Presentando a los números reales

Veamos de qué manera se conforman los **números reales (R):**

Los números 1, 2, 3, etc, se denominan **números naturales (N).** Si sumamos o multiplicamos dos números naturales cualesquiera, el resultado siempre es un número natural, como podemos ver en los ejemplos:

$2+4=6 \qquad y \qquad 2.4=8$ en ambos casos los resultados son números naturales.

En cambio, si restamos o dividimos dos números naturales, el resultado no siempre es un número natural.

Por ejemplo, $6-2\ =4$ es natural pero $2-\ 6$ no es natural,

Al igual que en $12:3\ =\ 4$ es natural pero $3:\ 12$ no lo es.

Así, dentro del conjunto de números naturales, siempre podemos sumar y multiplicar, pero no siempre podemos restar o dividir.

Con la finalidad de superar la limitación de la sustracción, extendemos el conjunto de los números naturales al conjunto de los **números enteros (Z).** Los enteros incluyen los números naturales, los negativos de cada número natural y el número cero (0). De este modo, podemos representar el conjunto de los enteros mediante

$$\ldots-3,-2,-1,-0,1,2,3,\ldots$$

Es claro que los números naturales también son enteros. Si sumamos, multiplicamos o restamos dos enteros cualesquiera, el resultado también es un entero.

Por ejemplo: $-3+8=5, \quad (-3).(5)=15 \quad y \quad 3-8=-5$ en todos los casos sus resultados son enteros.

Pero aún no podemos dividir un entero entre otro y obtener un entero como resultado.

Por ejemplo, vemos que: 8:4=2 es un entero, pero $8:3$ no lo es.

Por tanto, dentro del conjunto de los enteros, podemos sumar, multiplicar y restar pero no siempre podemos dividir.

Para superar la limitación de la división, extendemos el conjunto de los enteros al conjunto de los **números racionales (Q).** Este conjunto consiste de todas las fracciones $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros con $b\neq\ 0$.

Un número es racional si podemos expresarlo como la razón de dos enteros con denominador distinto de cero. $-\frac{8}{3}, \frac{5}{7}, \frac{0}{3}, \frac{6}{1}=6$ son ejemplos de números racionales.

Podemos sumar, multiplicar, restar y dividir cualesquiera dos números racionales (exceptuando la división por cero) y el resultado siempre es un número racional. De esta manera las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética: adición, multiplicación, sustracción y división son posibles dentro del sistema de los números racionales.

Cuando un número racional se expresa como un decimal, los decimales terminan o presentan un patrón que se repite indefinidamente.

Por ejemplo: $\frac{1}{4} = 0{,}25 \quad y \quad \frac{93}{80} = 1{,}1625$. tienen una cantidad finita de cifras decimales.

Mientras que $\frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots$ o $\frac{4}{7} = 0{,}5714285714285\ldots$, corresponden a decimales en que alguna cifra de la parte decimal se repite periódicamente.

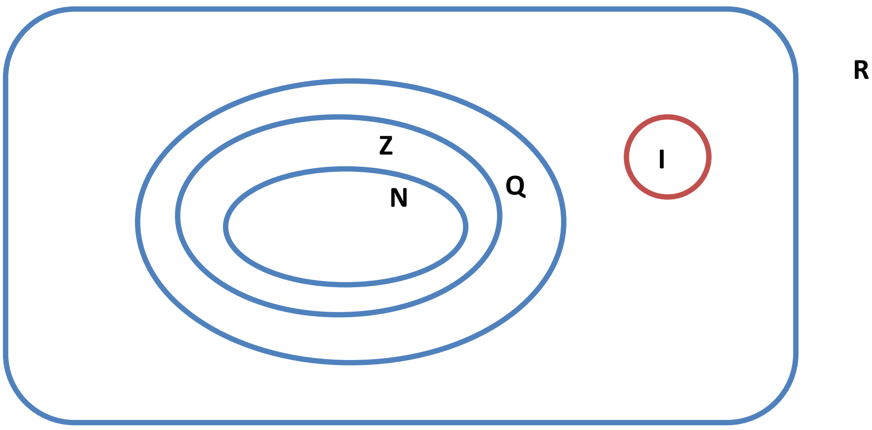
De esta manera podemos afirmar que todos los números racionales, son aquellos que pueden expresarse como la razón entre dos números enteros.

También existen algunos números de uso común que no son racionales (es decir, que no pueden expresarse como la razón de dos enteros). Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ y no son números racionales.

Tales números se denominan **números irracionales (I).** La diferencia esencial entre los números racionales y los irracionales se advierte en sus expresiones decimales. Cuando un número irracional se presenta por medio de decimales, los decimales continúan indefinidamente sin presentar ninguna cifra repetitiva. Por ejemplo, con diez cifras decimales 2 1.4142135623… No importa con cuántos decimales expresemos estos números, nunca presentarán un patrón repetitivo, en contraste con los patrones que ocurren en el caso de los números racionales.

El término **número real (R)** se utiliza para indicar un número que es racional o irracional. El conjunto de los números reales consta de todas las posibles expresiones decimales. Aquellos decimales que terminan o se repiten corresponden a los números racionales, mientras que los restantes corresponden a los números irracionales.

El siguiente esquema muestra de qué manera se conforma el conjunto de los números reales:



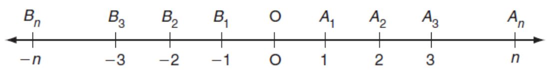
Actividad n°1: ¿A qué conjunto numérico pertenece cada uno de los siguientes números?

$$a)\ -\frac{3}{2} \qquad b)\left(-\sqrt{2}\right)^2 \qquad c)\ \frac{\pi}{2}$$

Representación geométrica

Geométricamente, los números reales se pueden representar por los puntos sobre una línea recta denominada **recta numérica**. Con la finalidad de hacer esto, seleccionemos un punto arbitrario O sobre la línea que represente al número cero. Los números positivos se representan entonces por los puntos a la derecha de O y los negativos por los puntos a la izquierda de O. Si A_1 es un punto a la derecha de O tal que OA_1 tiene longitud unitaria, entonces A_1 representa al número 1. Los enteros 2, 3, . . . , n, . . . están representados por los puntos A_2, A_3, . . . , A_n, . . . , están a la derecha de O y son tales que $OA_2 = 2OA_1$, $OA_3 = 3OA_1$, . . . , $OA_n = nOA_1$, . . .

De manera similar, si B_1, B_2, . . . , B_n, . . . , son los puntos a la izquierda de O tales que las distancias OB_1, OB_2, OB_3, . . . , son iguales a las distancias OA_1, OA_2, . . . , OA_n, . . . , respectivamente, entonces los puntos B_1, B_2, B_3, . . . , B_n, . . . , representan a los números negativos 1, 2, 3, . . . , n, . . . En esta forma, todos los enteros pueden representarse mediante puntos sobre la recta numérica.



Los números racionales pueden representarse por puntos sobre la recta numérica que están situados un número apropiado de unidades fraccionarias a partir de O. Por ejemplo, el número $\frac{9}{2}$ está representado por el punto situado cuatro unidades y media a la derecha de O y $\frac{7}{3}$ está representado por el punto que está situado dos unidades y un tercio a la izquierda de O. De manera similar, todo número racional puede representarse por un punto sobre la línea.

Se deduce que todo número *irracional* también puede representarse por un punto sobre la recta numérica. En consecuencia, todos los números reales, tantos los racionales como los irracionales, pueden representarse por tales puntos. Más aún, cada punto sobre la recta numérica corresponde a uno y sólo un número real. Debido a esto, es bastante común el uso de la palabra ***punto*** con el significado de ***número real***.

Propiedades de los números reales

Cuando dos números reales se suman, el resultado siempre es un número real; de manera similar, cuando dos números reales se multiplican, también el resultado es un número real. Estas dos operaciones de adición y multiplicación son fundamentales en el conjunto de los números reales y poseen ciertas propiedades que en breve enunciaremos. Estas propiedades por sí mismas parecen ser más bien elementales, quizás aun obvias, pero *son vitales para entender las diversas manipulaciones algebraicas que efectuaremos después*.

PROPIEDADES CONMUTATIVAS: Si *a* y *b* son dos números reales cualesquiera, entonces,

$$a + b = b + a \qquad y \qquad a.b = b.a$$

Por ejemplo:

$$3 + 7 = 7 + 3; \quad 3 + (-7) = (-7) + 3; \quad 3.7 = 7.3; \quad 3.(-7) = (-7).3$$

Estas propiedades establecen que no importa el orden en el cual dos números son sumados o multiplicados (obtenemos el mismo resultado con cualquier orden que sigamos). Se conocen como **propiedades conmutativas de la adición** y **de la multiplicación**, respectivamente.

PROPIEDADES ASOCIATIVAS: Si *a*, *b* y *c* son tres números reales cualesquiera, entonces,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad y \qquad (a.b).c = a.(b.c)$$

Por ejemplo:

$$(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5) = 10 \qquad y \qquad (2.3).5 = 2.(3.5) = 30$$

Estas propiedades se conocen como **propiedades asociativas de la adición** y **de la multiplicación**, respectivamente. Establecen que, si tres números se suman (o se multiplican) a la vez, no importa cuáles dos de ellos se sumen (o se multipliquen) en primer término. Obtenemos la misma respuesta en ambos casos.

En virtud de estas propiedades, es innecesario escribir los paréntesis en las expresiones anteriores. Podemos escribir *a+ b+ c* para indicar la suma de *a*, *b* y *c* y *abc* para su producto sin ninguna ambigüedad.

PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS: Si a, b y c son números reales cualesquiera, entonces,

$$a.(b + c) = a.b + a.c \qquad y \qquad (b + c).a = b.a + c.a$$

Por ejemplo:

$$2(3 + 7) = 2.3 + 2.7 = 6 + 14 = 20$$

Esto es sin duda cierto porque $2\ (3 + 7) = 2.10 = 20$.

Por otra parte,$(-2)[3+(-7)] = (-\,2)3 + (-2).(-7) = -6 + 14 = 8$

Podemos evaluar la expresión dada directamente, obteniendo la misma respuesta: $(-2)[3 + (-\,7)] = (-\,2)(-\,4) = 8$

La segunda forma de la propiedad distributiva en realidad se sigue de la primera, dado que, por la propiedad conmutativa

$$(b+c).a = a.(b+c) \qquad y \qquad b.a + c.a = a.b + a.c$$

Puesto que los segundos miembros son iguales uno a otro en virtud de la primera propiedad distributiva, los lados de la izquierda deben ser iguales.

Las propiedades distributivas son particularmente importantes en los cálculos algebraicos. Como veremos, éstas sustentan muchas operaciones incluidas en la simplificación de expresiones y forman la base para los métodos de factorización.

Actividad n°2: ¿Cuáles propiedades de los números reales son utilizadas en cada una de las siguientes igualdades?

$a) 2 + 3.4 = 2 + 4.3$

$b) 2 + 3.4 = 3.4 + 2$

$c) 2 + (3+4) = (3+4) + 2$

$d) 2 + (3+4) = 4 + (2+3)$

$e) 3x + 3x = (3+3)x$

$f) 3x + xy = x(3+y)$

Los ejemplos siguientes ilustran algunos usos elementales de estas propiedades de los números reales al simplificar las expresiones algebraicas.

EJEMPLO :

$a) x(y+2) = xy + x.2$ ***(propiedad distributiva)***
$= xy + \mathbf{2x}$ ***(propiedad conmutativa)***

$b) 2x + 3x = (2+3)x = 5x$ ***(propiedad distributiva)***

$c) 2(3x) = (2.3)x = 6x$ ***(propiedad asociativa)***

$d) (2x)(3x) = [(2x).3]x$ ***(propiedad asociativa)***
$= [3.(2x)]x$ ***(propiedad conmutativa)***
$= [(3.2)x)]x$ ***(propiedad asociativa)***

$= (\boldsymbol{6x})\boldsymbol{x}$
$= 6(x.x)$ ***(propiedad asociativa)***
$= 6x^2$ ***donde*** $\boldsymbol{x^2}$ ***denota x.x***

$e)\ 2x(4y+3x) = (2x).(4y) + (2x).(3x)$ ***(propiedad distributiva)***
$= (\boldsymbol{2.4})(\boldsymbol{x.y}) + (\boldsymbol{2.3})(\boldsymbol{x.x})$ ***(propiedad asociativa y conmutativa)***
$= 8xy + 6x^2$

ELEMENTOS IDENTIDAD: Si a es un número real cualquiera, entonces,

$$a + 0 = a \quad y \quad a.1 = a$$

Es decir, si 0 se suma a *a*, el resultado aún es *a* y si *a* se multiplica por 1, el resultado de nuevo es *a*. Por esta razón, los números 0 y 1 a menudo se conocen como **elementos identidad** para la adición y la multiplicación, respectivamente, porque no alteran número alguno bajo sus respectivas operaciones.

INVERSOS: Si *a* es un número real arbitrario, entonces existe un único número real denominado el **negativo de *a*** (denotado por -*a*) tal que

$$a + (-a) = 0$$

Si *a no es cero*, entonces también existe un único número real denominado el **recíproco de *a*** (denotado por a^{-1}) tal que:

$$a.a^{-1} = 1$$

Observa la similitud entre las dos definiciones: cuando *a* se suma a -*a*, el resultado es *cero,* el elemento identidad para la adición y cuando a^{-1} se multiplica por *a*, el resultado es *uno*, el elemento identidad para la multiplicación. A menudo nos referiremos a -*a* como el **inverso aditivo de *a*** y a a^{-1} como el **inverso multiplicativo de *a***. (Algunas veces a^{-1} se denomina simplemente **inverso de *a***).

Como consecuencia de estas propiedades se nos permite utilizar las siguientes igualdades:

- $-(-a) = a$ por ejemplo: $-(-2) = 2$
- $(a^{-1})^{-1} = a$ por ejemplo: $(3^{-1})^{-1} = 3$
- $\frac{a}{b} = a.b^{-1}$ por ejemplo: $\frac{4}{5} = 4.5^{-1}$
- $si\ a = 1\ entonces\ \frac{1}{b} = b^{-1}$ por ejemplo: $\frac{1}{7} = 7^{-1}$

Actividad n°3: ¿Cuáles propiedades de los números reales se utilizan en cada una de las igualdades siguientes?

$a)x + 3x = 1x + 3x = (1 + 3)x = 4x$

$b)(2 + 1) + (-1) = 2 + [1 + (-1)] = 2 + 0 = 2$

$c)5.\left(\frac{2}{3}.\frac{1}{5}\right) = 5.\left(\frac{1}{5}.\frac{2}{3}\right) = \left(5.\frac{1}{5}\right).\frac{2}{3} = (5.5^{-1}).\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Observación sobre la división entre cero. La afirmación $\frac{a}{b} = c$ es cierta si y sólo si la proposición inversa $a = b.c$ es válida. Consideremos una fracción en la cual el denominador b es cero, tal como $\frac{3}{0}$. Ésta no puede ser igual a ningún número real c porque la afirmación inversa $0.c = 3$ no puede ser válida para ningún real c. Por tanto $\frac{3}{0}$ no está bien definido. Asimismo, $\frac{0}{0}$ no es un número real bien definido porque la proposición inversa $0 = 0.c$ es válida para cada número real c. Así, concluimos que cualquier fracción con denominador cero no es un número real bien definido o, en forma equivalente, que **la división por cero es una operación que carece de sentido**. Por ejemplo, $\frac{x}{x} = 1$ es cierto sólo si $x \neq 0$.

Actividad n°4: ¿Están definidas las expresiones siguientes?

$a)\ \frac{a}{b+(3b-4b)}$ $\qquad$ $b)\ \frac{b+(3b-4b)}{a}$

Actividad n°5: Establece si cada una de las siguientes igualdades son o no válidas. Reemplaza cada una de las incorrectas por una que sea correcta.

$a)\ 3x + 4x = 7x$

$b)\ (3x).(4x) = 7x$

$c)2(5 - 4y) = 10 - 4y$

$d) - (x + y) = -x + y$

$e)\ 5x - (2 - 3x) = 2x - 2$

$f)5 - 2x = 3x$

$g) - 3(x - 2y) = -3x - 6y$

$h)\ (-a)(-b)(-c):(-d) = -(abc:d)$

$i)\ (-x)(-y) = -xy$

$j)\ \frac{0}{x} = 0$

Actividad n°6: Utiliza las propiedades de los n° reales y simplifica las siguientes operaciones:

a) $-7-(-3)$

b) $-2-(-4-2)$

c) $2(-3-2)$

d) $(-9):(-3)$

e) $-6-2(-3-2)$

f) $4(2x+y)$

g) $-(-x-3)$

h) $2(-x-3)$

i) $-x(-x-6)$

j) $3y+4(x+2y)$

k) $2(x-y)+4x$

l) $-2x-3(x-2y)$

m) $(x+y)-4(x-y)$

n) $2(-a)(3-a)$

o) $(-2)(-x)(-x-4)$

p) $-x(x-2)+2(x-1)$

q) $x^{-1}(2x-1)$

r) $(-2x)^{-1}(3x-1)$

s) $(xy)^{-1}(x+y)$