Tema: *Solución Numérica de Sistemas de Ecuaciones Lineales*

Ejercicios de Ejemplo de la Guía 3

A continuación, se presentan y resuelven los ejercicios 5 y 11 de la Guía Nro. 3.

Ejercicio 5

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, cuya única solución es $[1,3,2]^T$.

$$\begin{gathered} 6x_1 + 6x_2 + 3.00001x_3 = 30.00002 \\ 10x_1 + 8x_2 + 4.00003x_3 = 42.00006 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2.00002x_3 = 22.00004 \end{gathered}$$

Si efectuamos una perturbación que sólo afecte a los segundos miembros del sistema, llevándolos respectivamente a 30, 42 y 22 (dando intactos a los demás elementos), se observa que la solución del sistema se modifica notablemente, siendo ahora igual a $[1,4,0]^T$.

- **a)** Calcule el número de condición de la matriz. ¿Es consistente con el resultado mencionado?
- **b)** Calcule el error relativo $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$, utilizando la norma M.
- **c)** Estime el valor de la cota teórica del error relativo.
- **d)** ¿Qué tamaño máximo (medido en norma M) podrá tener una eventual perturbación que afecte a la matriz del sistema, si se quiere que el mismo siga teniendo una única solución?

Resolución

Antes de comenzar con la resolución de los puntos solicitados, es importante corroborar que los vectores solución indicados en la consigna son correcto. Para ello, en este caso, se resolvió el sistema con el método de Gauss y se comprobó que los resultados son correctos.

Subrutina FORTRAN90 utilizada:

```
Subroutine Gauss(A,X)
  integer i,j,k
  real (8) A(ord,ord+nterm),X(ord),S

    Call Ingreso_Mat (A,B,tol,iter_max)
    DO k=1,ord
     DO i=k+1,ord+1
        A(k,i)=A(k,i)/A(k,k)
     END DO
     IF (k.NE.ord) THEN
```

```
        DO i=k+1,ord
          DO j=k+1,ord+nterm
            A(i,j)= A(i,j)-A(i,k)*A(k,j)
          END DO
        END DO
      END IF
    END DO

    x(ord)=A(ord,ord+1)

    DO i=ord-1,1,-1
      S=0.0
      DO j=i+1,ord
        S=S+A(i,j)*x(j)
      END DO
      x(i)=A(i,ord+1)-S
    END DO

    Write(*,*) '---------------------------------------------------'
    Write(*,*) 'La solucion con Gauss es:'

    DO i=1,ord
      write(*,'(A3,I2,A2,F12.6)') 'X(',i,')=',X(i)
      write(1,'(F15.9,A2)',Advance='no') X(i), '  '
      write(1,*) ' '
    END DO

    Write(*,*) '---------------------------------------------------'
    Write(*,*) ' '
    Write(*,*) ' '
    CLOSE(1, Status='keep')

End subroutine Gauss
```

a) Calcule el número de condición de la matriz. ¿Es consistente con el resultado mencionado?

Para comenzar, debemos conocer la fórmula que nos permite calcular el número de condición. Dicha fórmula, se presenta a continuación:

$$cond\ (A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

Donde ||A|| es la norma de la matriz A y $||A^{-1}||$ la norma de la matriz inversa A.

El primer paso es, entonces, conocer la matriz inversa A. Para ello, existen varias opciones, pero para el presente ejemplo se decidió utilizar el método de Gauss-Jordan colocando como vector B la matriz identidad (estrictamente, se resolvió con una matriz extendida. Ver código debajo). El resultado obtenido se muestra a continuación:

```
Matriz A:

 |        6.00000          6.00000          3.00001    |
 |       10.00000          8.00000          4.00003    |
 |        6.00000          4.00000          2.00002    |

Matriz Inversa de A:

 |        1.00000         -2.00000          2.50000    |
 |    99863.88095    -149795.07143     149794.57143    |
 |  -199728.76190     299593.14286    -299593.14286    |
```

Una vez obtenida la matriz inversa, resta obtener la norma de A y de A^{-1}. Para presente ejemplo, se utilizó la norma M o norma de máximo y los valores obtenidos fueron los siguientes:

$||A|| = 22.00003$

$||A^{-1}|| = 798915.04762$

Finalmente, se calculó el número de condición como:

cond (a) = $||A||\ ||A^{-1}|| = 22.00003 * 8915.04762 =$ **17576155.04762**

El número de condición obtenido es muy alto, algo que era esperable al ver que la solución era tan sensible a pequeñas perturbaciones. Dicho de otra forma, este valor tan alto en el número de condición nos alerta sobre la sensibilidad que tiene nuestro sistema ante pequeñas perturbaciones. Finalmente, el número de condición es consistente con los cambios en los resultados y confirma que el sistema está mal condicionado.

Subrutina FORTRAN90 utilizada para el inciso a):

```
Subroutine Invierte (ord,A,NormaInv)
  integer i,j,ord,fila
  Real (8) A(ord,2*ord),NormaInv,suma
    DO i=1,ord
    A(i,i+1:)=A(i,i+1:)/A(i,i)
    A(i,i)=1
    DO fila=1,i-1
      A(fila,i+1:)=A(fila,i+1:)-A(i,i+1:)*A(fila,i)
      A(fila,i)=0
    END DO
    DO fila=i+1,ord
      A(fila,i+1:)=A(fila,i+1:)-A(i,i+1:)*A(fila,i)
```

```
    A(fila,i)=0
   END DO
  END DO
  write(1,'(A10)') '  '
  write(1,'(A20)') 'Matriz Inversa de A:'
  write(1,'(A10)') '  '
  DO i=1,ord
   write(1,'(A4)',Advance='no') ' | '
   DO j=ord+1,(2*ord)
    write(1,'(F14.5,A2)',Advance='no') A(i,j), ' '
   END DO
   write(1,*) '|'
  END DO

  NormaInv=0
  Do i=1, ord
   suma=0
   Do j=ord+1,2*ord
    suma=suma+abs(A(i,j))
   end do
   if (suma>NormaInv) then
     NormaInv=suma
   end if
  end do
end subroutine
```

b) Calcule el error relativo $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$, utilizando la norma M.

Por un lado, debemos calcular ||δx||, valor que corresponde a la máxima diferencia en módulo entre la solución perturbada y la solución sin perturbar. Es decir, la diferencia entre $[1,3,2]^T$ y $[1,4,0]^T$. Por lo tanto, el valor de ||δx|| es:

||δx|| = 2

Por otro lado, debemos calcular el valor de ||x||, donde "x" es $[1,3,2]^T$, ya que corresponde a la solución sin perturbar. Luego, el valor de ||x|| es:

||x|| = 3

Finalmente,

$\frac{\|\boldsymbol{\delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ o 66.6%

Esto muestra que el sistema de ecuaciones es muy sensible o, en otras palabras, que está mal condicionado.

c) Estime el valor de la cota teórica del error relativo.

Para el cálculo utilizaremos la expresión:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{cond\ (A)}{1 - cond\ (A).\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}.\left[\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}\right]$$

Sabemos que para el caso $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = 0$. Por lo tanto, la expresión se reduce a:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq cond\ (A).\left[\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}\right]$$

Por último,

$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq 17576155.04762\ .\frac{0.00006}{42.00006} = \mathbf{25.10876}$

d) ¿Qué tamaño máximo (medido en norma M) podrá tener una eventual perturbación que afecte a la matriz del sistema, si se quiere que el mismo siga teniendo una única solución?

Para que la matriz del sistema tenga una única solución debemos asegurar que:

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Reemplazando los valores obtenemos que:

$\|\boldsymbol{\Delta A}\| < \frac{1}{798915.04762}$ = $\mathbf{1.251\ 10^{-6}}$ o 0.0001251%

Ejercicio 11

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{vmatrix} 1.28 & 2.9 & -12.8 & 2.5 \\ -8.26 & 1.26 & 5.3 & 1.02 \\ 0.96 & -12.03 & -3.6 & 2.54 \\ 3.6 & 1.26 & -1.62 & 8.69 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 1.69 \\ -5.6 \end{vmatrix}$$

Encuentre su solución utilizando el método de Jacobi, partiendo de un vector inicial nulo. Indique cuál es la primera iteración que verifica $||r||_M < 10^{-7}$. Si se descubre posteriormente que el elemento (3,4), debido a un error, posee signo contrario, considere a este sistema como perturbado y estime la cota teórica de error relativo de la solución. Justifique.

Resolución

Si comenzamos intentando resolver el sistema tal y como está en el enunciado, veremos que no converge a una solución. Es por eso que debemos ubicar los mayores valores en la diagonal. Para ello, basta con realizar un pivoteo parcial manual en filas y reacomodar la matriz. Los cambios realizados fueron los siguientes:

$F_3 \rightarrow F_1$
$F_1 \rightarrow F_2$
$F_2 \rightarrow F_3$

Una vez hecho esto, el sistema queda ordenado de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} -8.26 & 1.26 & 5.3 & 1.02 \\ 0.96 & -12.03 & -3.6 & 2.54 \\ 1.28 & 2.9 & -12.8 & 2.5 \\ 3.6 & 1.26 & -1.62 & 8.69 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.25 \\ 1.69 \\ 0 \\ -5.6 \end{vmatrix}$$

a) Indique cuál es la primera iteración que verifica $||r||_M < 10^{-7}$.

A partir del sistema presentado anteriormente, se resolvió mediante el método de Jacobi con una tolerancia que verifica el error $||r||_M < 10^{-7}$. La solución encontrada fue:

X_1= -0.268267
X_2= -0.077345
X_3= -0.288866
X_4= -0.575920
Número de iteraciones para alcanzar la solución: 20
$||r||_M$ en la iteración 20= 0.476 E-07

Subrutina FORTRAN90 utilizada para el inciso a) (Método de Jacobi):

```
SUBROUTINE Jacobi(A,B,X,Xnew)
INTEGER i,j,op,iter,iter_max,k
REAL(8)
A(ord,ord+nterm),B(ord),X(ord),Xnew(ord),tol,suma,max_res,R(ord),delta_X(ord)
LOGICAL flag,flag1
   iter_max=0
   Call Ingreso_Mat (A,B,tol,iter_max)
   X=0.
   flag1=.true.
   DO WHILE(flag1 .EQV. .true.)

     WRITE(*,*)''
     WRITE(*,*)'Metodo de Jacobi con X0=0'
     WRITE(*,*)'1- Ejecutar por iteraciones'
     WRITE(*,*)'2- Ejecutar por tolerancia del vector residuo.'
     WRITE(*,*)''
     WRITE(*,'(A)')'OPCION: '
     READ*,op

    SELECT CASE(op)
     CASE(1)
       DO iter=1,iter_max
        DO i=1,ord
         suma=0
         DO j=1,ord
             IF (j/=i) THEN
                suma=suma+A(i,j)*X(j)
             END IF
         END DO
           Xnew(i)=(1./A(i,i))*(B(i)-suma)
        END DO
          write(*,*)'------------------------------------------------'
          WRITE(*,'(A23,I5)') 'Numero de iteracion:   ',iter
          Do k=1,ord
            write(*,'(A3,I2,A2,F12.6)') 'X(',k,')=',x(k)
          end do
          write(*,*)'------------------------------------------------'
          WRITE(*,*)''
          X=Xnew
       END DO
       flag1=.false.
     CASE(2)
        flag=.true.
        iter=0
```

```
            write(*,*)'-----------------------------------------------'
            WRITE(*,'(A23,I5)') 'Numero de iteracion:   ',iter
            Do k=1,ord
               write(*,'(A3,I2,A2,F12.6)') 'X(',k,')=',x(k)
            end do
            WRITE(*,*)''

            DO WHILE (flag .EQV..true.)
              DO i=1,ord
                suma=0
                DO j=1,ord
                   IF (j/=i) THEN
                      suma=suma+A(i,j)*X(j)
                   END IF
                END DO
                  Xnew(i)=(1./A(i,i))*(B(i)-suma)
              END DO
              X=Xnew
              iter=iter+1
              write(*,*)'-----------------------------------------------'
              WRITE(*,'(A23,I5)') 'Numero de iteracion:   ',iter
                Do k=1,ord
                  write(*,'(A3,I2,A2,F12.6)') 'X(',k,')=',x(k)
                end do

              CALL RESIDUO(A,B,X,R,max_res,delta_X)
              write(*,*)'Residuo: '
                Do k=1,ord
                  write(*,'(A3,I2,A2,F12.6)') 'R(',k,')=',R(k)
                end do
                write(*,'(A7,F12.6)') ' Rmax= ',maxval(abs(R))
              write(*,*)'-----------------------------------------------'

              IF (max_res<tol) THEN
                 flag=.false.
                ELSE
                Xnew=Xnew+delta_X
               END IF
             END DO
             flag1=.false.
          CASE DEFAULT
            WRITE(*,*)'OPCION INVALIDA.'
          END SELECT
      END DO
  END SUBROUTINE
```

Subrutina FORTRAN90 utilizada para el cálculo del residuo (podría ser una función):

```
SUBROUTINE RESIDUO(A,B,X,R,max_res,delta_X)
INTEGER i,j
REAL(8) A(ord,ord+nterm),B(ord),X(ord),delta_X(ord),suma,R(ord),max_res

  delta_X=0
  DO i=1,ord
    suma=0
    DO j=1,ord
     suma=suma+A(i,j)*X(j)
    END DO
    R(i)=suma-B(i)
    IF (i==1) THEN
      max_res=ABS(R(i))
      ELSE
      IF (ABS(R(i))>max_res) THEN
        max_res=ABS(R(i))
      END IF
   END IF
  END DO
END SUBROUTINE
```

b) Si se descubre posteriormente que el elemento (3,4), debido a un error, posee signo contrario, considere a este sistema como perturbado y estime la cota teórica de error relativo de la solución. Justifique.

En este caso, el sistema a resolver sería el siguiente:

$$\begin{vmatrix} -8.26 & 1.26 & 5.3 & 1.02 \\ 0.96 & -12.03 & -3.6 & \mathbf{-2.54} \\ 1.28 & 2.9 & -12.8 & 2.5 \\ 3.6 & 1.26 & -1.62 & 8.69 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.25 \\ 1.69 \\ 0 \\ -5.6 \end{vmatrix}$$

Aclaración: el elemento (3,4) del sistema original se corresponde con el elemento (2,4) de la matriz pivoteda.
La solución al sistema es:

X_1= -0.204496
X_2= 0.166568
X_3= -0.237421
X_4= -0.628114
Número de iteraciones para alcanzar la solución: 18
$||r||_M$ en la iteración 18= 0.839 E-07

El código utilizado fue el mismo que el presentado en el inciso a).

Para el cálculo de la cota de error relativo debemos utilizar la expresión:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq cond\ (A).\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Primero calculamos el número de condición:

$\|A\| = 19.4800$
$\|A^{-1}\| = 0.2159$
cond (a) = $\|A\|\ \|A^{-1}\| = 19.4800*0.2159 = 4.2052$
$\|\Delta A\| = |2.54-(-2.54)| = 5.08$

Luego, reemplazando:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq 4.2052.\frac{5.08}{19.4800} = 1.0966$$

Se aprecia que la matriz es poco sensible a cambios en sus coeficientes o, dicho en otras palabras, que está bien condicionada. Esto explica porqué incluso habiendo cambiado el signo de un valor, la solución del vector X se vio poco afectada.