

CÁLCULO APLICADO - UMA VARIÁVEL CÁLCULO DE DERIVADAS

Autora: Me. Ivana Barreto Matos

Revisor: Rosalvo Miranda

INICIAR

introdução

Introdução

Neste capítulo, daremos continuidade ao estudo de limite, evidenciando sua importância, principalmente, para definir um operador matemático: **a derivada** de uma função. Introduziremos este conceito por meio da taxa de variação instantânea, como a velocidade em um determinado instante. Além disso, mostraremos a interpretação geométrica da derivada, como coeficiente angular da reta tangente a uma curva em um dado ponto. Por meio do cálculo da derivada de uma função, podemos resolver uma infinidade de problemas relacionados a várias áreas de conhecimento, por exemplo, os problemas de otimização: custo mínimo, lucro máximo, maximização de volume e outros. Podemos aplicar, também, em problemas que envolvem a taxa de variação como velocidade e aceleração.

Velocidade Instantânea, Limites 0/0 e Conceito de Derivadas

Nesta unidade, veremos como calcular limite, como algumas indeterminações matemáticas, dando ênfase ao tipo 0/0. Posteriormente, definiremos a função derivada como uma taxa de variação instantânea, por meio da interpretação geométrica.

Propriedades de Limites e Cálculo de Limites

Para calcular limites, é imprescindível conhecer suas propriedades operatórias. Verifique, a seguir, essas propriedades e exemplificações.

Se $k \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então:

P1. $\lim_{x \rightarrow a} k = k$

$$P2. \lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot L$$

$$P3. \lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$$

$$P4. \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$$

$$P5. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M} \quad M \neq 0$$

$$P6. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n$$

$$P7. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \text{ Se } n \text{ é par então } L \geq 0.$$

$$P8. \lim_{x \rightarrow a} \cos(f(x)) = \cos\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = \cos(L) \quad (\text{vale para outras funções trigonométricas}).$$

Agora, veremos alguns exemplos de cálculo de limites utilizando as propriedades supracitadas.

- **Aplicação P1: o limite de uma constante é a própria constante**

Exemplos: $\lim_{x \rightarrow 10} 5 = 5;$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 11 = 11; \quad \lim_{x \rightarrow 4} (\ln 5) = \ln 5.$$

- **Aplicação P2: o produto entre uma constante e uma função**

Exemplos: $\lim_{x \rightarrow 1} 2 \cdot (x + 1) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) ;$

$$\lim_{x \rightarrow -7} 5 \cdot x^2 = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow -7} x^2.$$

- **Aplicação P3: o limite da soma é igual à soma dos limites**

Exemplos: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 9x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 9x ;$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (8x - 5x^2) = \lim_{x \rightarrow -3} 8x - \lim_{x \rightarrow -3} 5x^2 .$$

- **Aplicação P4: o limite do produto entre duas funções é o produto entre o limite de cada uma destas**

Exemplos: $\lim_{x \rightarrow 3} 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^5 \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x^5 ;$

$$\lim_{x \rightarrow -7} (4x \cdot \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow -7} 4x \cdot \lim_{x \rightarrow -7} \sqrt{x} .$$

- **Aplicação P5: o limite do quociente entre duas funções é o quociente entre o limite de cada uma delas**

Exemplos: $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{7x^8}{3x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 6} 7x^8}{\lim_{x \rightarrow 6} 3x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+9}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 5x+9}{\lim_{x \rightarrow 1} x}$

- **Aplicação P6: o limite do quociente entre duas funções é o quociente entre o limite de cada uma destas**

Exemplos: $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{7x^8}{3x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 6} 7x^8}{\lim_{x \rightarrow 6} 3x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+9}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 5x+9}{\lim_{x \rightarrow 1} x}$

- **Aplicação P7: o limite da função potência é igual à potência do limite da função.**

Exemplos: $\lim_{x \rightarrow 1} (8x)^7 = [\lim_{x \rightarrow 1} (8x)]^7$;

$\lim_{x \rightarrow -2} (33x^2 - 4)^{51} = [\lim_{x \rightarrow -2} (33x^2 - 4)]^{51}$.

- **Aplicação P8: o limite da função trigonométrica de uma função é igual ao valor da função trigonométrica aplicada ao valor do limite da função**

Exemplos: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x + \pi) = \cos[\lim_{x \rightarrow 0} (2x + \pi)]$;

$\lim_{x \rightarrow 0} \sec(2x + \frac{\pi}{4}) = \sec[\lim_{x \rightarrow 0} (2x + \frac{\pi}{4})]$.

Para finalizar os cálculos, temos um importante teorema definido, a seguir, que facilitará os cálculos de limites.

Teorema

Se $p(x)$ é uma função polinomial definida em um intervalo real, com valores reais, então, $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$.

Esse teorema decorre do fato de toda função polinomial ser contínua.

Veja, a seguir, alguns exemplos de cálculo de limites e verifique que todos os seus resultados são números reais.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\log_2(3x-4)}{\sqrt{x+5}} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} \log_2(3x-4)}{\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x+5}} = \frac{\log_2 8}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \cos \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{2x + 1} \right) = \cos \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x + 1} \right) = \cos \left(-\frac{0}{3} \right) = \cos(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} 2^{\sqrt{4x+9}} = 2^{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} 4x+9}} = 2^{\sqrt{25}} = 2^5 = 32$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 + 2x - 6}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 + 2x - 6}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - 12 + 7}{9 + 6 - 6}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

No entanto, nem sempre obtemos um valor real para o limite. Pode acontecer de obtermos as seguintes indeterminações matemáticas:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \infty - \infty \quad \infty \times 0 \quad 1^\infty \quad 0^0 \quad \infty^0$$

Nesse caso, a indeterminação não significa que o limite não exista. Devemos utilizar recursos matemáticos para trabalhar a função e obter o valor do limite. Neste

tópico, então, estudaremos a indeterminação $\frac{0}{0}$

Inicialmente, entendamos, graficamente, o que ocorre. Seja a função racional $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, cujo domínio é $\mathbb{R} - \{2\}$. Veja, a seguir, o gráfico desta função.

É fácil verificar, pelo que você já estudou sobre limites, que o limite desta função, quando a variável x aproxima-se de 2, é igual a 4. No entanto, ao resolvermos o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

Isso significa que o limite não existe?

Obviamente, não, pois você já verificou que o valor do limite, graficamente, é igual a 4. Como podemos resolver esse limite sem a análise gráfica? Simplificando a função. Veja os cálculos, por fatoração, a seguir.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Sendo assim, quando a função racional é a razão entre duas funções polinomiais, e o limite é igual a $0/0$, precisamos fatorar os polinômios para simplificar a função.

LEMBRETE: fatorando polinômios de grau 2

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x') (x - x'')$, que x' e x'' são as raízes do polinômio do 2º grau.

Exemplo: resolvendo o limite por fatoração

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(-1)^2 - 1}{(-1)^2 + 3(-1) + 2} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminação?}$$

Fatorando, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{-1-1}{-1+2} = -2$$

No caso de termos polinômios de grau maior do que 2, devemos utilizar o teorema de D'Alembert para a fatoração.

Teorema de D'Alembert

Se $P(x)$ é um polinômio e a é uma de suas raízes, então, $P(x)$ é divisível por $(x-a)$.

Verifique, na Figura 2.2, que, ao dividir o polinômio $P(x)$ por $(x-a)$, podemos reescrevê-lo como $P(x) = Q(x)(x-a) + r(x)$, em que $Q(x)$ é o quociente, e $r(x)$ é o resto da divisão. No entanto, por meio do teorema de D'Alembert, o resto da divisão sempre será igual a zero.

A seguir, descreveremos uma regra prática para efetuarmos a divisão.

Regra de Briot-Ruffini

Observe a Figura 2.3, para entender a regra de fatoração do polinômio $P(x) = x^3 - 6x + 4$, com finalidade de resolver o limite indicado.

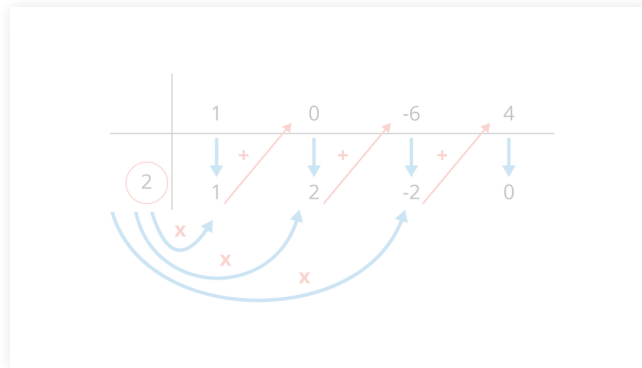


Figura 2.3 - Regra de Briot-Ruffini

Siga os seguintes passos: *Fonte: Elaborada pela autora.*

1. coloque, no diagrama, a raiz (2), que é sempre igual à tendência do limite.
2. na parte superior, você deve colocar os coeficientes do polinômio, lembrando de colocar zero, quando os termos daquele grau que está omitido (1; 0; -6 e 4).
3. repetir o primeiro coeficiente na linha inferior (veja a repetição do algoritmo 1).
4. em seguida, inicia-se a operação, multiplicando a raiz (2) pelo primeiro algoritmo da segunda linha (1) e somando com o segundo algoritmo da primeira linha (0), colocando o resultado (2).
5. repete-se a operação sucessivamente, como mostra as setas no diagrama, até encontrar o resto zero.
6. após a operação, obtém-se os coeficientes do quociente $Q(x)$, na segunda linha do diagrama, que possui sempre um grau menor do que o polinômio $P(x)$. Nesse caso, $Q(x) = x^2 + 2x - 2$ e, portanto, $P(x) = (x^2 + 2x - 2)(x - 2)$.
7. resolver o limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x - 2)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x - 2)}{(x + 2)} = \frac{(2^2 + 2(2) - 2)}{(2 + 2)} = \frac{3}{2}$$

Veja outro exemplo de indeterminação $0/0$, em que utilizamos, como artifício matemático, a multiplicação pelo conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{7+x}}{(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{7+x}}{(x-4)} \cdot \frac{3 + \sqrt{7+x}}{3 + \sqrt{7+x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^2 - (\sqrt{7+x})^2}{(x-4)(3 + \sqrt{7+x})} = \frac{3^2 - (\sqrt{7+2})^2}{(2-4)(3 + \sqrt{7+2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - (7 + x)}{(x - 4)(3 + \sqrt{7 + x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 4)}{(x - 4)(3 + \sqrt{7 + x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(3 + \sqrt{7 + x})} = \frac{-1}{3 + 3} = -\frac{1}{6}$$

Taxa de Variação Instantânea e o Conceito de Derivada

Suponha que você tenha feito uma viagem de 200 quilômetros em 2 horas. Se perguntarem qual foi a velocidade média realizada nessa viagem, é claro que você responderia 100 km/h, sendo a função espaço tempo $s = s(t)$, e a velocidade $v = v(t)$. Codificando, matematicamente, definimos a velocidade média da seguinte forma:

$$v(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}, \text{ se esse limite existir.}$$

Verifique, na Figura 2.4, a interpretação gráfica.

Agora, se a pergunta fosse “qual foi a velocidade exatamente em 1,5 hora de viagem?”, nesse caso, você não responderia, pois seria necessário olhar no velocímetro do carro naquele momento. Essa velocidade pontual é denominada velocidade instantânea.

Definição da Derivada

Dizemos que a derivada de uma função em um ponto t_0 denotada por $s'(t_0)$ ou $\frac{ds}{dt}(t_0)$, é igual ao limite $s'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$, se esse limite existir.

Verifique a interpretação gráfica na Figura 2.5.

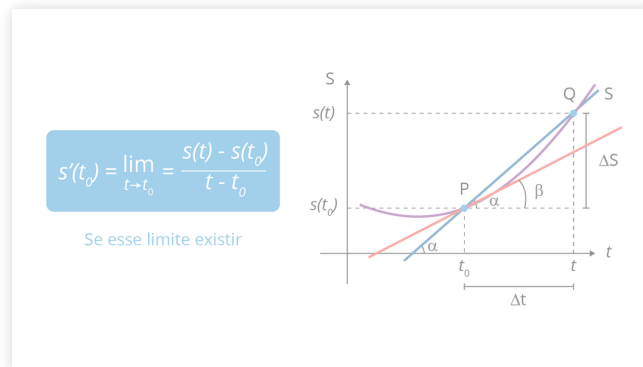


Figura 2.5 - Taxa Instantânea de Variação

Fonte: Elaborada pela autora.

Analisando a Figura 2.5, verifique que a reta azul é uma reta secante à curva $s = s(t)$, uma vez que passa por dois pontos P e Q. Observe que, quando t tende a t_0 o ponto P tende ao ponto Q. Portanto, fazendo $\Delta t \rightarrow 0$, a reta secante tende à reta tangente à curva $s = s(t)$ no ponto P. Passando o limite, temos o valor exato da taxa instantânea de variação da razão incremental $\frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$ que resulta na velocidade instantânea.

Dessa forma, ao derivarmos a função espaço tempo, aplicada a um tempo específico, obtemos a função velocidade. Similarmente, ao derivarmos a função velocidade, encontramos a função da aceleração. Por outro lado, geometricamente, a derivada da função $f(x)$, aplicada a um ponto P, é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva neste ponto. Isso significa que a derivada da função aplicada ao ponto é igual à tangente do ângulo formado por essa reta e o eixo das abscissas, como mostra a Figura 2.6.

Dessa forma, por meio da função derivada, é possível determinar a equação da reta tangente no ponto $P(x_0, y_0)$ e, conseqüentemente, a equação da reta normal à curva nesse ponto. A Figura 2.7 mostra, geometricamente, essas retas, que são definidas como:

- reta tangente: $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
- reta normal: $(y - y_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Diante de tantas definições, vemos alguns exemplos para ajudá-lo a internalizar esses novos conhecimentos.

Exemplos:

1) encontre a derivada da função $f(x) = x^2 + 3$ no ponto $x_0 = 1$, usando a sua definição.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 3) - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

2) calcule a derivada da função $f(x) = x^2 + 3x$ no ponto $x_0 = 2$ e para um ponto x_0 qualquer.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^2 + 3x) - (x_0^2 + 3x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^2 - x_0^2) + 3(x - x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) + 3(x - x_0)}{x - x_0} = 2x_0 + 3$$

$$f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$$

3) calcule a equação da reta tangente e da reta normal à parábola $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$.

Solução:

Para $x_0 = 1$, obtemos que $f(1) = 1^2 = 1$. Portanto, o ponto $P_0 = (1, 1)$.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Equação da reta tangente:

$$(y - 1) = f'(1)(x - 1) \rightarrow (y - 1) = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x - 1$$

Equação da reta normal:

$$(y - 1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1) \rightarrow (y - 1) = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

4) a equação do movimento de uma partícula é dada por $s(t) = t^2 - 1$, em que s está em metros, e t está em segundos. Encontre as funções de velocidade e aceleração em função de t .

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t^2 - 1 - (t_0^2 - 1)}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t^2 - t_0^2) - 1 + 1}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} = 2t_0$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{2t - 2t_0}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} 2 = 2$$

Agora, é com você! Teste o seu conhecimento.

praticar
Vamos Praticar

1) Encontre a equação da reta tangente e normal à curva $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 4$.

As equações encontradas para a reta tangente (r_T) e reta normal (r_N), respectivamente, são:

- ☐ a) $r_T: -4x + 18$ e $r_N = \frac{x}{4} + 1$
- ☐ b) $r_T: -2x + 9$ e $r_N = \frac{x}{2} + 1$
- ☐ c) $r_T: -x + 11$ e $r_N = x + 1$
- ☐ d) $r_T: 4x + 18$ e $r_N = -\frac{x}{4} + 1$
- ☐ e) $r_T: -3x + 16$ e $r_N = \frac{x}{3} + 1$

Derivadas Imediatas e Regras de Derivação

Agora, vamos dar continuidade ao estudo da função derivada, cujo cálculo será facilitado, por conta da utilização das regras de derivação e da tabela de derivadas de funções elementares.

Tabela de Derivadas de Funções Elementares

A seguir, apresentaremos a tabela de derivadas das funções elementares. Vale ressaltar que a tabela foi construída a partir da definição da derivada, por meio do limite, como já mostrado anteriormente. Essas demonstrações são encontradas na maioria dos livros de cálculo. Aqui, apresentaremos os resultados na Tabela 2.1 e utilizaremos-na para derivar funções não elementares.

Veja um exemplo: a derivada da função constante é igual a zero.

De fato: se $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$), então, $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$.

Similarmente, são calculadas as derivadas de outras funções apresentadas na Tabela 2.1.

Fonte: Adaptada de Fleming (2007, p. 158).

Resta-nos tomar conhecimento das regras de derivação com as operações usuais, que serão apresentadas a seguir.

Regras de Derivação

Sejam u e v funções deriváveis de x , bem como c e n constantes, para entender os exemplos, a seguir, consulte a Tabela 2.1, para derivar as funções elementares.

1. A derivada da soma é a soma das derivadas

$$f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

Exemplo:

$$f(x) = x^4 + x + 6$$

$$f'(x) = (x^4)' + (x)' + (6)' = 4x^{4-1} + 1x^{1-1} + 0 = 4x^3 + 1$$

2. A derivada do produto entre duas funções

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Exemplo:

$$f(x) = (\sin(x)) \cdot (\cos(x))$$

$$f'(x) = (\sin(x))' \cdot (\cos(x)) + (\sin(x)) \cdot (\cos(x))'$$

$$= \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x))$$

$$= (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$$

$$= \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

3. A derivada do produto entre uma constante e uma função

$$f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c' \cdot u(x) + c \cdot u'(x) = 0 + c \cdot u'(x)$$

Verifique que, ao aplicar a regra anterior, o primeiro termo sempre é anulado. Resulta que $f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$, ou seja, a derivada de uma constante por uma função é igual ao produto entre a constante e a derivada da função.

$$\text{Exemplo: } f(x) = 3 \cdot \operatorname{tg}(x) \rightarrow f'(x) = 3 \cdot (\operatorname{tg}(x))' = 3 \cdot \sec^2(x)$$

$$f(x) = 3x^{10} + 9\sqrt{x^2} + \sin(2\pi)$$

$$f(x) = (3x^{10})' + 9(x^{2/3})' + (\sin(2\pi))'$$

$$f'(x) = 3 \cdot 10 \cdot x^{10-1} + 9 \cdot \frac{2}{3} x^{2/3-1}$$

$$f'(x) = 30x^9 + 6x^{-1/3}$$

$$f'(x) = 30x^9 + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$$

4. A derivada do produto quociente entre duas funções

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u(x) \cdot v'(x) - u'(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\text{Exemplo: derive } f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{3x^5 + x^4}$$

Solução:

$$f'(x) = \frac{(2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^4)' - [(2x^3 - 4x^2)'(3x^5 + x^4)]}{[3x^5 + x^4]^2}$$

$$= \frac{(6x^2 - 8x)(3x^5 + x^4) - [(2x^3 - 4x^2)'(15x^4 + 2x)]}{[3x^5 + x^4]^2}$$

$$= \frac{18x^7 + 6x^6 - 24x^6 - 8x^5 - 30x^7 - 4x^6 + 60x^6 + 8x^5}{[3x^5 + x^4]^2}$$

$$= \frac{-12x^7 + 36x^6 + 2x^5}{9x^{10} + 6x^9 + x^8}$$

$$= \frac{-12x^3 + 36x^2 + 2}{9x^6 + 6x^5 + 1}$$

Agora, vamos mostrar mais alguns exemplos, para demonstrar como aplicar as regras de derivação e, a seguir, vamos propor uma atividade para você praticar.

Exemplo: dada a função $f(x) = \frac{3\sin(x)}{x} - \tan(x)$, encontre o valor da $f'(\pi)$.

Solução:

$$f'(x) = \frac{3(\sin(x))'(x) - [(3\sin(x)) (x)']}{[x]^2} - \frac{1}{\sec^2(x)}$$

$$= \frac{3 \times \cos(x) - [3\sin(x)]}{x^2} - \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{3 \times \cos(x) - 3\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f'(\pi) = \frac{3 \pi \cos(\pi) - 3\sin(\pi)}{\pi^2} - \frac{1}{\cos^2(\pi)} = \frac{3 \pi (-1) - 3(0)}{\pi^2} - \frac{1}{(-1)^2} = \frac{-3\pi}{\pi^2} - 1 = -\frac{3}{\pi} - 1 = -\left(\frac{3}{\pi}\right) - 1$$

praticar

Vamos Praticar

Encontre a derivada da função $f(x) = \frac{2-x^4}{3x^4+1}$ usando as regras de derivação adequadas. O valor encontrado é igual a:

- ☐ a) $f'(x) = \frac{-14x}{(3x^4+1)}$
- ☐ b) $f'(x) = \frac{-11x^4}{(3x^4+1)}$
- ☐ c) $f'(x) = \frac{15x}{(3x^4+1)}$
- ☐ d) $f'(x) = \frac{-24}{(3x^4+1)}$
- ☐ e) $f'(x) = \frac{-1}{(3x^4+1)}$

Funções Compostas e Regra da Cadeia

Você aprendeu a derivar muitas funções, porém, até aqui, trabalhamos apenas com funções não compostas, em que a variável x aparece isolada ($\cos(x)$, x^3 , $\operatorname{tg}(x)$, e^x , $\ln(x)$, $\sec(x)$, etc.). Agora, você vai aprender a derivar as funções compostas, por exemplo, $\cos(x^2 + 1)$, $(5x)^3$, $\operatorname{tg}(x^5 + 2x + 7)$, $e^{x^4 + 1}$, $\ln(\sin(x))$, $\sec(x^2)$. Nesses exemplos, verifique que há composições de funções trigonométricas com funções polinomiais, funções exponenciais compostas com polinomiais, funções logarítmicas compostas com funções trigonométricas e, até mesmo, composição de funções polinomiais com funções polinomiais.

A Figura 2.8 ilustra a composição entre a função g com a f . Nesse caso, verifique, no diagrama, que a função f leva um elemento a pertencente ao seu domínio da f a $f(a)$ pertencente ao seu contradomínio J . Para que haja a composição, o domínio da g deve coincidir com a imagem de f . Assim, g leva um elemento $f(a)$ à $g(f(a))$ pertencente ao conjunto Q . Portanto, escrevemos $g \circ f(a) = g(f(a))$.

A Regra da Cadeia

Para derivar uma função composta, utiliza-se a Regra da Cadeia definida a seguir.

Definição da Regra da Cadeia

Sejam $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(I) \subset J$. Se f é derivável em $a \in \mathbb{R}$, e g é derivável em $f(a)$, então, $g \circ f$ é derivável em a , e $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Notações:

$$y = f(x)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \cdot f(x) = g(y)$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$y = g(u) \therefore u = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Para deixar claro sobre como usar a regra da cadeia para derivar funções compostas, vamos mostrar alguns exemplos.

1) Derive a função $f(x) = \sqrt[3]{(3x^4 - 4x)^2} = (3x^4 - 4x)^{\frac{2}{3}}$.

Solução: verifique, nos cálculos, que você deve usar a mesma regra vista anteriormente para derivar a função potência $f(u) = u^n, n \in \mathbb{R}, u = u(x)$ e multiplicar pela derivada da parte interna $u = 3x^4 - 4x$. Nesse caso, $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ou $f'(x) = f'(u) \cdot u' = n(u)^{n-1} \cdot u'$.

Portanto:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(3x^4 - 4x)^{-\frac{1}{3}}(3x^4 - 4x)'$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(3x^4 - 4x)^{-\frac{1}{3}}(12x^3 - 4)$$

$$f'(x) = \frac{2(12x^3 - 4)}{3\sqrt[3]{(3x^4 - 4x)}}$$

2) Derive a função $f(x) = 8^{3x^4+5}$.

Solução: aqui, você vai utilizar a derivada da função exponencial $y = a^u, a \in \mathbb{R}, u = u(x)$, então, $y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

Portanto:

$$f'(x) = 8^{3x^4+5} \ln(8) \cdot (3x^2+5)'$$

$$f'(x) = 8^{3x^4+5} \ln(8) \cdot (6x)$$

3) Derive a função $f(x) = \ln(5x^3+4x^2+9)$.

Solução: aqui, você vai utilizar a derivada da função exponencial $y = \log_a u, a \in \mathbb{R}, u = u(x)$, então, $y' = \frac{1}{u \cdot \ln(a)} \cdot u'$.

Portanto:

$$f'(x) = \frac{1}{(5x^3+4x^2+9) \cdot \ln(e)} \cdot (5x^3+4x^2+9)' = \frac{15x^2+8x}{(5x^3+4x^2+9) \cdot (1)} = \frac{15x^2+8x}{5x^3+4x^2+9}$$

4) Derive a função $f(x) = 3 \operatorname{tg}(2x+1) + \sqrt{x}$.

Solução: a derivada da função trigonométrica $y = \operatorname{tg}(u), a \in \mathbb{R}, u = u(x)$ é igual a $y' = \sec^2(u) \cdot u'$.

Portanto:

$$f(x) = 3 \operatorname{tg}(2x + 1) + x^{1/2}$$

$$f'(x) = 3 \sec^2(2x + 1) (2x + 1)' + \frac{1}{2} x^{-1/2} = 3 \sec^2(2x + 1) (2) + \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$f'(x) = 6 \sec^2(2x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5) Derive a função $f(x) = -\operatorname{cosec}^2(x^3) = -[\operatorname{cosse}(x^3)]^2$.

Solução: a derivada da função trigonométrica $y = \operatorname{cosec}(u)$, $u = u(x)$ é igual a $y' = -\operatorname{cosec}(u) \cdot \cotg(u) u'$.

Portanto:

$$f(x) = -[\operatorname{cosse}(x^3)]^2$$

$$f'(x) = -2 \operatorname{cosec}(x^3) [\operatorname{cosec}(x^3)]'$$

$$f'(x) = -2 \operatorname{cosec}(x^3) \cdot (-\operatorname{cosec}(x^3) \cdot \cotg(x^3) \cdot (x^3)')$$

$$f'(x) = 2 \operatorname{cosec}^2(x^3) \cdot \cotg(x^3) \cdot (3x^2)$$

$$f'(x) = 6x^2 \cdot \operatorname{cosec}^2(x^3) \cdot \cotg(x^3)$$

Agora que você já entende a Regra da Cadeia, vamos adaptar a Tabela 1.1 de derivadas de funções elementares, porém generalizando para funções compostas com a regra da cadeia (Tabela 2.2).

Tabela 2.2 - Tabela de derivadas de funções elementares não compostas

Fonte: Adaptada de Flemming (2007, p. 158).

Verifique que a Tabela 2.2 apresenta as funções compostas e suas derivadas. Para tanto, basta utilizar a mesma regra da Tabela 1.1 e multiplicar por $u'(x)$.

Agora, é com você. Consultando a tabela generalizada de derivadas, você pode obter as derivadas de quaisquer funções.

Exemplo: usando as regras de derivação, determine a expressão da derivada da função $y = (x^2 - 1)(3x - 1)(5x^3 + 2x)$.

Solução:

$$y' = (x^2 - 1)'(3x - 1)(5x^3 + 2x) + (x^2 - 1)(3x - 1)'(5x^3 + 2x) + (x^2 - 1)(3x - 1)(5x^3 + 2x)'$$

$$y' = (2x)(3x - 1)(5x^3 + 2x) + (x^2 - 1)(3)(5x^3 + 2x) + (x^2 - 1)(3x - 1)(15x^2 + 2)$$

praticar

Vamos Praticar

Usando as regras de derivação, determine a expressão da derivada da função $y = \frac{2}{3} \frac{5x+3}{5x-3}$.
O valor encontrado é:

- ☐ a) $y' = \frac{-40 (5x+3)}{(5x-3)}$
- ☐ b) $y' = \frac{-20}{(5x-3)}$
- ☐ c) $y' = \frac{-40}{(5x-3)}$
- ☐ d) $y' = -\frac{(5x+3)}{(5x-3)}$
- ☐ e) $y' = \frac{-20 (5x+3)}{(5x-3)}$

Derivadas Sucessivas e Derivação Implícita

Neste tópico, daremos continuação ao cálculo de derivadas, agora, mostrando como obter as derivadas de ordens superiores, ou seja, para obter a derivada de ordem 2, devemos derivar, novamente, a primeira derivada da função, caso esta exista. E, assim, sucessivamente, para obter as derivadas de ordem acima de 2. Também, veremos como derivar funções dadas em forma especial, especificamente, na forma implícita, em que a variável y não está explícita $y=f(x)$.

Derivadas Sucessivas

Dada a função $y = f(x)$ e $y' = f'(x)$ como sua primeira derivada, dizemos que:

- a segunda derivada da função $y = f(x)$ é dada por $y'' = f''(x) = (f'(x))'$;
- a terceira derivada da função $y = f(x)$ é dada por $y''' = f'''(x) = (f''(x))'$;
- a quarta derivada da função $y = f(x)$ é dada por $y^{(4)} = f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$.

Assim, sucessivamente, para encontrar as demais. No entanto, vale ressaltar que nem todas as funções admitem as derivadas sucessivas. Existem funções contínuas que não admitem nem mesmo a primeira derivada e, nesse caso, dizemos que essa função é de classe C^0 . No caso de a função só admitir até a primeira derivada, sua

classe é C^1 e, assim, sucessivamente, para as classes das demais funções C^2, C^3, C^4, C^5 etc.

Exemplo:

1) seja a função $f(x) = \ln(1+x^2)$, calcule $f''(2)$.

Verifique que, nesse caso, vamos utilizar a regra número 7 e 25 da Tabela 2.2:

$$y = \ln(u) \rightarrow y' = \frac{u'}{u} \text{ e } y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{uv' - uv'}{v^2}$$

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\ln(1+x^2)]' = \frac{1}{1+x^2} (1+x^2)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2} \\ f''(x) &= \left[\frac{2x}{1+x^2} \right]' = \frac{(2x)'(1+x^2) - (2x)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{(2)(1+x^2) - [(2x)(2x)]}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2+2x^2-4x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \\ f''(2) &= \frac{2-2 \cdot 2-2}{[1+2]^2} = \frac{-2}{9} \end{aligned}$$

Derivadas Implícita

Agora, você vai aprender a derivar funções dadas na forma implícita. Mas, antes, vamos exemplificar esse tipo de função. São funções em que, em sua escrita, a variável dependente y não aparece explicitamente como $y=f(x)$. Veja alguns exemplos a seguir. Verifique que, em alguns casos, é possível isolar a variável y e representá-la explicitamente. Porém, nem sempre isso é possível, justificando, assim, a importância de saber derivar funções dadas na forma implícita.

Exemplos de funções dadas na forma implícita:

1) $yx + y + 1 = x$

2) $y^3 + x^2 = 1$

3) $x^2 + y^2 = 1$

Verifique, nos exemplos, que a variável dependente y é uma função de x $y = f(x)$. No entanto, nas equações apresentadas, esta é dada na forma implícita. Dessa forma, para derivar as equações, utilizaremos a regra da cadeia, que deriva as funções compostas. Veja os exemplos a seguir.

Exemplos:

1) encontre a derivada y' , em que y é dada na forma implícita $y^2 + x^2 y = 10$.

Verifique o passo a passo.

1 - Ambos os lados da equação devem ser derivados, respeitando-se todas as regras de derivação já vistas, inclusive, a regra da cadeia.

$$(y^2)' + (x^2 \cdot y)' = (10)'$$

Regra do Produto

$$2yy' + (x^2)'y + (x^2) \cdot y' = 0$$

$$2yy' + (2x)y + (x^2) \cdot y' = 0$$

2 - Colocar todos os termos que possui y' do lado esquerdo e os demais do lado direito.

$$2yy' + (x^2) \cdot y' = -(2x)y$$

3 - Evidenciar y' .

$$y'(2y + x^2) = -(2x)y$$

4 - Isolar y' , para explicitá-la.

$$y' = \frac{-2xy}{2y + x^2}$$

Exemplos:

2) encontre a derivada y' , em que y é dada na forma implícita $\cos(x + y) + \operatorname{tg}(x + y) = 9$.

Verifique o passo a passo.

$$1 - \cos'(x + y) + \operatorname{tg}'(x + y) = 9'$$

Regra da Cadeia

$$-\sin(x+y) \cdot (x+y)' + \sec^2(x+y) \cdot (x+y)' = 0$$

$$-\sin(x+y) \cdot (1+y') + \sec^2(x+y) \cdot (1+y') = 0$$

2 - Evidenciar y' .

$$(1+y') [-\sin(x+y) \cdot (1+y') + \sec^2(x+y)] = 0$$

3 - Isolar y' , para explicitá-la.

$$(1+y') = 0$$

$$y' = -1$$

praticar

Vamos Praticar

Seja a função $f(x) = \sin(x) + \cos^2(x)$, calcule $f''(\pi)$. O valor encontrado é igual a:

- ☐ a) $f''(\pi) = \pi$
- ☐ b) $f''(\pi) = -1$
- ☐ c) $f''(\pi) = 3$
- ☐ d) $f''(\pi) = -2$
- ☐ e) $f''(\pi) = 2\pi$

indicações

Material Complementar



LIVRO

Cálculo A: funções, limites, derivação e integração

Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves

Editora: Pearson Prentice Hall

ISBN: 85-7605-115-X

Comentário: é um excelente livro de cálculo, que aborda todo o conteúdo, elucidando a aplicação das derivadas em várias áreas do conhecimento. Recomendo a leitura do capítulo 4, que aborda, praticamente, todo o conteúdo desta unidade. Recomendo a resolução de alguns exercícios das seções: 4.10 (função derivável); 4.12 (derivadas de funções não compostas); 4.16 (derivadas de funções compostas); e 4.16 (derivadas sucessivas e implícitas).



FILME

Cálculo I - Aula 05 - Derivada

Ano: 2016

Comentário: esse vídeo mostra a aplicação de derivadas em problemas que envolvem a cinemática. Você terá a oportunidade de ver várias aplicações para reforçar os seus conhecimentos, por meio da aula 05 do excelentíssimo professor Cláudio Possani, da Universidade Virtual do Estado de São Paulo. Além disso, recomendo, também, as aulas 07 e 08, que trabalham as regras de derivação.

TRAILER

conclusão

Conclusão

Nesta unidade, você, caro(a) aluno(a), estudou os conceitos de derivadas, entendeu a sua definição por meio do limite e, além disso, verificou sua aplicação como taxa de variação instantânea, importante ferramenta para a resolução de problemas que envolvem a cinemática: velocidade e aceleração. Aprendeu, também, a calcular derivadas por meio das regras operatórias e da tabela de derivadas. Dessa forma, o cálculo fica simplificado, evitando ter de utilizar a sua definição por limite para o cálculo. Além disso, você aprendeu a derivar as funções compostas, sucessivamente, ao encontrar derivadas de ordem superior, e implicitamente: funções dadas na forma implícita.

referências

Referências Bibliográficas

ANTON, H. **Cálculo**. v. 1. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

COSTA, N. M. L. da. A História da Trigonometria. **Universidade Federal do Rio Grande do Sul**. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf. Acesso em: 27 nov. 2019.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limites, derivação e integração. 6. ed. Pearson Prentice Hall, 2007.

O NASCIMENTO do cálculo. **Ecalculo.** Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm. Acesso em: 9 dez. 2019.

STEWART, J. **Cálculo.** São Paulo: Cenagage Learning, 2013.

