

Surfaces de subdivision, NURBS, et fractales :  
vers un modèle géométrique générique à base de systèmes itérés  
et contrôlés de fonctions

Présentée par Lucas MORLET  
le Vendredi 6 décembre 2019

Rapporteurs :

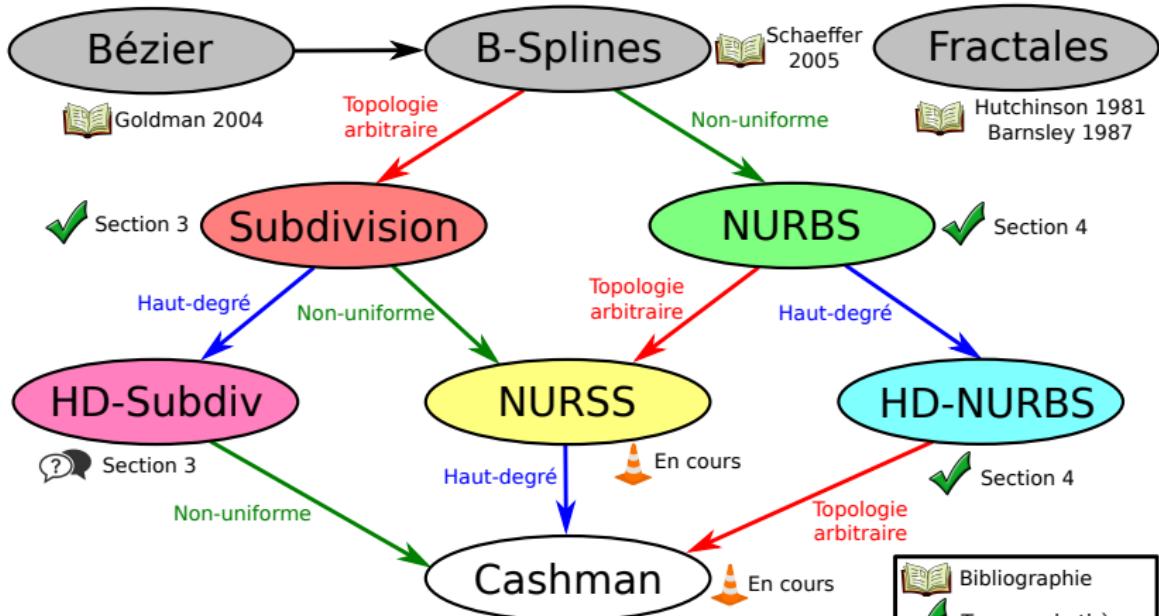
Stefanie Hahmann  
Géraldine Morin

Examinateurs :

Jean-Philippe Pernot  
Dmitry Sokolov

Encadrement :

Christian Gentil  
Sandrine Lanquetin  
Marc Neveu



- |  |                    |
|--|--------------------|
|  | Bibliographie      |
|  | Travaux de thèse   |
|  | Travaux à discuter |
|  | Travaux en cours   |

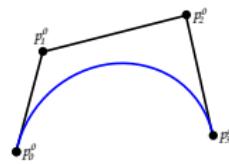
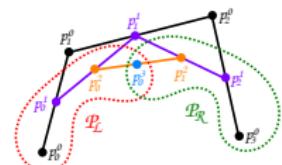
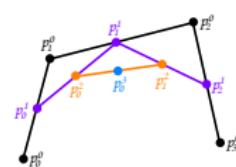
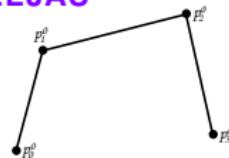
## COURBES DE BÉZIER ET ALGORITHME DE CASTELJAU

### Historique

- Industrie automobile des années 60
- Représentation commune

### Avantages

- Intuitives pour les *designer*
- Propriétés mathématiques



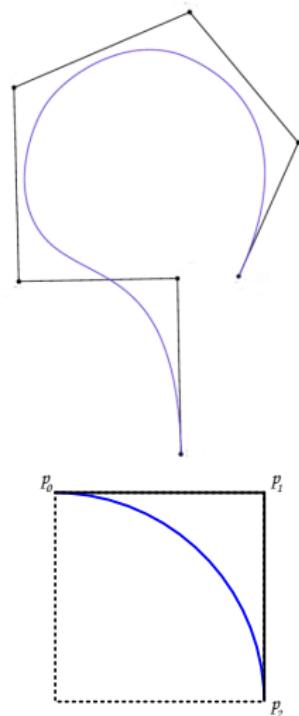
## B-SPLINES UNIFORMES ET NURBS

### Historique

- 1972 : NURBS
- 1987 : *Blossoming*

### Avantages

- Précision des calculs
- Génération des coniques
- Boîte à outils complète



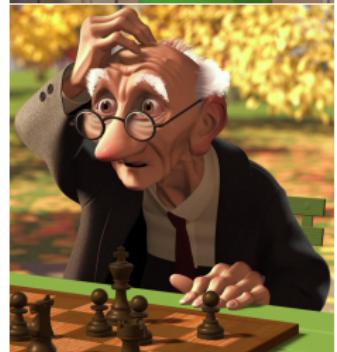
## SURFACES DE SUBDIVISION

### Historique

- 1978 : Catmull-Clark et Doo-Sabin
- 1997 : *Le Joueur d'échecs*

### Avantages

- Intuitif
- Maillages irréguliers



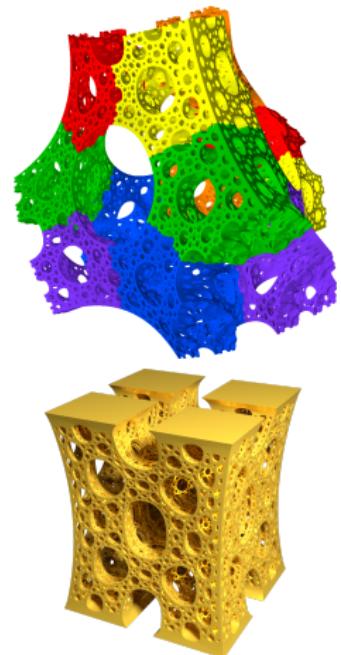
## SYSTÈMES ITÉRÉS DE FONCTIONS

### Historique

- 1981 : Hutchinson
- 1988 : Barnsley

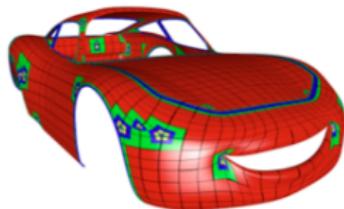
### Avantages

- Modèle à la fois simple et d'une grande complexité
- Permet une optimisation grâce à une géométrie et une topologie inhabituelles

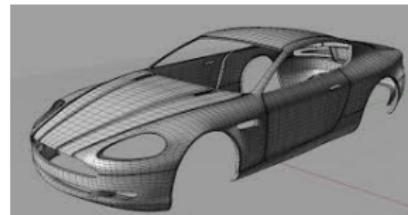


## INTRODUCTION - OBJECTIF

### PROBLÉMATIQUE



*Design*



Ingénierie



Optimisation

## ETAT DE L'ART

### Modèle générique

- Moteur de CGAO basé SS (Ma 2005, Antonelli 2013)
- Manque d'outils pour les surfaces de subdivision
- NURSS (Sederberg 1998, Cashman 2009)
- Inertie industrielle

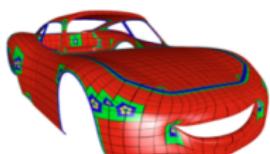
### Conversion automatique

- NURBS  $\leftrightarrow$  Catmull-Clark (Shen *et al.* 2014)
- NURBS  $\leftrightarrow$  NURSS (Shen *et al.* 2016)
- La conversion n'est pas toujours exacte

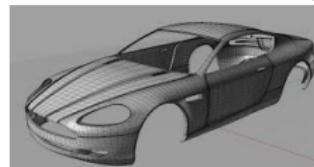
# INTRODUCTION - OBJECTIF

## SOLUTION PROPOSÉE

CIFS



*Design*

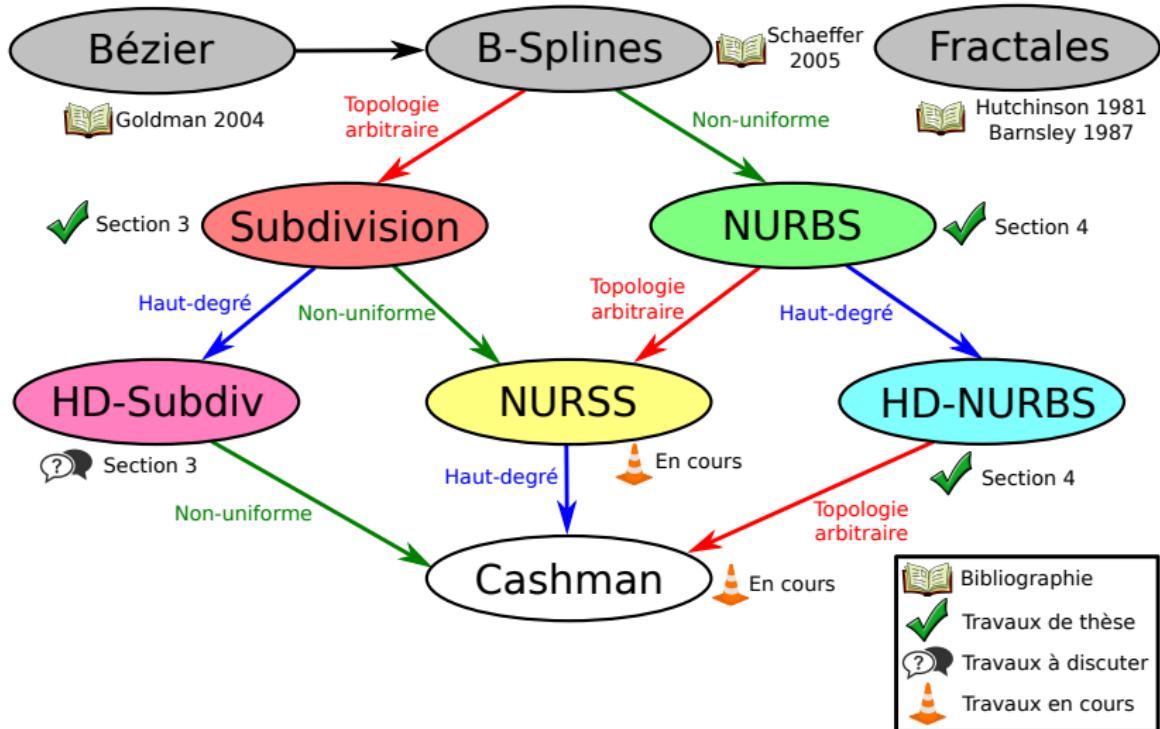


Ingénierie



Optimisation

# CIFS



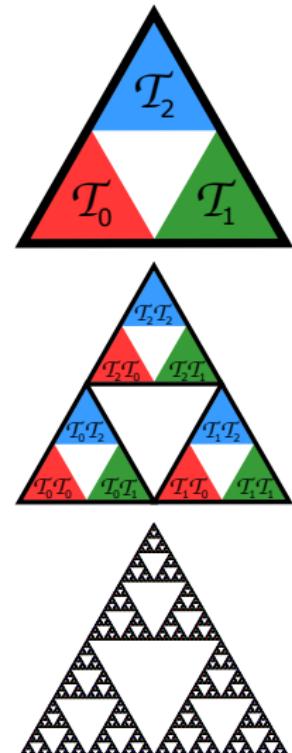
## SYSTÈMES ITÉRÉS DE FONCTIONS (IFS)

Hutchinson (1981)

- Un IFS est un ensemble de transformations contractantes
- L'attracteur est le seul objet qui n'est pas modifié par l'IFS
- L'attracteur est obtenu quelque soit le compact de départ

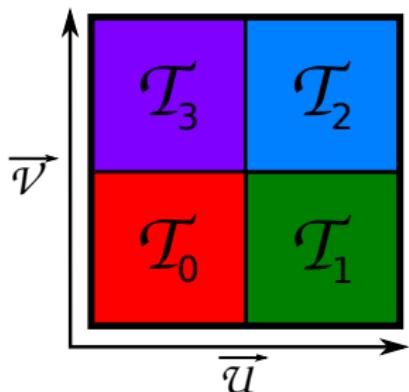
Barnsley

- 1988 : Théorème du collage
- 1993 : Jeu du Chaos

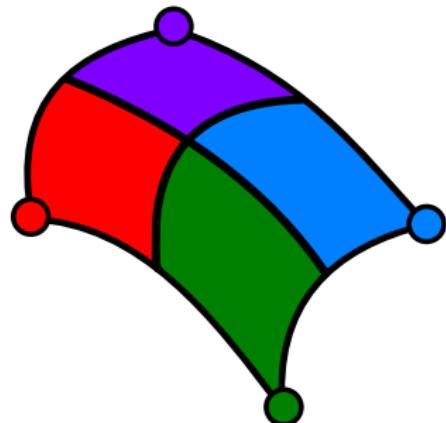


## NOTION D'ADRESSE

Espace paramétrique



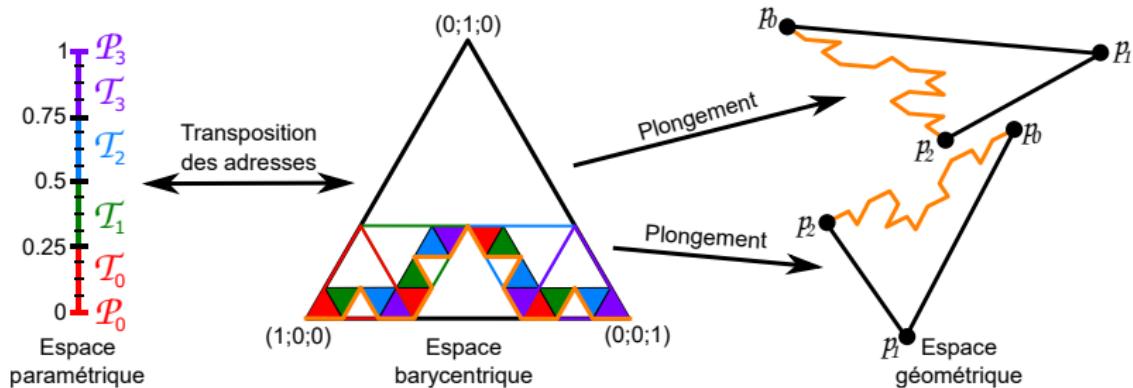
Espace géométrique



Les adresses sont calculées dans l'espace paramétrique puis appliquées dans l'espace géométrique

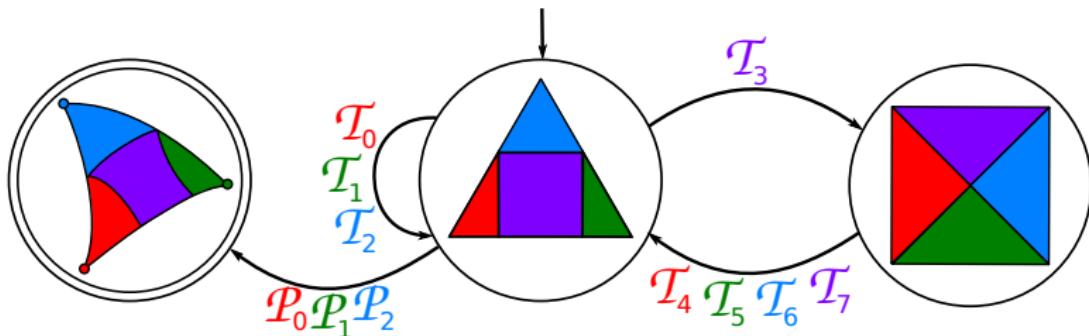
## IFS BARYCENTRIQUES

Zair et Tosan en 1996, puis Schaeffer et Goldman en 2005



- Passage par un espace barycentrique intermédiaire
- L'attracteur n'est calculé qu'une fois et projeté plusieurs

## SYSTÈMES ITÉRÉS ET CONTRÔLÉS DE FONCTIONS

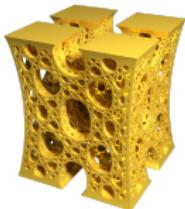


- Les transformations peuvent changer la nature de l'objet
- Chacune des natures est un état de l'automate
- Seuls les points-fixes des transformations qui bouclent sur un état peuvent être calculés

# CIFS - IFS CONTRÔLÉS

## OPTIMISATION PAR CIFS

Volumes lacunaires



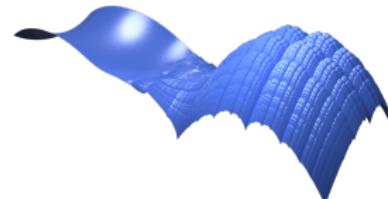
Supports arborescents



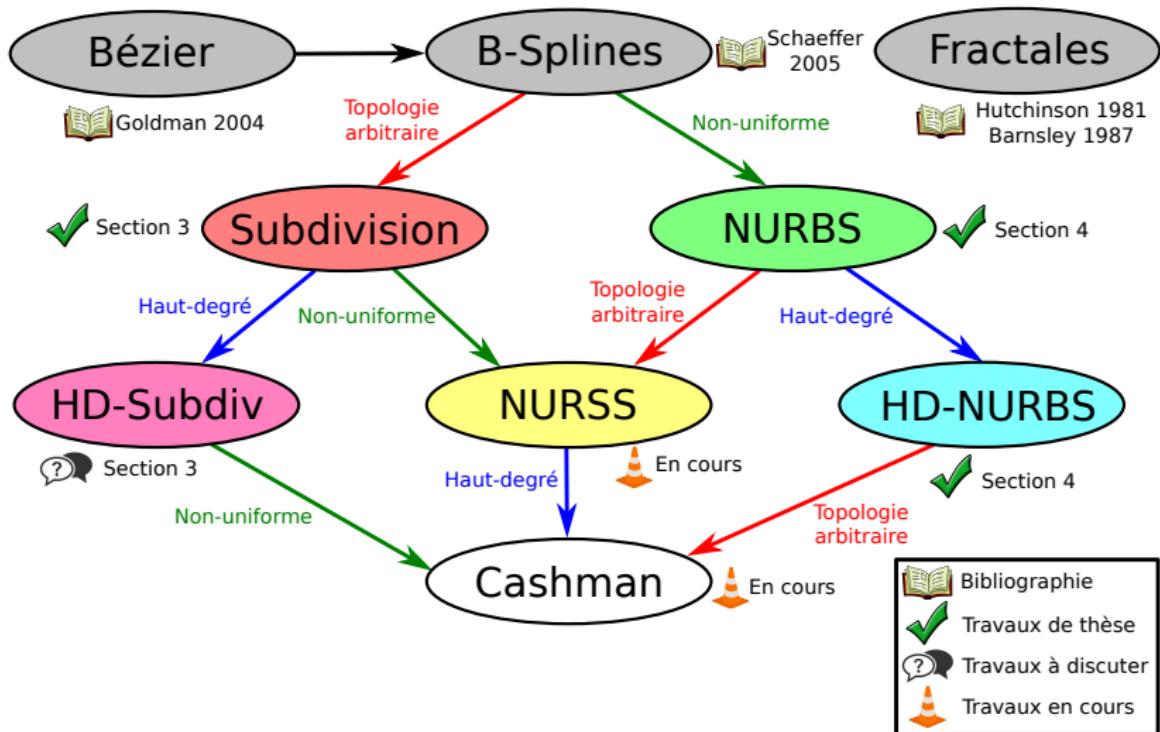
Optimisation thermique



Raccord

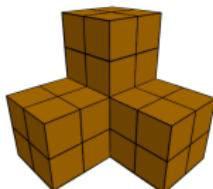


# SUBDIVISION



## SUBDIVISION - INTRODUCTION

DÉFINITION PAR CATMULL-CLARK ET DOO-SABIN EN 1978



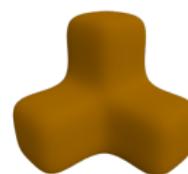
$$\mathbf{P}_0$$



$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{S}\mathbf{P}_0$$



$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{S}^2\mathbf{P}_0$$



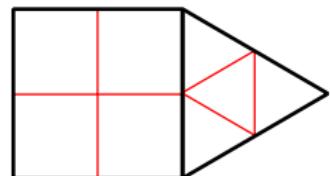
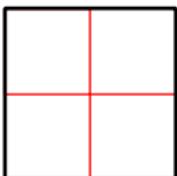
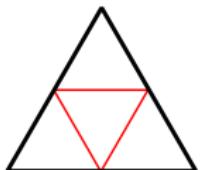
$$\mathbf{P}_{\infty} = \mathbf{S}^{\infty}\mathbf{P}_0$$

- Tout démarre d'un maillage de contrôle :  $\mathbf{P}_0$
- Application de l'opérateur de subdivision  $\mathbf{S}$  de manière itérative pour affiner le maillage
- Après une infinité d'itérations, la surface limite est obtenue

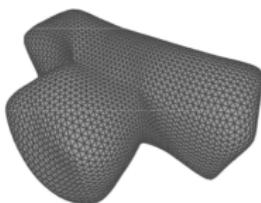
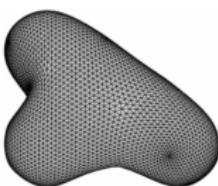
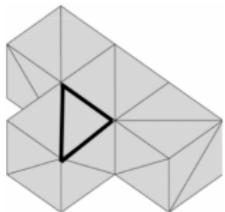
# SUBDIVISION - INTRODUCTION

## CLASSIFICATION DES SCHÉMAS DE SUBDIVISION (ZORIN 2000)

Type de maillages



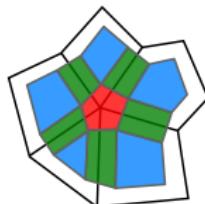
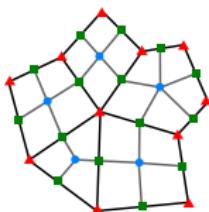
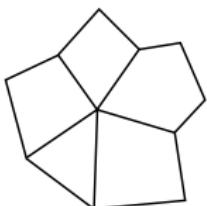
Approximant ou interpolant



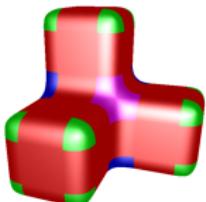
## SUBDIVISION - INTRODUCTION

### CLASSIFICATION DES SCHÉMAS DE SUBDIVISION (ZORIN 2000)

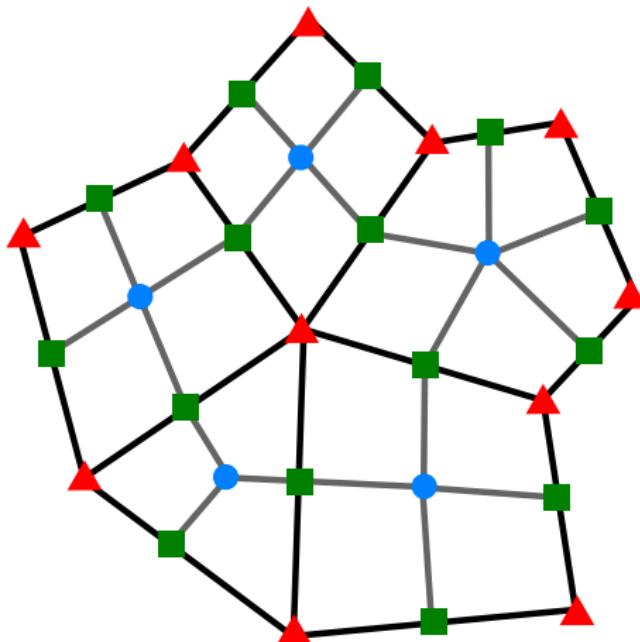
Primal ou dual



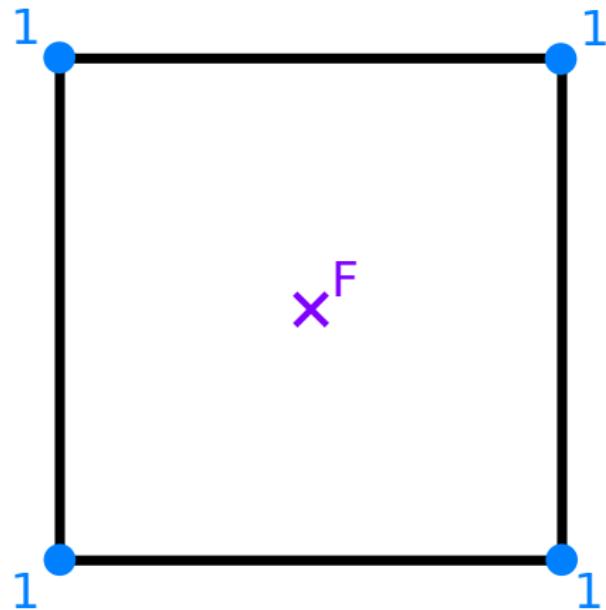
Continuité de la surface limite



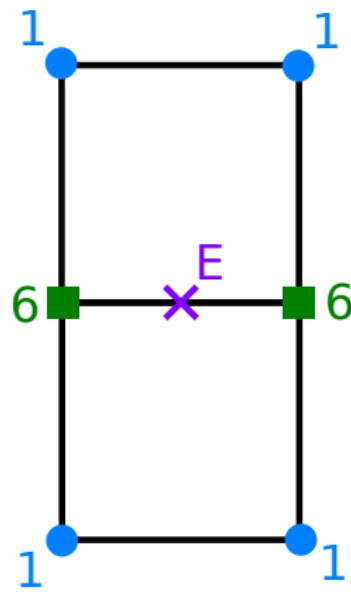
## FORMULATION SOUS FORME DE RÈGLES : TOPOLOGIE



## FORMULATION SOUS FORME DE RÈGLES : F-SOMMETS

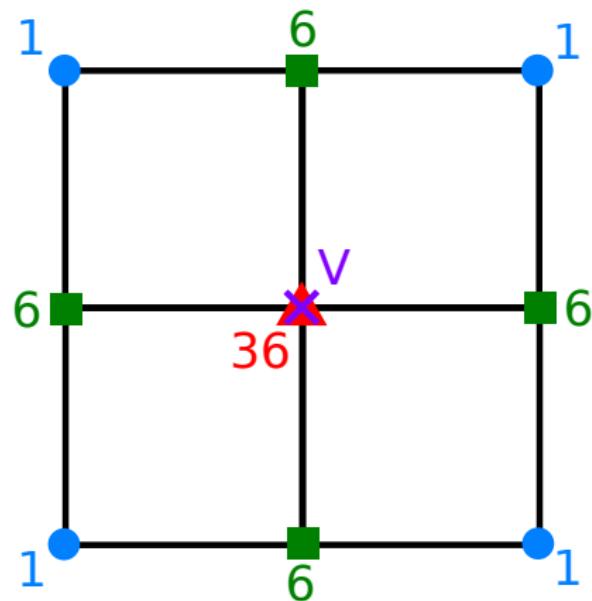


## FORMULATION SOUS FORME DE RÈGLES : E-SOMMETS



# SUBDIVISION - SCHÉMA DE CATMULL-CLARK

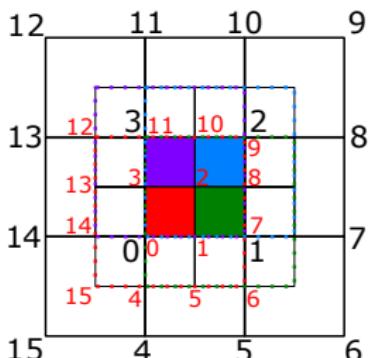
## FORMULATION SOUS FORME DE RÈGLES : V-SOMMETS



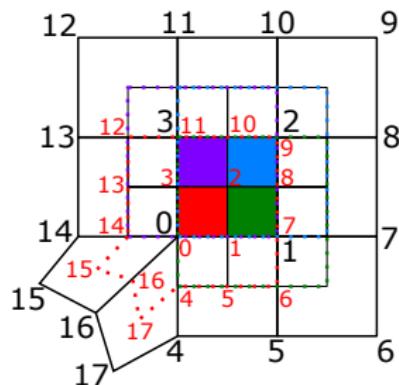
# SUBDIVISION - SCHÉMA DE CATMULL-CLARK

## FORMULATION DE STAM (PRINCIPE)

Patch régulier



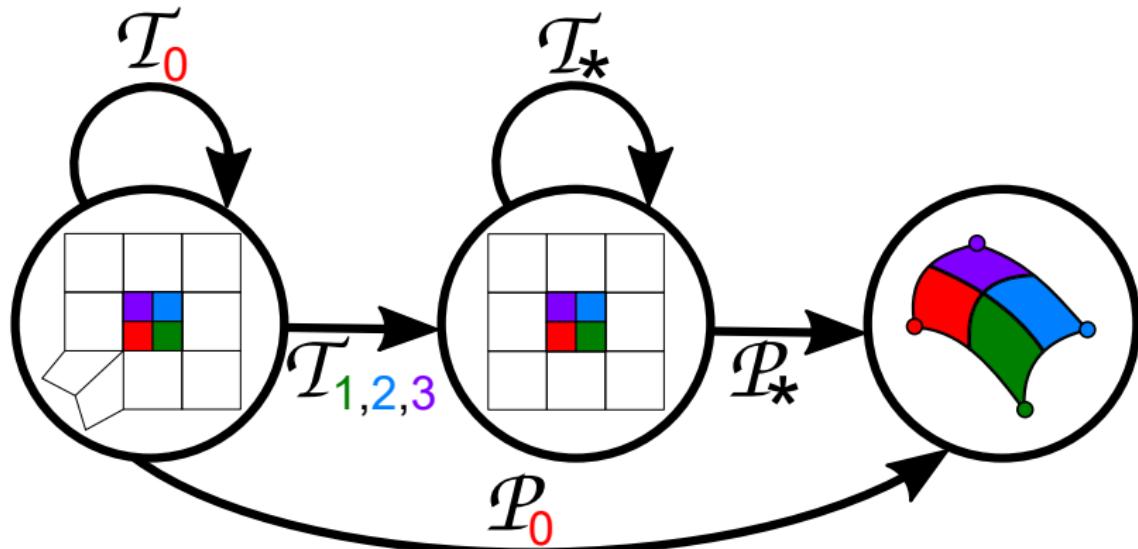
Patch irrégulier



- Un patch régulier devient 4 sous-patches réguliers
- Un patch irrégulier devient 3 réguliers et 1 irrégulier

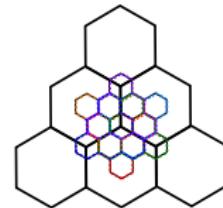
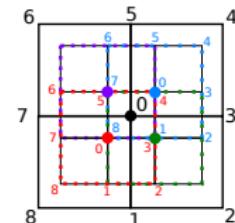
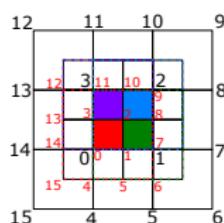
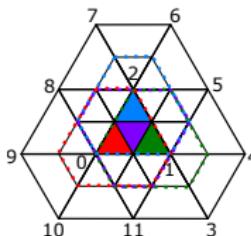
# SUBDIVISION - SCHÉMA DE CATMULL-CLARK

## FORMULATION SOUS FORME D'AUTOMATE CIFS



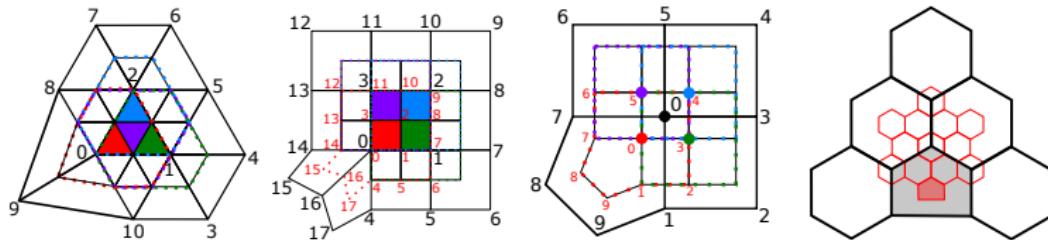
## GÉNÉRATION DU PATCH RÉGULIER

- Pour un schéma primal, il est centré sur une face
- Pour un schéma dual, il est centré sur un sommet
- Le patch est isotrope (invariant par rotation)

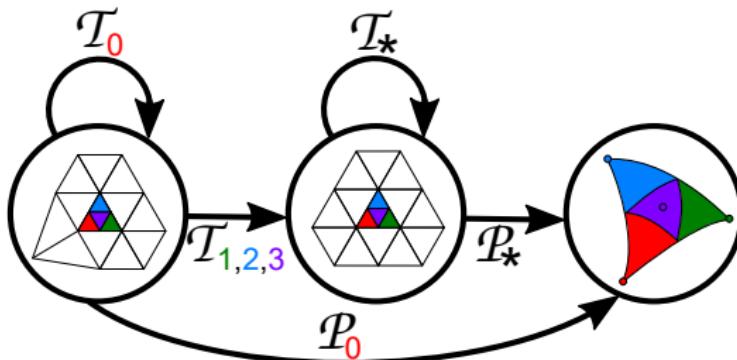


## GÉNÉRATION DU PATCH IRRÉGULIER

- Si le schéma est primal, le patch possède un sommet irrégulier qui n'est pas sur les bords du patch
- Si le schéma est dual, le patch possède une face irrégulière



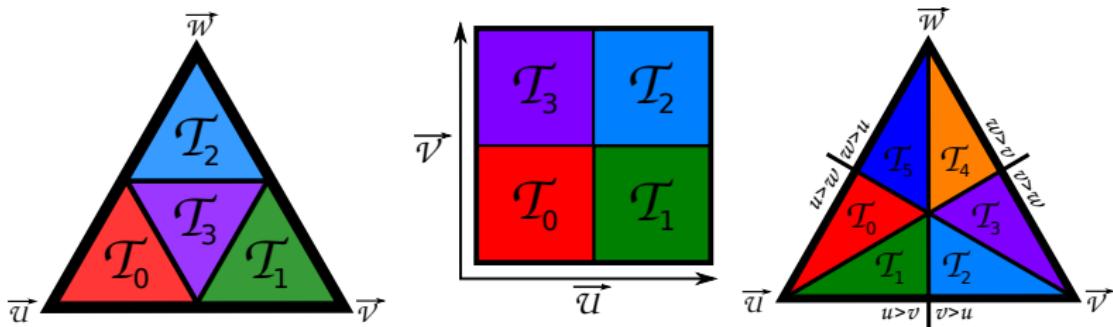
## CONSTRUCTION DE L'AUTOMATE



- Construction des états "régulier" et "irrégulier"
- L'état "attracteur" est ajouté et le point-fixe de chaque transformation qui boucle sur un état est calculé
- Attention, pour certains schémas, il y a plusieurs irrégularités possibles et donc plusieurs états irréguliers

## CONSTRUCTION DE L'ESPACE PARAMÉTRIQUE

- Si le schéma est primal, l'espace paramétrique a la même forme que la face centrale
- Si le schéma est dual, l'espace paramétrique a la même forme que le dual d'une face régulière



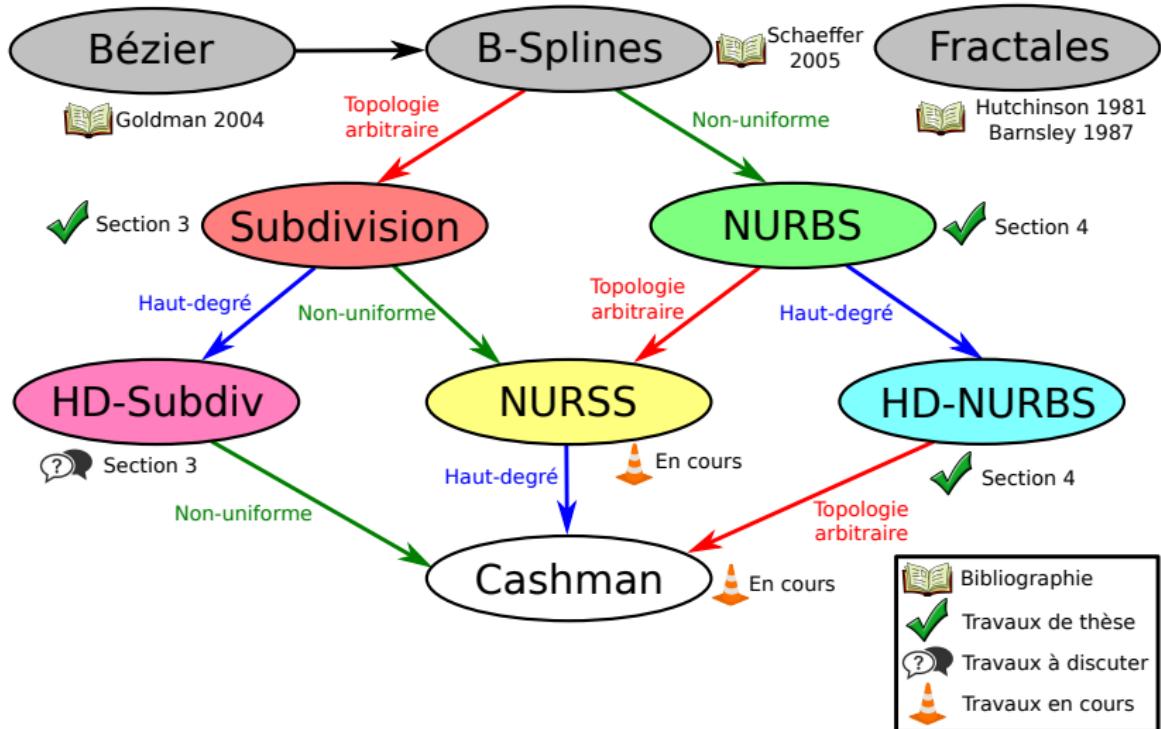
### Contributions

- Méthode générique de construction de l'automate CIFS d'un schéma de subdivision stationnaire et uniforme directement à partir des règles
- Application de cette méthode sur les cinq schémas de subdivision approximants les plus courants, sur un schéma hybride, et sur la famille des schémas B-Splines uniformes

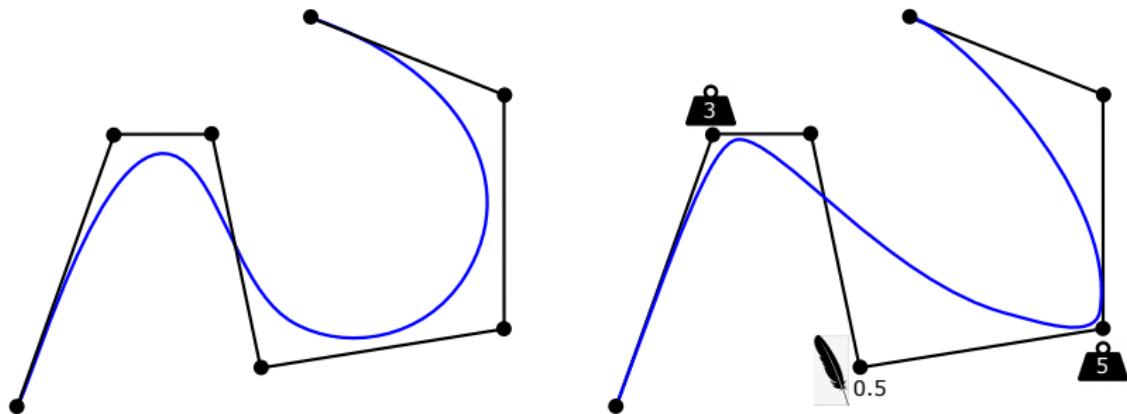
### Reste à faire

- Les automates de haut-degré B-Splines uniformes
- Les schémas Box-Splines
- Les schémas non-stationnaires

# NURBS

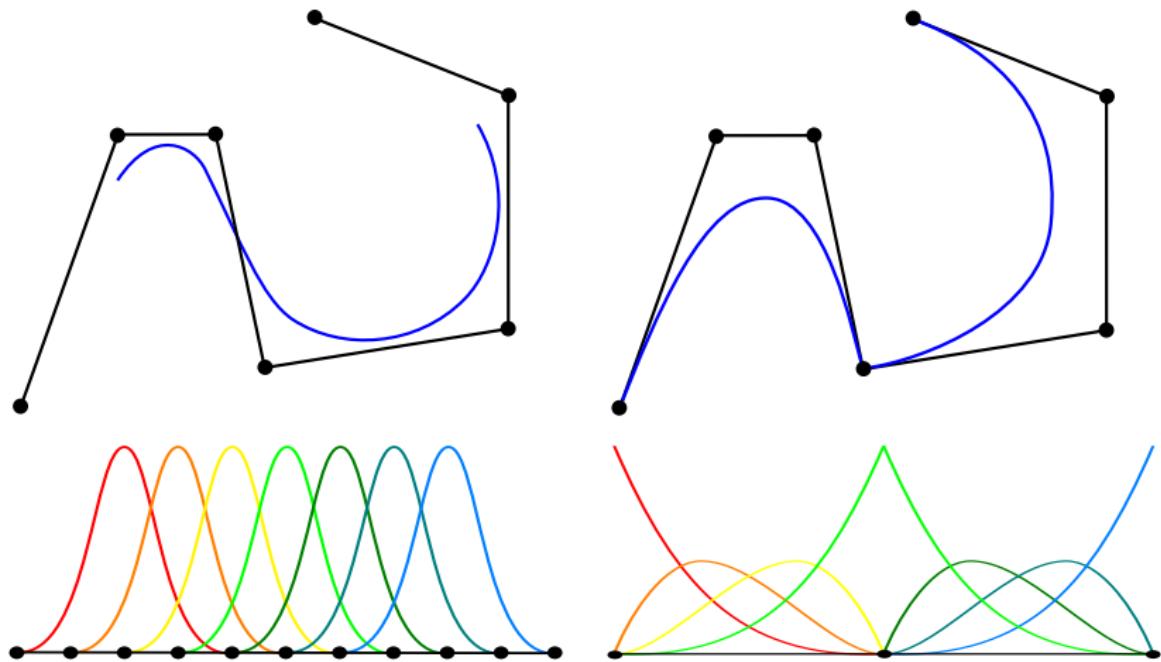


## RATIONALITÉ

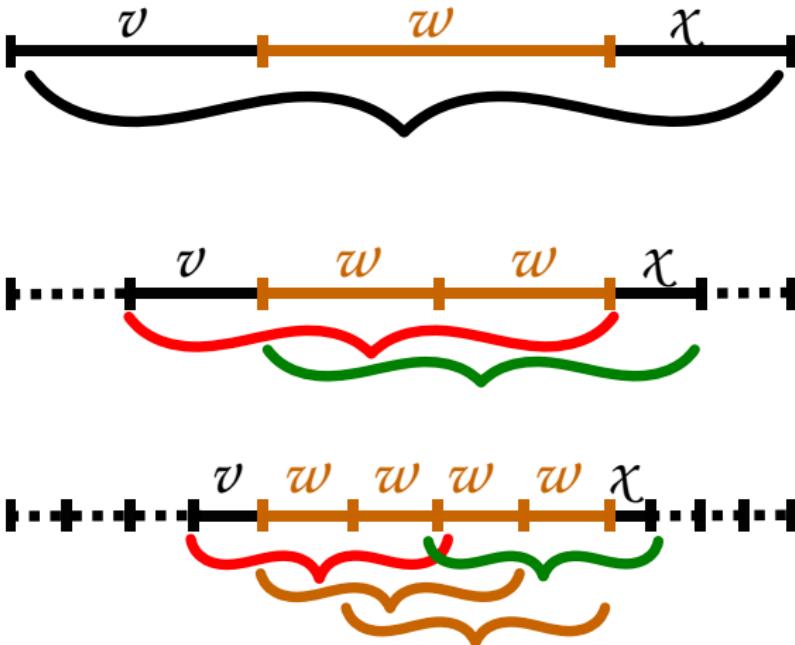


Une B-Spline rationnelle est une B-Spline dont le polygone de contrôle est composé de points massiques

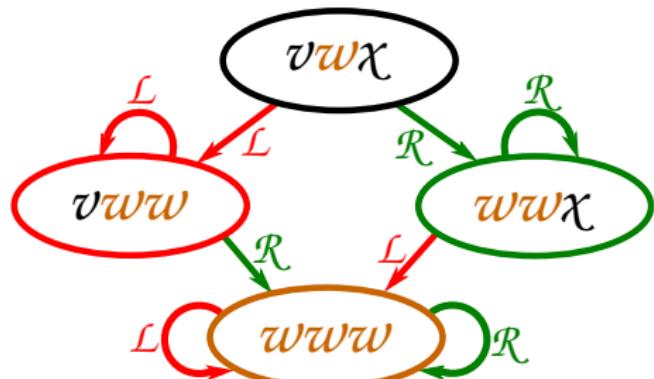
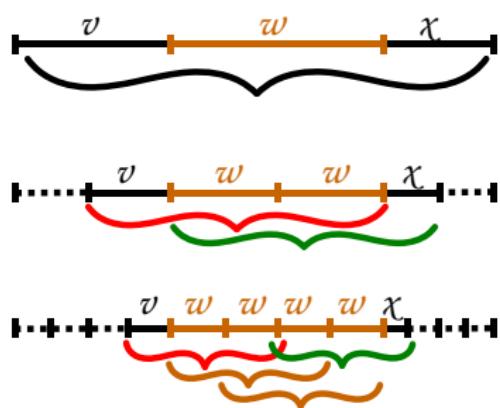
## NON-UNIFORMITÉ



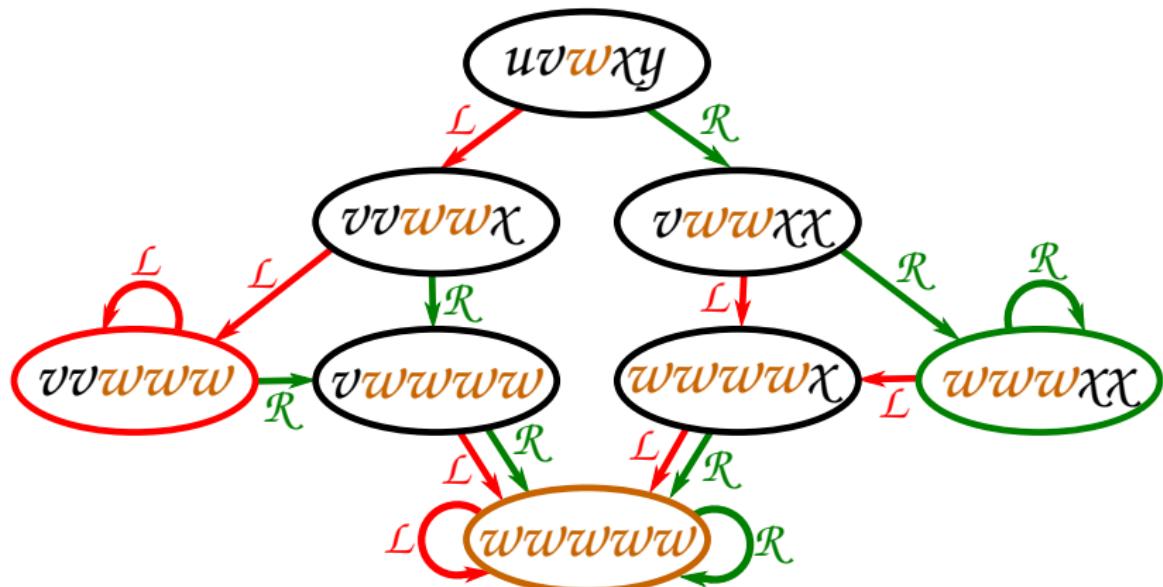
## EVOLUTION DU VECTEUR INTER-NODAL PAR DÉDOUBLEMENT



## NURBS QUADRATIQUES



## NURBS CUBIQUES

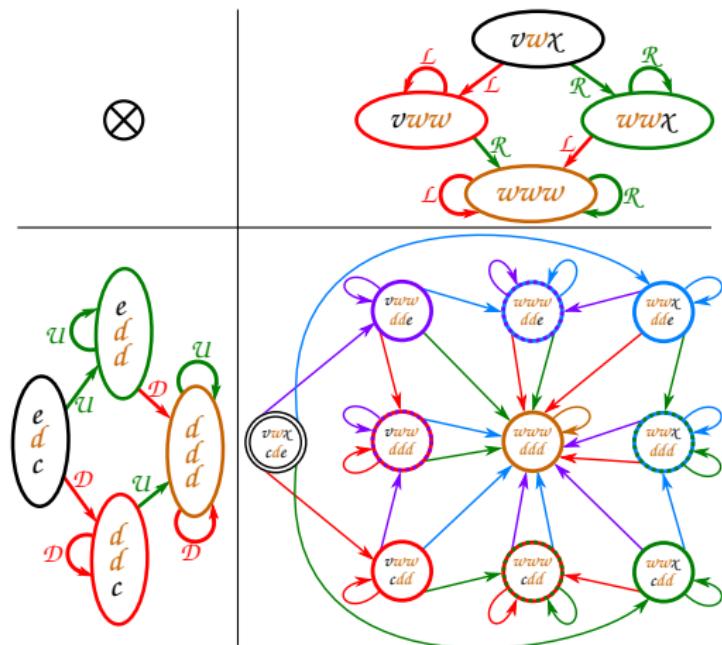


## NURBS DE DEGRÉ QUELCONQUE

- Le nombre d'états de l'automate est fini
- La valeur centrale de chaque vecteur est toujours conservée lors de l'application de  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$
- Un unique état uniforme  $W = \mathcal{L}(W) = \mathcal{R}(W)$
- Un unique état stationnaire à gauche :  $W_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(W_{\mathcal{L}})$
- Un unique état stationnaire à droite :  $W_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}(W_{\mathcal{R}})$
- Toute séquence de transformations finira dans l'état uniforme, l'état stationnaire à gauche, ou l'état stationnaire à droite

# NURBS - FORMULATION SOUS FORME D'AUTOMATE CIFS

## SURFACE NURBS



## DÉFINITION (1/2)

La floraison d'une courbe de degré  $d$  est représentée par une **étiquette** de  $d$  **arguments** :  $\{t_i \dots t_{i+d-1}\}$ .

Symétrie :

L'ordre des arguments est quelconque :

$$\{\dots t_i \dots t_j \dots\} = \{\dots t_j \dots t_i \dots\}$$

Diagonalité :

Le point de paramètre  $t$  de la courbe limite correspond à une étiquette dont tous les arguments sont égaux à  $t$

$$\mathcal{C}(t) = \{t \dots t\}$$

## DÉFINITION (2/2)

Multi-affinité :

Une étiquette est affine selon chacun de ses arguments :

$$\{\dots t \dots\} = \frac{b-t}{b-a}\{\dots a \dots\} + \frac{t-a}{b-a}\{\dots b \dots\}$$

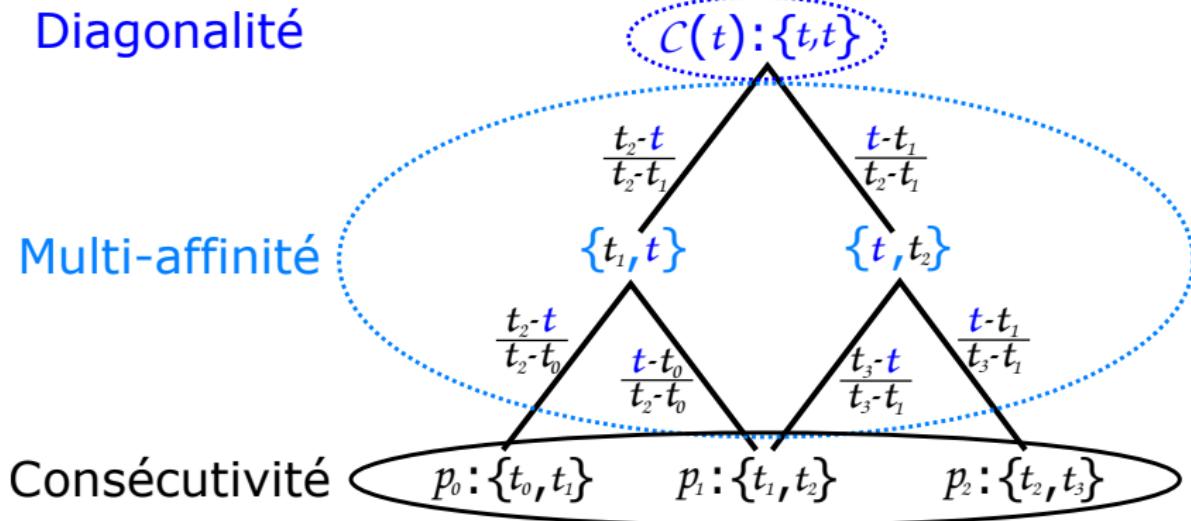
Consécutivité :

Une étiquette dont les valeurs des arguments correspondent aux valeurs de noeuds consécutifs du vecteur nodal correspond au point du polygone de contrôle :

$$p_i : \{t_i, t_{i+1} \dots t_{i+d-1}\}$$

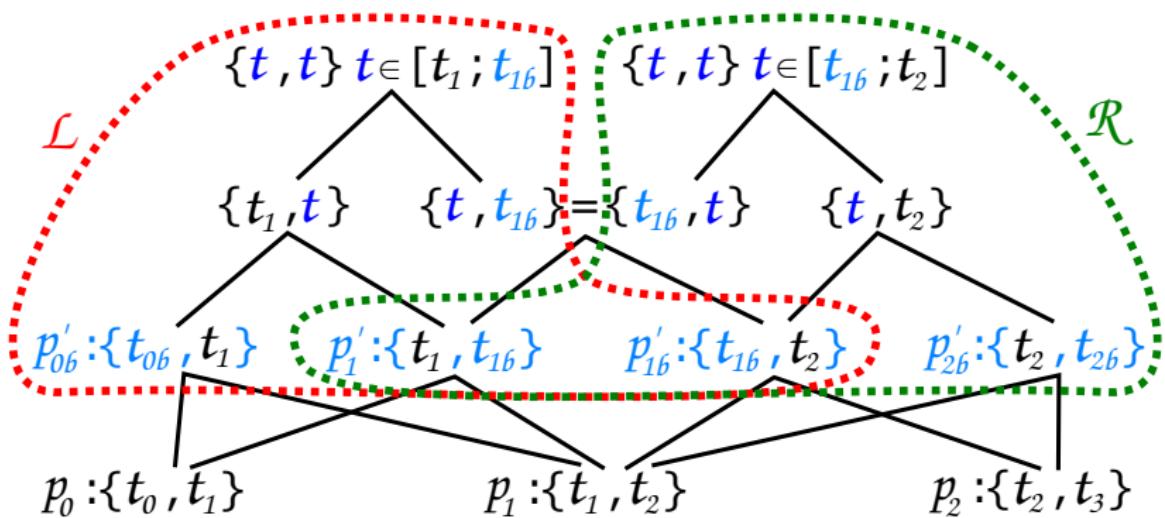
# NURBS - BLOSSOMING

## CALCUL D'UN POINT D'UNE NURBS



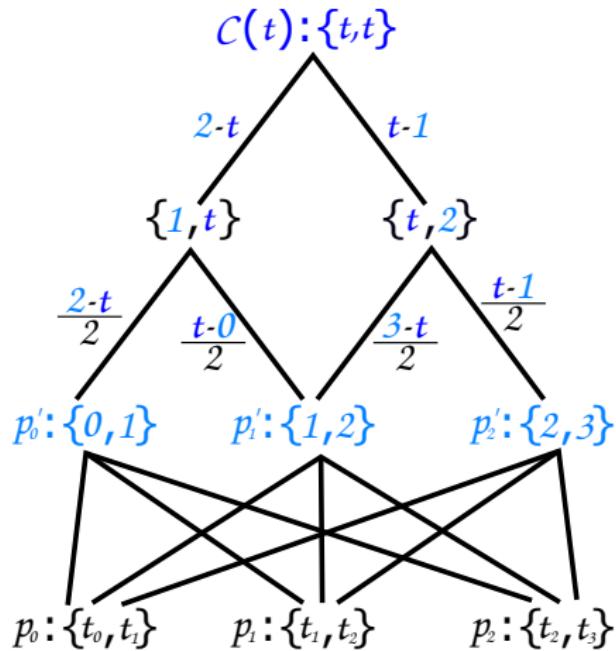
# NURBS - BLOSSOMING

## DÉCOUPAGE EN DEUX NURBS



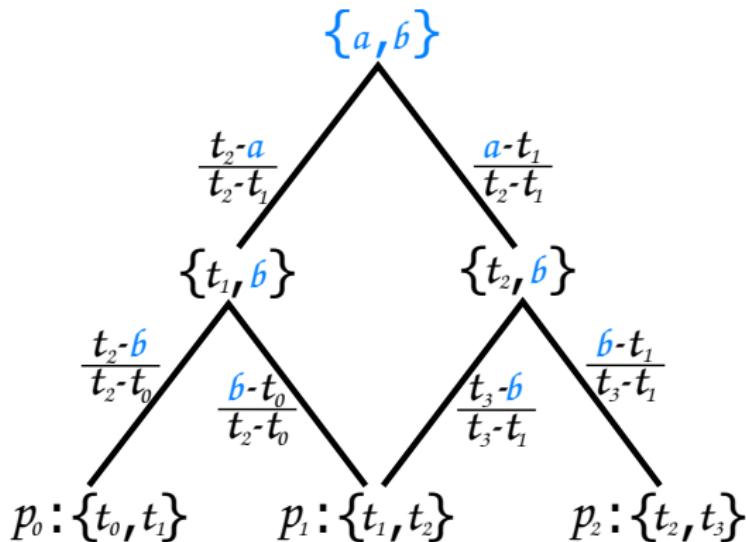
# NURBS - UNIFORMISATION

## PASSAGE PAR UN POLYGONE INTERMÉDIAIRE UNIFORME



# NURBS - UNIFORMISATION

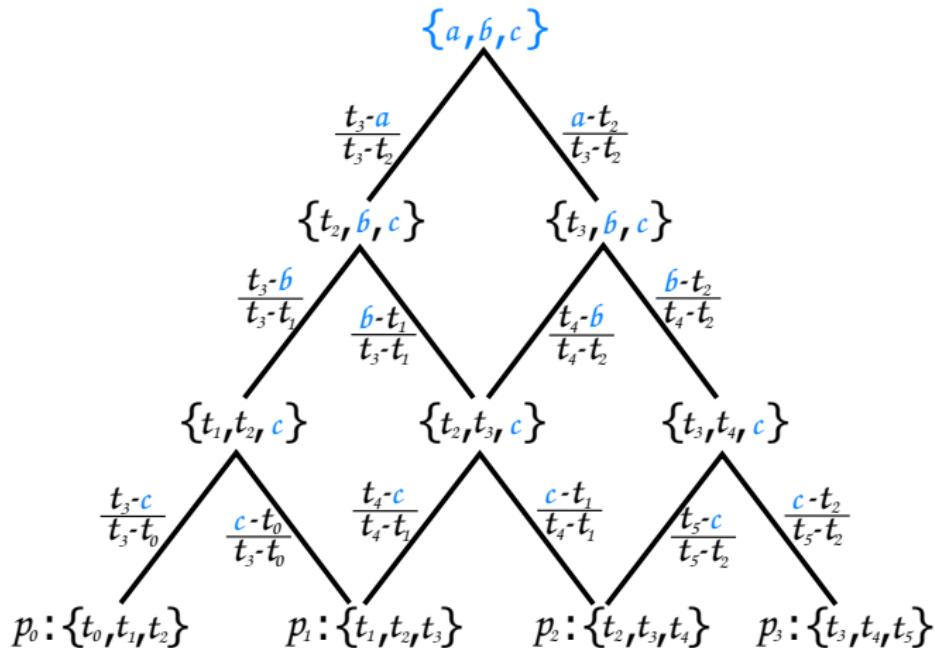
## CALCUL D'UNE ÉTIQUETTE QUADRATIQUE QUELCONQUE



$$\{a, b\} = \frac{t_2 - a}{t_2 - t_1} \frac{t_2 - b}{t_2 - t_0} p_0 + \left( \frac{t_2 - a}{t_2 - t_1} \frac{b - t_0}{t_2 - t_0} + \frac{a - t_1}{t_2 - t_1} \frac{t_3 - b}{t_3 - t_1} \right) p_1 + \frac{a - t_1}{t_2 - t_1} \frac{b - t_1}{t_3 - t_1} p_2$$

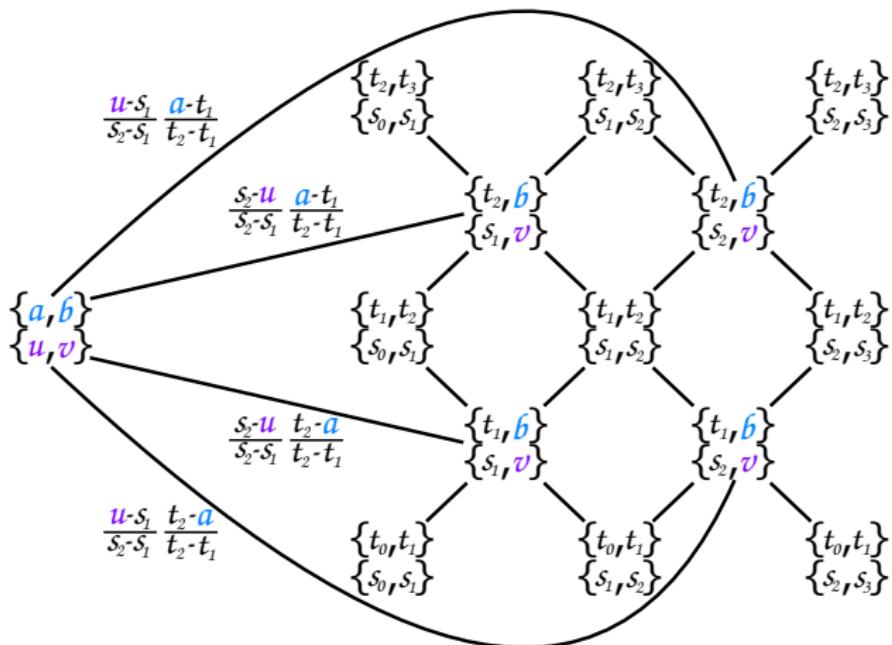
# NURBS - UNIFORMISATION

## CALCUL D'UNE ÉTIQUETTE CUBIQUE



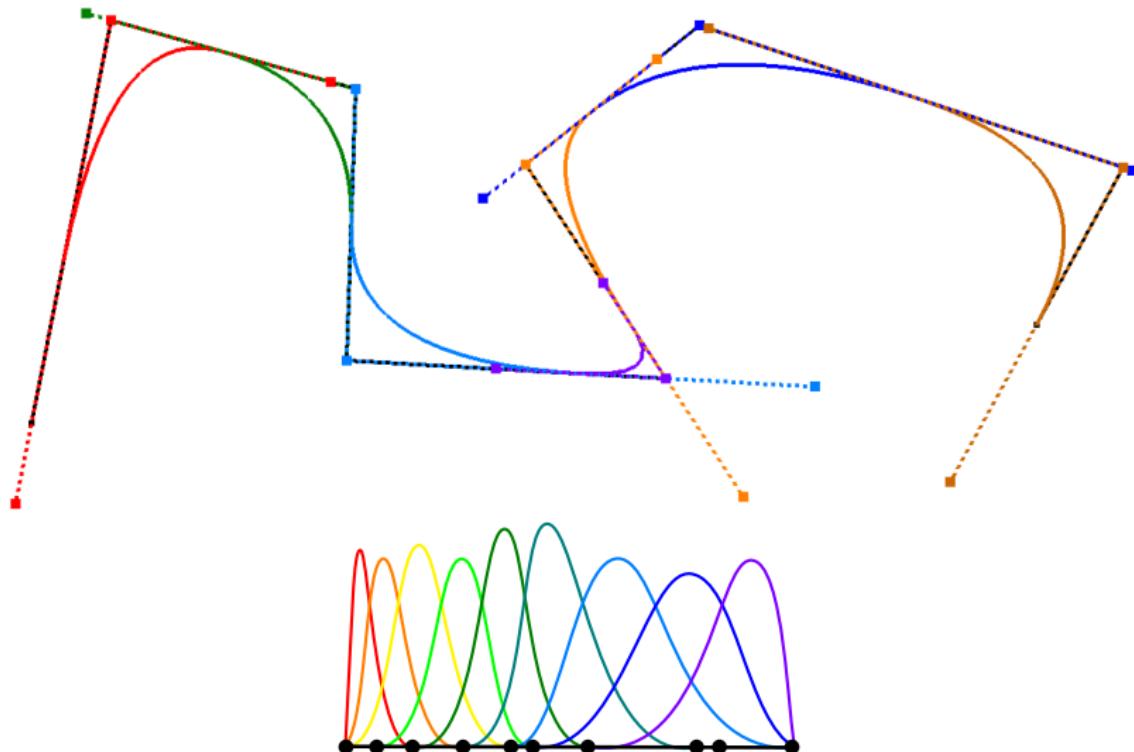
# NURBS - UNIFORMISATION

## CALCUL D'UNE ÉTIQUETTE DE SURFACE



# NURBS - UNIFORMISATION

## UNIFORMISATION D'UNE NURBS QUADRATIQUE



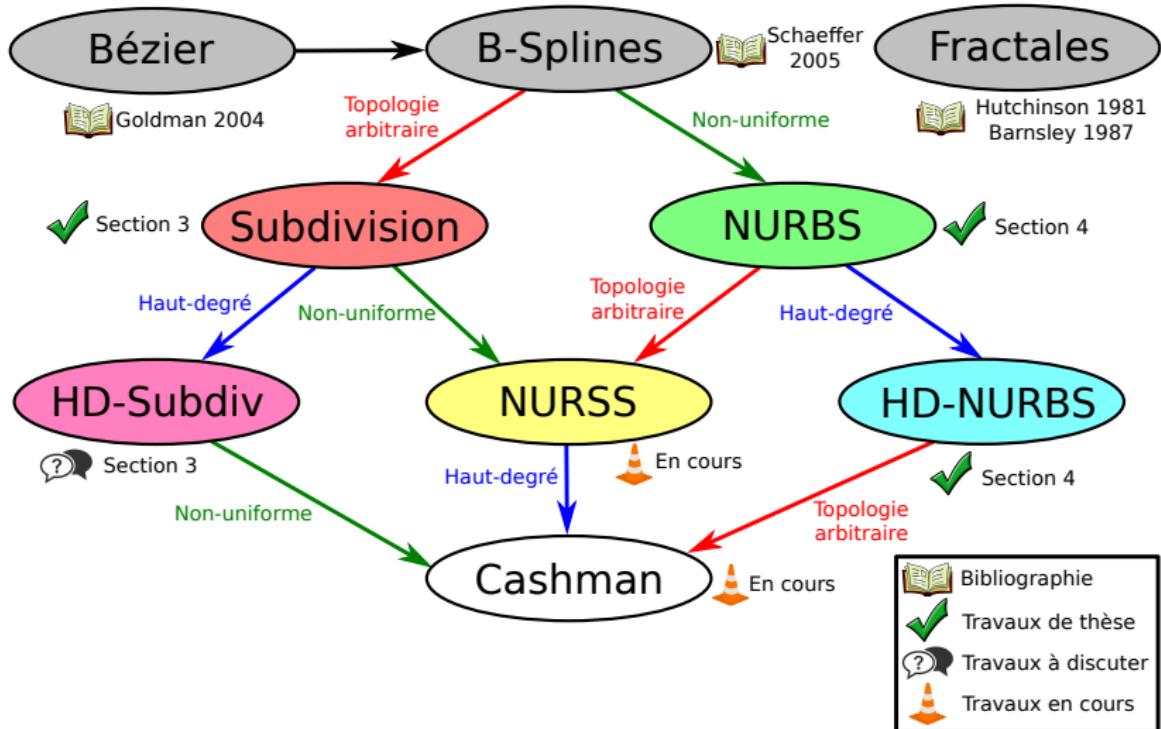
## Contributions

- Construction des automates CIFS de NURBS de courbes et de surfaces de degré quelconque
- Uniformisation des NURBS

## Reste à faire

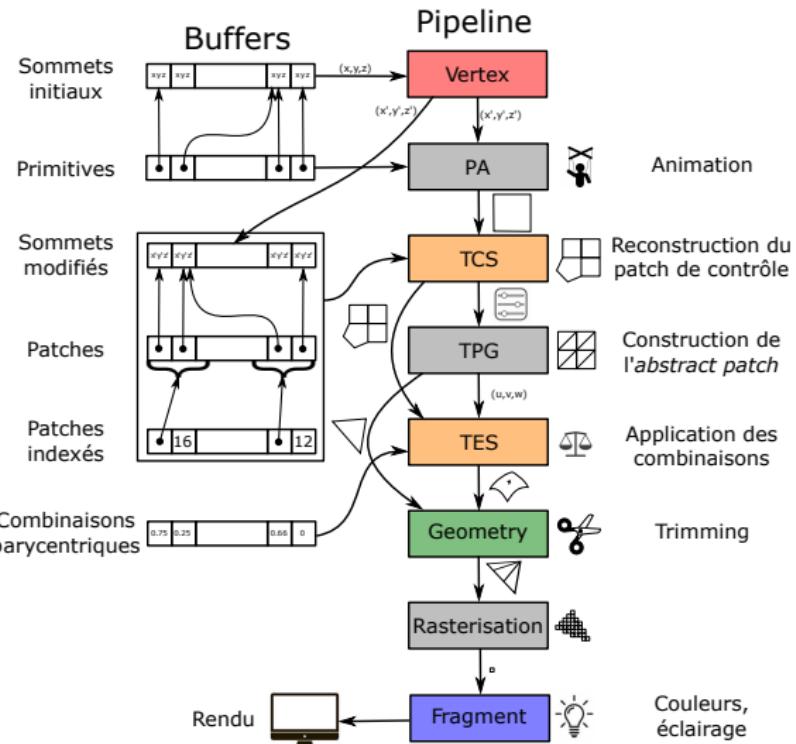
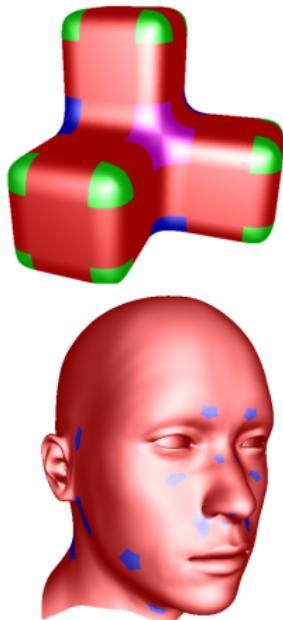
- Définition des outils CGAO indispensables dans le formalisme des CIFS
- Les schémas de subdivision rationnels non-uniformes

# APPLICATIONS



# APPLICATIONS

## SUBDIV



## MODITERE

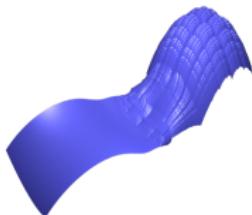
### Le logiciel

- Développé au sein du laboratoire
- Logiciel de CGAO basé sur les CIFS
- Utilise des fractales, des Bézier, et des B-Splines

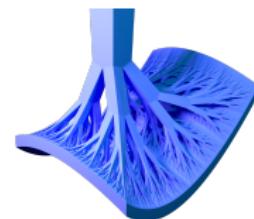
Mélange



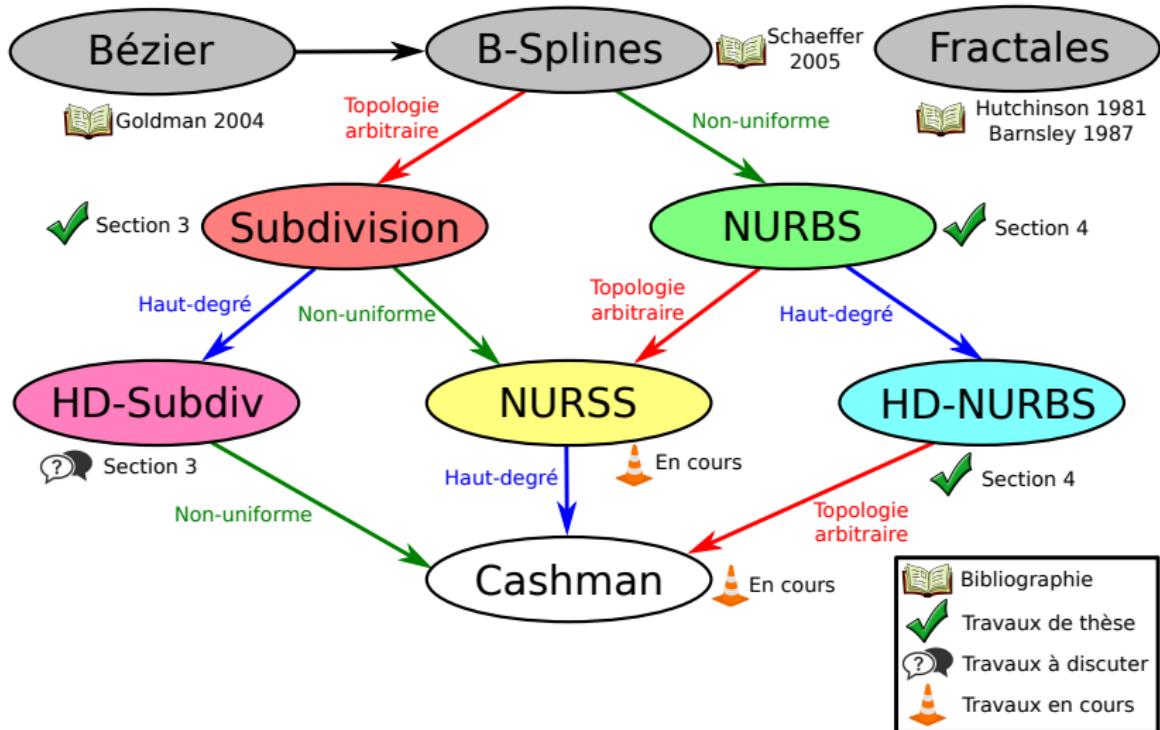
Raccord



Support



# CONCLUSION ET PERSPECTIVES



### RAPPEL DES CONTRIBUTIONS THÉORIQUES

#### Surfaces de subdivision

- Méthode générique de construction de l'automate CIFS d'un schéma de subdivision stationnaire et uniforme directement à partir des règles
- Application de cette méthode sur les schémas de subdivision approximants les plus courants

#### NURBS

- Construction des automates CIFS de NURBS de courbes et de surfaces de degré quelconque
- Uniformisation des NURBS

### TRAVAUX FUTURS

#### Surfaces de subdivision

- Les automates de haut-degré B-Splines uniformes
- Les schémas Box-Splines
- Les schémas non-stationnaires

#### NURBS

- Définition des outils CGAO indispensables dans le formalisme des CIFS
- Les schémas de subdivision rationnels non-uniformes

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

### Publications nationales

- GTMG 2017 : Discrétisation directe de la surface limite de Catmull-Clark par IFS
- JFIG 2017 : Calcul direct d'une tessellation de la surface limite pour les schémas de subdivision uniformes
- GTMG 2018 : Représentation des NURBS par IFS
- JFIG 2019 : Uniformisation de NURBS par *blossoming*

### Publications internationales

- WSCG 2018 : Barycentric Combinations Based Subdivision Shaders
- SMI 2019 : Representation of NURBS surfaces by CIFS
- En cours : NURBS uniformization by blossoming

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Merci de votre attention !