SME0806 - Estatística Computacional - Trabalho 1

nome 1 (nusp) Francisco Rosa Dias de Miranda (4402962) nome 3 (nusp)
nome 4 (nusp)

```r
library(tidyverse)
library(pander  )
# Separador decimal nos resultados: ","
options(OutDec = ",")
set.seed(13)
knitr::opts_chunk$set(echo=FALSE)
```

O que falta:

- explicitar g* em 1b:d, deixar as integrais como feito no fim do item (a)
- item 2

Exercício 1

a.

Para calcular a integral, primeiro reescrevemos os limites de integração com auxílio da função indicadora:

$$\Theta = \int_0^\infty \int_0^x g(x,y)dydx = \int_0^\infty \int_0^\infty g(x,y)\ \mathbb{I}(y)_{(0,x)}dydx$$

Para ajustar os intervalos, propomos a seguinte mudança de variáveis, que mapeia a região de integração no quadrado unitário.

$$u = 1 - e^{-x},\ v = 1 - e^{-y} \Rightarrow x = -log(1-u),\ y = -log(1-v)$$

Note que a transformação funciona pois se $x = 0$ então $u = 0$ e se $x \to \infty$ então $u \to 1$, de forma análoga para y e v. Calculamos $J(u,v)$ usando a matriz de derivadas parciais da transformação inversa

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-u)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-v)} \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ |J(u,v)| = \frac{1}{(1-u)(1-v)}$$

Usando essa transformação, podemos reescrever a integral da seguinte forma

$$\Theta = \int_0^1 \int_0^1 g(u,v)\ \mathbb{I}(v)_{(0, -\frac{u}{(u-1)})} \frac{1}{(1-u)(1-v)}dvdu$$

Para se resolver integrais utilizando o método de Monte Carlo, é proposto o seguinte algoritmo:

1. Gere uma dupla (u, v) com $u \sim U(0,1)$ e $v \sim U(0,1)$ independentes
2. Calcule $g^*(u,v) = g(u,v) * J(u,v)$
3. Faça $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{M} g_i(u,v)$

b.

Vamos agora calcular

$$\int_0^\infty \int_0^x \exp^{-(x+y)}\, dydx$$

$\hat{\theta}$	$\widehat{Var}(\hat{\theta})$
0,50078	0,0022361

c.

$$\int_0^\infty \int_0^x \exp^{-(x^2+y^2)}\, dydx$$

$\hat{\theta}$	$\widehat{Var}(\hat{\theta})$
0,3923447	0,002557

d.

$$\int_0^\infty \int_0^x \exp^{-(x+y)^2}\, dydx$$

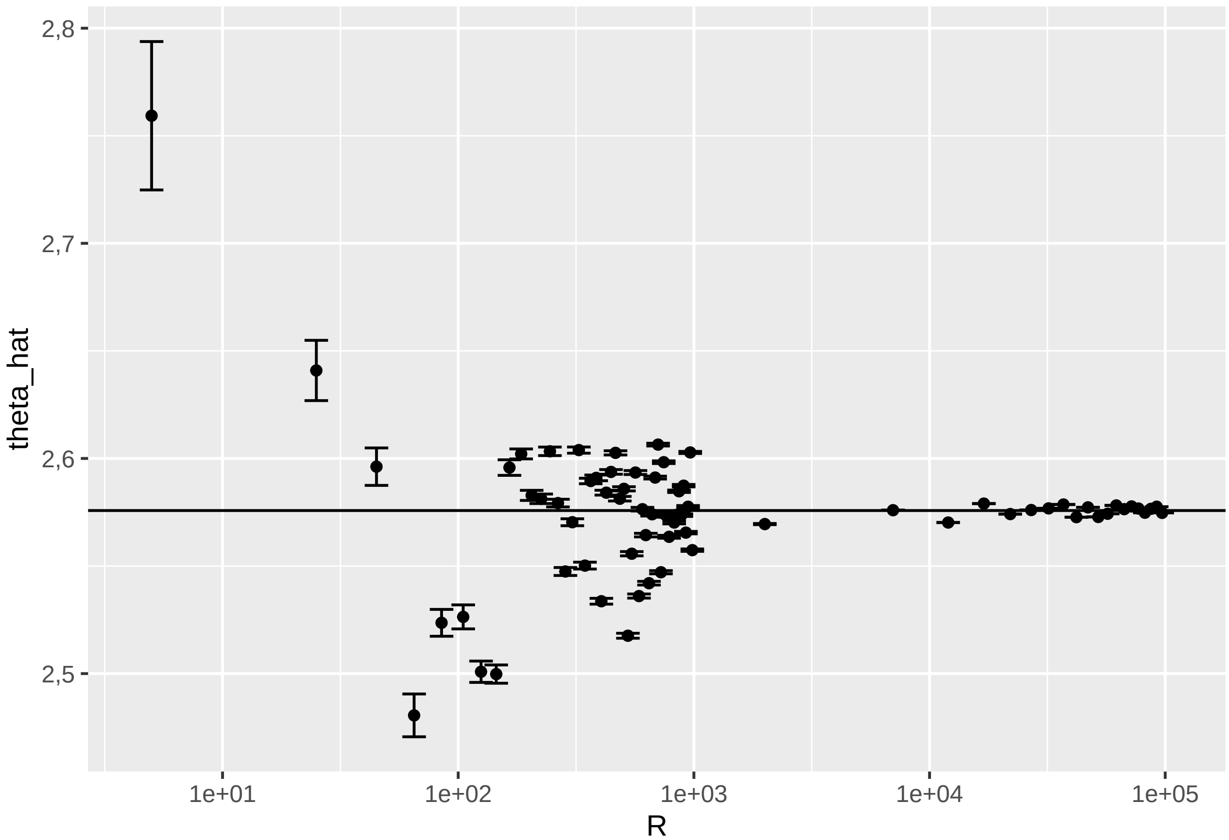
$\hat{\theta}$	$\widehat{Var}(\hat{\theta})$
0,2466086	0,0019142

Exercício 2

b.

Para resolver a integral utilizando o método de Monte Carlo, é proposto o seguinte algoritmo:

1. Gere $u \sim N(0,1)$
2. Calcule $f^*(u) = \frac{f(u)}{g(u)}$, onde $g(.)$ é a f.d.p de uma Normal Padrão
3. Faça $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{M} f_i^*(u)$



Apêndice: códigos utilizados na análise

```
library(tidyverse)
library(pander  )
# Separador decimal nos resultados: ","
options(OutDec = ",")
set.seed(13)
knitr::opts_chunk$set(echo=FALSE)
# Numero de amostras
M <- 50000

# Gera um vetor de pares (x, y) de uniformes (0,1)
gera_pares_unif <- function(n) {
  return(tibble(
    u = runif(n),
    v = runif(n)))
}

# Funcao indicadora
ind <- function(x, min, max) {
  return(
    ifelse(x > min,
      ifelse(x < max,
             1, 0),
```

```r
      0))
}

# jacobiano da transformação inversa
jac <- function(u, v) {
  return(
    1 / ((1 - u) * (1 - v)))
}

# obtem g*(.) a partir de g(.) a partir da transformação adotada
gstar <- function(g) {
  return(function(x, y) {
    g(-log(1 - x), -log(1 - y)) * ind(y, 0, x) * jac(x,y)
  })
}

## Integra uma função em (0, inf) atraves do método
## de Monte Carlo, retorna estimativa e E.P.
integral_mc_exp <- function(gstar, M) {
  return(
   gera_pares_unif(M) |>
   mutate(
     gs = gstar(u, v)) |>
   summarise(
    # Estimativa e erro padrao de MC
     theta_hat = mean(gs),
     ep_mc = sqrt(var(gs) / M))
  )
}

g1 <- function(x, y) {
  return(
    exp(-(x + y)))
}
labs <- c("$\\hat{\\theta}$", "$\\widehat{Var}(\\hat{\\theta})$")
# Estimativa e EP da integral
gstar(g1) |> integral_mc_exp(M) |> knitr::kable(col.names = labs)

g2 <- function(x, y) {
  return(
         exp(-(x^2 + y^2)))
}
# Estimativa e EP da integral
gstar(g2) |> integral_mc_exp(M) |> knitr::kable(col.names = labs)

g3 <- function(x, y) {
  return(
         exp(-(x + y)^2))
}
# Estimativa e EP da integral
gstar(g3) |> integral_mc_exp(M) |> knitr::kable(col.names = labs)
```

```r
# Obtendo estimativas de MC para diferentes valores de R
R <- c(seq(5, 1000, 20), seq(2000, 1e5, 5000))

u <- R |> map_dfr(~tibble(x = rnorm(.),
                      R = .))

fstar <- function(x){
  return(
    exp(- abs(x)^3 / 3) / dnorm(x))
  #         f(x)       /   g(x)
}

tabela <- u |>
  mutate(fs = fstar(x)) |>
  group_by(R) |>
  summarise(theta_hat = mean(fs),
            ep = sd(fs) / n() )


tabela |>
  ggplot(aes(x = R)) +
  geom_point(aes(y = theta_hat)) +
  geom_errorbar(aes(ymin = theta_hat - ep, ymax = theta_hat + ep), width =.1) +
  geom_hline(aes(yintercept = 2.5758), ) +
  scale_x_log10()

R <- 50000

fstar <- function(x) {
  return(
    x^2 * exp(- abs(x)^3 / 3) / dnorm(x))
  #         f(x)       /   g(x)
}

tabela <- u |>
  mutate(fs = fstar(x)) |>
  group_by(R) |>
  summarise(theta_hat = mean(fs),
            ep = sd(fs) / n() )
```