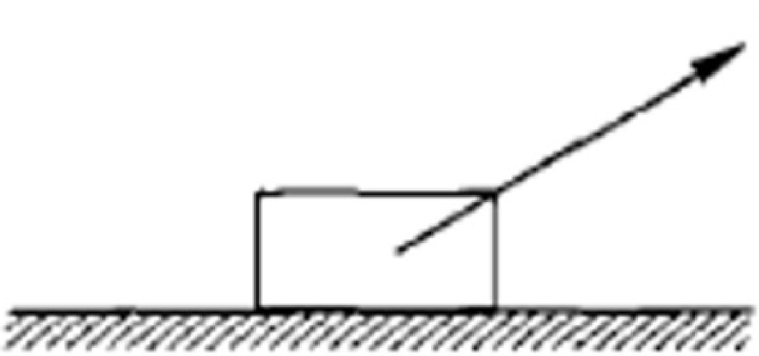
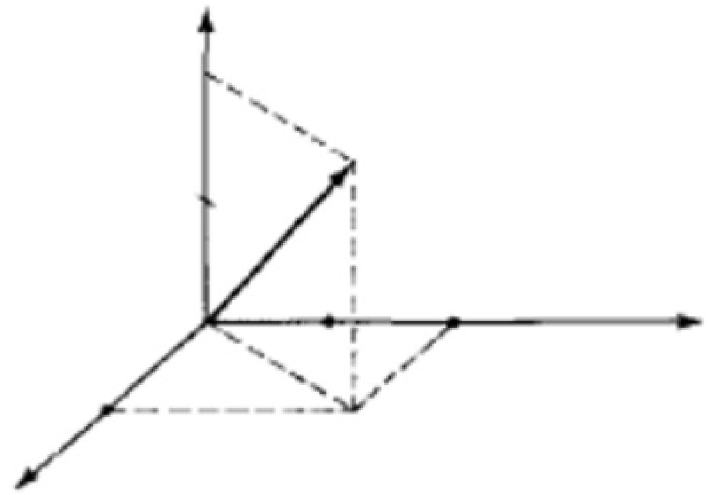
Espaço Vetorial

Vetores no plano e no espaço





Operações com vetores

Propriedades

i) $(u + v) + w = u + (v + w)$,

ii) $u + v = v + u$,

iii) Existe $\mathbf{0}$ tal que $u + \mathbf{0} = u$. ($\mathbf{0}$ é chamado vetor nulo),

iv) Existe $-u$ tal que $u + (-u) = \mathbf{0}$,

v) $a(u + v) = au + av$,

vi) $(a + b)v = av + bv$,

vii) $(ab)v = a(bv)$,

viii) $1.\, u = u$.

Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial real é um conjunto V, não vazio, com duas operações:

1) Soma: $V \times V \longrightarrow V$
2) Multiplicação por escalar $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, as propriedades de *i)* a *viii)* sejam satisfeitas.

Obs. Se na definição acima, ao invés de termos como escalares números reais, tivermos números complexos, V será um espaço vetorial complexo.

Exemplo 1

O conjunto dos vetores do espaço:

$$V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3): x_i \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo 2

Consideremos como vetores n-uplas de números reais.

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo 3

$M(m, n)$, o conjunto das matrizes reais $m \times n$ com a soma e produto por escalar usuais.

Exemplo 4

$$V = M(2,2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo 5

$V = P_n$, o conjunto dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a n (incluindo o zero).

Exemplo 6

$$P_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_i \in \mathbb{R}\}$$

Subespaços Vetoriais

Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um subespaço vetorial de V se:

i) Para quaisquer $u, v \in W$ tivermos $u + v \in W$

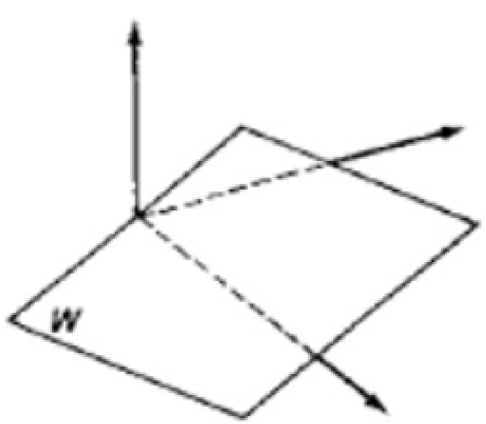
ii) Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $u \in W$ tivermos $a.u \in W$

Observações

1) As condições da definição acima garatem que ao operarmos em W, não obtemos um vetor fora de W.
2) Qualquer subespaço W de V precisa necessariamente conter o vetor nulo.
3) Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços (que são chamados de subespaços triviais), o conjunto formado somente pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial.

Exemplo 1

$V = \mathbb{R}^3$ e $W \subset V$, um plano passando pela origem.



Exemplo 2

$V = \mathbb{R}^5$ e $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5);\ x_i \in \mathbb{R}\}$

Exemplo 3

$V = M(n, n)$ e W é o subconjunto das matrizes triangulares superiores.

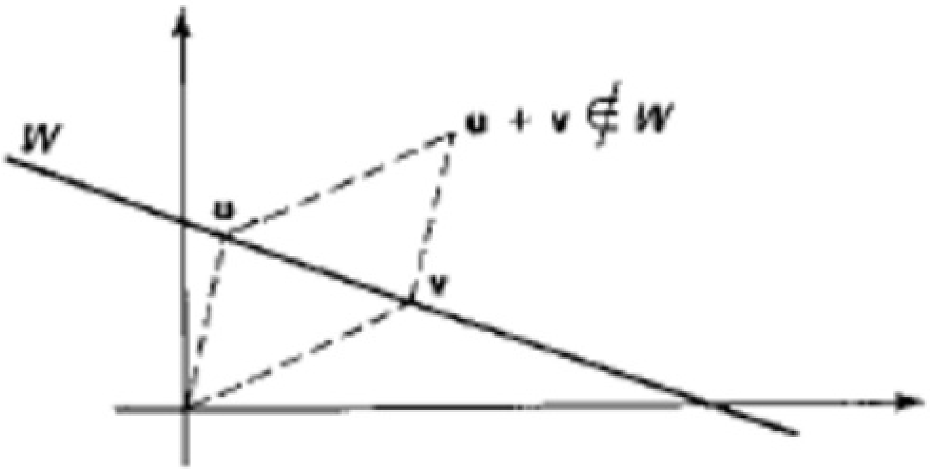
Exemplo 4

Uma situação importante em que aparece um subespaço é obtida ao resolvermos um sistema linear homogêneo. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Exemplo 5

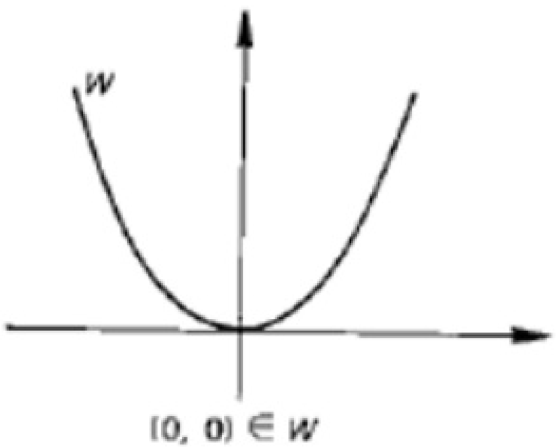
$V = \mathbb{R}^2$ e W é uma reta deste plano que não passa pela origem.



Exemplo 6

$V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$. Se escolhermos $u = (1,1)$ e $v = (2,4)$, temos

$$u + v = (3,5) \notin W.$$



Exemplo 7

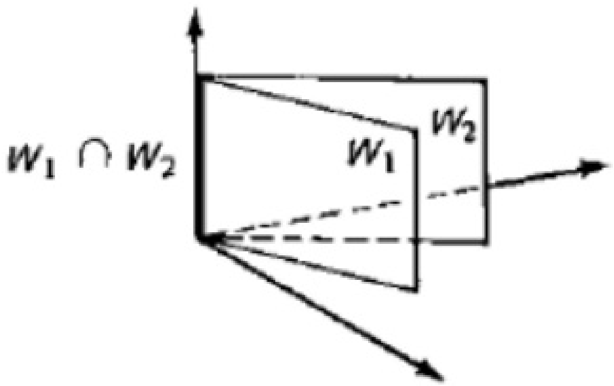
$V = M(n,n)$ e W é o subconjunto de todas as matrizes em que $a_{11} \leq 0$.

Teorema

Dados W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V, a intersecção $W_1 \cap W_2$ ainda é um subespaço de V.

Exemplo 1

$V = \mathbb{R}^3$. $W_1 \cap W_2$ é a reta de interseção dos planos W_1 e W_2.



Exemplo 2

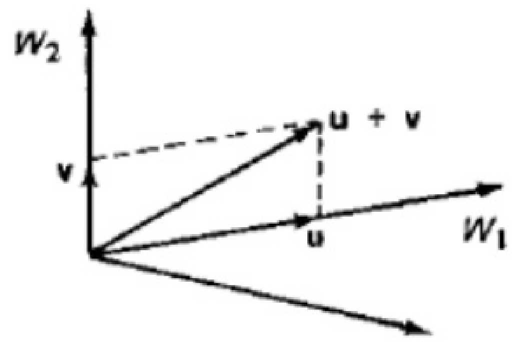
$V = M(n,n)$. $W_1 =$ {matrizes triangulares superiores}

$W_2 =$ {matrizes triangulares inferiores}

Então $W_1 \cap W_2$= {matrizes diagonais}

Exemplo 3

$$V = \mathbb{R}^3$$



W_1 e W_2 são retas que passam pela origem. Então $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e $W_1 \cup W_2$ é o feixe formado pelas duas retas, que não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$

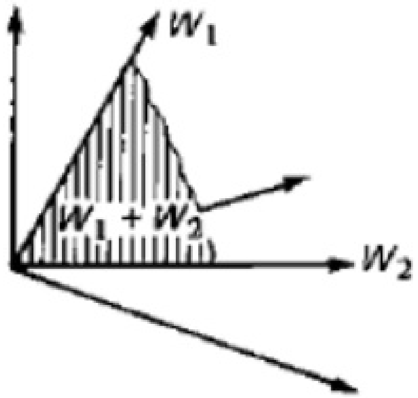
Exemplo 4

(Soma de subespaços): Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Então o conjunto

$W_1 + W_2 = \{v \in V; v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1 \; e \; w_2 \in W_2\}$ é subespaço de V.

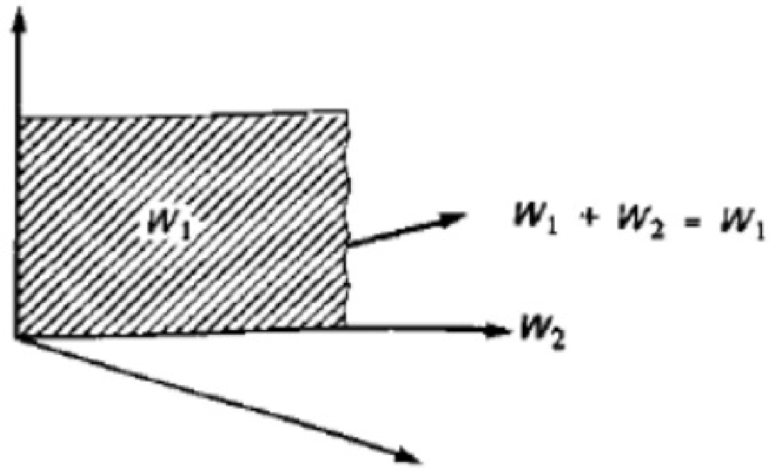
Exemplo 5

No exemplo anterior, $W = W_1 + W_2$ é o plano que contém as duas retas.



Exemplo 6

Se $W_1 \subset \mathbb{R}^3$ é um plano e W_2 é uma reta contida neste plano, ambos passando pela origem, $W_1 + W_2 = W_1$



Exemplo 7

$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Então $W_1 + W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} = M(2,2)$

Quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, então $W_1 + W_2$ é chamado soma direta de W_1 com W_2, denotado por $W_1 \oplus W_2$.

Combinação Linear

Definição

Sejam V um espaço vetorial real (ou complexo), $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ e $a_1, \cdots, a_n$ números reais (ou complexos). Então o vetor

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

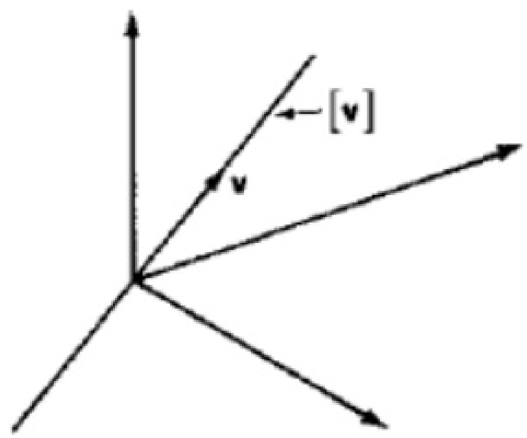
é um elemento de V ao que chamamos combinação linear de $v_1, \cdots, v_n$

Uma vez fixados vetores $v_1, \cdots, v_n$ em V, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear destes, é um subespaço vetorial. W é chamado subespaço gerado por $v_1, \cdots, v_n$ e usamos a notação

$$W = [v_1, \cdots, v_n]$$

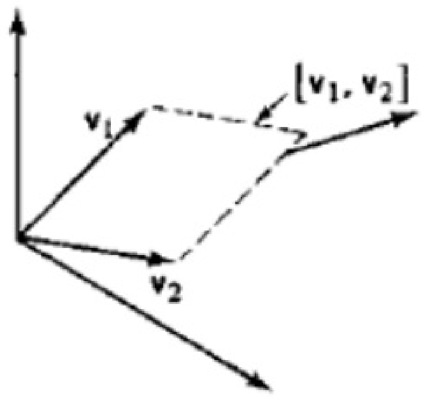
Exemplo 1

$V = \mathbb{R}^3, v \in V, v \neq 0$. Então $[v] = \{av\colon\ a \in \mathbb{R}\}$, isto é, $[v]$ é a reta que contem o vetor v.



Exemplo 2

Se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ são tais que $\alpha v_1 \neq v_2$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, então $[v_1, v_2]$ será o plano que passa pela origem e contem v_1 e v_2.



Exemplo 3

$V = \mathbb{R}^2, v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1)$. Logo $V = [v_1, v_2]$ pois, dado $v = (x, y) \in V$, temos $(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$, ou seja, $v = xv_1 + yv_2$.

Exemplo 4

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então $[v_1, v_2] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$

Dependência e Independência Linear

Definição

Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores são LI, se a equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$$

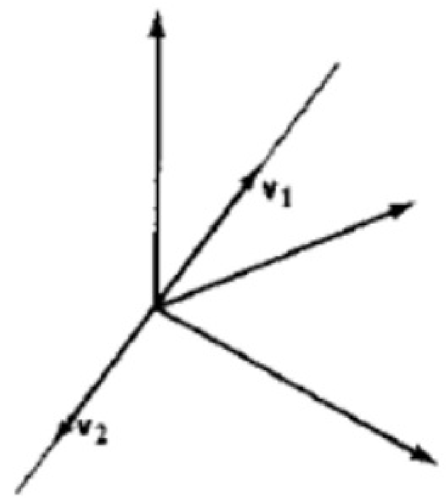
implica que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é linearmente dependente (LD), ou que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são LD.

Teorema

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LD se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

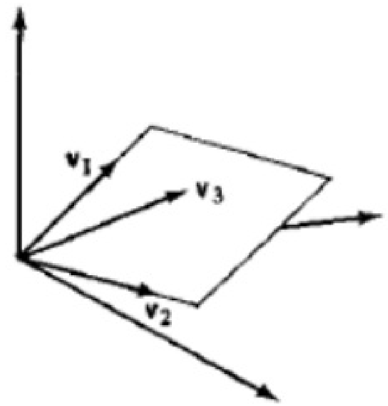
Exemplo 1

$V = \mathbb{R}^3$. Sejam $v_1, v_2 \in V$. $\{v_1, v_2\}$ é LD se e somente se v_1 e v_2 estiverem na mesma reta que passa pela origem. $(v_1 = \lambda v_2)$.



Exemplo 2

$V = \mathbb{R}^3$. Sejam $v_1, v_2, v_3 \in V$. $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD se estes três vetores estiverem no mesmo plano, que passa pela origem.



Exemplo 3

$V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$. Os vetores e_1 e e_2 são LI, pois

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 = 0$$

$$a_1(1,0) + a_2(0,1) = (0,0)$$

$$(a_1, a_2) = (0,0)$$

$$a_1 = 0 \text{ e } a_2 = 0$$

Exemplo 4

De modo análogo, vemos que para $V = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$. Então e_1, e_2 e e_3 são LI.

Exemplo 5

$V = \mathbb{R}^2$. $\{(1,-1),\ (1,0),\ (1,1)\}$ é LD, pois $\frac{1}{2}(1,-1) - 1.(1,0) + \frac{1}{2}(1,1) = (0,0)$

Base de um espaço Vetorial

Definição

Um conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de vetores de V será uma base de V se

i) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LI

ii) $[v_1, \cdots, v_n] = V$

Exemplo 1

$V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$. $\{e_1, e_2\}$ é base de V, conhecida como base canônica de $\mathbb{R}^2$.

O conjunto $\{(1,1),\ (0,1)\}$ também é uma base de $V = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2

$\{(0,1),\ (0,2)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$, pois é um conjunto LD.

Exemplo 3

$V = \mathbb{R}^3$. $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Esta é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Podemos mostrar que

i) $\{e_1, e_2, e_3\}$ é LI

ii) $(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$

Exemplo 4

$\{(1,0,0),\ (0,1,0)\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$. É LI, mas não gera todo $\mathbb{R}^3$, isto é, $[(1,0,0),\ (0,1,0)] \neq \mathbb{R}^3$.

Exemplo 5

$V = M(2,2)$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma base de V.

Teorema

Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.

Teorema

Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores)

Corolário

Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado dimensão de V, e denotado $dim\, V$.

Exemplo 1

$V = \mathbb{R}^2$. $\{(1,0),\ (0,1)\}$ e $\{(1,1),\ (0,1)\}$ são bases de V. Então $dim\, V = 2$

Exemplo 2

$dim\ \mathbb{R}^3 = 3$

Exemplo 3

$V = M(2,2)$. Como vimos no exemplo 5 da seção anterior, uma base de V tem 4 elementos.

Então $dim\ V = 4$.

Teorema

Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.

Corolário

Se $dim\ V = n$, qualquer conjunto de n vetores LI formará uma base de V.

Teorema

Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então $dim\ U \leq\ dim\ V$ e $dim\ U \leq\ dim\ V$. Alem disso,

$$dim\ (U + W) =\ dim\ U\ +\ dim\ W\ - dim\ (U \cap W)$$

Teorema

Dada uma base $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V, cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear de $v_1, v_2, \cdots, v_n$.

Definição

Sejam $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base de V e $v \in V$ onde $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$. Chamamos estes números $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de coordenadas de v em relação a base β e denotamos por

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

$V = \mathbb{R}^2$. $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$.

$(4,3) = 4(1,0) + 3(0,1)$.

Portanto $[(4,3)]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Se $\beta' = \{(1,1), (0,1)\}$, então $(4,3) = x(1,0) + y(0,1)$. O resultado é $x = 4$ e $y = -1$.

Então $(4,3) = 4(1,0) - 1(0,1)$, donde $[(4,3)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

Exemplo 2

Considere: $V = \{(x, y, z);\ x + y - z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z);\ x = y\}$. Determine $V + W$.

Observe que

$V = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$

$W = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

Então $V + W = [(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

Com

$\alpha = x$

$\beta = y$

$\gamma = 0$

$\delta = z - x - y$

Observe que a solução deste sistema não é única, uma vez que 4 vetores no $\mathbb{R}^3$ é necessariamente LD

Portanto $V + W = \mathbb{R}^3$.

$dim\ \mathbb{R}^3 = dim\ V + dim\ W - dim\ (V \cap W)$. Temos que $dim\ (V \cap W) = 1$.

Vamos determinar $V \cap W$

$V \cap W = \{(x, y, z);\ x + y - z = 0\ \ e\ \ x = y\}$

$V \cap W = \{(x, y, z);\ x = y = z/2\}$

$V \cap W = [(1, 1, 1/2)]$

Mudança de base

Sejam $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e $\beta' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V. Dado um vetor $\mathbf{v} \in V$, podemos escrevê-lo como:

$$\text{e} \quad (\S) \quad \begin{array}{l} \mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n \\ \mathbf{v} = y_1\mathbf{w}_1 + \ldots + y_n\mathbf{w}_n \end{array}$$

Como podemos relacionar as coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação à base β,

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

com as coordenadas do mesmo vetor $\mathbf{v}$ em relação à base β',

$$[\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Já que $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ é base de V, podemos escrever os vetores $\mathbf{w}_i$ como combinação linear dos $\mathbf{u}_j$, isto é,

$$(\S\S)\quad \begin{cases} \mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + ... + a_{n1}\mathbf{u}_n \\ \mathbf{w}_2 = a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + ... + a_{n2}\mathbf{u}_n \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \mathbf{w}_n = a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + ... + a_{nn}\mathbf{u}_n \end{cases}$$

Substituindo em (§) temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= y_1\mathbf{w}_1 + ... + y_n\mathbf{w}_n \\ &= y_1(a_{11}\mathbf{u}_1 + ... + a_{n1}\mathbf{u}_n) + ... + y_n(a_{1n}\mathbf{u}_1 + ... + a_{nn}\mathbf{u}_n) \\ &= (a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n)\mathbf{u}_1 + ... + (a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n)\mathbf{u}_n \end{aligned}$$

Mas $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + ... + x_n\mathbf{u}_n$, e como as coordenadas em relação a uma base são únicas, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ &\ \ \vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Isto é, denotando

$$[I]^{\beta'}_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

temos

$$[\mathbf{v}]_{\beta} = [I]^{\beta'}_{\beta} [\mathbf{v}]_{\beta'}$$

A matriz $[I]^{\beta'}_{\beta}$ é chamada *matriz de mudança da base* β' *para a base* β.

Exemplo

Sejam $\beta = \{(2, -1), (3, 4)\}$ e $\beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$ bases de $\mathbf{R}^2$.

Procuremos, inicialmente, $[I]_{\beta}^{\beta'}$.

Podemos usar esta matriz para encontrar, por exemplo, $[\mathbf{v}]_{\beta}$ para $\mathbf{v} = (5, -8)$.

Inversa da matriz mudança de base

escrevendo os $\mathbf{u}_i$ em função dos $\mathbf{w}_j$, chegaremos à relação:

$$[\mathbf{v}]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[\mathbf{v}]_{\beta}$$

Um fato importante é que as matrizes $[I]_{\beta'}^{\beta}$ e $[I]_{\beta}^{\beta'}$ são inversíveis e

$$([I]_{\beta}^{\beta'})^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta}$$

Exemplo 1

No exemplo anterior podemos obter $[I]_{\beta}^{\beta'}$ a partir de $[I]_{\beta'}^{\beta}$.

Exemplo 2

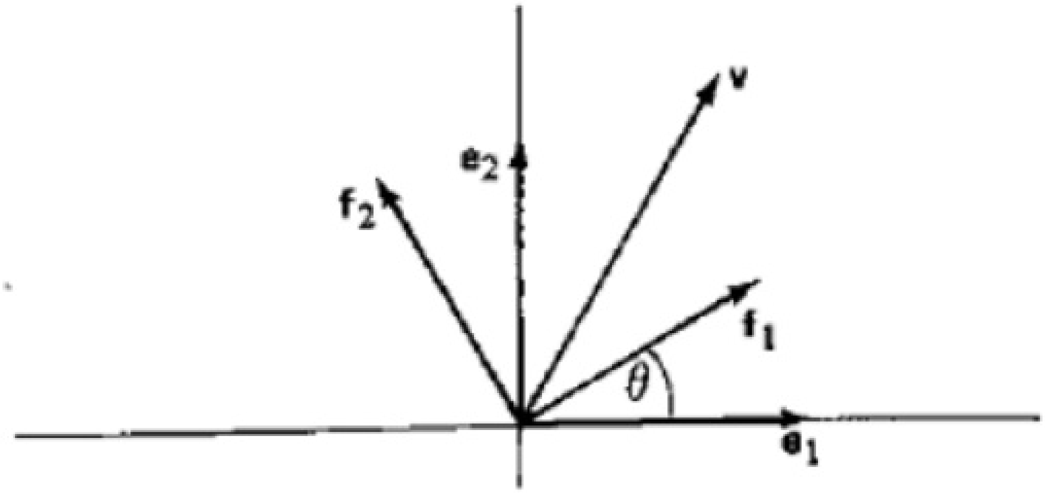
Consideremos em $\mathbf{R}^2$ a base $\beta = \{e_1, e_2\}$ e a base $\beta' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, obtida da base canônica β pela rotação de um ângulo θ. Dado um vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ de coordenadas

$$[\mathbf{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

em relação à base β, quais são as coordenadas

$$[\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

em relação à base β'? Temos então



$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \\ &= y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 \end{aligned}$$

e queremos calcular

$$[\mathbf{v}]_{\beta'} = [I]^{\beta}_{\beta'}[\mathbf{v}]_{\beta}$$

ou seja, temos que achar a matriz $[I]^{\beta}_{\beta'}$.

$$[I]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Como subexemplo, quando $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, para $\mathbf{v} = (-2, 3)$, isto é

$$\mathbf{v} = -2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \quad \text{temos} \quad [\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$