Introdução à Integração

- Primitivas
- Integrais
- O Problema da Área
- O Problema da Distância

Primitivas

Já estudamos como encontrar a derivada de uma função. No entanto, muitos problemas exigem que recuperemos uma função a partir de sua derivada conhecida (a partir de sua taxa de variação conhecida).

Por exemplo, podemos saber a função velocidade de um objeto que cai a partir de uma altura inicial e precisar saber sua altura em um instante qualquer ao longo de determinado período.

Falando de maneira mais genérica, queremos encontrar uma função F a partir de sua derivada f.

Se tal função F existir, será denominada ***primitiva ou Antiderivada da função f.***

Definição

Uma função F é denominada uma *primitiva* de f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Exemplo:

Seja $f(x) = x^2$.

Qual a primitiva de f?

Não é difícil descobrir uma primitiva de f se tivermos em mente a Regra da Potência.

De fato, se $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, logo $F'(x) = x^2 = f(x)$.

A função $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ também satisfaz $G'(x) = x^2$.

Portanto, F e G são primitivas de f.

De fato, qualquer função da forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, onde C é uma constante, é uma primitiva de f.

$\boxed{1}$ **Teorema** Se F é uma primitiva de f em um intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é

$$F(x) + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Voltando à função $f(x) = x^2$, vemos que a primitiva geral de f é $\frac{1}{3}x^3 + C$.

Atribuindo valores específicos para a constante C, obtemos uma família de funções cujos gráficos são translações verticais uns dos outros (veja a Figura 1).

Isso faz sentido, pois cada curva deve ter a mesma inclinação em qualquer valor dado de x.

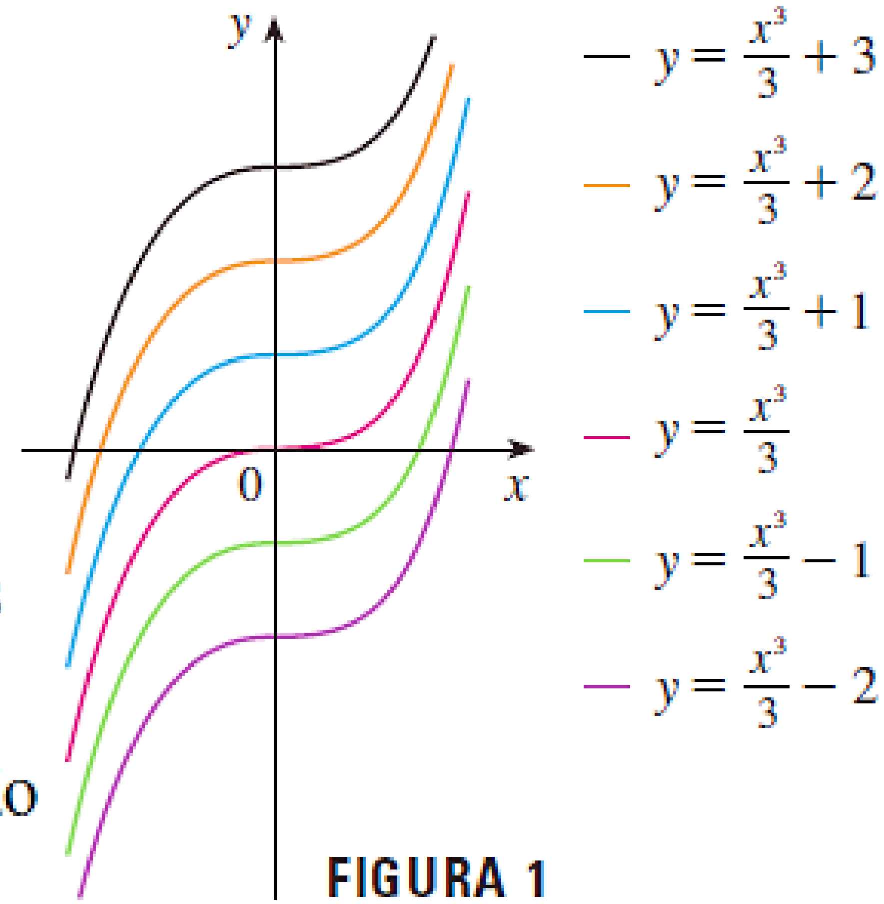


FIGURA 1

Tabela de Fórmulas de Primitivação

Função	Primitiva particular	Função	Primitiva particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec x \operatorname{tg} x$	$\sec x$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{tg}^{-1} x$
e^x	e^x	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$		

Para obtermos a primitiva mais geral (em um intervalo) a partir daquelas da Tabela, devemos adicionar uma constante (ou constantes)

Exemplos

1. Encontre todas as funções g tais que $g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \dfrac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$

Queremos achar uma primitiva de:

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Assim, queremos descobrir a primitiva de

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

Usando as fórmulas da Tabela 2 junto com o Teorema 1, obtemos

$$g(x) = 4(-\cos x) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -4 \cos x + \tfrac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C$$

2. Encontre f se $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ e $f(0) = -2$.

A primitiva geral de

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2}$$

é

$$f(x) = e^x + 20 \operatorname{tg}^{-1} x + C$$

Para determinarmos C, usamos o fato de que $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20 \operatorname{tg}^{-1} 0 + C = -2$$

Assim, temos $C = -2 - 1 = -3$; logo, a solução particular é

$$f(x) = e^x + 20 \operatorname{tg}^{-1} x - 3$$

Movimento Retilíneo

A primitivação é particularmente útil na análise do movimento de um objeto que se move em uma reta. Lembre-se de que se o objeto tem função posição $s = f(t)$, então a função velocidade é $v(t) = s'(t)$. Isso significa que a função posição é uma primitiva da função velocidade.

Da mesma maneira, a função aceleração é $a(t) = v'(t)$; logo, a função velocidade é uma primitiva da aceleração. Se a aceleração e os valores iniciais $s(0)$ e $v(0)$ forem conhecidos, então a função posição pode ser determinada encontrando primitivas duas vezes.

Exemplo

Uma partícula move-se em uma reta e tem aceleração dada por $a(t) = 6t + 4$. Sua velocidade inicial é $v(0) = -6$ cm/s, e seu deslocamento inicial é $s(0) = 9$ cm. Encontre sua função posição $s(t)$.

Como $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, a primitivação dá

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Observe que $v(0) = C$. Mas nos é dado que $v(0) = -6$, assim $C = -6$ e

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Uma vez que $v(t) = s'(t)$, s é a primitiva de v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Isso dá $s(0) = D$. Temos $s(0) = 9$, logo $D = 9$ e a função posição pedida é

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9$$

Integrais

Começaremos com os problemas de área e de distância e os utilizaremos para formular a ideia de integral definida, que é o conceito básico do cálculo integral.

Veremos como usar a integral para resolver os problemas relativos a volumes, comprimentos de curvas, predições populacionais, entre muitos outros.

Há uma conexão entre o cálculo integral e o diferencial. O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona a integral com a derivada e veremos que isso simplifica bastante a solução de muitos problemas.

O Problema da Área

Encontre a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a até b.
Isso significa que S, ilustrada na Figura 1, está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde $f(x) \geqslant 0$], pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x.

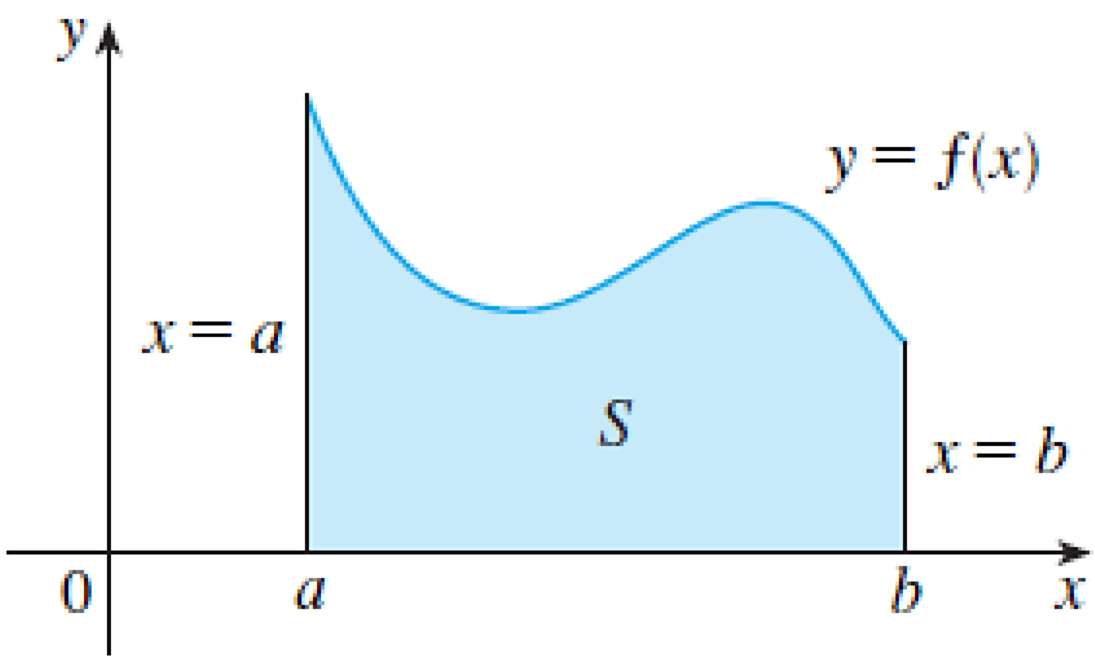


FIGURA 1

$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Para um retângulo, a área é definida como o produto do comprimento e da largura. A área de um triângulo é a metade da base vezes a altura. A área de um polígono pode ser encontrada dividindo-o em triângulos (como na Figura 2) e a seguir somando-se as áreas dos triângulos.

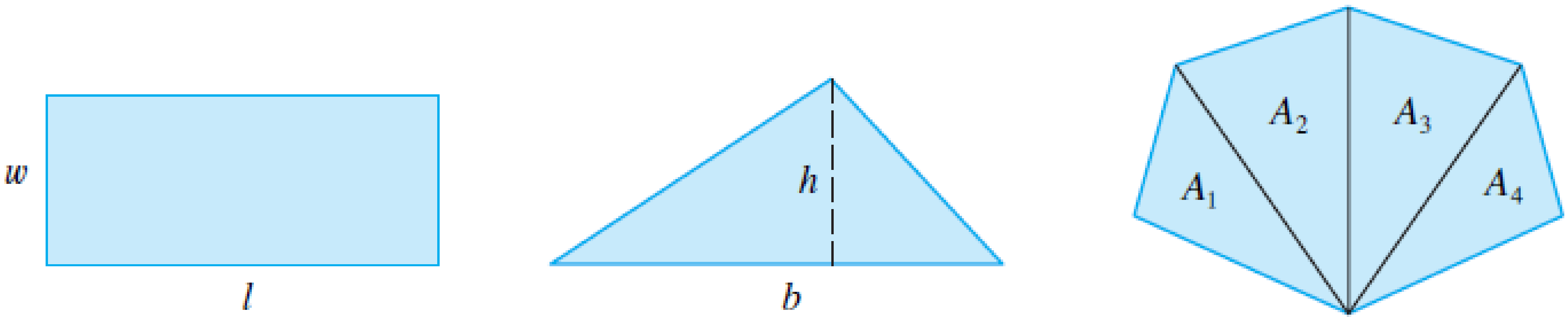


FIGURA 2

$A = lw$ $\qquad$ $A = \frac{1}{2}bh$ $\qquad$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Exemplo

Use retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 3).

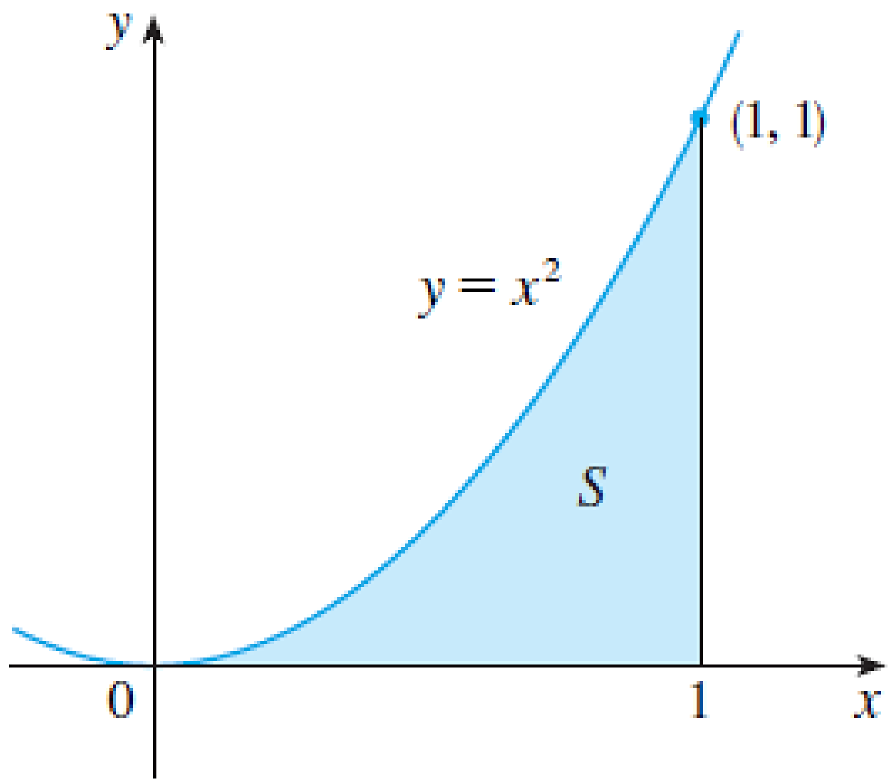


FIGURA 3

Observamos primeiro que a área de S deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1, mas certamente podemos fazer melhor que isso. Suponha que S seja dividida em quatro faixas S_1, S_2, S_3 e S_4, traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4}$, como na Figura 4(a).

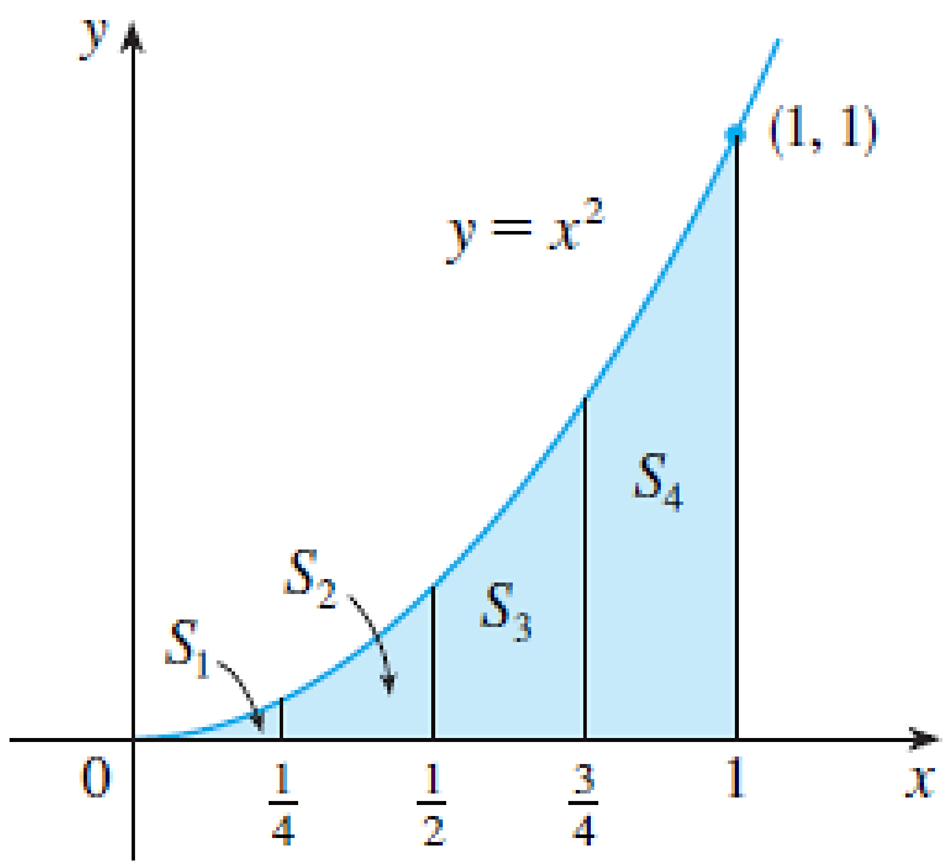


FIGURA 4 (a)

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa [veja a Figura 4(b)]. Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nas extremidades *direitas* dos subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $[\frac{3}{4}, 1]$.

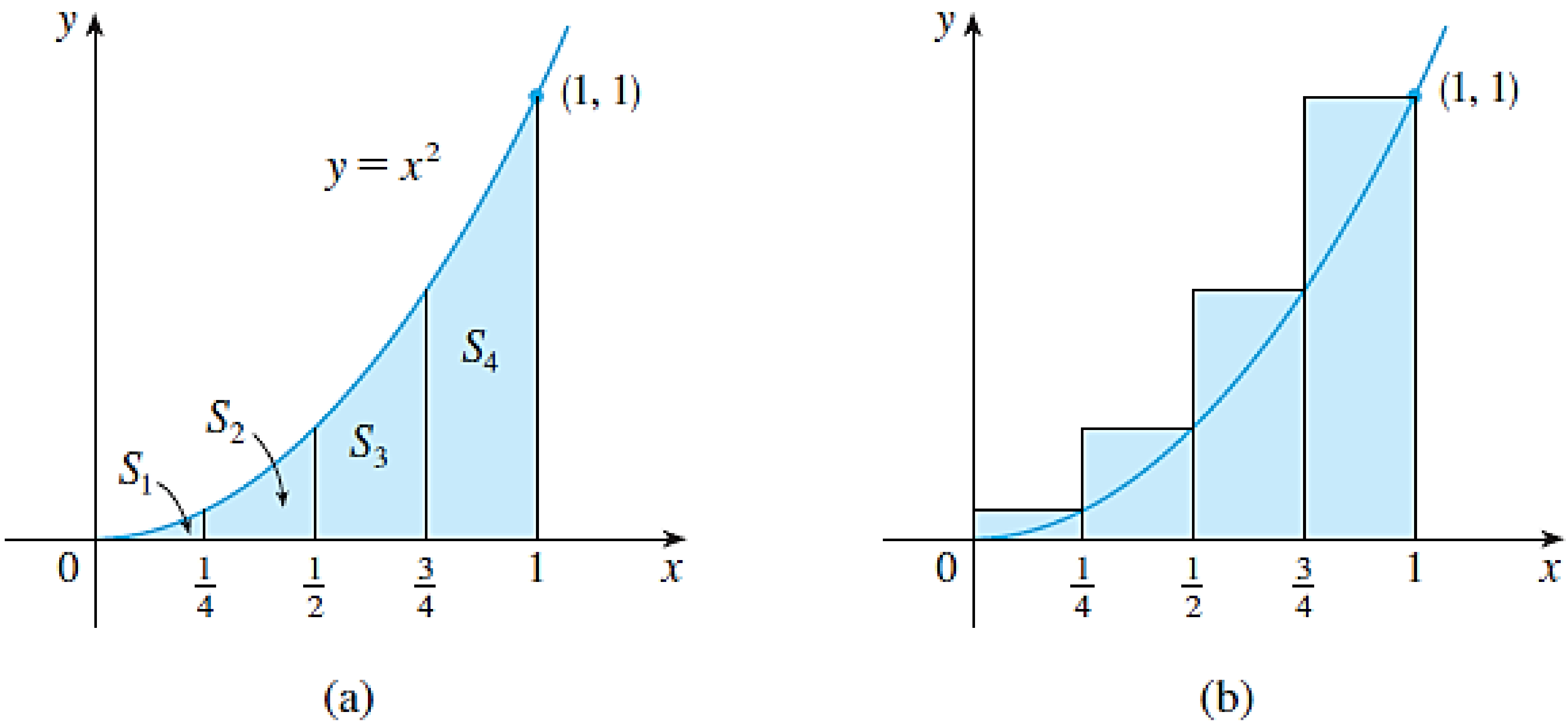


FIGURA 4

Cada retângulo tem largura de $\frac{1}{4}$ e altura de $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ e 1^2. Se R_4 for a soma das áreas dos retângulos aproximantes, teremos

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0{,}46875$$

Da Figura 4(b) vemos que a área A de S é menor que R_4, logo

$$A < 0{,}46875$$

Em vez de usarmos os retângulos na Figura 4(b), poderíamos usar os retângulos menores na Figura 5, cujas alturas seguem os valores de f nas extremidades *esquerdas* dos subintervalos. (O retângulo mais à esquerda desapareceu, pois sua altura é 0.) A soma das áreas desses retângulos aproximantes é

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0{,}21875$$

Vemos que a área de S é maior que L_4 e, então, temos estimativas inferior e superior para A:

$$0{,}21875 < A < 0{,}46875$$

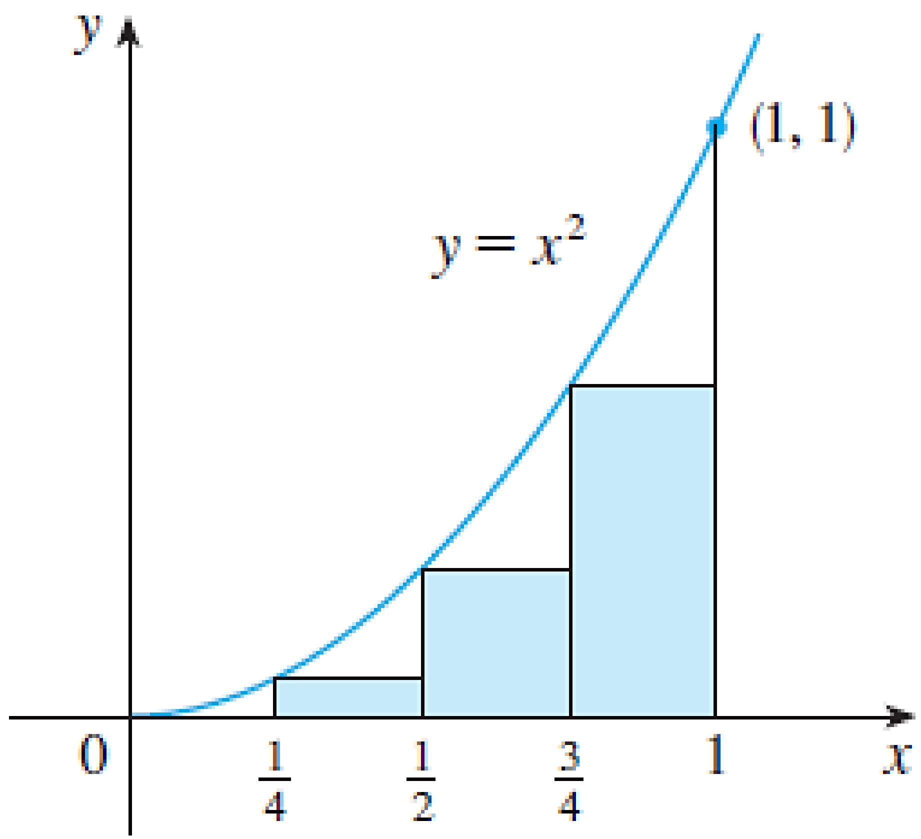
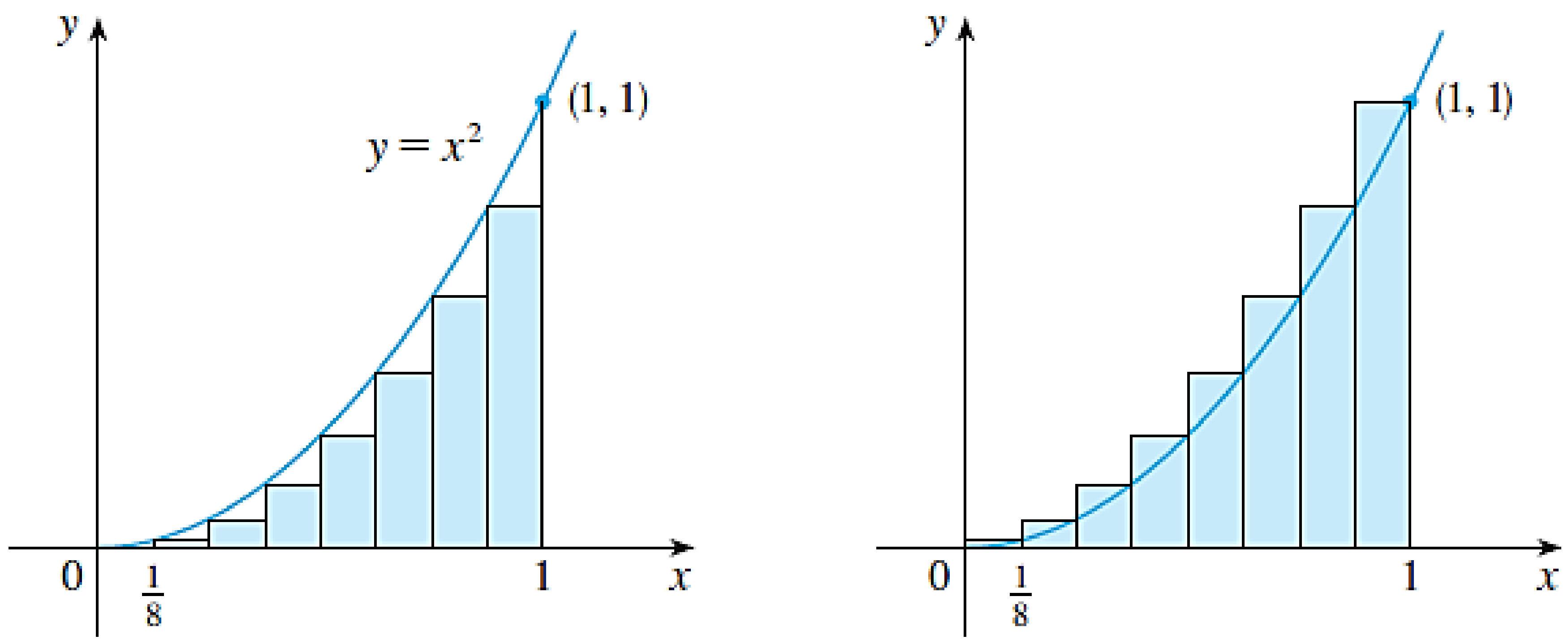


FIGURA 5

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de faixas. A Figura 6 mostra o que acontece quando dividimos a região S em oito faixas com a mesma largura.



(a) Usando as extremidades esquerdas

(b) Usando as extremidades direitas

FIGURA 6
Aproximando S por 8 retângulos

Calculando a soma das áreas dos retângulos menores (L_8) e a soma das áreas dos retângulos maiores (R_8), obtemos estimativas inferior e superior melhores para A:

$$0{,}2734375 < A < 0{,}3984375.$$

Assim, uma resposta possível para a questão é dizer que a verdadeira área de S está em algum lugar entre 0,2734375 e 0,3984375.

Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de faixas. A tabela na lateral mostra os resultados de cálculos similares (com um computador) usando n retângulos cujas alturas são encontradas com as extremidades esquerdas (L_n) ou com as extremidades direitas (R_n).

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

Em particular, vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434. Com 1000 faixas conseguimos estreitar a desigualdade ainda mais: A está entre 0,3328335 e 0,3338335. Uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números: $A \approx 0{,}3333335$.

Essas faixas dividem o intervalo [a, b] em n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. As extremidades direitas dos subintervalos são

$$x_1 = a + \Delta x,$$

$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$

$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$

$$\vdots$$

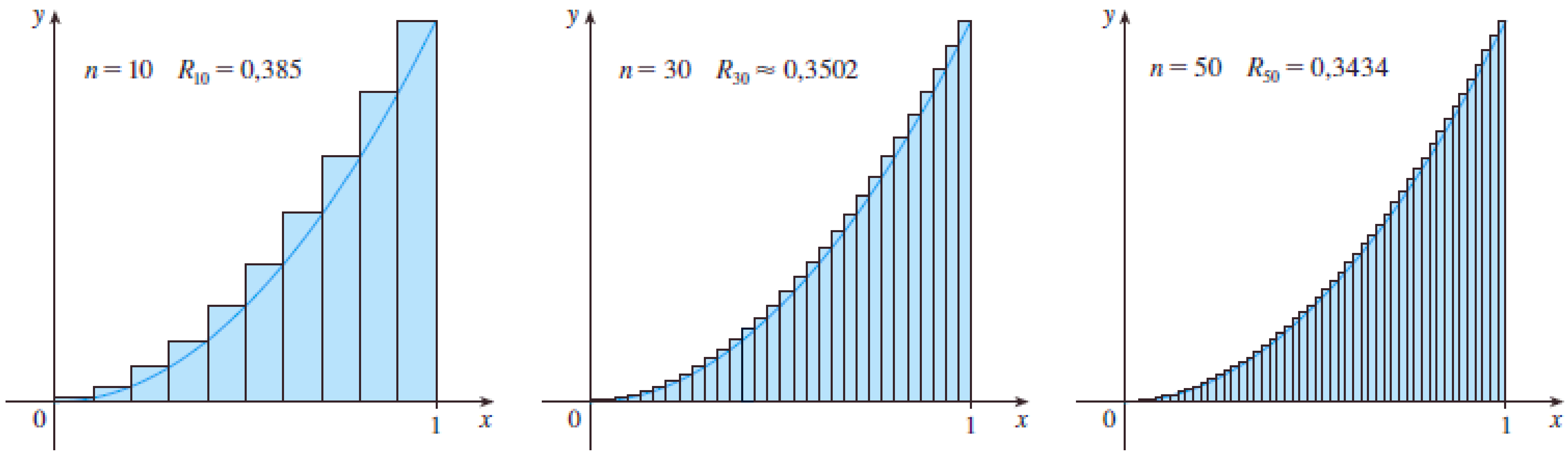


FIGURA 8 As extremidades da direita produzem somas superiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

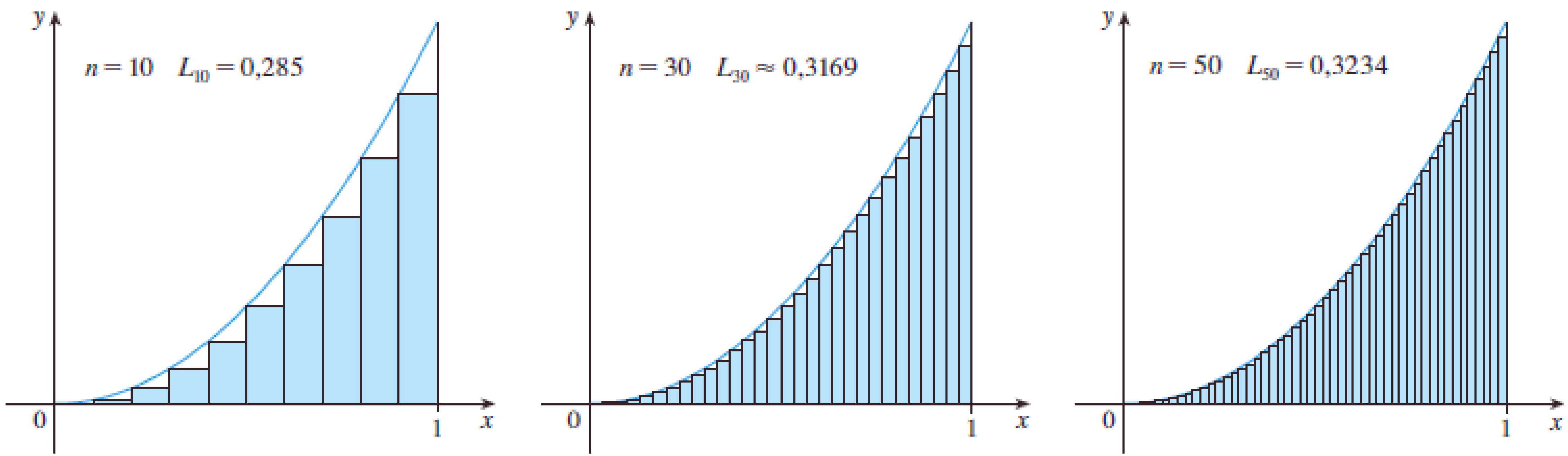


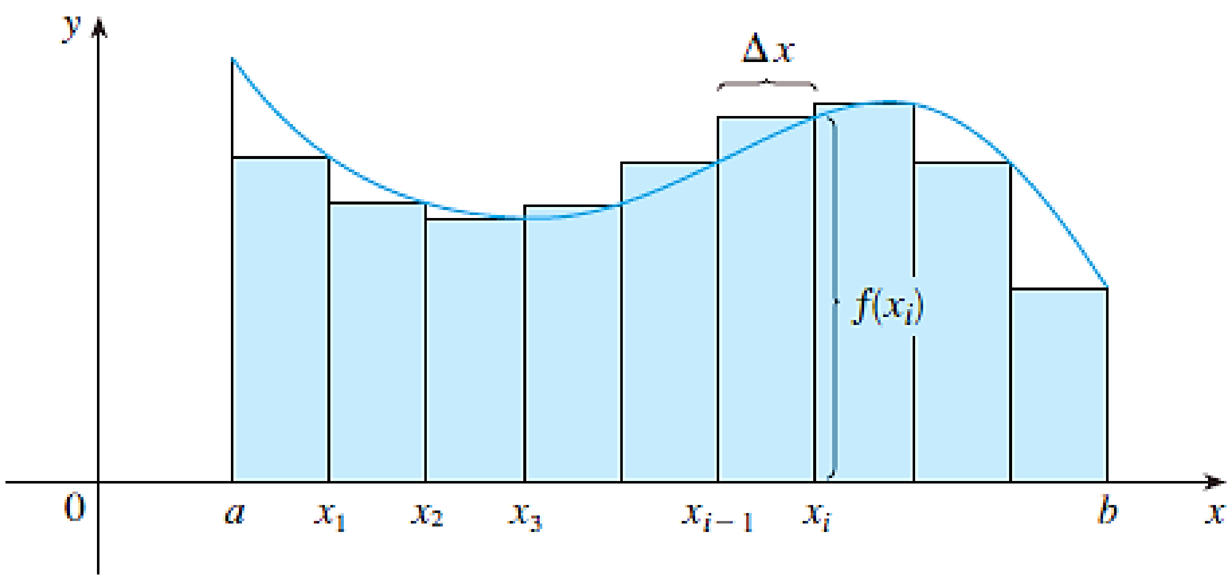
FIGURA 9 As extremidades da direita produzem somas inferiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Das Figuras 8 e 9, parece que conforme n aumenta, ambos L_n e R_n se tornam aproximações cada vez melhores da área de S. Portanto, *definimos* a área A como o limite das somas das áreas desses retângulos aproximantes, isto é,

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

Definição A **área** A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

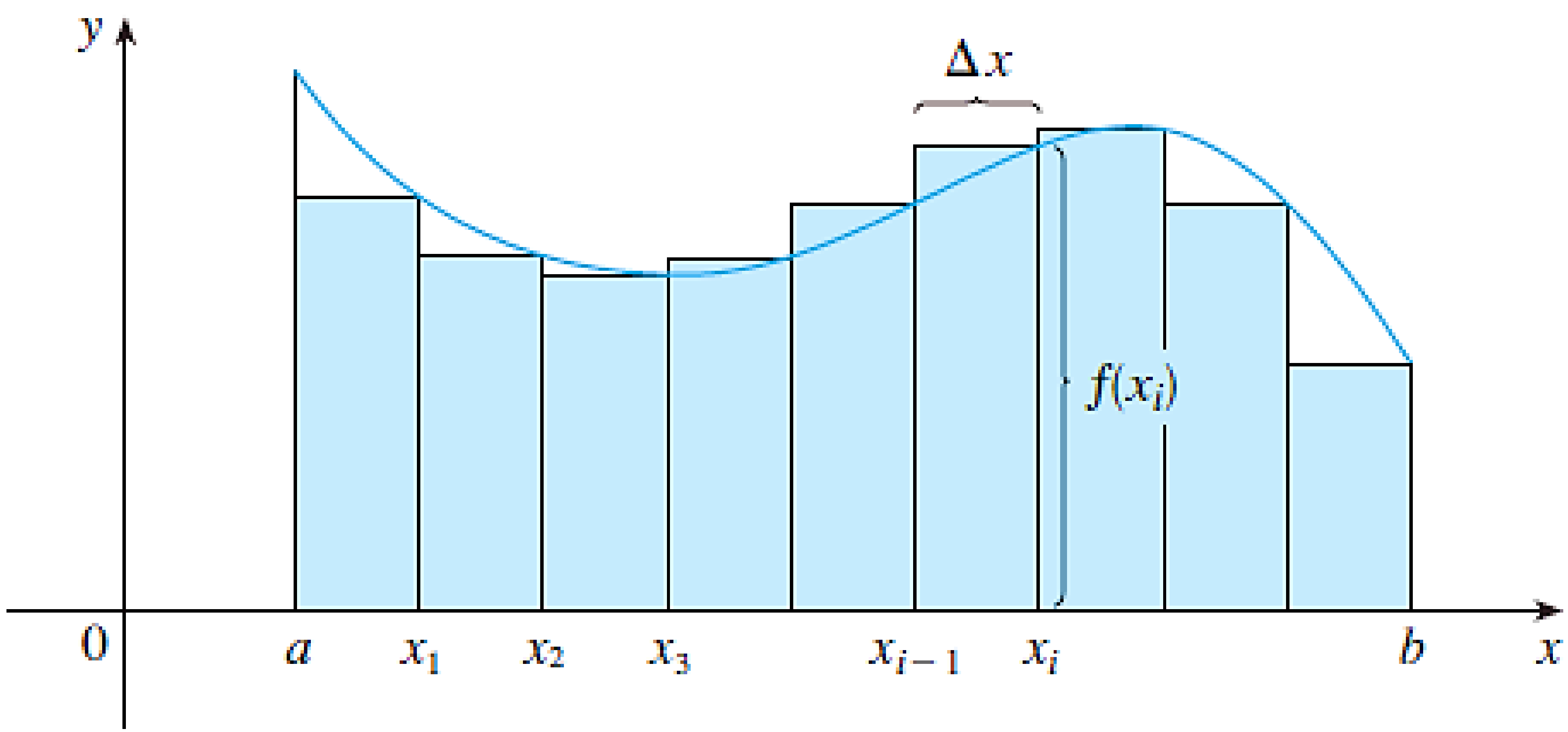


A largura do intervalo $[a, b]$ é $b - a$; assim, a largura de cada uma das n faixas é

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Frequentemente usamos a **notação de somatório** (notação sigma) para escrever somas de muitos termos de maneira mais compacta. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$



O Problema da Distância

Vamos considerar agora o problema da distância: encontre a distância percorrida por um objeto durante um certo período de tempo, sendo que a velocidade do objeto é conhecida em todos os instantes. (De certa forma esse é o problema inverso do problema da velocidade que já discutimos na Seção de derivadas).

Se a velocidade permanece constante, então o problema de distância é fácil de resolver por meio da fórmula

$$\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}.$$

Mas se a velocidade variar, não é tão fácil determinar a distância percorrida. Vamos investigar o problema no exemplo a seguir.

Exemplo

Suponha que queiramos estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo de 30 segundos. A cada 5 segundos registramos a leitura do velocímetro na seguinte tabela:

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (km/h)	27	34	38	46	51	50	45

Para termos o tempo e a velocidade em unidades consistentes, vamos converter a velocidade para metros por segundo (1 km/h = 1 000/3 600 m/s):

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (m/s)	7,5	9,4	10,6	12,8	14,2	13,9	12,5

Durante os cinco primeiros segundos a velocidade não varia muito, logo, podemos estimar a distância percorrida durante esse tempo supondo que a velocidade seja constante. Se tomarmos a velocidade durante aquele intervalo de tempo como a velocidade inicial (7,5 m/s), então obteremos aproximadamente a distância percorrida durante os cinco primeiros segundos:

$$7{,}5 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 37{,}5 \text{ m.}$$

Analogamente, durante o segundo intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente constante, e vamos considerá-la quando $t = 5s$.

Assim, nossa estimativa para a distância percorrida de $t = 5\,s$ até $t = 10\,s$ é

$$9{,}4 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 47 \text{ m.}$$

Adicionando estimativas similares para os outros intervalos de tempo, obtemos uma estimativa para a distância total percorrida:

$$(7{,}5 \times 5) + (9{,}4 \times 5) + (10{,}6 \times 5) + (12{,}8 \times 5) + (14{,}2 \times 5) + (13{,}9 \times 5) = 342 \text{ m.}$$

Podemos, da mesma forma, usar a velocidade no fim de cada intervalo de tempo em vez de no começo como a velocidade constante. Então, nossa estimativa se torna

$$(9{,}4 \times 5) + (10{,}6 \times 5) + (12{,}8 \times 5) + (14{,}2 \times 5) + (13{,}9 \times 5) + (12{,}5 \times 5) = 367 \text{ m.}$$

Se quisermos uma estimativa mais precisa, podemos tomar as leituras de velocidade a cada 2 segundos ou até mesmo a cada segundo.

Talvez os cálculos no Exemplo anterior o façam lembrar-se das somas usadas anteriormente para estimar as áreas.

A similaridade tem explicação quando esboçamos um gráfico da função velocidade do carro na Figura 17 e traçamos os retângulos cujas alturas são as velocidades iniciais para cada intervalo de tempo.

A área do primeiro retângulo é $7{,}5 \times 5 = 37{,}5$, que é também a nossa estimativa para a distância percorrida nos primeiros cinco segundos.

De fato, a área de cada retângulo pode ser interpretada como uma distância, pois a altura representa a velocidade, a largura e o tempo. A soma das áreas dos retângulos na Figura 17 é $L_6 = 342$, que é nossa estimativa inicial para a distância total percorrida.

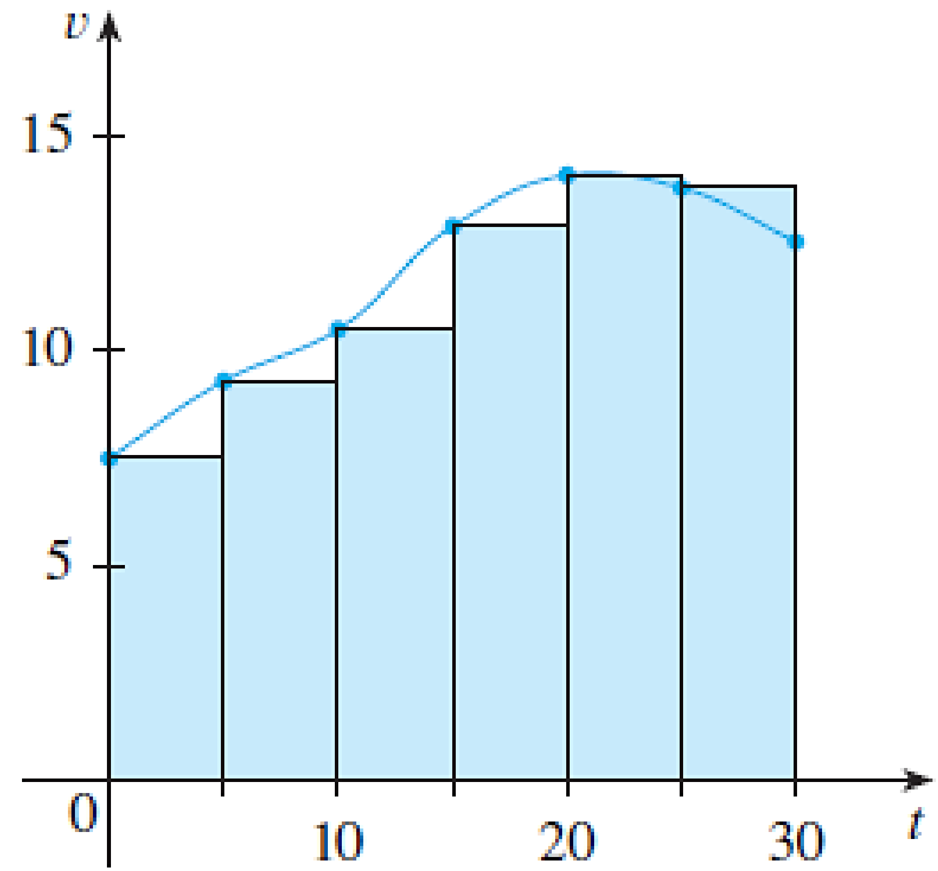


FIGURA 17

Em geral, suponha que o objeto se mova com velocidade $v = f(t)$, em que $a \leq t \leq b$ e $f(t) \geq 0$ (logo, o objeto move-se sempre no sentido positivo).

Vamos registrar as velocidades nos instantes

$$t_0\,(= a),\, t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_n\,(= b),$$

de forma que a velocidade seja aproximadamente constante em cada subintervalo.

Se esses tempos forem igualmente espaçados, então entre duas leituras consecutivas temos o período de tempo .

$$\Delta t = (b - a)/n.$$

Durante o primeiro intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente $f(t_0)$ e, portanto, a distância percorrida é de aproximadamente $f(t_0)\Delta t$.

Analogamente, a distância percorrida durante o segundo intervalo de tempo é de cerca de $f(t_1)\Delta t$ e a distância total percorrida durante o intervalo de tempo $[a, b]$ é de aproximadamente

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t.$$

Se usarmos as velocidades nas extremidades direitas em vez de nas extremidades esquerdas, nossa estimativa para a distância total ficará

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t.$$

Quanto mais frequentemente medirmos a velocidade, mais precisa será nossa estimativa, então parece plausível que a distância exata d percorrida é o limite de tais expressões:

$$\boxed{5} \qquad d = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\, \Delta t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta t.$$

Como a Equação 5 tem a mesma forma que nossas expressões para a área,

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\, \Delta x + f(x_2)\, \Delta x + \cdots + f(x_n)\, \Delta x]$$

segue que a distância percorrida é igual à área sob o gráfico da função velocidade.

Resulta que esse mesmo tipo de limite ocorre em uma grande variedade de situações, mesmo quando não é necessariamente uma função positiva.

Daremos, portanto, a esse tipo de limite um nome e notação especiais.

Exercícios

Seção 4.9 – pág. 315

Seção 5.1 – pág. 334