

Calcul direct d'une tessellation de la surface limite pour les schémas de subdivision uniformes

L. Morlet,¹ M. Neveu,¹ S. Lanquetin,¹ et C. Gentil¹

¹ LE2I, CNRS, Arts et Métiers, Univ. Bourgogne Franche-Comté, Dijon

Résumé

Le peu d'utilisation des surfaces de subdivision dans les systèmes CAO est principalement lié au fait que la surface est le plus souvent seulement approchée par des niveaux de raffinement successifs, ce qui induit un manque de précision. De plus, il est difficile d'intégrer la représentation des surfaces de subdivision dans le noyau géométrique (ensemble de primitives et d'outils) des applications CAO.

C'est dans ce but que nous décrivons un formalisme général de construction de surfaces de subdivision basé sur les Systèmes Itérés de Fonctions. Le principal apport est que toutes les surfaces de subdivision classiques sont gérées de la même manière quel que soit le schéma choisi : triangulaire ou quadrangulaire, primal ou dual. D'autres schémas ont été facilement ajoutés comme les fractales. Un autre apport est le calcul direct et exact de la surface limite, avec le niveau de détails désiré, sans passer par les maillages de subdivision intermédiaires.

Mots clé : CAO, surface de subdivision, surface limite, Systèmes Itérés de Fonctions (IFS)

1. Introduction

Introduites par [CC78] et [DS78], les surfaces de subdivision sont une extension des surfaces B-Splines uniformes aux maillages de topologie arbitraire. Par la suite, [Loo87] a créé un schéma de subdivision adapté aux maillages triangulaires. Le problème avec l'approche classique des surfaces de subdivision est que la surface obtenue dépend du niveau de subdivision choisi bien que la surface converge après une infinité théorique de subdivisions. C'est pourquoi [HKD93] et [Sta98] se sont intéressés au calcul direct de la surface limite, sans passer par les différentes étapes de subdivision.

Dans ce papier, nous proposons un nouveau formalisme qui sépare les différents aspects des surfaces de subdivision qui sont habituellement mélangés dans les règles de subdivision : la topologie du maillage de contrôle, la subdivision dans l'espace paramétrique et la subdivision correspondante dans l'espace géométrique. En parallèle, nous présentons une méthode, issue de ce formalisme, pour calculer directement une tessellation de la surface limite pour n'importe quel maillage de contrôle pour un schéma de subdivision et un niveau de discrétisation choisis grâce à un ensemble de combinaisons barycentriques précalculées.

2. Présentation générale

Dans ce papier, nous présentons notre méthode sur les deux principaux schémas de subdivision, [CC78] et [Loo87], en deux parties :

- dans la section 3, nous montrons comment découper le maillage de contrôle en différents patches ;
- et dans la section 4, nous expliquons comment calculer les combinaisons barycentriques qui sont appliquées sur chaque patch pour obtenir la surface limite de celui-ci.

Nous montrons ensuite, dans la section 5, les résultats obtenus par notre implémentation pour plusieurs schémas de subdivision. Finalement nous discutons dans la section 6 de nos futurs travaux concernant l'intégration de schémas de subdivision moins courants dans notre formalisme.

3. Création de patches

3.1. Maillage de contrôle

Les maillages de contrôle utilisés respectent les mêmes conditions que celle de [HKD93] et [Sta98] c'est-à-dire :

- toutes les faces sont régulières ;
- aucune face n'a plus d'un sommet irrégulier (de valence extraordinaire).

La plupart des maillages semi-réguliers vérifient ces conditions. Si ce n'est pas le cas, l'application de la subdivision classique une ou deux fois permet de régler le problème.

3.2. Patches et sous-patches

Un patch est un ensemble de sommets formant un voisinage qui est, pour un schéma de subdivision donné, né-

cessaire et suffisant pour calculer un morceau de la surface limite. La surface limite du maillage de contrôle est l'union des surfaces limites de tous les patches. La taille du patch dépend du schéma choisi et, s'il existe, de la valence du sommet extraordinaire de la face centrale. Un patch est régulier si tous les sommets de la face centrale sont de valence régulière, il est irrégulier sinon. Des exemples de patches sont donnés dans la Figure 1.

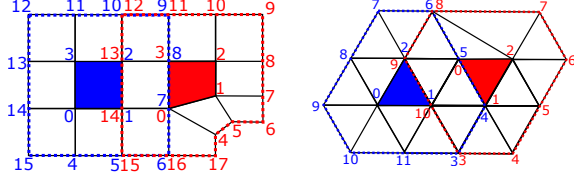


Figure 1: Exemples de patches pour les schémas de subdivision Catmull-Clark (à gauche) et Loop (à droite). Les patches réguliers sont colorés en bleu et les irréguliers en rouge. Notez que le sommet irrégulier est toujours indicé par 0.

Un patch peut être subdivisé en plusieurs sous-patches en suivant les règles de subdivision du schéma puis en créant une nouvelle topologie. L'union des surfaces limites des sous-patches est égale à la surface limite du patch initial. Deux exemples de subdivision de patch sont donnés dans la Figure 2.

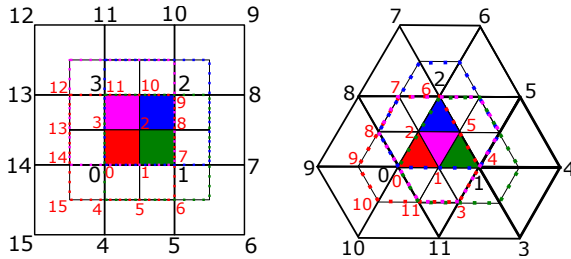


Figure 2: Subdivision des patches réguliers des schémas de subdivision de Catmull-Clark (gauche) et Loop (droite). Chaque couleur correspond à un sous-patch différent.

Dans cet article, tous les patches sont découpés en quatre sous-patches mais il faut garder à l'esprit que certains schémas de subdivision dérogent à cette règle.

L'avantage principal des surfaces de subdivision est la possibilité de gérer des maillages de topologie arbitraire. Les règles de subdivision non-régulières nous permettent de générer des sous-patches même sur des patches irréguliers comme illustré à la Figure 3.

Au lieu d'utiliser des règles de subdivision, les sous-patches peuvent être calculés grâce à des matrices de subdivision. Ces matrices sont introduites dans la section suivante et il est aussi expliqué comment les combiner pour calculer les combinaisons barycentriques pour chaque point désiré de la surface limite.

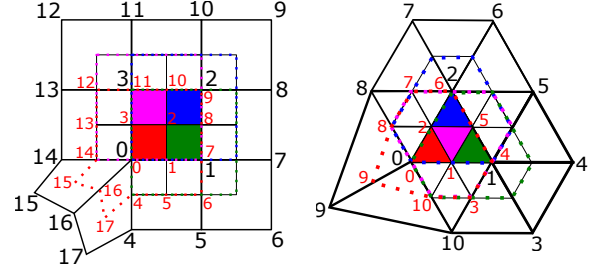


Figure 3: Les sous-patches des patches irréguliers des schémas de subdivision de Catmull-Clark (gauche) et de Loop (droite). Il sera porté à votre attention que le sous-patch rouge, qui est associé au sommet extraordinaire, a la même topologie que le patch initial alors que les trois autres sous-patches sont devenus réguliers.

4. Combinaisons barycentriques

La définition classique des subdivisions est une méthode itérative. De nouveaux sommets sont insérés dans chaque patch et les anciens sommets sont déplacés en suivant les règles des surfaces de subdivision. Chaque patch est ensuite découpé en sous-patches qui peuvent aussi être subdivisés. Cette opération est ensuite répétée jusqu'à atteindre un nombre suffisant de sommets.

Tout comme [Sta98], notre méthode ne nécessite pas d'ajout de nouveaux sommets. En effet, une tessellation de la surface limite du patch est directement calculée à partir du patch et d'un ensemble de combinaisons barycentriques.

4.1. Matrices de subdivision

Les règles de subdivision peuvent être utilisées pour créer des matrices de subdivision et construire un IFS. Chaque matrice de subdivision permet de transformer un patch en un sous-patch. Ces matrices seront notées M_n où n est l'indice de la matrice. Un exemple de matrice de subdivision est donné en Figure 4.

Comme le sous-patch a la même topologie que le patch initial, les matrices de subdivision régulières sont carrées.

4.2. Matrices de subdivision irrégulières

Dans le cas des patches irréguliers, les règles de subdivision sont légèrement différentes et, par conséquent, les matrices de subdivision. Nous introduisons $\hat{M}_{n,k}$ qui sont les transformations d'indice n pour le sommet de valence extraordinaire k .

Comme mis en évidence précédemment, le sous-patch le plus près du sommet extraordinaire conserve la même topologie que le patch parent; par conséquent $\hat{M}_{0,k}$ est carrée. À l'inverse, comme les autres sous-patches deviennent réguliers, les matrices $\hat{M}_{n \neq 0,k}$ sont rectangulaires.

4.3. Convergence

Comme mentionné dans [HKD93] et [Sta98], les matrices de subdivision sont stochastiques et ont une plus grande va-

$$M_0 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} V & E & F & E \\ B & B & C & C \\ A & A & A & A \\ B & C & C & B \end{matrix} & \begin{matrix} E & F \\ C & C \end{matrix} & & \begin{matrix} F & E & F \\ & C & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} B & C \\ A & A \\ C & B \\ E & V & E & F \end{matrix} & \begin{matrix} B & C \\ A & A \\ C & B & C & C \\ F & E & F & E \end{matrix} & \begin{matrix} F \\ C & E & F & E & F & C \\ C & F & E & F & E & F & E \end{matrix} & \\ \begin{matrix} C & B & B & C \\ F & E & V & E \\ C & C & B & B \\ E & F & E & V \end{matrix} & & \begin{matrix} C & F \\ C & E & F & E & F & C \\ C & F & E & F & E & F & E \end{matrix} & \begin{matrix} F & E & F \\ C & B & C \\ A & A & A \\ C & B & C \\ A & A & A \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ A \\ B \\ A \end{matrix} & \begin{matrix} B \\ A \\ C \\ A \end{matrix} & & \begin{matrix} C \\ C & B & C \\ A & A & A \\ C & B & C \\ A & A & A \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4} & V = \frac{9}{16} \\ B = \frac{3}{8} & E = \frac{1}{16} \\ C = \frac{1}{16} & F = \frac{1}{64} \end{cases}$$

Figure 4: La matrice de subdivision M_0 pour le schéma de Catmull-Clark. Les sommets sont numérotés de la même manière qu'à la Figure 1 et à la Figure 2.

$$\hat{M}_{0,k \geq 4} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} v & e & f & e & f \\ B & B & C & C & C \\ A & A & A & A & A \\ B & C & C & C & B \end{matrix} & \begin{matrix} e & f \\ C & C \end{matrix} & & & \begin{matrix} f & e & f & \dots & e & f \\ & C & C & & 0 & \dots & 0 & C & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} B & C \\ A & A \\ C & B \\ E & V & E & F \end{matrix} & \begin{matrix} B & C \\ A & A \\ C & B & C & C \\ F & E & F & E \end{matrix} & \begin{matrix} F \\ C & E & F & E & F & C \\ C & F & E & F & E & F & E \end{matrix} & & \\ \begin{matrix} C & B & B & C \\ F & E & V & E \\ C & C & B & B \\ E & F & E & V \end{matrix} & & \begin{matrix} C & F \\ C & E & F & E & F & C \\ C & F & E & F & E & F & E \end{matrix} & & \begin{matrix} F & E & F \\ C & B & C \\ A & A & A \\ C & B & C \\ A & A & A \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ A \\ B \\ A \end{matrix} & \begin{matrix} B \\ A \\ C \\ A \end{matrix} & & \begin{matrix} C & B & C \\ A & A & A \\ C & B & C \\ A & A & A \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v = \frac{4k^2 - 7k}{4k^2} \\ e = \frac{6}{4k^2} \\ f = \frac{1}{4k^2} \end{cases}$$

Figure 5: La matrice de subdivision irrégulière $\hat{M}_{0,k \geq 4}$ pour le schéma de Catmull-Clark. Les sommets sont numérotés comme dans les Figure 1 et Figure 3. Les coefficients en noir sont fixes alors que ceux en rouge dépendent de la valence extraordinaire.

leur propre unique égale à 1. Ainsi chaque matrice possède un point-fixe unique correspondant au vecteur propre associé à la valeur propre 1, que nous notons P_n . Ce vecteur propre correspond à une combinaison barycentrique, qui appliquée au patch, détermine un point de la surface limite.

De façon identique, nous devons déterminer les points fixes $\hat{P}_{n,k}$ des matrices de subdivision irrégulières $\hat{M}_{n,k}$. Comme $\hat{P}_{n,k} = P_n \hat{M}_{n,k}$ si $n \neq 0$, seule $\hat{P}_{0,k}$ a besoin d'être calculée.

4.4. Calcul des combinaisons barycentriques

Chaque combinaison que l'on veut calculer correspond à un point de la surface limite du patch et donc à une paramétrisation précise. L'espace paramétrique correspondant dépend du schéma utilisé (voir Figure 6)

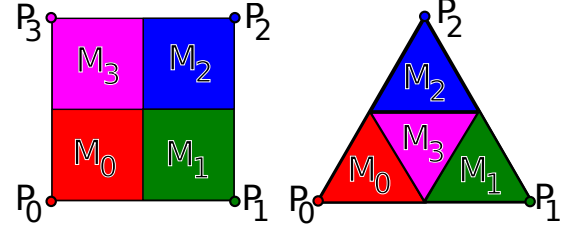


Figure 6: Les espaces paramétriques pour les schémas de Catmull-Clark (à gauche) et de Loop (à droite)

Si la paramétrisation que l'on veut calculer ne correspond pas à un coin, il faut appliquer la transformation M_n où n est l'indice de la partition de l'espace auquel la paramétrisation appartient. Ensuite on applique la transformation qui associe le sous-espace n à l'espace paramétrique complet sur la paramétrisation. On recommence jusqu'à ce que la paramétrisation corresponde à un coin de l'espace paramétrique ; il faut alors appliquer la combinaison P_n où n dépend du coin en question.

L'ensemble du calcul des combinaisons barycentriques est résumé dans l'automate de la Figure 7

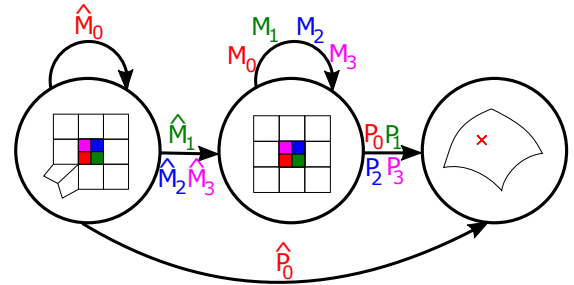


Figure 7: L'automate des matrices de transformations. Attention, les transformations doivent être écrites de droite à gauche pour respecter le produit matriciel.

5. Résultats

La Figure 8 présente quelques résultats obtenus par notre implémentation de la méthode. Les schémas de subdivision classiques qu'ils soient quadrangulaires ou triangulaires, primals ou duals sont gérés. De plus, des restrictions sur l'espace paramétrique ont été ajoutées pour générer des surfaces de types fractales.

L'exploitation de la puissance des cartes graphiques actuelles grâce aux *Tessellation Shaders* du pipeline OpenGL nous permet un affichage temps réel sans aucun ralentissement même pour les maillages lourds (l'application a été testée sur un maillage d'environ 18 000 faces et sommets).

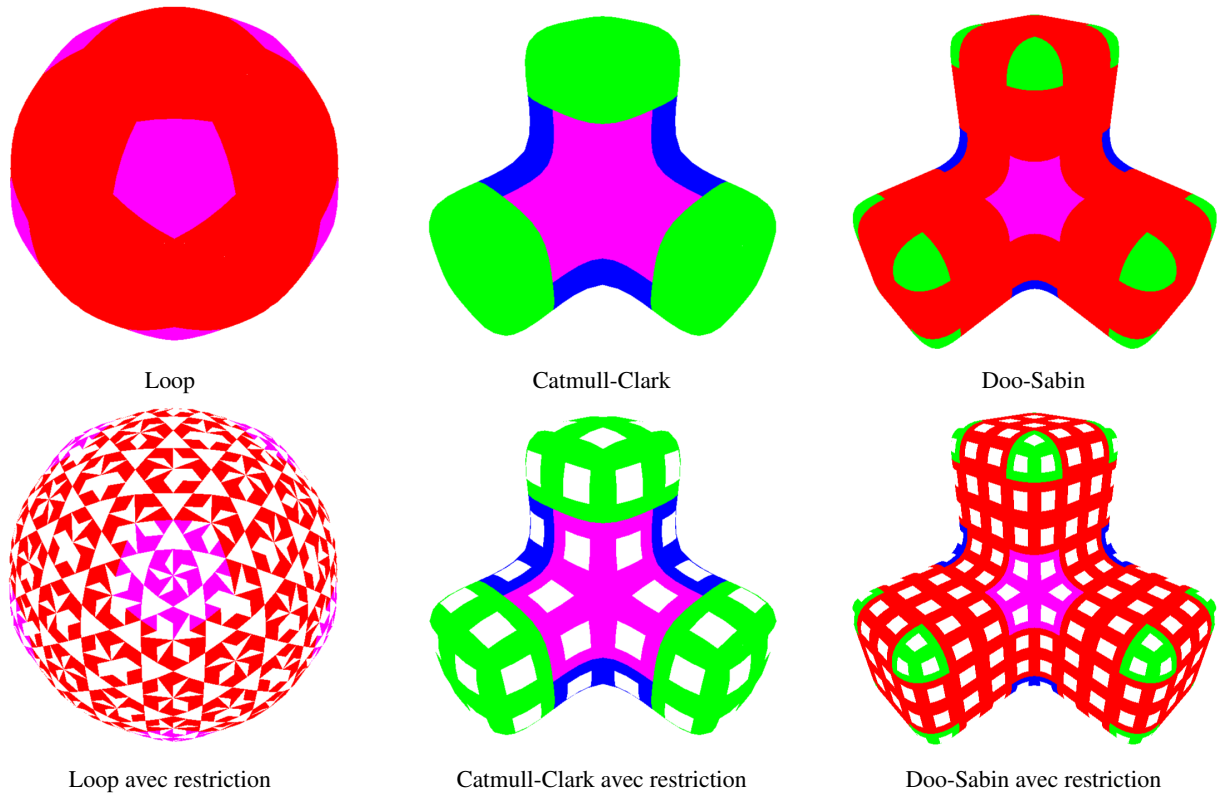


Figure 8: Quelques résultats obtenus avec notre application.

6. Conclusion et travaux futurs

Notre méthode nous permet de :

- gérer de la même manière tous les schémas classiques ;
- calculer directement la surface limite pour un niveau de détails choisi ;

Les résultats obtenus par notre méthode nous pousse à l'étendre à d'autres schémas de subdivision :

- les schémas de haut degré (supérieurs à 3) ;
- les schémas hybrides [SL03] ;
- les schémas non-uniformes [SZSS98], [MRF06] ;
- les schémas NURBS [CADS09] ;
- les Systèmes de Fonctions Itérées quelconques.

Références

- [CADS09] CASHMAN T. J., AUGSDÖRFER U. H., DODGSON N. A., SABIN M. A. : Nurbs with extraordinary points : high-degree, non-uniform, rational subdivision schemes. In *ACM Transactions on Graphics (TOG)* (2009), vol. 28, ACM, p. 46.
- [CC78] CATMULL E., CLARK J. : Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-aided design*. Vol. 10, Num. 6 (1978), 350–355.
- [DS78] DOO D., SABIN M. : Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer-Aided Design*. Vol. 10, Num. 6 (1978), 356–360.
- [HKD93] HALSTEAD M., KASS M., DEROSE T. : Efficient, fair interpolation using catmull-clark surfaces. In *Proceedings of the 20th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques* (New York, NY, USA, 1993), SIGGRAPH '93, ACM, pp. 35–44.
- [Loo87] LOOP C. : Smooth subdivision surfaces based on triangles.
- [MRF06] MÜLLER K., REUSCHE L., FELLNER D. : Extended subdivision surfaces : Building a bridge between nurbs and catmull-clark surfaces. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*. Vol. 25, Num. 2 (2006), 268–292.
- [SL03] STAM J., LOOP C. : Quad/triangle subdivision. In *Computer Graphics Forum* (2003), vol. 22, Wiley Online Library, pp. 79–85.
- [Sta98] STAM J. : Exact evaluation of catmull-clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values. In *Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques* (New York, NY, USA, 1998), SIGGRAPH '98, ACM, pp. 395–404.
- [SZSS98] SEDERBERG T. W., ZHENG J., SEWELL D., SABIN M. : Non-uniform recursive subdivision surfaces. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (1998), ACM, pp. 387–394.