Guía Nro. 4

1. Implemente un programa en FORTRAN para encontrar la solución de una ecuación no-lineal por el método de bisección. Utilizando dicho programa calcule con tres dígitos exactos, una aproximación de cada raíz de las siguientes ecuaciones.

   a) $0{,}5 \cdot e^{(\frac{x}{3})} - sin(x) = 0$; $x > 0$

   b) $e^x - 3x = 0$

2. Agregue al programa anterior una opción para encontrar la solución de una ecuación no-lineal por el método de Newton-Raphson. Utilizando dicho programa calcule una aproximación a las raíces que cumpla con $|f(x)| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-5}$. Previamente compruebe la validez de las condiciones suficientes de convergencia (No es necesario que esta comprobación la realice el programa).

   a) $x \cdot e^x - 1 = 0$; $(x_0 = 0{,}5)$

   b) $\arctan(x) = 1$; $(x_0 = 0{,}5)$

   c) $x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x + 3 = 0$; $(x_0 = 1)$

3. Agregue al programa anterior una opción para encontrar la solución de una ecuación no-lineal por el método de Punto Fijo. Utilizando dicho programa, calcule una aproximación a la raíz más cercana a cero de la siguiente ecuación:

$$\sin(3x) = \frac{(x+1)}{(x-1)}$$

   a) Reordene la ecuación para que g(x) satisfaga las condiciones de convergencia.

   b) Determine un intervalo dentro del cual esté encerrada la solución buscada.

   c) Obtenga una aproximación a dicha raíz.

   d) Calcule el valor de $|f(x_{i+1})|$ y verifique si su valor en la séptima iteración es menor a $0{,}5 \cdot 10^{-3}$. Si esto no ocurre, continúe las iteraciones hasta alcanzar dicha cota.

   e) Modifique la subrutina de Punto Fijo para transformarla en Punto Fijo Sistemático.

   f) Utilizando dicho programa, calcule las raíces de la ecuación.

4. Encuentre las raíces de las siguientes ecuaciones, por medio del método que considere más adecuado.

   a) El cero máximo real de $f(x) = x^6 - x - 1$. Verifique en que iteración se cumple que $|f(x_i)| < 0{,}5 \cdot 10^{-6}$.

   b) La ecuación $\cosh(x) \cdot \cos(x) = -1$, tiene gran importancia en la teoría de las láminas vibrantes. Calcule las dos primeras raíces positivas, de manera que se verifique que $|x_{i+1} - x_i| < 0{,}5 \cdot 10^{-6}$. Utilice el método que considere más adecuado.

c) Calcule todas las raíces de la siguiente ecuación:
$f(x) = -19 \cdot (x - 0{,}5) \cdot (x - 1) + e^x - e^{-2x}$, de manera que se verifique que $|x_{i+1} - x_i| < 0{,}5 \cdot 10^{-6}$. Utilice el método que considere más adecuado.

d) La expresión de la constante de equilibrio para la descomposición del amoníaco (NH_3) en un reactor catalítico es:

$$0{,}9 = \frac{4x^2 \cdot (5 - 2x)^2}{(1 - x) \cdot (4 - 3x)^3}$$

Analice el intervalo en el que x tiene sentido físico y encuentre x_{eq} con un error menor a 10^{-5}.

5. Calcule las aproximaciones a las raíces de la siguiente función:

$$f(x) = \sin(x) + x^2 + e^{-x}$$

que cumplan con $|f(x)| \leq 10^{-8}$. Indique en qué iteración se encuentra cada raíz con la precisión solicitada y justifique la elección del método utilizado.

6. Calcule las aproximaciones a todas las raíces del siguiente polinomio:

$$P(x) = 7x^5 + 62{,}87146160x^4 - 1011{,}750061x^3 + 2315{,}245342x^2 + 1356{,}13632x + 827{,}6954310$$

que cumplan con $|f(x)| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-9}$. Estudie la sensibilidad del cero real de mayor módulo, si los coeficientes del polinomio del inciso anterior están perturbados en $0{,}5 \cdot 10^{-2}$, como máximo.

7. Dos escaleras se cruzan en un pasillo. Cada escalera se halla colocada desde la base de una pared hasta un punto de la pared opuesta, como se aprecia en la figura 6. Las escaleras se cruzan a una altura H por encima del suelo. Las longitudes de las escaleras son $L_1 = 20$, $L_2 = 30$ y la altura H = 8. Encuentre el ancho A del pasillo.

8. Una fábrica de envasadora tiene que construir latas que posean un volúmen interior igual $1000cm^3$. Para ello se desea calcular el radio óptimo, que permita minimizar la cantidad de material necesario para fabricar cada lata. Las tapas circulares de la lata, al cortarse, deben tener $0{,}25cm$ más de radio que el interior de la lata para que el excedente se utilice para sellar la parte lateral. El trozo de material que formará la parte lateral de la lata debe ser también $0{,}25cm$ más largo que la circunferencia de la lata, por la misma razón. Encuentre el valor del radio óptimo, estableciendo la cota de error que considere más adecuada al problema.

9. Un proyectil que posee una masa $M = 2gr$ es lanzado en forma vertical en el aire y está descendiendo a su velocidad terminal. Dicha velocidad se determina mediante la ecuación $M \cdot g = F_{res}$. Siendo F_{res}, la fuerza de resistencia al avance, la cual depende de la forma del proyectil, la velocidad y la densidad del medio, y **g** es la fuerza de gravedad. Para este caso se ha encontrado empíricamente un modelo que responde a la siguiente ecuación:

$$0{,}002 \cdot 9{,}81 = 1{,}4 \cdot 10^{-5} v^{1{,}5} + 1{,}15 \cdot 10^{-5} v^2$$

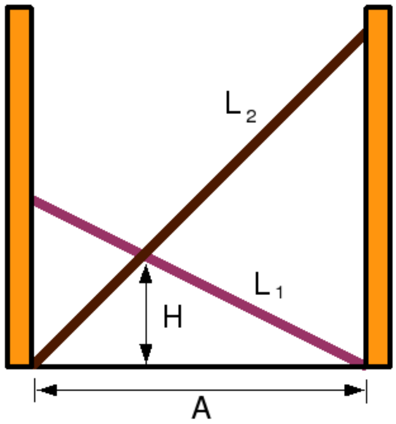

Figura 6: Determinación del ancho del pasillo.

El primer término del lado derecho representa la fuerza de fricción y el segundo la fuerza de presión, siendo **v** la velocidad terminal, expresada en $\frac{m}{seg}$. Determine el valor de la velocidad terminal, con una tolerancia de $0{,}5 \cdot 10^{-2}$.

10. La configuración superficial del ala de la aeronave NACA-0012, que posee una longitud de arco de $1m$ y un espesor máximo de $0{,}2m$, está determinada por la siguiente expresión:

$$y(x) = \pm(0{,}2969\sqrt{x} - 0{,}126x - 0{,}3516x^2 + 0{,}2843x^3 - 0{,}1015x^4)$$

donde los signos $\pm$ se refieren a las superficies superior e inferior del ala, respectivamente. Determine el valor de x, donde el espesor del ala es igual a $0{,}1m$, con una tolerancia igual a 10^{-5}. (Existen dos soluciones)

11. Implemente un programa en FORTRAN que permita resolver un sistema de n ecuaciones no lineales, por medio del método de Punto Fijo Sistemático. Utilice dicho programa para resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales, de forma tal que su solución verifique $\|F(x_i, y_i, z_i)\|_M < 0{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Partiendo de $x_0 = 0{,}1 \qquad y_0 = 0{,}1 \qquad z_0 = -0{,}1$

$$f_1(x, y, z) = 3x - \cos(yz) - 0{,}5 = 0$$
$$f_2(x, y, z) = x^2 - 81(y + 0{,}1)^2 + \sin(z) + 1{,}06 = 0$$
$$f_3(x, y, z) = e^{-xy} + 20z + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

12. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales por medio del método de Punto Fijo, de forma tal que se verifique que $\|v_i - v_{i-1}\|_M < 0{,}5 \cdot 10^{-6}$.

a) Partiendo de $x_0 = 0 \qquad y_0 = 0$
$f_1(x, y) = x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0$
$f_2(x, y) = x \cdot y^2 + x - 10y + 8 = 0$

b) Partiendo de $x_0 = 1 \qquad y_0 = 1$
$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - x = 0$
$f_2(x, y) = x^2 - y^2 - y = 0$

c) Partiendo de $x_0 = 0{,}5 \qquad y_0 = -0{,}5$
$f_1(x, y) = 3x^2 - y^2 = 0$
$f_2(x, y) = x \cdot y^2 - x^3 - 1 = 0$

d) Partiendo de $x_0 = -0{,}1 \qquad y_0 = 0{,}1$
$f_1(x, y) = 0{,}5 \cdot \sin(xy) - \frac{y}{4\pi} - \frac{x}{2} = 0$
$f_2(x, y) = (1 - \frac{1}{4\pi}) \cdot (e^{2x} - e) + \frac{y \cdot e}{\pi} - 2x \cdot e = 0$

13. Agregue al programa anterior una opción que permita resolver un sistema de n ecuaciones no lineales, por medio del método de Newton. Utilice dicho programa para resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales, de forma tal que verifique $\|F(x_i, y_i, z_i)\|_M < 0{,}5 \cdot 10^{-5}$.

a) Partiendo de $x_0 = 2{,}5 \qquad y_0 = 0{,}2 \qquad z_0 = 1{,}6$
$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 9$
$f_2(x, y, z) = x \cdot y \cdot z = 1$
$f_3(x, y, z) = x + y - z^2 = 1$

b) Partiendo de $x_0 = 1 \qquad y_0 = 1 \qquad z_0 = 1$, estime previamente la cantidad de iteraciones necesarias para la cota de error dada
$f_1(x, y, z) = x \cdot y \cdot z - x^2 + y^2 = 1{,}34$
$f_2(x, y, z) = x \cdot y - z^2 = 0{,}09$
$f_3(x, y, z) = e^x - e^y + z = 0{,}41$

<u>Nota:</u> para estimar la *cota del error* suponga que el número **L** se aproxima por la siguiente expresión (para un valor grande de k):

$$L \approx \frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|_M}{\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|_M}$$

entonces tenemos las siguientes cotas de error:

$$\|X_k - S\| \leq \frac{L}{1 - L} \cdot \|X_k - X_{k-1}\|$$

la que a su vez tiene como consecuencia la siguiente desigualdad:

$$\|X_k - S\| \leq \frac{L^k}{1 - L} \cdot \|X_1 - X_0\|$$

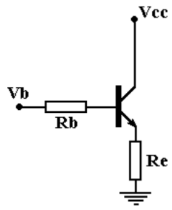

Figura 7: Polarización de un transistor.

14. En la figura 7 se presenta un circuito de polarizacion de un transistor.

    Es decir, dicho circuito fija los valores de tensión y corriente, para el funcionamiento del dispositivo en corriente contínua. Planteando las correspondientes ecuaciones de malla se obtiene el siguiente sistema:

    $V_b = (\frac{I_{cq}}{h_{fe}}) \cdot R_b + V_\gamma + I_{cq} \cdot R_e$

    $I_{cq} = I_{cb0} \cdot (e^{\frac{v_\gamma}{V_t}} - 1)$

    Datos : $V_t = 26mV$ $h_{fe} = 100$ $I_{cb0} = 95 \cdot 10^{-15} A$ $V_b = 10V$ $R_e = 1k\Omega$ $R_b = 840k\Omega$

    Calcule V_γ (caída de tensión en el diodo base-emisor) y la corriente de colector I_{cq}

    Ejercicios Optativos:

15. Agregue al programa anterior una opción que permita resolver un sistema de n ecuaciones no lineales, por medio del método de Newton Modificado. Resuelva los sistemas anteriormente resueltos por el método de Newton y compare los resultados.

    - El coeficiente de la fricción **f** para un flujo turbulento en una tubería está dado por:

      $$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1{,}14 - 2{,}0 \log_{10}(\frac{e}{D} + \frac{9{,}35}{R_e \sqrt{f}})$$

      donde R_e es el número de Reynolds, **e** es la rugosidad de la superficie de la tubería y **D** es el diámetro de la tubería.

      - Calcule f para $D = 0{,}1m$ $e = 0{,}0025$ $R_e = 3 \cdot 10^4$
      - Calcule f para $D = 0{,}1m$ $e = 0{,}0001$ $R_e = 5 \cdot 10^6$

    - Se colocan en un recipiente gas nitrógeno (N_2) y gas hidrógeno (H_2) en concentraciones $[N_2] = 3{,}2 Molar$ y $[H_2] = 1{,}8 Molar$ y se deja llegar al equilibrio. A cierta temperatura la constante de equilibrio para la reacción.

      $$\frac{1}{2} \cdot N_2(g) + \frac{3}{2} \cdot H_2(g) \rightleftarrows NH_3(g)$$

$$\text{es } K_c = \frac{[NH_3]_{eq}}{(\sqrt{[N_2]_{eq}}) \cdot ([H_2]_{eq})^{\frac{3}{2}})} = 2$$

¿ Cuál será la composición del sistema cuando llegue al equilibrio ?

- La función de transferencia de un sistema de control está dada por

$$F(s) = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

donde

$$G(s) = \frac{e^{-0,1s}}{s} \qquad H(s) = K$$

Encuentre las raíces de la ecuación característica

1 + G(s) H(s) = 0 para K = 1 y 3.