=**2,05**

Nota: El código FORTRAN para resolver este inciso con el programa y chequear su implementación se encuentra en las filminas de teoría.

b) **Por el método de 1/3 Simpson compuesto**

Recordemos que ***para aplicar este método la cantidad de segmentos debe ser múltiplo de 2 o lo que es lo mismo, tener un número impar de puntos datos equiespaciados.***

Como se verifico en el inciso anterior, en este caso tenemos 6 puntos y 5 segmentos, por lo que este método **NO** se podría aplicar a todo el intervalo de integración [a,b]. Sin embargo, se puede dividir la integral y aplicar distintos métodos en los subintervalos formados convenientemente.

Por ejemplo, si tomamos los subintervalos [0;0,2], [0,2;0,4] y [0,4;0,5], en los dos primeros puedo aplicar 1/3 de Simpson para integrar (en cada uno tengo 3 puntos y 2 segmentos) y en el último trapecios compuestos.

Recordemos la fórmula de 1/3 Simpson compuesto:

$$I = \frac{h}{3} \times \left[f(x_0) + 4 \times \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Luego, aplicamos las fórmulas correspondientes a cada subintervalo:

$$I = \int_{a=x_0}^{b=x_5} f(x)dx = \frac{h}{3} \times [f(x_0) + 4 \times f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} \times [f(x_2) + 4 \times f(x_3) + f(x_4)] + \frac{h}{2} \times [f(x_4) + f(x_5)]$$

Reemplazando por los valores correspondientes de la tabla de datos

I= (0,1/3)*[1+4*7+4]+(0,1/3)*[4+4*3+5]+(0,1/2)*[5+2]=**2,15**

Nota: El código FORTRAN para resolver este inciso con el programa y chequear su implementación se encuentra en las filminas de teoría.

c) **Por el método de 3/8 Simpson compuesto**

Recordemos que ***para aplicar este método la cantidad de segmentos debe ser múltiplo de 3.***

Como se verifico en el inciso a), en este caso tenemos 6 puntos y 5 segmentos, por lo que este método **NO** se podría aplicar a todo el intervalo de integración [a,b]. Sin embargo, como sucedió en el inciso b), se puede dividir la integral y aplicar distintos métodos en los subintervalos formados convenientemente.

Por ejemplo, si tomamos los subintervalos [0;0,3] y [0,3;0,5], podemos aplicar en el primer subintervalo 3/8 de Simpson (tengo 4 puntos y 3 segmentos) y en el último 1/3 de Simpson (tengo 3 puntos y 2 segmentos).

Recordemos la fórmula de 3/8 Simpson compuesto:

$$I = \frac{3h}{8} \times \left[f(x_0) + 3 \times \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Luego, aplicamos las fórmulas correspondientes a cada subintervalo:

$$I = \int_{a=x_0}^{b=x_5} f(x)dx = \frac{3h}{8} \times [f(x_0) + 3 \times f(x_1) + 3 \times f(x_2) + f(x_3)] + \frac{h}{3} \times [f(x_3) + 4 \times f(x_4) + f(x_5)]$$

Reemplazando por los valores correspondientes de la tabla de datos

I= (3*0,1/8)*[1+3*7+3*4+3]+(0,1/3)*[3+4*5+2]=**2,2208**

Comparación y conclusiones

- Los tres métodos son sencillos de aplicar e implementar.
- El método de trapecios se puede aplicar para cualquier cantidad de puntos datos, pero es el menos exacto. Se deben usar valores pequeños de h para lograr cierta exactitud en la solución numérica.
- Los métodos de Simpson son más exactos y convergen más rápido hacia la verdadera integral conforme los segmentos aumentan.
- 1/3 de Simpson solo puede aplicarse con una cantidad impar de puntos o pares de segmentos.
- 3/8 de Simpson puede aplicarse con una cantidad de puntos igual a 3*n+1, donde n es el número de segmentos o arcos.
- 3/8 de Simpson tiene un error apenas mayor que 1/3 de Simpson.
- La combinación de métodos es posible y permite obtener la integral con mayor exactitud