TP d'analyse numérique n° 1 : calcul d'intégrale

Introduction

Ce TP est à réaliser en binôme. Le fichiers Jupyter (en .ipynb) à compléter sont à votre disposition à l'adresse suivante :

`https://github.com/LucasMorlet/AnalyseNumerique/`

Pour éditer ce genre de fichier, vous pouvez utilisez Google Colab (pas besoin de vous authentifier, mais vous pouvez le faire pour synchroniser automatiquement votre fichier avec votre Google Drive). A la fin du TP, vous rendrez directement le fichier.

Le barème est donné à titre indicatif ci-dessous :

Partie 1 : recherche du zéro (4 points)

— Préparation et calcul "à la main" des zéros
— Méthode dichotomique
— Méthode de la sécante
— Recherche multiple

Partie 2 : intégrale (4 points)

— Préparation et calcul "à la main" des intégrales
— Les trois méthodes des rectangles (0.5 pt chacune)
— Méthode des trapèzes (0.5 pt)
— Méthode de Monte-Carlo

Partie 3 : synthèse (2 points)

— proposition de synthèse, mise en oeuvre de cette proposition

1 Recherche du zéro

1.1 Préparation

Dans cet exercice, nous allons étudier des fonctions f strictement monotones sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ donné tel que $f(a)f(b) < 0$. La propriété $f(a)f(b) < 0$ implique que le signe de $f(a)$ et celui de $f(b)$ sont opposés. Et comme la fonction est strictement monotone, elle possède un zéro unique dans cet intervalle. C'est ce zéro que vous devez trouver.

Pour cela vous utiliserez comme exemple les fonctions suivantes sur leurs intervalles respectifs :

- Identité : $f(x) = x$ avec $x \in [-1\ ;\ 1]$
- Sinus : $f(x) = sin(x)$ avec $x \in [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$
- Cosinus : $f(x) = cos(x)$ avec $x \in [0\ ;\ \pi]$
- Tangente : $f(x) = tan(x)$ avec $x \in [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$
- Linéaire : $f(x) = -2x + 5$ avec $x \in [2\ ;\ 3]$
- Quadratique : $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ avec $x \in [1\ ;\ 2]$
- Cubique : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 3$ avec $x \in [-5\ ;\ -3]$

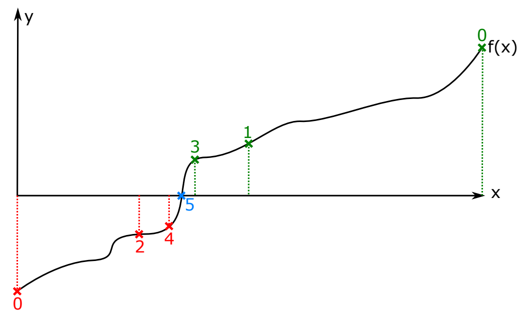
Travail à faire :

Pour commencer, rappeler le zéro des quatre premières fonctions et calculer le zéro des fonctions linéaire, quadratique, et cubique. Notez ces résultats dans le fichier à compléter.

1.2 Méthode dichotomique

La méthode dichotomique consiste à chercher une valeur spécifique en coupant en deux l'intervalle qui contient cette valeur en déduisant lequel des deux sous-intervalles contient encore cette valeur. En répétant l'opération une infinité de fois, on converge vers un intervalle de taille nulle, dont les deux bornes superposées sont égales à la valeur recherchée.

Dans le cas présent, nous cherchons x tel que $f(x) = 0$. Nous savons que x est contenu dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$ car $f(a)f(b) \leq 0$. Soit $c = (a+b)/2$ le milieu de l'intervalle. Si $f(a)f(c) \leq 0$ alors $x \in [a\ ;\ c]$ sinon $x \in [c\ ;\ b]$. Il suffit ensuite de recommencer sur le nouvel intervalle identifié jusqu'à ce que $f(c) = 0$.

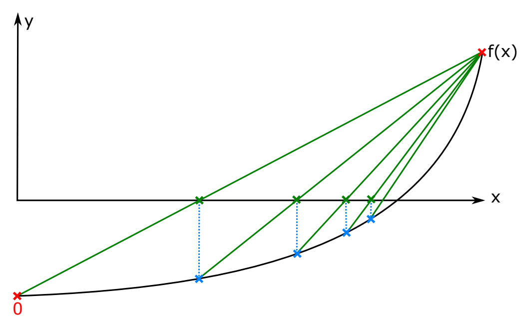


Travail à faire :

Programmer la fonction *dichotomie* pour qu'elle renvoie le x qu'elle a trouvé en suivant l'algorithme ci-dessus. Attention, pour des raisons de représentations des nombres sur un ordinateur, il est possible que l'algorithme ne converge jamais ($f(c)$ ne sera jamais égal à 0). Pour contourner le problème, on considérera une convergence si $f(c)$ est très petit, c'est à dire dont la distance à 0 est inférieur à ϵ défini comme variable globale. Ainsi, ne vous inquiétez pas si votre résultat est du style $f(c) = 6,02214086 \times 10^{-23}$, c'est un nombre suffisamment petit pour être considéré nul.

1.3 Méthode de la sécante

La méthode de la sécante est différente de la méthode précédente mais converge vers le même résultat. Dans la méthode de la sécante, on va fixer une des deux bornes de l'intervalle et rapprocher l'autre de manière à ce que la valeur recherchée soit toujours dans l'intervalle. Pour rapprocher la borne "en mouvement", on trace la droite entre les images des deux bornes, et on place cette borne sur le zéro de la fonction linéaire définie. Après suffisamment d'itérations, cette borne ne se déplace plus : elle est égale à la valeur recherchée.



Dans le cas présent, nous allons fixer b et modifier x_n qui commence avec la valeur a. x_n se déplace par itération vers b en suivant la formule suivante :

$$x_{(n+1)} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n)$$

L'algorithme se termine lorsque $f(x_n) = 0$. Pour les mêmes raisons que précédemment, il est possible que le zéro ne soit jamais atteint. On considère alors qu'il y a convergence quand $f(x_n)$ est très petit *i.e.* $|f(x_n)| < \epsilon$

Programmer la fonction *secante* pour qu'elle renvoie le x qu'elle a trouvé en suivant l'algorithme ci-dessus.

1.4 Recherche multiple

Faites une fonction qui trouve tous les zéros d'une fonction donnée dans un intervalle spécifique. Pour cela elle réalise les étapes suivante :

- elle découpe l'intervalle en pas de 0.1
- pour chaque sous intervalle $[a\ ;\ b]$ elle vérifie si $f(a)f(b) < 0$
- si c'est le cas elle lance une recherche de zéro dans l'intervalle $[a\ ;\ b[$

Attention, les fonctions que vous avez programmées prennent en paramètre un intervalle de type $[a\ ;\ b]$ alors que vous voulez tester un intervalle de type $[a\ ;\ b[$. Pour cela vous passerez en paramètre l'intervalle $[a\ ;\ b-\epsilon]$ (ϵ étant fourni). Vérifiez que tous les résultats obtenus sont bien des zéros des fonctions testées. Pour que ce genre d'approche puisse fonctionner, il est nécessaire que les fonctions soient continues, ce qui n'est pas le cas de la fonction tangente qui est par conséquent exclue de ces tests.

2 Intégrale

2.1 Préparation

Dans cet exercice nous allons calculer les intégrales de fonctions et d'intervalles donnés avec une approche géométrique. En effet, l'intégrale peut être vue comme "l'aire sous la courbe". C'est cette propriété que nous allons exploiter pour calculer les intégrales sans passer par un calcul de primitive.

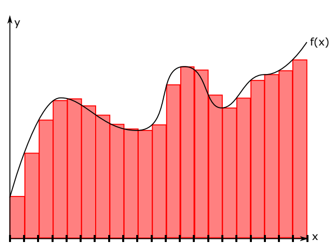
Pour cela nous utiliserons comme exemple les fonctions suivantes sur leurs intervalles respectifs (les fonctions sont les mêmes que dans l'exercice précédent, mais les intervalles ont été changés de manière à ce que la fonction soit positive partout) :

- Identité : $f(x) = x$ avec $x \in [0\ ;\ 2]$
- Sinus : $f(x) = sin(x)$ avec $x \in [0\ ;\ \pi/2]$
- Cosinus : $f(x) = cos(x)$ avec $x \in [0\ ;\ \pi/2]$
- Tangente : $f(x) = tan(x)$ avec $x \in [0\ ;\ \pi/4]$
- Linéaire : $f(x) = -2x + 5$ avec $x \in [0\ ;\ 2.5]$
- Quadratique : $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ avec $x \in [0.25\ ;\ 1.25]$
- Cubique : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 3$ avec $x \in [-3.5\ ;\ 0.5]$

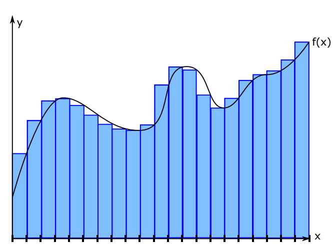
Travail à faire :
Calculez les intégrales des fonctions précédentes en passant par un calcul de primitive. Ces calculs nous permettront de vérifier si les algorithmes nous donnent les bons résultats. Reportez ces calculs dans votre fichier.

2.2 Méthodes des rectangles

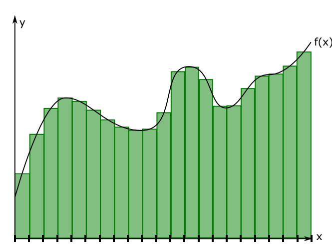
La méthode des rectangles consiste à découper l'intervalle $[a\ ;\ b]$ à étudier en un certain nombre de sous-intervalles $[i\ ;\ j]$ de taille identique : $(b-a)/nb\_rectangles$. On considère l'aire sous la courbe comme l'aire du rectangle ayant comme largeur la taille de l'intervalle et comme hauteur, soit $f(i)$ dans le cas des rectangles à droite, soit $f(j)$ dans le cas des rectangles à gauche, soit $f((i+j)/2)$ dans le cas des rectangles au milieu.



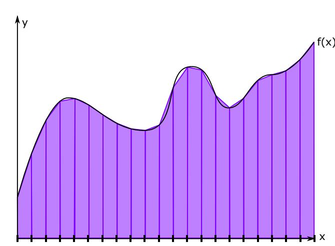
Rectangle à droite



Rectangle à gauche



Rectangle au milieu



Trapèze

Travail à faire :
Dans le code fourni, programmez les trois fonctions de rectangle. Les trois fonctions étant très similaires, programmez soigneusement la première puis copier-coller là pour vous servir de base pour les autres.

2.3 Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes est similaire à celle des rectangles, sauf que le calcul est fait à l'aide de trapèzes plutôt que de rectangles. L'avantage des trapèzes c'est qu'ils sont "plus proches de la courbe" que les rectangles. La largeur du trapèze est la même que celle du rectangle précédent, mais les deux coins du haut du trapèze sont sur la courbe étudiée.

Travail à faire :
En vous inspirant du code produit pour les méthodes des rectangles, remplissez la fonction trapèze dans le code fourni.

2.4 Méthode de Monte-Carlo

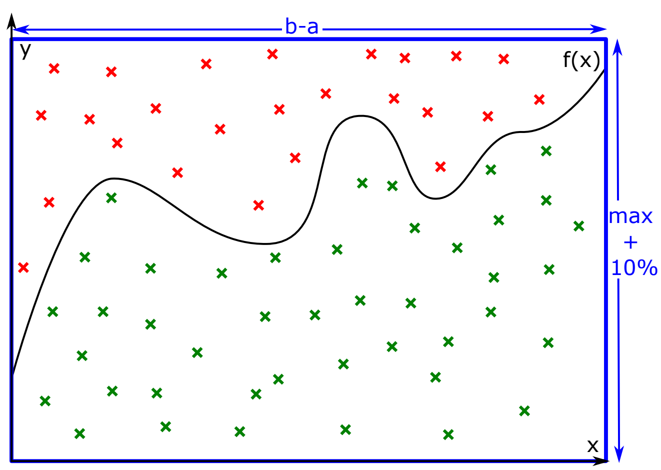
Les méthodes de Monte-Carlo sont des méthodes stochastiques (basée sur l'aléatoire) permettant de résoudre facilement, mais de manière approchée des problèmes donnés.

Dans le cas présent, vous allez faire une méthode qui permet de calculer l'aire sous la courbe, en trouvant un rectangle englobant de la courbe et en tirant au hasard des points appartenant à ce rectangle. Vous tiendrez le compte des points étant "sous la courbe". Le ratio entre l'aire sous la courbe et l'aire du rectangle est le même que celui entre le nombre de points sous la courbe et le nombre de points total. Par la théorie des grands nombres, on sait que plus le nombre de points tirés est grand, plus le résultat sera proche de la vérité mathématique.

Travail à faire :
Remplissez la méthode de Monte-Carlo dans le code fourni. Pour cela vous aurez besoin des différentes étapes suivantes :

- Trouvez le maximum de la fonction sur la courbe définie (utilisez le nombre d'intervalles pour l'échantillonnage)
- Par sécurité, augmentez ce maximum de 10%
- Déduisez-en le rectangle englobant
- Tirez un million de point appartenant à ce rectangle et comptez ceux sous la courbe.
- Concluez l'aire sous la courbe.

Pour vous aidez à faire les tirages aléatoires, une fonction *aleatoire* vous est fournie. Cette fonction prend en paramètre les bornes de l'intervalle dans lequel le tirage est effectué.



Méthode de Monte-Carlo : le rapport entre l'aire sous la courbe et l'aire du rectangle bleu est égal au rapport entre le nombre de croix vertes et le nombre total de croix.

3 Synthèse

Jusqu'à présent, vous vous êtes uniquement intéressés aux fonctions strictement positives. Dans cette section, vous allez produire un travail permettant de calculer l'intégrale quelque soit la fonction.

Travail à faire :
A l'aide des fonctions de ce TP, et de celle du précédent, proposez une méthode permettant pour une fonction et un intervalle donné, de calculer séparément l'aire sous la courbe lorsque la fonction est positive et l'aire au-dessus de la courbe quand elle est négative. A partir de ces deux informations, déduisez l'intégrale de la fonction sur l'intervalle donné. Vous êtes libres de proposez un code source plutôt qu'une explication si vous êtes à l'aise en programmation.