Guía Nro. 2

1. Escriba un programa FORTRAN que resuelva una ecuación diferencial por el método de Euler Simple y grabe los valores calculados en un archivo. Implemente el método que calcula la solución numérica en cada paso, como una **subrutina**.

2. Calcule la solución del siguiente PVI, por medio del método de Euler simple.

$$y' = -20y + 7e^{-0,5x} \qquad y(0) = 5$$

   a) En forma manual, con $h = 0{,}1$ para $x \in [0; 0{,}2]$
   b) Por medio del programa del inciso anterior, utilizando $h = 0{,}01$ y $h = 0{,}001$, para $x \in [0; 0{,}09]$
   c) Calcule los errores en todos los casos comparando los resultados obtenidos con la solución analítica de la ecuación diferencial.
   d) Grafique la solución obtenida en el inciso a) junto con la solución analítica. Realice lo mismo con el inciso b). Cuál es su conclusión a partir de los gráficos obtenidos ? Justifique los resultados obtenidos, basándose en los fundamentos teóricos del método,
   Nota: La solución analítica es: $y = 5e^{-20x} + \dfrac{7\left(e^{-0,5x} - e^{-20x}\right)}{19{,}5}$

3. Resuelva en computadora, los siguientes PVI por medio del método de Euler simple.

   a) $y' + 3y = e^{-x} \qquad y(0) = 1$ en el intervalo $[0; 0{,}5]$
   b) $y' = x + y + xy \qquad y(0) = 1$ en el intervalo $[0; 1]$

4. Implemente una subrutina para calcular la solución por el método de Euler Modificado (Heun), agréguela como una opción más al menú del programa anterior y resuelva los siguientes PVI:

   a) $y' = \dfrac{1}{x}\left(y^2 + y\right) \qquad 1 \leq x \leq 3 \qquad y(1) = -2 \qquad$ con $h = 0{,}5$
   b) $y' = -xy + \dfrac{4x}{y} \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad y(0) = 1 \qquad$ con $h = 0{,}25$

5. Implemente una subrutina para calcular la solución por el método de Runge-Kutta (4to. Orden), agréguela como una opción más al menú del programa anterior y calcule $y(1)$ e $y(2)$ resolviendo $y' = \dfrac{-1}{1+y^2} \qquad y(0) = 1$

   a) Por medio del método de Euler Modificado (Heun), con $h = 0{,}5$ y con $h = 0{,}1$
   b) Por medio del método de Runge-Kutta (4to. orden), con $h = 0{,}5$ y con $h = 0{,}1$

c) Compare los resultados obtenidos en los incisos anteriores y saque conclusiones.

6. Calcule $y(1)$ e $y(2)$ resolviendo el siguiente PVI, por el método de Runge-Kutta (4to. orden)

$$y' = xy + 1 \qquad y(0) = 0$$

   a) Con $h = 0{,}2$
   b) Con $h = 0{,}1$
   c) Compare los resultados obtenidos en $y(1)$ e $y(2)$ y saque sus conclusiones.

7. Agregue al programa anterior una opción para resolver por el método de Runge-Kutta-Fehlberg y resuelva los siguientes PVI. Adopte el valor de h, de forma tal que el error nunca supere 0,005.

   a) $y' = \frac{1}{x}\left(y^2 + y\right) \qquad 1 \leq x \leq 3 \qquad y(1) = -2$
   b) $y' = -xy + \frac{4x}{y} \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad y(0) = 1$

8. Resuelva los siguientes PVI, y obtenga su solución con un error menor a 0,005.

   a) Por medio del método de Runge-Kutta (4to. orden), utilizando la estrategia 1 para control del paso h.

$$y' = \frac{-y}{1 + x^2} \qquad y(0) = 1$$

   b) Por medio del método de Runge-Kutta-Fehlberg, utilizando la estrategia 2 para control del paso h.

$$y' = 3y + e^{(1-x)} \qquad y(0) = 1$$

9. Un tanque de 200 litros de agua contiene sal con una concentración de 70gr/litro. Con el fin de diluir el contenido de sal, se suministra agua pura a razón de 8 litros/minuto. Si el depósito tiene una mezcla uniforme y la cantidad de agua que entra por minuto al depósito es la misma que sale, la concentración de sal satisface la siguiente ecuación:

$$y' = \frac{-y}{25} \qquad y(0) = 40$$

donde **y** es la concentración de sal en función del tiempo *(minutos)*. Utilice el método de Runge-Kutta-Fehlberg con $h = 0{,}5$ para determinar cuánto tiempo debe transcurrir para que la concentración de sal en el agua sea igual a un décimo del valor inicial.

10. Resuelva el siguiente PVI, por el método que considere más conveniente. Obtenga su solución con un error menor a 0,005.

$$\frac{dy_1}{dx} = -0{,}5y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 4 - 0{,}1y_1 - 0{,}3y_2$$

Calcule su solución numérica en $[0;2]$, sabiendo que $y_1(0) = 4$ e $y_2(0) = 6$

11. El modelo matemático de un circuito eléctrico está dado por la siguiente ecuación diferencial.

$$0{,}5\frac{d^2Q}{dt^2} + 6\frac{dQ}{dt} + 50Q = 24sin\,(10t)$$

Transforme dicha ecuación de 2do. orden, en un sistema de dos ecuaciones de 1er.orden y calcule su solución numérica en el intervalo $[0;2]$. Utilice el método de Runge-Kutta (4to.orden) y $h = 0{,}2$. Considere condiciones iniciales nulas.

12. Determine los valores de $y\,(1)$ e $y\prime\,(1)$ para el siguiente PVI:

$$y\prime\prime - 0{,}05y\prime + 0{,}15y = 0$$

Considerando las siguientes condiciones iniciales $y\,(0) = 1 \qquad y\prime\,(0) = 0$. Utilice el método de Runge-Kutta (4to.orden) y $h = 0{,}05$.

13. El siguiente sistema representa una conjunto de dos masas con dos amortiguadores y tres resortes, uno de ellos vinculando ambas masas:

$M_1x_1\prime\prime + K_1x_1 - K_12(x_2 - x_1) + c_1x_1\prime = 0$
$M_2x_2\prime\prime + K_2x_2 + K_12(x_2 - x_1) + c_2x_2\prime = 0$

Con las constantes:
$K_1 = 6{,}10 \qquad K_12 = 8{,}80 \qquad K_2 = 5{,}80$
$M_1 = 174 \qquad M_2 = 132$
$c_1 = 41 \qquad c_2 = 21$

Valores iniciales:
$x_1 = -5{,}0cm \qquad x_1\prime = 0$
$x_2 = 7{,}0cm \qquad x_2\prime = 0$

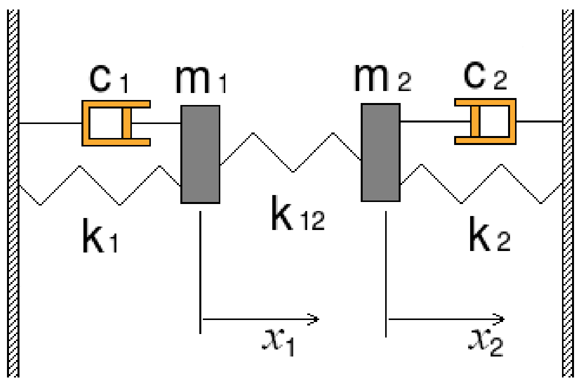

Figura 1: sistema

Grafique las posiciones y velocidades de las dos masas para $0 \leq t \leq 30seg$, eligiendo un h b) que asegure que $e \leq 10^{-4}$.

14. Resuelva el siguiente PVI:

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t$$

Considerando las siguientes condiciones iniciales $y(0) = 1$ $y'(0) = 2$ $y''(0) = 0$. Utilice el método de Runge-Kutta-Fehlberg y $h = 0{,}2$.

15. La corriente eléctrica del circuito que aparece en la Figura 2, satisface la siguiente ecuación integro-diferencial: $L\dfrac{di}{dt} + iR + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t idt + \dfrac{q(0)}{C} = E(t)$

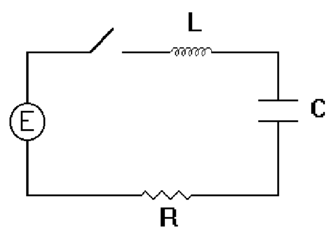

Figura 2: Circuito Eléctrico

Siendo $L = 200henry$; $C = 0{,}001farad$ y $E(t) = 1volt$. En t = 0 se cierra el interruptor, siendo todas las condiciones iniciales nulas en ese instante. Calcule los valores de la corriente $i(t)$ para $0 \le t \le 5seg$, para los siguientes casos: R = 0 Ohms; R = 50 Ohms; R = 100 Ohms y R = 300 Ohms. Grafique las soluciones obtenidas.

16. En la figura 3 se observa un sistema mecánico constituido por tres masas, tres resortes y dos amortiguadores. Los desplazamientos de las mismas satisfacen las ecuaciones dadas por:

$M_1y_1'' + B_1y_1' + K_1y_1 - B_1y_2' - K_2y_2 = F_1(t)$
$-B_1y_1' - K_1y_1 + M_2y_2'' + B_1y_2' + (K_1 + K_2)y_2 - K_2y_3 = 0$
$-K_2y_2 + M_3y_3'' + B_2y_3' + (K_2 + K_3)y_3 = F_3(t)$

Las constantes del sistema son:
$K_1 = K_2 = K_3 = 1$ (constantes de los resortes, kgm/s^2)
$M_1 = M_2 = M_3 = 1$ (masa, kg)
$B_1 = B_2 = 0{,}1$ (coeficientes de amortiguamiento, kg/s)

Todos los elementos se hallan inicialmente en reposo en sus posiciones de equilibrio (condiciones iniciales).

a) $F_1 = 0{,}2$ $F_3 = 0$ (fuerza, newton)
b) $F_1 = 1{,}0$ para $t \ge 0 \le 1seg$ $F_3 = 0$ (fuerza, newton)
c) $F_1 = 1{,}0$ para $t \ge 0 \le 1seg$ $F_3 = -0{,}1$ (fuerza, newton)

En todos los casos, grafique las posiciones y velocidades de las tres masas para $0 \le t \le 10seg$, eligiendo un h adecuado.

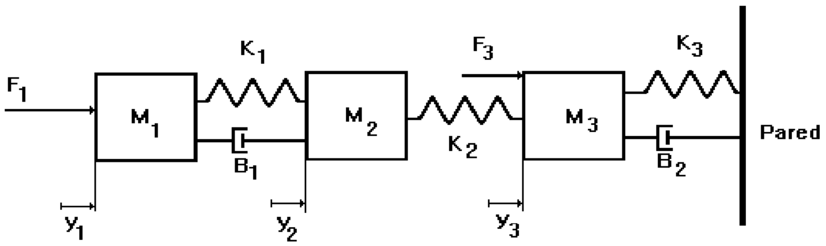

Figura 3: Masa-Resorte-Amortiguador

17. Considere el problema de predecir la población de dos especies en competencia. Una de ellas es un predador, cuya población en función del tiempo es $x_2(t)$, que se alimenta de otra especie (presa) cuya población está representada por $x_1(t)$. Supondremos que la presa tiene siempre el suministro adecuado de alimento y que su tasa de natalidad es proporcional al número de individuos que conforman dicha población, es decir, la tasa de natalidad de las presas es $k_1x_1(t)$. La tasa de mortalidad de las presas depende del número de presas y de predadores. Por razones de simplicidad, representaremos dicha tasa, como $k_2x_1(t)\,x_2(t)$. Por otra parte, la tasa de natalidad de los predadores, depende de la cantidad de alimento, además de la cantidad de individuos aptos para reproducirse. Por lo tanto representaremos la tasa de natalidad de los predadores, como $k_3x_1(t)\,x_2(t)$. Por último, tomaremos la tasa de mortalidad de los predadores, simplemente como proporcional a la cantidad de individuos, es decir, $k_4x_2(t)$.

    De esta forma podemos expresar la variación de ambas poblaciones como un sistema de ecuaciones diferenciales.

    $$x_1'(t) = k_1x_1(t) - k_2x_1(t)\,x_2(t)$$
    $$x_2'(t) = k_3x_1(t)\,x_2(t) - k_4x_2(t)$$

    Suponga que la población inicial de las presas es 1000, la de los predadores es 200 y que los valores de las constantes son $k_1 = 3$; $k_2 = 0{,}002$; $k_3 = 0{,}0006$ y $k_4 = 0{,}5$. Grafique la evolución de las poblaciones.