Matrizes

Definição

Uma tabela de $m \times n$ números reais dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais) é uma matriz do tipo (ou formato) $m \times n$, ou simplesmente matriz $m \times n$.

Exemplos

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz 1×3.

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×2.

c) $C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×2.

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×4.

e) $E = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×1.

f) Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$.

g) Qual é o elemento $\mathbf{a_{46}}$ da matriz $A = (a_{ij})_{8 \times 8}$, em que $a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \dfrac{2j}{i}$?

Definição

Duas matrizes $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B_{r \times s} = [b_{ij}]_{r \times s}$ são iguais, isto é, $A = B$, se elas tem o mesmo número de linhas $(m = r)$ e colunas $(n = s)$, e todos os seus elementos correspondentes são iguais $(a_{ij} = b_{ij})$.

Tipos Especiais de Matrizes

Matriz Quadrada

Matriz Quadrada é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas $(m = n)$.

Exemplo

$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ -1 & -4 & 6 \\ \sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 3×3. Dizemos que **B** é quadrada de ordem 3.

Matriz Nula

Matriz Nula é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ é a matriz nula 2×3.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ é a matriz nula 2×2.

Matriz Coluna

Matriz Coluna é aquela matriz que possui uma única coluna $(n = 1)$.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ é uma matriz coluna 4×1.

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$ é uma matriz coluna 3×1.

Matriz Linha

Matriz Linha é aquela matriz que possui uma única linha $(m = 1)$.

Exemplos

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz linha 1×3.

$B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha 1×2.

Matriz Diagonal

Matriz Diagonal é uma matriz quadrada $(m = n)$ onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na "diagonal" são nulos.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade

Matriz Identidade é uma matriz Diagonal em que $a_{ij} = 1$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Superior

Matriz Triangular Superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior

Matriz Triangular Superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Exemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica

Matriz Simétrica é uma matriz quadrada onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplos

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 9 \\ 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operações com Matrizes

Adição de Matrizes

A soma de duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$ que denotamos por $A + B$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B. Isto é.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

Exemplos

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 9 & 8 & -4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 14 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Propriedades:

Dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem $m \times n$, temos:

i) $A + B = B + A$ (Comutativa)
ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associativa)
iii) $A + \mathbf{0} = A$, onde $\mathbf{0}$ denota a matriz nula $m \times n$ (Elemento neutro)

Multiplicação de uma Matriz por um escalar

Seja $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e k um número real, então definimos uma nova matriz:

$$k.A = \left[ka_{ij}\right]_{m\times n}$$

Propriedades:

Dadas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e números k, k_1 e k_2, temos:

i) $k(A + B) = kA + kB$
ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
iii) $\mathbf{0}.A = \mathbf{0}$, isto é, se multiplicarmos o número zero por qualquer matriz A, teremos a matriz nula.
iv) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

Matriz Transposta

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter uma matriz $A^t = A' = [b_{ij}]_{m \times n}$, cujas linhas são colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. $A^t = A'$ é denominada de transposta de A.

Exemplos

A transposta de $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ é $A^t = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

A transposta de $B = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ é $B^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 10 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

A transposta de $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ é $C^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

Propriedades:

i) Uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual a sua transposta, isto é, se, e somente se $A = A^t$.

ii) $(A^t)^t = A$. Isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

iii) $(A + B)^t = A^t + B^t$. A transposta de uma soma é igual a soma das transpostas.

iv) $(kA)^t = kA^t$, onde k é qualquer escalar.

Multiplicação de Matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n\times p}$. Definimos $C = AB = [c_{uv}]_{m\times p}$, onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + \cdots + a_{un}b_{nv}$$

Observações:

i) Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{r\times p}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, $n = r$. Alem disso, a matriz resultado $C = AB$ será de ordem $m \times p$.

ii) O elemento c_{ij} (i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz produto) é obtido, multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos da j-ésima coluna da segunda matriz, e somando esses produtos.

Exemplo 1

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, vamos determinar, se existirem, $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Exemplo 2

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ vamos determinar, se existirem, $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Exemplo 3

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 8}$, em que $b_{jk} = j + k$. Sendo $C = A \cdot B = (c_{ik})_{6 \times 8}$, qual é o valor do elemento $\mathbf{c_{35}}$?

Propriedades:

i) Em geral $AB \neq BA$ (Podendo um dos membros estar definido e o outro não).

ii) $AI = IA = A$ (Isso justifica o nome da matriz identidade)

iii) $A(B + C) = AB + AC$ (Distributiva a esquerda)

iv) $(A + B)C = AC + BC$ (Distributiva a direita)

v) $(AB)C = A(BC)$ (Associativa)

vi) $(AB)^t = B^t A^t$ (Observe a ordem)

vii) $\mathbf{0}.A = \mathbf{0}$ e $A.\mathbf{0} = \mathbf{0}$.