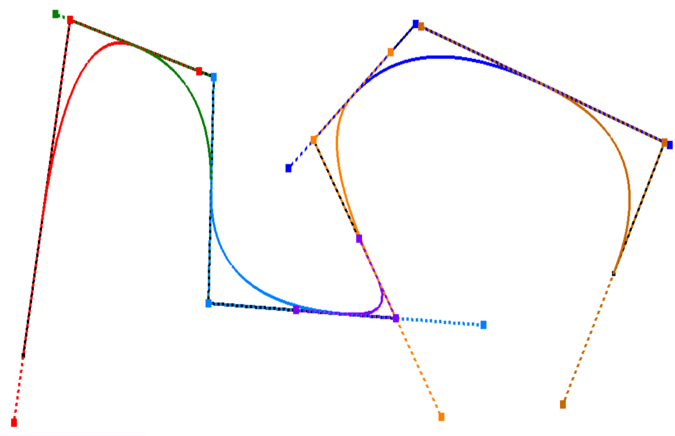
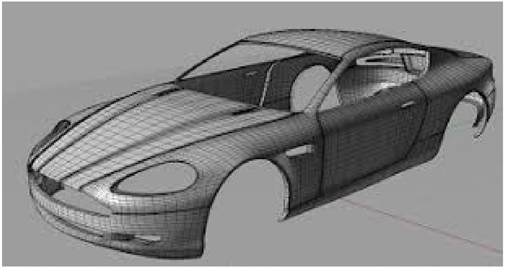
Uniformisation de NURBS par Blossoming



L. Morlet, C. Gentil, S. Lanquetin, et M. Neveu
Laboratoire d'Informatique de Bourgogne, Dijon
Mercredi 13 Novembre 2019

Introduction aux NURBS



- Courbes et surfaces construites par morceaux
- Modèle de représentation le plus utilisé en CGAO
- Possède une ”caisse à outils” indispensable
- Mais peut être problématique à afficher

RENDU EN TEMPS INTERACTIF DE NURBS

Méthodes d'optimisation

Il faut optimiser soit les structures de données, soit les calculs, soit les deux

- Kanai 2007 : rendu de NURBS
- Guthe 2005 : rendu de NURBS et de T-Splines

Méthodes de conversion

- Kumar et Manocha 1995 : Bézier rationnelles
- Kahlesz 2002 : approximation par Bézier non-rationnelles
- Concheiro 2014 : structure KS-Quads
- Aujourd'hui : B-Splines Uniformes

Définition et construction

Définition

Une B-Spline Rationelle Non-Uniforme de degré d composée de m morceaux est définie par :

- Un polygone de contrôle : $\mathbf{P} = \left[\; p_0 \;\; \dots \;\; p_{(d+m-1)} \;\right]$
- Un vecteur nodal : $\mathbf{T} = \left[\; t_0 \;\; \dots \;\; t_{(2d+m-2)} \;\right]$
- Un vecteur de masses : $\Omega = \left[\; \omega_0 \;\; \dots \;\; \omega_{(d+m-1)} \;\right]$

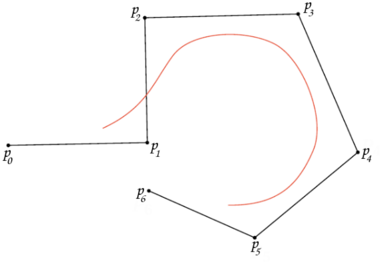
Construction

Plusieurs méthodes permettent de construire les NURBS :

- Par la formule récursive de Cox-De-Boor (1972)
- Par le blossoming de Lyle Ramshaw (1987)

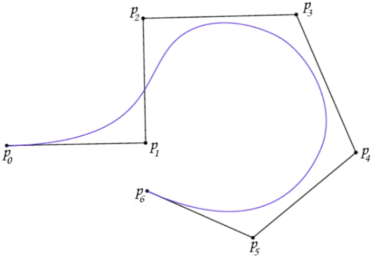
NON-UNIFORMITÉ

B-Spline uniforme



$\mathbf{T} = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$

B-Spline non-uniforme



$\mathbf{T} = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4]$

Rationalité

(Polygone de points de contrôle **P**) $\cup$ (Vecteur de masses Ω)
$\Leftrightarrow$ Polygone de points massiques de contrôle

Les points massiques

Soient deux points massiques $(A\,;\ \omega_A)$ et $(B\,;\ \omega_B)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda(A\,;\ \omega_A) = (A\,;\ \lambda\omega_A)$$

$$(A\,;\ \omega_A) + (B\,;\ \omega_B) = \left(\frac{\omega_A}{\omega_A+\omega_B}A + \frac{\omega_B}{\omega_A+\omega_B}B\,;\ (\omega_A+\omega_B)\right)$$

Une B-Spline rationelle est une B-Spline dont le polygone de contrôle est composé de points massiques

AFFICHAGE EN TEMPS INTERACTIF SUR CARTE GRAPHIQUE

Problème de la récursivité

- Sur GPU, les fonctions sont pensées comme *inline*
- Dans les anciennes architectures, la récursivité est impossible
- Dans les nouvelles, elle est "juste" fortement déconseillée

Les Shaders de Combinaisons Barycentriques

- Les influences des points de contrôle sur la courbe/surface sont pré-calculées
- Elles sont ensuite appliquées comme des combinaisons barycentriques
- Le pré-calcul n'est possible que si la courbe est uniforme

DÉFINITION (1/2)

La floraison d'une courbe de degré d est représentée par une **étiquette** de d **arguments** : $\{t_i \dots t_{i+d-1}\}$.

Symétrie :

L'ordre des arguments d'une étiquette n'a aucune importance :

$$\{\dots t_i \dots t_j \dots\} = \{\dots t_j \dots t_i \dots\}$$

Diagonalité :

Le point de paramètre t de la courbe limite correspond à une étiquette dont tous les arguments sont égaux à t

$$\mathcal{C}(t) = \{t \dots t\}$$

DÉFINITION (2/2)

Multi-affinité :

Une étiquette peut être définie comme une combinaison affine de deux autres si ces trois étiquettes ont tous leurs arguments identiques sauf un :

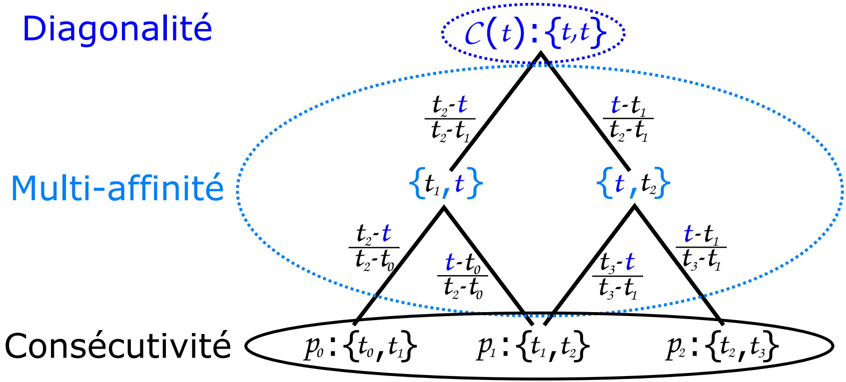
$$\{\dots t \dots\} = \frac{b-t}{b-a}\{\dots a \dots\} + \frac{t-a}{b-a}\{\dots b \dots\}$$

Consécutivité :

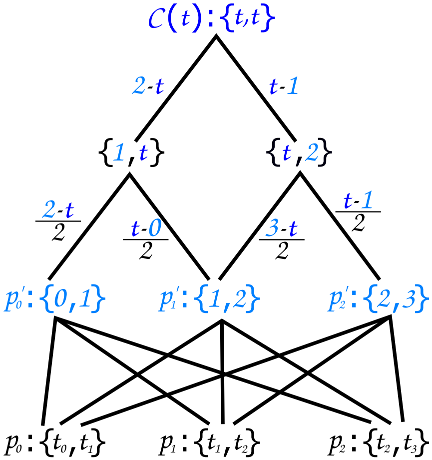
Une étiquette dont les valeurs des arguments correspondent aux valeurs de noeuds consécutifs du vecteur nodal correspond au point du polygone de contrôle :

$$p_i : \{t_i, t_{i+1} \dots t_{i+d-1}\}$$

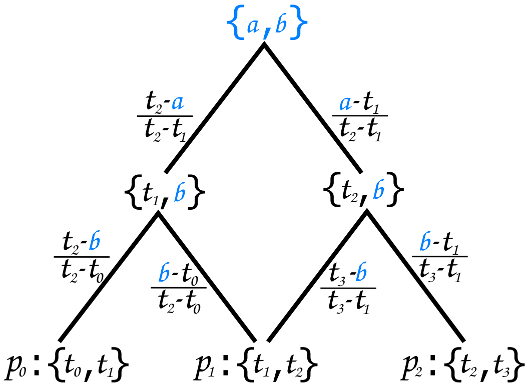
CALCUL D'UN POINT D'UNE NURBS PAR BLOSSOMING



PASSAGE PAR UN POLYGONE INTERMÉDIAIRE UNIFORME

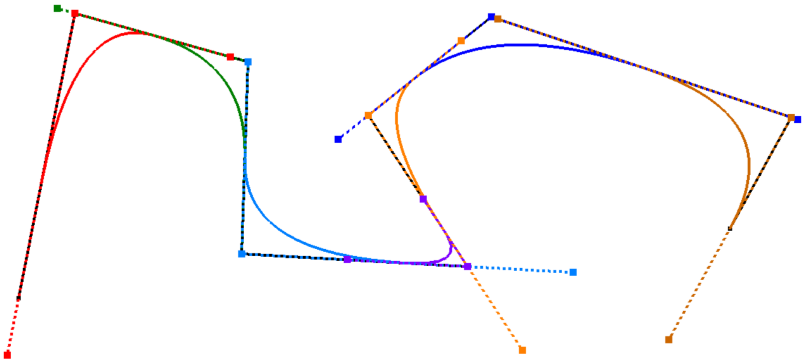


Calcul d'une étiquette quadratique quelconque

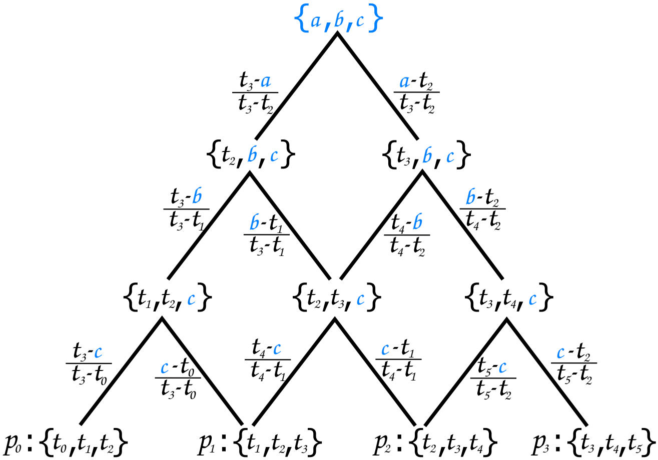


$$\{a, b\} = \frac{t_2 - a}{t_2 - t_1}\frac{t_2 - b}{t_2 - t_0} p_0 + \left(\frac{t_2 - a}{t_2 - t_1}\frac{b - t_0}{t_2 - t_0} + \frac{a - t_1}{t_2 - t_1}\frac{t_3 - b}{t_3 - t_1} \right) p_1 + \frac{a - t_1}{t_2 - t_1}\frac{b - t_1}{t_3 - t_1} p_2$$

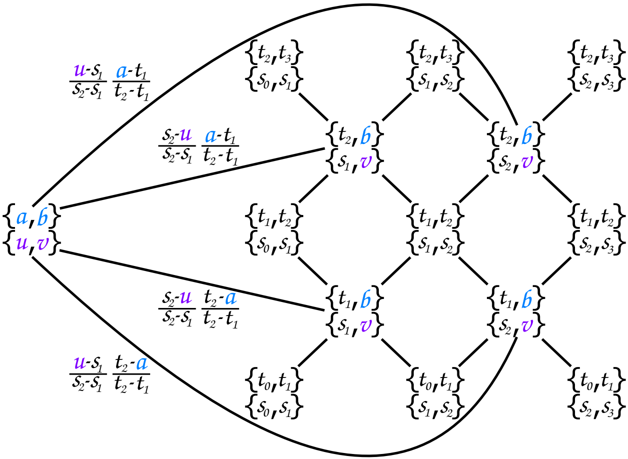
UNIFORMISATION D'UNE NURBS QUADRATIQUE



CALCUL D'UNE ÉTIQUETTE CUBIQUE



CALCUL D'UNE ÉTIQUETTE DE SURFACE



Résultats

- Chaque morceau de courbes/surfaces NURBS est uniformisable indépendamment des autres
- La courbe/surface totale est l'union de ces morceaux uniformes
- Il est donc possible d'afficher les NURBS avec des Shaders de Combinaisons Barycentriques

Travaux futurs

- Implémentation de la méthode de manière générique
- Implémentation des surfaces
- Tests de performance