

# demonstração Índice de Lerman-Yitzhaki

Lucas Brandão

01/11/2021

Segundo Hoffman é possível escrever o índice de gini como sendo

$$G = \frac{2}{n\mu} \text{cov}(i, x_i) \quad (1)$$

considerando que  $x_i$  é composta por  $h$  parcelas de renda, temos:

$$x_i = x_{1i} + x_{2i} + \dots + x_{hi} \quad (2)$$

aplicando (2) em (1) temos

$$G = \frac{2}{n\mu} \text{cov}(i, x_{1i} + x_{2i} + \dots + x_{hi})$$

que pode ser representado como

$$G = \frac{2}{n\mu} \sum_{i=1}^k \text{cov}(i, x_{hi})$$

podemos então escrever a equação da seguinte forma

$$G = \sum_{h=1}^k \frac{2}{n\mu} \text{cov}(i, x_{hi})$$

pode-se multiplicar então a equação dentro do somatório por  $\frac{\mu_h}{\mu_h}$ , visto ser igual a 1

$$G = \sum_{h=1}^k \frac{\mu_h}{\mu_h} \frac{2}{n\mu} \text{cov}(i, x_{hi})$$

reordenando os componentes da fração podemos escrever da seguinte forma

$$G = \sum_{h=1}^k \frac{\mu_h}{\mu} \frac{2}{n\mu_h} \text{cov}(i, x_{hi})$$

a primeira fração refere-se a proporção da parcela da renda  $h$  da renda total, podemos denomina-la  $\varphi_h$ .

$$G = \sum_{h=1}^k \varphi_h \frac{2}{n\mu_h} \text{cov}(i, x_{hi})$$

como (1) representa o índice de gini da renda  $x$  ou seja, o coeficiente de concentração da renda  $x$  ordenado pela renda  $x$ , podemos dizer que a parcela da equação após  $\varphi_h$  representa o coeficiente de concentração da parcela da  $h$  da renda ordenada pela renda  $x$ .

$$G = \sum_{h=1}^k \varphi_h C_h$$

ou seja, gini é igual à média ponderada dos coeficientes de concentração das parcelas que a compõe ordenadas pela renda. Para tornar explícita a relação de uma parcela no índice geral podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$G = G - \sum_{i=1}^k \varphi_h G - \sum_{i=1}^k \varphi_h C_h$$

Considerando que o segundo e o terceiro argumentos são iguais ao Gini (ou seja, a fórmula pode ser lida como sendo gini é igual a gini menos 0). A fórmula pode ser simplificada como:

$$G = G - \sum_{i=1}^k \varphi_h (G - C_h)$$

Assim, é possível analisar a contribuição de uma parcela  $h$  no Gini através da fórmula

$$\varphi_h (G - C_h)$$

Podendo ser um contribuição negativa (redução da desigualdade) ou positiva (aumento da desigualdade). Hoffman (2009) define então a medida de progressividade de Lerman-yitzhaki como:

$$\pi_h = (\text{sinal de } \varphi_h)(G - C_h)$$

Em que o  $C_h$  refere-se ao coeficiente de concentração de uma parcela da renda,  $G$  ao índice de Gini da renda contabilizando essa parcela e o  $\varphi$  é a participação da  $h$ -ésima parcela da renda na renda total. Como impostos representam uma parcela negativa da renda (ou seja,  $\varphi$  negativo), para analisar sua progressividade ou regressividade devemos utilizar a seguinte fórmula:

$$\pi_h = C_h - G$$

O autor justifica o nome dado à medida da seguinte forma: “O nome dado a essa medida de progressividade é um reconhecimento do pioneirismo de Lerman e Yitzhaki (1985 e 1995), que ressaltaram a importância de considerar a ordenação das rendas finais”(Hoffman,2009).