O. Junge, D. Karrasch
22. Mai 2023

Übung 11 [Orthogonale Matrizen]
Zeigen Sie, dass orthogonale Matrizen längen- und winkeltreu sind, und dass die Menge der orthogonalen Matrizen eine Gruppe bildet.

Übung 12 [Householder-Spieglungen]
Zeigen Sie, dass Householder-Spiegelungen H_v symmetrisch und orthogonal sind. Folgern Sie damit $H_v^2 = I$.

Übung 13 [QR-Zerlegung]
Implementieren Sie das QR-Verfahren für „schlanke" Matrizen (siehe 2.8). Starten Sie mit $R = A$ und $Q = I$, und überschreiben Sie R und Q schrittweise wie in der Vorlesung besprochen.
Wer möchte, setzt sich mit den Funktionen `mul!` und `view` auseinander und versucht u.a. mit deren Hilfe, die Speicherallokationen und die Laufzeit zu minimieren. Am besten schreibt man dazu verschiedene Implementierungen, sagen wir `qr1` und `qr2`, und vergleicht ihre Performance mit Hilfe des `BenchmarkTools.jl`-Pakets, welches zunächst installiert (Stichwort `import Pkg; Pkg.add("BenchmarkTools")`) und geladen (`using BenchmarkTools`) werden muss. Anschließend rufen Sie `@btime qr1($A)` oder `@benchmark qr1($A)` und analog für ihre weiteren Versionen auf und studieren die Ausgabe, wobei `A` die Matrix ist, zu der Sie die QR-Zerlegung berechnen wollen. Alle sind herzlich eingeladen, ihre effizienteste Implementierung im Moodle-Forum vorzustellen.

Hinweise und theoretisches Lametta zu Aufgabe 11: Sei V ein endlich-dimensionaler, reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt, also einer bilinearen, symmetrischen und positiv-definiten Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Dann kann man folgenden Satz zeigen: zu jeder linearen Abbildung $f\colon V \to V$ existiert genau eine lineare Abbildung g, so dass für beliebige $u, v \in V$ gilt: $\langle u, f(v)\rangle = \langle g(u), v\rangle$. Diese eindeutige definierte Abbildung nennen wir die *adjungierte Abbildung* und bezeichnen sie mit $f^\top$. Diese Definition ist koordinateninvariant, sprich unabhängig von der Wahl einer Basis in V. Bleibt die Frage nach der Matrixdarstellung von $f^\top$. Bezüglich einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ lässt sich das Skalarprodukt zweier Vektoren $u, v \in V$ über ihre induzierten Basisdarstellungskoeffizientenvektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n = \dim V$, ausrechnen als $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, oder formal $x^\top y$. Bezüglich einer allgemeinen Basis berechnet sich das Skalarprodukt mithilfe der sogenannten *Gram-Matrix* $G = (g_{ij})_{ij}$, $g_{ij} = \langle b_i, b_j\rangle$, als $\langle u, v\rangle = x^\top G y$ (nachrechnen!), und die Matrixdarstellung der adjungierten Abbildung lautet $G^{-1}A^\top G$ (verifizieren!).[1] Bezüglich einer Orthonormalbasis ist die Matrixdarstellung der adjungierten Abbildung also gerade die transponierte Matrix der Matrixdarstellung der linearen Abbildung.

Mithilfe des Skalarprodukts werden orthogonale lineare Abbildungen $f\colon V \to V$ definiert als solche, die das Skalarprodukt invariant lassen, für die also $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ für beliebige $u, v \in V$ gilt. Für orthogonale lineare Abbildungen f gilt $f^\top \circ f = \mathrm{Id}$ und damit $f^\top = f^{-1}$ (warum?). Bezüglich einer beliebigen Basis gilt für die Matrixdarstellung der Adjungierten $f^\top$ einer orthogonalen linearen Abbildung f (mit Matrixdarstellung Q) $Q^\top = GQ^{-1}G^{-1}$. Bezüglich einer Orthonormalbasis gilt damit wie gewohnt $Q^\top = Q^{-1}$.

Eine *Gruppe* ist ein Tupel $(M, \star)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge M und einer Operation $\star\colon M \times M \to M$, so dass ein eindeutig definiertes *neutrales Element* $e \in M$ existiert (also $e \star x = x$ für alle $x \in M$) sowie zu jedem $x \in M$ eine eindeutige Inverse $y \in M$ existiert (so dass $y \star x = e$). Ein Beispiel bilden die ganzen Zahlen mit der Addition.

[1] Hierbei ist $A^\top$ die transponierte Matrix zu einer Matrix A.