

Universidad Tecnologica Nacional  
Facultad Regional Resistencia

***ANALISIS MATEMATICO I***

Teoría y Guía de trabajos Prácticos

2020

## UNIDAD TEMÁTICA I: Conjuntos. Números Reales. Recta real

### Conceptos importantes

Llamamos conjunto a toda pluralidad, cada uno de cuyos objetos es un elemento del conjunto, y diremos que un **conjunto** está **definido** o determinado cuando establecido un convenio cualquiera no contradictorio, podemos saber si un elemento dado pertenece o no al conjunto, el cual está formado por todos los objetos que cumplan el convenio.

Un **conjunto** es **finito** si se puede ordenar de manera tal que tenga un primer elemento al que no preceda ninguno, y un último elemento al que no siga ninguno.

Los **conjuntos** que carecen de primer y/o último elemento se llaman **infinitos**.

En este curso trabajaremos con el conjunto de números reales R.

### Presentando a los números reales

*Los números reales (denotados por R) son el conjunto de números creados por el hombre para poder transmitir mediante un lenguaje unificado distintas cantidades, expresadas por una serie de símbolos y 10 dígitos, lo que ha otorgado a la sociedad la capacidad de medición y exactitud con que cuenta y se rige hoy en día.*

Veamos de qué manera se conforman los **números reales (R)**:

Los números 1, 2, 3, etc, se denominan **números naturales (N)**. Si sumamos o multiplicamos dos números naturales cualesquiera, el resultado siempre es un número natural, como podemos ver en los ejemplos:

$$2 + 4 = 6 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 4 = 8 \quad \text{en ambos casos los resultados son números naturales.}$$

En cambio, si restamos o dividimos dos números naturales, el resultado no siempre es un número natural.

Por ejemplo,  $6 - 2 = 4$  es natural pero  $2 - 6$  no es natural,

Al igual que en  $12 : 3 = 4$  es natural pero  $3 : 12$  no lo es.

Así, dentro del conjunto de números naturales, siempre podemos sumar y multiplicar, pero no siempre podemos restar o dividir.

Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales, por lo que se dice que N es un conjunto **discreto**

Con la finalidad de superar la limitación de la sustracción, extendemos el conjunto de los números naturales al conjunto de los **números enteros (Z)**. Los enteros incluyen los números naturales, los negativos de cada número natural y el número cero (0). De este modo, podemos representar el conjunto de los enteros mediante

$$\dots - 3, -2, -1, -0, 1, 2, 3, \dots$$

Es claro que los números naturales también son enteros. Si sumamos, multiplicamos o restamos dos enteros cualesquiera, el resultado también es un entero.

Por ejemplo:  $-3 + 8 = 5$ ,  $(-3) \cdot (5) = 15$  y  $3 - 8 = -5$  en todos los casos sus resultados son enteros.

Pero aún no podemos dividir un entero entre otro y obtener un entero como resultado.

Por ejemplo, vemos que:  $8:4=2$  es un entero, pero  $8 : 3$  no lo es.

Por tanto, dentro del conjunto de los enteros, podemos sumar, multiplicar y restar pero no siempre podemos dividir.

Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros, por lo que se dice que  $\mathbb{Z}$  es un **conjunto discreto**

Para superar la limitación de la división, extendemos el conjunto de los enteros al conjunto de los **números racionales ( $\mathbb{Q}$ )**. Este conjunto consiste de todas las fracciones  $\frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros con  $b \neq 0$ .

Un número es racional si podemos expresarlo como la razón de dos enteros con denominador distinto de cero.  $-\frac{8}{3}, \frac{5}{7}, \frac{0}{3}, \frac{6}{1} = 6$  son ejemplos de números racionales.

Podemos sumar, multiplicar, restar y dividir cualesquiera dos números racionales (exceptuando la división por cero) y el resultado siempre es un número racional. De esta manera las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética: adición, multiplicación, sustracción y división son posibles dentro del sistema de los números racionales.

Cuando un número racional se expresa como un decimal, los decimales terminan o presentan un patrón que se repite indefinidamente.

Por ejemplo:  $\frac{1}{4} = 0,25$  y  $\frac{93}{80} = 1,1625$  . tienen una cantidad finita de cifras decimales.

Mientras que  $\frac{1}{6} = 0,16666 \dots$  o  $\frac{4}{7} = 0,5714285714285 \dots$  , corresponden a decimales en que alguna cifra de la parte decimal se repite periódicamente.

De esta manera podemos afirmar que todos los números racionales, son aquellos que pueden expresarse como la razón entre dos números enteros.

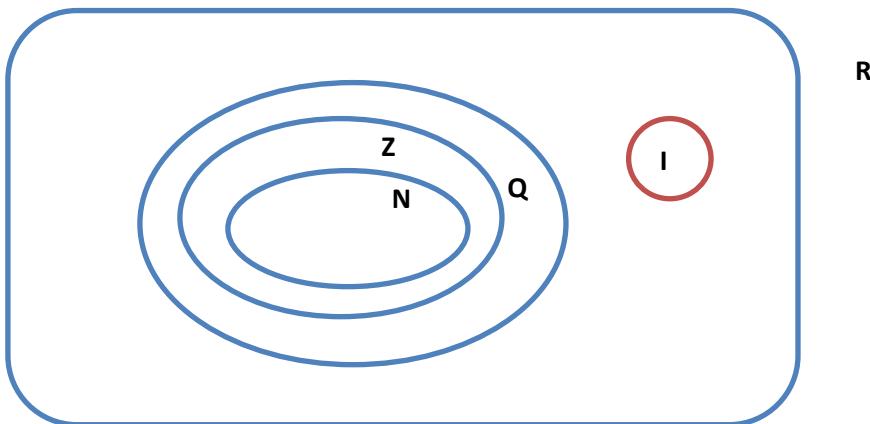
También existen algunos números de uso común que no son racionales (es decir, que no pueden expresarse como la razón de dos enteros). Por ejemplo,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$  y no son números racionales.

Tales números se denominan **números irracionales ( $\mathbb{I}$ )**. La diferencia esencial entre los números racionales y los irracionales se advierte en sus expresiones decimales. Cuando un número irracional se presenta por medio de decimales, los decimales continúan indefinidamente sin presentar ninguna cifra repetitiva. Por ejemplo, con diez cifras decimales  $\sqrt{2} = 1.4142135623\dots$  No importa con cuántos decimales expresemos estos números, nunca presentarán un patrón repetitivo, en contraste con los patrones que ocurren en el caso de los números racionales.

El término **número real ( $\mathbb{R}$ )** se utiliza para indicar un número que es racional o irracional. El conjunto de los números reales consta de todas las posibles expresiones decimales. Aquellos decimales que terminan o se

repiten corresponden a los números racionales, mientras que los restantes corresponden a los números irracionales.

El siguiente esquema muestra de qué manera se conforma el conjunto de los números reales:



### Propiedades de los números reales

A continuación enumeraremos las propiedades básicas de dos operaciones definidas en  $R$ , como son la suma y el producto, y partimos de ellas ya que será sencillo deducir las propiedades de otras operaciones, a partir de ellas.

*Si  $x, y \in R$ , indicaremos la suma con  $x + y$  y el producto con  $x \cdot y$ . Estas operaciones son cerradas, es decir, el resultado pertenece a  $R$ .*

➤ **Propiedades algebraicas**

1. Propiedad Asociativa:

$$x + (y + z) = (x + y) + z , \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in R$$

2. Propiedad Comutativa:

$$x + y = y + x , \quad x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in R$$

3. Existencia del elemento neutro:

en la suma:  $\exists 0 \in R / 0 + x = x$    en el producto:  $\exists 1 \neq 0 \in R / 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in R$

4. Existencia del opuesto para la suma:  $\forall x \in R: \exists (-x) \in R / x + (-x) = 0$

5. Existencia del recíproco para el producto:  $\forall x \neq 0 \in R: \exists x^{-1} \in R / x \cdot x^{-1} = 1$

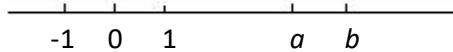
6. Distributiva del producto respecto de la suma:  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in R$

### Puntos y números

Existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta. Esta correspondencia nos autoriza a considerar como sinónimos las palabras punto y número, y podemos hablar de distancia entre dos números y las relaciones aritméticas se podrán expresar en lenguaje geométrico y viceversa.

### Representación en la recta numérica

Sobre una recta elegimos un punto para representar el cero (0) y otro punto a la derecha para representar el uno (1) con lo que se considera determinada la escala (segmento unidad). Los números positivos ( $R^+$ ) están a la derecha del cero y los negativos ( $R^-$ ) la izquierda.

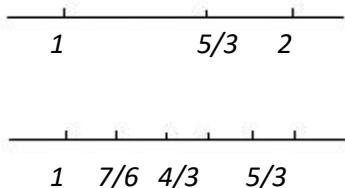


A cada número real corresponde un solo punto de la recta y a cada punto de la recta un solo número real. Designaremos a esta recta: **recta real o eje real**. Decimos simplemente “el punto  $x_0$ ” en lugar de “el punto correspondiente al n° real  $x_0$ ”.

Interpretación geométrica: Según el lugar que un n° ocupa en la recta numérica, podemos establecer una relación de orden. Si el punto  $a$  está a la izquierda del punto  $b$ , decimos que  $a$  es menor que  $b$  y se simboliza  $a < b$ .

Con  $a < b$ , un punto satisface las desigualdades  $a < x < b$  si y solo si  $x$  está entre  $a$  y  $b$ .

- **Propiedades de densidad:** Entre dos números reales existe siempre un número racional, lo que se expresa diciendo que  **$Q$  es denso en  $R$** .



A cada número racional le corresponde uno y solo un punto de la recta y podemos observar que entre dos racionales existen infinitos números racionales.

Sin embargo no todos los puntos de las rectas están relacionados con un n° racional, es el conjunto de los irracionales quien completa la relación biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales. Decimos entonces que el conjunto  $R$  es **continuo**. Para todo  $a < b$ , si y solo si existe un punto  $x$  que satisface las desigualdades  $a < x < b$ , es decir  $x$  está entre  $a$  y  $b$ .

En  $R$  se establece una relación de orden  $x \leq y$  (se lee  $x$  es menor o igual que  $y$ ) o  $x \geq y$  (se lee  $x$  es mayor o igual que  $y$ )

- **Propiedades de orden :** sean  $a, b, c \in R$

1. Ley de tricotomía:  $a < b$  o  $a = b$  o  $a > b$ , se verifica exactamente uno y solo uno de ellos.
2. Propiedad transitiva: Si  $a < b$  e  $b < c$ , entonces  $a < c$
3.  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , equivale a decir  $x = y$
4. Si es  $x \leq y$  entonces  $x + z \leq y + z$
5. Si  $x < y$ ,  $z > 0$  entonces  $x.z < y.z$
6. Si  $x < y$ ,  $z < 0$  entonces  $x.z > y.z$

**Actividad Nº 1:** Aplicando las propiedades verifica la ley de tricotomía en las siguientes desigualdades:

$$a) -2x + 7 > 3x + 5$$

$$b) -2x + 7 = 3x + 5$$

$$c) -2x + 7 < 3x + 5$$

### Resumiendo...

Los números reales es un campo, donde la suma y la multiplicación entre ellos tienen propiedades algebraicas, como las tienen la suma y la multiplicación de los racionales. Cuando se dice que el campo de los reales es ordenado, lo que quiere decir que en este existe el concepto de desigualdad con todas las propiedades antes expuestas. Sin embargo, los reales tienen la ventaja sobre los racionales de que son suficientes para asignarlos a todos los puntos de la recta infinita. A cada punto de la recta infinita, le queda asignado un número real y no hay reales que no sean asignados; en esta asignación se agotan, simultáneamente, puntos y reales. La recta interpretada así, la llamaremos **recta real**. Entonces, la recta real es una recta física ideal que tiene asignado un número real a cada uno de sus puntos. Los reales "cubren" toda la recta. Debido a que esta es un objeto físico idealmente continuo, diremos que los reales son un sistema continuo de números. Por lo que se define, finalmente a los nº Reales como:

*El sistema de los números reales es un campo ordenado continuo.*

### INTERVALOS

**Intervalos limitados:** Si  $a$  y  $b$  son números reales, tal que  $a < b$ , podemos definir los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}$ :

- **Intervalo cerrado:** es el conjunto de números reales  $x$  tales que  $a \leq x \leq b$ , y se indica:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

Su representación gráfica en un eje sería:



- **Intervalo abierto:** es el conjunto de números reales  $x$  tales que  $a < x < b$ , y se indica:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

Su representación gráfica en un eje sería:



- **Intervalo semiabierto o semicerrado:**

**Semicerrado a izquierda o semiabierto a derecha:** es el conjunto de números reales  $x$  tales que  $a \leq x < b$ , y se indica:  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

Su representación gráfica en un eje sería:



**Semicerrado a derecha o semiabierto a izquierda:** es el conjunto de números reales  $x$  tales que  $a < x \leq b$ , y se indica:

$$(a, b] = \{x \in R / a < x \leq b\}$$

Su representación gráfica en un eje sería:



**Los números reales  $a$  y  $b$  se denominan extremos,  $a$  (inferior) y  $b$  (superior). Dependrá de que pertenezcan o no al conjunto para que el intervalo sea cerrado o abierto respectivamente.**

Amplitud: se denomina al número positivo que resulta de hacer  $b - a$ .

Punto medio: es el número que resulta de hacer  $\frac{a+b}{2}$

**Intervalos no limitados:** Si  $a$  y  $b$  son números reales, podemos definir los siguientes subconjuntos de  $R$ :

- **Intervalo cerrado en  $a$ :** es el conjunto de números reales  $x$  tales que  $a \leq x$ , y se indica:

$$[a, +\infty) = \{x \in R / x \geq a\}$$

Su representación gráfica es una semirrecta de origen  $a$ , formada por todos los valores mayores o iguales que  $a$ :



*Aclaración: los símbolos  $+\infty$  (infinito positivo) o  $-\infty$  (infinito negativo) no son números reales y en el extremo en los que aparecen deben ser siempre abiertos.*

- **Intervalo abierto en  $a$ :** es el conjunto de números reales  $x$  tales que  $a < x$ , y se indica:

$$(a, +\infty) = \{x \in R / x > a\}$$

Su representación gráfica es una semirrecta de origen  $a$ , formada por todos los valores mayores que  $a$  y *no contiene al origen*:



- **Intervalo cerrado en  $b$ :** es el conjunto de números reales  $x$  tales que  $x \leq b$ , y se indica:

$$(-\infty, b] = \{x \in R / x \leq b\}$$

Su representación gráfica es una semirrecta de origen  $b$ , formada por todos los valores menores o iguales que  $b$ :



- **Intervalo abierto en  $b$ :** es el conjunto de números reales  $x$  tales que  $x < b$ , y se indica:

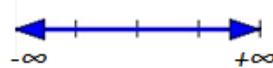
$$(-\infty, b) = \{x \in R / x < b\}$$

Su representación gráfica es una semirrecta de origen  $b$ , formada por todos los valores menores que  $b$  y *no contiene al origen*:



- **Intervalo infinito:** es el conjunto de números reales  $x$  tales que  $-\infty < x < \infty$ , y se indica:  
 $(-\infty, +\infty) = \{x \in R / -\infty < x < \infty\}$

Su representación gráfica es toda la recta numérica:



### Cotas, Extremos y Elementos

- Sea  $A$  un subconjunto no vacío de  $R$  y  $k$  un número real que puede o no pertenecer a  $A$ . Decimos que  $k$  es una **cota superior** si no es superado por ningún elemento del conjunto  $A$ . Simbólicamente:  $k$  es cota superior de  $A \leftrightarrow \forall x: x \in A \rightarrow x \leq k$ .

Un conjunto que admite cota superior se dice **acotado superiormente**.

Por ejemplo: el conjunto  $R^-$  está acotado superiormente por  $R^+$

Un conjunto que tiene una cota superior, tiene infinitas cotas superiores. A la menor de las cotas superiores se la denomina **extremo superior o supremo** de  $A$ .

*Definición:  $s$  es extremo superior o supremo de un conjunto  $A$  si y solo si:*

$s$  es una cota superior de  $A$  y  $k$  es cualquier cota superior de  $A$ , entonces  $s \leq k$

Si  $s$  pertenece al conjunto  $A$  recibe el nombre de **máximo** del conjunto. Por ejemplo, 0 es el supremo de los  $R^-$  y el máximo de  $R_0^-$ .

- Sea  $A$  un subconjunto no vacío de  $R$  y  $h$  un número real que puede o no pertenecer a  $A$ . Decimos que  $h$  es una **cota inferior** de  $A$  si y solo no supera a ningún elemento de  $A$ .

Simbólicamente:  $h$  es cota inferior de  $A \leftrightarrow \forall x: x \in A \rightarrow x \geq h$ .

Un conjunto que admite cota inferior se dice **acotado inferiormente**.

Por ejemplo: el conjunto  $R^+$  está acotado superiormente por  $R^-$

Un conjunto que tiene una cota inferior, tiene infinitas cotas inferiores. A la mayor de las cotas inferiores se la denomina **extremo inferior o ínfimo** de  $A$ .

*Definición:  $i$  es extremo inferior o ínfimo de un conjunto  $A$  si y solo si:*

$i$  es una cota inferior de  $A$  y  $h$  es cualquier cota inferior de  $A$ , entonces  $i \geq h$

Si  $i$  pertenece al conjunto  $A$  recibe el nombre de **mínimo** del conjunto. Por ejemplo, 0 es el ínfimo de los  $R^+$  y el mínimo de  $R_0^+$ .

### Axioma de completitud

- Todo subconjunto A no vacío de R, acotado superiormente, posee extremo superior o supremo.
- Todo subconjunto A no vacío de R, acotado inferiormente, posee extremo inferior o ínfimo.

### Inecuaciones

**Actividad Nº 2:** Dadas las inecuaciones:

$$\begin{array}{llll}
 a) 2 + 3x \leq 5x + 8 & b) 2x - 3 < 5x + 3 < 2x + 3 & c) 18x - 3x^2 > 0 & d) x^2 + 7x + 12 < 0 \\
 e) \frac{3x-1}{2+x} > 3 & f) \frac{4x}{x-5} \leq 2 & g) (x+1)^2(x-3) > 0 & h) \frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \\
 j) x^2 - 5x + 9 > x & k) x^3(x+3)^2(x-2) < 0 & l) x^2 \leq x & m) x^3 \leq x
 \end{array}$$

i) Halla los valores que las verifican.

ii) Grafica el conjunto solución.

iii) Halla, si existen, cotas, supremo, ínfimo, elemento máximo y elemento mínimo.

### VALOR ABSOLUTO

El **valor absoluto** desempeña un papel muy importante en el cálculo diferencial; por ejemplo, nos permite cuantificar la proximidad que pueden tener dos números, la cual llamaremos distancia entre los números. La noción de distancia entre números es la base para hablar de límites, lo cual, a su vez, es fundamental para el importantísimo concepto de derivada.

El valor absoluto de un número real  $x$ , positivo o negativo, es el número desprovisto de su signo; en términos precisos, lo definimos como sigue.

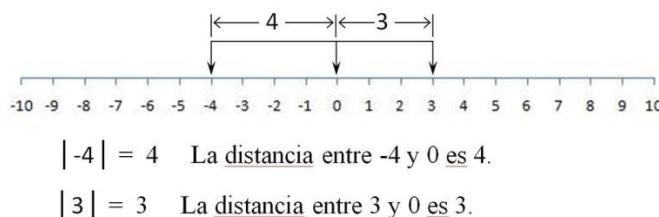
#### Definición

Se llama valor absoluto o módulo de un número real, al mismo número si es positivo o cero, y a su opuesto si es negativo. Por lo tanto el módulo de un nº real es siempre un nº no negativo.

Es decir:  $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Por ejemplo:  $|5| = 5$      $|-3,1| = 3,1$

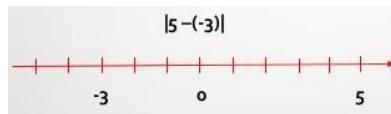
La distancia (no negativa) en la recta real entre el cero y el número real  $a$  es el *valor absoluto de a*, se escribe  $|a|$



**Definición:** Se llama **distancia** entre los reales  $x$  e  $y$  al número real no negativo:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Ejemplo: la distancia entre 5 y -3 es:  $|5 - (-3)| = |-3 - 5| = 8$



### Propiedades:

El valor absoluto tiene las siguientes propiedades:

1. Para todo real  $x$  se tiene  $|x| \geq 0$ . Además,  $|0| = 0$  y  $x = 0$  es el único real  $x$  que cumple  $|x| = 0$ , es decir  $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$
2. Para todo real  $x$ , se tiene  $|x| = |-x|$
3. Para cualesquiera reales  $x, y$ , se tiene  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
4. Para cualesquiera reales  $x, y$ , se tiene  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ , con  $y \neq 0$
5. Para cualesquiera reales  $x, y$ , se cumple la desigualdad  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , conocida como **desigualdad triangular**.
6. Para todo real  $x$ , se cumple la desigualdad  $|x| < k \leftrightarrow -k < x < k, \forall k > 0$
7. Para todo real  $x$ , se cumple la desigualdad  $|x| > k \leftrightarrow x > k \text{ v } x < -k, \forall k > 0$

### Observación:

Existen tres propiedades de los números reales que son de mucha utilidad al momento de resolver inecuaciones:

- $\sqrt[n]{x^n} = x$ , si  $x$  es un  $n^{\circ}$  natural. Pero ¿qué pasa cuando  $\sqrt{(-2)^2}$ ? Entonces se considera que  $\sqrt[n]{x^n} = |x|, \forall x \in R$
- como  $\begin{cases} a^2 = |a|^2 \\ b^2 = |b|^2 \end{cases}$  entonces  $|a|^2 < |b|^2 \rightarrow a^2 < b^2, \forall a, b \in R$
- como  $\begin{cases} a^2 = |a|^2 \\ b^2 = |b|^2 \end{cases}$  entonces  $|a|^2 > |b|^2 \rightarrow a^2 > b^2, \forall a, b \in R$

**Actividad Nº 3:** Determina, en cada caso, el conjunto solución:

a)  $|2x - 5| = 7$       b)  $|x + 2| < 6$       c)  $3 < |x - 5| \leq 7$

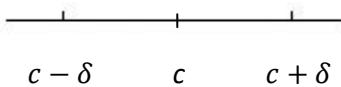
### ENTORNO. ENTORNO REDUCIDO

Reiteradamente hablaremos de intervalo de centro  $c$  y radio  $\delta$  o *entorno de  $c$*  para indicar los  $x$  que se encuentran a una distancia de  $c$  menos que  $\delta$ , esto resulta ser un intervalo  $(c - \delta; c + \delta)$  y de *entorno reducido de  $c$*  cuando se deseé excluir el punto  $c$  del intervalo, es decir, cuando se trate de la unión de dos intervalos  $(c - \delta; c) \cup (c; c + \delta)$

### Definición:

Dado un punto  $c$  interior del intervalo abierto  $(a, b)$ , se llama **entorno** del punto  $c$  de semiamplitud  $\delta$ , se lo expresa  $E(c, \delta)$ , al conjunto de puntos que verifican la siguiente desigualdad:

$c - \delta < x < c + \delta$ , donde  $\delta$  es un número positivo arbitrariamente pequeño.



Dado un entorno en que el centro no pertenece al conjunto se denomina **entorno reducido** del punto  $c$  de semiamplitud  $\delta$ , se lo expresa  $E'(c, \delta)$ , al conjunto de puntos que verifican:

$E'(c, \delta) = \{x \in R / c - \delta < x < c + \delta \text{ y } x \neq c\}$ , donde  $\delta$  es un número positivo arbitrariamente pequeño.

Otra manera de definir, mediante el uso de valor absoluto, aplicando la definición de distancia.

Podemos entonces expresar el entorno del punto  $c$  como  $|x - c| < \delta$  y el entorno reducido como  $0 < |x - c| < \delta$

En símbolos:

Entorno:  $E(c, \delta) = \{x \in R / |x - c| < \delta\}$

Entorno reducido:  $E'(c, \delta) = \{x \in R / 0 < |x - c| < \delta\}$

### **Definiciones importantes:**

#### **Punto interior de un conjunto:**

Definición: Sean  $A \subseteq R$  y  $a \in A$ , al punto  $a$  lo llamaremos punto interior del conjunto  $A$  si y sólo si, existe al menos un intervalo abierto de centro  $a$  incluido en el conjunto  $A$ . (existe al menos un entorno de  $a$  en el conjunto  $A$ )

Simbólicamente:  $a$  es un punto interior de  $A \leftrightarrow a \in R \text{ y } \exists E(a) \subseteq A$ .

Por ejemplo: Sea  $A = \left(-2, \frac{1}{2}\right]$  el punto  $a = \frac{1}{2}$  no es punto interior porque no existe un  $\delta > 0$ , donde el  $E(\frac{1}{2}, \delta)$  esté totalmente incluido en el conjunto  $A$ .

#### **Punto de Acumulación:**

Definición: Sean  $A \subseteq R$  y  $a \in A$ , al punto  $a$  lo llamaremos punto de acumulación del conjunto  $A$  si y sólo si, todo intervalo abierto de centro  $a$  contiene por lo menos un elemento  $x \neq a$  en el conjunto  $A$ .

Simbólicamente:  $a$  es un punto de acumulación de  $A \leftrightarrow \forall E'(a): \exists x \in A \text{ y } x \in E'(a)$

Ejemplo.- Si  $A = [-1, 5]$  entonces 2 es un punto de acumulación de  $A$ , es decir: existe un entorno de 2 que tienen puntos de intersección con  $A$ .



Observación: El punto de acumulación  $a$  del conjunto A no es necesario que dicho punto sea elemento del conjunto A.

**Inecuaciones con valor absoluto**

**Actividad Nº 4:** Dadas las inecuaciones:

a)  $|x - 1| = 3$

b)  $\left| \frac{-6}{x+3} \right| < 2$

c)  $|x^2 + 2| > 6$

d)  $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| > 1$

e)  $0 < \left| \frac{x-3}{2} \right| < 2$

f)  $|x - 1| < |x + 1|$

- i. Halla los valores de  $x$  para los cuales se verifica cada expresión.
- ii. Grafica la solución.
- iii. Analiza si expresa algún entorno. De ser así calcula la amplitud e indica el centro y el radio.
- iv. Expresa el entorno analíticamente.



## TRABAJO PRÁCTICO N° 1: NÚMEROS REALES E INECUACIONES

*Lean la teoría que aparece a continuación y luego resuelvan los ejercicios planteados.*

El conjunto de los números reales está constituido por los conjuntos:

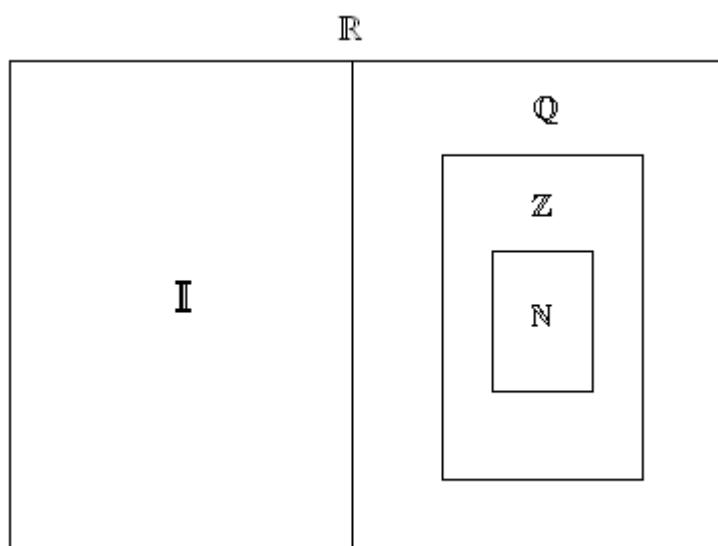
$\mathbb{N}$  Números naturales

$\mathbb{Z}$  Números enteros

$\mathbb{Q}$  Números racionales

$\mathbb{I}$  Números irracionales

A continuación se muestra, en un diagrama de Venn su composición:



Aquí podemos observar las siguientes características entre los reales y sus subconjuntos:

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R} , \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset , \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

**Nota:** El símbolo  $U$  indica la unión de 2 conjuntos,  $\cap$  indica la intersección (elementos en común) entre dos conjuntos y  $\subset$  indica que un conjunto está incluido en otro y pueden ser iguales. El símbolo  $\in$  que se utiliza a continuación se lee "Pertenece a..."

El conjunto de los números Reales tiene dos operaciones muy importantes: **Suma y producto**. Estas operaciones satisfacen las siguientes propiedades.

- i) Si  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces  $a+b \in \mathbb{R}$  (Propiedad de cierre de la suma)



- ii) Si  $a, b \in R$  entonces  $a+b=b+a$  (Propiedad conmutativa de la suma)
- iii) Si  $a, b, c \in R$  entonces  $(a+b)+c=a+(b+c)$  (Propiedad asociativa de la suma)
- iv) Existe un elemento  $0 \in R$  tal que  $a+0=0+a=a$  para todo  $a \in R$  (Propiedad Elemento neutro de la suma)
- v) Para cada elemento  $a \in R$ , hay un elemento  $-a \in R$  tal que;
  - i.  $a+(-a)=(-a)+a=0$ . (Propiedad del inverso aditivo)
- vi) Si  $a, b \in R$  entonces  $ab \in R$  (Propiedad cierre del producto)
- vii) Si  $a, b \in R$  entonces  $ab=ba \in R$  (Propiedad conmutativa del producto)
- viii) Si  $a, b, c \in R$  entonces  $(ab)c=a(bc)$  (Propiedad asociativa del producto)
- ix) Existe un elemento  $1 \in R$  tal que  $a1=1a=a$  para todo  $a \in R$  (Propiedad elemento neutro del producto)
- x) Para cada elemento  $a, a \neq 0$  hay un elemento  $\frac{1}{a}=a^{-1}$  tal que;  $a(a^{-1})=(a^{-1})a=1$ . (Propiedad del inverso multiplicativo)
- xi) Si  $a, b, c \in R$  entonces:  $a(b+c)=ab+ac$  y  $(a+b)c=ac+bc$  (Propiedad distributiva)

Existe un subconjunto no vacío  $R^+$  de números reales llamado el conjunto de los **números reales positivos** que satisfacen las siguientes propiedades:

- i) Si  $a$  y  $b$  pertenecen a  $R^+$  entonces  $a+b$  pertenece a  $R^+$
- ii) Si  $a$  y  $b$  pertenecen a  $R^+$  entonces  $ab$  pertenece a  $R^+$
- iii) Si  $a$  pertenece a  $R^+$  si  $a>0$

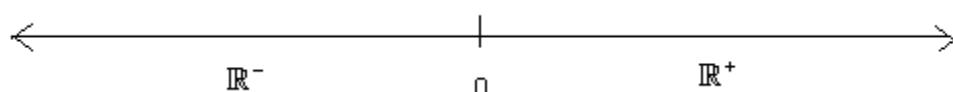
De igual manera existe un subconjunto no vacío  $R^-$  de números reales llamado el conjunto de los **números reales negativos** que satisfacen las siguientes propiedades:

- i) Si  $a$  y  $b$  pertenecen a  $R^-$  entonces  $a+b$  pertenece a  $R^-$
- ii) Si  $a$  y  $b$  pertenecen a  $R^-$  entonces  $ab$  pertenece a  $R^+$
- iii) Si  $a$  pertenece a  $R^-$  si  $a<0$

### DEFINICIÓN.

Si  $a$  pertenece a  $R^+$  o bien es cero, se dice que  $a$  es mayor o igual que cero y se escribe  $a \geq 0$ . Si  $a$  pertenece a  $R^-$  o bien es cero, se dice que  $a$  es menor o igual que cero y se escribe  $a \leq 0$ .

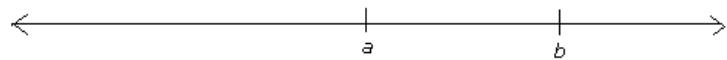
Gráficamente tenemos:



### DEFINICIÓN

Sean  $a$  y  $b$  números reales, entonces  $a < b$  ( $a$  es menor que  $b$ ) si  $b-a > 0$

Si  $a < b$  entonces  $a$  se ubica a la izquierda de  $b$  en la recta numérica



$$\boxed{a < b}$$

## DEFINICIÓN

Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales tales que:  $a < b$  y  $b < c$  entonces esta relación se puede comprimir escribiendo:  $a < b < c$

## PROPIEDADES DE ORDEN EN $\mathbb{R}$

- Si en una inecuación sumamos el mismo número real en ambos miembros, entonces la inecuación obtenida es equivalente a la inicial.

**Sea  $x < y$  entonces  $x + a < y + a$**

- Si en una inecuación multiplicamos por el mismo número real positivo en ambos miembros, entonces la inecuación obtenida es equivalente a la inicial.

**Sea  $x < y$ ,  $a > 0$ , entonces  $ax < ay$**

- Si en una inecuación multiplicamos por el mismo número real negativo en ambos miembros, entonces la inecuación se invierte.

**Sea  $x < y$ ,  $a < 0$ , entonces  $ax > ay$**

- Suponga que:  $0 < a < b$  entonces  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

- Suponga que:  $0 < a < b$  entonces  $a^2 < b^2$

- Si  $a < b$  y  $b < c$  entonces  $a < c$  (transitividad)**

## ACTIVIDAD 1:

- a) Expresa cada enunciado como una desigualdad:

i)  $x$  es menor que 7

ii) El cociente entre  $p$  y  $q$  es menor que 7

iii)  $w$  es mayor o igual que -4

iv)  $c$  está entre  $\frac{1}{5}$  y  $\frac{4}{3}$

v) El recíproco (inverso multiplicativo) de  $f$  es menor de 14

- b) Determina cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas, en caso contrario justifica:



- $\frac{ab+ac}{a} = b + ac$
- $\frac{ab+ac}{a} = ab+c$
- $(a-b)-c = a-(b-c)$
- $-(a+b) = -a+b$



## TRABAJO PRÁCTICO N° 2: NÚMEROS REALES E INECUACIONES

Lean la teoría que aparece a continuación y luego resuelvan los ejercicios planteados.

### INTERVALOS DE NÚMEROS REALES

Un intervalo es un conjunto infinito de números reales, a continuación estudiamos los tipos de intervalos.

#### 1. INTERVALO ABIERTO

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



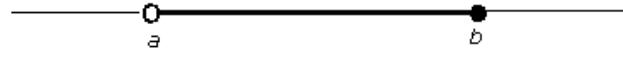
#### 2. INTERVALO CERRADO

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



#### 3. INTERVALOS SEMIABIERTOS

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

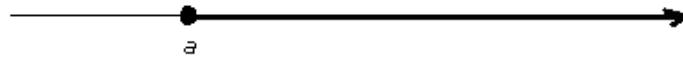


$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

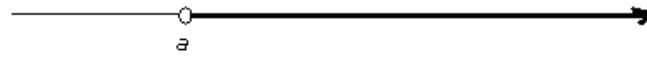


#### 4. INTERVALOS AL INFINITO

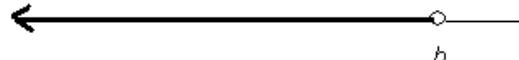
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$



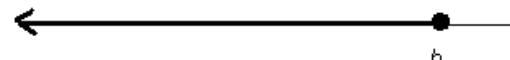
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$



$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$$



$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$$





## UNIÓN DE CONJUNTOS

Sean A , B dos conjuntos, entonces:  $A \cup B = \{x / x \in A, o, x \in B\}$ , en palabras: La unión de dos conjuntos consiste en formar un nuevo conjunto con todos los elementos de ambos conjuntos.

## INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

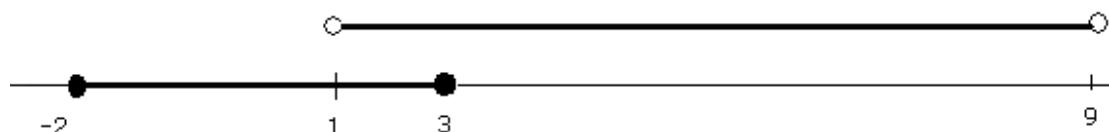
Sean A , B dos conjuntos, entonces:  $A \cap B = \{x / x \in A, y, x \in B\}$  en palabras: La intersección de dos conjuntos consiste en formar un nuevo conjunto con los elementos comunes, es decir, solo los elementos que pertenezcan simultáneamente a ambos conjuntos.

## UNIÓN E INTERSECCIÓN DE INTERVALOS

En la solución de inecuaciones debemos realizar uniones e intersecciones de intervalos. Veamos un ejemplo:

a) Dados los intervalos  $[-2,3]$  ,  $(1,9)$  realice su unión e intersección

$$[-2,3] \cup (1,9) = [-2,9] \quad [-2,3] \cap (1,9) = (1,3]$$



Nota: Obsérvese el número 1 solo pertenece a uno de los intervalos mientras que el número 3 pertenece a los dos conjuntos

## INECUACIONES DE NÚMEROS REALES

En diversos campos de la ciencia encontramos expresiones tales como:

$$x+5 < 3, 2x-5 \geq 0, x^2 - 1 \leq 0, \frac{x-2}{x} > 3, |2x-1| < 4$$

Estas expresiones se conocen con el nombre de **inecuaciones de números reales**

## PROPIEDADES DE LAS INECUACIONES

- Si en una inecuación sumamos el mismo número real en ambos miembros, entonces la inecuación obtenida es equivalente a la inicial.

**Sea  $x < y$  entonces  $x + a < y + a$**



2. Si en una inecuación multiplicamos por el mismo número real positivo en ambos miembros, entonces la inecuación obtenida es equivalente a la inicial.

**Sea  $x < y$ ,  $a > 0$ , entonces  $ax < ay$**

3. Si en una inecuación multiplicamos por el mismo número real negativo en ambos miembros, entonces la inecuación se invierte.

**Sea  $x < y$ ,  $a < 0$ , entonces  $ax > ay$**

4. Suponga que:  $0 < a < b$  entonces  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

5. Suponga que:  $0 < a < b$  entonces  $a^2 < b^2$

6. **Si  $a < b$  y  $b < c$  entonces  $a < c$  (transitividad)**

### SOLUCIÓN DE INECUACIONES DE TIPO LINEAL

1. Halle el conjunto solución de la inecuación:  $3x + 1 < 4$

$$3x + 1 - 1 < 4 - 1 \quad \text{propiedad 1 de inecuaciones}$$

$$3x + 0 < 3 \quad \text{propiedad del inverso aditivo}$$

$$3x < 3 \quad \text{propiedad modulativa de la suma}$$

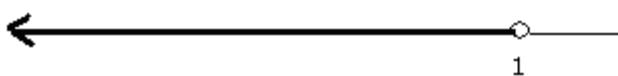
$$\frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(3) \quad \text{propiedad 2 de inecuaciones}$$

$$1x < \frac{3}{3} \quad \text{propiedad del inverso multiplicativo}$$

$$x < 1 \quad \text{propiedad modulativa del producto}$$

Aquí tenemos que la solución es el conjunto de números  $x$ , tales que  $x < 1$ , es decir, la solución es el intervalo  $(-\infty, 1)$ . Obsérvese que el intervalo es abierto en 1.

La gráfica correspondiente es:



2. Halle el conjunto solución de la inecuación:  $2x + 3 \geq -1$



$$\begin{aligned} 2x + 3 - 3 &\geq -3 - 1 && \text{propiedad 1 de inecuaciones} \\ 2x + 0 &\geq -4 && \text{propiedad del inverso aditivo} \\ 2x &\geq -4 && \text{propiedad modularativa de la suma} \\ \frac{1}{2}(2x) &\geq \frac{1}{2}(-4) && \text{propiedad 2 de inecuaciones} \\ 1x &\geq -\frac{4}{2} && \text{propiedad del inverso multiplicativo} \\ x &\geq -2 && \text{propiedad modularativa del producto} \end{aligned}$$

En este caso la solución es el conjunto de los números  $x$  tales que  $x \geq -2$ , es decir, la solución es el intervalo  $[-2, \infty)$ . Obsérvese que el intervalo es cerrado en  $-2$ .

La gráfica correspondiente es:

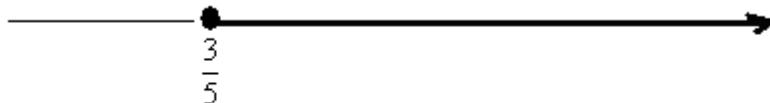


3. Halle el conjunto solución de la inecuación:  $-5x - 3 \leq -6$

$$\begin{aligned} -5x - 3 + 3 &\leq -6 + 3 && \text{propiedad 1 de inecuaciones} \\ -5x + 0 &\leq -6 + 3 && \text{propiedad del inverso aditivo} \\ -5x &\leq -3 && \text{propiedad modularativa de la suma} \\ (-1)(-5x) &\geq (-1)(-3) && \text{propiedad 3 de inecuaciones} \\ \left(\frac{1}{5}\right)5x &\geq \left(\frac{1}{5}\right)3 && \text{propiedad 2 de inecuaciones} \\ 1x &\geq \frac{3}{5} && \text{propiedad del inverso multiplicativo} \\ x &\geq \frac{3}{5} && \text{propiedad modularativa del producto} \end{aligned}$$

En este caso la solución es el conjunto de los números  $x$  tales que  $x \geq \frac{3}{5}$ , es decir, la solución es el intervalo  $[\frac{3}{5}, \infty)$ . Obsérvese que el intervalo es cerrado en  $\frac{3}{5}$ .

La gráfica correspondiente es:



**ACTIVIDADES**

1. Escribe los siguientes conjuntos en forma de intervalos y represéntalos gráficamente:

$$\begin{array}{ll} A = \{x \in \mathbb{R} / -7 < x < 6\} & B = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq 1\} \\ C = \{x \in \mathbb{R} / x > -2\} & D = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 5\} \end{array}$$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones, escribe el resultado como intervalo y represéntalos gráficamente:

$$a) 3x > 12$$

$$b) 3 - 5x > 5$$

$$c) -5 + 3x \leq 6x - 1$$

$$d) 3(2 - 3x) < 4(1 - 4x)$$

$$e) 4x - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}x$$

$$f) -6 < 3x + 3 \leq 10$$



## TRABAJO PRÁCTICO N° 3: INECUACIONES DE 2º GRADO

Para poder entender el mecanismo de resolución de inecuaciones de orden superior y de inecuaciones fraccionarias, es necesario que entiendan el siguiente razonamiento:

Si se multiplican dos números Reales, A y B, según la regla de los signos de la multiplicación se cumple lo siguiente:

A	B	A.B
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

Como podemos observar, hay dos posibilidades para que el resultado sea negativo y dos para que sea positivo.

Si en vez de utilizar el signo, usáramos desigualdades, sabiendo que para que un N° sea positivo deberá ser mayor a cero y negativo, menor a cero. Resulta:

A	B	A.B
$A > 0$	$B > 0$	$A.B > 0$
$A > 0$	$B < 0$	$A.B < 0$
$A < 0$	$B > 0$	$A.B < 0$
$A < 0$	$B < 0$	$A.B > 0$

- Para verificar que comprendiste, completa el  $\square$  con el signo que corresponda:

Si  $x > 0$  e  $y < 0$  entonces  $x.y \square 0$ , para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Si  $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x.y \square 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

Si  $x < 0 \wedge x.y > 0 \Rightarrow y \square 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

Si  $y \leq 0 \wedge x.y \leq 0 \Rightarrow x \square 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

Si  $y > 0 \wedge \frac{x}{y} < 0 \Rightarrow x \square 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

Si  $x \leq 0 \wedge \frac{x}{y} \leq 0 \Rightarrow y \square 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .



## Recordando conceptos anteriores....

### Solución de una inecuación

La **solución** de una inecuación es el valor o conjunto de valores que puede tomar la incógnita  $x$  para que se cumpla la desigualdad. A diferencia de las ecuaciones (cuyo signo es " $=$ "), no podemos saber de antemano el número de soluciones.

Puede darse el caso en que la solución sea sólo un punto (por ejemplo,  $x=2$ ), un intervalo (por ejemplo,  $x \in [0,2]$ ), una unión de intervalos o que *no exista* ninguna solución.

### Tipos de inecuaciones

**Inecuación lineal:** cuando las expresiones de ambos lados son polinomios de primer grado.

**Ejemplo:**  $x + 2 \leq 0$

La solución de esta inecuación es el intervalo  $(-\infty, -2]$ .

**Inecuación de segundo grado:** cuando las expresiones de ambos lados son polinomios de grado menor o igual que 2. **Ejemplo:**  $x^2 > x - 2$

**Otro ejemplo:**  $x^2 < -2$  Esta inecuación no tiene soluciones (reales) puesto que ningún número al cuadrado es negativo.

**Inecuación racional:** cuando las expresiones de uno o ambos lados son un cociente de polinomios.

**Ejemplo:**  $\frac{2}{x} \leq 0$

La solución de esta inecuación es  $x \in (-\infty, 0)$

**Inecuación con valor absoluto:** cuando en las expresiones algebraicas hay valores absolutos.

**Ejemplo:**  $|x| < 0$

Esta inecuación no tiene solución porque el módulo (valor absoluto) de un número es siempre mayor o igual que 0.

### Nota previa (recordar para resolver inecuaciones)

La metodología de resolución es análoga a la de las ecuaciones, pero teniendo siempre en cuenta que se trata de una desigualdad. Esto exige, **cambiar el sentido** de desigualdad cuando **multiplicamos o dividimos por un negativo** o cuando **elevamos a una potencia negativa** para mantener la relación.

**Ejemplo:** sea la inecuación  $2 \leq 3$

Para multiplicar por un negativo, por ejemplo,  $-2$ , cambiamos la desigualdad al resultado:

$$-2 \cdot 2 \geq -2 \cdot 3$$



$$-4 \geq -6$$

Notemos que si no la cambiamos, obtenemos una relación falsa ( $-4 \leq -6$ ).

**Intervalos:** en los intervalos utilizaremos los símbolos "(" y "[" para el extremo izquierdo y los símbolos ")" y "]" para el extremo derecho. Los paréntesis indican que el extremo no está incluido en el intervalo y los corchetes indican que sí está incluido.

Por ejemplo, el intervalo  $(2,3)$  no están incluidos en el intervalo los extremos, pero en  $[2,3]$  el 2 no está comprendido en el intervalo y el 3 si lo está. Sin embargo, el intervalo  $[2,3]$  ambos extremos pertenecen al conjunto.

## INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

**Ejemplo 1:** Resolver la siguiente inecuación:

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

**Solución:**

Primero calculamos los valores para los que se cumple la igualdad. Para ello, cambiamos la desigualdad por una igualdad. De este modo tendremos una ecuación de segundo grado cuyas raíces determinan los extremos de los intervalos de las soluciones de la inecuación:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 6/2 = 3 \\ -2/2 = -1 \end{cases}$$

Escribimos de manera factorizada la expresión cuadrática:

$$(x - 3)(x + 1) \geq 0$$

Si tenemos en cuenta la regla de los signos, y el cuadro que vimos al principio, resultará:

$(x - 3)$	$(x + 1)$	$(x - 3)(x + 1)$
$(x - 3) \geq 0$	$(x + 1) \geq 0$	$(x - 3)(x + 1) \geq 0$
$(x - 3) \geq 0$	$(x + 1) \leq 0$	$(x - 3)(x + 1) \leq 0$
$(x - 3) \leq 0$	$(x + 1) \geq 0$	$(x - 3)(x + 1) \leq 0$
$(x - 3) \leq 0$	$(x + 1) \leq 0$	$(x - 3)(x + 1) \geq 0$

Como podemos ver, existirán dos conjuntos que satisfacen la igualdad.

A continuación, resolveremos las inecuaciones y buscaremos la intersección para obtener los valores que verifican los signos que se buscan para cumplir con el del producto.

Llamaremos solución, **SA**, al conjunto que verifica:



$(x - 3) \geq 0$	$\wedge$	$(x + 1) \geq 0$
$x \geq 3$	$\wedge$	$x \geq -1$



Los puntos que verifican a ambas inecuaciones, se obtienen haciendo la intersección de los conjuntos, es la parte de la recta que se pinta de dos colores, y como el extremo está incluido en cada conjunto, resulta:

$$SA = [3, +\infty)$$

De igual manera, buscamos al otro conjunto que verifica la otra regla de signos:

Llamaremos solución, **SB**, al conjunto que verifica:

$(x - 3) \leq 0$	$\wedge$	$(x + 1) \leq 0$
$x \leq 3$	$\wedge$	$x \leq -1$



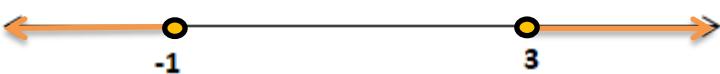
Los puntos que verifican a ambas inecuaciones, se obtienen haciendo la intersección de los conjuntos, es la parte de la recta que se pinta de dos colores, y como el extremo está incluido en cada conjunto, resulta:

$$SB = (-\infty, -1]$$

Como podemos observar, los conjuntos obtenidos, SA y SB, satisfacen con el signo del producto de factores de la inecuación, no poseen elementos en común, y ambos forman la solución final, es decir su Unión (**SA U SB**), es el conjunto solución.

Por lo tanto: **SF = SA U SB =  $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$**

Se representa gráficamente:



Comprobamos:



Escogemos un número al azar de cada intervalo (por ejemplo,  $x = -2$ ,  $x = 0$  y  $x = 4$ ) y comprobamos si para alguno de estos valores se cumple la inecuación. No importa cuál escogemos puesto que el signo de la inecuación se mantiene constante en cada intervalo.

$$-2 \rightarrow (-2)^2 - 2(-2) - 3 \geq 0 \rightarrow 4 + 4 - 3 = 5 \geq 0$$

$$0 \rightarrow (0)^2 - 2(0) - 3 \geq 0 \rightarrow -3 \geq 0$$

$$4 \rightarrow (4)^2 - 2(4) - 3 \geq 0 \rightarrow 16 - 8 - 3 = 5 \geq 0$$

Por tanto, la inecuación se verifica en dos de los intervalos:

$$x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

donde los corchetes indican que los extremos de los intervalos están incluidos (es en ellos donde se da la igualdad de la inecuación).

**Ejemplo 2:** Resolver la siguiente inecuación:

$$-2x^2 + 2x > -4$$

### Solución

Como lo primero que calculamos son los valores para los que se cumple la igualdad, deberemos aplicar propiedades para que quede igualado a cero.

$$-2x^2 + 2x + 4 = 0$$

De este modo tendremos una ecuación de segundo grado cuyas raíces determinan los extremos de los intervalos de las soluciones de la inecuación:

$$-2x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 4}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-4} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 2 \end{array} \right.$$

Escribimos de manera factorizada la expresión cuadrática, recordando de multiplicar el coeficiente principal (-2) a los factores:

$$-2 \cdot (x - 2)(x + 1) > 0$$

La manera más sencilla de hacer el análisis de los signos, y poder trabajar como lo hicimos en el ejemplo anterior, multiplicamos a ambos miembros por el opuesto del inverso multiplicativo del coeficiente, es decir, multiplicamos a ambos miembros por  $-\frac{1}{2}$ , recordando que al hacerlo el sentido de la desigualdad, cambia.



$$-2. \left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x+1) < 0. \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Resultando:

$$(x-2)(x+1) < 0$$

Si tenemos en cuenta la regla de los signos, y el cuadro que vimos al principio, resultará:

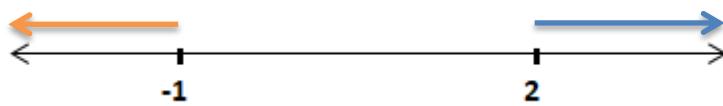
$(x-2)$	$(x+1)$	$(x-2)(x+1)$
$(x-2) > 0$	$(x+1) > 0$	$(x-2)(x+1) > 0$
$(x-2) > 0$	$(x+1) < 0$	$(x-2)(x+1) < 0$
$(x-2) < 0$	$(x+1) > 0$	$(x-2)(x+1) < 0$
$(x-2) < 0$	$(x+1) < 0$	$(x-2)(x+1) > 0$

Como podemos ver, existirán dos conjuntos que satisfacen la igualdad.

A continuación, resolveremos las inecuaciones y buscaremos la intersección para obtener los valores que verifican los signos que se buscan para cumplir con el del producto.

Llamaremos solución, **SA**, al conjunto que verifica:

$(x-2) > 0$	$\wedge$	$(x+1) < 0$
$x > 2$	$\wedge$	$x < -1$



Los puntos que verifican a ambas inecuaciones, se obtienen haciendo la intersección de los conjuntos, es la parte de la recta que se pinta de dos colores, como se ve en la recta, no hay elementos en común, por lo que se considera un conjunto vacío  $\emptyset$ :

$$SA = \emptyset$$

De igual manera, buscamos al otro conjunto que verifica la otra regla de signos:

Llamaremos solución, **SB**, al conjunto que verifica:

$(x-2) < 0$	$\wedge$	$(x+1) > 0$
$x < 2$	$\wedge$	$x > -1$





Los puntos que verifican a ambas inecuaciones, se obtienen haciendo la intersección de los conjuntos, es la parte de la recta que se pinta de dos colores, y como el extremo no está incluido en ningún conjunto, resulta:

$$SB = (-1,2)$$

Como podemos observar, los conjuntos obtenidos, SA y SB, satisfacen con el signo del producto de factores de la inecuación, no poseen elementos en común, y ambos forman la solución final, es decir su Unión (**SA U SB**), es el conjunto solución.

Por lo tanto: **SF = SA U SB =  $\emptyset \cup (-1,2) = (-1,2)$**

Se representa gráficamente:



Comprobamos:

Escogemos un número al azar de cada intervalo (por ejemplo,  $x=-2$ ,  $x=0$  y  $x=4$ ) y comprobamos si para alguno de estos valores se cumple la inecuación. No importa cuál escogemos puesto que el signo de la inecuación se mantiene constante en cada intervalo.

Por tanto, la inecuación se verifica en dos de los intervalos:

$$x \in (-1, 2)$$

donde los paréntesis indican que los extremos de los intervalos no están incluidos.

#### ACTIVIDAD:

Resuelve las siguientes inecuaciones, escribe el resultado como intervalo y represéntalos gráficamente.

a)  $x^2 + 5x > 3x - 1$

b)  $-3x^2 - 5x \leq -2$

c)  $x^2 < 3x + 4$

d)  $-x^2 - x > -2$

e)  $x^2 - 2x + 1 < 0$



## TRABAJO PRÁCTICO N° 4: INECUACIONES FRACCIONARIAS Y VALOR ABSOLUTO

*Lean la teoría que aparece a continuación y luego resuelvan los ejercicios planteados.*

### INECUACIONES FRACCIONARIAS

**Recordemos:** Para poder entender el mecanismo de resolución de inecuaciones fraccionarias, es necesario que entiendan el siguiente razonamiento:

Si se dividen dos números Reales, A y B, según la regla de los signos del cociente se cumple lo siguiente:

A	B	A:B
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

Como podemos observar, hay dos posibilidades para que el resultado sea negativo y dos para que sea positivo.

Si en vez de utilizar el signo, usaremos desigualdades, sabiendo que para que un número sea positivo deberá ser mayor que cero y negativo, menor que cero. Resulta:

A	B	A:B
$A > 0$	$B > 0$	$A:B > 0$
$A > 0$	$B < 0$	$A:B < 0$
$A < 0$	$B > 0$	$A:B < 0$
$A < 0$	$B < 0$	$A:B > 0$

A continuación lean atentamente los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 1:** determinar el conjunto solución de la inecuación racional  $\frac{x-2}{x+3} \geq 2$

#### Solución

Para resolver este tipo de inecuaciones lo que debemos hacer en primer lugar, es **comparar con cero** la expresión del 1º miembro, lo cual resulta sencillo, si restamos a ambos miembros el 2 ("pasando" el 2 al 1º miembro)

$$\frac{x-2}{x+3} - 2 \geq 0$$

Ahora que conseguimos comparar con cero, debemos **realizar la diferencia** que aparece en el primer miembro ¿por qué? Para expresar dicha diferencia como cociente y poder aplicar la regla de los signos:



1

2

3

$$\frac{x-2}{x+3} - 2 \geq 0 \rightarrow \frac{x-2 - 2(x+3)}{x+3} \geq 0 \rightarrow \frac{x-2 - 2x - 6}{x+3} \geq 0 \rightarrow \frac{-x-8}{x+3} \geq 0$$

Si observan la desigualdad que resultó, tenemos un cociente mayor o igual que cero, nos preguntamos **¿Qué signos deben tener numerador y denominador para que el cociente sea mayor o igual que cero?** Por lo tanto, según la regla de los signos, resulta:

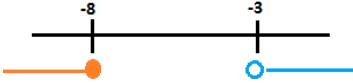
$$[-x-8 \geq 0 \wedge x+3 > 0] \vee [-x-8 \leq 0 \wedge x+3 < 0]$$

↓                          ↓

(se lee y)              (se lee o)

Observen en este caso, que la expresión del numerador puede ser **igual a cero**, pero la expresión del denominador **no, pues nunca debe ser cero** en un cociente.

Desde este momento, tal expresión no es desconocida para ustedes, se debe **hallar el conjunto solución** como lo han hecho para la inecuación de 2º:

$[-x-8 \geq 0 \wedge x+3 > 0]$ $-x \geq 8 \wedge x > -3$ Tener presente que se tiene $-x \geq 8 \rightarrow x \leq -8$ $x \leq -8 \wedge x > -3$  $\emptyset = \text{vacío}$	$[-x-8 \leq 0 \wedge x+3 < 0]$ $-x \leq 8 \wedge x < -3$ Tener presente que se tiene $-x \leq 8 \rightarrow x \geq -8$ $x \geq -8 \wedge x < -3$  $[-8; -3)$
--	---

$S_f = [-8; -3) \cup \emptyset = [-8; -3)$

**Ejemplo 2:** Determinar el conjunto solución de la inecuación racional:

$$\frac{x-2}{x+3} > -2$$

### Solución

Nuevamente por lo que dijimos antes, debemos **comparar con cero** la expresión del 1º miembro, lo cual resulta sencillo, "pasando" el -2 al 1º miembro:



$$\frac{x-2}{x+3} + 2 > 0$$

Ahora que conseguimos comparar con cero. Debemos **realizar la suma** que aparece en el primer miembro ¿por qué? Para expresar dicha suma como cociente y poder aplicar la regla de los signos:

1

2

3

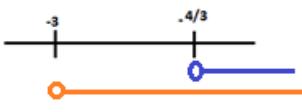
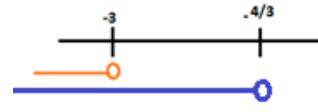
$$\frac{x-2}{x+3} + 2 > 0 \rightarrow \frac{x-2 + 2 \cdot (x+3)}{x+3} > 0 \rightarrow \frac{x-2 + 2x + 6}{x+3} > 0 \rightarrow \frac{3x+4}{x+3} > 0$$

Si observan la desigualdad que resultó, tenemos un cociente mayor que cero, nos preguntamos **¿Qué signos deben tener numerador y denominador para que dicho cociente sea mayor que cero?** Y por regla de los signos resulta:

$$[3x+4 > 0 \wedge x+3 > 0] \vee [3x+4 < 0 \wedge x+3 < 0]$$

Observe en este caso, que la expresión del numerador y denominador no son **iguales a cero**.

Desde este momento, tal expresión no es desconocida para ustedes, se debe **hallar el conjunto solución** como lo han hecho para la inecuación de 2º:

$[3x+4 > 0 \wedge x+3 > 0]$ $3x > -4 \wedge x > -3$ $x > -4/3 \wedge x > -3$  $(-4/3; \infty)$	$[3x+4 < 0 \wedge x+3 < 0]$ $3x < -4 \wedge x < -3$ $x < -4/3 \wedge x < -3$  $(-\infty; -3)$
---	---

$$S_f = (-\infty; -3) \cup (-4/3; \infty)$$

### JUSTIFICACIONES

- 1- Para sacar común denominador, se coloca el mismo denominador y se multiplica el término independiente por dicho denominador (irá entre paréntesis por ser una suma)
- 2- Se aplica propiedad distributiva del producto respecto de una suma, para sacar el paréntesis.
- 3- Para reducir a la mínima expresión se suman los términos semejantes.



**Actividad N°1:** Indicar los pasos que se deben cumplir para resolver las inecuaciones fraccionarias:

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....

**Actividad N°2:** Resolver detalladamente las siguientes inecuaciones:

$$a) \frac{3-x}{2x-1} < 0 \quad b) \frac{5}{x-1} > 3 \quad c) \frac{3x}{x+2} \geq 3 \quad d) \frac{3x-5}{3-x} \leq 1$$

### VALOR ABSOLUTO

*Luego de observar los videos propuestos, realizar las siguientes actividades:*

**Actividad N°3:** Define Valor Absoluto de un Número Real.

**Actividad N°4:** Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) |x| = 2 \quad b) |x - 3| = 5 \quad c) \left| 4x - \frac{1}{2} \right| = 1$$

**Actividad N°5:** A continuación se mencionarán algunas de las propiedades de Valor Absoluto, selecciona que propiedades son necesarias emplear para resolver inecuaciones con valor absoluto.

**PROPIEDADES:**  $\forall x, y \in R$ , se verifica:

1.  $|x| = |-x|$
2.  $|x \cdot y| = |x| |y|$
3.  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
4.  $|x + y| \leq |x| + |y|$
5.  $|x|^2 = x^2$
6.  $\sqrt{x^2} = |x|$
7.  $|x| < a$  significa que  $-a < x < a$
8.  $|x| > a$  significa que  $x > a$ , ó,  $x < -a$

**Actividad N°6:** Resuelve las siguientes inecuaciones, escribe el resultado como intervalo y represéntalos gráficamente:

$$a) |x - 1| > 2 \quad b) |x - 3| \leq 2 \quad c) |x - 2| \geq 4 \quad d) \left| \frac{x+3}{2} \right| < 1 \quad e) |2x + 4| \geq 3$$

$$f) \left| \frac{1}{2}x + 5 \right| < 3 \quad g) |x - 6| \leq 2 \quad h) |3x + 2| > 2 \quad i) |2x - 6| < 4 \quad j) |x - 5| \leq 1$$



**SUGERENCIAS:** Si tienes dificultades para resolver los ejercicios propuestos puedes mirar los siguientes videos:

Definición de valor absoluto: [https://www.youtube.com/watch?v=vnsFQG\\_z0wY](https://www.youtube.com/watch?v=vnsFQG_z0wY)  
<https://www.youtube.com/watch?v=l3SL4Glrsvc>

Resolución de Ecuaciones con Valor absoluto:

[https://www.youtube.com/watch?v=k82SQUNC\\_00](https://www.youtube.com/watch?v=k82SQUNC_00)

Resolución de inecuaciones: [https://www.youtube.com/watch?v=AiWISM\\_Q9Yg](https://www.youtube.com/watch?v=AiWISM_Q9Yg)

<https://www.youtube.com/watch?v=ow8O24JNmrA>

<https://www.youtube.com/watch?v=etQLL6DKn5Y>

[https://www.youtube.com/watch?v=pDYZRnHR\\_gwA](https://www.youtube.com/watch?v=pDYZRnHR_gwA)



## TRABAJO PRÁCTICO N° 5: COTAS, EXTREMOS Y ELEMENTOS DE UN INTERVALO- ENTORNO

*Una vez que hayan mirado los videos propuestos, estarán en condiciones de realizar la siguiente actividad:*

**Actividad:**

- a) Resuelvan las siguientes inecuaciones, indiquen el conjunto solución como intervalo y represéntenlo en la recta numérica.
- b) Determinen, si existieran, las cotas, extremos y elementos de cada conjunto hallado en el ítem anterior.
- c) ¿Es el conjunto solución, un entorno o entorno reducido? Justifiquen su respuesta. De serlo, defínanalos analíticamente.
- d) Si el conjunto solución no fuera un entorno, elegir un punto como centro, un radio o semiamplitud, y definir un entorno cualquiera que esté incluido en el conjunto.

$$a) |x + 5| < 4$$

$$b) \left| \frac{x-3}{8} \right| \geq 2$$

$$c) 4 + |3 - x| \leq 12$$

$$d) |4 - 6x| - 1 > 7$$

$$e) 2 < |2 + x| \leq 6$$

$$f) 6 \leq \left| \frac{4 + 2x}{8} \right| < 12$$

$$g) |3x + 1| \leq 0$$

$$h) |2 - 7x| < -4$$

## UNIDAD TEMÁTICA I: FUNCIONES

Uno de los conceptos más importante de la matemática, es sin duda el de *función*. En este curso nos limitaremos al estudio *funciones de una variable real*.

En términos poco formales podemos decir que una *función* es una regla u operación, que asigna a cada número real de un conjunto, un único número real.

Por ejemplo:

La razón entre cierto número y el doble de su siguiente:  $\frac{x}{2(x+1)}$

El doble de la raíz cuadrada de la longitud del hilo de un péndulo:  $2\sqrt{l}$

El producto de la masa por la aceleración de la gravedad:  $m.g$

Como podemos observar en estas *expresiones algebraicas*, las letras representan *variables* y tomarán valores pertenecientes al conjunto de números reales. Pero como vemos en estos ejemplos, no siempre la regla es aplicable a todo número real. El conjunto de los números a los cuales podemos aplicar la regla lo denominaremos *Dominio*.

Por ejemplo:

En  $\frac{x}{2(x+1)}$ , deberá ser  $2(x + 1) \neq 0$ , es decir  $x \neq -1$ , por lo que  $x$  podrá tomar valores reales distintos de -1. Simbólicamente sería  $\forall x \in R - \{-1\}$

En  $2\sqrt{l}$ ,  $l$  deberá ser mayor o igual a cero. Simbólicamente sería  $\forall l \in R_0^+$

Resulta conveniente introducir una notación adecuada, que facilite la escritura y permita referirnos a las funciones en forma general. Para ello es habitual asignar a la *variable* con la letra  $x$  y designar a las *expresiones algebraicas* con las letras  $f$ ,  $g$ ,  $h$ . Escribiendo  $f(x)$  para simbolizar el conjunto de reglas u operaciones a realizar sobre el número  $x$  para obtener el numero  $y$ , que asocia  $f$  con  $x$  y que simbolizamos con  $y = f(x)$ , que solo tiene sentido con  $x$  que pertenece al *Dominio de f*.

Por lo tanto, nuestros ejemplos anteriores quedarían expresados así:

- $f(x) = \frac{x}{2(x+1)} \quad \forall x \in R - \{-1\}$
- $g(x) = 2\sqrt{x} \quad \forall x \in R_0^+$

En general, el Dominio se deberá restringir, para que la función tenga sentido al momento de reemplazar  $x$ , por un número.

Una vez definida la función y establecido el conjunto de valores que puede tomar  $x$  (Dominio); podemos establecer que la función quedará formada por todos los pares ordenados  $(x, y)$ , donde el valor de  $x$  es el primer elemento y el segundo elemento es el valor  $f$  aplicada a  $x$ .

Como sucede en cada uno de los ejemplos a cada valor que se le asigna a  $x$ , por  $f$  se obtendrá un **único** valor de  $y$ , es decir existe una relación de dependencia de  $y$  con respecto a  $x$ . Por lo que a  $x$  se la llama *variable independiente*; y a  $y$  se la llama *variable dependiente*.

**DEFINICIÓN:**

Dados los conjuntos A y B con  $A \neq \emptyset$  y  $B \neq \emptyset$

$f$  es una función de A en B si y solo si  $f$  es un relación de A en B tal que todo elemento de A tiene un único correspondiente en B.

-Simbolizaremos así:

$f \subset A \times B$  ( se lee A producto cartesiano B)

$$f \text{ es función de } A \text{ en } B \leftrightarrow \{\forall x \in A, \exists! y \in B : (x, y) \in f\}$$

Otra manera de definirlo:

$f$  es función de A en B  $\leftrightarrow \{\forall x \in A, \forall y_1, y_2 \in B : (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \rightarrow y_1 = y_2\}$

- Se denotará:

$$f: A \rightarrow B$$

$x \rightarrow f(x)$  (a x se le asigna f(x))

Y deberá tenerse en cuenta que:

- 1) Los elementos de f son pares ordenados de la forma  $(x, f(x))$
- 2)  $f$  no es lo mismo que  $f(x)$ ,  $f(x)$  es la imagen de  $x$  por  $f$ .
- 3) con Dom. o  $D_f$  se denotará al Dominio de la función  $f$ , siendo  $A = D_f$
- 4) el conjunto de los valores que toma y se llama **Imagen de la función**, se denota  $Im_f$ , siendo  $Im_f \subset B$

Hasta acá se introdujo de manera general los conceptos de relación, dominio y codominio, ya que se definió a la función como un caso particular de relación.

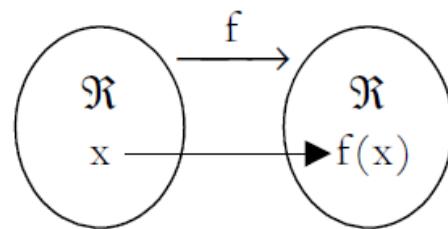
Desde este momento trabajaremos exclusivamente con las llamadas funciones reales de variable real, por lo que resulta esta nueva definición:

**DEFINICIÓN:**

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de R

**A toda función  $f: A \rightarrow B$  se dirá que es una función real de variable real**

Por lo que la frase “función real” indica que la variable independiente solo toma valores reales, denominándose “variable real” y resultando el conjunto dominio y codominio subconjuntos de R.



**Dominio de definición o Máximo dominio**

Como vimos en la definición, una función es una regla que permite asociar a cada elemento del dominio un único elemento del codominio. Por lo tanto, expresiones (reglas de cálculo) como:

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 \quad g(x) = 10^x \quad h(x) = \operatorname{sen} x \quad m(x) = \frac{3}{x-1}$$

No son funciones, porque no se prescribe los correspondientes dominios y codominios.

**Definición:**

Sea  $f(x)$  una regla de cálculo. Se define el **Dominio de Definición** (o Máximo Dominio) de  $f$  como el más grande subconjunto de  $\mathbb{R}$  donde la regla tiene sentido, esto es, donde se respetan las propiedades de los números reales y donde  $f(x)$  transforma reales en reales.

**Observación:** Dada una regla de cálculo  $f(x)$ , si no se provee explícitamente dominio y codominio deberá trabajarse con el dominio de definición, en el cual está definida la regla de cálculo para todo número real, y lo denominaremos  $Dom(f)$ .

**Ejemplo:**

Halla el Dominio de las siguientes funciones:

- a)  $y = 3x + 5$
- b)  $y = x^3 - 3x$
- c)  $y = \sqrt{2x - 6}$
- d)  $y = \frac{1}{x+3}$
- e)  $y = \frac{x-2}{x^2-4}$
- f)  $y = \frac{x-1}{|x|} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

**Actividad N° 1:** Halla analíticamente el dominio de las siguientes funciones:

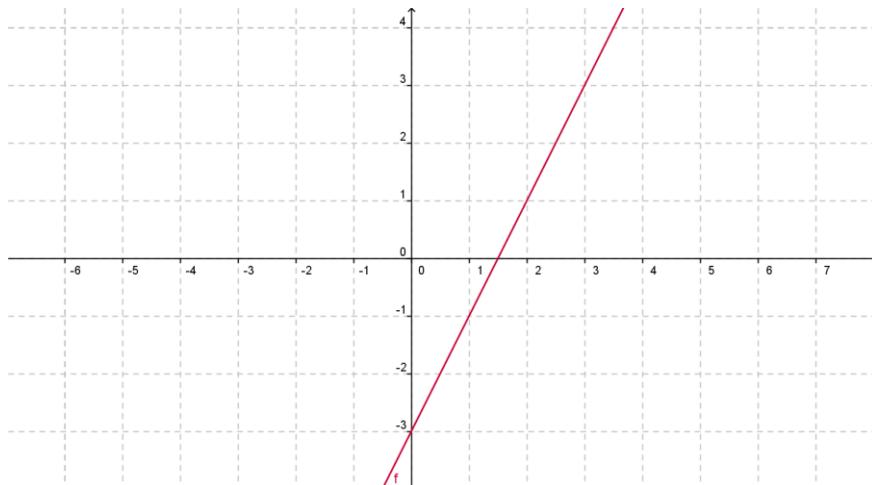
$$a) f(x) = \frac{1}{x^4 - 1} \quad b) y = \ln\left(\frac{2x}{x+2}\right) \quad c) y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$$

$$d) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - 9}} \quad e) f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{x^2 - 1}\right)} \quad f) f(x) = \frac{x+1}{x} \ln(x+1)$$

Como trabajaremos con funciones cuyo dominio y recorrido son conjuntos de números reales (funciones de una variable real o bien funciones reales de una variable real), se las puede representar gráficamente en un sistema de ejes cartesianos ortogonales. Donde en el eje de las abscisas se ubican los valores del Dominio, y como los elementos de  $f$ , esta dado por pares ordenados  $(x, f(x))$  donde  $y = f(x)$ , cada uno de los pares representa un punto, cuya unión resulta la gráfica de la función.

Por ejemplo:

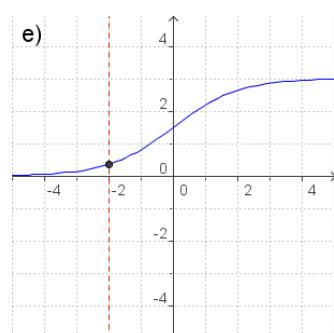
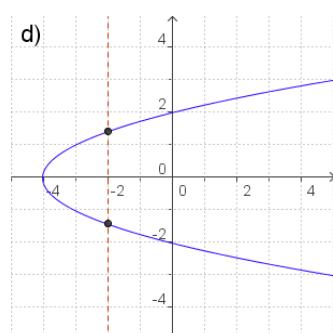
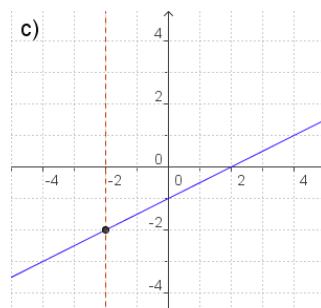
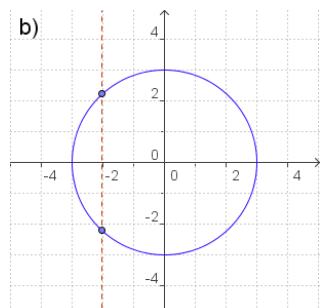
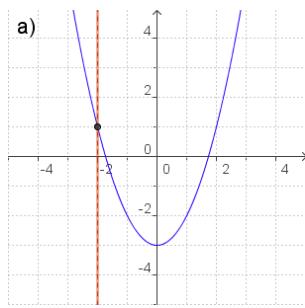
Sea  $f : R \rightarrow R / f(x) = 2x - 3$



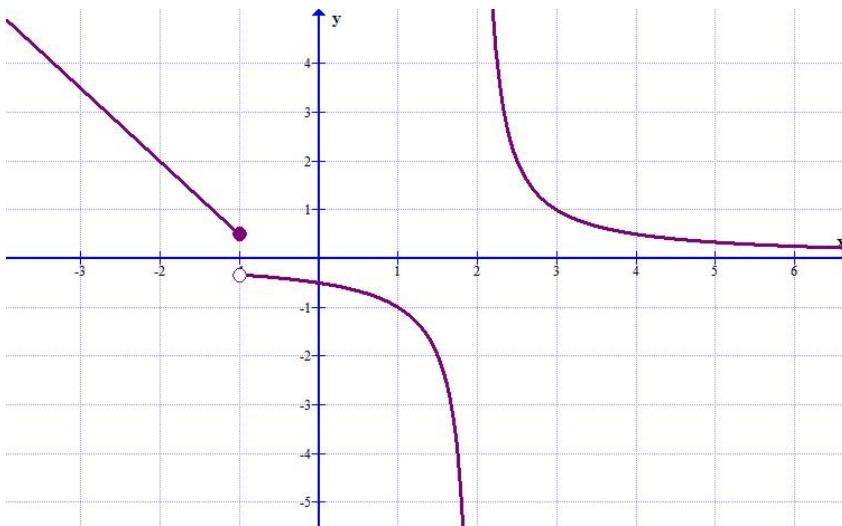
x	$f(x)$
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1
3	3

**Actividad N° 2:**

De las siguientes gráficas, señala cuáles corresponden a una función y cuáles no. Justifica.



**Actividad N°3:** Dada la siguiente función  $y = f(x)$



- Determina el valor aproximado de  $f(4), f(-2), f(-1), f(0), f(f(3))$
- ¿En qué punto(s)  $f$  no está definida?
- Determina el Dominio de  $f$
- Preimagen(es) de -0,1
- Determina el recorrido o imagen de  $f$
- Determina el valor  $x_a$ , tal que:  

$$f(x_a) = 0, \quad f(x_a) = -2, \quad f(x_a) = 1/2, \quad f(x_a) = 2$$
- Por simple observación de una gráfica es posible resolver inecuaciones. ¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación  $f(x) \leq 0,5$ ?
- Cuando se consideran valores de  $x$  suficientemente grandes ¿cuál es el comportamiento de  $f$ ?
- ¿Cuáles son los ceros de la función?
- Indique los intervalos de positividad y negatividad.

### **OPERACIONES CON FUNCIONES**

Dadas dos funciones  $u$  y  $v$  tales que  $u(x) : R \rightarrow R$  y  $v(x) : R \rightarrow R$ , se definen:

**Suma y resta:**  $f(x) = (u \pm v)(x) = u(x) \pm v(x) \quad \forall x \in Dm(u) \cap Dm(v)$

**Producto:**  $f(x) = (u \cdot v)(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \forall x \in Dm(u) \cap Dm(v)$

**Cociente:**  $f(x) = \left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \forall x \in Dm(u) \cap Dm(v) \text{ y } v(x) \neq 0$

**Potencia:**  $f(x) = u^v(x) = u(x)^{v(x)} \quad \forall x \in Dm(u) \cap Dm(v)$

**Raíz:**  $f(x) = \sqrt[k]{u} = \sqrt[k]{u(x)} \quad , \text{con } k > 0 \quad y \ u(x) \geq 0$

**Logaritmo:**  $f(x) = \log_k u = \log_k u(x) \quad , \text{con } k > 0, k \neq 1 \quad y \ u(x) > 0$

**Por ejemplo,** si  $u: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  y  $v: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  son tales que  $u(x) = x^2$  y  $v(x) = 1/(1+x)$ , entonces:

- 1)  $f = u + v$  es la función tal que  $f(x) = x^2 + (1/(1+x))$
- 2)  $f = u \cdot v$  es la función tal que  $f(x) = x^2 \cdot (1+x)$
- 3)  $f = u/v$  es la función tal que  $f(x) = x^2 \cdot (1+x)$
- 4)  $f = u^v$  es la función tal que  $f(x) = (x^2)^{1/(1+x)}$
- 5)  $f = \sqrt[7]{u}$  es la función tal que  $f(x) = \sqrt[7]{x^2}$
- 6)  $f = \log_5 u$  es la función tal que  $f(x) = \log_5 x^2$

¿Existirá otra forma de combinar funciones, que permita obtener una nueva función o si es posible definir una nueva función que saliendo del codominio nos permita llegar al dominio? La respuesta es afirmativa en ambos casos y da lugar a lo que se denomina función compuesta y función inversa, respectivamente.

### **COMPOSICIÓN DE FUNCIONES**

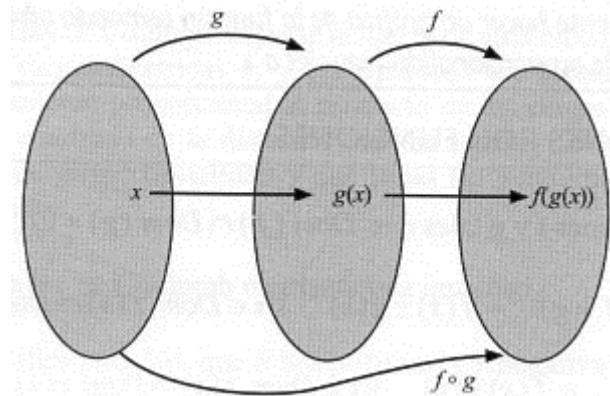
Existe otra forma de combinar las funciones para obtener otra función. Por ejemplo, si se supone que  $y = f(u) = 7u$  y  $u = g(x) = 5x - 4$ . Dado que  $y$  es una función de  $u$  y  $u$  es una función de  $x$ , se deduce por sustitución que  $y$  es función de  $x$ , obteniendo  $y = 7(5x - 4) = f(g(x))$ . Este procedimiento es llamado **composición de funciones**, porque la nueva función está compuesta de las dos funciones  $f$  y  $g$ .

En general, dadas dos funciones  $f$  y  $g$ , si se comienza con un elemento  $x$  en el dominio de  $g$ , para obtener  $g(x)$  y este elemento se encuentra en el dominio de  $f$ , es posible aplicar  $f$  a  $g(x)$  y obtener el elemento  $f(g(x))$ .

#### **DEFINICIÓN:**

**Dadas dos funciones  $f$  y  $g$ , se llama función compuesta  $f \circ g$  (se lee  $g$  compuesta con  $f$ ) a la función definida por  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  y existe siempre que  $\text{Im } g(x) \subseteq \text{Dom } f(x)$**

En el siguiente diagrama visualizamos como se da la composición de funciones:



Imagina que una máquina toma una botella de gaseosa, la llena y luego la tapa. El llenado de la botella será la primera función que se aplica, y taparla sería la segunda función que se aplica. Por lo que la máquina estaría haciendo una composición de funciones  $f \circ g$  (x). En este caso, podemos ver que no es posible invertir el orden de las tareas, de modo que puede no existir  $g \circ f$ , o bien, o a pesar de existir, puede no cumplirse que  $f \circ g (x) = g \circ f(x)$ .

**Actividad N° 4:** Dadas las siguientes funciones  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = x + 5$ .

- Determina el Dominio y codominio de cada una de ellas.
- Determina:  $f \circ g (x)$  y  $g \circ f(x)$ .
- Analiza y compara el Dominio de cada una de las funciones compuestas.
- ¿Se cumple  $f \circ g (x) = g \circ f(x)$ ?

## FUNCIÓN INVERSA

Recordemos que una función es un modelo matemático que puede expresar, por ejemplo el proceso en el cual el plástico se transforma en bolsas. ¿Bajo qué circunstancias es posible recuperar la materia prima (plástico) a partir del producto (bolsas)?

Es intuitivo el hecho de que no siempre es posible encontrar un proceso inverso.

Matemáticamente, buscamos condiciones sobre la función  $f$  de manera que tenga una función inversa. Siguiendo nuestro ejemplo del plástico, se hace claro que buscamos la función tal que:

$$\begin{aligned} g[f(x)] &= x, \forall x \in \text{Dom}(f) \\ f[g(y)] &= y, \forall y \in \text{Dom}(g) \end{aligned}$$

Las condiciones de las que hablamos son los conceptos de inyectividad y sobreyectividad, que desarrollaremos a continuación:

## CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

Una **FUNCIÓN ES INYECTIVA** cuando para todo par de elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas. Simbólicamente si:

$$\forall a, \forall b \in D_f / a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Es decir: a cada elemento del Rango le corresponde un único elemento del dominio,

**Una FUNCIÓN ES SOBREYECTIVA** si para todo  $y$  perteneciente al conjunto de llegada existe un  $x$  perteneciente al dominio tal que  $y=f(x)$ . Simbólicamente si:

$$\forall y_0 \in \text{Im}(f), \exists x_0 \in \text{Dom}(f) / f(x_0) = y_0$$

Es decir:  $f$  es sobreyectiva si el rango coincide con el conjunto imagen,  $\text{Im}_f = B$

Una FUNCIÓN ES BIYEKTIVA si es inyectiva y sobreyectiva.

Por lo tanto, si  $f$  es una función biyectiva entonces a cada elemento  $y \in \text{Im}(f) = Rg(f)$  le corresponde un único  $x \in \text{Dom}(f)$  y entonces podemos definir la función:

$f^{-1}: Rg(f) \rightarrow \text{Dom}(f) / f^{-1}(y) = x$ , que llamaremos función inversa.

### **Teorema:**

**La función  $f: A \rightarrow B$  admite inversa si y solo si es biyectiva**

### **FUNCIÓN INVERSA**

**Se llama FUNCIÓN INVERSA** de una función biyectiva a  $f: A \rightarrow B$  a la función  $f^{-1}: B \rightarrow A / f^{-1}(y) = x$  **si y solo si**  $f(x) = y$ .

**Por ejemplo, la función  $f: R \rightarrow R / f(x) = x^3$  es biyectiva y es invertible ya que posee función inversa  $f^{-1}: R \rightarrow R / f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$**

### **ANÁLISIS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN**

Recordemos que una función es el modelo más aproximado de un fenómeno real: físico, financiero, biológico, etc. es importante extraer y utilizar el máximo de información sobre el fenómeno a partir del análisis de su gráfica.

Como ya definimos anteriormente el par  $(x; f(x))$  con  $x \in \text{Dom}f$ , conforma un subconjunto del plano lo que determina la representación gráfica de la función  $f$ .

En cada gráfica de una función se podrá visualizar y conjutar propiedades y características inherentes a la función y predecir resultados, esto es importante porque permiten tomar decisiones de manera inmediata.

Dichas características las trabajaremos en los siguientes conceptos: paridad, periodicidad, monotonía, invertibilidad.

Por ejemplo:

- si una función es par o impar, basta con manejar la mitad derecha o izquierda de la función
- si una función es periódica, basta con manejar la función en una región mucho más pequeña que el dominio

- si una función es invertible, entonces existe un proceso (función inversa) por el cual los productos pueden reconvertirse en materia prima
- si una función es monótona, entonces las imágenes sólo crecen o decrecen cuando nos desplazamos.

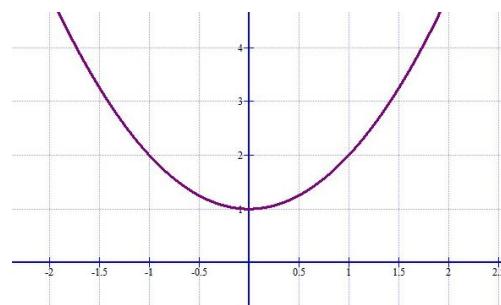
A continuación desarrollaremos cada una de las condiciones mencionadas:

➤ **Paridad**

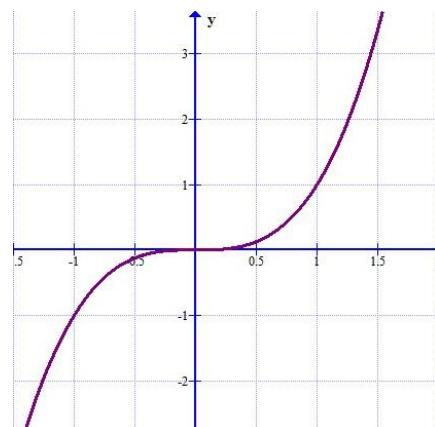
Sea  $f$  una función real:

- Se dice que  $f$  es una función par si  $f(x) = f(-x), \forall x \in Dom(f)$
- Se dice que  $f$  es una función impar si  $f(x) = -f(-x), \forall x \in Dom(f)$

Como podemos observar en el siguiente ejemplo:  
 $f(x) = x^2$ , es una función par y su grafica es simétrica con respecto al eje de las ordenadas



Como podemos observar en el siguiente ejemplo:  
 $f(x) = x^3$ , es una función impar y su grafica es simétrica con respecto al origen del sistema de ejes cartesianos. Es importante tener en cuenta que en la función impar, siempre  $f(0) = 0$



➤ **Periodicidad**

En la naturaleza hay muchos fenómenos que presentan un comportamiento cíclico o periódico, por ejemplo las ondas de radio.

El modelo matemático, más simple, que permite modelar un fenómeno periódico se presenta de la siguiente manera:

Definición:

Se dice que una función  $f: R \rightarrow R$  es periódica si existe un número  $p > 0$  tal que:

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in R$$

El ejemplo más importante en este tipo de funciones son las *funciones trigonométricas* que desarrollaremos próximamente.

➤ **Monotonía**

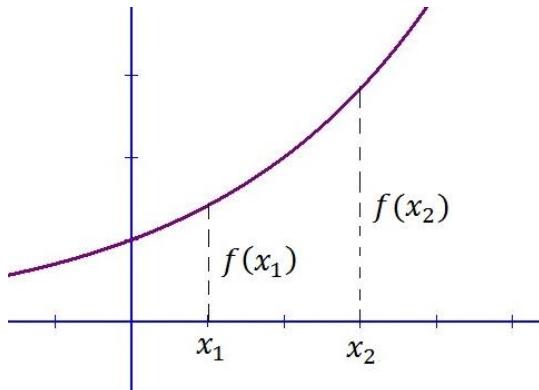
Cuando el dominio de una función no es finito, lo que la confección de una tabla solo permitirá conocer algunas imágenes del dominio, es útil poder establecer el comportamiento de la gráfica de la función para una mejor representación.

**Definición:**

Se dice que una función  $f: R \rightarrow R$  es:

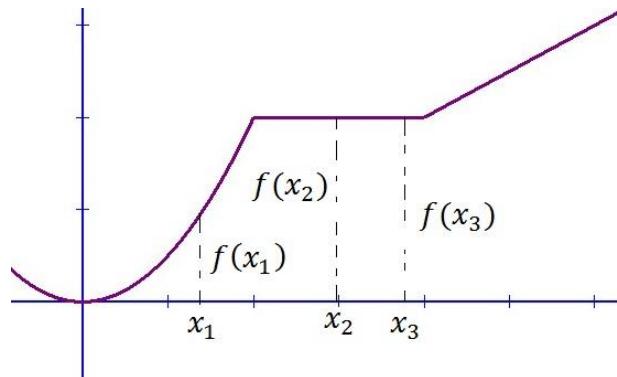
- **monótona creciente** si dados cualesquiera de  $x_1, x_2 \in Dom f$  con  $x_1 < x_2$ , es  $f(x_1) \leq f(x_2)$
- **monótona estrictamente creciente** si dados cualesquiera de  $x_1, x_2 \in Dom f$  con  $x_1 < x_2$ , es  $f(x_1) < f(x_2)$
- **monótona decreciente** si dados cualesquiera de  $x_1, x_2 \in Dom f$  con  $x_1 < x_2$ , es  $f(x_1) \geq f(x_2)$
- **monótona estrictamente decreciente** si dados cualesquiera de  $x_1, x_2 \in Dom f$  con  $x_1 < x_2$ , es  $f(x_1) > f(x_2)$

Por ejemplo:



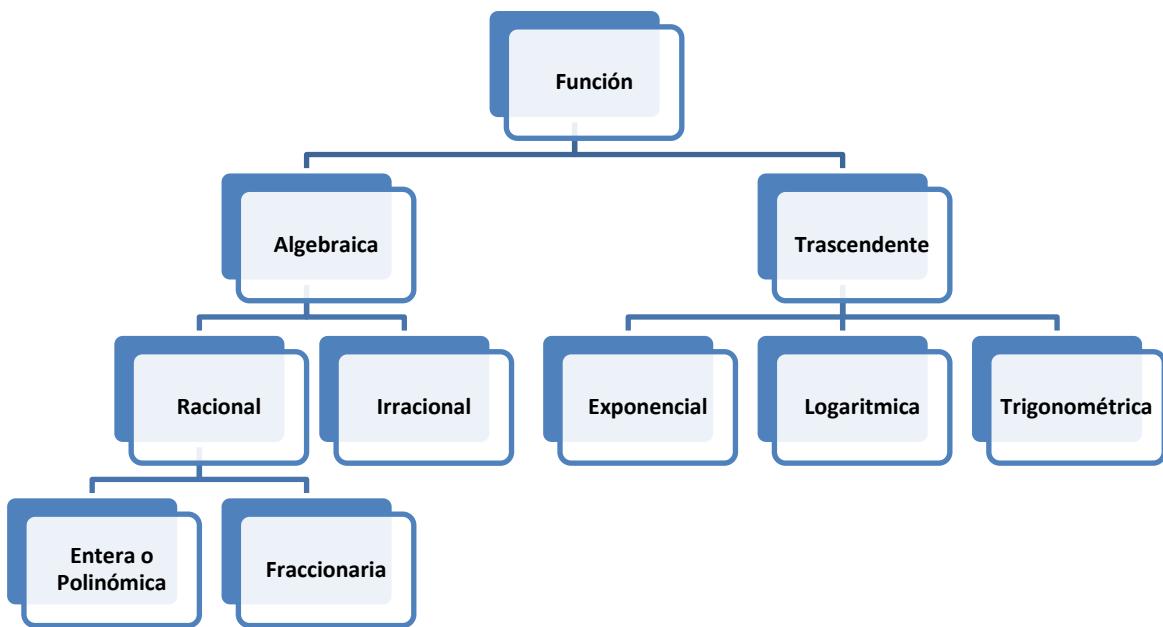
**Función estrictamente creciente**

**Función creciente**



$$x_1 < x_2 < x_3 \quad \text{resulta } f(x_1) < f(x_2) \leq f(x_3)$$

### CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES, SEGÚN SU EXPRESIÓN ALGEBRAICA



### FUNCIONES ALGEBRAICAS

Son aquellas en las que las variables se relacionan por las operaciones de adición, sustracción, producto, cociente, potenciación y radicación.

Por ejemplo:  $f(x) = 3x - 5x^5$        $g(x) = \frac{3x}{4x-4} + 3x$        $h(x) = \sqrt{3x - 5}$

Son aquellas en las que las variables se relacionan por las operaciones de adición, sustracción, producto, cociente, potenciación. Son aquellas en las que las variables se relacionan por las operaciones de adición, sustracción, producto, cociente y potenciación. Entre ellas se encuentran las polinómicas o enteras y las Fraccionarias, las que desarrollaremos a continuación:

- **FUNCIÓN ENTERA O POLINÓMICA**

**DEFINICIÓN:** La **Función Polinómica** es toda expresión de la forma:

$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ , donde  $a_n$  es diferente de cero.

En esta definición se dice que es una **función polinómica de  $n$ -ésimo grado**.

$a_n; a_{n-1}; \dots; a_2; a_1; a_0$  Son números Reales y se denominan **coeficientes de la función**;  $a_n$  es el coeficiente principal,  $a_0$  es el coeficiente del término independiente;  $n$  es el grado de la función.

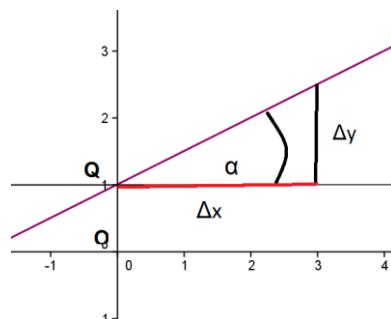
**Nota:** una función constante, diferente de cero, es un polinomio de grado cero, una función lineal es un polinomio de primer grado, una función cuadrática es un polinomio de segundo grado.

### FUNCIÓN LINEAL

Llamamos **función lineal** a toda función de la forma:

$$L = \{I \subset R \rightarrow R : x \in I / y = L(x) = mx + b\}, \text{ donde } m \text{ y } b \text{ son constantes reales.}$$

El gráfico de L cruza al eje de las ordenadas (Y) en  $(0; b)$ . Si  $m \neq 0$ , el gráfico de L cruza el eje de las abscisas(X) en  $(-b/m; 0)$ . Si  $m = 0$ , la gráfica de L es una recta paralela al eje de las X y se la denomina *función constante*.

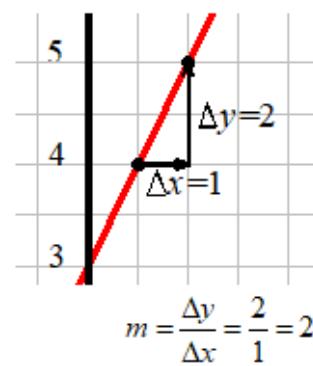
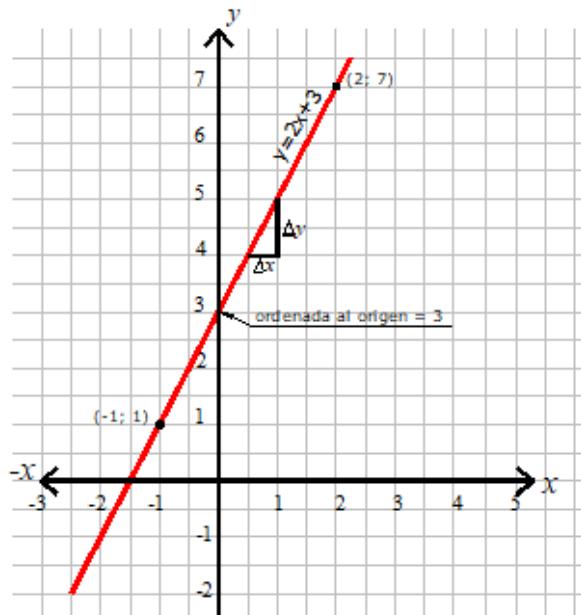


En la expresión  $m = \tan \alpha$  es el coeficiente angular o pendiente de la recta (parámetro de dirección);  $\overline{OQ} = b$  es la ordenada al origen (parámetro de posición). Si  $b = 0$  la recta pasa por el origen. Si  $a = 0$ , es decir la ecuación de la recta es  $y = \text{cte.}$ , es una recta paralela al eje x.

La pendiente (inclinación) de una función lineal "m" es la variación de la variable dependiente

dividido por el respectivo cambio variable independiente.  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

**Ejemplo:**  $f(x) = 2x + 3$



- Vemos en este ejemplo la pendiente  $m = 2$ .
- La ordenada al origen,  $b = 3$ , que es donde corta al eje y.

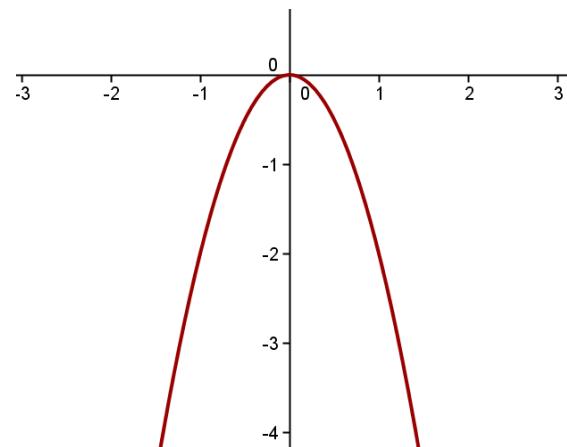
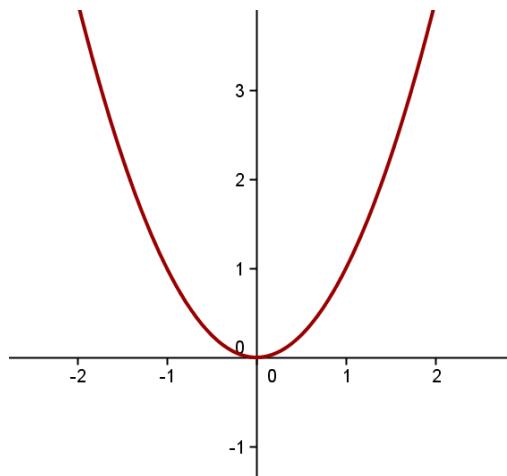
### FUNCIÓN CUADRÁTICA

Es de la forma  $y = ax^2 + bx + c$ . La grafica de esta función es una parábola vertical abierta hacia arriba o hacia abajo según sea el valor de “ $a$ ” positivo o negativo.

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto llamado foco (Vértice) y de una recta llamada directriz (Eje de simetría).

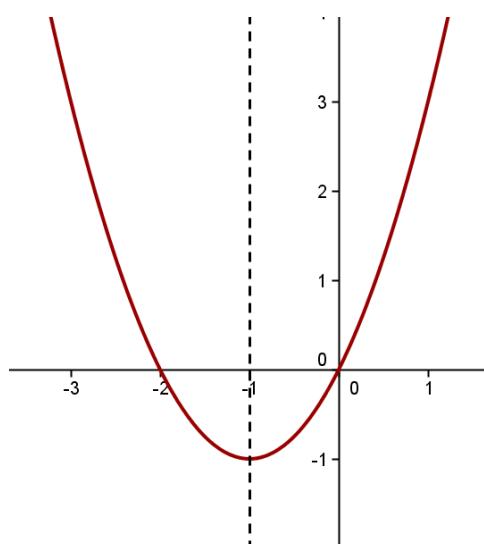
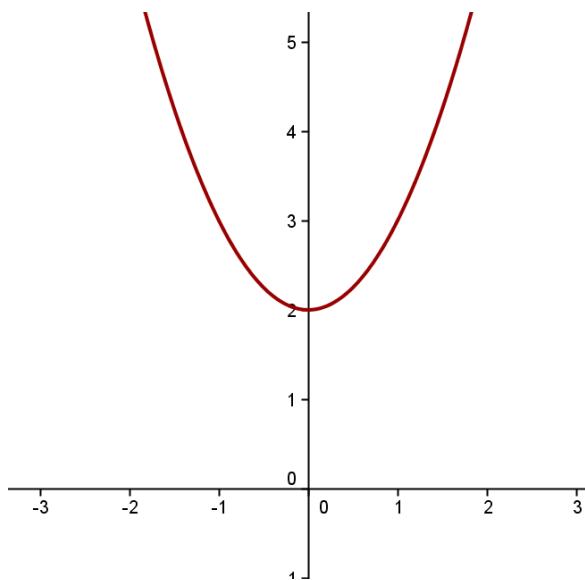
$$y = ax^2, \text{ con } a > 0$$

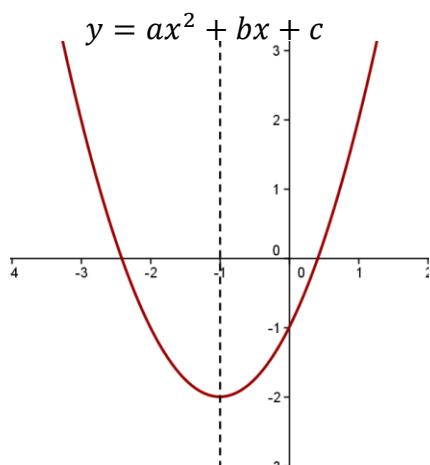
$$y = ax^2, \text{ con } a < 0$$



$$y = ax^2 + c$$

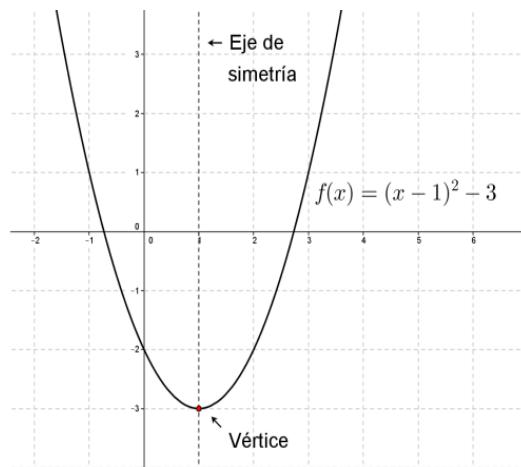
$$y = ax^2 + bx$$



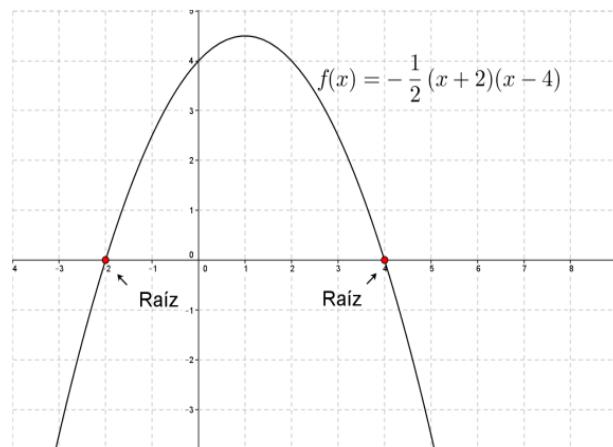


A continuación presentaremos ejemplos de funciones polinómicas:

1. El siguiente grafico corresponde a la función  $y = (x - 1)^2 - 3$ , la cual esta expresada en forma canónica y corresponde a una parábola cóncava.



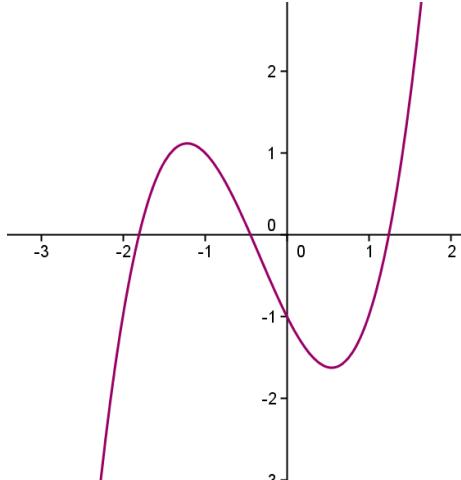
2. El siguiente grafico corresponde a la función  $y = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 4)$ , la cual esta expresada en forma factorizada y corresponde a una parábola convexa.



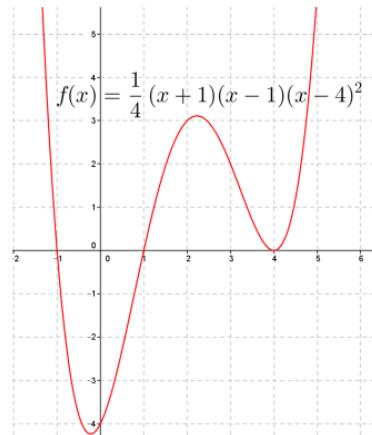
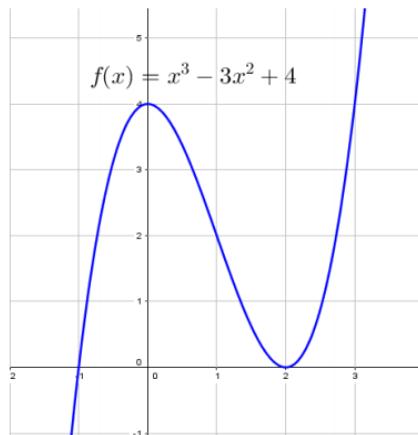
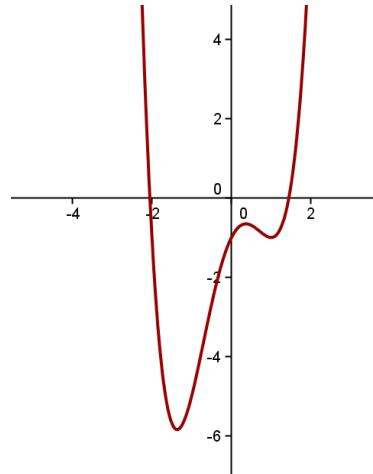
### FUNCIÓN POLINÓMICA

Decimos que es una función polinómica de grado  $n$ , cuando su expresión es un polinomio de grado  $n$ . y su gráfica recibe el nombre de parábola de grado  $n$ . Por ejemplo:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$$



$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$$



- **FUNCION RACIONAL FRACCIONARIA:**

Es el cociente de dos polinomios y tiene la forma:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

Los valores de  $x$  que anulan el denominador y no anulan al numerador se llaman polos o infinitos de la función.

Los valores de  $x$  que anulan al numerador y no anulan al denominador se llaman raíces o ceros de la función.

**FUNCIÓN HOMOGRÁFICA o BILINEAL:**

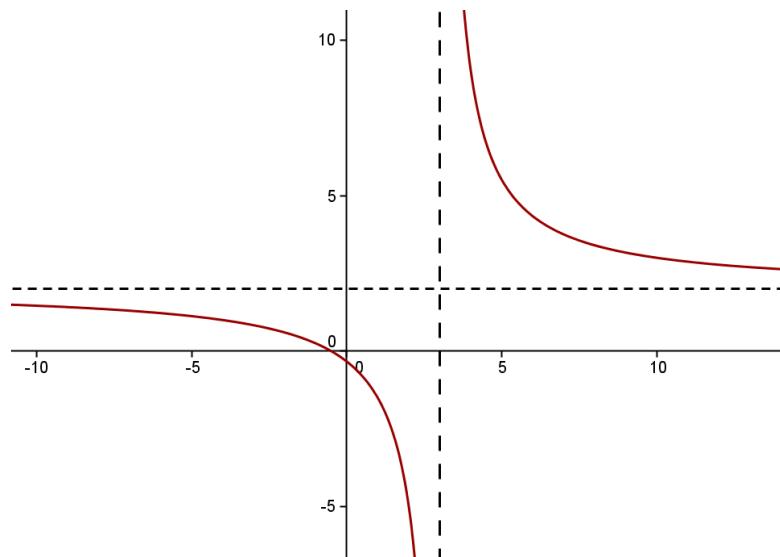
Es el cociente entre dos funciones lineales del tipo:  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Los coeficientes numéricos cumplen con las siguientes condiciones:

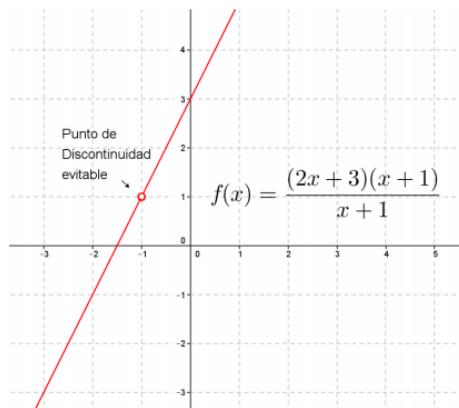
- a)  $c \neq 0$ , porque si lo fuera la función se reduciría a una función lineal del tipo:  $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$
- b) el denominador debe ser distinto de cero, por lo que resulta:  $x \neq -\frac{d}{c}$
- c)  $bc - ad \neq 0$ , ya que de serlo significaría que el resto del cociente sería cero, es decir exacta. Lo que significaría que se podría expresar a la función como  $y = cte.$

Podemos observar que cuando  $x$  se aproxima al valor  $-\frac{d}{c}$  la función  $y$ , toma valores muy grandes, lo que expresamos como que  $y$  tiende a infinito ( $y \rightarrow \infty$ ), este valor que anula el denominador se llama infinito o polo de la función. La recta de ecuación  $x = -\frac{d}{c}$ , es paralela al eje **y** y se llama asíntota vertical de la función homográfica.

Cuando  $x$  toma valores muy grandes, decimos que  $x$  tiende a infinito ( $x \rightarrow \infty$ ), la función toma valores próximos a  $\frac{a}{c}$ , decimos que la recta  $y = \frac{a}{c}$  es una recta llamada asíntota horizontal a la función homográfica.

**Ejemplo:**  $y = \frac{2x+1}{x-3}$  con asíntota vertical en  $x = 3$  y asíntota horizontal en  $y = 2$ .



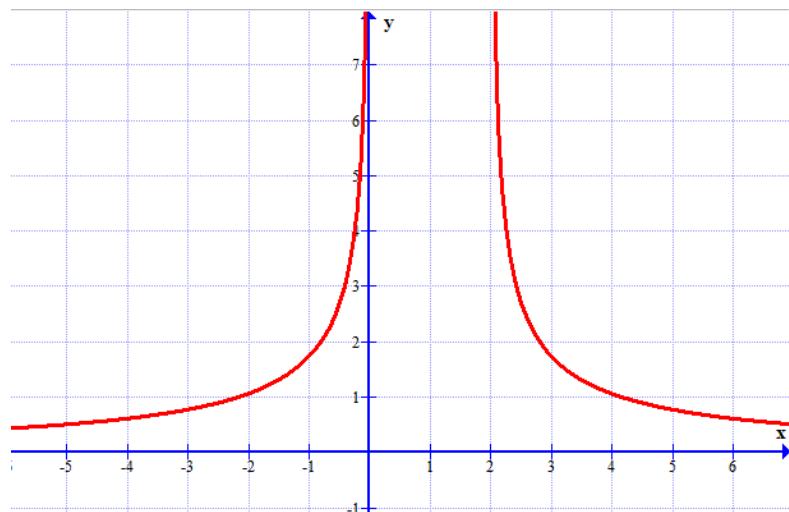


**II. FUNCIÓN IRRACIONAL:**

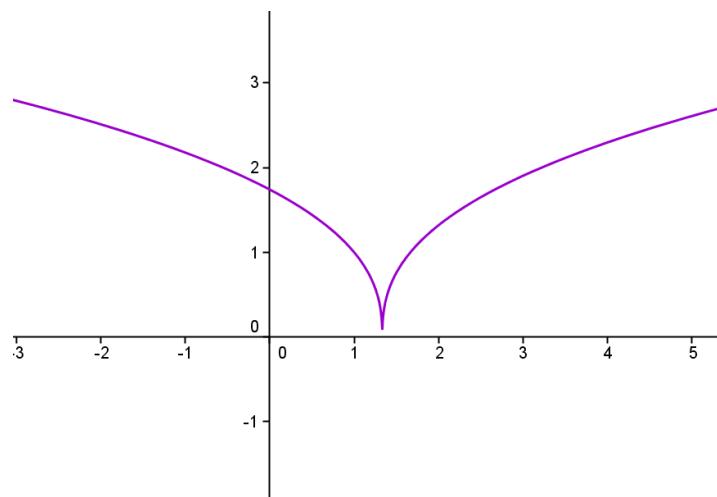
Son aquellas en las que las variables, además de relacionarse por las operaciones de adición, sustracción, producto, cociente, potenciación, aparecen también las de radicación o exponentes racionales no enteros.

**Por ejemplo:**

$$y = \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$



$$y = (3x - 4)^{\frac{2}{5}}$$



### FUNCIONES TRASCENDENTES

Se llaman Funciones Trascendentes porque su expresión trasciende el campo del álgebra.

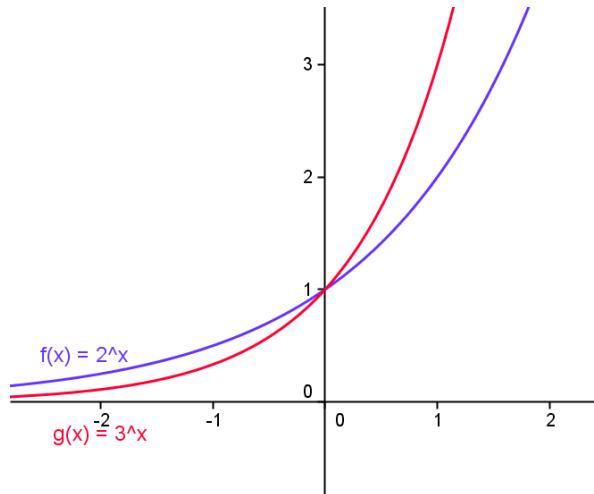
Entre ellas se encuentran:

#### I. FUNCIÓN EXPONENCIAL

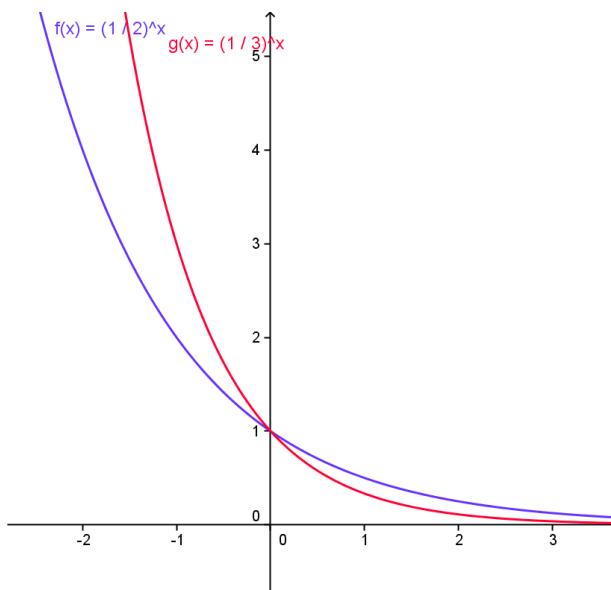
La función exponencial es una función de la forma  $f(x) = a^x$ , donde  $a$  es un número real mayor que **cero** y distinto de 1, ( $a \neq 1$  y  $a > 0$ ).

Desde el punto de vista gráfico resulta:

Si  $a > 1$



Si  $0 < a < 1$



**Se cumple:**

- Dominio de la función: los números reales,  $D(f) = R$
- Si  $a > 1$  la función es creciente
- Si  $0 < a < 1$  la función es decreciente
- La función es positiva para cualquier valor de  $x$ ,  $f(x) > 0$
- Posee una asíntota horizontal en  $y=0$

**Observación:**

Es de mucha importancia el caso particular en que  $a = e$  donde el número irracional

$$e = 2,718281828459 \dots$$

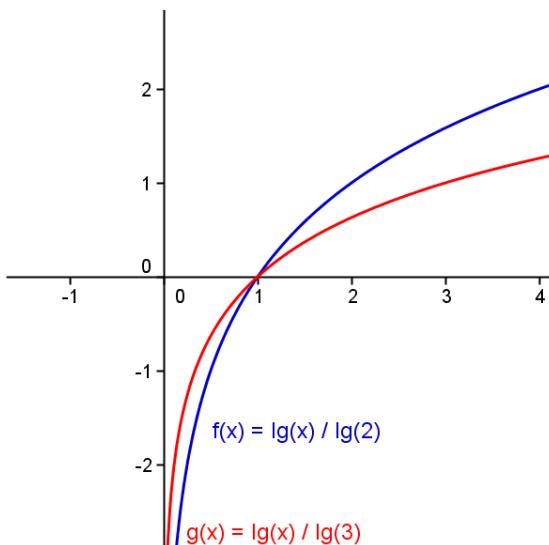
es conocido como número de Neper (número  $e$ ). Se la expresa como  $e^x$  (función exponencial natural), forma parte de las funciones exponenciales.

## II. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

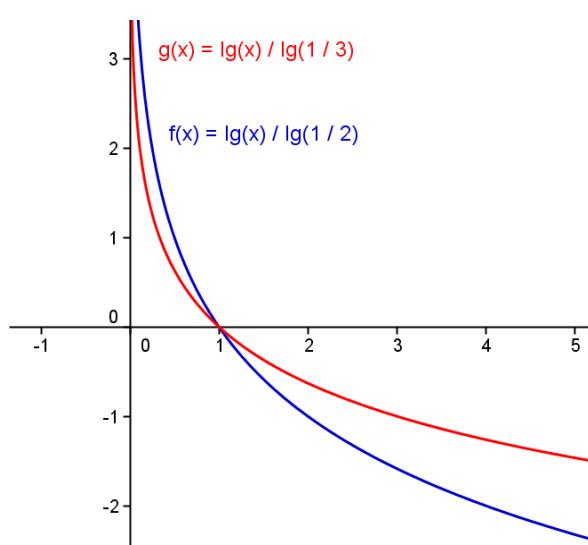
La función logarítmica es una función de la forma  $f_{(x)} = \log_a x$ , donde  $a$  es un número real mayor que cero y distinto de 1 ( $a \neq 1$  y  $a > 0$ ).

Desde el punto de vista grafico resulta:

**Si  $a > 1$**



**Si  $0 < a < 1$**



**Se cumple:**

- Dominio de la función: los números reales, excluido el cero,  $D(f) = R^+ - \{0\}$
- Su función inversa es la función  $f(x) = a^x$

- c) Si  $a > 1$  la función es creciente
- d) Si  $0 < a < 1$  la función es decreciente
- e) posee una asíntota vertical en  $x = 0$

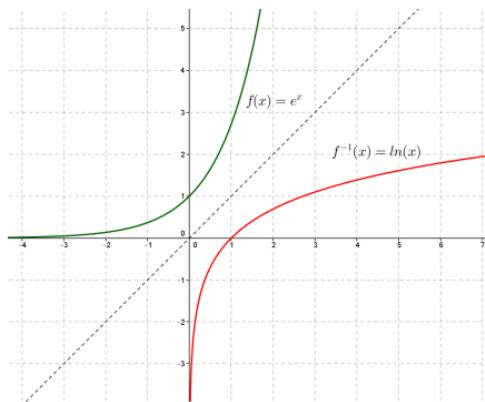
**Observación:**

Es de mucha importancia el caso particular en que  $a = e$ . En caso se denota  $\log_e = \ln$  y se refiere como logaritmo natural o logaritmo neperiano.

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

La función  $f: R \rightarrow (0, \infty) / f(x) = e^x$  es biyectiva por lo que tiene inversa:

$$f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow R / f^{-1}(x) = \ln(x)$$



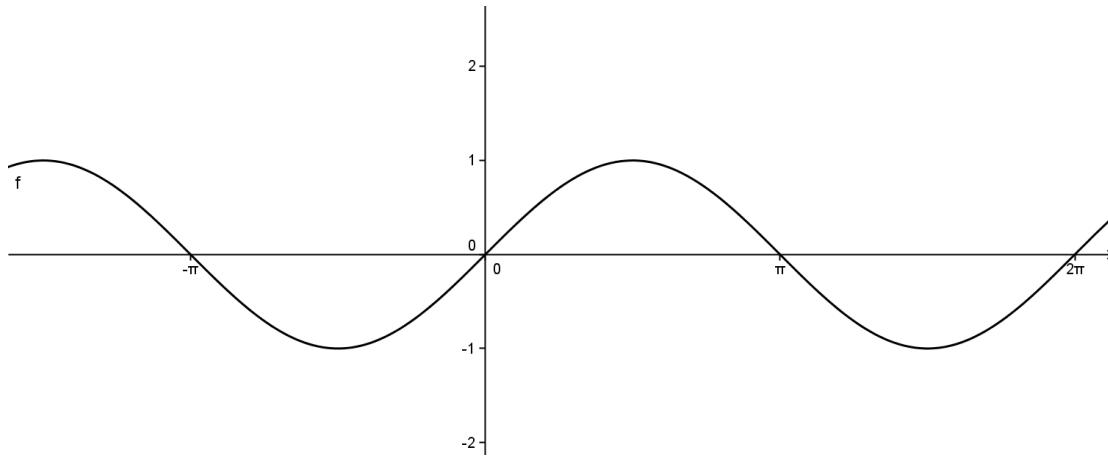
### III. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las tres funciones trigonométricas más importantes son el seno, coseno y tangente. Las funciones trigonométricas son funciones **periódicas**.

Observación: En las funciones trigonométricas calcularemos  $\sin x$ ,  $\cos x$  o  $\tan x$  en los cuales el argumento (ángulo) se describe en radianes y no en grados sexagesimales. Por lo que:  $180^\circ = \pi \text{ rad} = \pi$

- **FUNCTION SENO**

Es la función definida por  $f: R \rightarrow R / f(x) = \sin x$ , los valores de x deberán estar dadas en radianes.



Este grafico se denomina **sinusoide**, su período es  $2\pi$ . Su imagen varía entre  $[-1,1]$ . Es una función impar.

Esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva, por lo que no tendrá función inversa.

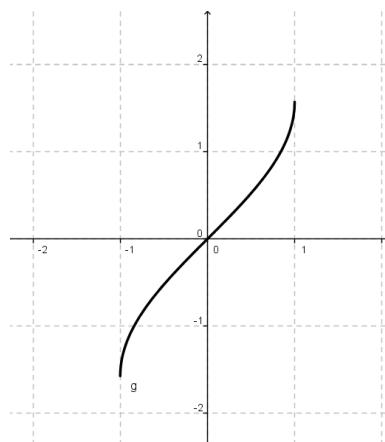


Sin embargo podemos redefinirla para que sea biyectiva y tenga función inversa.

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1] / f(x) = \operatorname{sen}x$$

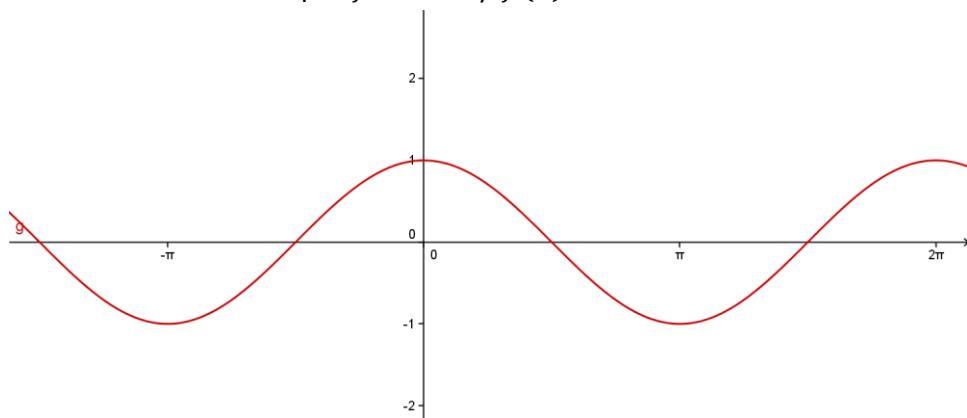
La función inversa es

$$f^{-1}: [-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] / f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}x$$



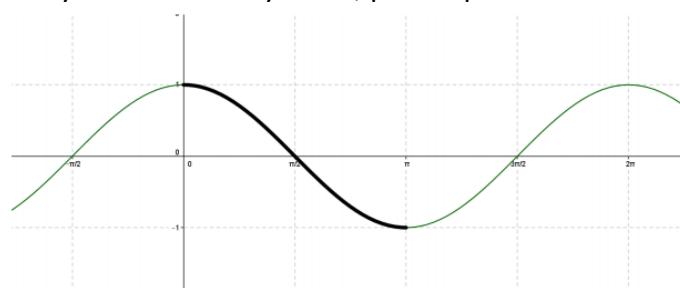
- **FUNCIÓN COSENO**

Es la función definida por  $f: R \rightarrow R / f(x) = \cos x$



Este grafico se denomina **cosenoide**, su período es  $2\pi$ . Su imagen varía entre  $[-1,1]$ . Es una función par.

Esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva, por lo que no tendrá función inversa.

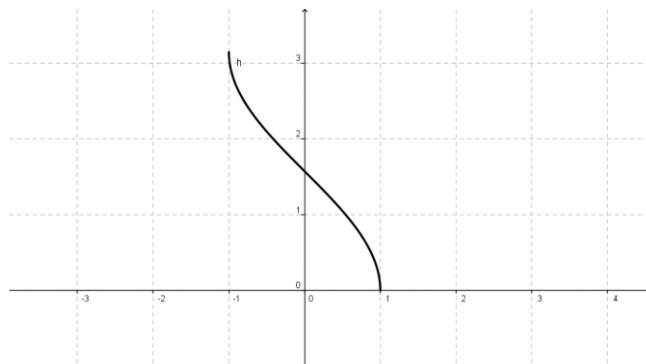


Sin embargo podemos redefinirla para que sea biyectiva y tenga función inversa.

$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1,1] / f(x) = \cos x$$

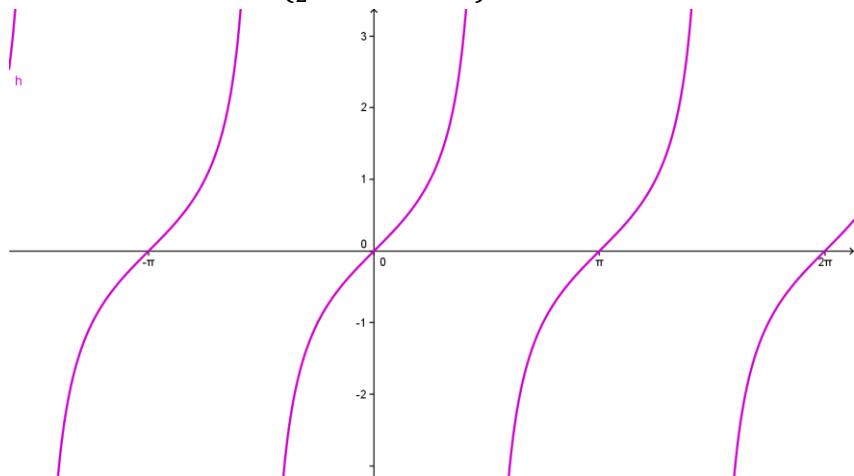
La función inversa es

$$f^{-1}: [-1,1] \rightarrow [0, \pi] / f^{-1}(x) = \arccos x$$



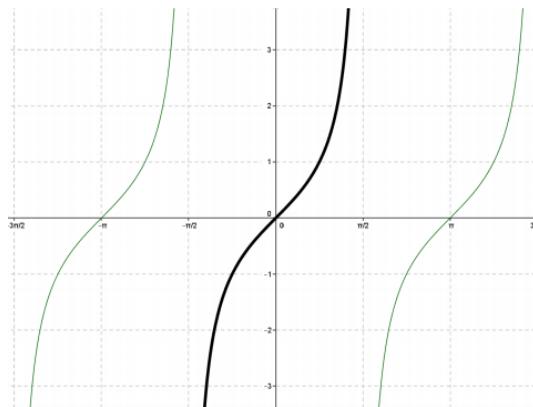
- **FUNCIÓN TANGENTE**

Es la función definida por  $f: R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi: k \in Z \right\} \rightarrow R / f(x) = \operatorname{tg}x$



Su período es  $\pi$ . Su imagen son los Reales. Como la tangente es el cociente entre seno y coseno, el Dominio serán los números reales que no anulan la función coseno. Es una función impar.

Esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva, por lo que no tendrá función inversa.

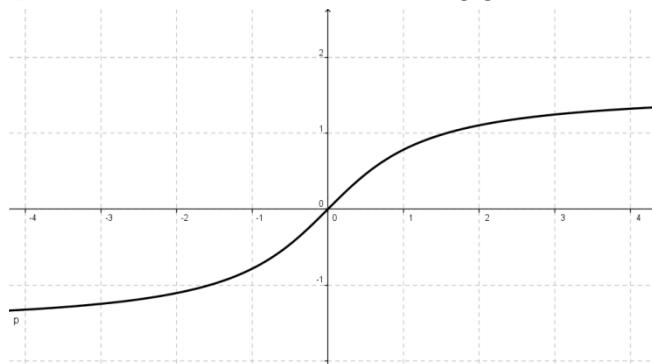


Sin embargo podemos redefinirla para que sea biyectiva y tenga función inversa.

Es la función definida por  $f: \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow R / f(x) = \operatorname{tg}x$

La función inversa es

$$f^{-1}: R \rightarrow \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) / f^{-1}(x) = \operatorname{arctgx}$$

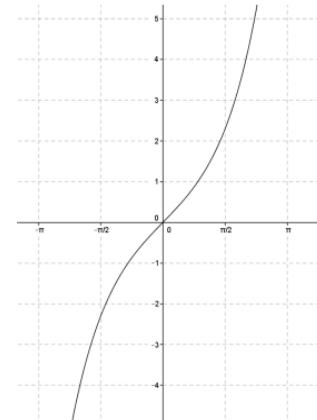


#### IV. FUNCIONES HIPERBÓLICAS

A continuación presentaremos tres funciones hiperbólicas. Sus definiciones se basan en la función exponencial  $y = e^x$

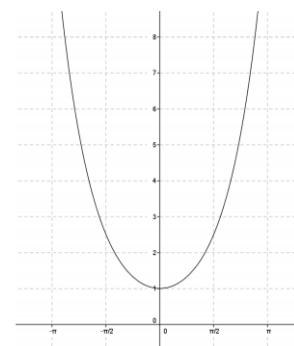
1. Función Seno Hiperbólico: Se define como:

$$f: R \rightarrow R / f(x) = \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



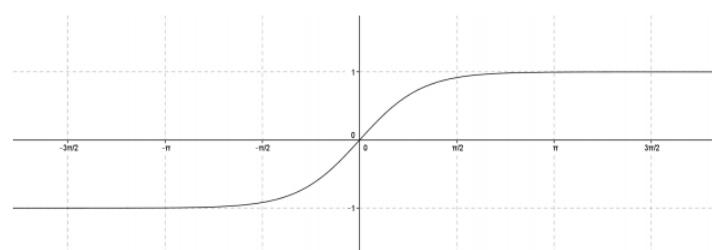
2. Función Coseno Hiperbólico: Se define como:

$$f: R \rightarrow R / f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



3. Función Tangente Hiperbólica: Se define como:

$$f: R \rightarrow R / f(x) = \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



### FUNCIONES PARTIDAS O POR TRAMO O POR INTERVALOS

Una **función partida** es aquella que para definirla se necesitan distintas reglas de asignación para distintos subconjuntos del Dominio

Por ejemplo:  $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Representarla gráficamente, determinar Dominio e Imagen.

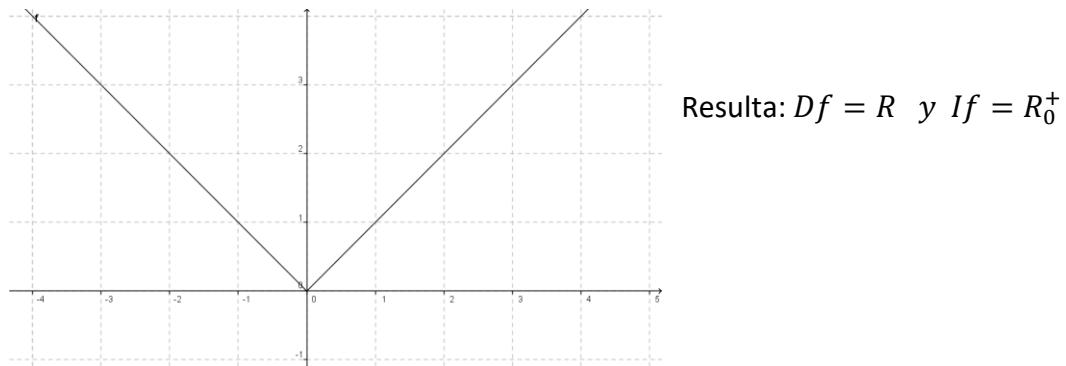
A continuación presentamos cuatro funciones definidas por tramos, que utilizaremos en diferentes ocasiones a lo largo del proceso de estudio.

#### I. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La función definida como  $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$  llamada valor absoluto.

La cual si se aplica la definición de valor absoluto resulta:  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

Su grafica resulta:

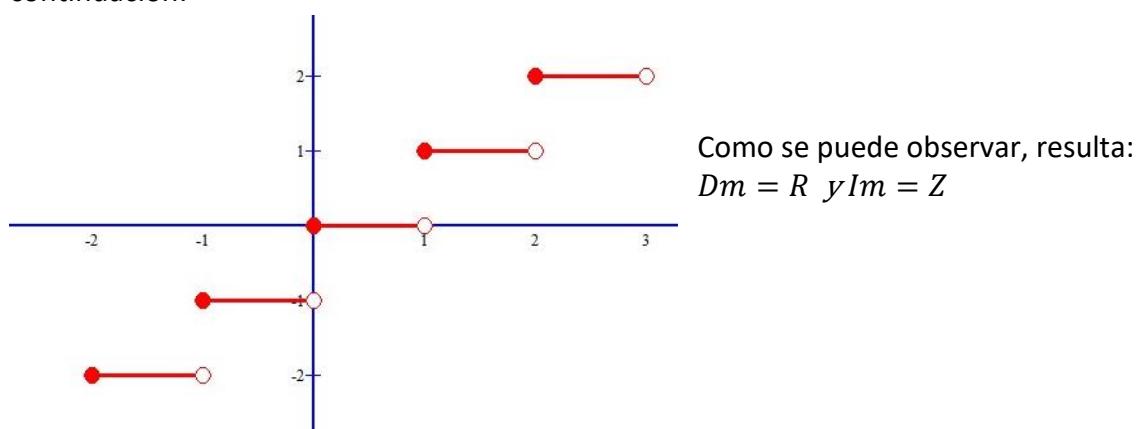


#### II. FUNCIÓN PARTE ENTERA

Se llama *parte entera de un número real*  $x$  al mayor número entero que es menor o igual que  $x$ . Se designa:  $[x]$  o  $ENT(x)$ .

Se define como **función parte entera**:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = [x]$

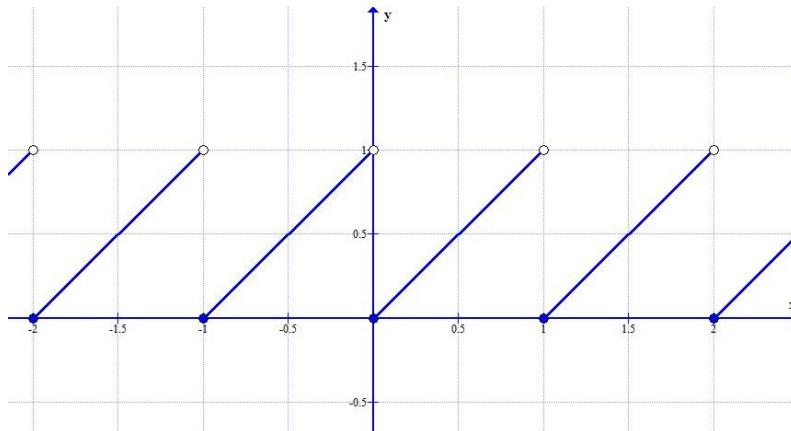
La representación gráfica de la función parte entera es escalonada, como se muestra a continuación:



### III. FUNCIÓN MANTISA

Se llama **función mantisa o parte decimal de  $x$** , a la función definida:

$$f: R \rightarrow R / f(x) = x - [x]$$



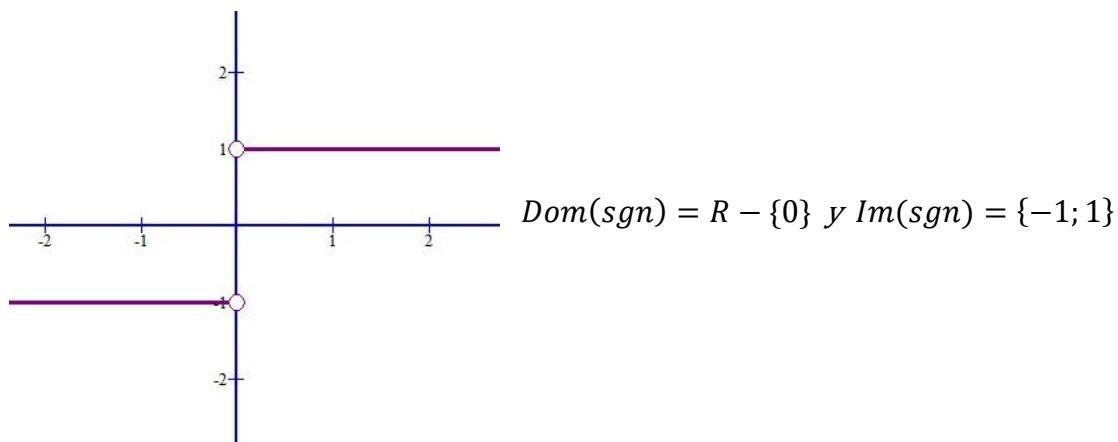
Se la suela llamar diente de sierra por su representación gráfica.

Resulta su dominio  $D_m = R$  y  $I_m = [0,1)$

### IV. FUNCIÓN SIGNO

Se llama **función signo de  $x$** , se indica  **$sgn x$** , se define:

$$sgn x = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} \quad o \quad sgn x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



### FUNCIÓN IMPLICITA

Se llama **función implícita** a aquella en la que **y** no se encuentra sola en uno de los miembros. La que tendrá forma de ecuación de dos variables.

Por ejemplo:  $y + x - 3 = 2x^2$ , como ocurre en este ejemplo, a veces es posible despejar la variable dependiente y expresarla como **función explícita**, la que resultaría:  $y = 2x^2 - x + 3$

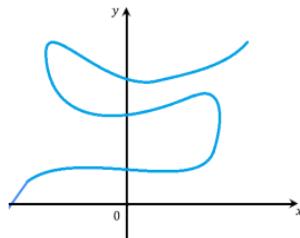
Pero puede ocurrir que sea difícil o imposible despejar la variable  $y$ , como se ve en el siguiente ejemplo:  $2xy + 3y + x + \log(x+y) = 1$ .

Aclaremos que los nombres explícitas o implícitas indican la forma de expresar una función.

### FUNCIONES DADAS PARAMETRICAMENTE

Algunas curvas se describen mejor cuando las coordenadas  $x$  e  $y$  están dadas en términos de una tercera variable  $t$  llamada **parámetro**, es decir  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ .

Imaginemos un objeto que se mueve en un plano y a medida que transcurre el tiempo, describe un camino como el representado por la siguiente curva:



Ella puede ser descripta por una ecuación de la forma  $y = F(x)$ , donde sabemos que las coordenadas  $x$  e  $y$  de la posición de la partícula dependen del instante de tiempo  $t$ .

Por lo que existirán funciones  $f$  y  $g$  de la variable (o parámetro)  $t$ , tales que  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ . Este par de ecuaciones, que muchas veces se utilizan para describir una curva, se llaman ecuaciones paramétricas de la curva en el plano:

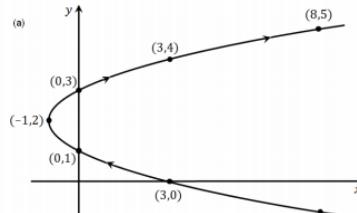
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Cada valor de  $t$  determina un punto  $(x,y)$  en el plano. Cuando  $t$  varía (en un intervalo de  $n^{\circ}$  reales), el punto  $(x,y) = (f(t), g(t))$  se mueve generando una curva en el plano.

Por ejemplo:  $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + 1 \end{cases}$

si damos valores a  $t$ , iremos obteniendo los valores de  $x$  e  $y$  que forman las coordenadas de los puntos que forman la curva:

$t$	$x$	$y$
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4



**Actividad N° 5:** Grafica las siguientes funciones. Da su dominio e imagen. Analiza su paridad.

a)  $y^2 = x$  ; ( $y \geq 0$ )

## ANÁLISIS MATEMÁTICO I

b)  $y = |x - 3|$

$$e) y = \begin{cases} -2x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ -5 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 4x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

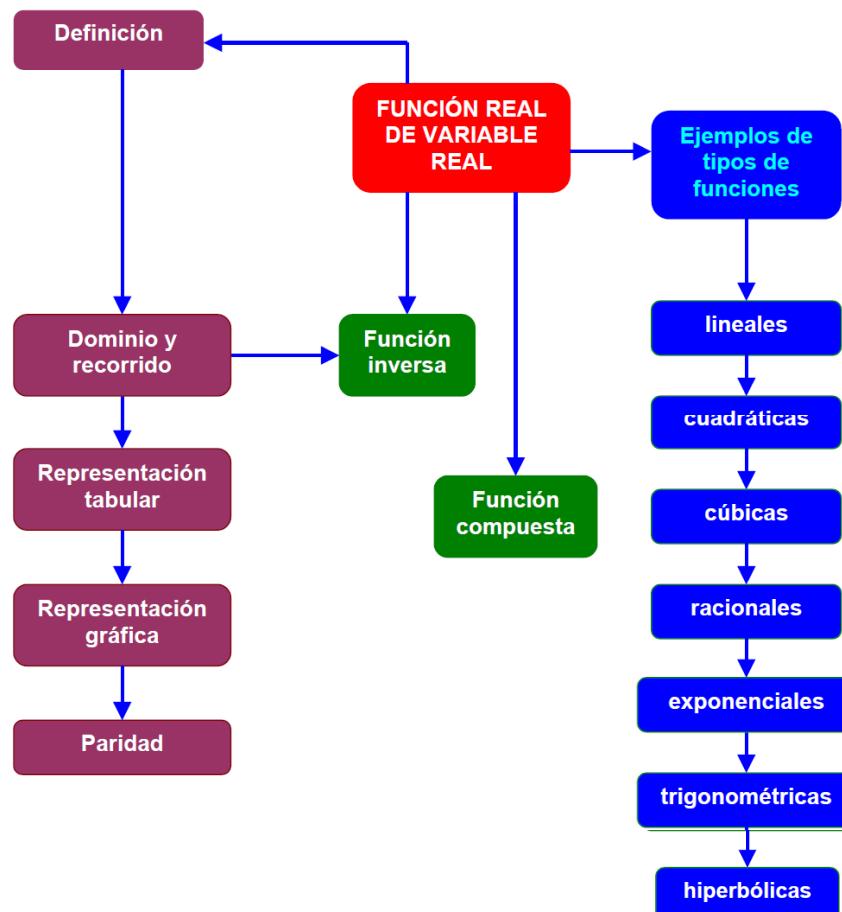
c)  $y = |x| - 3$

$$d) y = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ |x - 1| & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

f)  $y = \frac{1}{x}$

g)  $y = \frac{2+x}{-x+3}$

### Esquema de Contenidos



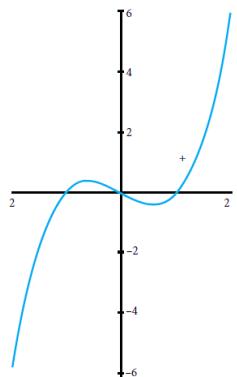


## TRABAJO PRÁCTICO N°6: DEFINICIÓN Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

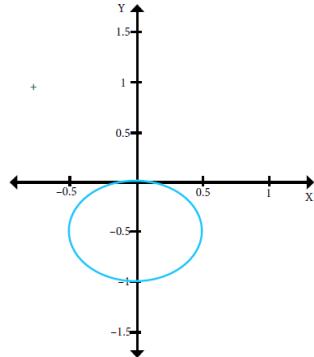
**Actividad N°1:** Define Función de variable real y explica cuáles son las características desde el punto de vista gráfico que una función debe tener.

**Actividad N°2:** ¿Cuáles de los siguientes gráficos no pueden corresponder a una función y por qué?

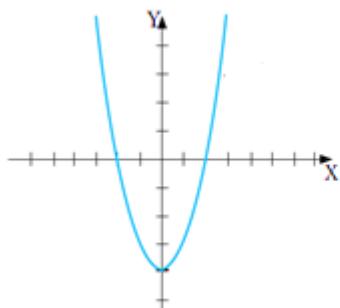
a)



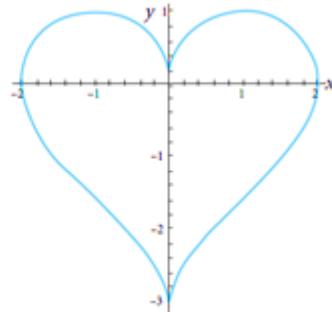
c)



b)

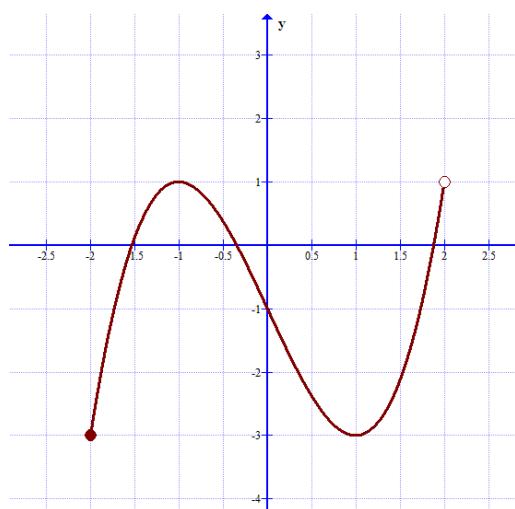


d)

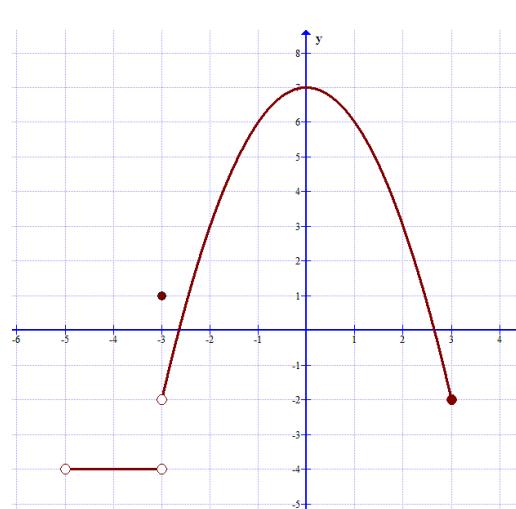


**Actividad N°3:** Indica el conjunto Dominio y el conjunto Imagen de las siguientes funciones:

a)



b)





**Actividad N°4:** Grafica la función  $f(x) = -2x + 1$  y halla el conjunto Imagen, en cada uno de los siguientes casos:

a)  $Dm f = [-3,5]$       b)  $Dm f = [-3,5)$       c)  $Dm f = (-3,5)$

**Actividad N°5:** Explica y argumenta cuales son los Dominios de las siguientes funciones:

a)  $y = \sqrt{x}$       b)  $y = \frac{1}{x}$       c)  $y = \log(x - 2)$

**Actividad N°6:** Grafica con ayuda de alguna herramienta tecnológica (computadora, calculadora, celular) e indica para cada una de las siguientes funciones, los ceros, conjuntos de positividad ( $f(x) > 0$ ) y de negatividad ( $f(x) < 0$ )

a)  $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$       b)  $f(x) = x^2 - 4$       c)  $f(x) = |x| + 1$       d)  $f(x) = |x - 1|$

**Actividad N°7:** Plantea las inecuaciones correspondientes y determina analíticamente los conjuntos de positividad y de negatividad de las funciones del ítem anterior.

**Actividad N°8:** Dadas las siguientes funciones: a)  $g(x) = -2x^2 + 3$       b)  $f(x) = x^2 + 3x + 1$

Represéntalas gráficamente. Indica en cada caso, concavidad e intervalos de positividad y negatividad.



## TRABAJO PRÁCTICO N°7: DOMINIO Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

**Actividad N°1:** Dadas las siguientes funciones:

$$a) y = \frac{x-1}{|x|} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$b) f(x) = \frac{x+1}{x} \ln(x+1)$$

$$c) y = \ln\left(\frac{2x}{x+2}\right)$$

$$d) y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$$

$$e) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-9}}$$

- Hallá analíticamente el dominio de cada una de las funciones. Es decir plantea las inecuaciones y resolvelas detalladamente. Indicá el conjunto como intervalo.
- Representá gráficamente cada función con ayuda de cualquier software (Geogebra, Graph, Winplot, etc) copialos en la hoja y marcá en él, el Dominio que obtuviste en el ítem anterior. Indicá en cada función el conjunto Imagen.

**Actividad N°2:**

- Sea la función  $f(x) = x^2 - 1$ , indicá el valor de las siguientes imágenes:

$$f(4) = \quad f(-5) = \quad f(t) = \quad f(h+1) =$$

- Como podés ver en los ejercicios anteriores, cuando se quiere buscar la imagen o codominio para un valor particular de  $x$ , se reemplaza la variable independiente en la función y se reduce a la mínima expresión. El resultado puede ser un n° o una expresión algebraica, como ocurre en los dos últimos casos.
- Si en  $f(x) = x^2 - 1$ , se reemplazara la variable por una expresión que también depende de  $x$ , como por ejemplo  $g(x) = \sqrt{x}$ , como se denomina el proceso de reemplazar una variable por otra función y mostrá como quedaría la expresión final.
- Sea  $f(x) = x^2 - 1$  y  $g(x) = \sqrt{x}$ , hallá  $f[g(x)]$  y  $g[f(x)]$ . Analizá el Dominio de cada función compuesta.

**Actividad N°3:** Determiná detalladamente el Dominio de la siguiente función compuesta:

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right)}$$



## TRABAJO PRÁCTICO N°8: Gráfica de funciones de una variable real – Monotonía y Paridad

### Clasificación de las funciones elementales

Aunque las funciones elementales se pueden clasificar de diferentes maneras según sus propiedades y formas, antes de continuar con su análisis resulta conveniente hacer la siguiente clasificación según las operaciones presentes en las mismas.

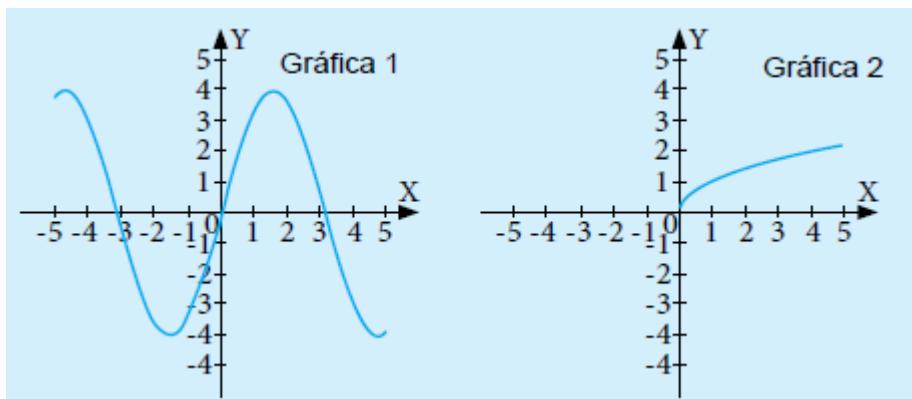
Las funciones elementales se clasifican en funciones algebraicas y funciones trascendentes.

Las funciones algebraicas se clasifican a su vez en polinómicas, racionales e irracionales. Mientras que las funciones trascendentes se clasifican a su vez en trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.



En las próximas guías, trabajaremos con distintas funciones, analizando y clasificándolas según la expresión algebraica y las características de su gráfica.

**Actividad N°1:** Dadas las siguientes funciones:



Responde, según el análisis de los gráficos:

- Clasifica cada función, según el cuadro anterior.
- Indica el conjunto Dominio e Imagen de cada una.
- Los ceros de cada función
- Los intervalos donde es monótona creciente o monótona decreciente.
- ¿Es alguna de las funciones par o impar? ¿por qué?



f) ¿Cuál es el modelo matemático (o la función) que mejor se ajusta o representa a la gráfica 2? Justifica tu respuesta.

- a)  $f(x) = 3x^2$ ; para  $x \geq 0$
- c)  $f(x) = mx + b$ ; para  $x \geq 0$
- b)  $f(x) = e^x$ ; para  $x \geq 0$
- d)  $f(x) = \sqrt{x}$ ; para  $x \geq 0$
- e) Ninguna de las anteriores

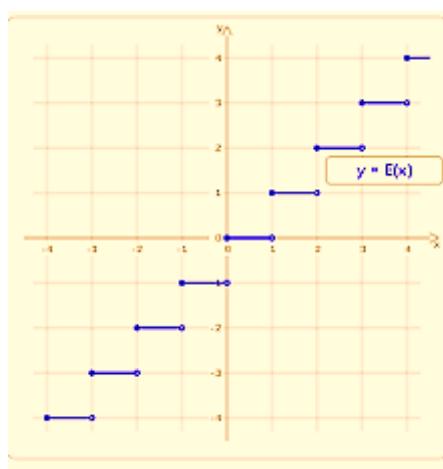
**Actividad N°2:** Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 + 2 \quad g(x) = -x^4 + 8x^2 - 16 \quad h(x) = x^3 + 2x \quad i(x) = |x - 2|$$

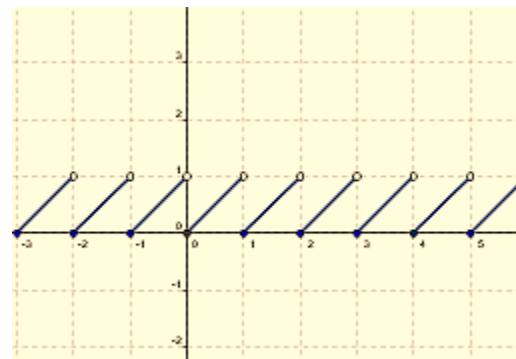
- a) Analiza si es una función par o impar, desde el punto de vista gráfico y analítico.
- b) Analiza si es una función monótona creciente o decreciente, en todo el dominio o por intervalos. Justifícalo desde su definición analítica y desde su gráfica.

**Actividad N°3:** Las siguientes son funciones especiales, cuyo nombre y gráfica están a continuación. Indica en cada una de ellas su Dominio, Imagen, puntos de intersección con los ejes cartesianos, monotonía y si es función par o impar:

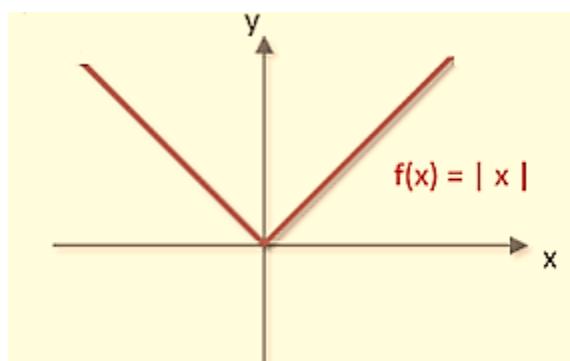
**Función parte entera**



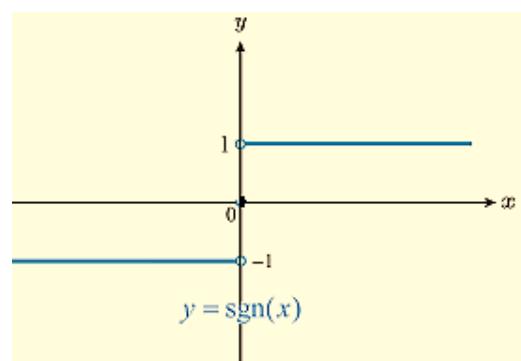
**Función mantisa**



**Función valor absoluto**



**Función signo**





## TRABAJO PRÁCTICO N°9: Función inversa – Función logarítmica y exponencial

**En esta guía incorporamos a estudio de las funciones, su clasificación y el análisis de si tiene inversa. A modo de ejemplo de estos contenidos trabajaremos de manera detallada con las funciones trascendentales: logarítmicas y exponenciales.**

### Funciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas e inversas

Según el tipo de correspondencia las funciones pueden o no tener ciertas propiedades que son determinantes para poder realizar algunas operaciones entre ellas. Algunas de estas propiedades son las siguientes:

**Una función  $f : X \rightarrow Y$  es inyectiva, o “uno a uno”, si para cada elemento en el conjunto imagen de  $f$  corresponde un único elemento (preimagen) en el dominio.**

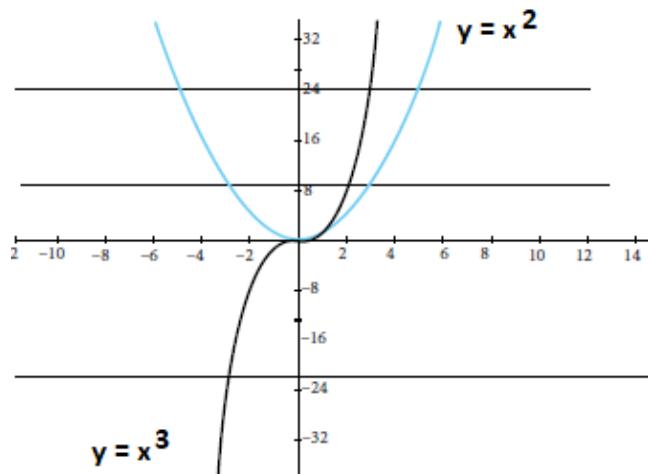
De manera más precisa, una función  $f : X \rightarrow Y$  es inyectiva cuando para  $x_1, x_2 \in X$  se cumple alguna de las dos afirmaciones equivalentes:

- Si  $f(x_1) = f(x_2)$ , necesariamente se cumple  $x_1 = x_2$ .
- Si  $x_1 \neq x_2$  necesariamente se cumple  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

O sea, una función es **inyectiva** si cada  $y = f(x)$  es la imagen de exactamente un único elemento del dominio. En otras palabras, de todos los pares  $(x,y)$  pertenecientes a la función, las **y** no se repiten.

El significado gráfico de la inyectividad es que rectas paralelas al eje “X” cortan a la gráfica en un único punto. De donde, para determinar geométricamente si una función es inyectiva, graficamos la función por medio de una tabla de pares ordenados. Luego trazamos líneas horizontales (paralelas al eje X) para determinar si las y (las ordenadas) se repiten o no.

En la siguiente gráfica, se representa una función cuadrática y una cúbica, a continuación veremos si cumplen con la condición, para ser funciones inyectivas:





El gráfico de la función cuadrática muestra que para cada valor de la imagen hay dos pre imágenes, es decir, dos valores del dominio que tienen a ese valor como imagen pues cada número real positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva y una negativa. También se puede ver que las rectas paralelas al eje x, cortan en dos puntos a la gráfica de la función. Por lo tanto la función cuadrática **no es inyectiva**.

Analíticamente podemos justificarlo de la siguiente manera:

La función  $y = x^2$  no es inyectiva pues la ecuación  $x^2 = a$  tiene dos soluciones si  $a > 0$ ,

$x = \sqrt{a}$  y  $x = -\sqrt{a}$ . Es decir:

$$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \text{ y no } x_1 = x_2.$$

De igual manera, si miramos el gráfico de la función cúbica vemos que cada número real tiene una única preimagen pues a cada número real corresponde una única raíz cúbica real.

Se puede ver que rectas paralelas cortan en un punto a la gráfica de la función cúbica.

Analíticamente lo justificamos: La función  $y = x^3$  es inyectiva pues la ecuación  $x^3 = a$  tiene una única solución para cualquier valor Real, simbólicamente:

$$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

**Actividad N°1:** Determiná si la función  $g(x) = 1 - x^3$ , es o no inyectiva. Justificá analítica y gráficamente tu respuesta.

**Nota:** A veces se puede lograr que una función no inyectiva se convierta en inyectiva, restringiendo su dominio, por ejemplo sabemos que la función cuadrática no es inyectiva, pero si consideramos la función cuadrática con dominio y codominio restringido a  $\mathbb{R}^+$ , o sea  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Esta nueva función es inyectiva pues:

$$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ si } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

**Una función  $f : X \rightarrow Y$  es sobreyectiva cuando todo elemento  $y \in Y$  es imagen de algún elemento del dominio, es decir existe  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$ .**

Es decir; una función  $f : X \rightarrow Y$  es **sobreyectiva** (o **suryectiva**) si el conjunto imagen coincide con el conjunto de llegada.

Si observamos el gráfico de las funciones cuadrática y cúbica anteriores, podemos ver que cualquier recta paralela al eje x, cortaría a la función cúbica, pero si se encuentra debajo del eje, no corta a la función cuadrática. Esto indica que el conjunto Imagen de la función  $y = x^2$  No es igual al Rango. Mientras que en la función cubica sí coinciden, es decir  $Rg = Imf$ . Permitiéndonos establecer cuál de ellas es sobreyectiva y cual no.

Finalmente una función  $f : X \rightarrow Y$  es **biyectiva** si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva.

Dicho de otra manera, una función  $f : X \rightarrow Y$  es biyectiva si y sólo si para cada  $y \in Y$  existe un único  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$ .

**Actividad N°2:** Determiná si las siguientes funciones son biyectivas, justificá tu respuesta analítica y gráficamente.

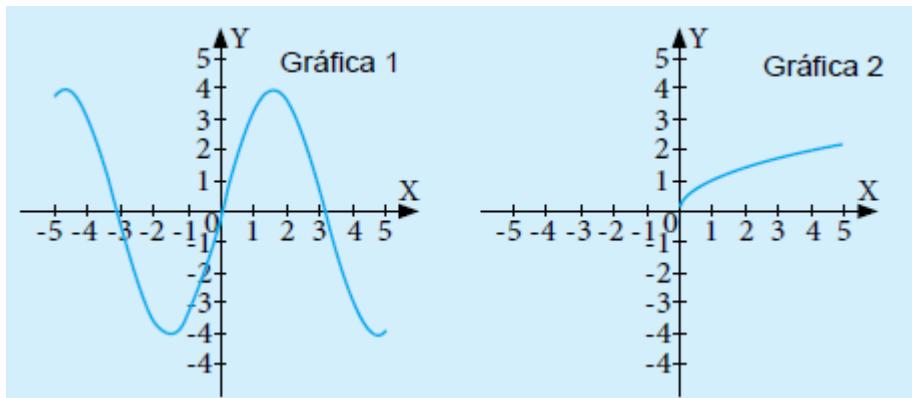


a)  $f: R^+ \rightarrow R^+ / f(x) = \sqrt{x}$

b)  $f: R \rightarrow R / f(x) = x^2 - 2$

*Observación:* Recordá que para justificar que una propiedad o requisito **no se cumple** alcanza con mostrar un ejemplo (*contraejemplo*)

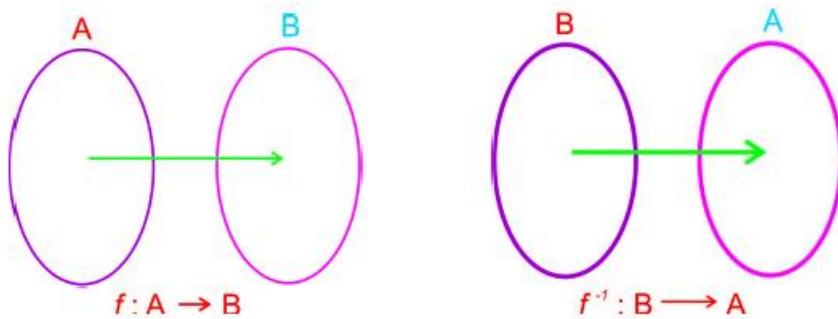
**Actividad N°3:** Dadas las siguientes funciones:



Definí para cada una de las funciones un conjunto Dominio y un conjunto de llegada para que en ese tramo la función sea Biyectiva. Justifica tu respuesta y modifícá los gráficos para evidenciar que es inyectiva y sobreyectiva.

### Función inversa:

Al considerar una función  $f(x)$  que tiene por dominio el conjunto A y por rango el conjunto B ( $f(x) : A \rightarrow B$ ), es llamada **función inversa de  $f(x)$** , a la función que tenga como dominio al conjunto B y como rango al conjunto A, dicha función inversa se denota de la siguiente manera:  $f^{-1}(x) : B \rightarrow A$ .



**Todas las funciones biyectivas tienen la importante propiedad de tener una función inversa.**



Ejemplo: Si una función consiste en elevar al cuadrado y otra función consiste en extraer la raíz cuadrada, donde sus Dominios e Imágenes están restringidas de tal manera que ambas son biyectivas,

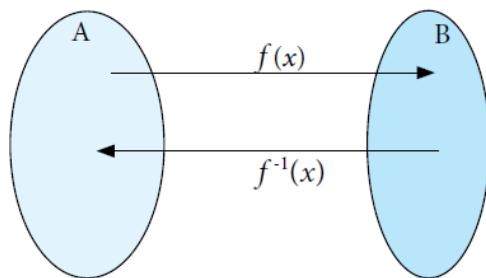
$$f: R^+ \rightarrow R^+ / f(x) = \sqrt{x} \quad y \quad g: R^+ \rightarrow R^+ / f(x) = x^2$$

Las funciones  $f$  y  $g$  son una inversa de la otra, de manera intuitiva una neutraliza a la otra.

**Propiedad: Dos funciones  $f$  y  $g$  son inversas si su composición es la función identidad.**

$$(f \circ g)(x) = x \quad y \quad (g \circ f)(x) = x$$

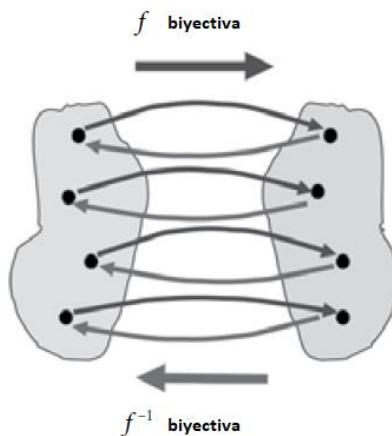
**Actividad N°4:** Realizá las composiciones con las funciones  $f$  y  $g$  del ejemplo, y verificá que se cumple la propiedad.



$f(x)$  es una función y  $f^{-1}(x)$  es su inversa

Nota: El símbolo  $f^{-1}$  no indica que  $f$  está elevada a la potencia  $-1$ , por lo que no se trata del recíproco de la función:  $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

**Actividad N°5:** Para que toda función tenga inversa debe ser biyectiva, como lo muestra el siguiente esquema. Explica esta condición, vinculando las condiciones de existencia y unicidad, para que  $f^{-1}$  sea función.



**Método algebraico para determinar la función inversa:**

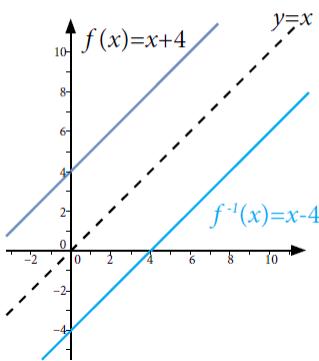
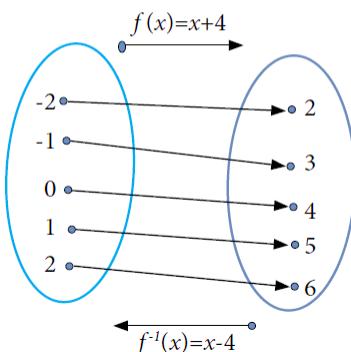


**Primero)** Se intercambian la  $x$  y la  $y$  en la expresión inicial:  $y=f(x) \rightarrow x=f(y)$

**Segundo)** Se despeja la  $y$  en la nueva expresión:  $x=f(y) \rightarrow y=f^{-1}(x)$

**Ejemplo:** Determinar la función inversa de  $y=x+4$ .

**Resolución:** Primero cambiamos la  $x$  por la  $y$ , nos queda entonces,  $x=y+4$ . Segundo, despejamos la  $y$ , y se obtiene la función inversa  $y=x-4$ .



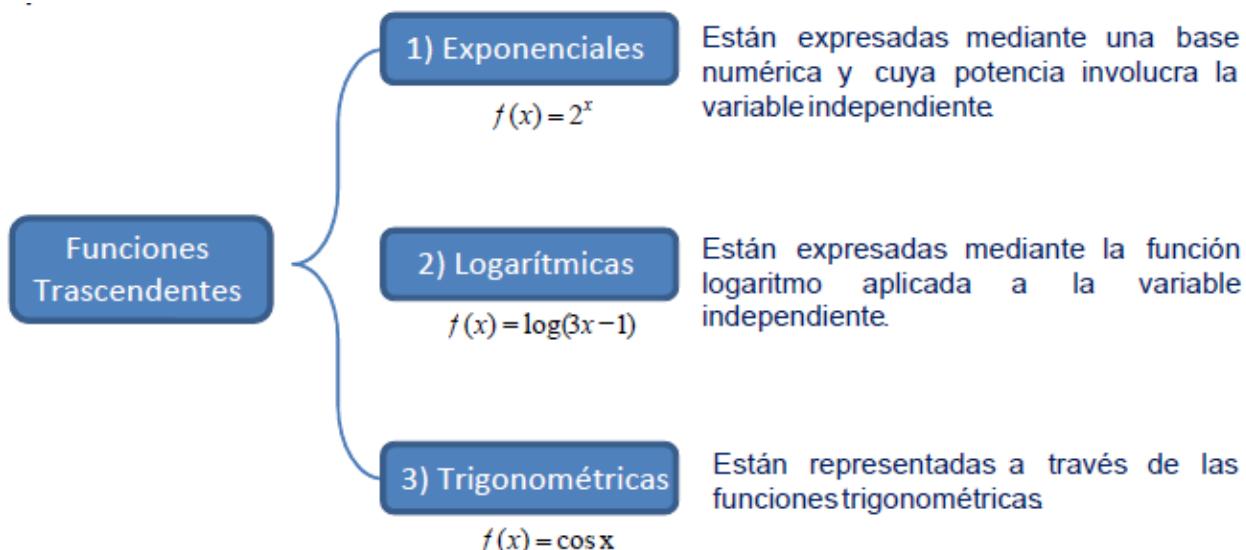
En este ejemplo se puede observar que: el dominio de  $f^{-1}$  es el codominio de  $f$  y, recíprocamente, el codominio de  $f^{-1}$  es el dominio de  $f$ . Si queremos hallar el codominio de una función tenemos que hallar el dominio de su función inversa. Además, de las gráficas se observa que  $f$  y  $f^{-1}$  son simétricas respecto a la función identidad (la recta:  $y = x$ ).

**Actividad N°6:** Analizá si las siguientes funciones tienen inversa, es decir si son biyectivas, restringiendo el Dmf e Imf, y determinarlas en cada caso. Representá  $f$  y  $f^{-1}$  en un mismo sistema de ejes cartesianos para verificar que son simétricos respecto de  $y = x$ .

a)  $h(x) = \sqrt{1-x^2}$

b)  $f(x) = \sqrt{x-3}-1$

Recordemos la clasificación de funciones trascendentales:





En este trabajo, estudiaremos la función logarítmica y exponencial, dejando para un próximo trabajo las trigonométricas.

## Función Exponencial

Una **función exponencial** es una función de la forma  $f(x) = a^x$ , donde  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , y  $x$  es cualquier número real.

De tal manera que la función  $f(x) = a^x$  es una función exponencial con base  $a$ .

**Actividad N°7:** Representá gráficamente la siguientes funciones y mencioná sus características, Dominio, Imagen, Monotonía, Asíntotas, Intersección con los ejes.

$$f(x) = 2^x \quad g(x) = 2^x + 2 \quad h(x) = 3^x \quad k(x) = e^x$$

### Actividad N°8:

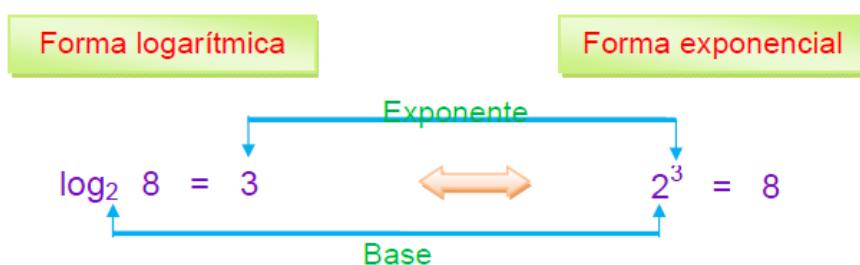
¿Qué ocurrirá si la base de la función exponencial es muy pequeña? ¿Qué comportamiento tendrá su gráfica? Respondé analizando a la función  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

## Función Logarítmica

El logaritmo base  $b$  de un número real  $x$ , mayor que cero, es la inversa de la función exponencial de base  $b$ . Algebraicamente el logaritmo base  $b$  se denota como  $\log_b(x)$ , y dado que esta función y la función exponencial con base "a" son inversas se puede afirmar que:

$$y = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad b^y = x$$

La función se lee como logaritmo de "x" en base  $b$ .



Cada ecuación logarítmica tiene asociada una ecuación o forma exponencial

**Actividad N°9:** Representá gráficamente la siguientes funciones y mencioná sus características, Dominio, Imagen, Monotonía, Asíntotas, Intersección con los ejes.

$$f(x) = \log_2 x \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \quad h(x) = \ln(2 - x)$$

**Actividad N°10:** Definí la inversa de la función  $f(x) = 4^x$  y de la función  $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  usando la definición de logaritmo. Verificá que cada función es simétrica a su inversa, con respecto a  $y = x$ , graficándolas en un mismo sistema de ejes, mediante un software.



## TRABAJO PRÁCTICO N°10: Funciones trigonométricas y sus inversas

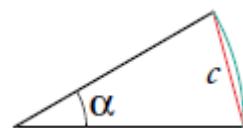
**El Objetivo de esta guía es que cuando** hayan finalizado estén en condiciones de Reconocer las distintas funciones trigonométricas, sus gráficas y propiedades. Poder hallar y analizar las funciones trigonométricas inversas.

Las actividades que te proponemos a continuación buscan reforzar el concepto de Razones Trigonométricas y del Teorema de Pitágoras que se desarrolló durante el Seminario Universitario. Es muy importante que los resuelvas y consultes si tenés dudas ya que estos conceptos facilitarán la comprensión de los contenidos de esta guía.

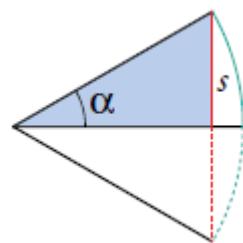
### Trigonometría

Hace más de 3 000 años, babilonios y egipcios utilizaron la semejanza y rudimentos de trigonometría para medir campos, realizar construcciones, e incluso para la astronomía y la navegación... Estos conocimientos pasaron a Grecia, donde cabe destacar a dos grandes astrónomos (pues trigonometría y astronomía van de la mano):

**Hiparco** de Nicea (180-125 a.C.), considerado el “padre de la astronomía”, consolidó el sistema sexagesimal para la medida de ángulos. Teniendo en cuenta que la esencia de la trigonometría es sustituir medidas angulares por medidas lineales, elaboró unas tablas en las que asociaba la medida de cada ángulo con la longitud de la cuerda correspondiente.



**Ptolomeo** de Alejandría (85-165) amplió y mejoró la obra de Hiparco y escribió un enorme tratado de astronomía de trece libros, al que se acabó llamando el Almagesto, (el más grande).



Los indios, durante los siglos IV y V, desarrollaron una trigonometría con un enfoque distinto al de los griegos: asociaron a cada ángulo la longitud de la semicuerda del ángulo doble (lo que posteriormente se llamaría seno del ángulo), consiguiendo así trabajar con triángulos rectángulos, más fáciles de manejar.

Los árabes (siglos IX-X) se inspiraron en el *Almagesto de Ptolomeo* pero utilizaron las tablas de los senos de los indios, las ampliaron con otras medidas y las mejoraron. Su trigonometría, bien fundamentada y muy práctica, se extendió por Europa a partir del siglo XII.

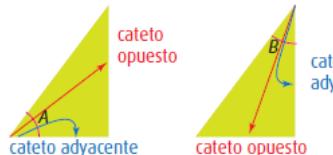
### Para recordar...

Las funciones trigonométricas se definen como los cocientes de dos de los lados de un triángulo rectángulo.

#### Funciones trigonométricas

Las principales funciones trigonométricas son:

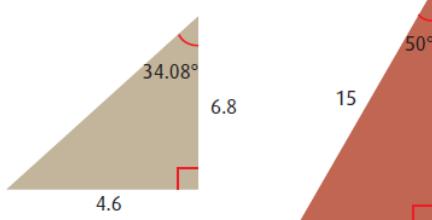
$$\operatorname{Sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$



$$\operatorname{Cos} A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{Tan} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

### Actividad n°1:

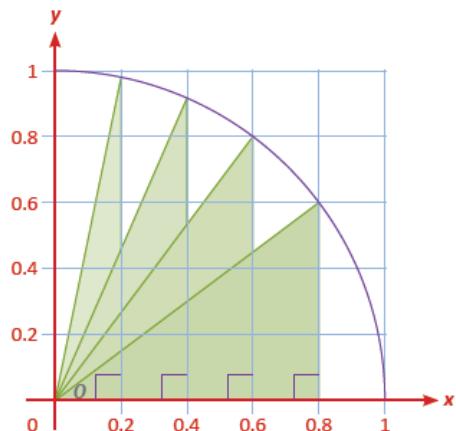




- Resolvé los siguientes triángulos rectángulos (es decir, hallá la medida de todos sus ángulos y sus lados).
- Identificá cada uno de los catetos dependiendo del ángulo de referencia.
- En todos los triángulos, ¿cuál es el lado más largo?
- Calculá las funciones trigonométricas de cada ángulo mediante los cocientes: co/hip, ca/hip y co/ca y verificá los resultados calculando cada función del ángulo correspondiente con calculadora.
- ¿Cuáles de estos cocientes siempre son menores que uno? ¿Cuáles de estos cocientes son mayores que uno?

**Actividad nº2:**

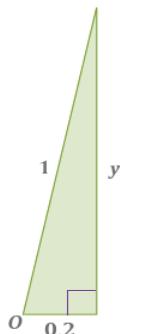
En el plano cartesiano de la derecha se trazó la cuarta parte de un círculo de radio 1 y se hicieron marcas a cada 0.2 unidades en ambos ejes. Se trazaron triángulos rectángulos determinados por líneas verticales desde los puntos marcados en el eje x hasta el cruce con la circunferencia, y por la unión de cada uno de estos cruces con el origen.



Usá el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas para completar la siguiente tabla de valores, correspondientes a los cuatro triángulos rectángulos formados.

Medida de la hipotenusa	Valor de $x$	Valor de $y$	$\sin O$	$\cos O$
1	0.2	0.98		
1	0.4			
1	0.6			
1	0.8			

El triángulo de la izquierda está sacado de la figura de arriba, cuando  $x = 0.2$ . Para calcular, por ejemplo, el valor de  $y$  en este triángulo, se usa el teorema de Pitágoras:



$$\begin{aligned}(0.2)^2 + y^2 &= 1 \\ 0.4 + y^2 &= 1 \\ y^2 &= 1 - 0.04 \\ y^2 &= 0.96 \\ y &= \sqrt{0.96} \\ y &= 0.98\end{aligned}$$

¿Qué conjetura pueden hacer acerca del par ordenado  $(x, y)$  respecto del  $\sin O$  y del  $\cos O$ ?

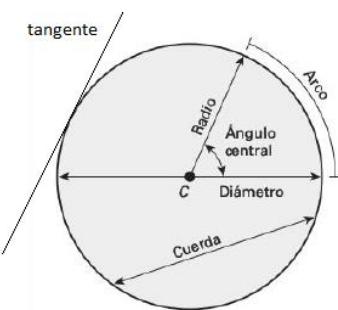


## Círculo trigonométrico

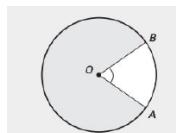
Es importante que veamos algunos conceptos y elementos relacionados con el círculo y los sistemas de medición de un ángulo.

La **circunferencia** es un conjunto de puntos en un plano que están situados a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Algunos elementos asociados a su gráfica son:

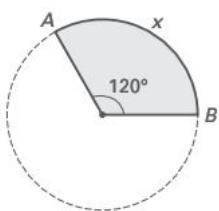


Se llama **ángulo central** si tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios.



Si se tiene en cuenta la definición de Perímetro, dado una circunferencia de radio  $r$ , el perímetro viene dado por la expresión:  $P = 2\pi r$

Si en la figura mostrada, se busca determinar la longitud  $x$  del arco AB, si el radio de la circunferencia es 10.5 cm, resulta:



*Solución:*

Consideremos la proporción sombreada

$$\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{\pi(21)}, \text{ por lo tanto,}$$

$$x = \frac{120^\circ(21)\pi}{360^\circ} = 7\pi \approx 22 \text{ cm}$$

## Sistema circular o sistema sexagesimal

La medida de un ángulo puede expresarse en diferentes unidades, los que nosotros usaremos son *el sistema sexagesimal* y *el sistema circular*.

El **sistema sexagesimal** es uno de los sistemas más empleados para medir ángulos y consiste en dividir una circunferencia en 360 partes iguales llamadas **grados**, el grado se divide en 60 partes iguales llamadas **minutos** y cada minuto se divide en 60 partes iguales llamados **segundos**.

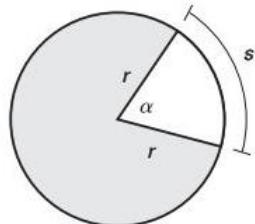
Símbolos de estas unidades	
Grado	°
Minuto	'
Segundo	"



La unidad en el **sistema circular** es la *unidad circular* y es el ángulo central de una circunferencia cuyos lados interceptan un arco de longitud igual al radio.

Radián es el nombre que se le da a la unidad circular en este sistema.

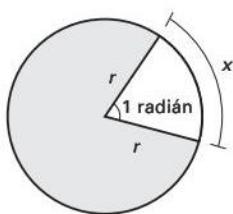
Cuando la longitud de  $s$  es igual que la del radio  $r$ , el ángulo  $\alpha$  es **1 radián**, es decir:



$$\text{Si } s = r, \text{ entonces, } \alpha = \frac{s}{r} = 1 \text{ radián}$$

### Equivalencia entre el sistema circular y sexagesimal

Como la longitud de la circunferencia (perímetro) es de  $2\pi r$ , si representamos por  $x$  el número de grados de un radián, podemos establecer la siguiente proporción:



$$\frac{x}{r} = \frac{360^\circ}{2\pi r} \text{ de donde } x = \frac{360^\circ r}{2\pi r} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Por lo tanto,  $x = 57,29578^\circ$ , que es valor de 1 radián en grados. Sin embargo, es más fácil y práctico recordar que  $\pi \text{ radianes} = 180^\circ$

Ejemplos:

- 1- Expresá en radianes el ángulo de  $45^\circ$ .

Para la conversión, vamos a multiplicar  $45^\circ$  por el factor  $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$

$$45^\circ = 45^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 0,78539 \text{ rad}$$

- 2- Expresá en  $2,5$  rad en unidades sexagesimales.

Procedemos de forma semejante al caso anterior, pero ahora el factor de conversión es  $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$

$$2,5 \text{ rad} = 2,5 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 143,23^\circ$$

### Actividad n°3:

- a) Calculá a cuántos radianes equivalen los siguientes ángulos medidos
- b) a.  $125^\circ$       b.  $15^\circ 6' 55''$       c.  $485^\circ 23' 23''$
- c) Calculá a cuántos grados equivalen los siguientes ángulos medidos en radianes:  
a.  $\frac{5}{2}\pi$       b.  $3\pi$       c.  $\frac{13}{6}\pi$       d.  $54 \text{ rad}$

### Ángulo trigonométrico

La magnitud de un ángulo depende de la amplitud de su rotación, en trigonometría, puede ser ilimitada, ya que se puede considerar valores mayores a 1 giro.

El ángulo trigonométrico puede ser negativo o positivo, según el sentido de giro.



Como a continuación estudiaremos el valor de las funciones trigonométricas para ángulos cualquier magnitud o signo. Por lo que nos valdremos de las coordenadas cartesianas.

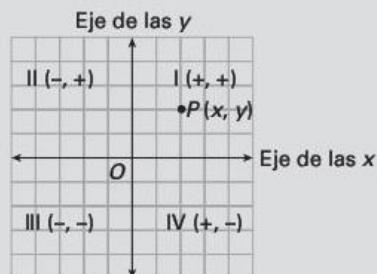
Coordenadas cartesianas es un sistema de correspondencia que hay entre cada punto geométrico y un par de números reales en el plano. Este sistema está formado por dos ejes, uno horizontal y otro vertical, los cuales son perpendiculares y forman cuatro regiones llamadas **cuadrantes**.

$P(x, y)$  es un punto geométrico, donde  $(x, y)$  representan un par de números reales.

$x$  se llama *abscisa* y la  $y$  se llama *ordenada*; juntas se conocen como coordenadas.

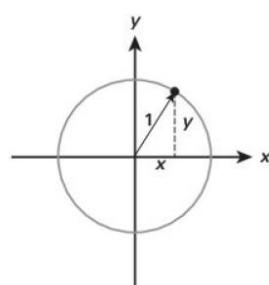
I, II, III y IV se llaman cuadrantes y definen los signos de las coordenadas  $(x, y)$ .

$O$  es el origen.

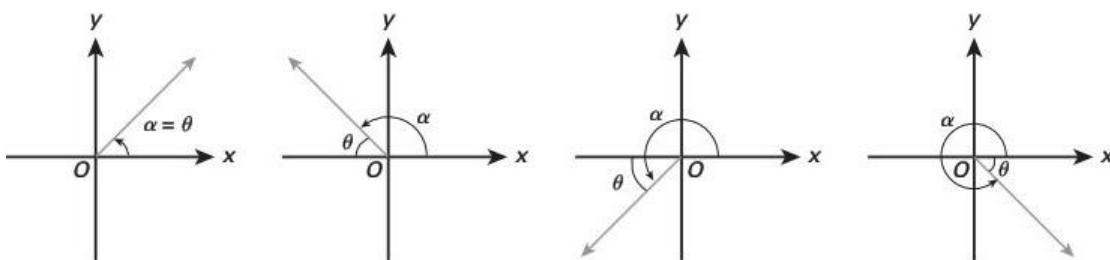


### Círculo trigonométrico o círculo unitario

**Círculo trigonométrico** es el que se traza con un radio igual a 1 y su centro se encuentra en el origen del sistema de ejes cartesianos.



A continuación podemos ver como varía el ángulo central o ángulo de giro  $\alpha$  y otro ángulo de referencia  $\theta$  asociado con  $\alpha$ , en los diferentes cuadrantes.

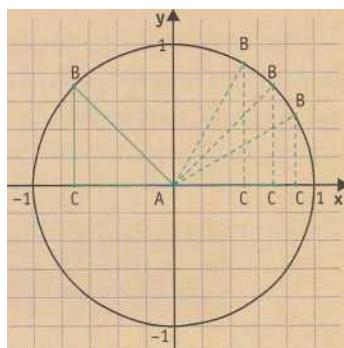


A modo de conclusión final, te invitamos a mirar el siguiente video

[https://www.youtube.com/watch?v=VNU9P\\_WUeQE](https://www.youtube.com/watch?v=VNU9P_WUeQE)

### ¿Cómo se calcula el Seno y Coseno en el círculo trigonométrico?

Tomando el punto A como la intersección de los ejes, es decir el punto (0 ; 0), se tiene una circunferencia de radio 1 con centro (0 ; 0) que pasa por los puntos (1; 0); (0 ; 1); (-1; 0) y (0; -1). El punto B determina cada punto de la circunferencia. En el primer cuadrante de esta circunferencia quedan marcados todos los triángulos rectángulos con hipotenusa igual a 1 donde B = (x; y) con x y y números reales positivos.



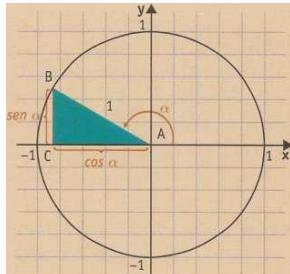
De este modo, para un valor de  $\alpha$  (ángulo comprendido entre AC y AB) existe un único triángulo rectángulo con hipotenusa igual a 1 que está representado en el primer cuadrante de esta circunferencia. Ese triángulo rectángulo determina con su vértice B un único punto del plano sobre la circunferencia con coordenadas (x; y). Además se verifica que:

$$\operatorname{Sen}\alpha = \frac{BC}{1} = BC \quad \text{y} \quad \operatorname{Cos}\alpha = \frac{AC}{1} = AC.$$

Como BC es el valor de la ordenada del punto B, es decir, BC = y resulta:  $\operatorname{Sen}\alpha = BC = y$   
Y de igual manera AC es el valor de la abscisa del punto B, es decir, AC = x, por lo tanto:  
 $\operatorname{Cos}\alpha = AC = x$

Si se continúa girando el lado AB, se pasa hacia el segundo cuadrante, donde ahora el ángulo  $\alpha$  resulta ser mayor que  $90^\circ$ .

Para estos ángulos es posible extender la relación anterior, es decir, el seno de ese ángulo mayor a  $90^\circ$  resulta ser el valor que toma la coordenada del eje y para el punto B de la circunferencia y el coseno de ese ángulo es el valor que toma la coordenada del eje x del punto B.





Como en la circunferencia es posible medir cualquier ángulo, se definen las razones trigonométricas para un ángulo  $\alpha$  cualquiera de la siguiente manera:

- Se marcan el ángulo  $\alpha$  y el radio correspondiente a él en la circunferencia.
- Se determina el punto  $B = (x; y)$ , como la intersección del radio dibujado y la circunferencia.
- Se define  $\text{Sen } \alpha = y$ ;  $\text{Cos } \alpha = x$ .

Los ángulos pueden medirse en grados y en radianes. Si bien lo que importa es la distancia que recorre el ángulo sobre la circunferencia, para evitar confusiones, se comienza a medir los ángulos desde el punto  $(1; 0)$  y en sentido antihorario.

La circunferencia trigonométrica queda dividida por los ejes coordenados en 4 sectores, cada uno de los cuales se llama cuadrante. Los cuadrantes se cuentan en sentido contrario a las agujas del reloj.



Al establecer que el Seno y el Coseno de un ángulo resultan ser las coordenadas  $x$  e  $y$ , la ubicación de éstas coordenadas condicionará el signo del Seno y del Coseno.

#### Actividad n°4:

Para explorar el signo del Seno y del Coseno dependiendo de la amplitud del ángulo te proponemos el siguiente Applet: <https://ggbm.at/agYBzUP5>

Ahora podés completar el siguiente cuadro con los signos de Seno y Coseno en cada cuadrante:

Cuadrante	Amplitud medida en grados	Amplitud medida en radianes	Signo del Seno	Signo del Coseno
Primero	$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$	$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ rad	+	+
Segundo				
Tercero				
Cuarto				

#### Cálculo de senos y cosenos con calculadora

#### Actividad n°5:

- a) ¿Cuál es el valor del seno del ángulo que mide  $37^\circ$ ? ¿Cuánto mide en radianes un ángulo de  $37^\circ$ ? ¿Cuál es el valor del seno del ángulo medido en radianes?
- b) ¿Cuáles son los valores de los ángulos, medidos en radianes, que se encuentran entre  $0$  y  $2\pi$ , cuyo seno es igual a  $0,9$ ?

Si en el visor de la calculadora figura la sigla RAD o la letra R significa que se están tomando los ángulos medidos en radianes.

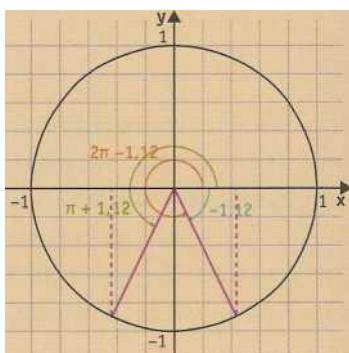


Si en cambio, en el visor de la calculadora aparece la sigla DEG o la letra D significa que se están midiendo los ángulos en grados sexagesimales.

- c) ¿Cuáles son los ángulos comprendidos entre  $0$  y  $2\pi$  cuyo Seno es igual a  $-0,9$ ?

Si se utiliza la calculadora en Radianes aparece en el visor aproximadamente  $-1,12$ : **¿Qué significa un ángulo de  $-1,12$ ?**

Significa que se comenzó a medir el ángulo para el otro lado, es decir, se cambió el sentido en el cual se está midiendo:



Un ángulo negativo se mide en sentido horario. Entonces, el ángulo de  $-1,12$  resulta ser equivalente a  $2\pi - 1,12 = 5,16$ . Y como  $-1,12$  es menor que  $0$ , el ángulo cuyo seno es igual a  $-0,9$  y se encuentra entre  $0$  y  $2\pi$  es  $5,16$ . Pero el ángulo que surge de hacer  $\pi + 1,12 = 4,26$  también verifica:

$\text{Sen } 4,26 = -0,9$ . Es decir, se le agregó a  $\pi$  lo mismo que se le quitó a  $2\pi$ , para obtener dos triángulos iguales.

## La Función Seno

Después de este recorrido con los ángulos y los triángulos es posible establecer una relación funcional entre un ángulo y su Seno o su Coseno. Se estudió que cada ángulo tiene un único valor posible para Seno y para Coseno. Entonces es posible relacionar la medida de un ángulo y el valor que toma el seno o la medida de un ángulo y el valor que toma el coseno para ese ángulo.

Se definen entonces dos funciones:  $f(x) = \text{Sen } x$  y  $g(x) = \text{Cos } x$  donde **cada valor x se corresponde con un ángulo medido en radianes**.

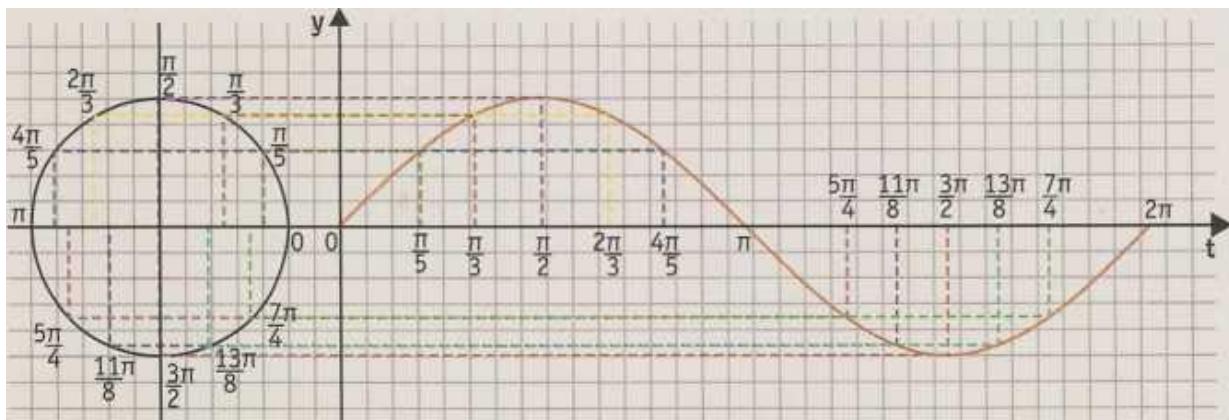
El dominio de estas funciones son todos los números reales. Es decir:  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$  y  $\text{Dom } g = \mathbb{R}$ .

**Para ir pensando:** ¿Cuál será el conjunto imagen de estas dos funciones?

Para comenzar a analizar el gráfico de  $f(x) = \text{Sen } x$  es conveniente recurrir a la circunferencia trigonométrica pues para cada ángulo, su seno es la ordenada del punto que es la intersección del radio con la circunferencia. Si se comienza a marcar distintos ángulos en la circunferencia trigonométrica y luego se trasladan al gráfico queda determinada la gráfica de la función Seno (también llamada sinusoidal).

En el siguiente Applet podrás explorar la construcción del gráfico de la función Seno: <https://ggbm.at/qUGW6mYA>

El gráfico que se obtiene es similar al siguiente:

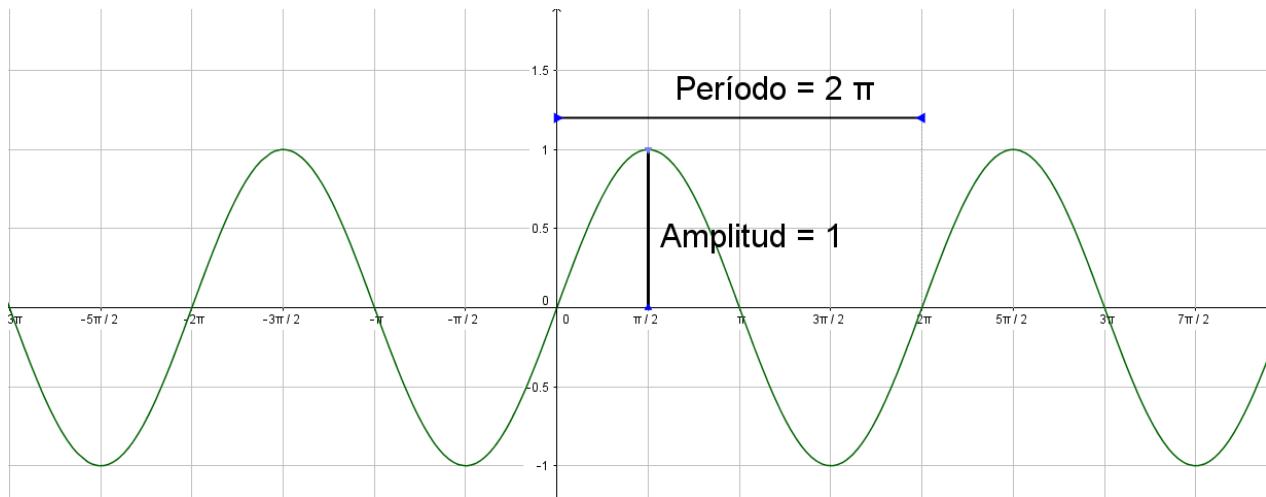




La función Seno es una función periódica porque se repite por períodos:

Se cumple que  $\operatorname{Sen}(2\pi + x) = \operatorname{Sen} x$ . Esto quiere decir que cada  $2\pi$ , es decir por cada giro completo de  $360^\circ$  comienza nuevamente la misma gráfica.

Si escribimos  $\operatorname{Sin}(x)$  en un graficador como Geogebra obtenemos:



Se denomina **período** de una función a la longitud de un ciclo que se repite. Si una función,  $f$ , tiene un período  $p$ , entonces la función toma el mismo valor para los valores de  $x$  que se encuentran a una distancia  $p$ :  $f(x + p) = f(p)$ .

Como los valores del Seno siempre varían entre  $-1$  y  $1$ , la altura mayor que alcanza la onda es  $1$ , se dice entonces que la **amplitud** de la onda es de  $1$ .

Además se puede afirmar que el conjunto imagen de la función  $f(x) = \operatorname{Sen} x$  es el intervalo  $[-1; 1]$

## La función Coseno

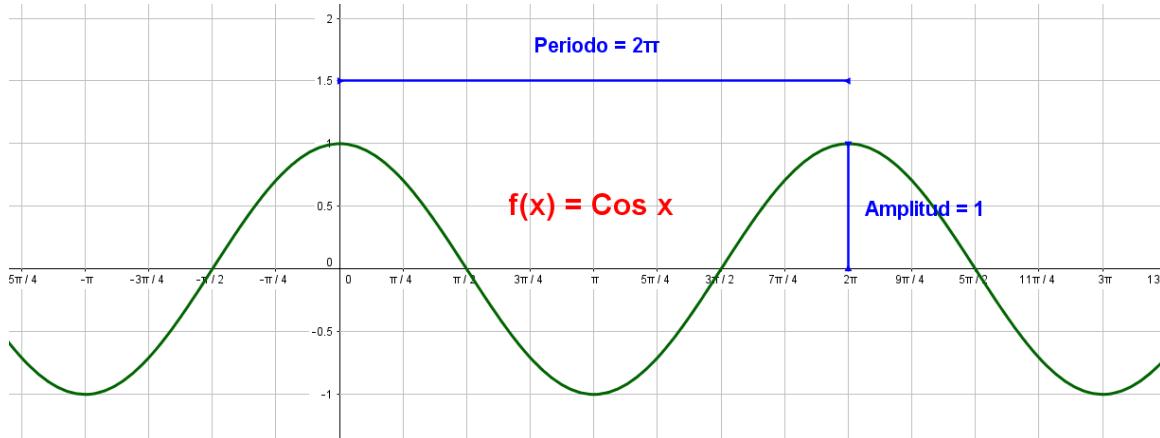
Para comenzar a analizar el gráfico de  $f(x) = \operatorname{Cos} x$  es conveniente recurrir a la circunferencia trigonométrica pues para cada ángulo, su Coseno es la abscisa del punto que es la intersección del radio con la circunferencia. Para poder visualizar la correspondencia entre la longitud del cateto adyacente (o valor de abscisa) con el eje de ordenadas de la función se puede rotar  $90^\circ$  en sentido horario el  $0^\circ$  de la circunferencia trigonométrica.

Si se comienza a marcar distintos ángulos en la circunferencia trigonométrica y luego se trasladan al gráfico queda determinada la gráfica de la función Coseno.

En el siguiente Applet podrás explorar la construcción del gráfico de la función Coseno:

<https://ggbm.at/XW2kVRm8>

El gráfico que se obtiene es similar al siguiente:





Al igual que la función Seno, la función Coseno tiene una **amplitud** de onda de 1. Además, el período de la función Coseno es  $2\pi$ . Por último, se puede afirmar que el conjunto imagen de la función  $f(x)=\cos x$  es el intervalo **[-1; 1]**.

### Cálculo de ceros

Los ceros de una función son los valores de la variable que provocan que la función valga 0. Gráficamente son los valores de  $x$  donde el gráfico de la función corta el eje horizontal. Se analizará a continuación cuáles son esos valores para las funciones Seno y Coseno.

#### Actividad nº6:

- Con la calculadora en DEG o RAD según corresponda, realizá los siguientes cálculos:  
 $\sin 0^\circ = \dots$  ;  $\sin \pi = \dots$  ;  $\sin 360^\circ = \dots$  ;  $\sin 3\pi = \dots$  ;  $\sin 720^\circ = \dots$
- ¿Cómo se pueden explicar los resultados obtenidos? Verificar los resultados obtenidos en el applet de Geogebra de la función Seno: <https://ggbm.at/qUGW6mYA>
- ¿Cuáles son todos los valores de  $x$  que verifican  $\sin x = 0$ ?

Al utilizar la calculadora se observa que en todos los casos la respuesta es 0.

Si se analiza en la circunferencia trigonométrica en el Applet de Geogebra, el Seno de un arco de longitud  $x$ , es decir, el valor de la ordenada del punto que determina en la circunferencia, solo es cero en los valores de  $x = 0$  y  $x = \pi$ . Por lo tanto, cada vez que, al recorrer la circunferencia se pase por esos puntos, la segunda coordenada es 0, lo que implica que el Seno es 0.

*¿Cuáles son los otros valores de  $t$  que cumplen  $\sin x = 0$ ?*

El punto de la circunferencia trigonométrica que equivale a  $x = 0$  es el mismo que corresponde a cada vuelta completa. El ángulo que se obtiene cuando se recorre una vuelta es  $2\pi$ , si se recorren 2 vueltas es  $4\pi$ , si se recorren 3 vueltas es  $6\pi$ . Es decir, si se recorre una cantidad entera de vueltas, por ejemplo  $k$  vueltas (donde  $k$  es un número entero), la longitud de arco recorrida sobre la circunferencia es de  $2\pi k$ . Para cada uno de esos ángulos el seno vale 0, ya que corresponden a un punto de ordenada 0, el  $(1; 0)$ .

Si los ángulos están medidos en grados, el seno de cualquier múltiplo de  $360^\circ$  vale 0.

Si se recorre media vuelta, es decir un ángulo de  $\pi$  radianes, el seno también vale 0. Una vez que se está "parado" en ese punto, cada vez que se le sume una cantidad entera de vueltas se vuelve a "caer" en el mismo punto. Sumar vueltas enteras es sumar  $2\pi k$ , donde  $k$  es un número entero que señala la cantidad de vueltas. Así, si  $k=3$  significa que se recorrieron 3 vueltas enteras, lo que equivale a  $2\pi * 3 = 6\pi$ .

Si al ángulo que mide  $\pi$  se le agregan 3 vueltas, se agregan  $6\pi$  más, por lo tanto, en total se recorre  $\pi + 6\pi = 7\pi$ . Y en este caso,  $\sin 7\pi = \sin \pi = 0$ . Es decir que el seno de cualquier múltiplo de  $\pi$  o de  $180^\circ$ , expresado en grados, vale 0.

*¿Significa que tanto  $\pi$  como  $\pi + 2\pi k$ , es decir,  $k$  vueltas más de  $n$  representan el mismo ángulo?*

No, son dos ángulos distintos, pues un arco de longitud  $\pi$  se corresponde con un ángulo de  $180^\circ$ , en cambio un arco de longitud  $7\pi$  se corresponde con haber girado  $180^\circ$  y 3 veces más  $360^\circ$ , es decir, se giró un total de  $1260^\circ$ . No son iguales.

De este modo, la función Seno tiene infinitos ceros que se encuentran todos a la misma distancia unos de otros. Cada vez que se da medio giro a partir de 0, el seno se anula, por lo tanto dos ceros consecutivos de esta función se encuentran a una distancia de  $\pi$ , que se corresponde con la mitad del período.

$$C^\circ = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

### Máximos y mínimos. Conjunto de positividad y negatividad

#### Actividad nº7:

Hallá, si existen, los valores máximos y mínimos de la función  $f(x) = \sin x$ . ¿Para qué valores de  $x$  la función alcanza esos máximos o mínimos?



Como se analizó anteriormente,  $\text{Im}(f) = [-1; 1]$ , lo que significa que el mayor valor que puede alcanzar el Seno es 1, mientras que el menor valor es -1.

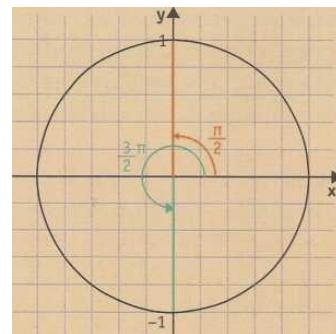
Para saber dónde se alcanzan esos valores máximos o mínimos hay que hallar los valores de  $x$  que cumplan  $\text{Sen } x = 1$  y los que cumplan  $\text{Sen } x = -1$ .

Podés analizarlo nuevamente en el Applet de Geogebra: <https://ggbm.at/qUGW6mYA>

Si se analiza la circunferencia trigonométrica puedes aplicar la notación que se utilizó para el conjunto de los ceros de la función:

Resulta de este modo que  $f(x) = \text{Sen } x$ , tiene infinitos máximos pero todos ellos alcanzan el mismo valor 1 cuando  $x$  vale  $\frac{\pi}{2}$  radianes o cuando vuelve a la misma posición dando giros completos. Entonces, todos los máximos son de la forma  $x = \frac{\pi}{2} + 2nk$ , con  $k \in \mathbb{Z}$

Además tiene infinitos mínimos que alcanzan el mismo valor -1. La manera de nombrarlos a todos es escribirlos en la forma  $x = \frac{3\pi}{2} + 2nk$ , con  $k \in \mathbb{Z}$



### Actividad n°8:

Encontrá los conjuntos de positividad y negatividad de  $f(x) = \text{Sen } x$  explorando la función en el Applet de Geogebra: <https://ggbm.at/qUGW6mYA>

En la circunferencia trigonométrica es posible analizar cuándo el Seno toma valores positivos y cuándo toma valores negativos.

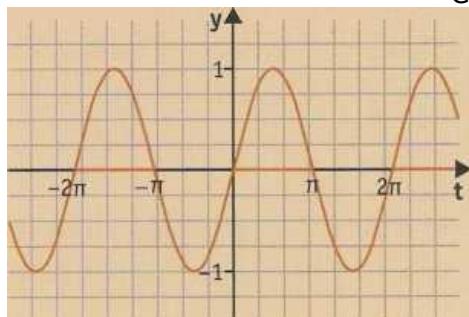
Para que el seno sea positivo, es decir para que sea positiva la ordenada de un punto en la circunferencia, el ángulo tiene que estar en el primer o el segundo cuadrante, o sea comprendido entre 0 y  $\pi$ .

Para que el seno de un ángulo resulte negativo, el ángulo tiene que estar en el tercer o el cuarto cuadrante, lo que se corresponde con los ángulos comprendidos entre  $\pi$  y  $2\pi$ .

Entonces es positiva en el intervalo  $(0 ; \pi)$  y negativa en el intervalo  $(\pi ; 2\pi)$ .

Por lo tanto si solo se analizaran ángulos entre 0 y  $2\pi$  se tendría que:

$$C^+ = (0 ; \pi) \quad y \quad C^- = (\pi ; 2\pi)$$



Pero si se realiza un análisis apoyándose en el gráfico y teniendo en cuenta que la función es continua y periódica, resulta que entre dos ceros consecutivos se tiene un conjunto de positividad o bien de negatividad de la función. Es positiva en los intervalos de la forma  $(0 + 2\pi k ; \pi + 2\pi k)$  y es negativa en los intervalos de la forma  $(\pi + 2\pi k ; 2\pi + 2\pi k)$  donde  $k$  es un número entero.

### Actividad n°9:

A partir del gráfico de  $\text{Cos } x$  y del applet <https://ggbm.at/XW2kVRm8> consideren la función  $g(x) = \text{Cos } x$

a) ¿Cuáles son los conjuntos de positividad y negatividad de  $g(x)$ ?

b) Analicen cuáles son sus ceros.

c) ¿Cuáles son los máximos y mínimos de  $g(x)$  y en qué valores los alcanza?

### Desplazamientos de las funciones trigonométricas

**Actividad nº10:**

Hallá el gráfico, el período, el dominio y la imagen de la función  $h(x) = \operatorname{Sen} x + 3$ .

Para ello pueden explorar el siguiente Applet: <https://ggbm.at/Wbhfs4p3>

Para comenzar con el análisis de la función  $h(x) = \operatorname{Sen} x + 3$  es posible apoyarse en el gráfico que se conoce del Sen x.

Al hacer una tabla de valores, se verifica que para esta nueva función  $h(x) = \operatorname{Sen} x + 3$ , dado un x cualquiera, primero se debe calcular su seno, para luego sumarle 3 a ese valor.

Entonces, los valores que se obtengan serán los del seno de x aumentados en 3 unidades.

Gráficamente sería "subir" 3 unidades cada punto del gráfico de seno de x. Por lo tanto, el gráfico de la función  $h(x) = \operatorname{Sen} x + 3$  queda como el gráfico de Sen x pero desplazado 3 unidades hacia arriba.

Para pensar: *¿El período se modificó? ¿Cambió el conjunto de positividad, negatividad y ceros? ¿Cambió el conjunto Dominio o el conjunto Imagen?*

Se sabe que el período p es la longitud de un ciclo, es decir, la distancia que existe entre los valores que "repiten" de la onda. Para el caso de  $h(x) = \operatorname{Sen} x + 3$  esta distancia no se modificó.

Esto es, cada vez que se da una vuelta completa de  $2\pi$  comienza a repetirse el gráfico.

Por lo tanto el período de  $h(x) = \operatorname{Sen} x + 3$  es  $p = 2\pi$ .

El dominio para esta función continúa siendo el de todos los números reales, pero en cambio ahora los valores de h "se mueven" entre 2 y 4, por lo tanto:

Dom (h) = IR pero Im (h) = [2;4]

La función  $h(x) = \operatorname{Sen} x + c$ , donde c es una constante, produce un desplazamiento del gráfico de seno de x en el eje vertical una cantidad de c unidades hacia arriba, si c es positivo, o  $|c|$  unidades hacia abajo si c resulta negativo.

Este corrimiento no produce modificaciones en el período ni en la amplitud. Además, al no modificarse la onda, la amplitud sigue siendo 1.

**Estudio de las variaciones de la amplitud y del período****Actividad nº11:**

Analizá funciones de la forma  $h(x) = \operatorname{Cos}(a \cdot x + b)$ . A partir del siguiente Applet modificar los valores de los parámetros a y b para responder las preguntas: <https://ggbm.at/EB4s7NKU>

- ¿Qué modificación en el gráfico se observa al modificar el parámetro a? ¿Se modifica el conjunto Dominio, Imagen, los ceros, el conjunto de positividad y negatividad de la nueva función?
- ¿Qué modificación en el gráfico se observa al modificar el parámetro b? ¿Se modifica el conjunto Dominio, Imagen, los ceros, el conjunto de positividad y negatividad de la nueva función?

Explicalo con tus propias palabras antes de leer el texto a continuación:

**Constante de fase**

La función  $g(x) = \operatorname{Cos}(x + b)$ , donde b es una constante y  $a=1$ , produce un desplazamiento del gráfico de Coseno de x en el eje horizontal una cantidad de  $|b|$  unidades hacia la izquierda, si b es positivo, o hacia la derecha si b resulta negativo.

No se producen modificaciones ni en la imagen ni en el período ni en la amplitud de la función Coseno de x, pero si en los ceros.

El valor de b indica el corrimiento de la fase por lo que se denomina constante de Fase.

**Frecuencia**

Si solo modificamos el valor de a en el Applet podemos observar que la onda se comprime o se dilata horizontalmente.

Se produce una compresión del gráfico en sentido horizontal, debido a lo cual la longitud de la onda es menor, es decir, cambia el período. La función se repite cada  $2\pi/a$ . Por lo tanto, cuando se toma el doble del valor de la variable, el período se reduce a la mitad.



Al modificar el valor del coeficiente que multiplica a  $x$ , como en la función  $m(x) = \cos(a x)$ , se provoca una distorsión de la onda, ya sea comprimiéndola, en el caso de  $a$  mayor que 1, o dilatándola si  $a$  es mayor que 0 y menor que 1.

En este caso se mantiene la imagen, pero se modifica el periodo que pasa a ser  $P = \frac{2\pi}{|a|}$

El valor de  $a$  es muy importante porque indica la *frecuencia de la onda*.

**Actividad n°12:**

Explorá en el siguiente Applet la modificación de los parámetros de la función Seno:  
<https://ggbm.at/HH5by7e8>

¿Qué diferencia existe entre la función  $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$  y  $g(x) = \sin(3x)$ , teniendo en cuenta la función original  $\sin(x)$ ?

Analizá Dominio, Imagen, Conjunto de Positividad, Negatividad y Ceros.

En el caso de  $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$ , se multiplica la función  $\sin x$  por 3, es decir, a cada valor de  $\sin x$  se lo multiplica por 3 y se produce una distorsión en la onda del gráfico de  $\sin x$ , pero mantiene los ceros de la función ya que si  $\sin x = 0$ , también  $3 \sin x = 0$ .

El período no cambia pero lo que cambia es la amplitud de la onda que ahora es 3.

Al modificarse la amplitud de onda, también se modifica la imagen. Ahora se tiene que  $\text{Im} = [-3; 3]$ .

La función  $f(x) = c \cdot \sin(x)$ , "estira" o "aplasta" la onda de la función seno, es decir, dilata o comprime verticalmente el gráfico ya sea que  $c$  sea mayor que 1 o que  $c$  sea menor que 0 y menor que 1.

Si además  $c$  resulta ser negativo, el gráfico se invierte con respecto al eje horizontal.

Esto produce una modificación en la amplitud de onda y como consecuencia, en la imagen, pero el período se mantiene.

La amplitud pasa a ser el valor absoluto de  $c$ , esto es  $|c|$  y la imagen  $\text{Im}(f) = [-|c|; |c|]$ .

**Actividad N°13:** Definí el Dominio y la Imagen de la función  $f(x) = \sin(x)$  y de la función  $g(x) = \cos(x)$  para que sea biyectiva y admita inversa. Graficalas en un mismo sistema de ejes, mediante un software y determiná su Dominio e Imagen e investigá cómo se las denomina.

## ANEXO: LOGARITMOS

### DEFINICIÓN DE LOGARITMO

Sea  $a$  un número real positivo, distinto de cero y sea  $x$  un número real, se llama **logaritmo en base  $a$  de  $x$** , al  $y$  que cumple:

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x, \text{ con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Es decir: El **logaritmo** de un número, en una **base** dada  $a$ , es el **exponente** al cual se debe elevar la **base** para obtener dicho número.

Ejemplos:

$$\log_2 4 = 2 \text{ porque } 2^2 = 4$$

$$\log_2 1 = 0 \text{ porque } 2^0 = 1$$

$$\log_{1/2} 0.25 = 2 \text{ porque } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\log_{\sqrt{5}} 125 = 6 \text{ porque } (\sqrt{5})^6 = 5^3 = 125$$

$$\log 0,001 = -3 \text{ porque } 10^{-3} = 0,001$$

$$\ln \frac{1}{e^5} = -5 \text{ porque } e^{-5} = \frac{1}{e^5}$$

### Logaritmos decimales

Los **logaritmos decimales o de Briggs**, son los que tienen **base 10**. Se representan por  $\log(x)$ .

### Logaritmos neperianos o logaritmos naturales

Los **logaritmos naturales o logaritmos neperianos** son los que tienen **base e**. Se representan por  $\ln(x)$

De la definición de logaritmos es importante aclarar:

- **No existe el logaritmo** de un número con **base negativa**.  $\nexists \log_{-a} x$
- **No existe el logaritmo** de un **número negativo**.  $\nexists \log_a(-x)$
- **No existe el logaritmo de cero**.  $\nexists \log_a 0$

### PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Sea  $a > 0$  y  $a \neq 1$  con  $b, x$  e  $y$  números reales positivos, entonces:

1. **El logaritmo de 1 es cero**  $\log_a 1 = 0$
2. **El logaritmo en base a de a es uno.**  $\log_a a = 1$
3. **El logaritmo en base a de una potencia en base a es igual al exponente.**  $\log_a a^n = n$
4. **El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.**

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

5. **El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.**

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

6. **El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.**

$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x , n \in R$$

7. **El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz.**

$$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x , n \in R$$

8. **Cambio de base:**

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Nota: Esta expresión es útil para calcular logaritmos de base  $a$ , con calculadoras que solo poseen logaritmo decimal o natural

Ejemplos:

- $\log_2(2 \cdot 4) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$
- $\log_2(32 : 4) = \log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$
- $\log_2(4^7) = 7 \log_2 4 = 7 \cdot 2 = 14$
- $\log_{\frac{1}{2}} 64 = \frac{\log_4 64}{\log_4 1/2} = \frac{3}{-1/2} = -6$  (por cambio de base)



## SUCESIONES NUMÉRICAS

La palabra sucesión se utiliza con frecuencia en el lenguaje cotidiano y tiene el mismo significado que en matemática, o sea, el de un conjunto ordenado de elementos.

Así, se habla de la sucesión de los días o de la sucesión de los números naturales con la misma interpretación intuitiva.

Al considerar una sucesión de elementos se conoce cuál es el lugar que ocupa cada uno de ellos mediante una regla o reglas que permiten ubicarlo. Tenemos un primer término;  $a_1$ , un segundo término  $a_2$ , un enésimo término o término general  $a_n$ , etc. El subíndice  $n$  se llama Orden del Término e indica el número de orden del término.

Una sucesión suele denotarse:  $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$ , o bien:  $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$

Donde los puntos suspensivos finales indican que consideramos infinitos términos.

Ejemplos:

$$(a_n) = \left( 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots \right) \quad \text{donde } \forall n \in N : a_n = \frac{1}{n}$$

$$(b_n) = \left( -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \dots \right) \quad \text{donde } \forall n \in N : b_n = \left( -\frac{1}{2} \right)^n$$

$$(c_n) = (2; 1; 4; 3; 6; 5; \dots) \quad \text{donde } \forall n \in N : \begin{cases} c_n = n-1 & \text{si } n \text{ es par} \\ c_n = n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

La sucesión de Fibonacci:  $(x_n) = (1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \dots)$  se define por recurrencia o sea mediante reglas que permiten obtener cada término a partir de los anteriores:

$$\forall n \in N : \begin{cases} x_n = 1 & \text{si } n = 1 \\ x_n = 1 & \text{si } n = 2 \\ x_n = x_{n-2} + x_{n-1} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots, \text{ donde: } a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2^1}; a_3 = \frac{1}{2^2}; a_4 = \frac{1}{2^3}; a_5 = \frac{1}{2^4}; \dots; a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \dots; \frac{n}{n+1}; \dots$$

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{2}{2n+1-(-1)^n}; \dots$$

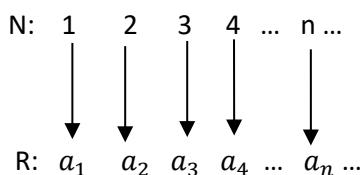
En estos ejemplos vemos claramente la ley o fórmula que permite obtener por medio de operaciones sencillas el término enésimo de la sucesión mediante el análisis de un número conveniente de términos, a partir del primero.

### Sucesiones numéricas:

Se observa que a cada número natural le corresponde un término de la sucesión y solamente uno y que los términos de la sucesión pueden ser elementos de cualquier conjunto.

Por lo tanto, una sucesión infinita es un caso particular de función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su recorrido o imagen está incluido en el conjunto de los números reales.

Nos interesan especialmente las sucesiones de números reales, o sea las funciones del tipo  $u_n: N \rightarrow R$ , donde en el Dom.:  $N$  e Im.:  $R$

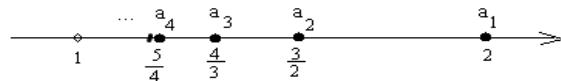




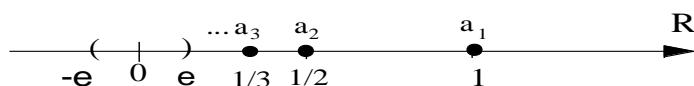
**Definición:** una sucesión numérica es una función particular, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su recorrido (o imagen) está incluido en el conjunto de los números reales.

$$u_n: N \rightarrow R / \forall n \in N: u(n) = u_n$$

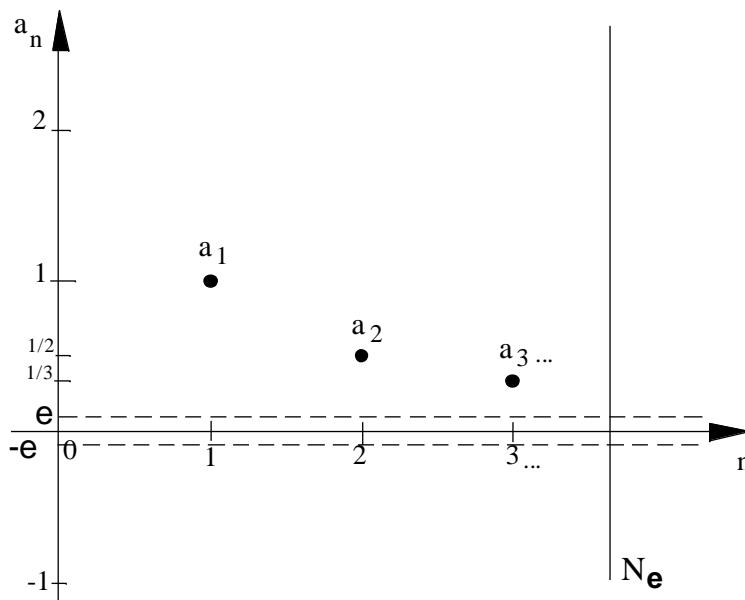
Sea la sucesión:  $(a_n) = \left( \frac{n+1}{n} \right) = \left( 2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}; \dots \right)$ . Si representamos los términos mediante puntos de una recta real:



De acuerdo a la definición de sucesión de números reales, habíamos dicho que es una función  $u_n: N \rightarrow R$ . Analicemos la sucesión:  $(a_n) = \left( 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots \frac{1}{n}; \dots \right)$ . Su representación mediante puntos de una recta real:



Mediante un diagrama cartesiano, se representan los pares ordenados de la sucesión (conjunto discreto):



Representando los primeros términos de la sucesión, geométricamente vemos que a medida que vamos tomando valores sucesivos de  $a_n$ , nos vamos acercando al 0. En efecto,  $a_2$  está más cerca del 0 que  $a_1$ ,  $a_3$  está más cerca del 0 que  $a_2$ , etc. Pero esto no nos dice todo respecto del acercamiento, pues es cierto también que  $a_2$  está más cerca de -1 que  $a_1$ ,  $a_3$  está más cerca de -1 que  $a_2$ , etc. y evidentemente este acercamiento a 0 de esta sucesión tiene una característica que no tiene su acercamiento a -1. Esta característica es que esta sucesión llega a estar tan cerca del 0 como se quiera. En cambio esto no vale si cambiamos 0 por -1. Esta sucesión no llega a estar tan cerca de -1 como se quiera, su distancia a -1 es, como podemos ver, siempre mayor que 1.

Luego, más adelante vamos a analizar la definición formal de límite de una sucesión de números reales.

Puede suceder que una sucesión tenga infinitos términos, todos con el mismo valor:

$$(a_n) = (1; 1; 1; 1; \dots)$$

En este caso el recorrido de la sucesión es el conjunto unitario  $\{1\}$ .



### Igualdad de Sucesiones:

Dos sucesiones son iguales si sus términos coinciden ordenadamente:  $(a_n) = (b_n) \Leftrightarrow \forall n \in N : a_n = b_n$

Por ejemplo:

Si  $(a_n) = (1; 0; 1; 0; 1; 0; \dots)$  y  $(b_n) = (0; 1; 0; 1; 0; 1; \dots)$

$(a_n) \neq (b_n)$  pero sus recorridos son iguales:  $\{0; 1\}$ .

No debemos confundir igualdad de sucesiones con igualdad de recorridos.

Sean:  $(a_n) = (1; 0; 1; 0; 1; \dots)$  y  $(b_n) = (0; 1; 0; 1; 0; \dots)$  dos sucesiones.

$$(a_n) \neq (b_n) \text{ pero } \text{Rec.}((a_n)) = \text{Rec}((b_n)) = \{0; 1\}$$

### Sucesiones Acotadas:

Un número real  $k$  es una cota superior de la sucesión  $(a_n) \Leftrightarrow \forall n \in N : a_n \leq k$

Análogamente: número real  $k'$  es una cota inferior de la sucesión  $(a_n) \Leftrightarrow \forall n \in N : a_n \geq k'$

Una sucesión numérica que admite cotas superiores está acotada superiormente y si admite cotas inferiores está acotada inferiormente.

Si una sucesión admite cotas superiores y cotas inferiores, se dice que está acotada.

O sea, si una sucesión está acotada:  $\forall n \in N, k > 0 : |a_n| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a_n \leq k$

La mayor de las cotas inferiores es el extremo inferior o ínfimo de la sucesión y la menor de las cotas superiores es el extremo superior o supremo de la sucesión.

Ejemplos:

$(a_n) = (1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots)$  es una sucesión acotada inferiormente, 1 es el ínfimo.

$(b_n) = (-2; -3; -4; \dots; -n; \dots)$  es una sucesión acotada superiormente, -2 es el supremo

$(c_n) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; \dots\right)$  es una sucesión acotada, 1 es el supremo y 0 es el ínfimo

$(d_n) = (-1; 1; -1; 1; \dots; (-1)^n; \dots)$  es una sucesión acotada

### Sucesiones Monótonas:

$(a_n)$  sucesión creciente (en sentido estricto) o estrictamente creciente  $\Leftrightarrow \forall n \in N : a_n < a_{n+1}$

$(a_n)$  sucesión decreciente (en sentido estricto) o estrictamente decreciente  $\Leftrightarrow \forall n \in N : a_n > a_{n+1}$

$(a_n)$  sucesión creciente (en sentido amplio)  $\Leftrightarrow \forall n \in N : a_n \leq a_{n+1}$

$(a_n)$  sucesión decreciente (en sentido amplio)  $\Leftrightarrow \forall n \in N : a_n \geq a_{n+1}$

Una sucesión que crece o decrece en sentido estricto o amplio se denomina monótona creciente o decreciente en sentido estricto o amplio.

Ejemplos:

a)  $(n^2)$ , sucesión estrictamente creciente.

b) La sucesión de Fibonacci es una sucesión creciente en sentido amplio.

c)  $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ , sucesión estrictamente decreciente.

d)  $\left(\frac{2}{2n+1-(-1)^n}\right)$ , sucesión decreciente en sentido amplio.

### Límite de Sucesiones:

#### Sucesión convergente:

Sea la sucesión:  $(a_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \dots\right)$ . Intuitivamente, vemos que los términos de esta sucesión se aproximan o tienden a cero. Simbólicamente:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ . O sea: cuando  $n$  toma valores cada vez más grandes (otra cosa no puede tomar), los valores de la función toman valores cada vez más chicos acercándose cada vez más al cero o tendiendo a cero.



Definición: una sucesión numérica  $(a_n)$  tiene límite  $L$ , si y sólo si, para cualquier número positivo que designamos por  $\varepsilon$  (épsilon), existe otro número positivo  $\delta$  (delta) que depende de  $\varepsilon$ ,  $\delta(\varepsilon)$  tal que, para todo número  $n \in N \wedge n > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Se indica:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) / \forall n (n \in N \wedge n > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$

Sucesión Convergente: una sucesión es convergente, si y solo si, su límite es finito. O bien, la sucesión converge a un número  $L$ .

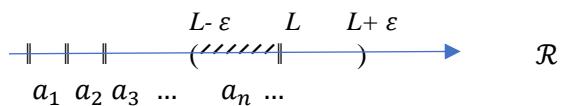
Analicemos esta definición y las condiciones que se presentan.

Si la sucesión es convergente, o converge a  $L$ , se tiene que cumplir que, dado o un número positivo que generalmente se denota con la letra griega  $\varepsilon$  que, si observamos en la definición, el consecuente de la implicación, es un entorno de centro  $L$  y radio  $\varepsilon$ , o sea la distancia entre los términos de la sucesión y su límite, son menores que ese número  $\varepsilon$ . Es así que tal número positivo  $\varepsilon$  es conveniente que sea pequeño, tan pequeño como se quiera. Es decir, la diferencia en valor absoluto entre los términos de la sucesión y su límite son menores que  $\varepsilon$ . O, los términos de la sucesión difieren de su límite en menos de  $\varepsilon$ .

Gráficamente, prefijado un entorno cualquiera de  $L$  de radio  $\varepsilon$ , es posible determinar un número  $\delta(\varepsilon)$  tal que los términos de la sucesión que verifican  $n > \delta(\varepsilon)$ , pertenecen a dicho entorno.

El número  $\delta(\varepsilon)$  es mayor o igual que número de los valores  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  que se encuentran fuera del intervalo  $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ . Asimismo, cualquier número  $\delta' > \delta$  satisface la definición.

Observemos que para cualquier  $\varepsilon > 0$  en el intervalo  $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$  están todos los términos de la sucesión, excepto un número finito de términos  $\delta$ , si  $\delta \in \mathcal{N}$ .



Ejemplo:

Un cierto instrumento pierde valor con los años. De hecho, al final de cada año vale solo un 80 % del valor que tenía al principio del año. ¿Cuál será su valor al final de los tiempos?

Sea:  $(a_n)$ : el valor del instrumento al cabo de  $n$  años.

Luego:  $a_1 = 0,8 \quad a_2 = (0,8)^2 = 0,64 \quad a_3 = (0,8)^3 = 0,512 \dots \quad a_n = (0,8)^n$ . Así:

$(a_n) = (0,8)^n = (0,8 ; 0,64 ; 0,512 ; 0,4096 ; 0,3277 ; 0,1074 ; 0,0115 ; \dots)$ , los términos de esta sucesión sugieren que el  $\lim ((0,8)^n) = 0$ .

Aplicemos la definición de límite:

$\lim ((0,8)^n) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) / \forall n (n \in N \wedge n > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |0,8^n - 0| < \varepsilon)$

Sea:  $\varepsilon = 0,0001$ .

Debemos estimar un  $\delta(0,0001)$ , tal que para todo número natural  $n > \delta(0,0001) \Rightarrow |0,8^n - 0| < 0,001$

Partimos de la desigualdad:  $|0,8^n - 0| < 0,001$

Como  $n > 0$ , podemos escribir:  $0,8^n < 0,001$

Aplicando logaritmo a ambos miembros de la desigualdad y una de sus propiedades:

$$n \cdot \log 0,8 < \log 0,0001$$

Operando:  $n \cdot (-0,096910013) < -4$

Entonces:  $n > \frac{-4}{-0,097} \cong 41,3 \Rightarrow n > 41,3$

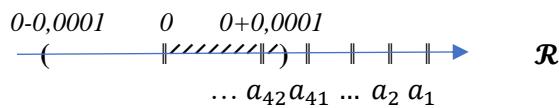
Por lo tanto, un  $\delta(\varepsilon) = \delta(0,0001) \cong 41,3$

Luego, para todo número natural  $n > 41$  o  $n \geq 42$ :  $|0,8^n - 0| < 0,001$ , entonces el  $\lim ((0,8)^n) = 0$

Desde el punto de vista gráfico, los 41 primeros términos de la sucesión están fuera del Entorno de centro en cero y radio 0,001:  $(0 - 0,0001; 0 + 0,0001)$  y, cuando mas pequeño sea el  $\varepsilon$  más grande será el  $\delta(\varepsilon)$ , pero siempre será finito el número de términos de la sucesión que no caerán dentro del Entorno especificado.



Gráficamente:



Un aspecto importante de las sucesiones que siempre debe tenerse en cuenta, es que quizás ningún término de la sucesión coincide con el límite, aunque se aproximan a éste con precisión arbitraria.

### Algunas Propiedades de las Sucesiones convergentes:

- (1) El límite de una sucesión, si existe, es único.
- (2) Si  $\lim(a_n) = L_1 \wedge \lim(b_n) = L_2$ , entonces:
  - (a) El límite de la suma (diferencia) de dos sucesiones convergentes, es igual a la suma (diferencia) de los límites de las sucesiones:  $\lim[(a_n) \pm (b_n)] = \lim(a_n) \pm \lim(b_n) = L_1 \pm L_2$
  - (b)  $\lim[(a_n) \cdot (b_n)] = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = L_1 \cdot L_2$
  - (c)  $\lim\left[\frac{(a_n)}{(b_n)}\right] = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{L_1}{L_2} \quad ((b_n) \neq 0 \quad ; \quad L_2 \neq 0)$
  - (d)  $\lim[k \cdot (a_n)] = k \cdot \lim(a_n) = k \cdot L_1 \quad ; \quad k = \text{cte.}$
  - (e) Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  sucesiones convergentes. Si:  $\forall n \in \mathbb{N}: (a_n) > (b_n) \Rightarrow \lim(a_n) \geq \lim(b_n)$

### Sucesión Divergente:

Hay algunas sucesiones, como la de los números naturales que no tienen límite finito pero sus términos, a partir de uno de ellos, superan a cualquier número positivo que se elija.

Tal número positivo  $\varepsilon$  es conveniente que sea grande.

En otros casos los términos de una sucesión (como la de los números enteros negativos), superan en valor absoluto, a partir de uno de ellos, a cualquier número positivo  $\varepsilon$  que se elija.

Estas sucesiones tienen límite infinito.

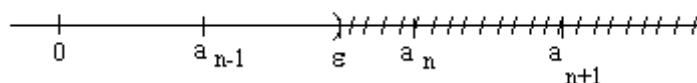
Definición:

Una sucesión numérica  $(a_n)$  tiene límite infinito si y sólo si, para cualquier número positivo  $\varepsilon$ , existe un número positivo  $\delta(\varepsilon)$  tal que para todo  $n \in N: (n \in N \wedge n > \delta) \Rightarrow |a_n| > \varepsilon$ .

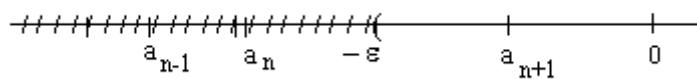
Se indica  $\lim(a_n) = \infty$ .

Una sucesión es divergente si y sólo si su límite es infinito. Es preferible considerar por separado el caso en que la sucesión numérica diverge a  $+\infty$  o  $-\infty$ .

Es decir:  $\lim(a_n) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) / \forall n: (n \in N \wedge n > \delta) \Rightarrow a_n > \varepsilon$   
 $\lim(a_n) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) / \forall n: (n \in N \wedge n > \delta) \Rightarrow a_n < -\varepsilon$



$$\lim(a_n) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) / \forall n: (n \in N \wedge n > \delta) \Rightarrow a_n > \varepsilon$$



Conclusión: Una sucesión es divergente, si y solo si, su límite es infinito

Ejemplo: Sea:  $(u_n) = ((n^2)) = (1; 4; 9; 16; 25; \dots)$

$$\lim((n^2)) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) / \forall n: (n \in N \wedge n > \delta) \Rightarrow n^2 > \varepsilon$$

Sea:  $\varepsilon = 100$ .

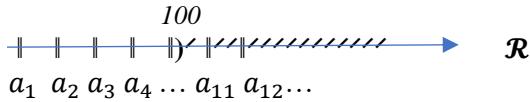
Debemos estimar un  $\delta(100)$ , tal que para todo número natural  $n > \delta(100) \Rightarrow n^2 > 100$

Luego, si:  $n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \therefore \delta(100) = 10$



Basta tomar  $n > 10$  o  $n \geq 11$  para que  $n^2 > 100$ ; o sea, es suficiente considerar  $n > \sqrt{\varepsilon}$  para verificar que  $n^2 > \varepsilon$ . Entonces:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2) = +\infty$ , ó  $\lim_{n^2 \rightarrow +\infty} n = +\infty$

Gráficamente:



### Sucesiones Oscilantes:

Puede suceder que una sucesión no tenga límite finito ni infinito.

Ejemplos:

(1)  $(a_n) = ((-1)^n) = (-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots)$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . los términos de esta sucesión no se aproximan a ningún número determinado. Luego, esta sucesión no tiene un límite.

(2)  $(a_n) = \left((-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \left(-2; \frac{3}{2}; -\frac{4}{3}; \frac{5}{4}; -\frac{6}{5}; \dots\right)$ . Esta sucesión no tiene límite finito ni infinito.

Para cualquier entorno de los puntos 1 y -1 no se verifican las definiciones para ambos tipos de límites.

Una sucesión es oscilante si y sólo si no tiene límite.

**Importante:** Una sucesión acotada puede o no tener límite, pero si la sucesión acotada es monótona, entonces se puede asegurar que es convergente.

Por ejemplo la sucesión:  $(a_n) = (1; 0; 1; 0; 1; \dots)$  está acotada pero no es monótona, entonces no es convergente.

**Teorema Fundamental de las Sucesiones:** Una sucesión monótona y acotada, si y solo si es convergente.

Como aplicación de este Teorema se deduce que la sucesión:  $(a_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$  es convergente.

Para ello basta probar que: (a) es creciente. (b) está acotada superiormente:

Luego la sucesión:  $(a_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$  converge al *número e*:

$$\lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = e$$

### Subsucesiones (Sucesiones parciales):

Una sucesión  $(b_n)$  es una subsucesión de  $(a_n)$ , si y solo si, cada uno de los términos de  $(b_n)$  están contenidos en la sucesión  $(a_n)$ .

O sea, dada la sucesión:  $(a_n) = (a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; a_n; \dots)$ , se pueden considerar infinitos términos:  $a_r; a_s; a_t; \dots$  y formar con ellos una nueva sucesión  $(b_n) = (a_r; a_s; a_t; \dots)$  que estará contenida en  $(a_n)$ .

Ejemplos:  $\left(\frac{1}{n}\right)$  es una subsucesión de la sucesión  $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , está contenida en  $\left(\frac{1}{n}\right)$   
 $(n)$  es una subsucesión de la sucesión  $(2n)$ , está contenida en  $(n)$

Por supuesto que, dada una sucesión, existen infinitas subsucessiones de estas.

Pueden demostrarse las siguientes **Propiedades**:

- 1) Si una sucesión está acotada, entonces cualquier subsucesión también está acotada.
- 2) Cualquier cota superior (inferior) de una sucesión, es cota superior (inferior) de la subsucesión.
- 3) **Teorema:** Si una sucesión converge a un límite  $L$ , entonces cualquier subsucesión converge (y) al mismo límite.

El recíproco de este Teorema no es cierto ( $\neq$ ).

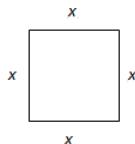


## TRABAJO PRÁCTICO N°11: Sucesiones Numéricas

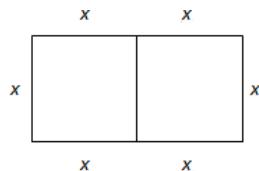
**La siguiente situación fue propuesta en un taller del Módulo de Matemática y Física del SU. Recordemos....**

Nuestros amigos matemáticos Rubén Pitagorito y Tito Tangente hicieron la siguiente observación:

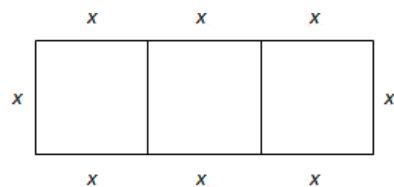
Alrededor de una mesa como las que hay en los cursos de las escuelas se pueden ubicar 4 amigos. (IMAGEN 1)



Ahora bien, si agregamos otra mesa se pueden ubicar... ¿cuántos? Piensen.



...y si agregamos otra mesa (IMAGEN 3) podemos ubicar...



Tito Tangente, le comenta a Rubén Pitagorito que se dio cuenta, al igual que ustedes, que hay una regularidad numérica. ¡Perfecto dice Rubén! Pero, ¿qué ocurre si, por ejemplo, queremos saber cuántos chicos se pueden sentar alrededor de 15 mesas?

iAh! ¿Qué les parece? La matemática nos va ayudar a encontrar las herramientas para resolver este problema.

*Actividad: Analicen y respondan las preguntas.*

- ¿Cuántos chicos se pueden sentar alrededor de 4 mesas?
- ¿Cuántos chicos se pueden sentar alrededor de 8 mesas?
- ¿39 chicos se pueden sentar siguiendo el esquema de las imágenes? ¿Se pueden ubicar todos? ¿Queda alguno afuera? ¿Y 140 chicos?
- Completen una tabla con la cantidad de mesas y la correspondiente cantidad de personas que se podrían sentar alrededor.
- Analicen el patrón o regularidad y piensen: ¿cuál es la fórmula que permite hallar la cantidad de chicos/as que se pueden sentar en función de la cantidad de mesas?
- Prueben la fórmula en las situaciones anteriores.

**Actividad N°1:** Una vez que indiquen el modelo matemático que representa la regularidad numérica del problema, contesten las siguientes preguntas:



- a) ¿Es el modelo matemático una función? ¿Porqué?
- b) En caso afirmativo, indiquen el conjunto Dominio e Imagen.
- c) ¿Como se denomina el conjunto formado por los resultados obtenidos y cuantos elementos tiene?
- d) ¿Hay una relación de orden al relacionar la cantidad de mesas con la cantidad de personas que se pueden sentar en ellas? Justifica mediante un esquema tu respuesta.

**Actividad N°2:** Coloquen los tres números que siguientes en cada regularidad numérica:

- a)  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots \dots \dots$
- b)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \dots \dots \dots$
- c)  $1, 2, 4, 8, \dots \dots \dots$
- d)  $4, -4, 4, -4, \dots \dots \dots$

**Actividad N°3:** Definan "sucesión numérica" e indiquen qué representa el subíndice "  $i$  " en cada  $a_i$ ? ¿A qué se denomina *término general de la sucesión*?

**Actividad N°4:** Teniendo en cuenta el orden establecido y la relación entre los números naturales y elementos de las sucesiones, hallen el término general de cada conjunto de la Actividad N° 2.

*Si cada sucesión numérica es una función, se puede estudiar su monotonía, es decir si es creciente o decreciente, teniendo en cuenta el orden de sus términos o elementos del conjunto imagen.*

**Actividad N°5:** Interpreten la siguiente definición e identifiquen las sucesiones crecientes del punto anterior.

$$(a_n) \text{ es monótona creciente} \leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

**Actividad N°6:** Definan sucesión decreciente en forma análoga. Identifiquen las sucesiones monótonas decrecientes del Item 2.

*Una sucesión es acotada, si su conjunto Imagen es un conjunto acotado.*

**Actividad N°7:** Indiquen el conjunto Imagen de cada sucesión del Item 2, e indiquen si tiene cotas superiores o inferiores.

**Actividad N°8:** ¿Qué ocurre con los valores que toman los términos de la sucesión cuando "n" toma valores muy grandes? Investiguen el nombre que recibe el valor al cual se aproximan los términos de la sucesión cuando n tiende a infinito.

**Actividad N°9:** Analicen la convergencia, mediante el límite, de cada una de las sucesiones del Item 2.

**Actividad N°10:** Determinen la convergencia de las siguientes sucesiones, aplicando límite:

$$(a_n) = \left( \frac{3+n}{n} \right)$$

$$(b_n) = \left( \frac{n-1}{2n} \right)$$

$$(c_n) = \left( \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$$

Unidad Temática II: Límites y Continuidad

**La idea de límite:** La idea de límite, aparece intuitivamente en muchas situaciones.

En **geometría elemental**, se define la **longitud de una circunferencia** como el límite a que tiende una sucesión de perímetros de polígonos inscriptos o circunscriptos a ella, cuando la longitud de cada lado tiende a cero. Esto ocurre cuando el número de lados crece indefinidamente. La misma idea se utiliza para definir el **área de un círculo** mediante áreas de polígonos inscriptos o circunscriptos.

$$P_{i3} < P_{circuito} = L_c$$

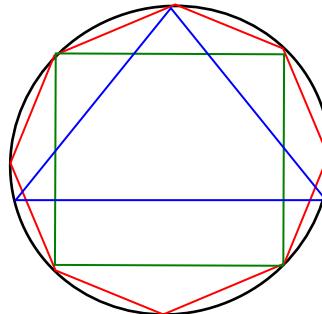
$$P_{i4} < P_c = L_c$$

$$P_{i8} < P_c = L_c$$

-----

$$P_{in} < P_c < L_{cn}$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{P_{in}} = l_c = \underset{n \rightarrow \infty}{P_{cn}}$$



En **Física**, para definir la velocidad instantánea se recurre al límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo es cada vez menor.

En la **vida diaria** podríamos pensar a que temperatura tiende un líquido caliente al dejarlo fuera del fuego, o un líquido frío si lo dejamos afuera de la heladera, si en el ambiente hacen 25° C.

Propuesta: leer del capítulo 1, pág. 48-50, del libro digital:

CALCULO%20DE%20DIFERENCIAL%20E%20INTEGRAL/calcu%201%20de%20una%20variable,%209na%20edición%20-%20ron%20larson.pdf

En el cual se propone como objetivos:

- Estimar un límite utilizando los métodos numéricos y gráficos.
- Aprender diferentes formas en las que un límite puede no existir.
- Estudiar y utilizar la definición formal de límite.

### Introducción a los límites

Se pide dibujar la gráfica de la función:  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ ,  $x \neq 1$

Para todos los valores distintos de  $x = 1$ , es posible emplear las técnicas usuales de representación de curvas. Sin embargo, en  $x=1$  no está claro que se puede hacer. Para analizar el comportamiento de la función cuando  $x$  se acerca a 1, por derecha y por izquierda realizamos la siguiente tabla:

$x$	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

Como se muestra en la figura 1.5, la gráfica de  $f$  es una parábola con un hueco en el punto  $(1, 3)$ . A pesar de que  $x$  no puede ser igual a 1, se puede acercar arbitrariamente a 1 y, en consecuencia,  $f(x)$  se acerca a 3 de la misma manera. Utilizando la notación que se emplea con los límites, se podría escribir

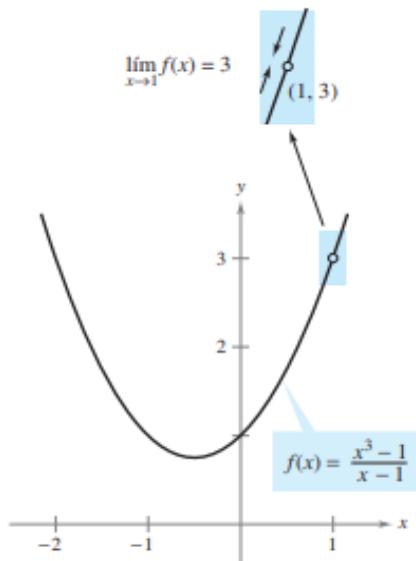
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3.$$

Esto se lee "el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a 1 es 3".

Este análisis conduce a una descripción informal de límite. Si  $f(x)$  se acerca arbitrariamente a un número  $L$  cuando  $x$  se aproxima a  $c$  por cualquiera de los dos lados, entonces el **límite** de  $f(x)$ , cuando  $x$  se aproxima a  $c$ , es  $L$ . Esto se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L.$$

Su gráfica es:



#### EXPLORACIÓN

El análisis anterior proporciona un ejemplo de cómo estimar un límite de *manera numérica* mediante la construcción de una tabla, o de *manera gráfica*, al dibujar un esquema. Calcular el siguiente límite de forma numérica al completar la tabla.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$x$	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
$f(x)$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

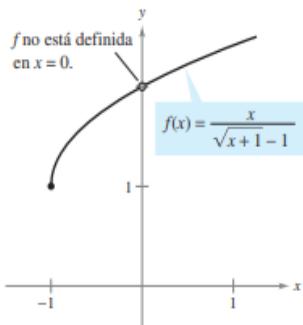
Luego utilizar una herramienta de graficación para estimar el límite.

Analiza los siguientes ejemplos:

### EJEMPLO 1 Estimación numérica de un límite

Evaluar la función  $f(x) = x/(\sqrt{x+1} - 1)$  en varios puntos cercanos a  $x = 0$  y usar el resultado para estimar el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$



El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a 0 es 2

Figura 1.6

**Solución** En la siguiente tabla se registran los valores de  $f(x)$  para diversos valores de  $x$  cercanos a 0.

$x$	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	?	2.00005	2.00050	2.00499

$x$  se aproxima a 0 por la izquierda.  $x$  se aproxima a 0 por la derecha.

$f(x)$  se aproxima a 2.  $f(x)$  se aproxima a 2.

De los datos mostrados en la tabla, se puede estimar que el límite es 2. Dicho resultado se confirma por la gráfica de  $f$  (ver la figura 1.6).

Observar que en el ejemplo 1, la función no está definida en  $x = 0$  y aún así  $f(x)$  parece aproximarse a un límite a medida que  $x$  se aproxima a 0. Esto ocurre con frecuencia, y es importante percibirse de que la *existencia o inexistencia de  $f(x)$  en  $x = c$  no guarda relación con la existencia del límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se approxima a  $c$* .

### EJEMPLO 2 Cálculo de un límite

Encontrar el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a 2, donde  $f$  se define como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

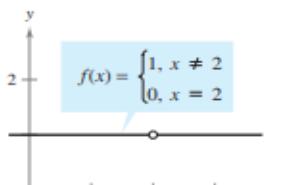
**Solución** Puesto que  $f(x) = 1$  para todos los  $x$  distintos de  $x = 2$ , se puede concluir que el límite es 1, como se muestra en la figura 1.7. Por tanto, se puede escribir

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1.$$

El hecho de que  $f(2) = 0$  no influye en la existencia ni en el valor del límite cuando  $x$  se aproxima a 2. Por ejemplo, si se hubiera definido la función como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

el límite sería el mismo.



El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a 2 es 1

Figura 1.7

Hasta aquí se puede decir que se hallaron límites de manera numérica y gráfica. Cada uno de estos métodos genera una estimación del límite. Más adelante se estudiarán técnicas analíticas para evaluarlos. A lo largo de este curso, se trata de desarrollar el hábito de utilizar este método de árbol para resolver problemas.

1. Método numérico
2. Método gráfico
3. Método analítico

Construir una tabla de valores.

Elaborar una gráfica a mano o con algún dispositivo tecnológico.

Utilizar álgebra o cálculo.

**Definición** :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x : (x \in Df \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

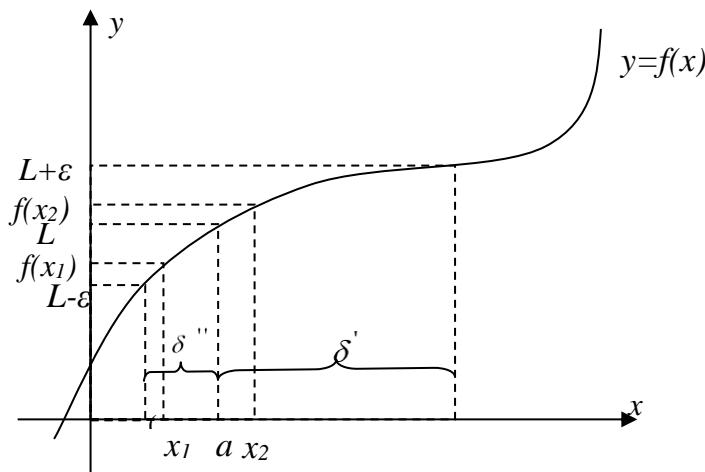
En general el número  $\delta$  depende de  $\varepsilon$ . Hallado un número  $\delta$  que satisfaga la condición, cualquier número  $\delta' < \delta$  también la satisface. Además, un número  $\delta$  que sirve para un cierto  $\varepsilon$  servirá también para cualquier número mayor que  $\varepsilon$  pero nada se podrá asegurar respecto de uno menor.

$a$  debe ser punto de acumulación del Dominio de la función para evitar que la definición se satisfaga trivialmente en puntos aislados.

Interpreta: En la definición:  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow x \in E'_{(a; \delta)} \wedge |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in E_{(L; \varepsilon)}$

### Representación e interpretación gráfica del límite

Gráficamente, trazamos paralelas al eje  $x$  por  $L + \varepsilon$  y  $L - \varepsilon$  hasta interceptar al gráfico de la función. Proyectamos esas intersecciones sobre el eje  $x$ . Así quedan determinados dos  $\delta$ :  $\delta'$  y  $\delta''$ , que los podemos pensar como radio del  $E'_{(a)}$ . Si analizamos el gráfico, vemos que  $\forall x \in E'_{(a; \delta'')} : f(x) \in E_{(L; \varepsilon)}$ . Luego, el  $\delta$  que debemos tomar es el menor de los dos en este caso, para que satisfaga la definición.



Ejemplo:

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Nos interesa ver en qué condiciones los valores de una función escalar se aproximan a un número real determinado cuando los puntos del dominio se acercan a un punto  $a$  que puede pertenecer o no a dicho dominio.

Calculemos algunos valores de la función en un  $E'_{(3)}$ , es decir sin preocuparnos por lo que sucede en dicho punto.

$x$	$f(x)$
2,8	4,6
2,9	4,8
2,99	4,98
2,999	4,998
3,2	5,4
3,1	5,2
3,01	5,02
3,001	5,002

Vemos que los valores de la función se acercan al número 5 cuando los valores de  $x$  se acercan al número 3. Aún más, la función puede alcanzar cualquier valor próximo a 5 con tal de considerar a  $x$  suficientemente próximo a 3.

Si se desea, por ejemplo, que el valor absoluto de la diferencia entre  $f(x)$  y 5 sea menor que un centésimo, podemos considerar las siguientes proposiciones:

$$\begin{aligned} |f(x) - 5| < 0,01 &\Leftrightarrow |(2x - 1) - 5| < 0,01 \Leftrightarrow |2x - 6| < 0,01 \Leftrightarrow 2|x - 3| < 0,01 \Leftrightarrow |x - 3| \\ &< \frac{0,01}{2} \Leftrightarrow \\ |x - 3| < 0,005 &\quad \therefore \quad 0 < |x - 3| < 0,005 \Rightarrow |f(x) - 5| < 0,01 \end{aligned}$$

Para los valores de  $x$  en el  $E'(3;0,005)$  los valores correspondientes a  $f(x)$  se encuentran en el  $E(5;0,01)$

Obsérvese que se eligió primero 0,01 y en base a ese número se obtuvo el 0,005.

En general para cualquier número  $\varepsilon > 0$ , basta considerar:  $\delta = \varepsilon/2$ , pues:

$$0 < |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2|x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |2x - 6| < \varepsilon \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } & 2x - 1 \rightarrow 5 \\ & x \rightarrow 3 \end{aligned}$$

### Dos propiedades de los LÍMITES:

1. Para  $x$  suficientemente próximo a  $a$ , la función tiene el mismo signo que su límite.
2. Si dos funciones tienen límites distintos para  $x \rightarrow a$ , la de mayor límite supera a la otra,  $\forall x \rightarrow a$

### Cálculo de algunos límites:

- 1).— Límite de la función constante:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k ; \forall k \in \mathbb{R}$

Para probar que el número  $k$  es el límite buscado, significa encontrar, para cualquier número  $\varepsilon > 0$ , un número  $\delta > 0$ , que satisfaga la condición exigida por la definición. En este caso  $\delta$  es cualquier número positivo, pues para cualquier  $\varepsilon > 0$  y para cualquier  $\delta > 0$ , resulta:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x : (x \in Df \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |k - k| = 0 < \varepsilon)$$

- 2).— Límite de la función identidad:  $\lim_{x \rightarrow a} x = a ; \forall x \in \mathbb{R}$

En efecto, consideraremos un número positivo  $\delta \leq \varepsilon$ ; resulta:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta \leq \varepsilon / \forall x : (x \in Df \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| = |x - a| < \delta \leq \varepsilon)$$

- 3).— Límite de la función lineal:  $f(x) = px + q; p \neq 0 ; \lim_{x \rightarrow a} (px + q) = p \cdot a + q; \forall a \in \mathbb{R}$

Con la intención de encontrar el número  $\delta > 0$  correspondiente a la definición de límite, hacemos el siguiente planteo auxiliar:

$$\begin{aligned} |f(x) - L| < \varepsilon &\Leftrightarrow |(p \cdot x + q) - (p \cdot a + q)| < \varepsilon \Leftrightarrow |p \cdot (x - a)| < \varepsilon \Leftrightarrow |p| \cdot |x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x - a| < \frac{\varepsilon}{|p|} \end{aligned}$$

Luego, para cada  $\varepsilon > 0$ , es posible determinar el número  $\delta/\delta \leq \varepsilon/|p|$ , y se verifica:

$$0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{|p|} \Rightarrow |f(x) - (p \cdot a + q)| < \varepsilon$$

- 4).— Límite de una función cuadrática:  $f(x) = (x - a)^2 ; \lim_{x \rightarrow a} (x - a)^2 = 0; \forall a \in \mathbb{R}$

Tengamos en cuenta que:

$$|(x - a)^2 - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x - a)^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - a|^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \sqrt{\varepsilon}$$

Luego, en este caso,  $\delta$  es cualquier número positivo  $\leq \sqrt{\varepsilon} : \delta \leq \sqrt{\varepsilon}$

$$\text{En efecto, } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\varepsilon} / \forall x : (x \in Df \wedge 0 < |x - a| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |(x - a)^2| < \varepsilon)$$

### Teoremas sobre límites:

Sería muy difícil si todo problema de límite tuviera que resolverse a partir de la definición misma, o sea buscando el número  $\delta$  que corresponde a cualquier  $\varepsilon$  dado y satisfacer las desigualdades exigidas en la definición. Vamos a dar algunos Teoremas generales sobre límites que permiten resolver problemas de manera más rápida y cómoda.

Los enunciados y demostraciones de estos Teoremas son los mismos para límites de funciones tomadas para  $x \rightarrow \infty$  que para límites de funciones definidas sobre ciertos intervalos, tomados cuando  $x \rightarrow \pm a$ , o bien cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ ; por consiguiente los vamos a demostrar solamente para el caso de  $x \rightarrow a$ .

a).- El **límite del producto de una constante  $k$ , por una función  $f(x)$** , es igual al producto de la constante por el límite  $L$  de la función, o sea:

$$\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot L$$

b).- El **límite de una suma de funciones**, es igual a la suma de los límites de las funciones dadas, siempre y cuando los límites existan:  $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_1 + L_2$

c).- En forma análoga se demuestra que el **límite de la diferencia de funciones, es igual a la diferencia de los límites** de las funciones dadas, siempre y cuando los límites existan.

d).- El **límite del producto de funciones es igual al producto de los límites de las funciones** dadas, siempre y cuando los límites existan:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$

e).- El **límite de la recíproca de una función es igual a la recíproca del límite**, siempre que dicho límite sea distinto a cero:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \frac{1}{L}$

f).- El **límite de un cociente de funciones** es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$  existe y es  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

g).- El **límite de la opuesta** de una función es igual a la opuesta del límite.

h).- **Unicidad del Límite**: una función no puede tener, para  $x \rightarrow x_0$ , dos límites distintos.

Sí  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$ , entonces:  $L_1 = L_2$

i).- **Teorema de Confrontación entre límites**:

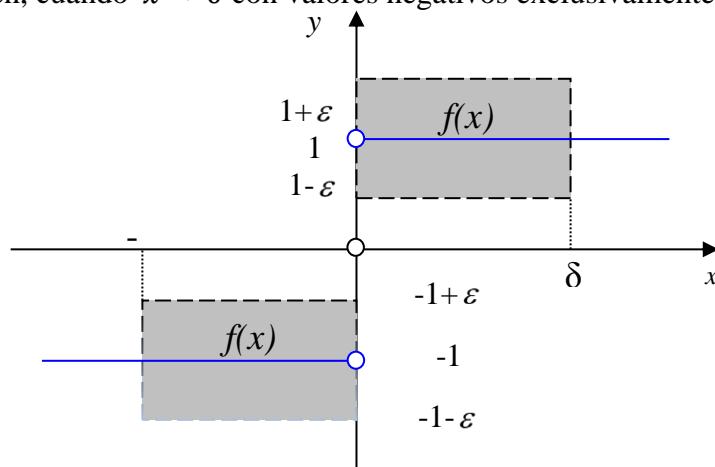
Si existe un intervalo abierto  $A$  que contiene a  $x_0$  /  $\forall x \neq x_0: f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  y sí:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

### Límites laterales

Al hablar de límite, tenemos que considerar puntos próximos al punto  $a$ , a ambos lados de dicho punto. Es decir, números reales en el  $E'(a)$ , a derecha e izquierda del punto  $a$ . Interesa en algunos casos, el comportamiento de los valores de la función correspondiente a puntos del dominio a un solo lado, esto es, en un semientorno a la derecha o izquierda del punto  $a$ .

Ejemplo: Sea:  $y = \frac{|x|}{x}$  (*función signo*). Esta es una función que no tiene límite finito para  $x \rightarrow 0$ . Pero, puede pensarse en el límite de los valores de la función signo cuando  $x \rightarrow 0$  con valores positivos exclusivamente, o bien, cuando  $x \rightarrow 0$  con valores negativos exclusivamente.



A la derecha de 0,  $\forall x \rightarrow 0^+$ , se satisface la definición de límite con el número 1, puesto que:

$$\forall x \in E'(0^+; \delta) \Rightarrow f(x) \in E(1; \varepsilon) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

análogamente, el límite  $f(x)$ , cuando  $x \rightarrow 0^-$  es o -1, puesto que:

$$\forall x \in E'(0^-; \delta) \Rightarrow f(x) \in E(-1; \varepsilon) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

### Definiciones:

**1).** Límite lateral derecho o Límite por la derecha:  $L$  es el límite por la derecha de la función  $f(x)$ , en el punto  $a \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x: (x \in Df \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

$a$  es punto de acumulación de  $A = \{x / x \in Df \wedge x > a\}$

**2).** Límite lateral izquierdo o Límite por la izquierda:  $L$  es el límite por la izquierda de la función  $f(x)$ , en el punto  $a \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x: (x \in Df \wedge a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

$a$  es punto de acumulación de  $A = \{x / x \in Df \wedge x < a\}$ .

Considerando en cada caso semientornos a la derecha o a la izquierda del punto  $a$ , se pueden interpretar topológicamente las definiciones anteriores.

Luego, se puede demostrar que sí:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \wedge \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

### Infinitésimos

Hemos visto lo que se entiende por límite de una función, las condiciones para que esta pueda tender a un límite, a varios o a ninguno, pudiendo en caso de existir límite, ser finito o infinito (se verá más adelante), y como se calculan.

Tienen especial importancia en Análisis Matemático las funciones que tienen por límite cero, denominados **INFINITESIMOS**, que quedarían definidos de la siguiente manera: Una función  $f(x)$  cuyo límite es 0, cuando  $x \rightarrow a$  se dice que es infinitésimo en el punto  $x = a$  o para  $x \rightarrow a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

**Ejemplos:**

$\sin x$ es infinitésimo para $x=0$ ( $x \rightarrow 0$ )	$(1-\cos x)$ es infinitésimo para $x=0$ ( $x \rightarrow 0$ )	$(1-x)$ es infinitésimo para $x=1$ ( $x \rightarrow 1$ )
$x^3$ es infinitésimo para $x=0$ ( $x \rightarrow 0$ )	$\cos x$ es infinitésimo para $x=\pi/2$ ( $x \rightarrow \pi/2$ )	$(2x-1)^2$ es infinitésimo para $x=1/2$ ( $x \rightarrow 1/2$ )
$\operatorname{sh} x$ es infinitésimo para $x=0$ ( $x \rightarrow 0$ )		

### Observaciones:

**(I).**- No hay números infinitésimos, sino funciones infinitésimas en un punto. No se puede decir que un número sea pequeño o grande si no se toma algún punto de referencia. Un milímetro es una longitud pequeña para las mediciones habituales, pero muy grande para la escala atómica.

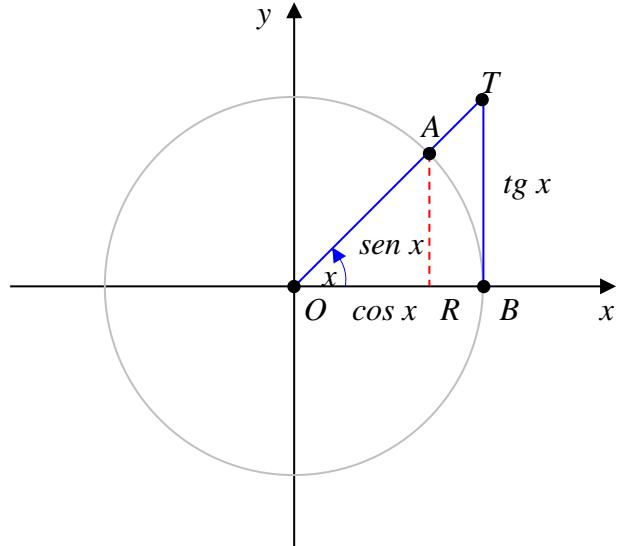
**(II).**- Las funciones no son infinitésimas en general, sino en ciertos puntos de  $x$ . Así,  $\sin x$  es infinitésimo para  $x \rightarrow k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ , pero no lo es para ningún otro valor de  $x$ .

**Un límite importante:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Si en la circunferencia trigonométrica se considera un ángulo central de  $x$  radianes, y en él la medida del arco  $\overset{\frown}{AB}$  que queda determinado sobre la circunferencia, es  $x$ .

En  $B$  se traza la tangente  $TB$ , y entre las superficies de los triángulos  $AOR$  y  $TOB$ , y el sector circular  $\overset{\frown}{AOB}$ , valen las relaciones:



$$\Delta AOR \leq \text{sector } AOB \leq \Delta TOB \Rightarrow \text{Área } \Delta AOR \leq \text{Área sector } AOB \leq \text{Área } \Delta TOB$$

Las áreas correspondientes se pueden expresar en función de  $x$ ; resultando:

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} \leq \frac{1}{2} x \cdot 1 \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

dividiendo por:  $\frac{\sin x}{2}$  (que es un factor positivo, si  $x$  es positivo):  $\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$

Esta desigualdad vale si cambiamos  $x$  por  $-x$ , pues en este caso:

$$(-x) : \sin(-x) = x : \sin x, \text{ y } \cos(-x) = \cos x$$

Luego:  $\cos x \rightarrow 1$  y  $\frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 \Rightarrow$  por el T. C. L.:  $\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$  y también:  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$

Se dice, entonces que, *en el origen sen x y x son infinitésimos equivalentes.*

En forma análoga, se prueba:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$  (en la prueba se divide por  $\frac{\operatorname{tg} x}{2}$ ). Siendo también  $\operatorname{tg} x$  y  $x$  *infinitésimos equivalentes para  $x \rightarrow 0$ .*

Ejemplos:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{x^3} = \frac{x^3 \cdot x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$

Un Ejemplo sobre la No Existencia de Límite (pg 98 y 99 de Stewart, “Cálculo en una variable”)

**EJEMPLO 4 Una función con comportamiento oscilante** Investigue  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ .

**SOLUCIÓN** Otra vez, la función  $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$  no está definida en 0. Si evaluamos la función para algunos valores pequeños de  $x$ , obtenemos

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

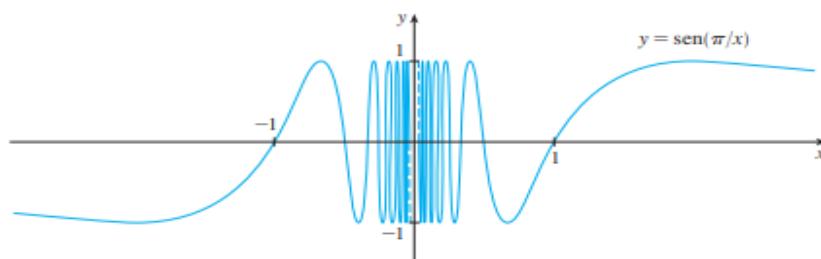
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \quad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

Del mismo modo,  $f(0.001) = f(0.0001) = 0$ . Con base en esta información podríamos estar tentados a intuir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

pero esta vez **nuestro cálculo es erróneo**. Observe que aun cuando  $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$  para cualquier entero  $n$ , también es cierto que  $f(x) = 1$  para infinitamente muchos valores de  $x$  que se aproximan a 0. La gráfica de  $f$  está dada en la Figura 7.



Las líneas interrumpidas cerca del eje y, indican que los valores de  $\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{x} \right)$  oscilan entre 1 y -1 con frecuencia infinita cuando  $x$  se approxima a 0. (Observe con una aplicación graficadora lo que sucede al acercarse al origen). Debido a que los valores de  $f(x)$  no se aproximan a un número “fijo” cuando  $x$  se approxima a 0, se afirma que:  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{x} \right)$  **No Existe**

### Límite infinito para x tendiendo a un número finito

La no existencia de “límite finito” puede significar, que existan límites finitos distintos a derecha y a izquierda del punto elegido como sucede en el origen para la función signo:  $y = \frac{|x|}{x}$ . También puede significar que la función oscila, como sucede en el origen para la función:  $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ . O bien, que cuando  $x \rightarrow a$ , los valores de la función superan en valores absolutos a cualquier número prefijado.

Definición:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 / \forall x : (x \in Df \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M)$

Ejemplo:  $y = \frac{1}{x}$  que no tiene límite finito en el origen. Si prefijo cualquier número  $M > 0$ , tan grande como se quiera, siempre es posible encontrar un  $E'(0)$ , en el cual los valores correspondientes de la función en valor absoluto son mayores que  $M$ .

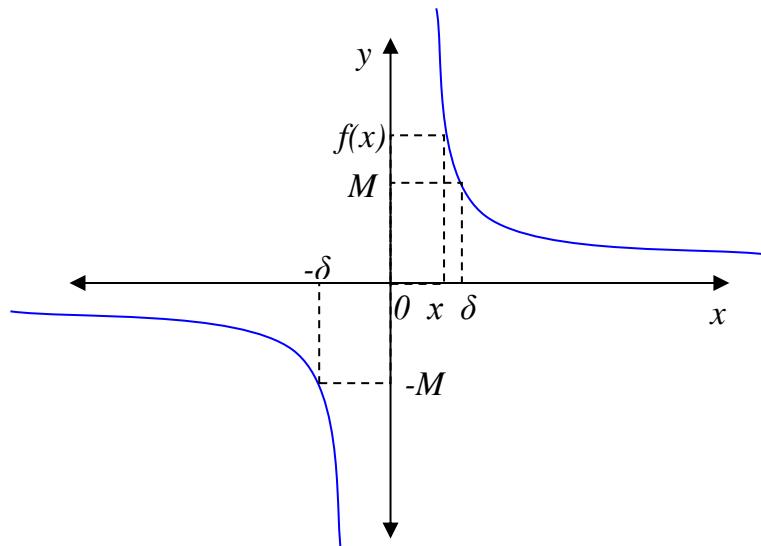
Para probar por definición tomo:  $M = 10^6 : \left| \frac{1}{x} \right| > 10^6 \therefore |x| < \frac{1}{10^6}$ .

Es decir, para:  $0 < |x - 0| < \frac{1}{10^6} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| > 10^6$ . De lo que se deduce que para cualquier valor de  $x \in E\left(0; \frac{1}{10^6}\right)$ , la función toma valores, en valor absoluto mayores a  $10^6$ . En general basta considerar:

$\delta = \frac{1}{M}$  para que se verifique la proposición:

si:  $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| > M$ ; pues:  $|x| < \frac{1}{M} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| > M$

El concepto de límite se puede diversificar, considerando el signo de los valores de la función.

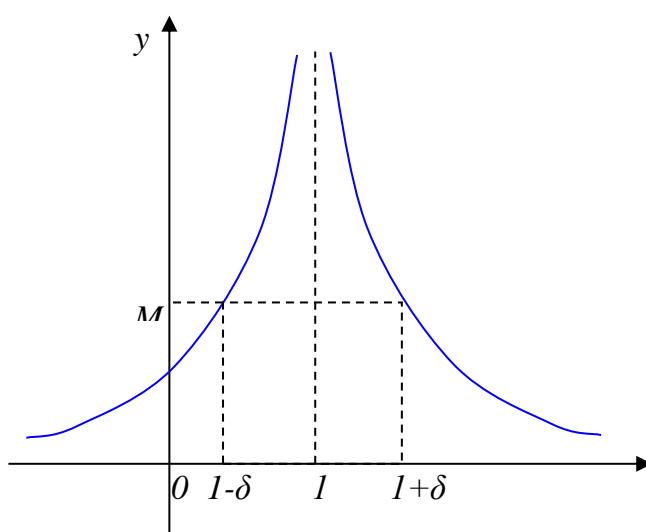


ee

Ejemplos:

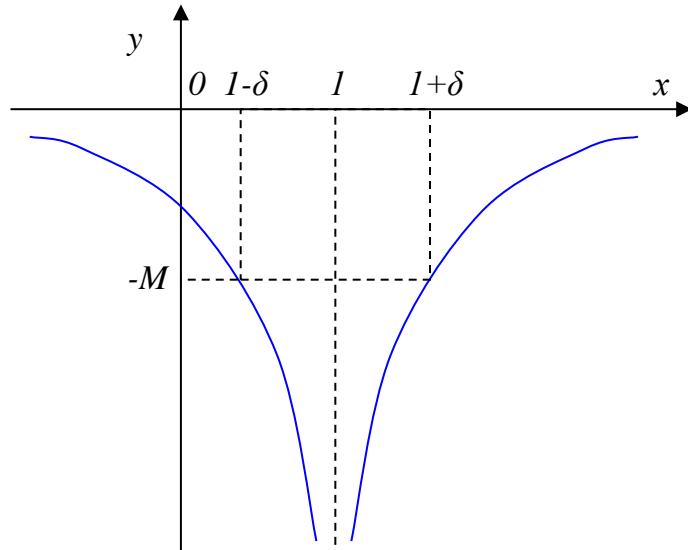
a).- Sea:  $\frac{1}{(x-1)^2}$ . Esta función no está definida para  $x = 1$ . Del gráfico se desprende que para cualquier número  $M > 0$  prefijado arbitrariamente y tan grande como se quiera, se puede determinar un número  $\delta > 0 / \forall x \in E'(1; \delta)$ , la función toma valores mayores que  $M$ ; o sea:

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta(M) > 0 / \forall x : (x \in Df \wedge 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow f(x) > M)$



b).- Sea:  $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ . El valor funcional de  $f(x)$  no está definido para  $x = 1$ . Se desprende del gráfico que para cualquier número  $M > 0$  prefijado arbitrariamente y tan grande como se quiera, se puede determinar un número  $\delta > 0$  /  $\forall x \in E'(1; \delta)$ , la función  $f(x)$  toma valores menores que  $-M$ ; o sea:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta(M) > 0 / \forall x : (x \in Df \wedge 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow f(x) < -M)$$

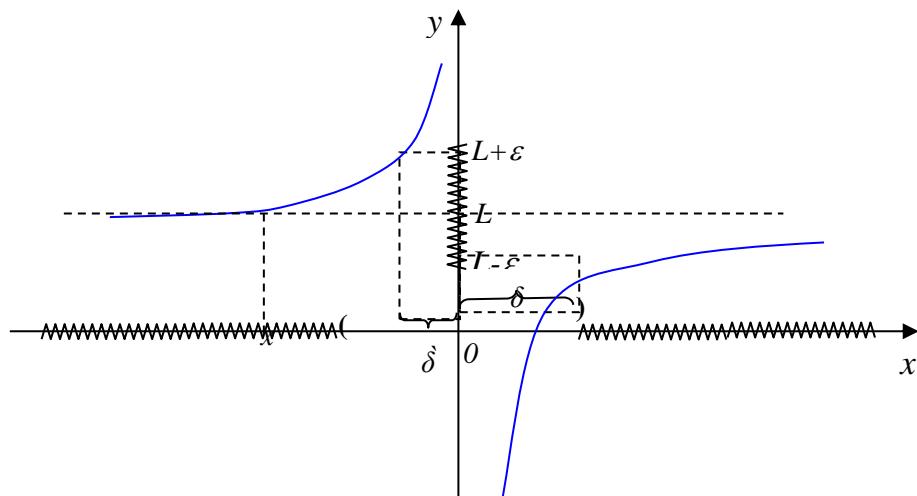


**Generalización del concepto de límite:** A fin de generalizar el concepto de límite, debemos considerar una “definición” de límite para cada uno de los siguientes casos:

Primer caso: Límite finito para  $x \rightarrow \pm\infty$ :

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in Df \wedge |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

La recta de ecuación  $y=L$  es Asíntota Horizontal del gráfico de la función.



$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in Df \wedge x > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

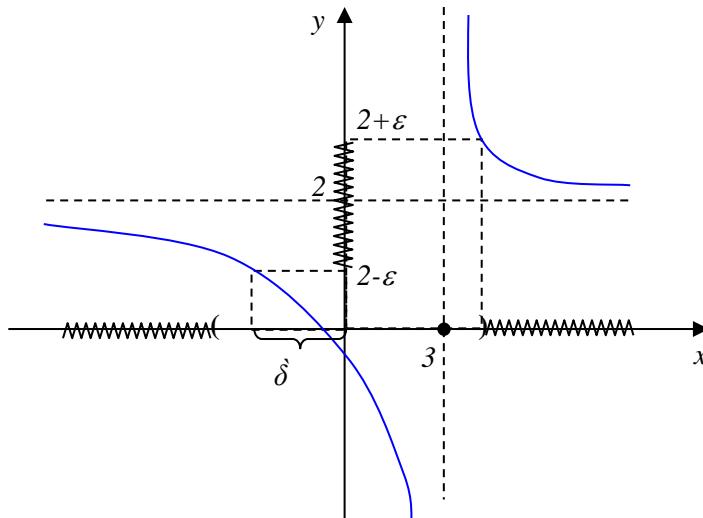
$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in Df \wedge x < -\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Luego, de acuerdo al gráfico, se verifica:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ .

También:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

$$\text{Ejemplo: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 2$$

Además, se verifica:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2 \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$

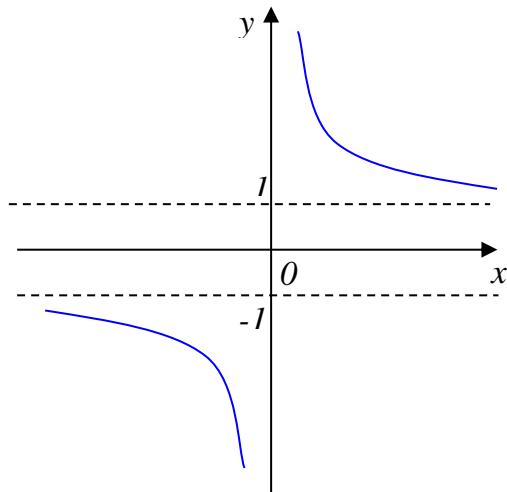


Sea:  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ , para calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  dividimos numerador y denominador por  $\sqrt{x^2} = |x|$ ; como  $|x|$  depende del signo del número  $x$ , debemos calcular en forma separada:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$(1) \text{ cuando } x > 0, \text{ resulta: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}} = 1$$

$$(2) \text{ cuando } x < 0, \text{ resulta: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{|x|}} = -1$$

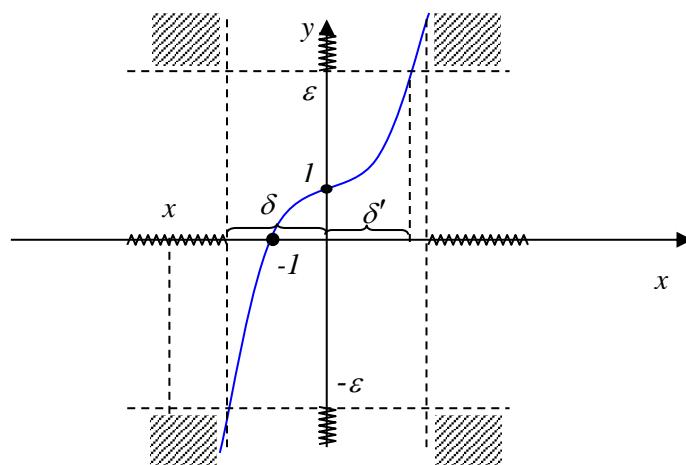


Segundo caso: límite infinito para  $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in Df \wedge |x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

Ejemplo: sea:  $y = x^3 + 1$

$$\text{Del gráfico se desprende: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 1) = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 1) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 1) = \infty$$



### Infinitos. Comparación de infinitos:

Se dice que una función  $f(x)$  es un infinito para  $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

$$\text{Ejemplo: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

En forma análoga que en el caso de los infinitésimos podemos, aplicando definición y teoremas, demostrar las siguientes Propiedades de los infinitos:

- (a) La suma de dos infinitos de igual signo es un infinito.

- (b) El producto de un infinito por un infinito cuyo valor absoluto está acotado inferiormente en un  $E_{(x_0)}$  considerado, es un infinito.
- (c) El producto de dos infinitos es un infinito.
- (d) El cociente entre un infinito y una función acotada en un  $E_{(x_0)}$  es un infinito.

En cuanto al cociente de dos infinitos nada podemos afirmar, puesto que encontraremos la indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$ , a pesar de la cual, salvada la indeterminación, el “verdadero valor” del límite del cociente nos permite efectuar la Comparación de infinitos.

En general si  $f(x)$  y  $g(x)$  son infinitos para  $x \rightarrow x_0$  y sí:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \Rightarrow f(x)$  es un infinito de orden superior a  $g(x)$

Sí:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f(x)$  es un infinito de orden inferior a  $g(x)$

Sí:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \Rightarrow f(x)$  y  $g(x)$  son infinitos del mismo orden

Y sí además:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow f(x)$  y  $g(x)$  son infinitos equivalentes

### Indeterminaciones del límite

Cuando estudiamos infinitésimos y ahora infinitos, ambas denominaciones valen para el caso  $x \rightarrow \infty$ . El cociente de dos infinitésimos o de dos infinitos pueden tener cualquier límite finito o infinito, según las funciones elegidas. Se dice, por ello, que el cociente de dos infinitos o de dos infinitésimos son casos de indeterminación del límite.

### Casos de indeterminaciones del límite

- (1) Cociente de dos infinitésimos  $\left(\frac{0}{0}\right)$ .
- (2) Cociente de dos infinitos  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
- (3) Producto de un infinitésimo por un finito  $(0 \cdot \infty)$
- (4) Suma de dos infinitos de distinto signo  $(\infty - \infty)$
- (5)  $f(x)^{g(x)}$ ; sí:  $f(x) \rightarrow 1 \wedge g(x) \rightarrow \infty$  ( $1^\infty$ )
- (6)  $f(x)^{g(x)}$ ; sí:  $f(x) \rightarrow 0 \wedge g(x) \rightarrow 0$  ( $0^0$ )
- (7)  $f(x)^{g(x)}$ ; sí:  $f(x) \rightarrow \infty \wedge g(x) \rightarrow 0$  ( $\infty^0$ )

Ejemplos:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 6}{3x^3 - x + 3} = \frac{5}{3}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2} = 1; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = \infty;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-2} \right)^{3x} = e^{15} \rightarrow e = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (1+t)^{1/t}$$

Asíntotas a curvas planas:

Ya hemos considerado anteriormente, al aproximar el gráfico de funciones racionales, la idea de asíntota.

Veamos ahora, usando límite.

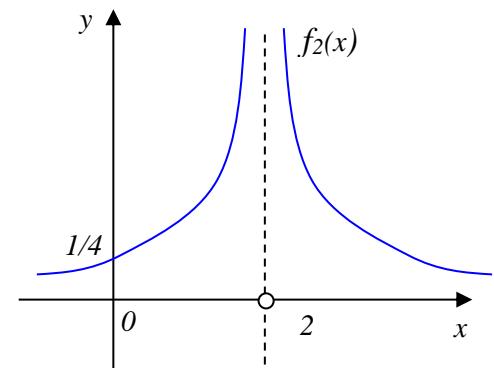
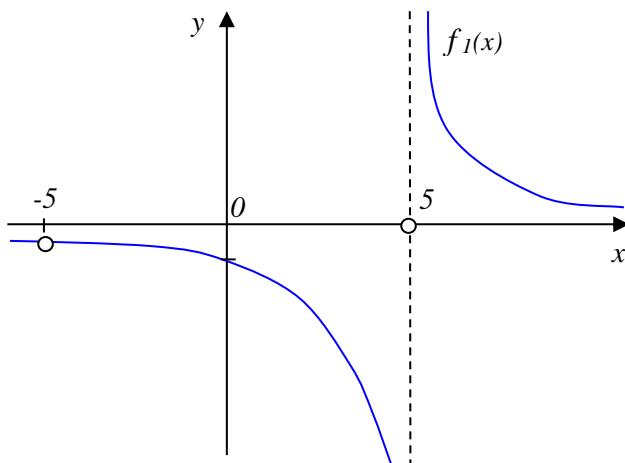
(a) Asíntota Vertical:

Definición: La recta de ecuación:  $x = a$  es Asíntota Vertical del gráfico de la función  $f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Ejemplos:

(1) Sea:  $f_1(x) = \frac{x+25}{x^2 - 25}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+25}{x^2 - 25} = \infty \Rightarrow x = 5$  es Asíntota Vertical del gráfico de  $f_1(x)$ .

(2) Sea:  $f_2(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty \Rightarrow x = 2$  es Asíntota Vertical del gráfico de  $f_2(x)$ .



(b) Asíntota Horizontal:

Definición: La recta de ecuación:  $y = l$  es Asíntota Horizontal del gráfico de la función  $f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$

Ejemplo:

Sea:  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x - 3}$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$  es Asíntota Horizontal del gráfico de  $f(x)$ .

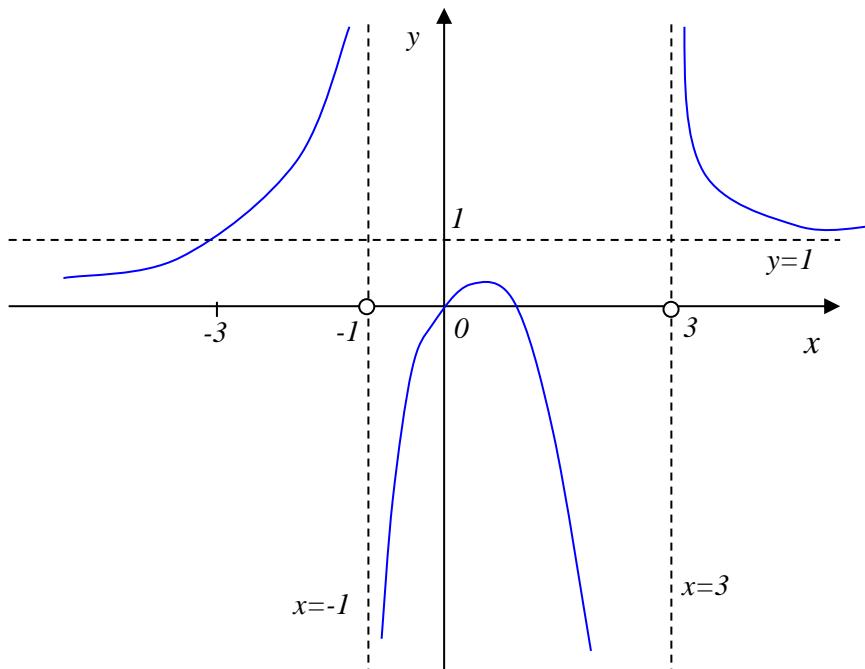
Además:  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty \Rightarrow x = -1$  Asíntota Vertical

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty \Rightarrow x = 3$$

Asíntota Vertical

Obsérvese que el gráfico de la función  $f(x)$  corta a la Asíntota Horizontal en el punto  $(-3; 1)$ . Luego, el gráfico de una función puede cortar a una Asíntota Horizontal u Oblicua en n puntos.

Por ejemplo: la función  $f(x) = 2^{-x} \operatorname{sen} x$ , admite como Asíntota Horizontal al eje  $x$ , y la corta  $n$  veces para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .



(b) Asíntota Oblicua:

Definición: la recta de ecuación:  $y = px + q$  ( $p \neq 0$ ) es Asíntota Oblicua del gráfico de la función  $f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (px + q)] = 0$

O bien:  $p = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - px)$

En la primera definición, se verifica:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \wedge f(x) = px + q + g(x)$ ; donde  $g(x)$  es un infinitésimo para  $x \rightarrow \infty$ .

Asíntotas de este tipo aparecen en funciones racionales fraccionarias, donde el grado del numerador es mayor en una unidad que el grado del denominador. En efecto, si la función racional fraccionaria considerada es el cociente de la función polinómica  $f(x)$ , donde el grado ( $f$ ) =  $n \geq 2$  sobre la función polinómica  $h$ , de grado( $h$ ) =  $n - 1$ , al efectuar dicho cociente, resulta:  $\frac{f(x)}{h(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{h(x)}$ , donde  $s$  es

un polinomio de primer grado y  $r$  es un polinomio de grado menor que  $\text{gr}(h)$ , según se verá en un ejemplo.

Luego,  $\frac{r}{h}$  es infinitésimo para  $x \rightarrow \infty$  y  $s$  es una función lineal, cuyo gráfico es Asíntota Oblicua al gráfico de la función racional fraccionaria  $\frac{f(x)}{h(x)}$ .

Ejemplo:  $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-2}$

Veamos si tiene Asíntota Vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x}{x-2} = \frac{8}{0} = \infty \Rightarrow \text{la recta de ecuación } x = 2 \text{ es } \underline{\text{Asíntota Vertical}}$$

Asíntota Horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \exists \underline{\text{Asíntota Horizontal}}$$

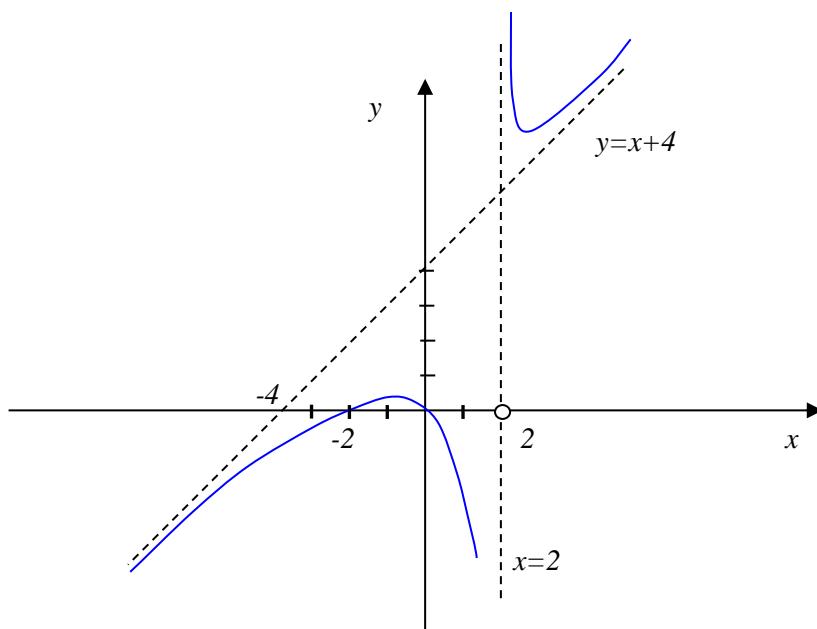
Asíntota Oblicua:

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+2x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 1 \Rightarrow \boxed{p = 1}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - px) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+2x}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{1-\frac{2}{x}} = 4 \Rightarrow \boxed{q = 4}$$

Luego, la Asíntota Oblicua es:  $y = px + q = x + 4$



## Funciones Continuas

### Función continua en un punto

**Definición:** sea  $f(x)$  función y  $a$  un punto de acumulación del Df;  $f(x)$  es continua en  $a$ , si y solo si,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Sí  $a$  no es punto de acumulación del Dominio, se conviene en considerar que en  $a$   $f(x)$  es continua si existe  $f(a)$ . Como la continuidad se basa en el concepto de límite, puede darse también la definición utilizando entornos convenientes de  $a$  y  $f(a)$ :

$$f(x) \text{ es continua en } a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x: \left( x \in Df \wedge \underbrace{|x-a| < \delta}_{E(a;\delta)} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(a)| < \varepsilon}_{E(f(a);\varepsilon)} \right)$$

(pués  $f(x)$  está definida en  $a$ , y en dicho punto se verifica:  $\forall \varepsilon > 0: f(a) - f(a) = 0 < \varepsilon$ ).

En el caso de una función continua, los símbolos de función y de límite pueden comutarse:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que si una función es continua en  $a$ , los límites laterales son iguales:

$$f(x) \text{ es continua} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Sí la continuidad se verifica solamente en el  $E_{(a^+;\varepsilon)}$   $\Rightarrow f(x)$ , continua por la derecha: o sea:

$$f(x) \text{ es continua por la derecha} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Sí la continuidad se verifica solamente en el  $E_{(a^-;\varepsilon)}$   $\Rightarrow f(x)$ , continua por la izquierda: o sea:

$$f(x) \text{ es continua por la izquierda} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

### Continuidad en un intervalo

Se dice que una función  $f(x)$  es continua en un  $[a; b]$  si es continua en cada punto interior del  $[a; b]$ , y además es continua a derecha en el extremo  $a$ , y es continua a izquierda en el extremo  $b$ :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \wedge \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

Es continua en  $(a; b)$  si  $f(x)$  es continua en todos los puntos del intervalo, menos en sus extremos  $a$  y  $b$ .

### Discontinuidades

Si no se verifica la definición de continuidad en un punto, la función considerada es discontinua en ese punto.

Una función puede ser discontinua en  $x = a$ , por que  $\nexists f(a)$ , o porque  $\nexists \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x)$ , o porque ambos existen pero son distintos.

Según sea la condición o condiciones de continuidad que no se cumplan, se presentan distintos tipos o casos de discontinuidad que dividiremos en Discontinuidades Finitas y Discontinuidades Infinitas, según que los límites de la función en el punto sean finitos, o que exista por lo menos uno que sea infinito.

### Discontinuidades Finitas

Se dividen en dos casos: de 1<sup>era</sup> especie y de 2<sup>da</sup> especie. Según, que existan los límites laterales o falte alguno.

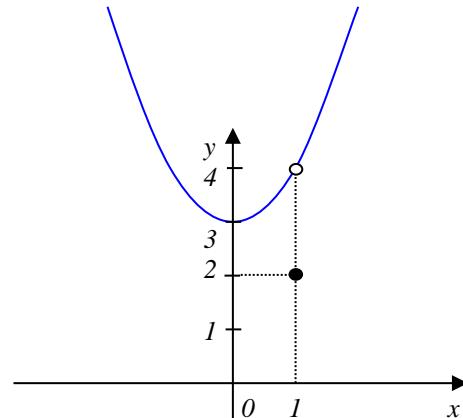
A) Discontinuidades finitas de 1<sup>era</sup> especie: existen los límites laterales. Se presentan dos casos:

**CASO 1:** (a)  $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ; pero:  $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

En este caso, la función presenta una discontinuidad en  $x = a$  (definiéndose a  $x = a$  como punto aislado), puesto que el valor de la función  $f(a)$ , es distinto a los límites laterales.

Ejemplo:  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & ; \text{ si } x \neq 1 \\ 2 & ; \text{ si } x = 1 \end{cases}$

$$f(1) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = 4$$



Discontinuidad de 1<sup>era</sup> especie en  $x = 1$

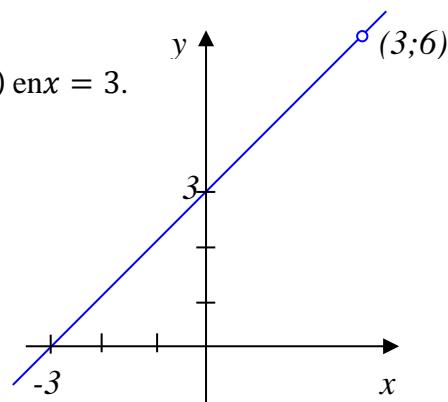
(b) Cuando  $f(x)$  no está definida en  $x = a$ , pero sí:  $\exists \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x)$ . En este caso particular, como la

función no está definida en  $x = a$ , pero existe el límite finito en dicho punto, se dice que la función presenta en  $x = a$  una Discontinuidad evitable.

Ejemplo: Sea:  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ ; estudiar la continuidad de  $f(x)$  en  $x = 3$ .

(1)-  $\nexists f(3)$

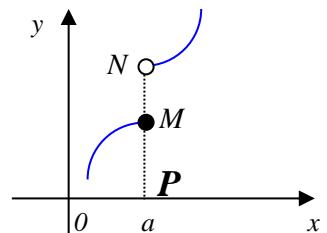
(2)-  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 3 = 6$



redefiniendo:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & ; \text{ si } x \neq 3 \\ 6 & ; \text{ si } x = 3 \end{cases}$   $\Rightarrow f(x)$  es continua.  $\therefore f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$  tiene una Discontinuidad evitable, pues basta tomar como valor de la función en el punto considerado el valor de su límite para que desaparezca la discontinuidad.

**CASO 2:** es el caso en que los límites laterales son distintos:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

Según la gráfica:  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \overline{PM} \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \overline{PN} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$



A esta forma de discontinuidad se la llama salto finito; pudiéndose presentar distintos casos particulares, según sea el valor de la función en el punto.

(a) Sí:  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Rightarrow$  la función será continua a izquierda y discontinua a derecha de  $x=a$ .

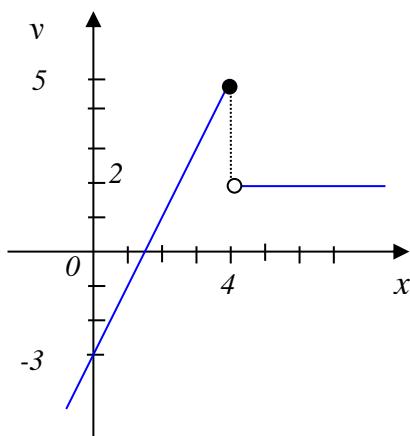
Ejemplo: Sea:  $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & ; \text{ si } x \leq 4 \\ 2 & ; \text{ si } x > 4 \end{cases}$ ; Estudiaremos las condiciones de continuidad en  $x=4$ .

$$(1)- f(4) = 5$$

$$(2)- \nexists \lim_{x \rightarrow 4} f(x); \text{ pues: } \lim_{x \rightarrow 4^+} 2 = 2 \wedge \lim_{x \rightarrow 4^-} 2x-3 = 5$$

como:  $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \Rightarrow f(x)$  es continua a izquierda y discontinua a derecha de  $x=4$ ,

presentando además un salto de “discontinuidad finito”.



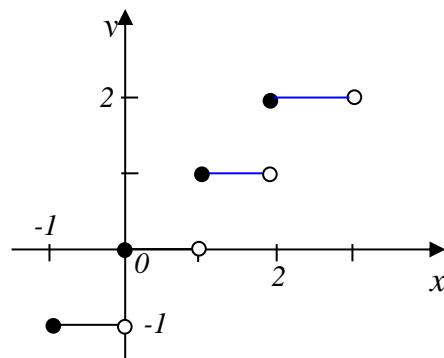
(b) Sí:  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow$  la función será continua a derecha y discontinua a izquierda de  $x=a$ .

Ejemplo: Sea:  $f(x) = [x]$ . Estudiaremos las condiciones de continuidad en  $x = 2$ .

$$(1)- f(2) = 2$$

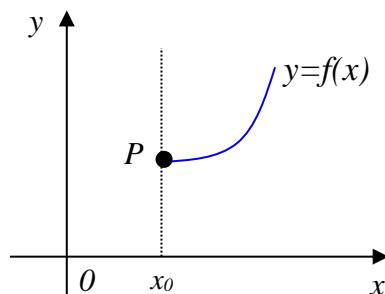
$$(2)- \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x); \text{ pues: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \wedge \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \Rightarrow f(x) = [x]$ , es continua a derecha y discontinua a izquierda del  $x = 2$ , presentando, además, un salto de “discontinuidad finito”.

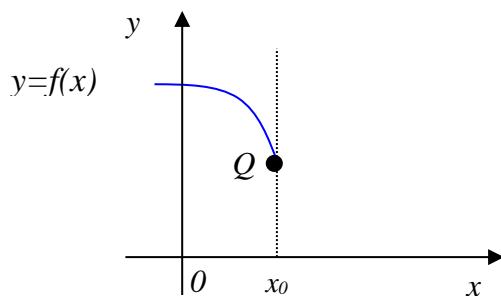


B). Discontinuidades finitas de 2<sup>da</sup> especie: cuando falta alguno de los límites laterales.

- (a) Que falte el límite izquierdo. En este caso la discontinuidad a izquierda es esencial o inevitable, puesto que como se puede observar, la curva se detiene en el punto P.



- (b) Que falte el límite derecho. En este caso la discontinuidad a derecha es esencial o inevitable, puesto que como se puede observar, la curva se detiene en el punto Q.



- (c) Por último, puede presentarse el caso en que los límites laterales no existan, tal como sucede en la función:  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ . Por lo que la discontinuidad será esencial o inevitable.

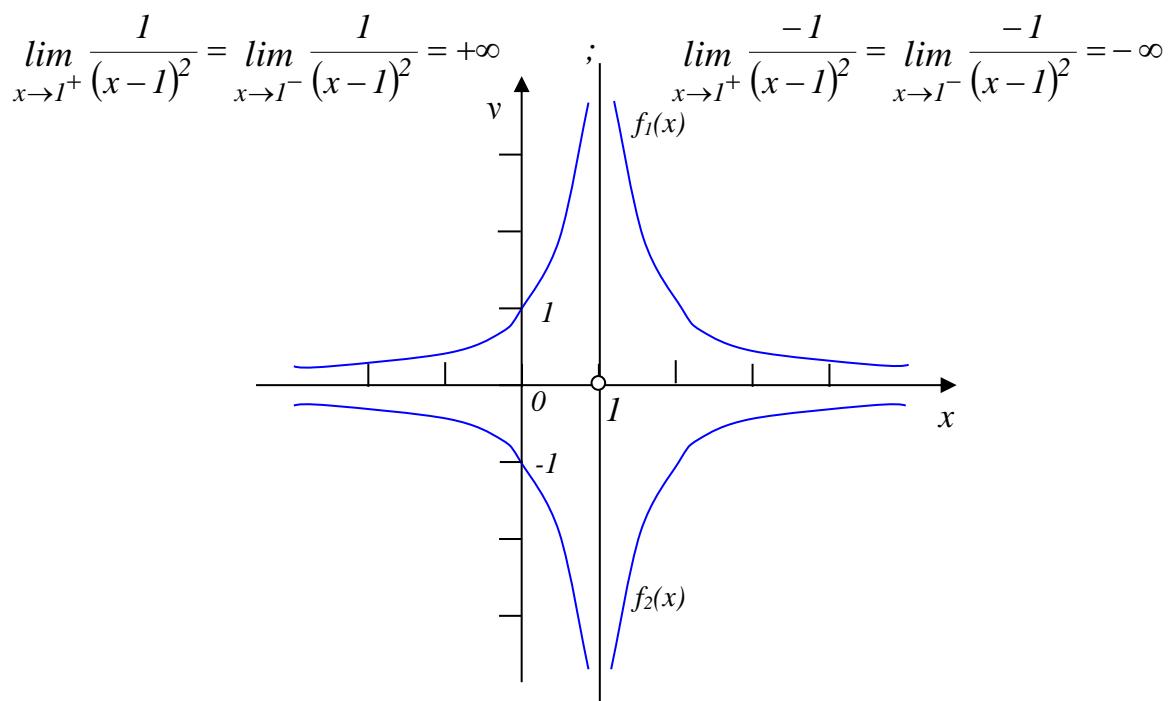
Discontinuidades infinitas

A) Discontinuidades infinitas 1<sup>era</sup> especie: existen los límites laterales

(a) Puede suceder que los límites laterales a izquierda y derecha sean simultáneamente iguales a  $\infty$ , positivo o negativo; es decir, que se verifica separadamente alguna de las siguientes condiciones:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \quad ; \quad (2) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

Ejemplo:  $f_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$   $\wedge$   $f_2(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$

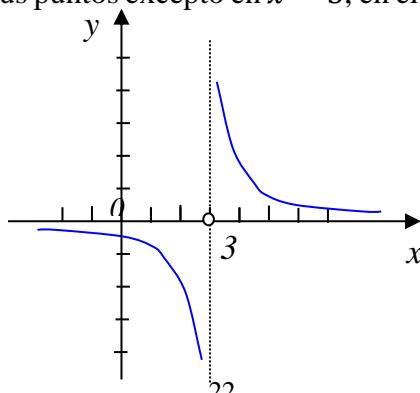


(b) Sea ahora el caso de una función  $f(x)$  cuyos límites laterales sean también infinitos, pero de signo contrario, es decir:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$

Como existen siempre los dos límites, este también es un caso de Discontinuidad infinita de 1<sup>era</sup> especie.

Ejemplo: Sea:  $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$

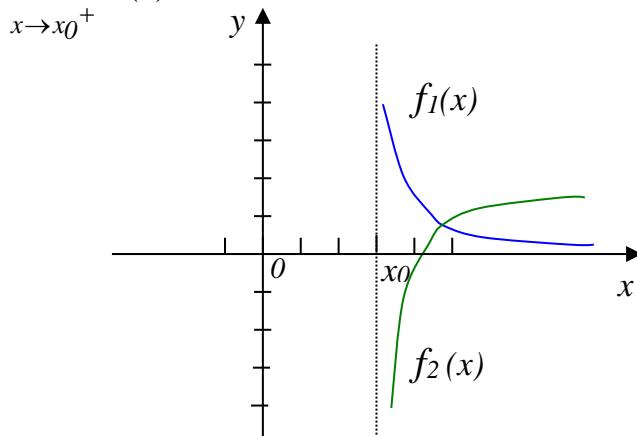
Esta función es continua en todos sus puntos excepto en  $x = 3$ , en el presente una discontinuidad infinita.



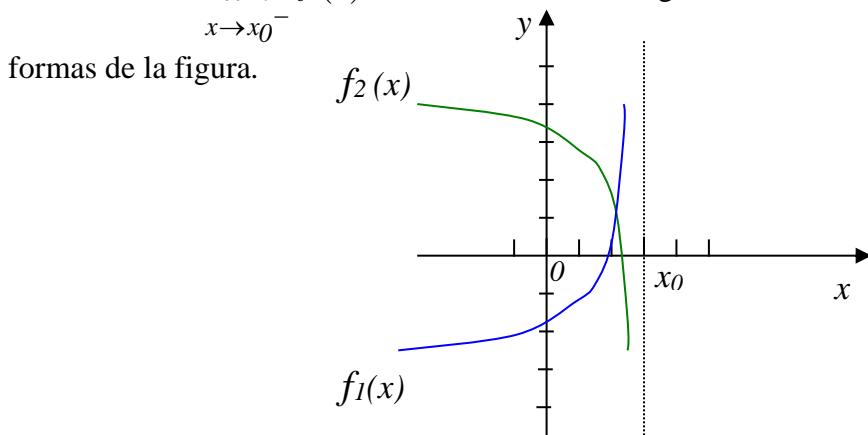
En los casos vistos precedentemente se dice que las funciones presentan en los puntos considerados “un salto infinito de discontinuidad”.

B) Discontinuidades infinitas de 2<sup>da</sup> especie: cuando falta alguno de los límites laterales.

- (a) Sea  $f(x)$  una función cuyo límite izquierdo no existe, siendo además, su límite derecho infinito, es decir:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ,  $f(x)$  puede tomar alguna de las dos formas de la figura.



- (b) Puede ocurrir que dada una función  $f(x)$ , falte el límite derecho, y que el límite izquierdo sea infinito; o sea:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$ . En este caso la gráfica de la función tomará alguna de las formas de la figura.



### Álgebra de funciones Continuas

Las funciones continuas tienen una serie de propiedades, algunas de las cuales son consecuencia de los Teoremas sobre límites, en base a los cuales, si  $f(x)$  y  $g(x)$  son dos funciones continuas en el  $[a; b]$ , puede demostrarse que:

- (1)- La suma de dos funciones continuas en  $[a; b]$  es una función continua en dicho intervalo.  
 $h(x) = f(x) + g(x)$ ; como  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones continuas:

$$\forall x_0 \in [a; b]: \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0); \text{ y por límite de una suma:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = h(x_0)$$

- (2)- El producto de dos funciones continuas en  $[a; b]$  es una función continua en dicho intervalo.

- (3)- El cociente de dos funciones continuas en  $[a; b]$  es una función continua en dicho intervalo.

### Continuidad de la función Compuesta

Sea:  $y = f(u)$ ;  $u = g(x)$ ;  $f[g(x)] \Leftrightarrow$  Imagen  $g \subseteq$  Dominio  $f$

Sí  $g$  es continua en el punto  $x_0$  y  $f(u)$  es continua en  $g(x_0) \Rightarrow h(x) = f \circ g(x) = f[g(x)]$  es continua en  $x_0$ .

### Extremos de funciones

#### Extremos Absolutos o Globales

Se  $f(x)$ , una función definida en un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$

##### Máximo Absoluto:

El valor de  $f(c_1)$  es el máximo absoluto de  $f(x)$  si  $A \subseteq Df \Leftrightarrow f(c_1)$  no es superado por ninguno de los valores  $f(x)$  que alcanza la función en el conjunto  $A$ . Es decir:

$$f(c_1) \text{ máximo absoluto de } f(x) \text{ en } A \Leftrightarrow f(x) \leq f(c_1); \forall x \in A$$

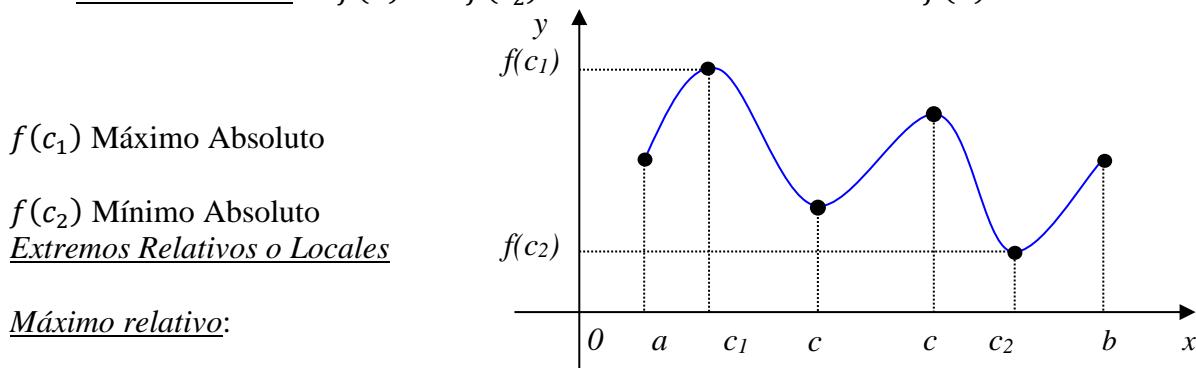
El conjunto  $A$  puede ser el Dominio de  $f(x)$  o puede ser un subconjunto del Dominio  $Df$ . En general, el valor  $f(c_1)$  es el máximo absoluto de  $f(x)$  si se cumple la definición anterior con  $A=Df$ . O sea:  $f(c_1)$  es el máximo absoluto de  $f(x) \Leftrightarrow f(c_1)$  es el máximo del recorrido  $Df(x)$ .

##### Mínimo absoluto:

El valor de  $f(c_2)$  es el mínimo absoluto de  $f(x)$  si  $A \subseteq Df \Leftrightarrow f(c_2)$  no supera a ninguno de los valores  $f(x)$  que alcanza la función en el conjunto  $A$ . Es decir:

$$f(c_2) \text{ mínimo absoluto de } f(x) \text{ en } A \Leftrightarrow f(x) \geq f(c_2); \forall x \in A$$

El valor  $f(c_2)$  es el mínimo absoluto de  $f(x)$  si se cumple la definición anterior con  $A=Df$ . O sea:  $f(c_2)$  es el mínimo absoluto de  $f(x) \Leftrightarrow f(c_2)$  es el mínimo del recorrido  $Df(x)$ .



Sea  $f(x)$ , función con dominio  $D$ , y sea  $c_1$ , un punto interior a dicho dominio.

El valor  $f(c_1)$  es un máximo local o máximo relativo de  $f(x) \Leftrightarrow$  existe un  $E_{(c_1)}$  tal que los valores que toma  $f(x)$  en los puntos de dicho entorno no superan el valor  $f(c_1)$ . Es decir:

$$f(c_1) \text{ máximo relativo} \Leftrightarrow \exists E_{(c_1)} \subseteq Df / \forall x \in E_{(c_1, \delta)} \Rightarrow f(x) \leq f(c_1)$$

Mínimo relativo: Sea  $c_2$  un punto interior de dominio de la función.

El valor  $f(c_2)$  es un mínimo local o mínimo relativo de  $f(x) \Leftrightarrow$  existe un  $E_{(c_2)}$  en el cual se verifica que el valor  $f(c_2)$  no supera a ninguno de los valores que toma  $f(x)$  en los puntos de dicho entorno. Es decir:

$$f(c_2) \text{ mínimo relativo} \Leftrightarrow \exists E_{(c_2)} \subseteq Df / \forall x \in E_{(c_2; \delta)} \Rightarrow f(x) \geq f(c_2)$$

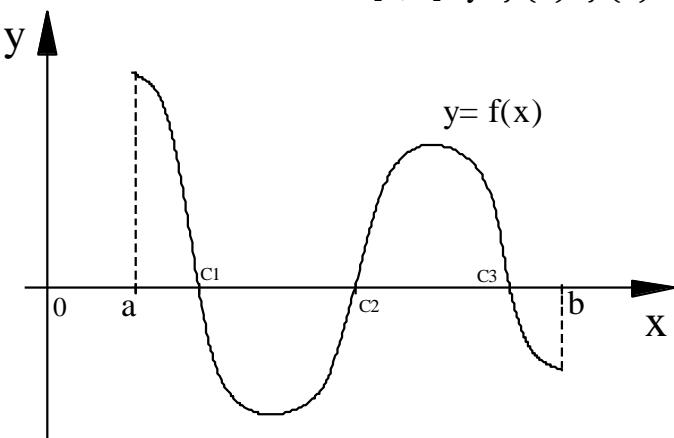
En el gráfico anterior:

$f(c_1)$  y  $f(c_4)$  Máximos Relativos

$f(c_2)$  y  $f(c_3)$  Mínimos Relativos

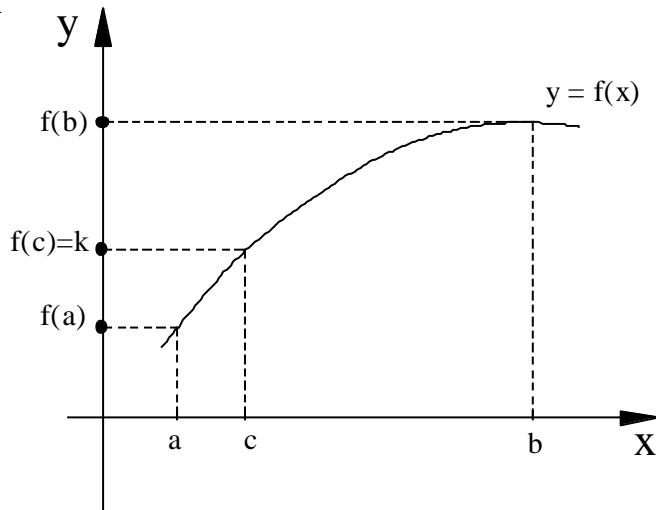
### Teorema de Bolzano o de los Ceros de las Funciones Continuas

Si  $f(x)$  es una función continua en un intervalo  $[a; b]$  y  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , entonces  $\exists c \in (a; b) / f(c) = 0$



### Teorema del Valor Intermedio

Si  $f(x)$  es una función continua en un intervalo  $[a; b]$  y  $f(a) < k < f(b)$ , entonces  $\exists c \in (a; b) / f(c) = k$



### Teoremas de Weierstrass

**Primer Teorema:** Si  $f(x)$  es una función continua en un intervalo  $[a; b]$ , entonces  $f(x)$  está acotada en  $[a; b]$ .

**Segundo Teorema:** Si  $f(x)$  es una función continua en un intervalo  $[a; b]$ , entonces  $f(x)$  alcanza en  $[a; b]$ , Máximo y Mínimo Absolutos.

## ANEXO

### Teoremas sobre límites:

A continuación, encontrarás las demostraciones de los Teoremas sobre límites de funciones para  $x \rightarrow a$ .

a).- El **límite del producto de una constante  $k$ , por una función  $f(x)$** , es igual al producto de la constante por el límite  $L$  de la función, o sea:

$$\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot L$$

Demostración:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |k \cdot f(x) - k \cdot L| < \varepsilon \Leftrightarrow |k \cdot (f(x) - L)| < \varepsilon \Leftrightarrow |k||f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

para  $0 < |x - a| < \delta$ ; O sea, por definición de límite:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot k = k \cdot L$

b).- El **límite de una suma de funciones**, es igual a la suma de los límites de las funciones dadas, siempre y cuando los límites existan:  $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_1 + L_2 \Leftrightarrow$

Hipótesis:

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists \delta'(\varepsilon') > 0 / \forall x: (x \in Df_1 \wedge 0 < |x - a| < \delta') \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \varepsilon'$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon'' > 0, \exists \delta''(\varepsilon'') > 0 / \forall x: (x \in Df_2 \wedge 0 < |x - a| < \delta'') \Rightarrow |f_2(x) - L_2| < \varepsilon''$$

Tesis:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_1 + L_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x: (x \in D_{f_1 \cap f_2} \wedge 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |(f_1(x) + f_2(x)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Demostración: por hipótesis:  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1 \wedge \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2$

Tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ :

$$\begin{aligned} |(f_1(x) + f_2(x)) - (L_1 + L_2)| &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{asociamos}}}{=} |(f_1(x) - L_1) + (f_2(x) - L_2)| \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{por desigualdad} \\ \text{triangular}}}{\leq} \\ &\leq \underbrace{|f_1(x) - L_1|}_{< \varepsilon'} + \underbrace{|f_2(x) - L_2|}_{< \varepsilon''} \leq \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon \Rightarrow |(f_1(x) + f_2(x)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Luego:  $\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) + f_2(x)] \rightarrow (L_1 + L_2)$

c).- En forma análoga se demuestra que el **límite de la diferencia de funciones, es igual a la diferencia de los límites** de las funciones dadas, siempre y cuando los límites existan.

d).- El **límite del producto de funciones es igual al producto de los límites de las funciones** dadas, siempre y cuando los límites existan.

Límite de un producto de dos funciones

Hipótesis:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1(\varepsilon_1) > 0 / \forall x \in Df_1 \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \varepsilon_1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2(\varepsilon_2) > 0 / \forall x \in Df_2 \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - L_2| < \varepsilon_2 \quad (2)$$

Tesis:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = L_1 \cdot L_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists \delta(\varepsilon') > 0 / \forall x \in D(f_1 \cap f_2):$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f_1(x) \cdot f_2(x)) - (L_1 \cdot L_2)| < \varepsilon'$$

Demostración: Sin emplear valor absoluto hacemos el siguiente producto:

$$(f_1(x) - L_1) \cdot (f_2(x) - L_2) = f_1(x) \cdot f_2(x) - \underbrace{f_1(x) \cdot L_2 - f_2(x) \cdot L_1}_{\text{al 1er miembro}} + L_1 \cdot L_2$$

$$(f_1(x) - L_1) \cdot (f_2(x) - L_2) + f_1(x) \cdot L_2 + f_2(x) \cdot L_1 = f_1(x) \cdot f_2(x) + L_1 \cdot L_2;$$

invirtiendo la igualdad obtenemos:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) + L_1 \cdot L_2 = (f_1(x) - L_1) \cdot (f_2(x) - L_2) + f_1(x) \cdot L_2 + f_2(x) \cdot L_1$$

---


$$-2 \cdot L_1 \cdot L_2 = -2 \cdot L_1 \cdot L_2 \quad \text{sumamos a ambos miembros el valor } -2 \cdot L_1 \cdot L_2$$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) - L_1 \cdot L_2 = (f_1(x) - L_1) \cdot (f_2(x) - L_2) + f_1(x) \cdot L_2 + f_2(x) \cdot L_1 - 2 \cdot L_1 \cdot L_2$$

descomponemos:  $-2 \cdot L_1 \cdot L_2 = -L_1 \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2$ , y luego factoreamos el segundo miembro con el segundo caso de factoreo:

$$\begin{aligned} f_1(x) \cdot f_2(x) - L_1 \cdot L_2 &= (f_1(x) - L_1) \cdot (f_2(x) - L_2) + f_1(x) \cdot L_2 + f_2(x) \cdot L_1 - L_1 \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2 = \\ &= (f_1(x) - L_1) \cdot (f_2(x) - L_2) + L_2 \cdot (f_1(x) - L_1) + L_1 \cdot (f_2(x) - L_2) \end{aligned}$$

aplicando valor absoluto:

$$\begin{aligned} &|f_1(x) \cdot f_2(x) - L_1 \cdot L_2| \\ &= |(f_1(x) - L_1) \cdot (f_2(x) - L_2) + L_2 \cdot (f_1(x) - L_1) + L_1 \cdot (f_2(x) - L_2)| \stackrel{\text{Por Prop. del Valor Absoluto}}{\leq} \\ &\leq \underbrace{|(f_1(x) - L_1)|}_{< \varepsilon_1 \text{ por (1)}} \cdot \underbrace{|(f_2(x) - L_2)|}_{< \varepsilon_2 \text{ por (2)}} + |L_2| \underbrace{|(f_1(x) - L_1)|}_{< \varepsilon_1} + |L_1| \cdot \underbrace{|(f_2(x) - L_2)|}_{< \varepsilon_2} \\ &< \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 + |L_2| \cdot \varepsilon_1 + |L_1| \cdot \varepsilon_2 < \varepsilon' \end{aligned}$$

Luego:  $|f_1(x) \cdot f_2(x) - L_1 \cdot L_2| < \varepsilon'$ , si además:  $\delta: \text{mínimo } \{\delta_1; \delta_2\}$ , cuando:

$$x \in D(f_1(x) \cap f_2(x)) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$$

e).- El **límite de la recíproca de una función es igual a la recíproca del límite**, siempre que dicho límite sea distinto a cero.

Hipótesis:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (L \neq 0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x : (\forall x \in Df \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

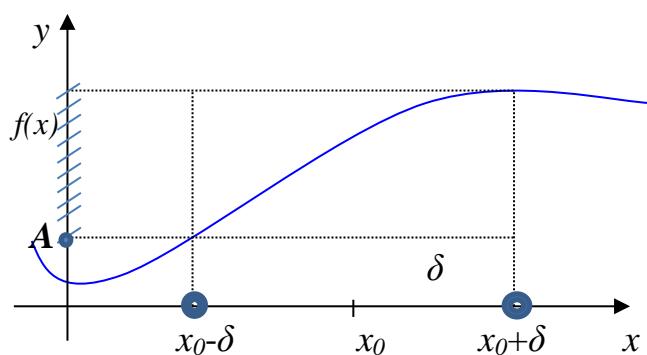
Tesis:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \frac{1}{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists \delta'(\varepsilon') > 0 / \forall x : \left( x \in Df \setminus f(x) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta' \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \right| < \varepsilon' \right)$$

Demostración: Sea un número  $\varepsilon' > 0$ ; debemos probar que existe un número  $\delta > 0$  tal que:

$$\text{si } x \in D \frac{1}{f(x)} \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \right| < \varepsilon'$$

$$\text{Calculemos cuando vale: } \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \right| = \left| \frac{L - f(x)}{f(x).L} \right| = \frac{|L - f(x)|}{|f(x)|.|L|} = \underbrace{\frac{1}{|f(x)|}}_{\varepsilon''} \frac{|f(x) - L|}{|L|} = \frac{|f(x) - L|}{|f(x)||L|} \quad (1)$$



Sí  $A$  es una cota inferior de la función en el intervalo  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ , podemos escribir:

$$f(x) > A \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|A|} \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon'' > 0 ;$$

$$\text{reemplazando en (1); resulta: } \frac{|f(x) - L|}{|f(x)|.|L|} < \frac{\varepsilon}{|A|.|L|} = \varepsilon'$$

$$\text{Luego, queda demostrado que: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

f).- El **límite de un cociente de funciones** es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero.

Sí  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = L_1 \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = L_2 \wedge L_2 \neq 0$ , y si  $x_0$  es punto de acumulación del dominio de  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ , entonces:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$  existe y es  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f_2(x)} = L_1 \cdot \frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

g).- El límite de la opuesta de una función es igual a la opuesta del límite.

h).- Unicidad del Límite: una función no puede tener, para  $x \rightarrow a$ , dos límites distintos.

Una función no puede tener para  $x \rightarrow x_0$  dos límites distintos.

Sí  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$ , entonces:  $L_1 = L_2$

Supongamos que la función  $f(x)$  tiene para  $x \rightarrow x_0$  dos límites distintos, o sea:  $L_1 \neq L_2$

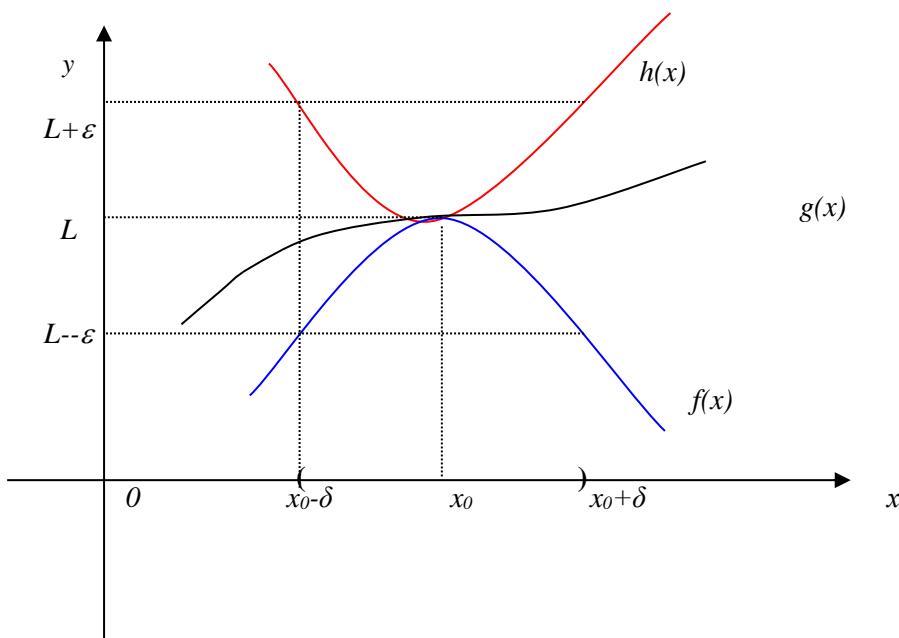
Siendo  $\varepsilon > 0$ , existen  $\delta_1$  y  $\delta_2$  tales que:  $x \in Df \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon'$   
 $x \in Df \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon''$

Ahora bien, cuando  $x_0$  es un punto de acumulación del  $Df$ , está definida en algún punto  $x_1 \neq x_0$  en el intervalo abierto:  $(x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1) \cap (x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2)$ ,

Luego:  $|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x_1) + f(x_1) - L_2| \leq |L_1 - f(x_1)| + |f(x_1) - L_2| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon$   
 Y como sabemos que sí:  $|a| \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$ , resulta:  $L_1 = L_2$

### i).- Teorema de Confrontación entre límites:

Sí existe un intervalo abierto  $A$  que contiene  $x_0 / \forall x \neq x_0: f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  y sí:  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$



### ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS INFINITÉSIMOS

**(I).**- Si una función tiene límite finito, entonces dicha función es igual a su límite más un infinitésimo:  
 $f(x) = L + \varepsilon(x);$

puesto que:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , cuando la diferencia:  $f(x) - L$  tiene límite cero, o sea, cuando la diferencia es un infinitésimo  $\varepsilon(x)$ , podemos escribir en un entorno del punto  $x = a$ :

$$f(x) = L + \varepsilon(x); \quad \varepsilon(x) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow a$$

O bien: “Si una función tiene límite finito, entonces dicha función es igual a su límite más un infinitésimo”.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x: \left( x \in Df \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{\varphi(x)} \right)$$

Sea la siguiente función:  $\varepsilon(x) = \phi(x) = f(x) - L$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - L] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = L - L = 0 \quad \therefore \quad \varepsilon(x) \rightarrow 0$$

$$\varepsilon(x) \text{ es un infinitésimo; } f(x) - L = \varepsilon(x) \Rightarrow f(x = L + \varepsilon(x))$$

**(II).-** La suma de varios infinitésimos en un mismo punto  $x = a$  es otro infinitésimo en el punto  $a$ . O bien, la suma de un número finito de infinitésimo para  $x \rightarrow a$ , es otro infinitésimo para  $x \rightarrow a$ .

**(III).-** El producto de dos infinitésimos en un mismo punto  $x = a$ , es un infinitésimo en el punto  $a$ .

**(IV).-** El producto de un infinitésimo por una constante  $k$  cualquiera, es un infinitésimo.

**(V).-** El cociente de un infinitésimo por una constante, es un infinitésimo.

#### Cociente de infinitésimos. Órdenes infinitesimales

A diferencia de lo que sucede con la suma resta y producto de infinitésimos, no podemos asegurar nada en general sobre el cociente de infinitésimos.

Ejemplo:

El cociente:  $\frac{x^5}{x^3}$ ;  $x^5$  y  $x^2$  infinitésimos para  $x \rightarrow 0$ ;  $\frac{x^5}{x^2} = x^3$  infinitésimo para  $x \rightarrow 0$  (1)

El cociente:  $\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3} \rightarrow \infty$  (2)

El cociente:  $\frac{x^2}{2x^2}$ ;  $x^2$  y  $2x^2$  infinitésimos para  $x \rightarrow 0$ :  $\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$  (3)

En general, si  $f(x)$  y  $g(x)$  son dos infinitésimos y  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$ , se dice que  $f(x)$  es un infinitésimo de orden superior, respecto  $g(x)$ . Simbolizamos:  $f = o(g)$  (1)

Si:  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \infty$ ,  $f(x)$  es un infinitésimo de orden inferior respecto de  $g(x)$   $g = o(f)$  (2)

Si:  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow k \neq 0$ ,  $f(x)$  y  $g(x)$  son infinitésimos del mismo orden  $f \approx k \cdot g$  (3)

Sí además:  $k = 1$ ;  $f(x)$  y  $g(x)$  son infinitésimos equivalentes.

**(VI).-** El producto de un infinitésimo para  $x \rightarrow a$  por una función acotada es otro infinitésimo para  $x \rightarrow a$ .

**(VII).-** Si a un infinitésimo se le suma otro de orden superior se obtiene un infinitésimo equivalente al primero.

**(VIII).-** La diferencia entre dos infinitésimos equivalentes, es otro infinitésimo de orden superior a ellos.



## TRABAJO PRÁCTICO N° 12: LÍMITES (Definición y propiedades)

### Concepto intuitivo de límite

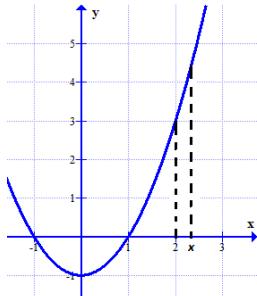
Supongamos que tenemos una función  $y = f(x)$  /  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Saber cuál es el comportamiento de la función en un número real  $a$  es muy sencillo, simplemente calculamos  $f$  en  $a$  y vemos que pueden suceder dos cosas: que existe un número real  $f(a)$ , o no existe  $f(a)$ . Pero saber cuál es el comportamiento de la función muy cerca de  $a$  sin referirnos a un punto específico y sin referirnos a  $a$ , es un problema bastante delicado pero de gran importancia, ya que conociendo este comportamiento se tiene una amplia información sobre la gráfica de la función cerca de  $a$ , información que no se puede tener si solamente se conoce la función en el punto.

Presentaremos diversas situaciones en las cuales se mostrará, a partir de las gráficas de funciones, que sucede con las imágenes de una variable  $x$  a medida que esta variable se acerca a un punto fijo  $a$ , sin llegar a ser  $a$ , pero acercándose tanto como se quiera. Este procedimiento se denomina: **método gráfico de resolución**.

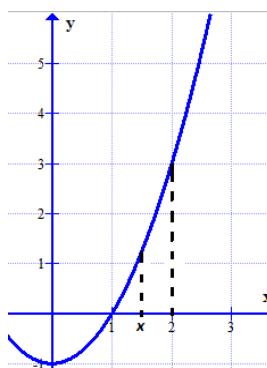
**Ejemplo 1:** Consideremos la función  $f(x) = x^2 - 1$  y tomaremos  $a = 2$ .

Conocer el comportamiento de la función en  $x = 2$ , es simplemente calcular  $f(2)$ , que en este caso es  $f(2) = 2^2 - 1 = 3$  o sea  $2 \in Df$ .

Pero para conocer el comportamiento de la función cuando la variable  $x$  se está acercando a 2, es preciso observar que:



1º En la gráfica podemos ver que a medida que  $x$  se acerca a 2 por su derecha, sus imágenes se van acercando a 3, lo que se suele expresar diciendo, que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 2 por la derecha es 3 y se simboliza:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$



2º De manera análoga, podemos ver que a medida que  $x$  se acerca a 2 por su izquierda, sus imágenes se van acercando a 3, lo que se suele expresar diciendo, que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 2 por la izquierda es 3 y se simboliza:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$

Observemos que en este caso la gráfica de la función tiende al mismo valor cuando  $x$  se acerca a 2 tanto por la derecha como por la izquierda y además que ese valor común de límites laterales coincide con el valor de  $f$  en 2,  $f(2) = 3$ . Más adelante trabajaremos con este tipo de funciones, a los que llamamos continuas.

Determinemos el límite de la función mediante el **método numérico**:



Si se confecciona una tabla de valores para puntos próximos a 2, es decir, valores de  $x$  que pertenecen a un entorno reducido de 2, las imágenes correspondientes de la función  $f(x)$  son:

$X$	$f(x)$
1,9	2,61
1,99	2,9601
1,999	2,996001
1,9999	2,99960001
2,0001	3,00040001
2,001	3,004001
2,01	3,0401
2,1	3,41

Observamos que cuando  $x$  se aproxima a 2 con valores mayores o menores a 2,  $f(x)$  se aproxima o **tiende** a 3.

Por lo tanto, cuando la distancia, entre  $x$  y 2 se hace más pequeña, la distancia entre  $f(x)$  y 3 se hace también más pequeña. Si recordamos que la distancia entre dos valores se puede simbolizar mediante la diferencia en valor absoluto, resulta:

$ x - 2 $	$ f(x) - 3 $
$ 1,9 - 2  = 0,1$	$ 2,61 - 3  = 0,39$
$ 1,99 - 2  = 0,01$	$ 2,9601 - 3  = 0,0399$
$ 1,999 - 2  = 0,001$	$ 2,996001 - 3  = 0,003999$
$ 1,9999 - 2  = 0,0001$	$ 2,99960001 - 3  = 0,00039999$
$ 2,0001 - 2  = 0,0001$	$ 3,00040001 - 3  = 0,00040001$
$ 2,001 - 2  = 0,001$	$ 3,004001 - 3  = 0,004001$
$ 2,01 - 2  = 0,01$	$ 3,0401 - 3  = 0,0401$
$ 2,1 - 2  = 0,1$	$ 3,41 - 3  = 0,41$

Cuando se quiere definir una distancia como muy pequeña, es necesario fijar a partir de qué número real se considera "muy pequeña" una distancia. Es por eso que se consideran a los números reales positivos  $\delta$  y  $\varepsilon$ , como la distancia que definirá la proximidad de dichos puntos. Es decir, cuando  $x$  se aproxima a 2 se expresa como:  $|x - 2| < \delta$ , entonces la distancia entre  $f(x)$  y 3 se hace más pequeña, es decir  $|f(x) - 3| < \varepsilon$ .

De lo que se deduce que el límite de la función  $f$  cuando  $x$  tiende a 2, es 3. Simbólicamente:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

**Intuitivamente la idea que tenemos de límite de una función en un punto es el número hacia el que se aproximan los valores que toma la función cuando la variable independiente se aproxima a ese punto, esa proximidad se puede determinar mediante tabla o desde el gráfico de la función.**

**Actividad N° 1:** Determina el límite de la función  $f(x) = 2x - 1$  cuando  $x$  tiende a 3, justifica tu respuesta mediante el análisis del gráfico de la función y mediante el método numérico (confección de tablas) explicando cada observación que debiste hacer para establecer el resultado.

**Actividad N° 2:** Si se fijara una distancia máxima para establecer la cercanía al valor del límite, en  $\varepsilon = 0,1$ , señala el entorno en el eje  $y$  del gráfico de la función, e indica con qué valores del Dominio se relacionan. ¿Es posible definir la máxima distancia a la que pueden estar los puntos del dominio del valor  $x=3$ , para que sus imágenes pertenezcan al entorno de radio  $\varepsilon$ ?



En base a lo trabajado hasta ahora podemos dar una definición coloquial de límite:

Si  $f(x)$  se acerca arbitrariamente a un número  $L$  cuando  $x$  se aproxima a  $a$ , punto de acumulación del dominio de la función, entonces el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a  $a$  es  $L$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Para ampliar el concepto y poder dar la definición formal de límite, es necesario que veamos el siguiente ejemplo, ya que nos interesa ver en qué condiciones los valores de una función se aproximan a un número real determinado cuando los puntos del dominio se acercan a un valor  $a$  que puede no pertenecer a dicho dominio.

**Ejemplo 2:** Sea la función:  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

Calculemos entonces algunos valores de la función en cuando  $x$  tiende a 3:

*x se aproxima a 3 por la izquierda.*

*x se aproxima a 3 por la derecha.*

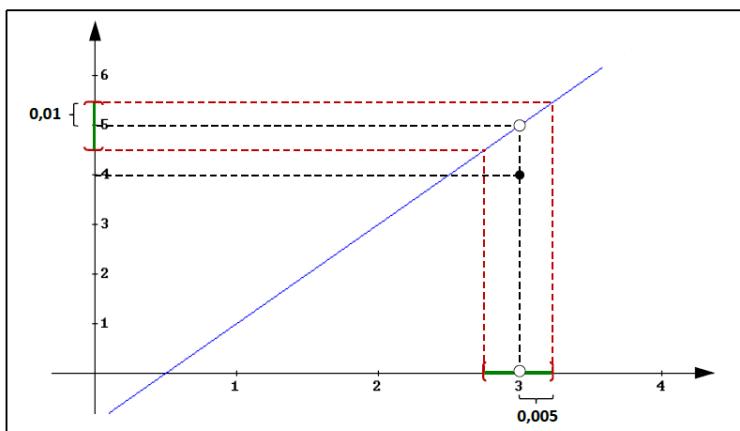
$x$	2,8	2,9	2,99	2,999	...	3	...	3,001	3,01	3,1	3,2
$f(x)$	4,6	4,8	4,98	4,998	...	5	...	5,002	5,02	5,2	5,4

*$f(x)$  se aproxima a 5.*

*$f(x)$  se aproxima a 5.*

El hecho de que  $f(3) = 4$  no influye en la existencia ni en el valor del límite cuando  $x$  se aproxima a 2, por ejemplo, si la función hubiera sido  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$  el límite seguiría siendo el mismo.

Podemos ver que la función se acerca a 5 para todos los  $x$  distintos de  $x \neq 3$ , es decir existe límite y es 5, como se muestra en la figura:



Observamos que los valores de la función se acercan al número 5 cuando los valores de  $x$  se acercan al número 3. Aún más, la función puede alcanzar cualquier valor próximo a 5 con tal de considerar a  $x$  suficientemente próximo a 3, **sin que sea necesario tomar el valor de  $x = 3$** . Si fijáramos un valor de  $\varepsilon = 0,01$ , para que la distancia entre  $f(x)$  y 5 sea menor que un centésimo (1), podríamos observar que los valores del dominio que les corresponden tendrán una distancia a 3 menor a 0,005, pero con  $x \neq 3$  (2)



**(1)**  $f(x)$  y 5 tienen una distancia menor a  $\varepsilon$  es equivalente a  $|f(x) - 5| < \varepsilon$ , si lo expresamos como un entorno sería  $E(5, \varepsilon)$ , centro = 5 y semiamplitud =  $\varepsilon$

**(2)**  $x$  y 3 tienen una distancia menor a  $\delta = 0,005$ , pero con  $x \neq 3$ , es equivalente a  $0 < |x - 3| < \delta$ , si lo expresamos como un entorno reducido, sería  $E'(3, \delta)$ , centro 3 y semiamplitud  $\delta$ .

Estamos en condiciones de definir de manera formal al límite finito de una función:

### LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

**Definición:** Sean  $f$  una función y  $a$  un número real, punto de acumulación del dominio de la función.  $f$  está definida en un entorno reducido de centro  $a$ , es decir,  $f$  no está necesariamente definida en  $a$ . Se dice que la función  $f$  **tiende a un número  $L$**  cuando  $x$  tiende al punto  $a$  o que  $L$  es límite de  $f$  en el punto  $a$ , si para cualquier  $\varepsilon > 0$ , por pequeño que este sea, existe un intervalo alrededor de  $a$ , es decir  $(a - \delta, a + \delta)$ , tal que  $|f(x) - L|$  es menor que  $\varepsilon$ , para todos los puntos  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  diferentes de  $a$ .

Cuando esto ocurra se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Es decir:

**Una función  $f$  tiene por límite  $L$  cuando  $x$  tiende a  $a$  si para todo entorno  $E(L, \varepsilon)$  existe un entorno  $E(a, \delta)$ , de modo que para todo  $x$  perteneciente al entorno reducido  $E(a, \delta)$  se cumple que  $f(x)$  pertenece al entorno  $E(L, \varepsilon)$**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x \in E(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in E(L, \varepsilon)$$

Por la definición de entorno podemos expresar la definición de límite de la siguiente manera:

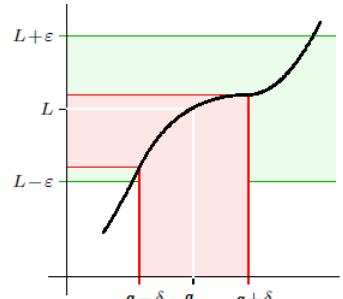
**Una función  $f$  tiene por límite  $L$  cuando  $x$  tiende a  $a$  si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \varepsilon$**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x : (x \in Df \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

### Interpretación gráfica

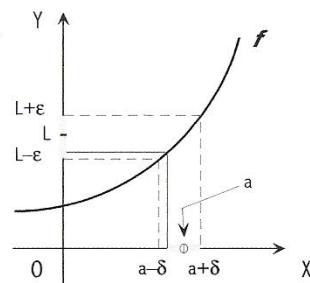
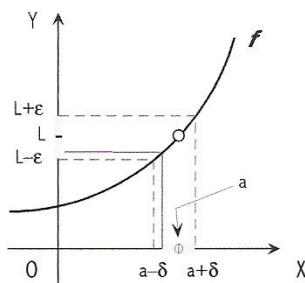
En la figura de la derecha se ve que, en efecto, para los puntos cercanos a  $a$  (en fondo rojo) sus imágenes (en fondo rojo) están dentro de la cercanía de  $L$  fijada (en fondo verde).

Que  $L$  sea límite significa que es un número al cual se pueden aproximar los valores  $f(x)$  tanto como se quiera. Una manera de medir la proximidad de  $f(x)$  y  $L$  es mediante el valor absoluto de su diferencia:  $|f(x) - L|$ , que geométricamente representa la distancia entre los puntos en la recta real correspondientes a los reales  $f(x)$  y  $L$ , así el límite será un número  $L$  tal que la distancia  $|f(x) - L|$  entre  $f(x)$  y  $L$  se pueda hacer tan pequeña como se quiera, con tal que se elija  $x$  suficientemente cercano a  $a$ . Y como se puede observar en el Ejemplo 2 es irrelevante que la función este definida o no en el punto  $a$ .



Se fija un valor pequeño  $\varepsilon$  como radio del entorno de centro  $L$ . Por  $L + \varepsilon$  y  $L - \varepsilon$ , se trazan paralelas al eje  $x$  hasta interceptar al gráfico de la función, luego se proyectan esas intersecciones sobre el eje  $x$ .

Si quedan determinados dos valores de  $\delta$ , a ambos lados de  $a$ , se considera el entorno reducido de centro  $a$  y radio  $\delta$ , siendo  $\delta$  el menor valor de ambos radios, es decir:  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  para que satisfaga la definición.



**Ejemplo 3:** Para demostrar analíticamente que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , debemos encontrar un  $\delta > 0$  para un  $\varepsilon > 0$  cualquiera y muy pequeño que verifique la implicación:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Retomando el Ejemplo 2, para demostrar analíticamente que  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ , con

$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$  debemos encontrar un  $\delta > 0$  para un  $\varepsilon > 0$  cualquiera y muy pequeño.

Haciendo  $\varepsilon = 0,01$  buscaremos que verifique la implicación:

$$\begin{aligned} 0 < |x - 3| < \delta &\Rightarrow |(2x - 1) - 5| < 0,01 \\ &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} |2x - 6| < 0,01 \\ &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} |2(x - 3)| < 0,01 \\ &\stackrel{(3)}{\Rightarrow} |2| \cdot |x - 3| < 0,01 \\ &\stackrel{(4)}{\Rightarrow} |x - 3| < \frac{0,01}{2} \\ &\stackrel{(5)}{\Rightarrow} |x - 3| < 0,005 \\ &\stackrel{(6)}{\Rightarrow} |x - 3| < 0,005 \end{aligned}$$

- (1) En  $|f(x) - L| < 0,001$ , remplazamos por la expresión de la función, que corresponde a los valores próximos a  $x=3$ . Realizamos la operación en el valor absoluto.
  - (2) A la expresión:  $2x-6$ , podemos factorizar, sacando 2 como factor común, resulta  $2(x-3)$
  - (3) El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos, por lo tanto, se distribuye.
  - (4) El  $|2|=2$ , si dividimos a ambos miembros por 2, la desigualdad no cambia.
  - (5) En el 2º miembro se divide 0,01 por 2.
  - (6) Por hipótesis
- $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow 0 < |x - 3| \text{ y } |x - 3| < \delta,$   
por lo tanto  $\delta = 0,005$

Por lo tanto:

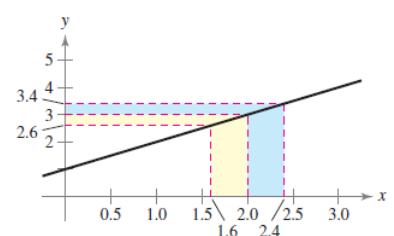
$$0 < |x - 3| < \delta \Leftrightarrow |x - 3| < 0,005$$

Entonces:  $\delta = 0,005$  cuando  $\varepsilon = 0,01$ , lo que demuestra que para los valores de  $x$  en el  $E'(3; 0,005)$ , los valores correspondientes a  $f(x)$  se encuentran en el  $E(5; 0,01)$ .

En general para cualquier número  $\varepsilon > 0$ , basta considerar:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > \frac{\varepsilon}{2} / 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon$$

**Actividad N° 3:** En la figura se muestra la gráfica de  $f(x) = x + 1$ . Encuéntre un  $\delta$  tal que si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $|f(x) - 3| < 0,4$





**Actividad N° 4:** Calcula el  $\lim_{x \rightarrow 4} \left(4 - \frac{x}{2}\right)$ . Luego, determina un  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < 0,01$  siempre que  $0 < |x - a| < \delta$ .

### Resumiendo:

El límite de una función en un punto puede existir, independientemente de lo que ocurre con la función en el punto. En la siguiente tabla se muestran las distintas posibilidades:

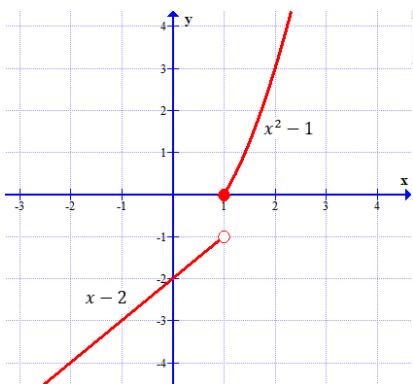
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L</math></li> <li>la función no está definida en <math>a, a \notin D_f</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L</math></li> <li>la función está definida en <math>a</math>, existe <math>f(a)</math>.</li> <li><math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L</math></li> <li>la función está definida en <math>a</math>, existe <math>f(a)</math>.</li> <li><math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)</math></li> </ul>	<p>En estos tres ejemplos se observa que el límite de la función <math>f(x)</math> cuando <math>x</math> tiende a "a" es el número <math>L</math> independientemente del comportamiento de la función en el punto.</p>
---	---	--	--

### Límites que no existen

En el siguiente ejemplo trabajaremos con una función por tramo donde se examinaremos la existencia de límite.

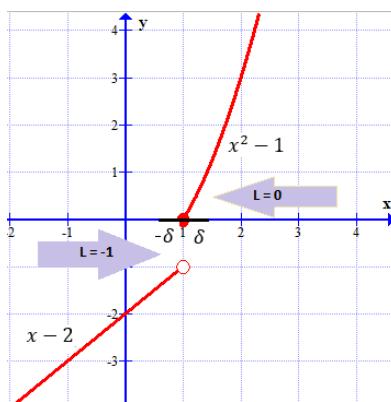
### Funciones partidas o por tramos o por intervalos

Una **función partida** es aquella que para definirla se necesitan diferentes reglas de asignación para distintos subconjuntos del Dominio. Por ejemplo:  $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ . Se debe tener en cuenta al momento de representarla gráficamente, que en el valor  $x = 1$  la curva cambia de forma, por lo que a los valores de  $x \leq 1$ , se obtienen sus imágenes reemplazando en  $x - 2$ , y para los valores de  $x > 1$ , se remplazan en  $x^2 - 1$ , teniendo en cuenta si el valor donde comienza o termina el subconjunto está o no incluido en el dominio. Así, resulta el siguiente gráfico:



Dominio = IR

Imagen =  $(-\infty, -1] \cup [0, \infty)$



Si quisieramos calcular el límite de la función cuando  $x$  tiende a 1, tanto numéricamente como gráficamente podemos observar que al acercarse por derecha es distinto al valor del límite cuando se acerca por izquierda.

Esto significa que cuando  $x$  se aproxime a 1 por la derecha los valores de  $f(x)$  toman valores cada vez más próximos a cero, y cuando  $x$  se approxima a 1 por izquierda,  $f(x)$  toma valores cada vez más cercanos a -1.

De manera específica, si  $\delta > 0$ , a los valores que cumplen con la desigualdad  $0 < |x - 1| < \delta$  se los pueden clasificar de la siguiente manera:

$$(-\delta; 1)$$



$$f(x) \rightarrow -1$$

$$(1; \delta)$$



$$f(x) \rightarrow 0$$

**Debido a que los límites son diferentes, es decir  $L^+ \neq L^-$ , el límite en  $x = 1$  No existe**

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

A partir de este ejemplo, es importante tener en cuenta el siguiente Teorema:

**TEOREMA DE UNICIDAD DEL LÍMITE: Si una función tiene límite, éste es único.**

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2 \text{ entonces: } L_1 = L_2$$

### Límites laterales y unilaterales

Los **Límites unilaterales** indican que la función se aproxima a un determinado valor a medida que  $x$  se aproxima a  $a$  por la derecha o por la izquierda. Debido a las restricciones del dominio, una función puede tener límites unilaterales, como, por ejemplo:  $f(x) = \sqrt{x}$ , no está definida para valores menores a cero, sin embargo, se puede acercar a cero tomando valores mayores a cero, es decir aproximarse, solo, por derecha.

Por último, los límites laterales pueden usarse para investigar el comportamiento de una función definida por partes.

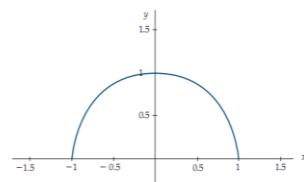
#### **Definiciones:**

Se dice que  $L$  es el **Límite lateral derecho o límite por la derecha** de la función  $f$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por derecha, con  $x > a$  (se acerca a  $a$  de derecha a izquierda)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

Se dice que  $L$  es el **Límite lateral izquierdo** de la función  $f$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por izquierda, con  $x < a$  (se acerca a  $a$  de izquierda a derecha)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

**Ejemplo 4:** La función  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  está definida en el intervalo  $[-1, 1]$  y en  $x = -1$  y en  $x = 1$  se tienen límites unilaterales:

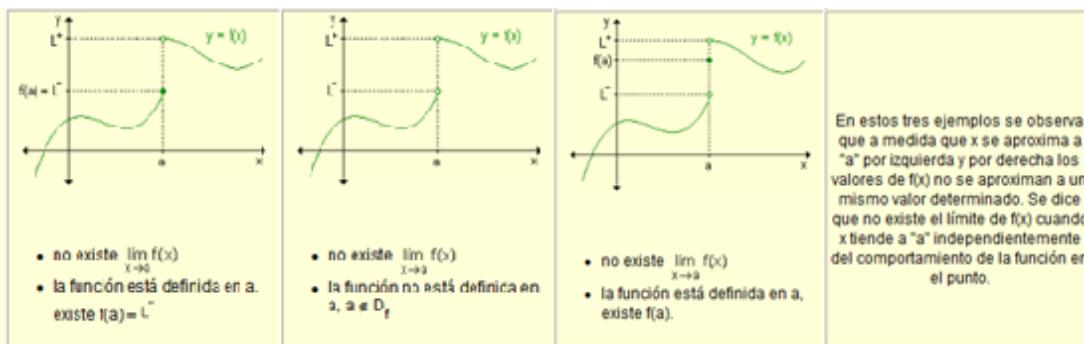
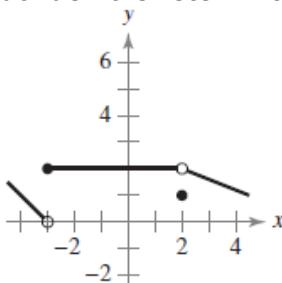
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0$$



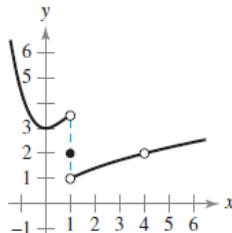
**Condición necesaria y suficiente para la existencia del límite de una función en un punto**

La condición necesaria y suficiente para que una función  $f$  tenga límite en un punto de abscisa  $a$  es que tenga límite lateral por la izquierda, tenga límite lateral por la derecha y ambos sean iguales.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

**Resumiendo:****Actividad N° 5:** Indicá el valor de  $x$  donde no existe límite. Justificá tu respuesta:**Actividad N° 6:** Utilizá la gráfica de la función  $f$  para determinar si existe el valor solicitado. De ser así, ubícalo en el gráfico; si no existe, explicar por qué.

- a)  $f(1)$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$   
 c)  $f(4)$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

**Actividad N° 7:** Hallá los límites laterales de la siguiente función y determina si existe el límite en cada punto. Represéntala gráficamente.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

i)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$        $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$        $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$   
 ii)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$        $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$        $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

**Actividad N° 8:** Dibujá la gráfica de  $f$ . Identificá los valores de  $c$  para los cuales existe el límite  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ , siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 8 - 2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \geq 4 \end{cases}$$



### Propiedades de los límites:

Los límites tienen propiedades que permiten determinar el comportamiento de las funciones y operar con ellos de una manera sencilla.

- 1- **Propiedad de la función constante:** El límite de una constante es igual al valor de la constante

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k \quad \text{Ejemplo: } \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3$$

- 2- **Propiedad de la función identidad:** El límite de la función identidad que se acerca a un valor  $a$  es igual al valor  $a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{Ejemplo: } \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

- 3- **Propiedad de la función potencia:** El límite de una variable elevada a un exponente cuando  $x$  se acerca a un valor  $a$ , es igual al valor  $a$  elevada al exponente.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad \text{Ejemplo: } \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 2^3 = 8$$

**Teorema:** Sean  $f$  y  $g$  funciones definidas en un entorno reducido del punto  $a$ . Si existen los límites:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ . Entonces existe:

1).-  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$     Límite de la suma de dos funciones

2).-  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$     Límite del producto de dos funciones

3).-  $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kL_1$ , con  $k$  constante    Límite de una constante por una función

4).-  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \frac{1}{L_1}, \quad L_1 \neq 0$     Límite de la recíproca de una función

5).-  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0$     Límite del cociente de dos funciones

**Estas Propiedades y Teoremas nos permiten calcular los límites de operaciones con funciones y de funciones compuestas, como se ven en los siguientes ejemplos:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x + x^2 = \lim_{x \rightarrow 2} 2x + \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2 \cdot 2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x)(x^2) = \lim_{x \rightarrow 2} 2x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = (2 \cdot 2)(2^2) = 4 \cdot 4 = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+x^2}{3x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2x+x^2}{\lim_{x \rightarrow 1} 3x} = \frac{2 \cdot 1 + 1^2}{3 \cdot 1} = \frac{3}{3} = 1$$

### Funciones polinómicas

Las funciones polinómicas tienen límite finito cuando  $x$  tiende a  $a$ , siendo  $a$  un número real, y su límite coincide con el valor numérico del polinomio en  $a$ :  $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$



Ejemplo:  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 3) = 2^2 + 2 - 3 = 3$

**Actividad N° 9:** Evaluar los siguientes límites indicando la propiedad o propiedades que se aplican en cada caso:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} 77$	2. $\lim_{x \rightarrow 5} (3x - 7)$	3. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1)$
4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x - 5}{5x - 1}$	5. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{8x + 1}{x + 3}}$	6. $\lim_{x \rightarrow -3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

## IMPORTANTE

### Teoría adicional

Además de los conceptos trabajados en esta guía, en las actividades de evaluación se tendrán en cuenta los siguientes conceptos teóricos, por lo que recomendamos completen sus apuntes y los estudien para realizar las consultas de ser necesario:

**Enunciados** de los siguientes Teoremas, significado y su interpretación geométrica (sin demostración)

- Teorema de conservación del signo
- Teorema de confrontación entre límites
- Teorema de acotación

**Enunciados, demostraciones e interpretaciones** del límite en operaciones con funciones:

- Límite de la suma de dos funciones
- Límite del producto de dos funciones
- Límite de la recíproca de una función

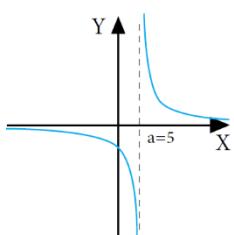


## TRABAJO PRÁCTICO N°13: LÍMITE DE FUNCIONES RACIONALES – INDETERMINACIÓN 0/0

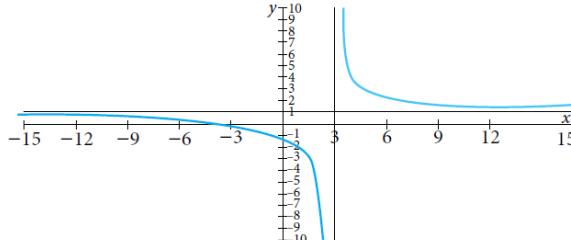
A continuación, repasaremos algunas características de las funciones algebraicas fraccionarias. En las próximas guías aplicaremos el concepto de límite a este tipo de funciones.

Si mediante el uso de algún recurso electrónico digital (como una calculadora que grafique o en un software de computación) construyéramos la gráfica de las siguientes funciones algebraicas fraccionarias, tendríamos:

$$a) y = \frac{1}{x-5}$$



$$b) y = \frac{x^2-16}{x^2-7x+12}$$



El significado gráfico del dominio de una función es la proyección del gráfico sobre el eje "x" y la imagen la proyección sobre el eje "y".

Veamos que ocurre con el dominio y la imagen de los ejemplos anteriores:

En el caso del ejemplo **a)**, el dominio, parecería que es todo el eje "x" menos el punto  $x=5$ . Podemos ver que la curva se acerca a la recta  $x=5$  pero no la toca. De igual manera vemos que en la gráfica del ejemplo **b)**, la proyección sobre el eje "x" lo cubre totalmente excepto el punto  $x=3$ , la gráfica se acerca a la recta  $x=3$  pero no llega a tocarla. Las rectas  $x = 5$  y  $x = 3$  se denominan "**asíntotas verticales**" a la curva en cada uno de los ejemplos.

En el ejemplo **a)** el dominio resulta:  $Dm = IR - \{5\}$ , donde el valor  $x=5$  es el número que anularía el denominador y no al numerador, por lo que coincide con la restricción de dominio y se obtiene algebraicamente  $x - 5 \neq 0 \rightarrow x \neq 5$ , podríamos inferir que la asíntota coincide con la raíz del denominador, sin embargo, en el otro ejemplo, si restringimos el Dominio resulta:

$x - x^2 - 7x + 12 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$  y  $x \neq 4$  por lo tanto  $Dm = IR - \{3; 4\}$  pero la asíntota vertical estaba en  $x = 3$ , ¿a qué se debe la diferencia?

El problema radica en que el procesador grafica la expresión "simplificada" y en este caso eso elimina un cero del denominador ( $x=4$ ):

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)(x - 3)} = \frac{x + 4}{x - 3}$$

El software grafica esta expresión

esto muestra que no se debe confiar ciegamente en la imagen del procesador, es una guía muy buena, pero puede introducir errores.

En el caso de la imagen del ejemplo **a)** parecería que todo el eje "y" menos un punto, en este caso 0, sería el conjunto imagen:  $IR - \{0\}$  y la curva se aproxima al eje "y" sin tocarla; y la imagen del ej. **b)** podemos ver que la proyección cubre todo el eje "y" excepto un punto que en la curva "inferimos" que es  $y=1$ . Luego,  $Im = IR - \{1\}$ . En este caso al igual que con el eje "x", en la gráfica se acerca a la recta  $y=1$  sin llegar a tocarla.

Estas rectas se denominan "**asíntotas horizontales**".

**La inferencia de la existencia de asíntotas** a partir del gráfico es muy útil para visualizar la función pero pueden y deben ser comprobadas por métodos analíticos.

Observación: Cómo desde ahora trabajaremos con funciones fraccionarias, es importante aclarar que puede o no tener asíntotas, que podemos intuir su ubicación mirando la gráfica de la función,



pero como los softwares no las marcan resulta necesario el análisis para su existencia mediante el estudio del límite, que se verá más adelante de manera detallada.

**Ejemplo:** Dada la función  $y = \frac{x^2-16}{x^2-7x+12}$ . Analiza la existencia del límite para  $x \rightarrow 4$ .

Primero observemos que el denominador de la función debe ser distinto de cero, por lo tanto,  $x$  debe ser distinto de 3 y 4 como ya lo analizamos anteriormente.

Por lo tanto, resulta que:  $\exists f(4)$

Veamos entonces que pasa con el límite:

Si aplicamos la propiedad de límite de un cociente resulta:

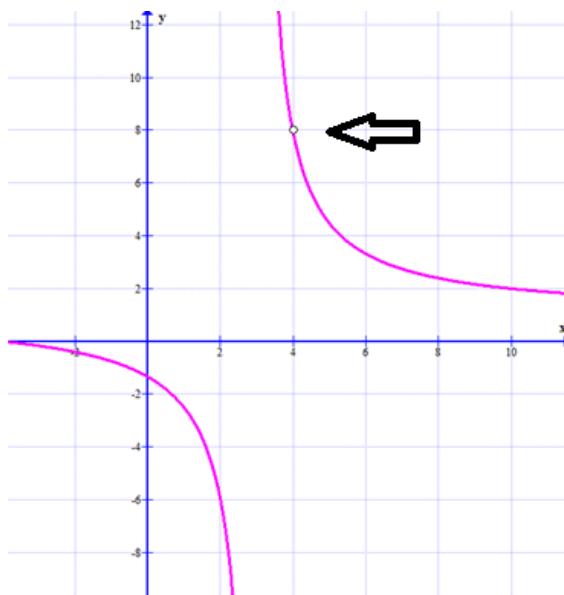
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \quad \text{si } Q(a) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 7x + 12} = \frac{4^2 - 16}{4^2 - 7 \cdot 4 + 12} = \frac{0}{0}$$

Se obtuvo como resultado 0/0, cuando el límite es igual a esta fracción recibe el nombre de **Límite Indeterminado** del tipo 0/0. En el cálculo del límite no se pudo obtener el valor al cual tiende la función, con solo aplicar la propiedad. Por lo cual, seguimos sin resolver el límite de la función. Debemos recurrir a otro método.

Observemos la tabla de valores y su representación gráfica, para analizar de manera intuitiva el valor del límite:

x	3,9	3,99	3,999	4	4,001	4,01	4,1
f(x)	8,78	8,07	8,007	8	7,99	7,93	7,36



Como podemos ver que el límite existe y parece ser 8. Por lo tanto, esta indeterminación del límite nada dice sobre la existencia o no del límite.

Veremos los pasos para poder resolver algebraicamente el límite.



No podemos encontrar el límite por sustitución directa de  $x$  por el valor 4, porque la función no está definida en ese punto. El procedimiento consiste en buscar una función que posea el mismo dominio y además incluya el valor  $x = 4$ , y con la misma gráfica.

¿Es posible dar con esta función? Sí, es posible, y es la que se obtiene de la expresión reducida de la expresión algebraica fraccionaria.

La obtenemos factorizando numerador y denominador:

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 - 7x + 12} \stackrel{1}{=} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-3)} \stackrel{2}{=} \frac{x+4}{x-3}$$

1)  $x^2 - 16$  es una diferencia de cuadrados por lo tanto es igual a  $(x-4)(x-3)$  donde 4 y 3 son las raíces del polinomio, es decir son los valores que lo anulan.

2)  $x^2 - 7x + 12$  se resuelve la ecuación asociada, es decir,  $x^2 - 7x + 12 = 0$  con calculadora se obtiene que  $x = 3$  y  $x = 4$ , por lo tanto, recordando que  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , si  $x_1$  y  $x_2$  son las raíces del polinomio.

Resulta:  $x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$

El numerador y denominador tienen en común el factor  $x - 4$ , por lo tanto, se puede simplificar, cancelando así el factor que anulaba el denominador.

Ahora estamos en condiciones de aplicar límite para  $x$  tendiendo a 4 a la expresión simplificada.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x-3} = \frac{4+4}{4-3} = 8$$

De esta manera resolvimos el límite.

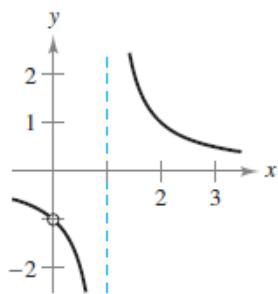
**NOTA:** En el ejemplo pudimos calcular el límite sustituyendo la función dada,  $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 7x + 12}$  por la función más sencilla,  $g(x) = \frac{x+4}{x-3}$ , que posee el mismo límite. Esto es válido porque  $f(x) = g(x)$ , excepto cuando  $x = 4$ , y al calcular el límite cuando  $x$  tiende a 1, no se considera que sucede cuando  $x$  es en realidad igual a 4. En general, podemos decir:

Si  $f(x) = g(x)$  cuando  $x \neq a$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  siempre que el límite exista.

**Actividad N° 1:** Utiliza la gráfica de las siguientes funciones para determinar el límite (si existe) de manera visual. Luego escribe una función más simple que coincida con la dada, salvo en un punto, y calcula el límite de manera algebraica.



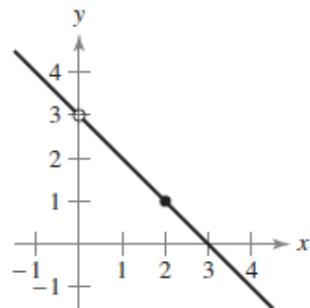
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$$



a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$h(x) = \frac{-x^2 + 3x}{x}$$



a)  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

**Actividad N° 2:** Sean las funciones:

$$u(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}, \forall x \neq 3$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases}$$

$$w(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$$

- a) Grafica con Geogebra, cada una de las funciones. Indica Dom. e Im.
- b) ¿A qué valor tiende la función, cuando x toma valores muy próximos a 3?
- c) ¿A qué conclusión se llega en relación con la existencia del límite, al comparar cada uno de los ejemplos?
- d) Verifica, mediante procedimiento algebraico el límite de las funciones para x tendiendo a 3.

**Actividad N° 3: Análisis gráfico**

La afirmación  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$  significa que:

a cada  $\varepsilon > 0$  le corresponde un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$

Si  $\varepsilon = 0,001$ , entonces  $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < 0,001$

Grafica, con algún soporte tecnológico, la función  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ , usando la función zoom, marca cada intervalo donde corresponde y explica el significado de cada uno y como incide en la existencia y el resultado del límite.

**Actividad N° 4:** Resolver los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} =$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} =$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+4x^2}{x^5-2x^2} =$

**Ejemplo:** Resuelve el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-x-2} =$

Si aplicamos límite, sustituyendo x por 2 en el cociente, resulta:

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-x-2} = \frac{0}{0}$ , se indetermina, vamos a realizar otro método para salvar la indeterminación.



La indeterminación se origina, porque el valor 2, es raíz del numerador y del denominador, en esto basamos el procedimiento que usaremos.

Para resolverla lo que hacemos es dividir el numerador y denominador por  $x - 2$  (2 porque es el número que anula el numerador y el denominador). Vamos a realizar estas divisiones aplicando la regla de Ruffini.

1º paso: La división del numerador  $(x^3 - x^2 - 4x + 4)$ :  $(x - 2)$  es:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Usando la prueba de la división (el dividendo es igual a cociente por divisor más el resto)  
Resulta:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x^2 + x - 2)$$

2º paso: La división del denominador  $(x^2 - x - 2)$ :  $(x - 2)$  es:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Que verifica:

$$(x^2 - x - 2) = (x - 2)(x + 1)$$

Si sustituimos en el límite, numerador y denominador, podremos simplificar el factor  $x - 2$ , logrando obtener el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \frac{2^2 + 2 - 2}{2 + 1} = \frac{4}{3}.$$

**Actividad N° 5:** Resolver los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^6 - 1} =$       b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^2 + 4x + 4} =$       c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^5 - x^2} =$



## TRABAJO PRÁCTICO N°14: LÍMITES INFINITO Y EN EL INFINITO INDETERMINACIÓN $\infty/\infty$ - ASÍNTOTAS A CURVAS PLANAS

### Ejemplos de funciones racionales:

$$f(x) = \frac{k}{x} \quad h(x) = \frac{x-3}{x^2-1} \quad g(x) = \frac{x^2+5x+6}{x-\sqrt{2}}$$

Graficar las funciones racionales suele ser más complicado que la gráfica de funciones polinómicas, porque una tabla de valores, la determinación de los ceros o de los puntos de intersección con los ejes coordenados resultan insuficientes. De ahí que se requiera de otros datos que nos brinda la función como ser el de **asíntotas**.

Nuestro estudio se centrará en las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Intuitivamente podemos decir que una asíntota de una función  $f(x)$  es una recta cuya distancia a la curva tiende a cero, y esto puede ocurrir cuando  $x$  tiende a infinito positiva o negativamente ( $x \rightarrow \pm\infty$ ), o bien cuando  $x$  tiende a un punto  $c$  ( $x \rightarrow c$ ).

Es importante que previamente veamos los siguientes conceptos:

### LÍMITES INFINITOS

Sea la función  $f(x) = 1 + \frac{4}{x}$ , analizamos el comportamiento de la función cuando  $x$  tiende a 0.

Confeccionamos la siguiente tabla de valores para ver qué ocurre con las imágenes de la función cuando  $x$  tiende a cero:

$x$	$f(x)$	$ f(x) $
-0,1	-39	39
-0,01	-399	399
-0,002	-1999	1999
-0,0004	-9999	9999
0	1	1
0,0002	20001	20001
0,004	1001	1001
0,1	41	41

Podemos observar que, independientemente de la existencia de la imagen en  $x=0$ , a medida que los valores de  $x$  tienden a 0, las imágenes, en valor absoluto, se hacen cada vez más grandes. Esta idea se representa con el símbolo  $\infty$ .

En otras palabras, si los  $x$  están en el entorno reducido de centro 0 y radio  $\delta$ , sus imágenes en valor absoluto, se hacen tan grandes como se quiera de modo que, si se elige que las mismas superen un cierto número  $M$ , deberemos encontrar el radio adecuado del entorno para que se cumpla lo pedido. Simbólicamente se expresa:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{4}{x}\right) = \infty$

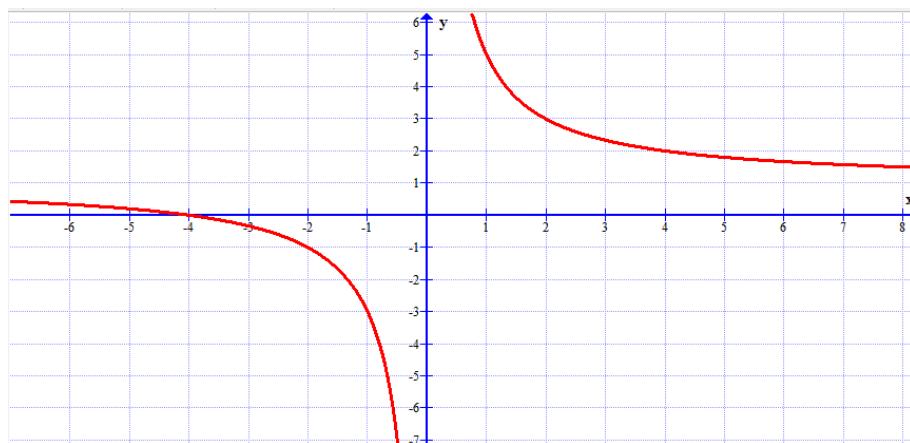
Si se analiza cómo se comporta la función cuando  $x$  crece indefinidamente veremos qué ocurre con las imágenes cuando  $x$  tiende a infinito. Confeccionamos la siguiente tabla de valores:

$x$	$f(x)$
100	0,04
1000	1,004
10000	1,0004
100000	1,00004
1000000	1,000004



Es posible observar que a medida que tomamos valores de  $x$  cada vez más grandes como se quiera, sus imágenes se aproximan cada vez más a 1. Decimos, entonces que  $f(x)$  tiende a 1 cuando  $x$  tiende a infinito.

Se simboliza  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right) = 1$

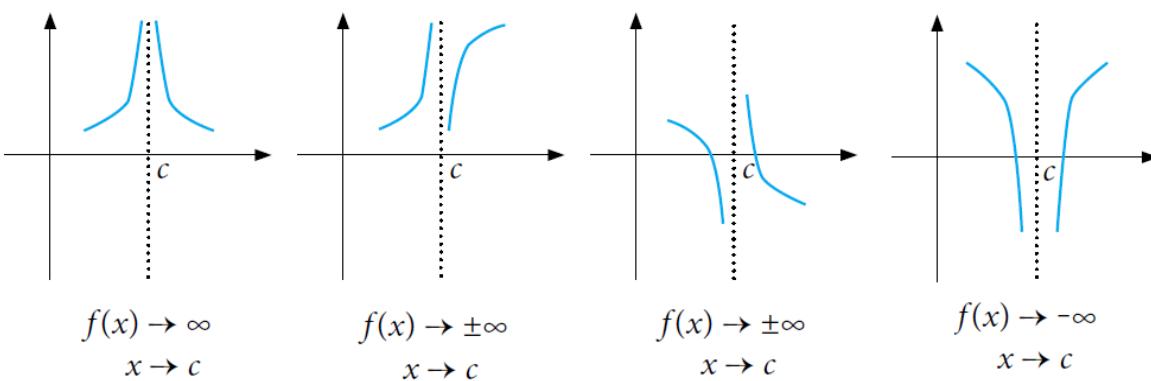


Desde el gráfico podemos observar que la función posee Asíntota Vertical en  $x = 0$  (es el valor al que tiende  $x$  cuando el límite es infinito) y tiene Asíntota Horizontal en  $y = 1$  (es el valor del límite de la función cuando  $x$  tiende a  $\infty$ )

**A continuación, formalizaremos las definiciones de cada uno de los límites donde interviene el símbolo infinito.**

- Límite infinito para  $x$  tendiendo a un número real**

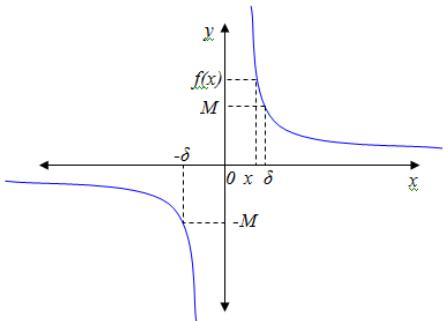
En muchas funciones, cuando  $x$  tiende a un punto “ $c$ ” por la izquierda o por la derecha, el valor de  $f(x)$  no se approxima a ningún número real sino que se hace cada vez más grande o cada vez más pequeño, como podemos ver en los siguientes ejemplos:



Para establecer que tan grande es el valor que toma la función, se fija un valor arbitrario  $M$ , suficientemente grande, de tal manera que si  $x$  se acerca a un valor  $c$  por derecha y por izquierda ( $0 < |x - c| < \delta$ ), y se verifica que  $f(x) > M$ , entonces decimos que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$  y de manera análoga si  $f(x) < -M$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ .

**Definición:**

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 / \forall x: (x \in Df \wedge 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M)$$



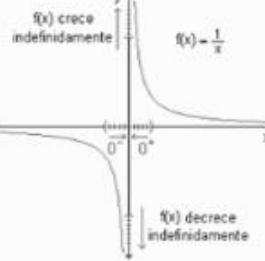
Gráficamente vemos que cuando  $x$  se aproxima a  $c$  resulta  $|f(x)| > M$ , en valor absoluto, pues por izquierda  $f(x) < -M$  y por derecha  $f(x) > M$ .

De lo anterior podemos concluir:

Si existe un número  $c \in \text{Dom } f$ , tal que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$ , entonces, la recta " $x = c$ " es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

Ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

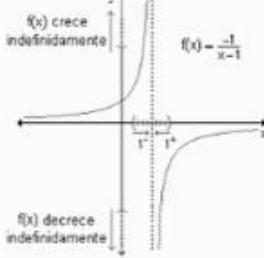


- si  $x \rightarrow 0^+$  los valores de la función crecen indefinidamente.
- si  $x \rightarrow 0^-$  los valores de la función decrecen indefinidamente

Las dos ramas de la curva se acercan cada vez más al eje y a medida que  $x$  se approxima a cero.

Para esta gráfica la recta  $x = 0$  es asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x-1} = \infty$$



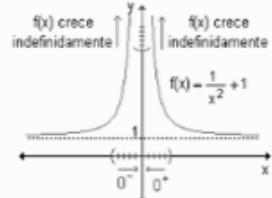
- si  $x \rightarrow 1^+$  los valores de la función decrecen indefinidamente.
- si  $x \rightarrow 1^-$  los valores de la función crecen indefinidamente.

Las dos ramas de la curva se acercan cada vez más a la recta  $x = 1$  a medida que  $x$  se approxima a ese valor.

Para esta gráfica la recta  $x = 1$  es asíntota vertical.



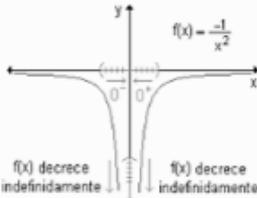
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



- si  $x \rightarrow 0^+$  los valores de la función crecen indefinidamente.
- si  $x \rightarrow 0^-$  los valores de la función crecen indefinidamente.

Para esta gráfica la recta  $x = 0$  es asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$



- si  $x \rightarrow 0^+$  los valores de la función decrecen indefinidamente.
- si  $x \rightarrow 0^-$  los valores de la función decrecen indefinidamente.

Para esta gráfica la recta  $x = 0$  es asíntota vertical.

**Actividad N° 1:** Verificar, usando la definición que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x-1} = \infty$ , con  $M=10^6$

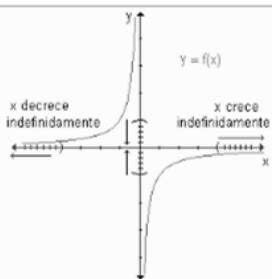
**Actividad N° 2:** Dadas las siguientes funciones, encontrar los límites y asíntotas verticales:

a)  $\lim_{x \rightarrow ?} \frac{x+2}{x-3}$       b)  $\lim_{x \rightarrow ?} \frac{1}{x^2-16}$       c)  $\lim_{x \rightarrow ?} \frac{x^2+3}{x-8}$

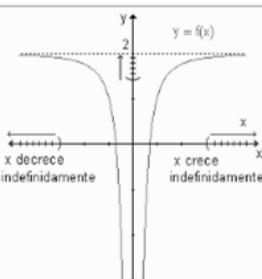
### LÍMITES EN EL INFINITO

#### • LÍMITE FINITO PARA $x$ TENDIENDO A INFINITO

En los siguientes ejemplos vemos el comportamiento de una función cuando  $x$  crece o decrece indefinidamente:



- a) Si  $x$  crece indefinidamente la función  $f(x)$  se acerca a 0.  
 b) Si  $x$  decrece indefinidamente, los valores de la función se acercan a 0.  
 La recta  $y = 0$  es asíntota horizontal de la función.



- a) Si  $x$  crece indefinidamente la función  $f(x)$  se acerca a 2.  
 b) Si  $x$  decrece indefinidamente, los valores de la función se acercan a 2.  
 La recta  $y = 2$  es asíntota horizontal de la función.

En el primer gráfico vemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  y en el segundo,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

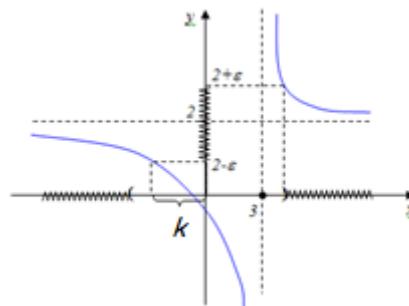
El comportamiento de funciones que se aproximan a un número cuando la variable  $x$  crece o decrece indefinidamente, podemos establecer un valor  $k$  suficientemente grande de manera que



podamos indicar que  $x$  tiende a infinito de la siguiente manera:  $x > +k$  ó  $x < -k$ , de esta manera se define límite finito para  $x$  tendiendo a infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 / \forall x \in Df \wedge |x| > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

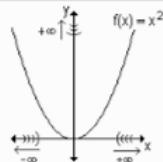
Ejemplo:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$



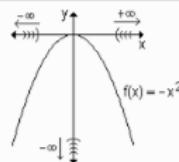
Si existe un número " $x \in \text{Dom } f$ " tal que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ , entonces, la recta " $y = b$ " es una asíntota horizontal de la gráfica de la función.

### • LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO

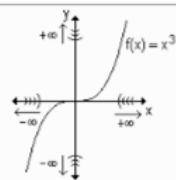
En los siguientes ejemplos vemos el comportamiento de una función que crece o decrece infinitamente, cuando  $x$  crece o decrece indefinidamente:



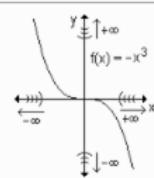
- $f(x)$  crece indefinidamente a medida que  $x$  crece indefinidamente.
- $f(x)$  crece indefinidamente a medida que  $x$  decrece indefinidamente



- $f(x)$  decrece indefinidamente a medida que  $x$  crece indefinidamente.
- $f(x)$  decrece indefinidamente a medida que  $x$  decrece indefinidamente



- $f(x)$  crece indefinidamente a medida que  $x$  crece indefinidamente.
- $f(x)$  decrece indefinidamente a medida que  $x$  decrece indefinidamente



- $f(x)$  crece indefinidamente a medida que  $x$  decrece indefinidamente.
- $f(x)$  decrece indefinidamente a medida que  $x$  crece indefinidamente.

Estas funciones presentan comportamientos que pueden definirse con la simbología de límite infinitos y en el infinito. Por lo tanto, debe extenderse dicho concepto para interpretar y simbolizar estas situaciones.

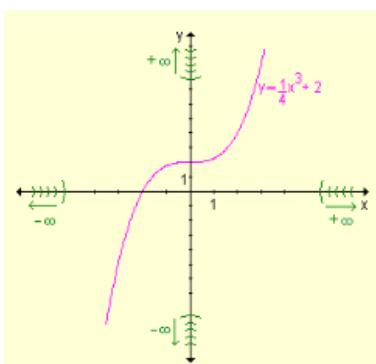
Luego:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists k > 0 / \forall x \in D_f \wedge |x| > k \Rightarrow |f(x)| > M$

Ejemplo: Sea:  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2$ , analizar el comportamiento de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow +\infty$  y  $x \rightarrow -\infty$

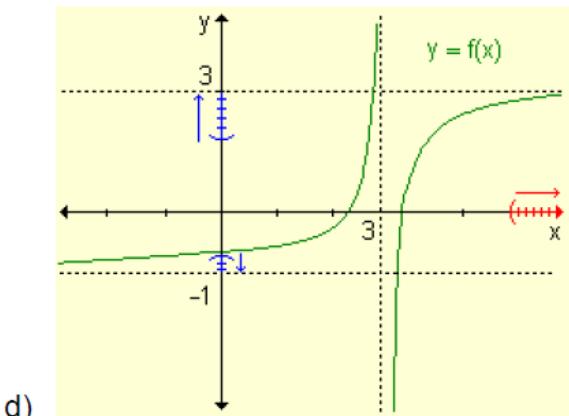
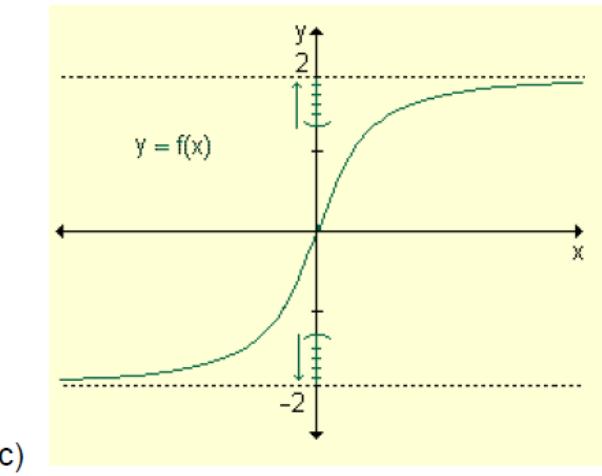
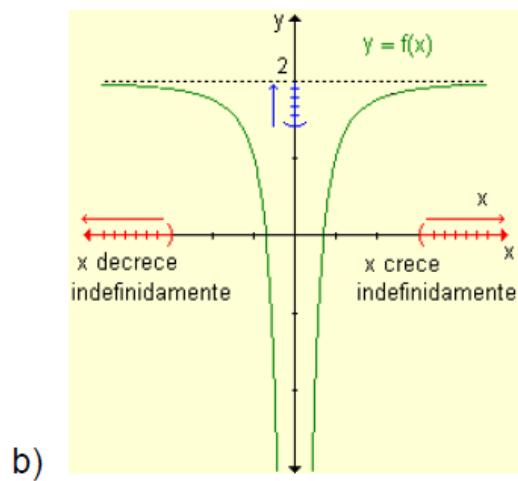
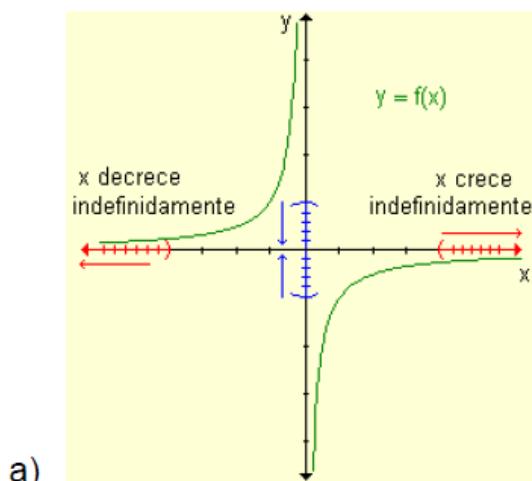


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4} x^3 + 2 \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{4} x^3 + 2 \right) = -\infty,$$



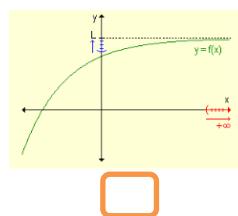
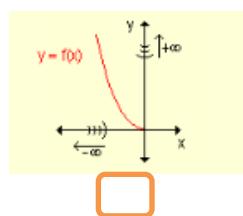
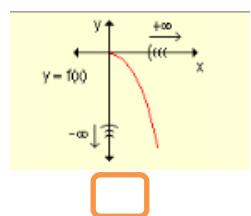
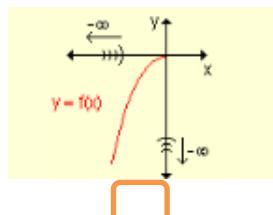
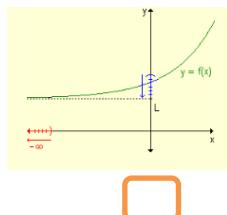
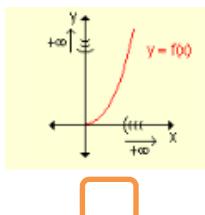
**Actividad N° 3:** Indicar la expresión del límite que se muestra en cada gráfico:



**Actividad N° 4:** Establecer a qué gráfica corresponde cada definición particular de límites infinitos o en el infinito. Justificar la respuesta.



- a)**  $\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 / \forall x \in Df \wedge x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
- b)**  $\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 / \forall x \in Df \wedge x < -K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
- c)**  $\forall M > 0, \exists K > 0 / \forall x \in Df \wedge x > K \Rightarrow f(x) < -M$
- d)**  $\forall M > 0, \exists K > 0 / \forall x \in Df \wedge x < -K \Rightarrow f(x) < -M$
- e)**  $\forall M > 0, \exists K > 0 / \forall x \in Df \wedge x > K \Rightarrow f(x) > M$
- f)**  $\forall M > 0, \exists K > 0 / \forall x \in Df \wedge x < -K \Rightarrow f(x) > M$



## INDETERMINACIONES DEL TIPO $\frac{\infty}{\infty}$

Aparecen al calcular límites de cocientes de funciones polinómicas o irracionales.

### Método para salvar la indeterminación:

- 1º. El primer paso consiste en encontrar en la función dada, la variable elevada al mayor exponente.
- 2º. Posteriormente se dividen todos y cada uno de los términos por la variable elevada al mayor exponente.
- 3º. Por último, se sustituye el límite con el fin de igualar a 0 todos los términos que difieren de la variable más grande, dejando sólo aquellos términos de la función que contaban originalmente con dicha variable. Es decir, el resultado será la razón entre los coeficientes de la variable elevada al mayor exponente.

*Nota: los límites de funciones para x tendiendo a infinito, se resuelven de igual manera que en el límite de sucesiones.*

**Ejemplo 1:** Determinar el límite de:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3}{4x^2 - 2}$$

Como la variable elevada al mayor grado en la función es  $x^2$ , dividimos cada término por ella.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{x^2}}{4 - \frac{2}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{\infty}}{4 - \frac{2}{\infty}}$$

Sustituimos:



Por la regla del recíproco de la potencia sabemos que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{3}{x^2} \right) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{2}{x^2} \right) = 0,$$

Así, resulta:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-0}{4-0} = \frac{5}{4}.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3}{4x^2 - 2} = \frac{5}{4}$$

**Actividad N° 5:** Resolver los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x} =$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + x}{x^2 - 2x} =$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + x}{x^4 - 2x} =$

**Actividad N° 6:** Dadas las siguientes funciones, encontrar, si existen, las asíntotas verticales y horizontales. Representar gráficamente la función y sus asíntotas.

$$f(x) = \frac{4x}{x+4}$$

$$g(x) = \frac{1-x}{x^2+4x+4}$$

$$h(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$$

**Ejemplo 2:** Determinar el límite de la siguiente función irracional:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3}}{5x - 2}$$

El exponente de mayor grado en este ejemplo es  $x$ , no  $x^2$ , ya que ésta se encuentra bajo la raíz. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}}{\frac{5x}{x} - \frac{2}{x}}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+0}}{5-0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4}}{5} = \frac{2}{5}$$

**Actividad N° 7:** Evaluar los siguientes límites:

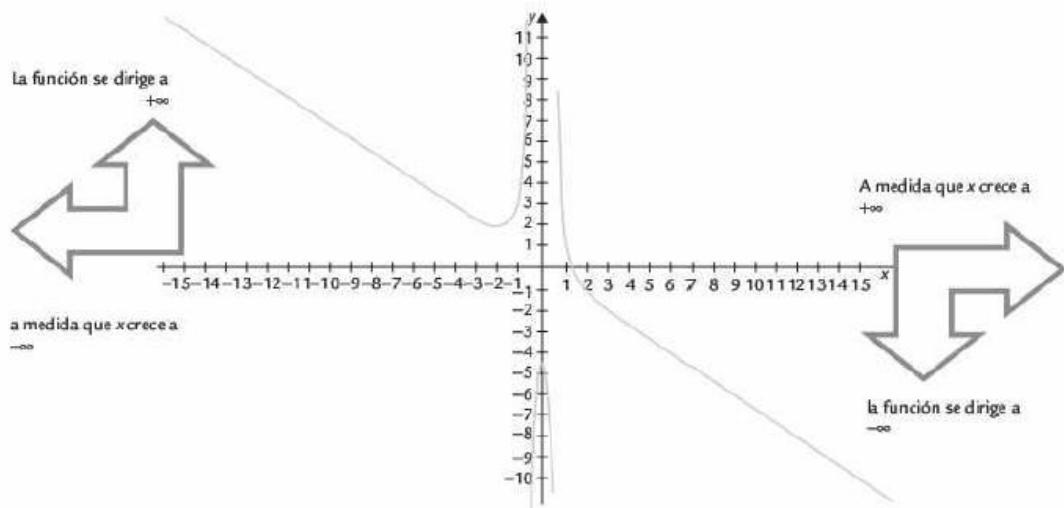
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x + 9} =$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{3x^2 + 2}} =$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sqrt[3]{8x^3 - 2x}}{\sqrt{3x^2 + 2}} =$

## ASÍNTOTAS OBLICUAS

**Observar el comportamiento de la siguiente función:**  $f(x) = \frac{-2x^3 + 4}{3x^2 - 1}$



Si una función se aproxima infinitamente a una recta oblicua cuando la variable independiente tiende a infinito, decimos que la función tiene **ramas infinitas oblicuas hiperbólicas**. Estas ramas se aproximan a una recta que se llama **asíntota oblicua**.

- La recta de ecuación  $y = mx + n$  ( $m \neq 0$ ), es asíntota oblicua del gráfico de una función  $f(x)$ , si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$ , donde la pendiente  $m$  y la ordenada al origen  $n$  pueden obtenerse mediante los siguientes límites:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$

**Actividad N° 8:** Aplicando definición, encontrar las asíntotas de las siguientes funciones y graficar:

$$a) f(x) = \frac{x^2+1}{x} \quad b) f(x) = \frac{5x^2-x}{x-1} \quad c) f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1}$$

### Ejercicio integrador:

Dada la función  $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2(x-1)}$ , determinar:

- Dominio e Imagen.
- Raíz de la función.
- Ordenada al origen.
- Asíntotas, por definición.
- Con todos los datos obtenidos, representarla gráficamente.



## TRABAJO PRÁCTICO N°15: LÍMITES POR RACIONALIZACIÓN - INFINITÉSIMOS

En esta guía trabajaremos con límites de funciones irracionales y los pasos que deberemos emplear para salvar indeterminaciones.

### Límites a funciones irracionales - indeterminaciones 0/0

**Ejemplo:** Analiza la existencia del siguiente límite:  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$

Si confeccionamos la tabla de valores, para ver hacia donde tiende la función, cuando t se acerca a 0:

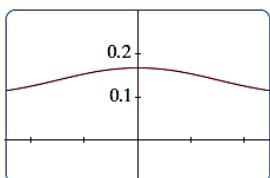
t	$\frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
±1.0	0.16228
±0.5	0.16553
±0.1	0.16662
±0.05	0.16666
±0.01	0.16667

Podemos ver que para valores de t cercanos a 0, la función se aproxima a 0,166666...

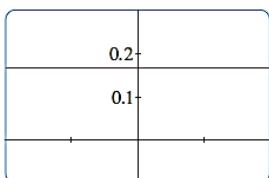
Es decir:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

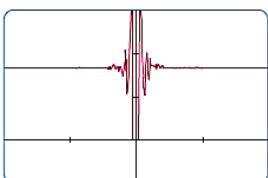
Analizando su representación gráfica, podemos ver en la siguiente secuencia de imágenes, las cuales están ordenadas de manera decreciente respecto de la escala, el valor de la función cuando x tiende a 0:



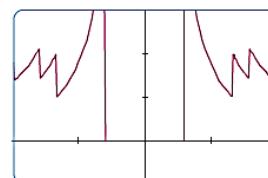
a)  $[-5, 5]$  por  $[-0.1, 0.3]$



b)  $[-0.1, 0.1]$  por  $[-0.1, 0.3]$



c)  $[-10^{-6}, 10^{-6}]$  por  $[-0.1, 0.3]$



d)  $[-10^{-7}, 10^{-7}]$  por  $[-0.1, 0.3]$

En la imagen a), podemos ver que la función se aproxima a 1/6, sin embargo, cuando acercamos la imagen, obtenemos gráficos erróneos y ya no estamos en condiciones de establecer el valor del límite.

Es por todo lo anterior, que los pasos para llegar al límite de manera intuitiva no son válidos, debemos utilizar métodos de resolución algebraicos.

Si comenzamos por aplicar las propiedades del límite de operaciones con funciones, donde podemos reemplazar t por 0, resulta:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{\sqrt{0^2 + 9} - 3}{0^2} = \frac{0}{0}$$





**SOLUCIÓN:** Cómo no podemos aplicar inmediatamente la ley del cociente, ya que el límite del denominador es 0, el método algebraico que utilizaremos será el de racionalización:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2(\sqrt{t^2 + 9} + 3)}$$

Multiplicamos los conjugados, recordando que:  
 $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2 + 9} + 3)}$$

En el numerador se cancelan el 9 y en el denominador debe quedar el producto con factores para poder simplificar.

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3}$$

Simplificamos  $t^2$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \rightarrow 0} (t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

Aplicamos propiedad de límites del recíproco y de raíz, y calculamos.

### Actividad N°1:

- a) Utiliza la gráfica de  $f(x) = \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$  para estimar el valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  con dos decimales.
- b) Utiliza una tabla de valores de  $f(x)$  para estimar el límite con cuatro decimales.
- c) Utiliza las propiedades de los límites para encontrar el valor exacto del límite.

### Actividad N°2:

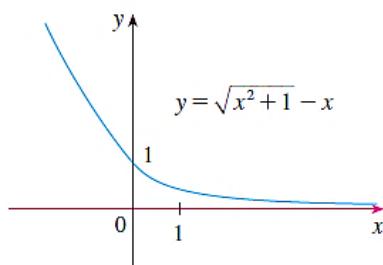
Calcula mediante propiedades, el valor de los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-\sqrt{4x+1}}{x-2} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \quad d) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{16x-x^2}{4-\sqrt{x}}$$

### Límites de funciones irracionales con indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$

**Ejemplo:** Analiza la existencia del siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

Como  $\sqrt{x^2 + 1}$  como  $x$  son muy grandes cuando  $x$  tiende a infinito, no podemos recurrir a tablas de valores para ver a qué valor tiende la función. Desde el análisis del gráfico podemos observar que la diferencia de funciones, tiende a cero cuando  $x$  crece.





Pero para resolverlo, mediante propiedades de límites, aplicaremos el mismo procedimiento que en las actividades anteriores:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \infty - \infty$$

Límite indeterminado  
 $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

Multiplicamos los conjugados, recordando que:  
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

En el numerador se cancelan el  $x^2$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

Aplicamos propiedad de límites del reciproco y de raíz, donde  $(\sqrt{x^2 + 1} + x)$  tiende a infinito si  $x$  crece  
Resultando:  $\frac{1}{\infty} \rightarrow 0$

### Actividad N° 3:

- a) Estima el valor de  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$  dibujando la gráfica de la función  
 $f(x) = (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$

- b) Utiliza las propiedades de los límites, para encontrar el valor exacto del límite.

### Actividad N°4: Calcula mediante las propiedades, el valor de los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + x} - 3x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x})$

### INFINITÉSIMOS

#### **Definición:**

Se dice que la función  $f$  es un infinitésimo para  $x \rightarrow a$  (o en  $x = a$ ), si se verifica  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

Es decir, un infinitésimo es una función cuyo límite es cero cuando la variable independiente  $x$  se approxima al valor  $a$ . A los infinitésimos se los suele simbolizar con letras griegas como  $\varepsilon, \varphi, \text{etc.}$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0 \rightarrow f(x) = e^x - 1 \text{ es infinitésimo para } x = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \rightarrow f(x) = \ln x \text{ es infinitésimo para } x = 1$$

**Actividad N°5:** Analiza cuáles de las siguientes funciones son infinitésimos en el valor  $x$  indicado:

a) En  $x = 1$ :  $f(x) = x^3 - 1$ ;  $g(x) = x - 1$ ;  $h(x) = \sqrt{x} - 1$  y  $i(x) = \sqrt{x+1} - 1$

b) En  $x = 0$ :  $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ ;  $g(x) = 4x^2$ ;  $h(x) = \sqrt{x^4 + x^2}$  y  $i(x) = x$

### Comparación de infinitésimos (Órdenes infinitesimales)

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos infinitésimos en  $x = a$ .

1. Se dice que  $f(x)$  y  $g(x)$  tienen el **mismo orden** si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ , con  $k \neq 0$ . Significa que ambos infinitésimos tienden a cero, aproximadamente con la misma rapidez, cuando  $x$  se aproxima a  $a$ .
2. Se dice que  $f(x)$  es un **infinitésimo de orden superior** que  $g(x)$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ . Significa que  $f(x)$  tienden a cero con mayor rapidez que  $g(x)$ , cuando  $x$  se aproxima a  $a$ .
3. Se dice que  $f(x)$  es un **infinitésimo de orden inferior** que  $g(x)$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ . Significa que  $g(x)$  tienden a cero con mayor rapidez que  $f(x)$ , cuando  $x$  se aproxima a  $a$ .
4. Cuando no existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ , se dice que los infinitésimos no son comparables.
5. Se dice que dos infinitésimos  $f(x)$  y  $g(x)$  son **equivalentes** si el  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Ejemplos:

- a) La función  $f(x) = x^2$  es un infinitésimo de orden superior que  $g(x) = x$ , en  $x = 0$ , porque  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$
- b) La función  $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$  es un infinitésimo de orden inferior que  $g(x) = x^3$ , en  $x = 0$ , porque  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^3} = \infty$
- c) La función  $f(x) = 2x$  es un infinitésimo de igual orden que  $g(x) = 6x$ , en  $x = 0$ , porque  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}$
- d) La función  $f(x) = a^x - 1$  es un infinitésimo equivalente a  $g(x) = x$ , en  $x = 0$ , porque:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = 1$

**Actividad N°6:** Determina el orden infinitesimal comparando todos los infinitésimos hallados en la actividad 5 en el valor de  $x$  indicado. (Deberán analizar todas las parejas de infinitésimos obtenidos)

### IMPORTANTE

#### Teoría adicional

Además de los conceptos trabajados en esta guía, en las actividades de evaluación se tendrán en cuenta los siguientes conceptos teóricos, por lo que recomendamos completen sus apuntes y los estudien para realizar las consultas de ser necesario:

- Enunciados, demostraciones e interpretaciones de infinitésimos y sus propiedades.
- Orden infinitesimal, interpretación y ejemplos



## TRABAJO PRÁCTICO N°16: LÍMITES CON FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, INDETERMINACIONES $1^\infty$

En esta guía trabajaremos con límites de funciones trigonométricas, potenciales y exponenciales, así como los pasos que deberemos realizar para salvar indeterminaciones.

### Límites a funciones trigonométricas

**En las funciones trascendentes, en particular las funciones trigonométricas, para calcular el límite en un punto en el que está definida, basta evaluarla en dicho punto.**

**Ejemplo:** Analiza la existencia de los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

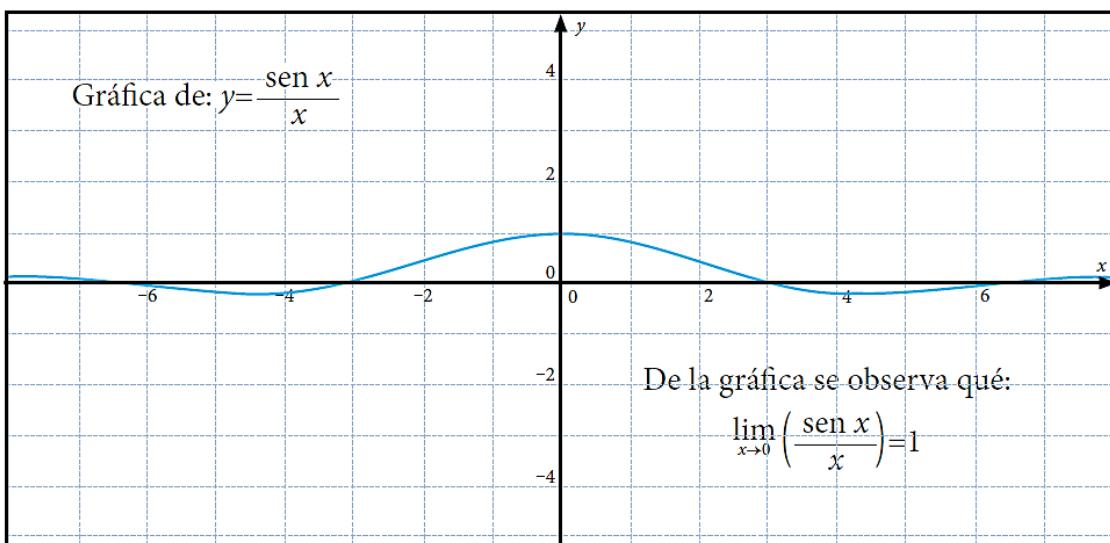
c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \tan(x^2 - 1) = \tan(0) = 0$

*Nota: Si el valor numérico se realiza con calculadora, debes recordar poner en Modo RAD (radianes, unidad en el sistema de medición circular)*

Si queremos analizar lo que ocurre en el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

Esta función no está definida en cero, por eso no se puede calcular el límite evaluando directamente. Sin embargo, con un procesador podemos construir la gráfica y tabla siguientes:





Si confeccionamos la tabla de valores:

$x$	-3.0	-2	-1	0	0.5	1	2	3	4
$y=(1/x)\sin(x)$	0.047	0.4546	0.8415	Error	0.9700	0.8415	0.4546	0.047	0.01744

La tabla y la gráfica anteriores permiten inferir que, al aproximarnos a cero tanto por la izquierda como por la derecha, los valores de la expresión se acercan a 1. Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Es por todo lo anterior, que los pasos para llegar al límite de manera intuitiva no son válidos, tenemos la necesidad de utilizar métodos de resolución algebraicos.

**Cuando estudiamos el concepto de infinitésimo, vimos dentro los órdenes infinitesimales, infinitésimos equivalentes. Henos demostrado teóricamente:**

**Límite fundamental trigonométrico:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

**Límite importante y útil para calcular límites indeterminados.**

De manera similar al anterior, se demuestra que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{y sus funciones recíprocas: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

**Actividad N°1:** Utiliza una herramienta para graficar funciones y evaluar el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{x}$  para diferentes valores de  $n$ . ¿Qué se observa? Redacta una conclusión, o generalidad que se puede establecer.

En los próximos ejemplos, aplicaremos las propiedades del límite e infinitésimos equivalentes:

**Ejemplo 1:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \frac{0}{0}$$

Límite indeterminado 0/0

**SOLUCIÓN:** Cómo no podemos aplicar inmediatamente la ley del cociente, ya que el límite del denominador es 0. El método algebraico que utilizaremos será la sustitución de variable y límite fundamental:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2\sin(2x)}{2x} \right)$$

Multiplicamos y dividimos por 2 (coeficiente del argumento)



$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x}$$

Aplicamos propiedad de límite del producto y límite de 2 es 2.

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} =$$

Si sustituimos  $2x = z$ . Resulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} z = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$$

$$= 2 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = (2)(1) = 2.$$

Aplicamos infinitésimos equivalentes y calculamos.

En la práctica omitimos la escritura de la sustitución, pero hay que tener presente que ese es el proceso real.

### Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cdot (x+1))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x \cdot (x+1))}{x \cdot (x+1)} \cdot (x+1) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cdot (x+1))}{x \cdot (x+1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

### Ejemplo 3:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**Actividad N° 2:** Demuestra que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Recuerda identidad trigonométrica:  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$

**Actividad N° 3:** Resuelve los siguientes límites aplicando el concepto de infinitésimos equivalentes:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin 3x}{\tan^3 2x} =$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x} = \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \tan(8x)}{x + x^2} = \quad g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x-2)}{\sqrt{5x+6}-4} =$$

### El número e o Número de Euler



Sea la siguiente sucesión:  $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , si hallamos los términos de la sucesión para  $n$  cada vez más grandes, como lo muestra la siguiente tabla:

$n$	1	2	5	10	100	1000	10000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2	2.25	2.48832	2.5937425	2.70481383	2.71692393	2.71814593

Podemos ver que la sucesión es monótona creciente y podemos asegurar que está acotada inferiormente, el ínfimo y mínimo resultan  $a_1 = 2$ . Y la sucesión converge al supremo de la sucesión, que es el número  $e$ . El cual se define de la siguiente manera:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

**“e” es un número irracional y sus primeras cifras decimales, son  $e = 2.71828182846\dots$**

Es válida la definición del número  $e$  de la siguiente manera:

Si tomamos  $x = \frac{1}{n}$  resulta la siguiente expresión:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

**De manera general, podemos definir a  $e$  :**

$$\begin{aligned} e &= \lim_{x \rightarrow a} (1+g(x))^{1/g(x)} && \text{si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{o} \\ * \quad e &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} && \text{si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \end{aligned}$$

### INDETERMINACIONES DEL TIPO $1^\infty$ , $0^0$ , $\infty^0$

Este tipo de indeterminaciones se resuelven aplicando la siguiente propiedad:

$$e = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

**Ejemplo 1:** Si se resuelve el siguiente límite, resulta:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-5}\right)^{3x-1} = 1^\infty$$

Límite indeterminado  
 $1^\infty$

Para salvar la indeterminación se utilizará el límite:



$$e = \lim_{x \rightarrow a} \left( 1 + \frac{1}{g(x)} \right)^{g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

Por lo tanto, el primer paso consiste en trabajar con la base de la potencia, para obtener la expresión  $1+1/t$ . Hay distintos procedimientos que se pueden aplicar, pueden investigar y elegir el que a ustedes les resulta más sencillo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-5} \right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2x+1}{2x-5} - 1 \right)^{3x-1} =$$

Sumamos y restamos 1 a la base de la potencia

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{6}{2x-5} \right)^{3x-1}$$

Realizamos la resta de la expresión fraccionaria menos 1.

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{2x-5}{6}} \right)^{3x-1}$$

Aplicamos la equivalencia:  
 $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$

$$= \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{2x-5}{6}} \right)^{\frac{2x-5}{6}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x-1) \left( \frac{6}{2x-5} \right)}$$

Multiplicamos y dividimos al exponente, por la expresión fraccionaria que se encuentra en la base:  $\frac{2x-5}{6}$

Por \* es "e"

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)6}{2x-5}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x-6}{2x-5}} = e^{\frac{18}{2}} = e^9$$

El límite de la base define a e, por propiedad de límite de una potencia aplicamos límite al exponente.

**Ejemplo 2:** Si se resuelve el siguiente límite, resulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$$

Se indetermina, entonces se busca llegar a la definición de e, por lo que se multiplica y divide por 2 al exponente, para luego aplicar las propiedades de potencias:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right)^2 = \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right)^2 = e^2$$

**Actividad N° 4:** Resuelve los siguientes límites:

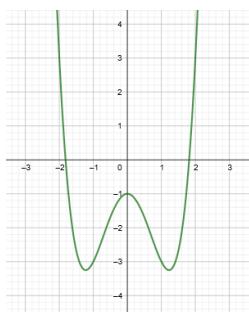
$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x = \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x = \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1} = \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{3x-2} \right)^{-2x+\frac{5}{3}} =$$



## TRABAJO PRÁCTICO N° 17: CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

En esta guía estudiaremos funciones continuas y discontinuas desde el punto de vista analítico y gráfico.

Recordemos que para hallar el límite de una función cuando  $x$  tiende a  $x_0$ , podíamos calcular el valor de la función en  $x_0$ . Se dice que las funciones con esta propiedad, son continuas en  $x_0$ . Es decir, una función continua en todo su dominio sería aquella que se puede dibujar de un sólo trazo sin levantar el lápiz del papel. Por ejemplo:



Cada valor de  $y = f(x)$  puede ser aproximado por los valores cercanos, ya que en cada punto la función *tiende* al valor en el punto. Esto significa que las funciones continuas están definidas en *sus puntos de continuidad*, además, tienen límite y su límite coincide con el valor de la función en dichos puntos. Por esto, estudiaremos la continuidad de la función en un punto.

Se define de la siguiente manera:

**Una función  $f$  es continua en un punto  $x_0$  si:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$**

Por lo tanto, la continuidad de una función en un punto se refiere a tres condiciones:

i)  $x_0 \in \text{Dom } f$  o sea  $f(x_0)$  existe. (la existencia de  $f(x_0)$ )

ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe (la existencia de límite finito en  $x_0$ )

iii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (y la coincidencia de ambos valores)

**Ejemplo 1:** Analizar la continuidad de la función  $f(x) = -4x^2 + 3x$  en  $x_0 = 2$

Luego analizamos si cumple las tres condiciones:

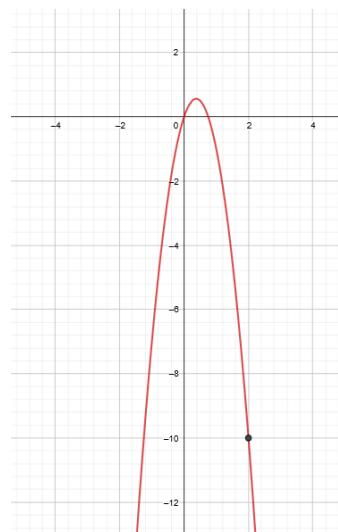
- i)  $f(2) = -4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = -10 \iff \exists f(2)$
- ii)  $\lim_{x \rightarrow 2} (-4x^2 + 3x) = -10$
- iii)  $\lim_{x \rightarrow 2} (-4x^2 + 3x) = f(2) = -10$



Vemos que se cumplen las 3 condiciones.

Por lo tanto  $f(x)$  es continua en  $x_0 = 1$

Podemos verificar mediante su representación gráfica que lo analizado anteriormente se cumple.



**Ejemplo 2:** Analizar la continuidad de la función

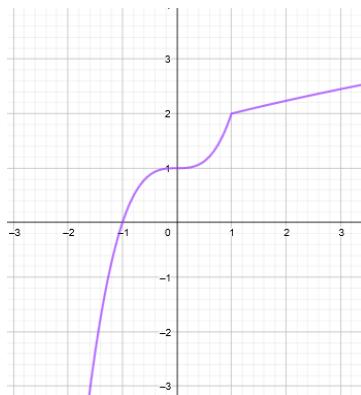
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{En } x_0 = 1$$

Vemos si se cumplen las tres condiciones

- i)  $f(1) = 1^3 + 1 = 2 \quad \rightsquigarrow \exists f(1)$
- ii) Para determinar si existe el límite debemos calcular los límites laterales, entonces:
 
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + 1) = 1^3 + 1 = 2 \end{array} \right\} \therefore \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$
- iii) Luego se cumple que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Por lo tanto  $f(x)$  es continua en  $x_0 = 1$

Podemos comprobar gráficamente que la función es continua en  $x_0 = 1$



**Actividad N°1:** Analiza la continuidad de las funciones en el punto indicado.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{1 + x^2}, x_0 = 0 \quad g(x) = \sqrt{x^3 - 8}, x_0 = 2 \quad v(x) = \frac{3x + 5}{x^2 - 16}, x_0 = 4$$

### Discontinuidad

Si no se verifica la definición de continuidad en un punto  $x_0$ , la función considerada es discontinua en  $x_0$ . Es decir, es discontinua si no cumple alguna de las tres condiciones que exige la definición:

Porque no existe  $f(x_0)$  o porque no existe el  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  o porque ambos existen, pero son distintos.



Según la condición que no se cumple, podemos clasificar el tipo de discontinuidad que se produce en la función en el punto  $x_0$ .

Estas discontinuidades se pueden clasificar en "Evitables" o "No evitables" o Esencial.

Una función es **Discontinua Evitable** en  $x_0$  si:

No existe la imagen de $x_0 \iff \exists f(x_0)$ 	Existe $f(x_0)$ y existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , pero estos son distintos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ 
--	---

Una función es **Discontinua No Evitable o Esencial** en  $x_0$  si:

No existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 	Hay una asíntota vertical, es decir $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 
---	--

**Ejemplo 3:** Analizar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{En } x_0 = 2$$

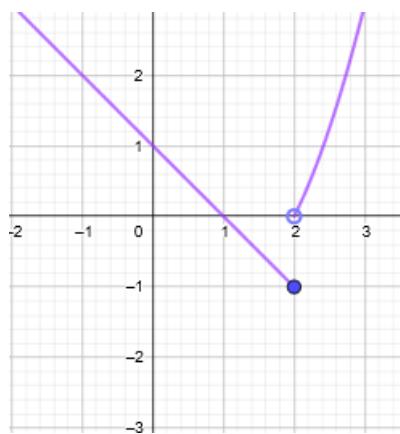
Vemos si se cumplen las tres condiciones

- i)  $f(2) = 1 - 2 = -1$
- ii) Para determinar si existe el límite debemos calcular los límites laterales, entonces:
 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x) &= 2^2 - 2 \cdot 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (1 - x) &= 1 - 2 = -1 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{los límites son distintos} \\ \therefore \not\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \end{array} \right.$$
- iii) No analizamos ya que no existe el límite



Por lo tanto,  $f(x)$  es Discontinua Esencial en  $x_0 = 2$

Podemos comprobar gráficamente



**Actividad N°2:** Dada las funciones:

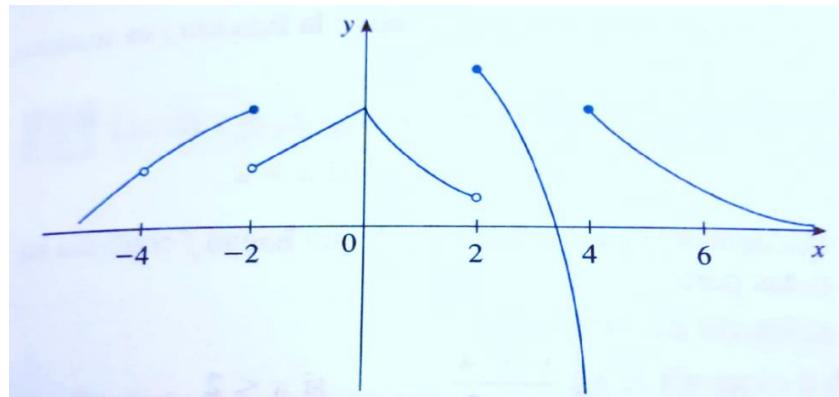
$$f_{(x)} = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1-x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$g_{(x)} = \begin{cases} \frac{2x^2-5x-3}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

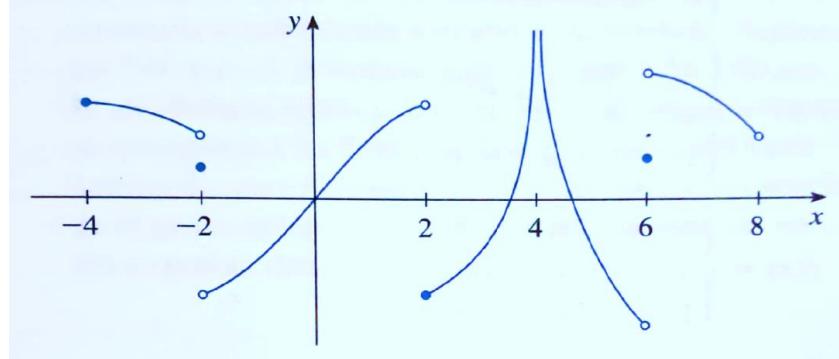
- Analiza la continuidad de  $f(x)$  en  $x = 0$  y la continuidad de  $g(x)$  en  $x=3$
- En caso de discontinuidad, clasificarla.
- Trazar la gráfica de ambas funciones

**Actividad N°3:** A partir de los siguientes gráficos:

a)



b)





- Expresa los valores del dominio en los que la función es discontinua, ¿qué tipo de discontinuidad presenta? Explica por qué.

**Actividad N°4:** Explica por qué cada función es continua o discontinua

- a) La temperatura de un lugar específico como función de la hora
- b) El costo de un viaje en Remis como función de la distancia recorrida
- c) La corriente en un circuito para las luces de una habitación como función del tiempo

Lo que conocemos de las operaciones con límites nos permite inferir resultados análogos para las operaciones con funciones continuas. El resultado de realizar operaciones algebraicas con funciones continuas es una función continua

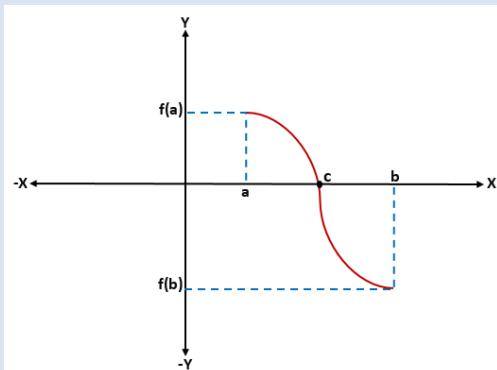
Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $x = x_0$  y "c" es una constante, entonces las siguientes funciones son también continuas en  $x = x_0$

$$1) f + g \quad 2) f - g \quad 3) c.f \quad 4) f.g \quad 5) \frac{f}{g} \text{ si } g(x_0) \neq 0$$

### **Teorema de Bolzano o de los Ceros de las funciones continuas**

**Si una función es continua en el intervalo  $[a; b]$  y toma, en los extremos del mismo, valores  $f(a)$  y  $f(b)$  de signos opuestos, entonces se anula por lo menos en un punto interior al intervalo  $(a; b)$ .**

**Lo que significa que**  $\exists c \in (a; b) / f(c) = 0$



En una función dada  $f(x)$  continua (es decir, que  $f(a)$  y  $f(b)$  están conectados por una curva), donde  $f(a)$  está por debajo del eje x (es negativa), y  $f(b)$  por encima del eje x (es positiva), o viceversa, gráficamente existirá un punto de corte en el eje x que representará un valor intermedio « $c$ », que estará entre « $a$ » y « $b$ », y el valor de  $f(c)$  será igual a 0.

Al analizar gráficamente el teorema de Bolzano, se puede saber que para toda función  $f$  continua definida en un intervalo  $[a, b]$ , donde  $f(a).(b)$  sea menor que 0, existirá por lo menos una raíz « $c$ » de esa función dentro del intervalo  $(a, b)$ .

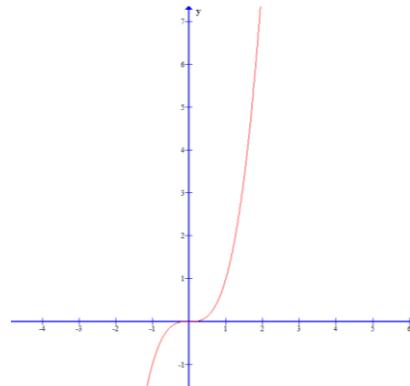
**Ejemplo 4:**  $f_{(x)} = x^3$  en  $[-1; 2]$



La función  $f_{(x)} = x^3$  es continua por ser polinómica, además  $f_{(-1)} = -1$  y  $f_{(2)} = 8$ , es decir, toma valores de signos opuestos en los extremos del intervalo. El teorema garantiza entonces la existencia de, al menos un punto interior al intervalo en el cual se anula.

$$f_{(c)} = c^3 = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (-1; 2)$$

También se verifica que  $f_{(x)} = x^3$  es inyectiva, por lo tanto el valor en el cual la función se anula, es único ( $x = 0$ )



**Actividad N°5:** Analiza si las siguientes funciones verifican las hipótesis del Teorema de Bolzano en los intervalos indicados. Indicar el valor de  $c$ :

$$a) f_{(x)} = \begin{cases} -x^2 + 1 & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en } [-2; 1]$$

$$b) f_{(x)} = x^2 + x + 3 \quad \text{en } [1; 3]$$

$$c) f_{(x)} = x^3 + \frac{1}{x} + 3 \quad \text{en } [-2; 2]$$

**Unidad Temática III:****Derivada y Diferencial****La Tangente**

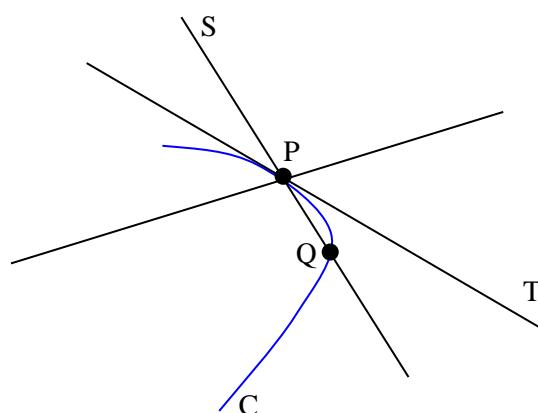
Abordaremos este tema tomando como punto de partida dos problemas básicos y concretos que son “el trazado de una recta tangente a una curva dada en un punto  $x_0$  especificado y “la descripción de la velocidad de una partícula que se mueve en línea recta”.

La solución de estos problemas han sido de interés para los matemáticos, desde los griegos (300-200 antes de J.C.), y las técnicas desarrolladas para resolver los mismos, son la columna vertebral de gran parte de la ciencia y la tecnología actuales.

Los métodos desarrollados para resolver el trazado de una recta tangente a una curva dada tienen una serie de aplicaciones importantes en la actualidad. Por ejemplo: “la dirección del movimiento de un objeto a lo largo de una curva en cada instante, se define en términos de la dirección de la recta tangente a la trayectoria del movimiento”. Las órbitas de los planetas alrededor del sol y la de los satélites artificiales alrededor de la tierra, se estudian esencialmente comenzando con la información sobre la recta tangente a la trayectoria del movimiento.

Empezamos con el problema de la tangente, no solo por su importancia “histórica y práctica”, sino también porque la intuición geométrica que tenemos contribuirá a hacer concreto lo que de otro modo sería una noción abstracta.

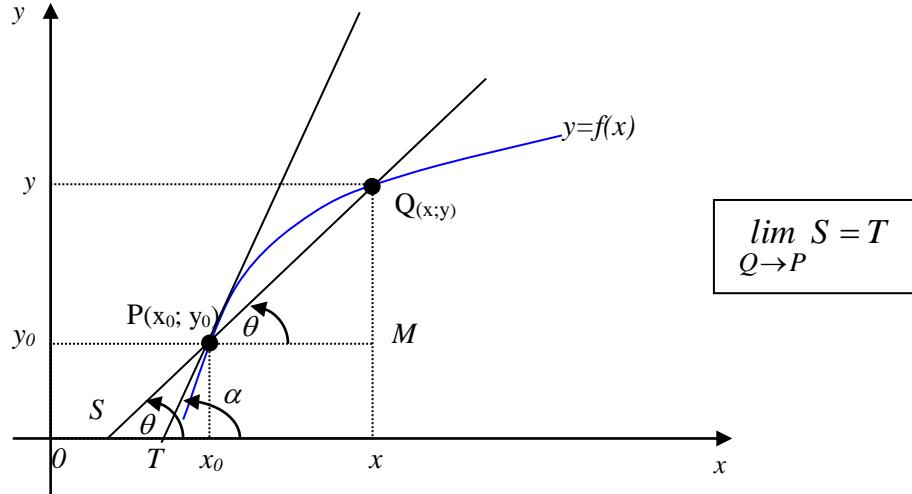
En esta figura se ilustra un procedimiento intuitivo para trazar una tangente a una curva continua  $C$ , en un punto  $P$ . Si se hace girar una recta alrededor del punto  $P$ , generalmente cruzará la curva en  $P$ , y posiblemente en otro punto. Una recta que corte a la curva en  $P$ , y en otro punto tal como  $Q$ , secante a la curva.



A medida que el punto  $Q$  se aproxima al punto  $P$  a lo largo de la curva, la secante gira alrededor de  $P$  y parece llegar a una posición límite, la cual es la recta  $\overline{PT}$  que en  $P$  coincide en dirección con la curva. En este sentido consideramos a la recta  $\overline{PT}$  como límite de la secante  $\overline{PQ}$ .

Lo expuesto nos permite efectuar la siguiente Definición: “sí  $\overline{PQ}$  es una secante que pasa por los puntos P y Q de una curva continua C, entonces el límite (si existe) de la secante  $\overline{PQ}$ , cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva, se llama Tangente a la curva en P”.

Supongamos que la ecuación de la curva sea  $y = f(x)$ , donde  $f(x)$  es una función continua y  $x$  e  $y$  son las coordenadas rectangulares usuales. Se pide trazar la tangente en el punto  $P_{(x_0; y_0)}$  de la curva. Sí queremos aplicar la definición dada consideraremos otro punto  $Q_{(x, y)}$  de la curva. Los puntos P y Q determinan una secante cuya pendiente es:  $\operatorname{tg} \theta = \frac{y - y_0}{x - x_0}$



Suponiendo que la curva tiene una tangente  $\overline{PT}$ , hallamos que cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva, la inclinación  $\theta$  de la secante se aproxima a la inclinación  $\alpha$  de la tangente, es decir:  $\lim_{Q \rightarrow P} \theta = \alpha$

Además, la pendiente de la secante se aproxima a la pendiente de la tangente, es decir:

$$\lim_{Q \rightarrow P} \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \alpha$$

Como las coordenadas de P se pueden escribir:  $[x_0; f(x_0)]$ , y los de Q:  $[x; f(x)]$ , en consecuencia: cuando  $Q \rightarrow P \Leftrightarrow x \rightarrow x_0$

$$\therefore \lim_{Q \rightarrow P} \operatorname{tg} \theta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Esta expresión nos dice que la pendiente  $m(x_0)$  de la tangente a la curva con ecuación  $y = f(x)$  en el punto  $P_{(x_0; y_0)}$ , es:

$$m(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definición de derivada de una función en un punto

Como vimos, el límite que define la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en un punto  $P_{(x_0; y_0)}$ , es:  $m(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

También el límite que define la velocidad instantánea de una partícula que se mueve sobre una recta de acuerdo con la fórmula:

$$e = e(t) ; V(t_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e(t) - e(t_0)}{t - t_0}, \text{ tiene exactamente la misma forma.}$$

Además, es conveniente dejar aclarado que muchos otros problemas que se presentan en la técnica implican este tipo de límite. Para evitar toda relación con un problema particular, a estos límites se les da el nombre de Derivada.

Sí el  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe, se llama Derivada de la función  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x_0$ , y se designa por:  $f'(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

**En general**, dada una función  $y = f(x)$ , si damos un incremento  $\Delta x$  (positivo o negativo) a la variable independiente, resultará para la función un incremento  $f(x + \Delta x) - f(x)$ , que se indica con  $\Delta y$ .

Si formada, luego, la “relación media” o el cociente incremental:  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , y existe:

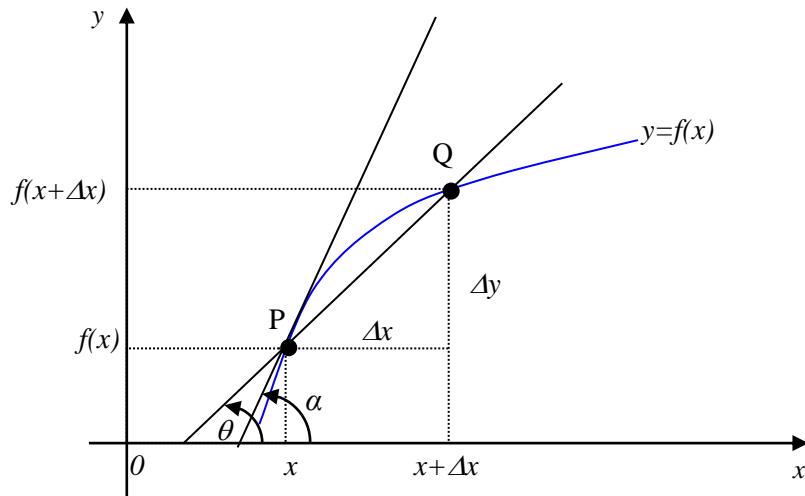
$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ , a este límite, si existe, se lo llama Definición de Derivada de la función  $f(x)$ .

En símbolos:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\ \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad \underline{\text{Regla General de Derivación.}}$$

Es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica a la curva en un punto considerado.



NOTA:  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  representa la variación de la función ( $\Delta y$ ) por unidad de variación de  $\Delta x$ .

Cuando  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , representa la variación de la función en un punto.

NOTACIONES:  $y'$ ;  $Dy$ ;  $f'(x)$ ;  $[f(x)]$ ;  $Df(x)$ ;  $D_x f(x)$ ;  $\frac{dy}{dx}$ ; (Notación de Leibniz 1646-1716)

### Función Derivada

El valor  $f'(a)$  considerado como imagen para cada punto  $a$  del Dominio, donde  $f(x)$  es derivable, permite definir una nueva función  $f'(x)$ , que se llama función derivada de  $f(x)$ .

Es decir,  $f'(x)$  es la función derivada de  $f(x) \Leftrightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}; \forall a \in Df$ , donde dicho límite existe.

El dominio de  $f'(x)$  está formado por los puntos  $a$  del Dominio de  $f(x)$  para los cuales existe  $f'(a)$ .

$$\therefore Df' \subseteq Df$$

### Derivabilidad y Continuidad:

Hagamos notar que, siendo  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ , podemos escribir:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon; \varepsilon : \text{infinitésimo}$ ; o lo que es lo mismo:  $\Delta y = y' \Delta x + \varepsilon \Delta x$ . Luego, si  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ .

Es decir, si una función es derivable, es continua.

La proposición recíproca no es cierta, hay funciones continuas que no son derivables, o, en términos geométricos, hay curvas que no tienen tangente.

Es importante dejar perfectamente claro que “una función es derivable en  $x_0$ , si su derivada existe en  $x_0$ ”.

### Continuidad de las funciones derivables

Para una función, la propiedad de ser derivable es más fuerte que la de ser continua. Es decir, la derivabilidad asegura la continuidad, mientras que el recíproco no se cumple, pues existen funciones continuas en un punto que no son derivables en él. O sea:

$$\begin{matrix} \text{DERIVABILIDAD} & \xrightarrow{\quad} & \text{CONTINUIDAD} \\ & \not\subseteq & \end{matrix}$$

Teorema: sí una función tiene derivada finita en un punto, entonces es continua en dicho punto. Es decir, el Teorema asegura que sí existe un número real  $k / k = f'(a) \Rightarrow f(x)$  es continua en  $a$ .

### Demostración:

Como  $f(x)$  es derivable en el punto  $a$ , y sí  $x \in Df$  es otro punto del dominio / si  $x \neq a$ :

podemos escribir  $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$ ; calculando el límite en el punto  $a$ , es:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

$\uparrow$  por límite de un producto

luego:  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x)$  es continua en  $a$ .

Derivadas Laterales: se obtienen considerando los límites laterales del cociente incremental.

(a) Derivada lateral derecha o derivada por la derecha: sea  $f(x)$ , función continua en  $x = x_0$ , la derivada por la derecha:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(b) Derivada lateral izquierda o derivada por la izquierda: análogamente, la derivada por la izquierda:

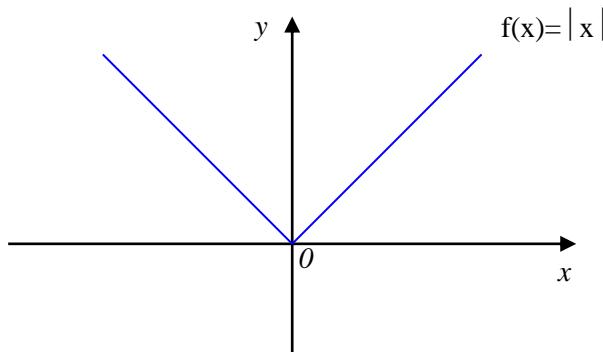
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Como consecuencia inmediata de estas definiciones se puede demostrar el siguiente:

Teorema: si la función  $f(x)$  es continua en  $x = x_0$ , entonces si  $f'(x_0)$  existe  $\Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Ejemplo: estudiar la derivabilidad de  $f(x) = |x|$  en  $x = 0$

Esta función es continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ , puesto que:  $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$



Veamos las derivadas laterales en  $x_0 = 0$ .

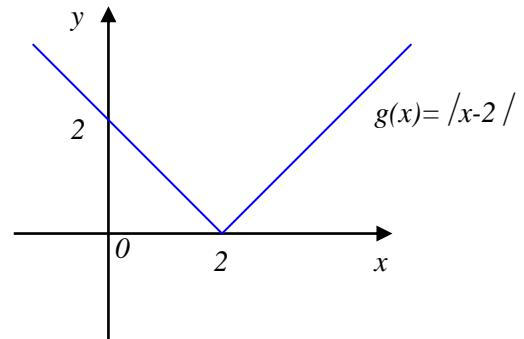
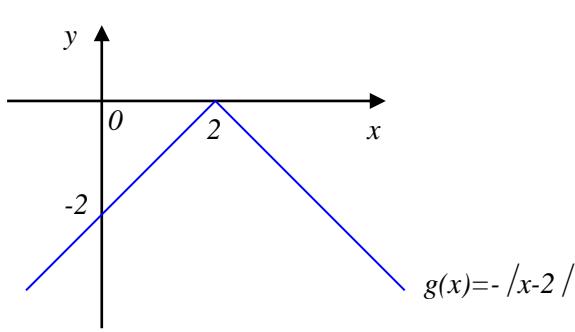
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 ; f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

$$\therefore \nexists f'(0), \text{ pues que: } f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

Luego,  $f(x) = |x|$  no es derivable en el punto  $x_0 = 0$ , pero sí es continua en dicho punto.

Algo similar ocurre con la función:  $f(x) = -|x - 2|$ , en el punto  $x_0 = 2$ ;  $f(x)$  es continua en  $x_0 = 2$  y  $\nexists f'(2)$ , pues:  $f'_+(2) = -1 \wedge f'_-(2) = 1$

O en:  $g(x) = |x - 2|$



## Álgebra de Derivadas

**Derivada de una suma algebraica de funciones:** es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones sumandos.

$y = u(x) + v(x) - w(x)$  siendo:  $u(x); v(x); w(x)$  funciones de  $x$  (derivables).

Incrementando  $x$  en  $\Delta x$ :

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - w(x + \Delta x) \\ \Delta y &= u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - w(x + \Delta x) - u(x) - v(x) + w(x) \\ \Delta y &= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] - [w(x + \Delta x) - w(x)] \end{aligned}$$

pero:  $u(x + \Delta x) - u(x) = \Delta u$  ;  $v(x + \Delta x) - v(x) = \Delta v$  ;  $w(x + \Delta x) - w(x) = \Delta w$

luego:  $\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$ ; dividiendo por  $\Delta x$  y pasando al límite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = u'(x) + v'(x) - w'(x) \Rightarrow y' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$$

**La derivada de una constante:** es nula.

$y = f(x) = c$ ; como  $f(x)$  es constante, cualquiera sea el valor de  $x$  se verifica:

$$f(x + \Delta x) = f(x); \quad \therefore \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

luego:  $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$

**La derivada de la variable independiente** (respecto de ella misma): es la unidad.

$$y = f(x) = x; \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad ; \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$$

**La derivada del producto de dos funciones:** es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más la primera función por la derivada de la segunda.

$y = u(x) \cdot v(x)$ , incremento  $x$  en  $\Delta x$ . Tenemos que las funciones  $u(x)$  y  $v(x)$  se incrementan en  $\Delta u$  y  $\Delta v$  respectivamente.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

$$\Delta y = \cancel{u \cdot v} + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - \cancel{u \cdot v} = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v;$$

↑ cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ ;  $\Delta v \rightarrow 0$  pues:  $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x) \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{} 0$

$$\text{pasando al límite para } \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow y' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

Para hallar la **derivada del producto de tres factores**, tenemos:

$$y = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) = u(x) \cdot [v(x) \cdot w(x)]$$

$$y' = u'(x) \cdot [v(x) \cdot w(x)] + u(x) \cdot [v(x) \cdot w(x)]' = u'(x) \cdot [v(x) \cdot w(x)] + u(x) \cdot [v'(x) \cdot w(x) + v(x) \cdot w'(x)]$$

$$\therefore y' = u' \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u \cdot v(x) \cdot w'(x)$$

**La derivada del producto de tres funciones**: es igual a la suma cuyos sumandos se forman con la derivada de una función multiplicada por las otras dos funciones (sin derivar).

Luego, **generalizando**: sí:  $y = u \cdot v \dots w$ ; siendo:  $u, v, \dots, w$  funciones de  $x$ , resulta:

$$y' = u' \cdot v \dots w + u \cdot v' \dots w + \dots + u \cdot v \dots w'$$

**La derivada de una constante por una función**: es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

$c = \text{cte.}$  ;  $y = c \cdot f(x)$ ; aplicando la regla de derivación de un producto:

$$y' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$$

**La derivada de un cociente de dos funciones**: es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

$y = \frac{u(x)}{v(x)}$ ; incrementando  $x$  en  $\Delta x$ , tenemos:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} ; \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} ; \Delta y = \frac{\cancel{u \cdot v} + v \cdot \Delta u - u \cdot \cancel{v}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v^2 + v \cdot \Delta v}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v}$ ; teniendo en cuenta que cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , también  $\Delta v \rightarrow 0$ , por ser  $v(x)$  una función continua (pues  $v(x)$  es derivable).

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{\substack{\Delta v \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}}} = \frac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$$

### Derivada de la función logarítmica:

Sea la función:  $y = \log_a x$ ; donde  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$   $\wedge$  Dominio  $f(x) = \mathbb{R}^+$

$$y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a(x) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ . Antes de pasar al límite transformamos el cociente incremental multiplicando y dividiendo por  $x$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

↑ como el logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la misma

haciendo:  $\frac{x}{\Delta x} = t$ ; de donde  $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{t}$ . cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ ;  $t \rightarrow \infty$   $\wedge$   $\frac{1}{t} \rightarrow 0$

Sustituyendo y pasando al límite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{x} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \log_a\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \Rightarrow$$

↑ como el límite de una constante por una función es igual al producto de la constante por el límite de la función

Utilizando propiedades de los logaritmos de números reales, puede demostrarse que si una función  $f(x)$  tiene límite finito y positivo en un punto  $a \Rightarrow$  “el límite del logaritmo es el logaritmo del límite” es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a} [\log_b f(x)] = \log_b \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \quad (b > 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right] \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e; \text{ como: } \log_a e = \frac{1}{\ln a} : y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

“La derivada del  $\log_a x$  para todo valor positivo de  $x$ , es igual al recíproco de  $x$ , por el recíproco de  $\ln a$ ”.

Obsérvese que la derivada de:  $y = \log_a x$  (función trascendente), es  $y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$  (función algebraica).

### Derivada del logaritmo natural:

$$y = \ln x, \text{ luego } y' = \frac{1}{x \cdot \ln e} = \frac{1}{x}$$

**Derivada de una función de función:** (o derivada de una función o compuesta o Regla de la Cadena)

Sabemos que la dependencia de  $y$  con respecto a  $x$  se puede poner de manifiesto a través de una variable auxiliar  $u$ . Tengamos:  $y = f(u)$ , siendo  $u = g(x)$ .  $y$  es función  $u$ ;  $u$  es función de  $x$ .

Si  $x$  recibe un incremento  $\Delta x$ ,  $u$  recibe un incremento  $\Delta u$ ; la razón incremental  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  se

puede escribir así:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ ; cuando  $\Delta x \rightarrow 0$   $\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow$

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x); \text{ o tambien :}$$

$$y'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$$

### Derivación logarítmica:

Sea la función  $y = f(x)$ , si aplicando logaritmo tenemos que  $\ln y$  es una función de función

(pues  $\ln y$  es función de  $y$ , e  $y$  es función de  $x$ ), entonces:  $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ , pues:

$$\ln y = g(y); \quad y = f(x)$$

$$(\ln y)' = g'(y) \cdot f'(x); \quad g'(y) = \frac{1}{y}$$

$$(\ln y)' = \frac{f'(x)}{y} = \frac{y'}{y}$$

Esta expresión se llama derivada logarítmica o derivación logarítmica de la función  $y = f(x)$ . Muchas veces resulta sumamente útil aplicar logaritmo antes de derivar y vamos a usar este método para hallar la derivada de una potencia cualquiera de una función.

### Derivada de una potencia de $x$ :

Sea:  $y = f(x) = x^m$ ;  $m \in \mathbb{N}$ ;  $y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$ ; por comodidad escribimos:

$$x_I = x + \Delta x \Rightarrow \Delta x = x_I - x$$

nos queda:  $y + \Delta y = x_I^m \Rightarrow \Delta y = x_I^m - x^m \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_I^m - x^m}{\Delta x} = \frac{x_I^m - x^m}{x_I - x}$ ; efectuando el cociente de los polinomios, nos queda:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x_I^{m-1} + x_I^{m-2} \cdot x + x_I^{m-3} \cdot x^2 + \dots + x_I \cdot x^{m-2} + x^{m-1}$$

Sí  $\Delta x \rightarrow 0$ , tenemos que  $x_I \rightarrow x$  por lo tanto nos queda una suma de m sumandos iguales a  $x^{m-1}$ , es decir:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \underbrace{x^{m-1} + x^{m-1} + \dots + x^{m-1}}_{m \text{ sumandos}} = m \cdot x^{m-1} \Rightarrow D x^m = m \cdot x^{m-1}$

De otra forma:

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$ , desarrollando el segundo miembro según el Binomio de Newton, nos queda:

$$y + \Delta y = x^m + m \cdot x^{m-1} \cdot \Delta x + m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot x^{m-3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + \Delta x^m$$

$$\Delta y = \cancel{x^m} + m \cdot x^{m-1} \cdot \Delta x + m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot x^{m-3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + \Delta x^m - \cancel{x^m}$$

$$\Delta y = m \cdot x^{m-1} \cdot \Delta x + m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot x^{m-3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + \Delta x^m$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m \cdot x^{m-1} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} + m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\Delta x}{\Delta x} + m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot x^{m-3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\Delta x}{\Delta x} + \dots + \frac{\Delta x^m}{\Delta x}$$

Cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , el cociente  $\frac{\Delta x}{\Delta x} \rightarrow 1$ , pero a partir del segundo sumando vemos que aparece el cociente de potencias crecientes de  $\Delta x$  sobre  $\Delta x$ , es decir el cociente de un infinitésimo de orden superior por otro de menor orden:  $\underset{\Delta x \rightarrow 0}{\text{su cociente}} \rightarrow 0$ .

Por lo tanto, nos queda:  $D x^m = y' = m \cdot x^{m-1}$

Casos particulares:

Exponentes negativos:  $y = x^{-m}$ ;

$$y' = -m \cdot x^{-m-1}$$

$$y' = -m \cdot x^{-(m+1)} = \frac{-m}{x^{m+1}}$$

### Derivada de una potencia cualquiera de una función

Sea:  $f(u) = y = u^m$ ; siendo:  $u = g(x)$   $\wedge$   $m \in \mathbb{R}$

Aplicando logaritmo neperiano en ambos miembros, tenemos:  $\ln y = m \cdot \ln u$

Aplicando derivada logarítmica:  $\frac{y'}{y} = m \cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow y' = m \cdot \frac{u'}{u} \cdot u^m \Rightarrow y' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$

### Derivada de la función exponencial

$y = a^u$ ;  $a = \text{constante}, u \text{ función de } x$

$$\ln y = u \cdot \ln a \Rightarrow \frac{y'}{y} = u' \cdot \ln a \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

#### Casos particulares:

$$(a) \text{ Sea: } y = e^u; u = g(x) \quad \ln y = u \cdot \ln e \Rightarrow \frac{y'}{y} = u' \cdot \ln e = y' = e^u \cdot u'$$

$$(b) \text{ Sea: } y = a^x; \ln y = x \cdot \ln a \Rightarrow \frac{y'}{y} = x' \cdot \ln a = \ln a \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

$$(c) \text{ Sea: } y = e^x; \text{ (función exponencial natural)}$$

$$\ln y = x \cdot \ln e \Rightarrow \frac{y'}{y} = x' \cdot \ln e = 1 \Rightarrow y' = y \Rightarrow y' = e^x$$

(d) Caso de base y exponente variable. Derivada de la función potencial-exponencial (o función exponencial compuesta).

La función donde tanto la base como el exponente son funciones de  $x$ , se llama “Función Exponencial Compuesta”.

Por ejemplo:  $y = (\sin x)^{x^2}$ ;  $y = x^{\tan x}$ ;  $y = x^x$ ;  $y = (\ln x)^x$ ; y en general toda función del tipo:

$y = u^v$ , siendo  $u$  y  $v$  funciones de  $x$ .

$$\ln y = v \cdot \ln u \Rightarrow \frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow y' = \left( v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \cdot u^v = u^v \cdot v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \cdot u^v$$

$$y' = \underbrace{u^v \cdot v' \cdot \ln u}_{(1)} + \underbrace{v \cdot u' \cdot u^{v-1}}_{(2)}$$

(1)- Este término es la derivada de  $u^v$  considerando a  $v$  como función y a  $u$  como constante (función exponencial).

(2)- Este término es la derivada de  $u^v$  considerando a  $u$  como función y a  $v$  como constante (función potencial).

### Derivada de la raíz enésima de una función

$$y = \sqrt[n]{u}; u = f(x)$$

$$\begin{aligned} y = u^{\frac{1}{n}}, \text{ derivo como potencia: } y' &= \frac{1}{n} \cdot u^{\frac{1}{n}-1} \cdot u' = \frac{1}{n} \cdot u^{\frac{1-n}{n}} \cdot u' = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{u^{\frac{n-1}{n}}} \cdot u' \\ y' &= \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} \end{aligned}$$

#### Casos particulares:

$$(a) \text{ Si se trata de una raíz cuadrada: } y = u^{\frac{1}{2}}; y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(b) \text{ Sea la función: } y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}; y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

### Derivadas de funciones inversas

Sí  $f(x)$  es una función biyectiva con derivada finita no nula en el punto  $a$ , entonces  $f^{-1}(x)$  tiene derivada finita en  $f(a)$ , y esta derivada es:  $\frac{1}{f'(a)}$ .

Demostración: por definición de función inversa:  $\forall x : f^{-1}[f(x)] = x$ , sí derivamos esta expresión, aplicando la derivada de una función de función para derivar el primer miembro; resulta:

$$f(x) \circ g(x) = f[g(x)] \Rightarrow (f(x) \circ g(x))' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

$$f^{-1}'[f(x)] \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow f^{-1}'[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}; \text{ sí } f'(x) \neq 0$$

Derivada de funciones trigonométricas (o circulares directas)

Derivada de la función seno:

Sea:  $y = \sin x$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x;$$

$$\text{recordando que: } \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\Delta y = 2 \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{I} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x;$$

$$y' = \cos x$$

sí:  $y = \sin u$ ;  $u = g(x)$ , aplicando derivada de función de función:

$$y' = \cos u \cdot u'$$

Derivada de la función coseno:

Sea:  $y = \cos x$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x;$$

$$\text{recordando que: } \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\Delta y = -2 \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) = -2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{-1} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\operatorname{sen} x;$$

$$y' = -\operatorname{sen} x$$

sí:  $y = \cos u$ ;  $u = f(x)$ , aplicando derivada de función de función:

$$y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$$

### Derivada de la función tangente

$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ ; derivamos como cociente, y obtenemos:

$$y = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x;$$

sea:  $y = \operatorname{tg} u$ ;  $u = f(x)$ ;

$$y' = \frac{u'}{\cos^2 u} = \sec^2 u \cdot u'$$

### Derivadas de funciones Circularas Inversas (Funciones ciclométricas)

#### Derivada de la función arco seno

Sea:  $y = \operatorname{arc sen} x$ ; donde:  $Df = [-1; 1]$ ;  $Rg = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ; cuya función inversa es:  $x = \operatorname{sen} y$  (1); aplicando la regla de derivación de funciones inversas, tenemos:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$  (2): dado que:  $\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ ; por (1):

$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$ ; reemplazando en (2):  $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ; para:  $-1 \leq x \leq 1$

$$\therefore y = \arcsen u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}; \text{ siendo } u = g(x)$$

Obsérvese que tomamos la raíz con el signo positivo, porque la función  $y = \arcsen x$  se define en el intervalo  $[-\pi/2 \leq y \leq \pi/2]$ ; o sea en el primero y cuarto cuadrantes donde  $\cos y \geq 0$ .

### Derivada de la función arco coseno:

Sea:  $y = \arccos x$ ; donde:  $Df = [-1; 1]$ ;  $Rg = [0; \pi]$ ; cuya función inversa es:  $x = \cos y$ , derivando, se tiene:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sin y}$ ; puesto que:  $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ ;

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ;  $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ; para:  $-1 \leq x \leq 1$

$$\therefore y = \arccos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}; \text{ siendo } u = g(x)$$

En la igualdad  $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$ , tomamos la raíz con signo positivo, porque la función  $y = \arccos x$  está definida en el intervalo  $0 \leq y \leq \pi$ , es decir en el primero y segundo cuadrantes, donde  $\sin y \geq 0$ .

### Derivada de las funciones hiperbólicas directas

**Derivada de la función:**  $y = Sh x$ ;  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} e^x + e^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = Ch x$

**Derivada de la función:**  $y = Ch x$ ;  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = Sh x$

**Casos particulares:** aplicando derivada de función de función, tenemos:

$$y = Sh u \Rightarrow y' = Ch u \cdot u'; \quad y \quad y = Ch u \Rightarrow y' = Sh u \cdot u'$$

### Derivadas de funciones hiperbólicas inversas

Para derivar funciones hiperbólicas inversas se procede de forma análoga a la empleada para funciones circulares inversas.

$$(I) \quad y = \operatorname{Arg} Sh x \Rightarrow x = Sh y; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{Ch y} = \frac{1}{\sqrt{1+Sh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$Ch^2 \alpha - Sh^2 \alpha = 1$$

$$(II) \quad y = \operatorname{Arg} Ch x \Rightarrow x = Ch y; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{Sh y} = \frac{1}{\sqrt{Ch^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(III) \quad y = \operatorname{Arg} Th x \Rightarrow x = Th y; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{Ch^2 y}} = Ch^2 y = \frac{1}{1-Th^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$$

### Derivada de funciones definidas implícitamente

Sea:  $F(x; y) = 0$ . Sí existe una función  $y = f(x)$  definida en un cierto intervalo  $[a; b]$  tal que  $F[x; f(x)] = 0$ ,  $\forall x \in [a; b]$ , diremos que la ecuación  $F(x; y) = 0$  define  $y$  como función implícita de  $x$ .

En ocasiones resulta factible “despejar”  $y$  de  $F(x; y) = 0$ , transformándose así la función implícita en explícita, pero esta transformación resulta a veces penosa y otras imposible.

La teoría de funciones implícitas (existencia y derivabilidad) se verá al estudiar funciones de dos variables, pero podemos agregar que una ecuación  $F(x; y) = 0$ , generalmente implica una o más relaciones funcionales.

Entonces “Una función cuya existencia está implicada en una ecuación  $F(x; y) = 0$ , se llama función implícita”.

Ejemplos:

(1) sea la ecuación:  $x.y + x - 2y - 1 = 0$ , derivando se obtiene:  $x' \cdot y + x \cdot y' + x' - 2y' - \frac{1}{y} = 0$

$$y + x \cdot y' + 1 - 2y' = 0 \Rightarrow (x - 2)y' + y + 1 = 0 \Rightarrow y' = \frac{-y - 1}{x - 2} = \frac{y + 1}{2 - x}$$

(2) sea la ecuación:  $x^2 \cdot y' + 2x \cdot y + 3y' = 0$ , derivando, se tiene:

$$x^2 \cdot y' + 2x \cdot y + 3y' = 0 \Rightarrow (x^2 + 3)y' + 2x \cdot y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x \cdot y}{x^2 + 3}$$

En general, para hallar la derivada  $y'$  se puede seguir uno de los procedimientos que se detallan a continuación:

- (i) “Despejar”  $y$ , si es posible, derivar luego con respecto a  $x$ . Este procedimiento debemos evitar a menos que se trate de una ecuación sencilla.
- (ii) Derivar la ecuación dada con respecto de  $x$ , teniendo en cuenta que  $y$  es función de  $x$ , y despejar después  $y'$ . Esta forma de efectuar la derivación recibe el nombre de “Derivación Implícita”.

### Derivadas sucesivas: (o derivadas de orden superior)

Supongamos que la función  $y = f(x)$  es derivable en el intervalo  $[a; b]$ . Los valores  $f'(x)$  dependen generalmente de  $x$ , es decir, como ya hemos visto, la derivada  $f'(x)$  también es una función de  $x$ .

La derivada de la primera derivada se llama segunda derivada o derivada de segundo orden de la función inicial, y se designa:  $y''$ ;  $f''(x)$ ;  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ;  $D^2y$ ;  $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ ;  $y^{(2)}$

La derivada de la segunda derivada se denomina derivada tercera o derivada de tercer orden, y se designa:  $y'''$ ;  $f'''(x)$ ;  $\frac{d^3y}{dx^3}$ ;  $D^3y$ ;  $\frac{d^3}{dx^3}f(x)$ ;  $y^{(3)}$

En consecuencia, diremos que la derivada  $n$ -sima (o de orden  $n$ ) de una función  $f(x)$  es, entonces, la derivada de la derivada de orden  $n-1$  (supuesta derivada) de  $f(x)$ . Diremos también, en este caso, que  $f(x)$  es derivable  $n$  veces en el intervalo  $[a; b]$ . Simbólicamente podemos escribir:  $f^{(n)}(x) = Df^{(n-1)}(x) = y^{(n)}$ .

Es obvio que el cálculo de las derivadas superiores de  $f(x)$  se efectúa aplicando reiteradamente las reglas de derivación que hemos estudiado.

Digamos, asimismo, que para ciertas funciones es factible encontrar una expresión de la derivada enésima en función de  $n$ . El procedimiento consiste en calcular un cierto número de derivadas sucesivas, tantas como sea necesarias, para inferir una ley de formación para, posteriormente, aplicar el principio de inducción completa.

Ejemplo: Sea la función:  $f(x) = e^{\alpha x}$

$$f'(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x}; \quad f''(x) = \alpha^2 \cdot e^{\alpha x}; \quad f'''(x) = \alpha^3 \cdot e^{\alpha x}; \dots; \quad f^{(n-1)}(x) = \alpha^{n-1} \cdot e^{\alpha x};$$

$$f^{(n)}(x) = Df^{(n-1)}(x) = \alpha^n \cdot e^{\alpha x}$$

Por último, digamos que las funciones más comunes, y que resultan de particular importancia, son infinitamente derivables, es decir, que admiten derivadas de orden  $n$  cualquiera. Por ejemplo, la función exponencial  $y = e^x$ , para la cual  $D^{(n)}e^x = e^x; \forall n \in \mathbb{Z}$ ; la función  $y = e^{\alpha x}$  que hemos visto; los polinomios, etc.

Diferencial de una función. Definición. Parte principal del incremento

Sea la función  $y = f(x)$  que suponemos derivable y, por ende, continua en el intervalo  $[a; b]$ .

En un punto  $x \in [a; b]$ , la derivada de la función se define como:  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ; donde podemos observar que cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , la razón  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  tiende a un número determinado  $f'(x)$ , y por lo tanto esta razón incremental se diferencia de la derivada  $f'(x)$  en un infinitésimo. Es decir, por una propiedad de los infinitésimos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon_{(x)}, \text{ donde } \varepsilon_{(x)} \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

de donde:  $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon_{(x)} \cdot \Delta x$ . En virtud de la continuidad de  $f(x)$ , se sabe que  $\Delta y$  es un infinitésimo para  $\Delta x \rightarrow 0$ . También sabemos que  $f'(x) \cdot \Delta x$  es un infinitésimo equivalente a  $\Delta y$ ; o sea que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f'(x) \cdot \Delta x}^{dy}}{\Delta y} = 1$$

Asimismo, sabemos que  $\varepsilon_{(x)} \cdot \Delta x$  es un infinitésimo de orden superior a  $\Delta y$ , o sea que:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_{(x)} \cdot \Delta x}{\Delta y} = 0 \quad \therefore \quad \Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon_{(x)} \cdot \Delta x$   
 $\varepsilon_{(x)} \cdot \Delta x$  es un infinitésimo para  $\Delta x \rightarrow 0$ ;  $\Delta x$  es un infinitésimo;  $f'(x) = \text{constante}$ .

$\varepsilon_{(x)} \cdot \Delta x$  es un infinitésimo de orden superior a  $\varepsilon_{(x)}$  y  $\Delta x$ ; tiende más rápidamente a cero y por lo tanto no influye prácticamente en los valores del incremento  $\Delta y$ ; cuando  $\Delta x$  es muy pequeño.

$f'(x) \cdot \Delta x$  es infinitésimo del mismo orden que  $\Delta x$ .

Por ejemplo:  $x^2$ ;  $x^5$ ;  $x^7$  son infinitésimos para  $x \rightarrow 0$ ;  $x^7 \rightarrow 0$  tiende más rápidamente a cero que  $x^2$ . Luego,  $x^7$  es infinitésimo de orden superior a  $x^2$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x}{f'(x) \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\left( 1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)} \right)}_{\substack{\text{cuando } \Delta x \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} = 1 + 0 = \overset{\text{o bien } (\otimes)}{1}; \Delta y \equiv dy \\ \therefore \Delta y &= \underbrace{f'(x) \cdot \Delta x}_{(1)} + \underbrace{\varepsilon_{(x)} \cdot \Delta x}_{(2)} \end{aligned}$$

El primer (1) sumando recibe el nombre de “Parte principal del incremento” que es lineal con relación a  $\Delta x$ . El segundo (2) “Término complementario”.

Sí  $f'(x) \neq 0$ , la parte principal del incremento recibe el nombre de diferencial de la función,  $y = f(x)$  y se designa por:  $dy = d f(x) = f'(x) \cdot \Delta x$ .

### Definición de Diferencial

“Diferencial de una función  $y = f(x)$  derivable se define como el producto de su derivada por el incremento de la variable independiente”.

### Expresión analítica de la diferencial

#### Diferencial de la variable independiente

Sea la función identidad:  $y = f(x) = x$ ; aplicando la fórmula para calcular la diferencial:  $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ ; pero como:  $y = x$  resulta:  $dy = dx \Rightarrow dy = f'(x) \cdot \Delta x$ . Sabemos que la derivada:  $f'(x) = 1 \Rightarrow dx = 1 \cdot \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$ . Con lo que queda probado que el incremento de la variable independiente es igual a la diferencial de esa variable.

Luego:  $dy = f'(x) \cdot dx$  que es la Expresión Analítica de la Diferencial.

#### (⊗) Relación de la diferencial con el incremento $\Delta y$ :

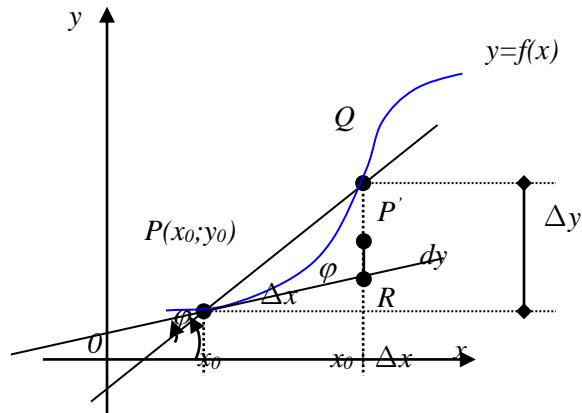
Sí  $\Delta x \rightarrow 0$ , y es  $y' \neq 0$ , los infinitésimos  $dy$  y  $\Delta y$  son equivalentes, es decir:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y' \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} y' \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{y'} = y' \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

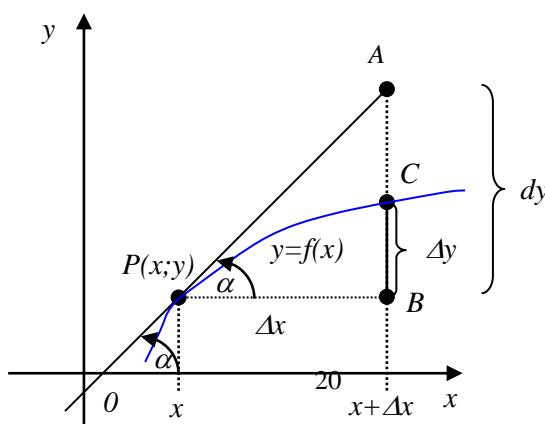
#### Significado o interpretación geométrica de la diferencial

$$dy = f'(x) \cdot dx \quad y' = \tan \varphi = \frac{P'R}{PR}; \quad dx = \Delta x = \overline{PR} \Rightarrow dy = y' \cdot dx = \frac{P'R}{PR} \cdot \overline{PR} = \overline{P'R}$$

En este caso:  $dy < \Delta y$ ;



$$\tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} \Rightarrow dy = y' \cdot dx = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} \cdot \overline{PB} = \overline{AB}; \quad dy > \Delta y$$



Geométricamente la diferencial de una función:  $y = f(x)$  es el incremento que sufre la recta tangente a la curva en el punto  $x$  cuando se pasa de  $x$  a  $x + \Delta x$ .

La longitud  $\overline{AB}$  corresponde al diferencial de  $f(x)$  en  $x$ , respecto del incremento  $\Delta x$ .

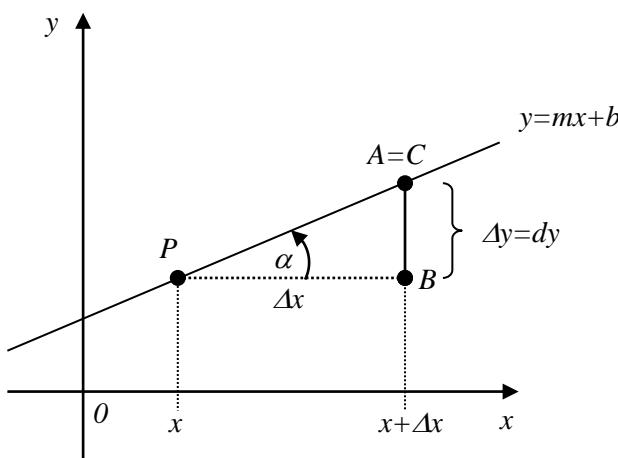
Por otra parte, la longitud  $\overline{BC}$  comprende al incremento:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

En un entorno de  $x$ , cuando menor es el número  $\Delta x$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), más se aproximan las longitudes  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ . O sea, la resta  $\overline{AB} - \overline{BC} \rightarrow 0$ . Por lo tanto, si reemplazamos  $\overline{BC}$  por  $\overline{AB}$  estamos reemplazando en el gráfico de  $f(x)$ , entre  $x$  y  $\Delta x$  por la recta tangente a la curva en el punto:  $[x, f(x)] (P(x; y))$  por lo tanto podemos aproximar el valor de  $f(x + \Delta x)$  conociendo el valor de  $f(x)$  y el diferencial de  $f$  respecto de  $\Delta x$ :

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x ; \text{ ó } f(x + \Delta x) \approx f(x) + d f(x)$$

El error que se comete al reemplazar  $f(x + \Delta x)$  por  $f(x) + d f(x)$ , puede hacerse menor que cualquiera:  $\varepsilon > 0$ , prefijado, si se toma  $\Delta x$  convenientemente pequeño.

$$\text{Luego: } f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x \quad \therefore \quad \Delta y \approx dy$$



### Reglas de diferenciación

En realidad, los cálculos de la diferencial de una función se reducen al cálculo de la derivada, ya que al multiplicar la última por la diferencial de la variable independiente se obtiene “la diferencial de la función”.

- (1) la diferencial de la suma (resta) de dos funciones derivables  $u$  y  $v$  es igual a la suma (resta) de las diferenciales de esas funciones:  $d(u \pm v) = du \pm dv$
- (2)  $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$

Sí:

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v \Rightarrow dy = y' \cdot dx = (u \cdot v' + u' \cdot v) \cdot dx = u \underbrace{\cdot v'}_{dv} \cdot dx + v \underbrace{\cdot u'}_{du} \cdot dx = u \cdot dv + v \cdot du$$

La diferencial de una función compuesta:

Sea:  $y = f(u)$ ;  $u = g(x)$ ; o sea:  $y = f[g(x)]$

Sabemos que:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'_u(u) \cdot g'_x(x)$ ; luego:  $dy = f'_u(u) \cdot g'_x(x) \cdot dx$ ; pero:  $g'_x dx = du$

$$\therefore dy = f'_u(u) \cdot du = f'[g(x)] \cdot dg(x)$$

Es decir que: "la diferencial de una función compuesta tiene la misma forma que tendría en el caso en que la variable intermedia  $u$  fuere la variable independiente". En otras palabras, la expresión de la diferencial no depende de que la variable sea independiente o sea, a su vez, función de otra variable. Esta importante propiedad de la diferencial, que se usa con frecuencia, recibe el nombre de INVARIANCIA DE LA DIFERENCIAL.

Diferenciales de orden superior

Supongamos la función  $y = f(x)$ . La diferencial de esta función:  $dy = f'(x)dx$ , es una función de  $x$ . Pero de  $x$  depende solamente el primer factor:  $f'(x)$ , puesto que el segundo:  $dx$  es un incremento de la variable  $x$ , que no depende del valor de esta.

En consecuencia, podemos denominar "a la diferencial de la diferencial de una función con el nombre de diferencial segunda o diferencial de segundo orden", y se designa:  $d^2y = d(dy)$ .

De la expresión de la diferencial segunda:  $d^2y = [f'(x).dx]' dx$ , como  $dx$  es independiente de  $x$ , al derivar,  $dx$  sale fuera del signo de derivación. Luego:  $d^2y = f''(x).(dx)^2$ . En la potencia del diferencial se suele omitir el paréntesis:  $(dx)^2 = dx^2$ , entendiéndose que se trata del cuadrado de la expresión  $dx$ ;  $(dx)^3 = dx^3$ ; y así sucesivamente.

Se llama diferencial tercera o diferencial de tercer orden de una función, a la diferencial de la diferencial segunda de esta función:  $d^3y = d(d^2y) = [f''(x).dx^2]' .dx = f'''(x).dx^3$ .

En general se llama diferencial n-sima o diferencial de n-simo orden a la diferencial primera de la diferencial de orden (n-1):  $d^n y = d(d^{(n-1)}y) = [f^{(n-1)}(x).dx^{n-1}]' .dx = f^{(n)}(x).dx^n$

## **TRABAJO PRÁCTICO N° 6: DERIVADA Y DIFERENCIAL**

**Actividad Nº 1:** La tabla exhibe la posición de un ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

a) Hallar la velocidad promedio para cada periodo:

- (i) [1, 3]    (ii) [2, 3]    (iii) [3, 5]    (iv) [3, 4]

b) Usar la gráfica de s como una función de t para estimar la velocidad instantánea cuando  $t = 3$ .

**Actividad Nº 2:** Si se lanza una roca hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura en metros t segundos después, se obtiene mediante la función:

$$h = 10t - 1.86 t^2.$$

a) Hallar la velocidad promedio en los intervalos de tiempo que se proporcionan:

- (i) [1, 2]    (ii) [1, 1.5]    (iii) [1, 1.1]    (iv) [1, 1.01]    (v) [1, 1.001]

b) Estimar la velocidad instantánea cuando  $t = 1$ .

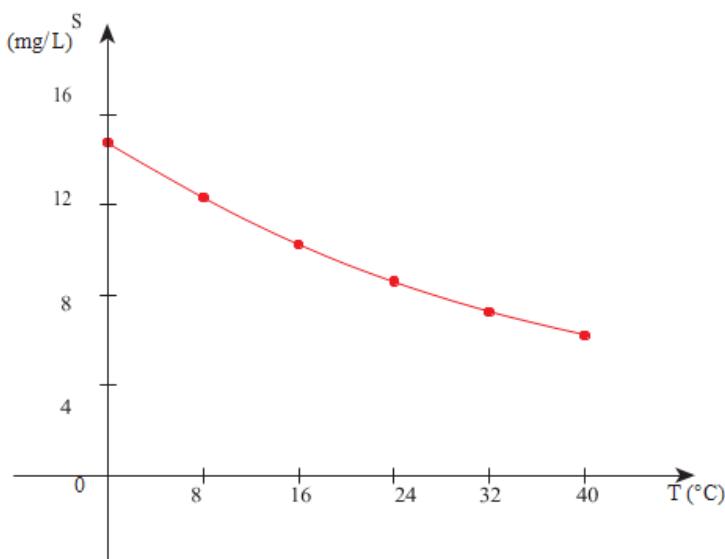
c) Calcular la velocidad instantánea aplicando límite del cociente de incrementos.

d) Interpretar la situación en un graficador.

**Actividad Nº 3:** La cantidad de oxígeno que se puede disolver en agua depende de la temperatura del agua. (De esa manera la polución térmica induce el contenido de oxígeno en el agua). La gráfica muestra cómo varía la solubilidad S de oxígeno como una función de la temperatura del agua T.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada  $S'(T)$ ? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Estimar e interpretar el valor de  $S'(16)$ .



**Actividad Nº 4:** Aplicando reglas de derivación, hallar las derivadas de las siguientes funciones y expresar los resultados reducidos a su mínima expresión:

$$a) f(x) = \frac{x^6}{5} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{5} \quad b) y = \frac{-3x^2}{2} * \left(-\frac{5}{x} + 2\right) \quad c) y = x e^{-kx}, k \text{ constante}$$

$$d) y = \frac{x}{x^2-1} \quad e) y = \frac{\ln(x^2-1)}{x-1} \quad f) y = \frac{1}{(t^4+1)^3} \quad g) r(t) = \sqrt{\frac{t^2-4}{t}}$$

$$h) f(t) = 4\sin^2(-2t^2 + 5) - 2\cos(5 + t)^3 \quad i) y = 2^{\sin \pi x}$$

**Actividad Nº 5:** Una sustancia radiactiva decae emitiendo radiación de manera espontánea. Si  $m(t)$  es la masa que queda a partir de una masa inicial  $m_0$  de la sustancia después de un tiempo  $t$ , se ha encontrado de manera experimental que la rapidez de decaimiento puede expresarse como:

$$\frac{dm}{dt} = km$$

donde  $k$  es una constante negativa. En otras palabras, las sustancias radiactivas decaen en una cantidad proporcional a la masa restante. Probar que la masa decae según la siguiente ley:

$$m(t) = m_0 e^{kt}$$

**Actividad Nº 6:** Hallar la derivada de las funciones aplicando derivación logarítmica:

$$a) y = (\tan x)^{(1/x)} \quad b) y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x \quad c) y = (\ln x)^{\cos x}$$

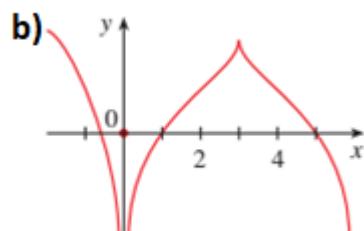
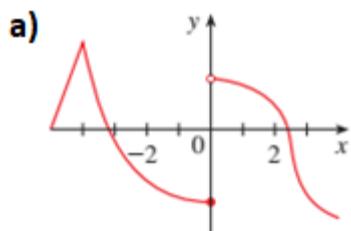
**Actividad Nº 7:** Dadas las funciones por tramos:

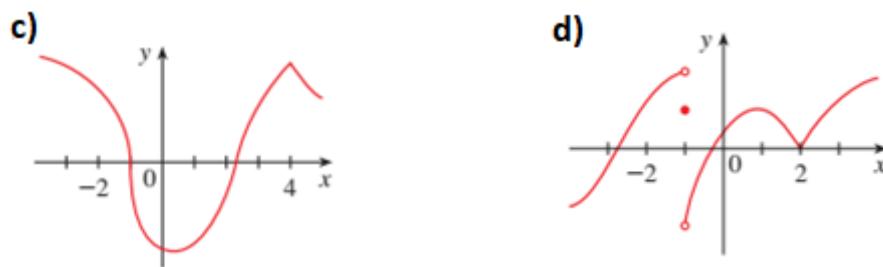
$$a) f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si } x \leq 0 \\ 3-x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -3 ; \text{ en } x = 0$$

$$b) f(x) = \begin{cases} |x^3| & \text{si } x \leq 1 \\ -x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{en } x=0 ; \text{ en } x=1$$

- i) Representarla gráficamente.
- ii) Escribir la expresión de la función derivada para cada tramo y graficarla en otro gráfico.
- iii) Determinar analíticamente si  $f(x)$  es derivable en **los puntos indicados**.
- iv) Determinar si  $f(x)$  es continua en **los puntos indicados**.

**Actividad Nº 8:** Indicar en cuáles valores las funciones no son derivables, justificando en cada caso:





**Actividad Nº 9:** Ciertas funciones analizadas en un valor pueden aproximarse mediante derivadas sucesivas como polinomios denominados de Taylor. Las calculadoras lo utilizan para calcular valores de algunas funciones no polinómicas con buena aproximación, como es el caso de la función  $\cos x$ .

- Calcular las derivadas sucesivas hasta orden IV de la función  $f(x) = \cos x$
- Reemplazar los valores en el polinomio de Taylor de grado IV:

$$\cos x = f(0) + \frac{f'(0) \cdot x}{1!} + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(0) \cdot x^3}{3!} + \frac{f^{IV}(0) \cdot x^4}{4!} + \dots$$

- Graficar con una aplicación la función  $f(x) = \cos x$  junto con su aproximación por polinomio de Taylor atendiendo especialmente a un entorno del punto 0.

**Actividad Nº 10:** Dada la función:  $y = \frac{2}{1-3x}$

- Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal en la abscisa  $x = 0$
- Representar la función y las rectas halladas.

**Actividad Nº 11:** Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva  $y = \frac{2}{x+1}$  que son paralelas al segmento que une los puntos  $(1, -1)$  y  $(3, -5)$ .

**Actividad Nº 12:** Determinar la función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx$  cuya tangente en  $(1, 1)$  tiene por ecuación  $y = 3x - 2$ . Comprobar con un graficador.

**Actividad Nº 13:** Dada la curva implícita, calcular la ecuación de la recta tangente en el punto  $(3,1)$  graficándola con alguna aplicación:

$$\text{Lemniscata de Bernoulli (forma de hélice): } 2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$$

**Actividad Nº 14: Resolver las siguientes situaciones problemáticas:**

I) Un objeto con peso  $W$  es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujetada al propio objeto. Si la cuerda forma un ángulo  $\theta$  con el plano, después la magnitud de la fuerza es  $F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{Sen} \theta + \operatorname{Cos} \theta}$ ; donde  $\mu$  es una constante llamada coeficiente de fricción.

- ¿Cuáles son las variables?
- Encontrar la relación de cambio de  $F$  con respecto a la variable de la que depende.

**II)** El movimiento de un resorte que se somete a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como un amortiguador en un automóvil) se modela a menudo mediante el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación del movimiento de un punto sobre tal resorte es

$$s(t) = 2 e^{-1.5t} \operatorname{Sen}(2\pi t)$$

donde  $s$  se mide en centímetros y  $t$  en segundos.

- a) Hallar la velocidad después que transcurren  $t$  segundos. Expresarlo de manera conveniente.
- b) Utilizar un graficador y dibujar las funciones de posición y de velocidad para el intervalo  $0 \leq t \leq 2$
- c) Interpretar el resultado en el contexto del problema.

### DIFERENCIALES

**Actividad Nº 1:** Hallar  $\Delta y$ ;  $dy$  para los valores dados de  $x$ ;  $\Delta x = dx$  para la siguiente función:

$$y = e^x; x = 0, \Delta x = 0,5$$

Graficar la función indicando los segmentos  $\Delta y$ ;  $dy$

**Actividad Nº 2: Resolver las siguientes situaciones problemáticas:**

- I)** Se midió el radio de una esfera y se encontró que es 21 cm con un posible error en medición de cuanto mucho 0.05 cm. ¿Cuál es el error máximo al usar este valor del radio para calcular el volumen de la esfera?
- II)** Una ventana triangular de 3 m de base y 4 m de altura es modificada variando su altura en 15 cm.
  - a) Determinar mediante diferenciales la variación aproximada del área.
  - b) Calcular si hay diferencia entre el cálculo de la variación del área por diferenciales y el cálculo mediante incremento.
- III)** Se encontró que la arista de un cubo es de 30 cm, con un error posible de medición de 0.1 cm. Utilizar diferenciales para estimar el error máximo, error relativo y porcentual al calcular:
  - a) el área del cubo
  - b) la superficie lateral
- IV)** La pared lateral de un depósito cilíndrico de radio 50 cm y altura 1 m, debe revestirse con una capa de concreto de 3 cm de espesor. ¿Cuál es aproximadamente la cantidad de concreto que se requiere?

- V)** Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta de 5 a 5,06 cm. Hallar el valor aproximado del incremento del área.
- 

### ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

**Actividad Nº 1:** Aplicando la definición de derivada:

- i) Hallar la derivada de las siguientes funciones
- ii) Calcular el valor del cociente incremental en cada caso
- iii) ¿Qué interpretación geométrica se le asigna a ese resultado?
- iv) Calcular  $f'(x_0)$  para el valor dado de  $x_0$ .

a)  $f(x) = x^2 + 5x - 8$  ;  $x_0 = 1$  ;  $x_1 = x_0 + \Delta x = 1,2$

b)  $f(x) = \sqrt{x}$  ;  $x_0 = 0$  ;  $\Delta x = 0,001$

**Actividad Nº 2:** Aplicando reglas de derivación, hallar las derivadas de las siguientes funciones y expresar los resultados reducidos a su mínima expresión:

a)  $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{x}$       d)  $y = (a-x)x^{-2}$       g)  $y = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \sqrt[3]{3x}$

b)  $y = \frac{3}{2}\pi - \frac{5}{4}\pi \cos x$       e)  $y = \frac{3 \cos x + \operatorname{tg} x}{5x}$       h)  $y = \frac{e^{8x}}{(1+e^{5x})}$

c)  $y = \frac{\sqrt{x^3+3x^2}}{3x-2}$       f)  $y = \frac{(x+1)^4}{(x-2)^3}$       i)  $y = \ln(\operatorname{sen}^2 x) + \frac{2}{\operatorname{sen} x}$

**Actividad Nº 3:** Hallar la derivada de la función aplicando derivación logarítmica:

$$y = \operatorname{sen}(\ln 2x)^{4x}$$

**Actividad Nº 4:** Derivar por fórmula la función implícita:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{y} - \ln y = 8x$$

**Actividad Nº 5:** Dadas las siguientes funciones:

$$\text{i)} f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{en } a=1 \quad \text{ii)} f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } a=0$$

- a) Representarlas gráficamente.
- b) Determinar si  $f(x)$  es derivable en  $a$ .
- c) Determinar si  $f(x)$  es continua en  $a$ .

**Actividad Nº 6:** Dada la función  $y = x^2 - x + 1$  y el punto  $(2 ; 3)$

- a) Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal en el punto dado.
- b) Representar la función y las rectas halladas.

**Actividad Nº 7:** Dada  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ , hallar los puntos de su grafica donde la recta tangente tiene pendiente igual a  $-\frac{1}{9}$

**Actividad Nº 8:** En la función  $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

a) Determinar  $f'(x)$

b) Hallar  $f'(0)$ ;  $f'(\sqrt{\frac{7}{2}})$

c) Determinar la ecuación de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x_1 = 0$ ; en  $x_2 = \sqrt{\frac{7}{2}}$ ; en  $x_3 = -\sqrt{\frac{7}{2}}$

d) Dibujar dichas tangentes en el mismo gráfico que  $f(x)$ .

**Actividad Nº 9:** Dadas las funciones:  $f(x) = x^2 - 4$        $g(x) = +\sqrt{4 - x^2}$

a) ¿Para qué valor de  $x$  será  $f'(x) = 0$ ?

b) ¿Para qué valor de  $x$  será  $g'(x) = 0$ ?

**Actividad Nº 10:** Analizar detalladamente en qué punto la tangente a la parábola  $y = x^2 - 7x + 3$  es paralela a la recta  $-5x + y - 3 = 0$ . Graficar la función y las rectas mencionadas.

#### **Actividad Nº 11: PROBLEMAS FÍSICOS DE APLICACIÓN**

Un punto recorre en línea recta la distancia  $s$  según la ley  $s = \frac{1}{3} t^3 - 16t$ . Determinar su *aceleración a* en el punto en el cual su velocidad se anula.

#### DIFERENCIALES

**Actividad Nº 12:** Mediante diferenciales, hallar el valor aproximado de:

a)  $y = \cos 49^\circ$

b)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{60}}$

c)  $y = \sqrt[3]{26,5}$

#### **Actividad Nº 13: PROBLEMAS**

a) Hallar el valor aproximado del volumen de una cáscara esférica de radio externo 100mm y 1mm de espesor. Comparar con el verdadero valor. Volumen de la esfera:  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

b) Si  $\ln 10 = 2,303$ , obtener el valor aproximado de  $\ln 10,2$  por medio de diferenciales. Indicar el error cometido comparando con el valor real.

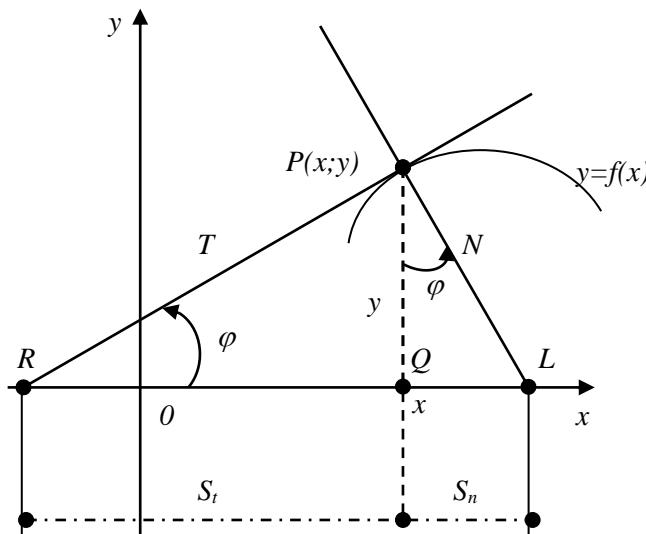
**Unidad Temática IV:**
**Aplicaciones del Cálculo Diferencial**
**Tangente. Normal. Subtangente y Subnormal**

Con las notaciones de la figura, se llama tangente  $T$  al segmento  $\overline{RP}$  de tangente comprendido entre el punto  $P(x; y)$  y el eje de abscisas, y normal  $N$ , al segmento  $\overline{PL}$  de normal, comprendido entre  $P(x; y)$  y el eje de las abscisas.

Las proyecciones de estos segmentos sobre el eje de abscisas se denominan, respectivamente, Subtangente:  $S_t$  y Subnormal:  $S_n$ :  $S_t = RQ$ ;  $S_n = QL$ .

Si  $\varphi$  es el ángulo que forma la recta tangente con el eje de las abscisas, el ángulo  $\hat{QPL}$  será igual a  $\varphi$ , por tener ambos el mismo complemento. Por ser:  $\operatorname{tg} \varphi = y'$ , resulta:

$$y' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{S_t} \Rightarrow S_t = \frac{y}{y'} \quad y' = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \hat{QPL} = \frac{S_n}{y} \Rightarrow S_n = y \cdot y'.$$



Aplicando el Teorema de Pitágoras, resulta:

$$T = \sqrt{RQ^2 + PQ^2} = \sqrt{S_t^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2} = \frac{y}{y'} \cdot \sqrt{1 + y'^2} = S_t \sqrt{1 + y'^2}$$

$$N = \sqrt{PQ^2 + QL^2} = \sqrt{S_n^2 + y^2} = \sqrt{y^2 \cdot y'^2 + y^2} = y \cdot \sqrt{1 + y'^2}.$$

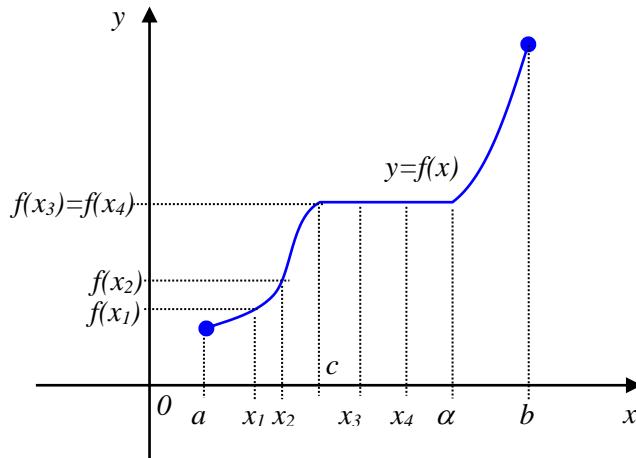
Variación de FuncionesFunciones Crecientes y DecrecientesFunciones Crecientes(a) En sentido amplio

Sea:  $y = f(x)$ , con  $Df \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$ , función creciente en sentido amplio en  $Df \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in Df :$   
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Por ejemplo: Sea:  $y = f(x)$ , donde:  $Df = (a; b)$ . Sí  $f(x)$  es creciente en sentido amplio en el  $(a; b)$ , se tendrá:  $\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ .

Luego:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$ . Vale decir que si una función es creciente en sentido amplio en un  $(a; b)$ , todo cociente incremental es positivo en sentido amplio en dicho intervalo. La recíproca es evidentemente cierta, por lo que la condición  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$  es necesaria y suficiente.

(b) En sentido estricto

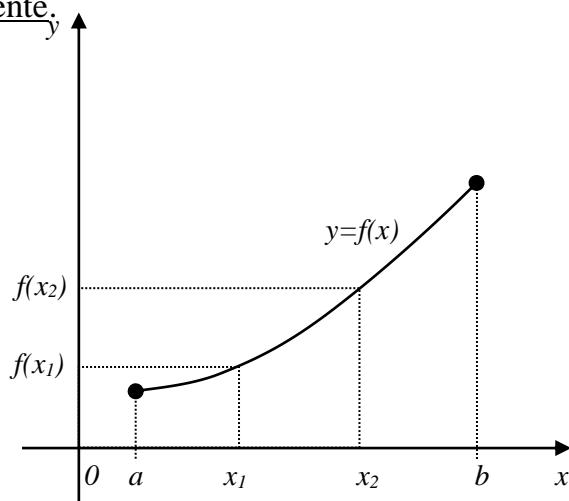
Sea la función:  $y = f(x)$ , con  $Df \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$ , función creciente en sentido estricto o estrictamente creciente en  $Df \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in Df :$   
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Ejemplo: Sea:  $y = f(x)$ , con:  $Df = (a; b)$ . Sí  $f(x)$  es estrictamente creciente en el  $(a; b)$ , se tendrá:  $\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ .

Luego:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ .

Es decir que si una función es estrictamente creciente en un  $(a; b)$ , todo cociente incremental es estrictamente positivo en dicho intervalo. La recíproca también es cierta, por lo que la condición  $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$  es necesaria y suficiente.



### Funciones Decrecientes

#### (a) En sentido amplio

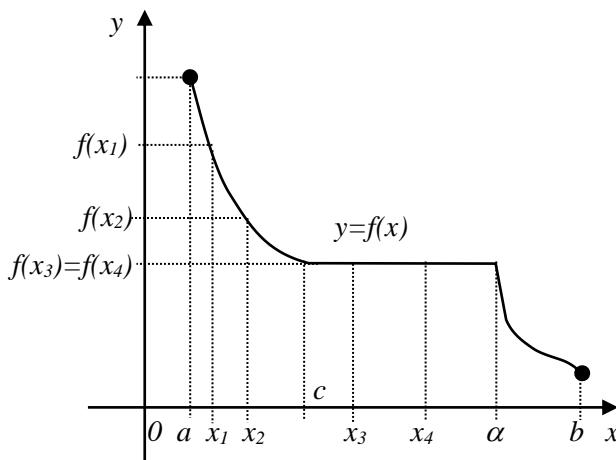
Sea:  $y = f(x)$ , con  $Df \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$ , función decreciente en sentido amplio en  $Df \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in Df :$   
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Ejemplo: Sea:  $y = f(x)$ , donde:  $Df = (a; b)$ . Si  $f(x)$  es decreciente en sentido amplio en el  $(a; b)$ , se tendrá:  $\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ .

Luego:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$ . Si una función es decreciente en sentido amplio en un  $(a; b)$ ,

todo cociente incremental es negativo en sentido amplio en dicho intervalo. La recíprocas también es cierta, por lo que la condición  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$  es necesaria y suficiente.



(b) En sentido estricto

Sea la función:  $y = f(x)$ , con  $Df \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$ , función decreciente en sentido estricto o estrictamente decreciente en  $Df$   $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in Df :$   
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

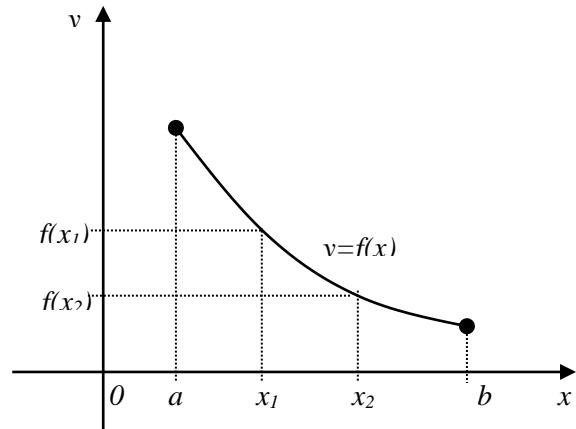
Ejemplo: Sea:  $y = f(x)$ , donde:  $Df = (a; b)$ . Si  $f(x)$  es estrictamente decreciente en el  $(a; b)$ , se tendrá:

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \quad \begin{matrix} x_1 - x_2 > 0 \\ \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \end{matrix}$$

Luego:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0. \quad x_2 - x_1 > 0$

Es decir que si una función es estrictamente decreciente en un  $(a; b)$ , todo cociente incremental es estrictamente negativo en dicho intervalo. La recíproca también es cierta, por lo que la condición  $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$  es necesaria y suficiente.

Si la función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en  $Df$ , se dirá que se trata de una función “**estrictamente monótona**”.



Funciones Crecientes y Decrecientes en un punto

(a) Función Creciente en un punto

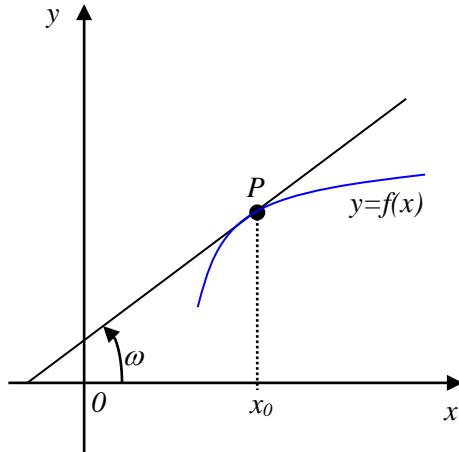
Sea el punto  $x_0 \in Df$ . Se dice que la función es creciente en  $x_0$ , si existe un número real estrictamente positivo  $\delta$  /  $\forall x$  que cumpla la condición:  $0 < \Delta x < \delta$  se verifique que:

$$f(x_0 - \Delta x) < f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$$

En símbolos:  $f(x)$  es creciente en  $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 / \forall \Delta x : 0 < \Delta x < \delta \Rightarrow f(x_0 - \Delta x) < f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$

O sea, cuando la función es estrictamente creciente en el  $E_{(x_0; \delta)} = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ .

Resulta evidente que una función estrictamente creciente en un intervalo abierto es creciente en cada uno de sus puntos y viceversa.

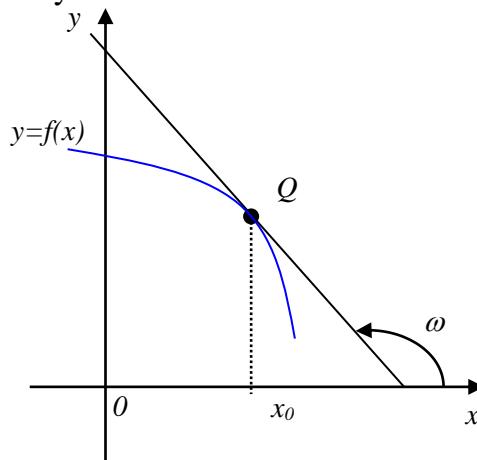


(b) Función decreciente en un punto

$f(x)$ , función decreciente en  $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 / \Delta x : 0 < \Delta x < \delta \Rightarrow f(x_0 - \Delta x) > f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$ .

O sea, cuando la función es estrictamente decreciente en el  $E_{(x_0; \delta)} = (x_0 - \delta ; x_0 + \delta)$ .

Resulta evidente que una función estrictamente decreciente en un intervalo abierto es decreciente en cada uno de sus puntos y viceversa.



Signo de la derivada primera

Hemos definido anteriormente las funciones crecientes y decrecientes. Aplicemos, ahora, el concepto de derivada al estudio del crecimiento y decrecimiento de funciones.

Teorema: si una función  $f(x)$  derivable en el  $(a; b)$ , es creciente en este intervalo, su derivada en él es no negativa; es decir:  $f'(x) \geq 0$ .

Demostración: supongamos que  $f(x)$  crece en el  $(a; b)$ , damos un incremento  $\Delta x$  a la variable independiente  $x$ , y formamos el cociente incremental:  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ . De acuerdo a lo visto, como  $f(x)$  es una función creciente:

para:  $\Delta x > 0 : f(x + \Delta x) \geq f(x)$ ; y para:  $\Delta x < 0 : f(x + \Delta x) \leq f(x)$ .

En ambos casos:  $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$ ; tomando límite para  $\Delta x \rightarrow 0$ , tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0; \text{ es decir: } f'(x) \geq 0.$$

Teorema: si una función  $f(x)$  es continua en el  $[a;b]$ , y derivable en el  $(a;b)$ , entonces sí  $f'(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in (a;b)$ ,  $f(x)$  es una función creciente en el  $(a;b)$ .

Demostración: sean  $x_1$  y  $x_2$  dos puntos cualquiera del intervalo, tales que:  $x_1 < x_2$ , y supongamos:  $f'(x) \geq 0$ . Entonces, a probar:  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Para ello consideramos un intervalo cerrado:  $x_1 \leq x \leq x_2$ ; puesto que  $f(x)$  es derivable, debe ser continua, y entonces por el Teorema de Weierstrass debe tener un valor máximo en este intervalo cerrado. Además, por ser  $f'(x) > 0$  no puede ocurrir este máximo en ningún punto interior.

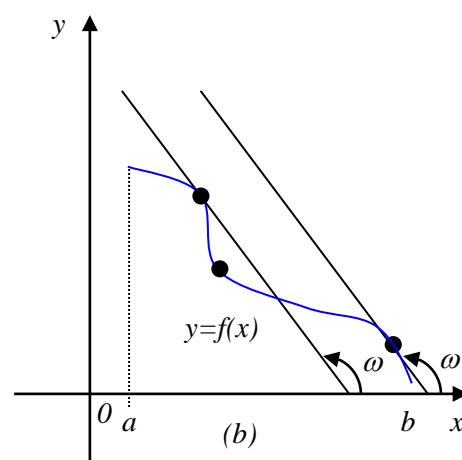
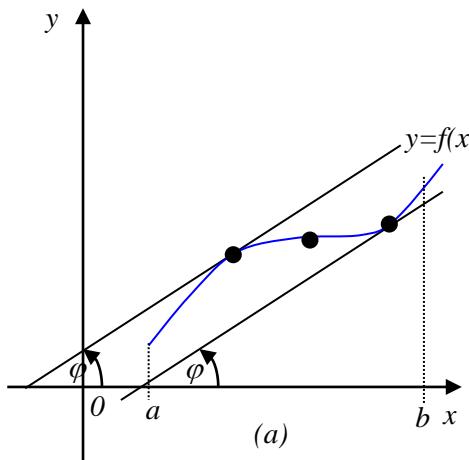
Supongamos que el máximo está en  $x_1$ , entonces  $\forall x$  interior al intervalo:  $\forall x \in (x_1; x_2)$ :

$x > x_1 \Rightarrow x - x_1 > 0$  y  $f(x) \leq f(x_1)$  por ser  $x_1$  máximo, definición de máximo, ya se dió en unidad anterior.  $f(x) - f(x_1) \leq 0$

Así:  $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0$ , lo cual implica que  $f'(x) \leq 0$ . Pero, por hipótesis  $f'(x) \geq 0$ . Esta contradicción muestra que el máximo debe ocurrir en  $x_2$ ; es decir:  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Con respecto a las funciones decrecientes, siempre que sean derivables, existe un Teorema análogo que dice:

- (a) Si la función  $f(x)$  decrece en el  $(a;b) \Rightarrow f'(x) \leq 0$  en él.
- (b) Si  $f'(x) \leq 0$  en el  $(a;b)$ , la función  $f(x)$  es decreciente en el  $(a;b)$ .



### Los Teoremas vistos tienen la siguiente interpretación geométrica

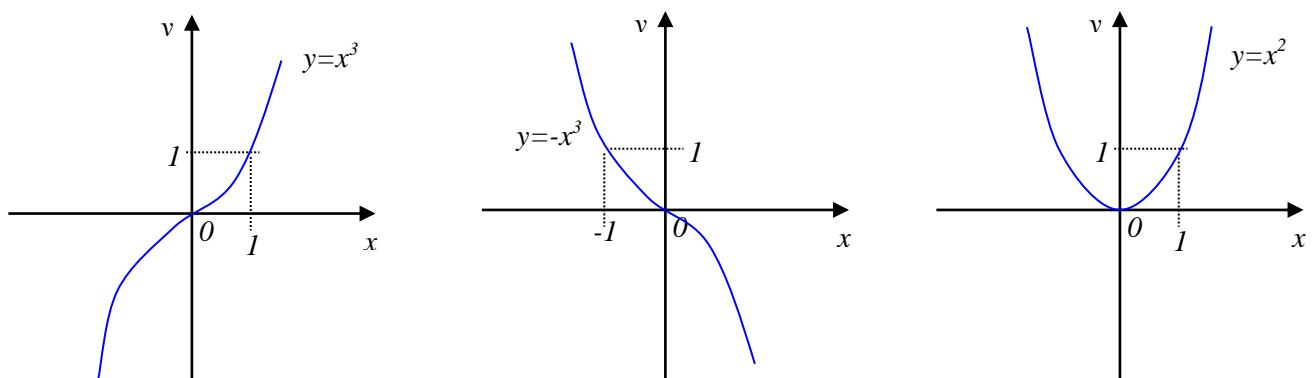
Si la función  $f(x)$  es creciente en el  $(a; b)$ , la tangente a la curva  $y = f(x)$ , forma con el semieje positivo de las  $x$  un ángulo agudo (en algunos casos puede ser paralelo a este eje). La tangente de este ángulo es positiva:  $\operatorname{tg} \varphi = f'(x) \geq 0$ . Figura (a).

Si la función decrece en el  $(a; b)$ , el ángulo de inclinación de la tangente será obtuso (en algunos puntos la tangente puede ser paralela al eje  $x$ ).

La tangente de este ángulo será negativa:  $\operatorname{tg} \omega = f'(x) \leq 0$ . Figura (b).

Es decir, de acuerdo a lo visto, los **Teoremas** permiten juzgar sobre el crecimiento o decrecimiento de la función considerada, por el signo de su derivada primera.

Ejemplo: determinar los dominios de crecimiento y decrecimiento de las funciones:  $f(x) = x^3$ ;  $g(x) = -x^3$ ;  $h(x) = x^2$



$$f'(x) = 3x^2; \quad g'(x) = -3x^2; \quad h'(x) = 2x. \text{ Obsérvese que:}$$

- (a)  $f(x)$  es creciente  $\forall x \geq 0$ , puesto que  $f'(x) \geq 0$ , y además creciente en el origen.
- (b)  $g(x)$  es decreciente  $\forall x \geq 0$ , puesto que  $g'(x) \leq 0$ , y además decreciente en el origen.
- (c)  $h(x)$  es creciente para  $x > 0$ , puesto que  $h'(x) > 0$ , y decrece para  $x < 0$ , pues  $h'(x) < 0$ , y en el origen  $x = 0$ , donde  $h'(x) = 0$ , no creciente ni decreciente.

Por lo tanto, si  $f'(x) = 0$  (tangente horizontal) no puede afirmarse nada con respecto al comportamiento de  $f(x)$  en  $x$ .

### Máximos y Mínimos Absolutos o Globales

Sea:  $f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A \subseteq \mathbb{R}$ , y sea:  $x_0 \in A$ .

- (a) Se dice que la función  $f(x)$  tiene en  $x_0$  un máximo absoluto, sí  $f(x) \leq f(x_0)$ ;  $\forall x \in A$ . Cuando el máximo absoluto es alcanzado en un solo punto, o sea,  $f(x) < f(x_0)$ ;  $\forall x \in A$ , se dirá que el máximo absoluto es estricto.

(b) Se dice que la función  $f(x)$  tiene en  $x_0$  un mínimo absoluto, si  $f(x) \geq f(x_0)$ ;  $\forall x \in A$ . Cuando el mínimo absoluto es alcanzado en un solo punto, o sea,  $f(x) > f(x_0)$ ;  $\forall x \in A$ , se dirá que el mínimo absoluto es estricto.

### Máximos y Mínimos Relativos o Locales

Sea:  $f(x): A \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A \subseteq \mathbb{R}$ , y sea:  $x_0 \in A$ .

(a) Se dice que la función  $f(x)$  tiene en  $x_0$  un máximo relativo, si  $f(x) \leq f(x_0)$   $\forall x$  suficientemente próximo a  $x_0$ , es decir si se puede determinar un número real estrictamente positivo  $\delta: (\delta > 0) / f(x) \leq f(x_0)$ ,  $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ . Sí  $f(x) < f(x_0)$ ,  $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ , con  $x \neq x_0$ , se dirá que el máximo relativo  $f(x_0)$  es estricto.

Resulta claro que  $f(x_0)$  es el máximo absoluto en el intervalo  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ .

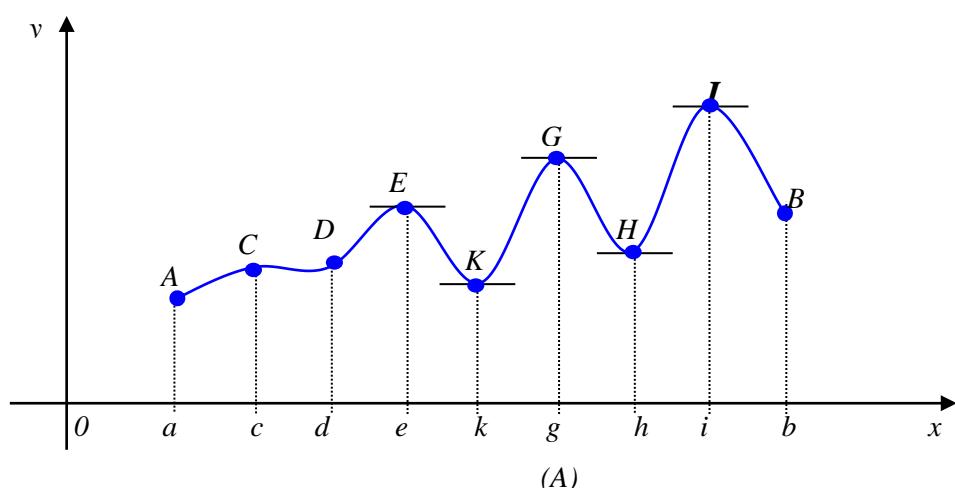
(b) Se dice que la función  $f(x)$  tiene en  $x_0$  un mínimo relativo, si  $f(x) \geq f(x_0)$   $\forall x$  suficientemente próximo a  $x_0$ , es decir si se puede determinar un número real estrictamente positivo  $\delta: (\delta > 0) / f(x) \geq f(x_0)$ ,  $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ .

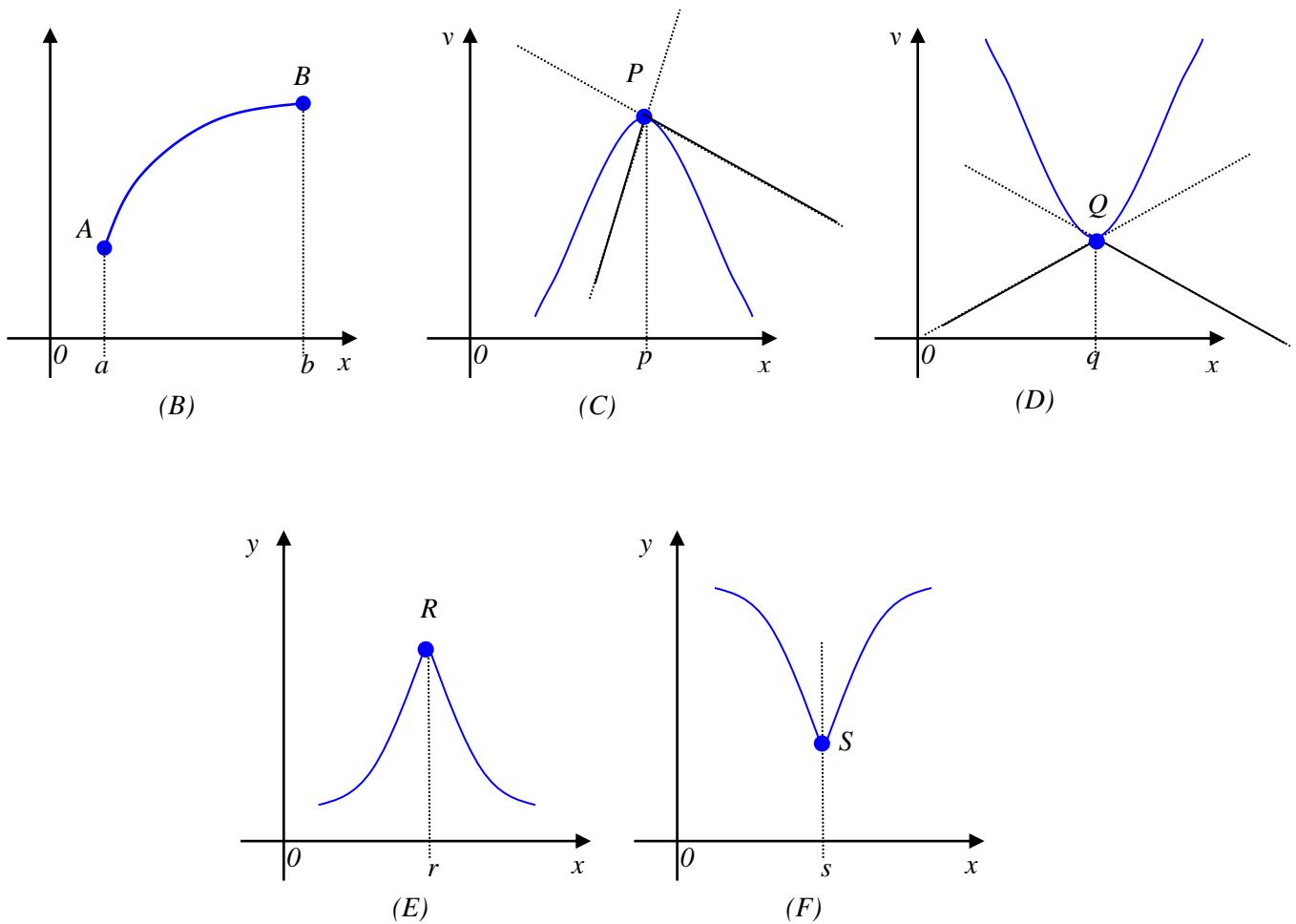
Ahora bien, si:  $f(x) > f(x_0)$ ,  $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ , con  $x \neq x_0$ , diremos que el mínimo relativo es estricto.

Aquí también resulta claro que  $f(x_0)$  es un mínimo absoluto de  $f(x)$  en el intervalo  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ .

Digamos que los máximos y mínimos relativos se denominan "Extremos Relativos" de la función.

Ejemplos: sean los siguientes gráficos. Observarlos y sacar conclusiones.



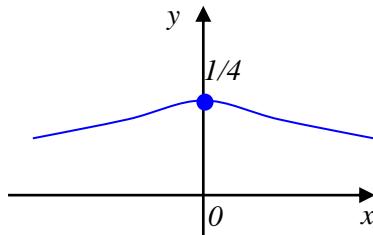


- (a) **GRAFICO (A)**: la función  $f(x)$  tiene en  $k$  y en  $h$  mínimos relativos estrictos. En  $c$  un máximo relativo amplio. En  $d$  un mínimo relativo amplio. En los puntos del intervalo  $(c; d)$  tienen máximos y mínimos relativos amplios simultáneamente. En  $a$  un mínimo absoluto y en  $i$  un máximo absoluto, ambos en el intervalo cerrado  $[a; b]$ .
- (b) **GRAFICO (B)**: la función  $f(x)$  no presenta máximos ni mínimos relativos en el intervalo cerrado  $[a; b]$ .
- (c) **GRAFICO (C)**: la función  $f(x)$  presenta en  $p$  un máximo relativo estricto.
- (d) **GRAFICO (D)**: la función tiene un mínimo relativo estricto en  $q$ .
- (e) **GRAFICOS (E) y (F)**: en cada gráfica la función  $f(x)$  presenta un máximo y un mínimo relativo estricto en  $r$  y  $s$ , respectivamente. En particular en estos extremos se puede observar a lo que denominamos “punto anguloso”.

De la observación de las figuras (A) y (B) se infiere que una función puede tener (uno o varios) o no extremos relativos en un intervalo. De la figura (A) se desprende asimismo que, un mínimo relativo puede ser mayor que un máximo relativo. También que un extremo relativo no es necesariamente absoluto, y si la función es continua, los máximos y mínimos relativos se presentan alternadamente.

Para encontrar los extremos relativos de una función se puede recurrir a su definición, esto es, investigando los valores que alcanza la función en distintos puntos del dominio. En algunos casos puede resultar sencillo utilizar ese método, como sucede en este ejemplo:

Sea la función:  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ ; para  $x = 0$ , es:  $f(0) = \frac{1}{4}$ ;  $\forall x \neq 0$ , es  $f(x) < \frac{1}{4}$

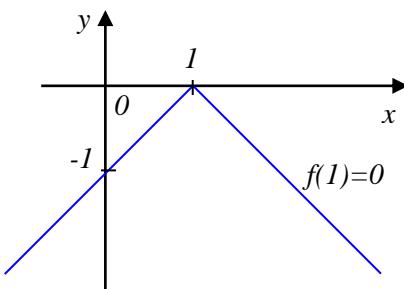


Luego:  $f(0) = \frac{1}{4}$  es un máximo relativo de  $f(x)$ , que en este caso en particular, es también máximo absoluto de  $f(x)$  en  $\mathbb{R}$ .

Obsérvese que  $f(0) = \frac{1}{4}$  es un máximo absoluto en cualquier subconjunto del dominio al cual pertenece el origen. Sin embargo, en la mayoría de las funciones, no es sencillo localizar extremos por comparación de valores.

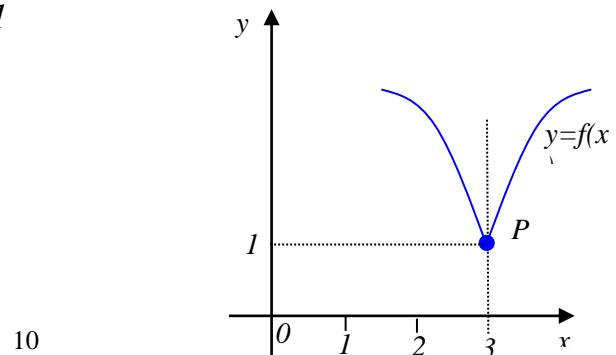
Además, vemos que la derivada de una función se anula en el origen, es decir:  $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 4)^2} \wedge f'(0) = 0$ . Esta circunstancia parece sugerir la idea de que la función alcanza valores extremos en aquellos puntos donde la derivada primera se anula, o sea en aquellos puntos donde el gráfico admite tangente horizontal.

Esta idea no es correcta pues una función puede alcanzar máximo o mínimo local en puntos donde no hay tangente, es decir, en puntos donde la función no es derivable, como sucede con los puntos  $R$  y  $S$  de los gráficos (E) y (F) vistos anteriormente, o bien como sucede en la función:  $f(x) = -|x - 1|$ , cuyo gráfico es:



$f(1)$  es máximo relativo y absoluto de la función, y además, como podemos ver  $\not\exists f'(1)$ .

Consideremos la función:  $f(x) = (x - 3)^{2/3} + 1$



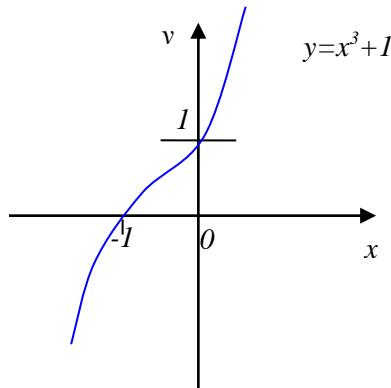
$f(3)$  es un mínimo relativo, y en el punto  $P[3; f(3)]$  el gráfico tiene tangente vertical (semi tangente).

Por lo tanto, en este caso, igual que en el ejemplo anterior, la función alcanza un extremo relativo en un punto donde no tiene derivada finita.

También puede suceder que el gráfico tenga tangente horizontal en un punto del mismo y el valor correspondiente de la función no sea máximo ni mínimo relativo, como sucede en la función:

$$f(x) = x^3 + 1; \quad f'(x) = 3x^2; \quad \text{luego: } f'(0) = 0.$$

En el punto  $(0; 1)$  el gráfico tiene tangente horizontal, y sin embargo no hay extremo. De acuerdo a lo ya visto esta función es constantemente creciente en todo el dominio.



Por lo tanto, de todo lo visto podemos concluir que la condición de tener derivada nula en un punto no asegura la existencia de extremo relativo para una función. (Condición necesaria pero no suficiente para la existencia de extremos relativos).

Pero si una función derivable tiene un extremo en un punto interior a su dominio, entonces dicha derivada es nula.

Es decir, la anulación de la derivada es condición necesaria para la existencia de máximo o mínimo, si la función es derivable y el punto correspondiente es interior al dominio de la misma. Esta condición la probaremos mediante el siguiente:

Teorema: si una función derivable tiene un máximo o un mínimo relativo en un punto  $x_0$  interior a su dominio, su derivada primera se anula en este punto, es decir:  $f'(x_0) = 0$ .

Como por hipótesis existe el número real  $f'(x_0)$ , caben generalmente tres posibilidades:  $f'(x_0) \geq 0$

(a) si  $f'(x_0) > 0$  de acuerdo a lo visto, la función  $f(x)$  será creciente.

(b) si  $f'(x_0) < 0$  de acuerdo a lo visto, la función  $f(x)$  será decreciente.

Por ende, debe ser  $f'(x_0) = 0$ , lo que significa geométricamente que la tangente a la curva en el punto considerado es horizontal. Lo recíproco no es cierto como ya lo hemos visto en el caso de la función  $f(x) = x^3 + 1$ , es decir, que la existencia de una tangente horizontal no implica la existencia de un extremo.

Digamos que los valores de  $x$  para los valores  $f'(x_0) = 0$  reciben el nombre de “Valores Críticos Ordinarios”, y los puntos correspondientes del gráfico “Puntos Críticos Ordinarios”.

Por último, como el problema de localizar extremos es de singular importancia, desarrollaremos criterios que permiten asegurar la existencia de los mismos.

### Puntos Críticos de una función

Si bien durante el desarrollo de este tema hemos hablado de puntos críticos, es conveniente dejar perfectamente aclarado que son puntos críticos. Como se ha visto en el ejemplo anterior, al buscar los extremos absolutos de una función continua en el intervalo  $[a; b]$ , debe considerarse especialmente los valores que alcanza la función en los extremos del intervalo.

Además, si la función que se investiga no es derivable en algún punto, hay que tener en cuenta el valor de la función en dicho punto. La función  $f(x) = |x|$ , por ejemplo, no es derivable en el origen, no obstante, alcanza en el mismo un mínimo relativo y absoluto.

Por ello, al buscar los extremos absolutos de una función, es importante considerar especialmente los puntos de los distintos tipos mencionados, que son puntos clave en la investigación que se efectúa.

A estos puntos los llamamos Puntos Críticos de la función, sobre los cuales daremos la siguiente:

#### Definición:

Si  $f(x)$  es una función continua definida sobre un intervalo (abierto o cerrado), el punto  $x_0$  es un punto crítico de  $f(x)$  en dicho intervalo, si se cumple una de las siguientes condiciones:

- (1)  $x_0$  es interior al intervalo y  $f'(x)$  existe y es nula en  $x_0$ . ( $f'(x_0) = 0$ ).
- (2)  $x_0$  es interior al intervalo y  $f(x)$  no es derivable en  $x_0$ . (No hay derivada finita).
- (3)  $x_0$  es uno de los extremos del intervalo.

### Determinación de Extremos Relativos

Sea la función  $y = f(x)$  continua en un cierto intervalo, al cual pertenece un valor crítico  $x_0$ , y derivable en todos los puntos del mismo (a excepción, quizás del mismo  $x_0$ ).

Calculemos su primera derivada  $f'(x)$ , obtenemos la ecuación  $f'(x_0) = 0$ , limitándonos a considerar las raíces reales de la misma. Estas raíces serán los valores críticos ordinarios.

Supongamos que  $x_0$  es uno de ellos. A partir de aquí la determinación de los extremos podamos efectuarlos mediante los siguientes criterios.

### Criterios para determinar extremos relativos

Ya hemos visto que no basta la anulación de la derivada primera de una función en un punto interior a un conjunto, para asegurar la existencia en dicho punto de un extremo relativo:  $f'(x_0) = 0$ , condición necesaria pero no suficiente para la existencia de un extremo relativo.

### Estudio de los valores de la función (Variación de la función)

Si  $x_0$  es un punto interior al Dominio de una función  $f(x)$  derivable y  $f'(x_0) = 0$ , para saber si  $f(x_0)$  es un máximo relativo pueden considerarse los valores de  $f(x)$  en un  $E_{(x_0)}$  y ver si satisface la definición.

Es decir, si es posible determinar un  $E_{(x_0)}$  /  $\forall x \in E_{(x_0)} : f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x_0)$  máximo relativo.

La misma idea se utiliza para verificar la existencia de mínimo relativo.

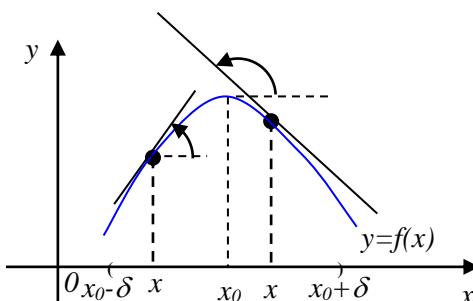
Observación: En general, este Criterio presenta dificultades de cálculo, pues exige considerar los valores de una función en los infinitos puntos de un entorno y puede llevar a conclusiones falsas si se consideran solo algunos valores de la función en puntos aislados del entorno.

### Variación del signo de la derivada primera

Si  $f(x)$  es una función derivable,  $x_0$  punto interior a su dominio donde  $f'(x)$  se anula:  $f'(x_0) = 0$ , y existe  $E_{(x_0)}$ :

$$\exists \underbrace{E_{(x_0; \delta)}}_{E(x_0)} / \forall x: \left( \underbrace{x \in (x_0 - \delta; x_0)}_{x \in E(x_0^-)} \Rightarrow f'(x) > 0 \right) \wedge \left( \underbrace{x \in (x_0; x_0 + \delta)}_{x \in E(x_0^+)} \Rightarrow f'(x) < 0 \right) \Rightarrow f(x_0)$$

máximo relativo.



Demostración: sabemos que:  $f'(x) > 0$  en  $E_{(x_0^-)} \Rightarrow f(x)$  es creciente en  $E_{(x_0^-)}$  (1)  $\wedge$

$f'(x) < 0$  en  $E_{(x_0^+)} \Rightarrow f(x)$  es decreciente en  $E_{(x_0^+)}$  (2)

Luego, por (1):  $\forall x \in E_{(x_0^-)} : f(x) < f(x_0)$   $\wedge$  por (2):  $\forall x \in E_{(x_0^+)} : f(x_0) > f(x)$   
 $\therefore \forall x \in E_{(x_0)} : f(x) < f(x_0)$ , y de acuerdo con la definición:  $f(x_0)$  es máximo relativo.

En forma análoga se demuestra el criterio para determinar un mínimo relativo.

Si  $f(x)$  es una función derivable,  $x_0$  es un punto interior a su dominio donde  $f'(x_0) = 0$ :

$$\exists E_{(x_0)} / \forall x : \left( x \in E_{(x_0^-)} \Rightarrow f'(x) < 0 \right) \wedge \left( x \in E_{(x_0^+)} \Rightarrow f'(x) > 0 \right) \Rightarrow f(x_0) \quad \text{mínimo}$$

relativo de la función.

Es decir,  $f(x_0)$  es mínimo relativo si la derivada primera pasa de negativa a positiva cuando  $x$  pasa de izquierda a derecha del punto  $x_0$ .

### Signo de la derivada segunda

Si  $f(x)$  es una función derivable,  $x_0$  punto interior a su dominio donde  $f'(x_0) = 0$  y existe  $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$  es un máximo relativo de  $f(x)$ .

Obsérvese que este criterio difiere fundamentalmente de los anteriores pues solamente debe investigarse el signo de la derivada segunda en un punto y no exige su consideración en un entorno.

Demostración: sea:  $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$

por una propiedad de límite finito:  $\exists E'(x_0) / \forall x \in E'(x_0) : \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$ ; como:

$f'(x_0) = 0$ , es:  $\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$ ; para que este cociente sea negativo, numerador y denominador deben tener signos opuestos; o sea:

a izquierda de  $x_0$ :  $x - x_0 < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \wedge$

a derecha de  $x_0$ :  $x - x_0 > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

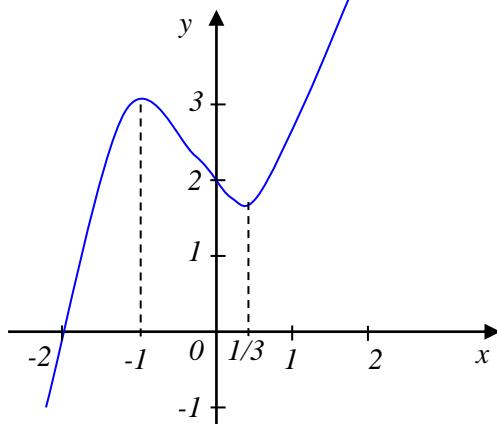
Luego, por el criterio de la derivada primera,  $f(x_0)$  es máximo relativo.

En las mismas condiciones puede probarse que si  $f''(x_0) > 0$ ;  $f(x_0)$  es mínimo relativo.

Ejemplo: hallar extremos relativos de  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ , utilizando el criterio de la segunda derivada.

Calculamos  $f'(x)$ :  $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ ;  $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1/3 \end{cases}$

Buscamos  $f''(x)$ :  $f''(x) = 6x + 2$

$$\begin{cases} f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow P_1(-1; 3) \text{ máximo relativo} \\ f''\left(\frac{1}{3}\right) = 4 > 0 \Rightarrow P_2\left(\frac{1}{3}; \frac{49}{27}\right) \text{ mínimo relativo} \end{cases}$$


### Concavidad de una curva

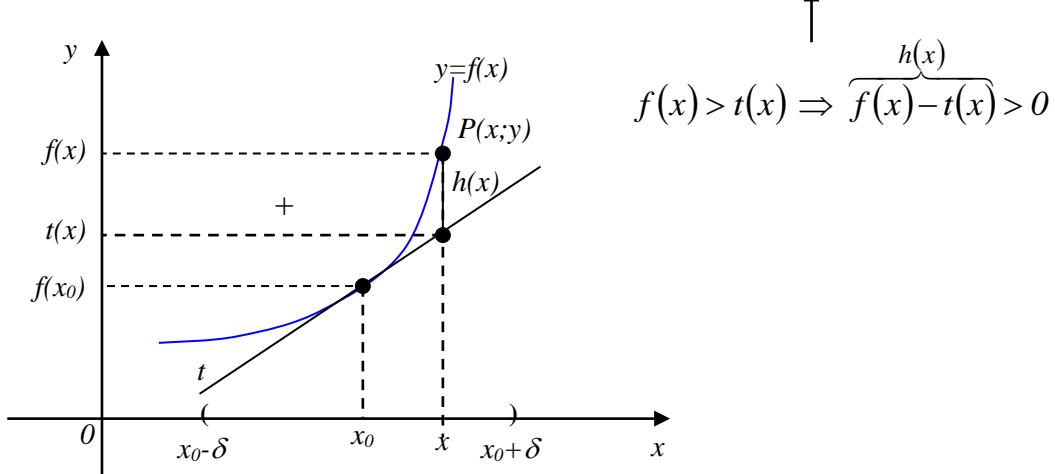
La curva correspondiente a una función derivable  $y = f(x)$  es “Cóncava hacia arriba” en el punto  $[x_0; f(x_0)]$ , si y solo sí existe un  $E'(x_0)$  donde la curva está por encima de la recta tangente a la misma en dicho punto. (La concavidad de la curva está dirigida hacia el sentido positivo del eje de las ordenadas).

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto  $[x_0; f(x_0)]$ , es:

$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ . (Ecuación, recta que pasa por el  $P(x_1; y_1)$ :  $y - y_1 = m(x - x_1)$ ).

$$\therefore t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Consideremos, ahora la función auxiliar:  $h(x) = f(x) - t(x) > 0$



Reemplazando  $t(x)$  en  $h(x)$ :  $h(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)]$ .

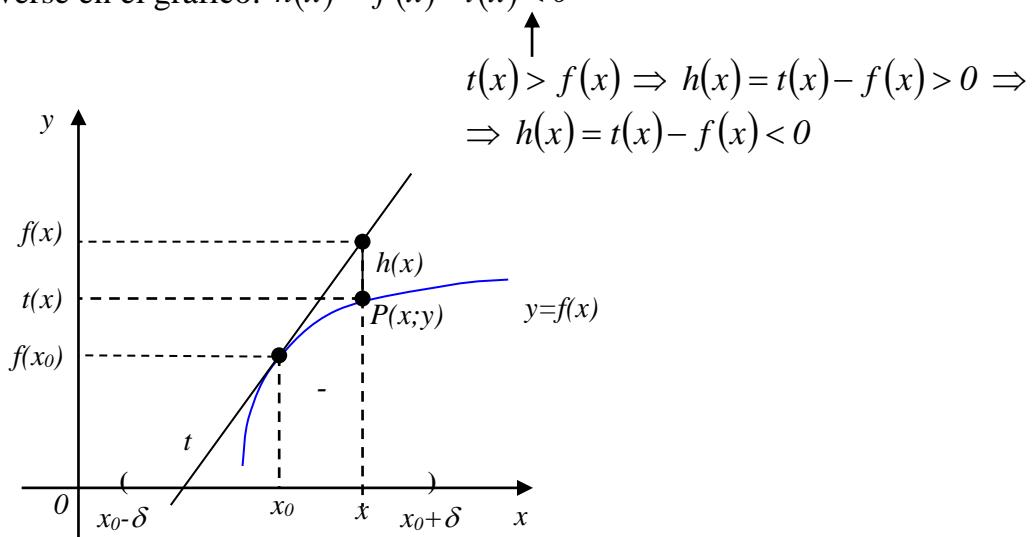
Obsérvese que el valor  $h(x)$  es la diferencia entre la ordenada de la curva y la ordenada de la recta tangente  $t$ , para un punto cualquiera del dominio de  $f(x)$ .

Por otra parte si  $h(x)$  es positivo significa que la ordenada de la curva es mayor que la ordenada de la recta tangente, y entonces la curva en cada punto  $x$  del entorno está por encima de la recta tangente, lo que implica que la curva es cóncava hacia arriba o tiene concavidad positiva en el punto  $[x_0; f(x_0)]$ .

Se cumple también la implicación recíproca.

En forma análoga, podemos decir que la curva correspondiente a una función derivable  $y = f(x)$  es "Cóncava hacia abajo" en el punto  $[x_0; f(x_0)]$  sí y solo sí existe un  $E'(x_0)$  donde la curva está por debajo de la recta tangente a la misma en dicho punto. En este caso la concavidad de la curva está dirigida hacia el sentido negativo del eje  $y$ .

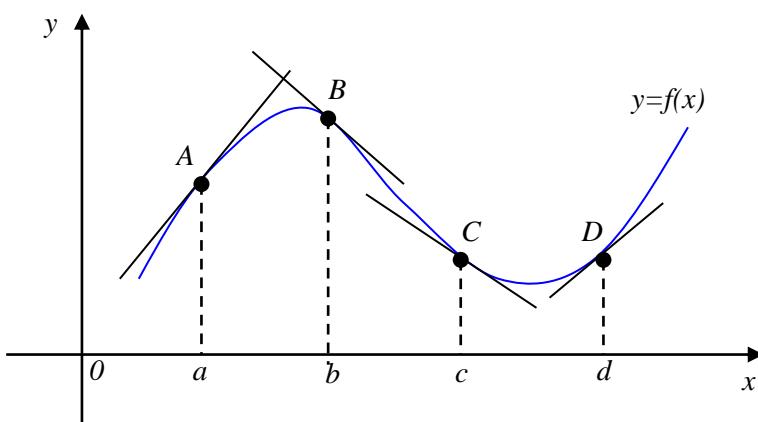
Como puede verse en el gráfico:  $h(x) = f(x) - t(x) < 0$



Es decir  $h(x)$  es negativa, puesto que la ordenada de la curva es menor que la ordenada de la recta tangente, y la curva en cada punto  $x$  del entorno está por debajo de la recta tangente, lo que implica que la curva es cóncava hacia abajo o tiene concavidad negativa en el punto  $[x_0; f(x_0)]$ .

Aquí también se cumple la implicación recíproca.

### La Concavidad y el signo de la derivada segunda



Consideramos la curva que se muestra en la figura. En un entorno de los puntos como A o B, la curva está por debajo de su tangente, y al ir de A a B, la tangente gira en el sentido de las

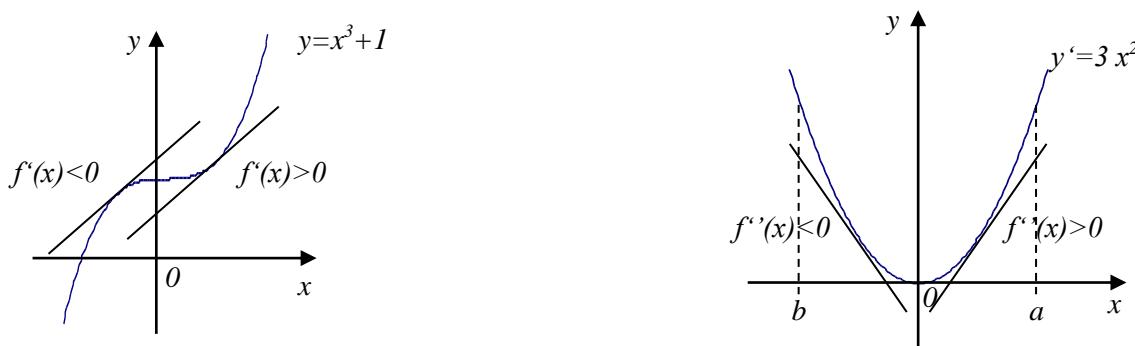
agujas del reloj. Análogamente, en un entorno de  $C$  o  $D$ , la curva está arriba de su tangente, y al ir de  $C$  a  $D$  la tangente gira en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Además, si la tangente gira en el sentido de las agujas del reloj, la pendiente disminuye cuando vamos hacia la derecha; si la tangente gira en sentido contrario, la pendiente de la tangente aumenta.

Ahora bien, puesto que la pendiente de la tangente en cualquier punto  $P(x; y)$  de la curva está dada por  $f'(x)$ , parecería que el signo de  $f''(x)$ , siempre que exista, nos permitiría analizar la conducta de la curva en los puntos tales como  $A, B, C$  y  $D$ .

Antes de demostrar lo anterior, trataremos de sacar algunas conclusiones de utilidad a partir del análisis de los gráficos de una función  $f(x)$  y de su función derivada.

Sea la función:  $f(x) = x^3 + 1$ , cuya derivada es:  $f'(x) = 3x^2$ .



De la observación que se efectúa podemos concluir que:

- (1).—  $f''(x) > 0$  en el intervalo  $(0; b)$  lo que implica que la pendiente  $f'(x)$  de la tangente es una función creciente y por lo tanto la tangente de la gráfica gira en sentido contrario al de las agujas del reloj, quedando la gráfica por arriba de la misma, cuando  $x$  aumenta.
- (2).—  $f''(x) < 0$  en el intervalo  $(a; 0)$  lo que implica que la pendiente  $f'(x)$  de la tangente es una función decreciente y por lo tanto la tangente de la gráfica gira en el sentido de las agujas del reloj, quedando la gráfica debajo de la misma, cuando  $x$  aumenta.

Estas conclusiones puramente sugeridas desde un punto de vista geométrico, se demuestran a partir del siguiente:

**Teorema:** sea  $y = f(x)$  una función derivable dos veces en el intervalo  $(a; b)$ . Sea además  $x_0$  un punto de este intervalo, y sea  $t$  la función lineal ya vista, definida por la ecuación:  $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ . Entonces:

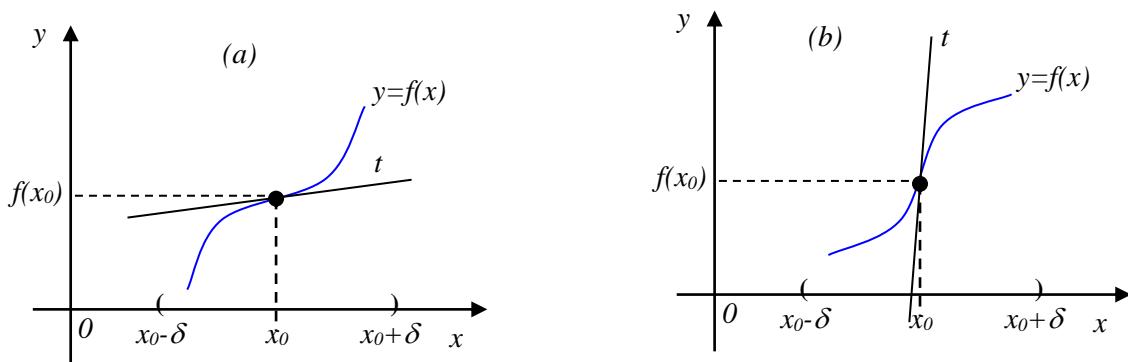
- (a) si  $f''(x) > 0$  en el intervalo  $(a; b)$ , entonces para cada  $x_0$  hay un entorno reducido  $E'(x_0; \delta)$  tal que  $\forall x \in E'(x_0; \delta) \Rightarrow f(x) > t(x)$ . Geométricamente, esta desigualdad implica que la curva dada por  $y = f(x)$  queda arriba de su tangente en un  $E'(x_0; \delta)$ .

(b) si  $f''(x) < 0$  en el intervalo  $(a; b)$ , entonces para cada  $x_0$  hay un entorno reducido  $E'(x_0; \delta)$  tal que  $\forall x \in E'(x_0; \delta) \Rightarrow f(x) < t(x)$ .

Geométricamente, esta desigualdad implica que la curva dada por  $y = f(x)$  queda por debajo de su tangente en un  $E'(x_0; \delta)$ .

### Punto de Inflexión:

El punto  $[x_0; f(x_0)]$  del gráfico de una función derivable  $y = f(x)$  es un punto de inflexión sí y solo sí, en el mismo, la curva cambia el sentido de su concavidad.



Si por ejemplo existe un  $E_{(x_0; \delta)}$  tal que el gráfico de  $f(x)$  es cóncavo hacia abajo en  $(x_0 - \delta; x_0)$  (fig(a)) y cóncavo hacia arriba en  $(x_0; x_0 + \delta)$ , entonces el punto  $[x_0; f(x_0)]$  es de inflexión.

De acuerdo con la definición de concavidad en ambos semientornos, la tangente del gráfico atraviesa al mismo en dicho punto.

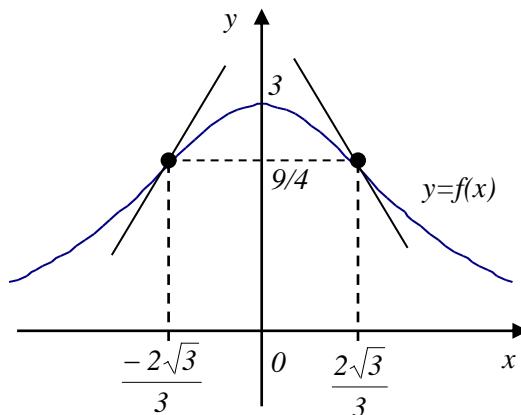
Según propiedades vistas, si  $f''(x_0) = 0$ , y existe un  $E_{(x_0)}$  /  $f''(x) > 0$  en  $(x_0 - \delta; x_0)$ , y  $f''(x) < 0$  en  $(x_0; x_0 + \delta)$ , o recíprocamente, el punto considerado es de inflexión.

Ejemplo: hallar, si existen, puntos de inflexión en el gráfico de:  $f(x) = \frac{12}{x^2 + 4}$ .

$f'(x) = \frac{-24x}{(x^2 + 4)^2}$ ;  $f''(x) = \frac{24(3x^2 - 4)}{(x^2 + 4)^3}$ . Luego, si:  $f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3}$ ; es decir que la

derivada segunda se anula en los puntos:  $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;  $x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;

Luego, los puntos  $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ ;  $Q\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}; f\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)\right)$  pueden ser puntos de inflexión.



Para verificarlo estudiemos la concavidad del gráfico en algún entorno de cada una de ellos.

$$\begin{aligned} (1) E(x_I-\delta; x_I) &= \left(0 < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow f''(x) < 0 \\ (2) E(x_I; x_I+\delta) &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < 5\right) \Rightarrow f''(x) > 0 \end{aligned} \quad \therefore \text{de acuerdo a lo visto, el punto } P \text{ es punto de inflexión.}$$

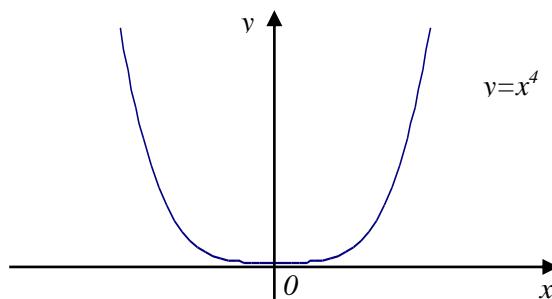
En forma análoga se demuestra que el punto  $Q$  es otro punto de inflexión.

Es importante tener en cuenta que la condición de ser nula la segunda derivada es necesaria pero no suficiente para la existencia de un punto de inflexión.

Ejemplo: Sea:  $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$ ;  $f''(x) = 12x^2$ ;  $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ , por lo tanto la derivada segunda se anula en el origen, pero allí no hay inflexión.

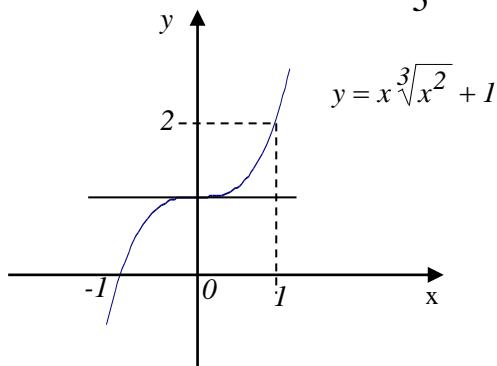
Puede probarse que la función tiene en  $x = 0$  un mínimo relativo y absoluto.



También es importante observar que puede haber inflexión en un punto donde  $\nexists f''(x)$ .

Ejemplo:

$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2} + 1 = x \cdot x^{2/3} + 1 = x^{5/3} + 1 \quad f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}; \quad f''(x) = \frac{10}{9}\sqrt[3]{x}; \quad \forall x \neq 0.$$



Luego, la derivada segunda no existe en el origen, es decir para  $x = 0$ ; pero, es positiva a la derecha del mismo y negativa a la izquierda. Además, como  $f(x)$  es derivable en el origen, existe recta tangente, y la curva es cóncava hacia arriba a derecha del origen y cóncava hacia abajo a la izquierda. Por lo tanto, el punto  $(0;1)$  es un punto de inflexión.

En conclusión, para encontrar los puntos de inflexión de un gráfico, interesa considerar los puntos donde se anula  $f''(x)$ , si existe, pero también hay que tener en cuenta los puntos del dominio donde  $\nexists f''(x)$ .

Otro método para llegar a la conclusión de Extremos relativos es la Prueba de la derivada de orden superior.

Ejemplo:

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$f''(x) = 12x^2; \quad f''(0) = 0.$$

$$f'''(x) = 24x; \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(x) = 24; \quad f^{IV}(0) = 24 > 0$$

(1)

$$f(x) = -x^4$$

$$f'(x) = -4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$f''(x) = -12x^2; \quad f''(0) = 0.$$

$$f'''(x) = -24x; \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(x) = -24; \quad f^{IV}(0) = -24 < 0$$

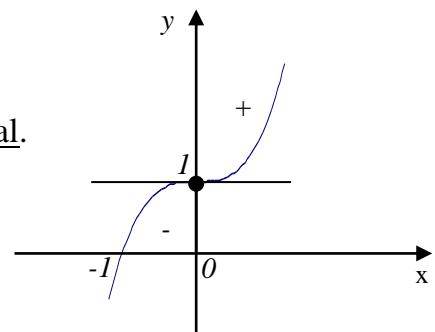
(2)

(1) Puesto que el orden de la primera derivada que no se anula para ese valor, es par y mayor que cero, en  $x = 0$  existe un mínimo relativo.

(2) Puesto que el orden de la primera derivada que no se anula para ese valor, es par y menor que cero, en  $x = 0$  existe un máximo relativo.

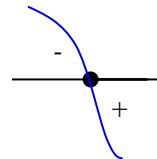
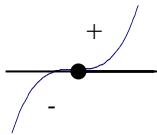
$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2} + 1 = x^{5/3} + 1; \quad f''(x) = \frac{10}{9}\sqrt[3]{x}; \quad \forall x \neq 0$$

$$f''(-1) < 0 \Rightarrow P(0;1) \text{ punto de inflexión con tangente horizontal.}$$

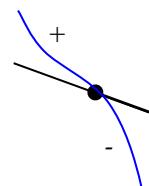
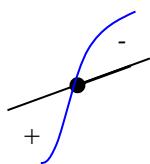


**NOTA:**

- ✓ Cuando la derivada segunda cambia de signo al pasar por los puntos  $x = x_1$  y  $x = x_2$ , existen allí dos puntos de inflexión. Si la derivada segunda es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de un punto, en él existe un punto de inflexión con tangente horizontal.



- ✓ Si la segunda derivada es positiva a la izquierda y negativa a la derecha del punto, allí existe punto de inflexión con tangente oblicua.

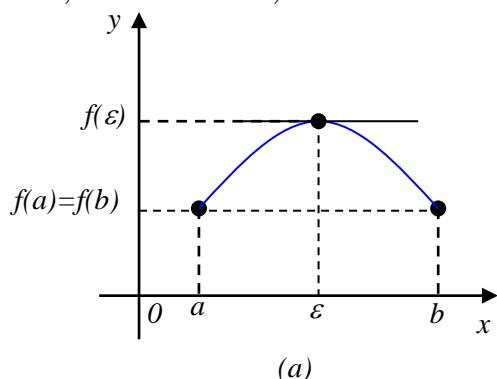


- ✓ Cuando el  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty$ , la tangente en el punto de inflexión es vertical. ( $a$  es la abscisa del punto de inflexión).

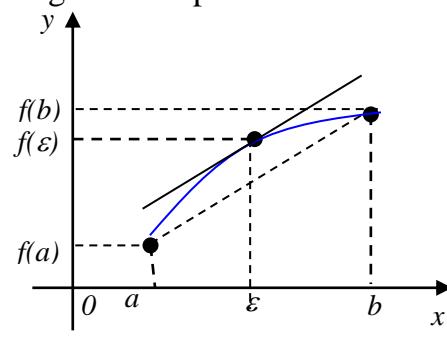
**Incrementos Finitos**

Al dibujar la curva correspondiente a una función derivable en un intervalo cerrado, se verifica la siguiente propiedad geométrica:

Si se traza la recta que pasa por los puntos extremos de la curva, es posible hallar un punto interior, cuanto menos, al intervalo donde la tangente al gráfico es paralela a dicha recta.



(a)



(b)

La figura (a) corresponde al caso particular en que la función toma valores iguales en los extremos del intervalo. En cambio, en la figura (b) corresponde al caso general.

La propiedad ilustrada en la figura (a) se demuestra en el Teorema de Rolle. La propiedad general mediante el Teorema del Valor Medio.

### Teorema de Rolle. Ilustración gráfica

“Si una función  $f(x)$  continua en el intervalo  $[a;b]$  tiene derivada finita en el intervalo  $(a;b)$ , y además  $f(a) = f(b)$ , entonces existe por lo menos un punto  $\varepsilon$  en el intervalo  $(a;b)$ , donde  $f'(\varepsilon) = 0$ ”.

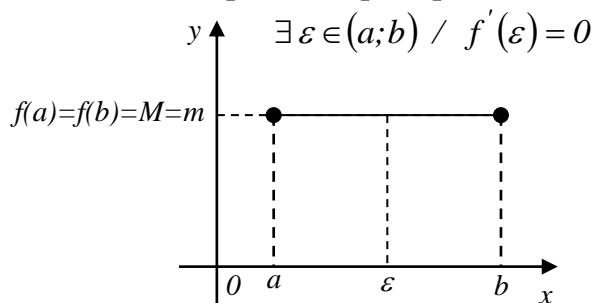
#### Demostración:

De acuerdo con el segundo Teorema de Weierstrass, al ser  $f(x)$  continua en el intervalo  $[a;b]$ , alcanzará en este un valor máximo absoluto  $M$  y un valor mínimo absoluto  $m$ .

A los efectos de la demostración, analicemos las dos posibilidades que se pueden presentar:

- (a) Si  $M = m$ , la función  $f(x)$  es constante, es decir tiene un valor constante  $f(x) = m = M, \forall x$ . Pero en este caso, en cualquier punto del intervalo considerado, y de acuerdo a lo ya visto, la derivada de una función constante es cero. Luego,  $\forall x \in (a;b)$  es  $f'(x) = 0$ .

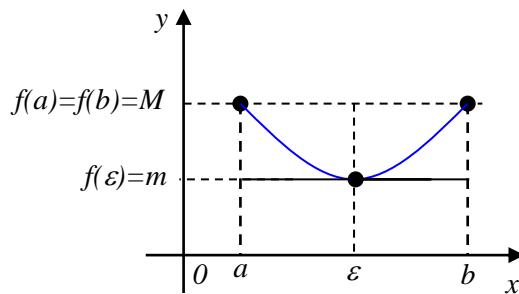
Por lo tanto la tesis se verifica para cualquier punto interior del intervalo especificado:



- (b) Si  $m \neq M$ , entonces, uno de los dos valores es distinto de  $f(a) = f(b)$ . En virtud de ello se pueden presentar tres Casos:

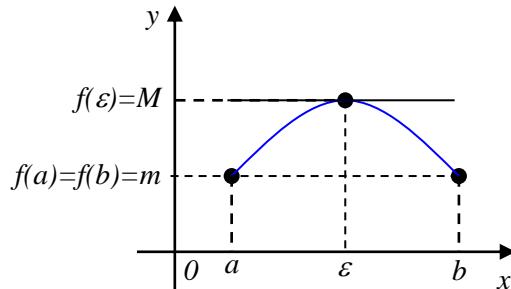
- (1) Si  $m \neq f(a)$  y  $M = f(a)$

En este caso, como  $m$  es el mínimo absoluto de  $f(x)$  en  $[a;b]$ ; será:  $m < f(a)$ , por lo tanto  $f(x)$  alcanza el mínimo absoluto en un punto  $\varepsilon$  interior al intervalo. luego  $f(\varepsilon)$  es un mínimo absoluto. Por un Teorema ya visto, como  $f(x)$  es derivable, tendremos que:  $f'(\varepsilon) = 0$ .



(2) Si  $M \neq f(a)$  y  $m = f(a)$

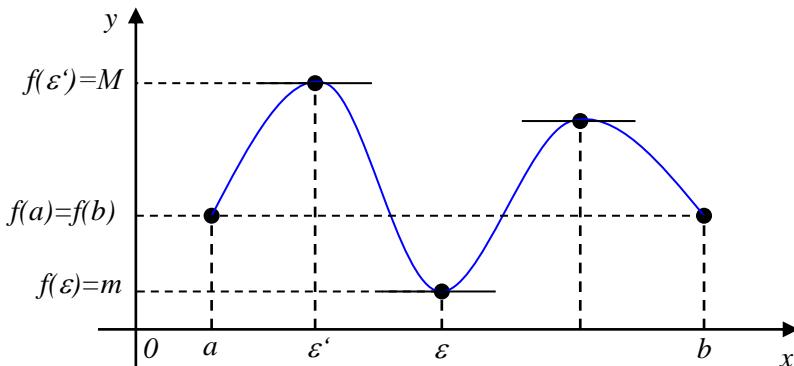
En este caso por ser  $M$  el máximo absoluto de  $f(x)$  en  $[a; b]$ ; será:  $M > f(a)$ . Por un razonamiento análogo al anterior,  $f(\varepsilon) = M$ , es el máximo absoluto y, por lo tanto:  $f'(\varepsilon) = 0$ .



(3) Si  $M \neq f(a)$  y también  $m \neq f(a)$

En este último caso, la función  $f(x)$  alcanza el mínimo  $m$  en un punto  $\varepsilon$  interior al intervalo, y el máximo  $M$  en un punto  $\varepsilon'$  también interior al intervalo especificado  $[a; b]$ . En esta situación, ambos extremos absolutos son también relativos.

Luego, es:  $f'(\varepsilon) = 0$  y  $f'(\varepsilon') = 0$ .



Nota: los casos (1), (2) y (3) pueden sintetizarse en uno solo, de la siguiente manera:

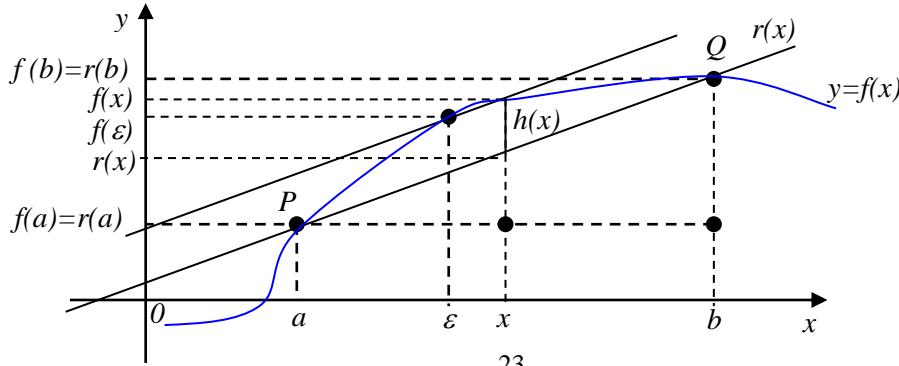
Si  $m \neq M$ , entonces uno de ellos, por lo menos, es distinto de  $f(a) = f(b)$ . Por lo tanto,  $f(x)$  alcanza dicho extremo absoluto en un punto  $\varepsilon$  interior al intervalo, y  $f(\varepsilon)$  es, al mismo tiempo, extremo absoluto y relativo. Por un Teorema anterior:  $f'(\varepsilon) = 0$ .

### Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. (Teorema de Lagrange)

Sí  $f(x)$  es una función continua en el intervalo  $[a; b]$  y tiene derivada finita en el  $(a; b)$ , entonces existe al menos un punto  $\varepsilon \in (a; b)$  tal que:  $f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

#### Demostración:

Consideramos la recta  $r(x)$  determinada por los puntos:  $P[a; f(a)]$  y  $Q[b; f(b)]$ .



Por la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:  $y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

Luego, la recta  $r(x)$  es del tipo  $r(x) = mx + b$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad r(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a + f(a).$$

La función lineal correspondiente, es:

$$r(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + k; \text{ siendo: } k = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a + f(a).$$

Determinemos una función auxiliar:  $h(x) = f(x) - r(x)$ .

La función  $h(x)$  es derivable en  $(a; b)$ , por ser la resta de dos funciones derivables, y:

$$h'(x) = f'(x) - r'(x)$$

$$\text{Es decir: } h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Por razones análogas  $h(x)$  es continua en  $[a; b]$ , y además:

$$h(a) = f(a) - r(a) = 0, \text{ y } h(b) = f(b) - r(b) = 0.$$

Por lo tanto, la función  $h(x)$  cumple con las condiciones exigidas por la hipótesis del **Teorema de Rolle**, y entonces:  $\exists \varepsilon \in (a; b) / h'(\varepsilon) = 0$ .

$$\text{Pero: } h'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - r'(\varepsilon) = 0 \Rightarrow h'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

$$\text{Luego: } \exists \varepsilon \in (a; b) \text{ tal que } f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1)$$

Gráficamente puede observarse que la recta que une los puntos  $P$  y  $Q$  es paralela a la recta tangente a la curva en  $[\varepsilon; f(\varepsilon)]$ . En efecto, según el Teorema demostrado, ambos tienen igual pendiente.

Nota: Significado geométrico del Teorema de Lagrange

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  (magnitud) representa la pendiente de la recta secante (cuerda)  $PQ$  que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ , cuyas abscisas son  $a$  y  $b$ .

Por otra parte,  $f'(\varepsilon)$  es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto  $[\varepsilon; f(\varepsilon)]$ . De modo que el significado geométrico de la igualdad ① es el siguiente:

“Si por cada punto del arco PQ puede trazarse una tangente, existirá sobre este arco, entre P y Q, cuanto menos un punto  $\varepsilon$ , tal que la correspondiente tangente es paralela a la secante (cuerda) que une los puntos P y Q”.

### Consecuencias del Teorema de Lagrange

(1) Si  $f(x)$  es una función derivable en un intervalo  $I$ , y en todos los puntos del intervalo la derivada de  $f(x)$  es nula, entonces  $f(x)$  es constante en  $I$ .

#### Demostración:

Consideremos un intervalo cualquiera:  $[x_1; x_2] \subseteq I$ .

La función  $f(x)$  satisface la hipótesis del Teorema del Valor Medio en  $[x_1; x_2]$ .

Luego,  $\exists \varepsilon \in (x_1; x_2)$  tal que  $f'(\varepsilon) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ; como  $f'(\varepsilon) = 0$ , resulta:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

$\therefore f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ . Como  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos cualesquiera de  $I$ :

$$\forall x \in I : f(x) = f(x_1) = f(x_2) = k$$

Luego, hemos probado que:  $\forall x \in I : (f'(x) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} / f(x) = k)$ .

Obsérvese que este Teorema es el recíproco del Teorema que afirma que la derivada de una constante es nula.

(2) Si dos funciones tienen la misma derivada en cada punto de un intervalo  $I$ , entonces dichas funciones difieren en una constante. (**Teorema fundamental del cálculo integral**).

(T.F.C.I.). O sea: si  $f(x)$  y  $g(x)$  son derivables en un intervalo  $I$  y  $\forall x \in I : f'(x) = g'(x)$ , entonces:  $\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in I : f(x) - g(x) = k$ .

#### Demostración:

$\forall x \in I : f'(x) - g'(x) = (f - g)'(x) = 0$ . Por la consecuencia anterior:

$\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in I : (f - g)(x) = k$ . O sea:  $\forall x \in I : f(x) - g(x) = k \therefore \forall x \in I : f(x) = g(x) + k$ .

Este resultado está incluido en el importante Teorema que afirma que: la condición necesaria y suficiente para que dos funciones tengan igual derivada es que difieran en una constante.

La condición es necesaria, pues si:  $f(x) = g(x) + k$ , con  $k$  constante, derivando resulta:

$$f'(x) = g'(x).$$

La condición es suficiente, lo asegura el Teorema (2).

Este Teorema es el **Teorema Fundamental del Cálculo Integral**, pues, este propone precisamente encontrar todas las funciones que tienen una derivada dada. Ha quedado demostrado que si se posee una función que tiene una derivada dada, se poseen todas sin más que agregarle una constante.

### **Teorema (Concavidad)**

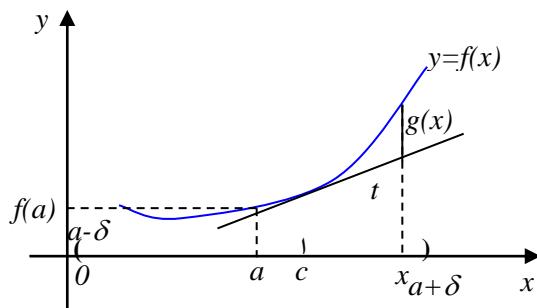
Si una función  $f(x)$  tiene derivada segunda positiva en un punto  $a$ , y existe  $f'(x)$  finita en un  $E(a)$ , entonces la gráfica de  $f(x)$  es cóncava hacia arriba en el punto  $[a; f(a)]$ .

Demostración:

Consideremos nuevamente la función  $g(x)$  (la hemos considerado en concavidad de una curva), que indica la diferencia entre la ordenada de la curva y la ordenada de la tangente en  $[a; f(a)]$ , para un punto  $x$  del  $E(a; \delta)$ , donde existe  $f'(x)$ .

$$\text{Es, por lo tanto: } g(x) = f(x) - [f(a) + f'(a).(x - a)]$$

$$\text{Y también: } g(x) = [f(x) - f(a)] - f'(a).(x - a) \quad (1)$$



Si aplicamos el **Teorema del Valor Medio** al intervalo entre  $a$  y  $x$ , es posible encontrar un punto  $c$  entre  $a$  y  $x$  tal que:  $f(x) - f(a) = f'(c).(x - a)$ , reemplazando en (1), resulta:

$$g(x) = f'(c).(x - a) - f'(a).(x - a) = [f'(c) - f'(a)].(x - a) \quad (2)$$

Ahora bien, por hipótesis:  $f''(a)$  es positiva, es decir:  $f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0$

Por una propiedad de los límites finitos:  $\exists E(a; \delta') / \forall x : \left( x \in E(a; \delta') \Rightarrow \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0 \right)$ .

Para que este cociente de incrementos sea positivo, numerador y denominador tienen el mismo signo, es decir:  $(x > a \Rightarrow f'(x) > f'(a))$  y  $(x < a \Rightarrow f'(x) < f'(a))$

Supongamos:  $\delta < \delta'$ . Si  $x \in E'(a; \delta)$ , también  $c \in E'(a; \delta')$ , y se verifica:

$$x > a \Rightarrow f'(x) > f'(a) \Rightarrow f'(c) > f'(a) \quad \wedge \quad x < a \Rightarrow f'(x) < f'(a) \Rightarrow f'(c) < f'(a)$$

Por lo tanto, los dos factores de la expresión  $\textcircled{2}$  tienen el mismo signo. Es decir:  $\forall x : (x \in E'(a; \delta) \Rightarrow g(x) > 0)$  y el gráfico de  $f(x)$  es cóncavo hacia arriba en el punto  $[a; f(a)]$ .

De la misma forma se demuestra que si  $f''(a)$  es negativa, el gráfico de  $f(x)$  es cóncavo hacia abajo en el punto  $[a; f(a)]$ .

Resumiendo:

$f''(x)$  es positiva, entonces la gráfica de  $f(x)$  es cóncava hacia el eje y positivo (concavidad hacia arriba).

$f''(x)$  es negativa, entonces la gráfica de  $f(x)$  es cóncava hacia el eje y negativo (concavidad hacia abajo).

### Teorema de Cauchy

El cociente de incrementos de dos funciones continuas en  $[a; b]$  y derivables en  $(a; b)$ , es igual al cociente de las derivadas correspondientes en un punto interior del intervalo.

O bien: si  $f(x)$  y  $g(x)$  son dos funciones continuas en  $[a; b]$  y derivables en  $(a; b)$ , y además  $g'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in (a; b)$ , entonces existirá un punto  $\varepsilon \in (a; b)$  tal que  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ .

(Obsérvese que en la hipótesis no es necesario exigir que  $g(b) - g(a) \neq 0$ , a pesar de que esta expresión figura como denominador. Si fuera  $g(b) = g(a)$ , por el Teorema de Rolle, existirá un punto  $\varepsilon$  donde  $g'(\varepsilon) = 0$ , lo que contradice el enunciado  $g'(x) \neq 0$ ).

Demostración:

Consideremos una función que es combinación lineal de dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  continuas y derivables:

$$h(x) = f(x) + k \cdot g(x) \quad \textcircled{1}$$
, donde  $k$  es una constante, tal que  $h(a) = h(b)$  (la función  $h(x)$  toma valores iguales en los extremos del intervalo).

Determinemos  $k$ , de modo que esta expresión tome valores iguales en los puntos  $x = a$  y  $x = b$ . Luego:

$$\left. \begin{array}{l} h(a) = f(a) + k \cdot g(a) \\ h(b) = f(b) + k \cdot g(b) \end{array} \right\} \text{como } h(a) = h(b) \Rightarrow f(a) + k \cdot g(a) = f(b) + k \cdot g(b) \Rightarrow \text{"despejo" } k$$

$$k = \frac{f(a) - f(b)}{g(b) - g(a)} = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}; \text{ reemplazando } k \text{ en } (1): h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x).$$

Esta función es continua en  $[a; b]$ , por ser combinación lineal de dos funciones continuas  $f(x)$  y  $g(x)$  y además derivable en  $(a; b)$ . Es evidente, además que  $h(a) = 0 \wedge h(b) = 0$ . Por lo tanto  $h(x)$  satisface, en el intervalo especificado, todas las condiciones del **Teorema de Rolle**, entonces existirá al menos un punto  $\varepsilon \in (a; b)$  tal que  $h'(\varepsilon) = 0$ .

$$\text{O sea: } h'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\varepsilon) = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}, \quad a < \varepsilon < b.$$

Escribiendo  $x$  en lugar de  $b$ , tenemos el **Teorema de Cauchy**:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}, \quad a < \varepsilon < x.$$

Podemos observar que este **Teorema (de Cauchy)** comprende como caso particular, el **Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial**. Sí  $g(x)$  es la función identidad; es decir, si:

$$g(x) = x, \quad \forall x \in [a; b] \therefore g(a) = a \wedge g(b) = b; \quad g'(\varepsilon) = 1$$

$$\text{Luego: } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon); \quad a < \varepsilon < b \quad \text{Teorema de Lagrange}$$

### Límites Indeterminados. Regla de L'Hôpital

Al estudiar las diferentes propiedades de los límites de una función, hemos demostrado que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ siempre y cuando } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0. \text{ Además, al estudiar límites infinitos,}$$

hemos visto que:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ , si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .

Es decir, puede probarse que si el divisor tiene límite nulo y dividendo límite finito, entonces el límite del cociente es infinito. Por lo tanto, queda por resolver un caso que aparece frecuentemente, y es justamente el de indeterminación del límite, o sea cuando tenemos el cociente de dos infinitésimos.

Este caso de indeterminación de límite lo constituye el siguiente ejemplo:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ . No

obstante ello, de acuerdo a lo ya visto, este límite es igual a uno.

Cabe agregar que en muchas circunstancias esta indeterminación de límite, se puede destruir recurriendo a las funciones derivadas, mediante un método que se denomina **Regla de L'Hôpital**:

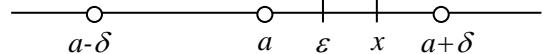
“Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son dos funciones derivables en un  $E'(a)$  (excluyendo a lo sumo el punto  $a$ ), tales que  $f(a) = g(a) = 0$ , y además  $g'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in E'(a)$  (excluyendo a lo sumo el punto  $a$ ), se verifica que, si existe:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe también: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ y se cumple que: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

### Demostración:

Tomemos en el intervalo  $[a; x]$  un punto  $x \neq a$ . Aplicamos la fórmula de Cauchy:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}, \text{ donde } a < \varepsilon < x$$



$$\text{por hipótesis: } f(a) = g(a) = 0, \text{ esto significa que: } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Por otra parte si:  $x \rightarrow a$ , también  $\varepsilon \rightarrow a$ , ya que  $\varepsilon$  está comprendido entre  $a$  y  $x$ ; es decir que en las proximidades de  $a$ ,  $x$  y  $\varepsilon$  se encontrarán sumamente próximos, y al tomar límite será exactamente lo mismo hablar de  $x$  o de  $\varepsilon$ .

$$\text{En consecuencia: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (1)$$

Si aún fuese  $f'(a) = 0$  y  $g'(a) = 0$ , estará el segundo miembro de (1) en condiciones de aplicar la Regla de L'Hôpital, resultando así:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ .

Se observa que la regla podrá aplicarse en forma reiterada mientras siga apareciendo la indeterminación  $\frac{0}{0}$ .

$$\text{Ejemplo: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\cos x} + x \cdot (-\sin x) - \cancel{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -x \cdot \sin x = 0.$$

La Regla de L'Hôpital es aún aplicable a otros casos de indeterminación, y que analizaremos a continuación:

- (a) Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$   $\wedge$   $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ , entonces:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ; si hacemos  $x = \frac{1}{z}$ , resulta que si  $x \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow 0$  y por lo tanto:  $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ ;  $\lim_{z \rightarrow 0} g\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ .

Es decir que:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$ , y en este segundo miembro tenemos indeterminación de la forma  $\frac{0}{0}$ , con la variable tendiendo a un número finito, podemos por lo tanto aplicar la Regla de L'Hôpital, con la sola observación de que  $f(x)$  y  $g(x)$  están expresados como función de  $z$ , por lo que se deberá aplicar la regla de derivación correspondiente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\right]'}{\left[g\left(\frac{1}{z}\right)\right]'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{-\cancel{z^2}}{-\cancel{z^2}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Luego,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Ejemplo:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos k \cdot \left(-\frac{k}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} k \cdot \cos \frac{k}{x} = k$ .

(b) Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$   $\wedge$   $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , entonces:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

En efecto, escribiendo:  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ , tenemos en el segundo miembro una indeterminación  $\frac{0}{0}$ , cuando  $x \rightarrow a$ , por lo que sí aplicamos la Regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \right]' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left( \frac{1}{g(x)} \right)'}{\left( \frac{1}{f(x)} \right)'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{-g'(x)}{g(x)^2}}{\frac{-f'(x)}{f(x)^2}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]^2$$

Luego,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow 1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ , si multiplicamos ambos miembros por:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Ejemplo:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotg x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{\sen^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sen^2 x} = 1$

(c) Caso de indeterminación del tipo  $0 \cdot \infty$ : sea  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ . En este caso

hacemos:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ; donde la expresión del segundo miembro es de la

forma  $\frac{0}{0}$  cuando  $x \rightarrow a$ ; luego se aplica la Regla de L'Hôpital para destruir la indeterminación.

(d) Caso de indeterminación del tipo  $0^0$ : sea  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .

Entonces  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = 0^0$ .

Haciendo:  $y = [f(x)]^{g(x)}$  y tomando  $\ln$  en ambos miembros, tenemos:  $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$ ; si  $x \rightarrow a$  obtenemos en el segundo miembro una indeterminación del tipo  $0 \cdot \infty$ .

Una vez calculado el  $\lim_{x \rightarrow a} \ln y$ , será fácil hallar el  $\lim_{x \rightarrow a} y$ .

En efecto, en virtud de la continuidad de la función logarítmica, se tiene:  $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln \lim_{x \rightarrow a} y$ ,

y sí:  $\ln \lim_{x \rightarrow a} y = b \Leftrightarrow \underset{\substack{\text{definición de} \\ \text{log aritmo}}}{\lim_{x \rightarrow a} y} = e^b$ . Si como caso particular  $b = +\infty$  ó  $b = -\infty$  entonces

será respectivamente:  $\lim_{x \rightarrow a} y = +\infty$  ó  $\lim_{x \rightarrow a} y = 0$ .

Ejemplo:  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ . Hacemos:

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0.$$

Luego:  $\ln \lim_{x \rightarrow 0} y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$

Son también indeterminados los límites  $(f(x)^{g(x)})$  en los casos que se puede escribir simbólicamente:  $1^\infty, \infty^0$ , y estas indeterminaciones se salvan tomando logaritmo, pues entonces se trata de hallar el límite de:  $g(x) \cdot \ln f(x)$  que como en el caso anterior ( $0^0$ ) toma la forma  $0 \cdot \infty$ , ya estudiada. Luego,  $1^\infty, \infty^0, 0^0$  se salvan de la misma manera.

Nota: la Regla de L'Hôpital que permite, en el cálculo del límite, reemplazar a ciertas funciones por sus derivadas, solo puede aplicarse, como se ha indicado, al cociente de dos infinitésimos o al cociente de dos infinitos. Los restantes casos de indeterminación de límites

deben reducirse previamente a uno de los dos casos mencionados, mediante operaciones algebraicas o mediante aplicación de logaritmos.

### Polinomios y Fórmulas de Taylor y Mac Laurin

Los polinomios en una variable con coeficientes reales, determinan funciones simples que tienen la propiedad de ser derivable. Si el polinomio es de grado  $n$ , admite  $n$  polinomios no idénticamente nulos, que son sus derivadas sucesivas.

Ejemplo:

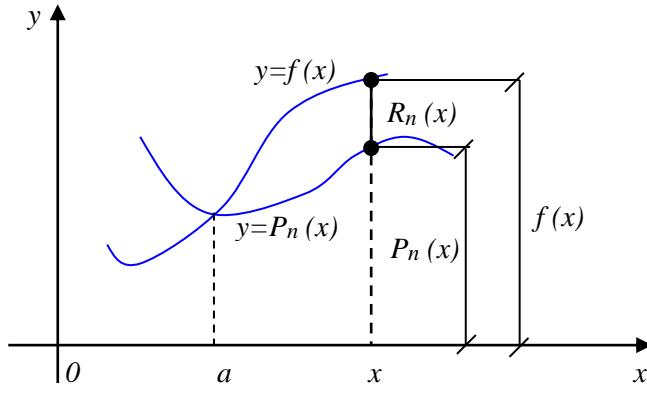
$$P(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x + 6$$

$$P'(x) = 12x^2 + 4x + 5$$

$$P''(x) = 24x + 4$$

$$P'''(x) = 24$$

$$P^{IV}(x) = 0$$



En más de una ocasión resulta conveniente aproximar el valor de una función derivable no polinómica, por ejemplo:  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\ln x$ , etc. mediante un polinomio particularmente elegido, y precisar la aproximación o error que se comete al reemplazar el valor de la función en un punto  $x$  de su Dominio por el valor en el mismo punto del polinomio seleccionado.

Es decir que si una función  $y = f(x)$  tiene  $n$  derivadas sucesivas finitas en un punto  $a$ , existe y es único el polinomio de grado  $n$  cuyas derivadas sucesivas coinciden con las derivadas de la función  $f(x)$  en dicho punto  $a$ , y por lo tanto interesa conocer para el número  $x$  del Dominio, el valor de la diferencia:  $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ .

El término  $R_n(x)$  se conoce con el nombre de Término Complementario.

Para aquellos valores de  $x$  en que el Término Complementario  $R_n(x)$  es pequeño, el polinomio  $P_n(x)$  da un valor aproximado de la función  $f(x)$ .

### Polinomios de Taylor y Mac Laurin

De acuerdo con las consideraciones efectuadas precedentemente, supongamos que la función  $y = f(x)$  admite  $n$  derivadas finitas en cualquier punto de un cierto intervalo que contiene al punto  $x = a$ .

Busquemos ahora un polinomio  $y = P_n(x)$  de grado  $n$  y coeficientes reales  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  cuyo valor en el punto  $x = a$  sea igual al de la función  $f(x)$  en el mismo punto  $x = a$ , iguales a los valores de las derivadas correspondientes de la función  $f(x)$  en el punto.

Es decir:  $P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), P''(a) = f''(a), \dots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ . (1)

Es de suponer que el polinomio que nos proponemos encontrar será, en cierto aspecto, próximo a la función  $f(x)$ .

Sea, entonces, la siguiente función polinómica de grado  $n$  y coeficientes reales:

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n$$

si  $a$  es un número real cualquiera, es posible expresar el polinomio  $P_n(x)$  según las potencias del binomio  $(x - a)$ , para lo cual basta efectuar las divisiones sucesivas por dicho binomio. Es decir que:  $\forall x \in \mathbb{R}$ , será:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots + c_n(x - a)^n. \quad (2)$$

Los coeficientes indeterminados  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  los calculamos de modo que cumplan las condiciones enunciadas, o sea que se verifique (1). Para ello, hallaremos previamente las derivadas sucesivas de  $y = P_n(x)$ :

$$P_n'(x) = c_1 + 2.c_2(x - a) + 3.c_3(x - a)^2 + 4.c_4(x - a)^3 + \dots + n.c_n(x - a)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = 2.c_2 + 2.3.c_3(x - a) + 3.4.c_4(x - a)^2 + \dots + n.(n-1).c_n(x - a)^{n-2}$$

$$P_n'''(x) = 2.3.c_3 + 2.3.4.c_4(x - a) + \dots + n.(n-1).(n-2).c_n(x - a)^{n-3}$$

$$P_n^{(n)}(x) = 1.2.3.4.5 \dots (n-2).(n-1).n.c_n$$

Luego, en el punto  $x = a$  las funciones determinadas por las expresiones anteriores tomarán los siguientes valores:

$$\left. \begin{array}{l} P(a) = c_0 \\ P'(a) = c_1 \\ P''(a) = 1.2.c_2 = 2!.c_2 \\ P'''(a) = 1.2.3.c_3 = 3!.c_3 \\ \vdots \\ P^{(n)}(a) = 1.2.3 \dots n.c_n = n!.c_n \end{array} \right\} \text{por lo tanto, resulta:} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = P(a) \\ c_1 = P'(a) \\ c_2 = P''(a)/2! \\ c_3 = P'''(a)/3! \\ \vdots \\ c_n = P^{(n)}(a)/n! \end{array} \right.$$

reemplazando en (2), tenemos:

$$P_n(x) = P(a) + P'(a)(x - a) + \frac{P''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{P'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n. \quad \text{Esta}$$

función polinómica recibe el nombre de **Polinomio de Taylor**.

Si consideramos en particular  $a = 0$ , el polinomio queda expresado de la forma:

$P_n(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n$ . Esta expresión recibe el nombre de **Polinomio de Mac Laurin**.

Ahora bien, en virtud de (1), tenemos también que:

$$c_0 = f(a)$$

$$c_1 = f'(a)$$

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

-----

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Luego:  $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ . Es el **Polinomio de Taylor** correspondiente a la función  $y = f(x)$  en el punto  $x = a$ .

Sus  $n$  derivadas coinciden en el punto  $x = a$  con las  $n$  derivadas de la función  $f(x)$ .

Por otra parte según lo visto anteriormente, hemos designado por  $R_n(x)$ , la diferencia entre los valores de la función dada  $f(x)$ , y el polinomio calculado  $P_n(x)$ :  $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ , de donde tenemos:  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ , o lo que es lo mismo:

$$f(x) \equiv f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \quad (3)$$

Además, si se considera:  $f^o(x) = f(x)$ , y recordando que:  $0! = 1$ , la expresión anterior (3) puede considerarse de la siguiente manera:  $f(x) \equiv \sum_{h=0}^n \frac{f^{(h)}(a)(x-a)^{(h)}}{h!} + R_n(x)$ .

A fin de aclarar conceptos, efectuamos el siguiente ejercicio de aplicación:

Sea la función  $f(x) = e^x$ , cuyo valor se quiere aproximar mediante el Polinomio de Taylor en el punto  $a = 1$ .

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = f(1) = e^1 = e \\ f'(x) = e^x \quad \therefore \quad f'(a) = f'(1) = e^1 = e \\ f''(x) = e^x \quad \therefore \quad f''(a) = f''(1) = e^1 = e \\ f'''(x) = e^x \quad \therefore \quad f'''(a) = f'''(1) = e^1 = e \\ \hline f^{(n)}(x) = e^x \quad \therefore \quad f^{(n)}(a) = f^{(n)}(1) = e^1 = e \end{array} \right\}$$

Luego, reemplazando en ①:

$$P_n(x) = e + e \cdot (x-1) + \frac{e \cdot (x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{e \cdot (x-1)^n}{n!}, \text{ o lo que es lo mismo: } P_n(x) = \sum_{h=0}^n \frac{e^h \cdot (x-1)^h}{h!}$$

Este polinomio  $P_n(x)$  es el **Polinomio de Taylor** correspondiente a la función  $f(x) = e^x$  en el punto  $a = 1$ .

Una vez encontrado el polinomio, interesa conocer el valor del **Resto de Taylor o Término Complementario**:  $R_n(x)$ , en el punto  $x$  perteneciente a un entorno del punto  $a = 1$ , o sea:

$$R_n(x) = e^x - \sum_{h=0}^n \frac{e^h \cdot (x-1)^h}{h!}$$

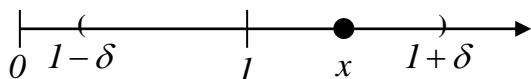
Como puede observarse, el valor  $R_n(x)$  depende, para cada  $x$ , de  $h$ . O sea, del grado del polinomio.

$$\text{Si, } h=1 \text{ es } R_n(x) = e^x - \sum_{h=0}^1 \frac{e^h \cdot (x-1)^h}{h!}; \text{ o sea: } R_n(x) = e^x - [e + e \cdot (x-1)] = e^x - ex$$

$$\text{Si } h = 2, \text{ es } R_n(x) = e^x - \sum_{h=0}^2 \frac{e^h \cdot (x-1)^h}{h!}; \text{ o sea:}$$

$$R_n(x) = e^x - \left[ e + e \cdot (x-1) + \frac{e \cdot (x-1)^2}{2!} \right] = e^x - ex - \frac{e}{2}(x^2 - 2x + 1) = e^x - \frac{e}{2} - \frac{ex^2}{2}.$$

Por lo tanto, para  $x$  próximo a 1, el resto  $R_n(x)$  considerado, se hace menor al aumentar el grado del polinomio que aproxima la función.



Si  $h=1$ , es decir si se considera el polinomio de Taylor de primer grado, la **aproximación obtenida** se llama **aproximación lineal** de la función en el punto especificado.

Si  $h=2$ , el polinomio será de segundo grado, la **aproximación obtenida** en este caso se denomina **aproximación cuadrática** de la función en el punto elegido, y así sucesivamente.

### **Fórmulas de Taylor y Mac Laurin - Fórmula de Lagrange del Término Complementario**

A continuación, determinaremos mediante el siguiente **Teorema** la expresión del **Resto de Taylor**.

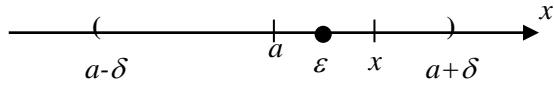
**Teorema**: sea  $f(x)$  una función con derivada finita de orden  $(n+1)$  en todos los puntos de un  $E(a)$ . Si  $x$  es un punto cualquiera de dicho  $E(a)$ , entonces existe un punto  $\varepsilon$  entre  $a$  y  $x$  tal que:

$$f(x) \equiv P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon) \cdot (x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

En esta expresión,  $P_n(x)$  es el polinomio de Taylor correspondiente a  $f(x)$  en el punto  $a$ . Es decir:

$$f(x) \equiv f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Demostración: vamos a demostrar el teorema para un punto  $x$  ubicado en el semientorno a la derecha de  $a$ . En forma análoga, puede efectuarse la demostración para un punto  $x$  ubicado en el semientorno a izquierda de  $a$ .



A los efectos de la demostración vamos a considerar a  $x$  como un punto fijo. Además, definamos en el intervalo  $[a; x]$  dos funciones auxiliares:  $F(t)$  y  $G(t)$ , de la siguiente manera:

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)(x-t)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!}; \quad \forall t \in [a; x]$$

$$G(t) = (x-t)^{n+1}; \quad \forall t \in [a; x]$$

Como puede observarse, las funciones  $F(t)$  y  $G(t)$  cumplen con las condiciones del Teorema de Cauchy, y por lo tanto va a existir un punto  $\varepsilon$  interior al intervalo  $(a; x)$  tal que:

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\varepsilon)}{G'(\varepsilon)} \quad (1)$$

Si reemplazamos  $t$  por  $x$  en las expresiones que definen a las funciones  $F$  y  $G$ :  $F(x) = G(x) = 0$ . Además, al derivar  $F'$ , debemos tener en cuenta que  $f'(x) = 0$ , pues  $f(x)$  es una constante. Por lo tanto:

$$F'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \cancel{\frac{f'''(t)(x-t)^2}{2!}} + \cancel{\frac{f''(t)2(x-t)}{2!}} - \dots - \cancel{\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}}$$

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}. \text{ Luego: } F'(\varepsilon) = -\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)(x-\varepsilon)^n}{n!}$$

$$G'(t) = -(n+1)(x-t)^n. \text{ Luego: } G'(\varepsilon) = -(n+1)(x-\varepsilon)^n; \text{ reemplazando en la expresión (1):}$$

$$\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)(x-\varepsilon)^n}{n!}}{-(n+1)(x-\varepsilon)^n} \Rightarrow F(a) = G(a) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \quad (\otimes)$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de  $F(a)$  y  $G(a)$ , resulta: (sustituyendo en  $F(t)$ :  $t = a$ )

$$F(a) = f(x) - f(a) - f'(a).(x-a) - \frac{f''(a).(x-a)^2}{2!} - \dots - \frac{f^{(n)}(a).(x-a)^n}{n!} = \underbrace{(x-a)^{n+1}}_{G(a)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$

↑ por  $\otimes$

$$f(x) - f(a) - f'(a).(x-a) - \frac{f''(a).(x-a)^2}{2!} - \dots - \frac{f^{(n)}(a).(x-a)^n}{n!} = \frac{(x-a)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

despejando  $f(x)$ :

$$f(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a).(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a).(x-a)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon).(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \text{ Esta}$$

expresión se denomina Fórmula de Taylor, donde:  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon).(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ , es la Fórmula de Lagrange del Término Complementario, que tiene la misma expresión formal que los términos del polinomio de Taylor, pero el valor de la derivada de orden  $(n+1)$  no se calcula en el punto  $a$ , sino en el punto  $\varepsilon$  que está ubicado entre  $a$  y  $x$ .

Si  $a = 0$ , se obtiene la Fórmula de Mac Laurin

$$f(x) \equiv f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0).x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0).x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon).x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cabe agregar que el Término Complementario de Lagrange puede escribirse también de la siguiente forma, teniendo en cuenta que:  $\varepsilon = a + \theta \cdot (x-a)$  donde  $0 < \theta < 1$ .

$$\text{Luego: } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta \cdot (x-a)].(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad \text{Si } a = 0: R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x).x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

### Aproximación de funciones

El cálculo del valor de un polinomio en un punto cualquiera  $x$  ubicado en un  $E(a)$  donde se conoce el valor del mismo y de sus derivadas sucesivas, es un problema sencillo. La Fórmula de Taylor permite utilizar este cálculo simple para aproximar funciones que no son polinomios, mediante el polinomio de Taylor correspondiente. La aproximación es más precisa cuando mayor sea el grado del polinomio.

El Término Complementario o Resto de Taylor, permite estimar la aproximación obtenida ya que es la diferencia entre el valor de la función en el punto considerado y el polinomio correspondiente. O sea:  $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ , y también:  $|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$ .

Si se halla un número positivo  $\delta$  tal que:  $|R_n(x)| < \delta$ , entonces  $|f(x) - P_n(x)| < \delta$ .

Es decir, si se considera como valor de la función  $f(x)$  en el punto  $x$ , el valor numérico en dicho punto  $x$  del polinomio  $P_n(x)$ , el error cometido, en valor absoluto será menor que el número  $\delta$ .

Ejemplo: aproximar la función  $\ln$  mediante un polinomio de cuarto grado.

Consideremos la función de Taylor con un polinomio de cuarto grado:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \frac{f^{IV}(a)(x-a)^4}{4!} + \frac{f^V(\varepsilon)(x-a)^5}{5!}; a < \varepsilon < x$$

Luego:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln x \\ f'(x) = \frac{1}{x} \\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} \\ f'''(x) = \frac{2}{x^3} \\ f^{IV}(x) = -\frac{6}{x^4} \\ f^V(x) = \frac{24}{x^5} \end{array} \right\} \text{ si } a = 1 \text{ es: } \left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f'(1) = 1 \\ f''(1) = -1 \\ f'''(1) = 2 \\ f^{IV}(1) = -6 = -3! \\ f^V(1) = \frac{24}{\varepsilon^5} = \frac{4!}{\varepsilon^5}; 1 < \varepsilon < x \end{array} \right\}$$

Por lo tanto:

$$P_4(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + 2 \cdot \frac{(x-1)^3}{3!} - 3! \cdot \frac{(x-1)^4}{4!} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

$$R_n(x) = \frac{4!(x-1)^5}{5!\varepsilon^5} = \frac{(x-1)^5}{5\varepsilon^5} = \frac{(x-1)^5}{5} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^5 \quad (1)$$

Si se elige  $x$  en el intervalo  $(1; 1,1)$ , es  $1 < \varepsilon < 1,1$  y  $\frac{1}{\varepsilon} < 1$ . Considerando los valores anteriores,

$$\text{de (1), se obtiene: } |R_n(x)| < \frac{(0,1)^5}{5} = 0,000002.$$

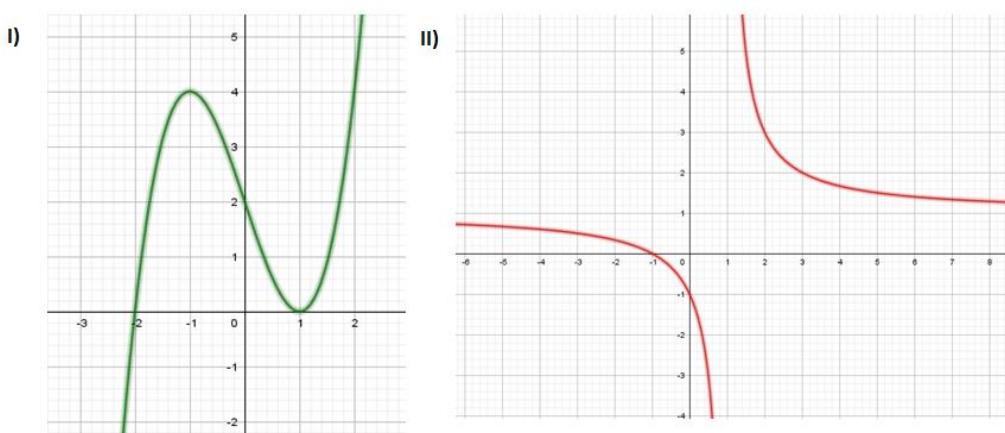
$$\text{Luego, } \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm 0,000002, \text{ si } 1 < x < 1,1.$$

Por ejemplo, si elegimos  $x = 1,01$ , resulta:  $\ln 1,01 \cong 0,00099505$ .

## **TRABAJO PRÁCTICO N° 7: APLICACIONES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL**

**Actividad N° 1:** Dados los siguientes gráficos, reconocer y marcar los siguientes elementos:

- Dominio e Imagen.
- Asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas, si existen.
- Puntos de discontinuidad, y clasificar.
- Puntos máximos y mínimos.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Puntos de inflexión.
- Intervalos de concavidad y convexidad.



**Actividad N° 2:** Dadas las siguientes funciones, determinar:

- Dominio e Imagen.
- Intersección con los ejes coordinados.
- Puntos de discontinuidad.
- Asíntotas.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Extremos relativos.
- Intervalos de concavidad y convexidad.
- Puntos de Inflección.

$$i. f(x) = \frac{1}{4} x^4 - x^3$$

$$ii. f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$iii. f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x^2 + x - 2}$$

**AUTO EVALUACIÓN:** Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4} & \text{si } x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

- Determinar coordenadas y tipos de extremos relativos.
- Analizar intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Determinar coordenadas de puntos de inflexión.
- Obtener la ecuación de la recta tangente a la función dada, que pasa por  $x = 3$ .
- Graficar la función y la recta obtenida.

**Situación problemática 1:** determine el valor de los coeficientes  $a$  y  $b$  en  $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$  sabiendo que la función tiene un máximo en  $x = 1$  y que  $f(1) = 2$ .

**Situación problemática 2:** calcular los coeficientes  $a, b$  y  $c$  en  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  sabiendo que  $(1; 2)$  es mínimo y en  $x = 3$  hay punto de inflexión.

### PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

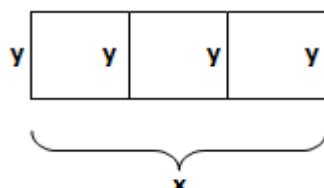
**Situación problemática 1:** Se desea construir una caja sin tapa con una lámina rectangular de 16 cm de largo y 24 cm de ancho ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado que debe cortarse en cada esquina para que sea máximo el volumen de la caja? ¿Cuál es el valor de dicho volumen **máximo**?

**Situación problemática 2:** Una ventana tiene forma rectangular, coronado por un triángulo equilátero. Encuentre las dimensiones del rectángulo para que la ventana permita la **máxima** entrada de luz si el perímetro de la misma debe ser de 12 metros.

**Situación problemática 3:** Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el **mínimo** posible de metal?

**Situación problemática 4:** Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un **mínimo**.

**Situación problemática 5:** Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes. Las alambradas de las divisiones deben quedar paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que su área sea la **mayor posible**?



**AUTO EVALUACIÓN:** Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:

- La producción actual de la huerta.
- La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan  $x$  árboles más.
- La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan  $x$  árboles más.
- ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para qué la producción sea máxima?

### ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

**Actividad Nº 1:** Dada la función:  $f(x) = 5x - x^5$

- Determinar las coordenadas de los extremos relativos.
- Indicar coordenadas de puntos de inflexión.
- Indicar intervalos de concavidad.
- Obtener la ecuación de la recta tangente a la función dada, que pasa por  $x = 2$ .
- Graficar la función y la recta obtenida.

**Actividad Nº 2:** Dada la función  $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

- Determinar las coordenadas de los extremos relativos.
- Analizar intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Determinar coordenadas de puntos de inflexión.
- Graficar la función y la recta obtenida.

**Actividad Nº 3:** Dada la función  $f(x) = (x + 1)^3$

- Determinar coordenadas de los extremos relativos.
- Analizar coordenadas de puntos de inflexión.
- Determinar intervalos de concavidad.
- Obtener la ecuación de la recta normal a la función dada, que pasa por  $x = -2$
- Graficar la función y la recta obtenida.

#### **Actividad Nº 4: Situaciones problemáticas de optimización**

- I) Determinar cuándo es mínima la suma de un número " $x$ " más el cuadrado de su recíproco.
- II) Dividir un número positivo en dos sumandos de tal forma que su producto sea el mayor posible.
- III) El interior de una caja de base cuadrada, sin tapa, debe ser forrado con papel. si el volumen de la caja es de  $4000 \text{ cm}^3$  ¿cuáles deben ser sus dimensiones (altura de la caja y ancho de su base) para que el gasto de papel sea mínimo?
- IV) Hay que cercar una superficie rectangular con tela metálica por tres lados, lindante el cuarto lado con una pared.- ¿Qué medidas deben tener los lados para que la superficie sea máxima, si se cuentan con 50 metros lineales de tela?
- V) Determinar el valor de los números  $x$  e  $y$  que verifican simultáneamente las siguientes condiciones:
  - El doble de la suma entre el duplo de uno de ellos y el otro iguala al quíntuplo de la potencia quinta de 2;
  - El producto entre ambos números resulta el máximo posible.
- VI) Una ventana tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo encima, cuyo diámetro es igual a la base del rectángulo.- Si el perímetro total de la ventana es 2, hallar las dimensiones para que su área sea máxima.
- VII) Una página se escribe con texto de área  $34 \text{ cm}^2$ , dejando arriba y abajo márgenes de ancho 2cm y lateralmente márgenes de ancho de 3 cm.- ¿Cuál es el tamaño de la hoja más económico?

#### **TRABAJO PRÁCTICO Nº 8: REGLA DE L' HÔPITAL**

**Actividad N° 1:** Evaluar los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hôpital cuando corresponda:

$$a- \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{3 \cos x}{2x - \pi} \right)$$

$$b- \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\tan x} \right)$$

$$c- \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{3x+2}}{x^2} \right)$$

$$d- \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4}{x^2} - \frac{2}{1 - \cos x} \right)$$

$$e- \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

$$f- \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$$

$$g- \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \cdot e^{-x})$$

$$h- \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{2}{x}}$$

$$i- \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^{\ln x}$$

$$j- \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{sen} x}$$

$$k- \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tg x - 1) \cdot \sec(2x)$$

$$l- \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x - \frac{3}{2} \operatorname{sen}(2x)} \right)$$

**Actividad N° 2:** De ser posible determinar la convergencia de la sucesión  $(a_n) = \left( \frac{n}{2^n} \right)$

**AUTO EVALUACIÓN:** Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Obtener c para que  $f(x)$  para que sea continua en  $x = 0$ .
- b) Obtener b para que  $f(x)$  para que sea derivable en  $x = 0$ .
- c) Comprobar lo anterior dicha función graficando con una app.

### ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

**Actividad N° 1:** Calcular los siguientes límites aplicando Regla de L'Hôpital y reducir el resultado:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{4x} \right)^{3x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 2\sqrt{\operatorname{sen} x})^2}{x} =$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^3 x + 2x} =$$

## Integrales Indefinidas

### 1.- INTRODUCCIÓN Y DEFINICIÓN

En matemática estamos acostumbrados a hablar de operaciones inversas, la suma tiene su inversa que es la resta; el producto, la división; etc. También podemos pensar que la operación derivada tiene una inversa y esta será la integración o antiderivada (como la llaman algunos autores).

En este capítulo nos referiremos a ella, para lo cual debemos tener en cuenta que en el cálculo diferencial se expresó la derivada de una función de la siguiente manera:

$$\text{si } y = f(x) \text{ resulta } y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

y, por lo tanto:  $d f(x) = f'(x) dx$  que constituye la expresión de la diferencial de una función  $f(x)$ .

En el cálculo integral, trataremos de hallar una función cuya derivada conocemos, es decir, calcularemos  $F(x)$  sabiendo como dato, que  $F'(x) = f(x)$ . Si además tenemos en cuenta que:

$$d F(x) = F'(x) dx = f(x) dx,$$

podemos decir que el problema de la integración es hallar una función cuya diferencial (y por ende su derivada) conocemos.

La función  $F(x)$  que se logra como resultado de este proceso se llama integral de la diferencial dada y recibe el nombre de primitiva o antiderivada de la función  $f(x)$ .

Por lo expuesto, podemos definir como función Primitiva o Antiderivada de una función  $f(x)$ :

$$F(x) \text{ es una Primitiva o Antiderivada de } f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Es necesario tener en cuenta que pueden existir muchas funciones que tienen la misma derivada (infinitas) y que, por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, todas difieren en una constante, por lo tanto, si  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$  también lo será  $F(x) + C$ ,  $\forall C \in \mathbb{R}$ , ya que se verificará:  $D[F(x) + C] = F'(x) = f(x)$ , lo cual satisface la definición de primitiva. Asimismo, teniendo en cuenta lo dicho al comienzo, podemos definir la integral de dos maneras (que en realidad es solamente una):

**"LA OPERACIÓN INTEGRAL ES BUSCAR UNA FUNCIÓN CUYA DIFERENCIAL (Y POR ENDE SU DERIVADA) SE CONOCE"**

Simbólicamente:  $\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow D[F(x) + C] = F'(x) = f(x)$

El valor " $C$ ", que es una constante que pertenece al conjunto de los números reales, recibe el nombre de "Constante de Integración" y debemos escribirla en todos los casos de integrales indefinidas para tener en cuenta las infinitas primitivas que tiene una función y que difieren entre sí en dicha constante.

### 2.- INTEGRALES INMEDIATAS

Si bien es posible afirmar que toda función continua tiene una integral indefinida o primitiva, puede resultar que esta sea imposible de obtener en términos de funciones elementales conocidas.

## Análisis Matemático I - F.I. - U.N.N.E.

Además, es necesario tener en cuenta que en cálculo integral no se puede formular una regla general de integración, como la que fue formulada para el cálculo diferencial (que nos permitió obtener las fórmulas de derivación), sino que cada caso necesita un análisis especial que permita resolverlo.

Asimismo, y teniendo en cuenta esto, se puede afirmar que la integración es un procedimiento en el cual deben efectuarse sucesivos ensayos para resolverla, y para facilitar este trabajo se formularon tablas de integrales conocidas o de fácil cálculo, las que constituyen las llamadas "Tablas de Integrales Inmediatas", que convienen recordar para poder aplicarlas en los distintos problemas.

También es necesario aclarar que muchas de las integrales se resuelven solamente aplicando artificios matemáticos que son específicos para cada una de ellas. En el presente capítulo solo trataremos de explicar los métodos más generales para resolverlas.

Para el cálculo de algunas integrales inmediatas o fáciles de resolver tendremos en cuenta que se puede verificar el resultado obtenido aplicando la definición de integral, es decir, comparando la diferencial del resultado con la diferencial a integrar, las que deben resultar iguales.

Considerando lo expuesto, vamos a calcular algunas integrales inmediatas o fáciles de resolver:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ si } n \neq -1 & \text{b) } \int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \text{ si } n = -1 \\ \text{c) } \int e^x dx = e^x + C & \text{d) } \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C \\ \text{e) } \int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C & \text{f) } \int \sin x dx = -\cos x + C \quad \text{g) } \int \cos x dx = \sin x + C \\ \text{h) } \int \sec^2 x dx = \tan x + C & \text{i) } \int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C \quad \text{j) } \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \\ \text{k) } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C & \text{l) } \int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C \dots \end{array}$$

**Nota:** La presente tabla no agota la totalidad de integrales que pueden ser consideradas como inmediatas, sino se trató de ejemplificar las más usuales.

### 3.- PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

#### 3.1. Derivada de la integral

Por definición de integral, podemos decir:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow D[F(x) + C] = F'(x) = f(x)$$

Si derivamos ambos miembros de la primera parte de la expresión de la definición de integral vemos que se mantiene la igualdad, dado que si las funciones son iguales, también lo son sus derivadas. Entonces:

$$D \int f(x) dx = D[F(x) + C] \text{ por lo tanto, resulta que:} \quad D \int f(x) dx = F'(x)$$

pero, por la definición de integral indefinida, resulta que:  $F'(x) = f(x)$

y, por carácter transitivo podemos afirmar:  $D \int f(x) dx = f(x)$ , es decir:

**"La derivada de una integral de una función da como resultado la misma función"**

Ejemplo:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

resultado al que llegamos aplicando la fórmula de integración respectiva. Si derivamos a ambos miembros, resulta:

$$D \int x^3 dx = D \left[ \frac{x^4}{4} + C \right] = \frac{4x^3}{4} = x^3, \text{ con lo que se verifica numéricamente, la propiedad.}$$

### **3.2 Integral de una diferencial**

Teniendo en cuenta la definición de integral, podemos afirmar:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

si diferenciamos la segunda parte de esta expresión, resulta:  $d[f(x)] = d[F'(x)]$

resolviendo las diferenciales tenemos:  $f'(x) dx = F''(x) dx$ , dado que la diferencial de una función es igual a la derivada de la misma, multiplicada por la diferencial de la variable independiente. Calculemos ahora la siguiente integral:

$$\int d[f(x)] = \int f'(x) dx = \int F''(x) dx$$

pero resulta que:  $\int F''(x) dx = F'(x) + C \Leftrightarrow D[F'(x) + C] = F''(x)$

y como por la definición de integral resulta que:  $f(x) = F'(x)$

por carácter transitivo podemos afirmar:  $\boxed{\int d[f(x)] = f(x) + C}$

es decir:

**"La integral de la diferencial de una función resulta igual a la misma función más la constante de integración"**

Ejemplo: Sea:  $f(x) = \sin x$  resultará  $d[f(x)] = \cos x dx$

Por lo tanto:  $\int d[f(x)] = \int \cos x dx = \sin x + C = f(x) + C$

### **3.3. Integral de una suma de funciones**

Por la definición de integral indefinida resulta que:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow D[F(x) + C] = F'(x) = f(x)$$

Si consideramos ahora la suma de dos funciones:  $F(x) = G(x) + H(x)$   
su derivada será:  $F'(x) = G'(x) + H'(x)$

## Análisis Matemático I - F.I. - U.N.N.E.

Teniendo en cuenta que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de cada una de ellas, y además:  $F'(x) = f(x)$  entonces,  $f(x) = G'(x) + H'(x)$  (1)  
si llamamos:

$$\begin{aligned} g(x) &= G'(x) \text{ entonces } G(x) \text{ es primitiva de } g(x) \\ y \quad h(x) &= H'(x) \text{ entonces } H(x) \text{ es primitiva de } h(x) \end{aligned} \quad (2)$$

reemplazando en (1) resulta:  $f(x) = g(x) + h(x)$ ; por lo tanto, si calculamos la integral indefinida resultará:

$$\int f(x) dx = \int [g(x) + h(x)] dx = F(x) + C = [G(x) + H(x)] + C$$

$$\text{es decir: } \int [g(x) + h(x)] dx = G(x) + H(x) + C \quad (3)$$

Teniendo en cuenta lo expresado en (2) resulta que:

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= G(x) + C_1 \\ + \\ \int h(x) dx &= H(x) + C_2 \\ \hline \int g(x) dx + \int h(x) dx &= G(x) + H(x) + C_1 + C_2 \end{aligned}$$

resultado que obtenemos sumando miembro a miembro las dos igualdades, que por supuesto da otra igualdad. Además, si consideramos que la suma de dos constantes da siempre otra constante, podemos hacer:  $C = C_1 + C_2$

$$\text{donde resulta: } \int g(x) dx + \int h(x) dx = G(x) + H(x) + C \quad (4)$$

Si comparamos ahora las expresiones (3) y (4) resulta que los segundos miembros de ambas son iguales, por lo tanto, también tienen que ser iguales los primeros miembros, es decir:

$$\int [g(x) + h(x)] dx = \int g(x) dx + \int h(x) dx$$

por lo tanto:

**"La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de dichas funciones"**

$$\text{Ejemplo: } \int (x^3 + x^2) dx = \int x^3 dx + \int x^2 dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$$

### 3.4 Integral de una constante por la función

Por definición de integral indefinida resulta:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Sea:  $F(x) = k G(x)$  donde  $k$  es una constante cualquiera que pertenece al conjunto de los números reales. Si derivamos ambos miembros resultará:  $F'(x) = K G'(x)$

Dado que la derivada de una función multiplicada por una constante es igual a la constante por la derivada de la función.

Si además consideramos:  $G'(x) = g(x)$ , entonces  $G(x)$  es una primitiva de  $g(x)$ .

SI tenemos en cuenta las igualdades vistas anteriormente, podemos decir que:

$$F'(x) = k G'(x) = k g(x) = f(x)$$

Si calculamos ahora la integral siguiente, resultará:

$$\int f(x) dx = \int k g(x) dx = F(x) + C = k G(x) + C \quad (1)$$

y además:  $\int g(x) dx = G(x) + C_1$  por ser  $G(x)$  una primitiva de  $g(x)$

multiplicando ambos miembros de esta igualdad por  $k$ , la misma se mantendrá, es decir:

$$k \int g(x) dx = k [G(x) + C_1] = k G(x) + k C_1$$

reemplazando  $k C_1 = C$  por ser ambas constantes de integración, la expresión anterior quedará:

$$k \int g(x) dx = k G(x) = C \quad (2)$$

Si comparamos las expresiones (1) y (2), los últimos miembros de ambas son iguales, por lo tanto, por carácter transitivo también lo serán los primeros miembros, y entonces:

$\int k g(x) dx = k \int g(x) dx$

es decir:

**"La integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función"**

Ejemplo:  $\int 3 \sin x dx = 3 \int \sin x dx = -3 \cos x + C$

#### 4.- MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Como ya hemos mencionado, no siempre la integral de una función nos da una función elemental conocida y además, no siempre la función a integrar responde a algunas de las integrales llamadas inmediatas. En este último caso, es necesario aplicar algunos de los métodos que veremos a continuación. Los mismos representan técnicas adicionales, aplicables en algunos de los casos, para tratar de llevar la expresión a integrar a una forma inmediata o de más fácil resolución. En general, los métodos se basan en propiedades de las funciones de las integrales que ya hemos considerado anteriormente.

##### 4.1 Integración por Descomposición - Linealidad de la Integración

Este método se basa en las propiedades de las integrales vistas anteriormente en los puntos 3.3 y 3.4:

$$\begin{aligned} \int [f(x) + g(x)] dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ \int k f(x) dx &= k \int f(x) dx \end{aligned}$$

## Análisis Matemático I - F.I. - U.N.N.E.

Su aplicación principal, aunque se usa en otros casos también, es en las funciones de tipo polinómicas. Consideremos, por ejemplo, el siguiente polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

calculamos su integral:  $\int P(x) dx = \int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n) dx$   
al aplicar las propiedades vistas anteriormente, resulta:

$$\int P(x) dx = a_0 \int dx + a_1 \int x dx + a_2 \int x^2 dx + \dots + a_n \int x^n dx =$$

con lo cual se logra una serie de integrales de fácil resolución. Es decir:

$$\int P(x) dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

lo que nos permitió resolver el problema.

Veremos a continuación un ejemplo de aplicación del método que nos permitirá entender mejor el problema. Calcularemos:

$$I = \int \frac{x^3 + 3\sqrt{x} - 6}{x} dx = \int \left( \frac{x^3}{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{6}{x} \right) dx =$$

$$\int \left( x^2 + 3x^{1/2} - \frac{6}{x} \right) dx =$$

aplicando descomposición, resulta:

$$I = \int x^2 dx + 3 \int x^{-1/2} dx - 6 \int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + 6\sqrt{x} - 6 \ln x + C$$

con lo cual hemos logrado resolver la integral.

### 4.2 Integración por Sustitución

Este método es también conocido como "Integración por la Regla de la Cadena", por similitud a la regla de la cadena utilizada en derivadas de funciones compuestas.

Este método se aplica, en general, cuando tenemos que integrar una función de función (o función compuesta).

Consideremos dos funciones derivables:  $y = F(u)$   $\wedge$   $u = g(x)$   $\Rightarrow$   $y = F[g(x)]$   
derivando, para lo cual hay que aplicar la regla de la cadena, resulta que:  $y' = F'(u) \cdot g'(x)$   
si además:  $F(u)$  es primitiva de  $f(u)$  entonces  $F'(u) = f(u)$ , de donde:  
 $y' = F'(u) \cdot g'(x) = f(u) \cdot g'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$

Ahora bien, si tenemos una integral del tipo:  $\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx$

y teniendo en cuenta que:  $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x) dx$

reemplazando en la integral:

$$\int f[g(x)] g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F[g(x)] + C$$

que nos ha permitido resolverla.

A continuación presentamos una serie de ejemplos que nos permitirá apreciar la mayoría de los casos que se resuelven aplicando el método de integración por sustitución:

a)  $\int \cos ax \, dx =$

si llamamos  $u = ax \Rightarrow du = a \, dx \Rightarrow \frac{du}{a} = dx$

entonces:  $\int \cos ax \, dx = \int \cos u \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int \cos u \, du = \frac{1}{a} \operatorname{sen} u + C = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax + C$

b)  $\int \sqrt{3x+2} \, dx =$

si llamamos  $u = 3x + 2 \Rightarrow du = 3 \, dx \Rightarrow \frac{du}{3} = dx$

entonces:  $\int \sqrt{3x+2} \, dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^{1/2} \, du = \frac{1}{3} \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} u^{3/2} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(3x+2)^3} + C$

c)  $\int (ax - b)^3 \, dx =$

si llamamos  $u = ax - b \Rightarrow du = a \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{a}$

realizando la sustitución:  $\int (ax - b)^3 \, dx = \int u^3 \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4a} + C = \frac{(ax - b)^4}{4a} + C$

d)  $\int \frac{2x \, dx}{(3x^2 + 5)^5} =$

si llamamos:  $u = 3x^2 + 5 \Rightarrow du = 6x \, dx \Rightarrow x \, dx = \frac{du}{6}$  sustituyendo:

$$\int \frac{2x \, dx}{(3x^2 + 5)^5} = \int \frac{2}{u^5} \frac{du}{6} = \frac{1}{3} \int u^{-5} \, du = \frac{1}{3} \frac{u^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{12u^4} + C = -\frac{1}{12(3x^2 + 5)^4} + C$$

e)  $\int e^{-5x} \, dx$

si llamamos:  $u = -5x \Rightarrow du = -5 \, dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$

realizando la sustitución:  $\int e^{-5x} \, dx = \int e^u \left( -\frac{du}{5} \right) = -\frac{1}{5} \int e^u \, du = -\frac{1}{5} e^u + C = -\frac{1}{5} e^{-5x} + C$

f)  $\int \frac{3x^3 \, dx}{(x^2 - 2)^2}$

si llamamos:  $u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2x \, dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x \, dx$

donde:  $x^2 = u + 2$ , por lo tanto:  $\int \frac{3x^3 dx}{(x^2 - 2)^2} = 3 \int \frac{x^2 x dx}{(x^2 - 2)^2} = 3 \int \frac{(u+2) \frac{du}{2}}{u^2} = \frac{3}{2} \int \frac{u+2}{u^2} du$  y podemos aplicar el método de descomposición visto anteriormente:

$$= \frac{3}{2} \left[ \int \frac{u du}{u^2} + 2 \int \frac{du}{u^2} \right] = \frac{3}{2} \int \frac{du}{u} + 3 \int u^{-2} du = -\frac{3}{2} \ln u + 3 \frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 2) - \frac{3}{x^2 - 2} + C$$

g)  $\int \frac{x^5 dx}{(x^2 - 1)^3} =$

si llamamos  $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$

además:  $x^2 = u + 1 \Rightarrow x^4 = (u + 1)^2 = u^2 + 2u + 1$

sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 dx}{(x^2 - 1)^3} &= \int \frac{(u^2 + 2u + 1) \frac{du}{2}}{u^3} = \frac{1}{2} \left[ \int \frac{u^2}{u^3} du + 2 \int \frac{du}{u^2} + \int \frac{du}{u^3} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} + \int u^{-2} du + \frac{1}{2} \int u^{-3} du = \\ &= \frac{1}{2} \ln u + \frac{u^{-1}}{-1} + \frac{1}{2} \frac{u^{-2}}{-2} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{u} - \frac{1}{4u^2} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) - \frac{1}{(x^2 - 1)} - \frac{1}{4(x^2 - 1)^2} + C \end{aligned}$$

#### 4.3 Integración por partes

Es una técnica que se utiliza para transformar una integral a formas más sencillas que la dada originalmente y así poder resolverla. Su justificación se basa en el cálculo de la diferencial de un producto de dos funciones, es decir:

$$\begin{aligned} d(u \cdot v) &\quad \text{donde } u = u(x) \wedge v = v(x) \text{ es igual a:} \\ d(u \cdot v) &= D(u \cdot v) dx = (u'v + v'u) dx = v u' dx + u v' dx \end{aligned}$$

y si tenemos en cuenta que:

$$u = u(x) \Rightarrow du = u' dx$$

$$v = v(x) \Rightarrow dv = v' dx$$

Reemplazando:  $d(u \cdot v) = v du + u dv$

De donde:  $u dv = d(u \cdot v) - v du$

Si integramos ambos miembros y aplicamos propiedades de la integral indefinida, tendremos:

$$\int u dv = \int d(u \cdot v) - \int v du = u \cdot v - \int v du$$

Luego, la fórmula a utilizar:

$\int u dv = u \cdot v - \int v du$

En general puede decirse que: "La integral del producto de una función por la diferencial de otra, es igual al producto de ambas funciones menos la integral de la segunda por la diferencial de la primera función".

Aparentemente deben existir dos funciones para poder aplicar el método, pero resulta que también es aplicable, como veremos en los ejemplos, a los casos de funciones trascendentes cuyas derivadas son algebraicas, como por ejemplo, la función  $y = \ln x$  cuya derivada es  $y' = \frac{1}{x}$ , y en ese caso:  $\int \ln x \, dx$  se puede resolver por el método de integración por partes, aunque parece una sola función, pero realmente son dos, es decir:

$$u = \ln x \quad \wedge \quad v = x \Rightarrow dv = dx$$

Asimismo, siempre debe descomponerse la diferencial dada en dos funciones ( $u$  y  $dv$ ) y la mayor dificultad del método estriba en que no pueden darse instrucciones precisas para la elección de las mismas, sino solamente algunas indicaciones como las siguientes:

- El  $dx$  está siempre presente en  $dv$
- Debe resultar posible integrar  $dv$  (aunque no siempre sea una integral inmediata)
- Cuando se deba integrar el producto de dos funciones, generalmente es mejor elegir la forma más complicada (aparentemente) como parte del  $dv$ .

Veamos el siguiente ejemplo. Primero lo resolveremos eligiendo correctamente los factores y luego haremos la elección incorrecta de los mismos para que se vea como aparece una segunda integral más difícil de resolver, que la primera.

Consideremos:  $\int x e^x \, dx$

si elegimos:  $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^x \, dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x \, dx = e^x$$

$$\text{de donde: } \int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C$$

Nótese que la constante de integración " $C$ " recién fue colocada al finalizar con las integraciones y no en el cálculo de las integrales intermedias, es decir, al calcular la  $\int dv$ ; esto se hace, ya que, como veremos a continuación, el uso de la constante intermedia dan el mismo resultado que si la colocamos al final. Como ejemplo calcularemos la misma integral anterior, utilizando todas las constantes de integración, es decir:  $\int x e^x \, dx =$

si elegimos:  $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^x \, dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x \, dx = e^x + C_1$$

donde resulta:

$$\begin{aligned} \int x e^x \, dx &= x(e^x + C_1) - \int (e^x + C_1) \, dx = \\ &= x e^x + x C_1 - \int e^x \, dx - C_1 \int dx = \\ &= x e^x + x C_1 - e^x + C_2 - x C_1 + C_3 = \\ &= x e^x - e^x + C_2 + C_3 = x e_x - e_x + C \end{aligned}$$

## Análisis Matemático I - F.I. - U.N.N.E.

Teniendo en cuenta que la suma de dos constantes es otra constante:  $C_2 + C_3 = C$

Con lo que se puede comprobar que el resultado obtenido es el mismo que el logrado colocando la constante al finalizar todas las integraciones.

Veremos a continuación la manera incorrecta de resolverla:  $\int e^x x \, dx =$

si elegimos:  $u = e^x \Rightarrow du = e^x \, dx$

$$dv = x \, dx \Rightarrow v = \int dv = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{donde resulta: } \int e^x x \, dx = e^x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x \, dx = \frac{e^x x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 e^x \, dx$$

Podemos observar que la integral que nos queda es más complicada que la original y este hecho nos indica que la elección es incorrecta.

Ejemplos:

a.-  $\int \ln x \, dx =$

si:  $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dv = \int dx = x$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = \\ &= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

b.-  $\int \arctg x \, dx =$

si:  $u = \arctg x \, dx = \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dv = \int dx = x$$

entonces:  $\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} =$

y esta última integral la resolvemos por sustitución:

$$w = 1+x^2 \Rightarrow dw = 2x \, dx \Rightarrow x \, dx = \frac{dw}{2}$$

de donde:

$$\int \frac{x \, dx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{dw}{2}}{w} = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2} \ln w + C =$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

reemplazando resulta:  $\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

c.-  $\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cos x \, dx =$

si:  $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx$

$$dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \int dv = \int \cos x \, dx = \sin x$$

entonces:  $\int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx =$

como:  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\begin{aligned} & \int \cos^2 x \, dx = \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \\ & \text{reemplazamos y resulta:} \quad = \cos x \sin x + \int dx - \cos^2 x \, dx \end{aligned}$$

resolviendo:  $2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \sin x + x$

luego:  $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \cos x \cdot \sin x) + C$

d.-  $\int x^2 \sin x \, dx$

si:  $u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx$

$$dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = \int dv = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx = \\ &= -x^2 \cos x - 2 \int x \cos x \, dx = \end{aligned}$$

Debemos calcular la última integral que, si bien no es inmediata, también puede resolverse por partes, siendo más simple que la integral inicial, es decir:

$$\int x \cos x \, dx =$$

si:  $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \int dv = \int \cos x \, dx = \sin x$$

entonces:  $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x$

y reemplazando en la integral I tendremos que:

$$I = \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C$$

## 5.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS RACIONALES FRACCIONARIAS

Analizaremos la integración de funciones del tipo:  $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Tanto  $P(x)$  como  $Q(x)$  son polinomios de "x": Por ejemplo:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_m x^m$$

Donde el grado del polinomio  $P(x)$  es "n" y el de  $Q(x)$ , "m". Entonces la función:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_m x^m}$$

recibe el nombre de "fracción racional fraccionaria"

Comparando los grados de ambos polinomios puede resultar que:  $n \geq m$ . En ese caso la función recibe el nombre de fraccionaria impropia. Si  $n < m$ , la función es fraccionaria propia.

Los métodos que analizaremos a continuación están referidos a funciones fraccionarias propias, pero en el caso de no serlo, se podrán convertir mediante una fácil operación algebraica. Para ello y, como el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del denominador, podemos efectuar la división, con lo cual obtendremos un resultado que llamaremos  $C(x)$  y un Resto  $R(x)$ ; donde ambos son polinomios de "x", es decir:

$$\begin{array}{c} P(x) | Q(x) \\ \hline R(x) \quad C(x) \end{array}$$

El grado de  $R(x)$  debe ser menor que el de  $Q(x)$ , caso contrario, la división está incompleta y debemos continuar hasta que esto ocurra.

Por la definición de cociente resulta:  $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$

Si dividimos ambos miembros por  $Q(x)$  nos queda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot C(x) + R(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot C(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Hemos convertido la función fraccionaria impropia  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  en la suma de un polinomio  $C(x)$  y una

función fraccionaria propia, donde el grado del numerador es menor que el del denominador,  $\frac{R(x)}{Q(x)}$

Por lo tanto, si tenemos:  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , donde el grado de  $P(x)$  es mayor que el de  $Q(x)$ , podemos

convertirla en:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

y la  $\int C(x) dx$  es de fácil resolución como hemos visto en el método de integración por descomposición, quedando por resolver la integral:  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  que es la de una función racional propia.

Los casos que analizaremos, son todos referidos a funciones racionales propias y difieren entre si en el tipo de raíces que tiene el polinomio del denominador, es decir  $Q(x)$ , y los podemos clasificar en:

# Análisis Matemático I - F.I. - U.N.N.E.

- a) Raíces del denominador reales simples o ceros reales simples.
- b) Raíces del denominador reales múltiples o combinación de raíces reales múltiples y simples.
- c) Raíces del denominador imaginarias (complejos conjugados).

A continuación resolveremos los dos primeros casos, ya que el tercero corresponde a una integración en el campo complejo, que evade los temas tratados en este trabajo.

## **5.1 Raíces Reales Simples o Ceros Reales Simples**

Si el polinomio del denominador tiene grado "m" tendrá "m" raíces y si son simples, serán todas distintas, es decir:  $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \dots \neq x_m$

Aplicando la descomposición del polinomio en factores binomiales, resulta:

$$Q(x) = b_m (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)$$

Consideremos además que  $b_m = 1$ , donde el coeficiente del término de mayor grado de  $Q(x)$  es igual a uno. Si esto no ocurre, se podemos hacer lo siguiente:

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{b_m} = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m) Q(x) = b_m Q_1(x)$$

obteniendo así un nuevo polinomio  $Q_1(x)$  cuyas raíces son iguales a las de  $Q(x)$  y que tiene el coeficiente del término de mayor grado igual a uno. Por consiguiente, la integral nos queda:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{P(x)}{b_m Q_1(x)} dx = \frac{1}{b_m} \int \frac{P(x)}{Q_1(x)} dx$$

donde el coeficiente del término de mayor grado del nuevo polinomio es igual a uno, con lo cual podemos afirmar que al resolver la integral  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  considerando  $b_m = 1$ , y no quitamos generalidad al problema.

Si hacemos:  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)} = \frac{A}{(x - x_1)} + \frac{B}{(x - x_2)} + \frac{C}{(x - x_3)} + \dots + \frac{M}{(x - x_m)}$

efectuamos la descomposición de la función fraccionaria en una suma de fracciones simples, donde  $A, B, C, \dots, M$ , son constantes que debemos determinar.

Si en la expresión anterior, efectuamos el pasaje de  $Q(x)$  al otro miembro, resulta:

$$P(x) = \frac{A Q(x)}{x - x_1} + \frac{B Q(x)}{x - x_2} + \frac{C Q(x)}{x - x_3} + \dots + \frac{M Q(x)}{x - x_m}$$

y reemplazando  $Q(x)$  por el producto de sus factores binomiales, tenemos:

$$P(x) = \frac{A (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)}{x - x_1} + \frac{B (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)}{x - x_2} + \dots + \frac{M (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)}{x - x_m} =$$

simplificando:

$$P(x) = A(x - x_2) \dots (x - x_m) + B(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_m) + \dots + M(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{m-1})$$

A partir de esta expresión, para calcular las constantes podemos usar dos procedimientos que nos permitirán obtener idénticos resultados.

Uno de los procedimientos es el siguiente:

Hacemos  $x = x_1$  tenemos:

$$\begin{aligned} P(x_1) &= A(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_m) + B(x_1 - x_1)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_m) + \dots + \\ &+ M(x_1 - x_1)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_{m-1}) = \end{aligned}$$

y si se observa, salvo el primer término, todos los demás poseen un factor  $(x_1 - x_1)$  que es igual a cero, por lo tanto, se anulan y nos queda solamente:  $P(x_1) = A(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_m)$

Donde: 
$$A = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_m)}$$

De manera similar, si hacemos  $x = x_2$ :

$$\begin{aligned} P(x_2) &= A(x_2 - x_2)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_m) + B(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_m) + \dots + \\ &+ M(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) \dots (x_2 - x_{m-1}) = \end{aligned}$$

De igual manera que en el caso anterior, tendremos factores  $(x_2 - x_2)$  que resultan iguales a cero y nos queda:  $P(x_2) = B(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_m)$

Donde: 
$$B = \frac{P(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_m)}$$

y así sucesivamente, haciendo:

$$x = x_3$$

$$x = x_4$$

:

:

$$x = x_{m-1}$$

hasta llegar a  $x = x_m$  donde:

$$\begin{aligned} P(x_m) &= A(x_m - x_2)(x_m - x_3) \dots (x_m - x_m) + B(x_m - x_1)(x_m - x_3) \dots (x_m - x_m) + \dots + \\ &+ M(x_m - x_1)(x_m - x_2) \dots (x_m - x_{m-1}) = \end{aligned}$$

Donde: 
$$M = \frac{P(x_m)}{(x_m - x_1)(x_m - x_2) \dots (x_m - x_{m-1})}$$

con lo cual hemos calculado los valores de las constantes:  $A, B, \dots, M$  y por lo tanto podemos resolver la integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left[ \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \dots + \frac{M}{x - x_m} \right] dx =$$

aplicando el método de descomposición y propiedades de la integral, resultará:

# Análisis Matemático I - F.I. - U.N.N.E.

$$= A \int \frac{dx}{x - x_1} + B \int \frac{dx}{x - x_2} + \dots + M \int \frac{dx}{x - x_m} =$$

de esta manera nos quedarán "m" integrales del tipo:

$\int \frac{dx}{x - x_i}$  que debemos calcular por sustitución, es decir:

$$\text{si } u = x - x_i \Rightarrow du = dx \Rightarrow \int \frac{dx}{x - x_i} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(x - x_i) + C$$

por lo tanto:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \ln(x - x_1) + B \ln(x - x_2) + \dots + M \ln(x - x_m) + C_i =$$

y aplicando propiedades de los logaritmos resultará:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \ln [(x - x_1)^A (x - x_2)^B \dots (x - x_m)^M] + Ci$$

con lo cual se ha resuelto la integral.

El otro procedimiento es más general, ya que el que hemos visto anteriormente nos sirve únicamente para el caso de raíces simples, en cambio este no solo sirve para ese caso, sino que también para los de raíces múltiples o combinación de raíces simples y múltiples. Se denomina: "Método de los Coeficientes Indeterminados" y se basa en que, a partir de:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} + \dots + \frac{M}{x - x_m}$$

podemos llegar a:

$$\begin{aligned} P(x) &= A(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_m) + B(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_m) + \dots + \\ &+ M(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{m-1}) = \end{aligned}$$

Si resolvemos esta igualdad llegaremos a una de polinomios en "x" y por una propiedad de la igualdad de los mismos, los coeficientes de igual grado de "x" tienen que resultar iguales y, entonces esto nos permite formular un sistema de "m" ecuaciones con "m" incógnitas que son: A, B, C,...,M, que podemos resolver mediante alguno de los métodos para el cálculo de sistemas de ecuaciones, con lo cual obtendremos los valores de las constantes.

Luego de esto, se puede calcular la integral siguiendo el mismo procedimiento anterior.  
A continuación veremos un ejemplo, que los resolveremos aplicando ambos procedimientos:

Se desea calcular:  $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - x} dx =$

Donde:  $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$       y  $Q(x) = x^3 - x$

si calculamos las raíces del polinomio denominador:

$$Q(x) = x^3 - x = 0, \text{ entonces:}$$

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 - 1 = 0$$

y el conjunto solución de las raíces de  $Q(x)$  será:  $\{x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1\}$   
por lo tanto:  $Q(x) = x(x-1)(x+1)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} =$$

Donde:  $2x^2 - 3x + 1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$

si  $x = 0$ , entonces:

$$2(0)^2 - 3(0) + 1 = A(0-1)(0+1) + B(0)(0+1) + C(0)(0-1) \Rightarrow 1 = A(-1)(1) \Rightarrow A = -1$$

si  $x = 1$ , entonces:

$$2(1)^2 - 3(1) + 1 = A(1-1)(1+1) + B(1)(1+1) + C(1)(1-1) \Rightarrow 2 - 3 + 1 = 2B \Rightarrow 0 = 2B \Rightarrow B = 0$$

si  $x = -1$ , entonces:

$$2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = A(-1-1)(-1+1) + B(-1)(-1+1) + C(-1)(-1-1) \Rightarrow 2 + 3 + 1 = C(-1)(-2) \Rightarrow 6 = 2C \Rightarrow C = 3$$

con lo cual hemos calculado los tres coeficientes.

De otra manera y teniendo en cuenta que:  $2x^2 - 3x + 1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$   
operando:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= A(x^2 - 1) + B(x^2 + x) + C(x^2 - x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = x^2(A + B + C) + x(B - C) - A \end{aligned}$$

si igualamos los coeficientes de igual grado de "x", tendremos:  $\begin{cases} 2 = A + B + C \\ -3 = B - C \\ 1 = -A \end{cases}$

que resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que podemos resolver por alguno de los métodos conocidos.

Aplicaremos sustitución. Si consideramos la tercera ecuación, resulta:  $A = -1$ .

Si reemplazamos este valor en la primera, tendremos:  $-1 + B + C = 2 \Rightarrow B + C = 3 \Rightarrow B = 3 - C$   
y reemplazando en la segunda:  $-3 = (3 - C) - C \Rightarrow -3 = 3 - 2C \Rightarrow C = 3$

por lo tanto, como:  $B = 3 - C \Rightarrow B = 3 - 3 \Rightarrow B = 0$

Hemos calculado los coeficientes. Podemos ahora resolver la integral.  
Entonces:

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - x} dx = -1 \int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dx}{x+1} = -1 \ln|x| + 3 \ln(x+1) + Ci = \\ = \ln[x^{-1} \cdot (x+1)^3] + Ci = \ln\left[\frac{(x+1)^3}{x}\right] + Ci$$

## **5.2 Raíces Reales Múltiples o Combinación de Reales Múltiples y Simples**

Consideremos  $Q(x)$  un polinomio de grado "m" y :  $m = h + k + s$   
 y que además las raíces de  $Q(x)$  son:  
 $x_1$  múltiples      h veces  
 $x_2$  múltiples      k veces  
 $x_3$  múltiples      s veces

Asimismo:       $b_m = 1$

Caso contrario operamos de igual forma que en el punto anterior (5.1). Entonces resulta:

$$Q(x) = (x - x_1)^h (x - x_2)^k (x - x_3)^s$$

efectuamos la descomposición siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_0}{(x - x_1)^h} + \frac{A_1}{(x - x_1)^{h-1}} + \frac{A_2}{(x - x_1)^{h-2}} + \dots + \frac{A_{h-1}}{(x - x_1)} + \\ &+ \frac{B_0}{(x - x_2)^k} + \frac{B_1}{(x - x_2)^{k-1}} + \frac{B_2}{(x - x_2)^{k-2}} + \dots + \frac{B_{k-1}}{(x - x_2)} + \\ &+ \frac{C_0}{(x - x_3)^s} + \frac{C_1}{(x - x_3)^{s-1}} + \frac{C_2}{(x - x_3)^{s-2}} + \dots + \frac{C_{s-1}}{(x - x_3)} = \end{aligned}$$

Luego, procedemos de manera similar a lo utilizado en el desarrollo de raíces reales simples, es decir, “pasamos”  $Q(x)$  al otro miembro, multiplicamos y realizamos las simplificaciones correspondientes.

Como en el caso anterior veremos dos formas de obtener los coeficientes.

Una, operando de manera similar al de raíces simples, utilizando el "Método de los Coeficientes Indeterminados". Efectuamos las operaciones en el segundo miembro de la igualdad y sacamos factores comunes los distintos grados de "x", obteniendo así un polinomio que es igual a  $P(x)$  y por propiedad de estos, para ser iguales, los coeficientes de los términos de igual grado también deben ser iguales, lo que nos permite obtener un sistema de ecuaciones (m) con la misma cantidad de incógnitas, que resolviendo obtenemos los coeficientes, que son las incógnitas.

El otro Método, llamado "Método de las Derivadas", consiste en que, luego de multiplicar ambos miembros por  $Q(x)$  se procede a dar a "x" los valores de las raíces, en nuestro caso  $x_1, x_2$  y  $x_3$ ; con lo cual obtendremos los coeficientes de subíndice cero ( $A_0, B_0$  y  $C_0$ ).

Luego procedemos a derivar ambos miembros de la igualdad y dar nuevamente a "x" los valores de las raíces, obteniendo así los coeficientes de subíndice uno ( $A_1, B_1$  y  $C_1$  en nuestro ejemplo).

Si continuamos con las derivadas sucesivas, tantas veces como haga falta, obtendremos todos los coeficientes.

A continuación veremos un ejemplo, que resolveremos aplicando ambos procedimientos.

## Análisis Matemático I - F.I. - U.N.N.E.

Se desea calcular la siguiente integral:  $\int \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x - 1)^2(x - 2)} dx =$

En este ejemplo nos dan las raíces del denominador ya calculadas, lo que nos facilita el trabajo, pero que no invalida la generalidad de los métodos, ya que obtener las raíces de un polinomio es un problema meramente algebraico.

Como el polinomio del denominador es de grado 3 debe tener tres raíces, que son:

$$x_1 = x_2 = 1 \quad \text{raíz múltiple, de orden de multiplicidad dos}$$

$$x_3 = 2 \quad \text{raíz simple}$$

Teniendo en cuenta esto, hacemos la siguiente descomposición:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{(x - 1)^2(x - 2)} = \frac{A_0}{(x - 1)^2} + \frac{A_1}{(x - 1)} + \frac{B_0}{(x - 2)}$$

Resolvemos primero por el método de los coeficientes indeterminados.

$$3x^2 - 6x + 2 = A_0(x - 2) + A_1(x - 1)(x - 2) + B(x - 1)^2$$

si resolvemos el segundo miembro obtendremos:

$$3x^2 - 6x + 2 = A_0x - 2A_0 + A_1x^2 - 3A_1x + 2A_1 + Bx^2 - 2Bx + B$$

y sacando factores comunes:

$$3x^2 - 6x + 2 = x^2(A_1 + B) + x(-3A_1 - 2B + A_0) + (-2A_0 + 2A_1 + B)$$

$$\text{por lo tanto: } \begin{cases} A_1 + B = 3 \\ A_0 - 3A_1 - 2B = -6 \\ -2A_0 + 2A_1 + B = 2 \end{cases}$$

lo que resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$A_0, A_1$  y  $B$  que podemos resolver por cualquiera de los métodos conocidos. Lo hacemos por determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (4 + 2) - (6 + 1) = 6 - 7 = -1$$

$$\Delta A_0 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-9 - 4 - 12) - (-6 - 12 - 6) = 14 - 15 = -1$$

$$\Delta A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (12 + 2) - (12 + 3) = 14 - 15 = -1$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (12 + 6) - (18 + 2) = 18 - 20 = -2$$

por lo tanto:

$$A_0 = \frac{\Delta A_0}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$A_1 = \frac{\Delta A_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$B = \frac{\Delta B}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Hemos calculado los coeficientes. Sólo nos resta integrar.

Si aplicamos ahora el método de las derivadas resulta que, teniendo en cuenta la igualdad arribada al comenzar el otro método, tendremos:

$$3x^2 - 6x + 2 = A_0(x - 2) + A_1(x - 1)(x - 2) + B(x - 1)^2$$

si hacemos  $x = 1$ :

$$3(1)^2 - 6(1) + 2 = A_0(1 - 2) + A_1(1 - 1)(1 - 2) + B(1 - 1)^2 \Rightarrow 3 - 6 + 2 = A_0(-1) \Rightarrow -1 = -A_0 \Rightarrow A_0 = 1$$

si hacemos  $x = 2$ :

$$3(2)^2 - 6(2) + 2 = A_0(2 - 2) + A_1(2 - 1)(2 - 2) + B(2 - 1)^2 \Rightarrow 12 - 12 + 2 = B(1) \Rightarrow B = 2$$

derivamos ambos miembros de la igualdad:

$$6x - 6 = A_0 + A_1(x - 2) + A_1(x - 1) + 2B(x - 1)$$

hacemos nuevamente  $x = 1$ , entonces:

$$6(1) - 6 = A_0 + A_1(1 - 2) + A_1(1 - 1) + 2B(1 - 1) \Rightarrow 6 - 6 = A_0 + A_1(-1) \Rightarrow B = A_0 - A_1 \Rightarrow A_0 = A_1 \Rightarrow A_0 = A_1 = 1$$

y obtenemos nuevamente los coeficientes.

Ahora para resolver el ejercicio nos resta calcular las integrales:

$$\int \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x - 1)^2(x - 2)} dx = \int \left[ \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{(x - 1)} + \frac{2}{x - 2} \right] dx =$$

$$\int \frac{1}{(x - 1)^2} dx + \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{2}{x - 2} dx =$$

las calculamos por separado:

$$\int \frac{1}{(x - 1)^2} dx = \text{Resolvemos aplicando el método de sustitución:}$$

$$\text{si } u = x - 1 \Rightarrow du = dx \Rightarrow \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u} = \frac{1}{x - 1}$$

Las otras dos integrales son similares a las realizadas para el caso de raíces simples y dan como resultado siempre logaritmos neperianos. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x - 1)^2(x - 2)} dx &= -\frac{1}{x - 1} + \ln(x - 1) + 2 \ln(x - 2) + C = \\ &= -\frac{1}{x - 1} + \ln[(x - 1)(x - 2)^2] + C\end{aligned}$$

## 6.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El cálculo de integrales de funciones trigonométricas, salvo el caso en que resultan inmediatas, se realiza utilizando el método de integración por sustitución, aunque como veremos, algunas veces hay que efectuar previamente algunos artificios matemáticos.

Resolvemos las integrales de todas las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}\int \sin x \, dx &= -\cos x + C && \text{(integral inmediata)} \\ \int \cos x \, dx &= \sin x + C && \text{(integral inmediata)} \\ \int \tan x \, dx &= \end{aligned}$$

Sabemos que:  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ . Reemplazamos:  $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$ ; donde podemos aplicar el método de integración por sustitución:

$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx \Rightarrow -du = \sin x \, dx$ , entonces:

$$\int \tan x \, dx = \int -\frac{du}{u} = -\ln u + C = -\ln(\cos x) + C$$

$$\int \cot x \, dx =$$

esta integral es similar a la anterior y en ella debemos reemplazar:  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$\text{de lo que resulta: } \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

y para sustituir hacemos:  $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$

$$\text{entonces: } \int \cot x \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(\sin x) + C$$

$$\int \sec x \, dx =$$

En este caso es necesario utilizar previamente un artificio matemático. El mismo consiste en multiplicar numerador y denominador por:  $\sec x + \tan x$

$$\int \sec x \, dx = \int \left[ \sec x \left( \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) \right] dx = \int \frac{\sec^2 x + \tan x \sec x}{\sec x + \tan x} dx =$$

Hacemos la siguiente sustitución:

$$u = \sec x + \operatorname{tg} x \Rightarrow du = (\sec^2 x + \operatorname{tg} x \sec x) dx$$

$$u = \int \sec x dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C$$

$$\int \csc x dx =$$

De manera similar al caso anterior multiplicamos y dividimos por:  $\csc x - \operatorname{ctg} x$

$$\int \csc x dx = \int \left[ \csc x \left( \frac{\csc x - \operatorname{ctg} x}{\csc x - \operatorname{ctg} x} \right) \right] dx = \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cdot \operatorname{ctg} x}{\csc x - \operatorname{ctg} x} dx =$$

En este caso hacemos:  $u = \csc x \operatorname{ctg} x \Rightarrow du = (\csc^2 x - \csc x \cdot \operatorname{ctg} x) dx$

Entonces:

$$\int \csc x dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(\csc x - \operatorname{ctg} x) + C$$

Hacemos notar que en los casos de la secante y cosecante existen otras sustituciones que permiten resolver la integral y si bien, aparentemente, los resultados a los que se arriba son distintos, se puede demostrar su igualdad, o que difieren en una constante, operando trigonométricamente.

## **6.1 Integración de Potencias de Funciones Trigonométricas**

La integración de las potencias de las funciones trigonométricas se resuelven por aplicación del método de integración por sustitución. Generalmente resultan similares entre sí todas las potencias impares, como así también todas las pares. Por lo tanto, para analizar la resolución de cada una de las funciones hacemos una subdivisión:

### **6.1.1 Integración de Potencias de la Función Coseno**

Calculamos la integral:  $\int \cos^n x dx$ , donde el exponente  $n \in \mathbb{N}$  y puede ser un número natural par o impar; además  $n \neq 1$ , ya que en ese caso, pese a ser impar, la integral resulta inmediata.

#### **6.1.1.1 Integración de Potencias Impares de la función $\cos x$**

Consideremos que el exponente es impar, es decir:

$n = 2k + 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , donde reemplazando  $k$  por cada uno de los números naturales, obtendremos todos los naturales impares:

$$k = 1 \Rightarrow n = 2(1) + 1 = 3$$

$$k = 2 \Rightarrow n = 2(2) + 1 = 5$$

$$k = 3 \Rightarrow n = 2(3) + 1 = 7$$

y así sucesivamente.  $u = 2x \Rightarrow du = 2 dx \Rightarrow du = \frac{dx}{2}$

Si reemplazamos  $n$  en la integral y operamos, tenemos:

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^{2k+1} x dx = \int \cos^{2k} x \cos x dx = \int (\cos^2 x)^k \cos x dx =$$

Donde hemos aplicado propiedades del producto de potencias de iguales bases y de la potencia de potencia. Si consideramos ahora la relación de Pitágoras para la trigonometría, que dice:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \implies \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\text{reemplazamos: } \int \cos^n x dx = \int (\cos^2 x)^k \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx =$$

Aplicando el método de integración por sustitución:

$$u = \sin x \implies du = \cos x dx$$

$$\text{resulta: } \int \cos^n x dx = \int (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx = \int (1 - u^2)^k du =$$

y esta última integral la podemos resolver aplicando el desarrollo del Binomio de Newton:

$$\int (1 - u^2)^k du = \int \left[ I^k - \frac{k}{1!} I^{k-1} (u^2)^1 + \frac{k(k-1)}{2!} I^{k-2} (u^2)^2 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} I^{k-3} (u^2)^3 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots 3.2.1}{n!} (u^2)^k \right] du =$$

Para analizar el signo del último término del desarrollo, debemos tener en cuenta que el mismo consta de  $(k+1)$  términos y que los que ocupan una posición impar (términos 1, 3, 5, 7,...) son positivos y los de una posición par (términos 2, 4, 6, 8,...) son negativos. Por lo tanto:

**Si  $k$  es par:** el último término tiene que ser positivo ya que ocupa una posición impar ( $k+1=impar$ ), entonces:  $(-1)^k = 1$  resulta positivo.

**Si  $k$  es impar:** el último término tiene que ser negativo ya que ocupa una posición par ( $k+1=par$ ), entonces:  $(-1)^k = -1$  resulta negativo, con lo cual hemos resuelto el signo del último término del desarrollo. A continuación resolvemos las operaciones posibles y tenemos:

$$\int \cos^n x dx = \int \left[ I - k u^2 + \frac{k(k-1)}{2!} u^4 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} u^6 + \dots + (-1)^k u^{2k} \right] du =$$

y esta última integral la podemos resolver aplicando el método de descomposición y propiedades de la integral indefinida, es decir:

$$\int \cos^n x dx = \int du - k \int u^2 du + \frac{k(k-1)}{2!} \int u^4 du - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \int u^6 du + \dots + (-1)^k \int u^{2k} du =$$

Así, resultan todas integrales inmediatas. Resolviendo, nos queda:

$$\int \cos^n x dx = u - k \frac{u^3}{3} + \frac{k(k-1)}{2!} \frac{u^5}{5} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \frac{u^7}{7} + \dots + (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{2k+1} + C$$

hacemos nuevamente la sustitución:  $u = \sin x$ , tendremos resuelto el problema. Luego:

$$\int \cos^n x dx = \sin x - k \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{k(k-1)}{2!} \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \frac{\sin^7 x}{7} + \dots + (-1)^k \frac{\sin^{2k+1} x}{2k+1} + C$$

Resolvemos algunos ejercicios donde aplicaremos el método de resolución visto anteriormente.

**Resolver:**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int \cos^3 x \, dx \\ & \int \cos^3 x \, dx = \int \cos^{2+1} x \, dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \end{aligned}$$

si tenemos en cuenta que:  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Entonces:  $\int \cos^3 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx =$

si hacemos:  $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$

reemplazando y aplicando el método de descomposición resulta:

$$\int \cos^3 x \, dx = \int (1 - u^2) \, du = \int du - \int u^2 \, du = u - \frac{u^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \int \cos^9 x \, dx \\ & \int \cos^9 x \, dx = \int \cos^{2.4+1} x \, dx = \int (\cos^2)^4 \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^4 \cos x \, dx = \\ & = \int (1 - \sin^2 x)^4 \cos x \, dx = \end{aligned}$$

aplicando sustitución hacemos:  $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$

reemplazando y resolviendo resulta:

$$\begin{aligned} \int \cos^9 x \, dx &= \int (1 - u^2)^4 \, du = \int \left[ 1 - 4u^2 + \frac{4 \cdot 3}{2!} (u^2)^2 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} (u^2)^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} (u^2)^4 \right] du = \\ &= \int (1 - 4u^2 + 6u^4 - 4u^6 + u^8) \, du = \int du - 4 \int u^2 \, du + 6 \int u^4 \, du - 4 \int u^6 \, du + \int u^8 \, du = \\ &= u - \frac{4u^3}{3} + \frac{6u^5}{5} - \frac{4u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C \end{aligned}$$

por lo tanto:  $\int \cos^9 x \, dx = \sin x - \frac{4 \sin^3 x}{3} + \frac{6 \sin^5 x}{5} - \frac{4 \sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C$

### 6.1.1.2 Integración de Potencias Pares de la función cos x

Analicemos ahora el caso en que el exponente es par:  $n = 2k \quad \forall k \in N$

Donde al igual que en el caso anterior, dándole a  $k$  los valores de cada uno de los números naturales, obtendremos todos los naturales pares, por ejemplo:

$$\begin{aligned} k &= 1 \Rightarrow n=2(1)=2 \\ k &= 2 \Rightarrow n=2(2)=4 \\ k &= 3 \Rightarrow n=2(3)=6 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Si reemplazamos n en la integral y operamos, tendremos:

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^{2k} x dx = \int (\cos^2 x)^k dx =$$

donde hemos aplicado el concepto de potencia de otra potencia. Además consideremos las siguientes igualdades trigonométricas, a los efectos de la sustitución.

Sabemos que:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  (1).

y:  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

si hacemos:  $\alpha = \beta = x$  resulta:

$$\cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x \Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (2)$$

Si a la igualdad (1) le sumamos la (2), resulta:

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ + \\ \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \cos^2 x} &= \cos 2x \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

esta última igualdad es la que utilizamos para la sustitución. Operando:

$$\int \cos^n x dx = \int (\cos^2 x)^k dx = \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^k dx = \frac{1}{2^k} \int (1 + \cos 2x)^k dx =$$

Aplicando el desarrollo del Binomio de Newton:

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{2^k} \int \left[ 1 + k \cos 2x + \frac{k(k-1)}{2!} \cos^2 2x + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cos^3 2x + \dots + \cos^k 2x \right] dx$$

Utilizando el método de integración por descomposición y propiedades de la integral indefinida resulta:

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{2^k} \left[ \int dx + k \int \cos 2x dx + \frac{k(k-1)}{2!} \int \cos^2 2x dx + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \int \cos^3 2x dx + \dots + \int \cos^k 2x dx \right] =$$

Solo queda resolver cada una de las integrales que aparecen en el segundo miembro de la igualdad anterior:

$$I_1 = \int dx = x \quad (\text{integral inmediata})$$

## Análisis Matemático I - F.I. - U.N.N.E.

No escribimos las constantes de integración en cada integral, ya que todas serán sumadas al final en una sola, teniendo en cuenta que la suma de un número finito de constantes nos da otra constante.

$$I_2 = \int \cos 2x \, dx =$$

Resolvemos por sustitución:  $u = 2x \Rightarrow du = 2 \, dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$ , entonces:

$$I_2 = \int \cos 2x \, dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \cos u \, du = \frac{1}{2} \sin u = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Por lo tanto:

$$I_3 = \int \cos^2 2x \, dx$$

Este caso, que es de una potencia par, lo resolvemos haciendo la siguiente sustitución

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 \, dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$\text{Por lo tanto: } I_3 = \int \cos^2 2x \, dx = \int \cos^2 u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \cos^2 u \, du =$$

$$\text{si además tenemos en cuenta la igualdad (3), resulta: } \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

Entonces:

$$I_3 = \int \cos^2 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1 + \cos 2u}{2} \, du = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2u) \, du = \frac{1}{4} \left[ \int du + \int \cos 2u \, du \right] =$$

donde hemos aplicado, propiedades de la integral y el método de descomposición. Las dos integrales resultan similares a  $I_1$  e  $I_2$  respectivamente, que hemos resuelto anteriormente. Por

$$\text{consiguiente: } \int du = u \quad y \quad \int \cos 2u \, du = \frac{1}{2} \sin 2u$$

$$\text{Entonces: } I_3 = \frac{1}{4} \left[ u + \frac{1}{2} \sin 2u \right] = \frac{1}{4} \left[ 2x + \frac{1}{2} \sin 2(2x) \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x$$

con lo que hemos calculado la integral  $I_3$

$I_4 = \int \cos^3 2x \, dx =$  Esta integral, por ser de exponente impar, se resuelve aplicando el método

$$\text{visto en 6.1.1.1, es decir: } \int \cos^3 2x \, dx = \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx = \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx$$

$$\text{si hacemos: } u = \sin 2x \Rightarrow du = 2 \cos 2x \, dx \Rightarrow \frac{du}{2} = \cos 2x \, dx$$

Entonces:

$$I_4 = \int (1 - u^2) \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int (1 - u^2) \, du = \frac{1}{2} \left[ \int du - \int u^2 \, du \right] = \frac{1}{2} \left[ u - \frac{u^3}{3} \right] = \frac{1}{2} \left[ \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} \right]$$

O sea:  $I_4 = \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6}$

con lo que calculamos la integral  $I_4$

$I_5 = \int \cos^4 2x dx$ . Esta integral se resuelve siguiendo el proceso visto para los exponentes pares, para lo cual hacemos:

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

por lo tanto:  $\int \cos^4 2x dx = \int \cos^4 u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \cos^4 u du = \frac{1}{2} \int (\cos^2 u)^2 du$

integral ésta a la que arribamos luego de la sustitución y operando algebraicamente.

De acuerdo con la formula (3) vista anteriormente, podemos hacer:  $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$

reemplazando resulta:

$$I_5 = \int \left( \frac{1 + \cos 2u}{2} \right)^2 du$$

Si a partir de esta integral continuamos operando y aplicamos el método de descomposición llegamos a:

$$I_5 = \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2u)^2 du = \frac{1}{8} \int (1 + 2\cos 2u + \cos^2 2u) du =$$

$$I_5 = \frac{1}{8} \left[ \int du + 2 \int \cos 2u du + \int \cos^2 2u du \right] =$$

donde:

$$\int du = I_1 \quad \Rightarrow \quad \int du = u$$

$$\int \cos 2u du = I_2 \quad \Rightarrow \quad \int \cos 2u du = \frac{1}{2} \sin 2u$$

$$\int \cos^2 2u du = I_3 \quad \Rightarrow \quad \int \cos^2 2u du = \frac{u}{2} + \frac{1}{8} \sin 4u$$

Integrales todas que fueron resueltas anteriormente, por lo cual conocemos sus resultados.

Asimismo, para resolver la integral propuesta, debemos sumar las integrales y sustituir  $u = 2x$ , es decir:

$$I_5 = \int \cos^4 2x dx = \frac{1}{8} (I_1 + 2I_2 + I_3) = \frac{1}{8} \left[ u + 2 \left( \frac{1}{2} \sin 2u \right) + \left( \frac{u}{2} + \frac{1}{8} \sin 4u \right) \right]$$

entonces:  $I_5 = \frac{1}{8} \left[ (2x) + \sin 2(2x) + \frac{(2x)}{2} + \frac{1}{8} \sin 4(2x) \right] =$

Por lo tanto:  $I_5 = \frac{3x}{8} + \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x$

Luego:  $I_6 = \int \cos^5 2x dx$

## Análisis Matemático I - F.I. - U.N.N.E.

Esta integral es del tipo de exponente impar y como tal se resuelve de manera similar a lo visto en el apartado 6.1.1.1. Por lo tanto:

$$I_6 = \int \cos^5 2x \, dx = \int (\cos^2 2x)^2 \cos 2x \, dx = \int (1 - \sin^2 2x)^2 \cos 2x \, dx =$$

si hacemos:  $u = \sin 2x \Rightarrow du = 2 \cos 2x \, dx \Rightarrow \frac{du}{2} = \cos 2x \, dx$

sustituyendo resulta:

$$I_6 = \int (1 - u^2)^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int (1 - 2u^2 + u^4) du = \frac{1}{2} \left[ \int du - 2 \int u^2 du + \int u^4 du \right] \frac{1}{2} \left[ u - 2 \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right] = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{10}$$

Reemplazando;  $I_6 = \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{\sin^5 2x}{10}$

Con lo que se ha resuelto la integral.

Debemos continuar calculando todas las integrales que aparecen, teniendo en cuenta que son de exponente par e impar alternativamente, hasta llegar a la última, que es:

$$I_{k+1} = \int \cos^k 2x \, dx$$

donde si  $k$  es par, se resuelve de manera similar a las integrales  $I_3, I_5, I_7, \dots$  y si  $k$  es impar, entonces se analizan en forma análoga a las integrales  $I_2, I_4, I_6, \dots$

De esta manera se pueden calcular todas las integrales. Por lo tanto, la integral del coseno de  $x$  elevado a un exponente natural par, resulta igual a:

$$\int \cos^n x \, dx = \int \cos^{2k} x \, dx = \frac{1}{2^k} \left[ I_1 + k I_2 + \frac{k(k-1)}{2!} I_3 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} I_4 + \dots + I_{k+1} \right] + C$$

y reemplazando las  $I_i$  por los valores obtenidos anteriormente se tendrá resuelta la integral propuesta.

Ejemplo:  $\int \cos^6 x \, dx$

si hacemos:

$$\int \cos^6 x \, dx = \int (\cos^2 x)^3 \, dx = \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3 \, dx =$$

$$\frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x)^3 \, dx =$$

$$\frac{1}{8} \int (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx =$$

$$\frac{1}{8} \left[ \int dx + 3 \int \cos 2x \, dx + 3 \int \cos^2 2x \, dx + \int \cos^3 2x \, dx \right]$$

es necesario calcular cada una de las integrales:

$$I_1 = \int dx = x \quad \text{inmediata}$$

$$I_2 = \int \cos 2x dx = \quad \text{se resuelve por sustitución}$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$I_2 = \int \cos 2x dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{\sin u}{2} = \frac{\sin 2x}{2}$$

$I_3 = \int \cos^2 2x dx$  = integral de exponente par, y como tal debe ser resuelta es decir :

$$\int \cos^2 2x dx = \int \frac{1 + \cos 2(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x dx$$

donde la primera es inmediata y la segunda se resuelve por el método de sustitución, es decir:

$$u = 4x \Rightarrow du = 4 dx \Rightarrow \frac{du}{4} = dx$$

$$\int \cos 4x dx = \int \cos u \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \sin u = \frac{\sin 4x}{4}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}(x) + \frac{1}{2} \frac{\sin 4x}{4} = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}$$

Entonces:  $I_3 = \frac{1}{2}(x) + \frac{1}{2} \frac{\sin 4x}{4} = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}$ , se resuelve aplicando el procedimiento de

$$I_4 = \int \cos^3 2x dx$$

exponentes impares.

$$\int \cos^3 2x dx = \int \cos^2 2x \cos 2x dx =$$

Por lo tanto:

$$\int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx =$$

$$\text{Donde: } u = \sin 2x \Rightarrow du = 2 \cos 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = \cos 2x dx$$

$$\text{entonces: } I_4 = \int (1 - u^2) \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int du - \frac{1}{2} \int u^2 du = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} = \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6}$$

Hemos resuelto todas las integrales, restando solamente reemplazar para obtener el resultado final:

$$\int \cos^6 x dx = \frac{1}{8} [I_1 + 3I_2 + 3I_3 + I_4] + C =$$

$$\frac{1}{8} \left[ (x) + 3 \frac{\sin 2x}{2} + 3 \left( \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} \right) + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin^3 2x}{6} \right] + C =$$

$$= \frac{5x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3 \sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{24} + C$$

### **6.1.2 Potencias de la función Seno**

Como en el caso del coseno consideraremos dos posibilidades para la:  $I = \int \sin^n x dx$

donde el exponente "n" puede ser un número natural par o impar. Consideremos ambas posibilidades por separado.

### **6.1.2.1 Potencia Impar de la función sen x**

De la misma manera que en el coseno, si el exponente es impar, podemos escribir:

$$n = 2k + 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

si reemplazamos en la integral y operamos algebraicamente, resulta:

$$\int \sin^n x \, dx = \int \sin^{2k+1} x \, dx = \int (\sin^2 x)^k \sin x \, dx =$$

$$\text{Si consideramos: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

y reemplazamos en la integral anterior, tendremos:

$$\int \sin^n x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \sin x \, dx =$$

$$\text{aplicamos el método de sustitución: } u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx \Rightarrow -du = \sin x \, dx$$

$$\text{por lo tanto: } \int \sin^n x \, dx = \int (1 - u^2)^k (-du) = - \int (1 - u^2)^k du$$

Para desarrollar esta última integral aplicamos el Binomio de Newton:

$$-\int (1 - u^2)^k du = - \int \left[ 1 - k u^2 + \frac{k(k-1)}{2!} u^4 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} u^6 + \dots + (-1)^k u^{2k} \right] du$$

En cuanto al signo del último término, son válidas las mismas consideraciones hechas para la integral de las potencias impares de la función coseno.

Aplicamos el método de integración por descomposición y propiedades de la integral indefinida.

$$\int \sin^n x \, dx = - \left[ \int du - k \int u^2 \, du + \frac{k(k-1)}{2!} \int u^4 \, du - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \int u^6 \, du + \dots + (-1)^k \int u^{2k} \, du \right]$$

Integrales que podemos resolver fácilmente, ya que resultan inmediatas. Si además tenemos en cuenta el signo menos exterior al corchete, el mismo nos cambiará todos los signos de las integrales, por lo tanto, el del último término también variará, por lo cual es necesario sumarle una unidad al exponente. Entonces resulta:

$$\int \sin^n x \, dx = -u + k \frac{u^3}{3} - \frac{k(k-1)}{2!} \frac{u^5}{5} + \frac{k * k - 1)(k - 2)}{3!} \frac{u^7}{7} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{u^{2k+1}}{2k+1} + C$$

sustituyendo u tenemos resuelta la integral:

$$\int \sin^n x \, dx = -\cos x + \frac{k \cos^3 x}{3} - \frac{k(k-1)}{2!} \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \frac{\cos^7 x}{7} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{\cos^{2k+1} x}{2k+1} + C$$

# Análisis Matemático I - F.I. - U.N.N.E.

Resolvemos una serie de ejercicios donde aplicaremos este método:

**Resolver:**  $\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx =$

Si hacemos:  $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx \Rightarrow -du = \sin x \, dx$

Por lo tanto:

$$\int \sin^3 x \, dx = \int (1 - u^2)(-du) = - \int (1 - u^2) \, du = - \int du + \int u^2 \, du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

**Resolver:**  $\int \sin^9 x \, dx = \int \sin^9 x \, dx = \int (\sin^2 x)^4 \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx =$

si hacemos:  $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx \Rightarrow -du = \sin x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \sin^9 x \, dx &= \int (1 - u^2)^4 (-du) = - \int (1 - 4u^2 + 6u^4 - 4u^6 + u^8) \, du = \\ &= - \int du + 4 \int u^2 \, du - 6 \int u^4 \, du + 4 \int u^6 \, du - \int u^8 \, du = \\ &= -u + 4 \frac{u^3}{3} + 6 \frac{u^5}{5} + 4 \frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} + C = \\ &= -\cos x + \frac{4 \cos^3 x}{3} - \frac{6 \cos^5 x}{5} + \frac{4 \cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C \end{aligned}$$

## 6.1.2.2 Potencia Par de la función $\sin x$

Consideremos ahora que el exponente es un número natural par. Por lo tanto:

$$n = 2k \quad \forall k \in N$$

entonces:  $\int \sin^n x \, dx = \int \sin^{2k} x \, dx = \int (\sin^2 x)^k \, dx =$

A los efectos de la sustitución consideremos las siguientes igualdades trigonométricas:

Relación de Pitágoras:  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (1)$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \quad (2)$$

restando ambas igualdades:  $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$

y haciendo pasaje de términos:  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (3)$

La expresión (2) podemos hallarla de la siguiente manera:  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

si hacemos  $a = b = x$  resulta:  $\cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$

Por lo tanto:  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

La expresión (3) es la que utilizamos para resolver la integral. Por consiguiente:

## Análisis Matemático I - F.I. - U.N.N.E.

$$\int \sin^n x dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k dx =$$

Donde, de manera similar a la integración de la función coseno, podemos aplicar propiedades de la integral indefinida y el desarrollo del Binomio de Newton, es decir:

$$\int \sin^n x dx = \frac{1}{2^k} \int (1 - \cos 2x)^k dx = \frac{1}{2^k} \int \left[ 1 - k \cos 2x + \frac{k(k-1)}{2!} \cos^2 2x - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cos^3 2x + \dots + (-1)^k \cos^k 2x \right] dx =$$

y continúa siendo válida la consideración del signo del último término hecha anteriormente. Aplicamos el método de integración por descomposición y propiedades de la integral:

$$\int \sin^n x dx = \frac{1}{2^k} \left[ \int dx - k \int \cos 2x dx + \frac{k(k-1)}{2!} \int \cos^2 2x dx - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \int \cos^3 2x dx + \dots + (-1)^k \int \cos^k 2x dx \right]$$

Donde aparecen las siguientes integrales:

$$I_1 = \int dx =$$

$$I_2 = \int \cos 2x dx =$$

$$I_3 = \int \cos^2 2x dx =$$

$$I_4 = \int \cos^3 2x dx =$$

.

.

.

$$I_k = \int \cos^k 2x dx =$$

Todas estas integrales fueron resueltas oportunamente cuando estudiamos la función coseno con exponente par.

$$\text{Por lo tanto: } \int \sin^n x dx = \frac{1}{2^k} \left[ I_1 - k I_2 + \frac{k(k-1)}{2!} I_3 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} I_4 + \dots + (-1)^k I_{k+1} \right] + C$$

restando reemplazar los valores de las  $I_i$  por los resultados obtenidos anteriormente para lograr la solución final de la integral propuesta.

Ejercitación:

$$\text{Resolver: } \int \sin^4 x dx =$$

Consideremos:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int dx - 2 \int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx \end{aligned}$$

$$I_1 = \int dx = x$$

Calculamos por separado cada una de las integrales, es decir:

$$I_2 = \int \cos 2x dx =$$

integral que resolvemos por sustitución:

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$\int \cos 2x dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u$$

$$I_2 = \frac{\sin 2x}{2}$$

$$I_3 = \int \cos^2 2x dx = \int \frac{1 + \cos 2(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x dx$$

La integral de  $\cos 4x$  la resolvemos por sustitución:  $u = 4x$   $du = 4 dx$   $\frac{du}{4} = dx$

$$I_3 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos u \frac{du}{4} = \frac{x}{2} + \frac{\sin u}{8} =$$

entonces:

$$I_3 = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}$$

reemplazamos:

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4} [I_1 - 2I_2 + I_3] + C = \frac{1}{4} \left[ x - 2 \left( \frac{\sin 2x}{2} \right) + \left( \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} \right) \right] + C = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

### **6.1.3 Integración de Potencias de la función Tangente**

Estas integrales tienen genéricamente la forma:  $I = \int \tan^n x dx$

Existen varias maneras de resolver dichas integrales: utilizando sustituciones diferentes y aunque parezca que los resultados obtenidos son distintos, no es así. Se puede demostrar trigonométricamente, que en todos difieren entre sí solamente en una constante.

En el presente trabajo se resolverá por uno de dichos métodos, que se considera de más fácil aplicación y consiste en utilizar la siguiente relación trigonométrica:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

por lo tanto:

$$\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx$$

Podemos resolver la integral:  $I_1 = \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx =$

Aplicando el método de sustitución:  $u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx$

resulta:

$$I_1 = \int u^{n-2} du = \frac{u^{n-1}}{n-1} = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1}$$

Restaría resolver la integral:  $I_2 = \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx$

Donde podemos reiterar la aplicación del método anterior. Entonces:

$$I_2 = \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \int \operatorname{tg}^{n-4} x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^{n-4} x (\sec^2 x - 1) dx = \int \operatorname{tg}^{n-4} x \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg}^{n-4} x dx =$$

Donde:  $I_3 = \int \operatorname{tg}^{n-4} \sec^2 x dx =$

Se resuelve por sustitución al igual que la integral  $I_1$ , es decir:  $I_3 = \int u^{n-4} du = \frac{u^{n-3}}{n-3} = \frac{\operatorname{tg}^{n-3} x}{n-3}$

Restando resolver la integral:  $I_4 = \int \operatorname{tg}^{n-4} x dx$ , que se obtiene de manera similar a las anteriores, es decir, se debe reiterar el procedimiento hasta llegar a la última integral. Esta depende del exponente "n". Si es par, será del tipo:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx = \operatorname{tg}^2 x - x + C$$

Si el exponente "n" es impar, entonces la última integral será del tipo:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = - \ln u + C =$$

Integral que fue resuelta por sustitución:

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx$$

Por lo tanto:  $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln(\cos x) + C$

y si reemplazamos cada una de las integrales en las anteriores, solucionamos el problema.

### Ejercitación:

**Resolver: a)**

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx =$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^5 x dx &= \int \operatorname{tg}^3 x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x (\sec^2 x - 1) dx = \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg}^3 x dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1) dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx + \int \operatorname{tg} x dx = \end{aligned}$$

donde las dos primeras integrales se resuelven por sustitución:

$$u = \operatorname{tg} x \Rightarrow du = \sec^2 x dx$$

la última, de la siguiente manera:  $\int \tg x \, dx = \int \frac{\sen x}{\cos x} \, dx$

donde:  $w = \cos x \Rightarrow dw = -\sen x \, dx$

aplicando sustituciones resulta:

$$\int \tg^5 x \, dx = \int u^3 \, du - \int u \, du + \int -\frac{dw}{w} = \frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2} - \ln w + C = \frac{\tg^4 x}{4} - \frac{\tg^2 x}{2} - \ln(\cos x) + C$$

b)  $\int \tg^6 x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \tg^6 x \, dx &= \int \tg^4 x \tg^2 x \, dx = \int \tg^4 x (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \tg^4 x \sec^2 x \, dx = \int \tg^4 x \, dx = \\ &= \int \tg^4 x \sec^2 x \, dx - \int \tg^2 x \tg^2 x \, dx = \\ &= \int \tg^4 x \sec^2 x \, dx - \int \tg^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \tg^4 x \sec^2 x \, dx - \int \tg^2 x \sec^2 x \, dx + \int \tg^2 x \, dx = \\ &= \int \tg^4 x \sec^2 x \, dx - \int \tg^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx - \int \, dx = \\ &= \int \tg^4 x \sec^2 x \, dx - \int \tg^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx - \int \, dx = \end{aligned}$$

donde podemos resolver las tres primeras integrales por sustitución:

$$u = \tg x \Rightarrow du = \sec^2 x \, dx$$

y la última resulta inmediata. Por lo tanto:

$$\int \tg^6 x \, dx = \int u^4 \, du - \int u^2 \, du + \int du - \int \, dx = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + u - x + C = \frac{\tg^5 x}{5} - \frac{\tg^3 x}{3} + \tg x - x + C$$

#### **6.1.4 Integración de Productos de Potencias de las Funciones Seno y Coseno**

Estas integrales tienen genéricamente la forma:  $I = \int \sen^n x \cos^m x \, dx$ , donde se pueden plantear distintas alternativas de acuerdo a que los exponentes sean pares o impares. Analizaremos por separado.

##### **6.1.4.1 Potencia de la Función Seno Impar y del Coseno Par**

El exponente del coseno es un número natural par y del seno impar:

$$\begin{aligned} m &= \text{par} \quad \Rightarrow m = 2h \quad \forall h \in N \\ n &= \text{impar} \quad \Rightarrow n = 2k + 1 \quad \forall k \in N_0 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$I = \int \sen^n x \cos^m x \, dx = \int \sen^{2k+1} x \cos^m x \, dx = \int \sen^{2k} x \sen x \cos^m x \, dx = \int (\sen^2 x)^k \sen x \cos^m x \, dx =$$

Donde usamos propiedades de las potencias y del producto de potencias de igual base, y si además tenemos en cuenta que:  $\sen^2 x = 1 - \cos^2 x$

Reemplazando, resulta:  $I = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^m x \sin x dx =$

integral que podemos resolver por el método de sustitución, haciendo:

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow -du = \sin x dx$$

Por lo tanto:

$$I = \int (1 - u^2)^k u^m (-du) = - \int (1 - u^2)^k u^m du =$$

integral que resulta de fácil resolución aplicando el desarrollo del Binomio de Newton y el método de integración por descomposición.

**Ejemplo:**

$$I = \int \sin^5 x \cos^4 x dx =$$

$$I = \int \sin^5 x \cos^4 x dx = \int \sin^4 x \sin x \cos^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x \cos^4 x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x \sin x dx =$$

hacemos la siguiente sustitución:  $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I &= \int (1 - u^2)^2 u^4 (-du) = - \int (1 - 2u^2 + u^4) u^4 du = - \int (u^4 - 2u^6 + u^8) du = - \int u^4 du + 2 \int u^6 du - \int u^8 du = \\ &= -\frac{u^5}{5} + 2\frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C \end{aligned}$$

#### 6.1.4.2 Potencias de la Función Seno Par y del Coseno Impar

En este caso, el exponente del coseno es un número natural impar y el del seno, par:

$$m = \text{impar} \Rightarrow m = 2h + 1 \quad \forall h \in N_0$$

$$n = \text{par} \Rightarrow n = 2k \quad \forall k \in N$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^n x \cos^m x dx = \int \sin^n x \cos^{2h+1} x dx = \int \sin^n x \cos^{2h} x \cos x dx = \int \sin^n x (\cos^2 x)^h \cos x dx = \\ &= \int \sin^n x (1 - \sin^2 x)^h \cos x dx = \end{aligned}$$

hacemos la siguiente sustitución:  $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

$$\text{Por lo tanto: } I = \int u^n (1 - u^2)^h du =$$

nos queda una integral similar a la del caso anterior, aplicamos el desarrollo del Binomio de Newton y el método de integración por descomposición.

**Ejemplo:**

$$I = \int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx =$$

hacemos la siguiente sustitución:  $u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x dx$

Por lo tanto:

$$I = \int u^4(1-u^2) du = \int (u^4 - u^6) du = \int u^4 du - \int u^6 du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C$$

#### **6.1.4.3 Potencias de la Función Seno Impar y del Coseno Impar**

En este caso, ambos exponentes son números naturales impares:

$$m = \text{impar} \Rightarrow m = 2h + 1 \quad \forall h \in N_0$$

$$n = \text{par} \Rightarrow n = 2k + 1 \quad \forall k \in N_0,$$

Esta integral puede resolverse de dos maneras. Una reemplazando el coseno en función del seno y la otra el seno en función del coseno. Si bien aparentemente los resultados a que se llegan de ambas maneras son distintos, se puede demostrar trigonométricamente que difieren solamente en una constante.

Presentamos uno de los procedimientos:

$$I = \int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx = \int \operatorname{sen}^n x \cos^{2h+1} x dx = \int \operatorname{sen}^n x (\cos^2 x)^h \cos x dx = \int \cos^n x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^h \cos x dx =$$

si hacemos la siguiente sustitución:  $u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x dx$

$$\text{reemplazando, resulta: } I = \int u^n (1 - u^2)^h du$$

Nos queda una integral similar a la de los casos anteriores y como tal se resuelve.

**Ejemplo:**  $I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x dx$

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x dx = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \cos x dx = \int \operatorname{sen}^3 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x dx =$$

si hacemos la siguiente sustitución:  $u = \operatorname{sen} x \quad du = \cos x dx$

resulta:

$$I = \int u^3(1 - u^2) du = \int (u^3 - u^5) du = \int u^3 du - \int u^5 du = \frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} + C = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C$$

#### **6.1.4.4 Potencias de la función Seno Par y del Coseno Par**

Aquí ambos exponentes son números naturales pares:

$$m = \text{par} \Rightarrow m = 2h \quad \forall h \in N$$

$$n = \text{impar} \Rightarrow n = 2k \quad \forall k \in N$$

Como en el caso anterior, esta integral puede ser resuelta de dos maneras: sustituyendo el seno o el coseno, llegando en ambos a resultados análogos. Plantearemos una de las formas:

$$I = \int \sin^n x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2h} x dx = \\ \int (\sin^2 x)^k \cos^{2h} x dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^{2h} x dx =$$

En esta última expresión podemos aplicar el desarrollo del Binomio de Newton y posteriormente el método de integración por descomposición:

$$I = \int \cos^{2h} x \left[ 1 - k \cos^2 x + \frac{k(k-1)}{2!} \cos^4 x - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cos^6 x + \dots + (-1)^k \cos^{2k} x \right] dx = \\ = \int \cos^{2h} x dx - k \int \cos^{2h+2} x dx + \frac{k(k-1)}{2!} \int \cos^{2h+4} x dx - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \int \cos^{2h+6} x dx + \dots + (-1)^k \int \cos^{2h+2k} x dx =$$

Podemos observar que todas las integrales son de la función seno con exponente par. Estas pueden ser resueltas de acuerdo a lo oportunamente analizado en el apartado 6.1.1.2.

Ejemplo:  $I = \int \sin^2 x \cos^2 x dx$

$$I = \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x dx = \int (\cos^2 x - \cos^4 x) dx = \int \cos^2 x dx - \int \cos^4 x dx =$$

Tenemos dos integrales del tipo seno con exponente par. Las resolvemos por separado:

Es decir:  $I_I = \int \cos^2 x dx =$

Para poder calcular esta integral hacemos la siguiente sustitución:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$I_I = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx =$$

donde la integral de  $\cos 2x$  se resuelve por sustitución:  $u = 2x \quad du = 2 dx \quad dx = \frac{du}{2}$

Por lo tanto:  $\int \cos 2x dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u = \frac{1}{2} \sin 2x$

reemplazando:  $I_I = \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

Resolvemos la otra integral:

$$I_2 = \int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ = \frac{1}{2} \left[ \int dx + 2 \int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx \right] =$$

las resolvemos por separado:  $\int dx = x$

$$\int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} \quad \text{fue resuelta en la integral anterior.}$$

$\int \cos^2 2x \, dx =$  la resolvemos mediante la siguiente sustitución:

$$u = 2x \quad du = 2 \, dx \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \cos^2 2x \, dx = \int \cos^2 u \, \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \cos^2 u \, du = \text{integral que también fue resuelta:}$$

$$\int \cos^2 2x \, dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} \right] = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}$$

Por lo tanto:

$$I_2 = \int \cos^4 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{\sin 4x}{16} =$$

$$\text{es decir: } I_2 = \int \cos^4 x \, dx = \frac{3x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{16}$$

resulta entonces que:

$$I = I_1 + I_2$$

Luego:

$$I = \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \left[ \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right] + \left[ \frac{3x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{16} \right] + C = \frac{5x}{4} + \frac{3\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{16} + C$$

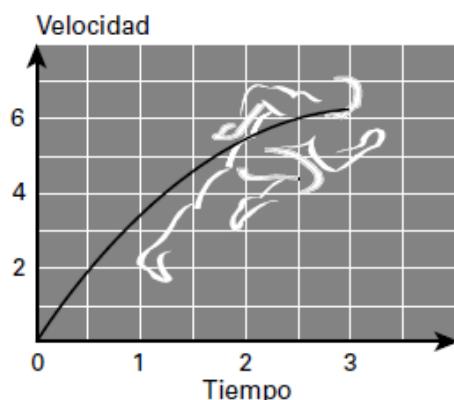
Con lo que queda resuelto el ejercicio.

### **TRABAJO PRÁCTICO N° 9: INTEGRALES INDEFINIDAS**

#### **Situación problemática 1:**

- a) La gráfica de la figura corresponde a la velocidad de un deportista en una carrera. Utilizarla para completar las celdas en blanco de la siguiente tabla, estimando el valor de la velocidad cada medio segundo durante los tres primeros.

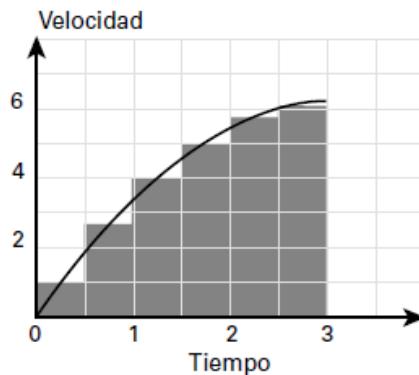
Tiempo (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Velocidad (m/s)							



- b) Con las velocidades que se estimaron, continuar de la misma manera encontrando la distancia que recorrió durante esos tres primeros segundos. (Para cada intervalo de 0.5 segundos se puede estimar la distancia multiplicando *velocidad por tiempo*)

Tiempo (s)	0-0.5	0.5-1.0	1.0-1.5	1.5-2.0	2.0-2.5	2.5-3.0
Distancia (m)						

- c) Estimar el área de cada rectángulo, sumar cada una de éstas y determinar si se aproxima a la distancia recorrida del inciso b).



**Actividad N° 1:** Resolver las siguientes integrales inmediatas:

a)  $\int 5x \, dx$

b)  $\int -2x^{-1} \, dx$

c)  $\int \sqrt[3]{x^2} \, dx$

d)  $\int 2\sin(x) \, dx$

**Actividad N° 2:** Resolver las siguientes integrales por el Método de Integración por Descomposición:

a)  $\int (2x^2 + 3 - 2e^x) \, dx$

b)  $\int (\sin x + \sec^2 x) \, dx$

c)  $\int \frac{1-\sqrt{x} \cdot e^x+x}{\sqrt{x}} \, dx$

**Actividad N° 3:** Hallar  $f(x)$  a partir de  $f'(x) = 2x + 1$  y  $f(2) = 4$ . Comprobar el resultado comparando las gráficas de  $f'(x)$  y  $f(x)$ .

**Situación problemática 2:** Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado con una velocidad de:  $v = 3t^2 - 2$  unidades por segundo. Cuando  $t = 0$ , su posición inicial es de 2 unidades a la derecha del origen. Hallar la posición después de 2 segundos.

**Actividad N° 4:** Resolver las siguientes integrales aplicando el Método de Integración por Sustitución:

a)  $\int 3(2x + 1)^3 \, dx$

b)  $\int (3x^2 + 2) \cdot \cos(2x^3 + 4x) \, dx$

c)  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} \, dx$

d)  $\int \frac{3x^2}{x^3+3} \, dx$

e)  $\int e^{\sin x} \cos x \, dx$

**Actividad N° 5:** Resolver las siguientes integrales aplicando el Método de Integración por Parte:

a)  $\int e^{3x}(x + 2) \, dx$

b)  $\int x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) \, dx$

c)  $\int 2x \cdot \cos(5x) \, dx$

d)  $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$

e)  $\int e^x \cdot \sin x \, dx$

**Actividad N° 6:** Resolver las siguientes integrales de Funciones Racionales Fraccionarias:

a)  $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3-4x} \, dx$

b)  $\int \frac{x-1}{x^3+x^2-2x} \, dx$

- c)  $\int \frac{x^3+4}{x^2-5x+6} dx$   
 d)  $\int \frac{x}{(x-1)^2} dx$   
 e)  $\int \frac{x^2-3x}{(x-1)(x^2-4x+4)} dx$

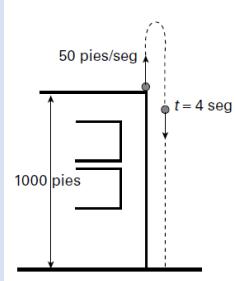
**Actividad Nº 7:** Resolver las siguientes integrales de Potencias de Funciones Circulares:

- a)  $\int \cos^3(3x) dx$   
 b)  $\int \sin^4(2x) dx$   
 c)  $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$   
 d)  $\int \frac{\sec^2 x}{\csc^3 x} dx$

**AUTO EVALUACIÓN:**

**Actividad:** Resolver la siguiente integral:  $\int [x^2 \cdot e^{x^3-2} + 2^{2x} \cdot \sin(2x)] dx$

**Situación problemática:** Se arroja un objeto hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies, con una velocidad de 50 pies por segundo, encontrar la velocidad y la altura después de 4 segundos.



**ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS**

**Actividad Nº 1:** Resolver las siguientes integrales por el método más apropiado:

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| a) $\int (\sqrt{x} + 2x) dx$     | g) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}{x} dx$ |
| b) $\int x^3 \cdot \ln x dx$     | h) $\int 2x \cdot \sqrt{x^2 + 2} dx$        |
| c) $\int 5 \cdot e^x dx$         | i) $\int \frac{x^3-x^2+2}{(x-3)^2(x+1)} dx$ |
| d) $\int e^{3x}(x^2 + 1) dx$     | j) $\int \cos^3(2x) \cdot \sin(2x) dx$      |
| e) $\int \frac{2 \ln(3x)}{x} dx$ | k) $\int \frac{x^4+4x-x}{x^2+2x-3} dx$      |
| f) $\int \frac{2x^3-x}{x} dx$    | l) $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$               |

## INTEGRALES DEFINIDAS

### 1.- CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

La medida del área es un problema que ha preocupado al hombre desde la antigüedad. Los egipcios conocían reglas para el cálculo de las áreas y volúmenes de algunas figuras sencillas como ser: triángulos, rectángulos, trapecios etc.

Recién los griegos dieron derivaciones lógicas y sistemáticas a estas fórmulas. Podemos citar a Arquímedes como el que más se acercó al concepto moderno del cálculo de área. Su método, llamado de exhaución, consistía en acotar el área a calcular mediante dos conjuntos de rectángulos, uno situado en el interior, cuya suma permitía obtener un **área contenida** (suma interior) y el otro, que lo cubre y da el **área continente** (suma exterior).

A medida que se aumentaba la cantidad de rectángulos de cada uno de los dos conjuntos considerados, dichas sumas eran cada vez más similares, lo cual permitía calcular el área deseada, por la aproximación de ambas.

Posteriormente, distintos autores adoptaron este principio y lograron el concepto de integral definida, de los cuales, veremos dos.

### 2.- INTEGRAL DEFINIDA SEGÚN CAUCHY

Si consideramos una función  $y = f(x)$  positiva y continua en un intervalo cerrado  $[a,b]$ , su gráfica conjuntamente con el eje "x" y las ordenadas correspondientes a los extremos del intervalo limitan una región del plano, cuya forma se designa como **trapezoide** y a cuya superficie o área ( $A$ ) la llamaremos la integral definida de la función entre los límites o extremos que corresponden a los del intervalo. Es decir:



Para calcular dicha área procedemos a dividir el intervalo  $[a,b]$  en un número finito de subintervalos, cuyos tamaños o amplitud pueden ser todas iguales o distintos, lo cual va a constituir una **partición** de dicho intervalo.

La máxima distancia entre dos puntos cualquiera de un subintervalo constituye el **diámetro** del mismo y el mayor de todos los diámetros de los subintervalos componentes de la partición, la **norma** de la misma.

Además, si consideramos dos particiones distintas de un mismo intervalo y una tiene menor norma que la otra, se dice que dicha partición es más refinada o más fina que la otra. Asimismo, es necesario tener en cuenta que si una función es continua en un intervalo cerrado, lo será también en cada uno de los subintervalos que se generan en él mediante una partición cualquiera y si consideramos que una propiedad de la función continua en un intervalo cerrado es la de alcanzar un **máximo** (M) y un **mínimo** (m) en dicho intervalo, esto mismo deberá ocurrir en cada subintervalo. Es decir, podemos afirmar que

en cada uno de los subintervalos que se originan por una determinada partición del intervalo  $[a,b]$  existirá un máximo ( $M_i$ ) y un mínimo ( $m_i$ ).

Por lo tanto, si hacemos una partición del intervalo considerado en " $n$ " partes, que pueden ser todas iguales o distintas, nos quedarían los siguientes subintervalos:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

Donde resulta:  $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{i-1} \leq x_i \leq \dots \leq x_n = b$ , y además podemos suponer que dicha partición tiene una determinada norma  $\delta$ .

También, existirán un máximo y mínimo en cada uno de los subintervalos, que llamaremos:

$$M_1 \wedge m_1 \quad \text{los del } [x_0, x_1]$$

$$M_2 \wedge m_2 \quad \text{los del } [x_1, x_2]$$

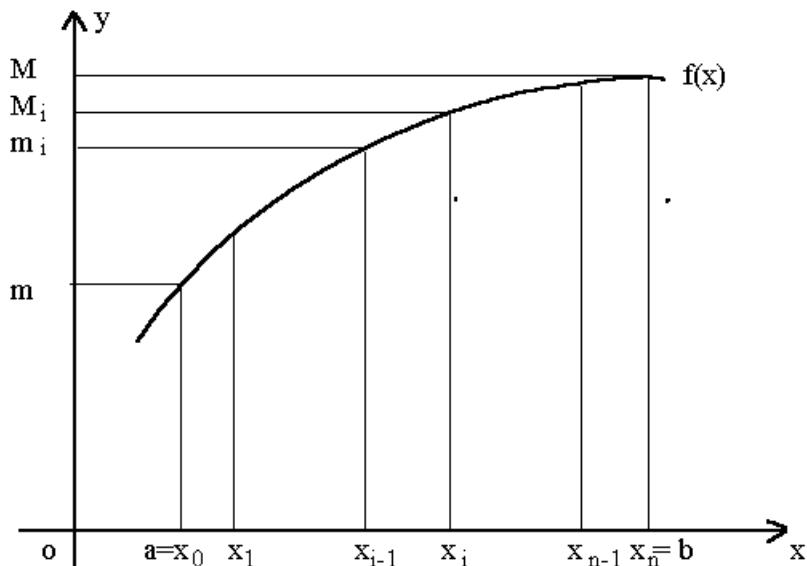
$\vdots$

$$M_i \wedge m_i \quad \text{los del } [x_{i-1}, x_i]$$

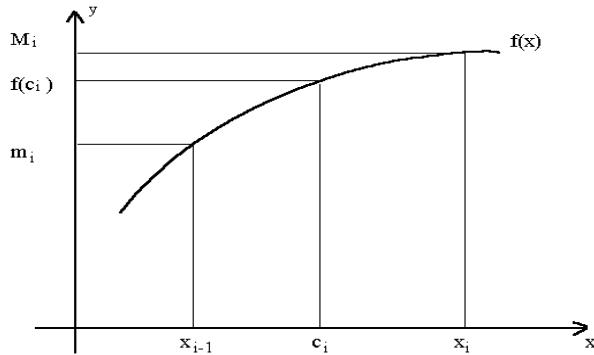
$\vdots$

$$M_n \wedge m_n \quad \text{los del } [x_{n-1}, x_n]$$

Teniendo en cuenta lo expresado anteriormente podemos calcular un área inferior y otra superior en cada subintervalo de la partición. A manera de ejemplo, lo haremos en un subintervalo genérico de ella:



Para mayor claridad haremos el gráfico con el subintervalo genérico únicamente, entendiendo que lo mismo ocurre en los "n" subintervalos correspondientes de la partición:



Podemos ver que el área superior corresponde a la superficie de un rectángulo de base igual a la amplitud del subintervalo y de altura, el máximo del mismo. De manera similar, el área inferior tiene la misma base, pero su altura corresponde al mínimo. Por lo tanto:

$$A_{S_i} = M_i (x_i - x_{i-1})$$

$A_{I_i} = m_i (x_i - x_{i-1})$ , y además se puede expresar el área de un

rectángulo intermedio, comprendido entre los otros dos, teniendo en cuenta que entre el máximo y el mínimo del subintervalo van a estar comprendidos todos los valores de la función . Por lo tanto:

$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i \Rightarrow m_i \leq f(c_i) \leq M_i$$

Podemos plantear el área media de la siguiente manera:  $A_{M_i} = f(c_i) (x_i - x_{i-1})$  de tal forma que se cumpla siempre que:  $A_{I_i} \leq A_{M_i} \leq A_{S_i}$

Esto mismo deberá cumplirse para cada uno de los subintervalos en que se encuentra dividido el intervalo mediante la partición. Por lo tanto, podemos expresar:

$$A_{I_1} \leq A_{M_1} \leq A_{S_1}$$

$$A_{I_2} \leq A_{M_2} \leq A_{S_2}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$A_{I_i} \leq A_{M_i} \leq A_{S_i}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$A_{I_n} \leq A_{M_n} \leq A_{S_N}$$

Si sumamos las " $n$ " desigualdades planteadas, obtendremos otra desigualdad del mismo sentido que resulta:

$$A_{I_1} + A_{I_2} + \cdots + A_{I_n} \leq A_{M_1} + A_{M_2} + \cdots + A_{M_n} \leq A_{S_1} + A_{S_2} + \cdots + A_{S_n}$$

Es decir:

$$\sum_{i=1}^n A_{I_i} \leq \sum_{i=1}^n A_{M_i} \leq \sum_{i=1}^n A_{S_i}$$

Ahora bien, si tomamos particiones cada vez más refinadas (aumentando el número de subintervalos) las tres áreas se aproximan entre sí, por lo tanto se puede suponer que si el número de subintervalos tiende a infinito (por consiguiente la norma tiende a cero) las tres áreas tenderán a igualarse. Teniendo en cuenta esto, podemos suponer que en el límite para el número de subdivisiones tiendiendo a infinito serán iguales, por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_{I_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_{M_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_{S_i}$$

A dichos límites los denominaremos la **integral definida** de la función  $y = f(x)$  en el intervalo cerrado  $[a,b]$  y ello nos posibilita calcular el área real encerrada por la función, el eje de las abscisas (x) y las ordenadas correspondientes a los extremos del intervalo, Es decir:

$$A_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_{M_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) dx$$

Definición de la **Integral definida (según Cauchy)**

### **3.- INTEGRAL DEFINIDA SEGÚN RIEMANN**

Riemann plantea otro enfoque de la integral definida, ya no como límite, sino como sucesiones y además puede prescindir de la hipótesis de continuidad, bastando solamente con el acotamiento de la función.

Sea  $y = f(x)$  una función acotada en un intervalo cerrado  $[a,b]$  y en ella se pueden efectuar particiones, las que llamaremos:  $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_n, \dots$ , con la condición que sean cada vez más refinadas entre sí. Si llamamos:  $\delta_1$  a la norma de  $P_1$ ,  $\delta_2$  a la de  $P_2$ ,  $\delta_3$  a la de  $P_3$ , y así respectivamente, se debe verificar que:  $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3 \geq \dots \geq \delta_n \geq \dots$

Teniendo en cuenta esto, podemos obtener, de acuerdo con lo visto, la suma inferior y superior para cada partición. Por lo tanto, para la partición  $P_1$  existirá una suma superior, que llamaremos  $S_{P_1}$  y una inferior,  $I_{P_1}$  y así respectivamente para cada una de ellas, y si consideramos además, que por ser las particiones cada vez más refinadas, se debe verificar:  $S_{P_1} > S_{P_2} > S_{P_3} > \dots > S_{P_n} > \dots$ , lo que constituye una sucesión decreciente de sumas superiores, que debe ser acotada inferiormente y tener, por lo tanto, un extremo inferior, que llamaremos:

$$\text{extr. inf. } [S_P]$$

De igual manera, las sumas inferiores constituirán una sucesión creciente, es decir:

$I_{P_1} < I_{P_2} < I_{P_3} < \dots < I_{P_n} < \dots$ , que también debe ser acotada superiormente y por consiguiente tener un extremo superior que designaremos:

$$\text{extr. sup. } [I_P]$$

A dichos extremos, que siempre existen, los llamaremos:

$$\text{extr.inf} . [S_P] = \overline{\int_a^b} f(x) dx =$$

lo que constituye la **Integral superior de Riemann** y a:

$$\text{extr.sup} . [I_P] = \underline{\int_a^b} f(x) dx =$$

que es la **Integral inferior de Riemann**.

Se va a verificar siempre que:  $\underline{\int_a^b} f(x) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx$

La condición de existencia de la integral definida según Riemann es que ambas sean iguales:

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx}$$

Lo que constituye la definición de **Integral definida (según Riemann)**.

#### **4.- PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA**

Las propiedades de la linealidad de la integral indefinida vistas y demostradas anteriormente, se verifican en el caso de la integral definida, de manera similar.

##### **4.1.- Integral definida de una suma de funciones**

Demostraremos a continuación que:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Consideramos la definición de integral definida:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) [f(c_i) + g(c_i)] \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [(x_i - x_{i-1}) f(c_i) + (x_i - x_{i-1}) g(c_i)] =$$

Por propiedad de la sumatoria, podemos descomponer en dos sumatorias resulta:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(c_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) g(c_i) \right] =$$

Por propiedad del límite de una suma, que es igual a la suma de los límites, tenemos que:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(c_i) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) g(c_i) =$$

Si consideramos que:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(c_i) \wedge$$

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) g(c_i)$$

Reemplazamos en la expresión anterior:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

#### 4.2.- Integral definida del producto de una función por una constante

Vamos a demostrar que:  $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

Por definición de la integral definida:

$$\int_a^b k f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) k f(c_i) =$$

Si aplicamos primero las propiedades de las sumatorias que nos permiten sacar fuera del signo las constantes y luego la del límite del producto que nos dice que es igual al producto de los límites, resultará:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} k \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(c_i) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(c_i) =$$

Si calculamos los límites, tendremos que el primero es el límite de una constante que resulta igual a la misma constante y el segundo es la definición de la integral definida de una función, por lo tanto:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Otras propiedades, que son propias de la integral definida:

#### 4.3.- Integral definida con extremos de integración iguales

En esta propiedad vamos a demostrar que:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Para ello tendremos en cuenta lo visto en la definición de integral definida:

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \quad (1)$$

Si llamamos  $M$  al máximo y  $m$  al mínimo de todo el intervalo cerrado  $[a, b]$  debe resultar que:

$$M_i \leq M \wedge m_i \geq m, \text{ se debe verificar:}$$

$$\begin{aligned} M_i(x_i - x_{i-1}) &\leq M(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^n M(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) &\leq M \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) &\leq M(b-a) \end{aligned}$$

Donde se pudo extraer  $M$  del signo de sumatoria por no depender de los subintervalos considerados, es decir de "i", y además, la sumatoria de todos los subintervalos de la partición nos va a dar el intervalo completo. De manera similar se puede analizar para el mínimo. Luego:

$$\begin{aligned} m_i(x_i - x_{i-1}) &\geq m(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) &\geq \sum_{i=1}^n m(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) &\geq m \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) &\geq m(b-a) \end{aligned}$$

Reemplazando en la formula (1):

$$m(b-a) \leq \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

Y como se quiere hallar la integral cuyos extremos de integración coinciden, entonces el intervalo será  $[a, a]$  cuya amplitud es,  $a - a = 0$ . Por lo tanto:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq 0$$

Aplicando límite para " $n$ " tendiendo a infinito :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} 0$$

Como resulta que el límite de cero es el mismo valor por ser una constante y teniendo en cuenta el Teorema de Confrontación entre límites podemos ver que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = 0$$

y dicho límite resulta la integral definida:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

#### 4.4.- Integral definida de intervalos negativos (o inversión de los extremos de integración)

Veremos que:  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ , donde la integral del segundo miembro corresponde a un intervalo negativo, ya que "a" es menor que "b" y entonces la amplitud del intervalo da un resultado negativo, es decir:  $a < b \Rightarrow a - b < 0$

Para demostrar esta propiedad utilizaremos la definición de la integral definida.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(c_i)$$

$$\int_b^a f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_{i-1} - x_i) f(c_i)$$

Si analizamos esta última expresión tendremos que:

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_{i-1} - x_i) f(c_i) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n -(x_i - x_{i-1}) f(c_i) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} - \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(c_i) = \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(c_i) = - \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Expresión que podemos llegar teniendo en cuenta que, como todos los términos de la sumatoria son negativos, la misma será negativa y por eso se pude sacar el signo menos afuera y además, se considera que el límite de la opuesta de una función es la opuesta del límite, con lo cual llegamos a la integral definida negativa, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x) dx &= - \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

#### 4.5.- Propiedad aditiva del intervalo en la integral definida

Demostremos que:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ , para lo cual debemos considerar las posibles ubicaciones del punto " $c$ ", es decir, si el punto pertenece al intervalo  $[a, b]$  o si no pertenece al mismo, y en ese caso si se encuentra a la izquierda (menor que  $a$ ) o a la derecha (mayor que  $b$ ).

##### a) El punto $c \in (a, b)$ , es un punto interior a dicho intervalo

En ese caso podemos hacer:  $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$

Por lo tanto, si efectuamos una partición del intervalo, la misma originará una similar en cada uno de los subintervalos. Es decir, si dividimos el intervalo en " $n$ " partes podemos suponer que los subintervalos se dividirán en " $k$ " y " $n-k$ " partes, siendo " $k < n$ ", ambos naturales. Entonces podemos hacer:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^n (x_i - x_{i-1})$$

Si multiplicamos por  $f(c_i)$  siendo  $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$  resulta:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(c_i) = \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1})f(c_i) + \sum_{i=k+1}^n (x_i - x_{i-1})f(c_i)$$

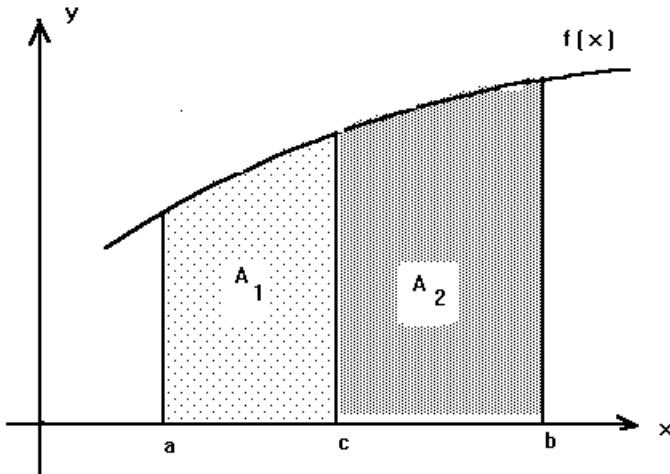
S aplicamos límite para  $n \rightarrow \infty$ , podemos pensar que  $k \rightarrow \infty$ , es decir, la norma del intervalo tenderá a cero y por consiguiente también lo harán las de los subintervalos. Entonces:  $(\delta \rightarrow 0)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(c_i) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1})f(c_i) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k+1}^n (x_i - x_{i-1})f(c_i) \end{aligned}$$

Donde se ha aplicado la propiedad del límite de una suma y como dichos límites representan las integrales definidas respectivas, tenemos demostrado que:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Gráficamente podemos observar:



$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Si llamamos:  $A_1 = \int_a^c f(x) dx$  Resulta:

$$A_2 = \int_c^b f(x) dx$$

$A = A_1 + A_2$  donde el área total es igual a la suma de las áreas 1 y 2.

**b) el punto  $c \notin [a, b] \wedge c < a$**

Tendremos ahora dos subintervalos  $[c, a] \wedge [c, b]$  de tal manera que resulte:

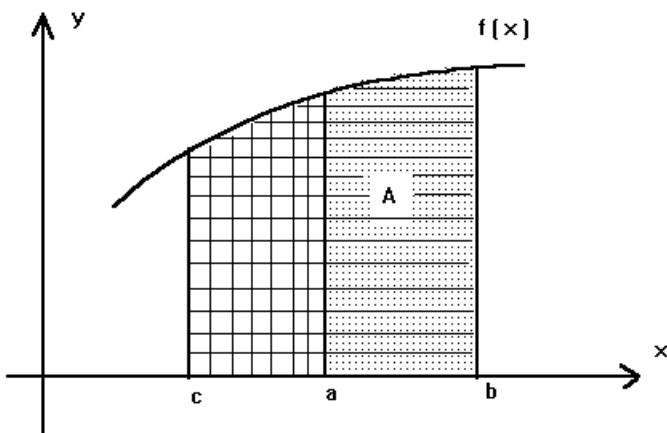
$[a, b] = [c, b] - [c, a]$  y entonces :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx =$$

Pero, por ser el intervalo de integración negativo va a ser:  $\int_a^c f(x) dx = - \int_c^a f(x) dx$

y reemplazando tenemos:  $\int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx - \int_c^a f(x) dx =$

Gráficamente:



Donde el área a determinar (sombreada con puntos) resulta igual a la diferencia entre el área sombreada con líneas horizontales menos la de líneas verticales.

c) El punto  $c \notin [a, b] \wedge b < c$

Sean los subintervalos  $[a, c] \wedge [b, c]$ , de tal manera que resulta :  $[a, b] = [a, c] - [b, c]$ , y por lo tanto:

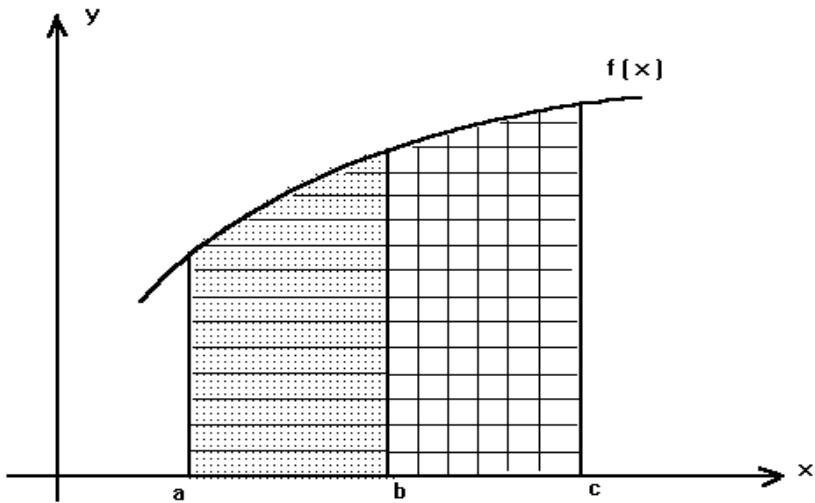
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Pero, por ser el intervalo de integración negativo:  $\int_c^b f(x) dx = - \int_b^c f(x) dx$

Reemplazando, tenemos:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx}$$

Gráficamente:



Donde

El área a determinar (sombreada con puntos) resulta igual a la diferencia entre el área sombreada con líneas horizontales menos las de líneas verticales.

### 5.- TEOREMA DE LA MEDIA DEL CÁLCULO INTEGRAL ( O DEL VALOR MEDIO)

Sea  $f(x)$ , función definida y acotada en un  $[a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \mu(b - a)$

Demostración: como  $f(x)$  está acotada en  $[a, b]$ , admitirá en dicho intervalo un valor máximo ( $M$ ) y otro valor mínimo ( $m$ ), de tal manera que debe verificarse que:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

Si además consideramos una partición de dicho intervalo, resultará un conjunto de subintervalos los que serán todos acotados y por consiguiente también tendrán máximos y mínimos, los que llamaremos respectivamente  $M_i \wedge m_i$  donde resulta:  $m \leq m_i \wedge M_i \leq M$

Por lo tanto se debe verificar:

$$\begin{aligned} M_i(x_i - x_{i-1}) &\leq M(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^n M(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) &\leq M \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) &\leq M(b - a) \end{aligned}$$

Extraemos M del signo sumatoria por no depender de los subintervalos considerados, es decir de "i", y además, la sumatoria de todos los subintervalos de la partición nos va a dar el intervalo completo. De manera similar se puede analizar para el mínimo:

$$\begin{aligned}
 m_i(x_i - x_{i-1}) &\geq m(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) &\geq \sum_{i=1}^n m(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) &\geq m \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) &\geq m(b-a), \text{ teniendo en cuenta que cuando definimos la}
 \end{aligned}$$

Integral Definida según Cauchy dijimos:

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

Por lo tanto, considerando las expresiones anteriores, resulta:

$$m(b-a) \leq \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

Si aplicamos límite con el número de subintervalos tendiendo a infinito (o la norma de la partición tendiendo a cero) resulta :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(b-a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M(b-a)$$

Pero como ni el máximo, ni el mínimo, ni la amplitud del intervalo dependen de la partición considerada, los podemos considerar como constantes y por lo tanto su límite da lo mismo y entonces teniendo en cuenta la definición de integral definida según Cauchy, resulta:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Si dividimos todo por (b - a), como el intervalo es positivo, la desigualdad no se altera y nos queda:

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

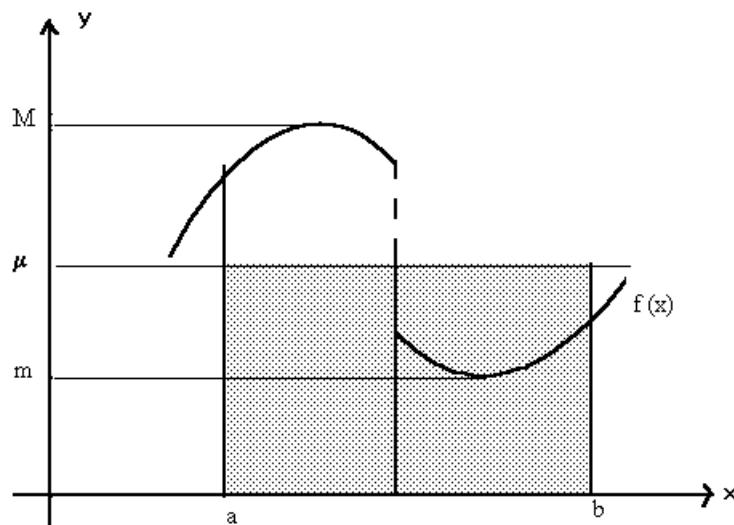
Llaman a esta expresión:  $\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx = \mu$

Luego:  $m \leq \mu \leq M$ .  $\mu$  es un valor comprendido entre el Máximo y el Mínimo, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$$

El área calculada por la Integral Definida puede ser sustituida (o resulta igual) por un área rectangular equivalente, multiplicando la amplitud del intervalo por el valor "mu" ( $\mu$ ), que está comprendido entre el máximo y el mínimo de la función en el intervalo.

Gráficamente:



Lo

Lo sombreado representa el área equivalente.

Ahora bien, si además de ser acotada, la función es continua (hay que tener en cuenta que toda función continua en un intervalo cerrado es siempre acotada en el mismo, no siempre es cierto el recíproco) podemos afirmar que va a existir un punto " $c$ " interior al intervalo, de tal manera que se verifique:

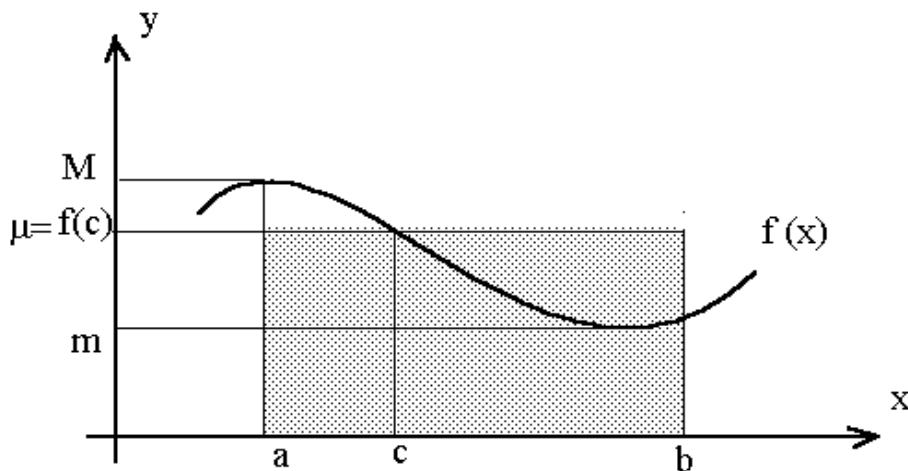
$$\mu = f(c) \quad \wedge \quad c \in (a, b)$$

Teniendo en cuenta que todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo están ocupados por valores de la función en el intervalo (esto no ocurre en funciones acotadas en el intervalo como se ve en el gráfico anterior). Entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)}$$

Donde el área equivalente ahora está constituida por el intervalo multiplicado por la función en un punto interior del mismo.

Gráficamente:



Nuevamente lo sombreado representa el área equivalente.

## 6.- TEÓREMA DE LA FUNCIÓN ÁREA (O DE LA PRIMITIVA O DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN INTEGRAL)

Algunos autores llaman a este Teorema como el Fundamental de la Integral y esto tiene sus razones, ya que nos va a relacionar la integral indefinida (operación) con la definida (cálculo de área) y por lo tanto nos permitirá resolver fácilmente esta última.

Para demostrar este teorema, sea una función  $y = f(x)$  continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , y teniendo en cuenta que:  $\int_a^b f(x) dx = N^o$ , corresponde a un área, podemos pensar que si sustituimos el extremo superior de la integral por una variable "x" con la condición de que esta pertenezca al intervalo considerado, obtendremos una función de este extremo, que se denomina **Función Integral** (o Función Área), y nos dará un área variable. Es decir:

$$\int_a^x f(x) dx = F(x)$$

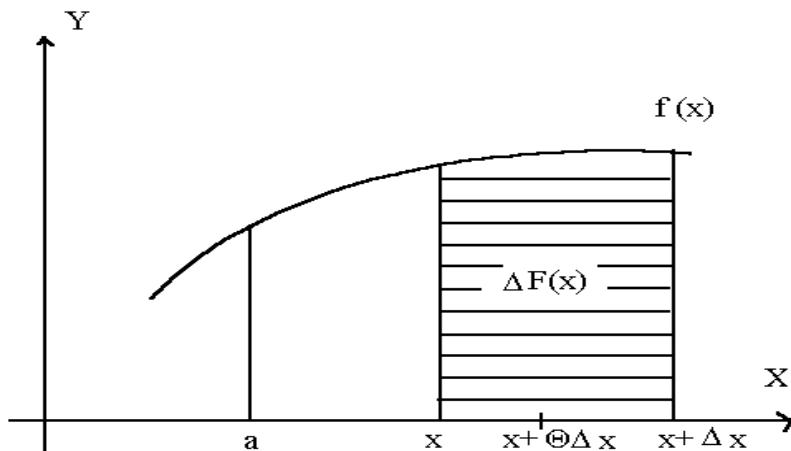
Si incrementamos el extremo superior, obtendremos una función incrementada, entonces:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(x) dx = F(x + \Delta x)$$

y haciendo la diferencia, obtendremos el incremento de la función integral:

$$\begin{aligned}\Delta F(x) &= F(x + \Delta x) - F(x) \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx\end{aligned}$$

Como podemos observar en el grafico siguiente donde el incremento es el área sombreada:



Si además tenemos en cuenta la propiedad de la integral definida, que dice:

$$\int_a^x f(x) dx = - \int_x^a f(x) dx$$

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) =$$

podemos hacer:  $= \int_a^{x+\Delta x} f(x) dx + \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx$

Hemos aplicado la propiedad aditiva del intervalo en la integral definida y por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, considerando que la amplitud del intervalo es  $\Delta x$  y que  $\Theta$  es un valor comprendido entre cero y uno:  $0 < \Theta < 1$ , entonces  $(x + \Theta \Delta x)$  en un punto interior del intervalo, resulta:

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) =$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx = \Delta x f(x + \Theta \Delta x)$$

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x + \Theta \Delta x)$$

Dividimos por  $\Delta x$  tendremos:

pasando al límite para  $\Delta x$  tiendiendo a cero, resulta:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Theta \Delta x)$$

Entonces:

$$F'(x) = f(x)$$

Lo cual nos permite afirmar que la función integral es una primitiva de la función integrando, por consiguiente, se podría calcular la función integral mediante la utilización de la integral indefinida.

## 7.- REGLA DE BARROW

Si  $G(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ , función continua en  $[a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b = [G(x)]_a^b$

Demostración: esta regla nos permite calcular una integral definida por aplicación de una primitiva y se basa en si dos funciones tienen igual derivada, ambas difieren en una constante (Teorema Fundamental del Cálculo Integral). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} G(x) \text{ es una primitiva de } f(x) &\Rightarrow G'(x) = f(x) \\ F(x) \text{ es una primitiva de } f(x) &\Rightarrow F'(x) = f(x) \end{aligned} \Rightarrow F'(x) = G'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + K$$

siendo:  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$

si hacemos  $x = a$ , resulta:  $F(a) = \int_a^a f(x) dx = 0$

por ser los extremos de integración iguales, pero además:

$$F(a) = G(a) + K = 0 \Rightarrow K = -G(a)$$

si hacemos  $x = b$ , tendremos:  $F(b) = \int_a^b f(x) dx$

y también:  $F(b) = G(b) + K = G(b) - G(a)$

Igualamos las dos expresiones anteriores resulta:  $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$

que es la Regla de Barrow, que se puede también de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a)$$

Un ejemplo de aplicación de esta Regla:

Calcular la integral entre 1 y 3 de la función  $y = x^2$

Para resolver procedemos de la siguiente manera:

$$\int_I^3 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_I^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{I^3}{3} = \frac{26}{3}$$

## INTEGRALES IMPROPIAS

### **1.- INTRODUCCION:**

La integral definida, vista anteriormente, tenía en cuenta que la función estaba definida en todos los puntos de un intervalo cerrado  $[a, b]$ , finito, y en el cual, por lo menos, la misma tenía que ser acotada, es decir, no se admiten que existan puntos del intervalo en que la función tienda a infinito (discontinuidades infinitas).

Estas restricciones sobre la característica de la función y del intervalo son posibles de flexibilizar para poder resolver algunas aplicaciones prácticas que son útiles.

Para ello, desde el punto de vista matemático, se le debe dar un nuevo enfoque a la integral definida, obteniéndose con ello las integrales impropias.

Estas se originan por dos causas, y teniendo en cuenta esto, se clasifican. Puede ocurrir que el intervalo de integración no sea finito, por lo tanto, tiene uno o los dos extremos infinitos, y la integral será **Impropia de Primera Especie**, o que la función presente un infinito en el intervalo (no esté definida en un punto del mismo) y en ese caso es **Impropia de Segunda Especie**.

Veremos cómo se resuelven.

### **2.- Integrales Imprópias de Primera Especie**

En este caso, el intervalo de integración es infinito y en general se resuelven reemplazando el extremo infinito por una variable ( $t$ ) y luego aplicar límite para  $t$  tendiendo a infinito.

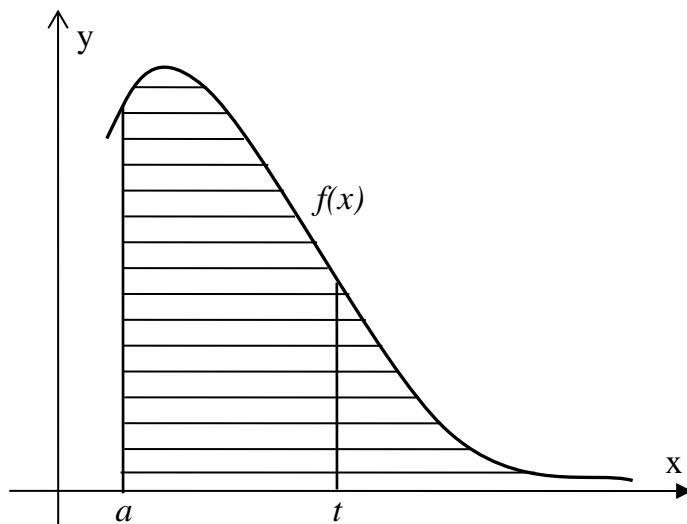
El resultado de este límite puede ser un valor finito. En este caso se dice que la integral impropia es convergente. Si el límite es infinito, la integral impropia será divergente y si no existe el límite la integral impropia será oscilante.

Analizamos cada una de las alternativas que se presentan:

#### **a) El extremo superior de la integral es infinito**

En este caso la integral a resolver es:  $\int_a^{\infty} f(x) dx$

Su gráfico podría ser el siguiente:



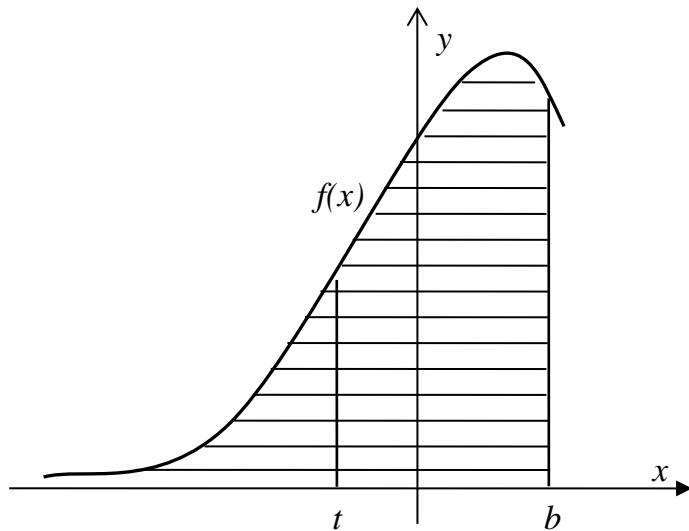
Para poder resolverla es necesario adaptar el extremo superior de la integral, variable “ $t$ ” y aplicar límite

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx =$$

**b) El extremo inferior de la integral es infinito**

Ahora la integral a calcular resulta:  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$

Y podemos suponer su que su gráfico es el siguiente:



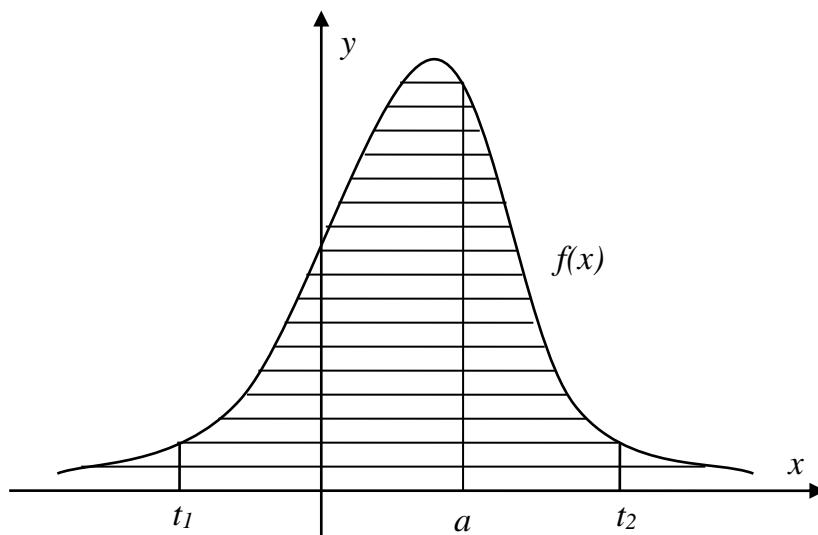
Ahora es necesario reemplazar el extremo inferior por la variable “ $t$ ” y aplicar límite tendiendo a

menos infinito, por lo tanto:  $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx =$

**c) Ambos extremos son infinitos**

Entonces la integral a resolver es del tipo:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx =$

Y su grafica puede ser:



En este caso es necesario descomponer el intervalo de integración en la suma de otros dos. Para ello hay que adoptar un valor intermedio del mismo “ $a$ ”. Aplicamos una propiedad vista en la integral definida (propiedad aditiva del intervalo de integración) y, entonces tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

Por consiguiente es preciso resolver dos integrales impropias similares a las vistas en los casos anteriores, por lo tanto, vamos a reemplazar los extremos infinitos por las variables “ $t_1$ ” y “ $t_2$ ” respectivamente y a continuación aplicamos los límites tendiendo a menos y más infinito

respectivamente, es decir:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^a f(x) dx + \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \int_a^{t_2} f(x) dx$

### 3.- INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE

En este caso la función presenta una discontinuidad infinita en un punto del intervalo, es decir, no está acotada en el mismo. Las posibilidades que se presentan son: que dicho punto singular se encuentre en uno de los extremos, o en el interior del intervalo, lo que nos dará los distintos casos, que en general se resuelven de la misma forma.

Para resolver es necesario desplazarnos del punto donde se presenta la discontinuidad y luego pasar al límite del nuevo extremo tendiendo a dicho punto.

El límite, en general, es lateral, dado que debemos tender a la discontinuidad por un solo lado y al igual que en las de primera especie, puede ser finito o infinito, los que nos dará una integral impropia convergente o divergente según sea el resultado.

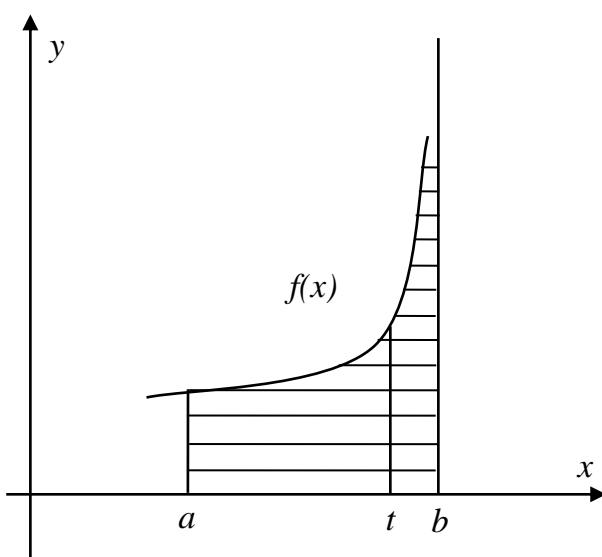
Analizamos los distintos casos que se presentan:

**a) El punto de discontinuidad infinita se encuentra ubicado en el extremo superior del intervalo de integración**

La integral a resolver será:

$$\int_b^a f(x) dx \quad \wedge \quad \text{no existe } f(b)$$

Podemos suponer un gráfico como el siguiente:



Existen dos formas de planear el problema, que por supuesto llegan al mismo resultado. Una de ellas es suponer un extremo superior de la integral variable  $t$ , próximo a  $b$ , dentro del intervalo y luego hacer tender el mismo al extremo superior por izquierda, es decir:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

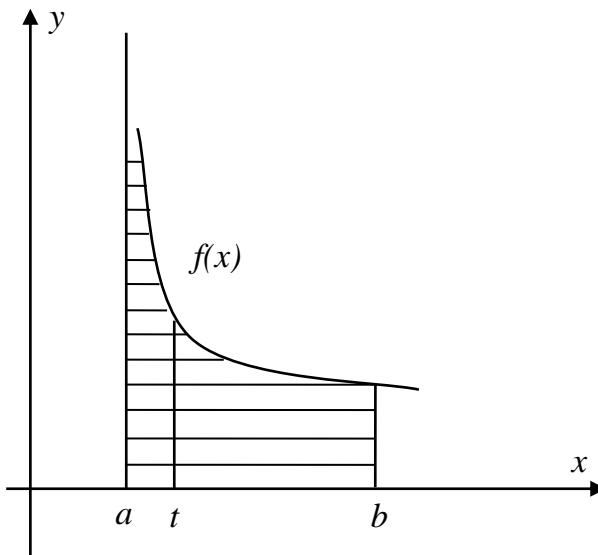
La otra manera se puede considerar un valor  $\varepsilon$ , positivo y variable, y reemplazar el extremo superior de la integral por la diferencia  $b - \varepsilon$ , y pasar al límite para  $\varepsilon$  tendiendo a cero, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

**b) El punto de discontinuidad infinita se encuentra ubicado en el extremo inferior del intervalo de integración**

En este caso tenemos:  $\int_a^b f(x) dx \wedge \text{no existe } f(a)$

Podemos considerar el siguiente gráfico:



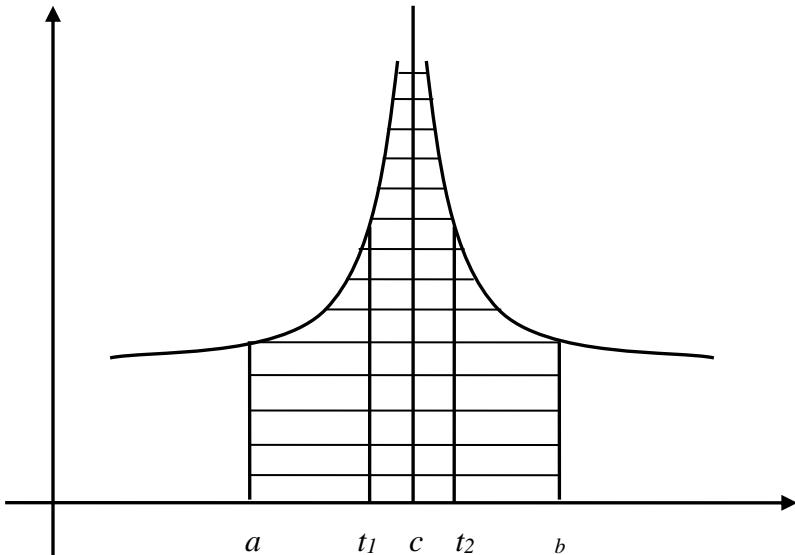
Y procedemos de manera similar al caso anterior, es decir:  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$

$$\text{O también: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

**c) El punto de discontinuidad infinita se encuentra ubicado en un punto interior del intervalo de integración**

El problema a resolver es:  $\int_a^b f(x) dx \wedge \text{no existe } f(c) \wedge c \in (a, b)$

Y podemos considerar el siguiente gráfico



En este caso, similar al último visto en las de primera especie, es necesario descomponer el intervalo de integración en la suma de otros dos. Para ello hay que adoptar un valor intermedio del mismo: “ $c$ ” y aplicamos una propiedad vista en la integral definida (propiedad aditiva del intervalo de integración), y

entonces tenemos:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Por consiguiente, es preciso resolver dos integrales impropias similares a las vistas en los casos anteriores. Por lo tanto, vamos a reemplazar los extremos “ $c$ ” por las variables  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente y luego aplicamos los límites laterales para ellas tendiendo a dicho extremo. Es decir:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t_1 \rightarrow c^-} \int_a^{t_1} f(x) dx + \lim_{t_2 \rightarrow c^+} \int_{t_2}^b f(x) dx$$

Ejemplos:

1.- Calcular la siguiente integral:  $\int_0^\infty e^{-x} dx$

Para resolverla cambiamos el extremo superior de la misma por una variable  $t$  y resolvemos el límite para dicha variable tendiendo a infinito:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -e^{-x} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -e^{-t} + e^0 \right]$$

Aplicamos la Regla de Barrow, restando solamente calcular el límite. Por lo tanto:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -e^{-t} + e^0 \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{1}{e^t} \right] = \left[ 1 + \frac{1}{e^\infty} \right] = 1$$

Como el resultado es finito, la misma es convergente.

2.- Calcular la siguiente integral:  $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Para resolverla, al igual que en el ejemplo anterior, cambiamos el extremo superior de la misma por una variable  $t$  y resolvemos el límite para dicha variable tendiendo a infinito, es decir:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-1/2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} [2(\sqrt{t} - \sqrt{1})] = 2(\sqrt{\infty} - 1) = \infty$$

Como el resultado es infinito, la misma es divergente.

3.- Calcular la siguiente integral:  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

En este ejemplo, la integral presenta una discontinuidad infinita en el extremo superior de la misma. Por Si reemplazamos por la variable  $t$  y luego resolvemos el límite para este tendiendo a 1, es decir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t \rightarrow 1} [\arcsen x]_0^t = \lim_{t \rightarrow 1} [\arcsen t - \arcsen 0] = \\ &= \arcsen 1 - \arcsen 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Integral Impropia convergente.

4.- Calcular la siguiente integral:  $\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$

En este caso la discontinuidad infinita está en el extremo inferior y es el que reemplazamos. Por lo tanto:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^2 x^{-3} dx = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{x^{-2}}{-2} \right]_t^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{-2x^{-2}} \right]_t^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{8} + \frac{1}{2t^2} \right] = -\frac{1}{8} + \frac{1}{0} = \infty$$

Integral Impropia divergente.

## APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

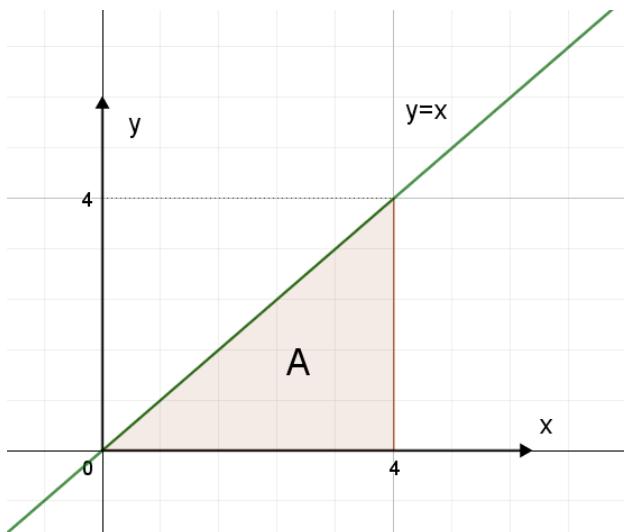
### 1.- APLICACIONES GEOMÉTRICAS

#### 1.1.- CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS

Como primera aplicación de la Integral Definida veremos el cálculo de áreas planas. Algunos problemas que se presentan:

- I) Calcular el área del triángulo formado por la recta  $y=x$ , el origen del Sistema de ejes coordenados y la ordenada correspondiente a  $x=4$ .

Gráficamente:



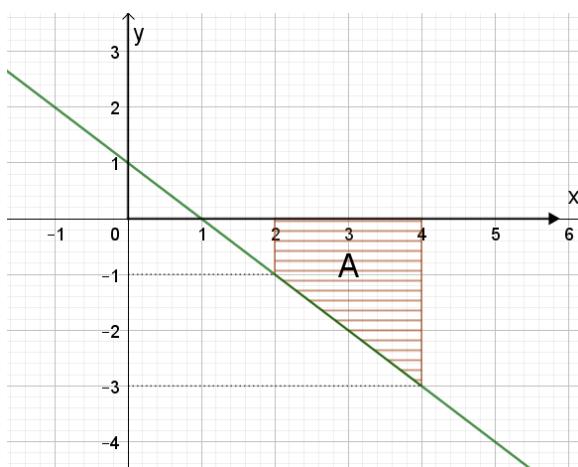
Considerando el área de un triángulo, el resultado será baso por altura sobre dos:  $A = 4 \times \frac{4}{2} = 8$ . Aplicando la integral definida a  $y=x$  entre los extremos del intervalo de integración  $[0 ; 4]$ :

$$A = \int_0^4 y \, dx = \int_0^4 x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ u. a. (unidades de área)}$$

I

- II) Calcular el área comprendida entre la recta  $y=1$ , el eje x y las ordenadas correspondientes  $x=2$  y  $x=4$ .

Gráficamente:



El área a calcular según el gráfico, corresponde a un trapecio. Cuy área es la semisuma de sus lados por la altura:  $\frac{1+3}{2} \times 2 = 4$ .

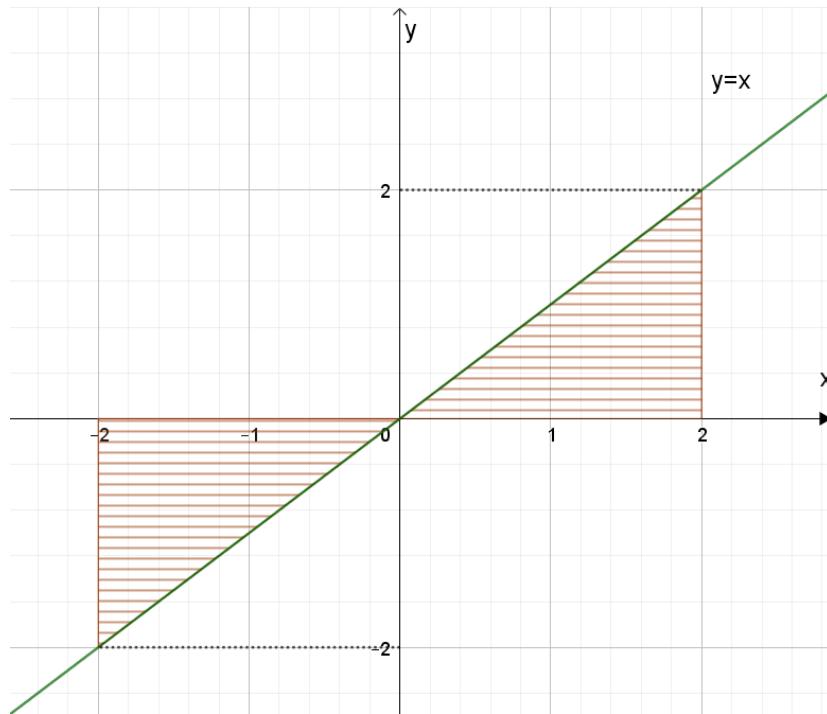
Aplicando la integral definida:

$$A = \int_2^{-4} (x - 1) dx = \int_2^{-4} dx - \int_2^{-4} x dx = [x]_2^{-4} - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_2^{-4} = (4 - 2) - \left( \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = 2 - 8 + 2 = -4$$

Vemos que el resultado obtenido mediante la integral es el mismo que el calculado anteriormente, pero con signo negativo. Esto es porque las áreas que se encuentran por debajo del eje  $x$  son negativas. Es necesario tener en cuenta la posición de la superficie respecto del eje coordenado. En estos casos tomamos el resultado valor absoluto:  $A = |-4| = 4$  u. a.

- III) **Calcular el área comprendida entre la recta  $y=x$ , el eje  $x$  y las ordenadas correspondientes  $x=2$  y  $x=-2$ .**

Gráficamente:



El área a calcular corresponde a dos triángulos rectángulos de base 2 y altura también 2, Luego:

$$A = 2 \cdot \left( \frac{2 \cdot 2}{2} \right) = 4.$$

Mediante la integral:

$$A = \int_{-2}^2 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^2 = (4 - 2) - \left( \frac{-2^2}{2} - \frac{-2^2}{2} \right) = -2 + 2 = 0$$

Esto indicaría que no tenemos área, y esto no es así ya que hemos visto que el área es 4.

Observando el gráfico vemos que parte del área se encuentra por debajo del eje de abscisas, o sea área negativa. Asimismo, el área que está por encima del eje  $x$  es la misma que está por debajo. O

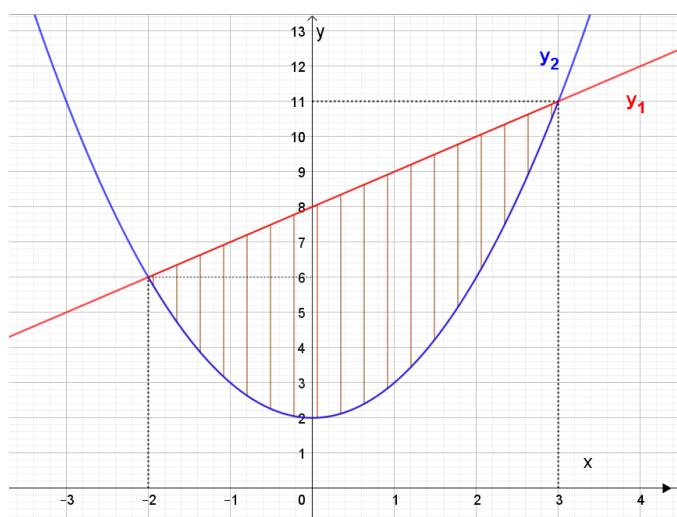
sea, son simétricas respecto del origen del sistema de ejes. Al resolver mediante la integral, y calcular el área, sumamos el positiva y el área negativa. Por lo tanto, debemos tener en cuenta la posición de la curva respecto del eje de abscisas, y en caso de observar cambios tenemos que integrar cada parte por separado y las negativas, en valor absoluto y luego realizar la suma. En este caso, la recta entre  $-2$  y  $0$ , está por debajo del *eje x*, y entre  $0$  y  $2$ , por encima. Entonces:

$$A = \left| \int_{-2}^0 x \, dx \right| + \left| \int_0^2 x \, dx \right| = \left| \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^2 \right| = \left| \frac{4}{2} \right| + \left| \frac{4}{2} \right| = 4 \text{ u. a.}$$

**IV) Calcular el área encerrada entre las siguientes curvas:**

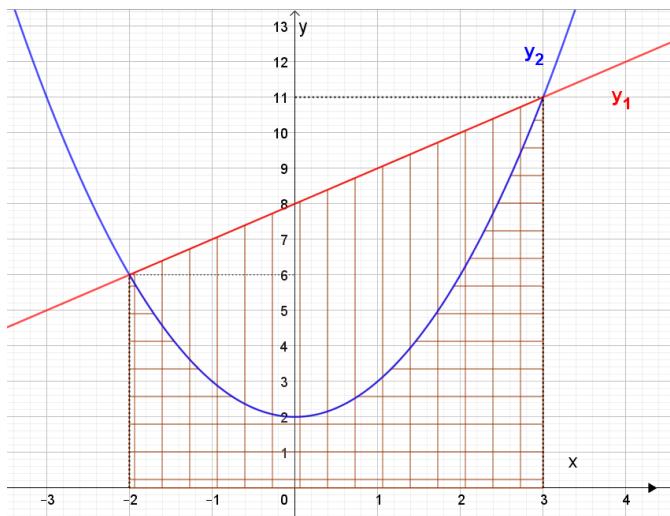
$$\begin{cases} y_1 = x + 8 \\ y_2 = x^2 + 2 \end{cases}$$

Es importante graficar ambas funciones para visualizar el problema a resolver:



Realizamos la intersección entre ambas curvas para determinar los extremos de integración: Sean:  $y_1 = x + 8$   $y_2 = x^2 + 2$ . Entonces:  $y_1 = y_2$ . Luego:  $x + 8 = x^2 + 2$ , de donde:  $x^2 - x - 6 = 0$ , cuyas raíces son:  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = -2$ .

El área buscada será la diferencia entre el área de la recta respecto del *eje x*, entre los extremos de integración  $-2$  y  $3$  (sombreada verticalmente en el gráfico), y la de la parábola con respecto también al *eje x* y extremos (sombreada horizontalmente).

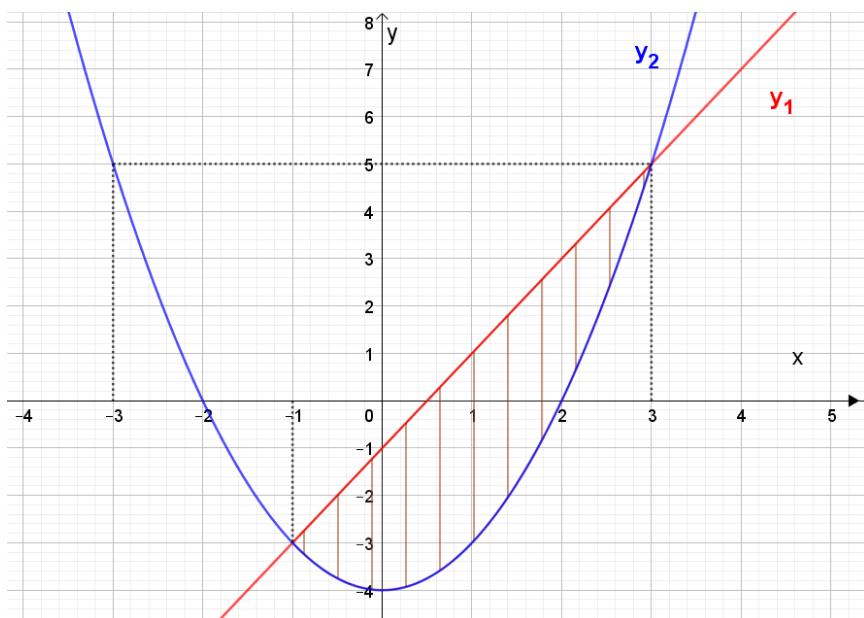


Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^3 y_1 \, dx - \int_{-2}^3 y_2 \, dx = \int_{-2}^3 (y_1 - y_2) \, dx = \\
 &= \int_{-2}^3 (x + 8 - x^2 - 2) \, dx = \int_{-2}^3 (-x^2 + x + 6) \, dx = \left[ \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^3 = \\
 &= \frac{125}{6} \text{ u. a.}
 \end{aligned}$$

V) Calcular el área encerrada entre las siguientes curvas:  $\begin{cases} y_1 = 2x - 1 \\ y_2 = x^2 - 4 \end{cases}$

Realizamos el gráfico:



En este caso, ambas curvas tienen una parte por encima del eje  $x$ , y otra por debajo. Para resolver el área, no solo tenemos que hallar la intersección entre ambas curvas, sino también los ceros (intersección con el eje  $x$ ).

Entonces:  $y_1 = y_2 \Rightarrow 2x - 1 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 ; x_2 = -1$ .

Los ceros, son: Recta:  $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$  Parábola:  $x^2 - 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Para calcular el área dividimos ésta en tres subáreas, teniendo en cuenta los cambios relativos de posiciones:  $A_1$  entre  $-1 \wedge \frac{1}{2}$

$A_2$  entre  $\frac{1}{2} \wedge 2$

$A_3$  entre  $2 \wedge 3$

Resolviendo la diferencia de las áreas de la recta y la parábola, en valor absoluto, de cada una de las subáreas y sumándolas, obtenemos la superficie encerrada por las curvas:

$$A_1 = \left| \int_{-1}^{1/2} (2x + 1) dx - \int_{-1}^{1/2} (x^2 - 4) dx \right| = \left| \int_{-1}^{1/2} (2x + 3 - x^2) dx \right| = \left| \frac{27}{8} \right| = \frac{27}{8}$$

$$A_2 = \left| \int_{1/2}^2 (2x - 1) dx - \int_{1/2}^2 (x^2 - 4) dx \right| = \int_{1/2}^2 (2x + 3 - x^2) dx = \left| \frac{45}{8} \right| = \frac{45}{8}$$

$$A_3 = \left| \int_2^3 (2x - 1) dx - \int_2^3 (x^2 - 4) dx \right| = \int_2^3 (2x + 3 - x^2) dx = \left| \frac{5}{3} \right| = \frac{5}{3}$$

Luego, el área total será:  $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{27}{8} + \frac{45}{8} + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$  u. a.

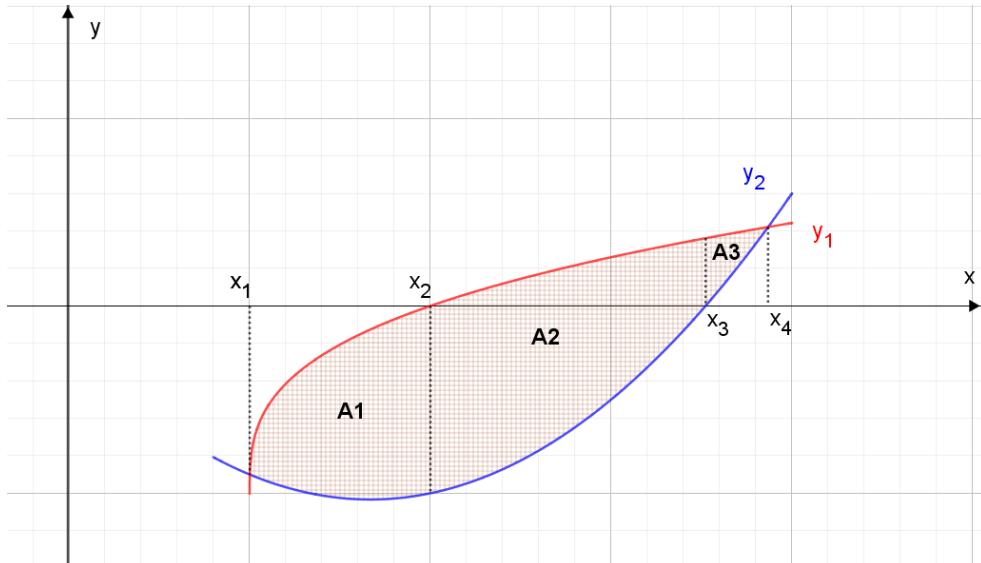
Como podemos observar este procedimiento resulta bastante trabajoso. Veremos que resulta si integramos solamente entre los puntos de intersección entre las dos curvas, sin tener en cuenta lo que está debajo o arriba del eje  $x$ :

$$A = \int_{-1}^3 (2x - 1) dx - \int_{-1}^3 (x^2 - 4) dx = \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx = \frac{32}{3} \text{ u. a.}$$

Como llegamos al mismo resultado Podemos pensar que sería lo mismo proceder de esta última manera. Para estar seguros debemos demostrar en general.

Sean:  $y_1 = f(x)$        $y_2 = g(x)$  dos funciones cualesquiera.

Supongamos que sus gráficas, son:



Las curvas se cortan en dos puntos de abscisas:  $x_1$  y  $x_4$ . La función  $y_1$  corta al eje  $x$  en  $x_2$ , y la función  $y_2$  en  $x_3$ . De esta manera podemos dividir el área a calcular, en tres partes. Llamamos  $A_1$  al área comprendida entre  $x_1$  y  $x_2$ . Vemos que se encuentra por debajo del eje  $x$ , por lo tanto, es negativa. El resultado será la resta entre la curva generada por la función  $y_2$  menos  $y_1$ , cambiada de signo.

Entonces tendremos:  $A_1 = - \left( \int_{x_1}^{x_2} y_2 - \int_{x_1}^{x_2} y_1 \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} y_1 dx - \int_{x_1}^{x_2} y_2 dx$

$A_2$  comprendida entre  $x_2$  y  $x_3$ , donde una parte es positiva y otra negativa. Hacemos la diferencia entre las dos:  $A_2 = \int_{x_2}^{x_3} y_1 dx - \int_{x_2}^{x_3} y_2 dx$

$A_3$  comprendida entre  $x_3$  y  $x_4$ , área positiva. Hacemos la diferencia entre las dos:  $A_3 = \int_{x_3}^{x_4} y_1 dx - \int_{x_3}^{x_4} y_2 dx$

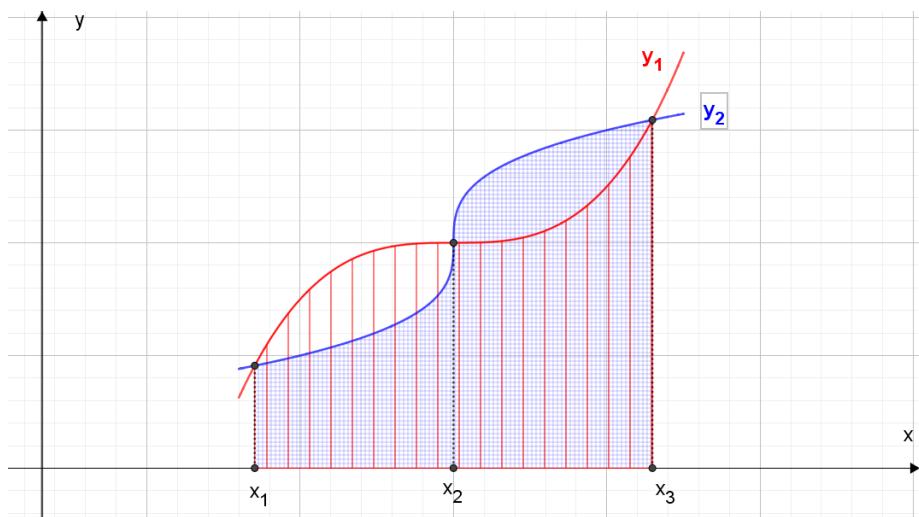
Luego, el resultado del área buscada será la suma de las tres áreas parciales:

$$A = \left( \int_{x_1}^{x_2} y_1 dx - \int_{x_1}^{x_2} y_2 dx \right) + \left( \int_{x_2}^{x_3} y_1 dx - \int_{x_2}^{x_3} y_2 dx \right) + \left( \int_{x_3}^{x_4} y_1 dx - \int_{x_3}^{x_4} y_2 dx \right)$$

Aplicando propiedades:  $A = \int_{x_1}^{x_4} y_1 dx - \int_{x_1}^{x_4} y_2 dx = \int_{x_1}^{x_4} (y_1 - y_2) dx$ .

Esto se puede realizar siempre que la posición relativa entre las curvas de las funciones  $y_1 = f(x)$  y  $y_2 = g(x)$  se mantenga. Caso contrario habrá que integrar en valor absoluto entre cada cambio de posición relativa, sin tener en cuenta las intersecciones con el eje  $x$ . Es decir, si está por encima o por debajo del eje de abscisas.

Por ejemplo, en el siguiente gráfico:



El área originada por la curva de la función  $y_1$  con respecto al eje  $x$ , como podemos observar, es la sombreada con rectas, y la de  $y_2$  con puntos.

Si hacemos:  $\int_{x_1}^{x_3} (y_1 - y_2) dx$ . Resulta que entre  $x_1$  y  $x_2$ , el área originada por  $y_1$ , es mayor que la de  $y_2$ . Por lo tanto, el resultado es positivo. En cambio, entre  $x_2$  y  $x_3$ , el área de  $y_1$  es menor que la de  $y_2$ , con resultado negativo. En el gráfico, las áreas con los dos sombreados se anulan, y las de un solo sombreado, son del mismo signo. Por lo tanto, hacemos la diferencia. Luego:

$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (y_1 - y_2) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} (y_1 - y_2) dx \right|$ . De esta manera podemos calcular el área.

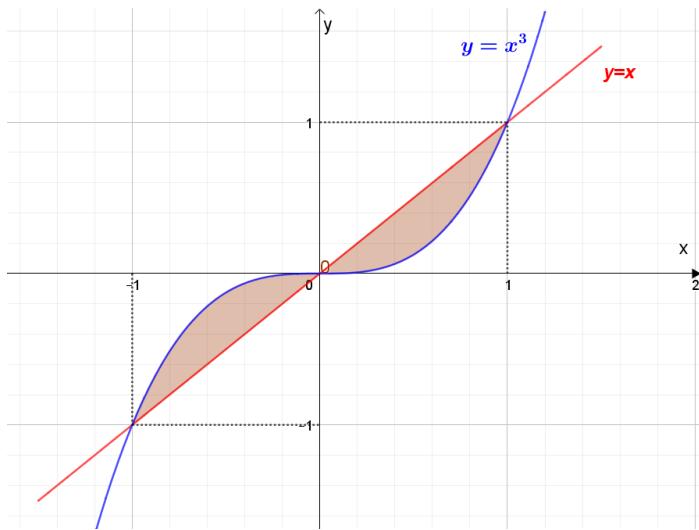
**VI) Calcular el área encerrada entre las siguientes curvas:**

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x^3 \end{cases}$$

Hacemos:  $y_1 = y_2$ . Entonces:  $x = x^3 \Rightarrow x^3 - x = 0$

$\therefore x \cdot (x^2 - 1) = 0$ , obtenemos tres raíces:  $x_1 = -1$  ;  $x_2 = 0$  ;  $x_3 = 1$

Si realizamos el gráfico:



Vemos que se produce un cambio de posición relativa entre ambas curvas, lo que original un cambio de signo, lo que nos indica que debemos integrar por secciones:

$$A = \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - x) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| = 1 \text{ u.a}$$

VII)

**Calcular el área del triángulo formado por las rectas:**

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x - 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

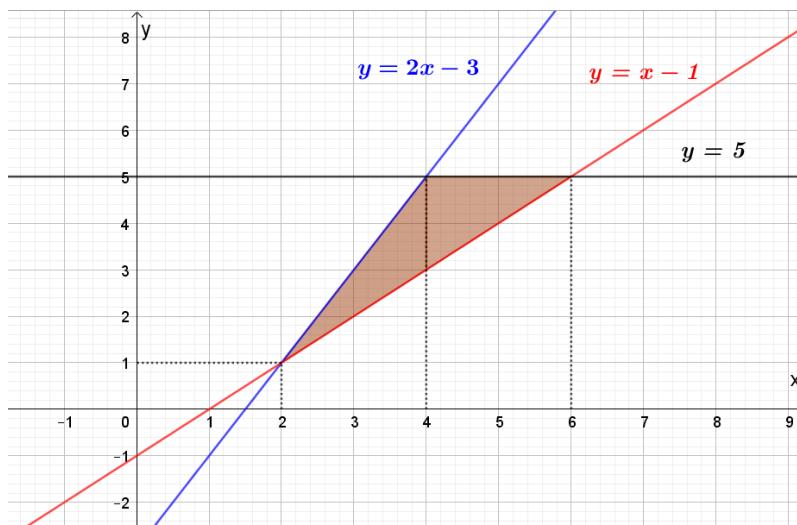
Realizamos la intersección de las rectas a efectos de obtener los vértices del triángulo

Primera intersección:  $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x - 1 \end{cases}$ . Entonces:  $2x - 3 = x - 1$ ;  $x = 2$ . Luego: A(2 ; 1)

Otra intersección:  $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 5 \end{cases}$ .  $2x - 3 = 5$ ;  $x = 4$ . Luego: B(4 ; 5)

Por último:  $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 5 \end{cases}$ .  $x - 1 = 5$ ;  $x = 6$ . Luego: A(6 ; 5)

Gráficamente:



Observando el gráfico, vemos que no podemos hacer una sola integral respecto del *eje x*, tenemos que dividirla en dos. Una entre 2 y 4, y la otra entre 4 y 6, ambas en valor absoluto.

Asimismo, cambian las funciones en cada caso. Entre 2 y 4, la diferencia será entre:  
 $y = 2x - 3$  ;  $y = x - 1$ .

Entre 4 y 6:  $y = 5$  ;  $y = x - 1$ .

Tendremos las siguientes integrales:

$$A_1 = \int_2^4 [(2x - 3) - (x - 1)] dx = \int_2^4 (x - 2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^4 = 2$$

Análogamente:

$$A_2 = \int_4^6 [5 - (x - 1)] dx = \int_4^6 (-x + 6) dx = \left[ -\frac{x^2}{2} + 6x \right]_4^6 = 2$$

Luego:  $A = A_1 + A_2 = 4$  u.a.

Ahora bien, podemos pensar en otra manera mas sencilla de resolver este ejercicio, mediante una sola integral. Esto es, integrar respecto del *eje y* en lugar del *eje x*. Para ello es necesario expresar x en función de y en cada una de las funciones.

$$y = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{y}{2} + \frac{3}{2} \quad ; \quad y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$$

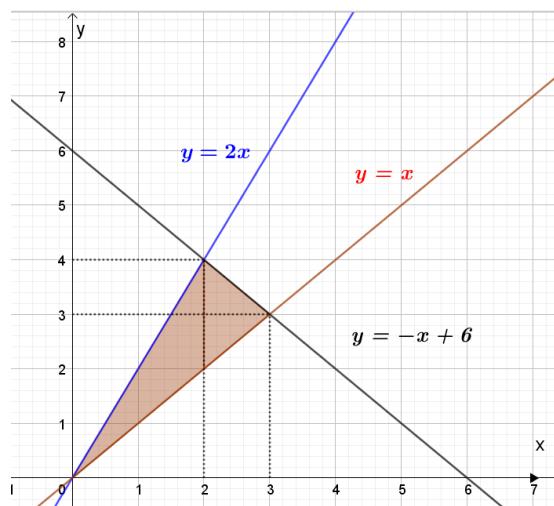
Tendríamos que integrar la diferencia de ambas funciones en el intervalo [1 ; 5]. O sea, con extremos de integración 1 y 5.

$$\text{Entonces: } A = \int_1^5 \left[ (y + 1) - \left( \frac{y}{2} + \frac{3}{2} \right) \right] dy = \int_1^5 \left( \frac{y}{2} + \frac{5}{2} \right) dy = \left[ \frac{y^2}{4} + \frac{5y}{2} \right]_1^5 = 4 \text{ u.a.}$$

### VIII) Calcular el área del triángulo formado por las rectas:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x \\ y = -x + 6 \end{cases}$$

Gráficamente:



En este caso no tendremos ninguna ventaja si integramos respecto del *eje y*, o del *eje x*. Integraremos respecto del *eje x*. Realizamos las intersecciones de las rectas y obtenemos:

$$I_1 = (0, 0) \quad I_2 = (2, 4) \quad I_3 = (3, 3), \text{ que representan los extremos de integración.}$$

$$\text{El área buscada, será: } A_1 = \int_0^2 (2x - x) dx = \int_0^2 x dx = 2$$

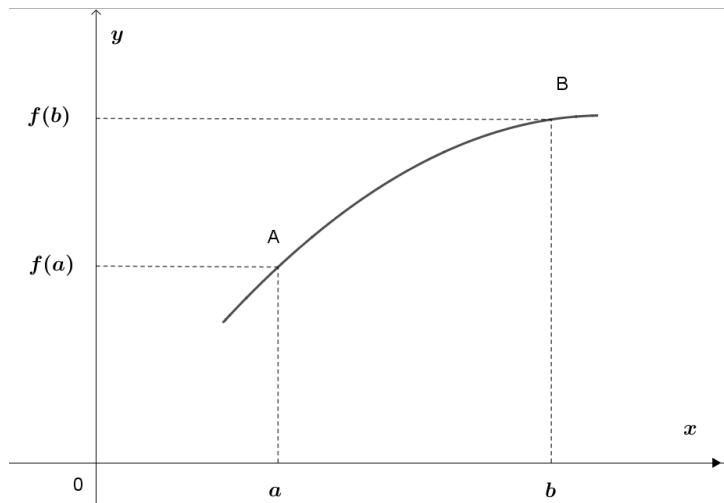
$$A_2 = \int_2^3 (-x + 6 - x) dx = \int_2^3 (6 - 2x) dx = 1$$

$$\text{Luego: } A = A_1 + A_2 = 2 + 1 = 3 \text{ u.a}$$

## 1.2.- LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA (RECTIFICACIÓN DE ARCOS)

El problema consiste en calcular la longitud de una curva plana, que representa a una función:  $y = f(x)$  derivable en un intervalo  $[a ; b]$ , entre dos puntos  $A[a ; f(a)]$  y  $B[b ; f(b)]$ , extremos del mismo.

Su gráfica podría ser:



Para obtener la longitud del arco de curva, realizamos una partición del intervalo  $[a ; b]$  y lo dividimos en  $n$  subintervalos, siendo:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{i-1} \leq x_i \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

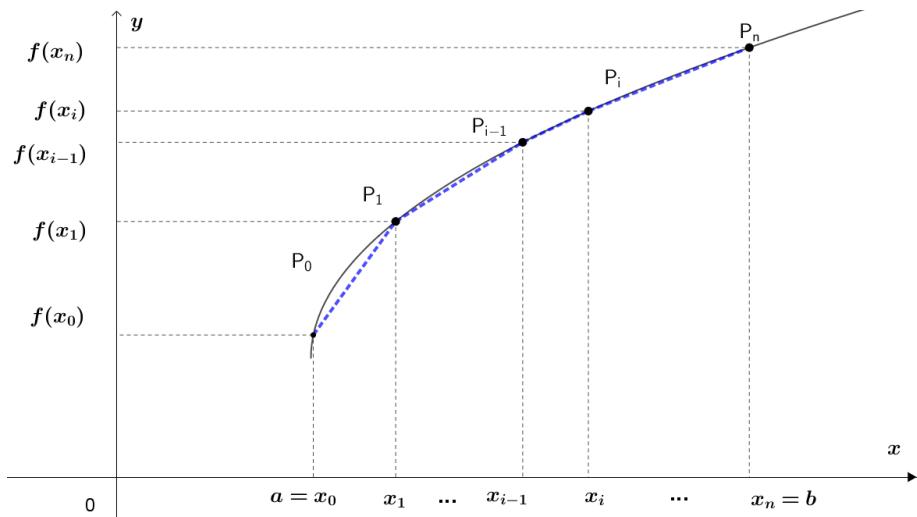
Los valores de la función:

$$f(x_0) ; f(x_1) ; f(x_2) ; \dots ; f(x_{i-1}) ; f(x_i) ; \dots ; f(x_{n-1}) ; f(x_n)$$

Los puntos correspondientes a la curva de la función, serán:

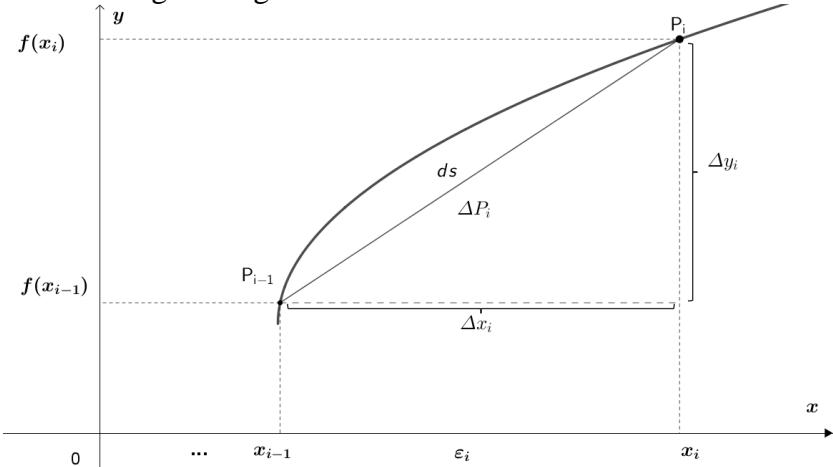
$$P_0(x_0 ; f(x_0)) ; P_1(x_1 ; f(x_1)) ; P_2(x_2 ; f(x_2)) ; \dots ; P_{i-1}(x_{i-1} ; f(x_{i-1})) ; P_i(x_i ; f(x_i)) \dots ; \\ ; P_{n-1}(x_{n-1} ; f(x_{n-1})) ; P_n(x_n ; f(x_n))$$

Si unimos estos puntos de la curva, tendremos una poligonal inscripta en el gráfico de la función:



Si refinamos la partición, la longitud de esta poligonal a se acerca cada vez más a la de la curva, y en el límite con el número de subintervalos tendiendo a infinito, obtendremos la longitud del arco de curva, siempre que este límite exista, y podemos decir entonces que la curva es rectificable.

Para calcular la longitud de la poligonal, determinamos previamente la de los segmentos que la conforman, de acuerdo al siguiente gráfico:



Donde:  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  ;  $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$

$$\text{Entonces: } \Delta P_i = ds = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \cdot \left[1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right]} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right]}$$

Si consideramos:  $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$  que representa un incremento funcional, podemos aplicar el Teorema de Lagrange (del Valor Medio del Cálculo Diferencial) por ser  $f(x)$  función derivable:  
 $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = x_i - x_{i-1} \cdot f'(\varepsilon_i) = \Delta y_i \cdot f'(\varepsilon_i)$ ; siendo:  $\varepsilon_i \in (x_{i-1}; x_i)$

$$\therefore \Delta P_i = ds = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta x_i \cdot f'(\varepsilon_i)}{\Delta x_i}\right)^2\right]} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \cdot \left[1 + (f'(\varepsilon_i))^2\right]} = \sqrt{1 + (f'(\varepsilon_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

Si queremos calcular la longitud de la poligonal, será la suma de todos los segmentos que la componen:

$$P = \sum_{i=1}^n \Delta P_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\varepsilon_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

Como la longitud de la curva resulta igual al límite para la cantidad de puntos tendiendo a infinito, o la norma de la partición tendiendo a cero, tendremos:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\varepsilon_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

Y por definición de integral definida:

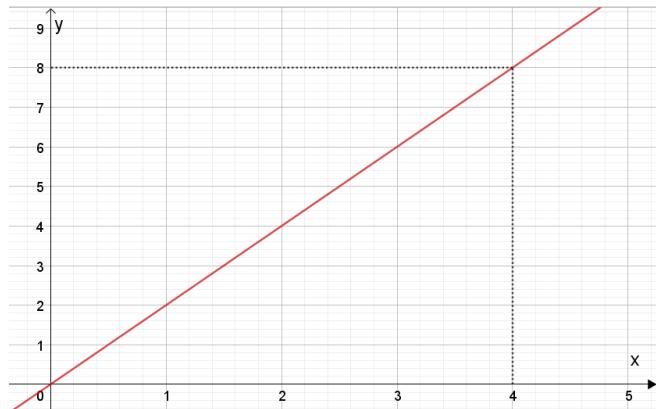
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\varepsilon_i))^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

Luego, la longitud de la curva en el intervalo  $[a; b]$ , será:  $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$

Vemos algunos ejercicios de aplicación:

**1.- Calcular la longitud de la recta  $y = 2x$  en el intervalo  $[0 ; 4]$**

Graficamos la función:



Por el Teorema de Pitágoras podemos calcular:

$$L = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{5 \cdot 16} = 4 \cdot \sqrt{5}$$

Mediante la fórmula de la longitud de un arco de curva:

$$y = 2x \Rightarrow y' = 2.$$

$$\text{Luego: } L = \int_0^4 \sqrt{1 + 2^2} dx = \int_0^4 \sqrt{5} dx = \sqrt{5} \int_0^4 dx = \sqrt{5} [x]_0^4 = 4 \sqrt{5}$$

**2.- Calcular la longitud del arco de parábola  $y = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$ , el intervalo  $[0 ; 3]$**

$$\text{Consideramos: } y = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Aplicando la fórmula, resulta: } L = \int_0^3 \sqrt{1 + (x^{1/2})^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1+x} dx,$$

Resolvemos esta integral, por sustitución:

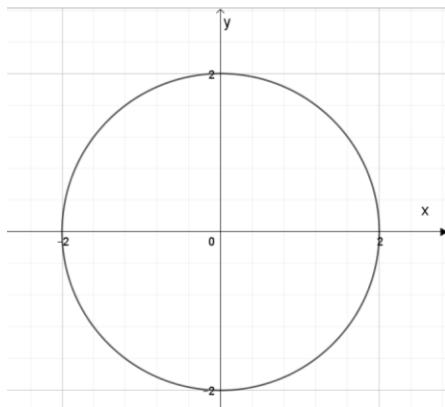
$$\text{Llamamos: } u = 1 + x \Rightarrow du = dx$$

$$\text{Entonces: } L = \int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \int_0^3 \sqrt{u} du = \int_0^3 u^{1/2} dx = \left. \frac{u^{3/2}}{3/2} \right|_0^3 = \left. \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2} \right|_0^3 = \frac{14}{3}, \text{ longitud de la curva.}$$

**3.- Calcular la longitud de una circunferencia de radio 2.**

La ecuación de esta circunferencia, es:  $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

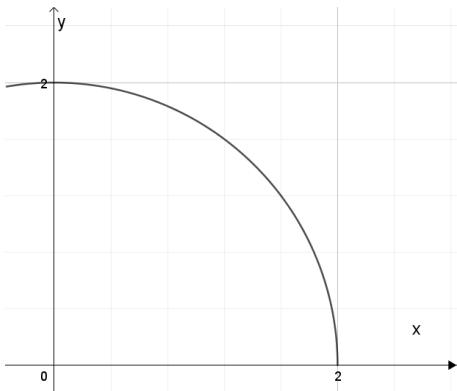
Graficamos:



$$\text{Derivamos: } y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Si queremos aplicar la fórmula para hallar la longitud, determinamos los extremos de integración y tener en cuenta que la circunferencia en su totalidad no representa una función, ya que para cada elemento del Dominio tiene dos imágenes. Por lo tanto, solo debemos tomar la parte positiva de la raíz, gráficamente por encima del eje  $x$ . En este caso se presentan dos posibilidades: una considerar el intervalo  $[-2 ; 2]$ , mitad de la circunferencia. Luego al resultado lo multiplicamos por 2. La otra, el intervalo  $[0 ; 2]$ , la cuarta parte de la circunferencia, y al resultado lo multiplicamos por 4.

Utilizando esta última opción:

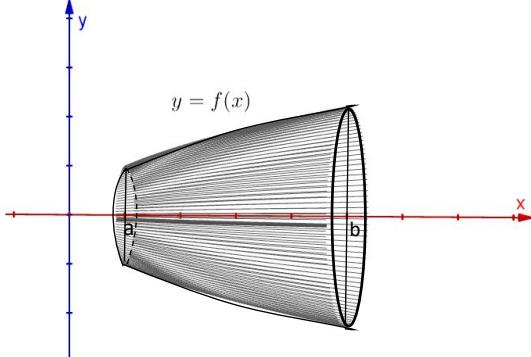


Luego, la longitud de la circunferencia, será:  $4\pi$

### 1.3.- VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Llamamos Sólido o Cuerpo de Revolución, al engendrado por una función continua al girar alrededor de un eje.

Por ejemplo, la función  $f(x)$  en un intervalo  $[a ; b]$  gira alrededor del eje  $x$ , de acuerdo con el siguiente gráfico:



Vamos a calcular el Volumen encerrado por dicho Cuerpo o Sólido de Revolución. Para ello realizamos una partición del intervalo  $[a ; b]$ , obteniendo  $n$  subintervalos que pueden ser iguales o distintos en su amplitud:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{i-1} \leq x_i \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

Obtenemos los siguientes subintervalos:

$$[x_0 ; x_1] ; [x_1 ; x_2] ; [x_2 ; x_3] ; \dots ; [x_{i-1} ; x_i] ; \dots ; [x_{n-1} ; x_n]$$

Si tomamos un punto interior en cada uno de los subintervalos:

$$\varepsilon_1 \in (x_0; x_1)$$

$$\varepsilon_2 \in (x_1; x_2)$$

$$\varepsilon_3 \in (x_2; x_3)$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_i \in (x_{i-1}; x_i)$$

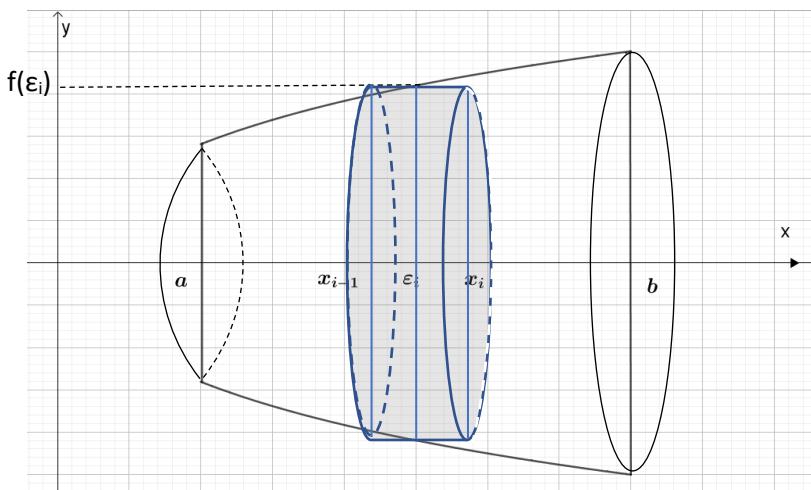
$$\vdots$$

$$\varepsilon_n \in (x_{n-1}; x_n)$$

Con lo que podemos obtener volúmenes de cilindros rectos, cuyas alturas son las amplitudes de los subintervalos y sus radios las funciones en los puntos interiores.

Sea el subintervalo genérico:  $[x_{i-1}; x_i]$

Gráficamente:



Teniendo en cuenta que el volumen de un cilindro recto es:  $V = \pi \cdot h \cdot r^2$

Así, obtendremos un volumen aproximado en el subintervalo genérico:

$$V_i = (x_i - x_{i-1}) \cdot \pi \cdot [f(\varepsilon_i)]^2 = \pi \cdot \Delta x_i \cdot [f(\varepsilon_i)]^2$$

Siendo:  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Luego el Volumen total aproximado, será la suma de cada uno de los volúmenes obtenidos en cada subintervalo:

$$V_{aproxim.} = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_i + \cdots + V_n = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \pi \cdot \Delta x_i \cdot [f(\varepsilon_i)]^2$$

Si refinamos la partición aumentando el número de subintervalos o reduciendo la norma, el volumen aproximado será cada vez más próximo al real. Por lo tanto, pasando al límite para la

cantidad de subintervalos tendiendo a infinito, o la norma tendiendo a cero, los volúmenes serán iguales:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{aproxim.} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot \Delta x_i \cdot [f(\varepsilon_i)]^2$$

Considerando la Definición de Integral Definida:

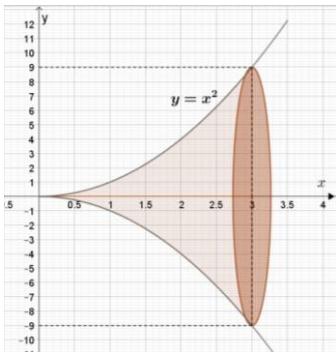
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot \Delta x_i \cdot [f(\varepsilon_i)]^2 = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Fórmula para calcular el Volumen de un Sólido Revolución.

Ejemplos:

**1.- Hallar el volumen engendrado por la parábola  $y = x^2$  que gira alrededor del eje  $x$ , en el intervalo  $[0 ; 3]$**

Gráficamente:

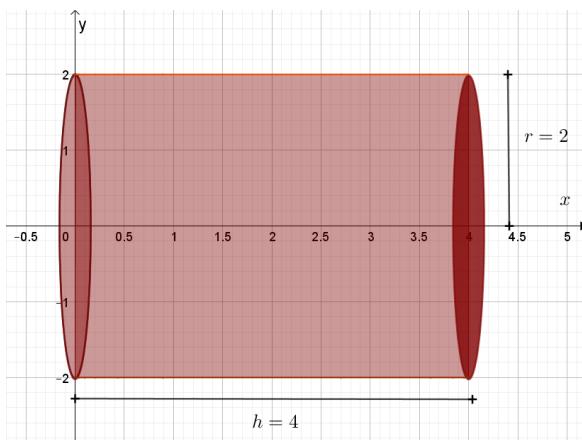


Sea:  $y = f(x) = x^2 \Rightarrow [f(x)]^2 = x^4$

Entonces el Volumen, resulta:  $V = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^3 x^4 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^3 = \frac{243\pi}{5}$

**2.- Hallar el volumen de un cilindro recto de altura  $h=4$  y radio  $r=2$**

Consideramos que la función es una recta paralela al eje  $x$  por  $y=2$ , y que gira alrededor de este eje en el intervalo  $[0 ; 4]$ . Es decir:



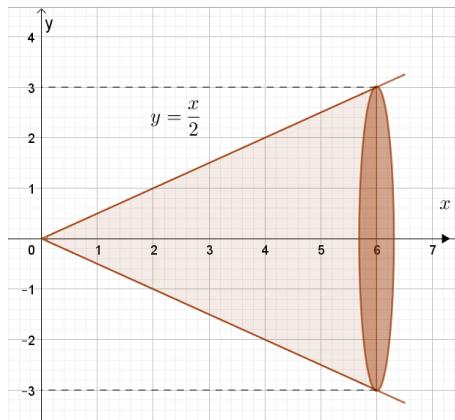
Luego, la función a integrar será:  $y = f(x) = 2 \Rightarrow [f(x)]^2 = 4$

Entonces, el volumen será:

$$V = \pi \int_0^4 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^4 4 dx = 4\pi [x]_0^4 = 16\pi$$

**3.- Hallar el volumen de un cono recto de altura  $h=6$  y radio  $r=3$** 

Si graficamos el problema pensando que el cono es engendrado por una recta que pasa por el origen de sistema de coordenadas y gira alrededor del eje  $x$ , tendremos:



Es hallar la ecuación de la recta que, al girar alrededor del eje  $x$ , engendra el cono y pasa por el origen del sistema de coordenadas y por el punto  $P(0 ; 6)$ .

Ésta será:  $y = \frac{x}{2}$ , que representa la función a integrar.

Entonces:  $y = f(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow [f(x)]^2 = \frac{x^2}{4}$

El intervalo de integración está determinado por la altura, es decir  $[0 ; 6]$ . Luego, el volumen será:

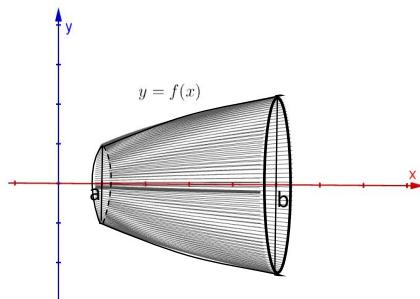
$$V = \pi \int_0^6 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^6 \frac{x^2}{4} dx = \pi \left[ \frac{x^3}{12} \right]_0^6 = 18\pi$$

#### 1.4.- ÁREA DE UNA SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Es el área engendrada por la curva de una función  $y=f(x)$  que gira alrededor del eje  $x$  en un determinado intervalo  $[a ; b]$ .

Además, esta función debe ser derivable, con derivada continua en todos los puntos del intervalo considerado.

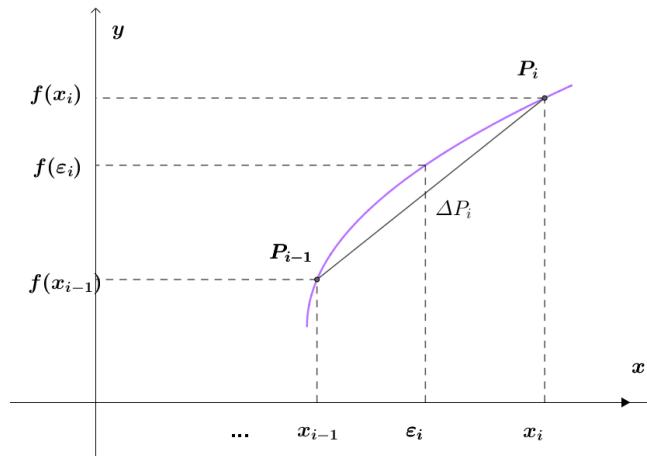
La gráfica de la superficie a calcular, puede ser:



Para obtener dicha superficie procedemos de manera similar al cálculo de la Longitud de un Arco de Curva. Realizamos una partición del intervalo  $[a ; b]$  en  $n$  subintervalos que pueden ser iguales o distintos. Calculamos los valores de la función en cada uno de los subintervalos. Así, obtendremos puntos de la curva que representa la función, por ejemplo:  $P_i = [x_i ; f(x_i)]$ , y construir una poligonal inscripta a la curva.

Consideraremos un subintervalo genérico  $[x_{i-1} ; x_i]$ .

Gráficamente:



Sea  $\Delta P_i$  el segmento de poligonal, de longitud:  $\Delta P_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$   
Teniendo en cuenta que:  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  y  $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ , resulta:

$$\Delta P_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left(1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right)}$$

Por ser un incremento funcional, aplicamos el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (Teorema de Lagrange), con:  $\varepsilon_i \in (x_{i-1}; x_i)$

Sabiendo que:  $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot f'(\varepsilon_i) = \Delta x_i \cdot f'(\varepsilon_i)$

Reemplazando, resulta:

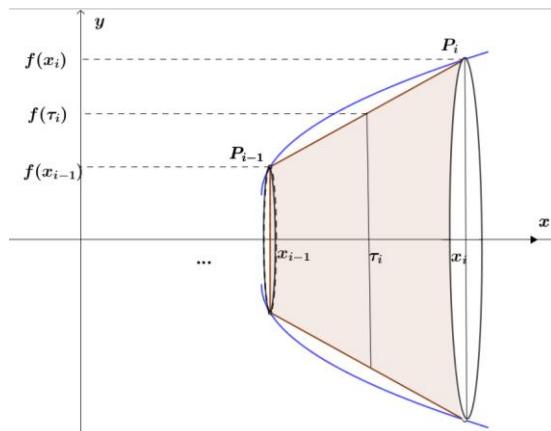
$$\Delta P_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left(1 + \frac{(\Delta x_i)^2 (f'(\varepsilon_i))^2}{(\Delta x_i)^2}\right)} = \Delta x_i \sqrt{\left(1 + (f'(\varepsilon_i))^2\right)}$$

Expresión similar a la obtenida en Longitud de un Arco de Curva.

Ahora bien, la superficie aproximada de este subintervalo genérico la obtendremos considerando que dicho segmento (parte de la poligonal) gira alrededor del eje  $x$  generando un tronco de cono, cuya superficie lateral podemos calcular aplicando su fórmula que es igual a la semisuma de los perímetros de ambas bases, por la altura inclinada del mismo (en nuestro caso, la longitud del segmento de la poligonal). Por lo tanto, tenemos que la longitud de la circunferencia en  $x_{i-1}$ , es:

$L_{i-1} = r_{i-1}$ , y como  $r_{i-1} = f(x_{i-1})$ , entonces:  $L_{i-1} = 2\pi f(x_{i-1})$

Y de la misma manera, la longitud de la circunferencia en  $x_i$ , es:  $L_i = 2\pi f(x_i)$ , de acuerdo al siguiente gráfico:



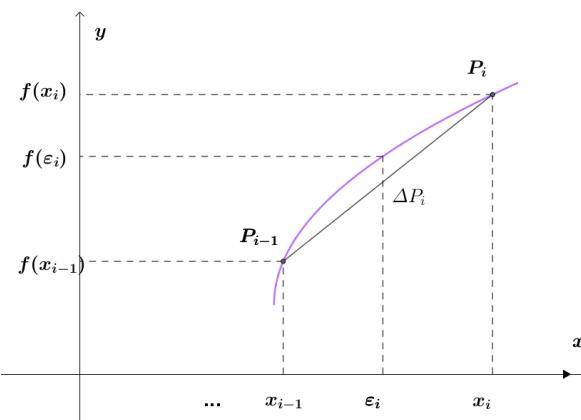
Entonces, la superficie del tronco de cono considerado en la figura, es:  $\Delta S_i = \frac{L_{i-1} + L_i}{2} \cdot \Delta P_i$

Reemplazando:  $\Delta S_i = \frac{2\pi f(x_{i-1}) + 2\pi f(x_i)}{2} \cdot \Delta P_i = 2\pi \left[ \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right] \cdot \Delta P_i$

Dónde podemos considerar que:  $\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\tau_i)$

Como en las aplicaciones anteriores, tomamos un subintervalo genérico  $[x_{i-1}; x_i]$ .

Gráficamente:



En este subintervalo, el segmento de poligonal tiene una longitud igual a:

$$\Delta P_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

Teniendo en cuenta que:  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  y  $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ , resulta:

$$\Delta P_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left(1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right)}$$

Sabiendo que:  $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot f'(\varepsilon_i) = \Delta x_i \cdot f'(\varepsilon_i)$

Por ser un incremento funcional, aplicamos el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (Teorema de Lagrange), con:  $\varepsilon_i \in (x_{i-1}; x_i)$

Reemplazando, resulta:

$$\Delta P_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left(1 + \frac{(\Delta x_i)^2 (f'(\varepsilon_i))^2}{(\Delta x_i)^2}\right)} = \Delta x_i \sqrt{\left(1 + (f'(\varepsilon_i))^2\right)}$$

Donde:  $\tau_i$  es el punto medio del subintervalo, es decir:  $\tau_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$  que puede coincidir o no con  $\varepsilon_i$ , por lo tanto:  $\Delta S_i = 2\pi \cdot f(\tau_i) \cdot \Delta P_i = 2\pi \cdot f(\tau_i) \cdot \sqrt{\left(1 + (f'(\varepsilon_i))^2\right)} \Delta x_i$

Y la superficie total aproximada será igual a la suma de todos los troncos de cono generales en la partición considerada.

Entonces:  $S_{aproxim.} = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot f(\tau_i) \cdot \sqrt{\left(1 + (f'(\varepsilon_i))^2\right)} \Delta x_i$

La superficie real la vamos a obtener pasando al límite con el número de subintervalos tendiendo a infinito, o la norma de la partición tendiendo a cero:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{aproxim.} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot f(\tau_i) \cdot \sqrt{\left(1 + (f'(\varepsilon_i))^2\right)} \Delta x_i$$

Por definición de integral definida y, teniendo en cuenta que, si la amplitud del subintervalo tiende a cero, tienden a ser iguales  $f(\varepsilon_i)$  y  $f(\tau_i)$

Entonces, resulta:

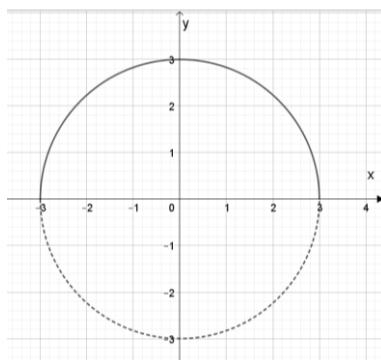
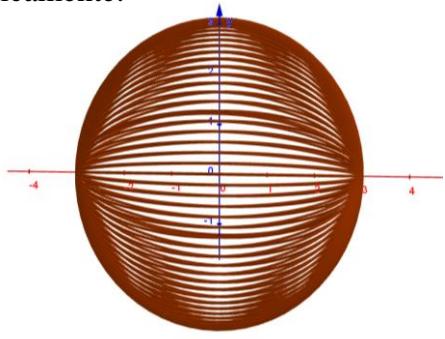
$$S = \int_a^b 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx =$$

$2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$ . Fórmula para calcular la Superficie Lateral de un Sólido de Revolución.

Ejemplos:

**1.- Hallar el área de una superficie esférica de radio igual a 3.**

Consideramos la ecuación de una circunferencia de radio 3:  $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2}$   
Gráficamente:



Para que sea función consideramos únicamente media circunferencia, la cual al rotar alrededor de *eje x* describe la superficie esférica.

Asimismo, por ser simétrica respecto del *eje y*, podemos integrar solamente en la mitad del intervalo y luego multiplicar el resultado por dos.

El intervalo de integración, será:  $[0 ; 3]$

$$\text{La fórmula de la superficie, es: } S = 2 \cdot \left[ 2\pi \cdot \int_0^3 y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx \right]$$

$$\text{Donde: } y = \sqrt{9 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} \Rightarrow (y')^2 = \frac{x^2}{9 - x^2}$$

Luego:

$$S = 2 \cdot \left[ 2\pi \cdot \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}} dx \right] = 4\pi \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{9 - x^2 + x^2}{9 - x^2}} dx =$$

$4\pi \int_0^3 3 dx = 12\pi \int_0^3 dx = 12\pi [x]_0^3 = 36\pi$ , resultado que podemos comprobar sabiendo que la superficie de la esfera es:  $4\pi r^2$  y como el radio es 3, obtenemos el mismo resultado.

En este ejemplo, si en lugar de girar alrededor del *eje x*, hubiéramos calculado respecto del *eje y*, nos daría el mismo resultado, haciendo:  $S = 2 \cdot \left[ 2\pi \cdot \int_0^3 x \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx \right]$  y resolviendo de la misma manera que lo hicimos anteriormente.

**2.- Hallar el área de la superficie de un cono engendrado por la revolución de un segmento de recta  $y=2x$  limitado por  $x=0$  y  $x=2$ , que gira alrededor del *eje x*.**

Aplicando la fórmula, tenemos:  $S = 2\pi \int_0^2 y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$

$$y = 2x \Rightarrow y' = 2 \Rightarrow (y')^2 = 4$$

$$\text{Entonces: } S = 2\pi \int_0^2 2x \sqrt{1+4} dx = 4\pi \sqrt{5} \int_0^2 x dx = 4\pi \sqrt{5} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 8\pi \sqrt{5}$$

**3.- Hallar el área de una superficie de revolución que engendrada por un arco de parábola cúbica  $9y = x^3$ , comprendida en el intervalo  $[0 ; 3]$  que gira alrededor del eje de abscisas.**

$$\text{Si } y = \frac{x^3}{9} \Rightarrow y' = \frac{x^2}{3} \Rightarrow (y')^2 = \frac{x^4}{9}$$

Reemplazando en la fórmula, tenemos:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^3 y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^3 \frac{x^3}{9} \sqrt{1 + \left(\frac{x^4}{9}\right)} dx = \frac{2}{9}\pi \int_0^3 x^3 \sqrt{\frac{9+x^4}{9}} dx = \\ &= \frac{2}{9}\pi \int_0^3 x^3 \frac{\sqrt{9+x^4}}{\sqrt{9}} dx = \frac{2}{27}\pi \int_0^3 x^3 \sqrt{9+x^4} dx \end{aligned}$$

Resolvemos por sustitución:  $\int x^3 \cdot \sqrt{9+x^4} dx$

$$\text{Llamamos: } u = 9 + x^4 \Rightarrow du = 4x^3 dx \Rightarrow \frac{du}{4} = x^3 dx$$

$$\text{Entonces: } \int x^3 \cdot \sqrt{9+x^4} dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{u^3} + C = \frac{1}{6} \sqrt{(9+x^4)^3} + C$$

Luego:

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{27}\pi \int_0^3 x^3 \sqrt{9+x^4} dx = \frac{2}{27}\pi \cdot \frac{1}{6} \left[ \sqrt{(9+x^4)^3} \right]_0^3 = \text{operando} = \frac{\pi}{3} (10 \cdot \sqrt{10} - 1) \cong \\ &\cong 10,207 \pi \end{aligned}$$

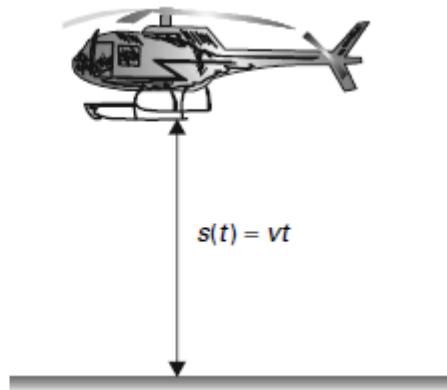
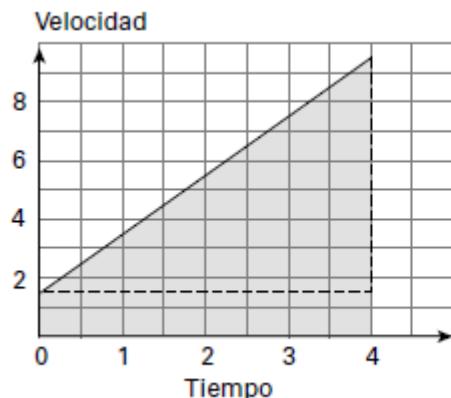
## **TRABAJO PRÁCTICO N° 10: INTEGRALES DEFINIDAS – APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL**

**Situación problemática 1:** Un helicóptero se eleva de tal manera que su velocidad  $v$ , en función del tiempo  $t$ , se modela con la ecuación  $v = 2t + 1.5$  pies por segundo.

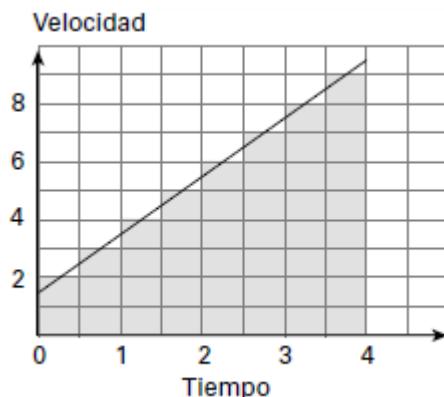
- a) Completar la siguiente tabla de velocidad sustituyendo el valor del tiempo en la ecuación  $v = 2t + 1.5$  cada medio segundo durante los primeros 4 segundos.

Tiempo (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
Velocidad (pies/s)									

- b) Calcular el área gris bajo la gráfica de  $v = 2t + 1.5$  y observar que corresponde a la elevación del helicóptero durante los primeros 4 segundos, puesto que para obtener el área mencionada se tiene que multiplicar *velocidad por tiempo* ( $s = v \cdot t$ ).



- c) Estimar el área del punto anterior sumando las áreas de los rectángulos de aproximación mostrados en la siguiente gráfica. Para tal fin calcular el valor de las alturas de los rectángulos sustituyendo en la ecuación  $v = 2t + 1.5$  el valor de  $t$  que corresponde al punto medio de la base de éstos. Por ejemplo, la altura del primer rectángulo es  $2(0.25)+1.5 = 2$ .



- d) Comentar con sus compañeros las conclusiones del experimento anterior.

**Actividad N° 1:** Calcular el área de la región acotada por las gráficas de  $y_1 = x^2 + 2$ ,  $y_2 = -x$ ,  $x = 0$ , y  $x = 1$ . Graficar y sombrear el área calculada.

**Actividad Nº 2:** Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de  $f(x) = 2 - x^2$  y  $g(x) = x$ . Graficar y sombrear el área calculada.

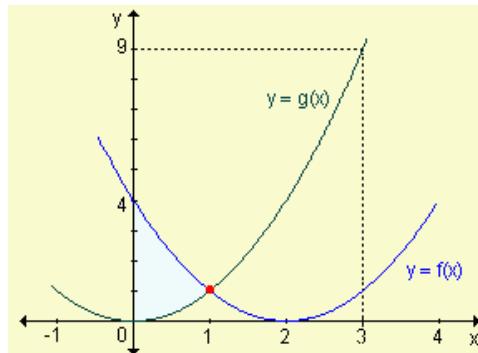
**Actividad Nº 3:** Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones:  $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$  y  $g(x) = -x^2 + 2x$ . Graficar y sombrear el área calculada.

**Actividad Nº 4:** Calcular el área del triángulo que forman la recta  $y_1 = \frac{1}{2}x + 3$ , y la gráfica de la función  $y_2 = |x|$ . Graficar y sombrear el área calculada.

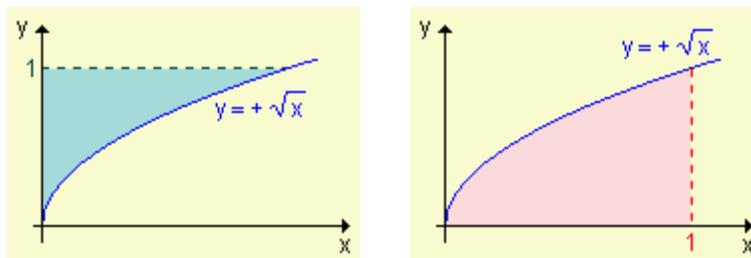
**Actividad Nº 5:** Calcular el área de la figura limitada por las parábolas:  $y^2 = 16 - x$ ;  $(y + 2)^2 = x + 4$ . Graficar las funciones y sombrear la región calculada.

**Actividad Nº 6:** Calcular el área de la región limitada por las gráficas de  $f(x) = \operatorname{sen} x$  y  $g(x) = \cos x$  entre  $x = \pi/4$  y  $x = 5\pi/4$ .

**Actividad Nº 7:** ¿Cuál es el área de la región sombreada?, siendo  $f(x) = (x - 2)^2$  y  $g(x) = x^2$



**Actividad Nº 8:** Hallar el valor del área sombreada



**Situación problemática 2:** El comportamiento del consumo de petróleo se ha modificado en los últimos años. El ritmo de consumo (en miles de millones de barriles) de petróleo en EE.UU. entre 1969 y 1979 admite el modelo:

$$f(t) = 0,18t + 5,38 \quad -10 \leq t \leq 0$$

donde  $t = 0$  corresponde a 1979. De 1979 a 1993, el consumo admite el modelo:

$$g(t) = -0,0029t^3 + 0,149t^2 - 2,42t + 18,38 \quad 0 \leq t \leq 14$$

Hallar el ahorro total entre 1979 y 1993 como consecuencia de ese nuevo esquema de consumo. Representar el área que representa el ahorro total utilizando Geogebra.

**LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA**

**Actividad Nº 1:** Determinar la longitud de la curva  $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2}$  para  $0 \leq x \leq 1$ .

**Actividad Nº 2:** Determinar la longitud de la curva  $y = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot (x^2 + 2)^{3/2}$ , de  $x = 0$  a  $x = 3$ .

(Sugerencia, tener en cuenta el cuadrado de un binomio)

**VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN**

**Actividad Nº 1:** La región entre la curva  $y = \sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 4$ , y el eje x se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determinar su volumen. Graficar

**Actividad Nº 2:** Determinar el volumen del sólido resultante al hacer girar la región comprendida entre la parábola  $x = y^2 + 1$  alrededor del eje y (Rotación alrededor de un eje vertical).

**INTEGRALES PROPIAS E IMPROPIAS**

**Actividad:** En cada uno de los ejercicios estudiar la convergencia o divergencia de la integral

a)  $\int_1^\infty \frac{x \, dx}{(1+x^2)^4}$

b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$

c)  $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{6-x}}$

**AUTO EVALUACIÓN:**

**Situación problemática:** Dadas las funciones  $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$  y  $g(x) = -x - 1$

- a) Determinar analíticamente los puntos de intersección entre ambas funciones.
- b) Graficar ambas funciones en el mismo sistema de ejes.
- c) Determinar analíticamente el área comprendida entre las funciones.
- d) Calcular el área entre la función homográfica, la asíntota horizontal,  $x = 4$  y  $x = 5$ .
- e) Sombrear las áreas calculadas.

**ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS**

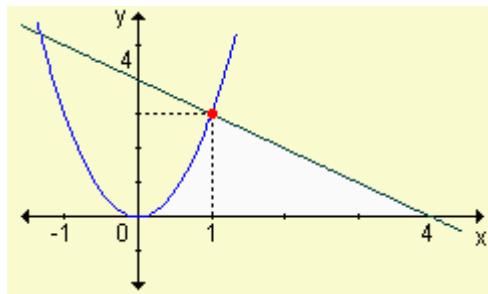
**Actividad Nº 1:** Calcular el área de la región acotada por las gráficas de  $x = 3 - y^2$ ;  $x = y + 1$ . Graficar y sombrear el área calculada.

**Actividad Nº 2:** Calcular el área de la región comprendida entre el eje x, la semiparábola y la recta dada:

a)  $y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ ;  $y_2 = \frac{15}{16} - x$

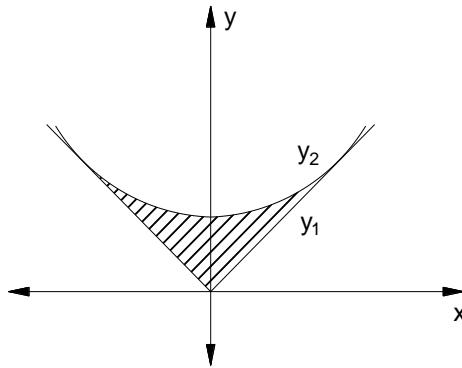
b)  $y_1 = -\sqrt{3x}$ ;  $y_2 = \frac{7}{12} - x$

**Actividad Nº 3:** Indicar el área correcta del recinto sombreado, justificar la respuesta:



$$a) \frac{4}{3} \quad b) \frac{11}{2} \quad c) \frac{32}{3}$$

**Actividad Nº 4:** La superficie de una pieza de una máquina es la región entre las gráficas de  $y_1 = |x|$  e  $y_2 = 0,08x^2 + 3,125$ . Calcular el área superficial de la pieza.



**Actividad Nº 5:** Calcular y graficar el área limitada por:

a)  $f(x) = -x^2 - 9$  y el eje x, entre los puntos  $x = -2$  y  $x = 2$

b)  $y^2 = x + 1$  y la recta  $x = 8$

c)  $y = x^3 - x$  y la recta tangente a la curva en  $x = -1$

d)  $f(x) = 2 - x^2$ ;  $g(x) = -x$

e)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ ;  $g(x) = 2x^2 + 4x$

f)  $y_1 = -x + 5$  y  $y_2 = \frac{4}{x}$

g)  $y = -2x + 3$ ;  $y = \frac{7}{2}x - \frac{27}{2}$ ;  $y = \frac{1}{5}x + 3$

h)  $y = -\frac{1}{3}x^3 + 9x$ , y la recta tangente a la curva en  $x = 1$

i)  $f(x) = \sin x$  y las rectas  $x=0$  y  $x=\pi/2$

j)  $f(x) = \frac{1}{x^2} - x$  y el eje de las abscisas, entre las rectas  $x = 2$  y  $x = 3$

k)  $y + x^2 + 4 = 0$  y la recta  $y = -8$

l)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x$ ;  $g(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

m)  $f(x) = x^2$ ;  $x^2 = 18 - y$

n)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $g(x) = x^3$

#### Actividad Nº 6:

- Calcular el área encerrada por el eje x, la función:  $y = x^2 - 2x - 3$  y la recta  $y - 5 = 0$
- Graficar sombreando el área calculada
- Hallar la recta tangente a la parábola en  $x = 2$
- Incorporar al gráfico anterior la recta tangente hallada
- Calcular detalladamente el área finita entre la parábola y la recta tangente

#### Actividad Nº 7: Dada la función: $f(x) = -x^3 + 4x$

- Calcular el área determinada por  $f(x)$ , el eje x,  $x = -3$  y  $x = 2$
- Determinar la ecuación de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x = -1$
- Determinar analíticamente los puntos de intersección entre ambas funciones.
- Graficar las funciones en el mismo sistema de ejes cartesianos y sombrear el área delimitada por ellas.
- Calcular el área entre la función y la recta tangente.

#### LONGITUD DE ARCO DE CURVA

- Determinar la longitud del segmento de la recta  $x + 3y = 4$  del punto  $(-2;2)$  al punto  $(4;0)$
- Hallar la longitud del arco de la curva  $f(x) = \frac{2}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}}$  desde la abscisa  $x = 6$  a  $x = 8$ .
- Calcular la longitud del segmento de la recta dada por la siguiente función:  $f(x) = 3x$  desde  $(1;3)$  hasta  $(2;6)$

#### VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

- Calcular el volumen engendrado por la región limitada por las curvas:  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = -x^2 + 3x$
- Calcular el volumen del sólido de revolución engendrado por la función  $f(x) = +\sqrt{x}$  entre 0 y 4 al girar sobre el eje x.
- Calcular el volumen del sólido de revolución engendrado por el gráfico de la función  $y = \frac{1}{x}$  entre  $x = 1$  y  $x = 3$ , al girar sobre el eje x.

- d) Determinar el volumen del sólido resultante al hacer girar la región comprendida entre el eje y la curva  $x = \frac{2}{y}$ ,  $1 \leq y \leq 4$ , alrededor del eje y. Graficar

**INTEGRALES PROPIAS E IMPROPIAS**

En cada uno de los ejercicios estudiar la convergencia o divergencia de la integral.

a)  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

b)  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(6-x)^8}}$

c)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

d)  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

e)  $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{(6-x)^8}}$

f)  $\int_0^1 x \ln x dx$

g)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$

h)  $\int_0^{+2} \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

## SERIES NUMÉRICAS

Consideremos la siguiente sucesión de números reales:

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$$

Realicemos las sumas parciales que se indican a continuación:

$$S_1 = a_1 \quad S_2 = a_1 + a_2 \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad \dots \dots \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Ahora formemos una nueva sucesión con las sumas parciales que acabamos de obtener; es decir:

$$(S_n) = (S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}, S_n, \dots)$$

Esta nueva sucesión  $(S_n)$ , obtenida a partir de las sumas parciales de los términos de la primera sucesión, se llama **serie numérica** asociada a la sucesión  $(a_n)$ .

Ejemplo:

Sea  $(a_n) = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots)$ , las sumas parciales de los términos de la misma son:

$$S_1 = 1 \quad S_2 = 1 + 1/2 = 3/2 \quad S_3 = 1 + 1/2 + 1/3 = 11/6 \quad \dots \quad S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$$

Por lo que, la sucesión  $(S_n) = (1, 3/2, 11/6, \dots)$ , es la serie numérica asociada a  $(1/n)$ .

Cabe señalar que mientras la sucesión inicial  $(1/n)$  converge a cero [ $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$ ], la sucesión  $(S_n)$  resulta divergente [ $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ ].

La notación que suele utilizarse para indicar una serie es a través de la suma formal:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

De manera que, la serie del ejemplo anterior, puede escribirse:  $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$

## Convergencia

Una serie es *convergente*, si y sólo si la sucesión de sumas parciales que la define es *convergente*.

En este caso, el límite de la sucesión de sumas parciales se llama suma de la serie:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ , y se asigna dicho número como valor de la suma formal; esto es:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = S, \text{ luego } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$$

Ejemplo:

Sea la sucesión numérica:  $(a_n) = \left( \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \frac{1}{n \cdot (n+1)}, \dots \right)$

Consideremos la suma formal o serie numérica, asociada a  $(a_n)$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

Veamos si es convergente la sucesión de sumas parciales:

$$\forall n: \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Luego, la serie dada  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  resultó convergente y su suma es  $S=1$ .

## Serie geométrica

Se denomina serie geométrica a la siguiente expresión:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

Se observar que sus términos corresponden a una progresión geométrica de razón  $r$ .

Para determinar  $S_n$  procedemos del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ r \cdot S_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \end{array} \right\} \Rightarrow S_n(1-r) = a - ar^n \Rightarrow S_n = a \frac{1-r^n}{1-r} \text{ con } r \neq 1$$

Si se desea conocer el carácter de la serie geométrica será suficiente calcular:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

- Primer caso:

Si  $-1 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} \Rightarrow$  la serie es convergente y  $S = \frac{a}{1-r}$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{3}{2^{n-1}} + \cdots \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ r = 1/2 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{3}{1-1/2} = 6$$

- Segundo caso:

Si  $r > 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \frac{1-r^n}{1-r} = +\infty \text{ si } a > 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \frac{1-r^n}{1-r} = -\infty \text{ si } a < 0 \end{cases} \Rightarrow$  la serie geométrica es divergente

(la sucesión de sumas parciales que la define es *divergente*).

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{n-1} + \cdots \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ r = 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty, \therefore \text{la serie es divergente}$$

- Tercer caso:

Si  $r < -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \frac{1-r^n}{1-r} = \infty \Rightarrow$  la serie geométrica es divergente

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \cdots + (-2)^{n-1} + \cdots \Rightarrow r = -2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^{n-1} \text{ es divergente}$$

- Cuarto caso:

Si  $r = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \cdot n = +\infty \text{ si } a > 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \cdot n = -\infty \text{ si } a < 0 \end{cases}$

Luego, en ambos casos la serie geométrica es divergente.

- Quinto caso:

$$\text{Si } r = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}) = 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}) = a & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

∴ el  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  no existe y serie geométrica es oscilante (la sucesión de sumas parciales que la define es *oscilante*).

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 5 - 5 + 5 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot 5 + \dots \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n-1} \cdot 5 = 0 & \text{si } n = 2k \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n-1} \cdot 5 = 5 & \text{si } n = 2k - 1 \end{cases}$$

## Criterios de convergencia

Se utilizan para determinar, de manera simple, el carácter de una serie. Estos criterios son válidos para series de términos no negativos ( $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq 0$ ) y, en algunos casos, sólo para series de términos positivos ( $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n > 0$ ).

- **Criterios de comparación**

Las series geométricas y la serie armónica ( $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ) se emplean para determinar el carácter de otras series por comparación, de allí el nombre del actual criterio.

### 1. Convergencia

Sean  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  dos series numéricas, ambas de términos no negativos. Si

$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n$  y, además,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  converge con suma  $S_B$ , entonces  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  también con-

verge y su suma no supera a  $S_B$  (se dice que  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  es una serie *mayorante* de  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ).

Ejemplo:

Se trata de determinar el carácter de la serie:  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

Entonces, consideremos la serie geométrica:  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$

Esta serie es convergente (corresponde al primer caso estudiado), donde  $a = 1$  y su razón es  $r = 1/2$ , por lo tanto su suma vale  $S_B = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-1/2} = 2$

Se observa, además, que:  $\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{1}{2^{n-1}}$

Luego,  $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ; esto es,  $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n$ , significa que  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es una serie

convergente por comparación y su suma ( $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \approx 1.7183$ ) no supera a  $S_B$ .

## 2. Divergencia

Sean  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  dos series numéricas, ambas de términos no negativos. Si

$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq b_n$  y, además,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  diverge, entonces  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  también diverge (se dice que  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  es una serie *minorante* de  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ).

Ejemplo:

Veamos si es divergente la serie:  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

Consideremos la serie armónica:  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

Se observa que:  $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ ; es decir,  $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq b_n$

Además  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  es divergente, por lo tanto  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es también divergente.

- **Criterio de D'Alembert**

Sea  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  una serie de términos positivos, si existe el límite  $L$  del cociente de cada término sobre el anterior y  $L < 1$ , la serie resulta convergente; en cambio, si  $L > 1$ , entonces la serie es divergente.

En caso que  $L = 1$ , nada puede asegurarse sobre el carácter de la serie.

- Primer ejemplo:

Sea determinar el carácter de la serie:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n/5^n}{(n-1)/5^{(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{5 \cdot (n-1)} = \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n} \text{ es convergente}$$

- Segundo ejemplo:

Averiguar el carácter de la serie:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n/n}{3^{(n-1)}/(n-1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot (n-1)}{n} = 3 > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n} \text{ es divergente}$$

- Tercer ejemplo:

Conocer el carácter de la serie:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{(n-1)^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 2n + 2}{n^2 + 1} = 1$$

El criterio de *D'Alembert* no permite decidir respecto del carácter de la serie dada.

- **Criterio de la raíz o de Cauchy**

Sea  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  una serie de términos positivos, si existe  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$  y  $L < 1$ , la serie resulta convergente; en cambio, si  $L > 1$ , entonces la serie es divergente.

Si  $L = 1$ , nada puede asegurarse sobre el carácter de la serie.

- Primer ejemplo:

Sea determinar el carácter de la serie:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \text{ es convergente}$$

- Segundo ejemplo:

Averiguar el carácter de la serie:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\ln 2} \right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left( \frac{1}{\ln 2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 2} \cong 1.4427 > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\ln 2} \right)^n \text{ es divergente}$$

### • Criterio de Raabe

Sea  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  una serie de términos positivos, si existe  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ n \left( 1 - \frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \right]$  y  $L < 1$ , la serie resulta divergente; en cambio, si  $L > 1$ , entonces la serie es convergente.

Si  $L = 1$ , nada puede asegurarse sobre el carácter de la serie.

- Ejemplo:

Sea determinar el carácter de la serie:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ n \left( 1 - \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n-1)^2}} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ n \left( 1 - \frac{(n-1)^2}{n^2} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ n \left( \frac{2n-1}{n^2} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{n^2} = 2 > 1$$

Luego, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  es convergente.

## EJERCICIOS

Aplicar el criterio más conveniente para determinar el carácter de las siguientes series.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n \quad (a > 0)$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

$$f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{3^n}$$

$$g) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1} + 1}$$

$$j) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$$

$$k) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$l) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$m) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$$

$$n) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot (n+1)}{5^n}$$

$$o) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$p) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1}$$

Sugerencias:

- En las series: a), e), i) y m) utilizar el criterio de comparación, empleando respectivamente:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ .
- En las series: b), f), j) y n) utilizar el criterio de D'Alembert.
- En las series: c), g), k) y o) utilizar el criterio de la raíz.
- En las series restantes utilizar el criterio de Raabe.