Erro quadrático para o input x:

$$E_D[(f(x;D) - E[y|x])^2] \quad (I)$$

Onde $f(x;D)$ é o modelo de predição treinado em D para o input(x), resultante em $\hat{y}$.

y é o output esperado

$E[y|x]$ é a esperança ideal

Expande-se (I) ao adicionar e subtrair $E_D[f(x;D)]$

$$(I) = E_D[(f(x;D) - E_D[f(x;D)] + E_D[f(x;D)] - E[y|x])^2]$$

Expandindo o quadrado

$$= E_D[(f(x;D) - E_D[f(x;D)])^2 + 2\cdot(f(x;D) - E_D[f(x;D)])(E_D[f(x;D)] - E[y|x]) + (E_D[f(x;D)] - E[y|x])^2]$$

Como $E_D[f(x;D)]$ é cte em D

$$E_D[(f(x;D) - E[y|x])^2] = \underbrace{(E_D[f(x;D)] - E[y|x])^2}_{\text{viés quadrático (A)}} + \underbrace{E_D[(f(x;D) - E_D[f(x;D)])^2]}_{\text{Variância (B)}}$$

(A). O viés quadrático exprime a distância/desvio do output do modelo em relação à função real.

↳ Pode indicar uma "super simplificação" do modelo, gerando underfitting.

(B). Mede a flutuação das predições do modelo de acordo com diferentes datasets (D).

↳ Pode indicar uma "super sensibilidade" do modelo, resultando em overfitting.

Agora, decompondo o erro total

$$E_D E_y [(f(x;D)-y)^2], \quad (\text{II})$$

Expande-se y com $E[y|x]$

$$(\text{II}) = E_D E_y [(f(x;D) - E[y|x] + E[y|x] - y)^2]$$

Expandindo o quadrado

$$E_D E_y [(f(x;D) - E[y|x])^2 + 2.(f(x;D) - E[y|x]).(E[y|x] - y) +$$
$$(E[y|x] - y)^2]$$

Como em y, $E_y[E[y|x] - y] = 0$

$$= \underbrace{E_D [(f(x;D) - E[y|x])^2]}_{(\text{I})} + E_y [(E[y|x] - y)^2]$$

Substituindo a decomposição de (I) na decomposição de (II).

$$(II) = \underbrace{(E_D[f(x;D)] - E[y|x])^2}_{\text{(A) viés}} +$$

$$\underbrace{E_D[(f(x;D) - E_D[f(x;D)])^2]}_{\text{(B) variância do família de modelos}} +$$

$$\underbrace{E_y[(E[y|x] - y)^2]}_{\text{(C) variância residual}}$$

(C) É a variância resultante (e "irredutível") do ruído inerente às amostras.

↳ Gerado por imprecisões de medição, variáveis não inclusos em x, aleatoriedades etc...