Sistemas de Equações Lineares

Definição

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

com a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, números reais (ou complexos).

Uma solução do sistema $(*)$ acima é uma n-upla de números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisfaça simultaneamente estas m equações.

Podemos escrever o sistema $(*)$ na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou $A.X = B$ onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a matriz das incógnitas e

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

a matriz dos termos independentes.

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que chamamos matriz ampliada do sistema.

Operações Elementares

São três as operações elementares sobre linhas de uma matriz.

i) Permuta das i-ésima e j-ésima linhas. $(L_i \leftrightarrow L_j)$

Exemplo: $L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

ii) Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k. $(L_i \longrightarrow kL_i)$
Exemplo: $L_2 \longrightarrow -3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

iii) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima mais k vezes a j-ésima linha. $\left(L_i \leftrightarrow L_i + kL_j\right)$
Exemplo: $L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é linha equivalente a A, se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A. Notações: $A \rightarrow B$ ou $A \sim B$.

Exemplo:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ é linha equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pois

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \longrightarrow L_2 - 4L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \longrightarrow L_3 + 3L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \longrightarrow -L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \longrightarrow L_3 - 4L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema

Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Forma Escada

Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida a forma escada se

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
b) Cada coluna quem contem o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.
c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo)
d) Se as linhas $1, \cdots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.
Essa última condição impõe a forma escada a matriz:

Exemplos

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definição

Toda matriz $A_{m\times n}$ é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida a forma escada.

Teorema

Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz linha reduzida a forma escada linha equivalente a A. O posto de A, denominado por p, é o número de linhas não nulas de B. A nulidade de A é o número $n - p$.

Exemplos

1) Encontre o posto e a nulidade da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Encontre o posto e a nulidade da matriz B

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

Soluções de um Sistema de Equações Lineares

Exemplo 1

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

Exemplo 2

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases}$$

Exemplo 3

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$$

Caso Geral

Consideremos um sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, \cdots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

cujos coeficientes a_{ij} e termos constantes b_i são números reais (ou complexos). Este sistema poderá ter:

i) Uma única solução
ii) Infinitas soluções
iii) Nenhuma solução

Teorema

i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz de coeficientes.

ii) Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.

iii) Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

Dizemos no caso *iii)* que o grau de liberdade do sistema é $n - p$.

Exemplo 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + 3y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Exemplo 5

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \\ -x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Exemplo 6

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + 3y - z + 2t = 3 \end{cases}$$