O. Junge, D. Karrasch
26. Juni 2023

Übung 25 (Gemischte Quadraturformeln)
Wir wollen das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für mehrfach stetig differenzierbare Funktionen f numerisch approximieren. Zu diesem Zweck unterteilen wir das Intervall $[a,b]$ in N Teilintervalle. Auf dem ersten und dem letzten Teilintervall wenden wir die linke bzw. die rechte Boxregel an. Auf allen inneren Teilintervallen wenden wir summarisch die Simpsonregel an (siehe Übung 22). Überlegen Sie sich vorab die Ordnung des Verfahrens und den Maximalgrad der Polynome, die exakt integriert werden. Überprüfen Sie anschließend Ihre Überlegungen anhand einer Konvergenzanalyse einer eigenen Implementierung.

Übung 26 (Picard-Lindelöf)
Bestimmen Sie die Definitionsgebiete D der rechten Seiten folgender Differentialgleichungen so, dass jeweils die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt sind:

(a) $t\dot{x} = 1$, (b) $(\dot{x})^3 = t$, (c) $\dot{x} = \sin(t)\ln(|x|)$, (d) $t\ddot{x} + 8x = 9$.

Übung 27 (Lineare ODEs)
Für ein autonomes, lineares AWP

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

ist die Lösung gegeben durch

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_2,$$

wobei λ_i und v_i Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von A sind, und die Koeffizienten c_i durch den Anfangswert bestimmt werden. Visualisieren Sie das Vektorfeld (Stichwort: mögliche Pakete `Plots.jl` oder `Makie.jl` und der `quiver`-Befehl) und plotten Sie den Graphen einer exakten Lösung zu den folgenden Systemen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vermeiden Sie Handrechnungen, nutzen Sie den Computer auch für Hilfs- oder Zwischenergebnisse.