Tema: *Resolución de Ecuaciones Diferenciales Elípticas por el Método de las Diferencias Finitas*

Ejercicio 5

(Resuelto por Ay. Alum. Ignacio Jozami)

La región en la cual se resuelve la ecuación de laplace puede ser no rectangular. Aplique el método de diferencias finitas para resolver los potenciales de estado continuo en el interior de la región graficada en la figura 10:

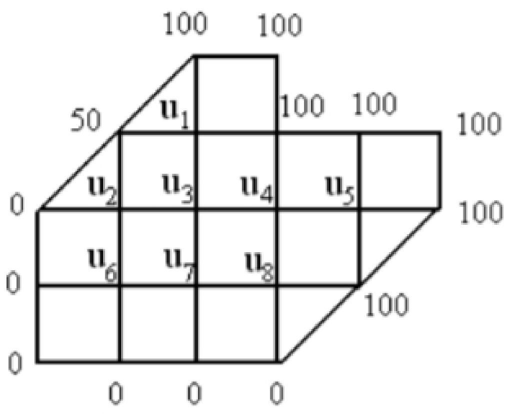

Figura 10: Geometría Irregular.

-

Resolución

Repasar previamente lo visto en teoría:

i) Resolución de EDDP Elípticas por el Método de las Diferencias Finitas
ii) Normas vectoriales y matriciales

La ecuación de Laplace para este caso bidimensional resulta:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Se observa que este problema es bidimensional y de estado estacionario (dU/dt =0), por lo que responde a una ecuación diferencial a derivadas parciales elíptica.

La discretización de la ecuación elíptica se realiza suponiendo que durante un tramo la derivada no cambia. Recordando que los subíndices i y j refieren a moverse en x e y respectivamente, podemos escribir la expresión en su equivalente de diferencias finitas considerando cada derivada parcial segunda como una diferencia centrada:

$$\frac{u_{i+1}^{j} - 2u_i^j + u_{i-1}^{j}}{dx^2} + \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{dy^2} = 0$$

Para la resolución del ejercicio supondremos que dx=dy, puesto que la consigna y la figura no hacen referencia a las dimensiones de la región a analizar ni del mallado. Teniendo esto en cuenta y reordenando la ecuación discretizada se obtiene:

$$u_{i+1}^{j}+u_{i-1}^{j}-4\,u_{i}^{j}+\text{¿}u_{i}^{j+1}+u_{i}^{j-1}=0 \qquad [1]$$

En esta ecuación participan la incógnita de cada nodo en particular (u_i^j) y sus cuatro vecinos de arriba (u_i^{j-1}), abajo (u_i^{j+1}), derecha (u_{i+1}^j) e izquierda (u_{i-1}^j), los cuales pueden ser condiciones de borde o incógnitas.

Finalmente, se puede escribir la ecuación 1 para los 8 nodos incógnita, resultando en 8 ecuaciones distintas con 8 incógnitas, y hallar la solución del sistema. Para determinar los valores de los nodos internos incógnita se elige aplicar el siguiente sistema iterativo:

$$u_{i}^{j}=\frac{u_{i}^{j+1}+u_{i}^{j-1}+u_{i+1}^{j}+u_{i-1}^{j}}{4}$$

Es importante comentar que la resolución del sistema de ecuaciones por un método indirecto es análoga a la aplicación del sistema iterativo planteado, por lo que puede resolverse el sistema mediante cualquiera de las dos opciones.

En el ejercicio a resolver se trabaja con una matriz de valores de 5x6 para representar el mallado propuesto. Para ello, se lleva la geometría irregular a un recinto rectangular:

j i	1	2	3	4	5	6
1	0.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
2	0.0	50.0	u1	100.0	100.0	100.0
3	0.0	u2	u3	u4	u5	100.0
4	0.0	u6	u7	u8	100.0	100.0
5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	100.0

Se define:

- frontera superior =100 → u(1,:)= 100
- frontera derecha = 100 → u(:,6)= 100
- frontera inferior = 0 → u(5,:)= 0
- frontera izquierda= 0 → u(:,1)= 0

Si se trabajase con un recinto rectangular, todos los nodos internos serían las incógnitas a determinar. En este caso algunos valores ya se hayan predefinidos:

- u(2,2)= 50
- u(2,4)= u(2,5)= 100
- u(4,5)=100

Una vez armada la matriz, sólo resta dar un valor semilla a los valores incógnita e implementar el sistema operativo para la resolución del problema. Cabe destacar que aquellos nodos que se encuentran definidos no deben modificarse, por lo que debe corregirse su valor en caso de ser calculado por el método.

A continuación, se muestra el código en FORTRAN que resuelve lo mencionado anteriormente:

ny: cantidad de filas en mallado
Nx: cantidad de columnas en mallado
iter= cantidad de iteraciones
maxiter: cantidad máxima de iteraciones fijada por el usuario
tol: tolerancia fijada por el usuario
uant: matriz auxiliar para guardar el valor de u en la iteración anterior
normaM(): función que calcula la norma M de una matriz

```
subroutine eliptica(u)
real(8) error, u(ny,nx), uant(ny,nx)
integer i, j, iter
   iter=0
   error=2*tol
   do while ((error>tol).and.(iter<maxiter))  !Comienza el ciclo iterativo de Gauss seidel
      uant=u  !Guardo u en iteración anterior
      do j=2,ny-1
         do i=2,nx-1
            u(j,i) = (u(j-1,i) + u(j+1,i) + u(j,i-1) + u(j,i+1))/4.
            if(j==2)then
               u(2,2)=50.; u(2,4)=100. ;u(2,5)=100.  !Corrijo nodos interiores conocidos
            end if
            if((j==4).and.(i==5))then
               u(4,5)=100.    !Corrijo nodos interiores conocidos
            end if
         end do
      end do
      error=normaM(uant-u) !Recalculo el error
      iter=iter+1
      write(*,*) iter, error
   end do

end subroutine
```

<u>Respuesta:</u> (valor semilla u=0, tol= $1*10^{-5}$, maxiter=1000)

iter= 21 error= $4.52629*10^{-6}$

j \ i	1	2	3	4	5	6
1	0.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000
2	0.000	50.000	75.512	100.000	100.000	100.000
3	0.000	29.172	52.047	74.113	93.528	100.000
4	0.000	14.641	29.391	50.876	100.000	100.000
5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	100.000