Probabilidade

Docente: Antonio Djackson
Discentes: Emanuel Borges da Silva, Fernando Rodrigues Maciel, Giordano Rodrigues, João Paulo Rosner Vilar, Lucas Novaes

Julho - 2018

Sobre este material – Este material foi desenvolvido para estudo de alguns temas relacionados a probabilidade, tais como a distribuição de Gauss.

1. Disistribuição normal de Gauss (como surgiu e pra que serve)

Já nos séculos passados (XVIII e XIX), alguns especialistas na área de matemática e física, para descrever erros de experimento obtidos em medidas físicas, criaram a FDP (Função de Densidade de Probabilidade). Sabemos que os processos de mensuração, de uma forma ou de outra, estão sujeitos a erros. Mas quais seriam as fontes destes erros? Tempo, variação de temperatura, dentre outros fatores que não podem ser identificados. A FDP é uma curva conhecida como distribuição de gauss (gaussina) ou distribuição normal.

A Função de Densidade de Probabilidade tem como sua principal utilidade o fato da mesma conseguir aproximar de maneira aceitável as curvas de frequência de medidas físicas.

Convém definir o que é um evento aleatório para que possamos entender o significado de distribuição normal. Estamos falando de um evento cuja cada ocorrência não obedece os padrões ou regras que nos permitem fazer previsões certeiras. Exemplo: qual face de um dado cairá para baixo.

A área de estudos da Estática nos revela que, apesar de ser objetivamente imprevisível a ocorrência individual destes eventos aleatórios, podemos tirar algumas conclusões caso tenhamos um conjunto de dados suficientemente grandes.

Em se tratando de eventos aleatórios, muitos dos conjuntos possuem padrões que não conseguimos identificar analisando eventos de forma isolada, mas que existem, como por exemplo a tendência de concentração dos eventos em uma posição que representa uma média aritimética entre os mesmos. Desta forma, diminui-se o número de eventos de forma gradativa na medida em que nos afastamos dessa média. Quando este padrão é seguido pelos eventos aleatórios, esses eventos são enquadrados na "distribuição normal", que é representada pela curva de Sino (Bell Curve) ou curva de Gauss

A maior importância da Distribuição Normal de Gauss se dá pelo Teorema Central do Limite, que afirma que quando o tamanho da amostra aumenta, a distribuição amostral da sua média aproxima-se cada vez mais de uma distribuição normal, isto é, se tornam normalmente distribuídas quando o número de observações é suficientemente grande. Quantidades físicas que se espera que sejam a soma de muitos processos independentes (como erros de medição) frequentemente têm distribuições que são quase normais. Além disso, muitos resultados e métodos (como propagação de incerteza e ajuste de parâmetro de mínimos quadrados) podem ser derivados analiticamente de forma explícita quando as variáveis relevantes são normalmente distribuídas.

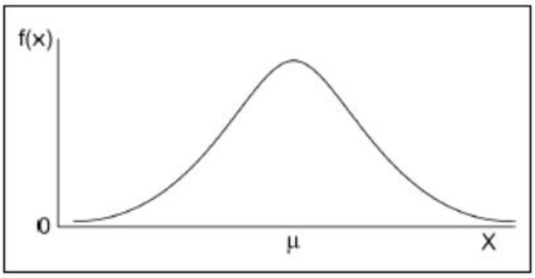
2. Definir a distribuição normal de Gauss, falar sobre sua densidade de probabilidade, valor esperado e variância;

Seja X uma variável aleatória continua tem distribuição normal se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad x \in (-\infty, \infty).$$

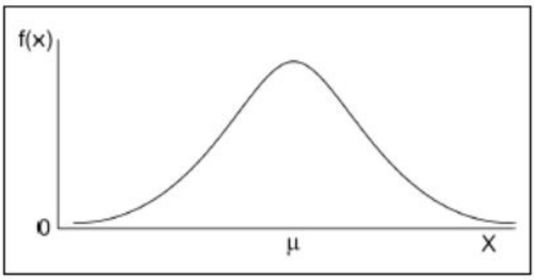
Usamos a notação X N( ).

Podemos observar que A variação natural de vários processos industriais é realmente aleatória. Embora as distribuições de muitos processos possam assumir uma variedade de formas, muitas variaveis observadas possuem uma distribuição de frequências que é, aproximadamente uma distribuição de probabilidade normal.



Sabemos que probabilidade é a chance real de acontecer um determinado evento, isto é, a chance de ocorrer uma medida em um certo intervalo. Por exemplo a frequência relativa deste intervalo, sendo observada apartir de uma amostra de medidas, é a aproximação da probabilidade. E a distribuição de frequências é a aproximação da distribuição de probabilidades.

Figura 1 – Gráfico da Distribuição normal



Para acharmos a Área sob a curva normal devemos conhecer doi valores numérico que são a média(Esperança) e o desvio padrão(Variância). Mas quando a média e o desvio padrão são desconhecidos (na maioria dos casos) esses valores são estimados por X que é equivalente a seguinte formula.

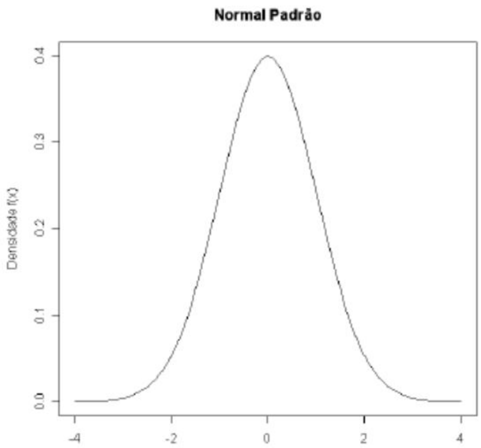
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ e } s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}$$

Para cada valor da média e do desvio padrão é dava uma curva de distribuição de probabilidade. mas para calcular Áreas específicas usa-se uma distribuição particular chamada de distribuição normal padronizada. no qual essa distribuição assim valores para media igual a 0 e para o desvio padrão igual a 1. para obter tal distribuição quando houver uma variável X com distribuição normal com média diferente de zero e desvio padrão diferente de 1, deve-se reduzir-la a uma variável Z seguindo o seguinte cálculo:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Assim a distribuição de probabilidade passa ater média 0 e desvio = 1. pela distribuição ser simetrica em relação a media, a área à direita é igual a esquerda de u.

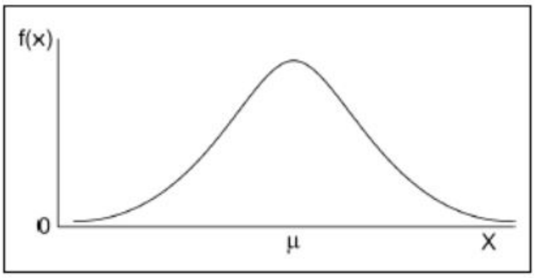
Figura 2 – Gráfico



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Sabemos que probabilidade é a chance real de acontecer um determinado evento, isto é, a chance de ocorrer uma medida em um certo intervalo. Por exemplo a frequência relativa deste intervalo, sendo observada apartir de uma amostra de medidas, é a aproximação da probabilidade. E a distribuição de frequências é a aproximação da distribuição de probabilidades.

Figura 3 – Gráfico da Distribuição normal



Para acharmos a Área sob a curva normal devemos conhecer doi valores numérico que são a média(Esperança) e o desvio padrão(Variância). Mas quando a média e o desvio padrão são desconhecidos (na maioria dos casos) esses valores são estimados por X que é equivalente a seguinte formula.

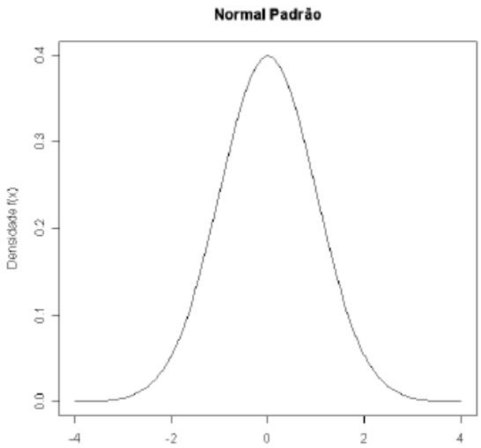
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ e } s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}$$

Para cada valor da média e do desvio padrão é dava uma curva de distribuição de probabilidade. mas para calcular Áreas específicas usa-se uma distribuição particular chamada de distribuição normal padronizada. no qual essa distribuição assum valores para media igual a 0 e para o desvio padrão igual a 1. para obter tal distribuição quando houver uma variável X com distribuição normal com média diferente de zero e desvio padrão diferente de 1, deve-se reduzir-la a uma variável Z seguindo o seguinte cálculo:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Assim a distribuição de probabilidade passa ater média 0 e desvio = 1. pela distribuição ser simetríca em relação a media, a área à direita é igual a esquerda de u.

Figura 4 – Gráfico



3. Apresentar dois exemplos numéricos

3.1 - O salário médio dos funcionários de uma empresa é de R$ 800,00, com desvio padrão de R$ 300,00. Qual a probabilidade de escolhermos aleatoriamente um funcionário que receba entre R$ 650,00 e R$ 1.100,00?

Resposta:

A média é μ = R$ 800,00 e o desvio padrão é σ = R$ 300,00. A probabilidade será definida por:

P(650 ≤ x ≤ 1.100), logo:

Para $x = 650$ teremos um z tal que:

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$z = \frac{650-800}{300}$

$z = -0,5$

Para $x = 1.100$ teremos um z tal que:

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$z = \frac{1.100-800}{300}$

$z = 1$

Com isso temos que para $z = -0.5$ a àrea do gráfico será de 0.1915* e para $z = 1$ a àrea do gráfico será de 0.3413*, portanto a probabilidade será P(650 ≤ x ≤ 1.100) = P(-0.5 ≤ z ≤ 1) = 0.1915 + 0.3413 = 0.5328.

*: De acordo com a tabela de distribuição normal.

3.2 - A durabilidade de um pneu de determinada marca é descrita como uma variável aleatória normal de média 70.000km e o desvio padrão é de 9.000km.

Se o fabricante desta marca garante a durabilidade do seus pneus pelos primeiros 50.000km, qual a proporção de pneus que deverão ser trocados pela garantia?

Resposta:

A média é $\mu = 70.000$ e o desvio padrão é $\sigma = 9.000$. A probabilidade será definida por:

P(x ≤ 50.000), logo:

Teremos um z tal que:

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$z = \frac{50.000-70.000}{9.000}$

$z = -2.22$

Com isso temos que para $z = -2.22$ a àrea do gráfico será de 0.4868* ou 48.68%, também sabemos que o gráfico da distribuição de Gauss é simétrico, portanto a distribuição é de 50% acima da média e 50% abaixo da média. Logo a proporção que queremos será de 50% - 48.68% = 1.32% ou 0,0132 pneus.

*: De acordo com a tabela de distribuição normal.

Figura 5 – Gráfico

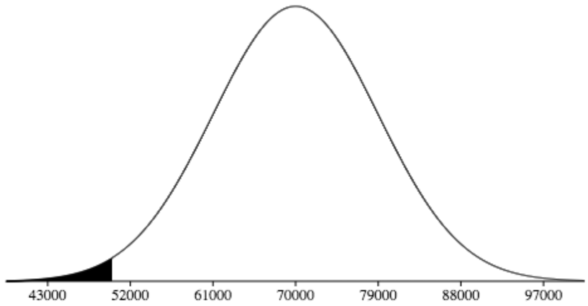


Figura 6 – Tabela de distribuição normal

Tabela A6.2 Distribuição normal – valores de $P(0 \leqslant Z \leqslant z_0)$

z_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4967	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Referências: http://www.portalaction.com.br/probabilidades/62-distribuicao-normal