

# Uniformisation de NURBS par *blossoming*

Lucas Morlet, Christian Gentil, Sandrine Lanquetin, et Marc Neveu  
Laboratoire d'Informatique de Bourgogne, Université de Bourgogne

---

## Résumé

*Les B-Splines Rationnelles Non-Uniformes (NURBS) sont une extension des B-Splines (rationnelles) uniformes et sont le modèle de représentation standard des courbes dans les applications de Conception Géométrique Assistée par Ordinateur (CGAO) à but de production industrielle. Lorsqu'il travaille sur un projet, l'utilisateur veut voir le résultat de ses modifications dès qu'il les effectue, il est donc important de pouvoir afficher la NURBS en temps interactif.*

*Dans cet article, une méthode exacte permettant de transformer une NURBS en une liste de B-Splines rationnelles uniformes est présentée. Cette méthode est basée sur la représentation des NURBS sous forme de floraison (*blossoming*). Une fois la NURBS uniformisée, il suffit de faire l'affichage de la liste des B-Splines rationnelles uniformes sur la carte graphique plutôt que directement celui de la NURBS qui est plus lent. La méthode est également extensible par produit-tensoriel aux surfaces.*

---

**Mots clés :** CGAO, NURBS, B-Splines uniformes

## 1. Introduction

La manière de représenter les courbes et les surfaces dans les logiciels de Conception Géométrique Assistée par Ordinateur (CGAO) a évolué au cours du temps : d'abord par des Splines, puis par des courbes de Bézier, et finalement par des B-Splines Rationnelles Non-Uniformes (NURBS) [Cox72] qui sont encore à ce jour le standard utilisé. Les NURBS étant utilisées pour la création de modèle 3D dans les logiciels de CGAO, il est important d'être capable de les afficher en temps interactif pour ne pas restreindre l'utilisateur qui fait la modélisation. Sauf que la méthode habituelle pour le calcul d'une NURBS est une formule récursive dont le nombre d'appels augmente en fonction du degré de la courbe à afficher, ce qui peut poser des problèmes de performance.

Une solution classique pour pallier ces problèmes de performance, est d'utiliser la puissance de calcul de la carte graphique. Mais simplement envoyer les NURBS sur la carte graphique ne suffit pas à régler les problèmes de performances pour le rendu interactif car la récursion n'est pas vraiment adaptée au calcul parallèle. Parmi les travaux de recherche proposant de faire du rendu interactif de NURBS, deux grandes catégories de solutions se distinguent :

### Optimisation sur carte graphique

Ces méthodes consistent à envoyer toutes les informations concernant la NURBS à la carte gra-

phique et de trouver un moyen de faire le rendu en temps interactif directement sur la carte, en optimisant soit les structures de données, soit les calculs. Certains comme Kanai [Kan07] proposent des méthodes spécifiques pour des cas particuliers comme les non-rationnelles alors que d'autres comme Guthe *et al.* [GBK05a, GBK05b] proposent des méthodes qui gèrent également d'autres types de surfaces comme les T-Splines.

### Conversion de la NURBS

Les autres travaux font une étape préliminaire qui convertit la surface NURBS en une surface de nature différente qui est ensuite affichée en temps réel sur la carte graphique. Kumar et Manocha [KM95] transforment exactement la surface NURBS en une surface de Bézier rationnelle et Kahlesz *et al.* [KBK02] approximent la surface par une surface de Bézier non-rationnelle. Les surfaces de Bézier peuvent être affichées en temps réel mais la conversion est trop longue pour que les modifications du modèle par l'utilisateur puissent être affichées en temps interactif. Concheiro *et al.* [CAPD14] proposent une structure appelée KS-Quad qui permet d'afficher les modifications en temps interactif.

A notre connaissance, aucune recherche antérieure ne cherche à convertir les NURBS en B-Splines rationnelles uniformes dont elles sont pourtant une extension. Cette uniformisation est l'objectif principal de cet article.

## 2. Organisation de l'article

Pour commencer les B-Splines uniformes et les NURBS sont présentées en [Section 3](#). Il est également montré que les B-Splines rationnelles peuvent-être représentées comme des B-Splines non-rationnelles mais dont le polygone de contrôle est composé de points massiques. Dans la [Section 4](#), une méthode alternative de calcul des NURBS, appelée *blossoming*, est exposée. La représentation de cette autre méthode permet de facilement modifier la NURBS tout en conservant la même courbe limite. La méthode d'uniformisation des NURBS est présentée en [Section 5](#). Les cas quadratique et cubique sont donnés en exemple, puis il est montré comment généraliser ces résultats aux degrés quelconques. Le produit-tensoriel du *blossoming* est ensuite utilisé en [Section 6](#) pour étendre l'uniformisation de courbe à celle de surface. Enfin, une implémentation est proposée en [Section 7](#).

## 3. Les NURBS

Les B-Splines, qu'elles soient uniformes/rationnelles ou non, sont des courbes définies par morceaux. La forme de la courbe est donnée par un ensemble de **points de contrôle** appelé **polygone de contrôle**. Chaque morceau de la courbe est contrôlé par un sous-ensemble du polygone de contrôle ce qui permet de l'éditer localement (*i.e.* sans modifier la totalité de la forme de la courbe). Les B-Splines uniformes [\[Sch46\]](#) sont uniquement définies par un polygone de contrôle alors qu'un **vecteur nodal** est ajouté pour définir les B-Splines non-uniformes [\[Cox72\]](#). Pour les B-Splines rationnelles, une **masse** est attribuée à chaque point pour augmenter ou diminuer son influence sur la courbe.

### 3.1. Les B-Splines uniformes

Une B-Spline uniforme [\[Sch46\]](#) de degré  $d$ , composée de  $m$  morceaux est une courbe unique définie par un polygone de contrôle  $\mathbf{P}$  composé de  $(d+m)$  points de contrôle ( $\mathbf{P} = [p_0 \dots p_{(d+m-1)}]$ ) où chaque ensemble de  $(d+1)$  points consécutifs du polygone définit un morceau de la courbe. La formule récursive pour calculer une B-Spline uniforme de degré  $d$  est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t) &= \sum_{i=0}^{d+1} \left( N_i^d p_i \right) \\ N_j^{d>0}(t) &= \frac{(t-j)N_j^{(d-1)}(t)}{d} \\ &\quad + \frac{(j+d+1-t)N_{(j+1)}^{(d-1)}(t)}{d} \\ N_j^0(t) &= 1 \text{ si } t \in [j; (j+1)] \text{ et } 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

### 3.2. Les B-Splines Non-Uniformes

Les B-Splines Non-Uniformes (NUBS), composées de  $m$  morceaux et de degré  $d$  sont définies par un polygone de contrôle  $\mathbf{P}$  de  $(d+m)$  points et d'un vecteur

nodal  $\mathbf{T}$  composé de  $(2d+m-1)$  noeuds qui agissent sur la forme de la courbe :

$$\begin{cases} \mathbf{P} &= [p_0 \dots p_{(d+m-1)}] \\ \mathbf{T} &= [t_0 \dots t_{(2d+m-2)}] \end{cases}$$

Elles sont classiquement calculées par la formule de Cox-De-Boor [\[Cox72\]](#) :

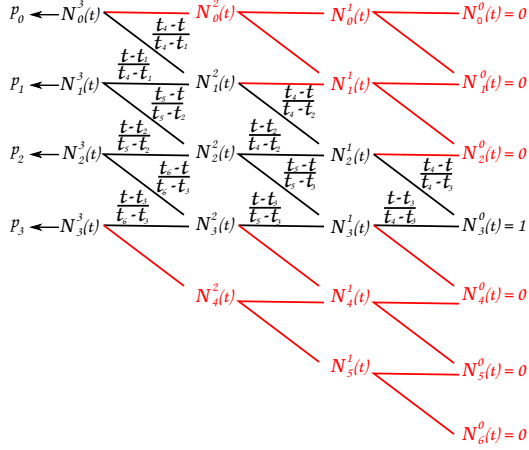
$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t) &= \sum_{j=0}^{d+m-1} \left( N_j^d(t) p_j \right) \text{ avec} \\ N_j^{d>0}(t) &= \frac{t-t_j}{t_{(j+d)}-t_j} N_j^{(d-1)}(t) \\ &\quad + \frac{t_{(j+d+1)}-t}{t_{(j+d+1)}-t_{(j+1)}} N_{(j+1)}^{(d-1)}(t) \\ N_j^0(t) &= 1 \text{ si } t \in [t_j; t_{j+1}] \text{ et } 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Une fonction de base  $N_j^d(t)$  est dite **nulle** si elle est égale à 0 quelle que soit la valeur de  $t \in [t_j; t_{j+1}]$  et **active** sinon. En reprenant la formule de Cox-De-Boor, il apparaît qu'une seule fonction de base de degré 0 peut être active à la fois. Chaque fonction de degré  $d$  activant deux fonctions de degré  $(d+1)$  (avec des redondances) il y a toujours  $(d+1)$  fonctions de base de degré  $d$  actives. Ainsi pour une NUBS de degré  $d$ , il y a  $(d+1)$  fonctions de degré  $d$  actives, et donc  $(d+1)$  points de contrôle actifs. Lors du calcul de ces fonctions,  $2d$  noeuds du vecteur nodal interviennent. Le **support** d'un morceau de NUBS correspond à l'ensemble des points de contrôle et des noeuds actifs lors du calcul d'un morceau de courbe (en d'autres termes, l'ensemble des éléments nécessaires et suffisants au calcul de ce morceau de courbe). Lors du passage d'un morceau de NUBS vers le morceau suivant, le premier point de contrôle et le premier noeud sont désactivés et un nouveau point et un nouveau noeud sont activés. L'ensemble des supports des morceaux d'une NUBS est appelé **support de la NUBS**. Le premier et le dernier noeuds pour lesquels la NUBS est définie sont appelés les **bornes** de la NUBS. Classiquement, les fonctions de base et les coefficients de la formule de Cox-De-Boor sont représentés sous la forme d'un arbre pour une visualisation plus simple de la récurrence du calcul (voir [Figure 1](#)).

### 3.3. Les B-Splines Rationnelles

Pour ajouter le concept de **rationalité** aux B-Splines uniformes et aux NUBS, la formule de Cox-De-Boor est modifiée pour tenir compte des masses  $\omega_i$  des points [\[Cox72\]](#) :

$$\mathcal{C}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{d+m-1} (\omega_j N_j^d(t) p_j)}{\sum_{j=0}^{d+m-1} (\omega_j N_j^d(t))}$$



**Figure 1 :** Arbre de la construction par récurrence des fonctions de base des B-Splines cubiques non-uniformes. Les fonctions  $N_j^d$  sont en noir lorsqu'elles sont actives et en rouge si elles sont nulles. Dans le cas présent,  $t \in [t_3, t_4[$  et donc la seule fonction de degré 0 active est  $N_3^0$ . Les coefficients associés aux branches noires sont ceux de la formule de récurrence. L'arbre noir qui apparaît à l'inverse de l'arbre global est celui du blossoming qui est présenté dans la section suivante.

Les B-Splines Rationnelles peuvent également être représentées comme des B-Splines non-rationnelles mais dont les points de contrôle sont des points massiques. Les **points massiques** sont une généralisation de la notion de barycentre [FJ98]. L'ensemble de la théorie des points massiques n'est pas nécessaire dans le cas présent mais seulement l'addition qui est une opération commutative et associative.

**Définition :** Soient  $A$  et  $B$  deux points auxquels sont associées les masses respectives  $\omega_A$  et  $\omega_B$ . Les points massiques sont notés  $(A ; \omega_A)$  et  $(B ; \omega_B)$ . La somme de ces deux points massiques est :

$$\left( \frac{\omega_A}{\omega_A + \omega_B} A + \frac{\omega_B}{\omega_A + \omega_B} B ; (\omega_A + \omega_B) \right)$$

En transformant chaque point du polygone de contrôle  $p_i$  en point massique de masse  $\omega_i$ , et en appliquant la formule des NUBS, le résultat est le même qu'en appliquant la formule de NURBS. En d'autres termes, la formulation des NURBS sur des points de contrôle classiques est équivalente à celle des NUBS sur des points massiques.

#### 4. Blossoming

Les NUBS sont habituellement représentées par la formule de Cox-De-Boor [Cox72] mais dans cet article, c'est la formulation *blossoming* (floraison) de Lyle Ramshaw qui est privilégiée [Ram87]. Le *blossoming* permet de facilement agir sur le vecteur nodal tout en conservant la courbe définie, ce qui va permettre l'uniformisation de la NURBS.

**Définition :** La floraison d'une courbe de degré  $d$  est représentée par une **étiquette** de  $d$  arguments :  $\{t_i \dots t_{i+d-1}\}$ . Le blossoming est défini par trois propriétés de base : **symétrie**, **diagonalité**, et **multi-affinité** auxquelles est ajoutée une nouvelle déduite des trois précédentes : la **consécutivité**.

##### Symétrie :

L'ordre des arguments d'une étiquette n'a aucune incidence sur le blossoming auquel elle correspond. Ceci permet de simplifier la lecture en écrivant systématiquement les arguments en ordre croissant :

$$\{\dots t_i \dots t_j \dots\} = \{\dots t_j \dots t_i \dots\} \quad (j < i)$$

##### Diagonalité :

Tout point de la courbe limite (dans notre cas de la NUBS) correspond à une étiquette dont tous les arguments ont la même valeur. Cette valeur est le paramètre de la courbe qui correspond à ce point :

$$C(t) = \{t \dots t\}$$

##### Multi-affinité :

Chaque étiquette peut être définie comme une combinaison affine de deux autres étiquettes si ces trois étiquettes ont tous leur arguments, sauf un, identiques. Les poids de la combinaison affine des étiquettes correspond aux poids de la combinaison affine de ces arguments qui diffèrent :

$$\{\dots t \dots\} = \frac{b-t}{b-a} \{\dots a \dots\} + \frac{t-a}{b-a} \{\dots b \dots\}$$

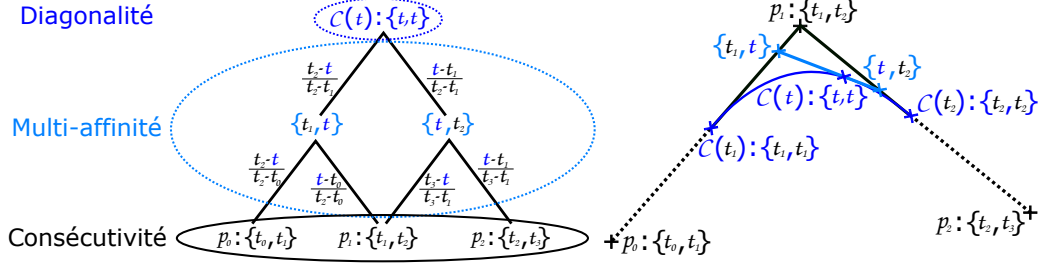
##### Consécutivité :

Une étiquette dont les valeurs des arguments correspondent aux valeurs de noeuds consécutifs du vecteur nodal correspond au point du polygone de contrôle dont l'indice est le même que celui du premier argument :

$$p_i : \{t_i, t_{i+1} \dots t_{i+d-1}\}$$

Tout point de la courbe  $C(t)$  peut être exprimé comme une combinaison barycentrique des points du polygone de contrôle  $\mathbf{P}$  en appliquant directement les propriétés du *blossoming* :

- Premièrement la propriété de diagonalité est utilisée pour construire l'étiquette de  $C(t) : \{t \dots t\}$
- Ensuite la propriété de multi-affinité est appliquée sur l'étiquette-mère pour la "découper" en deux étiquettes-filles. Pour cela, un des arguments  $t$  de la mère est découpé en deux nouveaux arguments  $t_i$  qui est le plus grand noeud du vecteur nodal inférieur à tous les arguments de l'étiquette-mère et  $t_j$  qui est le plus petit noeud supérieur à tous les arguments de l'étiquette-mère. La propriété de multi-affinité permet d'exprimer l'étiquette-mère en fonction des étiquettes-filles.



**Figure 2 :** Exemple de blossoming sur une B-Spline quadratique non-uniforme. Le point  $C(t)$ ,  $t \in [t_1; t_2]$  est exprimé en fonction des points de contrôle  $p_0$ ,  $p_1$ , et  $p_2$ . A gauche l'arbre blossoming permettant le calcul des coefficients et à droite la représentation dans le domaine géométrique. Sur la figure de droite les différents points intervenant dans la construction de  $C(t)$  sont représentés par des croix : en noir les points de contrôle de départ, en cyan les points intermédiaires, et en bleu le point  $C(t)$ . Les segments noirs pleins représentent les deux arêtes sur lesquelles les croix cyans se déplacent lorsque  $t$  varie entre  $t_1$  et  $t_2$ . La courbe bleue est la B-Spline  $C(t)$  obtenue en faisant varier  $t \in [t_1; t_2]$  et les croix bleues représentent les extrémités de la courbe ( $t = t_1$  et  $t = t_2$ ).

- L'étape précédente est répétée sur chaque étiquette qui possède encore au moins un argument  $t$ .
- Lorsque l'algorithme se termine, il ne reste plus que des étiquettes respectant la propriété de consécuité et donc des points de contrôle.

Cet algorithme est le plus souvent représenté sous la forme d'un arbre (d'où le nom de floraison) où la **racine** est l'étiquette du point de la courbe, les **noeuds** des étiquettes intermédiaires, et les **feuilles** les étiquettes des points de contrôle (voir Figure 2). Un **coefficient** est associé à chaque **branche** qui relie une étiquette-mère à une étiquette-fille : ce coefficient est l'influence de la fille sur la mère. L'influence d'un **chemin**, qui relie la racine à l'une des feuilles, sur le point de la courbe calculé est le produit des coefficients associés aux branches traversées par le chemin. L'influence d'un point de contrôle sur le point de la courbe est la somme de l'influence des chemins qui se terminent sur la feuille correspondante.

## 5. Uniformisation du vecteur nodal

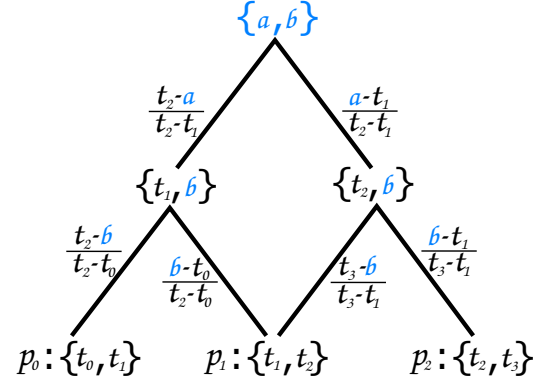
L'idée derrière cette stratégie est d'utiliser le *blossoming* pour créer des étiquettes uniformes. Le *blossoming* est basé sur une notion d'étiquettes qui peuvent être exprimées en fonction d'autres étiquettes. Les points de contrôle ne sont qu'un cas particulier de ces étiquettes. La question est la suivante : est-il possible d'exprimer n'importe quelle étiquette en fonction du polygone de contrôle et par conséquent de trouver un polygone de contrôle qui définit une B-Spline uniforme correspondant à une NUBS quelconque ?

En commençant par les cas quadratique et cubique puis en généralisant au degré quelconque, il est prouvé qu'une étiquette d'arguments quelconques est toujours exprimable en fonction du polygone de contrôle. Si une étiquette quelconque peut être calculée, les étiquettes uniformes peuvent l'être aussi et par consé-

quent un polygone de contrôle uniforme décrivant la même courbe est constructible.

### 5.1. Étiquettes quadratiques

Soit une étiquette quadratique quelconque  $\{a, b\}$  et les étiquettes des points de contrôle  $p_0 : \{t_0, t_1\}$ ,  $p_1 : \{t_1, t_2\}$ , et  $p_2 : \{t_2, t_3\}$ . Le *blossoming* permettant l'expression de  $\{a, b\}$  en fonction des points de contrôle est donné Figure 3.



**Figure 3 :** Blossoming de l'uniformisation d'une NUBS quadratique.

Le résultat obtenu est le suivant :

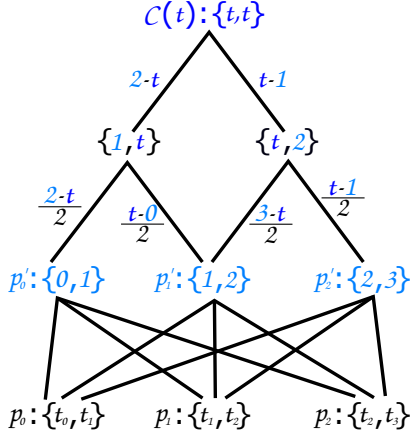
$$\begin{aligned} \{a, b\} &= \frac{t_2 - a}{t_2 - t_1} \frac{t_2 - b}{t_2 - t_0} p_0 \\ &+ \left( \frac{t_2 - a}{t_2 - t_1} \frac{b - t_0}{t_2 - t_0} + \frac{a - t_1}{t_2 - t_1} \frac{t_3 - b}{t_3 - t_1} \right) p_1 \\ &+ \frac{a - t_1}{t_2 - t_1} \frac{b - t_1}{t_3 - t_1} p_2 \end{aligned}$$

Il est donc possible d'exprimer les étiquettes uniformes  $p'_0 = \{0, 1\}$ ,  $p'_1 = \{1, 2\}$ , et  $p'_2 = \{2, 3\}$  correspondant au vecteur uniforme  $\mathbf{T} = [0, 1, 2, 3]$  en fonction du polygone de contrôle original.

Tout point de la nouvelle B-Spline uniforme  $\mathcal{C}'(t)$  est calculé grâce aux coefficients uniformes :

$$\mathcal{C}'(t) = \frac{(2-t)^2}{2} p'_0 + \frac{-2t^2 + 6t - 3}{2} p'_1 + \frac{(t-1)^2}{2} p'_2$$

Il faut maintenant vérifier que la B-Spline uniforme  $\mathcal{C}'(t)$  est bien la même courbe que la NUBS  $\mathcal{C}(t)$ . Autrement dit, il faut prouver que le *blossoming* en Figure 4 ne modifie pas la courbe. Cette démonstration est disponible dans l'Annexe A.



**Figure 4 :** Blossoming exprimant un point de la NUBS en fonction des points de contrôle en passant par un polygone de contrôle intermédiaire uniforme. La ligne du bas est le polygone de contrôle de la NUBS et la ligne cyan est le nouveau polygone de contrôle uniforme. La NUBS  $\mathcal{C}(t)$  repose à la fois sur le polygone original avec des coefficients non-uniformes et sur le nouveau polygone avec des coefficients uniformes.

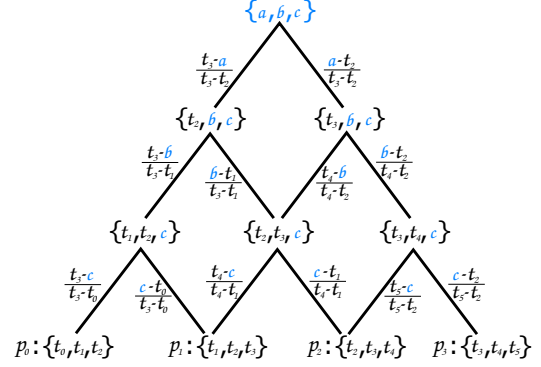
*N.B.* : les nouveaux points ne sont dans l'enveloppe convexe des anciens que dans le cas où  $t_1 \leq a \leq b \leq t_2$ , sinon il y a apparition de coefficients négatifs dans le calcul. La présence de coefficients négatifs n'a pas de conséquence sur la construction du *blossoming* hormis la sortie de cette enveloppe convexe (au même titre qu'une combinaison barycentrique à coefficient négatif).

## 5.2. Étiquettes cubiques

De la même manière que les NUBS quadratiques, les étiquettes cubiques quelconques peuvent être exprimées en fonction du polygone de contrôle (voir Figure 5). Il est donc possible d'uniformiser n'importe quelle NUBS cubique à un seul morceau.

## 5.3. Étiquettes de degré quelconque

A partir des degrés 2 et 3, il est facile d'imaginer la généralisation au degré quelconque. Comme l'étiquette composée de  $d$  arguments identiques  $\{t \dots t\}$  est calculable par un *blossoming* de  $(d+1)$  lignes, les étiquettes quelconques  $\{a \dots z\}$  le sont également.



**Figure 5 :** Expression d'une étiquette cubique quelconque en fonction du polygone de contrôle par blossoming.

*N.B.* : les bornes sont conservées (i.e.  $t$  varie de  $t_{(d-1)}$  à  $t_d$  à la fois pour la NUBS  $\mathcal{C}$  et pour la B-Spline uniforme correspondante  $\mathcal{C}'$ ). Du point de vue du *blossoming*, cela se traduit par la réflexion suivante : les branches peuvent être réorganisées de manière quelconque sans modifier la courbe obtenue tant que la racine et les feuilles sont inchangées.

La conservation des bornes implique une étape supplémentaire de standardisation des B-Splines uniformes. En effet, dans la formule des B-Splines uniformes, un morceau de courbe est défini dans l'intervalle  $[i; (i+1)]$  et non dans l'intervalle  $[t_i; t_{(i+1)}]$ . Pour corriger ce problème, il suffit d'aligner systématiquement  $t_i$  sur  $(d-1)$  et  $t_{(i+1)}$  sur  $d$  par la formule suivante avant de procéder à l'uniformisation :

$$\forall j \in \{(i-d+1) \dots (i+d)\}, \\ t_j \leftarrow \frac{t_j - t_i}{t_{(i+1)} - t_i} + (d-1)$$

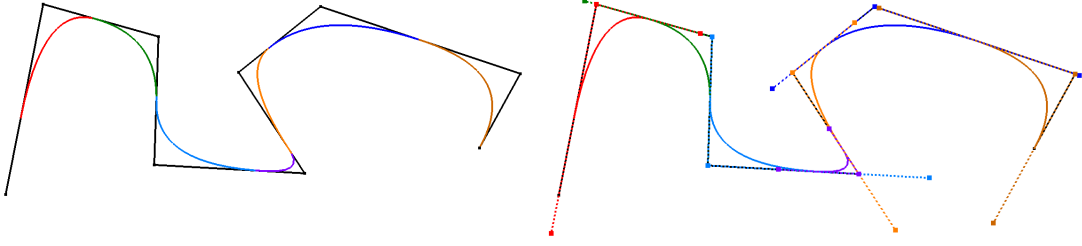
Le changement de bornes ne modifie pas la courbe car les mises à l'échelle et les translations du vecteur nodal n'ont pas d'influence sur le résultat du calcul de la formule de Cox-De-Boor qui est basée sur les ratios entre les intervalles consécutifs.

*N.B.* : l'étape de standardisation implique que dans l'uniformisation d'une NUBS composée de plusieurs morceaux, chaque morceau doit être uniformisé indépendamment des autres, ce qui mène à la construction d'autant de polygones de contrôle uniformes que de morceaux.

## 5.4. Résumé de la méthode

- Les différents morceaux de la NUBS sont séparés en autant de sous-polygones de contrôle et de sous-vecteurs nodaux.
- Chaque sous-vecteur nodal est standardisé.
- Pour chaque morceau de NURBS les  $(d+1)$  étiquettes uniformes  $p'_0 : \{0 \dots (d-1)\} \dots p'_d \{d \dots (2d-1)\}$  sont calculées par *blossoming*.





**Figure 6 :** Uniformisation d'une NUBS quadratique à sept morceaux. À gauche, une NUBS quadratique dont le vecteur nodal est  $\mathbf{T} = [0, 0.6, 1.5, 2.6, 3.7, 4.1, 5.5, 7.8, 10]$ . Le polygone de contrôle est en noir et chaque morceau de la courbe limite est affiché avec une couleur différente. À droite, la même courbe mais où chaque morceau est uniforme. Le polygone de contrôle de chaque morceau est de la même couleur que le morceau qu'il décrit. Le fait que le point de contrôle central de chaque polygone uniforme est exactement celui du polygone original n'est qu'un cas particulier dû au degré 2, il n'est pas valable pour les degrés plus élevés.

- Ces étiquettes uniformes permettent de définir les points de contrôle d'un polygone uniforme en fonction du polygone de contrôle et du vecteur nodal de la NURBS.
- Chacun de ces polygones de contrôle uniformes permet la construction d'une B-Spline uniforme qui correspond exactement à un morceau de la NURBS à calculer.

Un exemple de résultat est donné Figure 6.

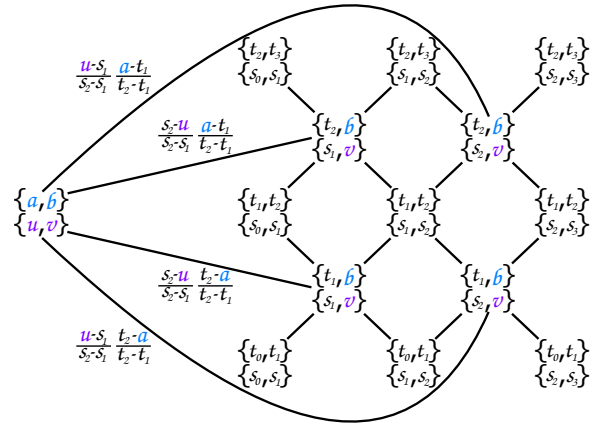
## 6. Uniformisation de surfaces

Une surface NUBS tensorielle possède une **grille de contrôle** et deux vecteurs nodaux (un pour chaque courbe) qui peuvent correspondre à des NUBS de degrés différents :  $d$  et  $d'$ . Les points de contrôle sont organisés sur une grille de taille  $(d+1) \times (d'+1)$  comme dans la construction classique d'une surface tensorielle à partir de deux NUBS. Ces points de contrôle sont représentés en *blossoming* par une **étiquette-double** dont chaque partie est indépendante de l'autre et n'agit que sur un seul des vecteurs nodaux. Ainsi, en découpant les deux parties d'une étiquette-double en même temps, quatre étiquettes-doubles sont créées. Les coefficients obtenus sont les produit des coefficients du découpage de chaque partie. Un exemple est donné pour une surface NUBS tensorielle bi-quadratique en Figure 7.

Comme visible dans la Figure 7, n'importe quelle étiquette-double peut être exprimée en fonction des points de contrôle. Il est donc possible de trouver une grille de contrôle dont la surface B-Spline tensorielle bi-quadratique correspond exactement à un morceau de surface NUBS tensorielle bi-quadratique. D'une manière plus générale, toute surface NUBS tensorielle peut être uniformisée avec une grille de contrôle pour chaque morceau de surface.

## 7. Implémentation

L'implémentation de la méthode d'uniformisation est évidente car elle suit simplement les grandes étapes données lors de la présentation de la méthode.



**Figure 7 :** Expression d'une étiquette-double biquadratique quelconque par blossoming. Seuls les coefficients du premier découpage sont indiqués pour des raisons de lisibilité.

### 7.1. Découpage en patches

Soit une surface NURBS de degré  $d \times d'$  composée de  $(m \times n)$  morceaux. La grille de contrôle de la NURBS, composée de  $(m+d) \times (n+d')$  points de contrôle, peut être découpée en  $(m \times n)$  sous-grilles de  $(d+1) \times (d'+1)$  points de contrôle. De même, il est possible d'extraire de chaque vecteur nodal les  $2d$  (respectivement  $2d'$ ) sous-vecteurs qui sont associés à chaque sous-grille. Un **patch** est composé d'une sous-grille de contrôle et des deux sous-vecteurs nodaux associés qui sont les informations nécessaires et suffisantes pour calculer un morceau de la surface NURBS. Le patch  $\mathcal{P}(i, j)$  est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{P}(i, j) = \begin{cases} \mathbf{P} &= [p_{i,j} \dots p_{(i+d), (j+d')}] \\ \mathbf{T} &= [t_i \dots t_{(i+2d-1)}] \\ \mathbf{T}' &= [t'_j \dots t'_{(j+2d'-1)}] \end{cases}$$

Une fois les patches construits, chacun est traité indépendamment des autres.

## 7.2. Uniformisation des patches

Chaque patch est ensuite standardisé pour que l'intervalle central de chaque vecteur nodal soit aligné sur l'intervalle  $((d-1); d]$  (respectivement  $((d'-1); d']$ ). Ensuite, le patch est uniformisé en exprimant l'étiquette-double quelconque en fonction des  $(d+1) \times (d'+1)$  points de la grille de contrôle. A partir de cette étiquette quelconque, toutes les étiquettes uniformes sont calculées et donc les nouveaux points de contrôle d'un morceau de surface B-Spline rationnelle uniforme. Chaque patch uniforme est ensuite envoyé à la carte graphique pour l'affichage.

## 7.3. Rendu de B-Splines rationnelles uniformes sur carte graphique

Chaque patch uniforme reçu par la carte graphique est affiché par un *shader* qui permet l'affichage en temps réel de B-Spline uniforme. Le choix du niveau de détails et le calcul de la tessellation sont effectués dans les *Tessellation Shaders*. Comme le morceau de surface est calculé de la même manière quelque soit le patch en cours de rendu, il est possible d'utiliser les *Barycentric Combinations Based Subdivision Shaders* [MNLG18] pour pré-calculer la tessellation puis l'appliquer sur chaque patch.

## 7.4. Edition en temps interactif

Comme pour les méthodes basées sur la conversion en carreau de Bézier, l'affichage est en temps réel mais lors de la modification du maillage de contrôle ou des vecteurs nodaux par l'utilisateur, il est nécessaire de recalculer les patches correspondant aux morceaux de surfaces modifiés. Si un point de contrôle est déplacé, il faut uniformiser à nouveau les  $(d+1) \times (d'+1)$  patches non-uniformes qui contiennent le point. Si un noeud est modifié, c'est les  $2d \times 2d'$  patches non-uniformes qui sont influencés par le noeud qui sont à re-uniformiser. En restreignant la zone à recalculer et en utilisant des techniques de mémorisation pour ne pas calculer deux fois la même étiquette intermédiaire, l'édition est en temps interactif pour des surfaces NURBS de taille, de niveau de tessellation, et de degré raisonnables.

## 8. Conclusion

Dans cet article est présenté une méthode permettant de transformer une surface NURBS en un ensemble de surfaces B-Splines uniformes rationnelles. Les surfaces uniformes étant plus rapide à calculer que les surfaces non-uniformes, le temps de rendu est considérablement amélioré pour les surfaces fixes. En cas d'édition de la surface par l'utilisateur, seule une zone de la surface NURBS est re-uniformisée pour lui permettre de voir les modifications effectuées en temps interactif.

## Références

- [CAPD14] CONCHEIRO R., AMOR M., PADRÓN E. J., DOGGETT M. : Interactive rendering of NURBS surfaces. *Computer-Aided Design*. Vol. 56 (2014), 34 – 44.
- [Cox72] COX M. G. : The numerical evaluation of B-Splines. *IMA Journal of Applied Mathematics*. Vol. 10, Num. 2 (1972), 134–149.
- [FJ98] FIOROT J.-C., JEANNIN P. : Une nouvelle construction du polygone massique de contrôle d'une courbe spline rationnelle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*. Vol. 326, Num. 8 (1998), 1015 – 1019.
- [GBK05a] GUTHE M., BALÁZS A., KLEIN R. : Gpu-based trimming and tessellation of nurbs and t-spline surfaces. In *ACM SIGGRAPH 2005 Papers* (New York, NY, USA, 2005), SIGGRAPH '05, ACM, pp. 1016–1023.
- [GBK05b] GUTHE M., BALÁZS A., KLEIN R. : Gpu-based trimming and tessellation of nurbs and t-spline surfaces. *ACM Trans. Graph.* Vol. 24, Num. 3 (juillet 2005), 1016–1023.
- [Kan07] KANAI T. : Fragment-based evaluation of non-uniform b-spline surfaces on gpus. *Computer-aided Design - CAD*. Vol. 4 (01 2007).
- [KBK02] KAHLESZ F., BALÁZS A., KLEIN R. : Multiresolution rendering by sewing trimmed NURBS surfaces. In *Proceedings of the Seventh ACM Symposium on Solid Modeling and Applications* (New York, NY, USA, 2002), SMA '02, ACM, pp. 281–288.
- [KM95] KUMAR S., MANOCHA D. : Efficient rendering of trimmed NURBS surfaces. *Computer-Aided Design*. Vol. 27, Num. 7 (1995), 509 – 521. Display and visualisation.
- [MNLG18] MORLET L., NEVEU M., LANQUETIN S., GENTIL C. : Barycentric Combinations Based Subdivision Shaders. In *Journal of WSCG* (Plzen, Czech Republic, mai 2018), vol. 25.
- [Ram87] RAMSHAW L. : *Blossoming : A connect-the-dots approach to splines*. Digital Equipment Corporation Palo Alto, 1987.
- [Sch46] SCHOENBERG I. J. : Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions : Part A - On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae. *Quarterly of Applied Mathematics*. Vol. 4, Num. 1 (1946), 45–99.

## Appendix A: Démonstration de l'uniformisation des NURBS quadratiques

Soit une NURBS quadratique  $\mathcal{C}$  dont le polygone de contrôle est  $\mathbf{P} = [p_0, p_1, p_2]$  et dont le vecteur nodal est  $\mathbf{T} = [t_0, t_1, t_2, t_3]$ . Soit une B-Spline rationnelle uniforme  $\mathcal{C}'$  définie par le polygone de contrôle  $\mathbf{P}' = [p'_0, p'_1, p'_2]$ . Les positions des points de contrôle de  $\mathcal{C}'$  sont définies en fonction de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{T}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} p'_0 : \{0, 1\} &= \frac{t_2 - 0}{t_2 - t_1} \frac{t_2 - 1}{t_2 - t_0} p_0 + \left( \frac{t_2 - 0}{t_2 - t_1} \frac{1 - t_0}{t_2 - t_0} + \frac{0 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{t_3 - 1}{t_3 - t_1} \right) p_1 + \frac{0 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{1 - t_1}{t_3 - t_1} p_2 \\ p'_1 : \{1, 2\} &= \frac{t_2 - 1}{t_2 - t_1} \frac{t_2 - 2}{t_2 - t_0} p_0 + \left( \frac{t_2 - 1}{t_2 - t_1} \frac{2 - t_0}{t_2 - t_0} + \frac{1 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{t_3 - 2}{t_3 - t_1} \right) p_1 + \frac{1 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{2 - t_1}{t_3 - t_1} p_2 \\ p'_2 : \{2, 3\} &= \frac{t_2 - 2}{t_2 - t_1} \frac{t_2 - 3}{t_2 - t_0} p_0 + \left( \frac{t_2 - 2}{t_2 - t_1} \frac{3 - t_0}{t_2 - t_0} + \frac{2 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{t_3 - 3}{t_3 - t_1} \right) p_1 + \frac{2 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{3 - t_1}{t_3 - t_1} p_2 \end{aligned}$$

Pour prouver que  $\mathcal{C}'$  est la même courbe que  $\mathcal{C}$ , il faut prouver que, quel que soit  $t \in [t_1; t_2]$ , les influences  $\mathcal{I}(p_i)$  des points de  $\mathbf{P}$  sur le point de la B-Spline rationnelle uniforme  $\mathcal{C}'(t)$  sont bien les mêmes que celles sur le point de la NURBS  $\mathcal{C}(t)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(p_0) &= \frac{(2-t)^2}{2} \frac{t_2 - 0}{t_2 - t_1} \frac{t_2 - 1}{t_2 - t_0} + \frac{-2t^2 + 6t - 3}{2} \frac{t_2 - 1}{t_2 - t_1} \frac{t_2 - 2}{t_2 - t_0} + \frac{(t-1)^2}{2} \frac{t_2 - 2}{t_2 - t_1} \frac{t_2 - 3}{t_2 - t_0} \\ 2(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)\mathcal{I}(p_0) &= [t_2^2 t^2 - 4t_2^2 t + 4t_2^2 - t_2 t^2 + 4t_2 t - 4t_2] \\ &\quad + [-2t_2^2 t^2 + 6t_2^2 t - 3t_2^2 + 6t_2 t^2 - 18t_2 t + 9t_2 - 4t^2 + 12t - 6] \\ &\quad + [t_2^2 t^2 - 2t_2^2 t + t_2^2 - 5t_2 t^2 + 10t_2 t - 5t_2 + 6t^2 - 12t + 6] \\ &= t_2^2 t^2 (1 - 2 + 1) + t_2^2 t (-4 + 6 - 2) + t_2^2 (4 - 3 + 1) + t_2 t^2 (-1 + 6 - 5) \\ &\quad + t_2 t (4 - 18 + 10) + t_2 (-4 + 9 - 5) + t^2 (-4 + 6) + t (12 - 12) + (-6 + 6) \\ &= 2t_2^2 - 4t_2 t + 2t^2 \\ &= 2(t_2 - t)^2 \\ \mathcal{I}(p_0) &= \frac{(t_2 - t)^2}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)} \\ &= N_0^2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(p_2) &= \frac{(2-t)^2}{2} \frac{0 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{1 - t_1}{t_3 - t_1} + \frac{-2t^2 + 6t - 3}{2} \frac{1 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{2 - t_1}{t_3 - t_1} + \frac{(t-1)^2}{2} \frac{2 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{3 - t_1}{t_3 - t_1} \\ 2(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)\mathcal{I}(p_2) &= [t_1^2 t^2 - 4t_1^2 t + 4t_1^2 - t_1 t^2 + 4t_1 t - 4t_1] \\ &\quad + [-2t_1^2 t^2 + 6t_1^2 t - 3t_1^2 + 6t_1 t^2 - 18t_1 t + 9t_1 - 4t^2 + 12t - 6] \\ &\quad + [t_1^2 t^2 - 2t_1^2 t + t_1^2 - 5t_1 t^2 + 10t_1 t - 5t_1 + 6t^2 - 12t + 6] \\ &= t_1^2 t^2 (1 - 2 + 1) + t_1^2 t (-4 + 6 - 2) + t_1^2 (4 - 3 + 1) + t_1 t^2 (-1 + 6 - 5) \\ &\quad + t_1 t (4 - 18 + 10) + t_1 (-4 + 9 - 5) + t^2 (-4 + 6) + t (12 - 12) + (-6 + 6) \\ &= 2t_1^2 - 4t_1 t + 2t^2 \\ &= 2(t - t_1)^2 \\ \mathcal{I}(p_2) &= \frac{(t - t_1)^2}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)} \\ &= N_2^2(t) \end{aligned}$$

Le calcul de  $\mathcal{I}(p_1)$  est conséquent mais peut être découpé en deux parties indépendantes  $\mathcal{I}'(p_1)$  et  $\mathcal{I}''(p_1)$  :



$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}'(p_1) &= \frac{(2-t)^2}{2} \frac{t_2-0}{t_2-t_1} \frac{1-t_0}{t_2-t_0} + \frac{-2t^2+6t-3}{2} \frac{t_2-1}{t_2-t_1} \frac{2-t_0}{t_2-t_0} + \frac{(t-1)^2}{2} \frac{t_2-2}{t_2-t_1} \frac{3-t_0}{t_2-t_0} \\
 2(t_2-t_1)(t_2-t_0)\mathcal{I}'(p_1) &= [-t_0t_2t^2 + 4t_0t_2t - 4t_0t_2 + t_2t^2 - 4t_2t + 4t_2] \\
 &\quad + [2t_0t_2t^2 - 6t_0t_2t + 3t_0t_2 - 2t_0t^2 + 6t_0t - 3t_0 - 4t_2t^2 + 12t_2t - 6t_2 + 4t^2 - 12t + 6] \\
 &\quad + [-t_0t_2t^2 + 2t_0t_2t - t_0t_2 + 2t_0t^2 - 4t_0t + 2t_0 + 3t_2t^2 - 6t_2t + 3t_2 - 6t^2 + 12t - 6] \\
 &= t_0t_2t^2(-1+2-1) + t_0t_2t(4-6+2) + t_0t_2(-4+3-1) + t_0t^2(-2+2) + t_0t(6-4) + t_0(-3+2) \\
 &\quad + t_2t^2(1-4+3) + t_2t(-4+12-6) + t_2(4-6+3) + t^2(4-6) + t(-12+12) + (6-6) \\
 &= -2t_0t_2 + 2t_0t - t_0 + 2t_2t + t_2 - 2t^2 \\
 &= 2(t_2-t)(t-t_0) + t_2-t_0 \\
 \mathcal{I}'(p_1) &= \frac{(t_2-t)(t-t_0)}{(t_2-t_1)(t_2-t_0)} + \frac{t_2-t_0}{2(t_2-t_1)(t_2-t_0)} \\
 &= \frac{(t_2-t)(t-t_0)}{(t_2-t_1)(t_2-t_0)} + \frac{1}{2(t_2-t_1)} \\
 \mathcal{I}''(p_1) &= \frac{(2-t)^2}{2} \frac{0-t_1}{t_2-t_1} \frac{t_3-1}{t_3-t_1} + \frac{-2t^2+6t-3}{2} \frac{1-t_1}{t_2-t_1} \frac{t_3-2}{t_3-t_1} + \frac{(t-1)^2}{2} \frac{2-t_1}{t_2-t_1} \frac{t_3-3}{t_3-t_1} \\
 2(t_2-t_1)(t_3-t_1)\mathcal{I}''(p_1) &= [-t_1t_3t^2 + 4t_1t_3t - 4t_1t_3 + t_1t^2 - 4t_1t + 4t_1] \\
 &\quad + [2t_1t_3t^2 - 6t_1t_3t + 3t_1t_3 - 4t_1t^2 + 12t_1t - 6t_1 - 2t_3t^2 + 6t_3t - 3t_3 + 4t^2 - 12t + 6] \\
 &\quad + [-t_1t_3t^2 + 2t_1t_3t - t_1t_3 + 3t_1t^2 - 6t_1t + 3t_1 + 2t_3t^2 - 4t_3t + 2t_3 - 6t^2 + 12t - 6] \\
 &= t_1t_3t^2(-1+2-1) + t_1t_3t(4-6+2) + t_1t_3(-4+3-1) + t_1t^2(1-4+3) + t_1t(-4+12-6) \\
 &\quad + t_1(4-6+3) + t_3t^2(-2+2) + t_3t(6-4) + t_3(-3+2) + t^2(4-6) + t(-12+12) + (6-6) \\
 &= -2t_1t_3 + 2t_1t + t_1 + 2t_3t - t_3 - 2t^2 \\
 &= 2(t_3-t)(t-t_1) + t_1-t_3 \\
 \mathcal{I}''(p_1) &= \frac{(t_3-t)(t-t_1)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)} + \frac{t_1-t_3}{2(t_2-t_1)(t_3-t_1)} \\
 &= \frac{(t_3-t)(t-t_1)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)} + \frac{-1}{2(t_2-t_1)} \\
 \mathcal{I}(p_1) &= \mathcal{I}'(p_1) + \mathcal{I}''(p_1) \\
 &= \frac{(t_2-t)(t-t_0)}{(t_2-t_1)(t_2-t_0)} + \frac{(t_3-t)(t-t_1)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)} + \frac{1}{2(t_2-t_1)} + \frac{-1}{2(t_2-t_1)} \\
 &= \frac{(t_2-t)(t-t_0)}{(t_2-t_1)(t_2-t_0)} + \frac{(t_3-t)(t-t_1)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)} \\
 &= N_1^2(t)
 \end{aligned}$$

Les influences obtenues par le calcul sont bien celles des NUBS quadratiques classiques.