

CÁLCULO APLICADO - UMA VARIÁVEL APLICAÇÕES DE DERIVADAS

Autor: Me. **Ivana Barreto Mato**

Revisor: Rosalvo Miranda

INICIAR

introdução

Introdução

Neste material, mostraremos aplicações de derivadas nas várias áreas de conhecimento. Iniciaremos com o estudo dos limites infinitos para identificar assíntotas, que são retas limitantes de gráficos de algumas funções. Será importante também identificarmos pontos críticos relevantes no gráfico de uma função como: pontos de máximo e mínimo locais, e pontos de inflexão. Este estudo, portanto, propiciará a construção de gráficos não elementares. Além disso, será possível identificar os pontos em que a função atinge seu maior e seu menor valor. Dessa forma, é possível resolver problemas de otimização, como por exemplo, maximização de lucro, minimização de custo, minimização de área de superfície para a maximização de volume (problema das embalagens). Por fim, estudaremos as taxas de variações relacionadas, que possibilitam a resolução de problemas com duas ou mais grandezas dependentes umas das outras.

Cálculo Envolvendo Infinitos e Cálculo de Assíntotas

As assíntotas são retas que limitam o gráfico da função em alguma parte do seu domínio. Para determiná-las é necessário que você aprenda a resolver limites “**infinitos**” e “**no infinito**”, que serão apresentados a seguir.

Limites “no infinito” e Assíntota Horizontal

Às vezes é importante saber o comportamento de uma função $f(x)$, quando a variável x cresce ilimitadamente ou decresce ilimitadamente. Observando a Figura 3.1, verifica-se que à medida que x tende a $+\infty$ ou $-\infty$, o valor da função se aproxima da reta horizontal $y = 2$. Neste caso, dizemos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

Vê-se claramente que a reta $y = 2$ funciona como uma barreira para o gráfico da função, por isso é denominada **assíntota horizontal**, e será definida a seguir.

Dizemos que a reta $y = k$, $k \in \mathbb{R}$ é uma assíntota horizontal se uma das seguintes condições ocorrer:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Portanto, para identificar um limite “no infinito”, basta verificar se $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$. A seguir, você vai aprender a resolver esse tipo de limite, que ocorre quando a indeterminação matemática é igual a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Quando se trata de funções polinomiais, você deve substituir a tendência por $+\infty$ ou $-\infty$ e operar com infinito de forma bem similar às operações de números reais. Porém, preste atenção às indeterminações a seguir.

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \infty - \infty \quad \infty \times 0 \quad 1^\infty \quad 0^0 \quad \infty^0.$$

É necessário aprender a operar com infinito para poder determinar os limites infinitos e também “no infinito”. Uma vez que é um conceito novo para você, conhecer as propriedades operatórias de infinitos é imprescindível. Para tanto, sugiro a consulta do Quadro 3.1 para verificar quais são as operações válidas e quais as que provocam indeterminações matemáticas.

Quadro 3.1 - Propriedades de limites infinitos e no infinito

Fonte: Adaptada de Flemming e Gonçalves (2006, p. 89).

Veremos alguns exemplos para praticar.

Exemplo 1: Verifique o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Neste caso, os limites “no infinito” são: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Fica fácil entender

mesmo sem a visualização gráfica, pois se a variável x está a crescer ilimitadamente, significa que dividiremos a constante 1 por número cada vez maior e, portanto, o valor da função tende a zero.

Exemplo 2: Usando o fato anterior, em que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x} = 0$, $k \in \mathbb{R}$, veremos como resolver um limite polinomial “no infinito”. Veja os cálculos a seguir, em que evidenciamos o termo de maior grau, consequentemente, os termos dentro do parênteses ficam com limite igual a zero, restando apenas o limite do termo de maior grau.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + 2x^2 - x + 1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 \left(\frac{2x^2}{2x^3} - \frac{x}{2x^3} + \frac{1}{2x^3} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 \left(\frac{2}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = 2(-\infty)^3 = -\infty\end{aligned}$$

Portanto, quando se trata de funções polinomiais, fica muito fácil resolver esse tipo de limite, resta apenas o termo de maior grau.

Usando o caso anterior, em que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x} = 0$, $k \in \mathbb{R}$, verifique o cálculo dos seguintes limites:

Exemplo 3: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 1}{x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4(1 + \frac{1}{3x^4})}{x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4}{x^5} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$

Exemplo 4: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 4}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4(1 + \frac{4}{3x^4})}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4}{2x} \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = 3(-\infty) = -\infty.$

Exemplo 5: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 5x + 4}{4x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4(1 - \frac{5x}{3x^4} + \frac{4}{3x^4})}{4x^4(1 + \frac{1}{4x^4})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4}{4x^4} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

E quando a função não é polinomial? Veja um exemplo que não envolve a função polinomial. Neste caso, é necessário multiplicar pelo conjugado.

$$\begin{aligned}
 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2) - 2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = 0
 \end{aligned}$$

Observe que aplicamos a diferença dos quadrados para excluir o radical ao numerador:

$$(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2}) = (\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{2})^2 = x + 2 - 2 = x.$$

Limites Infinitos e Assíntotas Verticais

Agora que você já entendeu o conceito de limites "no infinito" e assíntotas horizontais, vamos mostrar qual é a relação dos limites infinitos com as assíntotas verticais. Para tanto, é necessário definir candidatos, caso seja possível, para a tendência do limite, que são elementos não pertencentes ao domínio da função. Verifique, nos gráficos da Figura 3.3, que a função $f(x) = \frac{2x}{(x-3)}$ não está definida para $x = 3$. Portanto $x = 3$ é um candidato e os limites laterais $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{(x-3)}^{+\infty}$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{(x-3)}^{-\infty}$ são denominados de limites infinitos, pois, neste caso, o valor do limite cresce ou decresce ilimitadamente quando x tende a 3, tanto pela esquerda como pela direita.

Vê-se claramente que a reta $x=3$ funciona como uma barreira para o gráfico da função, por isso é denominada assíntota vertical, que será definida a seguir.

Definição de Assíntota Vertical

Dizemos que a reta $x = k$, $k \in \mathbb{R}$ é uma assíntota vertical se uma das seguintes condições ocorrer:

$$(i) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad (ii) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad (iii) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad (iv) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

Para calcular limites infinitos, observe, no gráfico da função na Figura 3.4, que $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{|x-3|} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{|x-3|} = +\infty$, no entanto, ao resolver analiticamente, sem a visualização gráfica, encontramos $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|} = \frac{1}{0}$. E agora? como chegar à conclusão de que o valor do limite é igual a $+\infty$? Neste caso, é necessário estudar o sinal da função, como mostra a Proposição 1.1.

Proposição

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções reais. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}^*$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, então:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty, \text{ se } \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \text{ se } \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Observe que, quando obtemos $\frac{k}{0}$ ao substituirmos a tendência do limite, esse resultado sinaliza que o limite é infinito, no entanto, a Proposição 1.1 nos mostra que, a partir do estudo de sinal da função, podemos determinar se o valor do limite é $+\infty, -\infty$ ou ele não existe. Para tanto, basta estudar o sinal da função. Agora vamos ver alguns exemplos que envolvem a determinação de limites infinitos.

Exemplo 1: Determinar $\lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{2x-3}{x-2} \right)^2 = \frac{1}{0}$. É um limite infinito, e pela Proposição 1.2.2, é necessário estudar o sinal da função. Verifica-se facilmente que a função $f(x) = \left(-\frac{2x-3}{x-2} \right)^2$ é sempre positiva, portanto $\lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{2x-3}{x-2} \right)^2 = +\infty$.

Exemplo 2: Dada a função $f(x) = \frac{2x-8}{x-3}$ determinar os limites

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{2x-8}{x-3} = \frac{-2}{0} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{2x-8}{x-3} = \frac{-2}{0} = ?$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{2x-8}{x-3} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{2x-8}{x-3} = +\infty$. Neste caso, dizemos que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{2x-8}{x-3}$ não existe porque os limites laterais são diferentes.

Exemplo 3: Dada a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-4} \cdot \frac{x(x-1)}{(x-2)(x+2)}$ determinar os limites $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-4} = \frac{0}{0}$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x^2-4} = \frac{0}{0}$. Aqui já podemos concluir que ambos são limites infinitos.

Portanto $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4} = -\infty$.

praticar

Vamos Praticar

Dada a $f(x) = \frac{2x^4 + 5x + 2}{(x+1)^4}$, verifique se existem assíntotas horizontais e verticais no gráfico dessa função e analise as afirmativas a seguir:

- i. O gráfico da função não apresenta assíntota horizontal.
- ii. $x = 1$ é assíntota vertical e $y = 3$ é assíntota horizontal.
- iii. A assíntota vertical existe, pois $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.
- iv. $y = 2$ é assíntota horizontal, pois $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$.

Está correto o que se afirma em:

- ☐ a) I e III, apenas.
 - ☐ b) II e III, apenas.
 - ☐ c) III e IV, apenas.
 - ☐ d) II e IV, apenas.
 - ☐ e) II, III e IV, apenas
-

Regras de L'Hospital

Agora que você já sabe derivar funções, apresentaremos a regra de L'Hospital, que permite calcular os limites por derivação. Esta regra muitas vezes facilita cálculo de limites. Conforme Flemming (2006, p. 226), temos a explicação a seguir.

Definição (regra de L'Hospital)

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis em um intervalo aberto I , exceto possivelmente em $a \in I$. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a \in I$.

(i) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

(ii) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Observe que a regra de L'Hospital só pode ser aplicada diretamente se as indeterminações são dos tipos: $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. No entanto, para outros tipos de indeterminações, podemos preparar a função utilizando artifícios matemáticos com o intuito de transformar as indeterminações em $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, dessa forma,

poder utilizar a regra de L'Hospital.

saiba mais

Saiba mais

A regra de L'Hospital para cálculo de limites indeterminados leva esse nome por causa de **Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital (1661-1704)**.

Acesso em: 24 jan. 2020.

ACESSAR

Vamos aos exemplos para você entender como aplicar a regra de L'Hospital para determinar limites de funções. Vale ressaltar que na regra de L'Hospital deriva-se o numerador e denominador separadamente, diferente de derivar pela regra do quociente.

Exemplo 1: Determine o valor dos limites, a seguir, usando a regra de L'Hospital:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{e^x + e^{-x} - 2}$ Indeterminação! Nesse caso, podemos utilizar a regra de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{e^x + e^{-x} - 2} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{(\sin(x) - x)'}{(e^x + e^{-x} - 2)'} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{(\sin(x) - x)'}{(e^x + e^{-x} - 2)'} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{\cos(x) - 1}{e^x - e^{-x}} \text{ Indeterminação!}$$

Neste caso, aplica-se a regra de L'Hospital até obtermos um valor válido para o limite:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{e^x - e^{-x}} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{(\cos(x) - 1)'}{(e^x - e^{-x})'} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 0}} \frac{-\sin(x)}{e^x + e^{-x}} = 0$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$ Indeterminação! Por L'Hospital, temos:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminação! Aplicando L'Hospital novamente, temos:

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminação! E aplicando L'Hospital novamente, temos: $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$.

Note que devemos aplicar a regra de L'Hospital sucessivamente, enquanto a indeterminação persistir.

Agora veremos alguns exemplos de limites cuja indeterminação é diferente de $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Neste caso, precisamos preparar a função para poder aplicar a regra de L'Hospital.

Exemplo 2: Determinar o valor dos seguintes limites preparando a função para utilizar a regra de L'Hospital.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 9)^{1/x} = +\infty \cdot 0$? Indeterminação! Observe que não podemos aplicar diretamente a regra de L'Hospital. Portanto temos de preparar a função através de artifícios matemáticos. Neste caso, denominaremos o limite de L e aplicaremos o logaritmo neperiano em ambos os lados.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 9)^{1/x} = L$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 9)^{1/x} = \ln L \rightarrow \text{por propriedade de limite} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln (3x + 9)^{1/x} = \ln L$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln (3x + 9)^{1/x} = \ln L \rightarrow \text{por propriedade de log} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln (3x + 9) = \ln L$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln (3x + 9) = \ln L \rightarrow \text{por definição de log} \rightarrow L = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln (3x + 9)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indeterminação!}$$

Verifique que na última linha utilizamos a definição de log, em que: $\ln(L) = \log_e(L) = u(x) \rightarrow L = e^{u(x)}$. Além disso, observe que a indeterminação do limite é do tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, e, dessa forma, podemos aplicar a regra de L'Hospital.

Aplicando L'Hospital ao limite, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(3x+9) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+9)}{(x)} \stackrel{(3x+9)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+9} = 0.$$

$$\text{Portanto, } L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+9)^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(3x+9)} = e^0 = 1.$$

b) Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin(1/x) = +\infty \cdot \sin(1/\infty) = +\infty \cdot 0$? Indeterminação!

Note que com essa indeterminação não podemos usar a regra de L'Hospital. Daí temos de preparar a função da seguinte forma:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin(1/x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{0}{=} \text{Indeterminação!}$ Agora, sim, podemos utilizar a regra de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{(\sin(1/x))}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\cos(1/x) \cdot (-1/x^2))}{(-1/x^2)} \stackrel{(1/x)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(1/x) = \cos(0) = 1$$

praticar

Vamos Praticar

A regra de L'Hospital é um recurso matemático excelente para o cálculo de limites por meio da função derivada. É imprescindível inicialmente verificar o tipo de indeterminação matemática. Nesse contexto, avalie o tipo de indeterminação do limite, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x) - 1}{\ln(1+x)}$ e resolva aplicando a regra de L'Hospital. Em seguida, assinale a alternativa correta.

- ☐ a) A indeterminação encontrada é $\frac{0}{0}$ e o valor do limite é igual a 1.
- ☐ b) O valor do limite é igual 3.
- ☐ c) A indeterminação é igual a $-\frac{\infty}{\infty}$ e o valor do limite é igual a 3.
- ☐ d) O valor do limite é igual a 2.

- ☐ e) A indeterminação é diferente de $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$
-

Teoria da Otimização

A teoria da otimização é utilizada para resolver problemas relacionados a várias áreas de conhecimento. São problemas que envolvem a maximização ou minimização de funções, como por exemplo: maximização de volume, minimização de custo, minimização de área de superfície (problema das embalagens) etc.

Pontos Críticos e Extremos Absolutos

Para identificar pontos em que a função assume seu maior e/ou menor valor dentro do seu domínio, é necessário determinar as imagens dos pontos críticos da função $(c, f(c))$ e dos pontos de fronteira do intervalo de definição da função. Veja a seguir algumas definições, segundo Flemming (2006, p. 196).

Definição de Ponto Crítico

Dizemos que $c \in D(f)$ são números críticos se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. O ponto crítico é dado por $(c, f(c))$.

Definição de Máximo Absoluto

Dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função f , se $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ para todo os valores de x no domínio de f .

Definição de Mínimo Absoluto

Dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto da função f , se $c \in D(f)$ e $f(c) \leq f(x)$ para todo os valores de x no domínio de f .

Além disso, a Proposição 3.1.4, ainda segundo Flemming (2006, p.196), garante a existência dos extremos absolutos, caso a função esteja definida em um intervalo fechado.

Proposição

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

Observe, no gráfico da Figura 3.5, os máximos e mínimos absolutos que representam o maior e o menor valor que a função assume em todo o seu domínio, respectivamente.

Como encontrar os extremos absolutos? Ou seja, como determinar o maior e o menor valor que a função atinge no seu domínio? Veja os exemplos:

Exemplo 1: Seja $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ definida em $[-2, \frac{1}{2}]$. Vamos seguir os seguintes passos para determinar os extremos absolutos.

1. Determinar pontos críticos:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \text{Por Bhaskara} \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{3}$$

2. Encontrar o valor da função nos pontos críticos na fronteira do intervalo $[-2, \frac{1}{2}]$.

3. Identificar o maior e o menor valor que a função atinge dentro desse

intervalo.

Observe que o máximo absoluto ocorreu num ponto crítico $(-1, 2)$ e o mínimo absoluto em um ponto de extremo (fronteira) do intervalo $(-2, -1)$.

Para ficar mais claro, visualize todos os pontos plotados no gráfico da função na Figura 3.6.

Agora vamos aplicar esse conceito para resolver o problema de otimização das embalagens.

Exemplo 1: Usando uma folha de cartolina (quadrada) de lado igual a 60 cm, deseja-se construir uma caixa sem tampa cortando seus cantos em quadrados iguais e dobrando convenientemente a parte restante (ver Figura 3.7). Como determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados, de modo que o volume da caixa seja o maior possível?

Solução:

Inicialmente modelamos a função que representa o volume da caixa: $V = y^2 \cdot x$ (ver Figura 3.7). No entanto, precisamos de outra condição para expressar a função volume dependente de apenas uma variável real. Note que essa condição é: $2x + y = 60 \rightarrow y = 60 - 2x$; substituindo-a na função volume, resulta em $V = (60 - 2x)^2 \cdot x = (60^2 - 240x + 4x^2) x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$.

Como $V = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$, e queremos maximizar o volume, resta encontrarmos os pontos críticos. Para tanto, vamos derivar a função volume e encontrar as suas raízes: $V' = 12x^2 - 480x + 3600 = 0 \rightarrow x_1 = 10$ e $x_2 = 30$. Observe que o valor do volume para $x_1 = 10$ é igual a 16.000 e o valor do volume para $x_2 = 30$ é igual a 0. Portanto a dimensão do x deve ser de $x = 10$ de forma que o volume seja máximo. Posteriormente você entenderá como avaliar por meio do estudo do sinal como mostra a Figura 3.8.

praticar

Vamos Praticar

Um fabricante de móveis estima que o custo semanal da fabricação de x reproduções (manuais) de uma mesa colonial é dado por $C(x) = x^3 - 3x^2 - 80x + 500$. Cada mesa é vendida por R\$ 2800. Que produção semanal maximizará o lucro? Qual é o máximo lucro semanal possível? Considerando Receita = $R(x)$ e Lucro = $L(x)$, analise as afirmativas a seguir.

- i. A função receita é igual a $R(x) = 2800x$.
- ii. A função lucro é dada por $L(x) = R(x) - C(x) = -x^3 + 3x^2 + 2880x - 500$.

- iii. A maximização do lucro ocorre ao produzir 12 mesas.
- iv. O lucro máximo possível é de R\$ 60.900.

É correto o que se afirma em:

- ☐ a) I e III, apenas.
 - ☐ b) III e IV, apenas.
 - ☐ c) I, II e IV, apenas.
 - ☐ d) I, II e III, apenas.
 - ☐ e) I, II, III e IV.
-

Esboço de Gráficos de Funções em Uma Variável

Agora o nosso objetivo é a construção gráfica de funções não elementares. Para tanto, precisamos de mais algumas ferramentas como: determinar intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximos e mínimos locais, intervalos de concavidade para cima e para baixo e pontos de inflexão. Cada um desses elementos vai ser explicado ao longo deste tópico para, ao final, fazermos o levantamento dos dados e construirmos o gráfico de uma função.

Intervalos de Crescimento e Decrescimento

Como identificar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função pelo estudo da derivada da função? A princípio, vamos entender matematicamente como definir funções crescentes e decrescentes. Segundo Flemming (2006, p. 199), temos o que será descrito a seguir.

Definição de Função Crescente

Dizemos que uma função f , definida num intervalo I , é crescente neste intervalo, se para quaisquer $a, b \in I$, $a < b$, temos $f(a) \leq f(b)$.

Definição de Função Decrescente

Dizemos que uma função f , definida num intervalo I , é crescente neste intervalo, se para quaisquer $a, b \in I$, $a < b$, temos $f(a) \leq f(b)$.

Proposição

Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então f é derivável no intervalo aberto (a, b) .

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

A Figura 3.11 mostra que quando o coeficiente angular da reta tangente é negativo, a função é decrescente e, conseqüentemente, a função derivada é negativa. Similarmente ocorre com os intervalos de crescimento.

Observe na Figura 3.12 que, em certos pontos, a função derivada é igual a zero, justamente em pontos nos quais a função muda de crescimento/decrescimento e vice-versa. Esses pontos são chamados de extremos locais: máximo local ou mínimo local. Ou seja, o maior ou menor valor que a função assume, analisando apenas a vizinhança de um ponto localmente.

Critérios para Determinação dos Extremos de uma Função

Para a determinação dos extremos locais, máximos e mínimos locais (Figura 3.12), são utilizados dois critérios: o da 1ª derivada e o da 2ª derivada, cujos procedimentos serão descritos a seguir.

Critérios da 1ª Derivada

Flemming (2006) apresenta o teorema a seguir.

Teorema: critério da 1ª derivada para determinação dos extremos locais

Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$, que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b) , exceto possivelmente num ponto c .

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c .

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c .

A Figura 3.13 mostra que quando a função cresce e decresce, o ponto c é de máximo local, e quando ela decresce e depois cresce, o ponto c é de mínimo local.

Dessa forma, para encontrar os extremos relativos ou locais de uma função através do teste da 1ª derivada, basta estudar o sinal e avaliar os pontos em que a derivada se anula.

CrITÉRIOS da Segunda Derivada

Ainda segundo Flemming (2006), vamos enunciar o seguinte resultado.

Teorema (Critério da 2ª derivada)

Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b) , temos:

- (i) Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c .
- (ii) Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c .
- (iii) Se $f''(c) = 0$, nada podemos afirmar.

Note que o critério da 2ª derivada é mais uma opção para definir se um ponto $(c, f(c))$ é máximo ou mínimo local, no entanto, caso $f''(c) = 0$, nada podemos informar. Neste caso, é necessário avaliar através do teste da 1ª derivada.

Concavidade e Pontos de Inflexão

Aqui vamos entender o conceito de concavidade ao gráfico de uma função. Considerando o ponto $(c, f(c))$, dizemos que se a curva estiver acima da reta tangente à curva, nesse ponto a curva é côncava para cima (Figura 3.14), se a curva ficar abaixo da reta tangente à curva, nesse ponto a curva é côncava para baixo (Figura 3.15).

Flemming e Gonçalves (2006) apresenta a definição a seguir.

Definição

Dizemos que $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão, se nesse ponto a curva muda de concavidade. Neste caso, $f''(c) = 0$. Portanto, para identificar os pontos de inflexão, devemos estudar o sinal da 2ª derivada.

Para a construção gráfica, devemos seguir o roteiro do Quadro 3.2.

praticar

Vamos Praticar

A construção gráfica de funções não elementares é possível com o estudo da derivada das funções. Para tanto, é necessário obter alguns dados como: pontos críticos, extremos locais, intervalos de crescimento e decrescimento, intervalos de concavidade para cima e para baixo e pontos de inflexão. Considere a função

$f(x) = \frac{2x^4 + 5x^2}{(x+1)^4}$ e seu gráfico (figura seguinte) e analise as seguintes afirmativas:

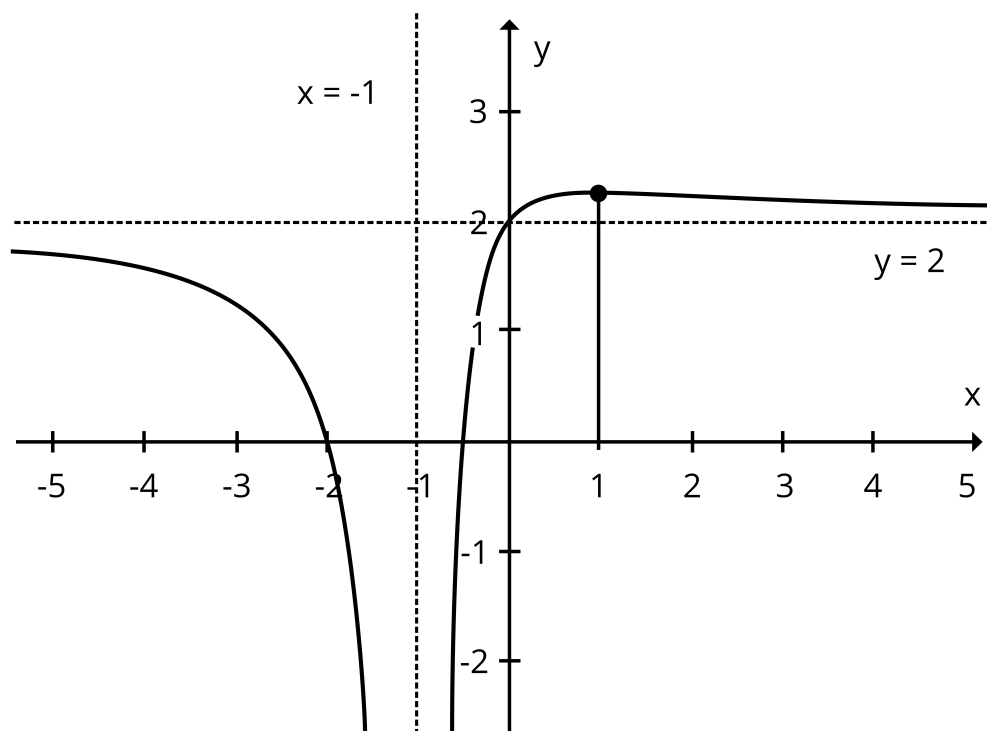


Figura - Gráfico da $f(x)$

Fonte: Elaborada pela autora.

- i. I. Os pontos de interseções com os eixos x e y ocorrem em $x = -2$, $x = -1/2$ e $x = 0$.
- ii. II. A assíntota horizontal do gráfico da função é igual a $y = -1$.
- iii. III. O ponto de máximo local é igual a $(1, 9/4)$.
- iv. IV. A função cresce em $] -1; +\infty)$ e decresce em $(-\infty; -1]$.

- ☐ a) I e III, apenas.
- ☐ b) III e IV, apenas.
- ☐ c) I, II e IV, apenas.
- ☐ d) I, II e III, apenas.
- ☐ e) I, II, III e IV.

Problemas de Taxa de Variação Relacionadas

Vimos que a derivada de uma função é uma taxa de variação. Mas existem situações em que as variáveis estão relacionadas e, neste caso, as taxas de variações também são relacionadas. Assim podemos resolver uma infinidade de problemas relacionados a várias áreas de conhecimento. Para facilitar a obtenção dos resultados, verifique o passo a passo apresentado a seguir a fim de resolver problemas que envolvem taxas relacionadas.

1. Represente a situação-problema por uma figura, identificando as grandezas variáveis e constantes.
2. Considere que todas as variáveis variam com o tempo t .
3. Identifique os dados e a taxa que o problema está pedindo.
4. Escreva uma equação que relacione as variáveis.
5. Derive a equação implicitamente em relação a t .
6. Aplique os dados e pontos dos problemas para encontrar a taxa requerida.

Vamos ver alguns exemplos para entender os procedimentos.

Exemplo 1: Uma escada com 13 m de comprimento está apoiada numa parede vertical e alta (Figura 3.17).

Num determinado instante, a extremidade inferior, que se encontra a 5 m da parede, está escorregando, afastando-se da parede a uma velocidade de 2 m/s.

Com que velocidade o topo da escada desliza quando $x=5\text{m}$?

Dados: $\{\frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/s e } h = 13\text{m}\}$

Pede-se: $\{\frac{dy}{dt}?$ quando $x = 5 \text{ m}\}$

Relação entre as variáveis: $x^2 + y^2 = 13^2$.

Derivando implicitamente e substituindo os dados, temos:

$$x^2 + y^2 = 13^2 \rightarrow 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = -\frac{5}{12} \cdot 2 = -\frac{5}{6} \text{ m/s}.$$

Exemplo 2: O piloto de uma aeronave de patrulha da guarda-costeira em uma missão de busca acaba de avistar um barco pesqueiro avariado e decide sobrevoar para melhor averiguar. Voando a uma altitude constante de 600 m e a uma velocidade uniforme de 200 m/s, a aeronave passou diretamente por cima do barco pesqueiro. Observe a figura abaixo e responda: com que rapidez a aeronave estava se afastando do pesqueiro no instante em que $z = 1000 \text{ m}$, ou seja, no instante em que a aeronave está à 1000 m do pesqueiro?

Solução:

Dados: $\{\frac{dx}{dt} = 200 \text{ m/s}\}$

Pede-se: $\{\frac{dz}{dt}?$ quando $z = 1000 \text{ m}\}$

Relação entre as variáveis: $z^2 = x^2 + 600^2$.

Para $z = 1000 \text{ m} \rightarrow x^2 = 1000^2 - 600^2 = 640000 \rightarrow x = \sqrt{640000} = 800 \text{ m}$.

Derivando implicitamente e substituindo os dados, temos:

$$z^2 = x^2 + 600^2 \rightarrow 2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2x dx}{2z dt} = \frac{x}{z} \frac{dx}{dt} = \frac{800}{1000} \cdot 200 = 160 \text{ m/s}.$$

Exemplo 3: A que taxa cresce o volume de uma esfera $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, sabendo-se que o raio cresce à razão de 5 cm/s , no instante em que ele mede 10 cm ?

Solução:

Dados: $\{\frac{dr}{dt} = 5 \text{ m/s}\}$

Pede-se: $\{\frac{dV}{dt} = ? \text{ quando } r = 10 \text{ cm}\}$

Relação entre as variáveis: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Derivando implicitamente e substituindo os dados, temos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \pi (3r \frac{dr}{dt}) \rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi(10)^2 \cdot 5 = 2000\pi \text{ cm}^3/\text{s}.$$

praticar
Vamos Praticar

Um balão está subindo verticalmente acima de uma estrada a uma velocidade constante de 1 m/s. Quando ele está a 65 m acima do solo, uma bicicleta que se desloca a uma velocidade constante de 17 m/s passa por baixo dele. Encontre a taxa de variação com a qual a distância $z(t)$ entre a bicicleta e o balão aumentará três segundos depois.

STEWART, J. **Cálculo**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

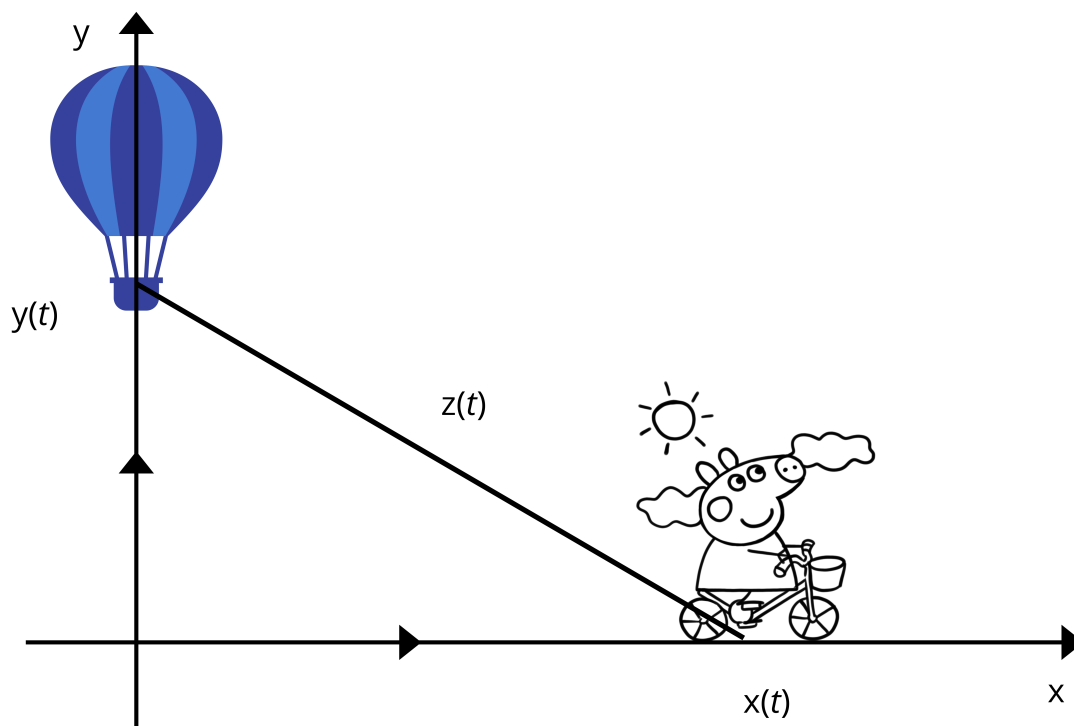


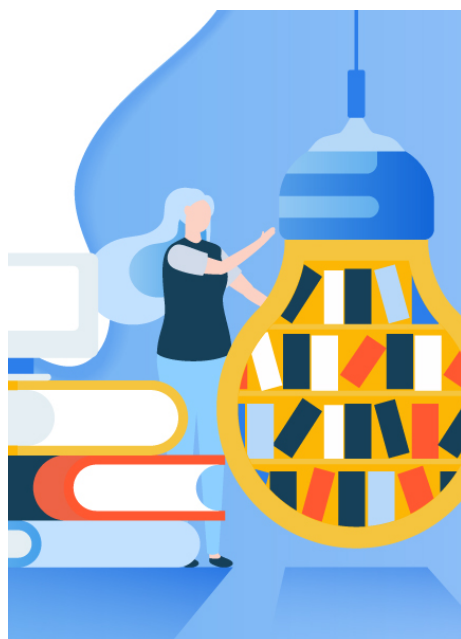
Figura - Problema da taxa de variação - balão
Fonte: Elaborada pela autora.

Assinale a alternativa que apresenta a taxa de variação solicitada:

- ☐ a) 7 m/s.
- ☐ b) 9 m/s.
- ☐ c) 10 m/s.
- ☐ d) 11 m/s.
- ☐ e) 13 m/s.

indicações

Material Complementar



LIVRO

Cálculo

James Stewart

Editora: Cengage Learning

Ano: 2013

ISBN: 9788522114610

Comentário: É um excelente livro de cálculo, que mostra aplicações do cálculo em várias áreas do conhecimento. Recomendo a leitura, principalmente do capítulo 4, que aborda grande parte dos conteúdos abordados neste material, como a regra de L'Hospital e problemas de otimização. Aproveite para resolver os exercícios

propostos.

WEB

Matemática Não é Fazer Contas, Inês Guimarães

Ano: 2017

Tipo: Canal do YouTube

Comentário: Este vídeo mostra um TED talk em que a autora, Inês Guimarães, fala da sua paixão pela matemática, constatada em suas participações em Olimpíadas de Matemática. Além disso, ela mostra que, para a resolução de um problema, é necessário pensar fora da “caixa”, ou seja, ter uma visão geral do todo e criar estratégias a fim de elaborar um planejamento. Essa forma de pensar com certeza vai contribuir para a resolução de problemas que envolvem o cálculo diferencial. Acesso em: 22 jan. 2019.

ACESSAR

conclusão

Conclusão

Neste material, você adquiriu bastante conhecimento relativo à aplicação das derivadas. Enfatizamos a regra de L'Hospital para facilitar a resolução de limites e a teoria da otimização para resolver uma infinidade de problemas em várias áreas de conhecimento, como minimização de custo, maximização de volumes, problema das embalagens etc. Você também aprendeu a como construir gráficos de funções não elementares e, por fim, a resolver problemas de taxas de variações de grandezas relacionadas. Assim você consolidou os conceitos apreendidos relativos a derivadas em situações práticas contextualizadas com problemas relacionados ao nosso dia a dia.

referências

Referências Bibliográficas

ANTON, H. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. v. 1. ISBN 9788582602263.

BARBOSA, Everaldo Fernandes. **Análise Histórica da Regra de L'Hospital**. A importância da História da Matemática na disciplina de Cálculo. 2008. 90f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, 2008. Disponível em:

http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/307033/1/Barbosa_EveraldoFernandes_M.pdf. Acesso em: 27 dez. 2019.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limites, derivação e integração. 6. ed. rev. e ampl. São Paulo: Pearson, 2006.

STEWART, J. **Cálculo**. 3. ed. São Paulo Cengage Learning, 2013. v. 1. ISBN 9788522114610.