

A matriz associada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ que reduzida à forma escada torna-se}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Reinterpretando, vemos que } z \text{ e } t \text{ são livres.}$$

Fazendo $z = \lambda_1$ e $t = \lambda_2$, obtemos

$$x = -5\lambda_1 + \lambda_2 + 3$$

$$y = 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2$$

$$z = \lambda_1$$

$$t = \lambda_2$$

$$\text{ou } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Compare com o exemplo 1. O que você nota?

2.6 EXERCÍCIOS

1. Resolva o sistema de equações, escrevendo as matrizes ampliadas, associadas aos novos sistemas.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

2. Descreva todas as possíveis matrizes 2×2 , que estão na forma escada reduzida por linhas.
3. Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Calcule o posto e a nulidade das matrizes da questão 3.

5. Dado o sistema
$$\begin{cases} 3x + 5y &= 1 \\ 2x &+ z = 3 \\ 5x + y - z &= 0 \end{cases}$$

escreva a matriz ampliada, associada ao sistema e reduza-a à forma escada reduzida por linhas, para resolver o sistema original.

6. Determine k , para que o sistema admita solução.

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

7. Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

8. Explique por que a nulidade de uma matriz nunca é negativa.

9. Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 g) determinou-se que:

- i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.
- ii) O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades respectivamente, das vitaminas A, B e C.
- iii) O alimento III tem 3 unidades de vitaminas A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B.

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C,

- a) Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada.
- b) Se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois custam 10, existe uma solução custando exatamente Cr\$ 1,00?

Resolva os sistemas seguintes achando as matrizes ampliadas linha reduzidas à forma escada e dando também seus postos, os postos das matrizes dos coeficientes e, se o sistema for possível, o grau de liberdade.

$$10. x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$$

$$11. \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

17. O método de Gauss para resolução de sistemas é um dos mais adotados quando se faz uso do computador, devido ao menor número de operações que envolve. Ele consiste em se reduzir a matriz ampliada do sistema por linha-equivalência a uma matriz que só é diferente da linha reduzida à forma escada na condição *b)* de 2.4.1, que passa a ser: *b')* Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha, tem todos os elementos *abaixo* desta linha iguais a zero. As outras condições *a*, *c* e *d* são idênticas. Uma vez reduzida a matriz ampliada a esta forma, a solução final do sistema é obtida por substituição.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a última matriz corresponde ao sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2} x_2 &= \frac{5}{2} \\ x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Por substituição, $x_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, ou seja, $x_1 = 2$.

Resolva pelo método de Gauss os Exercícios 14, 15 e 16 e compare as respostas.

18. a) Mostre a proposição 2.4.3 para matrizes 2×2 quaisquer.
 b) Sinta a dificuldade que você terá para formalizar o resultado para matrizes $n \times m$, mas convença-se de que é só uma questão de considerar todos os casos possíveis, e escreva a demonstração. Consulte 2.7.
19. Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes, b_i , são todos nulos.
- a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?
 b) Encontre os valores de $k \in R$, tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}$$

tenha uma solução distinta da solução trivial ($x = y = z = 0$).

20. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$$

Note que podemos escrevê-lo na forma matricial

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Verifique que a matriz $X_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma solução para o sistema.

b) Resolva o sistema e verifique que toda “matriz-solução” é da forma

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $\lambda \in R$.

c) Verifique

$$\lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

é a solução do sistema homogêneo, associado ao sistema (*),

$$(**) \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) Conclua, dos itens a), b) e c), que o conjunto-solução do sistema * é o conjunto-solução do sistema **, somado a uma solução particular do sistema *.

21. Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) Encontre uma solução dele sem resolvê-lo. (Atribua valores para x , y , z e w .)

b) Agora, resolva efetivamente o sistema, isto é, encontre sua matriz-solução.

c) Resolva também o sistema homogêneo associado.

d) Verifique que toda matriz-solução obtida em b) é a soma de uma matriz-solução encontrada em c) com a solução particular que você encontrou em a).

22. Altamente motivado pelos Exercícios 20 e 21, mostre que toda matriz-solução de um sistema linear $AX = B$ é a soma de uma solução do sistema ho-

que a quantidade de A em forma de vapor dentro do filtro é, em um determinado instante, 0,5854 da quantidade de A presente naquele instante na parte não vaporizada, enquanto que para B e C estas relações são 1,50 e 1,07 respectivamente.

Deseja-se saber qual é o grau de concentração de C no produto final se a unidade opera em condição estacionária (isto é, os fluxos de A , B e C não mudam com o tempo em cada estágio), sabendo que a concentração de C_1 na mistura que passa do reator para o filtro é de 68%.

2.6.1 Respostas

1. $x = -1, y = 2, z = 5$

3. a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. $x = \frac{7}{16}, y = -\frac{1}{16}, z = \frac{17}{8}$

7. $x_1 = 1 - 3x_2 - x_5$
 $x_3 = 2 + x_5$
 $x_4 = 3 + 2x_5$

9. a) Sejam x , y e z as quantidades de alimentos I, II e III respectivamente. Então

$$x = -5 + 3z, y = 8 - 3z \quad \text{onde} \quad \frac{5}{3} \leq z \leq \frac{8}{3}$$

b) Sim. $x = 1, y = 2, z = 2$

11. $x = \frac{17}{3} - \frac{7}{3}z, y = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}z$
 $p_a = 2 = p_c, g.l. = 1$

13. $p_a = 2 = p_c, g.l. = 1, x = 3z, y = 0$

15. $p_a = 3 = p_c, g.l. = 0, x = y = z = 0$

19. a) $x_i = 0$

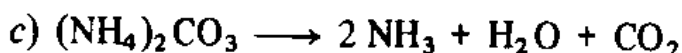
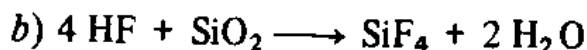
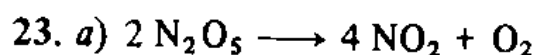
b) $k = 2$

21. a) $x = 0, y = z = 1, w = 0$

b) $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$

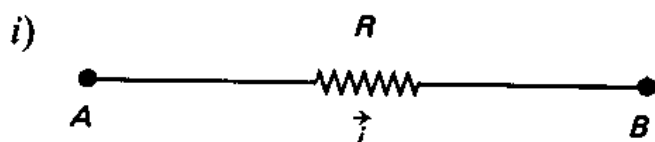
d) $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



27. *Sugestão:* Calcule as várias correntes que circulam no circuito para depois fazer a escolha dos tipos de resistência. Para isto use as *Leis de Kirchhoff*:

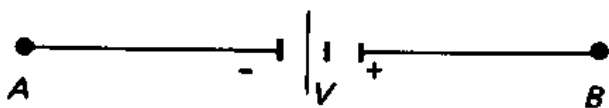
- A soma das correntes que entram em um nó de um circuito é igual à soma das correntes que saem deste nó.
- A partir de um ponto qualquer de uma malha, se a percorrermos em um sentido qualquer, ao voltarmos ao mesmo ponto, a soma algébrica das quedas de potencial é nula.

Leve em conta as observações:



Neste caso, ao irmos do ponto A ao ponto B há uma queda de potencial dada por Ri . Se fôssemos do ponto B ao ponto A haveria uma queda de potencial de $-Ri$, ou seja, um aumento de potencial de Ri .

ii)



Neste caso, ao irmos do ponto A ao ponto B há um aumento de potencial de V , ou seja, uma queda de potencial de $-V$. Se fôssemos de B até A teríamos uma queda de potencial de V .

Aplique, então, as leis de Kirchhoff ao circuito, obtendo um sistema linear. Generalizações do problema podem ser obtidas nas situações:

- Circuitos de Corrente Alternada (obtemos sistemas com coeficientes complexos).
- Projetos de Circuito (cálculo das características dos componentes para que o circuito tenha certas especificações).