O. Junge, D. Karrasch 12. Juni 2023

Übung 19 (Nachiteration)
Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zu diesem System sei bereits eine Näherungslösung $\tilde{x}$ berechnet worden, die gegebenenfalls fehlerbehaftet ist. Nachiteration ist eine Möglichkeit zur Verbesserung dieser Lösung. Dazu definieren wir das Residuum $r := b - A\tilde{x}$ und bezeichnen mit z die numerische Lösung des Gleichungssystem $Az = r$.

(a) Angenommen, Sie können Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ mit einer relativen Genauigkeit von $\varepsilon \in (0, 1)$ lösen, d. h. für eine erzielte Lösung x gilt $\|b - Ax\| \leq \varepsilon\|b\|$. Überlegen Sie, warum dann $\hat{x} := \tilde{x} + z$ im Allgemeinen eine genauere Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ als $\tilde{x}$ darstellt.

(b) Schreiben Sie eine Funktion zur Nachiteration. Übergeben Sie eine relative Fehlertoleranz, bei deren Erreichen die Nachiteration abgebrochen wird. Lassen Sie dabei zählen, wieviele Schritte der Nachiteration durchgeführt wurden.

Übung 20 Gegeben sei eine Familie von Matrizen $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n = 2, 3, \ldots$, mit der jeweiligen Singulärwertzerlegung $A_n = U_n\Sigma_n V_n^\top$, wobei

$$\Sigma_n = \operatorname{diag}(2^n, 1, 1, \ldots, 1, 1, 5^{-n}).$$

(a) Berechnen Sie die Kondition κ_2 von A_n bezüglich der L^2-Norm.

(b) Was ist die kleinste Zahl n für die A_n numerisch singulär wird, d.h. numerisch ununterscheidbar von einer singulären Matrix?[1]

Übung 21 (Polynominterpolation)
Sei $(\phi_{k,n})_{k=0}^n \subset \mathcal{P}_n$ eine Basis des Vektorraums $\mathcal{P}_n$ der Polynome vom Grad $\leq n$, die von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbilden. Zudem seien $n + 1$ paarweise verschiedene Stützstellen $\{x_i; i = 0, \ldots, n\}_i \subset \mathbb{R}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, und Werte $\{y_i;\ i = 0, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht ist nun ein Polynom $p_n \in \mathcal{P}_n$, $p_n = \sum_{k=0}^n \lambda_k\phi_{k,n}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, das die Interpolationsgleichungen $p_n(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, n$ löst.

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten λ_k in Matrix-Vektor-Schreibweise $M\lambda = y$ auf. Hat das Gleichungssystem eine Lösung? Falls ja, ist diese eindeutig?

(b) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem (möglichst) explizit für die Monombasis auf. Erzeugen Sie zufällig n Stützstellen (für verschiedene n) und bestimmen numerisch die Kondition der Matrix M. Welche Konsequenz hat eine möglicherweise große Kondition in diesem spezifischen Kontext?

(c) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Polynome (siehe Vorlesung) eine Basis des $\mathcal{P}_n$ bilden. Welche Form hat die Matrix M nun? Wie ist ihre Kondition?

(d) Betrachten Sie nun die sogenannten *Newton-Polynome*

$$N_{0,n} \colon x \mapsto 1, \qquad N_{k,n} \colon x \mapsto \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Bildet $(N_{k,n})_{k=0}^n$ ebenfalls eine Basis des $\mathcal{P}_n$? Welche Form hat die Matrix M?

[1] Zur Erinnerung/Info: das Inverse der Kondition einer Matrix bestimmt seinen (Minimal-)Abstand zur Menge der singulären Matrizen.