TP N° 6- Transformaciones lineales

1- ¿Es Transformación Lineal? Justificar

Definición: Sea T una función definida de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W. T es una transformación lineal si se cumple lo siguiente:

I. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
II. $\forall \vec{u} \in V \ y \ \forall \lambda \in R: T(\lambda.\vec{u}) = \lambda.T(\vec{u})$

a) $T: R^2 \rightarrow R^2 \ / \ T(x;y) = (3x+2y;x)$

Para que sea T.L. se deben cumplir las dos condiciones: $\begin{cases} I)\ T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \\ II)\ T(\lambda.\vec{u}) = \lambda.T(\vec{u}) \text{ siendo } \lambda \text{ un número real} \end{cases}$

Averiguamos si se cumple I)

Sean los vectores: $\begin{cases} \vec{u} = (x_1, y_1) \\ \vec{v} = (x_2, y_2) \end{cases}$

$T(\vec{u}+\vec{v}) = T[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] \underset{\text{Por suma en } R^2}{=} T(x_1+x_2\ ;\ y_1+y_2)$= por definición de T.L

$= [3(x_1+x_2) + 2(y_1+y_2); x_1+x_2]$ = Aplicando propiedad distributiva.

$= [3x_1 + 3x_2 + 2y_1 + 2y_2;\ x_1+x_2]$ = Se puede expresar como

$= [(3x_1+2y_1) + (3x_2+2y_2);\ x_1+x_2]$ = separando en la suma de dos vectores

$= (3x_1+2y_1;\ x_1) + (3x_2+2y_2;\ x_2)$ = $T(x_1,y_1)$ + T $(x_2,y_2) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

Porque $(3x_1+2y_1;\ x_1) = T(x_1,y_1)$ Por definición de T.

Y $(3x_2+2y_2;\ x_2)$ = T (x_2,y_2) Por definición de T.

Por lo tanto, se cumple I : $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

Averiguamos si se cumple II) Sean: $\begin{cases} \vec{u} = (x,y) \\ \lambda \text{ un número real} \end{cases}$

$T(\lambda.\vec{u}) = T[\lambda.(x,y)] \underset{\text{Resolviendo el producto}}{=} T(\lambda.x, \lambda.y) \underset{\text{Aplicando T}}{=} (3\lambda.x + 2\lambda.y; \lambda.x) \underset{\text{Factor común k}}{=} [\lambda.(3x+2y); \lambda.x] = \lambda.(3x+2y;x)$=

Cómo $T(x,y) = (3x+2y;x)$

$= \lambda.T(x,y) = \lambda.T(\vec{u})$

por lo tanto, **se cumple II:** $T(\lambda.\vec{u}) = \lambda.T(\vec{u})$

Como se cumplen las condiciones es un T.L.

b) $\boldsymbol{T: R^2 \to R^2 \ / \ T\,(x;y) = (x^2, 0)}$

Veamos si se cumple I) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

Sean los vectores: $\begin{cases} \vec{u} = (x_1, y_1) \\ \vec{v} = (x_2, y_2) \end{cases}$

$T(\vec{u}+\vec{v}) = T[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] = T(x_1+x_2 \ ; \ y_1+y_2) = [(x_1+x_2)^2; 0] =$
$= ({x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2; \ 0)$
Pero $T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T\,(x_1,y_1) + T(x_2,y_2) = ({x_1}^2; 0) + ({x_2}^2; \ 0) = ({x_1}^2 + {x_2}^2; 0)$

Los resultados obtenidos no son iguales, por lo tanto, **no se cumple la condición I) NO es una T.L.**

c) $\boldsymbol{T: R^3 \to R^3 \ / \ T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}$

Sean los vectores: $\begin{cases} \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ \vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Vemos si verifica I) $T(\vec{u}+\vec{v}) = \boldsymbol{T}\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] = T\left[\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por otro lado

$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Los resultados obtenidos no son iguales por lo tanto no se cumple la condición I): **NO es una T.L.**

d) $\boldsymbol{T: M_{23} \to M_{32} \ /T(A) = A^t}$

Sean los vectores: $\begin{cases} \vec{u} = A \in M_{23} \\ \vec{v} = B \in M_{23} \end{cases}$

I) $T(\vec{u}+\vec{v}) = \boldsymbol{T(A+B)} = (A+B)^t = A^t + B^t$ Por propiedad de matriz traspuesta

Por otro lado $T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \boldsymbol{T(A) + T(B)} = A^t + B^t$

Por lo tanto, se cumple I : $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

Averiguamos si se cumple II) Sean: $\begin{cases} \vec{u} = A \in M_{23} \\ \lambda \ un \ número \ real \end{cases}$

II) $T(\lambda.\vec{u}) = T[\lambda.(A)] = T(\lambda.A) = (\lambda.A)^t = \lambda.A^t = \lambda.T(\vec{u})$

Por propiedad de matriz traspuesta

$T(\lambda.\vec{u}) = \lambda.T(\vec{u})$ **se cumple II. ES UNA T. L.**

e) $T: R^{2x1} \rightarrow R^{2x1}$ $/T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Veamos si se cumple I) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

Sean los vectores: $\begin{cases} \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in R^{2x1} \\ \vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^{2x1} \end{cases}$

I) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} =$

		$x_1 + x_2$ $y_1 + y_2$
1	3	$1.(x_1 + x_2) + 3.(y_1 + y_2)$
4	7	$4.(x_1 + x_2) + 7.(y_1 + y_2)$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3y_1 + 3y_2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 7y_1 + 7y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 + 3y_1 \\ 4x_1 + 7y_1 \end{pmatrix}}_{T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 + 3y_2 \\ 4x_2 + 7y_2 \end{pmatrix}}_{T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}} = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{y_1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix} = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

Se cumple la condición I) porque $\boldsymbol{T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})}$

Averiguamos si se cumple II) Sean: $\begin{cases} \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^{2x1} \\ \lambda \text{ un número real} \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$T(\lambda.\vec{u}) = \boldsymbol{T}\left[\lambda.\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \lambda.x \\ \lambda.y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda.x \\ \lambda.y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.x + 3\lambda.y \\ 4\lambda.x + 7\lambda.y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.(x + 3y) \\ \lambda.(4x + 7y) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda.\begin{pmatrix} x + 3y \\ 4x + 7y \end{pmatrix} = \lambda.\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \lambda.T(\vec{u})$$

Se cumple la condición II) porque $\boldsymbol{T(\lambda.\vec{u}) = \lambda.T(\vec{u})}$

Por lo tanto es T. L.

f) $\boldsymbol{T: P_2 \rightarrow P_2 / \quad T\left(ax^2+bx+c\right)=ax^2+bx+c+1}$

Veamos si se cumple I) $T(\vec{u}+\vec{v})=T(\vec{u})+T(\vec{v})$

Sean los vectores: $\begin{cases} \vec{u}=(\boldsymbol{a_1x^2+b_1x+c_1}) \in P_2 \\ \vec{v}=\ (\boldsymbol{a_2x^2+b_2x+c_2}) \in P_2 \end{cases}$

I) $T(\vec{u}+\vec{v})=\boldsymbol{T}[(\boldsymbol{a_1x^2+b_1x+c_1})+(\boldsymbol{a_2x^2+b_2x+c_2})]=$ sumamos los polinomios

$=T[(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)]=$ hallamos la imagen por T
$=(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)+1$

Por otro lado: $T(\vec{u})+T(\vec{v})=T[(a_1x^2+b_1x+c_1)]+T[(a_2x^2+b_2x+c_2)]=$

$=(a_1x^2+b_1x+c_1)+1+(a_2x^2+b_2x+c_2)+1=(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)+2$

Como los resultados no coinciden, **no se cumple la condición I).** $T(\vec{u}+\vec{v}) \neq T(\vec{u})+T(\vec{v})$**NO es T.L.**

Observación: una forma rápida de averiguar si es una T.L. es averiguando si se cumple la propiedad que dice: **"En toda transformación lineal la imagen del vector nulo del primer espacio vectorial es igual al vector nulo del segundo espacio vectorial".**

$T(0x^2+0x+0)=0x^2+0x+0+1$ No es el polinomio nulo, por lo tanto, no es una T.L.

Pero hay que tener en cuenta que **lo recíproco no es válido**, es decir que: si la imagen del vector nulo del primer espacio vectorial es el vector nulo del según espacio vectorial no implica que T sea una transformación lineal.

g) $T: R^{3x1} \rightarrow R^{2x1} \,/\, T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ z+x \end{pmatrix}$

Veamos si se cumple I) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

Sean los vectores: $\begin{cases} \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in R^{3x1} \\ \vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in R^{3x1} \end{cases}$

I) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] = T\left[\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + x_1 + x_2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x_1 + y_1 \\ z_1 + x_1 \end{pmatrix}}_{T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2x_2 + y_2 \\ z_2 + x_2 \end{pmatrix}}_{T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

Por lo tanto, se cumple la condición I) porque $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

Averiguamos si se cumple II) Sean: $\begin{cases} \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^{3x1} \\ \lambda \text{ un número real} \end{cases}$

$$II)\ T(\lambda.\vec{u}) = T\left[\lambda.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \lambda.x \\ \lambda.y \\ \lambda.z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda.x + \lambda.y \\ \lambda.z + \lambda.x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.(2x+y) \\ \lambda.(z+x) \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} 2x+y \\ z+x \end{pmatrix} = \lambda.T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda.T(\vec{u})$$

Se cumple la condición II) porque $\boldsymbol{T(\lambda.\vec{u}) = \lambda.T(\vec{u})}$

Es una Transformación Lineal

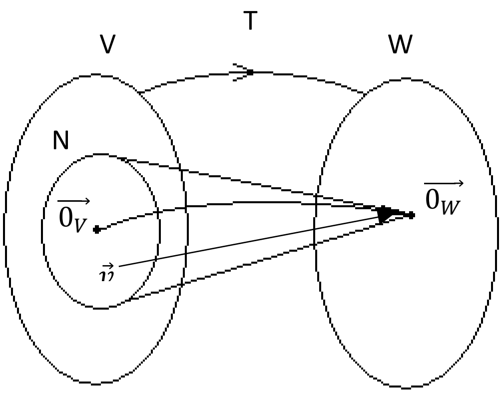
2- Hallar núcleo e Imagen de T:V→W

<u>Núcleo o Kernel de una T.L.</u>:

El Núcleo o Kernel de una T.L. definida entre dos espacios vectoriales V y W, es el conjunto de los vectores del dominio V (o primer espacio vectorial) que tienen como imagen al vector nulo del segundo espacio vectorial W.

Imagen: T:V→W

$$\mathbf{Im_T} = \{\vec{\mathbf{w}} \in \mathbf{w} \ / \mathbf{w} = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{v}}); \mathbf{v} \in \mathbf{v}\}$$



3-

$N_T \subseteq V$ (El núcleo de T está incluido ampliamente en V)

Núcleo: $N_T = \{\vec{v} \in V \ / \ T(\vec{v}) = \overrightarrow{0_w}\}$

a) $T: R^2 \rightarrow R^2 / \ T(x;y) = (2x; x-y)$

$\mathbf{T(x,y) = (0,0)}$ Buscamos los que tienen como imagen el vector nulo de R^2

$(2x; x-y) = (0{,}0)$

Resolviendo el sistema de ecuaciones homogéneas hallamos el núcleo

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

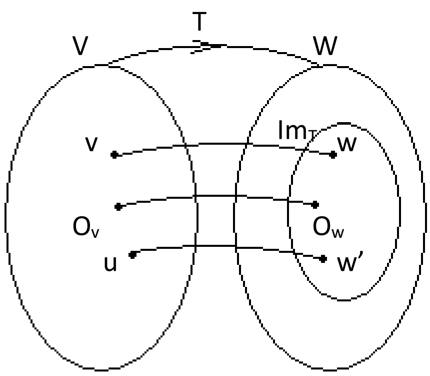
De la primera ecuación: x=0

De la segunda ecuación: y=x por lo que y=0 entonces $N_T = \{(0,0)\}$

<u>Conjunto Imagen de una T.L.</u>:

Sea T: V→W una T.L.

Se llama conjunto Imagen de T al conjunto de vectores del segundo espacio vectorial (W) que son imagen por T de algún vector del primer espacio vectorial V.



$T: R^2 \rightarrow R^2 /\ T(x; y) = (2x; x - y)$

$\mathbf{T(x,y) = (a,b)} \in R^2$ (Segundo espacio vectorial de T)

$(2x: x - y) = (a,b)$

$$\begin{cases} 2x = a \\ x - y = b \end{cases}$$

2	0	a
1	-1	b
2	0	a
0	-2	$2b - a$

Rg A=2
Rg A'=2
N° incognitas = 2
Sistema compatible determinado para cualquier valor de a y b.

Como el sistema de ecuaciones lineales tiene solución para todos los pares (a,b) de R^2 el conjunto imagen esR^2

$Im_T = R^2$

b) $T: R^2 \rightarrow R^3 /\ T(x; y) = (x + 3y; 2x - 3y; 5x - y)$

Núcleo:

$T(x,y) = (0,0,0)$ *vector nulo de* R^3

$(x + 3y; 2x - 3y; 5x - y) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 5x - y = 0 \end{cases}$$

1	3	0
2	-3	0
5	-1	0
1	3	0
0	-9	0
0	-16	0
1	3	0
0	-9	0
0	0	0

Rg A = Rg A' = N° incógnitas. Por lo tanto, Sistema compatible determinado

Solución única, $N_T = \{(0,0)\}$

Imagen:

$\mathbf{T(x,y) = (a,b,c) \in R^3}$

$$\begin{cases} x+3y=a \\ 2x-3y=b \\ 5x-y=c \end{cases}$$

1	3	a
2	-3	b
5	-1	c
1	3	a
0	-9	$b-2a$
0	-16	$c-5a$
1	3	a
0	-9	$b-2a$
0	0	$13\,a+16b-9c$

-9(c-5 a)+16(b-2 a)=

=-9c+45 a+16b – 32 a=

= 13 a+16b-9c

Este Sistema de Ecuaciones Lineales será compatible $\Leftrightarrow$ el rango de la matriz de los coeficientes (A) es igual al rango de la matriz ampliada (A´).
Dichos rangos serán iguales $\Leftrightarrow$ 13 a+16b-9c=0

Conjunto Imagen= { (a,b,c) ∈ R^3 / 13 a+16b-9c=0 }

c) T : R^3 ---> R^2; T [(x, y, z)] = (x + 2y, 0)

Núcleo:

T [(x, y, z)] = (0 , 0)

(x+2y,0) =(0,0)

x+2y=0 $\Rightarrow$ x= - 2y

N={ (x,y,z) ∈ $\mathbf{R}^3$ / x= -2y}

Conjunto Imagen:

Imagen: T : R^3 ---> R^2

$\mathbf{Im_T = \{(a,b) \in \boldsymbol{R^2} \ / \ (a,b) = T(x,y,z); (x,y,z) \in} R^3 \}$

T [(x, y, z)] = (a, b)

(x+2y, 0) =(a, b) $\Rightarrow \begin{cases} x+2y = a \in R \\ \quad 0 = b \end{cases} \Rightarrow$ $\mathbf{Im_T = \{(a,b) \in \boldsymbol{R^2} \ / \ b = 0 \ \}}$

d) T: M_{23} ---> M_{32} ; T(A) = A^t

Núcleo: $N_T = \{A \in M_{23} \ \ T(A) = N(matriz\ nula) \in M_{32}\}$

$$A \in M_{23}, entonces\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$T\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{T}\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{12} = 0 \\ a_{13} = 0 \\ a_{21} = 0 \\ a_{22} = 0 \\ a_{23} = 0 \end{cases}$$

Núcleo: $N_T = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

Imagen: T: M_{23} ---> M_{32}

$\mathbf{Im_T} = \{B \in M_{32} \quad / \ \mathrm{B} = \mathrm{T(A)}, \mathrm{A} \ \in M_{23}\}$

$$\boldsymbol{T}\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Im_T} = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \in M_{32}\right\} = M_{32}$$

e) T : P_2 ---> P_2 ; T ($a_2x^2 + a_1x + a_0$) = ($a_2 + a_1$) x^2 + ($a_1 - a_0$) x.

Núcleo: $N_T = \{P(x) \in P_2 \ \ T(P(x)) = 0(polinomio\ nulo)\}$

$T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2+a_1)x^2 + (a_1 - a_0)x$

$T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 0x^2 + 0x + 0$

$(a_2+a_1)x^2 + (a_1 - a_0)x = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow \begin{cases} a_2 + a_1 = 0 \\ a_1 - a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -a_1 \\ a_0 = \ \ a_1 \end{cases}$

$N_T = \{P(x) = -a_1x^2 + a_1 x + a_1 \ con \ \ a_1 \in R\}$

Ejemplo: P(x) = $-2x^2 + 2x + 2 \in Núcleo$

Imagen: $T: P_2 \to P_2$

$\mathbf{Im_T} = \{P(x) \in P_2 \quad / \ \mathrm{P(x)} = \mathrm{T(P(x))}, \mathrm{P(x)} \ \in P_2\}$

$T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2+a_1)x^2 + (a_1 - a_0)x$

$(a_2+a_1)x^2 + (a_1 - a_0)x = ax^2 + bx + c$

$\begin{cases} a_2 + a_1 = a \\ a_1 - a_0 = b \\ 0 = c \end{cases} \Rightarrow \mathbf{Im_T} = \{ax^2 + \mathrm{bx}\}$

3) Sea { i, j, k} la base canónica de R^3 y T : R^3 ---> R^2 una T.L. tal que T(i) = (2,3), T(j)= (-1,4) y T(k) = (0, 2). Determine T [(1,2,3)] , T[(1, 1, 1)] , T [(-1, 3, -2)]

Al vector (1,2,3) lo podemos expresar como: i+2j+3k

T(1,2,3) = T(i+2j+3k) = T(i)+T(2j) + T(3k) = T(i) +2T(j) + 3T(k) por ser T una TL

T(1,2,3)= (2,3) + 2.(-1,4)+3(0,2)

T(1,2,3)= (2,3) +(-2,8)+(0,6) = (0, 17)

En forma análoga se halla T(1,1,1)= (1,9) y T(-1,3,-2)=(-5,5)

4) En los siguientes casos T: $R^2 \rightarrow R^3$ es una transformación lineal

a) T(1,2) = (-1,0,2) ; T(2,1) = (0,2,-1)
b) T(1,3) = (2,1,0) ; T(1,2) = (1,0,-1)
c) T(1,2) = (1,1,2) ; T(2,3) = (2,10,1)

Hallar, en cada caso, la transformación lineal y la imagen del vector (2,8)

<u>Teorema fundamental de las transformaciones lineales</u>

Sea T: $V_n \rightarrow W_m$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V_n y W_m.

Si B = { $\vec{v}_1$; $\vec{v}_2$;…; $\vec{v}_n$ } es una base de V_n, entonces T está determinada de manera única por los valores de T($\vec{v}_1$); T($\vec{v}_2$); …; T($\vec{v}_n$).

a)T(1,2) = (-1,0,2) ; T(2,1) = (0,2,-1)

B= {(1,2),(2,1)} es una Base de R^2 , conocemos las imágenes por T de estos vectores. Es posible hallar la Transformación Lineal T.

Para ello, en primer lugar, hallamos α y β , coordenadas de un vector genérico (x,y) de R^2 en la base B.

$$\alpha\binom{1}{2}+\beta\binom{2}{1}=\binom{x}{y} \Longrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta=x\\ 2\alpha+\beta=y\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=x\\ -3\beta=y-2x\end{cases}$$

1	2	x
2	1	y
1	2	x
0	-3	$y-2x$

$$\beta=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y$$

$$\alpha=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y$$

Entonces, como:

(x,y) = α(1,2) + β(2,1)

T(x,y) = T[α(1,2) + β(2,1)]

T(x,y)= α T(1,2) + β T(2,1) por ser T una TL

T(x,y) = = $\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right)$. T(1,2) +($\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y$).T(2,1)

T(x,y) = = $\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right).(-1{,}0{,}2)$ +($\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y$) .(0,2,-1)

T(x,y) = = $\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\ ,\ 0\ ,\ -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y\ \right)$ + (0 , $\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y,\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$)

T(x ,y) = = $\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\ ,\ \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y\ \ ,-\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}y\ \right)$

Verificamos:

T(1,2) : $\left(\frac{1}{3}.1 - \frac{2}{3}.2\ ,\ \frac{4}{3}.1 - \frac{2}{3}.2\ \ ,-\frac{4}{3}.1 + \frac{5}{3}.2\ \right)$ = (-1, 0, 2)

T(2,1) : $\left(\frac{1}{3}.2 - \frac{2}{3}.1\ ,\ \frac{4}{3}.2 - \frac{2}{3}.1\ \ ,-\frac{4}{3}.2 + \frac{5}{3}.1\ \right)$ = (0, 2, -1)

T(2,8) : $\left(\frac{1}{3}.2 - \frac{2}{3}.8\ ,\ \frac{4}{3}.2 - \frac{2}{3}.8\ \ ,-\frac{4}{3}.2 + \frac{5}{3}.8\ \right)$ = $\left(-\frac{14}{3}\ ,-\ \frac{8}{3}\ ,\frac{32}{3}\right)$

b) T(1,3) = (2,1,0) ; T(1,2) = (1,0,-1)

B= {(1,3),(1,2)} es una Base de R^2 , conocemos las imágenes por T de estos vectores. Es posible hallar la Transformación Lineal T.

Para ello, en primer lugar, hallamos α y β , coordenadas de un vector genérico (x,y) de R^2 en la base B.

$$\alpha\binom{1}{3} + \beta\binom{1}{2} = \binom{x}{y} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ 3\alpha + 2\beta = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -2x + y \\ \beta = 3x - y \end{cases}$$

Entonces, como:

(x,y) = $\alpha(1{,}3) + \beta(1{,}2)$

T(x,y) = T[$\alpha(1{,}3) + \beta(1{,}2)$]

T(x,y)= α T(1,3) + β T(1,2) por ser T una TL

T(x,y)= $(-2x + y)$ T(1,3) + $(3x - y)$ T(1,2)

T(x,y)= $(-2x + y)$ (2,1,0) + $(3x - y)$ (1,0,-1)

T(x,y)= ($-4x + 2y$, -2x+y, 0) + (3x-y,0,-3x+y)

T(x, y)= ($-x + y$, -2x+y, -3x+y)

Verificamos:

T(1,3) = (-1 + 3, -2.1+3, -3.1+3) = (2, 1, 0)

T(1,2) = (-1 + 2, -2.1+2, -3.1+2) = (1, 0, -1)

T(2,8) = (6, 4, 2)

c) T(1,2) = (1,1,2) ; T(2,3) = (2,10,1)

Con un procedimiento análogo a los dos puntos anteriores se llega la fórmula de la TL.

T(x, y)= (x, 17x-8y, -4x+3y)

5) Dada la transformación lineal : $\varphi: R^3 \to R^2$: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3\ ;\ x_2 + x_3)$

[v] = {1,1,1) (2,2,0) (3,0,0)} Base de R^3

[w] = {(2,0) (0,2)} Base de R^2

a) Hallar la matriz A de T.L. respecto de las bases.
b) Empleando la matriz A hallar la imagen del vector u = (2,2,-2)
c) Hallar la matriz B de la T.L. respecto de las bases canónicas en ambos espacios.

Matriz asociada a una transformación lineal para bases cualesquiera

Sea T: $V_n \to W_m$ una T.L.

$B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ base del espacio vectorial V_n de dimensión 'n';

$B_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ base del espacio vectorial W_m de dimensión 'm'.

Entonces existe y es única la matriz A de clase m×n tal que $\forall \vec{x} \in V_n : [T(\vec{x})]_{B_2} = A.[\vec{x}]_{B_1}$, donde las columnas de A son las coordenadas de las imágenes por T de los vectores $\vec{v}_i$ de la base B_1 de V_n en la base B_2.

Hallamos la imagen por φ de cada vector de la base [V], luego hallamos las coordenadas de dichas imágenes en la segunda base [W]

- $\varphi(1;1;1) = (1 + 2.1; 1 + 1) = (3;2)$

$k_1(2;0) + k_2(0;2) = (3;2)$

$\begin{cases} 2k_1 = 3 \\ 2k_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{3}{2} \\ k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

Estos serán los elementos de la primera columna de la matriz

De la TL: A_φ

- $\varphi(2;2;0) = (2 + 2.0; 2 + 0) = (2;2)$

$k_1(2;0) + k_2(0;2) = (2;2)$

$\begin{cases} 2k_1 = 2 \\ 2k_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

Estos serán los elementos de la segunda columna de la matriz

De la TL: A_φ

- $\varphi(3;0;0) = (3 + 2.0; 0 + 0) = (3;0)$

$k_1(2;0) + k_2(0;2) = (3;0)$

$\begin{cases} 2k_1 = 3 \\ 2k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{3}{2} \\ k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

Estos serán los elementos de la tercera columna de la matriz

De la TL: A_φ

➡ La matriz de la TL respecto de las Bases [V] y [W] es : $\boldsymbol{A_\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Empleando la matriz A hallar la imagen del vector u = (2,2,-2)

- Hallamos las coordenadas del vector $\vec{u}$ = (2,2,- 2) en la Base [V] de R^3

  K_1 (1,1,1) + k_2 (2,2,0) +k_3 (3,0,0)= (2,2,- 2)

  $\begin{cases} k_1 \quad +2k_2 \qquad 3k_3 = 2 \\ k_1 \quad +2k_2 \qquad\quad = 2 \\ k_1 \qquad\qquad\qquad = -2 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = 0 \end{cases}$ ➡

Éstas son las coordenadas del vector $\vec{u}$ en la Base [V]: $[\vec{u}]_{[V]}$

- Multiplicamos la matriz $\boldsymbol{A_\varphi}$ por $[\vec{u}]_{[V]}$, obtenemos así las coordenadas de la imagen del vector $\vec{u}$ en la base [W] (Base de R^2 , segundo Espacio Vectorial).

$$\boldsymbol{A_\varphi} \cdot [\vec{u}]_{[V]} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = [\boldsymbol{\varphi(\vec{u})}]_{[W]}$$

- Para hallar $\varphi(\vec{u})$:

  -1(2,0)+0(0,2)=(-2,0)

  Podemos verificar hallando la imagen del vector aplicando la fórmula

  $\varphi: R^3 \to R^2 : \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3 ;\ x_{2} + x_3)$
  $\varphi(2,2,-2) = (2 + 2.(-2);\ 2 + (-2)) = (-2,0)$

c) Hallar la matriz B de la T.L. respecto de las **bases canónicas** en ambos espacios.

  $\varphi: R^3 \to R^2 : \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3 ;\ x_{2} + x_3)$

  Base canónica o estándar de R^3 ={(1,0,0) , (0,1,0) , (0,0,1)} = { $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ }
  Base canónica o estándar de R^2 ={(1,0) , (0,1)} = { $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ }

- $\varphi(1;0;0) = (1 + 2.0; 0 + 0) = (1;0)$

k_1 (1;0) +k_2 (0;1)= (1;0)

$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 0 \end{cases}$ ➡

Estos serán los elementos de la primera columna de la matriz canónica de la TL: S_φ

- $\varphi(0;1;0) = (0 + 2.0; 1 + 0) = (0;1)$

$k_1(1;0) + k_2(0;1) = (0;1)$

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Estos serán los elementos de la segunda columna de la matriz

De la TL: S_φ

- $\varphi(0;0;1) = (0 + 2.1; 0 + 1) = (2;1)$

$k_1(1;0) + k_2(0;1) = (2;1)$

$$\begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Estos serán los elementos de la tercera columna de la matriz

De la TL: S_φ

$\Rightarrow$ La matriz Canónica de la TL es : $\boldsymbol{S_\varphi} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

6) Sea la transformación lineal T : R^2 ---> R^2 definida por T [(x,y)] = (3x + y, x - 4y), donde B = B' = {(1,3), (0,-2)}, base de R^2. Encuentre A_T (matriz asociada a la transformación relativa a las bases B y B')

T [(x, y)] = (3x + y, x - 4y)

B = {(1,3), (0,-2)}

B' = {(1,3), (0,-2)}

- $T(1;3) = (3.1 + 3; 1 - 4.3) = (6; -11)$

$k_1(1;3) + k_2(0;-2) = (6;-11)$

$$\begin{cases} k_1 = 6 \\ 3k_1 - 2k_2 = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 6 \\ k_2 = \frac{29}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

Estos serán los elementos de la primera columna de la matriz

de la TL: A_T

- $T(0;-2) = (3.0 - 2; 0 - 4.(-2)) = (-2; 8)$

$k_1(1;3) + k_2(0;-2) = (-2;8)$

$$\begin{cases} k_1 = -2 \\ 3k_1 - 2k_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow$$

Estos serán los elementos de la segunda columna de la matriz de la TL: A_T

$\Rightarrow$ La matriz de la TL respecto de las bases B y B´es : $\boldsymbol{A_T} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{\frac{29}{2}} & \mathbf{-7} \end{pmatrix}$

7) En los ejercicios que siguen, obtenga la matriz canónica S_T que represente a la transformación dada.

a) $T : R^2 \text{--->} R^2$; $T[(x, y)] = (x + y, y)$

b) $T : R^2 \text{--->} R^3$; $T[(x, y)] = (2x + y, y, x-y)$

c) $T : R^3 \text{--->} R^3$; $T[(x, y, z)] = (x-y + z, 2y + 4z, z)$

a) $T : R^2 \text{--->} R^2$; $T[(x, y)] = (x + y, y)$

Base canónica de R^2 = {(1,0), (0,1)}

T(1,0)=(1,0) $\Rightarrow$ $S_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

T(0,1)=(1,1)

b) $T : R^2 \text{--->} R^3$; $T[(x, y)] = (2x + y, y, x-y)$

Base canónica de R^2 = {(1,0), (0,1)}

T(1,0)=(2,0,1) $\Rightarrow$ $S_T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

T(0,1)=(1,1,-1)

c) $T : R^3 \text{--->} R^3$; $T[(x, y, z)] = (x-y + z, 2y + 4z, z)$

Base canónica o estándar de R^3 ={(1,0,0) , (0,1,0) , (0,0,1)}

T(1,0,0)= (1,0,0)

T(0,1,0)= (-1,2,0) $\Rightarrow$ $S_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

T(0,0,1)=(1,4,1)

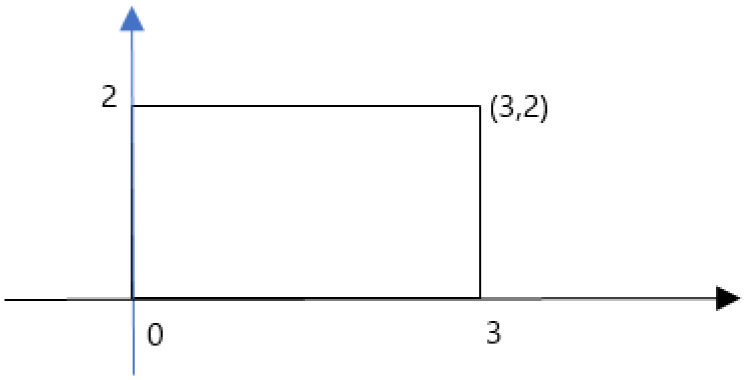
8) En los ejercicios que siguen se da la matriz canónica S_T. Encuentre el valor de la T.L. en el vector indicado.

a) $S_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ **; T [(2,8)] = ?** **b)** $S_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **; T[(-1, 2)] = ?**

a) T(2,8)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \end{pmatrix}$

b) T(-1,2)= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

9) Dado el siguiente rectángulo:



Calcular y representar gráficamente las modificaciones que se efectúan en el mismo cuadro cuando se aplican las transformaciones dadas por las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

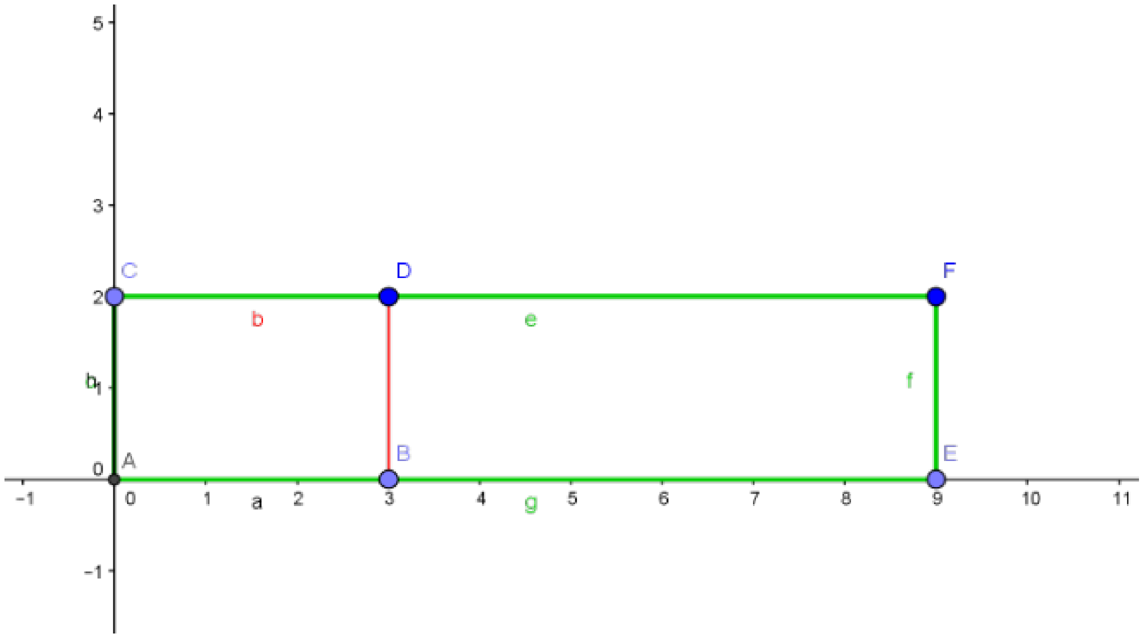
e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a)

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

GRÁFICO



b)

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

GRÁFICO