O. Junge, D. Karrasch
8. Mai 2023

Übung 6

Wir betrachten für $|x| \ll 1$ folgende zwei Ausdrücke:

$$\log(x+1), \qquad \text{und} \qquad \frac{\log(1+x)}{(1+x)-1} \cdot x,$$

sowie ihre Unterteilung in Zwischenschritte:

$$x \xrightarrow{\quad h \quad} 1+x =: a \xrightarrow{\quad g \quad} \log(a)$$
$$x \xrightarrow{\quad h \quad} \begin{pmatrix} 1+x =: a \\ x =: b \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad g \quad} \frac{\log(a)}{a-1} b.$$

(a) Begründen Sie, warum der erste Algorithmus instabil ist.

(b) Plotten Sie Graphen der beiden Ausdrücke für sehr kleine x. In Julia können Sie wie folgt vorgehen:

```
using Pkg
Pkg.add("Plots") # bzw. wechseln Sie in den pkg-mode via ]
# und führen Sie add Plots aus
using Plots
plot(xWerte, yWerte)
```

(c) Geben Sie ein heuristisches Argument dafür, warum der zweite Algorithmus stabil ist. [Tipp: Nutzen Sie die Taylor-Entwicklung der log-Funktion.]

Übung 7

(a) Schreiben Sie eine Funktion `H(n::Int)`, die für gegebenes `n` die zugehörige Hilbertmatrix erzeugt. Schreiben Sie weiterhin eine Funktion `Hinv(n::Int)`, die die zugehörige Inverse erzeugt.

(b) Vergleichen Sie für einen geeignet dimensionierten Zufallsvektor `b` (oder wahlweise einen deterministischen Vektor) (und verschiedene `n`) folgende Lösungskandidaten für das Gleichungssystem $Hx = b$: `H(n)\b`, `Hinv(n)*b` und `inv(H(n))*b`. Stellen Sie *vorher* Vermutungen auf, welche Lösungen identisch sein könnten oder müssten und überprüfen Sie Ihre Vermutungen.

(c) Fehleranalyse: Bestimmen Sie für eine beliebige rechte Seite `b` den Rückwärtsfehler. Was ist der Vorwärtsfehler? Wievielen Stellen der numerischen Lösung von $Hx = b$ können Sie vertrauen?

(d) Ist der Lösungsalgorithmus anhand der vorhergehenden Analyse (rückwärts-)stabil?