

ESTADÍSTICA DE FOTONES DE UNA FUENTE PSEUDO-TÉRMICA

Julián Bilos, Franco Eskinazi, Lucas Pancotto

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

Laboratorio 5

12 de Julio del 2022

Resumen

En este trabajo se buscó estimar las distribuciones probabilísticas de la ocurrencia de fotones emitidos por una fuente pseudo-térmica en un dado tiempo de integración T_i . Esto se realizó incidiendo con un láser en un disco esmerilado para generar un patrón de *speckle* giratorio que a su vez incidía en un fotomultiplicador. Este fue conectado a un osciloscopio para medir la ocurrencia de fotones. Se consideraron dos modelos: la distribución de Poisson para tiempos largos comparados al tiempo de coherencia de la fuente pseudo-térmica; y la distribución de Bose-Einstein para ocurrencias en tiempos de integración cortos comparados al tiempo de coherencia. Para el primero se obtuvieron datos que se ajustan satisfactoriamente al modelo. Para el segundo caso no se obtuvieron resultados adecuados al modelo; se realizaron simulaciones numéricas para estudiar la posibilidad de que los datos fuesen compatibles con una "mezcla" de las dos distribuciones. La simulación más cercana a los datos resultó ser una combinación de una distribución de Bose con un parámetro aproximado $\lambda = 0,72$, y una distribución de Poisson con un parámetro aproximado $\lambda = 0,2$.

1. Introducción

Una de las técnicas más utilizadas para el conteo de fotones es la implementación del fotomultiplicador (FM), el cual convierte luz en una señal eléctrica y funciona mejor en lugares de baja iluminación. Un FM está compuesto por un fotocátodo, donde fotones inciden sobre átomos y se emiten electrones a partir de la fotoionización [1]. Estos últimos golpean dínodos que los multiplican para finalmente ser recolectados en un ánodo y así enviarse una señal de salida correspondiente. En la Fig. 1 se puede ver un esquema de un fotomultiplicador habitual.

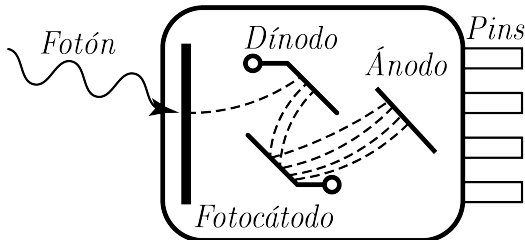


Figura 1: Esquema de un fotomultiplicador.

Para determinarse la sucesión de fotocuentas se tratan los átomos de forma cuántica, mientras que el campo electromagnético se hace de forma clásica. De esta manera, se

hace la suposición de que la probabilidad de una fotoionización es proporcional a la intensidad promediada en un ciclo de oscilación del campo $\hat{I}(t)$. Entonces se puede escribir la probabilidad de una fotocuenta $p(t)$ en un intervalo de tiempo t y $t + dt$ como

$$p(t)dt = \varepsilon \hat{I}(t)dt, \quad (1)$$

donde ε es la eficiencia del detector [2]. Siguiendo con esto se puede llegar a la fórmula de Mandel, donde el promedio de la probabilidad $P_\lambda(t, T)$ de que λ fotocuentas ocurra en un período de tiempo entre t y $t + T$ está dada por

$$P_\lambda(T) = \langle \frac{[\varepsilon \hat{I}(t, T)T]^\lambda}{\lambda!} e^{-\varepsilon \hat{I}(t, T)T} \rangle, \quad (2)$$

donde $\hat{I}(t, T)$ es la intensidad de luz media que incide sobre el fototubo durante este período de tiempo.

Se analizarán dos fuentes distintas de modo que las cuentas se simplifiquen y así obtener distribuciones conocidas.

1.1. Fuente coherente

Si se tiene una fuente coherente, donde la onda es estable, la intensidad promediada en un ciclo es \hat{I}_0 , la cual no es dependiente de tiempo. En este caso la distribución de probabilidades pasa a tener la forma de una *Poisson*:

$$P_\lambda(T) = \frac{\langle \lambda \rangle^\lambda}{\lambda!} e^{-\langle \lambda \rangle}, \quad (3)$$

donde $\langle \lambda \rangle = \varepsilon \hat{I} T$ [3].

1.2. Fuente de intensidad variable

Si ahora se tiene una fuente de intensidad variable en el tiempo se puede separar en dos casos distintos. Si el tiempo de integración de la señal es mucho mayor que el tiempo característico de las fluctuaciones ($T_i \gg \tau_c$), la variación de estas son despreciables frente al valor medio de la intensidad y se recupera la distribución de *Poisson* dada por 3.

Por otro lado, si el tiempo característico es mucho menor que el de integración ($T_i \ll \tau_c$), se obtiene una intensidad "instantánea" que se considera constante en el período T_i . De esta manera se llega a una distribución de *Bose-Einstein* [3]:

$$P_\lambda(T) = \frac{\langle \lambda \rangle^\lambda}{(1 + \langle \lambda \rangle)^{1+\lambda}}. \quad (4)$$

1.3. Objetivos

El objetivo de este trabajo es analizar cómo la relación entre el tiempo de coherencia y el tiempo de integración afectan al estudio de una fuente pseudo-térmica.

2. Montaje y desarrollo experimental

Para poder estudiar las distintas fuentes de luz, se utilizó un montaje experimental como el que se muestra en la Fig. 2.

Dentro de una caja opaca (C) se colocó el sistema de conteo de fotones. Como fuente se utilizó un láser de He-Ne (L) *Melles-Griot*, cuyo haz incidía sobre dos polarizadores (P) con tal de atenuar la intensidad. Seguido de estos se redirigió el haz con dos espejos (E) hacia una lente convergente (L_c) para que interactúe con un disco esmerilado (D_e) y generaba un patrón de *speckle*. Se conectó el disco a un motor (M) que a su vez estaba conectado a una fuente (F_2) *LG GP-4303D*. Esta se varió entre 1,2 V y 6 V, y con ello se regulaba la velocidad de giro. Además se calibró la velocidad con un *photogate Pasco*. El haz, al pasar por el disco, incidía sobre un pinhole que nuevamente reducía la intensidad y a su vez daba el paso al fotomultiplicador (FM) *Hamamatsu 1P28* [4].

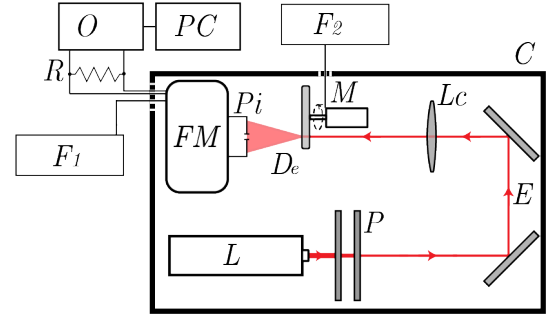


Figura 2: Esquema gráfico del montaje experimental utilizado para el conteo de fotones en distintas fuentes.

Para el funcionamiento del fotomultiplicador se utilizó una fuente de alta tensión (F_1) que se mantuvo a un valor de aproximadamente 900 V durante la experiencia. Para medir la corriente del FM se colocó un osciloscopio *Tektronix TDS1002B* (O) conectado a una computadora (PC), donde se guardaban las mediciones y se analizaban utilizando *Python* [5]. El osciloscopio cuenta con una resistencia interna de 1 M Ω , lo cual hace que el tiempo de relajación del circuito sea muy largo y se reporten eventos de tiempo característicos mas largos que el de la detección de una fotocuenta. Para reducir el tiempo de relajación, se conectó en paralelo una resistencia (R) de 50 Ω .

Con este montaje se realizaron 2 tipos de mediciones. La primera consistió en el conteo a oscuras; con el láser apagado, y sin ninguna otra fuente, se tomaron mediciones del FM con el osciloscopio. La razón de esto es para ver mediciones por efectos térmicos. En el segundo tipo de medición se prendió el láser He-Ne y el motor del disco con el objetivo de simular una fuente de luz pseudo-térmica. Regulando la velocidad angular del disco se obtenían distintos tiempos de coherencia τ_c para la luz. Además variando τ_c y el tiempo de integración del osciloscopio T_i , se simulaban distintas fuentes de luz para luego analizar su estadística.

Por otro lado se buscó medir la relación entre el voltaje entregado al motor del disco, la velocidad angular de este y el tiempo de coherencia de la fuente pseudo-térmica. Para ello, se midió el *shot noise* que reportó el FM, sacando la resistencia de 50 Ω y utilizando la resistencia interna del osciloscopio. De esta forma, el FM media una corriente continua generada por detectar pulsos de luz continuos en vez de contar fotones individuales. Cada pulso de luz se lo asignaba a un frente de luz esférico del esmerilado del disco.

3. Resultados y análisis

3.1. Medición del tiempo de coherencia

Como se mencionó en la sección 2, se analizó el *shot noise* de la fuente pseudo-térmica para cada voltaje aplicado al motor. Este varió entre los valores de aproximadamente 1,2 V a 6,0 V, y afectaban la velocidad angular del disco esmerilado. A mayor voltaje en el motor, el disco toma una velocidad angular mayor. El *shot noise* medido se muestra en la Fig. 3.

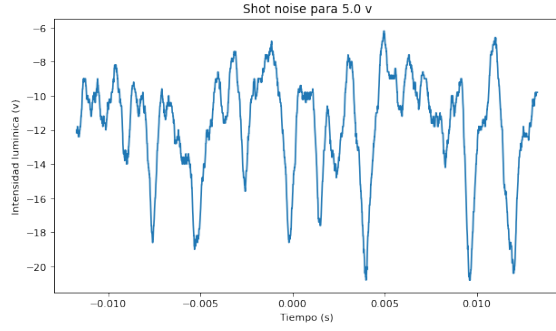


Figura 3: *Shot noise* para un voltaje de 5,0 V del motor del disco.

En la Fig. 3 se puede ver picos de mínimos de voltaje. Estos se los asoció a los distintos frentes de onda esféricos del disco esmerilado, es decir, que cada pulso es un tren de ondas coherente. El ancho de estos pulsos están asociados al tiempo de coherencia de la luz y se midieron con una función de autocorrelación. La función asociada a la Fig. 3 se puede ver en la Fig. 4.

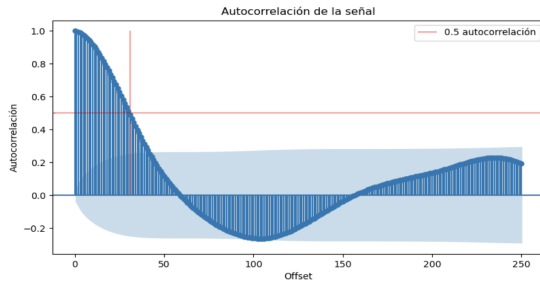


Figura 4: Gráfico de autocorrelación para la señal de *shot noise* de la Fig. 3.

En la Fig. 4 se ve marcado el valor donde la autocorrelación es igual a 0,5, el cual se asoció a la mitad del promedio de los anchos de los pulsos. Además, con este se obtuvo un tiempo de coherencia $\tau_c = 0,63$ ms para un voltaje del motor de 5,0 V.

Este procedimiento se realizó para distintas velocidades angulares del disco. En la tabla 1 se pueden ver los valores obtenidos para las distintas velocidades angulares del disco.

Voltaje del motor [V]	τ_c [ms]
$1,2 \pm 0,1$	2,6
$2,0 \pm 0,1$	1,6
$3,0 \pm 0,1$	1,0
$4,0 \pm 0,1$	0,89
$5,0 \pm 0,1$	0,63
$6,0 \pm 0,1$	0,50

Tabla 1: Tiempos de coherencia aproximados de la fuente pseudo-térmica en función del voltaje entregado al motor.

3.2. Conteo a oscuras

Para el conteo a oscuras se tomaron alrededor de 1000 mediciones del osciloscopio. Esto se realizó con el objetivo de ver las detecciones del fotomultiplicador cuando no está expuesto a una fuente de luz. En la Fig. 5 se pueden ver varias de estas hechas por el osciloscopio.

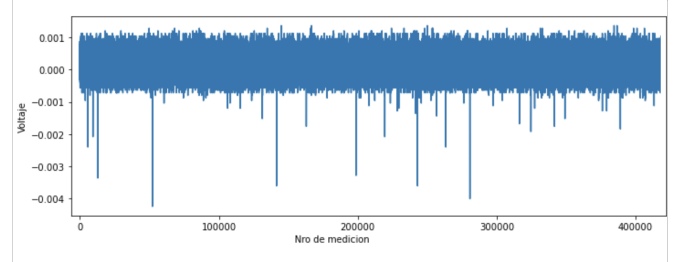


Figura 5: Conteo de fotones del fotomultiplicador en ausencia de fuente de luz.

Los conteos son aquellos picos negativos. El problema en esta medición reside en considerar un umbral adecuado que discrimine correctamente el conteo de un fotón, con ruido propio del fotomultiplicador. Para ello, se valió de la simetría del ruido respecto al eje y se consideró la distancia promedio de la señal al valor de mayor valor positivo. Esta distancia se definió como el umbral tal que cualquier valor negativo que sea más distante al promedio, sea considerado como una cuenta de un fotón.

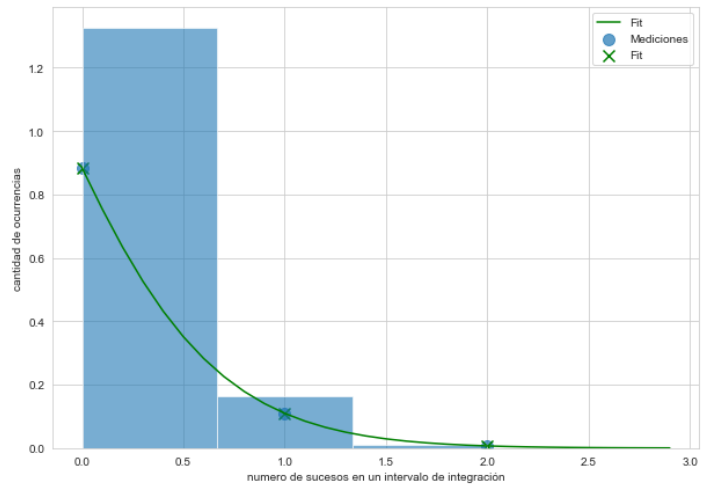


Figura 6: Histograma de las cuentas de oscuridad para $T_i = 25ns$, con un ajuste utilizando la distribución de Poisson.

En la figura 6 puede verse un histograma de las mediciones del conteo de fotones en oscuridad. Se ajustaron estos datos con distribución de Poisson, devolviendo un parámetro $\lambda = 0,12$ y un $R^2 = 0,99$.

3.3. Caracterización de fuentes pseudo térmicas

3.3.1. Determinación de voltaje umbral para conteo de fotones

Para las mediciones con láser y disco esmerilado encendidos se adoptó otro criterio para buscar el umbral a partir del cuál se tomaba un pico de voltaje en la lectura del osciloscopio como un fotón o ruido. En la Fig. 7 puede verse una muestra de la señal obtenida con el osciloscopio, donde la pantalla integraba 25 ns y el tiempo de coherencia era de aproximadamente 0,5 ms. Se observan picos de distintas intensidades. Con esto se buscó distinguir cuáles de esas lecturas eran fotones.

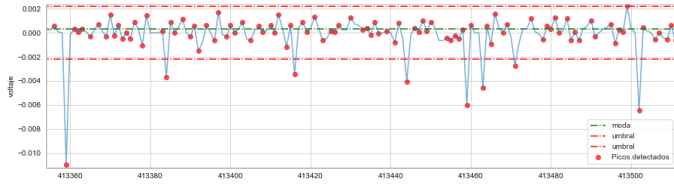


Figura 7: Señal de los voltajes de salida del fotomultiplicador medida con el osciloscopio con una fuente pseudo-térmica de tiempo de coherencia de aproximadamente 0,5 ms. Se ve el umbral estimado a partir del cual se considera un pico como un fotón.

Por otro lado, en la Fig. 8 puede verse un histograma con todos los picos medidos a lo largo de 500 pantallas de osciloscopio de $T_i=25$ ns y $\tau_c=0,5$ ms. Estos picos se obtuvieron con un programa escrito en *Python*: este suavizaba la función, buscaba picos con diferencias finitas y lograba discriminar picos que estuvieran más cerca entre ellos que el ancho estimado de los picos que se consideraban, a ojo, lecturas de fotón: de esta manera no se contaron picos más de una vez a causa de ruido u otros efectos.

Este histograma muestra entonces todos los posibles valores que adoptan los picos en la lectura del osciloscopio, y vislumbra una distribución aproximada de los mismos. Puede observarse que para los picos positivos, donde no debería medirse otra cosa que ruido (no hay lectura de fotones en los picos positivos) se tiene una distribución marcadamente distinta a la que se tiene para los picos negativos, donde se espera tener una mezcla entre ruido y mediciones de fotones.

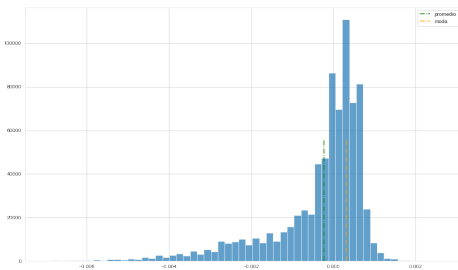


Figura 8: Histograma de todos los picos medidos en la señal a la cual corresponde la muestra de la Fig. 7

Para ello se asumió, como en el caso de conteo de oscu-

ridad, que la distribución de ruido es simétrica. Además se asume que en los valores de picos negativos se tiene efectivamente una mezcla de la distribución de ruido (que debería ser aproximadamente igual a la de picos positivos) con una distribución de los picos que corresponden a fotones más algún residuo propio de estos sucesos en los aparatos de medición. Una vez asumido esto, se superpusieron la distribución de los picos positivos y los negativos para compararlos. Esto puede verse en la Fig. 9. Luego se realizó una resta entre estas dos distribuciones. Esto devolvió algunos valores negativos para la cantidad de picos, lo cual no se corresponde con una distribución simétrica montada sobre una distribución distinta centrada en valores de voltaje negativos; pero permitió encontrar el lugar aproximado donde termina la distribución de ruido y dónde empieza la distribución de aparición de fotones. Utilizando esta estimación y un muestreo aleatorio de la señal para ver cómo se comportaban los umbrales tentativos con respecto a los picos (tal como se ve en la Fig. 7), se pudo determinar un umbral para cada tiempo de coherencia.

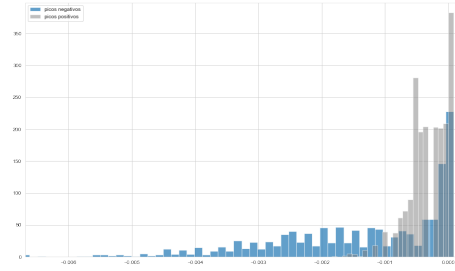


Figura 9: Superposición de los histogramas de los módulos de los picos positivos y negativos de la Fig. 8

3.3.2. Tiempo de integración corto comparado con el tiempo de coherencia

A continuación se presentan los resultados para las mediciones con $T_i=25$ ns y $\tau_c=0,5$ ms. El voltaje umbral que se adoptó para la detección de los picos de voltaje provenientes de fotones en estas mediciones fue $(197 \cdot 10^{-3})V$.

En la Fig. 10 se ve un histograma de la cantidad de fotones medidos en el tiempo de integración, y un ajuste con el modelo de una distribución de Bose, donde el ajuste se realizó con cuadrados mínimos y el estadístico R^2 es 0,90. Se puede observar que la distribución no parece explicar bien las mediciones de fotones en este caso.

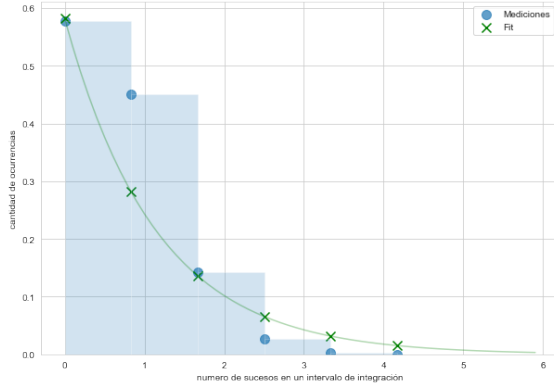


Figura 10: Histograma de conteo de fotones en un tiempo de integración de $T_i=25$ ns y $\tau_c=0,5$ ms, y un ajuste con el modelo de una distribución de Bose.

En la Fig. 11 se puede ver el mismo histograma, esta vez ajustado con una distribución de Poisson. El parámetro λ resultó de $0,57 \pm 0,05$, y el estadístico R^2 dio 0,98. La distribución de Poisson parece explicar mejor los datos obtenidos, aunque para valores de pocos fotones por tiempo de integración se ve que este se aparta de los datos.

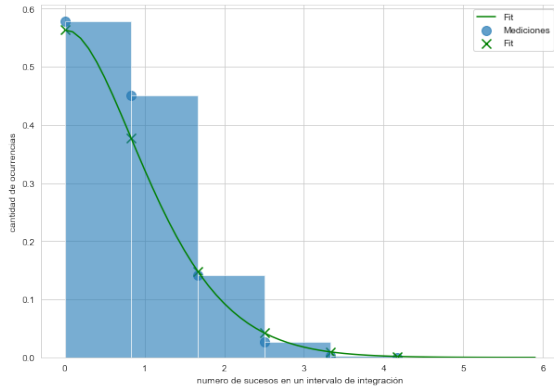


Figura 11: Histograma de conteo de fotones en un tiempo de integración de 25 ns y tiempo de coherencia de 0,5 ms y un ajuste con el modelo de una distribución de Poisson.

3.3.3. Tiempo de integración largo comparado con el tiempo de coherencia

Para $T_i=10$ ns y $\tau_c=0,5$ ms, el voltaje de umbral que se adoptó para la detección de los picos de voltaje provenientes de fotones en estas mediciones fue $(225 * 10^{-3})V$.

La Fig. 12 es un histograma de los conteos para este tiempo de integración con la distribución estimada para los datos. Se puede ver que las cantidades de fotones para este tiempo de integración más largo son apreciablemente mayores a los de la sección anterior. La distribución se estimó calculando directamente al parámetro λ como la esperanza muestral de los datos; es decir la suma de las proporciones de ocurrencia dadas en el histograma por los valores de cada "bin". Este resultó $\lambda = 1309,04$.

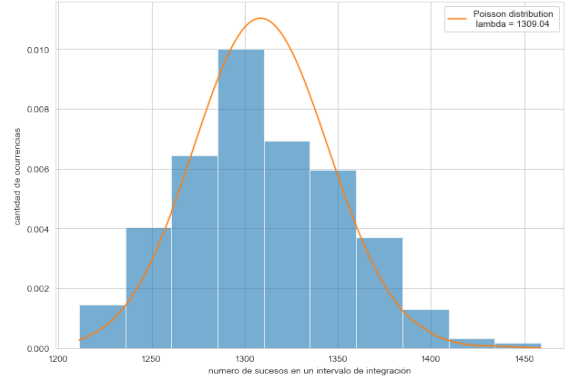


Figura 12: Histograma de conteo de fotones en un tiempo de integración de 10 ms y tiempo de coherencia de 0,5 ms y un ajuste con el modelo de una distribución de Poisson.

Se ve que la distribución se aproxima bien a los datos; si bien el parámetro λ podría ir estimándose mejor con más mediciones, la forma del decaimiento de la distribución se ajusta notablemente al del histograma.

3.3.4. Simulación numérica de tiempos de integración cortos con cuentas de oscuridad

A razón de los resultados obtenidos para las mediciones con $T_i=25$ ns y $\tau_c=0,5$ ms, se realizaron una serie de simulaciones para tratar de entender la diferencia entre estos resultados y el modelo.

Tal como se expuso en la sección 3.2, se obtuvo una distribución significativa de conteo de fotones en ausencia de fuente de luz. Esto implica que, aún en presencia de una fuente pseudo-térmica que genere una distribución de Bose para el conteo, habrá una "colaboración" de una distribución de Poisson por parte de las cuentas de oscuridad que resultaron inevitables en el conteo total.

Las simulaciones se realizaron usando variantes del algoritmo de Metrópolis. Estos algoritmos consisten, a grandes rasgos, en seleccionar del espacio muestral (es decir, los posibles números de fotones que podían contarse en una pantalla de 25 ns) un valor de forma aleatoria, partiendo de una valor inicial. Luego, se calcula la probabilidad de obtenerse este nuevo valor usando la función distribución de probabilidad que se está simulando, y se compara con la probabilidad de obtenerse el valor anterior. Si la nueva probabilidad es mayor, se acepta el cambio. Si es menor, puede o no aceptarse, de forma aleatoria. Este procedimiento es iterado numerosas veces, y los cambios obtenidos se guardan para obtener una distribución que se aproxima a la simulada.

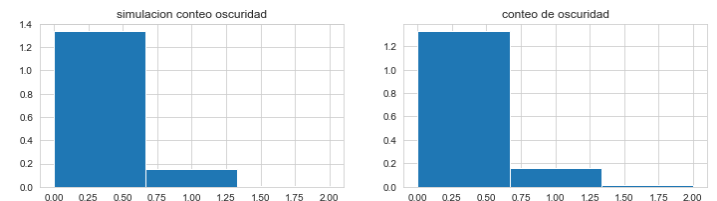


Figura 13: Simulación de un conteo de oscuridad comparado con los datos reales, para $T_i=25$ ns.

En la figura 13 se visualiza una simulación de la distribución de probabilidad Poisson estimada para las cuentas de oscuridad para las mediciones con $T_i=25$ ns ($\lambda = 0,12$), y al histograma de las mediciones. Se ve que el algoritmo utilizado genera valores parecidos a lo que se obtuvo experimentalmente.

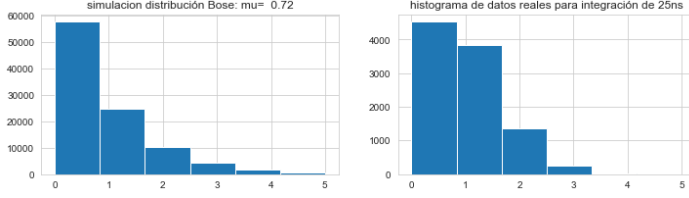


Figura 14: Simulación de un conteo con fuente pseudo-térmica de $\tau_c = 0,5$ ms comparado con los datos reales, para $T_i=25$ ns.

En la figura 14 se visualiza una simulación de una distribución de Bose con el parámetro ajustado para los datos de las cuentas de una fuente pseudo-térmica con $T_i=25$ ns y $\tau_c = 0,5$ ms (λ de Bose = $0,72$), y al histograma de las mediciones originales.

Se puede apreciar la diferencia entre la distribución esperada para un comportamiento de fotones descorrelacionados, en particular una Bose con el parámetro ajustado de los datos, y lo medido experimentalmente. También se observa que el método para la simulación funciona razonablemente bien para reproducir la distribución bajo estudio.

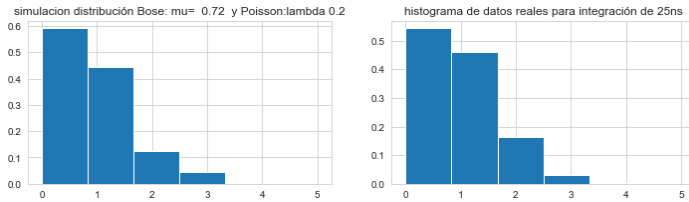


Figura 15: Simulación de una mezcla de distribuciones, Bose y Poisson, comparado con un real conteo con fuente pseudo-térmica de $T_i=25$ ns y $\tau_c = 0,5$ ms.

La estrategia para estudiar la muestra obtenida en el laboratorio a través de la hipótesis de que en ella se encuentra una "mezcla" de conteos correspondientes a un comportamiento de Bose y conteos de oscuridad fue, justamente, diseñar una simulación que reprodujera esta "mezcla".

En particular el algoritmo utilizado seguía los siguientes pasos: parecido a como se describió anteriormente para el algoritmo de Metropolis, se inicializan, no uno, sino dos espacios muestrales, de los cuales se toman valores aleatorios partiendo de un valor inicial para cada uno. Luego, se evalúa la probabilidad de estos nuevos valores en las distribuciones de probabilidad que se desean "mezclar": en este caso, la Bose y la Poisson.

Como antes, se hace una comparación con la probabilidad en la iteración anterior, y se decide si aceptar el cambio o no en base a si este es más probable o no.

Pero en este punto de la simulación se hizo una consideración adicional a partir de lo observado en las mediciones. Se tomó la hipótesis de que el efecto de las cuentas de oscuridad solo era apreciable cuando la cantidad de fotones

provenientes de la fuente pseudo-térmica contados en un tiempo de integración era 0.

Esta suposición parte de ver que la mayor perturbación respecto de una distribución de Bose de los datos medidos aparece en el valor de 1 fotón por tiempo de integración (figura 14). Esto, y la observación de que las cuentas de oscuridad son significativamente menos intensas en voltaje que las cuentas provenientes de una fuente pseudo-térmica, llevó a considerar que es poco probable distinguir y medir una cuenta de oscuridad en una pantalla de osciloscopio donde se miden cuentas de fotones más intensos provenientes de una fuente pseudo-térmica.

Entonces se realizó la aproximación de que las cuentas provenientes de la distribución de Poisson solo se sumarían a las provenientes de la distribución de Bose cuando se midieren 0 cuentas de Bose.

En el algoritmo de simulación, pues, esto se realizó pidiendo que los valores que se fueran obteniendo del proceso de Metropolis correspondiente a la distribución de Poisson solo se sumasen, en un último paso, a las de la distribución de Bose cuando estos últimos fuesen idénticos a 0.

De esta manera, se fue iterando este algoritmo y guardando las cuentas obtenidas en cada paso hasta obtenerse los resultados que se pueden ver en la figura 15. Allí se ve el resultado de la simulación y el histograma con las mediciones originales.

Puede verse en esta figura que los resultados obtenidos de la simulación se aproximan mejor a las mediciones, si bien se notan aún diferencias significativas entre los dos; en particular se puede ver que en el valor de 2 fotones por integración da valores distintos.

Además, el parámetro λ utilizado para la Poisson de las cuentas de oscuridad no es el mismo que se obtuvo ajustando los datos de las mediciones en oscuridad, sino que se tomó $\lambda = 0,2$; este valor salió de observar cómo cambiaba la distribución simulada para distintos λ , y de ver cuál se ajustaba mejor a los datos.

4. Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos se pudo ver que para los casos donde $\frac{T_i}{\tau_c} \gg 1$, las distribuciones obtenidas sí se pueden describir con confianza por una distribución de Poisson.

Por otro lado, para casos de $\frac{T_i}{\tau_c} \ll 1$, el modelo mencionado en el marco teórico, es decir la distribución de Bose-Einstein, no dio resultados satisfactorios. Esto se debe a que las ocurrencias medidas en un T_i a causa de la fuente pseudo-térmica eran comparables con las del conteo a oscuras. Esto hace que en las mediciones se detecten la suma de 2 distribuciones comparables.

A través de simulaciones pudo observarse una mejor aproximación a las distribuciones obtenidas de las mediciones, asumiendo que, para pantallas de osciloscopio donde se midieron 0 cuentas provenientes de la fuente pseudo-térmica podía apreciarse el efecto de las cuentas oscuras; es decir, se midieron cuentas oscuras con una probabilidad descrita por una distribución de Poisson.

Si bien ésta aproximación no fue capaz de ajustarse a la perfección a los datos, sí permitió estudiar la posibilidad de haber medido una distribución de Bose, aún con ruido proveniente de la distribución de las cuentas de oscuridad.

Referencias

- [1] Martinez Ricci, M.L. et al. Photon counting statistics using a digital oscilloscope, *Am. J. Phys.* 75, pp 707-712. 2007
- [2] P. Koczyk, P. Wiewior, and C. Radzewicz, “Photon counting statistics—Undergraduate experiment,” *Am. J. Phys.* 64, 240–245. 1996.
- [3] Laboratorio 5. Conteo de eventos y estadística de fotones. [Guía laboratorio 5, Departamento de Física] Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

[4] Hamamatsu PHOTONICS K.K., Electron Tube Center. PHOTOMULTIPLIER TUBE 1P28. 1999.

[5] Thorlabs Corporation. ITC4000 Series Operation Manual. Thorlabs. 2021.

A. Apéndice

A.1. Cálculo de errores

Para las incertezas de los resultados calculados a partir del marco teórico se utilizó la fórmula de propagación de errores.

En cuanto a los errores de las magnitudes obtenidas del análisis de los datos experimentales se calcularon a partir del ajuste de los datos.