ESTP : TP d'analyse numérique n^o 1

Introduction

Pour réaliser ce TP, des codes incomplets sont à votre disposition à l'adresse suivante :

`https://github.com/LucasMorlet/AnalyseNumerique/`

A la fin du TP, vous devrez rendre un compte-rendu. Dans ce compte-rendu vous mettrez les réponses aux questions posées ainsi que les codes sources que vous avez produits. Ne mettez que les fonctions demandées, les fonctions de tests ne seront pas utiles au correcteur. Pour faciliter la correction, essayez de respecter la structure de ce document dans votre compte-rendu (même numéro de section/sous-section). Vous rendrez votre compte-rendu sous format PDF à l'adresse suivante : `lucas.morlet@eseo.fr`. Ne partez pas avant d'avoir eu une confirmation de la réception !

Concernant le barème, un point sera attribué à chacun des éléments ci-dessous :

Partie 1 : recherche du zéro (4 points)

- Préparation et calcul "à la main" des zéros
- Méthode dichotomique
- Méthode de la sécante
- Recherche multiple

Partie 2 : intégrale (4 points)

- Préparation et calcul "à la main" des intégrales
- Les trois méthodes des rectangles
- Méthode des trapèzes
- Méthode de Monte-Carlo

Partie 3 : rapport et synthèse (2 points)

- qualité du rapport, explications claires et précises
- proposition de synthèse, mise en oeuvre de cette proposition

1 Recherche du zéro d'une fonction strictement monotone

1.1 Préparation

Dans cet exercice, nous allons étudier des fonctions f strictement monotones sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ donné tel que $f(a)f(b) < 0$. La propriété $f(a)f(b) < 0$ implique que le signe de $f(a)$ et celui de $f(b)$ sont opposés. Et comme la fonction est strictement monotone, elle possède un zéro unique dans cet intervalle. C'est ce zéro que nous devons trouver.

Pour cela nous utiliserons comme exemple les fonctions suivantes sur leurs intervalles respectifs :

- Identité : $f(x) = x$ avec $x \in [-1\ ;\ 1]$
- Sinus : $f(x) = sin(x)$ avec $x \in [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$
- Cosinus : $f(x) = cos(x)$ avec $x \in [0\ ;\ \pi]$
- Tangente : $f(x) = tan(x)$ avec $x \in [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$
- Linéaire : $f(x) = -2x + 5$ avec $x \in [2\ ;\ 3]$
- Quadratique : $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ avec $x \in [1\ ;\ 2]$
- Cubique : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 3$ avec $x \in [-5\ ;\ -3]$

Travail à faire :

Pour commencer, rappeler le zéro des quatre premières fonctions et calculer le zéro des fonctions linéaire et quadratique. Notez ces résultats dans votre compte-rendu. Quant à la fonction cubique, elle nous servira d'exemple fait "à la main" pour les deux algorithmes que vous allez implémenter.

1.2 Méthode dichotomique

La méthode dichotomique consiste à chercher une valeur spécifique en coupant en deux l'intervalle qui contient cette valeur en déduisant lequel des deux sous-intervalles contient encore cette valeur. En répétant l'opération une infinité de fois, on converge vers un intervalle de taille nulle, dont les deux bornes superposées sont égales à la valeur recherchée.

Dans le cas présent, nous cherchons x tel que $f(x) = 0$. Nous savons que x est contenu dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$ car $f(a)f(b) < 0$. Soit $c = (a + b)/2$ le milieu de l'intervalle. Si $f(a)f(c) < 0$ alors $x \in [a\ ;\ c]$ sinon $x \in [c\ ;\ b]$. Il suffit ensuite de recommencer sur le nouvel intervalle identifié jusqu'à ce que $a = b$.

Travail à faire :

Appliquer l'algorithme "à la main" (calculatrice ou Python autorisés) sur la fonction cubique jusqu'à trouver une valeur qui a un écart à 0 inférieur à 0.5. Reportez dans votre compte rendu les différentes valeurs de x testée et les valeurs de $f(x)$ correspondantes.

Programmer la fonction *dichotomie* pour qu'elle renvoie le x qu'elle a trouvé en suivant l'algorithme ci-dessus. Attention, pour des raisons de représentations des nombres sur un ordinateur, il est possible que l'algorithme ne converge jamais (a ne sera jamais égal à b). Pour "sécuriser" cette opération, mettez un compteur qui arrête la dichotomie lorsqu'il atteint 100. Encore à cause de cette représentation des nombres, ne vous inquiétez pas si votre résultat est du style $6,02214086 \times 10^{-23}$, c'est un nombre suffisamment petit pour être considéré nul. Reportez votre code dans votre rapport.

1.3 Méthode de la sécante

La méthode de la sécante est différente de la méthode précédente mais converge vers le même résultat. Dans la méthode de la sécante, on va fixer une des deux bornes de l'intervalle et rapprocher l'autre de manière à ce que la valeur recherchée soit toujours dans l'intervalle. Après suffisamment d'itérations, la borne "en mouvement" ne se déplace plus, c'est qu'elle est égale à la valeur recherchée.

Dans le cas présent, nous allons fixer b et modifier x_n qui commence avec la valeur a. x_n se déplace par itération vers b en suivant la formule suivante :

$$x_{(n+1)} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n)$$

L'algorithme se termine lorsque $f(x_n) = 0$ ou que l'on a atteint 100 itérations (on suppose qu'après une centaine d'itérations sans convergence, l'algorithme ne convergera plus).

Programmer la fonction *secante* pour qu'elle renvoie le x qu'elle a trouvé en suivant l'algorithme ci-dessus. Reportez votre code dans votre rapport.

1.4 Recherche multiple

Faites une fonction qui trouve tous les zéros d'une fonction donnée dans un intervalle spécifique. Pour cela elle réalise les étapes suivante :

- elle découpe l'intervalle en pas de 1
- pour chaque sous intervalle $[a\ ;\ b]$ elle vérifie si $f(a)f(b) < 0$
- si c'est le cas elle lance une recherche de zéro entre $[a\ ;\ b]$

Vérifiez que tous les résultats obtenus sont bien des zéros des fonctions testées. Pour que ce genre d'approche puisse fonctionner, il est nécessaire que les fonctions soient continues, ce qui n'est pas le cas de la fonction tangente qui est par conséquent exclue de ces tests. Reportez votre code dans votre rapport.

2 Intégration

2.1 Préparation

Dans cet exercice nous allons calculer les intégrales de fonctions et d'intervalles donnés avec une approche géométrique. En effet, l'intégrale peut-être vue comme "l'aire sous la courbe". C'est cette propriété que nous allons exploiter pour calculer les intégrales sans passer par un calcul de primitive.

Pour cela nous utiliserons comme exemple les fonctions suivantes sur leurs intervalles respectifs (les fonctions sont les mêmes que dans l'exercice précédent, mais les intervalles ont été changés de manière à ce que la fonction soit positive partout) :

- Identité : $f(x) = x$ avec $x \in [0\ ;\ 2]$
- Sinus : $f(x) = sin(x)$ avec $x \in [0\ ;\ \pi/2]$
- Cosinus : $f(x) = cos(x)$ avec $x \in [0\ ;\ \pi/2]$
- Tangente : $f(x) = tan(x)$ avec $x \in [0\ ;\ \pi/4]$
- Linéaire : $f(x) = -2x + 5$ avec $x \in [0\ ;\ 2.5]$
- Quadratique : $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ avec $x \in [0.25\ ;\ 1.25]$
- Cubique : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 3$ avec $x \in [-3.5\ ;\ 0.5]$

Travail à faire :
Calculez les intégrales des fonctions précédentes en passant par un calcul de primitive. Ces calculs nous permettront de vérifier si les algorithmes nous donnent les bons résultats. Reportez ces calculs dans votre rapport.

2.2 Méthodes des rectangles

La méthode des rectangles consiste à découper l'intervalle $[a\ ;\ b]$ à étudier en un certain nombre de sous-intervalles $[i\ ;\ j]$ de taille identique : $(b - a)/nb\_rectangles$. On considère l'aire sous la courbe comme l'aire du rectangle ayant comme largeur la taille de l'intervalle et comme hauteur, soit $f(i)$ dans le cas des rectangles à droite, soit $f(j)$ dans le cas des rectangles à gauche, soit $f((i + j)/2)$ dans le cas des rectangles au milieu.

Travail à faire :
Dans le code fourni, programmez les trois fonctions de rectangle. Les trois fonctions étant très similaires, programmez soigneusement la première puis copier-coller là pour vous servir de base pour les autres. Reportez votre code dans votre rapport.

2.3 Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes est similaire à celle des rectangles, sauf que le calcul est fait à l'aide de trapèzes plutôt que de rectangles. L'avantage des trapèzes c'est qu'ils sont "plus proches de la courbe" que les rectangles. La largeur du trapèze est la même que celle du rectangle précédent, mais les deux coins du haut du trapèze sont sur la courbe étudiée.

Travail à faire :
En vous inspirant du code produit pour les méthodes des rectangles, remplissez la fonction trapèze dans le code fourni. Reportez votre code dans votre rapport.

2.4 Méthode de Monte-Carlo

Les méthodes de Monte-Carlo sont des méthodes stochastiques (basée sur l'aléatoire) permettant de résoudre facilement, mais de manière approchée des problèmes donnés.

Dans le cas présent, vous allez faire une méthode qui permet de calculer l'aire sous la courbe, en trouvant un rectangle englobant de la courbe et en tirant au hasard des points appartenant à ce rectangle. Vous tiendrez le compte des points étant "sous la courbe". Le ratio entre l'aire sous la courbe et l'aire du rectangle est le même que celui entre le nombre de points sous la courbe et le nombre de points total. Par la théorie des grands nombres, on sait que plus le nombre de points tirés est grand, plus le résultat sera proche de la vérité mathématique.

Travail à faire :
Remplissez la méthode de Monte-Carlo dans le code fourni. Pour cela vous aurez besoin des différentes étapes suivantes :

- Trouvez le maximum de la fonction sur la courbe définie (utilisez le nombre d'intervalles pour l'échantillonnage)
- Par sécurité, augmentez ce maximum de 10%
- Déduisez-en le rectangle englobant

- Tirez un million de point appartenant à ce rectangle et comptez ceux sous la courbe.
- Concluez l'aire sous la courbe.

Pour vous aidez à faire les tirages aléatoires, une fonction *aléatoire* vous est fournie. Cette fonction prend en paramètre les bornes de l'intervalle dans lequel le tirage est effectué. Reportez votre code dans votre rapport.

3 Synthèse

A l'aide des deux exercices précédents, proposez une méthode permettant pour une fonction et un intervalle donné, de calculer séparément l'aire sous la courbe lorsque la fonction est positive et l'aire au-dessous de la courbe quand elle est négative.

Proposez un programme Python permettant de faire ce calcul en vous inspirant des deux codes produits lors des deux exercices précédents.