

Discrétisation directe de la surface limite de Catmull-Clark par Systèmes de Fonctions Itérées

Lucas MORLET¹, Marc NEVEU¹, et Sandrine LANQUETIN¹

¹ Le2i, CNRS, Arts et Métiers, Univ. Bourgogne Franche-Comté, Dijon

Résumé

En CAO, la modélisation de surface est un point essentiel. Les méthodes de génération de surfaces par subdivision et par Système de Fonctions Itérées (IFS) montrent de nombreux points communs mais diffèrent de par leur formalisme. Dans le présent article, nous présentons une méthode inspirée du formalisme des IFS permettant de calculer la surface limite obtenue par le schéma de subdivision de Catmull-Clark sans passer par les habituelles étapes de subdivision. Cette méthode peut être généralisée à l'ensemble des schémas de subdivision uniformes.

Abstract

In CAD, surfaces modeling is a keystone. Methods of surfaces generation by subdivision or Iterated Functions System (IFS) show numerous common points but differ by their formalism. In this article, we present a method inspired by IFS' formalism to compute the limit surface obtained by Catmull-Clark subdivision scheme without passing by the usual subdivision steps. This method can also be extend to all uniform subdivision schemes.

Mots-clés : Surfaces de subdivision, surface limite, IFS

1. Introduction

Les surfaces de subdivision sont un moyen très simple d'obtenir des surfaces à partir d'un maillage quelconque mais elles sont malgré tout très peu utilisées dans les domaines industriels et surtout en CAO à cause de la nécessité de calculer la surface limite pour faire des opérations telles que les opérations booléennes et les restrictions.

Par ailleurs, [Hut79] et [Bar14] ont développé un formalisme de construction de surfaces fractales par Système de Fonctions Itérées (IFS).

Plusieurs travaux ont déjà mentionné l'évidente similitude d'approches entre les algorithmes de construction de surfaces par subdivision et par IFS. Par exemple [WW01] ou [Gol04] montrent qu'un schéma de subdivision standard, stationnaire génère des surfaces fractales - autrement dit que les surfaces de subdivision sont les attracteurs d'un IFS.

Dans cet article, nous décrivons une nouvelle manière de présenter les surfaces de subdivision sous forme d'IFS ainsi que l'utilisation de ce formalisme avec comme but principal d'estimer directement la surface limite sans passer par la moindre étape de subdivision.

Nous utilisons comme exemple les bien-connues surfaces de Catmull-Clark [CC78] bien que la méthode présentée soit applicable à n'importe quel schéma de subdivision uniforme.

2. Calcul par la méthode du point fixe d'une discrétisation de la surface limite obtenue avec le schéma de Catmull-Clark

Pour calculer la surface limite de Catmull-Clark correspondant à une face d'un maillage, il est nécessaire et suffisant de connaître les sommets des faces adjacentes à celle étudiée (le 1-voisinage de la face). Ces sommets seront numérotés de la même manière que dans la figure 1.

Les transformations

Nous notons T_0 la subdivision bas-gauche et T_i les différentes subdivisions numérotées en suivant l'ordre trigonométrique.

Dans la suite de l'article, on désignera comme ordinaire une face dont tous les sommets sont ordinaires (de valence 4 dans le cas de Catmull-Clark). A l'inverse une face possédant au moins un sommet extraordinaire sera considérée comme extraordinaire.

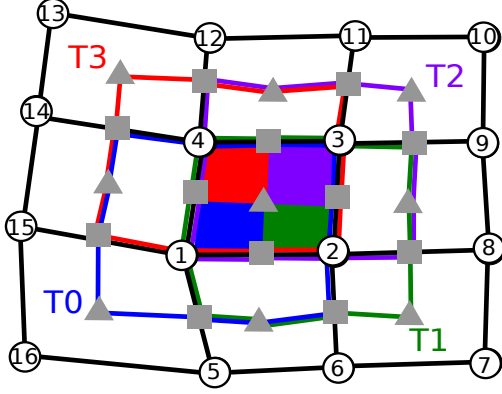


Figure 1: Subdivision de Catmull-Clark sur une face d'un maillage quadrangle. Les points-arêtes sont représentés par des carrés et les points-faces par des triangles. Chaque couleur représente une transformation différente avec en aplat la sous-face associée et en contour le voisinage correspondant.

Les matrices T_1 , T_2 et T_3 sont identiques à T_0 à un (des) changement(s) d'indice près. En définissant R la matrice 16×16 de rotation qui décale les indices 1 à 4 (cercle intérieur) d'un cran et les indices 5 à 16 (cercle extérieur) de 3 crans on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{cases} T_1 = RT_0R^3 \\ T_2 = R^2T_0R^2 \\ T_3 = R^3T_0R \\ R^4 = Id(16) \end{cases} \quad (2)$$

Cette matrice équivaut à une rotation d'un quart de tour des indices du maillage. Elle correspond également à une permutation des lignes lorsqu'elle est appliquée à gauche et à une permutation des colonnes quand elle l'est à droite.

Comme les T_i sont des transformations contractantes, elles admettent un point-fixe qui est également l'attracteur de la transformation. Celui-ci peut-être calculé directement par une combinaison barycentriques des points stockés dans le vecteur de voisinage du maillage initial par les poids stockés dans le vecteur P_i . Ce vecteur correspond à la fois à une ligne de la matrice T_i^∞ (qui a toutes ses lignes identiques) et au vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1 de T_i [HKD93]. Dans notre cas il sera calculé de la manière suivante :

$$P_i = (1, 0, \dots, 0)T_i^\infty \quad (3)$$

Pour une face ordinaire les transformations T_i sont définies de la manière suivante :

$$T_0 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} V & E & F & E & E & F & & & & & F & E & F & \\ B & B & C & C & C & C & & & & & & & & \\ A & A & A & A & A & A & & & & & & & & \\ B & C & C & C & B & & & & & & C & C & & \\ \hline B & C & & & B & C & & & & & & & & \\ A & A & & & C & B & C & C & & & & & & \\ C & B & & & C & B & C & C & & & & & & \\ E & V & E & F & F & E & F & E & & & & & & \\ \hline C & B & B & C & & & C & & & & & & & \\ F & E & V & E & & & F & & & & & & & \\ C & C & B & B & & & & & & & & & & \\ E & F & E & V & & & & & & & & & & \\ \hline C & & & B & & & & & & & F & E & F & \\ A & & & A & & & & & & & C & B & C & \\ B & & & C & & & & & & & A & A & C & \\ A & & & A & & & & & & & A & A & & \end{array} \right)_{\text{cas}}$$

avec :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4} & V = \frac{9}{16} \\ B = \frac{3}{8} & E = \frac{1}{16} \\ C = \frac{1}{16} & F = \frac{1}{64} \end{cases} \quad (1)$$

On retrouve alors les mêmes conditions de raccord et d'adjacence entre les surfaces que dans les BCIFS [PGSL14] :

$$\begin{cases} P_i T_i = P_i \\ P_{(i+1)} T_i = P_i T_{(i+1)} \\ P_{(i+2)} T_i = P_{(j+2)} T_j \end{cases} \quad (4)$$

Maintenant que les transformations sont définies, nous pouvons chercher un point quelconque sur la surface limite. Pour cela, il nous faut fournir l'équivalent du couple (u,v) de valeurs paramétriques par une suite de transformations aboutissant à un point de la surface.

Alphabet, génération de mot et réduction grammaticale

Comme tout nombre diadique peut-être défini par un mot (de longueur potentiellement infinie) d'un alphabet, tout point du carré unitaire peut être défini par un mot de l'alphabet $\{T_0, T_1, T_2, T_3, P_0, P_1, P_2, P_3\}$, où chaque lettre correspond à l'une des transformations définies précédemment.

Pour nous assurer de n'avoir que des mots finis de longueur inférieure ou égale à ℓ , nous imposons aux points du carré unitaire d'être de la forme :

$$(u, v) = \left(\frac{m}{L}; \frac{n}{L}\right) \text{ avec } L = 2^{\ell-1} \text{ et } (m; n) \in \{0; 1; \dots; L\}^2$$

L'algorithme 1 décrit comment trouver les mots à partir de u et v .

Algorithm 1 Algorithme de génération d'un mot à partir d'un point

```

function NUM2WORD( $u, v$ )
   $\text{mot} \leftarrow \emptyset$ 
  while TRUE do
    // Calcul de la transformation
     $ur \leftarrow \text{round}(u)$ 
     $vr \leftarrow \text{round}(v)$ 
     $i \leftarrow 2.vr + (ur + vr) \% 2$ 

    // Ajout de la nouvelle lettre au mot
    if  $u = ur$  and  $v = vr$  then
      return  $\text{mot.push\_front}(P_i)$ 
    else
       $\text{mot.push\_front}(T_i)$ 
       $u \leftarrow 2(u - 0.5.ur)$ 
       $v \leftarrow 2(v - 0.5.vr)$ 
    end if
  end while
end function

```

Les mots générés sont écrit dans le même ordre que les produits matriciels ce qui implique que les transformations appliquées sont écrites de droite à gauche.

Il ne reste plus qu'à calculer tous les mots de l'alphabet de longueur inférieure ou égale à ℓ . Avec l'algorithme 1, chaque point de la surface est défini par un mot unique.

3. Le cas des faces extraordinaires

Malheureusement, la technique utilisée plus haut n'est valable que pour les faces dont tous les sommets sont de valence 4, ce qui n'est pas toujours le cas.

Nous supposons que dans le cas où une face est extraordinaire, elle ne possède qu'un seul sommet de valence différente de 4. Si plusieurs sommets de la même face sont de valence extraordinaire, il suffit de subdiviser une fois pour les séparer et obtenir des faces ne comptant qu'un seul sommet extraordinaire. Ce sommet extraordinaire sera systématiquement le sommet 1 du maillage (voir exemples en figure 2).

Dans les paragraphes suivants, nous expliquerons comment l'alphabet doit être modifié et quelles sont les nouvelles matrices nécessaires pour l'extension de la méthode de la section 2 au cas des faces extraordinaires.

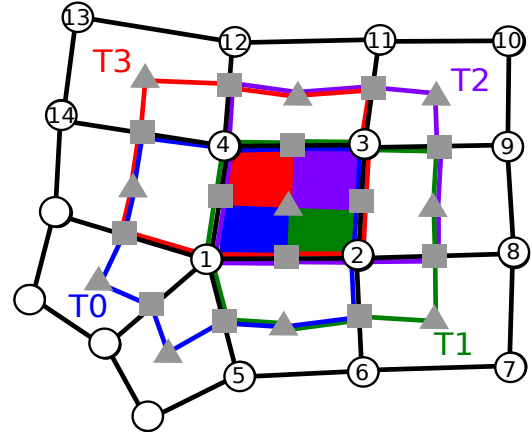
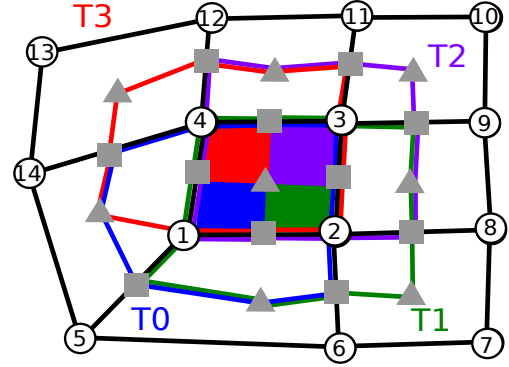


Figure 2: Subdivision de Catmull-Clark sur une face extraordinaire (le sommet 1 est de valence 3 au dessus et de valence 5 en dessous) d'un maillage. Les points-arêtes sont représentés par des carrés et les points-faces par des triangles. Chaque couleur représente une transformation différente avec en aplat la sous-face associée et en contour le voisinage correspondant.

Modification de l'alphabet

Dans le cas d'une face extraordinaire, le voisinage associé à cette face n'est plus de taille 16 mais de taille $(2k + 8)$ où k désigne la valence du sommet extraordinaire.

Ce changement de taille de voisinage implique de modifier les transformations associées. Pour cela, nous définissons les transformations $\hat{T}_{i,k}$ qui correspondent aux transformations appliquées sur un maillage irrégulier ainsi que \hat{P}_0 pour calculer le point fixe de \hat{T}_0 . Il nous faut donc ajouter à notre alphabet les lettres $\{\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3, \hat{P}_0\}$.

Il est important de noter qu'appliquer la transformation \hat{T}_0 conserve la topologie du maillage alors qu'appliquer $\hat{T}_{i \neq 0}$

rend le maillage régulier. Nous déduisons de cette propriété les règles grammaticales qui permettent de modifier le mot en sortie de l'algorithme 1 en un mot adapté au face extraordinaire :

$$\begin{cases} T_i \emptyset \rightarrow \hat{T}_i \\ T_i \hat{T}_0 \rightarrow \hat{T}_i \hat{T}_0 \\ P_0 \emptyset \rightarrow \hat{P}_0 \end{cases} \quad (5)$$

Évidemment, dans la pratique, il sera plus efficace de modifier l'algorithme 1 de manière à intégrer les règles de grammaire plutôt que de modifier le mot en sortie.

Maintenant que notre mot prend en compte la possibilité de l'existence d'un sommet de valence différente de 4, il nous faut définir les matrices associées aux transformations impliquant des sommets de valence irrégulière.

Les matrices $T_{i,k}$

La transformation $T_{0,k}$ conserve la topologie du maillage en entrée ; c'est donc une matrice $(2k+8) \times (2k+8)$ qui lui est associée. À l'inverse, les transformations $T_{i \neq 0,k}$ rendent le maillage régulier, les matrices associées sont alors de taille $16 \times (2k+8)$.

Pour une raison de simplicité, nous distinguons les matrices $T_{i,3}$ des matrices $T_{i,k>4}$ (avec en rouge les modifications à apporter aux matrices $T_{i,4}$ présentée dans la section 2) :

$$\hat{T}_{0,3} = \begin{pmatrix} v & e & f & e & e & f & & & & & f \\ B & B & C & C & C & C & & & & & \\ A & A & A & A & & & & & & & \\ B & C & C & B & C & & & & & & \\ & B & C & & B & C & & & & & \\ A & A & & & A & A & & & & & \\ C & & B & & C & B & C & C & & & \\ E & V & E & F & C & E & F & E & & & \\ C & B & B & C & & C & C & & & & \\ F & E & V & E & & F & E & F & E & F & \\ C & C & B & B & & & & C & C & & \\ E & F & E & V & F & & & F & E & F & E \\ C & & B & & C & & & C & C & B & \\ A & & A & & A & & & & & A & \end{pmatrix}$$

$$\hat{T}_{0,k \geq 4} = \begin{pmatrix} v & e & f & e & e & f & & & & & f & e & f & \dots & e & f \\ B & B & C & C & C & C & & & & & & & & & \\ A & A & A & A & & & & & & & & & & & \\ B & C & C & B & C & & & & & & C & C & & & \\ & B & C & & B & C & & & & & & 0 & \dots & 0 & C & C \\ A & A & & & A & A & C & C & & & & & & & \\ C & B & C & C & C & B & C & E & & & & & & & \\ E & V & E & F & F & E & F & & & & & & & & \\ C & B & B & C & & C & C & F & & & & & & & \\ F & E & V & E & & C & E & F & E & F & & & & & \\ C & C & B & B & & & C & C & C & & & & & & \\ E & F & E & V & & & F & E & F & & & & & & \\ C & & B & & C & & C & B & C & & & & & & \\ A & & A & & A & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & C & B & C & C & \\ & & & & & & & & & & & A & A & A & \\ & & & & & & & & & & & & C & C & B & C \\ & & & & & & & & & & & & & A & A & \\ & & & & & & & & & & & & & & A & A \end{pmatrix}$$

où A, B, C, V, E, F sont les mêmes coefficients que dans le système 1 et v, e et f sont les coefficients nécessaire

au calcul de la nouvelle position du sommet extraordinaire [HKD93] :

$$\begin{cases} v = \frac{4k^2 - 7k}{4k^2} \\ e = \frac{6}{4k^2} \\ f = \frac{1}{4k^2} \end{cases} \quad (6)$$

Les matrices $T_{i \neq 0,k}$ seront facilement déduites des matrices précédentes.

4. Conclusion

Génération de points sur la surface limite

En résumé, en connaissant les sommets initiaux du maillage et une adresse paramétrique (u,v), il est possible de calculer avec une simple combinaison barycentrique le point correspondant sur la surface limite. Ce processus de calcul de valeur exacte sur une surface existe depuis les travaux de Stam [Sta98]. Notre formalisme permet de retrouver les mêmes résultats avec les avantages suivants :

- séparation des opérateurs de subdivision T_i , de projection P_i , et de raccord ;
- méthode généralisable aux autres schémas de subdivision uniformes quadrangles en changeant uniquement les transformations et les matrices associées ;
- méthode également généralisable aux schémas de subdivision uniformes triangles en changeant les transformations et l'algorithme (car il n'est plus question dans l'espace des paramètres de subdivision du carré unitaire mais de celle d'un triangle ;
- possibilité de modifier l'algorithme de génération de mot pour gérer des schémas non-stationnaires.

Limites

Le principal problème qui pourrait être rencontré est le nombre exponentiel de combinaisons barycentriques à précalculer. En effet, dès que l'on augmente la longueur des mots (et donc la précision), on augmente le nombre de points fixes par face $((2^L + 1)^2 \text{ PF/face})$. De plus, plus on a de valences différentes présentes sur le maillage et plus on a de configurations différentes. Le tableau ci-dessous présente le nombre de combinaisons linéaires à précalculer en fonction de ces deux paramètres :

Nb valence \ L	0	1	2	3	4	5
1 (k=4)	4	9	25	81	289	1 089
5	20	45	125	405	1 445	5 445
10	40	90	250	810	2 890	10 890
20	80	180	500	1 620	5 780	21 780

Pour limiter le problème, on pourra par exemple parcourir le maillage au préalable pour connaître les valences présentes et ne pas charger de valences inutiles.

5. Extension à d'autres schémas de subdivision

Dans le cadre de futurs travaux, l'utilisation de la méthode présentée avec d'autres schémas de subdivision sera étudiée.

Le cas uniforme

Quel que soit le schéma uniforme considéré, seules les matrices T_i (et dans certains cas, comme celui d'un schéma triangulaire ou non-stationnaire, l'algorithme de génération du mot) sont à modifier. Rien de ce qui concerne les règles spécifiques à la topologie de chaque schéma n'est inclus dans le processus. En effet, on obtient directement des points sur la surface limite - et donc une discrétisation de la surface limite - et non une succession d'itérations de subdivisions du maillage initial.

Notons que les transformations T_i ont des sommets communs, ce qui implique que les matrices associées ont des lignes communes qui proviennent des conditions de raccord entre carreaux de surface. Le nombre de lignes communes dépend du degré de la surface obtenue et donc du schéma choisi.

Le cas non-uniforme

En terme d'intervalles nodaux, subdiviser équivaut à insérer un nœud au milieu de l'intervalle. Les transformations T_i exprimées plus haut associent à un carré paramétrique un carré paramétrique plus petit tandis que les transformations P_i lui associent un point. On a alors :

$$\begin{cases} T_0([a;b] \times [c;d]) = [a/2;b] \times [c/2;d] \\ T_1([a;b] \times [c;d]) = [a;b/2] \times [c/2;d] \\ T_2([a;b] \times [c;d]) = [a;b/2] \times [c;d/2] \\ T_3([a;b] \times [c;d]) = [a/2;b] \times [c;d/2] \\ P_0([a;b] \times [c;d]) = (a;c) \\ P_1([a;b] \times [c;d]) = (b;c) \\ P_2([a;b] \times [c;d]) = (b;d) \\ P_3([a;b] \times [c;d]) = (a;d) \end{cases}$$

Dans le cadre de l'utilisation de la méthode présentée pour un schéma non-uniformes, les transformations T_i devront intégrer des coefficients qui ne seront plus fixés, mais dépendront des longueurs respectives des intervalles nodaux.

Références

- [Bar14] BARNESLEY M. F. : *Fractals everywhere*. Academic press, 2014.
- [CC78] CATMULL E., CLARK J. : Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-aided design. Vol. 10*, Num. 6 (1978), 350–355.
- [Gol04] GOLDMAN R. : The fractal nature of bezier curves. In *Geometric Modeling and Processing, 2004. Proceedings (2004)*, IEEE, pp. 3–11.
- [HKD93] HALSTEAD M., KASS M., DEROSE T. : Efficient, fair interpolation using catmull-clark surfaces. In *Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (1993)*, ACM, pp. 35–44.
- [Hut79] HUTCHINSON J. E. : *Fractals and self similarity*. University of Melbourne.[Department of Mathematics], 1979.
- [PGSL14] PODKORYTOV S., GENTIL C., SOKOLOV D., LANQUETIN S. : Joining primal/dual subdivision surfaces. In *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, Floater M., Lyche T., Mazure M.-L., Mørken K., Schumaker L., (Eds.), vol. 8177 de *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin Heidelberg, 2014, pp. 403–424.
- [Sta98] STAM J. : Exact evaluation of catmull-clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (1998)*, ACM, pp. 395–404.
- [WW01] WARREN J., WEIMER H. : *Subdivision methods for geometric design : A constructive approach*. Morgan Kaufmann, 2001.