Funções de Várias Variáveis

Definição Uma **função f de duas variáveis** é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

Exemplo 1 Para cada uma das seguintes funções, calcule $f(3, 2)$ e encontre o domínio.

(a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$ (b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

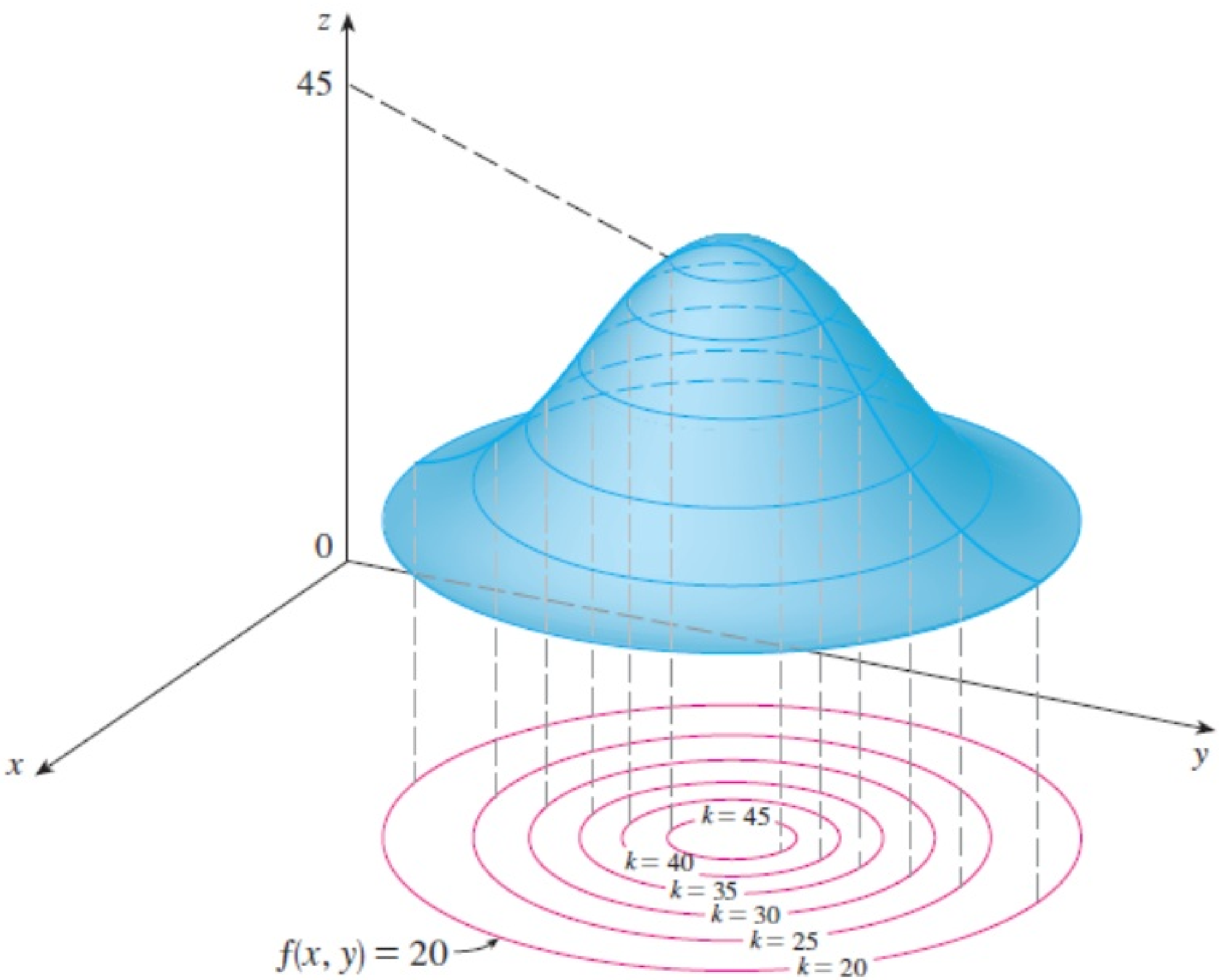
Exemplo 2 Determine o domínio e a imagem de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

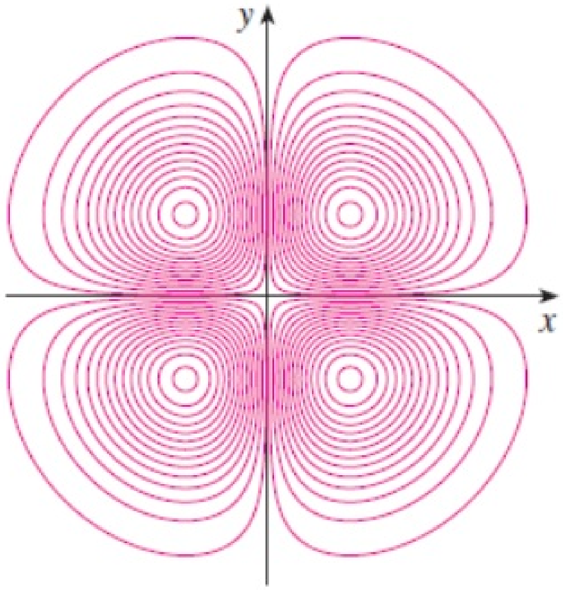
Definição Se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a D.

Exemplo 1 Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

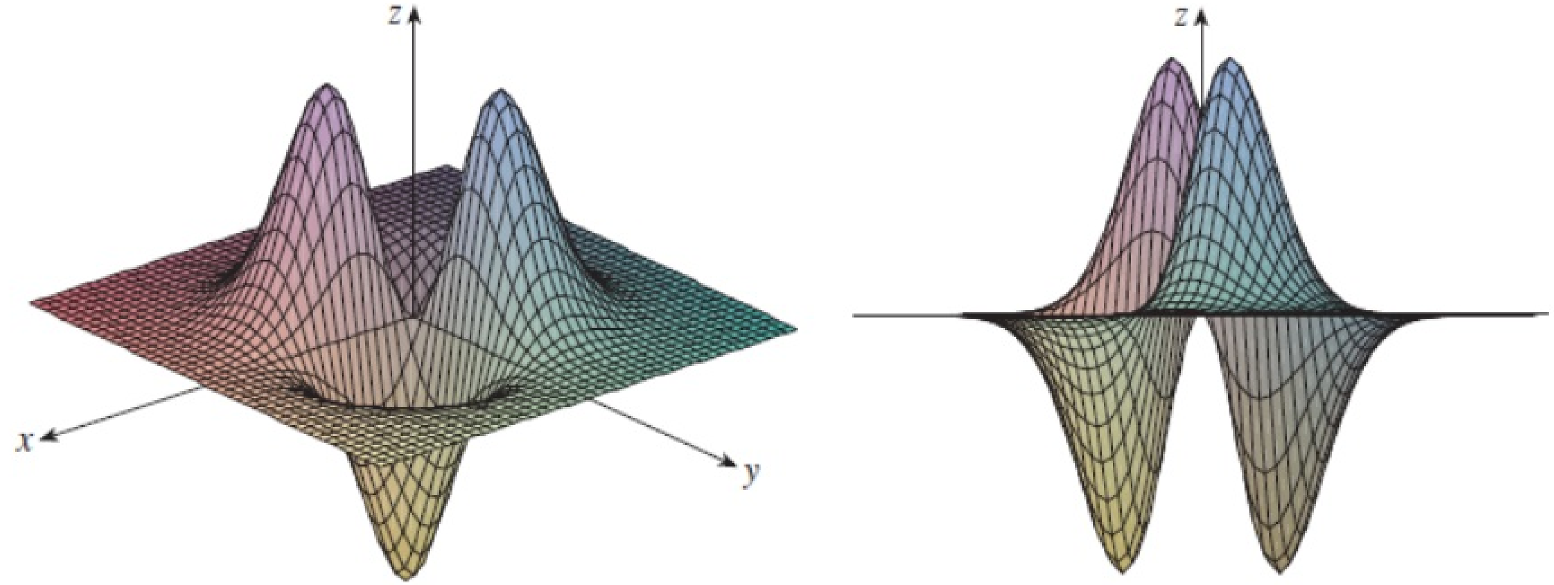
Exemplo 2 Esboce o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Definição As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

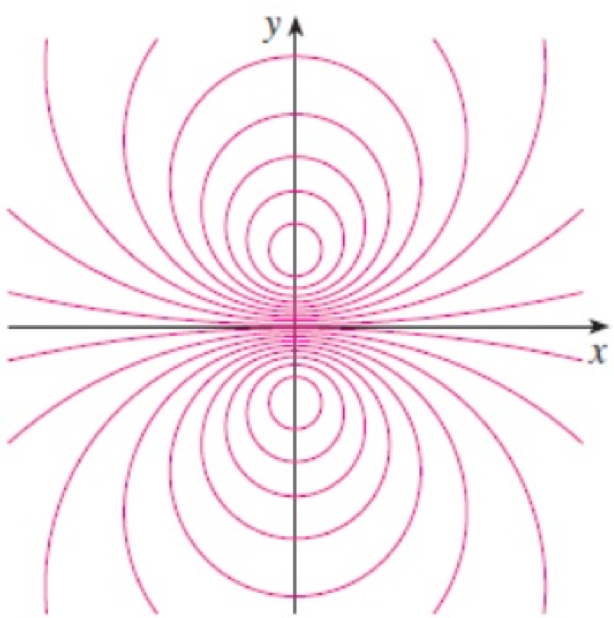




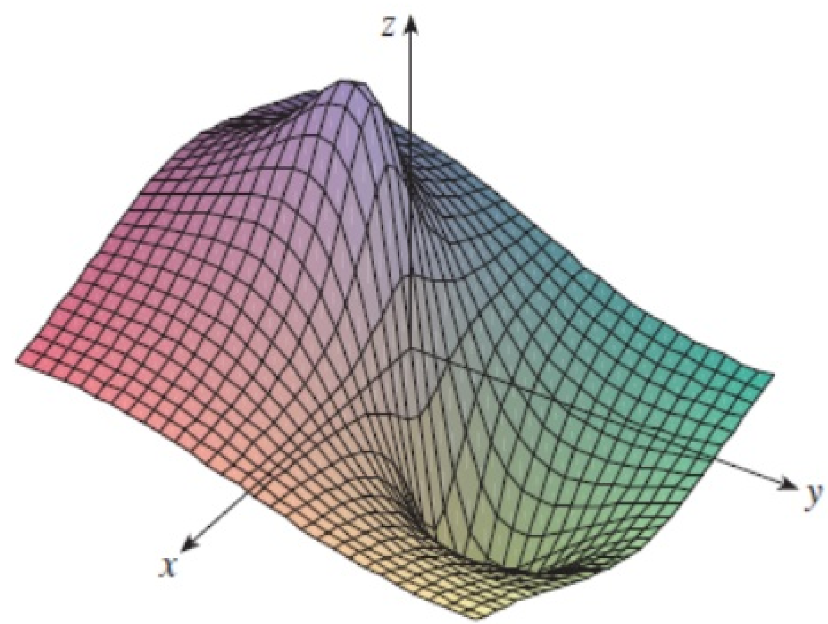
(a) Curvas de nível de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(b) Duas vistas de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(c) Curvas de nível de $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$



(d) $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

Exemplo 1 Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os valores $k = -6, 0, 6, 12$.

Exemplo 2 Esboce as curvas de nível da função

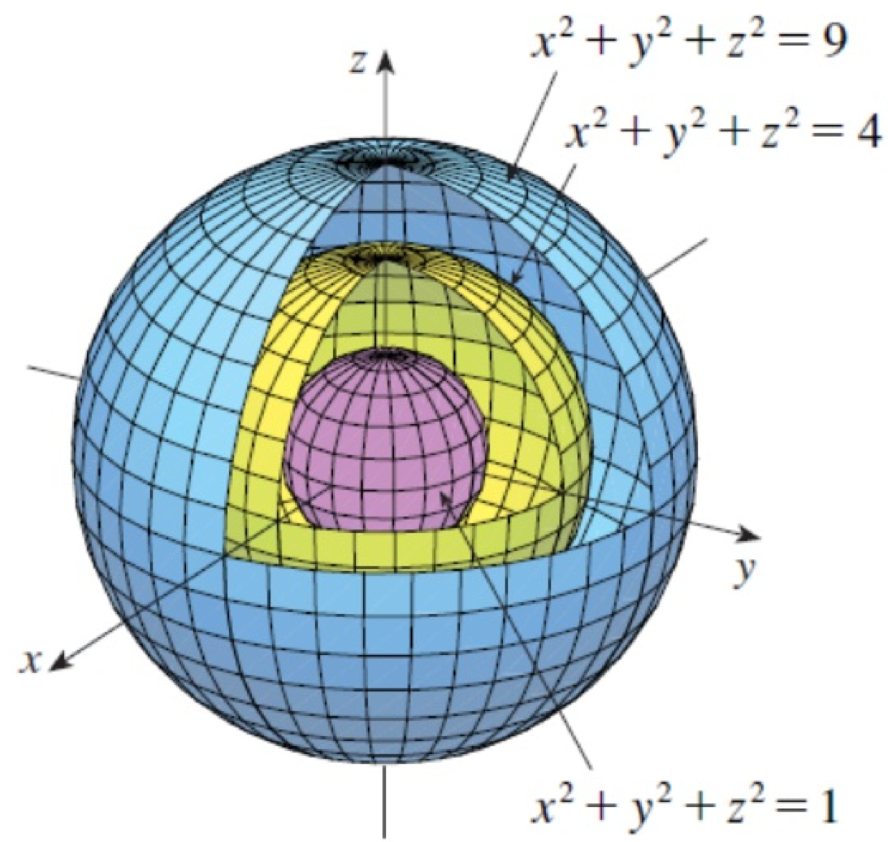
$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \text{para} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

Exemplo 3 Esboce algumas curvas de nível da função $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

Funções de três ou mais variáveis

Exemplo 1 Encontre o domínio de f se

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \text{ sen}$$



Exemplo 2 Encontre as superfícies de nível da função.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$$

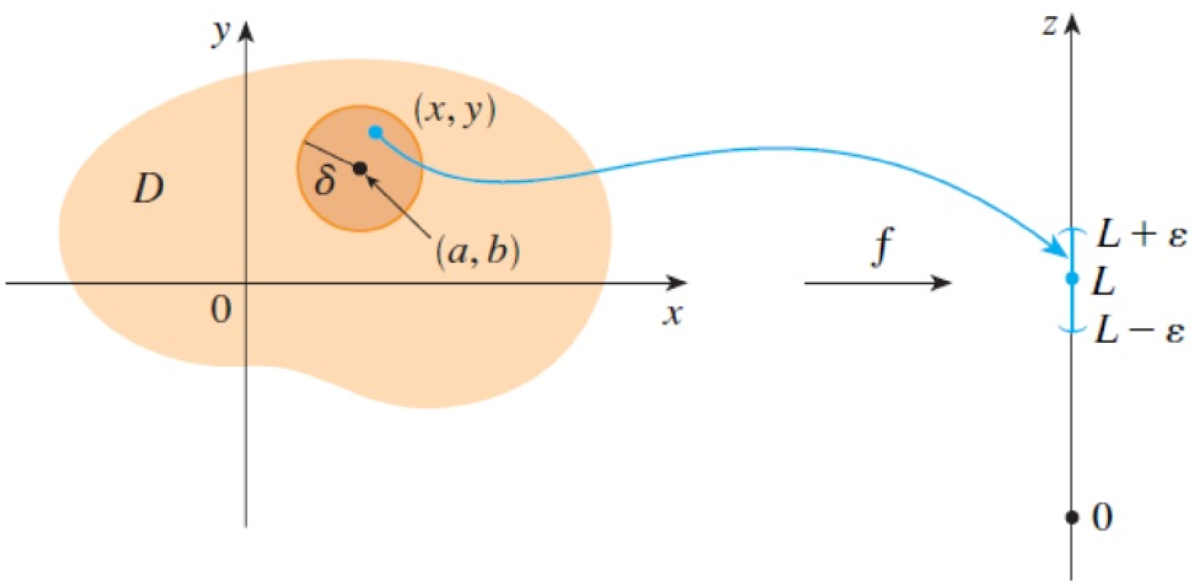
Limites e Continuidade

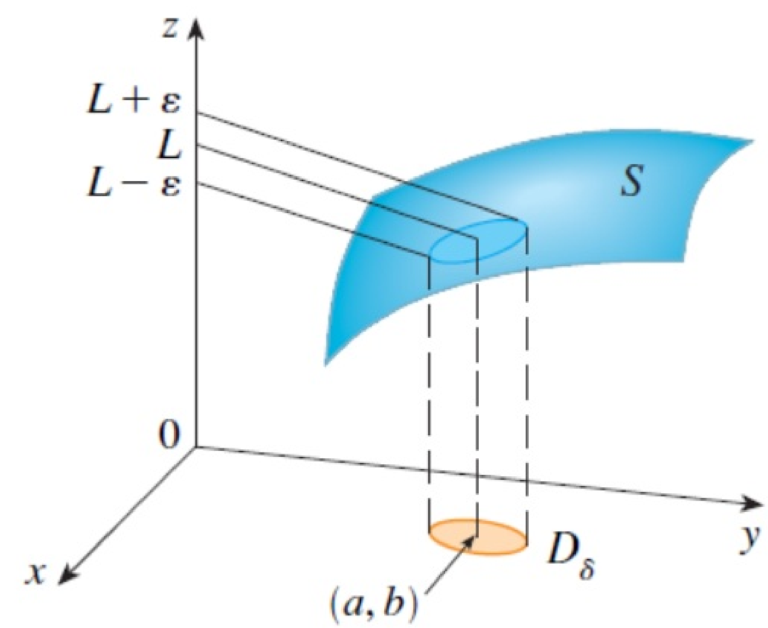
1 Definição Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b)** é L e escrevemos

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente de $\delta > 0$ tal que

$$\text{se}(x, y) \in D \quad \text{e} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad \text{então} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$





Se $f(x, y) \to L_1$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \to L_2$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ não existe.

Exemplo 1 Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

Exemplo 2 Se $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, será que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe?

Exemplo 3 Se $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$, será que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe?

Exemplo 4 Ache $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ se existir.

4 Definição Uma função f de duas variáveis é dita **contínua em** (a, b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que f é **contínua em** D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D.

Exemplo 1 Onde a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ é contínua?

Exemplo 2 Seja

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exemplo 3 Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Funções de três ou mais variáveis

5 Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \text{ então } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Derivadas Parciais

4 Se f é uma função de duas variáveis, suas **derivadas parciais** são as funções f_x e f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Notações para as Derivadas Parciais Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Exemplo 1 Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Exemplo 2 Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

Exemplo 3 Se $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1 + y}\right)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$

Exemplo 4 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

Exemplo 5 Determine f_x, f_y e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Derivadas de ordem superior

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Exemplo Determine as derivadas parciais de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

Teorema de Clairaut Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Equações Diferenciais

As derivadas parciais ocorrem em *equações diferenciais parciais* que exprimem certas leis físicas. Por exemplo, a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é denominada **equação de Laplace** em homenagem a Pierre Laplace (1749-1827). As soluções dessa equação são chamadas **funções harmônicas** e são muito importantes no estudo de condução de calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

Exemplo 1 Mostre que a função $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ é solução da equação de Laplace.

Exemplo 2 Verifique se a função $u(x, t) = \operatorname{sen}(x - at)$ satisfaz a equação de onda.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Regra da Cadeia

2 **A Regra da Cadeia (Caso 1)** Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função diferenciável de t e

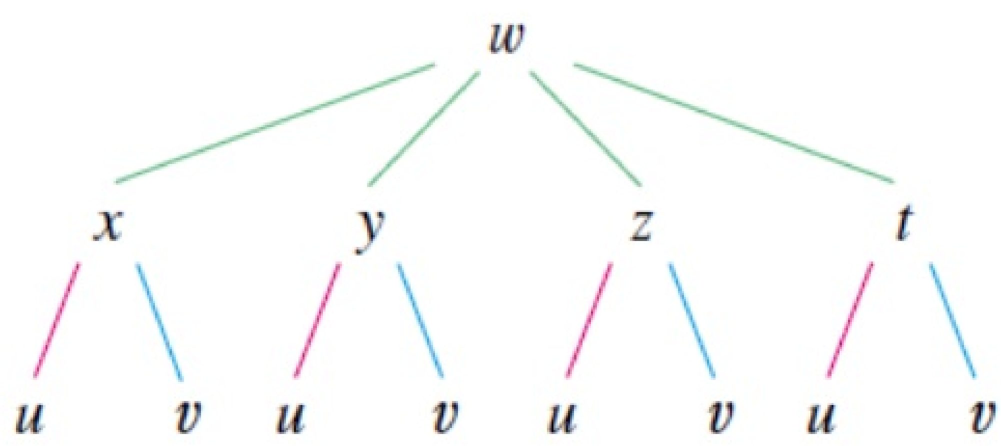
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Exemplo 1 Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \operatorname{sen} 2t$ e $y = \cos t$, determine dz/dt quando $t = 0$

3 **A Regra da Cadeia (Caso 2)** Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t.

Então

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$



Exemplo 2 Se $z = e^x \operatorname{sen} y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2t$, determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

Exemplo 3 Escreva a Regra da Cadeia para o caso onde $w = f(x, y, z, t)$ e $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ e $t = t(u, v)$.

Exemplo 4 Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine o valor de $\partial u/\partial s$ quando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

Exemplo 5 Se $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

Exemplo 6 Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, determine (a) $\partial z/\partial r$ e (b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

Diferenciação Implícita

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

Exemplo 1 Determine y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

Exemplo 2 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Derivadas Direcionais e Vetor Gradiente

2 Definição A **derivada direcionada** de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

3 Teorema Se f é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ e

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Exemplo 1 Encontre a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ e $\mathbf{u}$ é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \pi/6$. Qual será $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

8 **Definição** Se f é uma função de duas variáveis x e y, então o **gradiente** de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Exemplo 2 Se $f(x, y) = \operatorname{sen} x + e^{xy}$, então

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}}$$

Exemplo 3 Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2, -1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

Funções de três variáveis

10 Definição A **derivada direcionada** de f em (x_0, y_0, z_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

se esse limite existir.

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}}$$

Exemplo 1 Se $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$, (a) determine o gradiente de f e (b) determine a derivada direcional de f em $(1, 3, 0)$ na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

15 Teorema Suponha que f seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ é $|\nabla f(\mathbf{x})|$ ocorre quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

Exemplo 2 (a) Se $f(x, y) = xe^y$, determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.
(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

Exemplo 3 Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço seja dada por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, onde T é medida em graus Celsius e x, y e z em metros. Em que direção no ponto $(1, 1, -2)$ a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?

Planos Tangentes e Reta Normal

19 $$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Exemplo Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $(-2, 1, -3)$ ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

Planos Tangentes e Aproximações Lineares

2 Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Exemplo Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$.

7 **Definição** Se $z = f(x, y)$, então f é **diferenciável** em (a, b) se Δz puder ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

8 **Teorema** Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto do ponto (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é diferenciável em (a, b).

Exemplo Mostre que $f(x, y) = xe^{xy}$ é diferenciável em $(1, 0)$ e encontre sua linearização. Em seguida, use a linearização para aproximar $f(1,1, -0,1)$.

Diferenciais

$$dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Exemplo 1 (a) Se $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine a diferencial dz.

(b) Se x varia de 2 para 2,05 e y varia de 3 a 2,96, compare os valores de Δz e dz.

Exemplo 2 Foram feitas medidas do raio da base e da altura de um cone circular reto e obtivemos 10 cm e 25 cm, respectivamente, com possível erro nessas medidas de, no máximo, 0,1 cm. Utilize a diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone.

Exemplo 3 As dimensões de uma caixa retangular são medidas como 75 cm, 60 cm e 40 cm, e cada medida foi feita com precisão de 0,2 cm. Use diferenciais para estimar o maior erro possível quando calculamos o volume da caixa usando essas medidas.

Valores Máximo e Mínimo

1 **Definição** Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de $(a, b.)$ [Isso significa que $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos os pontos (x, y) em alguma bola aberta com centro (a, b).] O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo local**. Se $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ quando (x, y) está próximo (a, b), então f tem um **mínimo local** em (a, b) e $f(a, b)$ é um **valor mínimo local**.

2 **Teorema** Se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$.

Exemplo 1 Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Então

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Exemplo 2 Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

$\boxed{3}$ **Teste da Segunda Derivada** Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ [ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f]. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.

(b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.

(c) Se $D < 0$, então $f(a, b)$ não é mínimo local nem máximo local.

OBSERVAÇÃO 1 No caso (c) o ponto (a, b) é chamado **ponto de sela** de f e o gráfico de f cruza seu plano tangente em (a, b).

OBSERVAÇÃO 2 Se $D = 0$, não dá nenhuma informação: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a, b), ou (a, b) pode ser um ponto de sela de f.

OBSERVAÇÃO 3 Para lembrar a fórmula de D, é útil escrevê-la como um determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Exemplo 1 Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Exemplo 2 Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 10x^2 y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Exemplo 3 Determine a menor distância entre o ponto $(1, 0, -2)$ e o plano $x + 2y + z = 4$.

Exemplo 4 Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12\ m^2$ de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

8 **Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis** Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

9 Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2. Determine os valores extremos de f na fronteira de D.
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Exemplo 1 Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Multiplicadores de Lagrange

$$\boxed{\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)}$$

Método dos Multiplicadores de Lagrange Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeitos à restrição $g(x, y, z) = k$ [supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ sobre a superfície $g(x, y, z) = k$]:

(a) Determine todos os valores de x, y, z e λ tais que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

e

$$g(x, y, z) = k$$

(b) Calcule f em todos os pontos (x, y, z) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

Exemplo 1 Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m² de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

Exemplo 2 Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

Exemplo 3 Determine os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Exemplo 4 Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto $(3, 1, -1)$.

Duas Restrições

$$\boxed{\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)}$$

Exemplo Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da intersecção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.