Como vimos, $[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

onde $y_1 = x_1 \cos\theta + x_2 \operatorname{sen}\theta = -2\cos\frac{\pi}{3} + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

$y_2 = -x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + 3\cos\frac{\pi}{3}$

donde $[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \dfrac{-2 + 3\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

ou seja, $v = \left(\dfrac{-2 + 3\sqrt{3}}{2}\right)f_1 + \left(\dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2}\right)f_2$

4.8 EXERCÍCIOS

1. *a*) Seja V o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, definido no Exemplo 2 de 4.2.2. Qual é o vetor nulo de V e o que é $-(x_1, x_2, ..., x_n)$? *b*) Seja $W = M(2, 2)$ (veja 4.2.2 Exemplo 3 *i*)) descreva o vetor nulo e vetor oposto.

2. Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ são subespaços

   a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$

   b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$

3. Responda se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2, 2)$. Em caso afirmativo exiba geradores

   a) $V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c\right\}$

   b) $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c + 1\right\}$

4. Considere dois vetores (a, b) e (c, d) no plano. Se $ad - bc = 0$, mostre que eles são LD. Se $ad - bc \neq 0$, mostre que eles são LI.

5. Verifique se os conjuntos abaixo são espaço vetoriais reais, com as operações usuais. No caso afirmativo, exiba uma base e dê a dimensão.

   a) Matrizes diagonais $n \times n$

   b) Matrizes escalares $n \times n$

c) $\left\{\begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix} : a,\ b \in \mathbf{R}\right\}$

d) $V = \{(a, a, ..., a) \in \mathbf{R}^n : a \in \mathbf{R}\}$

e) $\{(1, a, b): a, b \in \mathbf{R}\}$

f) A reta $\{(x, x + 3): x \in \mathbf{R}\}$

g) $\{(a, 2a, 3a): a \in \mathbf{R}\}$

6. Considere o subespaço de $\mathbf{R}^4$

$S = [(1, 1, -2, 4), (1, 1, -1, 2), (1, 4, -4, 8)]$

a) O vetor $(\frac{2}{3}, 1, -1, 2)$ pertence a S?

b) O vetor $(0, 0, 1, 1)$ pertence a S?

7. Seja W o subespaço de $M(2, 2)$ definido por

$$W = \left\{\begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} : a,\ b \in \mathbf{R}\right\}$$

a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$? b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

8. Seja W o subespaço de $M(3, 2)$ gerado por

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. O vetor $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ pertence a W?

9. Mostre que

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é base de $M(2, 2)$.

10. Escreva uma base para o espaço vetorial das matrizes $n \times n$. Qual a dimensão deste espaço?

11. Quais são as coordenadas de $x = (1, 0, 0)$ em relação à base $\beta = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$?

12. Qual seria uma base "natural" para P_n? (Veja o Exemplo 4 de 4.2.2). Dê a dimensão deste espaço vetorial.

13. Mostre que os polinômios $1 - t^3$, $(1 - t)^2$, $1 - t$ e 1 geram o espaço dos polinômios de grau $\leqslant 3$.

14. Considere $[-a, a]$ um intervalo simétrico e $C^1[-a, a]$ o conjunto das funções reais definidas no intervalo $[-a, a]$ que possuem derivadas contínuas no intervalo. Sejam ainda os subconjuntos $V_1 = \{f(x) \in C^1[-a, a] \mid f(-x) = f(x), \forall x \in [-a, a]\}$ e $V_2 = \{f(x) \in C^1[-a, a] \mid f(-x) = -f(x), \forall x \in [-a, a]\}$.

    a) Mostre que $C^1[-a, a]$ é um espaço vetorial real.
    b) Mostre que V_1 e V_2 são subespaços de $C^1[-a, a]$.
    c) Mostre que $V_1 \oplus V_2 = C^1[-a, a]$.

15. Seja V o espaço das matrizes 2×2 sobre $\mathbf{R}$, e seja W o subespaço gerado por

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma base, e a dimensão de W.

16. Seja P o conjunto de todos os polinômios (de qualquer grau) com coeficientes reais. Existe uma base finita para este espaço? Encontre uma "base" para P e justifique então por que P é conhecido como um espaço de dimensão infinita.

17. *a*) Dada uma matriz $\mathbf{A}$ de ordem $m \times n$, você pode considerar as m linhas como vetores do $\mathbf{R}^n$ e o subespaço V, de $\mathbf{R}^n$, gerado por estes m vetores. Da mesma forma para a matriz $\mathbf{B}$, linha reduzida à forma escada de $\mathbf{A}$, podemos considerar o subespaço W gerado pelos m vetores, dados por suas linhas. Observando que cada linha de $\mathbf{B}$ é obtida por combinação linear das linhas de $\mathbf{A}$ e vice-versa (basta reverter as operações com as linhas), justifique que $V = W$.
    b) Mostre, ainda, que os vetores dados pelas linhas não nulas de uma matriz-linha reduzida à forma escada são LI.

18. Considere o subespaço de $\mathbf{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $v_4 = (1, 0, 0, 0)$.

    a) O vetor $(2, -3, 2, 2) \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$? Justifique.
    b) Exiba uma base para $[v_1, v_2, v_3, v_4]$. Qual é a dimensão?
    c) $[v_1, v_2, v_3, v_4] = \mathbf{R}^4$? Por quê?

19. Considere o subespaço de $\mathbf{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$. $[v_1, v_2, v_3] = \mathbf{R}^3$? Por quê?

20. Use o exercício 17 para exibir uma base para o subespaço S, definido no Exercício 6. Qual é a dimensão de S?

21. Considere o sistema linear

$$(\S)\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = a \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = b \\ 6x_2 - 14x_3 = c \end{cases}$$

Seja $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \colon (x_1, x_2, x_3)$ é solução de $(\S)\}$. Isto é, W é o conjunto-solução do sistema.

a) Que condições devemos impor a a, b e c para que W seja subespaço vetorial de $\mathbf{R}^3$?
b) Nas condições determinadas em *a*) encontre uma base para W.
c) Que relação existe entre a dimensão de W e o grau de liberdade do sistema? Seria este resultado válido para quaisquer sistemas homogêneos?

22. Seja U o subespaço de $\mathbf{R}^3$, gerado por $(1, 0, 0)$ e W o subespaço de $\mathbf{R}^3$, gerado por $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Mostre que $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

23 Demonstre o teorema 4.3.5, isto é, mostre que, dados $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_1 + W_2$ e $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2' \in W_1 + W_2$ (onde $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1' \in W_1$ e $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2' \in W_2$), então $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1 + W_2$ e $k\mathbf{u} \in W_1 + W_2$ para todo $k \in \mathbf{R}$.

24. Mostre que, se $V = W_1 \oplus W_2$ e $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é a base de W_1, $\beta = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ é a base de W_2 então $\gamma = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ é base de V.

Mostre com um exemplo que o resultado não continua verdadeiro se a soma de subespaços não for uma soma direta.

25. Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t)| \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ e
$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}$

subespaços de $\mathbf{R}^4$.

a) Determine $W_1 \cap W_2$.
b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.
c) Determine $W_1 + W_2$.
d) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.
e) $W_1 + W_2 = \mathbf{R}^4$?

26. Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{tais que } a = d \text{ e } b = c \right\}$

e $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{tais que } a = c \text{ e } b = \mathrm{d} \right\}$

subespaços de $M(2, 2)$

a) Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base.
b) Determine $W_1 + W_2$. É soma direta? $W_1 + W_2 = M(2, 2)$?

27. *a*) Dado o subespaço $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ ache um subespaço V_2 tal que $\mathbf{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.
b) Dê exemplos de dois subespaços de dimensão dois de $\mathbf{R}^3$ tais que $V_1 + V_2 = \mathbf{R}^3$. A soma é direta?

28. Ilustre com um exemplo a proposição: "Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então:
$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$."

29. Sejam $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\beta_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$ e $\beta_3 = \{(2, 0), (0, 2)\}$ bases ordenadas de $\mathbf{R}^2$.

a) Ache as matrizes de mudaça de base:

i) $[I]^{\beta_1}_{\beta}$ *ii*) $[I]^{\beta}_{\beta_1}$ *iii*) $[I]^{\beta}_{\beta_2}$ *iv*) $[I]^{\beta}_{\beta_3}$

b) Quais são as coordenadas do vetor $\mathbf{v} = (3, -2)$ em relação à base:
i) β *ii*) β_1 *iii*) β_2 *iv*) β_3

c) As coordenadas de um vetor $\mathbf{v}$ em relação à base β_1 são dadas por

$$[\mathbf{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quais são as coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação à base:
i) β *ii*) β_2 *iii*) β_3

30. Se

$$[I]^{\alpha'}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ache

a) $[\mathbf{v}]_{\alpha}$ onde $[\mathbf{v}]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *b*) $[\mathbf{v}]_{\alpha'}$ onde $[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

31. Se β' é obtida de β, a base canônica de $\mathbf{R}^2$, pela rotação por um ângulo $-\frac{\pi}{3}$, ache

a) $[I]^{\beta'}_{\beta}$ *b*) $[I]^{\beta}_{\beta'}$

32. Sejam $\beta_1 = \{(1, 0), (0, 2)\}$, $\beta_2 = \{(-1, 0), (1, 1)\}$ e $\beta_3 = \{(-1, -1), (0, -1)\}$ três bases ordenadas de $\mathbf{R}^2$.

a) Ache

i) $[I]^{\beta_2}_{\beta_1}$ *ii*) $[I]^{\beta_3}_{\beta_2}$ *iii*) $[I]^{\beta_3}_{\beta_1}$ *iv*) $[I]^{\beta_2}_{\beta_1} \cdot [I]^{\beta_3}_{\beta_2}$

b) Se for possível, dê uma relação entre estas matrizes de mudança de base.

33. Seja V o espaço vetorial de matrizes 2 × 2 triangulares superiores. Sejam

$$\beta = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{e } \beta_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

duas bases de V. Ache $[I]^{\beta_1}_{\beta}$

34. Volte a 4.7.2 e mostre efetivamente que $([I]^{\beta'}_{\beta})^{-1} = [I]^{\beta}_{\beta'}$

35. Se α é base de um espaço vetorial, qual é a matriz de mudança de base $[I]^{\alpha}_{\alpha}$?

4.9 RESPOSTAS

4.9.1 Respostas de 4.8

1. $0 = (0, 0, ..., 0)$ e $-(x_1, ..., x_n) = (-x_1, ..., -x_n)$

2. *a*) Façamos os testes, lembrando-nos que o que define W são as condições dentro dos parênteses

   i) Sejam $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in W$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W$. Então $v_1 + v_2$ está ainda em W? Vejamos:

   $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$.

   Testemos se este novo vetor satisfaz as condições que definem W:

   $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$
   $(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2) = (z_1 - t_1) + (z_2 - t_2) = 0 + 0 = 0$

   pois v_1 e v_2 estão em W e satisfazem as condições implicando que $v_1 + v_2$ também o faça. Portanto $v_1 + v_2 \in W$.

   ii) Seja $v = (x, y, z, t) \in W$ e $\lambda \in \mathbf{R}$. Então $\lambda \cdot v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$. Testemos as condições:

   $\lambda x + \lambda y = \lambda (x + y) = \lambda \cdot 0 = 0$
   $\lambda z - \lambda t = \lambda (z - t) = \lambda \cdot 0 = 0$

   Assim $\lambda v \in W$. Portanto W é subespaço.

   b) O mecanismo é análogo.

3. *a*) Façamos os testes para V.

   Sejam $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ vetores em V e $\lambda \in \mathbf{R}$. Então

   $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ e

   vale que $b_1 + b_2 = c_1 + c_2$ pois $b_1 = c_1$ e $b_2 = c_2$

   $\lambda \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & \lambda d_1 \end{bmatrix}$ e vale $\lambda b_1 = \lambda c_1$ pois $b_1 = c_1$.

   Portanto W é subespaço de $M(2, 2)$.

   b) Façamos os testes para W. Supondo os vetores acima em W ao fazermos a soma teremos que testar *se* $b_1 + b_2 = c_1 + c_2 + 1$, que é a propriedade que caracteriza W. Porém $b_1 = c_1 + 1$ e $b_2 = c_2 + 1$ e, portanto, $b_1 + b_2 = c_1 + 1 + c_2 + 1 = c_1 + c_2 + 2$. Assim W não é subespaço.

Poderíamos ter a resposta mais rapidamente se observássemos que $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

não está em W pois não satisfaz a propriedade que o caracteriza.

Vamos exibir geradores apenas para V já que não existe este conceito em W(não é subespaço). Observe que a forma mais geral de um vetor de V é

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ que pode ser escrita como $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e

$d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Além disso $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ estão

em V. Portanto, todo vetor de V é combinação linear de v_1, v_2 e v_3, ou seja, v_1, v_2, v_3 são os geradores procurados $V = [v_1, v_2, v_3]$.

5. *a*) Sim; $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \right\}$; n

b) Sim; $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right\}$ 1

c) Sim; $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, 2

d) Sim; $\{(1, \ldots, 1)\}$; 1

e) Não.

f) Não.

g) Sim. $\{(1, 2, 3)\}$; 1.

7. *a*) Pertence

b) Não pertence

9. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e os vetores são LI.

11. $[x]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

13. Seja $at^3 + bt^2 + ct + d = \alpha(1 - t^3) + \beta(1 - t)^2 + \gamma(1 - t) + \delta$
Então $-\alpha = a$, $\beta = b$, $-2\beta - \gamma = c$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = d$
Portanto $\alpha = -a$, $\beta = b$, $\gamma = -2b - c$, $\delta = a + b + c + d$.

14. c) Note que toda função $f(x) \in C^1\,[-a, a]$ pode ser escrita como
$f(x) = F_1(x) + F_2(x)$ com $F_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ e $F_2(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Além disso $F_1(-x) = F_1(x)$ e $F_2(-x) = -F_2(x)$ e portanto $F_1(x) \in V_1$ e $F_2(x) \in V_2$. Assim $V_1 + V_2 = C^1\,[-a, a]$. Ainda que $g(x) \in V_1 \cap V_2$ devemos ter ao mesmo tempo $g(-x) = g(x) = -g(x)$ donde $g(x) = 0$ para todo x. Portanto $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ e $C^1\,[-a, a] = V_1 \oplus V_2$.

16. Não; $\{(1, t, t^2, ..., t^n, ...\}$

18. a) Temos que saber se existem x, y, z e $t \in \mathbf{R}$ tais que $(2, -3, 2, 2) =$
$= x(1, -1, 0, 0) + y(0, 0, 1, 1) + z(-2, 2, 1, 1) + t(1, 0, 0, 0)$, ou seja, temos que saber se o sistema

$$\begin{cases} x \qquad - 2z + t = 2 \\ -x \qquad + 2z \qquad = -3 \\ \qquad y + z \qquad = 2 \\ \qquad y + z \qquad = 2 \end{cases}$$

é possível ou impossível. Utilizando as técnicas (operações com linhas) do Capítulo 2 obtemos que o sistema não somente é possível como admite infinitas soluções. Portanto $(2, -3, 2, 2)$ pertence a $[v_1, v_2, v_3, v_4]$.

b) Já pelo item (a) poderíamos afirmar que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ não formam uma base pois uma das propriedades de uma base é o fato de qualquer vetor poder ser escrito de *modo único* como combinação linear dos vetores da base e, pelo item (a), como o sistema é indeterminado, existem infinitas maneiras de se fazer isto. Não utilizaremos isto, entretanto, no raciocínio que se segue. Coloquemos os vetores um sob o outro obtendo a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações com as linhas desta matriz são equivalentes no espaço vetorial a fazer combinações lineares e portanto as novas linhas serão ainda vetores do subespaço. Além disso, sendo as operações com as linhas reversíveis, as novas linhas gerarão os mesmos vetores que as linhas originais. Assim, ao operarmos com as linhas da matriz para consegui-la na forma escada não estaremos alterando o subespaço e, na forma escada, as novas linhas não nulas representarão vetores linearmente independentes e que geram o subespaço, ou seja, uma base (veja o exercício 17). No nosso caso obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo raciocínio anterior, sendo $w_1 = (1, 0, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0, 0)$ e $w_3 = (0, 0, 1, 1)$, $[v_1, v_2, v_3, v_4] = [w_1, w_2, w_3]$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ é a base procurada. A dimensão, sendo o número de vetores da base, é 3.

c) $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ não é igual a $\mathbf{R}^4$ pois $\dim [v_1, v_2, v_3, v_4] = 3$ e $\dim \mathbf{R}^4 = 4$.

20. $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 2)\}$; 2

21. *a*) $a = b = c = 0$.

b) Resolva o sistema operando com as linhas como no Capítulo 2. Verifique o grau de liberdade e quais são as variáveis livres. Atribua valor 1 para uma delas e zero para as outras e vá repetindo o processo para obter as soluções básicas (veja 2.5.7). Cada solução básica fornecerá um vetor da base de W (por quê?).

c) A dimensão de W é exatamente o grau de liberdade pois cada grau determina uma solução básica do sistema. O resultado é válido para qualquer sistema homogêneo.

22. $\dim[(1, 0, 0)] = 1$, e $\dim[(1, 1, 0), (0, 1, 1)] = 2$. Os três vetores são LI e portanto geram o $\mathbf{R}^3$. Como $\dim \mathbf{R}^3 = 3$, pela proposição 4.6.9 $\dim \{(1, 0, 0) \cap [(1, 1, 0), (0, 1, 1)]\} = 0$. Então a soma é direta.

24. Sugestão: Suponha que γ não seja base de V. Então ou $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_2$ não geram V ou não são LI. As duas situações resultam numa contradição. Exemplo: Sejam W_1 o plano xy e W_2 o plano xz em $\mathbf{R}^3$. A soma não é direta. Uma base de W_1 e $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ e uma de W_2 é $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$. Mas $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ não é base de $\mathbf{R}^3$.

25. Inicie achando os geradores de W_1 e W_2, observando que eles são dados por sistemas lineares e portanto devemos procurar as soluções fundamentais para tais sistemas (veja o exercício 21 e sua resposta). Para W, teremos

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Portanto $x = -y$ e $z = t$ e teremos dois graus de liberdade fazendo $y = 1$ e $t = 0$ e depois $y = 0$ e $t = 1$, teremos os vetores $w_1 = (-1, 1, 0, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 1, 1)$ que são LI (verifique). Assim $W_1 = [w_1, w_2]$. Para W_2 teremos: $x - y - z + t = 0$ que fornece $x = y + z - t$ com três graus de liberdade. Fazendo $y = 1$, $z = 0$ e $t = 0$, depois $y = 0$, $z = 1$ e $t = 0$ e depois $y = 0$, $z = 0$ e $t = 1$ teremos $w_3 = (1, 1, 0, 0)$, $w_4 = (1, 0, 1, 0)$ e $w_5 = (-1, 0, 0, 1)$ que são LI (verifique). Portanto $W_2 = [w_3, w_4, w_5]$. Por outro lado $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0, z - t = 0$ e $x - y - z + t = 0\}$. Para achar $W_1 \cap W_2$ resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

Operando com as linhas (como no **Capítulo** 2), obtemos

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Portanto um grau de liberdade (na variável t). Fazendo $t = 1$, teremos a solução $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ e $t = 1$, ou seja, o vetor $v = (0, 0, 1, 1)$. Portanto

a) $W_1 \cap W_2 = [(0, 0, 1, 1)]$.

b) Uma base para $W_1 \cap W_2$ é $\{(0, 0, 1, 1)\}$ (unidimensional).

c) $W_1 + W_2 = [(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)]$

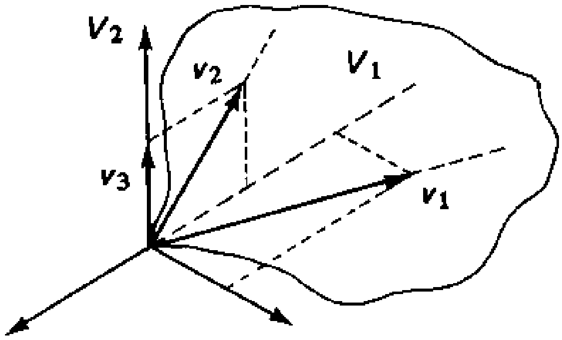
d) $W_1 + W_2$ não é soma direta pois $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$

e) Para responder se $W_1 + W_2 = \mathbf{R}^4$ vamos exibir uma base de $W_1 + W_2$. Para isto, considere seus geradores e opere com eles como no exercício 18 para obter novos geradores linearmente independentes

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $W_1 + W_2 = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$ e $\dim(W_1 + W_2) = 4$ e portanto $W_1 + W_4 = \mathbf{R}^4$.

27. *a*) Vamos calcular, inicialmente, os geradores de V_1. Observe que o sistema linear $x + 2y + z = 0$ tem dois graus de liberdade. Então $x = -2y - z$. Fazendo $y = 1$ e $z = 0$, obtemos a solução $x = -2$, $y = 1$, $z = 0$, ou seja, o vetor $v_1 = (-2, 1, 0)$. Por outro lado, fazendo $y = 0$ e $z = 1$, obtemos o vetor $v_2 = (-1, 0, 1)$. Como toda solução do sistema é combinação linear dessas soluções fundamentais, todo vetor de V_1 é combinação linear de v_1 e v_2. Portanto $V_1 = [v_1, v_2]$ (veja exercícios 21 e 25). Observe ainda que como v_1 e v_2 são LI, V_1 é de dimensão dois. Lembre agora que se temos subespaços $W_1 = [w_1, w_2, ..., w_k]$ e $W_2 = [w_{k+1}, ..., w_e]$ então $W_1 + W_2$, sendo formado pelos vetores que são obtidos por somas de vetores de W_1 e vetores de W_2, pode ser escrito $W_1 + W_2 = [w_1, w_2, ..., w_k, w_{k+1}, ... w_e]$. Portanto para obter V_2 tal que $V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^3$, V_2 deve ser gerado por apenas um terceiro vetor v_3 LI com v_1 e v_2 (para completar a dimensão de $\mathbf{R}^3$) e tal que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Podemos tomar, por exemplo, $v_3 = (0, 0, 1)$ e $V_2 = [(0, 0, 1)] = \{(x, y, z) \mid x = 0, y = 0 \text{ e } z \in \mathbf{R}\}$. A disposição geométrica deste exercício é



29. *a*) *i*) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *ii*) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *iii*) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$ *iv*) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) *i*) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ *ii*) $\begin{bmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *iii*) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ *iv*) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

c) *i*) $\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ *ii*) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{-8}{3} \end{bmatrix}$ *iii*) $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

30. *a*) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Procure outras soluções.

b) Um exemplo seria $V_1 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ e $V_2 = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Neste caso a soma não seria direta pois $V_1 \cap V_2 = [(0, 1, 0)]$. Note ainda que V_1 e V_2 poderiam ser escritos como $V_1 = \{(x, y, z) \mid z = 0,$ x e y reais quaisquer$\}$ e $V_2 = \{(x, y, z) \mid x = 0$ e y e z reais quaisquer$\}$. Procure outros exemplos mas note que em nenhum exemplo a soma pode ser direta porque senão a dimensão de $\mathbf{R}^3$ seria 4 (veja o exercício 29).

35. A matriz identidade.

Leituras Sugeridas e Referências

[1]Herstein, I. N.; *Tópicos de Álgebra*, Editora Polígono, São Paulo, 1970.

[2]Hoffman, K. e Kunze, R.; *Álgebra Linear*, Editora Polígono, São Paulo, 1971.

[3]Kemeny, J., Snell, J. e Thompson, G.; *Introduction to Finite Mathematics*; Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1957.

[4]Leithold, L.; *O Cálculo com Geometria Analítica*; HARBRA, São Paulo, 1977.