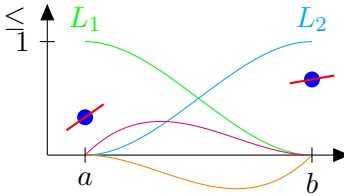


Übung 22 (Hermite-Interpolation)

Wir konstruieren ein Interpolationspolynom p (vom Grad ≤ 3) mit den folgenden Eigenschaften

$$p(a) = y_a, \quad p(b) = y_b, \quad p'(a) = w_a \quad \text{and} \quad p'(b) = w_b$$

und gegebenen Daten (y_a, y_b, w_a, w_b) mit dem Lagrange-Ansatz:



- Finden Sie die Formeln für die L_j ($j = 1, \dots, 4$) so dass L_1 die Daten $(y_a, y_b, w_a, w_b) = (1, 0, 0, 0)$, L_2 die Daten $(0, 1, 0, 0)$, L_3 die Daten $(0, 0, 1, 0)$ und L_4 die Daten $(0, 0, 0, 1)$ interpoliert.
- Finden Sie eine einfache Formel mit den L_j für p , welches die Daten (y_a, y_b, w_a, w_b) interpoliert.
- Schreiben Sie eine Funktion `hermiteinterpol(a, b, y, w, xx)`, die das Interpolationspolynom p an den Punkten `xx` auswertet.

Übung 23 (Summenformel für Simpson-Quadratur)

Implementieren Sie die Summenformel für die Simpson-Quadratur für äquidistante Zwischenknoten. Die Simpsonregel zur Approximation von $\int_a^b f(x) dx$ lautet

$$\frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Übung 24 (Alternierende Boxregel)

Implementieren Sie die *summarische, alternierende Boxregel*: Unterteilen Sie das Integrationsintervall in äquidistante Teilintervalle, wenden Sie auf dem ersten Teilintervall die rechte Boxregel, auf dem zweiten die linke Boxregel, auf der dritten wieder die rechte Boxregel usw. an. Laut Wikipedia gilt:

Die Boxregel ist exakt für Polynomfunktionen von Grad höchstens 0 (also für konstante Funktionen) und damit von Ordnung 1.

Wir wollen diese Aussage "stresstesten". Wählen Sie eine Familie von niedriggradigen Polynomen und ein Versuchsintervall, etwa $[a, b] = [0, 1]$. Bestimmen Sie manuell oder mit WolframAlpha den Wert des bestimmten Integrals. Implementieren Sie dann die oben beschriebene Quadraturformel `qf(f, a, b, n)` für eine Funktion f , Intervallgrenzen a und b , sowie die Anzahl der Unterteilungsstellen. Wenden Sie die Quadraturformel für n in $2 \cdot (1:10) + 1$ an, messen den Fehler zum exakten Integralwert und tragen diesen über n in einem log-log-Plot auf. Mithilfe dieses Experimentierbaukastens, suchen Sie Antworten auf die folgenden Fragen:

- Für Polynome welchen Grades ist die Quadraturformel exakt?
- Ist die Antwort konsistent mit dem obigen Wikipedia-Zitat? Falls ja, was haben Sie falsch gemacht? Falls nein, woran liegt das?
- Wie äußert sich die Tatsache, dass eine Quadraturformel „von Ordnung p “ ist im Fehlerdiagramm?

Skizzieren Sie die Quadraturformel und finden Sie eine äquivalente Bezeichnung aus der Vorlesung dafür. Führen Sie eine ähnliche Fehleranalyse für das summarische Simpsonverfahren aus Aufgabe 21 durch. Von welcher Ordnung ist das Simpsonverfahren?