



Análisis Numérico para Ingeniería

Clase Nro. 12



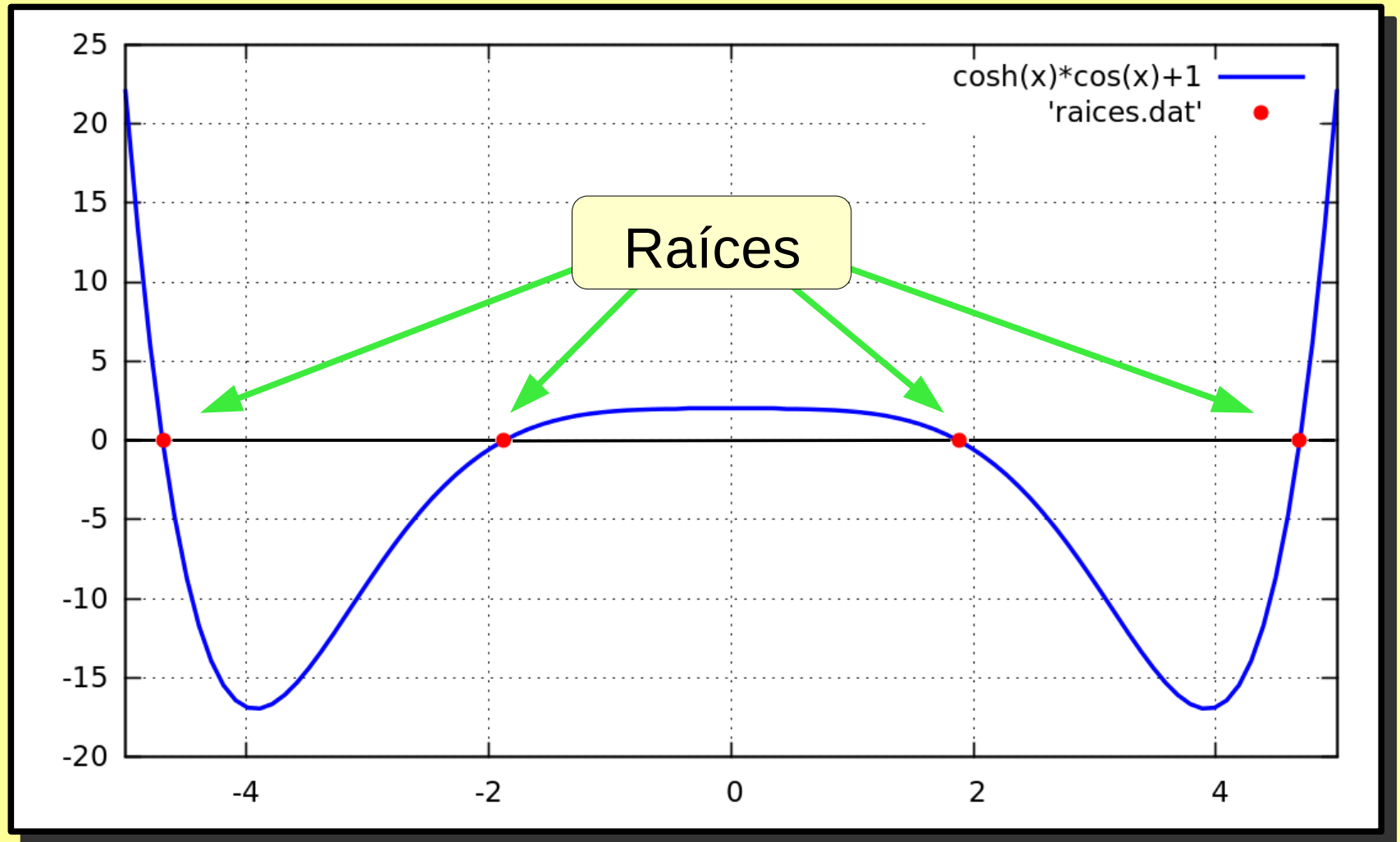
Solución de Ecuaciones No Lineales

Temas a tratar:

- Método de Bisección.
- Método de Punto Fijo.
- Método de Punto Fijo Sistemático.
- Método de Newton-Raphson.
- Análisis de la Convergencia.



Problema a resolver





Ejemplos en problemas de Ingeniería

Utilizando la ecuación de Chen, un Ingeniero Químico obtuvo un factor de fricción (f) de 0.01 para una tubería con rugosidad relativa (ε) 0.006.

Si por la tubería circula agua con un caudal de $0.01 \text{ m}^3/\text{s}$.

¿Cuál es el diámetro de la tubería?

$$Re = \frac{\rho \cdot v_s \cdot D}{\mu}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4 \cdot \log \left\{ \frac{\varepsilon}{3.7065} - \frac{5.0452}{Re} \cdot \log \left[\frac{\varepsilon^{1.1098}}{2.8257} + \frac{5.8506}{Re^{0.8981}} \right] \right\}$$



Ejemplos en problemas de Ingeniería

James M. Douglas desarrolló la siguiente función de transferencia de un sistema de control proporcional para un reactor isotérmico continuo.



*El problema consiste en determinar las raíces de la función de transferencia para un rango de valores de **Kc** y calcular el valor crítico de **Kc** por encima del cual el sistema se vuelve inestable.*

$$K_c \cdot \frac{2.98 \cdot (s + 2.25)}{(s + 1.45) \cdot (s + 2.85)^2 \cdot (s + 4.35)} = -1$$



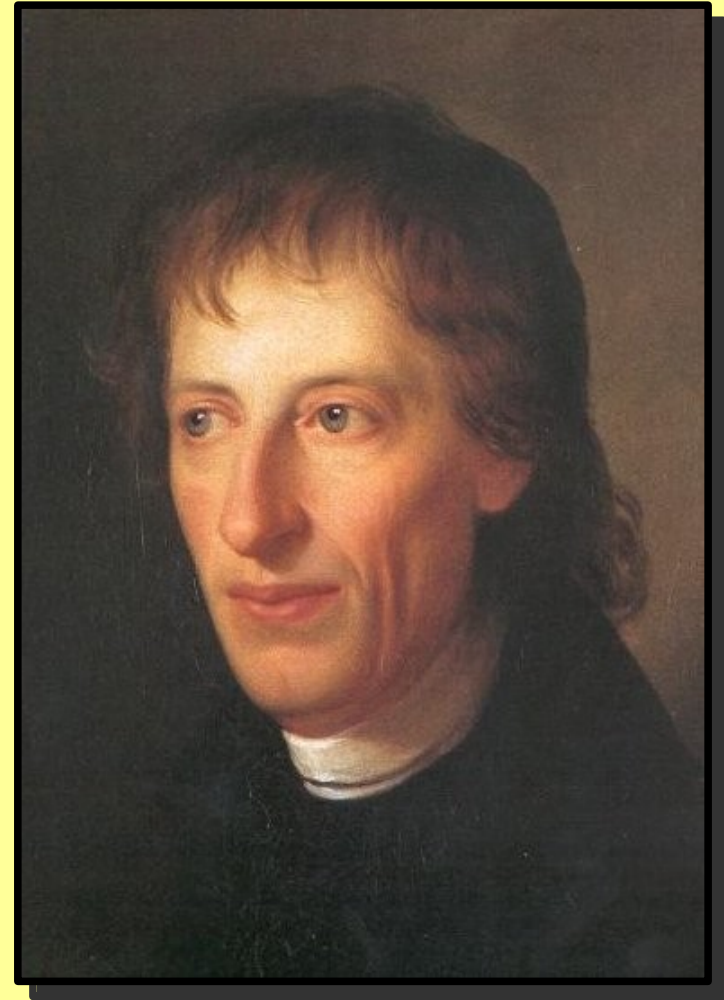
Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano

Nació el 5 de octubre de 1781 en la actual República Checa.

En matemáticas, se le conoce por el teorema de **Bolzano**, así como por el teorema de **Bolzano-Weierstrass**, que esbozó como tema de otro trabajo en 1817, y décadas más tarde, habría de desarrollar **Karl Weierstrass**.

Criticó el idealismo de **Hegel** y **Kant** afirmando que los números, las ideas y las verdades existen de modo independiente a las personas que los piensan.

Falleció el 18 de diciembre de 1848 en la actual República Checa.





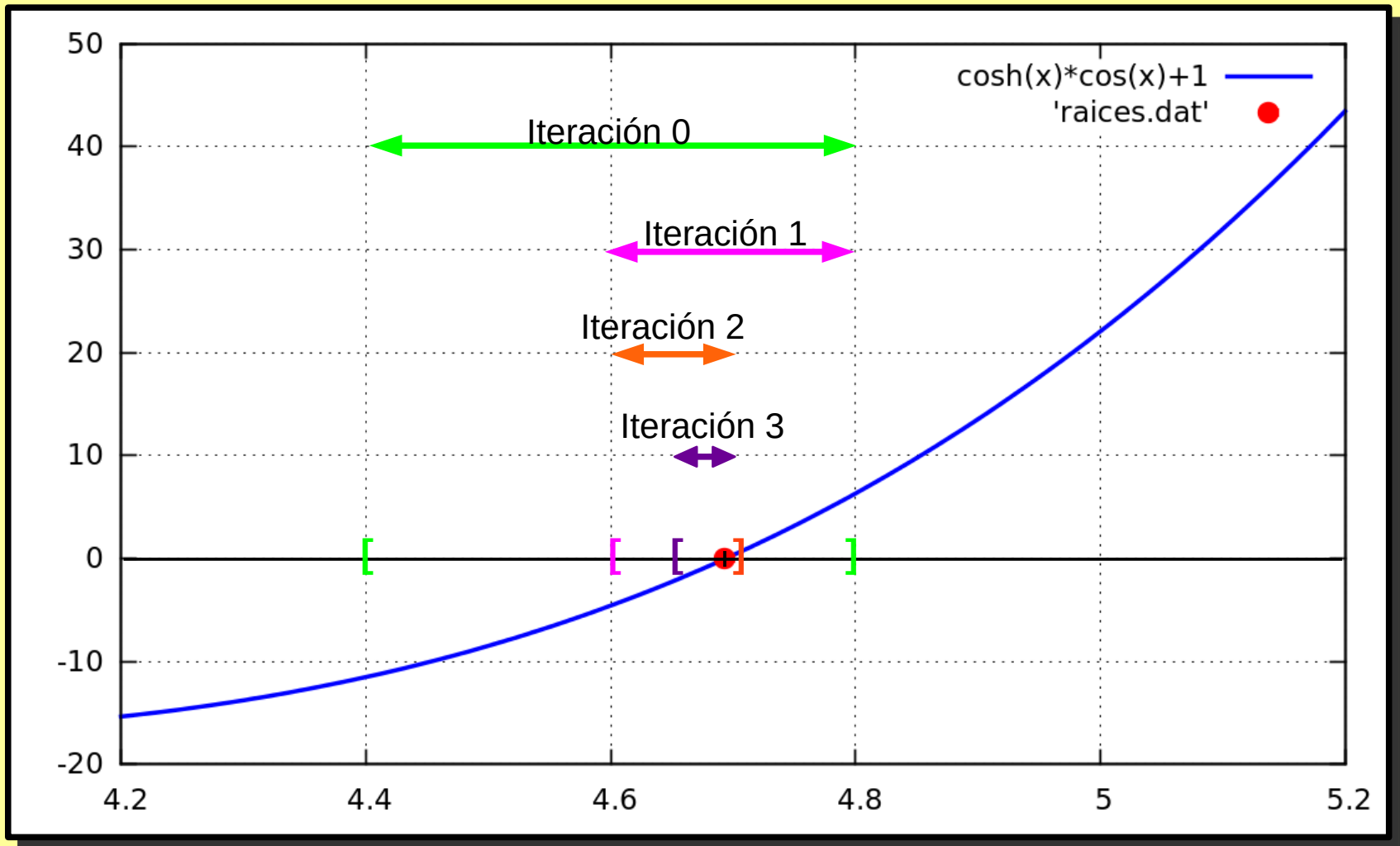
Teorema de Bolzano

El método de Bisección está basado en la aplicación del **Teorema de Bolzano** que establece que:

Dada una **función f real y continua** en un intervalo cerrado **$[a,b]$** con **$f(a)$** y **$f(b)$** de **signos contrarios**. Entonces existe **al menos un punto c** del intervalo abierto **(a, b)** en el que se cumple que **$f(c) = 0$** .



Esquema de Bisección





Error en Bisección

Error prospectivo

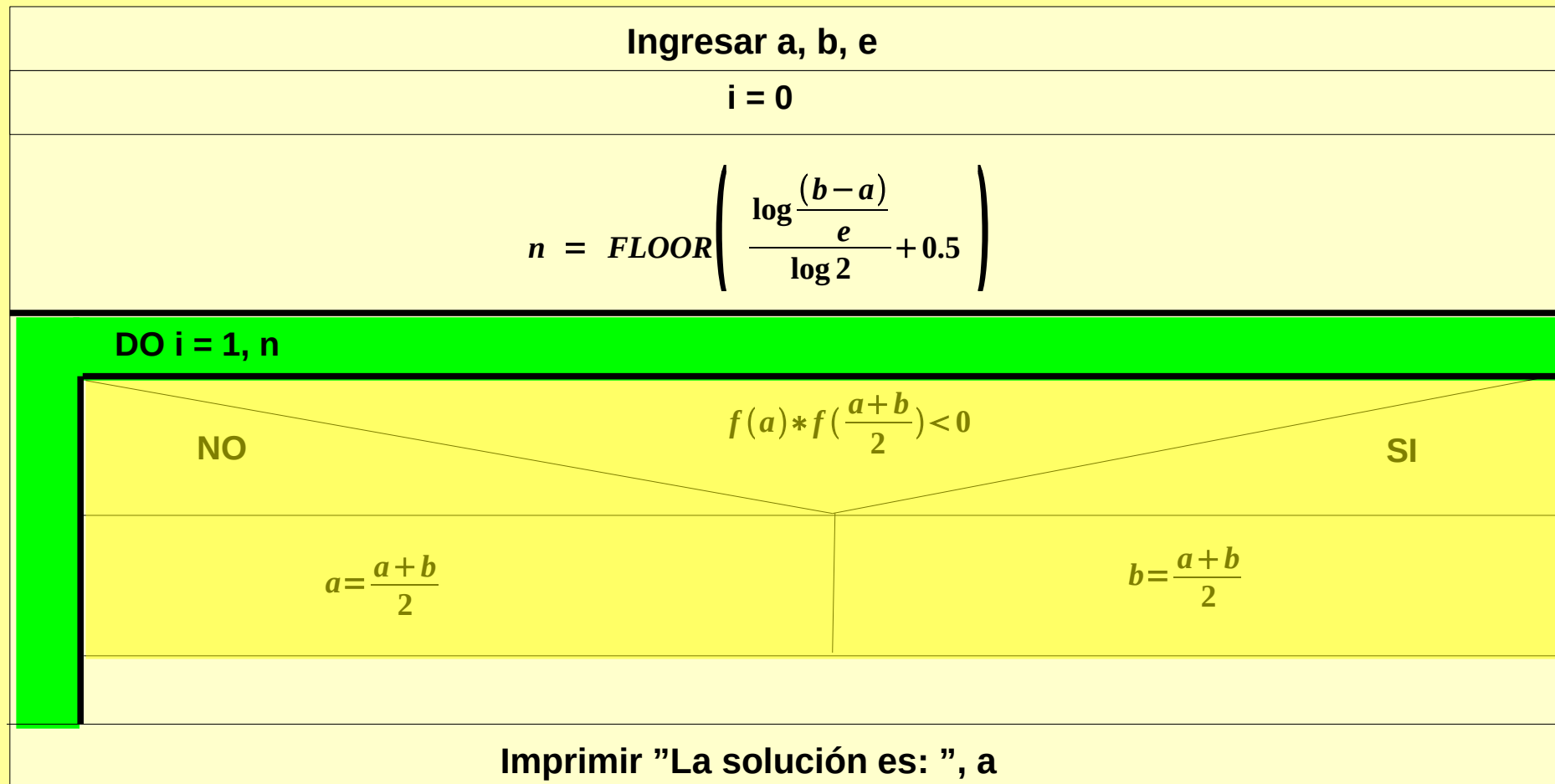
$$|x - x_n| \leq \frac{(b-a)}{2^n} = \varepsilon$$

Por lo tanto, si aplicamos el **método de Bisección**, podemos calcular la cantidad de iteraciones necesarias para calcular una raíz con una determinada exactitud.

$$n \geq \frac{\log \frac{(b-a)}{\varepsilon}}{\log 2}$$



Algoritmo de Bisección





Código de Bisección

```
PROGRAM biseccion
! Metodo de Biseccion
INTEGER n, i
REAL(8) a, b, m, error

WRITE (*,'(A20)', advance = 'no'), "Extremo Izquierdo: "
READ *, a
WRITE (*,'(A18)', advance = 'no'), "Extremo Derecho: "
READ *, b
WRITE (*,'(A8)', advance = 'no'), "Error: "
READ *, error
! Calcula la cantidad máxima de iteraciones
n = FLOOR((log(abs(b-a)/ error))/log( 2.0 ) + 0.5)

! Inicializa el contador de iteraciones
i=0
```

Sigue en la
próxima página



Código de Bisección

```
DO i = 1, n
  WRITE(*, '(I5, 3F15.10)'), i, a, b, b-a
  ! Calcula el punto medio del sub-intervalo
  m = (a+b)/2.0
  ! Determina el sub-intervalo que contiene a la raíz
  IF (f(a)*f(m) < 0 ) THEN
    b = m
  ELSE
    a = m
  ENDIF
END DO

CONTAINS
! Función no lineal
FUNCTION f( x )
  REAL(8) f, x
  f = cosh(x)*cos(x) + 1
END FUNCTION

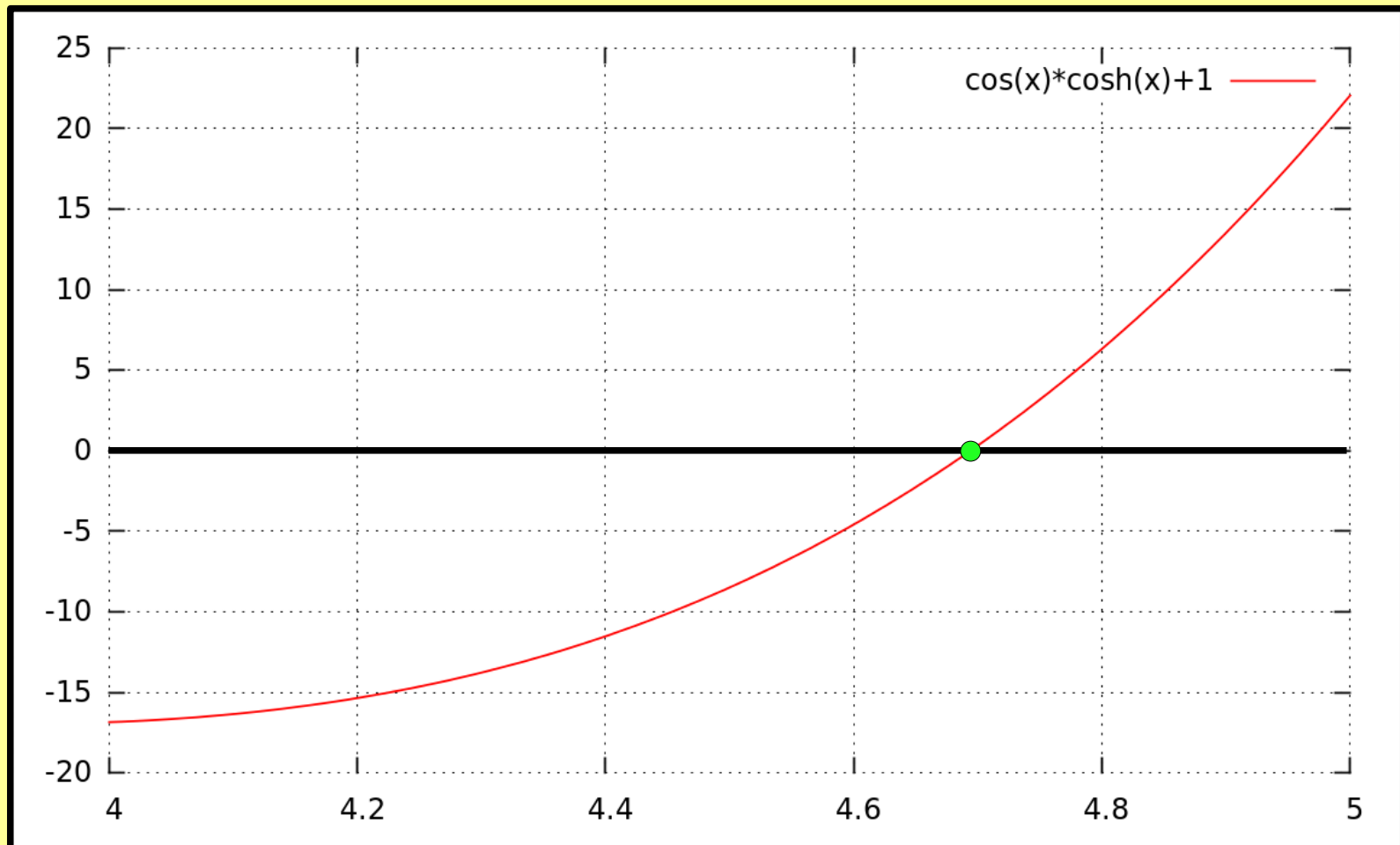
END PROGRAM
```



Ejemplo Numérico

Obtener el valor numérico de la raíz de la ecuación, en el intervalo $[4, 5]$

$$\cos(x) \cdot \cosh(x) = -1$$





Ejemplo Numérico

$$\cos(x) \cdot \cosh(x) = -1$$

Número de Iteración	Límite Inferior	Límite Superior	Cota de Error
0	4	5	1
1	4,5	5	0,5
2	4,5	4,75	0,25
3	4,625	4,75	0,125
4	4,6875	4,75	0,0625
5	4,6875	4.71875	0,03125
6	4,6875	4.703125	0,015625
7	4,6875	4.6953125	0,0078125
8	4,69140625	4.6953125	0,00390625
9	4,693359375	4.6953125	0,001953125
10	4,693359375	4.694335937	9,765625x10 ⁻⁴



Método de Punto Fijo

El método de **Punto Fijo** consiste en llevar a una función $f(x) = 0$ a la forma $x = g(x)$, despejando una de las x de la ecuación, para aplicar el siguiente esquema iterativo.

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Este **esquema iterativo** convergerá hacia la **solución deseada** si la función $g(x)$ hallada, cumple ciertas condiciones de convergencia, ya que en un caso práctico, puede existir más de un reordenamiento posible.



Ejemplo

Posibles reordenamientos :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \sin(3x) = 0$$

$$g(x) = \sin(3x) \cdot (x-1) - 1$$

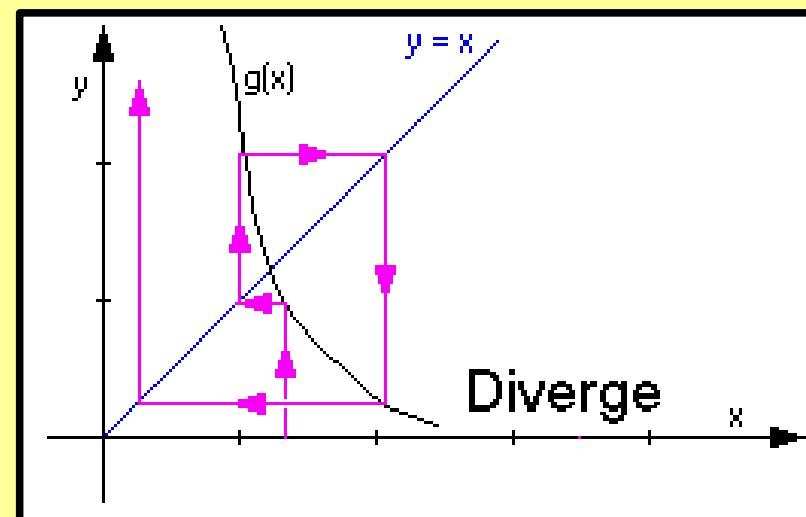
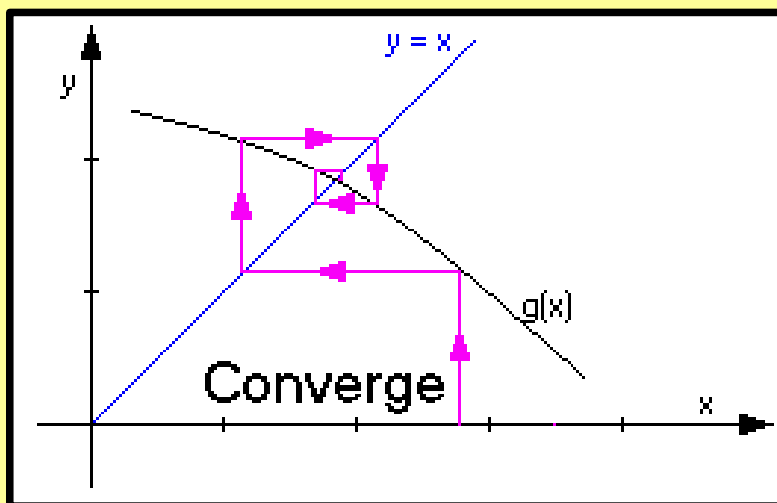
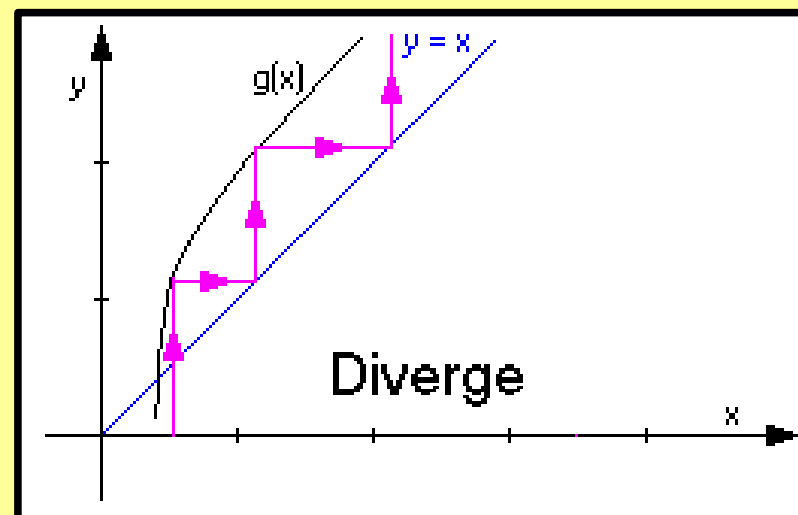
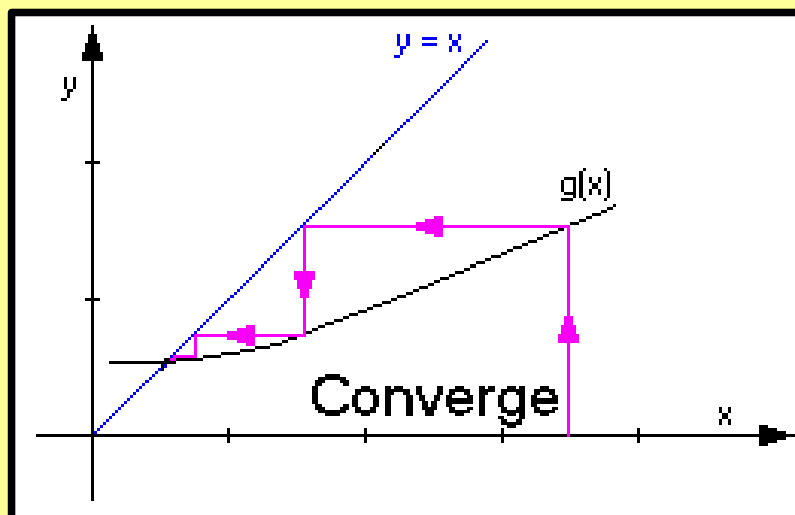
$$g(x) = \frac{(x+1)}{\sin(3x)} + 1$$

$$g(x) = \frac{\arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{3}$$

No todos los reordenamientos posibles son convergentes hacia la raíz buscada.



Se pueden presentar 4 casos

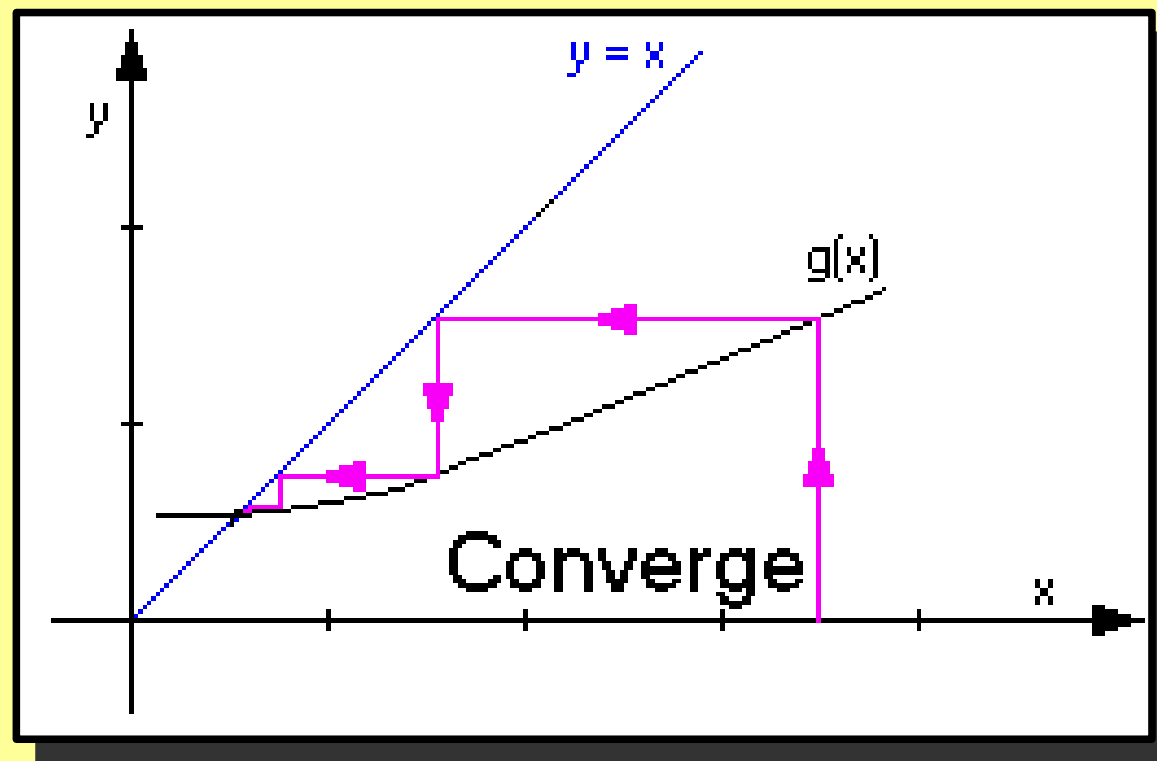




Caso Nro. 1

(Convergente)

$$0 < g'(x) < 1$$

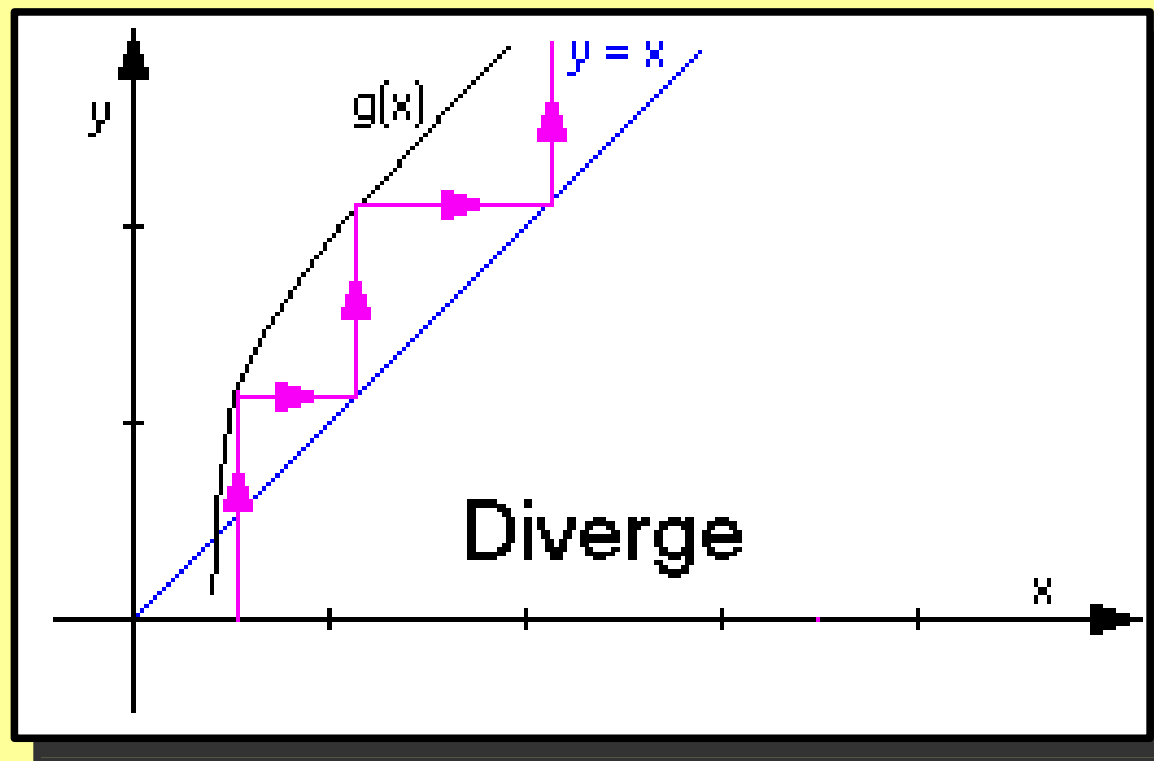




Caso Nro. 2

(Divergente)

$$g'(x) > 1$$

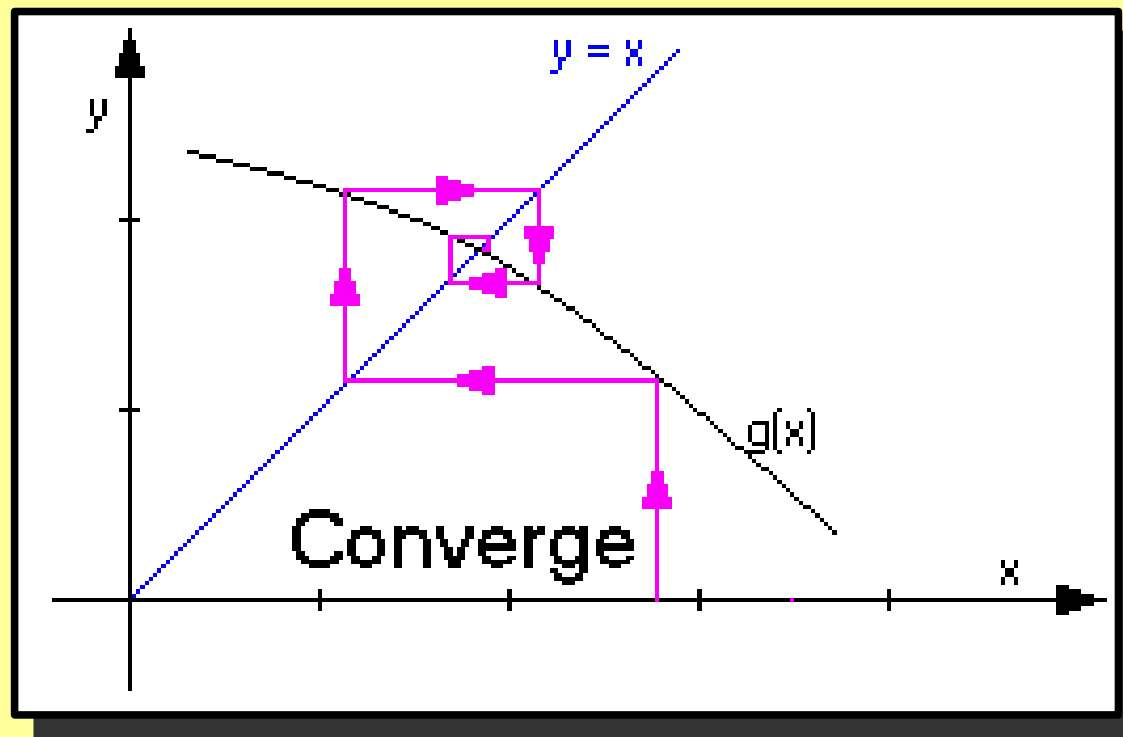




Caso Nro. 3

(Convergente)

$$-1 < g'(x) < 0$$

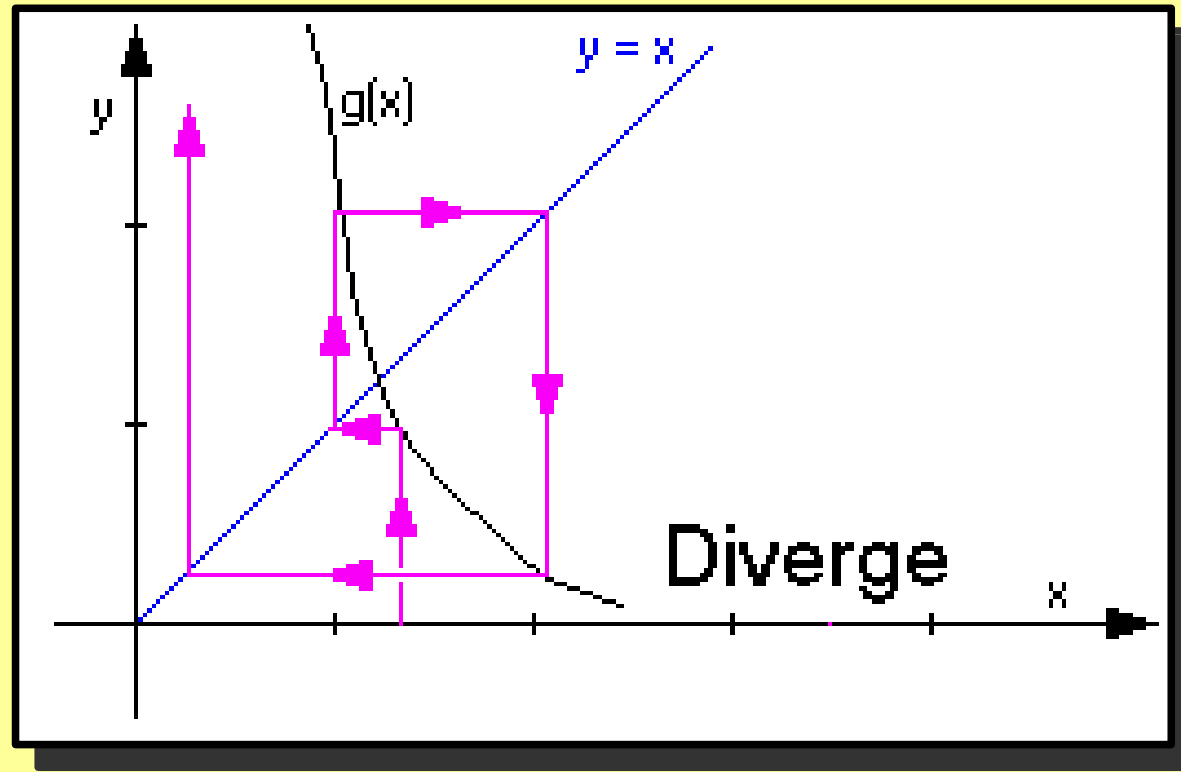




Caso Nro. 4

(Divergente)

$$g'(x) < -1$$

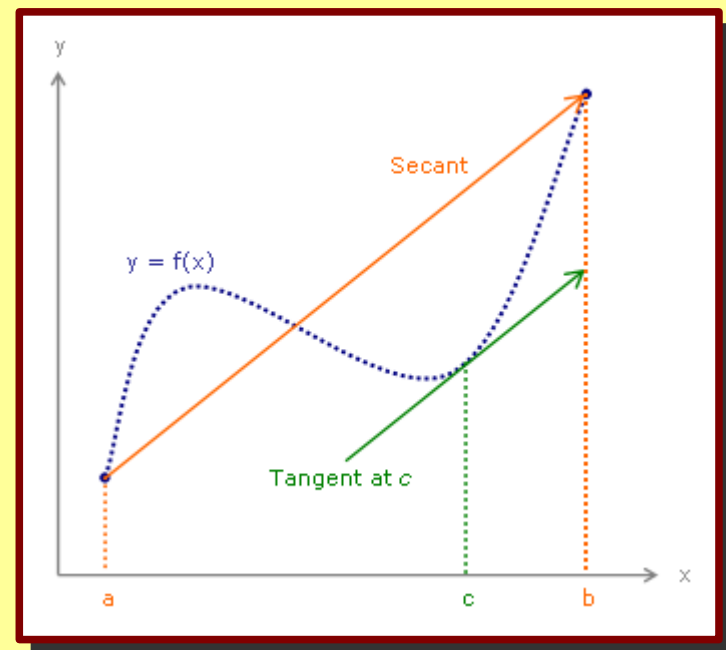




Teorema del Valor Medio

Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y diferenciable en el **intervalo abierto** (a, b) entonces existe al menos algún **punto c** en el **intervalo** (a, b) tal que la **tangente** a la curva en c es paralela a la **recta secante** que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Es decir:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$



El teorema del valor medio de Lagrange de hecho es una generalización del teorema de Rolle que dice que si una función es definida y continua $[a, b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , y toma valores iguales en los extremos del intervalo --en otras palabras, $f(a) = f(b)$ -- entonces existe al menos algún **punto c** en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva en c es horizontal, es decir, $f'(c) = 0$.



Convergencia de Punto Fijo

Si expresamos la diferencia entre la estimación n-ésima y la solución exacta s , tenemos:

$$x_n - s = g(x_{n-1}) - g(s) = \frac{g(x_{n-1}) - g(s)}{(x_{n-1} - s)} \cdot (x_{n-1} - s)$$

Si expresamos e_n como $(x_n - s)$, por el **Teorema del Valor Medio**, nos queda :

$$e_n = g'(\xi_{n-1}) \cdot e_{n-1}$$



Convergencia en Punto Fijo

Aplicando valor absoluto a la expresión anterior, tenemos:

$$|e_n| = |g'(\xi_{n-1})| \cdot |e_{n-1}|$$

Por lo tanto, para que exista convergencia se debe cumplir:

$$|g'(x)| \leq L < 1 \quad \forall x \in [s-h, s+h] \quad \text{donde } L \text{ es la constante de Lipshitz}$$



Código de Punto Fijo

```
PROGRAM puntoFijo
! Método de Punto Fijo

INTEGER max_iter, iter
REAL(8) x, error, tol

WRITE (*,'(A15)', advance = 'no'), "Valor Inicial: "
READ *, x
WRITE (*,'(A33)', advance = 'no'), "Cantidad máxima de iteraciones: "
READ *, max_iter
WRITE (*,'(A12)', advance = 'no'), "Tolerancia: "
READ *, tol

error = 2*tol
iter = 0
```

Sigue en la
próxima página



Código de Punto Fijo

```
DO WHILE ((error >= tol) .AND. (iter <= max_iter))  
  x = g(x)  
  WRITE(*, '(I5, 2F15.10)'), iter, x, f(x)  
  error = abs(f(x))  
  iter = iter + 1  
  
END DO  
  
CONTAINS  
  
FUNCTION g( x )  
  REAL(8) g, x  
  g = acos(-1.0 / cosh(x))  
END FUNCTION  
! Función no lineal  
FUNCTION f( x )  
  REAL(8) f, x  
  f = cosh(x)*cos(x) + 1  
END FUNCTION  
  
END PROGRAM
```



Resolución por Punto Fijo

Utilizando una

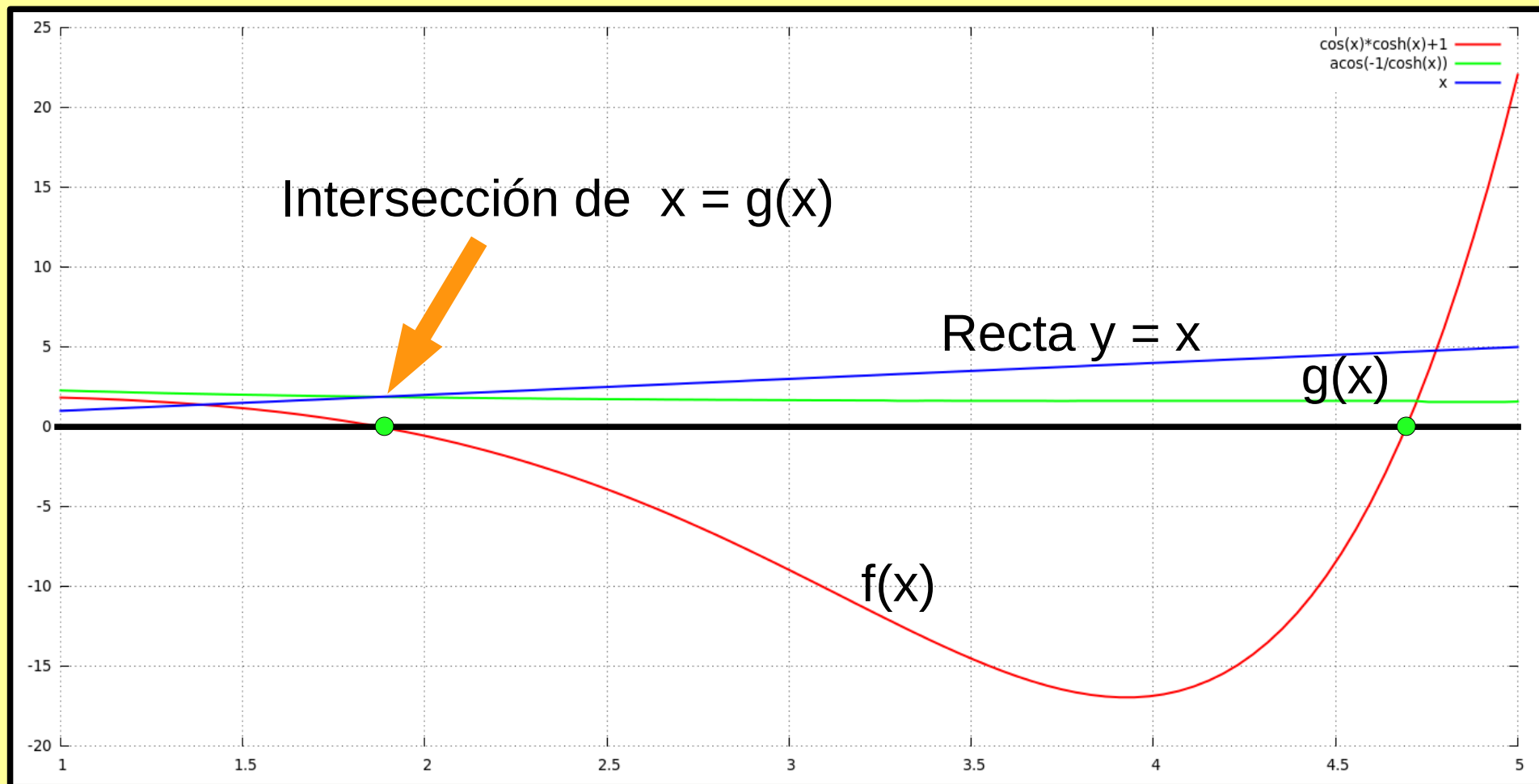
$$g(x) = \operatorname{acos}\left[\frac{-1}{\cosh(x)}\right]$$

Número de Iteración	x_n	$ x_n - x_{n-1} $	$ f(x_n) $
0	4	-	16,84985219
1	1,607423509	2,392576490	0,9049674609
2	1,966362937	0,36	0,4
3	1,848919541	0,1174433963	0,1062857090
4	1,883048549	0,0341290077	0,03
5	1,872732642	0,01	0,01
6	1,875815430	0,0030827876	0,0029452463
7	1,874890993	$9,244363063 \times 10^{-4}$	$8,815945671 \times 10^{-4}$
8	1,875167919	$2,769256114 \times 10^{-4}$	$2,642351878 \times 10^{-4}$
9	1,875084937	$8,298190451 \times 10^{-5}$	$7,916632768 \times 10^{-5}$
10	1,875109801	$2,486357384 \times 10^{-5}$	$2,372147241 \times 10^{-5}$



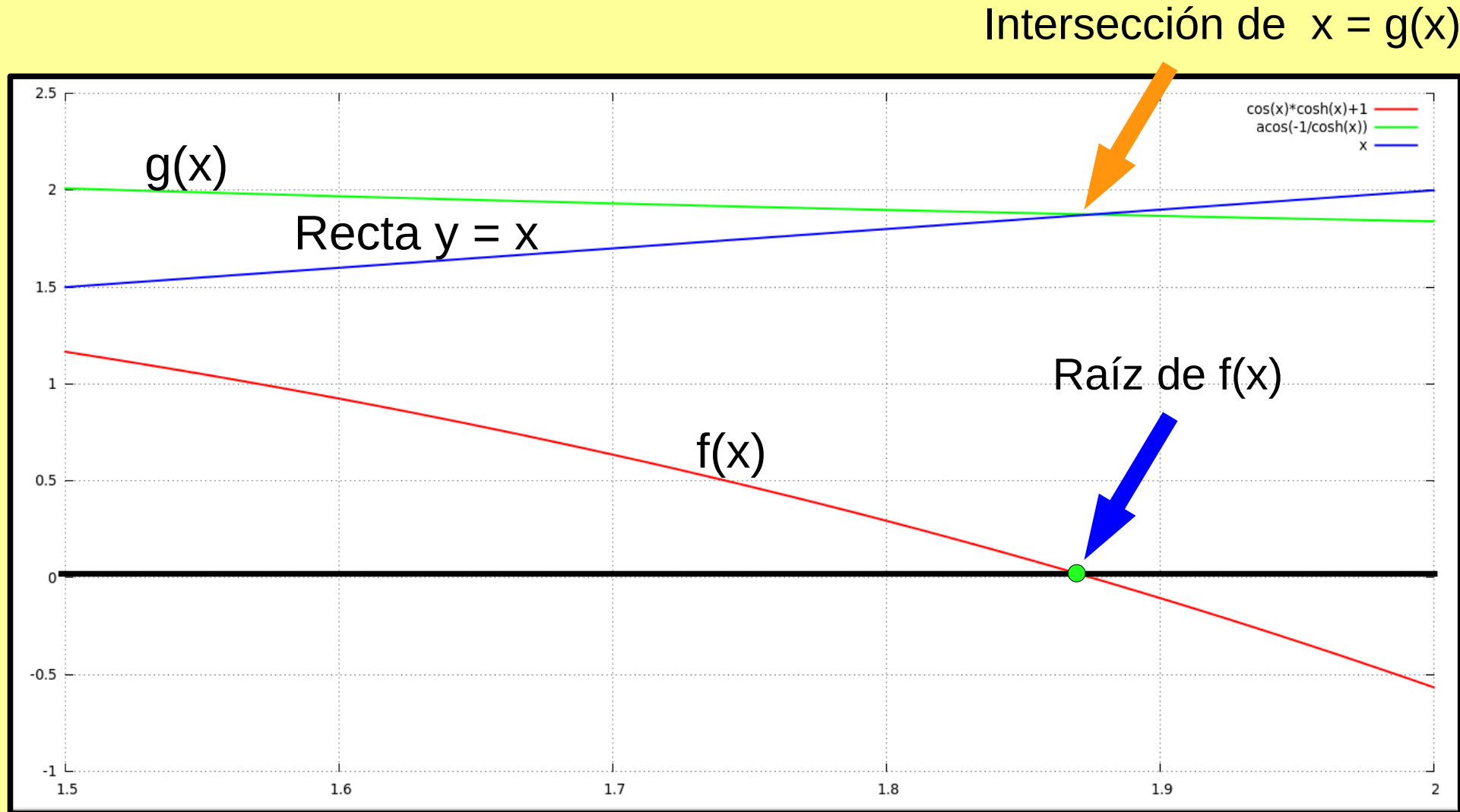
Resolución por Punto Fijo

$$g(x) = \operatorname{acos}\left[\frac{-1}{\cosh(x)}\right]$$



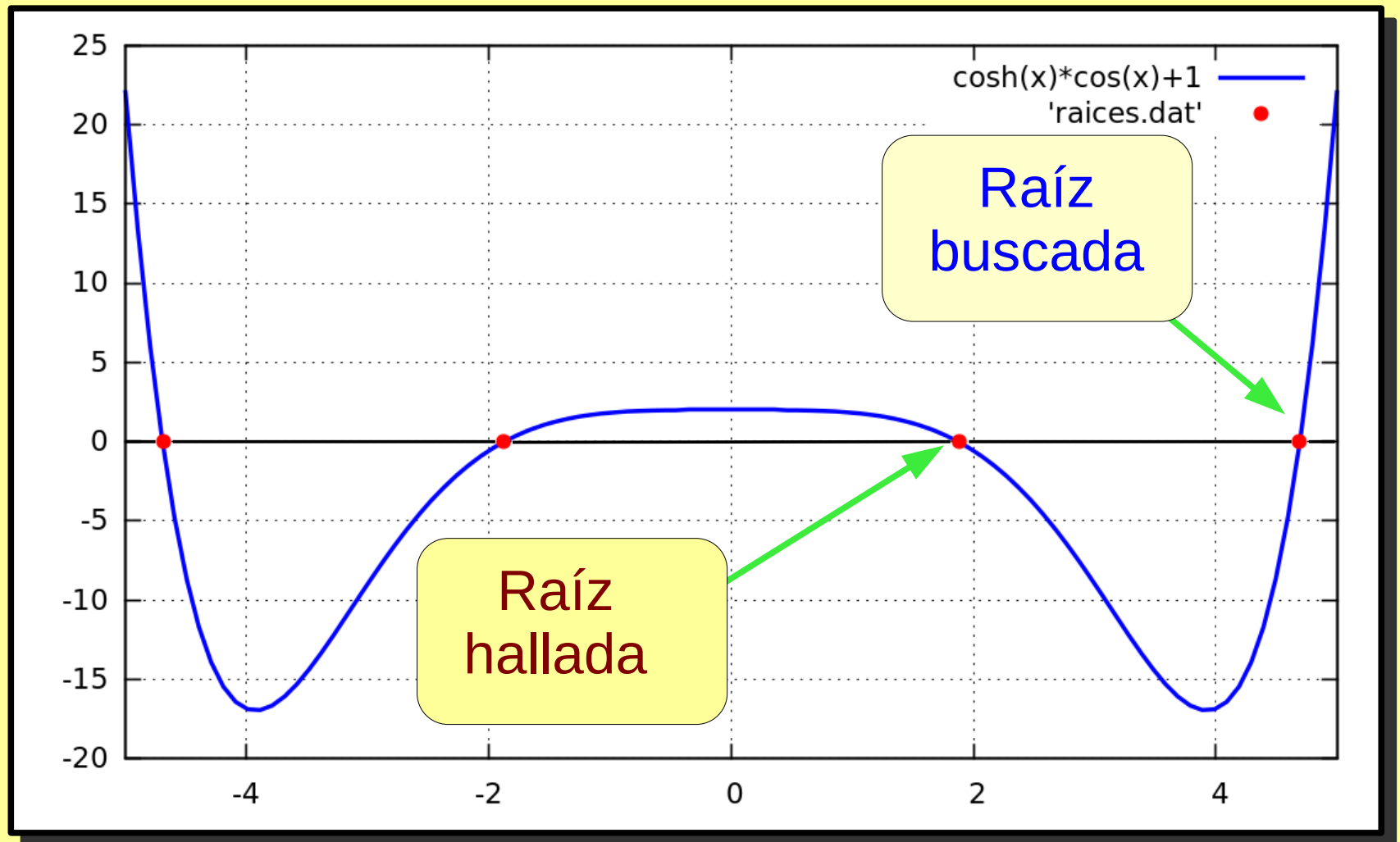


Resolución por Punto Fijo





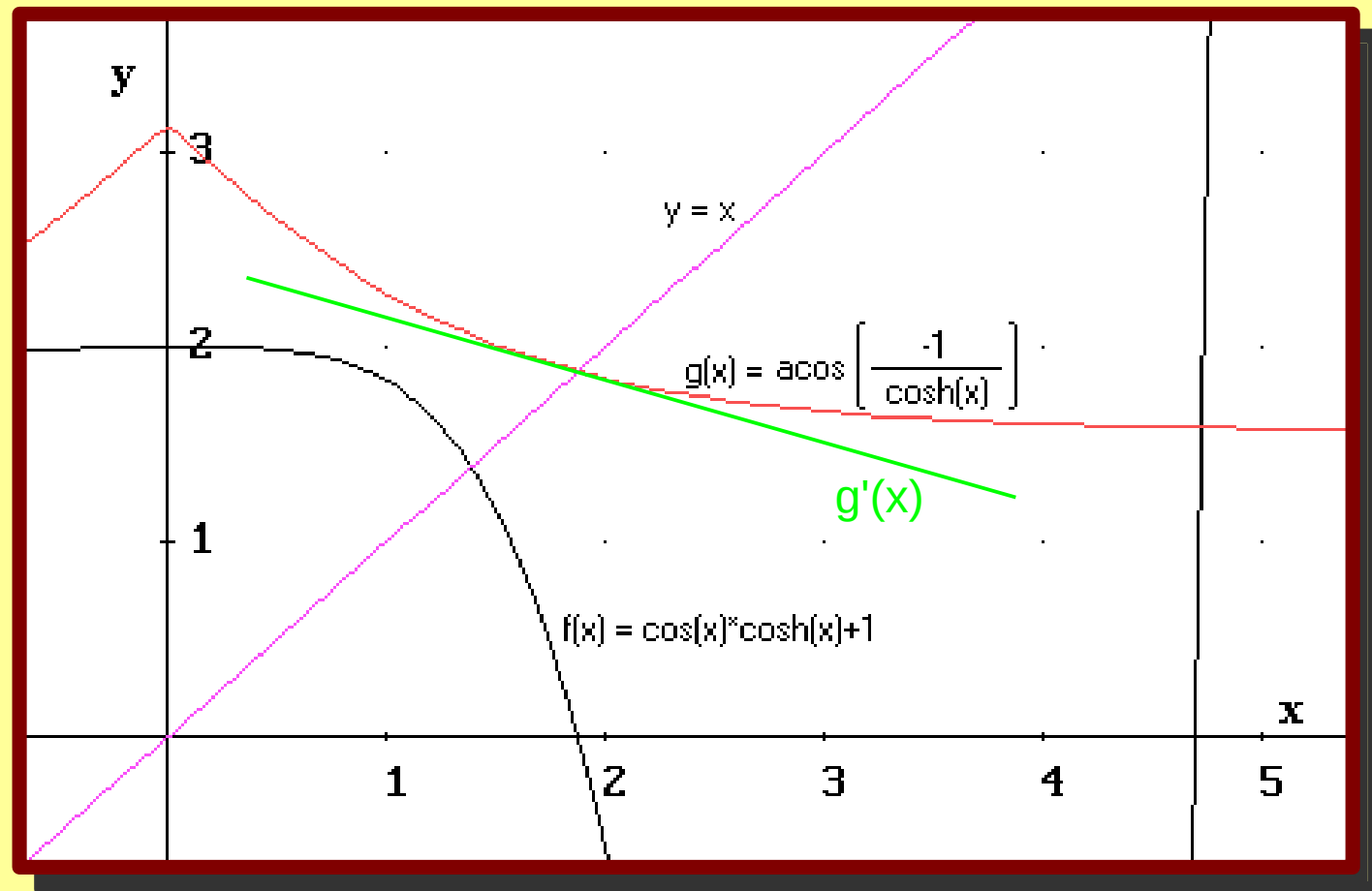
Convergencia hacia la raíz no buscada





Gráficamente

Se puede observar que la pendiente $g'(x)$ en la intersección $x = g(x)$ tiene una pendiente menor que la de la recta $y = x$, que es **unitaria**.





Punto Fijo Sistemático

Como no siempre es fácil obtener un reordenamiento adecuado que nos proporcione una $g(x)$ con valores convergentes hacia la raíz buscada, se suele utilizar un método sistemático para calcular $g(x)$, en lugar de despejar arbitrariamente una variable de la función $f(x)$.

El método de **Punto Fijo Sistemático** se basa en forzar el cumplimiento de la condición suficiente de convergencia para $g(x)$, para ello proponemos la siguiente función $g(x)$.

$$g(x) = x - \lambda \cdot f(x)$$



Punto Fijo Sistemático

Determinaremos el valor de λ de forma tal que se cumpla la condición de convergencia :

$$|g'(x)| \leq L < 1$$

Por lo tanto, nos queda :

$$0 \leq 1 - \lambda \cdot f'(x) \leq L < 1$$

Ahora bien, dada $f'(x)$ positiva en el intervalo $[a, b]$, se tiene :

$$0 < f'(x)_{\min} < |f'(x)| < f'(x)_{\max}$$



Punto Fijo Sistemático

Multiplicando miembro a miembro por λ , a la siguiente expresión

$$0 < f'(x)_{\min} < |f'(x)| < f'(x)_{\max}$$

Obtenemos :

$$0 < \lambda \cdot f'(x)_{\min} < \lambda \cdot |f'(x)| < \lambda \cdot f'(x)_{\max}$$

Por lo tanto :

$$0 < 1 - \lambda \cdot f'(x)_{\max} < 1 - \lambda \cdot |f'(x)| < 1 - \lambda \cdot f'(x)_{\min} \leq L < 1$$



Punto Fijo Sistemático

Reemplazando por $g'(x)$ en :

$$0 < 1 - \lambda \cdot f'(x)_{\text{máx}} < 1 - \lambda \cdot |f'(x)| < 1 - \lambda \cdot f'(x)_{\text{min}} \leq L < 1$$

Obtenemos :

$$0 < 1 - \lambda \cdot f'(x)_{\text{máx}} < g'(x) < 1 - \lambda \cdot f'(x)_{\text{min}} \leq L < 1$$

Por lo tanto para que resulte convergente, el valor de λ debe ser :

$$\lambda = \frac{1}{f'(x)_{\text{máx}}}$$



Código de Punto Fijo Sistemático

```
PROGRAM puntoFijoSistematico
! Método de Punto Fijo Sistemático

INTEGER max_iter, iter
REAL(8) x, error, tol, lambda

WRITE (*,'(A15)', advance = 'no'), "Valor Inicial: "
READ *, x
WRITE (*,'(A33)', advance = 'no'), "Cantidad máxima de iteraciones: "
READ *, max_iter
WRITE (*,'(A12)', advance = 'no'), "Tolerancia: "
READ *, tol

error = 2*tol
Iter = 0
lambda = 1/maxDeriv(a,b)
```

Sigue en la
próxima página



Código de Punto Fijo Sistemático

```
DO WHILE ((error >= tol) .AND. (iter <= max_iter))
```

```
  x = x - lambda*f(x)
```

```
  WRITE(*, '(I5, 2F15.10)'), iter, x, f(x)
```

```
  error = abs(f(x))
```

```
  iter = iter + 1
```

```
END DO
```

```
CONTAINS
```

```
! Función Derivada de f(x)
```

```
FUNCTION df( x )
```

```
REAL(8) df, x
```

```
  df = (exp(x)*(cos(x)-sin(x)) - exp(-x)*(cos(x)+sin(x)))/2.0
```

```
END FUNCTION
```

```
! Función no lineal
```

```
FUNCTION f( x )
```

```
REAL(8) f, x
```

```
  f = cosh(x)*cos(x) + 1
```

```
END FUNCTION
```

```
! Tarea para el hogar (implementar función maxDeriv)
```

```
END PROGRAM
```



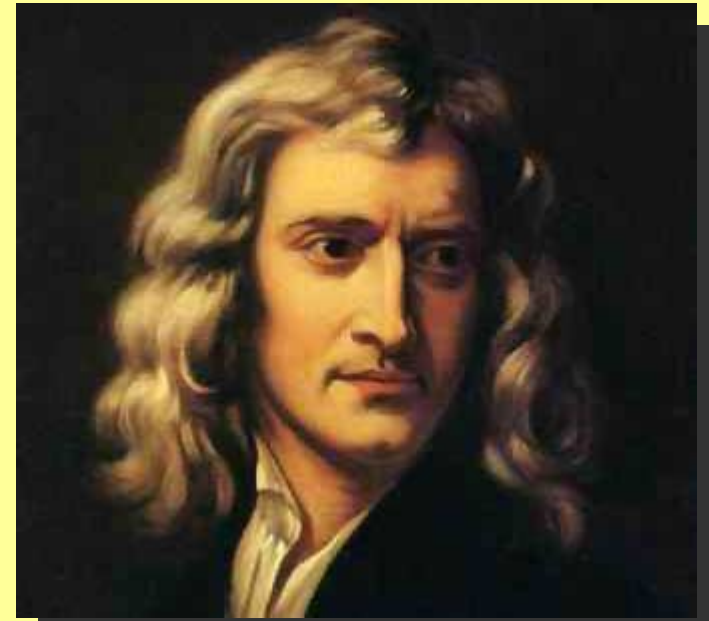
Sir Isaac Newton

Nació el 4 de enero de 1643 en Lincolnshire, Inglaterra.

Fue un físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés, autor de los **Philosophiae naturalis principia mathematica**, más conocidos como los **Principia**, donde describió la ley de gravitación universal y estableció las bases de la mecánica clásica .

También contribuyó en otras áreas de la matemática, desarrollando el teorema del binomio y las fórmulas de Newton-Cotes.

Falleció el 31 de marzo de 1727 en Kensington, Inglaterra.





Método de Newton

Partimos del desarrollo en Serie de Taylor de la función $f(x)$:

$$f(x) = 0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + O(h^2)$$

Si despejamos x , obtenemos una aproximación a la solución s

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

A esta aproximación, la podemos denominar x_1

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Método de Newton

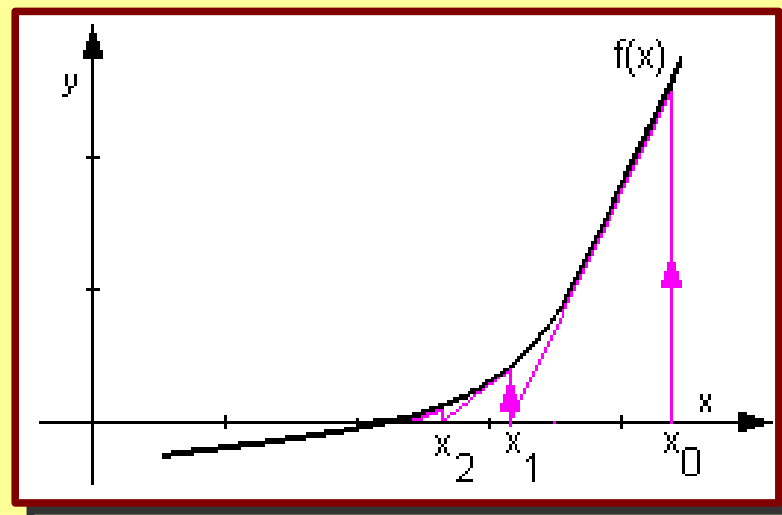
Esta aproximación, es la intersección con el **eje x**, de la recta tangente a **f(x)** en el punto **x₀**.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Resultando el siguiente esquema iterativo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Gráficamente





Condiciones de Convergencia (I)

1. Existencia de la Raíz

Dado un cierto intervalo de trabajo $[a,b]$, dentro del mismo debe cumplirse que $f(a)*f(b) < 0$.

2. Unicidad de la Raíz

Dentro del intervalo de trabajo $[a,b]$, la derivada de $f(x)$ debe ser diferente de cero.

3. Concavidad.

La gráfica de la función $f(x)$ dentro del intervalo de trabajo $[a,b]$, debe ser cóncava, hacia arriba o hacia abajo. Para ello debe verificarse que:

$$f''(x) \leq 0 \quad \text{ó} \quad f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$



Condiciones de Convergencia (II)

4. Intersección de la Tangente a $f(x)$, dentro de $[a,b]$

Se debe asegurar que la tangente a la curva en el **extremo** del intervalo $[a,b]$ en el cual $f'(x)$ sea mínima, intersecte al **eje x** dentro del intervalo $[a,b]$.

De esta manera aseguramos que la sucesión de valores de x_i se encuentren dentro del intervalo $[a,b]$.

$$\frac{|f(c)|}{|f'(c)|} \leq (b-a)$$



Código de Newton

```
PROGRAM newton  
! Método de Newton-Raphson
```

```
INTEGER max_iter, iter  
REAL(8) x, error, tol
```

```
WRITE (*,'(A15)', advance = 'no'), "Valor Inicial: "  
READ *, x  
WRITE (*,'(A33)', advance = 'no'), "Cantidad máxima de iteraciones: "  
READ *, max_iter  
WRITE (*,'(A12)', advance = 'no'), "Tolerancia: "  
READ *, tol
```

```
error = 2*tol  
iter = 0
```

Sigue en la
próxima página



Código de Newton

```
DO WHILE ((error >= tol) .AND. (iter <= max_iter))

    x = x - f(x) / df(x)
    WRITE(*, '(I5, 2F15.10)'), iter, x, f(x)
    error = abs(f(x))
    iter = iter + 1
END DO

CONTAINS
! Función Derivada de f(x)
FUNCTION df( x )
REAL(8) df, x
    df = (exp(x)*(cos(x)-sin(x)) - exp(-x)*(cos(x)+sin(x)))/2.0
END FUNCTION

! Función no lineal
FUNCTION f( x )
REAL(8) f, x
    f = cosh(x)*cos(x) + 1
END FUNCTION

END PROGRAM
```



Newton - Análisis de Convergencia

Sean $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, las aproximaciones a la solución s , obtenidas en sucesivas iteraciones.

$$e_n = x_n - s$$

Por lo tanto :

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - s \\ &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - s \\ &= x_n - s - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(x_n) \cdot e_n - f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$



Newton - Análisis de Convergencia

Si expandimos $\mathbf{f(s)}$, o sea, $\mathbf{f(x_n - e_n)}$ en Serie de Taylor, obtenemos:

$$\begin{aligned}f(x_n - e_n) &= f(x_n) - f'(x_n) \cdot e_n + \frac{f''(c)}{2} \cdot e_n^2 \\f(s) &= f(x_n) - f'(x_n) \cdot e_n + \frac{f''(c)}{2} \cdot e_n^2 \\0 &= f(x_n) - f'(x_n) \cdot e_n + \frac{f''(c)}{2} \cdot e_n^2\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f'(x_n) \cdot e_n - f(x_n) = \frac{f''(c)}{2} \cdot e_n^2$$



Newton - Análisis de Convergencia

Combinando ambas expresiones:

$$e_{n+1} = \frac{f'(x_n) \cdot e_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x_n) \cdot e_n - f(x_n) = \frac{f''(c)}{2} \cdot e_n^2$$

Obtenemos:

$$e_{n+1} = \frac{\frac{f''(c)}{2} \cdot e_n^2}{f'(x_n)}$$



Newton - Análisis de Convergencia

Si denominamos:

$$C = \frac{f''(c)}{2 \cdot f'(x_n)}$$

Podemos afirmar que:

$$|e_{n+1}| \leq |C| \cdot |e_n|^2$$

De donde se desprende que el método de **Newton-Raphson** tiene convergencia **cuadrática**.



PREGUNTAS ...

