O. Junge, D. Karrasch
03. Juli 2023

Übung 28 (Explizites und implizites Euler-Verfahren für eine lineare DGL)
Wir betrachten die *gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung*

$$x''(t) = -x(t), \quad t \in [0, \infty), \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 0. \tag{$\star$}$$

1. Überführen Sie ($\star$) auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung bezüglich einer vektorwertigen Funktion $y \in \mathcal{C}^1([0,\infty), \mathbb{R}^2)$.
2. Lösen Sie das System aus a) analytisch und berechnen Sie $\|y(t)\|_2$.
3. Wenden Sie auf das System aus a) das explizite Eulerverfahren mit konstanter Schrittweite $h > 0$ an. Wie entwickelt sich $\|y_k\|_2$ für $k \gg 1$?
4. Wenden Sie nun das implizite Eulerverfahren an. Wie entwickelt sich $\|y_k\|_2$ jetzt?
5. Was passiert, wenn man die Schrittweite h gegen 0 gehen lässt? Lässt sich der beobachtete Effekt so vermeiden?

Für Neugierige: Machen Sie sich etwas mit dem Paket `OrdinaryDiffEq.jl` vertraut und implementieren Sie Beispiele aus der Vorlesung oder den Übungen. Viel Vergnügen!

Übung 29
Wir betrachten das parametrisierte Räuber-Beute-Modell

$$\begin{pmatrix} \dot{b} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b - a_2 \cdot b \cdot r \\ -a_3 \cdot r + a_4 \cdot b \cdot r \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das zugehörige AWP auf dem Zeitintervall $[0, 1]$ für die Parameter-Werte $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, und Anfangswert

$$x_0 = \begin{pmatrix} b_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

(a) dem expliziten Euler-Verfahren,

(b) dem Runge-Verfahren,

(c) dem Runge-Kutta-Verfahren (RK4).

Plotten Sie den Fehler zwischen den numerischen Lösungen und einer numerischen Referenzlösung zum Zeitpunkt $t = 1$ in Abhängigkeit von der Schrittweite h. Was beobachten Sie? Für die Referenzlösung nutzen Sie das RK4-Verfahren mit Schrittweite 10^{-4}. Schätzen Sie die Fehlerordnung der Methoden.

Übung 30

R2-D2 jagt in der (x, y)-Ebene C-3PO und läuft dabei stets mit betragsmäßig konstanter Geschwindigkeit $v_K = 2$ direkt auf R2-D2 zu. C-3PO seinerseits möchte auf direktem Wege mit Geschwindigkeitsbetrag $v_M = 1$ zum Punkt $(0, 1)$ fliehen. C-3PO befinde sich zur Zeit $t = 0$ am Punkt $(0, 0)$ und R2-D2 am Punkt $(1, 0)$.

(a) Stellen Sie die Differentialgleichungen auf, welche die Bahn von R2-D2 bzw. die Bahn von C-3PO beschreiben.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Julia, wann und wo sich R2-D2 bis auf 10^{-5} C-3PO genähert hat.

Hinweis: Suchen Sie nach "event handling" in der Dokumentation des Pakets `OrdinaryDiffEq.jl`.