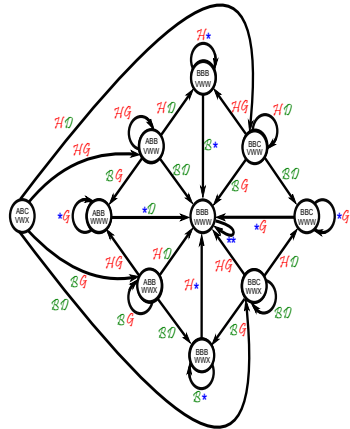
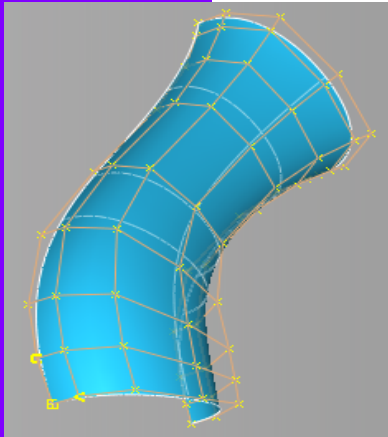


Représentation des NURBS par Systèmes Itérés de Fonctions



❶ Introduction aux IFS/CIFS

❷ NURBS quadratiques

❸ NURBS cubiques

❹ Généralisation

❺ Conclusion

LES SYSTÈMES ITÉRÉS DE FONCTIONS (IFS)

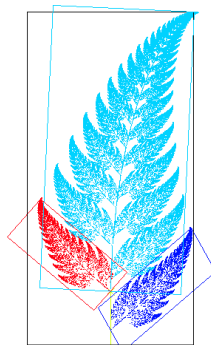
Historique

- 1981 : création par Hutchinson
- 1988 : développement par Barnsley

Définition

Ensemble de transformations contractantes $\{T_0 \dots T_n\}$ appliqué de manière itérative sur un compact.

Après une infinité d'itération, une structure autosimilaire est obtenue quelque soit le compact de départ

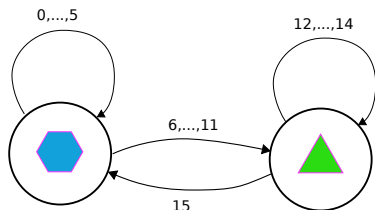
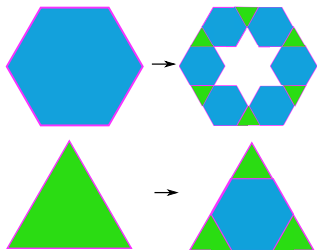


Fougère dite
"de Barnsley"
©Wikipédia

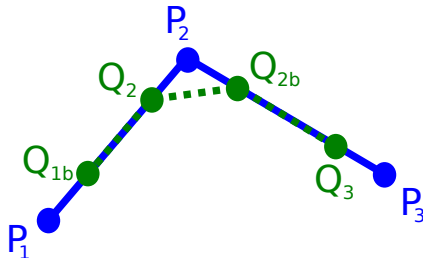
AUTOMATES CONTROLLED IFS

Les automates CIFS sont créés de la manière suivante :

- Chaque état de l'automate correspond à un attracteur
- Chaque transition représente une transformation du CIFS



EXEMPLE : L'ALGORITHME DE CHAIKIN

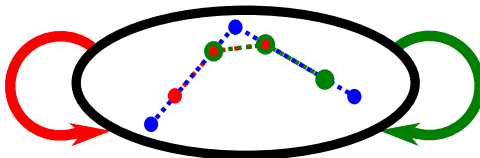


Soit une B-Spline quadratique uniforme définie par le polygone de contrôle $P = [P_1, P_2, P_3]$.

Elle est également définie par le polygone $Q = [Q_{1b}, Q_2, Q_{2b}, Q_3]$:

$$Q_i = \frac{1}{4}P_{i-1} + \frac{3}{4}P_i \quad \text{et} \quad Q_{ib} = \frac{3}{4}P_i + \frac{1}{4}P_{i+1}$$

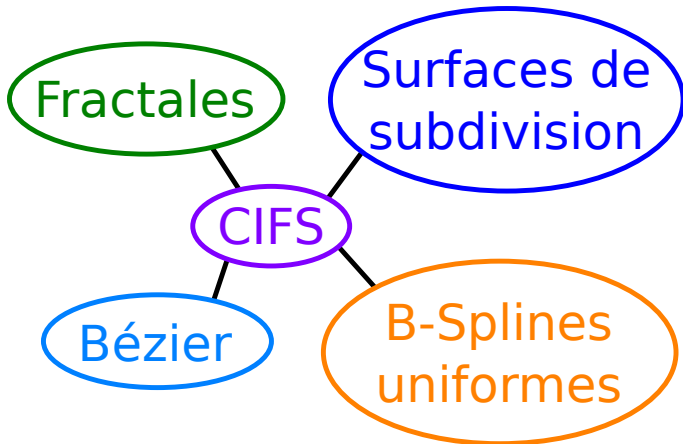
EXEMPLE : L'AUTOMATE CIFS DE CHAIKIN



$$\mathcal{G} : P = [P_1, P_2, P_3] \mapsto Q_{\mathcal{G}} = [Q_{1b}, Q_2, Q_{2b}]$$

$$\mathcal{D} : P = [P_1, P_2, P_3] \mapsto Q_{\mathcal{D}} = [Q_2, Q_{2b}, Q_3]$$

$$M_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad M_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



- Création de supports fractales arborescents (Gouaty 2012)
- Raccord entre des surfaces différentes (Podkorytov 2014)

① Introduction aux IFS/CIFS

② NURBS quadratiques

③ NURBS cubiques

④ Généralisation

⑤ Conclusion

NON UNIFORM RATIONAL B-SPLINES

Définition

Soit une courbe NURBS de degré d composée de m morceaux.

- Polygone de contrôle $P = [P_0 \dots P_{n-1}]$ où $n = m + d$
- Vecteur nodal $T = [t_0 \dots t_{v-1}]$ où $v = n + d - 1$
- Vecteur inter-noeuds $U = [u_0 \dots u_{v-2}]$ où $u_i = t_{i+1} - t_i$

Formule de Cox-De Boor

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i P_i N_i^d(t)}{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i N_i^d(t)} \quad \begin{cases} N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_i; t_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ N_i^d(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+d}-t_i} N_i^{d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1}-t}{t_{i+d+1}-t_{i+1}} N_{i+1}^{d-1}(t) \end{cases}$$

BLOSSOMING (RAMSHAW, 1987)

Sont définies les fonctions de floraisons $\mathcal{B}(t_i \dots t_j) = \{t_i \dots t_j\}$

Propriétés

Symétrie $\{\dots t_i \dots t_j \dots\} = \{\dots t_j \dots t_i \dots\}$

Diagonale $\mathcal{C}(t) = \{t \dots t\}$

Multi-affinité $\{\dots t \dots\} = \frac{b-t}{b-a} \{\dots a \dots\} + \frac{t-a}{b-a} \{\dots b \dots\}$

Consécutivité $P_i : \{t_i, t_{i+1} \dots t_{i+d-1}\}$

BLOSSOMING (RAMSHAW, 1987)

Sont définies les fonctions de floraisons $\mathcal{B}(t_i \dots t_j) = \{t_i \dots t_j\}$

Propriétés

Symétrie $\{\dots t_i \dots t_j \dots\} = \{\dots t_j \dots t_i \dots\}$

Diagonale $\mathcal{C}(t) = \{t \dots t\}$

Multi-affinité $\{\dots t \dots\} = \frac{b-t}{b-a} \{\dots a \dots\} + \frac{t-a}{b-a} \{\dots b \dots\}$

Consécutivité $P_i : \{t_i, t_{i+1} \dots t_{i+d-1}\}$

BLOSSOMING (RAMSHAW, 1987)

Sont définies les fonctions de floraisons $\mathcal{B}(t_i \dots t_j) = \{t_i \dots t_j\}$

Propriétés

Symétrie $\{\dots t_i \dots t_j \dots\} = \{\dots t_j \dots t_i \dots\}$

Diagonale $\mathcal{C}(t) = \{t \dots t\}$

Multi-affinité $\{\dots t \dots\} = \frac{b-t}{b-a} \{\dots a \dots\} + \frac{t-a}{b-a} \{\dots b \dots\}$

Consécutivité $P_i : \{t_i, t_{i+1} \dots t_{i+d-1}\}$

BLOSSOMING (RAMSHAW, 1987)

Sont définies les fonctions de floraisons $\mathcal{B}(t_i \dots t_j) = \{t_i \dots t_j\}$

Propriétés

Symétrie $\{\dots t_i \dots t_j \dots\} = \{\dots t_j \dots t_i \dots\}$

Diagonale $\mathcal{C}(t) = \{t \dots t\}$

Multi-affinité $\{\dots t \dots\} = \frac{b-t}{b-a} \{\dots a \dots\} + \frac{t-a}{b-a} \{\dots b \dots\}$

Consécutivité $P_i : \{t_i, t_{i+1} \dots t_{i+d-1}\}$

BLOSSOMING (RAMSHAW, 1987)

Sont définies les fonctions de floraisons $\mathcal{B}(t_i \dots t_j) = \{t_i \dots t_j\}$

Propriétés

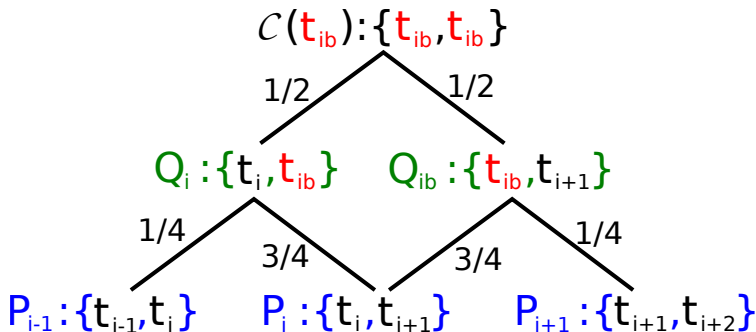
Symétrie $\{\dots t_i \dots t_j \dots\} = \{\dots t_j \dots t_i \dots\}$

Diagonale $\mathcal{C}(t) = \{t \dots t\}$

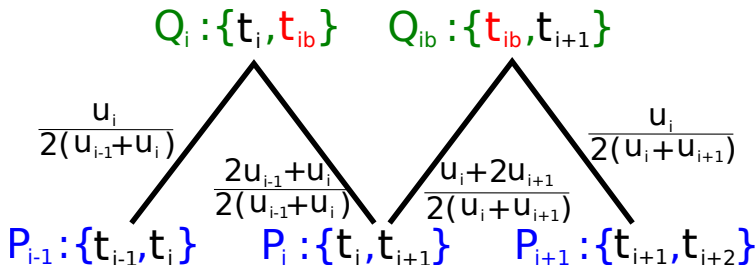
Multi-affinité $\{\dots t \dots\} = \frac{b-t}{b-a} \{\dots a \dots\} + \frac{t-a}{b-a} \{\dots b \dots\}$

Consécutivité $P_i : \{t_i, t_{i+1} \dots t_{i+d-1}\}$

CALCUL D'UN POINT D'UNE B-SPLINE QUADRATIQUE UNIFORME



INSERTION DE NOEUD AU MILIEU POUR UNE NURBS QUADRATIQUE



$$\begin{cases} Q_i &= \frac{u_i}{2(u_{i-1}+u_i)} P_{i-1} + \frac{2u_{i-1}+u_i}{2(u_{i-1}+u_i)} P_i \\ Q_{ib} &= \frac{u_i+2u_{i+1}}{2(u_i+u_{i+1})} P_i + \frac{u_i}{2(u_i+u_{i+1})} P_{i+1} \end{cases}$$

LES TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES NON-UNIFORMES

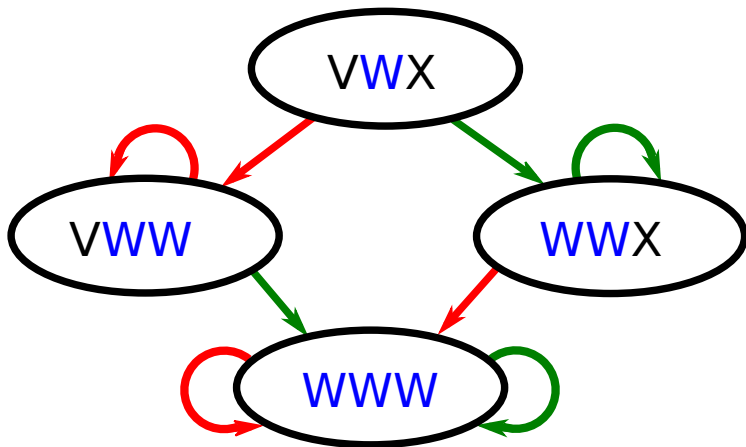
$$\mathcal{G} : \begin{cases} P = [P_1, P_2, P_3] \\ U = [u_1, u_2, u_3] \end{cases} \mapsto \begin{cases} Q_{\mathcal{G}} = [Q_{1b}, Q_2, Q_{2b}] \\ V_{\mathcal{G}} = [u_1, u_2, u_2] \end{cases}$$

$$\mathcal{D} : \begin{cases} P = [P_1, P_2, P_3] \\ U = [u_1, u_2, u_3] \end{cases} \mapsto \begin{cases} Q_{\mathcal{D}} = [Q_2, Q_{2b}, Q_3] \\ V_{\mathcal{D}} = [u_2, u_2, u_3] \end{cases}$$

$$M_{\mathcal{G}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} \frac{u_1+2u_2}{2(u_1+u_2)} & \frac{u_1}{2(u_1+u_2)} & 0 \\ \frac{u_2}{2(u_1+u_2)} & \frac{2u_1+u_2}{2(u_1+u_2)} & 0 \\ 0 & \frac{u_2+2u_3}{2(u_2+u_3)} & \frac{u_2}{2(u_2+u_3)} \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{D}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} \frac{u_2}{2(u_1+u_2)} & \frac{2u_1+u_2}{2(u_1+u_2)} & 0 \\ 0 & \frac{u_2+2u_3}{2(u_2+u_3)} & \frac{u_2}{2(u_2+u_3)} \\ 0 & \frac{u_3}{2(u_2+u_3)} & \frac{2u_2+u_3}{2(u_2+u_3)} \end{pmatrix}$$

AUTOMATE CIFS DE NURBS QUADRATIQUES



① Introduction aux IFS/CIFS

② NURBS quadratiques

③ NURBS cubiques

④ Généralisation

⑤ Conclusion

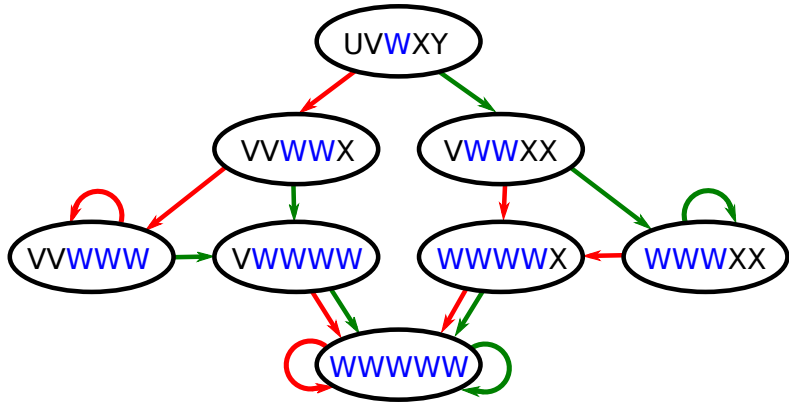
LES TRANSFORMATIONS CUBIQUES NON-UNIFORMES

Les NURBS de degré 3 sont définies au minimum par

- 4 points de contrôle ;
- 6 noeuds ;
- 5 inter-noeuds.

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \begin{cases} P = [P_0, P_1, P_2, P_3] \\ U = [u_0, u_1, u_2, u_3, u_4] \end{cases} &\mapsto \begin{cases} Q_{\mathcal{G}} = [Q_{1b}, Q_2, Q_{2b}, Q_3] \\ V_{\mathcal{G}} = [u_1, u_1, u_2, u_2, u_3] \end{cases} \\ \mathcal{D} : \begin{cases} P = [P_0, P_1, P_2, P_3] \\ U = [u_0, u_1, u_2, u_3, u_4] \end{cases} &\mapsto \begin{cases} Q_{\mathcal{D}} = [Q_2, Q_{2b}, Q_3, Q_{3b}] \\ V_{\mathcal{D}} = [u_1, u_2, u_2, u_3, u_3] \end{cases} \end{aligned}$$

AUTOMATE CIFS DE NURBS CUBIQUES



① Introduction aux IFS/CIFS

② NURBS quadratiques

③ NURBS cubiques

④ Généralisation

⑤ Conclusion

DÉGRÉ QUELCONQUE ET DÉDOUBLEMENT D'INTER-NOEUDS

degré 1 :	W	\mapsto	WW
degré 2 :	VWX	\mapsto	VVWWXX
degré 3 :	UVWXY	\mapsto	UUVVWWXXYY
degré 4 :	TUVWXYZ	\mapsto	TTUUVVWWXXYYZZ

États de l'automate

Pour une NURBS de degré d :

- Le vecteur inter-noeud est de longueur $(2d - 1)$
- Le nombre maximal de dédoublements est
 $n = \lceil (\log_2(2d - 1)) \rceil$
- Pour un nombre de dédoublements $i \in [0; n]$, le vecteur inter-noeud contient 2^i fois chaque inter-noeud
- L'inter-noeud central est toujours le même

DÉGRÉ QUELCONQUE ET DÉDOUBLEMENT D'INTER-NOEUDS

degré 1 :	W	\mapsto	WW
degré 2 :	VWX	\mapsto	VVWWXX
degré 3 :	UVWXY	\mapsto	UUUVVWWXXYY
degré 4 :	TUVWXYZ	\mapsto	TTUUVVWWXXYYZZ

États de l'automate

Pour une NURBS de degré d :

- Le vecteur inter-noeud est de longueur $(2d - 1)$
- Le nombre maximal de dédoublements est
 $n = \lceil (\log_2(2d - 1)) \rceil$
- Pour un nombre de dédoublements $i \in [0; n]$, le vecteur inter-noeud contient 2^i fois chaque inter-noeud
- L'inter-noeud central est toujours le même

DÉGRÉ QUELCONQUE ET DÉDOUBLEMENT D'INTER-NOEUDS

degré 1 :	W	\mapsto	WW
degré 2 :	VWX	\mapsto	VVWWXX
degré 3 :	UVWXY	\mapsto	UUVVWWXXYY
degré 4 :	TUVWXYZ	\mapsto	TTUUVVWWXXYYZZ

États de l'automate

Pour une NURBS de degré d :

- Le vecteur inter-noeud est de longueur $(2d - 1)$
- Le nombre maximal de dédoublements est
 $n = \lceil (\log_2(2d - 1)) \rceil$
- Pour un nombre de dédoublements $i \in [0; n]$, le vecteur inter-noeud contient 2^i fois chaque inter-noeud
- L'inter-noeud central est toujours le même

DÉGRÉ QUELCONQUE ET DÉDOUBLEMENT D'INTER-NOEUDS

degré 1 :	W	\mapsto	WW
degré 2 :	VWX	\mapsto	VVWWXX
degré 3 :	UVWXY	\mapsto	UUUVVWWXXYY
degré 4 :	TUVWXYZ	\mapsto	TTUUVVWWXXYYZZ

États de l'automate

Pour une NURBS de degré d :

- Le vecteur inter-noeud est de longueur $(2d - 1)$
- Le nombre maximal de dédoublements est
 $n = \lceil (\log_2(2d - 1)) \rceil$
- Pour un nombre de dédoublements $i \in [0; n]$, le vecteur inter-noeud contient 2^i fois chaque inter-noeud
- L'inter-noeud central est toujours le même

DÉGRÉ QUELCONQUE ET DÉDOUBLEMENT D'INTER-NOEUDS

degré 1 :	W	\mapsto	WW
degré 2 :	VWX	\mapsto	VVWWXX
degré 3 :	UVWXY	\mapsto	UUUVVWWXXYY
degré 4 :	TUVWXYZ	\mapsto	TTUUVVWWXXYYZZ

États de l'automate

Pour une NURBS de degré d :

- Le vecteur inter-noeud est de longueur $(2d - 1)$
- Le nombre maximal de dédoublements est
 $n = \lceil (\log_2(2d - 1)) \rceil$
- Pour un nombre de dédoublements $i \in [0; n]$, le vecteur inter-noeud contient 2^i fois chaque inter-noeud
- L'inter-noeud central est toujours le même

DÉGRÉ QUELCONQUE ET DÉDOUBLEMENT D'INTER-NOEUDS

degré 1 :	W	\mapsto	WW
degré 2 :	VWX	\mapsto	VVWWXX
degré 3 :	UVWXY	\mapsto	UUUVVWWXXYY
degré 4 :	TUVWXYZ	\mapsto	TTUUVVWWXXYYZZ

États de l'automate

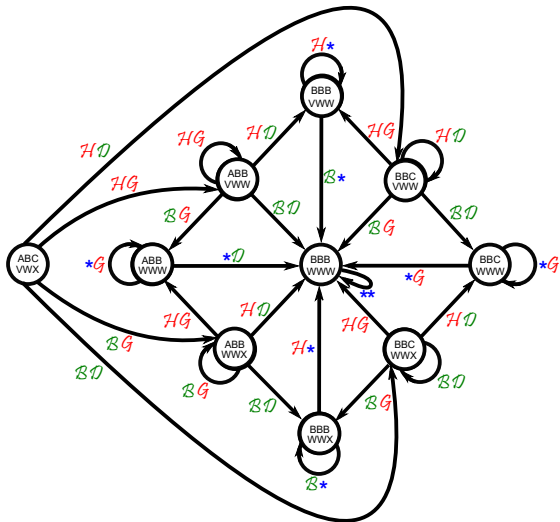
Pour une NURBS de degré d :

- Le vecteur inter-noeud est de longueur $(2d - 1)$
- Le nombre maximal de dédoublements est
 $n = \lceil (\log_2(2d - 1)) \rceil$
- Pour un nombre de dédoublements $i \in [0; n]$, le vecteur inter-noeud contient 2^i fois chaque inter-noeud
- L'inter-noeud central est toujours le même

GÉNÉRATION DE SURFACES PAR PRODUIT TENSORIEL

Soient les transformations :

- \mathcal{G} et \mathcal{D} sur
 $Hor = [A, B, C]$
- \mathcal{H} et \mathcal{B} sur
 $Ver = [V, W, X]$
- \star quelconque



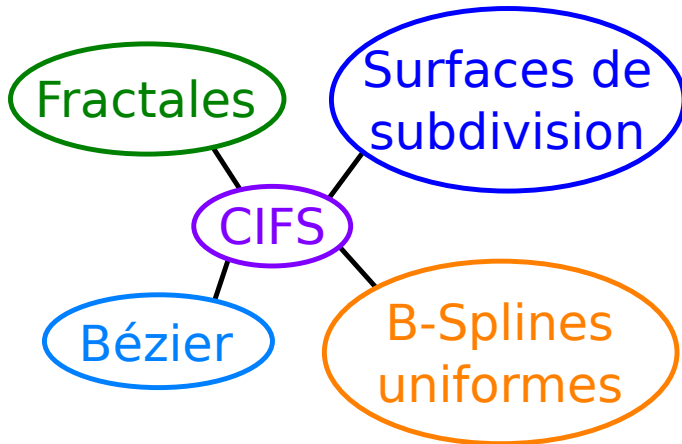
① Introduction aux IFS/CIFS

② NURBS quadratiques

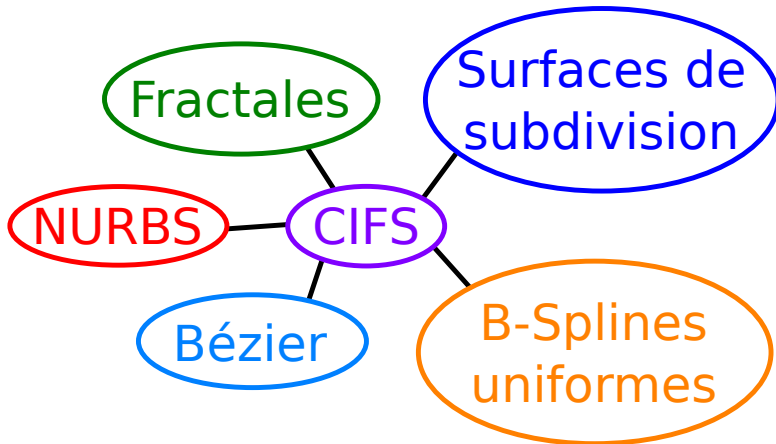
③ NURBS cubiques

④ Généralisation

⑤ Conclusion



- Création de supports fractales arborescents (Gouaty 2012)
- Raccord entre des surfaces différentes (Podkorytov 2014)



- Création de supports fractales arborescents (Gouaty 2012)
- Raccord entre des surfaces différentes (Podkorytov 2014)