VARIABLE ALEATORIA

Introducción

El objeto de la teoría de probabilidad es proporcionar un modelo matemático adecuado a la descripción e interpretación de cierta clase de fenómenos aleatorios. Vemos como se idealiza el estudio experimental de las distribuciones de frecuencia relativas para variables aleatorias discretas y continuas; y sus distribuciones acumuladas a través de un modelo teórico.

Se busca definir una función analítica que dé el comportamiento matemático de esa variable aleatoria real ; sujeta a los axiomas de probabilidad.

Concepto de Aleatoriedad

La aleatoriedad la produce un proceso o experimento aleatorio en si mismo, por eso hablamos de experimento aleatorio. Una muestra aleatoria es el resultado de un experimento aleatorio. Realizado el experimento, definido el Ω, calculamos la probabilidad de los sucesos. En la teoría de probabilidad no interesa sólo la probabilidad de un suceso determinado sino el comportamiento general de todos los sucesos posibles que resultan del experimento y conforman el Ω. Es decir que interesa la distribución de la masa de probabilidad. Esto nos conduce a la definición de variable aleatoria y al estudio de sus funciones de probabilidad.

VARIABLE ALEATORIA

Al realizar un experimento aleatorio relacionado con cada punto muestra de Ω puede haber una serie de características que interesan más que la descripción del punto muestra en sí. A cada experimento le asociamos un espacio muestra Ω cuyos elementos ω pueden o no ser un número real. En una clase muy general de problemas interesa asignar un número real x a cada elementos ω pertenecientes a Ω.

Definición

Sea un experimento aleatorio E; y Ω el espacio muestra asociado a él. Una función X que asigna a cada uno de los elementos $\omega \in \Omega$ un número real $x = X(\omega)$, se llama variable aleatoria.

<u>Observación :</u> en algunos casos ω es ya la característica numérica que queremos estudiar $\therefore$ $X(\omega) = \omega$ es la función identidad.

En general tenemos:

- Ω: espacio muestra del experimento E.
- R_x : valores posibles de X, llamado recorrido o campo de variación de la variable aleatoria.

Ejemplos de variables aleatorias:

a.- Sea el experimento E : arrojar dos dados

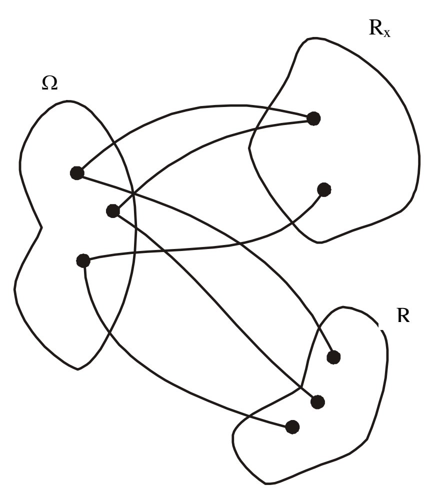
$\Omega = \{ (1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; ....(6,6)\}$

X : suma de los puntos de los dos dados ;

$R_x = \{ 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 \}$

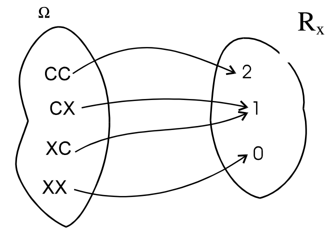
Y : diferencia entre los puntos de los dados; tomada en valor absoluto ;

$R_y = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$



b.- Sea el experimento E : arrojar dos monedas
Ω = { (c,c) ; (c,x) ; (x,c) ; (x,x) }

Interesa la cantidad de caras; $\therefore$
R_x= { 0, 1, 2 }



La variable aleatoria X determina una relación de equivalencia entre Ω y R_x , existe un suceso en Ω equivalente a cada suceso definido en R_x .

Dado un suceso $B \subseteq R_x$, existe $A \subseteq \Omega$, tal que A es equivalente con B, es decir :
para todo $x \in R_x$, existe $\omega \in \Omega$ tal que $X(\omega) = x$.

Ejemplo:

Consideremos el experimento E de arrojar dos monedas
Ω = { (c,c) ; (c,x) ; (x,c); (x,x) }

Sea el suceso A = se obtiene una cara A = { (c,x) ; (x,c) }
P(A) = 1/4 + 1/4 = 1/2

R_x = {0 , 1 , 2 } B = { 1 } $\therefore$ P(B) = 1/2

Variable aleatoria discreta

Si el número de valores posibles de la variable X es finito o infinito numerable, ésta será una variable discreta. Entonces $R_x = \{ x_1 , x_2 , x_3 ,...,.x_n \}$ ó $R_x = \{ x_1 , x_2 , x_3 ,....... \}$

Variable aleatoria continua

Si el recorrido de la variable X es un intervalo real cuyos extremos pueden ser $-\infty$ y $+\infty$; ésta será una variable aleatoria continua. Entonces $R_x = (a , b)$ ó $R_x = (-\infty , +\infty)$ ó $R_x = (a , +\infty)$ ó $R_x = (-\infty , b)$

Tanto para variables aleatorias discretas o continuas podemos asociar valores de probabilidad.
$P(X = x_i)$ = P(suceso : X toma el valor x_i)
$P(c < X < d)$ = P(suceso : X toma cualquier valor en el intervalo)
$P(X \leq x_o)$ = P(suceso : X toma valores menores o iguales que x_o)

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DISCRETA O DE CUANTÍA

Si X es una variable aleatoria discreta , a cada valor posible x_i le asociamos un número $p(x) = P(X = x_i)$ llamado probabilidad de x_i . Los $p(x_i)$ con i = 1, 2, 3, ...,n. deben satisfacer las siguientes condiciones:

a.- $p(x_i) \geq 0 \quad \forall \ i = 1..n$
b.- $\Sigma p(x_i) = 1$

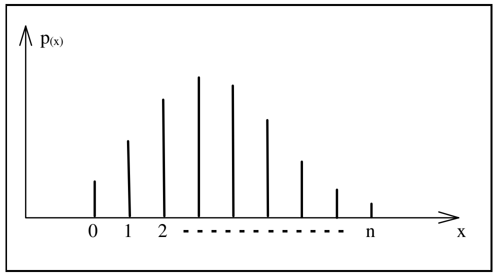
Definición

Llamamos **<u>función de probabilidad discreta o función de cuantía</u>** o función de probabilidad puntual correspondiente a la variable aleatoria X : p(x)] ; donde las probabilidades $p(x)= P(X= x)$ verifican :

a.- $p(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in R$

b.- $\Sigma p(x) = 1$

Esta distribución se representa a través de un gráfico de bastones:



Interpretación física :
Si consideramos al eje real como una barra; podemos suponer que por sobre cada punto de abscisa x hay aplicada una masa puntual P[X = x] = p(x). Además la masa total de probabilidad es igual a uno.

Observaciones:

- Supóngase que la variable discreta puede tomar un número finito de valores x_1, x_2 , x_3,...., x_n; si cada resultado es igualmente probable $\therefore$ $p(x_1) = p(x_2) = \ldots = p(x_n) = 1/n$.
- Si X toma un número infinito no numerable es imposible que todos los resultados sean equiprobables, pues no satisface la condición de cierre ; $\Sigma\, p(x) = 1$

Ejemplo:
Sea E : un jugador arroja 3 monedas; gana $2 por cada cara que aparece y pierde $2 por cada cruz.

Ω = { (ccc); (ccx); (cxx); (xxx); (xcc); (xxc); (cxc); (xcx) }

Al jugador le interesa la ganancia o pérdida que el punto muestra le representa.. La variable aleatoria se define:

$X : \Omega \rightarrow R_x$

X= ganancia del jugador. P(ω)= 1/8

P(ganar 6) = P(x=6) = P(ω = ccc) = 1/8

P(ganar 2) = P(x=2) = P (ω ∈ { cxc , xcc , ccx }) = 3/8

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD CONTINUA - FUNCIÓN DE DENSIDAD

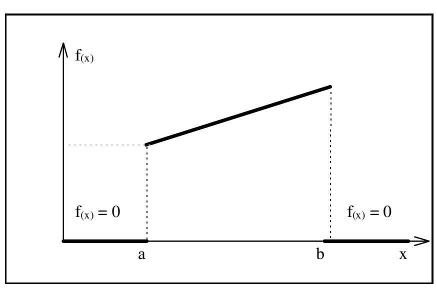
Definición

Dada una variable aleatoria continua X; se llama función de densidad de probabilidad de X a f(x) si existe tal que satisfagan las siguientes condiciones:

a.- $f(x) \geq 0$ para todo x

b.- $\int_R f(x).dx = 1$

Nota: f(x) **no** indica probabilidad . Sólo indica cómo se distribuye la masa de probabilidad dentro del recorrido de la variable. Geométricamente, P(a < X < b) = 1 es el área bajo la curva f(x).



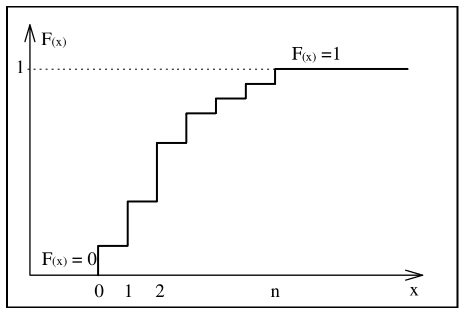
DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA

A las variables aleatorias discretas le asociamos una función de cuantía y a las continuas una función de densidad. Ambas variables tienen asociadas una función de probabilidad acumulada. Para todo número real x del recorrido R_x quedan definidos los sucesos $\{ X \leq x \}$ para todo x perteneciente a R . Si calculamos $P\{ X \leq x \}$ obtenemos una distribución de probabilidad acumulada. Esta distribución se simboliza F(x).

Definición

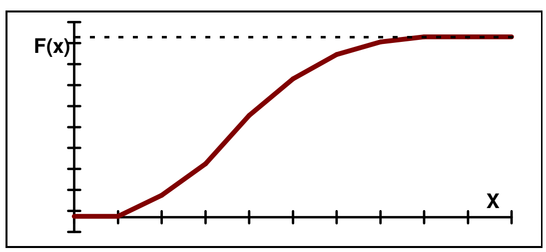
Sea X una variable aleatoria discreta, definimos F(x) como función de distribución acumulada de la variable aleatoria X a :$F(x) = P(X \leq x)$. Si X es una variable aleatoria discreta la gráfica es una función escalonada con tramos continuos y un número finito o infinito numerable de saltos correspondiente a los valores de $X = x_1 , x_2 ,\ldots. x_n$

$$P(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i)$$



Si X es una variable aleatoria continua su función de distribución acumulada es el valor del área bajo la curva $f(x)$ a la izquierda de x.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$



Propiedades de F(x)

1.- $F(x) \geq 0$, $\forall\, x \in R$ (no negatividad)

2.- $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ (no decreciente)

3.- $0 \leq F(x) \leq 1$

4.- Si F(x) es la función de distribución de una variable aleatoria continua, entonces $\dfrac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x) \quad \forall$

x donde F(x) es diferenciable, siendo f(x) la función de densidad de la variable.

5.- $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < x \leq x_2)$

ESPERANZA MATEMÁTICA

Definición

El valor esperado o esperanza matemática de una variable aleatoria X es un promedio ponderado de los valores que puede asumir X con probabilidades para los valores de X como pesos; es decir es un promedio ponderado; es representado por E(X) o μ.

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \, . \, p(x_i) \qquad \text{caso discreto}$$

$$E(X)=\int x.f(x).dx \qquad \text{caso continuo}$$

Propiedades de la esperanza matemática:

1.- E(k)= k , siendo k una constante

2.- E(X + k) = E(X) + k

3.- E(k. X) = k E(X)

4.- E(X±Y) = E(X) ± E(Y)

5.- E(X . Y) = E(X) . E(Y) si las variables X e Y son independientes.

VARIANCIA

Definición

Sea X una variable aleatoria con media E(X)= μ; la variancia de X representada por V(X) o σ^2, es la media de los cuadrados de los desvíos de X respecto a su esperanza. Simbólicamente,

$$V(X) = E[(X - \mu)^2]$$

$$V(X) = \int_{R_x} (x-\mu)^2 f(x)dx \qquad \text{Caso continuo}$$

$$V(X) = \sum_{x \in R_x} (x-\mu)^2 p(x) \qquad \text{Caso discreto}$$

Propiedades de la variancia.

1.- V(X) ≥ 0

2.- V(k) = 0 k constante

3.- V(k.X) = k^2.V(X)

4.- V(k + X) = V(X)

5.- V(X ± Y) = V(X) + V(Y) si las variables X e Y son independientes.

6.- V(X ± Y) = V(X) + V(Y) ± 2.Cov (X,Y), si X e Y no son independientes,

donde Cov(X,Y) = E [(X - μ_x).(Y - μ_y)]