Guía Nro. 6

1. Los siguientes valores corresponden a evaluaciones de la función $y = \cos(x)$

x	0.0	1.0
cos(x)	0.5	0.87758

   a) Aproxime el punto medio mediante interpolación y estime el error.
   b) Compare el error estimado con el valor exacto del error.

2. Las densidades de sodio para tres temperaturas están dadas en la siguiente tabla :

i	Temperatura (°C)	Densidad (Kg/m^3)
1	94	929
2	205	902
3	371	860

   a) Calcule manualmente los coeficientes del polinomio de Lagrange que se ajusta a los datos de la tabla.
   b) Determine la densidad para T=251°C utilizando la aproximación calculada en el inciso anterior.

3. Dada la siguiente tabla de valores :

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0.9162
1	0.25	0.8109
2	0.5	0.6931
3	0.75	0.5596
4	1.0	0.4055

   a) Calcule los coeficientes del polinomio de Lagrange que pase por los puntos i=1, 2 y 3.
   b) Si la tercera derivada de la función en i=2 es $f''' = -0{,}26$, estime el error de interpolación de Lagrange obtenido en $x = 0{,}6$.
   c) Calcule los coeficientes del polinomio de Lagrange usando todos los puntos.
   d) Calcule el valor de $p(0{,}6)$ con la aproximación obtenida en el inciso c) y compare con el valor hallado en el inciso a).

   NOTA: Para un intervalo pequeño [a,b] en el que $f^{(n+1)}(\xi)$ se puede aproximar mediante una constante, el error de interpolación se puede escribir como:

$$E(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n)\cdot f^{(n+1)}(x_m)}{(n+1)!}$$

   donde x_m es el punto medio entre los dos extremos del intervalo [a,b]. Sin embargo, esta aproximación no se debe usar si [a,b] es grande, o si la derivada de orden n+1 cambia de manera substancial.

4. Calcule los coeficientes del polinomio de interpolación de Lagrange, para aproximar la función $\ln(x)$:

   a) Utilizando 4 puntos equiespaciados dentro del intervalo $1 \leq x \leq 2$.

   b) Estime el error de interpolación en $x = 1{,}1$ y en $x = 1{,}9$.

5. Encuentre el polinomio de interpolación de Newton con diferencias ascendentes que pasa por los siguientes puntos:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0.9162
1	0.25	0.8109
2	0.5	0.6931
3	0.75	0.5596
4	1.0	0.4055

6. La siguiente tabla de valores corresponde a la evaluación de la función $y = 2x^3 + 3x + 1$

x	y
0.1	1.302
0.2	1.616
0.3	1.954
0.4	2.328
0.5	2.750

   a) Elabore una tabla de diferencias ascendentes y muestre que la diferencia de cuarto orden se anula.

   b) Explique por qué ocurre esto.

7. Haga la tabla de diferencias ascendentes a partir de la siguiente tabla:

i	0	1	2	3	4	5
x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	1.143	1.0000	0.828	0.667	5.33	0.428

   Estime los siguientes valores: f(1.28) y f (2.3)

8. Dada la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = e^x$:

x	0	0.25	0.5	0.75	1.00
y	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

   a) Encuentre los polinomios de aproximación mínimo-cuadrática de grados 1 y 2:

   b) Grafique los datos de la tabla y de las aproximaciones obtenidas.

   c) Considerando la grafica de la función en [0,1] ¿cree Ud. que eligiendo un polinomio de cuadrados mínimos de orden superior se mejorarían los resultados obtenidos? Apoye su respuesta considerando el polinomio de mínimos cuadrados de grado 3.

9. Para determinar una relación funcional entre el coeficiente de atenuación y el grosor de una muestra de taconite V.P. Singh ajustó una colecciónde datos un polinomio de mínimos cuadrados lineal. Este autor, ¿eligió el mejor polinomio de mínimos cuadrados?

Grosor (cm)	Coeficiente de atenuación (db/cm)
0.040	26.5
0.041	28.1
0.055	25.2
0.056	26.0
0.062	24.0
0.071	25.0
0.074	26.4
0.078	27.2
0.082	25.6
0.090	25.0
0.092	26.8
0.100	24.8
0.105	27.0
0.120	25.0
0.123	27.3
0.130	26.9
0.140	26.2

10. Dada la siguiente función definida por tramos :
$f(x) = 0 \quad x \in [-1; -0{,}2]$
$f(x) = 5 \quad (|x| - 0{,}2) \quad x \in (-0{,}2; 0{,}2)$
$f(x) = 0 \quad x \in [0{,}2; 1{,}0]$

   a) Elija convenientemente los puntos en el intervalo [-1, 1] a fin de encontrar los polinomios interpolantes (puede usar Lagrange) de grado 2,4 y 6. Grafique.

   b) Utilice polinomios cúbicos spline para aproximar convenientemente la función f(x) en [-1,1]. Grafique.

   c) Compare los resultados de los incisos a) y b) y exprese sus conclusiones.

11. Utilice interpolación de Spline cúbica natural para encontrar una aproximación a:

   a) f(2.5) dado:

x	2.2	2.4	2.6
f(x)	0.5207843	0.5104147	0.4813306

   b) f(1.25) dada

x	1.1	1.2	1.3	1.4
f(x)	0.48603	0.86160	1.59751	3.76155

12. Ajuste los datos de la siguiente tabla con una curva cúbica spline natural (los datos corresponden a la función $y = x^3 - 8$):

x	0	1	3	3	4
f(x)	-8	-7	0	19	56

13. Un automóvil que viaja por una carretera recta es cronometrado en algunos puntos. Los datos de las observaciones se dan en la siguiente tabla donde el tiempo está en segundos, la distancia en pies y la velocidad en pies sobre segundo:

Tiempo	0	3	5	8	13
Distancia	0	225	383	623	993
Velocidad	75	77	80	74	72

Utilice un polinomio cúbico spline para predecir la posición del automóvil y su velocidad en t = 10 seg. Determinar si el automóvil excede en algún momento la velocidad limite de 55 millas/h. ¿ Cuál es la velocidad máxima predicha para el coche ? Considere 1 milla como 5280 pies.

14. Calcule mediante el método Spline, las funciones que representan el perfil de la biela que se muestra en la figura 12.

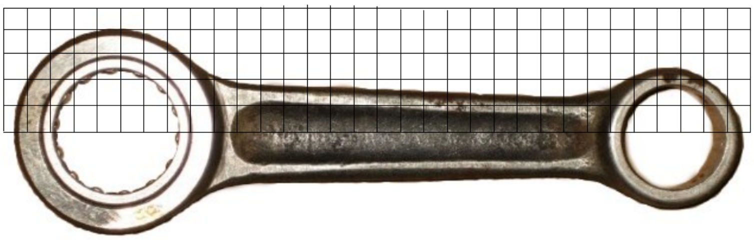

Figura 12: Perfil de una biela

Elija adecuadamente los puntos necesarios, considerando que la grilla posee un espaciamiento de 1 cm.

15. A continuación se da una tabla de valores:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
f(x)	0	2.1220	3.0244	3.2568	3.1399	2.8570	2.5140	2.1369	1.8358

Obtenga numéricamente el valor de la integral definida, por medio del método de los trapecios con h=0.4 y h=0.1.

16. Evalúe las siguientes integrales utilizando trapecios con 2,4 y 8 trapecios resolviendo manualmente y con 16 y 32 trapecios utilizando una computadora:

   a) $x^3 - 2x^2 + x + 2$ en [0,3]

b) $\tan(x) \quad en[0, \pi/4]$

c) $\dfrac{1}{2+x} \quad en[0, 1]$

17. Empleando el método de trapecios, calcule el valor de π a partir de la conocida integral:

$$\pi = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}$$

tomar el paso h de tal modo que pueda garantizar un error de 10^{-4}.

18. Evalúe la integral de la siguiente función en el intervalo indicado, utilizando el método de $1/3$ de Simpson. Utilice 2, 4, 8, 16 y 32 arcos de parábola, respectivamente. Indique el error global en cada caso:

$$y = \frac{\log(1+x)}{x} \qquad [1, 2]$$

19. Dada la siguiente tabla de valores:

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
f(x)	0.9162	0.8109	0.6931	0.5596	0.4055

a) Calcule la integral definida por el método de trapecios con $h = 0{,}25$ y $h = 0{,}5$.

b) Calcule nuevamente, pero utilizando el método de Romberg. Compare los resultados obtenidos.