SME0806 - Estatística Computacional - Trabalho 1

nome 1 (nusp) Francisco Rosa Dias de Miranda (4402962) nome 3 (nusp)
nome 4 (nusp)

O que falta:

- explicitar g* em 1(b)(c)(d) deixar as integrais como feito no fim do item (a), e tambem verdadeiros valores das integrais
- item 2: escrever f(.) direito,

Exercício 1

a.

Para calcular a integral, primeiro reescrevemos os limites de integração com auxílio da função indicadora:

$$\theta = \int_0^\infty \int_0^x g(x,y)dydx = \int_0^\infty \int_0^\infty g(x,y)\ \mathbb{I}(y)_{(0,x)}dydx$$

Para ajustar os intervalos, propomos a seguinte mudança de variáveis, que mapeia a região de integração no quadrado unitário

$$u = 1 - e^{-x},\ v = 1 - e^{-y} \Rightarrow x = -log(1-u),\ y = -log(1-v)$$

Note que a transformação funciona pois se $x = 0$ então $u = 0$ e se $x \to \infty$ então $u \to 1$, de forma análoga para y e v. Calculamos $J(u,v)$ usando a matriz de derivadas parciais da transformação inversa

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-u)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-v)} \end{pmatrix} \Rightarrow |J(u,v)| = \frac{1}{(1-u)(1-v)}$$

Dessa forma, reescrevemos a integral no novo sistema de coordenadas

$$\theta = \int_0^1 \int_0^1 g(u,v)\ \mathbb{I}(v)_{(0,u)}|J(u,v)|dvdu$$

Como estamos utilizando a distribuição Uniforme(0,1) temos que $g^*(u,v) = g(u,v) * |J(u,v)|$. Podemos agora resolver as integrais via método de Monte Carlo através do seguinte algoritmo:

1. Gere duplas (u_i, v_i) com $u \sim U(0,1)$ e $v \sim U(0,1),\ i = 1, ..., R$
2. Calcule $g^*(u,v)$
3. Faça $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{M} g_i(u,v)$

Com auxílio de software computacional, escrevemos um programa em linguagem R para resolver as integrais com 50000 amostras de pares da distribuição Uniforme(0,1) disponível no Apêndice.

b.

Vamos agora calcular (deixei esse aqui como exemplo pros dois de baixo era bom substituir g pela funcao no segundo passo)

$$\int_0^\infty \int_0^x \exp^{-(x+y)}\, dydx = \int_0^1 \int_0^1 g(u,v)\ \mathbb{I}(v)_{(0,u)} \frac{1}{(1-u)(1-v)} dvdu$$

$$

$\hat{\theta}$	$\widehat{Var}(\hat{\theta})$
0,49774	0,0022361

c.

$$\int_0^\infty \int_0^x \exp^{-(x^2+y^2)}\, dydx$$

$\hat{\theta}$	$\widehat{Var}(\hat{\theta})$
0,3934695	0,002561

d.

$$\int_0^\infty \int_0^x \exp^{-(x+y)^2}\, dydx$$

$\hat{\theta}$	$\widehat{Var}(\hat{\theta})$
0,2529346	0,0019306

Exercício 2

a.

Vamos gerar amostras de X através do *método da inversão*:

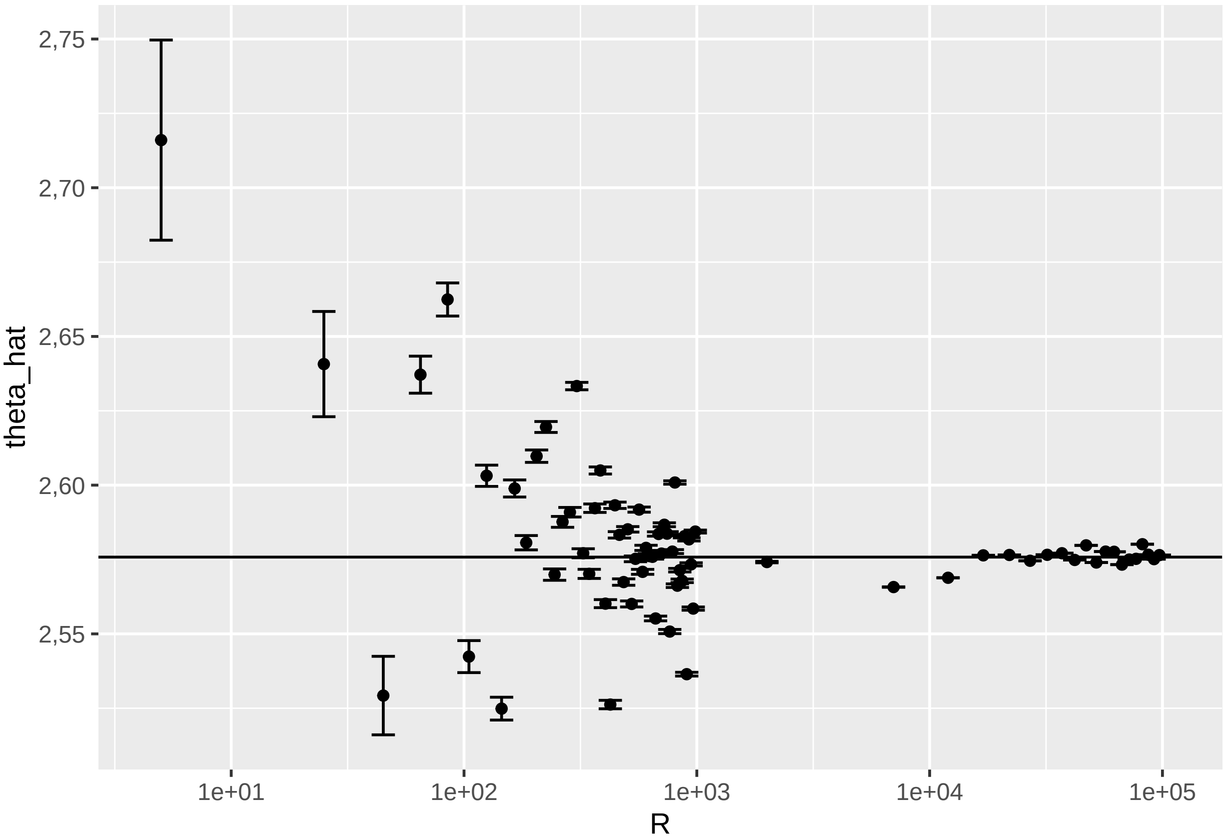
1. Gere $u \sim U(0,1)$
2. Faça $x = f^{-1}(u)$

Invertendo a função, obtemos $f^{-1}(x) =$ ś$(3^(1/3)(-log(x))^(1/3))$.

b.

Para resolver a integral utilizando o método de Monte Carlo, é proposto o seguinte algoritmo:

1. Gere $u \sim N(0,1)$
2. Calcule $f^*(u) = \frac{f(u)}{g(u)}$, onde $g(.)$ é a f.d.p de uma Normal Padrão
3. Faça $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{M} f^*(u_i)$



Apêndice: códigos utilizados na análise

```
library(tidyverse)
library(knitr)
# Separador decimal nos resultados: ","
options(OutDec = ",")
set.seed(123)
knitr::opts_chunk$set(echo=FALSE)

# Numero de amostras
M <- 50000

# Gera um vetor de pares (x, y) de uniformes (0,1)
gera_pares_unif <- function(n) {
  return(tibble(
```

```r
    u = runif(n),
    v = runif(n)))
}

# Funcao indicadora
ind <- function(x, min, max) {
  return(
    ifelse(x > min,
      ifelse(x < max,
             1, 0),
      0))
}

# jacobiano da transformação inversa
jac <- function(u, v) {
  return(
    1 / ((1 - u) * (1 - v)))
}

# obtem g*(.) a partir de g(.) usando a transformação exponencial
gstar <- function(g, x, y) {
  return(function(x, y) {         ##  y em (0, x)
    g(-log(1 - x), - log(1 - y)) * ind(y, 0, x) * jac(x, y)
  })
}

## Integra uma função em y \in (0, x), x \in (0, inf)  atraves
## do método de Monte Carlo, retorna estimativa e E.P.
integral_mc_unif <- function(gstar, R = 50000) {
  return(
   gera_pares_unif(R) |>
   mutate(
     gs = gstar(u, v)) |>
   summarise(
     theta_hat = mean(gs),
     ep_mc = sqrt(var(gs) / R))
  )
}

g1 <- function(x, y) {
  return(
    exp(-(x + y)))
}
labs <- c("$\\hat{\\theta}$", "$\\widehat{Var}(\\hat{\\theta})$")

# Estimativa e EP da integral
gstar(g1) |> integral_mc_unif() |> kable(col.names = labs)

g2 <- function(x, y) {
  return(
         exp(-(x^2 + y^2)))
}
# Estimativa e EP da integral
```

```r
gstar(g2) |> integral_mc_unif() |> knitr::kable(col.names = labs)

g3 <- function(x, y) {
  return(
         exp(-(x + y)^2))
}
# Estimativa e EP da integral
gstar(g3) |> integral_mc_unif() |> knitr::kable(col.names = labs)

finv <- function(x) {
  ifelse() ## escrever o modulo
   (3^(1/3) (-log(x))^(1/3))
  }

# Obtendo estimativas de MC para diferentes valores de R
R <- c(seq(5, 1000, 20), seq(2000, 1e5, 5000))

u <- R |> map_dfr(~tibble(x = rnorm(.),
                      R = .))

fstar <- function(x){
  return(
    exp(- abs(x)^3 / 3) / dnorm(x))
  #         f(x)       /   g(x)
}

tabela <- u |>
  mutate(fs = fstar(x)) |>
  group_by(R) |>
  summarise(theta_hat = mean(fs),
            ep = sd(fs) / n() )


tabela |>
  ggplot(aes(x = R)) +
  geom_point(aes(y = theta_hat)) +
  geom_errorbar(aes(ymin = theta_hat - ep, ymax = theta_hat + ep), width =.1) +
  geom_hline(aes(yintercept = 2.5758), ) +
  scale_x_log10()

R <- 50000

fstar <- function(x) {
  return(
    x^2 * exp(- abs(x)^3 / 3) / dnorm(x))
  #         f(x)       /   g(x)
}

tabela <- u |>
  mutate(fs = fstar(x)) |>
  group_by(R) |>
  summarise(theta_hat = mean(fs),
            ep = sqrt(var(fs) / n() ))
```

$$