RETA

PROFESSORA FABIANA PIMENTA DE SOUZA

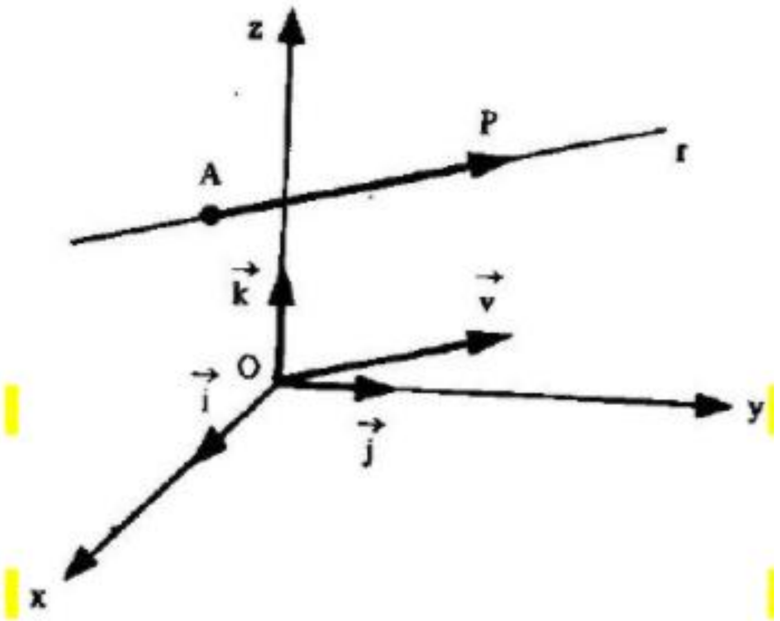
EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA

- Considere um ponto A(x_0, y_0, z_0) e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$.
- Só existe uma reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.
- Um ponto P (x, y, z) pertence a r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$, isto é

  - $\overrightarrow{AP} = \mathrm{t}\vec{v},$

para algum real t.

EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA



$\overrightarrow{AP} = \mathrm{t}\vec{v},$

$P - A = \mathrm{t}\vec{v},$

$P = A + \mathrm{t}\vec{v},$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \mathrm{t}(a, b, c);$

O vetor $\vec{v}$ é chamado **vetor diretor da reta** r e t é denominado **parâmetro.**

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Sabemos pela equação vetorial da reta que:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \mathrm{t}(a, b, c);$$

Logo,

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

As equações anteriores são chamadas **equações paramétricas da reta.**

EXEMPLO 1

- Determine a equação vetorial e as equações paramétricas da reta r que passa por

A(1,-1,4) e tem a direção de $\vec{v} = (2,3,2)$.

Solução:

$$(x, y, z) = (1,-1,4) + \mathrm{t}(2,3,2)$$ **Equação vetorial**

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$ **Equações paramétricas**

EXEMPLO 2

- Dado o ponto A(2,3,-4) e o vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$, pede-se:

a) Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$;

b) Encontrar os pontos B de r de parâmetros t = 1;

c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4;

d) Verificar se o ponto E(5,-4,3) pertencem a r;

e) Determinar para que valores de m e n o ponto F(m,5,n) pertencem a r.

EXEMPLO 2

Solução:

a)

$$(x, y, z) = (2{,}3 - 4) + \mathrm{t}(1, -2{,}3)$$ Equação vetorial

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$ Equações paramétricas

EXEMPLO 2

Encontrar os pontos B de r de parâmetros t = 1;

Solução:

b) Para t = 1

$$\begin{cases} x = 2 + 1 = 3 \\ y = 3 - 2.1 = 1 \\ z = -4 + 3.1 = -1 \end{cases}$$

Portanto, B(3,1,-1)

EXEMPLO 2

Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4;

Solução:

c) Sabemos que $x = 4$

$$\begin{cases} x = 2 + t \Longrightarrow 4 = 2 + t \Rightarrow t = 2 \\ y = 3 - 2t \Rightarrow y = -1 \\ z = -4 + 3t \Rightarrow z = 2 \end{cases}$$

Portanto, P(4,-1,2)

EXEMPLO 2

Verificar se o ponto E(5,-4,3) pertencem a r;

Solução:

d) E(5,-4,3) $\in r$

$$\begin{cases} x = 2 + t \Longrightarrow 5 = 2 + t \Rightarrow \boldsymbol{t = 3} \\ y = 3 - 2t \Rightarrow -4 = 3 - 2t \Rightarrow \boldsymbol{t = \frac{7}{2}} \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

Portanto, E(5,-4,3) $\notin r$

EXEMPLO 2

Determinar para que valores de m e n o ponto F(m,5,n) pertencem a r.

Solução:

e) F(m,5,n) $\in r$

$$\begin{cases} x = 2 + t \Rightarrow m = 2 + t \Rightarrow m = 1 \\ y = 3 - 2t \Rightarrow 5 = 3 - 2t \Rightarrow \boldsymbol{t = -1} \\ z = -4 + 3t \Rightarrow n = -4 + 3t \Rightarrow n = -7 \end{cases}$$

RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS

- Sejam A(x_0, y_0, z_0) e B(x_1, y_1, z_1) pontos da reta r.
- A reta definida pelos A e B é a reta que passa por A (ou B) e tem direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
- **EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE UM SEGMENTO DE RETA**

$$P = A + t(B - A), t \in [0,1]$$

EXEMPLO 3

Determine equações paramétricas da reta r que passa por A(3,-1,-2) e B(1,2,4).

Solução:

Veja que $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-2,3,6)$

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$$

EQUAÇÕES SIMÉTRICAS DA RETA

- Sejam A(x_1, y_1, z_1) pertencente a reta r e $\vec{v} = (a, b, c)$ vetor diretor da reta r

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Sabemos que as equações paramétricas da reta r são:

$$\begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \\ z = z_1 + tc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - x_1}{a} = t \\ \frac{y - y_1}{b} = t \\ \frac{z - z_1}{c} = t \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

EQUAÇÕES REDUZIDAS DA RETA

Seja a reta r definida pelo ponto A(2,-4,-3) e pelo vetor diretor $\vec{v} = (1,2,-3)$.

EQUAÇÕES SIMÉTRICAS DA RETA

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{-3}$$

EQUAÇÕES REDUZIDAS DA RETA

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} \Rightarrow y = 2x - 8$$

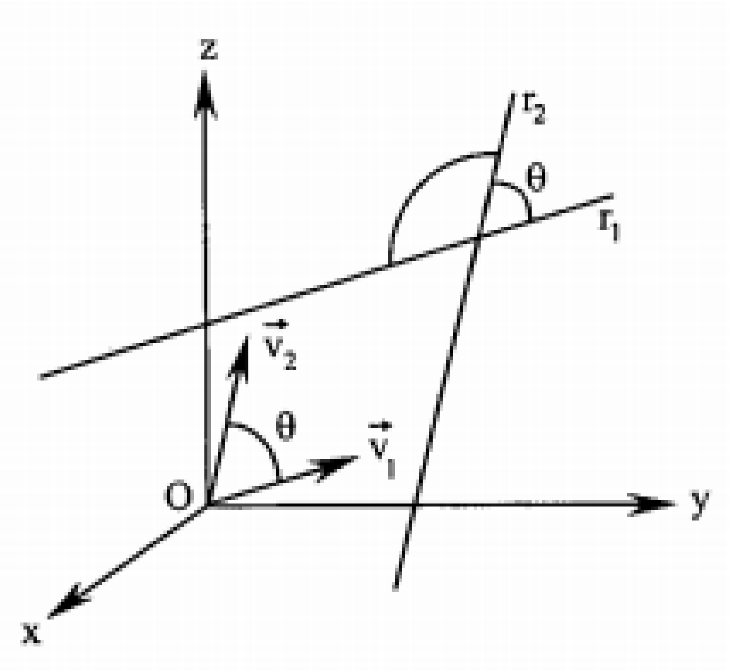
$$\frac{x-2}{1} = \frac{z+3}{-3} \Rightarrow \mathrm{z} = -3x + 3$$

ÂNGULO DE DUAS RETAS

- Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções $\overrightarrow{v_1}\ e\ \overrightarrow{v_2}$, respectivamente.
- Chama-se ângulo de duas retas, o menor

ângulo e um vetor diretor de r_1 e de um

vetor diretor de r_2 .



Logo,

$$cos\theta = \frac{|\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}|.|\overrightarrow{v_2}|}, \text{com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

EXEMPLO 4

- Calcule o ângulo entre as retas:

  - r: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ e s: $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$

- **SOLUÇÃO:**

- Veja que $\overrightarrow{v_1} = (1,1,-2)$ e $\overrightarrow{v_2} = (-2,1,1)$, logo:

$$cos\theta = \frac{|\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}|.|\overrightarrow{v_2}|} = \frac{|-2+1-2|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^0$$