CÁLCULO APLICADO - UMA VARIÁVEL
CÁLCULO INTEGRAL

Autor: Me. Ivana Barreto Matos
Revisor: Rosalvo Miranda

INICIAR

introdução

Introdução

Assim como o cálculo diferencial pode ser aplicado na resolução de problemas relacionados às taxas de variações, otimização, dentre outros, o cálculo integral também contribui para resolução de uma infinidade de problemas aplicados às várias áreas do conhecimento. Dentre essas aplicações, estudaremos os problemas que envolvem a cinemática, velocidade e aceleração e a análise gráfica dos movimentos. No entanto, existem muitas outras aplicações de integrais como cálculo de área de regiões planas, cálculo de volume e momento. Para tanto, é necessário aprender a integrar funções através dos métodos. Dentre esses métodos, estudaremos o método por substituição de variáveis e o método de integração por partes.

Aceleração e Cálculo de Integrais Definidas

Para começarmos, iniciaremos pelas integrais indefinidas e apresentaremos suas propriedades. Dessa forma, você será capaz de calcular integrais de funções elementares. Passará a compreender que a solução de uma integral indefinida é uma família de curvas, que contém uma constante arbitrária. Isso ocorre devido ao fato da integral ser vista como uma antiderivada, ou seja, ao derivarmos o resultado de uma integral indefinida obtemos a função integranda. Ainda neste tópico, mostraremos aplicações de integrais na cinemática, envolvendo as funções velocidade e aceleração.

Integrais Indefinidas

Antes de definir a integral indefinida, vamos entender o conceito de primitiva de uma função. Iniciaremos com a seguinte pergunta: Conhecendo-se a derivada f' de uma função f, é possível descobrir a lei da função f? Sim, é possível. Veja as seguintes perguntas:

1. Se $f'(x) = 1$, qual é a função $f(x)$?
2. Se $g'(x) = 2x$, qual é a função $g(x)$?
3. Se $h'(x) = e^x$, qual é a função $h(x)$?
4. Se $I'(x) = \frac{1}{x}$, qual é a função $I(x)$?

Verifique que a função do item 1 é igual a $f(x) = x + C$, em que C é uma constante arbitrária, pois $f'(x) = 1$. Similarmente, para os outros itens: $g(x) = x^2 + C$, $h(x) = e^x + C$ e $I(x) = \ln(x) + C$, cujas derivadas coincidem com as funções derivadas indicadas.

Reflita

Em relação às perguntas propostas anteriormente, reflita e busque suas respostas, através do conhecimento obtido nos seus estudos de derivadas de funções elementares.

Fonte: Elaborado pela autora.

Definição da Primitiva de uma Função

Segundo Flemming e Gonçalves (2006, p. 240) uma função $F(x)$ é chamada uma primitiva da função $f(x)$ em um intervalo I, se, para todo $x \in I$, temos $F'(x) = f(x)$

Consequentemente, se $G(x) = F(x) + C$, em que C é uma constante real e $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$, então $G(x)$ também é uma primitiva de $f(x)$, pois $G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

Exemplos:

1. $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$, pois $F'(x) = 2x$
2. $F(x) = \text{sen}(x)$ é uma primitiva de $f(x) = \cos(x)$, pois $F'(x) = \cos(x)$
3. $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$, pois $F'(x) = \frac{x^3}{3}' = \frac{3x^2}{3} = x^2$
4. $F(x) = \frac{1}{2}\text{sen}(2x)$ é uma primitiva de $f(x) = \cos(2x)$, pois $F'(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) \cdot 2 = \cos(2x)$

Definição de Integral Indefinida

Segundo Flemming e Gonçalves (2006, p. 241) se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + C$ é chamada integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

em que:

$\int \rightarrow$ sinal de integrаão.

$$f\,(x) \rightarrow \text{funão integranda.}$$

$$dx \rightarrow \text{diferencial em x, indica a variável de integraão.}$$

$$C \rightarrow \text{constante de integraão.}$$

Nesse sentido, foi elaborada a Tabela 4.1 das integrais imediatas. Verifique cada integral da tabela, ao mesmo tempo em que você pode fazer uma revisão de derivadas das funções, usando o conceito da primitiva da função, ou seja, ao derivar o resultado das integrais, obtém-se a função integranda.

Quadro 4.1 - Integrais Imediatas
Fonte: Elaborada pela autora.

Verifique que algumas dessas integrais apresentadas na Tabela 4.1 não são tão imediatas, mas o fato de derivar o resultado das integrais e obter a função integranda vale sempre para qualquer função integrável. Alguns desses resultados serão compreensíveis a partir do momento em que você conhecer os métodos de integração. Por enquanto, podemos assumir esses resultados.

Interpretação Geométrica

Qual é o significado geométrico da função $F(x) + C$ em que $F(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$ e C uma constante arbitrária? Verifique que, por conta da constante arbitrária, C, $F(x) + C$ representa uma família de curvas. No caso de uma solução particular, dada uma condição inicial $P(x_0, y_0)$ verifica-se que existe uma única curva que passa pelo ponto P.

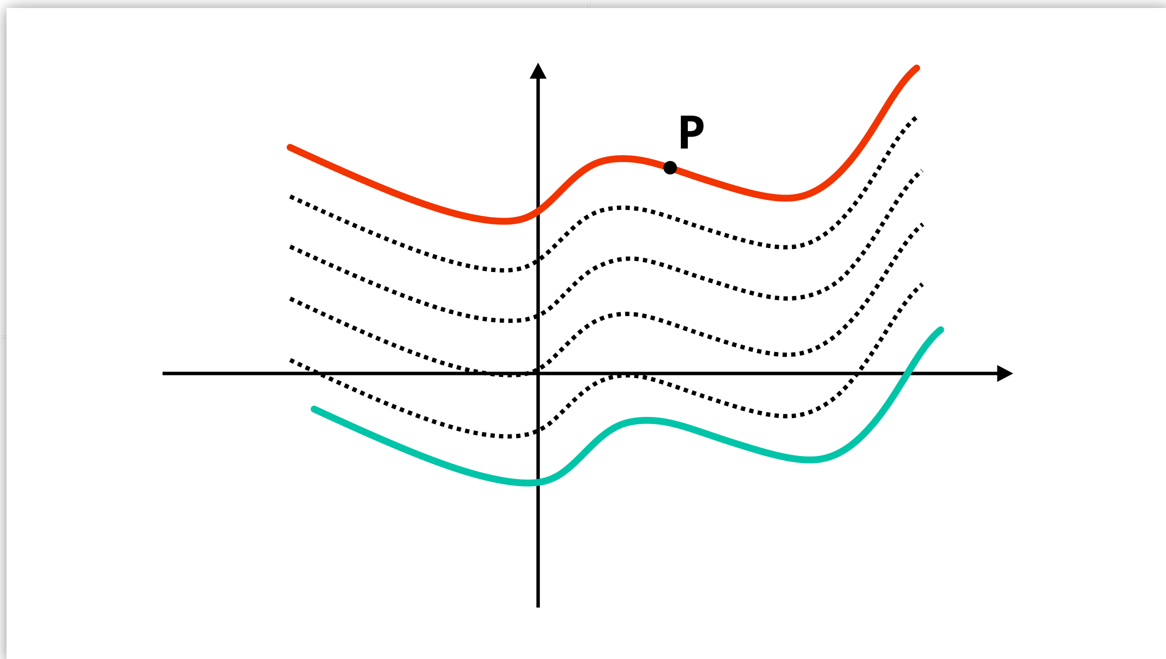


Figura 4.1 - Interpretação Geométrica de Integral Indefinida
Fonte: Elaborada pela autora.

Exemplo 1: A inclinação da reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em qualquer ponto (x, y) da curva é $-2x + 3$ Se o ponto $A\ (-1, 3)$ pertence a essa curva, determine a sua equação.

Solução: Sabendo-se que a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ em qualquer ponto é dada pela função derivada aplicada a esse ponto, temos que $\frac{dy}{dx} - 2x + 3 \rightarrow dy = (-2x + 3).\ dx$ Integrando-se ambos os lados, temos:

$$\int dy = \int (-2x + 3)\ dx \rightarrow y = -2\frac{x^2}{2} + 3x + C \rightarrow y = -x^2 + 3x + C$$

Aplicando-se o ponto $A\ (-1, 3)$ temos: $3 = -(-1)^2 + 3(-1) + C \rightarrow C = 7$

Portanto, a solução particular é $y = -x^2 + 3x + 7$.

Verifique que $y = -x^2 + 3x + C$ é uma família de curvas, no entanto, pelo ponto $A\ (-1, 3)$ só passa a curva $y = -x^2 + 3x + 7$, sinalizada em vermelho no gráfico da Figura 4.2. Veja que no ponto A passa a reta tangente $y - 3 = f'(-1)(x - (-1)) \to y - 3 = (2(-1) + 3)(x + 1)) \to y = 5x + 8$.

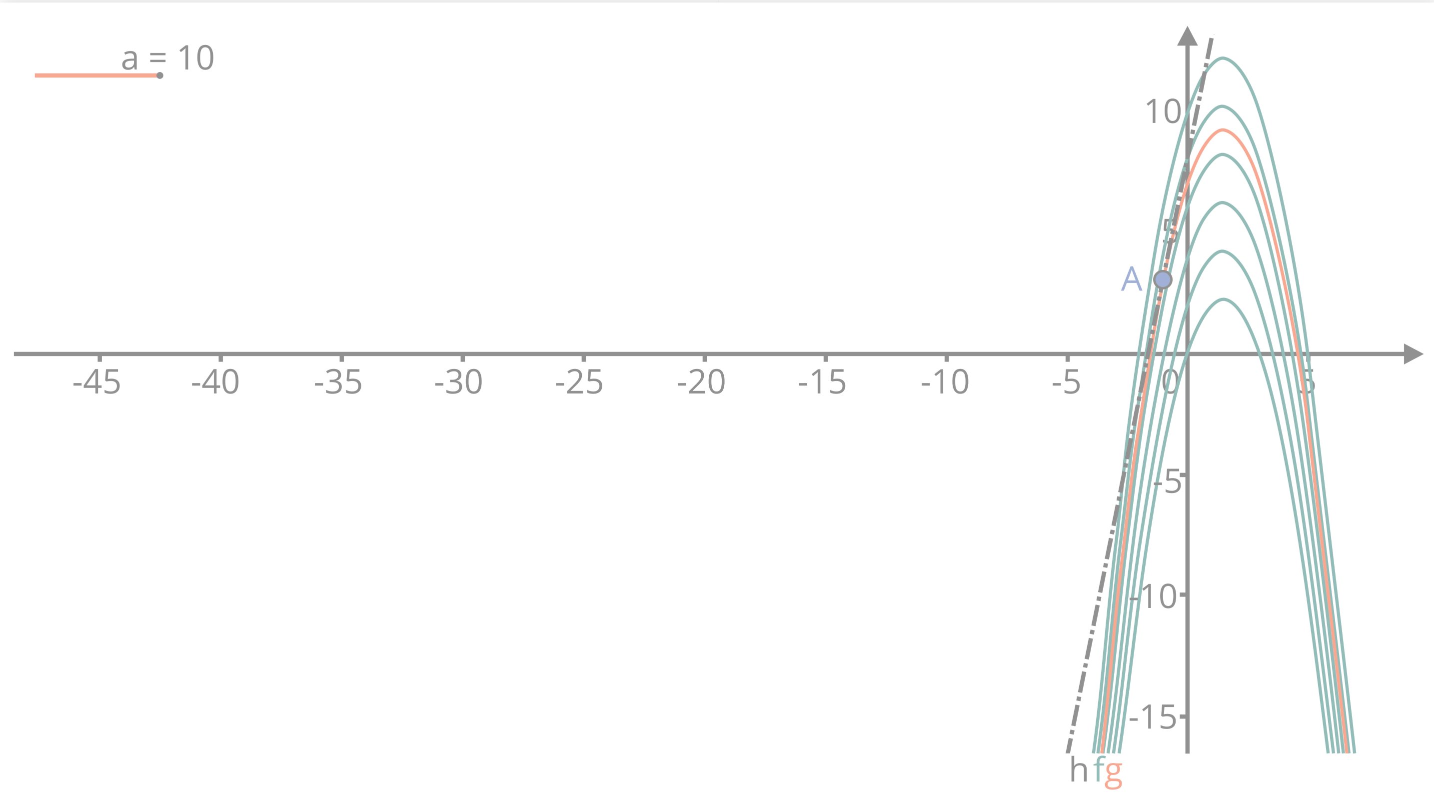


Figura 4.2 - Interpretação Geométrica de Integral Indefinida
Fonte: Elaborada pela autora.

Agora para aprender a calcular as integrais é necessário você conhecer as propriedades operatórias de integração. No próximo tópico, você conhecerá as propriedades na prática através dos exemplos propostos.

Propriedades das Integrais Indefinidas

Flemming e Gonçalves (2006, p. 242), por proposição, relacionam apenas duas propriedades para a integral indefinida. Considere $f, g : I \to \mathbb{R}$ e C uma constante arbitrária. Então:

$$\text{(i)} \quad \int Cf(x)\, dx = C \int f(x)\, dx.$$

$$\text{(ii)} \quad \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

Verifique que, pelo fato de existirem poucas propriedades, a complexidade para calcular integrais é um fato. Para tanto, são utilizados métodos de integração, que foram desenvolvidos para cada grupo de integrais sob certas condições.

Exemplo 1: Calcule as seguintes integrais usando as propriedades e os resultados da Tabela 4.1 de integrais imediatas adequados a cada situação.

a) $\int (3x^2 + \sqrt{x} + 5)\, dx$

Solução: Usando o item 2 da Tabela 4.1, integral da potência, temos:

$$\int (3x^2 + \sqrt{x} + 5)\, dx = \int (3x^2)\, dx + \int \sqrt{x}\, dx + \int 5dx = 3\int (x^2)\, dx + \int x^{1/2} dx + 5\int 1dx$$

$$= 3\frac{x^3}{3} + \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + 5x + C = x^3 + \frac{x^{3/2}}{3/2} + 5x + C = x^3 + \frac{2}{3}x^{3/2} + 5x + C = x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x} + 5x + C$$

b) $\int (5\text{cossec}^2(x) + 4\text{tg}(x) \cdot \sec(x)\, dx$

Solução: Usando os itens 9 e 10 da Tabela 4.1, integral de funções trigonométricas, temos:

$$\int (5\text{cossec}^2(x) + 4\text{tg}(x) \cdot \sec(x)\, dx = 5\int (\text{cossec}^2(x)\, dx + 4\int \text{tg}(x) \cdot \sec(x)\, dx =$$

$$= 5\int (\text{cossec}^2(x)\, dx + 4\int \text{tg}(x) \cdot \sec(x)\, dx = -5\text{cotg}(x) + 4\sec(x) + C$$

c) $\int [x\sqrt{x} + 6\sec^2(x) - \frac{2x}{3}] dx$

Solução: Usando os itens 1, 2 e 8 da Tabela 4.1, integral de função trigonométrica e potência, temos:

$$\int [x\sqrt{x} + 6\sec^2(x) - \frac{2x}{3}] dx = \int x^{3/2} dx + 6\int \sec^2(x)\, dx - \frac{2}{3}\int xdx = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + \text{tg}(x) - \frac{2}{3}\frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^{5/2}}{5/2} + \text{tg}(x) - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{5}x^{5/2} + \text{tg}(x) - \frac{x^2}{3}$$

d) $\int [\text{sen}(3x) + 3e^{2x} - \frac{2}{1+x^2}] dx$

Solução: Usando os itens 4, 6 e 12 da Tabela 4.1, integral do seno, exponencial e arco tangente, temos:

$$\int \left[\operatorname{sen}(3x) + 3e^{2x} - \frac{2}{1+x^2}\right]dx = \int \operatorname{sen}(3x)\, dx + \int 3e^{2x} dx - \int \frac{2}{1+x^2}\, dx = -\frac{\cos(3x)}{3} + 3\frac{e^{2x}}{2} - 2\operatorname{arct}$$

Verifique que a integral de $\int \operatorname{sen}(3x)\, dx$ pode ser calculada intuitivamente. A pergunta é:

Qual é a função que derivando resulta em $\operatorname{sen}(3x)$?

De fato é $-\frac{\cos(3x)}{3}$, pois $\left(-\frac{\cos(3x)}{3}\right)' = -\frac{1}{3}(\cos(3x))' = -\frac{1}{3}(-\operatorname{sen}(3x) \cdot 3) = \operatorname{sen}(3x)$

Agora que você aprendeu a calcular integrais de algumas funções, mostraremos algumas aplicações envolvendo as integrais indefinidas principalmente em problemas que envolvem a cinemática.

Aplicações das Integrais Indefinidas

Assim como utilizamos a função derivada para resolver problemas na cinemática, que envolve velocidade e aceleração de partículas, podemos também usar convenientemente a integração. Mostraremos alguns exemplos!

Exemplo 1: Uma partícula move-se ao longo de um eixo s. Use a informação dada para encontrar a função-posição da partícula.

Solução:

a) $v(t) = t^3 - 2t^2 + 1$ e $s(0) = 1$

Para encontrar a função posição basta integrarmos a função velocidade, desde quando $v(t) = \frac{ds}{dt} = t^3 - 2t^2 + 1 \rightarrow ds = (t^3 - 2t^2 + 1)\, dt$ Integrado ambos os lados, temos: $\int ds = \int (t^3 - 2t^2 + 1)\, dt \rightarrow s = \frac{t^4}{4} - 2\frac{t^3}{3} + t + C$ Para encontrar o valor da constante C, basta aplicar a condição inicial do problema: $s(0) = 1$

Assim, $1 = \frac{0^4}{4} - 2\frac{0^3}{3} + 0 + C \rightarrow C = 1 \rightarrow s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + t + 1$

b) $a(t) = 4\cos(2t)$; $v(0) = -1$; $s(0) = -3$

Nesse caso, precisamos integrar duas vezes. Ao integrar a função aceleração obtemos a função velocidade e ao integrar a função velocidade obtemos a função posição.

Sabemos que $a(t) = \frac{dv}{dt} = 4\cos(2t) \rightarrow dv = 4\cos(2t)\, dt$ integrando, temos: $\int dv = \int 4\cos(2t)\, dt \rightarrow v = 4\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + C = 2\operatorname{sen}(2t) + C$. Para encontrar a constante C, basta aplicar a condição inicial do problema, $v(0) = -1$

$-1 = 2\operatorname{sen}(2 \cdot 0) + C \rightarrow C = -1$, portanto, $v = 2\operatorname{sen}(2t) - 1$.

Agora, integrando-se a função velocidade, vamos obter a função espaço-tempo.

$v(t) = \frac{ds}{dt} = 2\,\text{sen}(2t) - 1 \rightarrow ds = (2\,\text{sen}(2t) - 1)\,dt \rightarrow s = \int (2\,\text{sen}(2t) - 1)\,dt \rightarrow s(t) = -2\frac{\cos(2t)}{2} - t + C$, aplicando as condições iniciais $s(0) = -3$, temos:

$$0 = -2\frac{\cos(2 \cdot 0)}{2} - 0 + C \rightarrow C = 1 \rightarrow s(t) = -\cos(2t) - t + 1.$$

Exemplo 2: Um tanque tem o seu volume V de água dado em função da altura da água no mesmo. Sabendo que a taxa de variação do volume V em relação à altura h da água é dada por $\pi(3h - 2)$ e sabendo que quando a altura é 1 m existem no tanque de água $3\pi\text{ m}^3$, determine o volume de água no tanque quando a altura for de 3m.

Solução: $\frac{dV}{dh} = \pi(3h - 2) \rightarrow dV = \pi(3h - 2)\,dh \rightarrow V = \int \pi(3h - 2)\,dh = \int 3\pi h\,dh - 2\pi \int dh \rightarrow$

$\rightarrow V = 3\pi\frac{h^2}{2} - 2\pi h + C$. Aplicando a condição $V = 3\pi\text{ m}^3$ e $h = 1\text{ m}$, temos:

$3\pi = 3\pi\frac{1}{2} - 2\pi(1) + C \rightarrow C = \frac{7\pi}{2} \rightarrow V = 3\pi\frac{h^2}{2} - 2\pi h + \frac{7\pi}{2}$. Para $h = 3\text{ m}$ volume do tanque é dado por: $V = 3\pi\frac{(3)^2}{2} - 2\pi(3) + \frac{7\pi}{2} = 11\pi\text{ m}^3$. Agora é com você!

praticar

Vamos Praticar

As integrais indefinidas podem envolver apenas funções elementares. Assim, basta simplificar a função adequadamente, e aplicar as propriedades e resultados da tabela de integração. Nesse contexto, encontre o resultado da integral indefinida $\int \frac{x^4 + 3x^{-1/2} + 4}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ e assinale a alternativa correta.

- **a)** $\frac{3}{14}x^{14/3} + 18x^{1/6} + 6x^{2/3} + C$
- **b)**) $\frac{3}{14}x^{14/3} + 18x^{1/6} + x^{3/2} + C$
- **c)** $\frac{3}{14}x^{14/3} + 18x^{1/6} + 6x^{2/3} + C$
- **d)** $x^{14/3} + 10\,x^{1/6} + 6\,x^{3/2} + C$
- **e)** $\frac{3}{4}x^{14/3} + 11x^{1/6} + 63^{2/3} + C$

Integrais Definidas e Análise Gráfica dos Movimentos

As integrais definidas permitem a resolução de problemas que resultam em soluções numéricas como: o deslocamento (Δs) sofrido pela partícula entre os instantes t_1 e t_2 e o cálculo de área de figuras planas.

Como motivação, veremos o método da exaustão, que é atribuído a Eudoxo (406–355 A.C.) como afirma Carvalho (2011), na seguinte citação:

> *Eudoxo (∼408-∼355 a.C.) supõe a infinita divisibilidade da reta e cria o "Método de Exaustão" para calcular a área do círculo. Ele usa a mesma ideia de Antifonte só que, ao supor que o segmento de reta pode ser dividido infinitamente, afirma que os polígonos se aproximam do círculo mas nunca coincidem com ele. Isto implica que não se pode calcular a área do círculo com um número finito de cálculos (CARVALHO, 2011, p. 11).*

A figura a seguir ilustra esse procedimento no caso especial do círculo com polígonos regulares inscritos, em que se aumentando o número de lados desse polígono, sua área aproxima-se cada vez mais da área do círculo.

Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados. À medida que aumentamos n, fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos, então, que a área do círculo é o limite da área do polígono inscrito quando $n \to \infty$ e escrevemos :

$A = \lim_{n\to\infty} A_n$ em que $A_n = n\,\mathrm{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)\cos\left(\frac{180}{n}\right)r^2$

Logo,

$A_{Círculo} = \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{sen}\left(\frac{180}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{180}{n}\right) r^2$

Calculado por partes, temos:

1. $\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{sen}\left(\frac{180°}{n}\right) = \infty \cdot 0$? Indeterminaão!

Nesse caso, devemos preparar a função para usar a regra de L'Hospital: $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = ?\frac{0}{0}$ Agora podemos utilizar a regra de L'Hospital. Portanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{180°}{n}\right)\left(-\frac{180°}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot (180) = \pi$

2. $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{180}{n}\right) r^2 = r^2$

Dessa forma, concluímos que o valor da área do círculo é $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$

Integrais Definidas

Agora você vai entender como encontrarmos a área de uma região plana qualquer, através do conceito da integral definida. Considere o gráfico da função $f(x)$ definida num intervalo $[a, b]$. Como encontrar a área da região limitada pela curva e o eixo x? Considerando o método da exaustão podemos aproximar a área da região de retângulos, como mostra a Figura 4.5.

No entanto, verifique que na Figura 4.5 cometemos um erro grosseiro para a aproximação da área da região proposta. Uma alternativa para minimizar o erro é aumentar a quantidade de retângulos no intervalo em que a função $f(x)$ está definida $[a, b]$ como mostra a Figura 4.6.

Portanto, para codificar, matematicamente, a estimativa do cálculo da área solicitada, vamos tomar um ponto $(x_i, f(x_i))$ como mostra o retângulo R_i em vermelho na Figura 4.6. Verifique que o retângulo possui base igual a $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ e altura $f(x_i)$. Consequentemente, a área do retângulo R_i é dada por $S_{R_i} = f(x_i) \cdot \Delta x_i$. Assim, podemos dizer que a área S da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e a reta $x = b$ pode ser expressa como o somatório das áreas dos vários retângulos, por:

$$S \simeq \sum_{i=1}^{n} S_{R_i} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i = f(x_1) \cdot \Delta x_1 + f(x_2) \cdot \Delta x_2 + f(x_3) \cdot \Delta x_3 + f(x_4) \cdot \Delta x_4 + \cdots$$

Para diminuir o erro, fazemos $n \to \infty$ ou $máx\Delta x \to 0$ e, ao passar o limite, teremos o cálculo exato da área da região solicitada: $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$.

Nesse sentido, Flemming e Gonçalves (2006) formalizam as seguintes definições, teorema e propriedades. Fique bem atento a essas informações, que são as ferramentas necessárias para o cálculo e aplicação da integral definida.

Definição (Integral Definida)

Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$.

A integral definida definida de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(x)\, dx$ é dada por: $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$

Desde quando o limite exista.

Teorema

A relação entre integral e função contínua decorre do teorema, que afirma que:

Se f é contínua sobre $[a, b]$ então f é integrável em $[a, b]$.

Ou seja, garante-se a existência da integral quando a função integranda é contínua. Observe que por conta da palavra “então” do teorema, a controvérsia não é verdadeira. Nesse caso, pode acontecer da função f ser integrável e a função não ser contínua.

A seguir verifique as propriedades operatórias da integral definida.

Propriedades (Integral Definida)

Sejam f e g contínuas (portanto integráveis) e $k \in R$

P1. Se $a > b$, então $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, a integral existe.

P2. Se $a = b$ e $f(a)$, existe, então: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P3. Se $a = b$ e $f(a)$, existe, então: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P4. $\int_a^a k\,f(x)\,dx = k\int_a^a f(x)\,dx$.

P5. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

P6. Se $a < c < b$, então $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

P7. Se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

P8. Se f é contínua em $[a, b]$, então $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Agora que você já ficou ciente das propriedades operatórias, para calcular a integral definida e encontrar um valor real representativo é necessário aplicar o importante Teorema Fundamental do Cálculo, enunciado a seguir.

Teorema Fundamental do Cálculo

Esse é o teorema mais importante do cálculo, que possibilita o cálculo da integral definida. Para tanto, basta conhecer a primitiva da função e aplicar os limites de integração. Flemming e Gonçalves (2006, p. 267) definem da seguinte forma:

Se f é contínua em $[a, b]$ e se F é uma primitiva de f nesse intervalo, então $\int_a^b f(x)\,dt = F(b) - F(a)$

Exemplo 1: Calcule a integral definida $\int_0^2 (-x^2)\,dx$

Solução:

$$\int_0^2 (-x^2)\,dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = -\frac{(2)^3}{3} - \left(-\frac{(0)^3}{3}\right) = -\frac{8}{3}$$

Exemplo 2: Calcule a integral definida $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\ dx$

Solução:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\ dx = -\cos(x)\ \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \ -\cos(\pi/2) - (-\cos(\pi/2)) = -0 + 0 = 0$$

Através dos exemplos você pode verificar perfeitamente a aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo após o cálculo da integral na obtenção da função primitiva.

saiba mais

Saiba mais

O Teorema Fundamental do Cálculo é uns dos mais importantes teoremas do cálculo, pois através dele é possível resolver uma infinidade de problemas aplicados em várias áreas de conhecimento. Através da história é possível você saber compreender como é possível aplicar as integrais definidas através do Teorema Fundamental do Cálculo. O trabalho intitulado “Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas” mostra como aplicar esse importante resultado na resolução de problemas que envolvem o cálculo integral.

ACESSAR

Agora vamos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo em aplicações relacionadas ao cálculo de área de regiões planas.

Cálculo de Área de Regiões Planas

Para o cálculo de área é necessário termos alguns cuidados relativos ao sinal da função. Nos exemplos anteriores, simplesmente aplicamos o teorema Fundamental do Cálculo, pois foi solicitada a resolução da integral definida. Veremos como realizar o cálculo de área de regiões planas, para tanto, Flemming e Gonçalves (2006, p. 272) mostram como se calcular vários tipos de áreas de regiões planas.

Definição

Seja $f(x)$ uma função contínua, integrável no intervalo $[a, b]$. Dizemos que a área da região limitada pelo gráfico de f e o eixo x é dada por:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = F(b) - F(a)$$

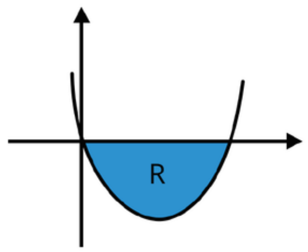
Em que

$$|f(x)| = \{f(x) \text{ se } f(x) \geq 0\} \text{ ou } = \{-f(x) \text{ se } f(x) < 0\}$$

Exemplo 1: Calcular a área da região limitada pelo gráfico (Ver Quadro 4.1) da função $f(x) = x^2 + 2$, pelo eixo Ox e pelas retas $x = -1$ e $x = 2$

Exemplo 2: Calcular a área da região limitada pelo gráfico (Ver Quadro 4.3) da função $f(x) = x^3$, pela reta $x = 3$ e pelo eixo Ox.

Exemplo 3: Calcular a área da região limitada pelo gráfico (Ver Quadro 4.4) da função $f(x) = x^2 - 4x$ e o eixo Ox.



Cálculo:

$$A = \int_0^2 (x^2 - 4x)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} - 4\,\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 =$$

$$F(2) - F(0) = -\left(\frac{(4)^3}{3} - 4\left[\frac{(4)^2}{3}\right]\right) - 0 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}\ u.a.$$

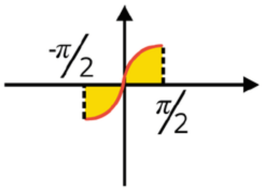
Ponto de interseção com ox:

$$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$$

Quadro 4.4 - Cálculo da área
Fonte: Elaborado pela autora.

Agora veremos um exemplo em que a função é parte positiva e parte negativa. Nesse caso, teremos que utilizar a definição de módulo.

Exemplo 4: Calcular a área da região limitada pelo gráfico (Ver Quadro 4.5) da função $f(x) = \text{sen}(x)$ e o eixo Ox entre $-\pi/2$ a $\pi/2$



Cálculo:

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\ \text{sen}\ (x)\ |\ dx$$

$$= - \int_{-\pi/2}^{0} (\text{sen}\ (x))\ dx$$

$$= + \int_{0}^{\pi/2} (\text{sen}\ (x))\ dx$$

$$-(-\cos(x))\Big|_{-\pi/2}^{0} + (-\cos(x))\Big|_{0}^{\pi/2} =$$

$$= - (- \cos (0)) - (-\cos (-\pi/2)) +$$

$$= + (-\cos(\pi/2)) - (- \cos(0)) = -1 + 0 + 0 + 1 = 2u.a.$$

Quadro 4.5 - Cálculo da área
Fonte: Elaborado pela autora.

Agora vamos ver o caso em que a região está limitada entre duas curvas. Nesse caso, prevalece sempre a integral que limita superiormente menos a função que limita inferiormente. Nesse caso, não precisa se preocupar com o sinal da função. Veja o exemplo 5.

Exemplo 5: Calcular a área da região limitada pelo gráfico (Ver Quadro 4.6) da função $f(x) = -x^2 + 2x$ e $f(x) = -2x - 3$

Observe que, em todos os exemplos anteriores, usamos o gráfico como suporte para resolver a questão. No entanto, se a função for não elementar a construção gráfica fica mais difícil. Assim, temos como resolver a questão através do estudo do sinal. Veja o exemplo 6.

Exemplo 6: Calcular a área da região limitada pelas curvas $y_1 = x^3 - 3x$ e $y_2 = 2x^2$. Nesse caso, precisamos estudar o sinal da função $y_1 - y_2 = x^3 + 2x^2 - 3x$. Se o sinal for positivo, significa que a função y_1 limita a região limitada superiormente, caso contrário a função y_2 é a que limita superiormente. Fatorando temos: $y_1 - y_2 = x^3 + 2x^2 - 3x = x\ (x + 1)\ (x - 3)$. Veja toda a análise no Quadro 4.7.

Quadro 4.7 - Cálculo da área
Fonte: Elaborado pela autora.

Análise Gráfica dos Movimentos

Vamos tomar como exemplo o Movimento Uniformemente Variado (MUV). Nesse caso, a função aceleração $a = a(t)$ é constante, consequentemente, a função velocidade $a = a(t)$ é uma reta e a função espaço-tempo $s = s(t)$ é uma parábola. Assim mostram os gráficos da Figura 4.7.

Já vimos que, se derivarmos a função espaço-tempo obtemos a função velocidade e ao derivarmos a função velocidade obtemos a função aceleração. Por outro lado, se integramos a função aceleração encontramos a função velocidade e se integrarmos a função velocidade encontramos a função espaço-tempo dada alguma condição inicial.

Vejamos o significado do valor da área da região limitada pela curva velocidade e o eixo x, em um intervalo de tempos de t_1 a t_2.

O deslocamento é dado por: $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$. Por outro lado, a área é limitada pela função velocidade, nesse caso é determinada através da integração, portanto, no caso da função velocidade ser toda positiva, o deslocamento coincide com a distância percorrida e é igual à área: $A = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1) = \Delta s$, desde quando a função espaço-tempo $s(t)$ é uma primitiva da função velocidade, ou seja, derivando-se a função $s(t)$ obtemos a função $v(t)$.

Quando a função não é toda positiva ao intervalo em estudo, como mostra o gráfico da Figura 4.8, devemos levar em consideração o sinal da função.

Nesse caso, a distância percorrida (d) é dada pela área limitada pelo gráfico da função velocidade e o eixo x dada por $d = A = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt$ em módulo. Já no deslocamento, não se leva em consideração o módulo, assim $\Delta s = A = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$

Vamos fazer os cálculos da distância e do deslocamento considerando o exemplo da Figura 4.8. Assim, em que $t_1 = 1s$, $t_2 = 3s$ e $t_3 = 6s$, considerando as funções da Figura 4.7, em que $s(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 1\ m$ e $v(t) = t - 3\ m/s$

$$\Delta s = A = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = \int_{1}^{6} (t-3)\, dt = \left(\frac{1}{2}t^2 - 3t\right)\Big|_1^6 = \left(\frac{1}{2}(6)^2 - 3(6)\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 - 3(1)\right)$$

$$= (18 - 18) - (1/2 - 3) = 0 - (-5/2) = 5/2\ m.$$

Para conferir vamos fazer a conta com a função espaço-tempo:

$$\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = s(6) - s(1) = (\frac{1}{2}(6)^2 - 3(6) + 1) - (\frac{1}{2}(1)^2 - 3(1) + 1) = 1 - (-3/2) = 5/2 \text{ m.}$$

Conferido!

Vamos analisar o que muda quando calculamos a distância percorrida. Verifique os cálculos considerando o módulo da função velocidade. Nesse caso, foi necessário dividir em duas integrais. Quando o tempo varia de 1s a 3s, a função velocidade é negativa (Figura 4.8) e, por propriedade de módulo, colocamos o sinal negativo na primeira integral. De 3s para 6s a função é toda positiva e portanto o sinal fica positivo.

$$\Delta s = A = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = -\int_1^3 (t-3)\, dt + \int_3^6 (t-3)\, dt = -(\frac{1}{2}t^2 - 3t)\Big|_1^3 + (\frac{1}{2}t^2 - 3t)\Big|_3^6$$

$$= -[(\frac{1}{2}(3)^2 - 3(3)) - (\frac{1}{2}(1)^2 - 3(1))] + (\frac{1}{2}(6)^2 - 3(6)) - (\frac{1}{2}(3)^2 - 3(3)) =$$

$$. = -(18-18) + (1/2 - 3) + (18-18) - (9/2 - 9) = -5/2 + 9/2 = 2 \text{ m}$$

Verifique que nesse caso do MUV é possível realizar o cálculo sem a utilização da integração, apenas utilizando as fórmulas aprendidas no ensino médio. A utilização da integral se faz necessária, quando a função espaço-tempo é diferente de uma função polinomial de grau 2. Nesses casos, para calcular o deslocamento devemos determinar o deslocamento através do cálculo da área por integração. Agora é com você! Através da atividade proposta a seguir, teste os conhecimentos adquiridos.

praticar

Vamos Praticar

A posição de uma partícula movendo-se ao longo de uma linha reta é dada por uma função $s = s(t)$, em que s é medido em metros e o tempo (t) em segundos. Por observação do fenômeno foi possível modelar a função velocidade dada por $v(t) = 6t^2 - 24$ m/s que é uma função quadrática.

Com base nessas informações e a análise do gráfico da figura, avalie as seguintes alternativas:

I. O tempo necessário para a partícula alcançar uma velocidade de $72\ m/s$ a partir de sua condição inicial em $t = 0$ é igual a $4\ s$.

II. A aceleração da partícula quando a velocidade é igual a $30\ m/s$ é igual a $25\ m/s^2$.

III. O deslocamento resultante durante o intervalo de $t_1 = 1\ s$ até $t_2 = 4\ s$ é igual a $54\ m$.

IV. A partícula percorreu de $t_1 = 1\ s$ até $t_2 = 4\ s$ uma distância de $65\ m$.

Está correto o que se afirma em:

- **a)** I e III, apenas.
- **b)** II e III, apenas.
- **c)** I e II, apenas.
- **d)** I, II e III, apenas.
- **e)** I, III e IV, apenas.

Método de Integração por Substituição de Variável

Para integrarmos funções não elementares, é necessário aplicar algum método de integração com o intuito de transformar uma integral complexa em integrais elementares e resolvê-las de forma fácil com aplicação dos resultados tabelados das integrais elementares. O método por substituição de variáveis é bastante intuitivo, e consiste em substituir a variável da integral por outra variável e sob certas condições é possível simplificá-la.

Sejam as funções contínuas $g(x)$ e $f(x)$ e a função $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$, então:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C.$$

Considerando, $u = g(x)$, temos $\int f(u) \cdot du = F(u) + C$.

Veremos alguns exemplos para praticar esse método.

Exemplo 1: Calcular $\int \frac{dx}{3x-7}$

Fazendo $u = 3x - 7 \to du = 3\,dx \to dx = \frac{du}{3}$, temos:

$$\int \frac{dx}{3x-7} = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|3x-7| + C.$$

Exemplo 2: Calcular $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

Fazendo $u = x^2 + 1 \to du = 2x\,dx \to x\,dx = \frac{du}{2}$, temos:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{3/2} + C = \frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + C.$$

Exemplo 3: Calcular $\int tg\,(x)\ dx = \int \frac{sen(x)}{cos(x)}dx$

Fazendo $u = cos\,(x) \rightarrow du = -sen\,(x)\ dx \rightarrow sen\,(x)\,dx = -du$, temos:

$$\int \frac{sen\,(x)}{cos\,(x)}dx = \int -\frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|cos\,(x)| + C = \ln|sec\,(x)| + C.$$

Vale ressaltar que esse resultado está tabelado. Similarmente você pode resolver a integral $\int cotg\,(x)\ dx$ para praticar!

Exemplo 4: Calcular $\int sec\,(x)\ dx$ Nesse caso, utilizamos o artifício de multiplicar e dividir a função por $\frac{(sec(x)+tg(x)}{sec(x)+tg(x)}$

$\int sec\,(x)\ dx = \int sec\,(x)\ \left(\frac{(sec(x)+tg(x)}{sec(x)+tg(x)}\right)dx = \int \frac{(sec^2(x)+sec(x)tg(x)}{sec(x)+tg(x)}dx$. Fazendo,

$u = sec\,(x) + tg\,(x) \rightarrow du = (sec\,(x)\cdot tg\,(x) + sec^2\,(x))\,dx$, temos:

$\int \frac{(sec^2(x)+sec(x)tg(x)}{sec(x)+tg(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|sec\,(x) + tg\,(x)| + C$ (tabelado).

Similarmente, você pode resolver a integral $\int cossec\,(x)\ dx$ para praticar!

Exemplo 5: Calcular $\int \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

Fazendo $u = \sqrt{x} \rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ temos:

$$\int \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int 2tg\,(u)\,du = 2\cdot\int tg\,(u)\,du = 2\ln|sec\,(u)| + C = 2\ln|sec\,(\sqrt{x})| + C.$$

Agora é com você!

praticar

Vamos Praticar

O método de substituição de variável permite calcular alguns tipos de integrais. Nesse caso, você deve substituir a variável de integração por outra de forma conveniente, como mostrado nos exemplos anteriores. Caso esse método não se adeque, você pode aplicar, possivelmente, outros métodos que ainda serão mostrados em seus estudos de cálculo. Nesse contexto, calcule a integral $\int \frac{(\ln(x))^2}{x}dx$ utilizando o método por substituição de variáveis e assinale a alternativa correta.

- **a)** $\ln^3(x) + C$
- **b)** $\frac{\ln^4(x)}{2} + C$
- **c)** $\frac{\ln^4(x)}{2} + C$
- **d)** $\frac{\ln^3(x)}{3} + C$
- **e)** $\frac{\ln(x)}{3} + C$

Método de Integração por Partes

O método de integração por partes é um método apropriado para integrar produtos de funções distintas como por exemplo $\int x \cdot e^{x} dx$ Verifique que nesse caso, o método de integração por substituição de variável não se aplica. Vejamos como foi definida a fórmula utilizada para a integração por partes.

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis e definidas em um intervalo I.Ao derivar o produto entre elas, temos:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \text{ (eq. 1)}$$

Integrando-se ambos os lados da equação 1, temos:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \rightarrow d[f(x) \cdot g(x)] = [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)]\, dx$$

$$\int d[f(x) \cdot g(x)] =$$

$$\int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)]dx \rightarrow f(x) \cdot g(x) =$$

$$\int [f'(x) \cdot g(x)]dx + \int [f(x) \cdot g'(x)]dx \rightarrow \int [f(x) \cdot g'(x)]dx =$$

$$f(x) \cdot g(x) - \int [g(x) \cdot f'(x)]dx$$

Fazendo: $u = f(x) \to du = f'(x)\,dx$ e $v = g(x) \to dv = g'(x)\,dx$ e substituindo obtemos a fórmula da integração por partes:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

Veja que dividimos a integral em duas partes: u e dv.

Agora, através de alguns exemplos, você vai aprender como aplicar esse método de integração por partes. Dessa forma, recomendamos para a escolha dessas partes a seguinte ordem para nomear a variável u, ou seja, devemos priorizar a escolha de acordo com a seguinte ordem: **L**ogarítmica, **I**nversa, **A**lgébrica, **T**rigonométrica, **E**xponencial.

Exemplo 1: Calcule $\int xe^x dx$.

Para aplicar a fórmula $\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$, fazemos preferencialmente:

$u = x \to du = dx$ e $dv = e^x dx \to v = e^x$. Substituindo na fórmula, temos:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Verifique que, nesse método, não fazemos a substituição de variáveis, as variáveis u e v são utilizadas como suporte para podermos usar a fórmula. Uma vez substituindo na fórmula, a integral fica totalmente em função de x. Observe também que a escolha recomendada é importante, pois se almeja, ao resolver a uma integração por partes, que a integral da fórmula fique mais fácil de resolver. Quando isso não acontece, deve-se fazer outra escolha para as variáveis u e dv.

Exemplo 2: Calcule $\int x^2 \cdot \ln(x)\,dx$

Fazemos preferencialmente:

$u = \ln(x) \to du = \frac{1}{x}dx$ e $dv = x^2 dx \to v = \frac{x^3}{3}$. Substituindo na fórmula, temos:

$$\int x^2 \cdot \ln(x)\,dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3}dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C = \frac{2}{9}x^3 + C.$$

Exemplo 3: Calcule $\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$

Escolhemos: $u = \cos(x) \to du = -\text{sen}(x)\,dx$ e $dv = e^x dx \to v = e^x$ e através da fórmula:

$\int e^x \cdot \cos(x)\ dx = \cos(x) \cdot e^x - \int e^x \cdot (-\text{sen}(x))\, dx = \cos(x) \cdot e^x + \int e^x \cdot \text{sen}(x)\, dx$

Verifique que restou a integral $\int e^x \cdot \text{sen}(x)\, dx$ similar à integral que queremos resolver. Portanto, temos que aplicar o método por partes novamente. Logo:

$u = \text{sen}(x) \rightarrow du = \cos(x)\ dx$ e $dv = e^x dx \rightarrow\ v = e^x$

Portanto,

$$\int\ e^x \cdot \cos(x)\ dx = \cos(x) \cdot e^x + \int\ e^x \cdot \text{sen}(x)\, dx = \text{sen}(x) \cdot e^x - \int\ e^x \cdot \cos(x)\, dx \text{ (eq. 2)}$$

Veja que interessante! Retornamos para a mesma integral. Esse tipo de integral é denominada de cíclica. Nesse caso, resolveremos a equação 2, passando a integral do segundo termo para o primeiro termo para obter o seu valor, da seguinte forma:

$$\int\ e^x \cdot \cos(x)\ dx + \int\ e^x \cdot \cos(x)\, dx = \cos(x) \cdot e^x + \text{sen}(x) \cdot e^x \rightarrow 2\int\ e^x \cdot \cos(x)\ dx =$$

$$e^x (\cos(x) + \text{sen}(x)) \rightarrow \int\ e^x \cdot \cos(x)\ dx = \frac{e^x}{2}(\cos(x) + \text{sen}(x)) + C.$$

Agora é com você!

praticar

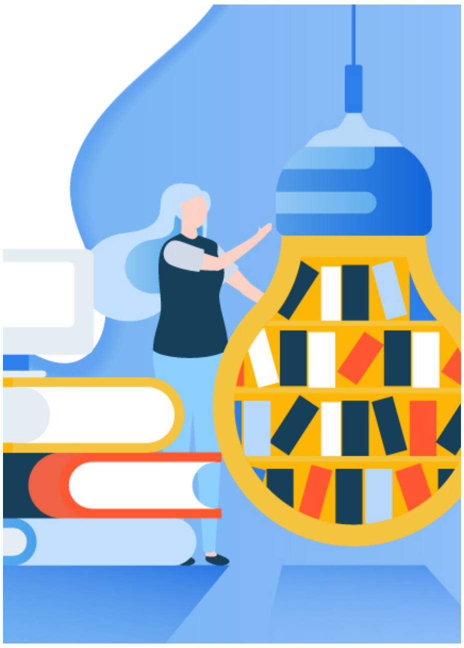
Vamos Praticar

O método de integração por partes divide a integral em duas partes e para resolver a integral utilizamos a fórmula: $\int udv = uv - \int vdu$. Nesse contexto, calcule as integrais $\int \ln(x)\, dx$ e $\int \text{arctg}(3x)\ dx$ utilizando o método por partes e assinale a alternativa correta.

- **a)** $\int \ln(x)\, dx = \ln(x) - x + C$ e $\int \text{arctg}(x)\ dx = x \cdot \text{arctg}(3x) - \frac{1}{6}\ln\left|1 + 9x^2\right| + C$
- **b)** $\int \ln(x)\, dx = x\ln(x) - x + C$ e $\int \text{arctg}(x)\ dx = x \cdot \text{arctg}(3x) - \frac{1}{6}\ln\left|1 + 9x^2\right| + C$
- **c)** $\int \ln(x)\, dx = \ln(x) - 1 + C$ e $\int \text{arctg}(x)\ dx = \text{arctg}(3) - \ln\left|1 + x^2\right| + C$
- **d)** $\int \ln(x)\, dx = \frac{1}{x} + C$ e $\int \text{arctg}(x)\ dx = x \cdot \text{arctg}(3x) + C$

○ **e)** $\int \ln(x)\,dx = \ln(x) + x + C$ e $\int \operatorname{arctg}(x)\,dx = x \cdot \operatorname{arctg}(3x) - \frac{1}{6}\ln\left|1 + 9x^2\right| + C$

indicações
Material Complementar



LIVRO

Cálculo

Editora: São Paulo: Cengage Learning, v.1.

Ano: 2013

Autor: STEWART, James.

ISBN: 9788522114610

Comentário: Recomendo leitura dos capítulos 5, 6 e 7 que abordam a definição da integral e algumas aplicações interessantes. Além disso, você pode praticar resolvendo os exercícios propostos por substituição de variáveis, cálculo de área e o método por partes.

WEB

MÜLLER, M. J.; GONÇALVES, N. da S.; MÜLLER, T. J. **Integral definida**: trabalhando conceito e aplicações através de objetos de aprendizagem.

Ano: 2013.

Comentário: Esse artigo mostra como as aplicações de derivadas e integrais podem ser trabalhadas através dos objetos de aprendizagem em sala de aula. Esses elementos favorecem uma aprendizagem vinculando a teoria à prática, reforçando a necessidade das inovações em sala de aula através das aulas práticas em laboratório.

ACESSAR

conclusão

Conclusão

Nesta unidade iniciamos o conceito do cálculo integral, em que estudamos dois métodos de integração: por substituição de variável e por partes. Além disso, trabalhamos com cálculo de área de regiões planas aplicados a análise dos movimentos: determinação do deslocamento e distância percorrida por uma partícula em movimento. Essa é uma importante aplicação na área de física, no entanto, podemos aplicar esse conceito de integrais em várias áreas de conhecimento como por exemplo: na hidráulica, na resolução de problemas que envolve esvaziamento de um tanque; na biologia, para definir dosagem de medicamentos; e, também, na área da economia, através da análise das funções econômicas: custo, receita e lucro.

referências

Referências Bibliográficas

ANTON, H. **Cálculo** - v. 1. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. ISBN 9788582602263.

CARVALHO, S. P. A área e o perímetro de um círculo. In: COLÓQUIO DA REGIÃO SUDESTE, 1., abr. 2011, [S.l.]. **Anais [...]**. [S.l.]: [S.n.], abr. 2011. Disponível em: https://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SE-1.02.pdf. Acesso em: 30 dez. 2019.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: funções, limites, derivação e integração. 6. ed. rev. e ampl. São Paulo: Pearson, 2006. ISBN 9788576051152.

MÜLLER, M. J.; GONÇALVES, N. da S.; MÜLLER, T. J. Integral definida: trabalhando conceito e aplicações através de objetos de aprendizagem. In: COBENGE, XLI., 23 a 26 set. 2013, Gramado. **Anais [...]**. Gramado: UFGRS, 23 a 26 set. 2013. Disponível em: http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/12224

/2/Integral_Definida_trabalhando_conceito_
e_aplicacoes_atraves_de_objetos_de_aprendizagem.pdf. Acesso em: 22 jan. 2020.

SCUCUGLIA, R. **A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

STEWART, J. **Cálculo**, v. 1. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. ISBN 9788522114610.