UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

TEEE - Projeto de circuitos fotônicos em silício

Unidade 01

Prof. Adolfo Herbster
6 de Dezembro de 2021

Lição atual: Problema modal

Problema modal

Equação de onda

1. Equações de Maxwell (com $\nabla\times$):

$$\begin{align} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H}, \tag{1}\\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon\mathbf{E}. \tag{2}\end{align}$$

2. Equação da onda em um meio qualquer:

$$\begin{align} \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon\mathbf{E} \Rightarrow \\ \nabla \times \left(-\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{j\omega\mu}\right) &= j\omega\varepsilon\mathbf{E} \Rightarrow \\ \nabla \times \left(\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}\right) &= \omega^2\varepsilon\mathbf{E} \tag{3}\end{align}$$

3. Equação de onda em meio LHI[1]:

$$\begin{align} \nabla \times \left(\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}\right) &= \omega^2\varepsilon\mathbf{E} \Rightarrow \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E} \Rightarrow \\ \nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} &= 0, \tag{4}\end{align}$$

em que $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ é o número de onda.

4. Equações de onda com componentes independentes:

$$\begin{align} \nabla^2 E_x + k^2 E_x &= 0 \\ \nabla^2 E_y + k^2 E_y &= 0 \\ \nabla^2 E_z + k^2 E_z &= 0 \tag{5}\end{align}$$

[1] Linear, homogêneo e isotrópico.

Problema modal

Componentes transversal e longitudinal

É considerado que a forma do campo elétrico e magnético é da forma

$$\mathbf{E}\,(x,y,z,t) = \mathbf{E}(x,y)e^{j\omega t - j\beta z}, \tag{6}$$

$$\mathbf{H}\,(x,y,z,t) = \mathbf{H}(x,y)e^{j\omega t - j\beta z}, \tag{7}$$

em que β é o número de onda (ou constante de fase) ao longo da direção de propagação do guia. Devido à direção de propagação estabelecida pelo guia, é conveniente decompor os campos em componentes do tipo transversal e longitudinal. Desta forma:

$$\mathbf{E}\,(x,y) = \underbrace{\hat{\mathbf{x}}\,E_x\,(x,y) + \hat{\mathbf{y}}\,E_y\,(x,y)}_{\text{transversal}} + \underbrace{\hat{\mathbf{z}}\,E_z\,(x,y)}_{\text{longitudinal}} \tag{8}$$

De forma similar, o operador $\boldsymbol{\nabla}$ é decomposto como

$$\boldsymbol{\nabla} = \underbrace{\hat{\mathbf{x}}\,\partial_x + \hat{\mathbf{y}}\,\partial_y}_{\text{transversal}} + \hat{\mathbf{z}}\,\partial_z = \boldsymbol{\nabla}_T + \hat{\mathbf{z}}\,\partial_z = \boldsymbol{\nabla}_T - j\beta\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{9}$$

Problema modal

Equações de Maxwell

Ao considerar a decomposição dos campos (Eq. 8) e dos operadores (Eq. 9) nas equações de Maxwell, podemos escrever

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{H} = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (\boldsymbol{\nabla}_T - j\beta\,\hat{\mathbf{z}}) \times (\mathbf{E}_T + \hat{\mathbf{z}}\,E_z) = -j\omega\mu\,(\mathbf{H}_T + \hat{\mathbf{z}}\,H_z) \\ (\boldsymbol{\nabla}_T - j\beta\,\hat{\mathbf{z}}) \times (\mathbf{H}_T + \hat{\mathbf{z}}\,H_z) = j\omega\varepsilon\,(\mathbf{E}_T + \hat{\mathbf{z}}\,E_z) \\ (\boldsymbol{\nabla}_T - j\beta\,\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\mathbf{E}_T + \hat{\mathbf{z}}\,E_z) = 0 \\ (\boldsymbol{\nabla}_T - j\beta\,\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\mathbf{H}_T + \hat{\mathbf{z}}\,H_z) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

em que μ e ε é a permeabilidade e a permissividade, em ordem, do dielétrico do meio em análise. O meio é considerado sem perdas. Após expandir as operações vetoriais das equações anteriores, obtemos (mostre!):

$$\boldsymbol{\nabla} E_z \times \hat{\mathbf{z}} - j\beta\,\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_T = -j\omega\mu\mathbf{H}_T \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\nabla} H_z \times \hat{\mathbf{z}} - j\beta\,\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_T = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_T \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}_T + j\omega\mu H_z\,\hat{\mathbf{z}} = 0 \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}_T - j\omega\varepsilon E_z\,\hat{\mathbf{z}} = 0 \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_T \cdot \mathbf{E}_T - j\beta E_z = 0 \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_T \cdot \mathbf{H}_T - j\beta H_z = 0 \tag{16}$$

Problema modal

Componentes transversais do campo

Tomando a Eq. 11 e Eq. 12, podemos expressar as componentes transversais em função das componentes longitudinais como[2]

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_T = -j\frac{\beta}{k_c^2}\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\nabla}_T E_z - j\frac{\omega\mu}{k_c^2}\boldsymbol{\nabla}_T H_z, \tag{17}$$

$$\mathbf{H}_T = -j\frac{\omega\varepsilon}{k_c^2}\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\nabla}_T E_z - j\frac{\beta}{k_c^2}\boldsymbol{\nabla}_T H_z, \tag{18}$$

em que k_c é o número de onda de corte e pode ser interpretado fisicamente como a componente transversal do vetor de onda de magnitude $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$:

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 \leftrightarrow k^2 = k_c^2 + \beta^2. \tag{19}$$

Ainda, podemos reescrever a Eq. 17 e Eq. 18 como

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_T = -j\frac{\beta}{k_c^2}\left(\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\nabla}_T E_z + \frac{\omega\mu}{\beta}\boldsymbol{\nabla}_T H_z\right), \tag{20}$$

$$\mathbf{H}_T = -j\frac{\beta}{k_c^2}\left(\frac{\omega\varepsilon}{\beta}\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\nabla}_T E_z + \boldsymbol{\nabla}_T H_z\right). \tag{21}$$

[2] Considere utilizar as identidades vetoriais expressas em Ex. 29 e Ex. 30.

Problema modal

Relação de dispersão

A relação de dispersão relaciona a frequência angular da onda eletromagnética com sua constante de propagação (Eq. 19). Desta equação, obtemos a frequência angular de corte:

$$\omega_c = \sqrt{\omega^2 - c^2\beta^2}, \tag{22}$$

e as velocidades de fase e de grupo:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\omega_c/\omega\right)^2}}, \tag{23}$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = c\sqrt{1 - \left(\omega_c/\omega\right)^2}. \tag{24}$$

Qual o significado físico de v_p e v_g? Há algum problema em $v_p > c$?

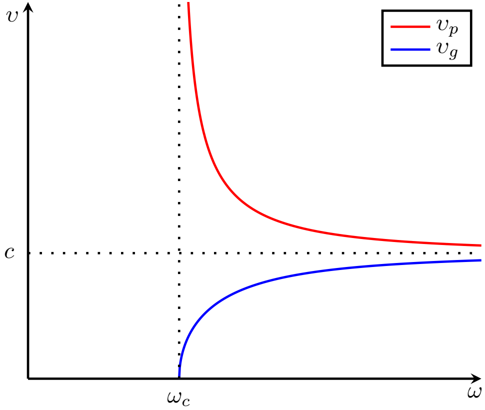

Figura 3: Velocidade de fase v_p e velocidade de grupo v_g em função da frequência angular do sinal.

Problema modal

Componentes transversais do campo

Ao considerar identidade vetorial $\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_T) = -\mathbf{E}_T$, podemos reescrever a Eq. 20 e Eq. 21, respectivamente, como

$$\mathbf{E}_T = -j\frac{\beta}{k_c^2}\left(\boldsymbol{\nabla}_T E_z - \eta_{\mathsf{TE}}\,\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\nabla}_T H_z\right), \tag{25}$$

$$\mathbf{H}_T = -j\frac{\beta}{k_c^2}\left(\boldsymbol{\nabla}_T H_z + \frac{1}{\eta_{\mathsf{TM}}}\,\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\nabla}_T E_z\right). \tag{26}$$

Finalmente, ao substituir as Eqs. 25 e 26 nas Eqs. 13-16[3], são obtidas as equações de Helmholtz:

$$\nabla_T^2 E_z + k_c^2 E_z = 0, \tag{27}$$

$$\nabla_T^2 H_z + k_c^2 H_z = 0. \tag{28}$$

Uma vez solucionadas as duas equações anteriores (E_z e H_z), as demais componentes são obtidas ($\mathbf{E}_T$ e $\mathbf{H}_T$) por meio das Eqs. 25-26, de acordo com as condições de fronteira para cada tipo de guia de onda e de acordo com o sistema de coordenadas utilizado.

[3]Considere utilizar as identidades vetoriais expressas em Exps. 31-33.

Identidades vetoriais

As identidades vetoriais utilizadas nesta seção:

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{A}_T) = -\mathbf{A}_T, \tag{29}$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\boldsymbol{\nabla}_T A_z \times \hat{\mathbf{z}}) = \boldsymbol{\nabla}_T A_z, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_T \times \boldsymbol{\nabla}_T A_z = 0, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_T \times (\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\nabla}_T A_z) = \hat{\mathbf{z}} \nabla_T^2 A_z, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{T}} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\nabla}_T Az) = 0. \tag{33}$$

Componentes de campo

Coordenadas cartesianas

As equações de Helmholtz em coordenadas cartesianas são:

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) E_z + k_c^2 E_z &= 0 \quad (34) \\ \left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) H_z + k_c^2 H_z &= 0 \quad (35) \end{aligned}}$$

As demais componentes de campos são (a partir das Eqs. 25-26):

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= -j\frac{\beta}{k_c^2}\left(\partial_x E_z + \eta_{\text{TE}}\,\partial_y H_z\right) \quad (36) \\ E_y &= -j\frac{\beta}{k_c^2}\left(\partial_y E_z - \eta_{\text{TE}}\,\partial_x H_z\right) \quad (37) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} H_x &= -j\frac{\beta}{k_c^2}\left(\partial_x H_z - \frac{1}{\eta_{\text{TM}}}\,\partial_y E_z\right) \quad (38) \\ H_y &= -j\frac{\beta}{k_c^2}\left(\partial_y H_z + \frac{1}{\eta_{\text{TM}}}\,\partial_x E_z\right) \quad (39) \end{aligned}}$$

Componentes de campo

Coordenadas cilíndricas

Em coordenadas cilíndricas, o vetor é decomposto como:

$$\mathbf{E}_T = \hat{\boldsymbol{\rho}}\, E_\rho + \hat{\boldsymbol{\phi}}\, E_\phi. \tag{40}$$

Os operadores são reescritos na forma:

$$\boldsymbol{\nabla}_T = \hat{\boldsymbol{\rho}}\, \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}, \tag{41}$$

$$\nabla_T^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \tag{42}$$

Portanto, as equações de Helmhotlz (Eqs. 27-28) são escritas como:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + k_c^2 E_z = 0 \qquad (43) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + k_c^2 H_z = 0 \qquad (44) \end{aligned}}$$

Componentes de campo

Coordenadas cilíndricas

De maneira semelhante, as demais componentes de campos são (a partir das Eqs. 25-26), em coordenadas cilíndricas, obtidas a partir das componentes logitudinais:

$$\boxed{\begin{aligned} E_\rho &= -j\frac{\beta}{k_c^2}\left(\partial_\rho E_z + \eta_{\mathsf{TE}}\frac{1}{\rho}\partial_\phi H_z\right) \quad (45)\\ E_\phi &= -j\frac{\beta}{k_c^2}\left(\frac{1}{\rho}\partial_\phi E_z - \eta_{\mathsf{TE}}\partial_\rho H_z\right) \quad (46)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} H_\rho &= -j\frac{\beta}{k_c^2}\left(\partial_\rho H_z - \frac{1}{\eta_{\mathsf{TM}}\rho}\partial_\phi H_z\right) \quad (47)\\ H_\phi &= -j\frac{\beta}{k_c^2}\left(\frac{1}{\rho}\partial_\phi H_z + \frac{1}{\eta_{\mathsf{TM}}}\partial_\rho H_z\right) \quad (48)\end{aligned}}$$

As soluções são classificadas de acordo com as componentes logitudinais dos campos (E_z, H_z).

Modos

Classificação

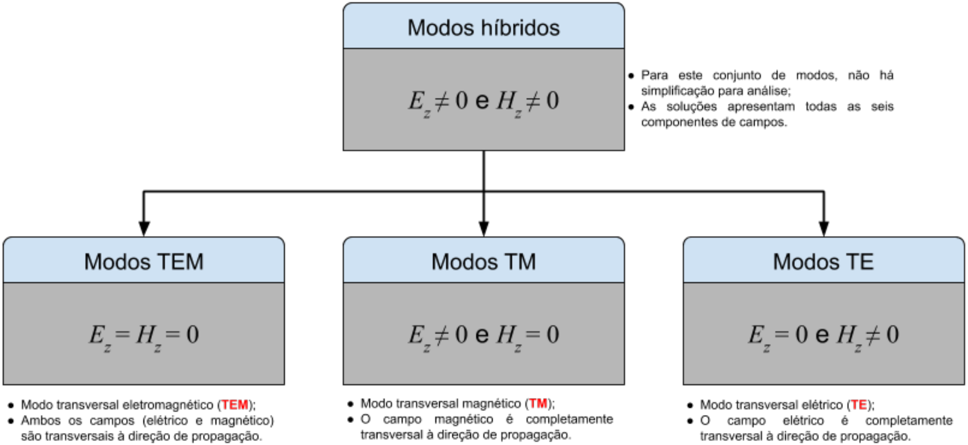

Figura 4: Classificação das soluções a partir das equações de Helmhotlz (Eqs. 27-28).

Problema modal

Impedâncias

A partir da Eq. 20 e Eq. 21, podemos definir dois parâmetros de impedância (para $\omega > \omega_c$):

$$\eta_{\text{TE}} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \left(\omega_c/\omega\right)^2}}, \tag{49}$$

$$\eta_{\text{TM}} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \eta_0\sqrt{1 - \left(\omega_c/\omega\right)^2}. \tag{50}$$

em que η_0 é a impedância característica do espaço livre. No caso em que $\omega < \omega_c$:

$$\eta_{\text{TE}} = \frac{-j\eta_0}{\sqrt{\left(\omega_c/\omega\right)^2 - 1}}, \tag{51}$$

$$\eta_{\text{TM}} = j\eta_0\sqrt{\left(\omega_c/\omega\right)^2 - 1}. \tag{52}$$

Qual o significado físico de η_{TE} e η_{TM}? O que representa η_0?

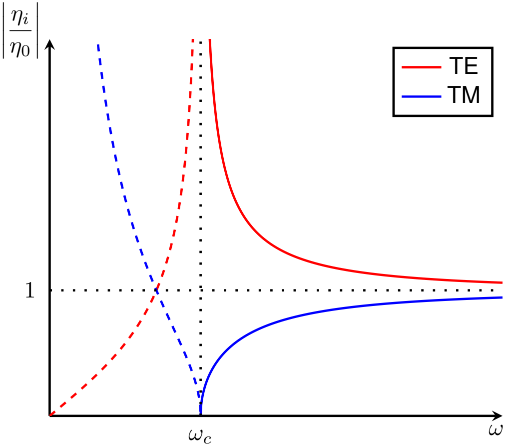

Figura 5: Impedância do modo normalizada em função da frequência angular do sinal.

Modos TEM

Características e solução

Nos modos TEM (*Transverse Electromagnetic Mode*), as componentes logitudinais dos campos (E_z e H_z) são nulas e, portanto, ambos os campos são ortogonais à direção de propagação. Ainda, $\beta = k$ e, portanto, não há frequência de corte para estes modos. Como $\omega = \beta c$, as impedâncias η_{TE} e η_{TM} são idênticas à impedância do meio η. A relação entre os campos magnético e elétrico é:

$$\mathbf{H}_T = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_T. \tag{53}$$

O campo elétrico $\mathbf{E}_T$ é determinado pelo restante das equações de Maxwell:

$$\boldsymbol{\nabla}_T \times \mathbf{E}_T = 0 \tag{54}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_T \cdot \mathbf{E}_T = 0 \tag{55}$$

Por fim, o vetor de Poynting $\mathcal{P}_z$ é:

$$\mathcal{P}_z = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^* \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2\eta} \left| \mathbf{E}_T \right|^2 = \frac{1}{2} \eta \left| \mathbf{H}_T \right|^2 . \tag{56}$$

Quais as características do guia de onda para a existência de modos TEM?

Os modos TM (*Transverse Magnetic*) são caracterizados pela condição $E_z \neq 0$ e $H_z = 0$. Todas as componentes dos modos TM são obtidas por:

$$\nabla_T^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \tag{57}$$

$$\mathbf{E}_T = -j\frac{\beta}{k_c^2}\boldsymbol{\nabla}_T E_z \tag{58}$$

$$\mathbf{H}_T = \frac{1}{\eta_{\text{TM}}}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_T. \tag{59}$$

O vetor de Poynting $\mathcal{P}_z$ tem a forma:

$$\mathcal{P}_z = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^*\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2\eta_{\text{TM}}}\left|\mathbf{E}_T\right|^2 = \frac{1}{2\eta_{\text{TM}}}\frac{\beta^2}{k_c^4}\left|\boldsymbol{\nabla}_T E_z\right|^2. \tag{60}$$

Quais as características do guia de onda para a existência de modos TM?

Os modos TE (*Transverse Electric*) são caracterizados pela condição $\mathbf{E}_z = 0$ e $\mathbf{H}_z \neq 0$. Todas as componentes dos modos TE são obtidas por:

$$\nabla_T^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \tag{61}$$

$$\mathbf{H}_T = -j\frac{\beta}{k_c^2}\boldsymbol{\nabla}_T H_z \tag{62}$$

$$\mathbf{E}_T = \eta_{\mathsf{TE}}\,\mathbf{H}_T \times \hat{\mathbf{z}}. \tag{63}$$

O vetor de Poyting $\mathcal{P}_z$, nesta situação, apresenta a forma

$$\mathcal{P}_z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^*\right)\cdot\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}\eta_{\mathsf{TE}}\left|\mathbf{H}_T\right|^2 = \frac{1}{2}\eta_{\mathsf{TE}}\frac{\beta^2}{k_c^4}\left|\boldsymbol{\nabla}_T H_z\right|^2. \tag{64}$$

Quais as características do guia de onda para a existência de modos TE?

Modos híbridos
Características e solução

Os modos híbridos apresentam componentes logintudinais não nulas para satisfazer as condições de contorno do problema. Como antecipado, neste caso, não é possível simplificar as equações iniciais.
Como primeiro passo de resolução, determinamos as componentes logitudinais em função das componentes transversais. Para H_z, resolvemos as Eqs. 35-37, obtendo:

$$H_z = \frac{j}{\omega\mu}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right). \tag{65}$$

Da mesma forma, considerando as Eqs. 34, 38 e 39:

$$E_z = -\frac{j}{\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right). \tag{66}$$

Modos híbridos

Solução

Em seguida, as expressões das componentes longitudinais (Eqs. 65-66) são substituídas nas expressões das componentes transversais (Eqs. 36-39):

$$\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\right]+\omega\mu H_y=\beta E_x \tag{67}$$

$$\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\right]-\omega\mu H_x=\beta E_y \tag{68}$$

$$-\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\right]-\omega\varepsilon E_y=\beta H_x \tag{69}$$

$$-\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\right]+\omega\varepsilon E_x=\beta H_y \tag{70}$$

É possível expressar as equações anteriores na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial y} & \left(\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial x} + \omega\mu\right) \\ -\left(\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial y} + \omega\mu\right) & \dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \tag{71}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial y} & -\left(\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x} + \omega\varepsilon\right) \\ \left(\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial y} + \omega\varepsilon\right) & -\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \tag{72}$$

Modos híbridos

Solução

As componentes transversais do campo magnético são expressas a partir da Eq. 72 como

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y} & -\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x} + \omega\varepsilon\right) \\ \left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y} + \omega\varepsilon\right) & -\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \tag{73}$$

Ao substituir esta equação na Eq. 71, temos

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y} & \left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x} + \omega\mu\right) \\ -\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y} + \omega\mu\right) & \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y} & -\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x} + \omega\varepsilon\right) \\ \left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y} + \omega\varepsilon\right) & -\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} - \beta^2 \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = 0. \tag{74}$$

Esta equação é resolvida numericamente, caracterizada como um problema de autovalores e autovetores. Quais as características do guia de onda para a existência de modos híbridos?

Análise - *slab* simétrico ($n_c = n_s$)

Etapas de análise (de acordo com a geometria do problema):

1. aplicação das equações de Maxwell;
2. determinação das componentes dos campos;
3. aplicação das condições de contorno;
4. determinação da equação característica;
5. a partir da solução da equação característica, determinar os parâmetros dos modos, como índice de refração e constante de propagação.

De acordo com as características do guia, como homogeneidade e simetria, é possível classificar a solução, como TEM ou TE, e determinar diretamente as componentes dos campos.

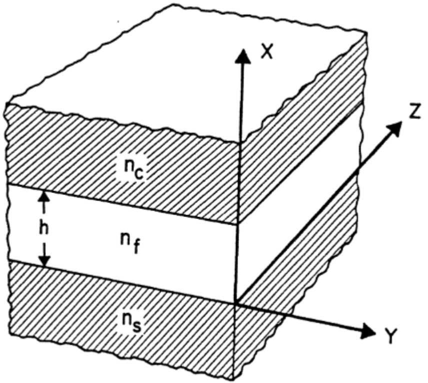

Figura 6: Guia dielétrico de placas planas assimétrico.

Análise - *slab* simétrico ($n_c = n_s$)

A Fig. 6 ilustra um guia dielétrico retangular formado por três camadas dielétricas, cujo índice de refração é n_i ($i = c, f, s$). O guia é simétrico ($n_c = n_s$), em que $n_f > n_s$ e, portanto, satisfaz a condição de reflexão interna total. Assim, o campo propaga-se no dielétrico, cujo índice é igual a n_f. Tomando a Eq. 25 e Eq. 26 (geometria retangular) e considerando $\partial/\partial y = 0$, estas equações são reescritas como:

$$\mathbf{E}_T = -j\,\frac{\beta}{k_c^2}\left(\frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}x}\,\hat{\mathbf{x}} - \eta_{\text{TE}}\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x}\,\hat{\mathbf{y}}\right), \tag{75}$$

$$\mathbf{H}_T = -j\,\frac{\beta}{k_c^2}\left(\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{\eta_{\text{TM}}}\frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}x}\,\hat{\mathbf{y}}\right). \tag{76}$$

Análise - *slab* simétrico ($n_c = n_s$)

Obtidas as equações das componentes transversais (Eqs. 75 e 76) e longitudinais (Eqs. 27 e 28), as componentes nas direções $\hat{\mathrm{x}}$ e $\hat{\mathrm{y}}$ dos campos são (obtidas também a partir das Eqs. 36-39 com $\partial/\partial y = 0$):

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = -j\frac{\beta}{k_c^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\eta_{\mathsf{TE}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{d}E_z/\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}H_z/\mathrm{d}x \end{bmatrix}, \tag{77}$$

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = -j\frac{\beta}{k_c^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\eta_{\mathsf{TM}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{d}H_z/\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}E_z/\mathrm{d}x \end{bmatrix}, \tag{78}$$

enquanto as componentes logitudinais são

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_z}{\mathrm{d}x^2} + k_c^2 E_z = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 H_z}{\mathrm{d}x^2} + k_c^2 H_z = 0.$$

Observe que há dois conjuntos de equações e, portanto, soluções: modo TM e modo TE.

Análise - *slab* simétrico ($n_c = n_s$)

2. determinação das componentes dos campos

Então, podemos dividir as equações em dois grupos:

Modo TM:

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= -j\,\frac{\beta}{k_c^2}\,\frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}x} \\ H_y &= -j\,\frac{\omega\varepsilon}{k_c^2}\,\frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}^2E_z}{\mathrm{d}x^2} &+ k_c^2E_z = 0. \end{aligned}}$$

Modo TE:

$$\boxed{\begin{aligned} E_y &= j\,\frac{\omega\mu}{k_c^2}\,\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x} \\ H_x &= -j\,\frac{\beta}{k_c^2}\,\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}^2H_z}{\mathrm{d}x^2} &+ k_c^2H_z = 0. \end{aligned}}$$

As demais etapas de análise de um guia de ondas serão apresentados nos capítulos seguintes.