Funções

- Função: definição, domínio e imagem.
- Maneiras de representar funções.
- Gráfico
- Funções Definidas por Partes
- Simetria
- Funções Crescentes e Decrescentes

Função

O que é função? O que você entende por função?

- *Uma grandeza que depende de outra;*
- *Uma relação entre dois conjuntos;*
- *Ou a relação entre duas grandezas variáveis.*
- As funções surgem quando uma quantidade depende de outra.

Quatro Maneiras de Representar uma Função

Consideremos as seguintes situações:

a) A área *A* do círculo depende do raio *r* do círculo.

   A regra que conecta *r* e *A* é dada pela equação

$$A = \pi R^{2}$$

   A cada número *r* positivo está associado um único valor de *A* e dizemos que ***A* é uma *função* de *r***.

b) O custo *C* de enviar um envelope grande depende do peso *w* do envelope. Embora não haja uma fórmula simples relacionando *w* e *C*, o correio tem uma fórmula que permite calcular *C* quando *w* é dado.

c) A população humana do mundo *P* depende do tempo *t*.

A tabela mostra as estimativas da população mundial *P* (*t*) no momento *t* em certos anos.

Por exemplo,

$$P(1950) \approx 2{,}560{,}000{,}000$$

Porém, para cada valor do momento *t* há um valor correspondente de *P*, e dizemos que ***P* é uma função de *t*.**

Ano	População (milhões)
1900	1.650
1910	1.750
1920	1.860
1930	2.070
1940	2.300
1950	2.560
1960	3.040
1970	3.710
1980	4.450
1990	5.280
2000	6.080
2010	6.870

d) A aceleração vertical *a* do solo medida por um sismógrafo durante um terremoto é uma função do tempo decorrido *t*.

A Figura 1 demonstra um gráfico gerado por atividade sísmica durante o terremoto de Northridge t que chocou Los Angeles em 1994. Para um dado valor de *t*, o gráfico fornece um valor correspondente de *a*.

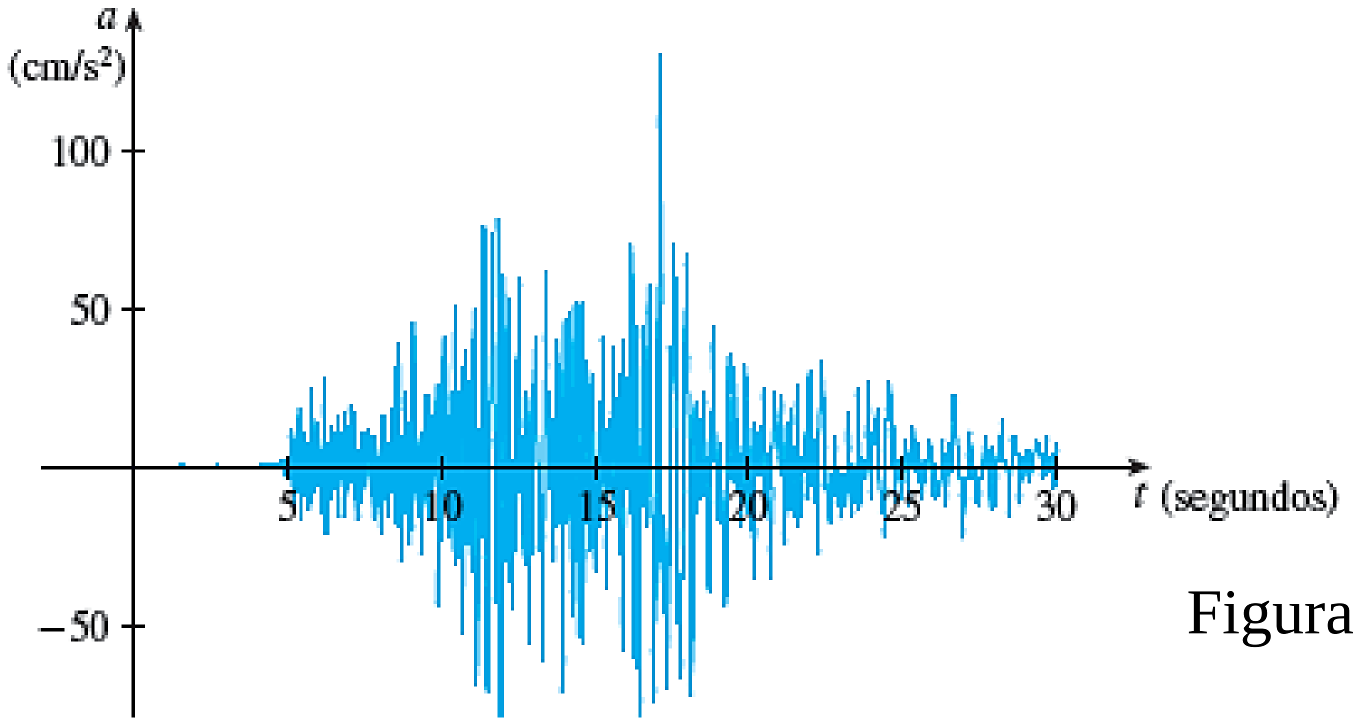


Figura 1: Aceleração vertical do solo durante o terremoto de Northridge

Definição

Uma função f é uma lei que associa, a cada elemento x em um conjunto D, exatamente um elemento, chamado $f(x)$, em um conjunto E.

$$\begin{aligned} f: D &\to E \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

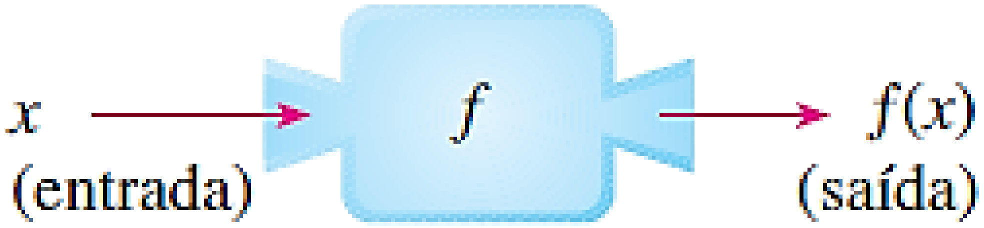


Diagrama de máquina para uma função f

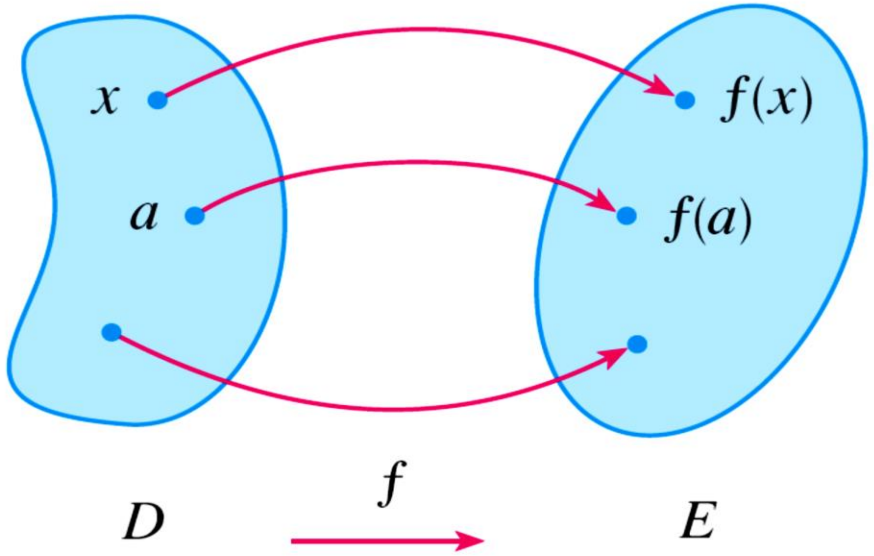


Diagrama de flechas para f

Domínio e Imagem

Em geral consideramos as funções para as quais D e E são conjuntos de números reais.

$$f: D \subset \mathbb{R} \to E \subset \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

O conjunto D é chamado de **domínio** da função.

O número $f(x)$ é o **valor de $\boldsymbol{f}$ em $\boldsymbol{x}$** e é lido " f de x."

A **imagem** de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ conforme x varia por todo o domínio.

$$Imf = \{y = f(x); x \in D\}$$

O símbolo que representa um número arbitrário no *domínio* de uma função f é denominado uma **variável independente**.

Um símbolo que representa um número na *imagem* de f é denominado uma **variável dependente**.

Por exemplo a função

$$\boldsymbol{A = \pi R^2}$$

A é a variável dependente e R é a variável independente.

Representações de Funções

É possível representar uma função de quatro maneiras:

- verbalmente (descrevendo-a com palavras)
- numericamente (por meio de uma tabela de valores)
- visualmente (através de um gráfico)
- algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita)

Gráfico

O método mais comum de visualizar uma função consiste em fazer seu gráfico.

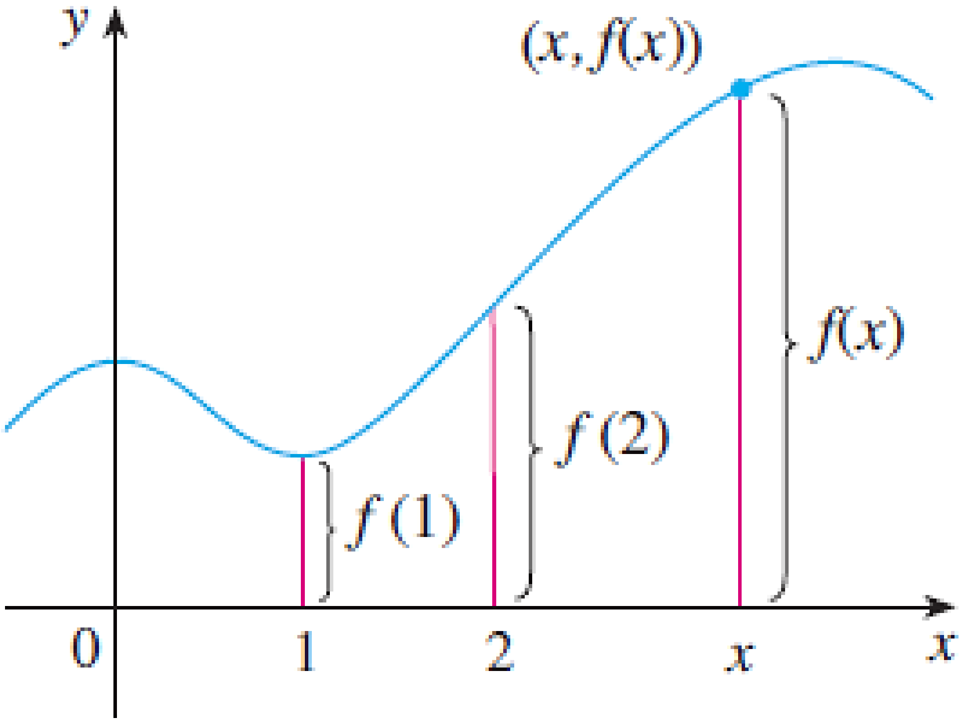
Se *f* for uma função com Domínio *D*, então seu **gráfico** será o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x))/x \in D\}$$

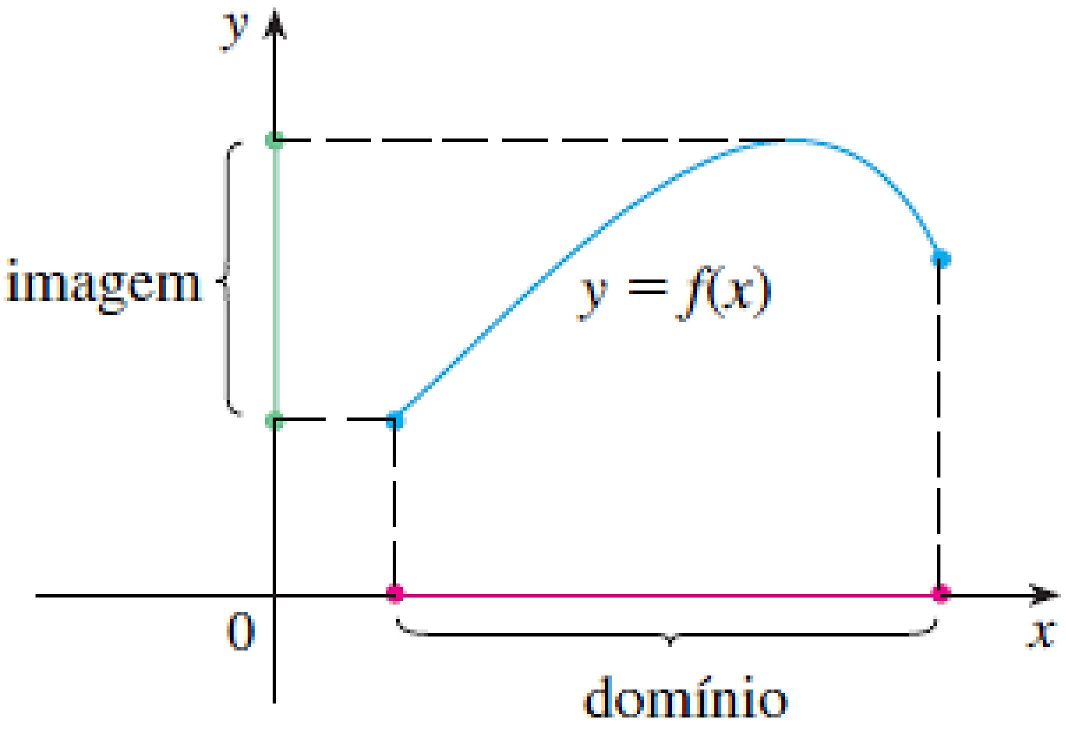
Em outras palavras, o gráfico de f consiste de todos os pontos (x, y) no plano de coordenadas tal que $y = f(x)$ e x está no domínio de f.

O gráfico de uma função f nos proporciona uma figura útil do comportamento ou "histórico" da função.

Uma vez que a coordenada y de qualquer ponto (x, y) sobre o gráfico é $y = f(x)$, podemos ler o valor de $f(x)$ como a altura do ponto no gráfico acima de x.

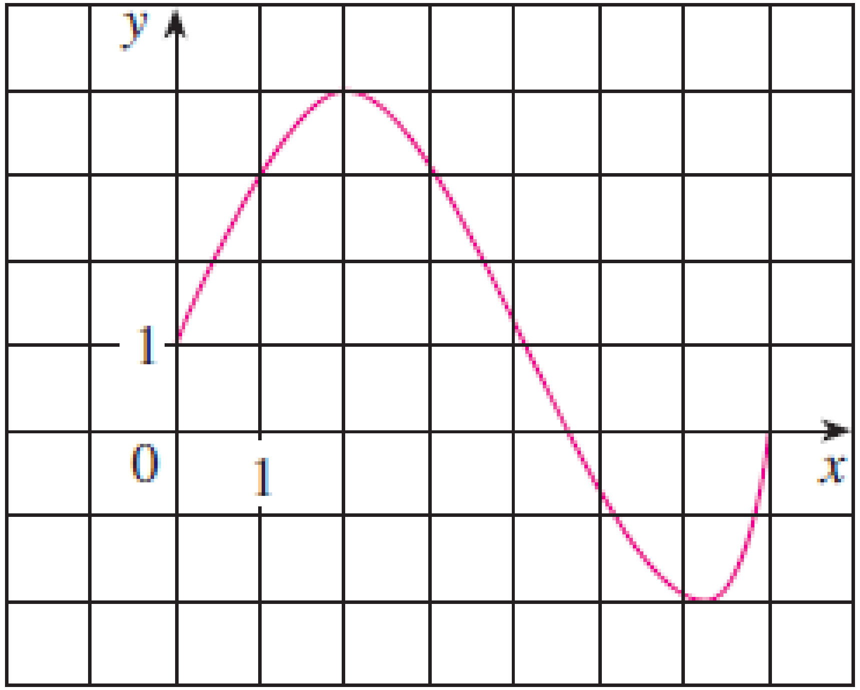


O gráfico de f também nos permite visualizar o domínio de f sobre o eixo x e a imagem sobre o eixo y, como na Figura.



Exemplo

O gráfico de uma função f está mostrado na Figura.
(a) Encontre os valores de $f(1)$ e $f(5)$.



- Vemos na figura que o ponto $(1, 3)$ encontra-se no gráfico de f, então, o valor de f em 1 é $f(1) = 3$.
- Quando $x = 5$, o ponto no gráfico que corresponde a esse valor está 0,7 unidade abaixo do eixo x e estimamos que $f(5) \approx -0{,}7$

(b) Quais são o domínio e a imagem de f?

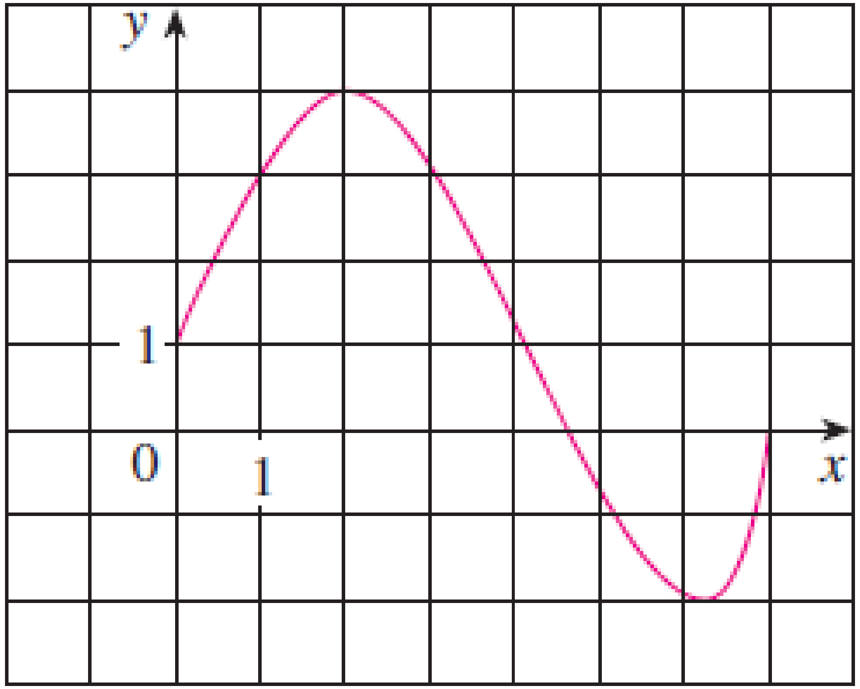
Vemos que $f(x)$ está definida quando $0 \leq x \leq 7$.

Logo, o domínio de f é o intervalo fechado $[0, 7]$.

Observe que os valores de f variam de -2 até 4.

Assim, a imagem de f é

$$\{y / -2 \leq y \leq 4\} = [-2, 4]$$



Exemplo

Encontre o domínio de cada função.

(a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

(a) Como a raiz quadrada de um número negativo não é definida (como um número real), o domínio de f consiste em todos os valores de x tais que $x + 2 \geqslant 0$. Isso é equivalente a $x \geqslant -2$; assim, o domínio é o intervalo $[-2, \infty)$.

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Uma vez que

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

e a divisão por 0 não é permitida, vemos que $g(x)$ não está definida no caso $x = 0$ ou $x = 1$.

Dessa forma, o domínio de g é

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

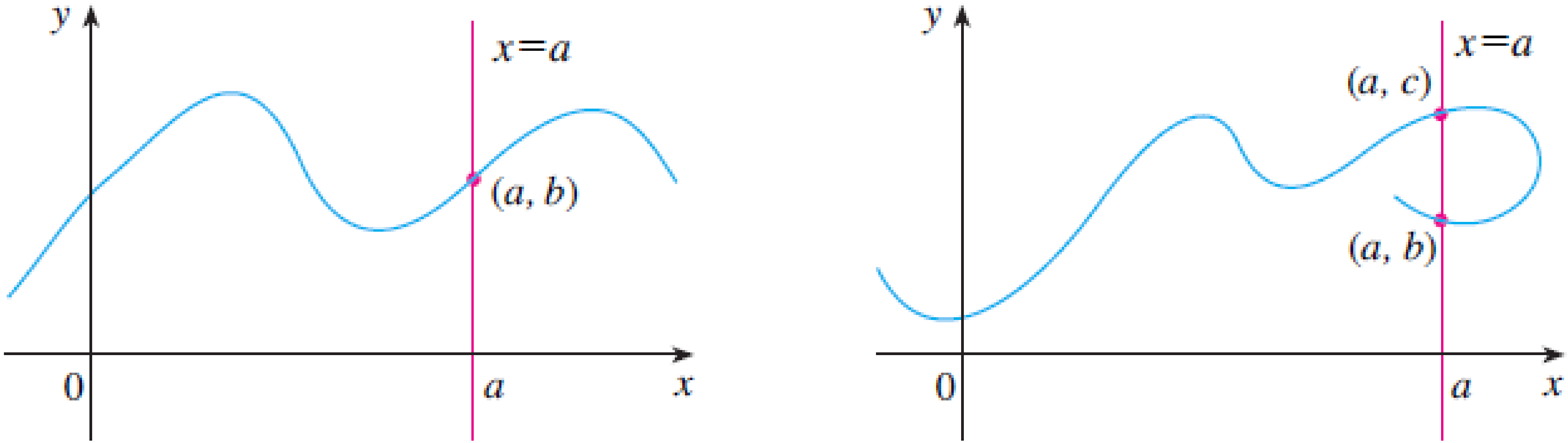
que também pode ser dado na notação de intervalo como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

O gráfico de Uma Função

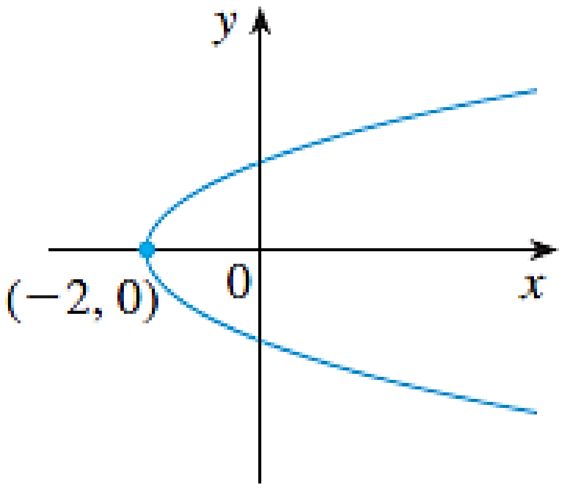
O gráfico de uma função é uma curva no plano *xy*. Mas surge a questão: quais curvas no plano *xy* são gráficos de funções? Essa pergunta será respondida por meio do teste a seguir.

Teste da Reta Vertical Uma curva no plano *xy* é o gráfico de uma função de *x* se e somente se nenhuma reta vertical cortar a curva mais de uma vez.

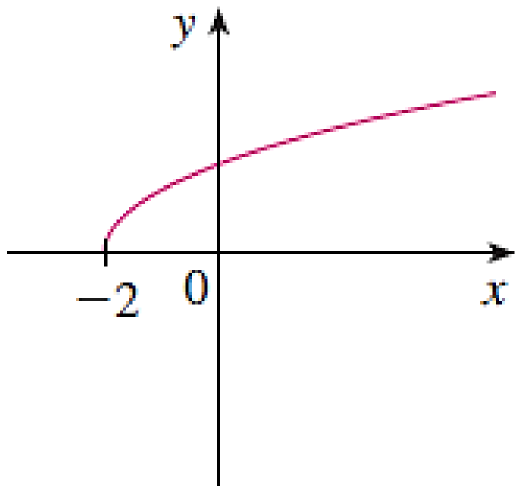


Exemplo

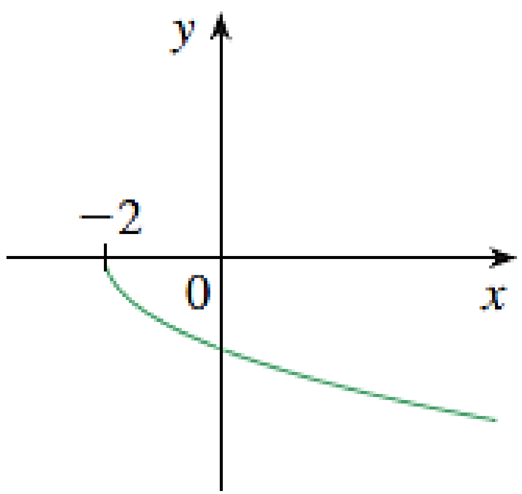
Por exemplo, a parábola $x = y^2 - 2$ na Figura



(a) $x=y^2-2$



(b) $y=\sqrt{x+2}$



(c) $y=-\sqrt{x+2}$

Note que a equação $x = y^2 - 2$ implica $y^2 = x + 2$, de modo que $y = \pm\sqrt{x + 2}$.

Funções Definidas por Partes

As funções nos quatro exemplos a seguir são definidas por fórmulas distintas em diferentes partes de seus domínios. Tais funções são chamadas **funções definidas por partes**.

1. Uma função f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Avalie $f(-2)$, $f(-1)$, e $f(0)$ e esboce o gráfico.

SOLUÇÃO Lembre-se de que toda função é uma regra. Para esta função em particular a regra é a seguinte: primeiro olhe para o valor da entrada x. Se acontecer de $x \leqslant -1$, então o valor de $f(x)$ é $1 - x$. Por outro lado, se $x > -1$, então o valor de $f(x)$ é x^2.

Uma vez que $-2 \leqslant -1$, temos $f(-2) = 1 - (-2) = 3$.

Uma vez que $-1 \leqslant -1$, temos $f(-1) = 1 - (-1) = 2$.

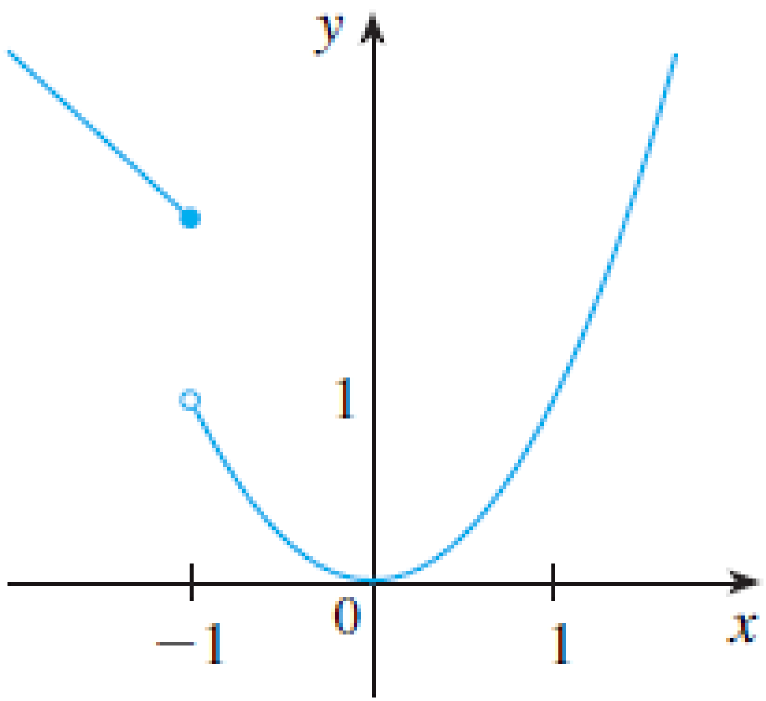
Uma vez que $0 > -1$, temos $f(0) = 0^2 = 0$.

Como fazer o gráfico de f?

Observamos que se $x \leqslant -1$, então $f(x) = 1 - x$, assim, a parte do gráfico de f à esquerda da reta vertical $x = -1$ deve coincidir com a reta $y = 1 - x$, essa última com inclinação -1 e intersecção com o eixo y igual a 1.

Se $x > -1$, então $f(x) = x^2$ e dessa forma, a parte do gráfico f à direita da reta $x = -1$ deve coincidir com o gráfico de $y = x^2$, que é uma parábola.

Isso nos permite esboçar o gráfico na Figura



O círculo cheio indica que o ponto $(-1, 2)$ está incluso no gráfico; o círculo vazio indica que o ponto $(-1, 1)$ está excluído do gráfico.

O próximo exemplo de função definida por partes é a função valor absoluto. Lembre-se de que o **valor absoluto** de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 sobre a reta real. Como distâncias são sempre positivas ou nulas, temos

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a.$$

Por exemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

Em geral, temos

$$|a| = a \qquad \text{se } a \geqslant 0$$

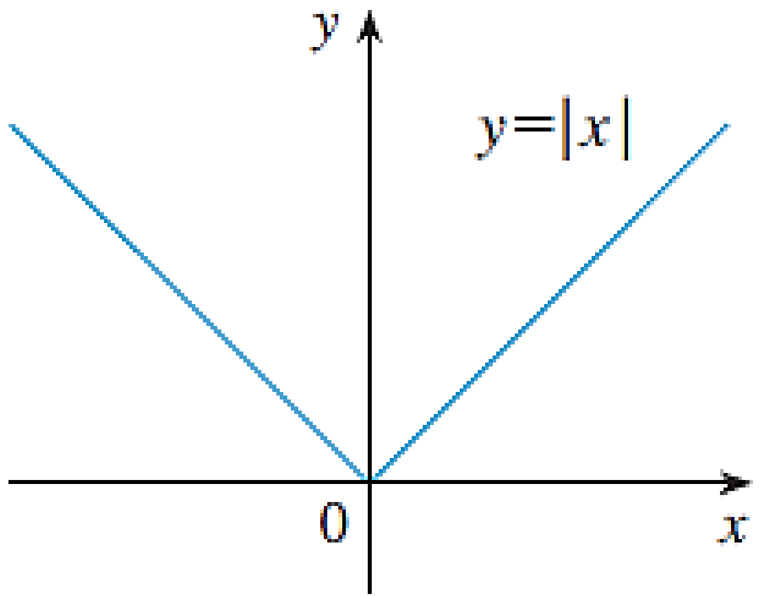
$$|a| = -a \qquad \text{se } a < 0$$

(Lembre-se de que se a for negativo, então $-a$ será positivo.)

2. Esboce o gráfico da função valor absoluto $f(x) = |x|$.

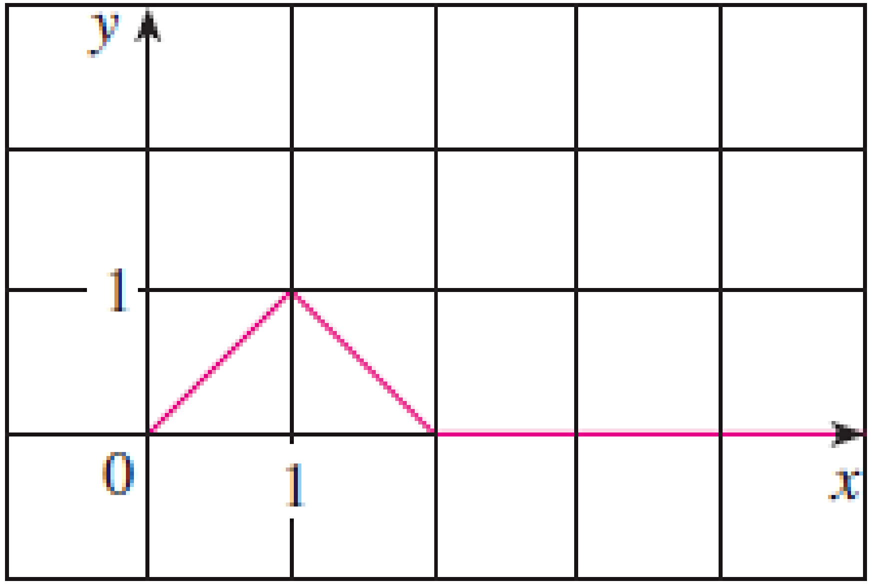
Da discussão precedente sabemos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Usando o mesmo método empregado no Exemplo 1, vemos que o gráfico de f coincide com a reta $y = x$ à direita do eixo y e com a reta $y = -x$ à esquerda do eixo y.

3. Encontre uma fórmula para a função f cujo gráfico está na Figura



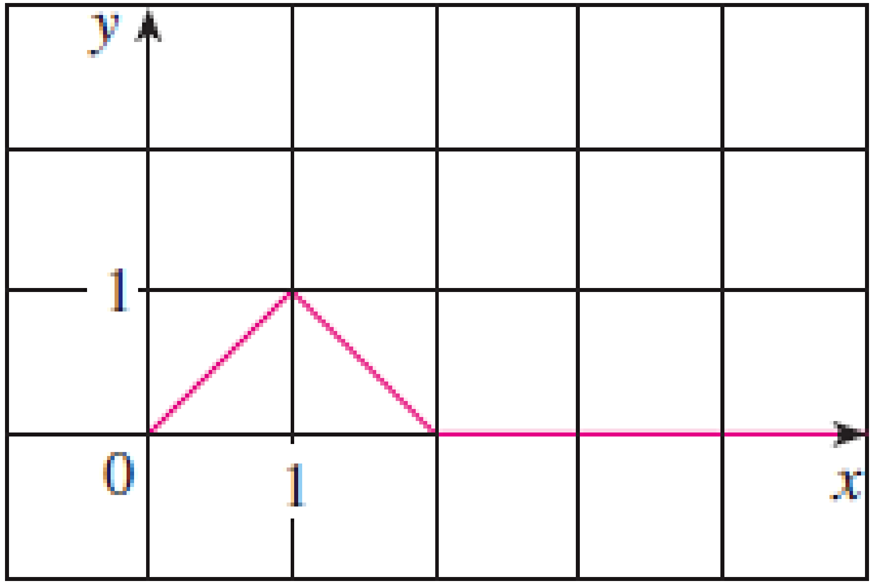
SOLUÇÃO A reta que passa pelos pontos (0, 0) e (1, 1) tem inclinação $m = 1$ e intersecção com o eixo y, $b = 0$; assim, sua equação é $y = x$. Logo, para a parte do gráfico de f que liga os pontos (0, 0) e (1, 1), temos

$$f(x) = x \qquad \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

A reta que passa pelos pontos (1, 1) e (2, 0) tem uma inclinação de $m = -1$, dessa maneira, a forma ponto-inclinação será

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{ou} \qquad y = 2 - x.$$



Logo, temos $\qquad f(x) = 2 - x \qquad \text{se } 1 < x \leq 2.$

Vemos também que o gráfico de f coincide com o eixo x para $x > 2$.

Juntando todas as informações, temos a seguinte fórmula em três partes para f :

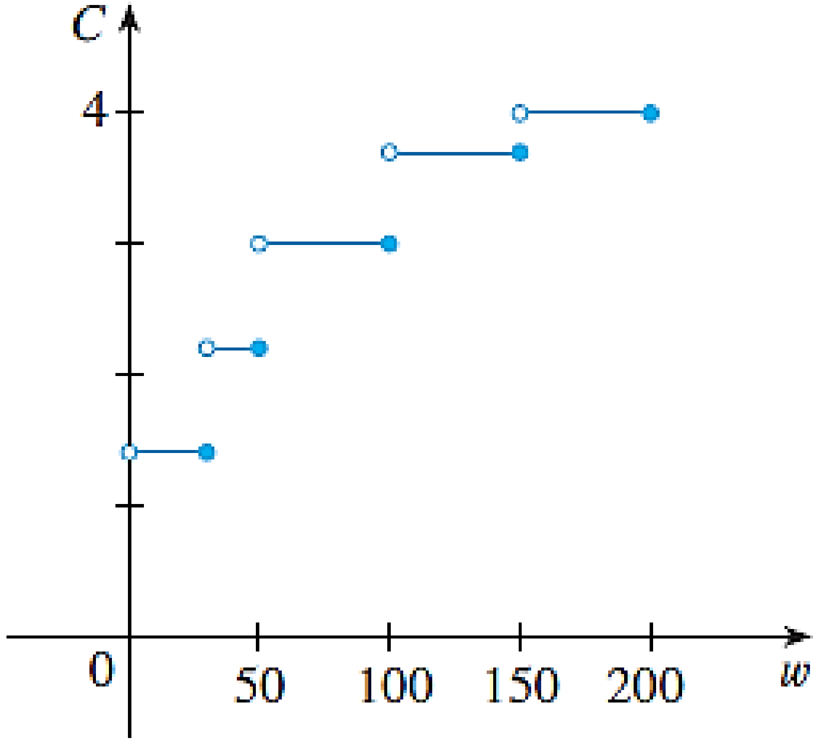
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

4. No Exemplo B, no início desta seção, consideramos o custo $C(w)$ do envio pelo correio de uma carta preferencial em Hong Kong com o peso w. Na realidade, esta é uma função definida por partes, pois a partir da tabela de valores, temos

$$C(w) = \begin{cases} 1{,}40 & \text{se } 0 < w \leqslant 30 \\ 2{,}20 & \text{se } 30 < w \leqslant 50 \\ 3{,}00 & \text{se } 50 < w \leqslant 100 \\ 3{,}70 & \text{se } 100 < w \leqslant 150 \\ 4{,}00 & \text{se } 150 < w \leqslant 200 \end{cases}$$

w (gramas)	$C(w)$ (dólar HKD)
$0 < w \leqslant 30$	1,40
$30 < w \leqslant 50$	2,20
$50 < w \leqslant 100$	3,00
$100 < w \leqslant 150$	3,70
$150 < w \leqslant 200$	4,00
$\vdots$	$\vdots$

O gráfico é mostrado na Figura



Você pode entender então por que funções similares a esta são chamadas **funções escada** – elas pulam de um valor para o próximo.

Simetria

Se uma função f satisfaz $f(-x) = f(x)$ para todo número x em seu domínio, então f é chamada **função par.** Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é par, pois

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

O significado geométrico de uma função ser par é que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y (veja a Figura 19). Isso significa que se fizermos o gráfico de f para $x \geqslant 0$, então, para obter o gráfico inteiro, basta refletir esta parte em torno do eixo y.

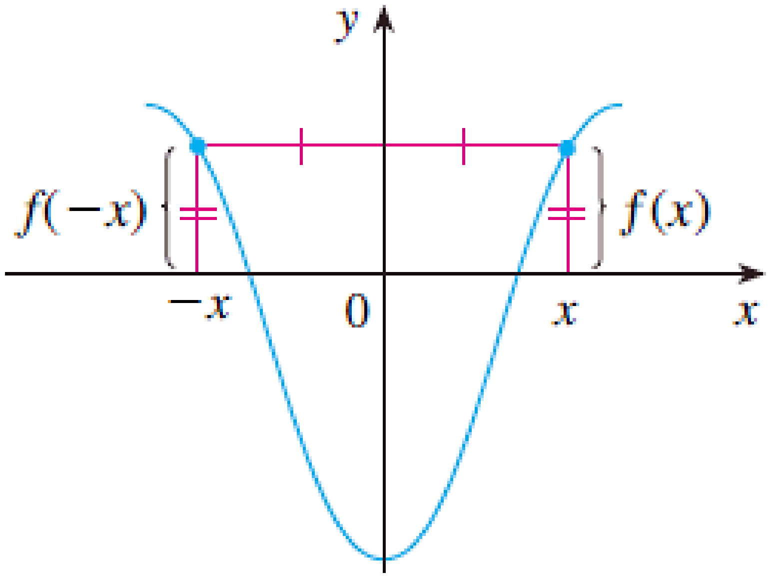


FIGURA 19 Uma função par

Se f satisfaz $f(-x) = -f(x)$ para cada número x em seu domínio, então f é chamada **função ímpar**. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é ímpar, pois

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem (veja a Figura 20). Se já tivermos o gráfico de f para $x \geqslant 0$, poderemos obter o restante do gráfico girando esta parte 180º em torno da origem.

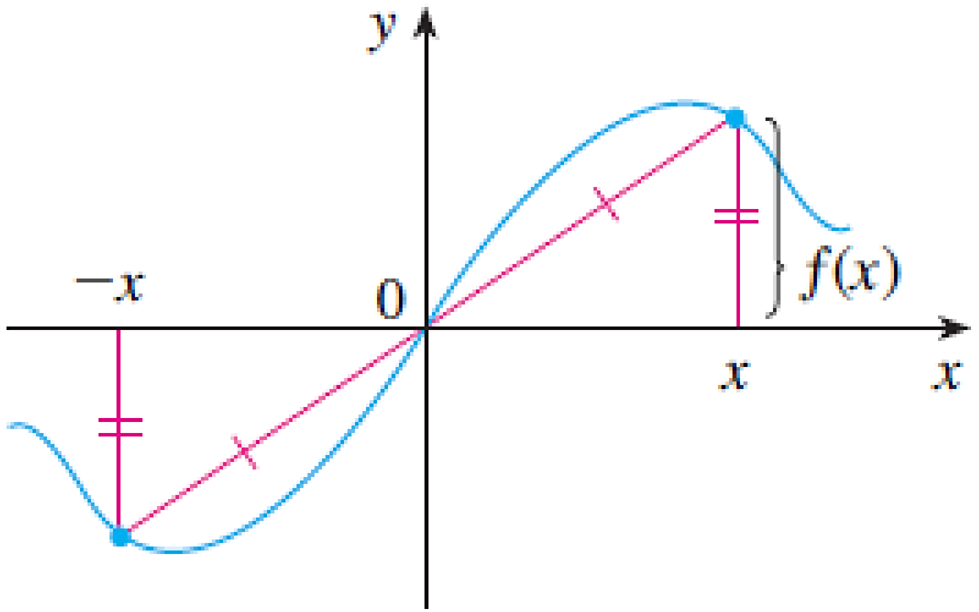


FIGURA 20 Uma função ímpar

Exemplo

Determine se a função é par, ímpar ou nenhum dos dois.

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

(a)

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Portanto, f é uma função ímpar.

(b)

$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Assim, g é par.

(c) $$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$, concluímos que h não é par nem ímpar.

Os gráficos das funções no Exemplo 11 estão na Figura 21. Observe que o gráfico de h não é simétrico em relação ao eixo y nem em relação à origem.

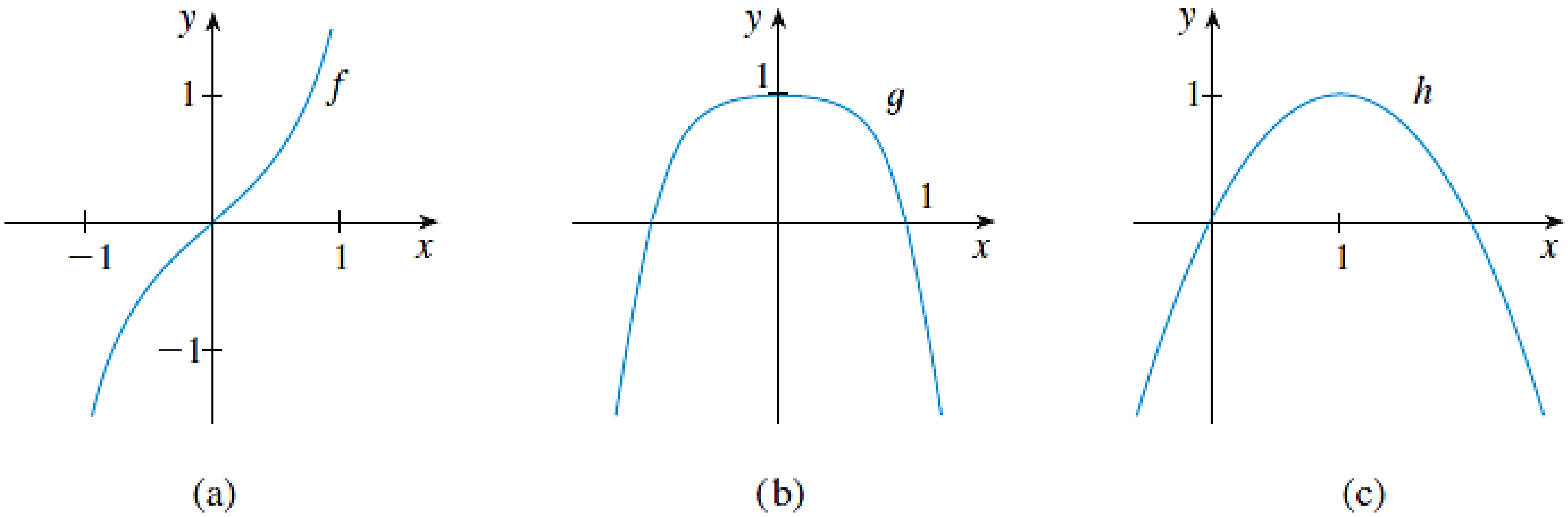


FIGURA 21

Funções Crescentes e Decrescentes

Uma função f é chamada **crescente** em um intervalo I se

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{quando } x_1 < x_2 \text{ em } I.$$

É denominada **decrescente** em I se

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{quando } x_1 < x_2 \text{ em } I.$$

Na definição de uma função crescente, é importante perceber que a desigualdade $f(x_1) < f(x_2)$deve responder a *cada* par de números x_1 e x_2 em I com $x_1 < x_2$.

O gráfico da Figura 22 cresce de A para B, decresce de B para C, e cresce novamente de C para D. Digamos que a função f é crescente no intervalo $[a, b]$, decrescente em $[b, c]$ e crescente novamente em $[c, d]$. Note que se x_1 e x_2 são dois números quaisquer entre a e b com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Utilizamos isso como a propriedade que define uma função crescente.

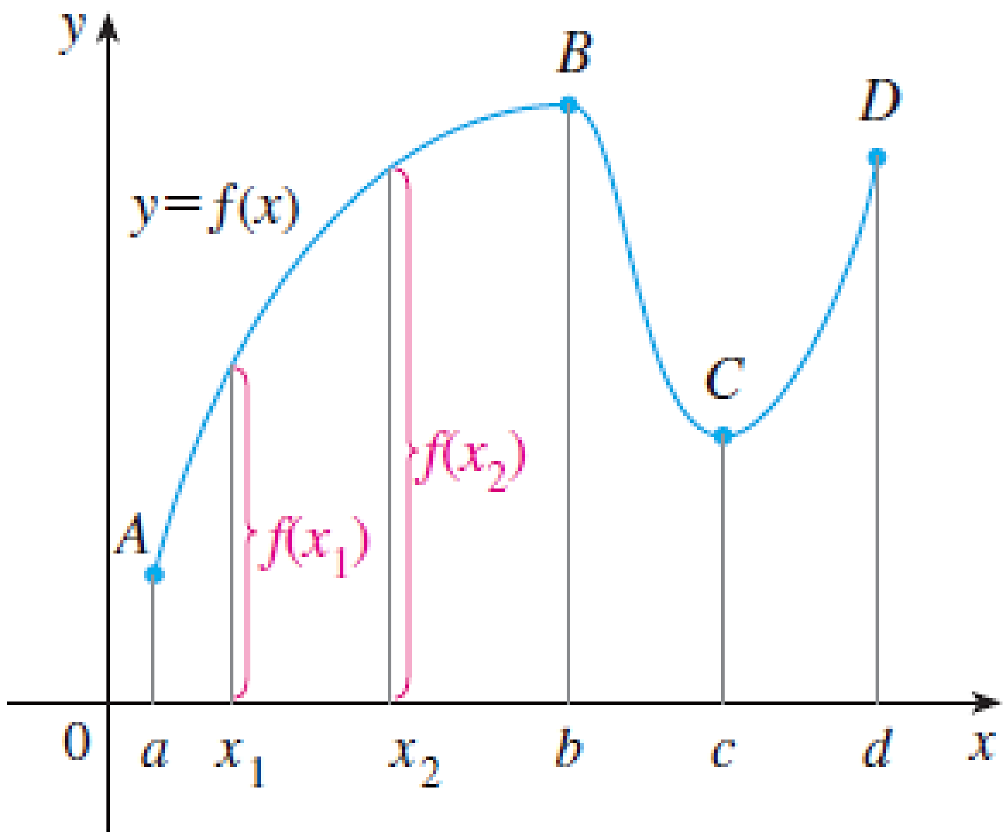


FIGURA 22

Você pode ver que na Figura 23 a função $f(x) = x^2$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, \infty)$.

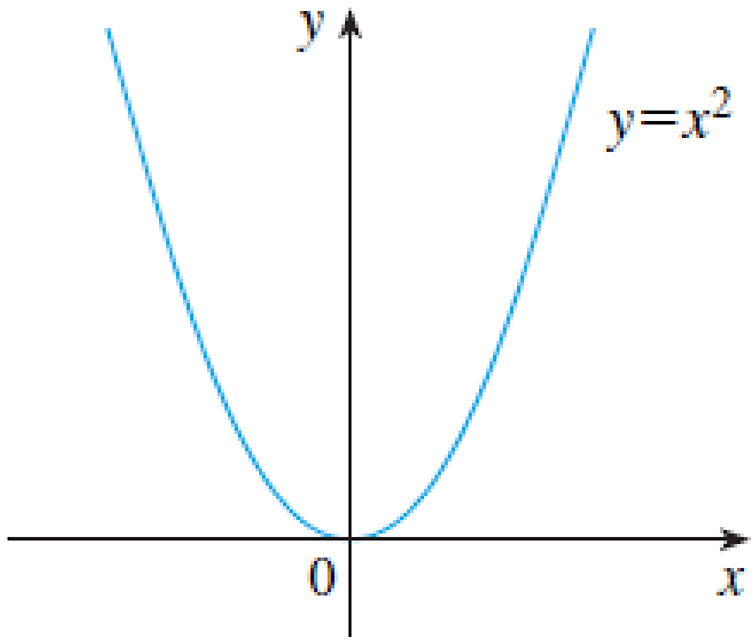


FIGURA 23

Exercícios

Seção 1.1 – pág. 19.
Livro STEWART, J. Cálculo. Volume I. 7a edição