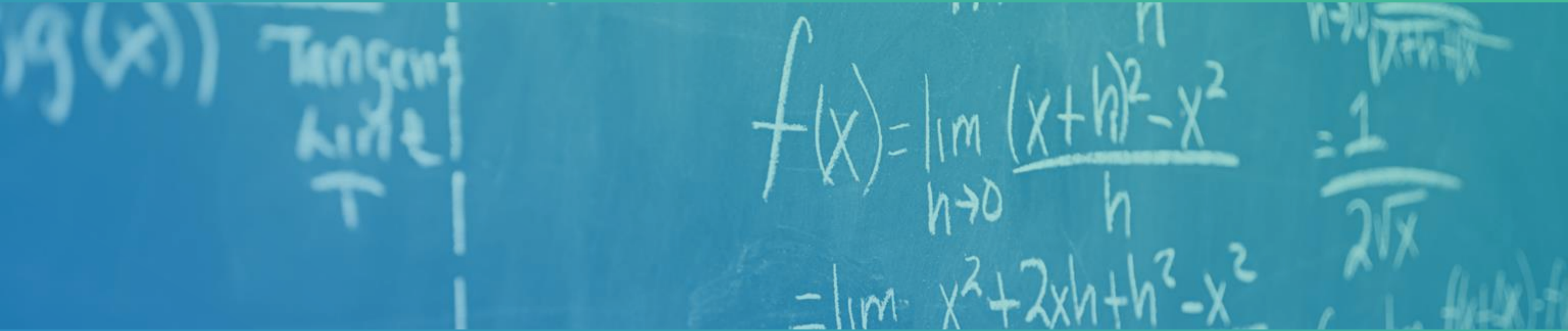


LIMITES

- **O Limite de uma Função**
- **Definição Intuitiva e Definição Precisa de Limites**
- **Limites Laterais**
- **Limites Infinitos**
- **Assíntota Vertical**
- **Propriedades de Limites**

O Limite de uma Função

Vamos analisar o comportamento da função f definida por

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

para valores de x próximos de 2.

A tabela ao lado fornece os valores de $f(x)$ para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Da tabela e do gráfico de f mostrado na Figura 1, vemos que quanto mais próximo x estiver de 2, mais próximo $f(x)$ estará de 4.

De fato, parece que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4, quanto quisermos, ao tornar x suficientemente próximo de 2.

Expressamos isso dizendo que "o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x tende a 2 é igual a 4.

A notação para isso é

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 2) = 4$$

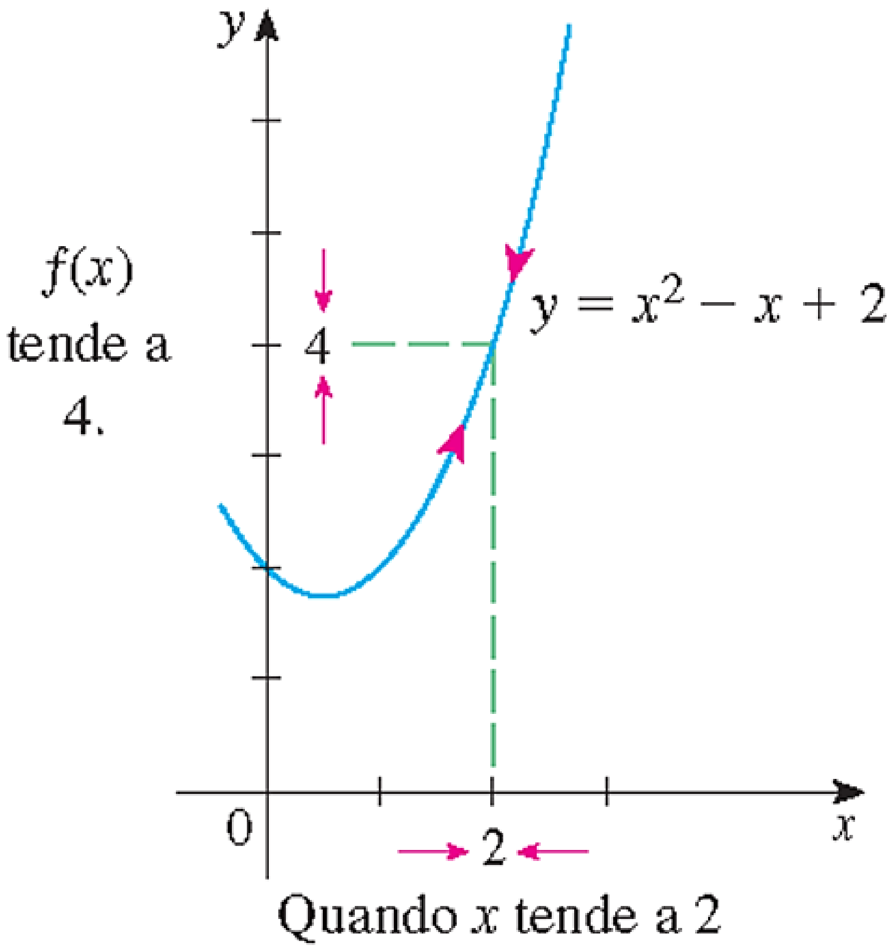


Figura 1

Definição Intuitiva de Limite

1 **Definição intuitiva de limite** Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.) Então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L"

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), ao tomar x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

- Em outras palavras, os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$.

- A frase "mas $x \neq a$" na definição de limite significa que ao procurar o limite de $f(x)$ quando x tende a a, nunca consideramos $x = a$.

- Na verdade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida quando $x = a$. A única coisa que importa é como f está definida próximo de a.

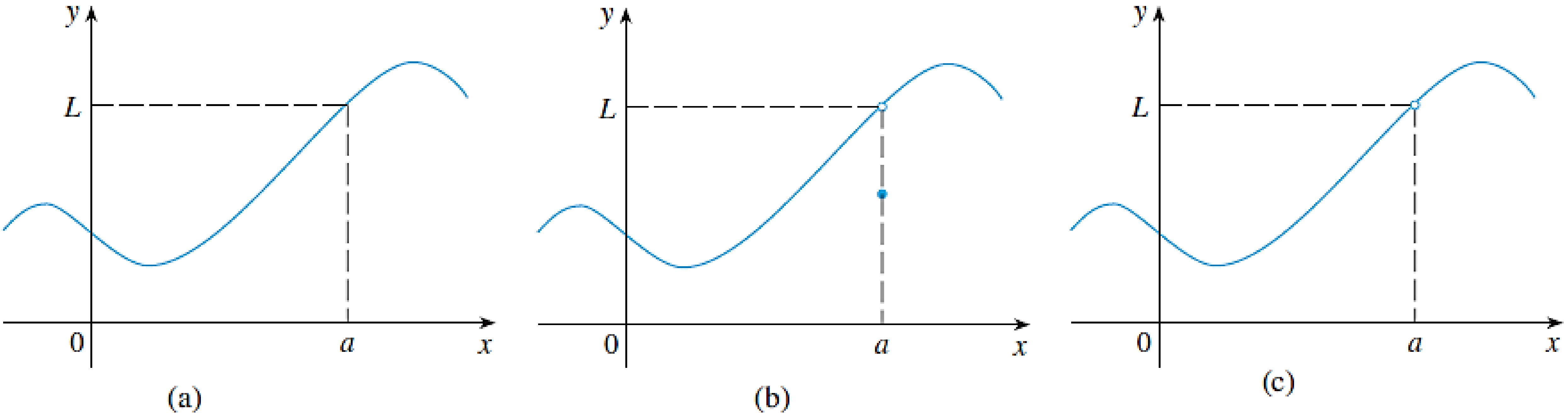


FIGURA 2 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ nos três casos

A Figura 2 mostra os gráficos de três funções. Note que, na parte (c), $f(a)$ não está definida e, na parte (b), $f(a) \neq L$. Mas, em cada caso, não importando o que acontece em a, é verdade que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

EXEMPLO 1

Estime o valor de $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

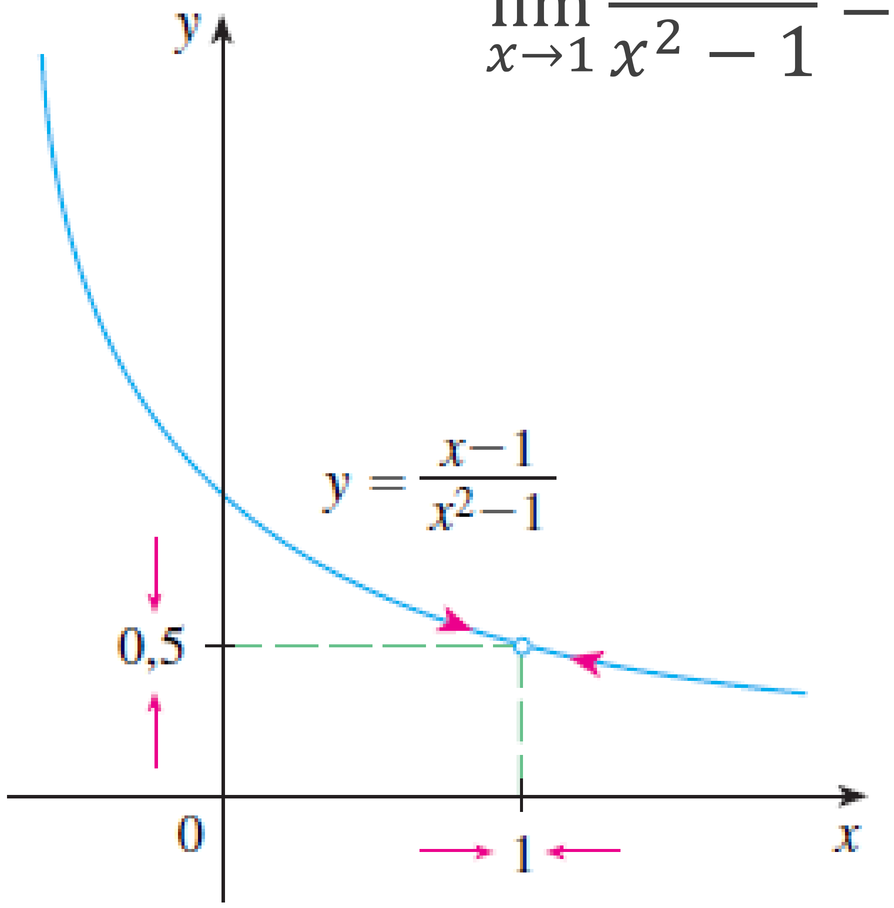
Observe que a função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

não está definida quando $x = 1$, mas a definição de $\lim_{x \to a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de a, mas não iguais a a.

As tabelas a seguir dão os valores de $f(x)$ (com precisão de seis casas decimais) para os valores de x que tendem a 1 (mas não são iguais a 1).

Com base nesses valores, podemos conjecturar que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0{,}5$$



$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

Agora vamos mudar ligeiramente f definindo seu valor como 2 quando $x = 1$ e chamando a função resultante de g:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Essa nova função g tem o mesmo limite quando x tende a 1 (veja a Figura 4).

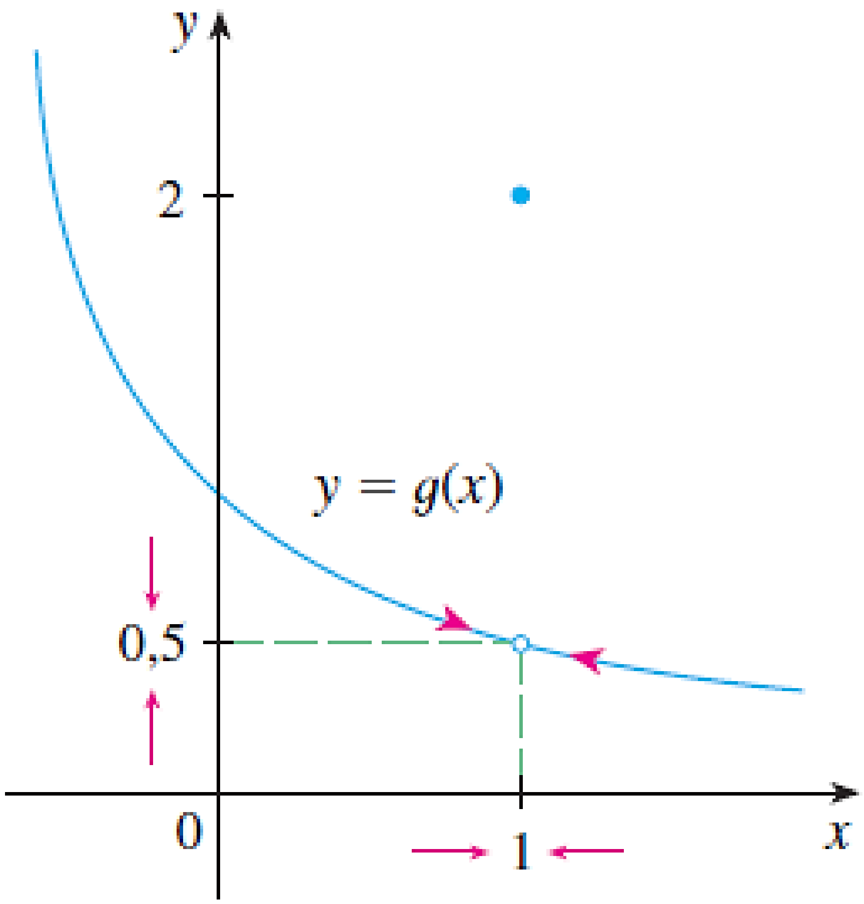


FIGURA 4

A Definição Precisa de Limites

$\boxed{2}$ **Definição** Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a a é L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Uma vez que $|x - a|$ é a distância de x a a e $|f(x) - L|$ é a distância de $f(x)$ a L, e como ε pode ser arbitrariamente pequeno, a definição de limite pode ser expressa em palavras da seguinte forma:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena tomando-se a distância de x a a suficientemente pequena (mas não igual a 0).

Podemos interpretar geometricamente essa definição, representando a função por um diagrama de flechas, como na Figura 2, onde f leva um subconjunto de $\mathbb{R}$ em outro subconjunto de $\mathbb{R}$.

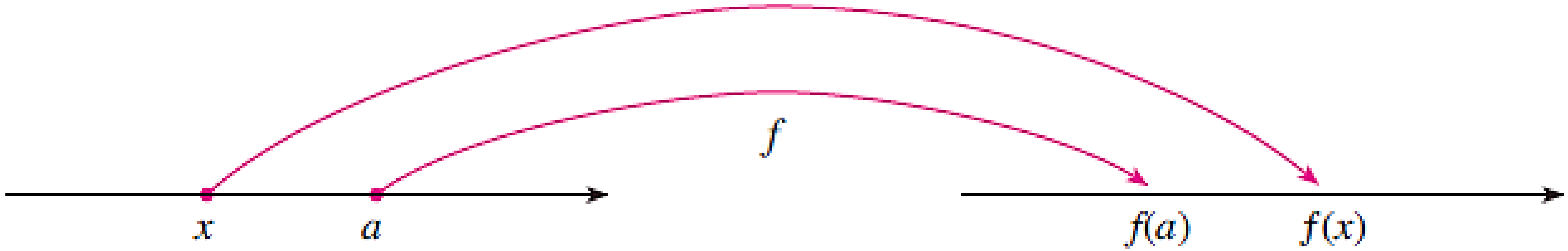


FIGURA 2

A definição de limite afirma que, se for dado qualquer intervalo pequeno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ em torno de L, então podemos achar um intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ em torno de a tal que f leve todos os pontos de $(a - \delta, a + \delta)$ (exceto possivelmente a) para dentro do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. (Veja a Figura 3.)

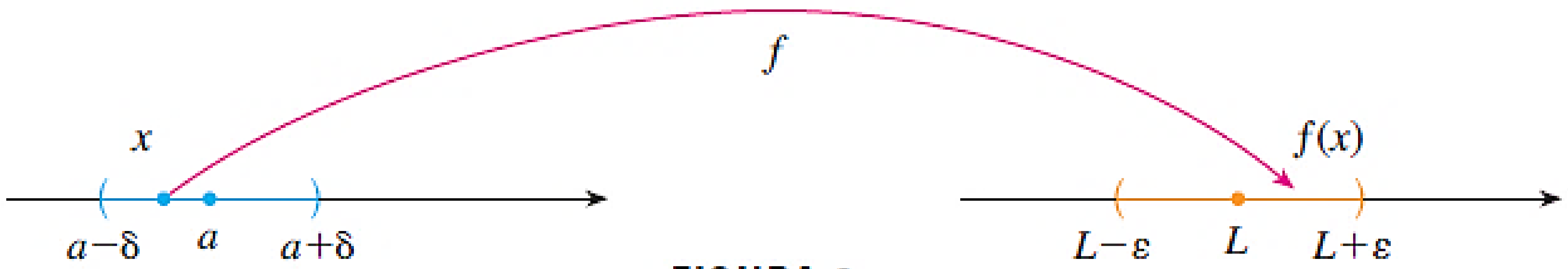


FIGURA 3

Outra interpretação geométrica de limite pode ser dada em termos do gráfico de uma função. Se for dado $\varepsilon > 0$, então trocamos as retas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ e o gráfico de f (veja a Figura 4). Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então podemos achar um número $\delta > 0$ tal que, se limitarmos x ao intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ e deixarmos $x \neq a$, a curva $y = f(x)$ ficará entre as retas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$ (veja a Figura 5). Você pode ver que, se um destes δ tiver sido encontrado, então qualquer δ menor também servirá.

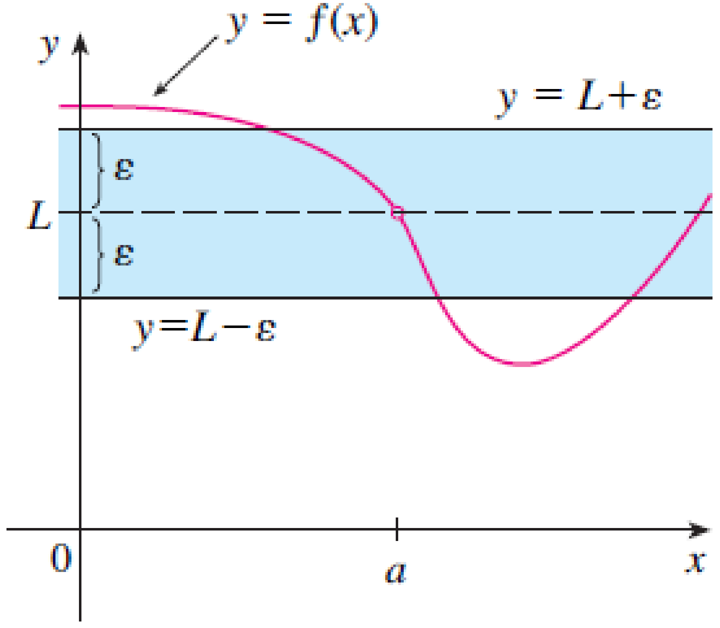


FIGURA 4

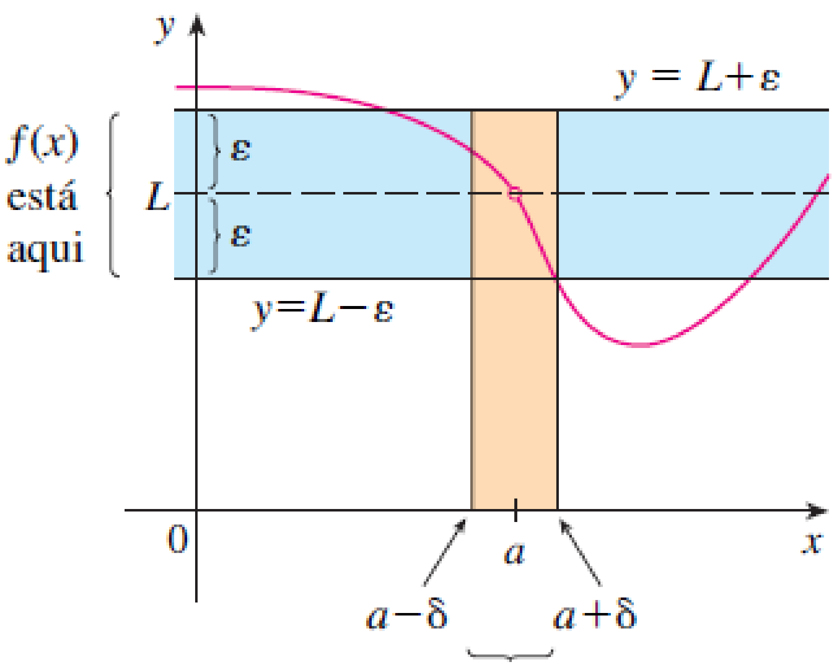


FIGURA 5 quando x is está aqui $(x \neq a)$

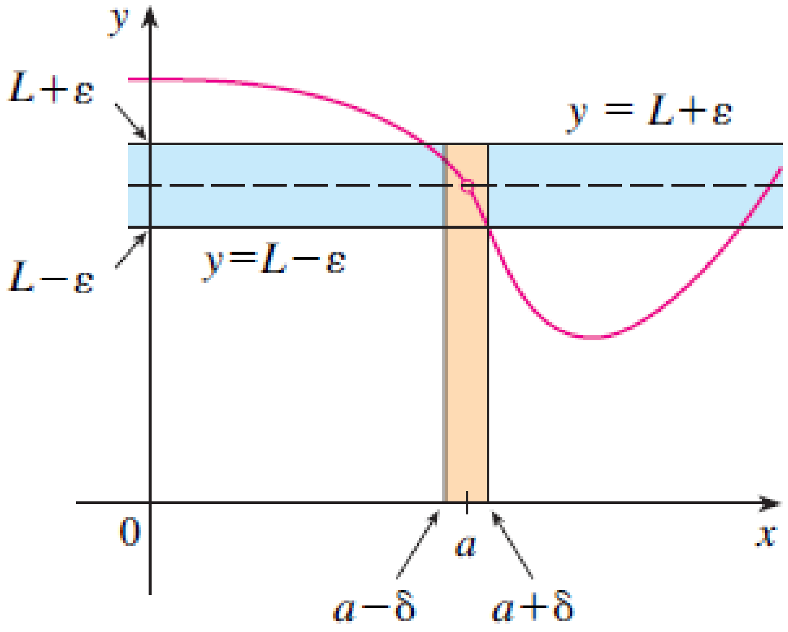


FIGURA 6

EXEMPLO 1

Prove que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

1. *Uma análise preliminar do problema (conjecturando um valor para δ).*

Seja ε um número positivo dado. Queremos encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Porém $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$.

Portanto, queremos δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

isto é, se $0 < |x - 3| < \delta$ então $|x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{4}$

Isso sugere que deveríamos escolher $\delta = \varepsilon/4$.

2. *Demonstração (mostrando que este δ funciona).*

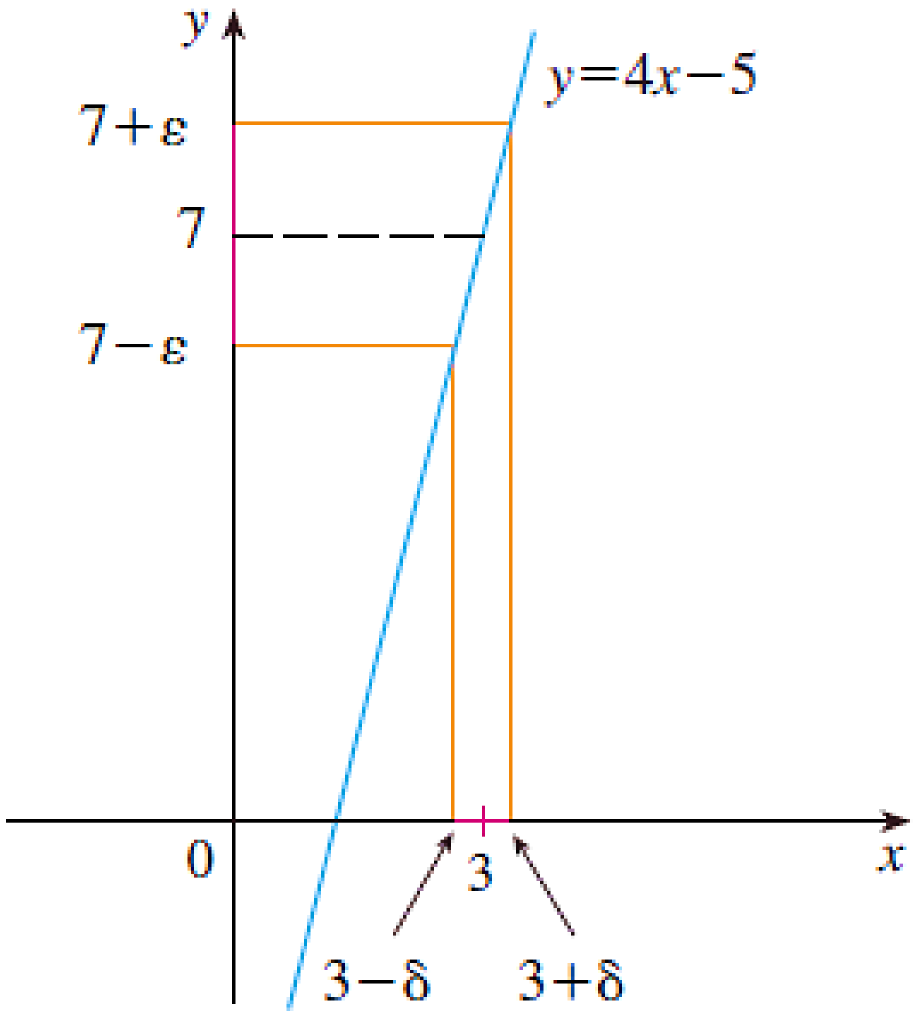
Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \varepsilon/4$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

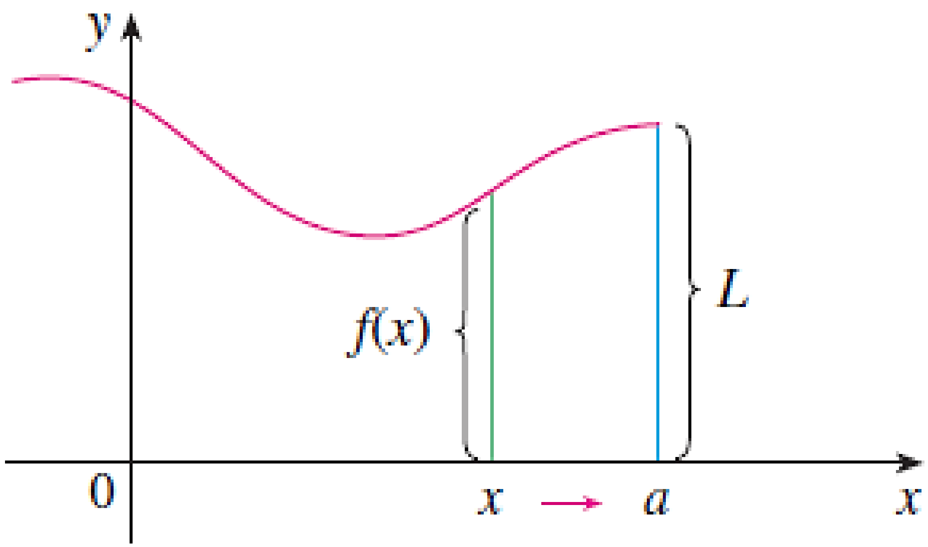
Assim, se $0 < |x - 3| < \delta$ então $|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$

Portanto, pela definição de limite,

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$



Limites Laterais



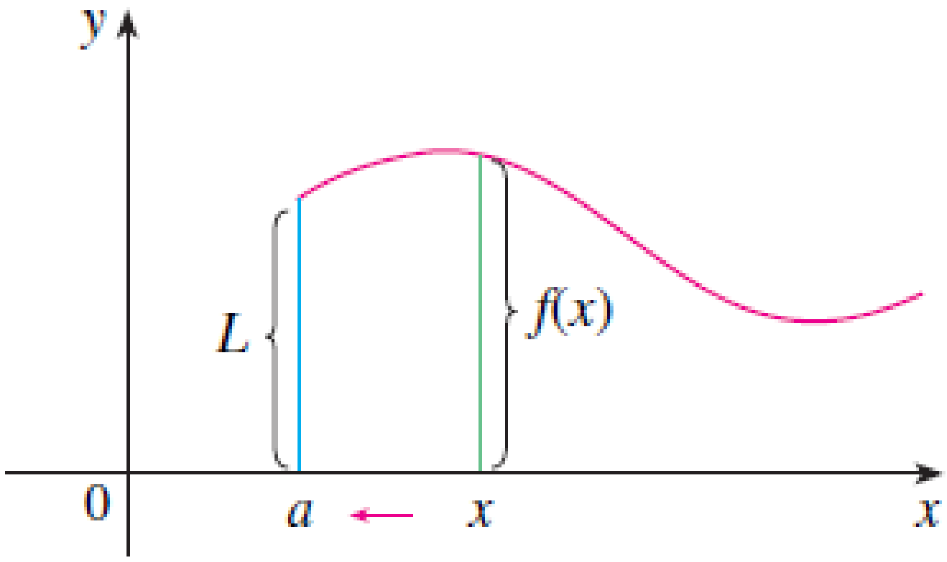
(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

$\boxed{3}$ **Definição de Limite à Esquerda**

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad a - \delta < x < a \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$



(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

$\boxed{4}$ **Definição de Limite à Direita**

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad a < x < a + \delta \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

$\boxed{1}$ **Teorema** $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Exemplo: O gráfico de uma função g é apresentado na Figura 10. Use-o para estabelecer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

A partir do gráfico, vemos que os valores de $g(x)$ tendem a 3 à medida que os de x tendem a 2 pela esquerda, mas tendem a 1 quando x tende a 2 pela direita. Logo

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3$ e (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$

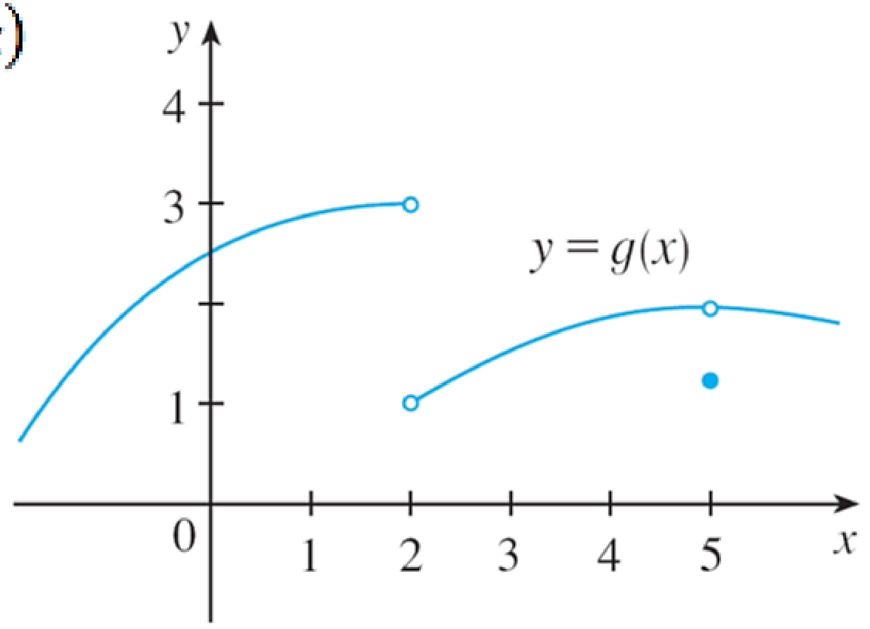


Figura 10

(c) Uma vez que são diferentes os limites à esquerda e à direita, concluímos que $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

O gráfico mostra também que

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x) = 2$ e (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$

(f) Agora, os limites à esquerda e à direita são iguais; assim, temos

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

Apesar desse fato, observe que $g(5) \neq 2$.

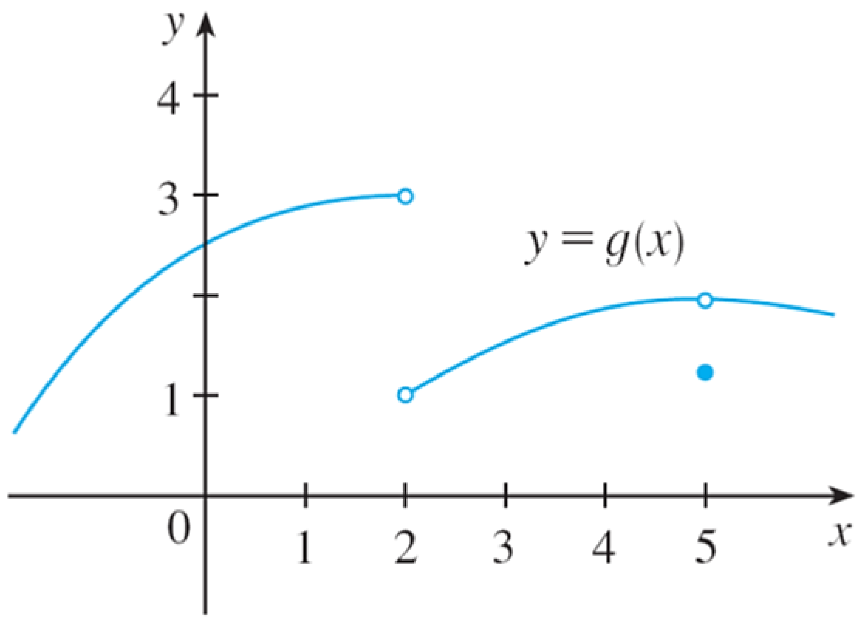


Figura 10

Limites Infinitos

Encontre $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$, se existir.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
$\pm 0{,}5$	4
$\pm 0{,}2$	25
$\pm 0{,}1$	100
$\pm 0{,}05$	400
$\pm 0{,}01$	10.000
$\pm 0{,}001$	1.000.000

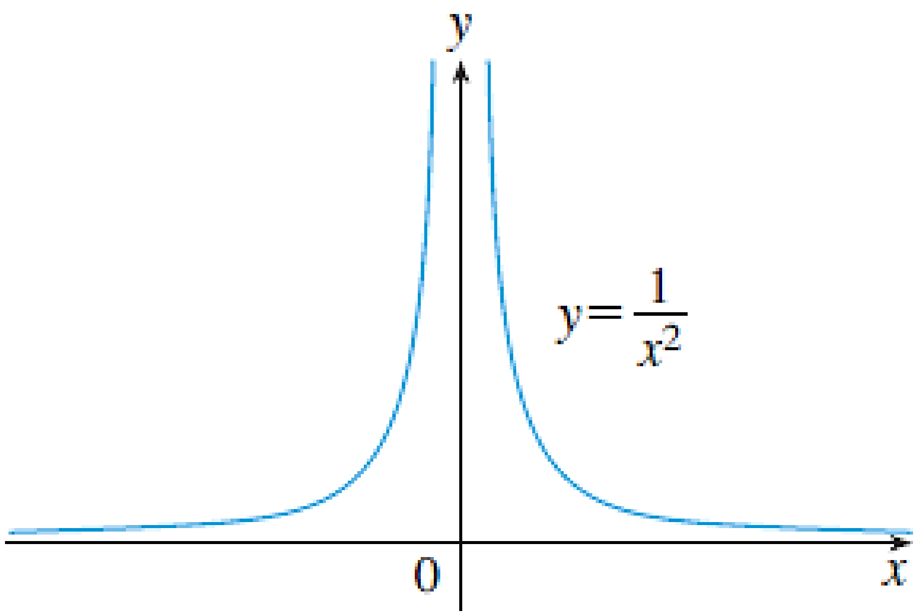
À medida que x tende a 0, x^2 também tende a 0, e $1/x^2$ fica muito grande.

De fato, a partir do gráfico da função $f(x) = 1/x^2$ da Figura 11, parece que a função $f(x)$ pode se tornar arbitrariamente grande ao tornarmos os valores de x suficientemente próximos de 0. Assim, os valores de $f(x)$ não tendem a um número, e não existe $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$.

Para indicar o tipo de comportamento exibido no Exemplo usamos a notação

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

FIGURA 11



Isso não significa que consideramos ∞ como um número. Tampouco significa que o limite existe. Expressa simplesmente uma maneira particular de não existência de limite: $1/x^2$ pode ser tão grande quanto quisermos, tornando x suficientemente perto de 0.

Em geral, simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

para indicar que os valores de $f(x)$ tendem a se tornar cada vez maiores (ou "a crescer ilimitadamente") à medida que x se tornar cada vez mais próximo de a.

$\boxed{4}$ **Definição** Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tornando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

Essa definição está ilustrada na Figura 12.

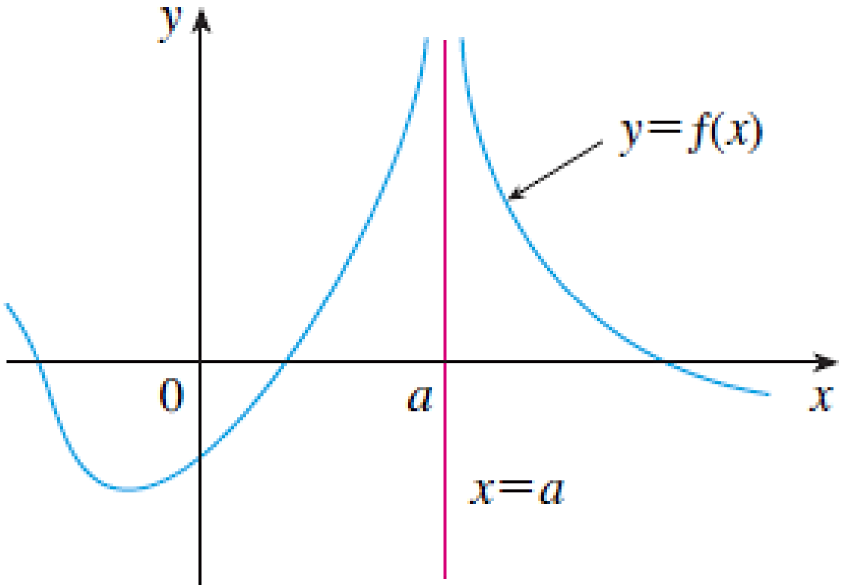


FIGURA 12
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Um tipo análogo de limite, para funções que se tornam grandes em valor absoluto, porém negativas, quando x tende a a, cujo significado está na Definição 5, é ilustrado na Figura 13.

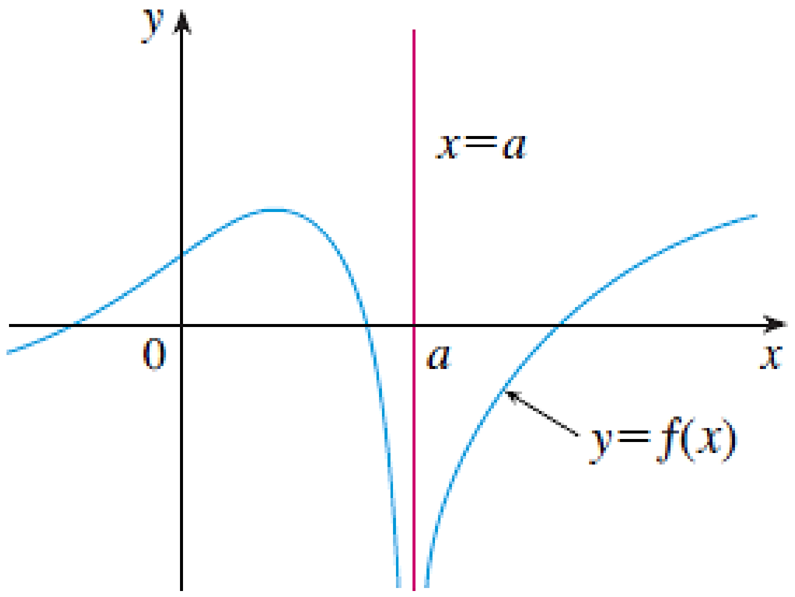


FIGURA 13
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

$\boxed{5}$ **Definição** Seja f definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, ao tornarmos x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

O símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ pode ser lido das seguintes formas: "o limite de $f(x)$ quando tende a a é menos infinito", ou "$f(x)$ decresce ilimitadamente quando x tende a a". Como exemplo, temos

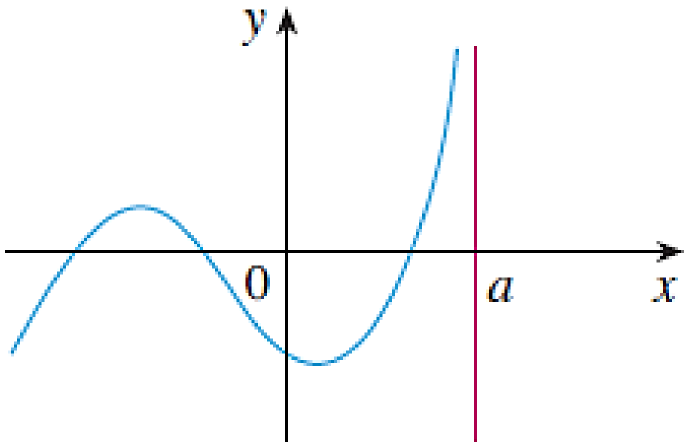
$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definições similares podem ser dadas no caso de limites laterais

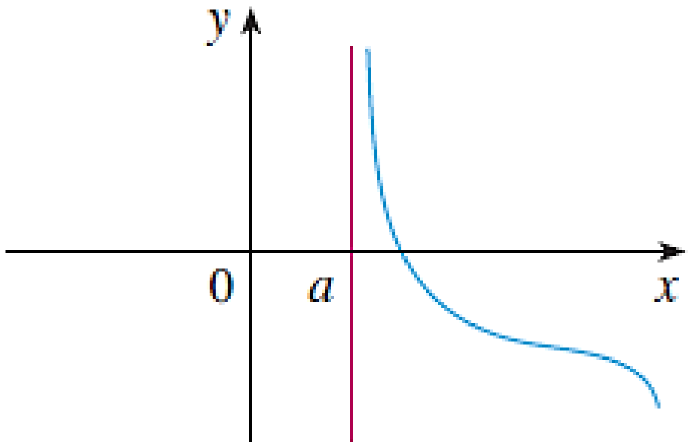
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

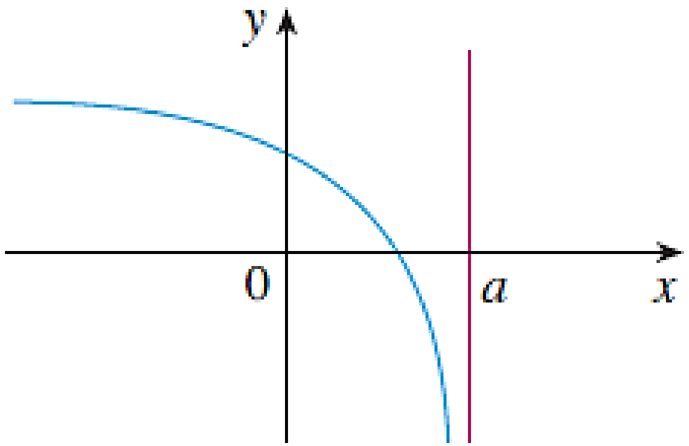
lembrando que "$x \to a^-$" significa considerar somente os valores de x menores que a, ao passo que "$x \to a^+$" significa considerar somente $x > a$. Ilustrações desses quatro casos são dados na Figura 14.



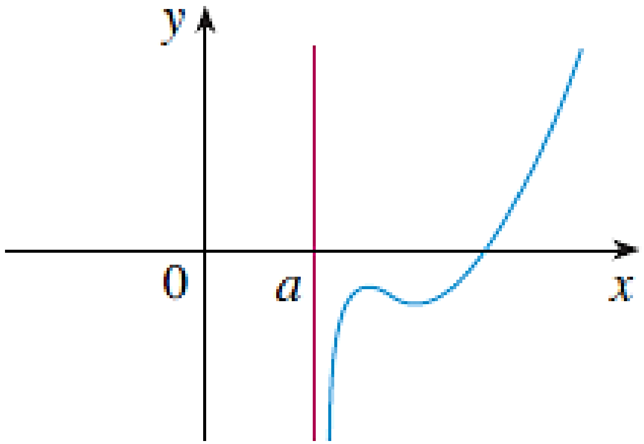
(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$



(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$



(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



(d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

Assíntota Vertical

$\boxed{6}$ **Definição** A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

EXEMPLO

Encontre $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ e $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

Se x está próximo a 3 mas é maior que 3, então o denominador $x - 3$ é um número positivo pequeno e $2x$ está próximo a 6.

Portanto, o quociente $2x/(x - 3)$ é um número *positivo* grande.

Então, intuitivamente, temos que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

Analogamente, se x está próximo a 3 mas é menor que 3, então $x - 3$ é um número negativo pequeno, mas $2x$ ainda é um número positivo (próximo a 6). Portanto, $2x/(x - 3)$ é um número *negativo* grande. Assim,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x - 3} = -\infty$$

O gráfico da curva $y = 2x/(x - 3)$ está dado na Figura 15. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

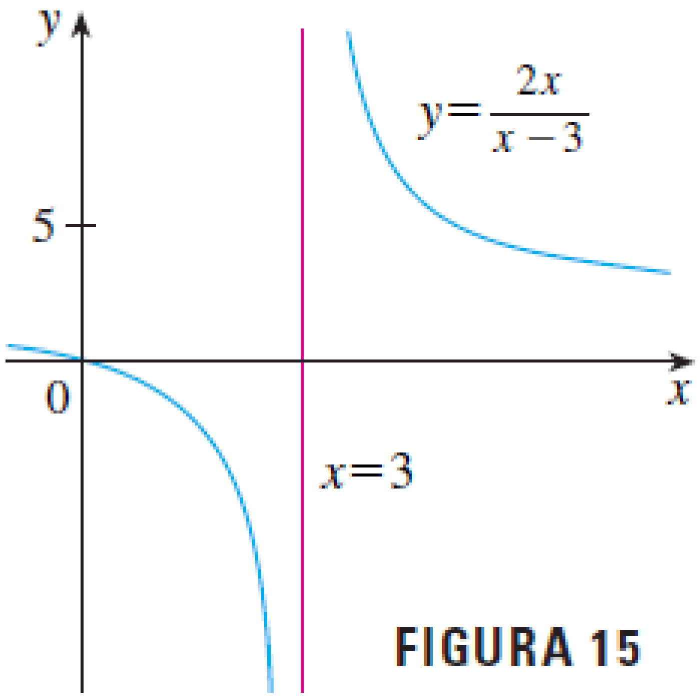


FIGURA 15

Propriedades dos Limites

Supondo que c seja uma constante e os limites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existam, então

1. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3. $\lim\limits_{x \to a} [cf(x)] = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$

4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ se $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ onde n é um inteiro positivo

7. $\lim_{x \to a} c = c$

8. $\lim_{x \to a} x = a$

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ onde n é um inteiro positivo

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ onde n é um inteiro positivo

(Se n for par, supomos que $a > 0$.)

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ onde n é um inteiro positivo

$\left[\text{Se } n \text{ for par, supomos que } \lim_{x \to a} f(x) > 0.\right]$

EXEMPLO 1

Calcule os limites a seguir justificando cada passagem.

a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$

$$\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 \qquad \text{(pelas Propriedades 2 e 1)}$$

$$= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 \qquad \text{(pela Propriedade 3)}$$

$$= 2(5^2) - 3(5) + 4 \qquad \text{(pelas Propriedades 9, 8 e 7)}$$

$$= 39.$$

b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

(b) Começamos aplicando a Propriedade 5, mas seu uso só ficará completamente justificado no último passo, quando virmos que os limites do numerador e do denominador existem e o do denominador não é 0.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim\limits_{x \to -2} (5 - 3x)} \qquad \text{(pela Propriedade 5)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -2} x^3 + 2 \lim\limits_{x \to -2} x^2 - \lim\limits_{x \to -2} 1}{\lim\limits_{x \to -2} 5 - 3 \lim\limits_{x \to -2} x} \qquad \text{(pelas Propriedades 1, 2 e 3)}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)}$$ (pela Propriedade 5)

$$= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x}$$ (pelas Propriedades 1, 2 e 3)

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)}$$ (pelas Propriedades 9, 8 e 7)

$$= -\frac{1}{11}$$

EXEMPLO 2

Use as Propriedades dos Limites e os gráficos de f e g na Figura 1 para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

(a) $\lim\limits_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} [f(x)g(x)]$

(c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

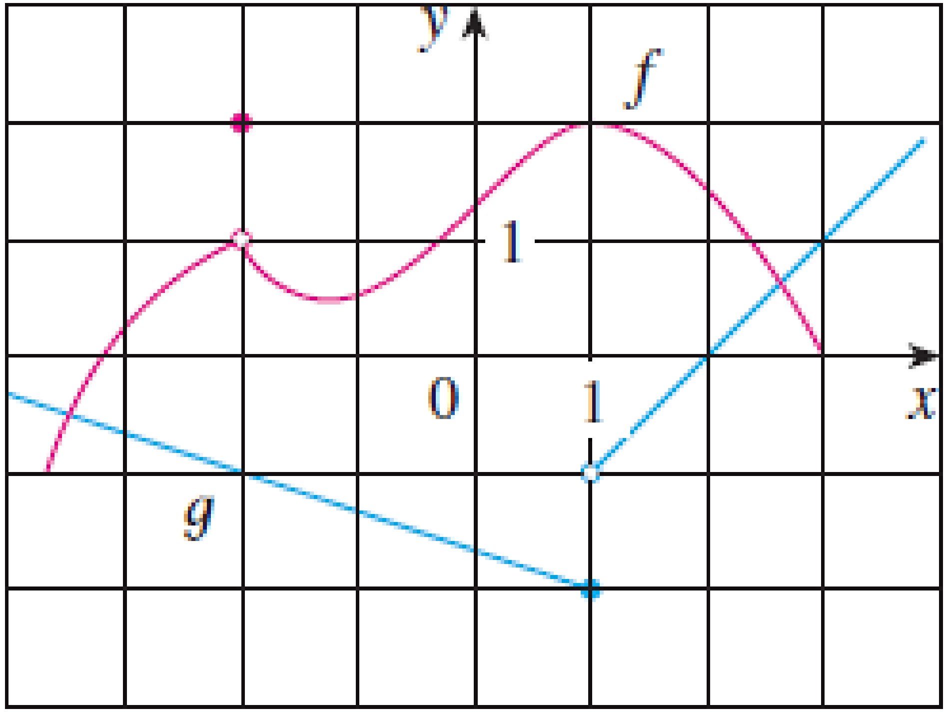


FIGURA 1

SOLUÇÃO

(a) Dos gráficos de f e g vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Portanto, temos

$$\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] =$$

$$= \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)] \quad \text{(pela Propriedade 1)}$$

$$= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) \quad \text{(pela Propriedade 3)}$$

$$= 1 + 5(-1) = -4$$

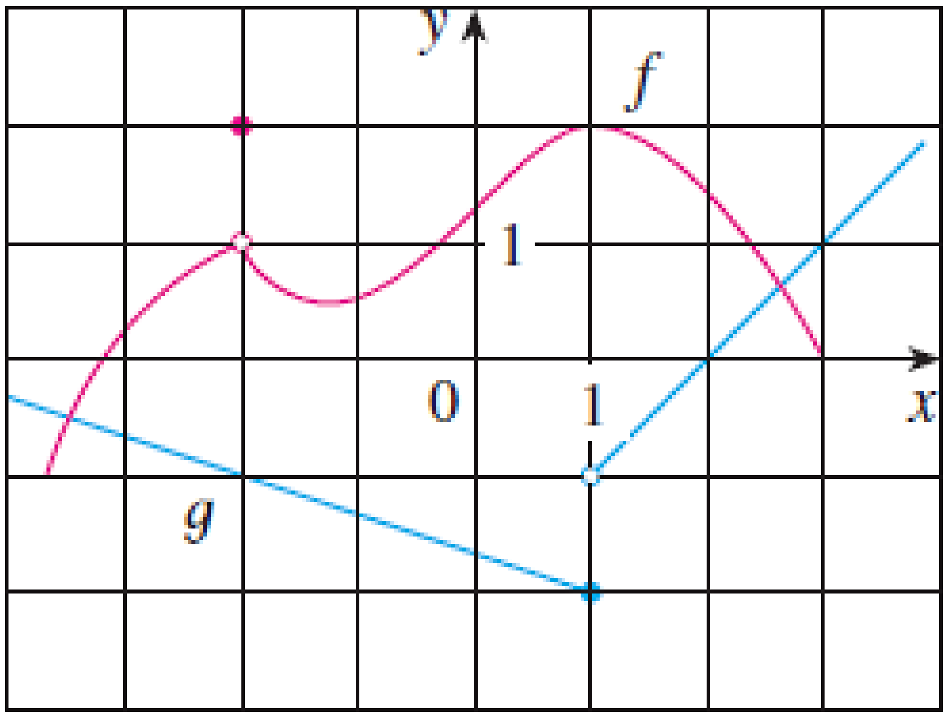


FIGURA 1

(b) Vemos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Mas $\lim_{x\to 1} g(x)$ não existe, pois os limites à esquerda e à direita são diferentes:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2 \qquad\qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$$

Assim, não podemos usar a Propriedade 4 para o limite solicitado. Mas podemos usar a Propriedade 4 para os limites laterais:

$$\lim_{x\to 1^-} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-2) = -4$$

$$\lim_{x\to 1^+} [f(x)\,g(x)] = 2 \cdot (-1) = -2$$

Os limites à esquerda e à direita não são iguais, logo $\lim_{x\to 1} [f(x)g(x)]$ não existe.

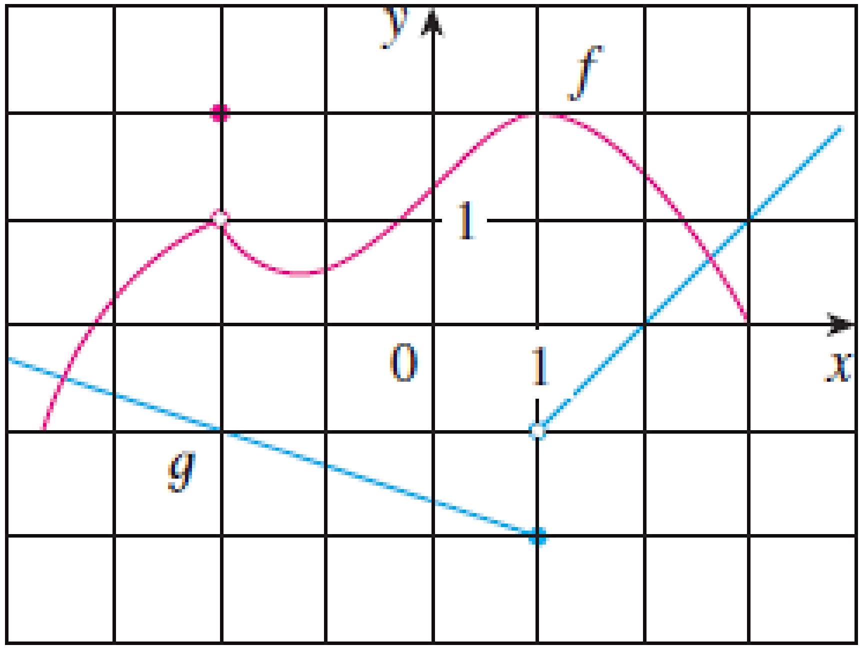


FIGURA 1

(c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Os gráficos mostram que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1{,}4 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Como o limite do denominador é 0, não podemos usar a Propriedade 5.

O limite dado não existe, pois o denominador tende a 0, enquanto o numerador tende a um número diferente de 0.

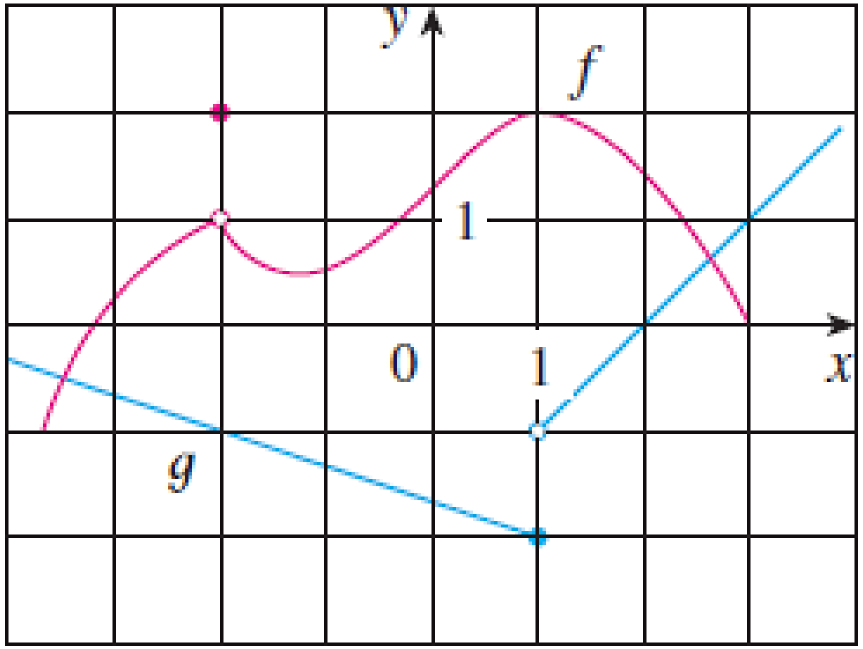


FIGURA 1

Propriedade de Substituição Direta Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

As funções que possuem essa propriedade de substituição direta, chamadas de *contínuas em* a.

Entretanto, nem todos os limites podem ser calculados pela substituição direta, como mostram os exemplos a seguir.

EXEMPLO 3

Encontre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

OBSERVAÇÃO: No Exemplo 3 conseguimos calcular o limite substituindo a função dada $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ por outra mais simples, $g(x) = x + 1$, que tem o mesmo limite.

Isso é válido porque $f(x) = g(x)$, exceto quando $x = 1$ e, no cômputo de um limite, quando x tende a 1, não consideramos o que acontece quando x é exatamente igual a 1.

Em geral, temos o seguinte fato útil.

Se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq a$, então $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, desde que o limite exista.

EXEMPLO 4

Encontre $\lim_{x \to 1} g(x)$ onde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

SOLUÇÃO Aqui g está definida em $x = 1$ e $g(1) = \pi$, mas o valor de um limite, quando x tende a 1, não depende do valor da função em 1.

Como $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, temos

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Observe que os valores das funções nos Exemplos 3 e 4 são idênticos, exceto quando $x = 1$ (veja a Figura 2), e assim elas têm o mesmo limite quando x tende a 1.

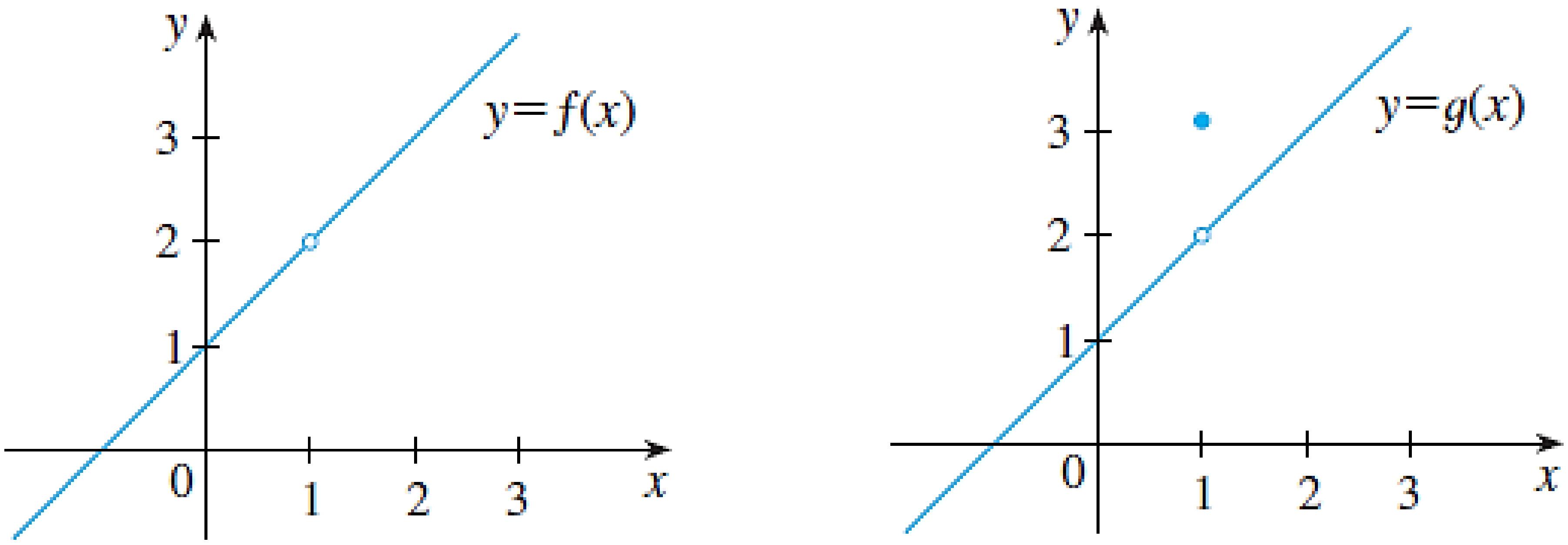


FIGURA 2

Gráficos das funções f (do Exemplo 3) e g (do Exemplo 4)

EXEMPLO 5

Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.

Se definirmos

$$F(h) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$$

então, como no Exemplo 3, não podemos calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ fazendo $h = 0$, uma vez que $F(0)$ não está definida.

Mas, se simplificarmos algebricamente $F(h)$, encontraremos que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Lembre-se de que consideramos apenas $h \neq 0$ quando fazemos h tender a 0.) Assim,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

EXEMPLO 6

Encontre $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

Não podemos aplicar a Propriedade do Quociente de imediato, uma vez que o limite do denominador é 0.

Aqui as operações algébricas preliminares consistem em racionalizar o numerador:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3}$$

$$= \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

Os próximos dois teoremas dão duas propriedades adicionais dos limites.

$\boxed{2}$ **Teorema** Se $f(x) \leqslant g(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e os limites de f e g, ambos existem quando x tende a a, então

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

$\boxed{3}$ **Teorema do Confronto** Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então
$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

O Teorema do Confronto, algumas vezes chamado Teorema do Sanduíche ou do Imprensamento, está ilustrado na Figura 7. Ele diz que se $g(x)$ ficar imprensado entre $f(x)$ e $h(x)$ nas proximidades de a, e se f e h tiverem o mesmo limite L em a, então g será forçada a ter o mesmo limite L em a.

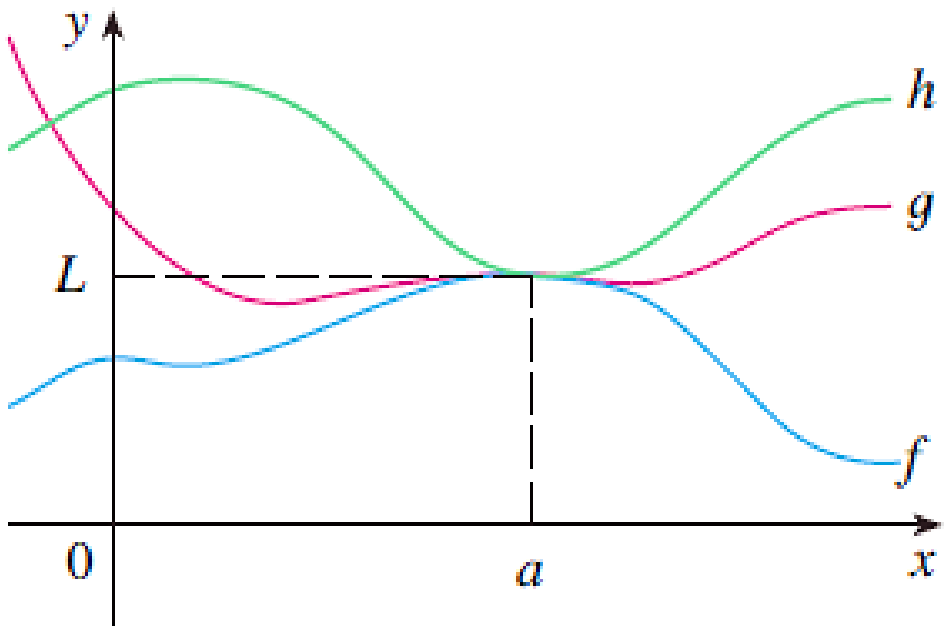


FIGURA 7

EXEMPLO 7

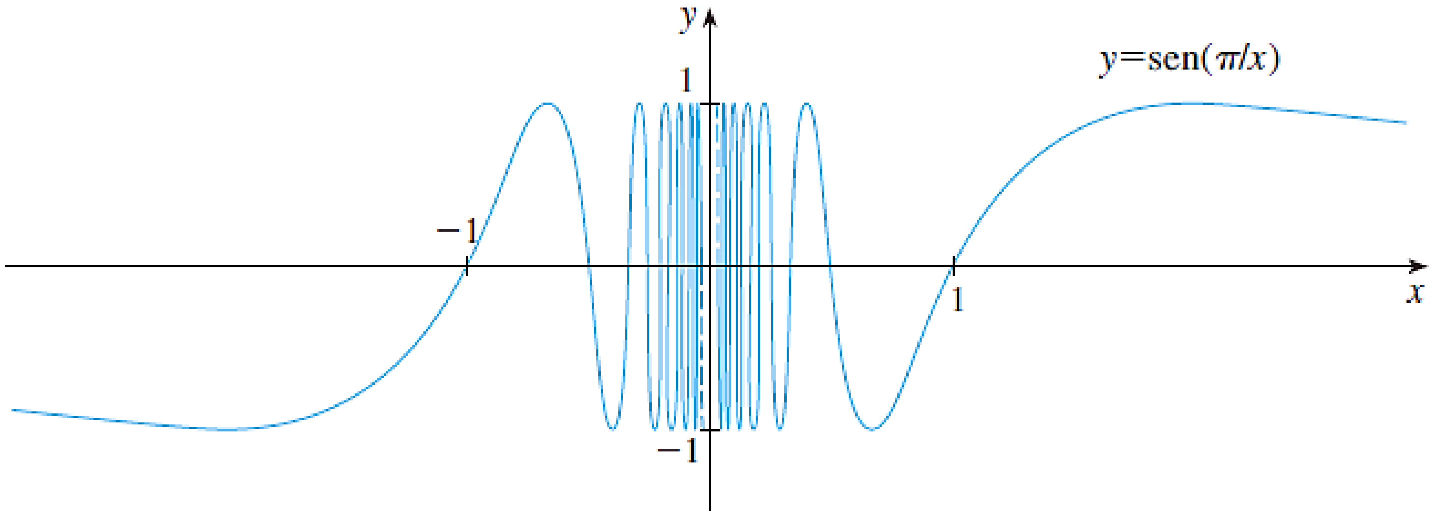
Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$

Observe primeiro que **não** podemos usar

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ não existe.

Você poderá ver isto a partir do gráfico de f mostrado na Figura



As linhas tracejadas perto do eixo de y indicam que os valores de $\text{sen}(\pi/x)$ oscilam entre 1 e -1 infinitas vezes quando x tende a 0.

Uma vez que os valores de $f(x)$ não tendem a um número fixo quando x tende a 0,

$$\lim_{x \to 0} \text{sen}\,\frac{\pi}{x} \text{ não existe}$$

Ao invés disso, aplicamos o Teorema do Confronto de modo que precisamos encontrar uma função f menor que $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ e uma função h maior que g tal que $f(x)$ e $g(x)$ tendam a 0.

Para fazer isso, usamos nosso conhecimento da função seno. Como o seno de qualquer número está entre -1 e 1, podemos escrever

$$\boxed{4} \qquad -1 \leqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant 1$$

Qualquer inequação permanece verdadeira quando multiplicada por um número positivo.

Sabemos que $x^2 \geq 0$ para todos os valores de x e então, multiplicando cada lado das inequações em [4] por x^2, temos

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

como ilustrado na Figura 8.

Sabemos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

Pelo Teorema do Confronto, obtemos

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

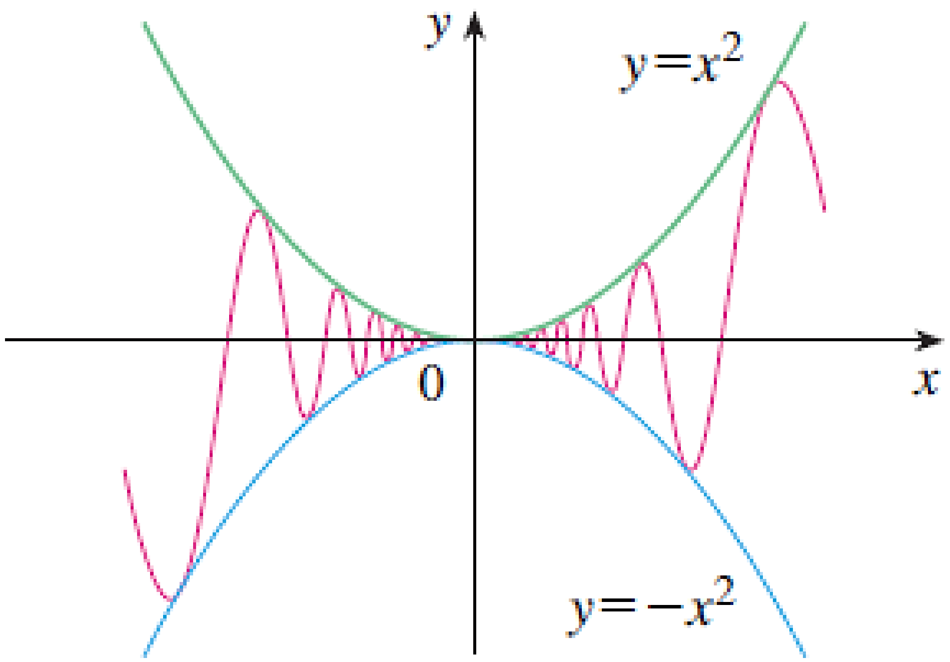


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

Exercícios

Seções: 2.2 – O Limite de uma Função

2.3 – Cálculos Usando Propriedades de Limites

2.4 – A Definição Precisa de um Limite