FRACCIONES

En el capítulo anterior vimos que la fracción $\frac{a}{b}$ está definida como el producto de a por el inverso de b.
Es decir: $\frac{a}{b} = a.b^{-1}$ $(b \neq 0)$
En particular: $\frac{1}{b} = b^{-1}$

Multiplicación de fracciones

El producto de dos fracciones se obtiene multiplicando en primer término los dos numeradores y luego los dos denominadores.

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a.c}{b.d}$$

Ejemplos:

$$a)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{2.5}{3.9} = \frac{10}{27}$$

$$b)\left(\frac{2x}{3}\right)\left(\frac{4}{y}\right) = \frac{2x.4}{3.y} = \frac{8x}{3y}$$

División de fracciones

Con el propósito de dividir una fracción entre otra, la segunda fracción se invierte y después se multiplica por la primera. En otras palabras,

$$\left(\frac{a}{b}\right):\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{a.d}{b.c}$$

Ejemplos:

$$a)\left(\frac{3}{5}\right):\left(\frac{7}{9}\right) = \left(\frac{3}{5}\right).\left(\frac{9}{7}\right) = \frac{27}{35}$$

$$b)\left(\frac{3x}{2}\right):\left(\frac{4}{y}\right) = \left(\frac{3x}{2}\right).\left(\frac{y}{4}\right) = \frac{3xy}{8}$$

$$c)5y:\left(\frac{6}{5x}\right) = \left(\frac{5y}{1}\right).\left(\frac{5x}{6}\right) = \frac{25xy}{6}$$

$$b)\left(\frac{3}{2x}\right):2y = \left(\frac{3}{2x}\right).\left(\frac{1}{2y}\right) = \frac{3}{4xy}$$

Cancelación de factores comunes (Simplificación)

El numerador y el denominador de cualquier fracción pueden multiplicarse o dividirse por un número real cualquiera *distinto de cero*, sin alterar el valor de la fracción.

$$\frac{a}{b} = \frac{a.c}{b.c} \quad \text{con } c \neq 0$$

Ejemplos:

$a)\ \frac{a}{b}=\frac{2a}{2b}$

$b)\ \frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\frac{-12}{-20}$

$c)\ \frac{5x}{6}=\frac{5x.x}{6.x}=\frac{5x^2}{6x}$ con $x\neq 0$

Esta propiedad de las fracciones puede usarse con la finalidad de reducir una fracción a su **mínima expresión**, lo que significa dividir el numerador y el denominador entre todos los factores comunes. (Esto se llama también ***simplificación de la fracción***).

Ejemplos:

$a)\ \frac{70}{84}=\frac{2.5.7}{2.2.3.7}=\frac{\cancel{2}.5\cancel{7}}{\cancel{2}.2.3.\cancel{7}}=\frac{5}{2.3}=\frac{5}{6}$

Observe que tanto el numerador como el denominador se escriben primero en tér-minos de sus factores primos y, luego, el numerador y el denominador se dividen entre aquellos factores que son comunes a ambos números, como el 2 y el 7. (Este proceso algunas veces se denomina cancelación).

$b)\ \frac{6x^2y}{8xy^2}=\frac{\cancel{2}.3\cancel{x}.x.\cancel{y}}{\cancel{2}.2.2.\cancel{x}.y.\cancel{y}}=\frac{3x}{4y}$

En este ejemplo, el numerador y el denominador fueron divididos entre 2xy en la simplificación.

$c)\ \frac{2x(\cancel{x+1})}{4y(\cancel{x+1})}=\frac{x}{2y}$

Aquí el factor común 2(x+1) fue cancelado del numerador y del denominador.

Actividad n°1: Resuelve:

$a)\ \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)=$

$b)\ \left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{7}{5}\right)=$

$c)\ \left(\frac{2}{3}\right):\left(\frac{7}{3}\right)=$

$d)\ \left(\frac{x}{2}\right):\left(\frac{y}{5}\right)=$

$e)\ \frac{2}{3}.\frac{15}{4}=$

$f)\ \frac{x}{2}:\frac{3x}{8y}=$

Adición y sustracción de fracciones

Cuando dos fracciones tienen un común denominador, pueden sumarse simplemente sumando sus numeradores.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Una regla similar se aplica a la sustracción:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Ejemplos:

$a)\ \dfrac{5}{12}+\dfrac{11}{12}=\dfrac{5+11}{12}=\dfrac{16}{12}=\dfrac{4}{3}$

$b)\ \dfrac{3}{2x}-\dfrac{5}{2x}=\dfrac{3-5}{2x}=\dfrac{-2}{2x}=-\dfrac{1}{x}$

(Note la cancelación de factores comunes al llegar a las respuestas finales).

Cuando dos fracciones con denominadores distintos deben sumarse o restarse, las fracciones deben en primer lugar reescribirse con el mismo denominador.

Ejemplos: Resolver:

$a)\ \dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}$

Solución:

Para poder sumar deben tener el mismo denominador, por lo que si multiplicamos, numerador y denominador de $\frac{1}{2}$ *por 3, obtenemos:* $\frac{1.3}{2.3}=\frac{3}{6}$
De esta manera quedarían con igual denominador y podemos sumar:

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5+3}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$b)\ \dfrac{5}{6}-\dfrac{3}{4}$

Solución:
Para poder restar deben tener el mismo denominador, por lo que si multiplicamos, numerador y denominador de $\frac{5}{6}$ *por 2, obtenemos:* $\frac{5.2}{6.2}=\frac{10}{12}$ *y a* $\frac{3}{4}$ *por 3, obtenemos:* $\frac{3.3}{4.3}=\frac{9}{12}$
De esta manera quedarían con igual denominador y podemos restar:

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{10-9}{12}=\frac{1}{12}$$

En general, cuando sumamos o restamos fracciones con denominadores diferentes, primero reemplazamos cada fracción por una equivalente que tenga un denominador común. Con el propósito de mantener los números tan pequeños como sea posible, elegimos el más pequeño de tales denominadores comunes, denominado **mínimo común denominador** (m.c.d.).
Aún obtendríamos la respuesta correcta utilizando un denominador común más grande, pero es preferible usar el mínimo denominador posible. Por ejemplo, en la parte *b*) del ejemplo anterior, podríamos emplear 24 como un denominador común:

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{20}{24}-\frac{18}{24}=\frac{20-18}{24}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

La respuesta final es la misma, pero habríamos tenido que trabajar con números más grandes.
Para calcular el m.c.d. de dos o más fracciones, los denominadores deben escribirse en

términos de sus factores primos. El m.c.d. se forma entonces tomando todos los factores primos que aparezcan en cualquiera de los denominadores. Cada uno de tales denominadores debe incluirse tantas veces como ocurra en cualquiera de los denominadores.
Por ejemplo, el m.c.d. de $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$, se encuentra escribiendo los denominadores en la forma $6 = 2.3$ y $4 = 2\,.\,2$. Los factores primos que ocurren son 2 y 3, pero 2 aparece dos veces en un denominador. De modo que el m.c.d. es $2.2.3 = 12$
En otro ejemplo, el m.c.d. de $\frac{5}{12x}$ y $\frac{7}{10x^2y}$, se encuentra escribiendo los denominadores en la forma $12x = 2.2.3$ y $10x^2y = 2\,.\,5.x.x.y$. Los factores primos que ocurren son 2, 3, 5, x e y, pero 2 y x aparecen dos veces en un denominador.
Tomando cada factor el mayor número de veces que aparezca, tenemos que el m.c.d. es $2.2.3.5.x.x.y = 60x^2y$

Ejemplos: Resolver:

$a)\,\dfrac{x}{6}+\dfrac{3y}{4}$

Solución:

El m.c.d es 12. De modo que: $\frac{x}{6}=\frac{2x}{12}$ *y* $\frac{3y}{4}=\frac{9y}{12}$

Por lo tanto: $\frac{x}{6}+\frac{3y}{4}=\frac{2x}{12}+\frac{9y}{12}=\frac{2x+9y}{12}$

$b)\,\dfrac{1}{9x}-\dfrac{1}{6}$

Solución:

El m.c.d es 18x. Por lo que resulta: $\frac{1}{9x}=\frac{2}{18x}$ *y* $\frac{1}{6}=\frac{3x}{18x}$

Por lo tanto: $\frac{1}{9x}-\frac{1}{6}=\frac{2}{18x}-\frac{3x}{18x}=\frac{2-3x}{18x}$

Actividad n°2: Establece si cada una de las igualdades siguientes es válida o no. Remplaza cada proposición falsa por una verdadera.

$a)\,\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x}=\dfrac{7}{x}$

$b)\,\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{4}=\dfrac{x}{7}$

$c)\,\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}$

$d)\,\dfrac{a}{b}.\left(\dfrac{c}{d}.\dfrac{e}{f}\right)=\dfrac{ace}{bdf}$

$e)\,\frac{a}{b}:\left(\frac{c}{d}:\frac{e}{f}\right)=\frac{adf}{bce}$

$f)\,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$

$g)\,\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}+y}=\frac{1}{1+y}$

$h)\,\frac{6}{7}+\frac{8}{9}=\frac{6.9+7.8}{7.9}$

<u>Actividad n°3:</u> Resuelve cada una de las siguientes operaciones. Escribe las respuestas en los términos más simples.

$a)\,\frac{2}{9}.\frac{6}{5}=$

$b)\,\left(\frac{3x}{25}\right).\left(\frac{25}{9x}\right)=$

$c)\,7x^2.\left(\frac{6y}{21x}\right)=$

$d)\,\frac{18}{11}:\frac{8}{33}=$

$e)\,\frac{4}{9}:\left(\frac{2}{3}.8\right)=$

$f)\,\left(\frac{12}{25}.\frac{15}{7}\right):\frac{20}{7}=$

$g)\,\left(\frac{7x}{10}\right).\left(\frac{21x}{5}\right)=$

$h)\,\left(\frac{7x}{10}\right):\left(\frac{21x}{5}\right)=$

$i)\,\frac{2}{9}+\frac{6}{5}=$

$j)\,\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=$

$k)\,\frac{1}{3x}+\frac{1}{2x}=$

$l)\,\frac{3}{10x^2}-\frac{1}{6x}=$

$m)\,\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=$

$n)\,\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\right).\left(\frac{7}{10}+\frac{1}{4}\right)=$