Determinante e Matriz Inversa

Determinante

Definição

Dada uma permutação dos inteiros $1, 2, \cdots, n$, existe uma inversão quando um inteiro procede outro menor que ele.

Permutação	Nº de Inversões
$(1\ \ 2\ \ 3)$	0
$(1\ \ 3\ \ 2)$	1
$(2\ \ 1\ \ 3)$	1
$(2\ \ 3\ \ 1)$	2
$(3\ \ 1\ \ 2)$	2
$(3\ \ 2\ \ 1)$	3

Definição

O determinante de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é dado por

$$det\ A = det[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

onde $J = J(j_1, \cdots, j_n)$ é o número de inversões da permutação $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ e ρ indica a soma estendida a todas as $n!$ permutações de $(1\ 2\ \cdots\ n)$.

1ª Propriedade: Fila de zeros

Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada M foram iguais a zero, seu determinante será nulo, isto é, $det\ M = 0$.

2ª Propriedade: Fila iguais

Se os elementos correspondentes de duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada M foram iguais, seu determinante será nulo, isto é, $det\ M = 0$.

3ª Propriedade: Filas proporcionais

Se uma matriz quadrada M possui duas linhas (ou duas colunas) proporcionais, seu determinante será nulo, isto é, $det\ M = 0$.

4ª Propriedade: Multiplicação de uma fila por uma constante

Se todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) de uma matriz quadrada são multiplicados por um mesmo número real k, então seu determinante fica multiplicado por k.

5ª Propriedade: Multiplicação de uma matriz por uma constante

Se uma matriz quadrada de ordem n é multiplicada por um número real k, o seu determinante fica multiplicado por k^n, isto é:

$$\det\,(kM_n) = k^n . \det\, M_n$$

6ª Propriedade: Determinante da Matriz Transposta

O determinante de uma matriz quadrada M é igual ao determinante de sua transposta, isto é, $\det\, M = \det\, (M^t)$.

7ª Propriedade: Troca de filas paralelas

Se trocarmos de posição duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada M, o determinante da nova matriz obtida é o oposto do determinante da matriz anterior.

8ª Propriedade: Determinante da Matriz Triangular

O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

9ª Propriedade: Teorema de Binet

Sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem e AB a matriz produto, então $\det\ (AB) = (\det\ A).(\det\ B)$.

10ª Propriedade: Teorema de Jacobi

Seja A uma matriz quadrada. Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou coluna) pelo mesmo número e somarmos os resultados aos elementos correspondentes de uma outra linha (ou coluna), formando a matriz B, então

$$det\ A\ =\ det\ B$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\ A = 9 - 20 = -11$$

Multiplicando a $1^{\underline{a}}$ linha por -2 e somando os resultados com a $2^{\underline{a}}$ linha, obtemos:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\ B = -1 - 10 = -11,$$ ou seja, $det\ A =\ det\ B$.

Desenvolvimento de Laplace

Se A é uma matriz quadrada, podemos calcular o determinante de A como segue

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

com $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, onde A_{ij} é a submatriz da inicial em que a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas.

Exemplo 1

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2).\Delta_{12} + 1.\Delta_{22} + (-1).\Delta_{32}$$

Exemplo 2

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.\Delta_{31} + 0.\Delta_{32} + 1.\Delta_{33}$$

Exemplo 3

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Adjunta

Definição: Matriz de Cofatores

Dada uma matriz A, lembramos que o cofator Δ_{ij} do elemento a_{ij} da matriz é $(-1)^{i+j}\det A_{ij}$, onde A_{ij} é a submatriz de A, obtida extraindo a i-ésima linha e j-ésima coluna. Com estes cofatores podemos formar uma nova matriz A, denominada matriz dos cofatores de A.

$$\bar{A} = [\Delta_{ij}]$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19$$

Então, $\bar{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$

Definição

Dada uma matriz quadrada A, chamaremos de matriz adjunta de A à transposta da matriz dos cofatores de A.

$$adj\ A = \bar{A}^t$$

No exemplo anterior

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Vamos efetuar, $A.Adj\ A$.

$$A.Adj\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix}$$

Além disto, podemos verificar que $det\ A = -19$. Então $A.Adj\ A = (\det A).I_3$.

Teorema

$$A.\bar{A}^t = A.(Adj\ A) = (\det A).I_n$$

Definição

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A a uma matriz B tal que $A.B = B.A = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Escrevemos A^{-1} para a matriz inversa de A.

Exemplo 1

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Então $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Exemplo 2

Seja $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$.

Teorema

Uma matriz quadrada A admite uma inversa se, e somente se $det\ A \neq 0$.

Neste caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj\ A)$$

Regra de Cramer

Exemplo

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x \qquad\quad + 3z = 5 \\ \qquad 2y - \ z = 0 \end{cases}$$

Processo de Inversão de Matrizes

Exemplo 1

Determine a matriz inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Determine a matriz inversa:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3

Determine a matriz inversa:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$