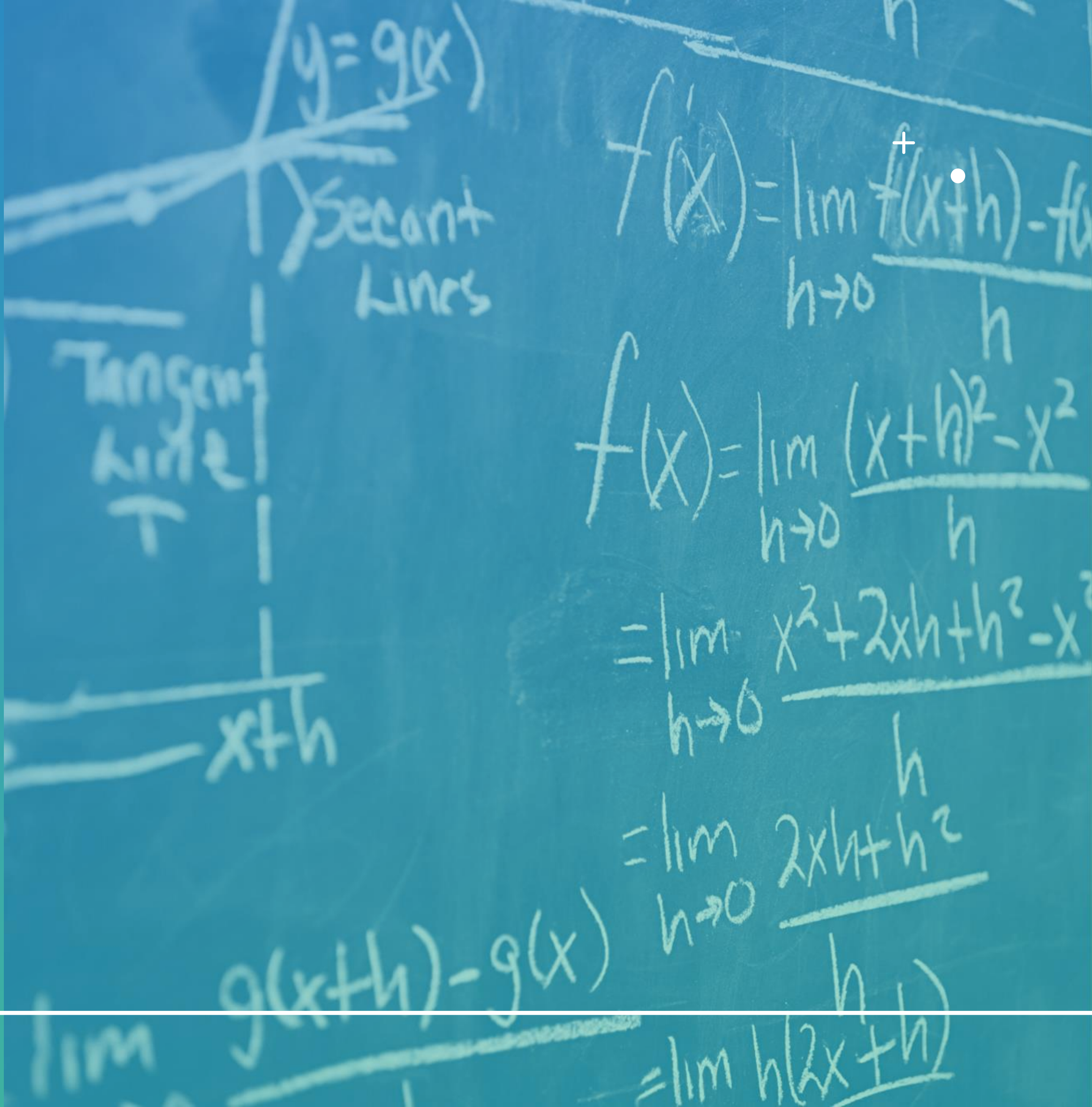
DERIVADAS DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

Definição
Interpretação geométrica
Taxa de variação
Diferencial
Derivadas de ordem superior



A Derivada

Nas aulas anteriores vimos como definir e calcular os limites de funções. Que a maioria dos limites dos quais precisamos pode ser obtido por substituição, análise gráfica, aproximação numérica, algébrica ou alguma combinação dessas.

Iniciaremos nosso estudo considerando dois problemas aplicados e usaremos o conceito de limite para resolvê-los.

O primeiro consiste em determinar o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente em um ponto do gráfico de uma função.

E o segundo, em definir a velocidade de um objeto em movimento retilíneo.

Embora essas duas aplicações, aparentemente tão diversas, conduzam ao mesmo conceito de **derivada**.

Derivadas e Taxas de Variação

Definiremos a derivada como o limite de uma expressão que envolve uma função f. Isto permite aplicar o conceito de derivada a qualquer quantidade, ou grandeza, que possa ser representada por uma função.

Como grandezas desse tipo ocorrem em quase todos os ramos do conhecimento, as aplicações da derivada são numerosas e variadas e está sempre ligada a uma **taxa de variação**.

Assim, o coeficiente angular da reta tangente pode ser usado para indicar a taxa à qual o gráfico de uma curva sobe (ou desce), e a velocidade é a taxa à qual a distância varia em relação ao tempo.

Nosso objetivo é introduzir o conceito de derivada e estabelecer regras para o respectivo cálculo sem precisar usar limites. E algumas aplicações.

Tangentes

Se uma curva C tiver uma equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a reta tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$, consideraremos um ponto próximo $Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Então fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva C ao obrigar x tender a a.

Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos a *tangente* t como a reta que passa por P e tem inclinação m. (Isso implica dizer que a reta tangente é a posição-limite da reta secante PQ quando Q tende a P. Veja a Figura 1.)

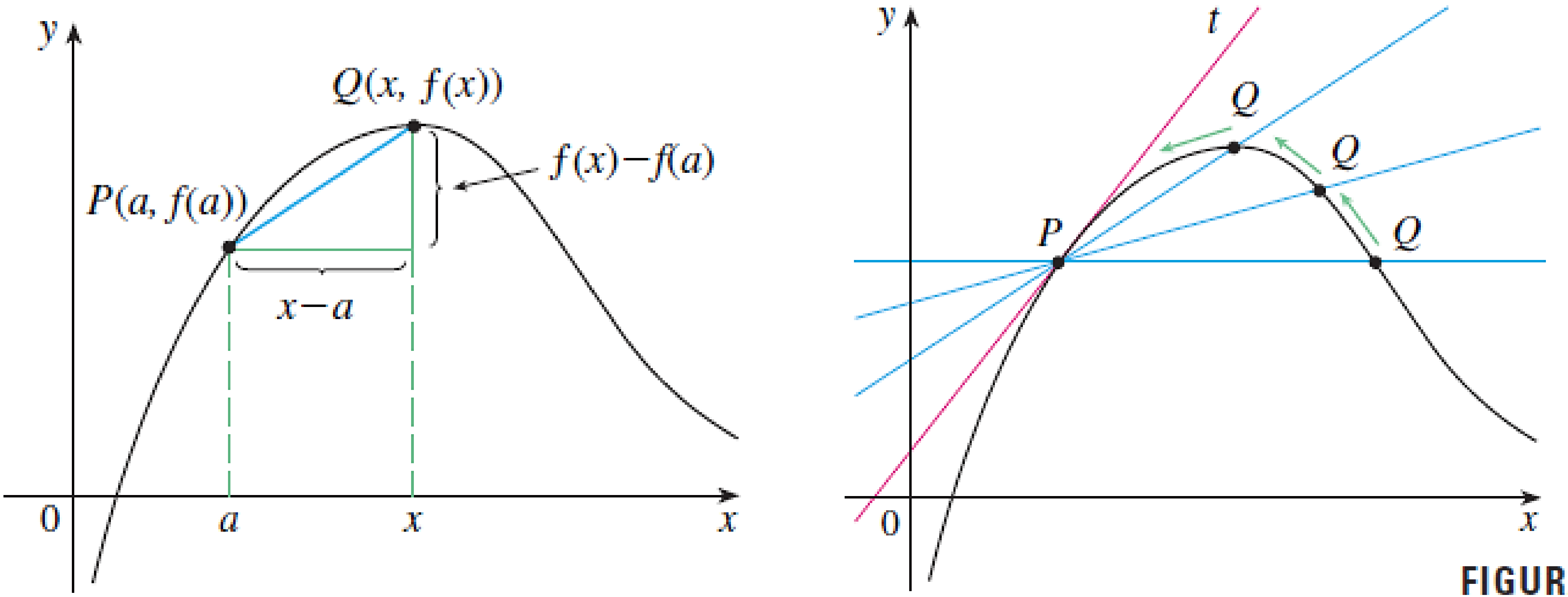


FIGURA 1

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$m_t = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

1 Definição A **reta tangente** à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com a inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Se usarmos a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, poderemos escrever uma **equação da reta tangente** à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$:

$$y - f(a) = m(x - a)$$

EXEMPLO 1

Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

Solução: Temos aqui e $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo a inclinação é

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em $(1, 1)$ é

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1$$

Algumas vezes nos referimos à inclinação da reta tangente como a **inclinação da curva** no ponto.

A ideia por detrás disso é que, se dermos zoom (suficiente) em direção ao ponto, a curva parecerá quase uma reta.

A Figura 2 ilustra esse procedimento para a curva $y = x^2$ do Exemplo 1. Quanto maior for o zoom, mais indistinguível da reta tangente será a parábola. Em outras palavras, a curva se torna quase indistinguível de sua reta tangente.

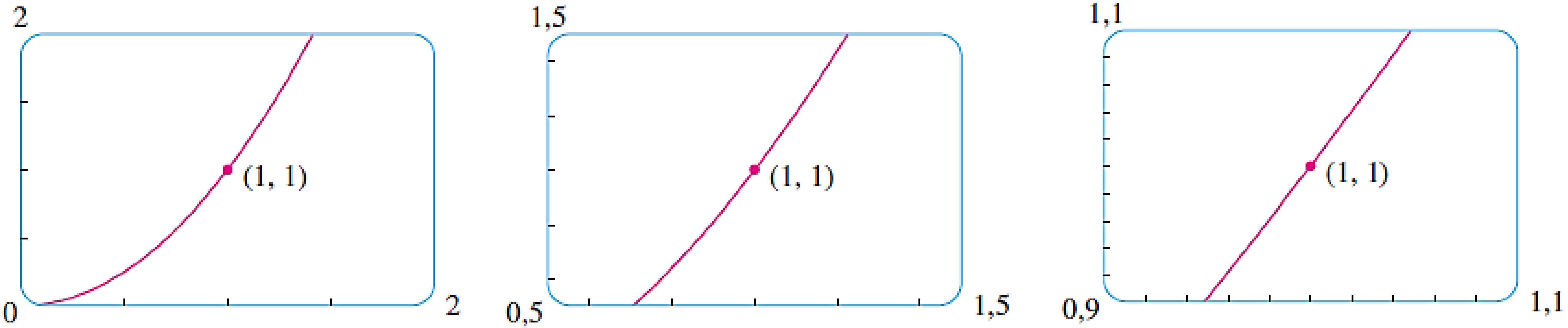


FIGURA 2 Um *zoom* cada vez maior da parábola $y=x^2$ em torno do ponto (1, 1).

Há outra expressão para a inclinação da reta tangente que é, às vezes, mais fácil de ser usada.

Se $h = x - a$, então $x = a + h$ e, assim, a inclinação da reta secante PQ é

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(Veja a Figura 3 onde o caso $h > 0$ é ilustrado e Q está à direita de P. Se acontecesse de $h < 0$, entretanto, Q estaria à esquerda de P.)

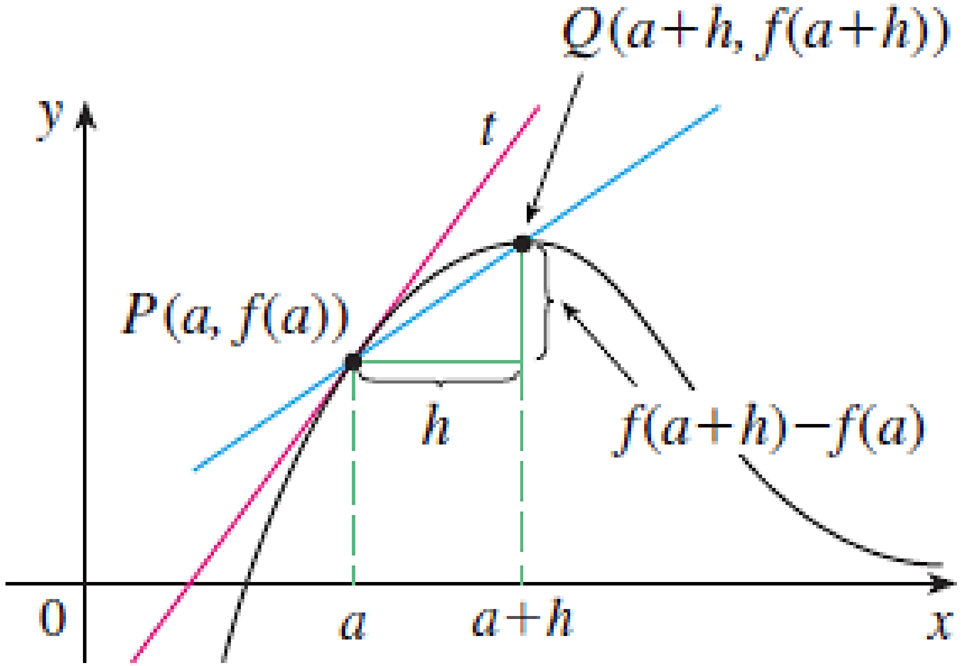


FIGURA 3

Observe que quando x tende a a, h tende a 0 (pois $h = x - a$); assim, a expressão para a inclinação da reta tangente na Definição 1 fica

2

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

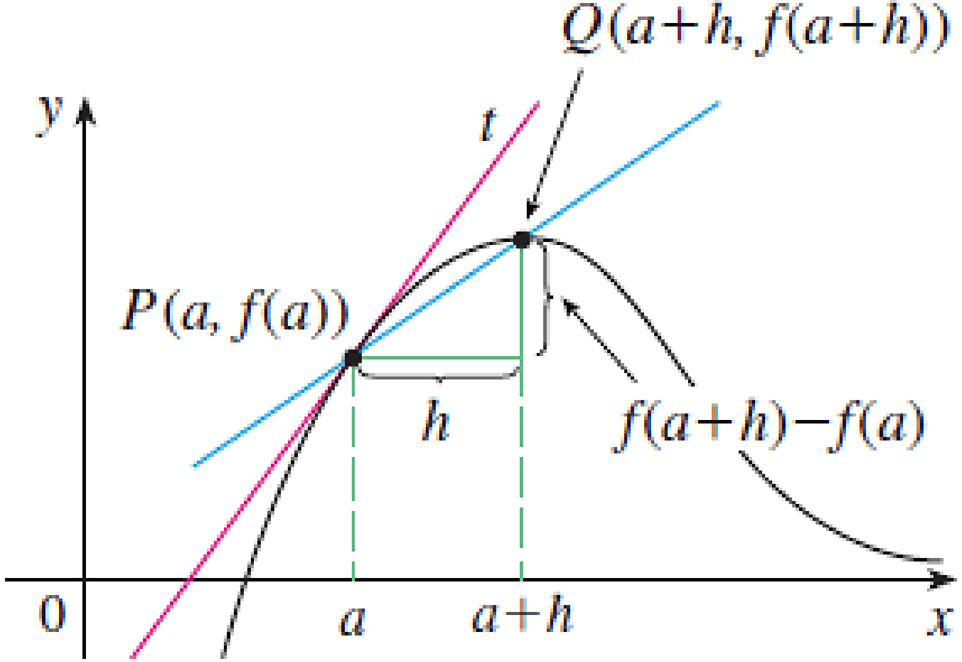


FIGURA 3

EXEMPLO 2

Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole $y = 3/x$ no ponto $(3, 1)$.

Seja $f(x) = 3/x$. Então a inclinação da reta tangente em $(3, 1)$ é

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3 + h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3 + h)}{3 + h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3 + h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3 + h} = -\frac{1}{3}$$

Portanto, uma equação da reta tangente no ponto $(3, 1)$ é

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

que se simplifica para $$x + 3y - 6 = 0.$$

A hipérbole e sua tangente estão na Figura 4.

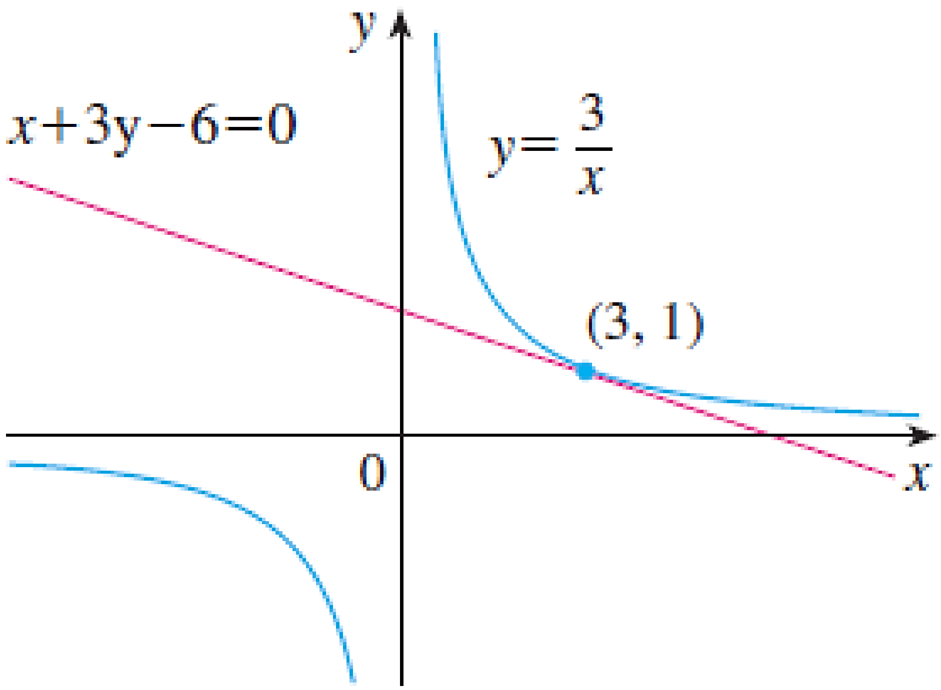


FIGURA 4

Velocidades

Suponha que um objeto se mova sobre uma reta de acordo com a equação $s = f(t)$, na qual s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t.

A função f que descreve o movimento é chamada **função de posição** do objeto.

No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição será de $f(a + h) - f(a)$. (Veja a Figura 5.)

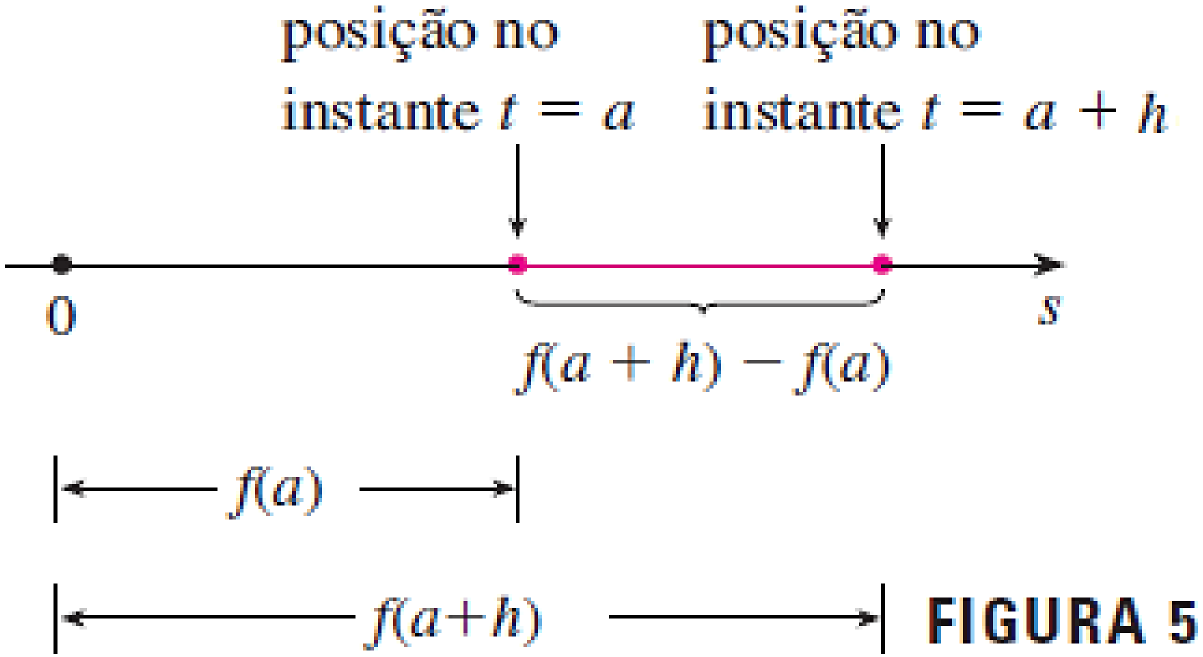


FIGURA 5

A velocidade média nesse intervalo é

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que é o mesmo que a inclinação da reta secante PQ na Figura 6.

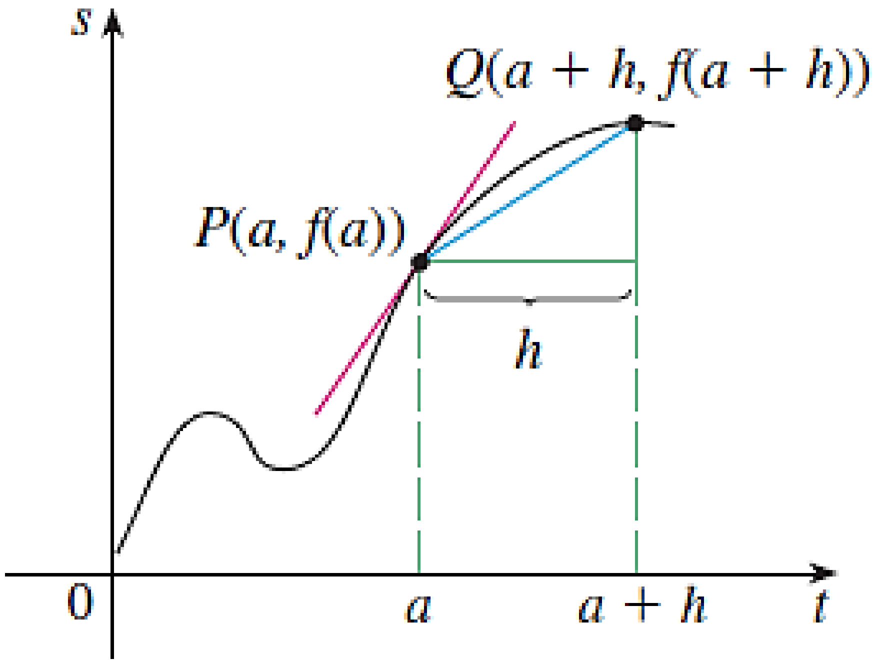


FIGURA 6

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \text{velocidade média}$$

Suponha agora que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores $[a, a+h]$. Em outras palavras, fazemos h tender a 0.

Definimos velocidade (ou velocidade instantânea) no instante como o limite dessas velocidades médias:

$$\boxed{3} \qquad v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Isso significa que a velocidade no instante $t = a$ é igual à inclinação da reta tangente em P (compare as Equações 2 e 3).

$$\boxed{2} \qquad m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

EXEMPLO 3

Suponha que a bola foi deixada cair do posto de observação da torre, 450 m acima do solo.

(a) Qual a velocidade da bola após 5 segundos?

(b) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

Uma vez que foram solicitadas duas velocidades diferentes, é conveniente determinar, inicialmente a velocidade em um instante genérico $t = a$.

Usando a equação de movimento $s = f(t) = 4{,}9t^2$, temos

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a+h)^2 - 4{,}9a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(2ah + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4{,}9(2a + h) = 9{,}8a$$

(a) A velocidade após 5 s é de $v(5) = (9{,}8)(5) = 49\ m/s$.

(b) Uma vez que o posto de observação está 450 m acima do solo, a bola vai atingir o chão em t, quando $s(t) = 450$, isto é,

$$4{,}9t^2 = 450$$

Isso fornece

$$t_1^2 = \frac{450}{4{,}9} \qquad \text{e} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4{,}9}} \approx 9{,}6\ \text{s}$$

A velocidade com que a bola atinge o chão é, portanto,

$$v(t_1) = 9{,}8t_1 = 9{,}8\sqrt{\frac{450}{4{,}9}} \approx 94\ \text{m/s}$$

Derivadas

Vimos que o mesmo tipo de limite aparece ao encontrar a inclinação de uma reta tangente (Equação 2) ou a velocidade de um objeto (Equação 3).

De fato, os limites do tipo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

surgem sempre que calculamos uma taxa de variação em qualquer ramo das ciências ou engenharia, tais como a taxa de uma reação química ou o custo marginal em economia.

Uma vez que esse tipo de limite ocorre amplamente, ele recebe nome e notação especiais.

$\boxed{4}$ **Definição** **A derivada de uma função f em um número a, denotada** por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ e h tende a 0 se, e somente se, x tende a a.

Consequentemente, uma maneira equivalente de enunciar a definição da derivada, como vimos na determinação das retas tangentes, é

$$\boxed{5} \qquad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

EXEMPLO 4

Esse a definição 4 para encontrar a derivada da função $f(x) = x^2 - 8x + 9$ em um número:

(a) 2 (b) a

(a) Da Definição 4, temos

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 8(2+h) + 9 - (-3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 16 - 8h + 9 + 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h - 4) = -4$$

(b)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8)$$

$$= 2a - 8$$

Definimos a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$ como a reta que passa em P e tem inclinação m dada pela Equação 1 ou 2.

Uma vez que, pela Definição 4 (e a equação 5), isso é o mesmo que a derivada $f'(a)$, podemos agora dizer o seguinte:

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

Se usarmos a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, poderemos escrever uma **equação da reta tangente** à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

EXEMPLO 5

Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2 - 8x + 9$ no ponto $(3, -6)$.

SOLUÇÃO Do Exemplo 4, sabemos que a derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ no número a é $f'(a) = 2a - 8$.

Portanto, a inclinação da reta tangente em $(3, -6)$ é $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$.

Dessa forma, uma equação da reta tangente, ilustrada na Figura 7, é

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad y = -2x$$

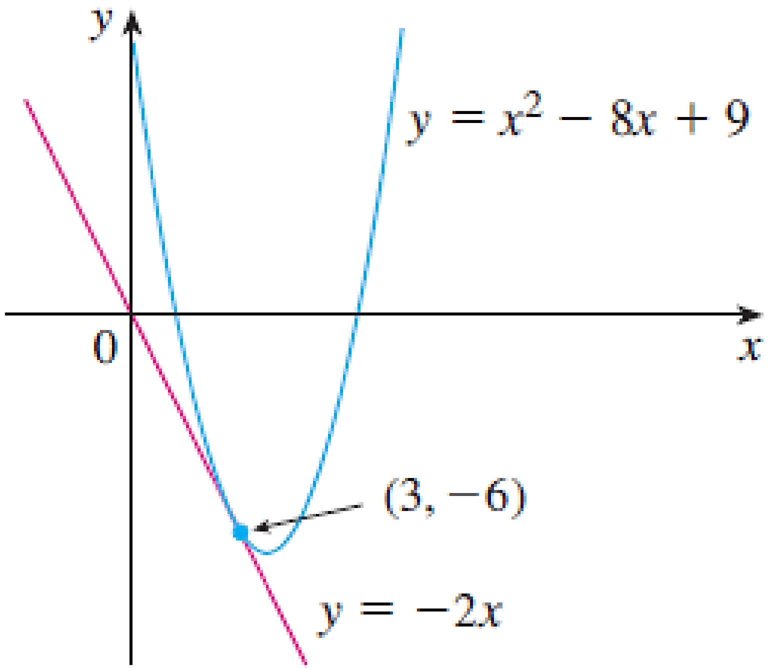


FIGURA 7

Taxas de Variação

Suponha que y seja uma quantidade que depende de outra quantidade x.

Assim, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$.

Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x (também chamada **incremento** de x) será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O quociente das diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é denominado taxa média de variação de y em relação a x no intervalo e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ na Figura 8.

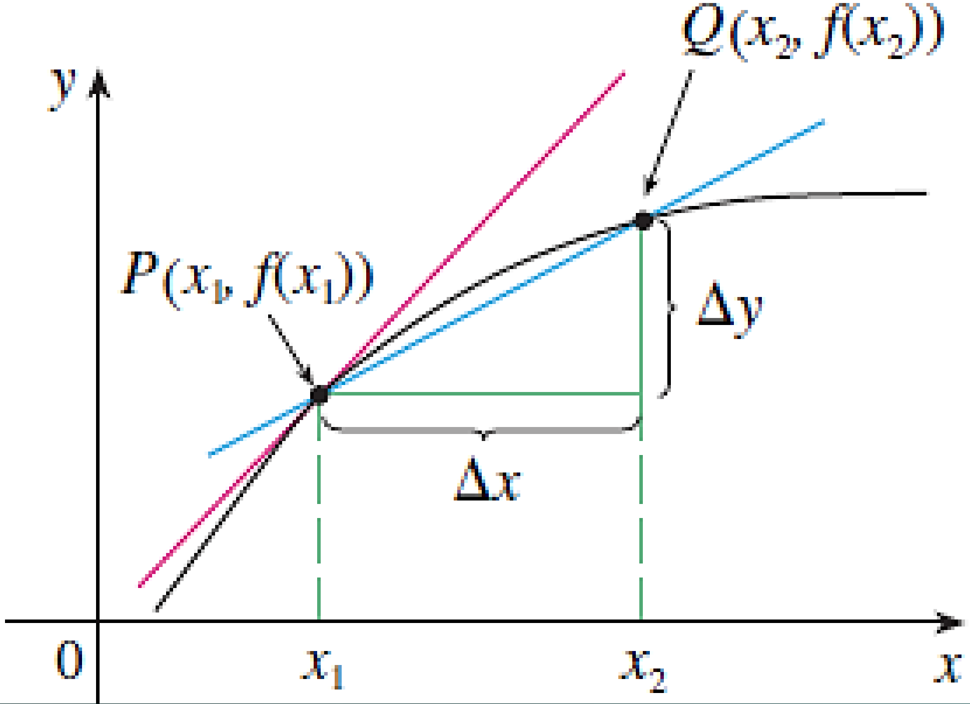


FIGURA 8

Por analogia com a velocidade, consideramos a taxa média de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1 e, portanto, fazendo Δx tender a 0.

O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa (instantânea) de variação de $\boldsymbol{y}$ em relação a $\boldsymbol{x}$** em $x = x_1$, que é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\boxed{6} \qquad \text{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Reconhecemos este limite como a derivada $f'(x_1)$.

Sabemos que uma das interpretações da derivada $f'(a)$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ quando $x = a$.

Agora temos uma segunda interpretação:

A derivada $f'(a)$ *é a taxa instantânea de variação de* $y = f(x)$ *em relação a* x *quando* $x = a$.

A conexão com a primeira interpretação é que, se esboçarmos a curva $y = f(x)$, então a taxa instantânea de variação será a inclinação da tangente a essa curva no ponto onde $x = a$.

Isso significa que quando a derivada for grande (e, portanto, a curva for íngreme como no ponto P na Figura 9), os valores de y mudarão rapidamente.

Quando a derivada for pequena, a curva será relativamente achatada (como no ponto Q) e os valores de y mudarão lentamente.

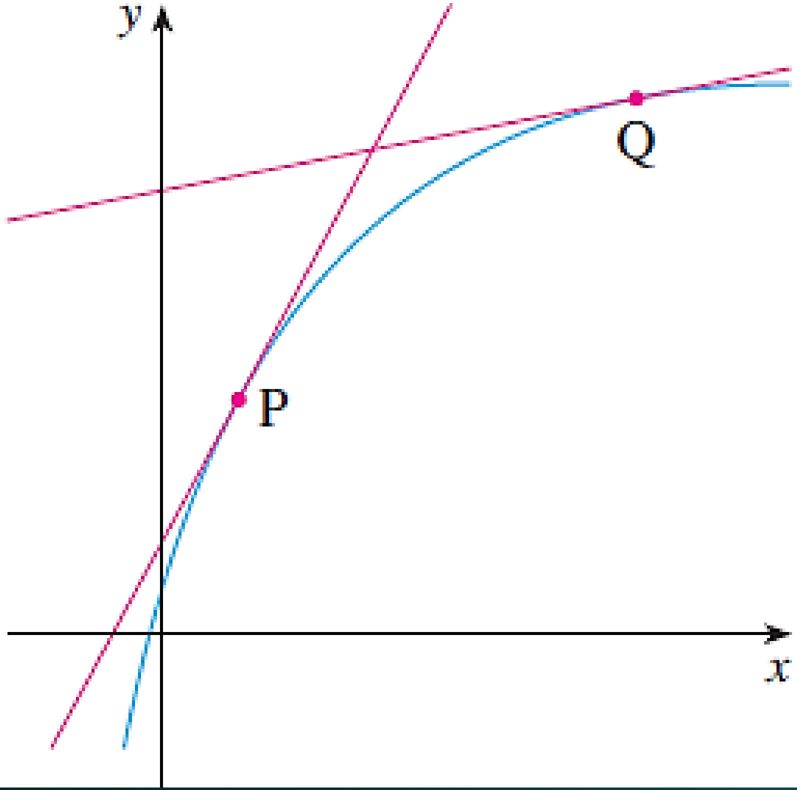


FIGURA 9

Os valores de y estão variando rapidamente em P e de modo lento em Q.

Em particular, se $s = f(t)$ for a função de posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta, então $f'(a)$ será a taxa de variação do deslocamento s em relação ao tempo t.

Em outras palavras, $f'(a)$ é a velocidade da partícula no instante $t = a$.

A **velocidade** escalar da partícula é o valor absoluto da velocidade, isto é, $|f'(a)|$.

A Derivada como uma Função

Até agora consideramos a derivada de uma função f em um número fixo a:

$$\boxed{1} \qquad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Aqui mudamos nosso ponto de vista e deixamos o número a variar.

Se substituirmos a na Equação 1 por uma variável x, obtemos

$$\boxed{2} \qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dado qualquer número x para o qual esse limite exista, atribuímos a x o número $f'(x)$.

Assim, podemos considerar f' como uma nova função, chamada **derivada de $\boldsymbol{f}$** e definida pela Equação 2.

Sabemos que o valor de f' em x, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

A função f' é denominada derivada de f, pois foi "derivada" a partir de f pela operação limite na Equação 2.

O domínio de f' é o conjunto $\{x \mid f'(x)$ existe$\}$ e pode ser menor que o domínio de f.

EXEMPLO 1

O gráfico de uma função f é ilustrado na Figura 1. Use-o para esboçar o gráfico da derivada f'.

SOLUÇÃO Podemos estimar o valor da derivada para qualquer valor de x traçando a tangente no ponto $(x, f(x))$ e estimando sua inclinação.

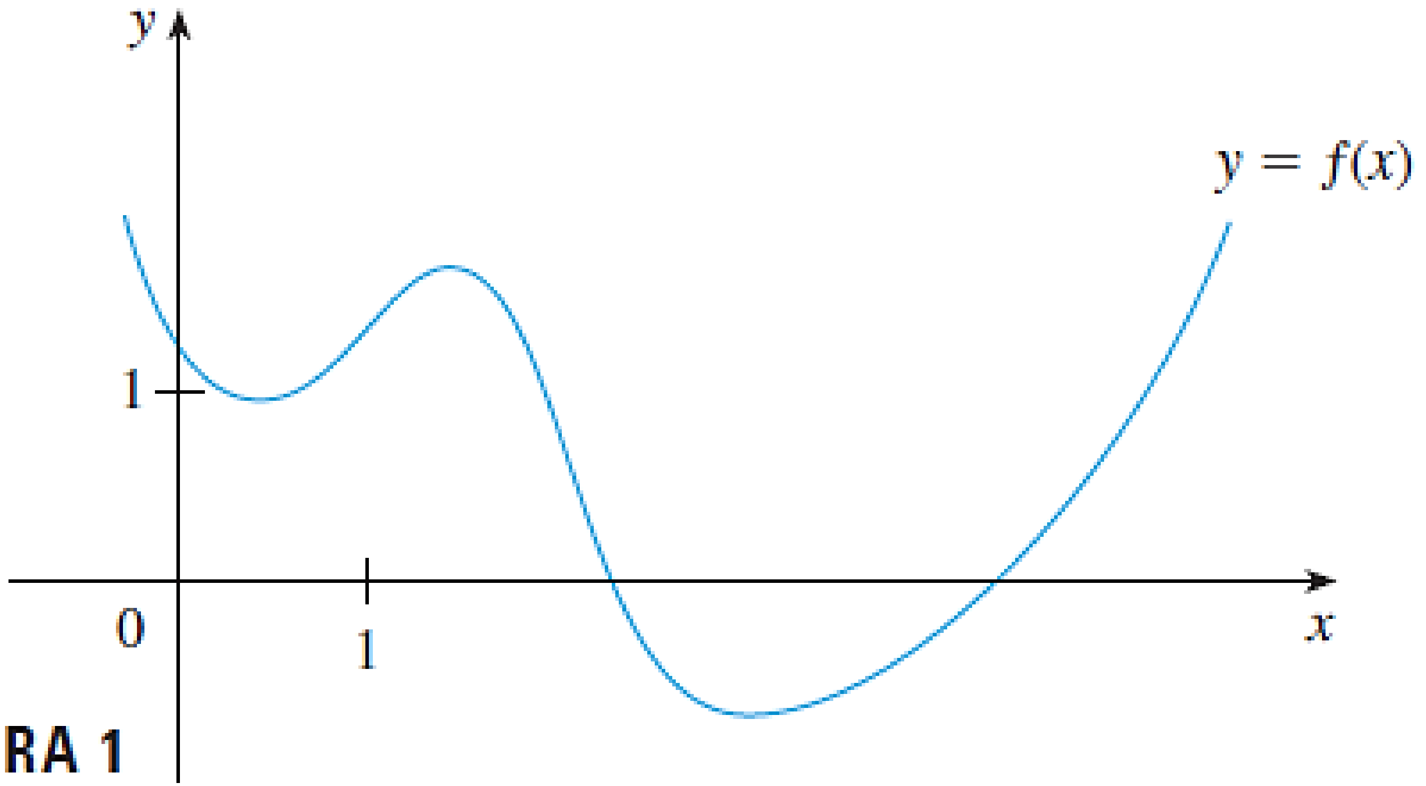


FIGURA 1

Por exemplo, para $x = 5$ traçamos a tangente em P na Figura 2(a) e estimamos sua inclinação como cerca de $\frac{3}{2}$, então $f'(5) \approx 1{,}5$.

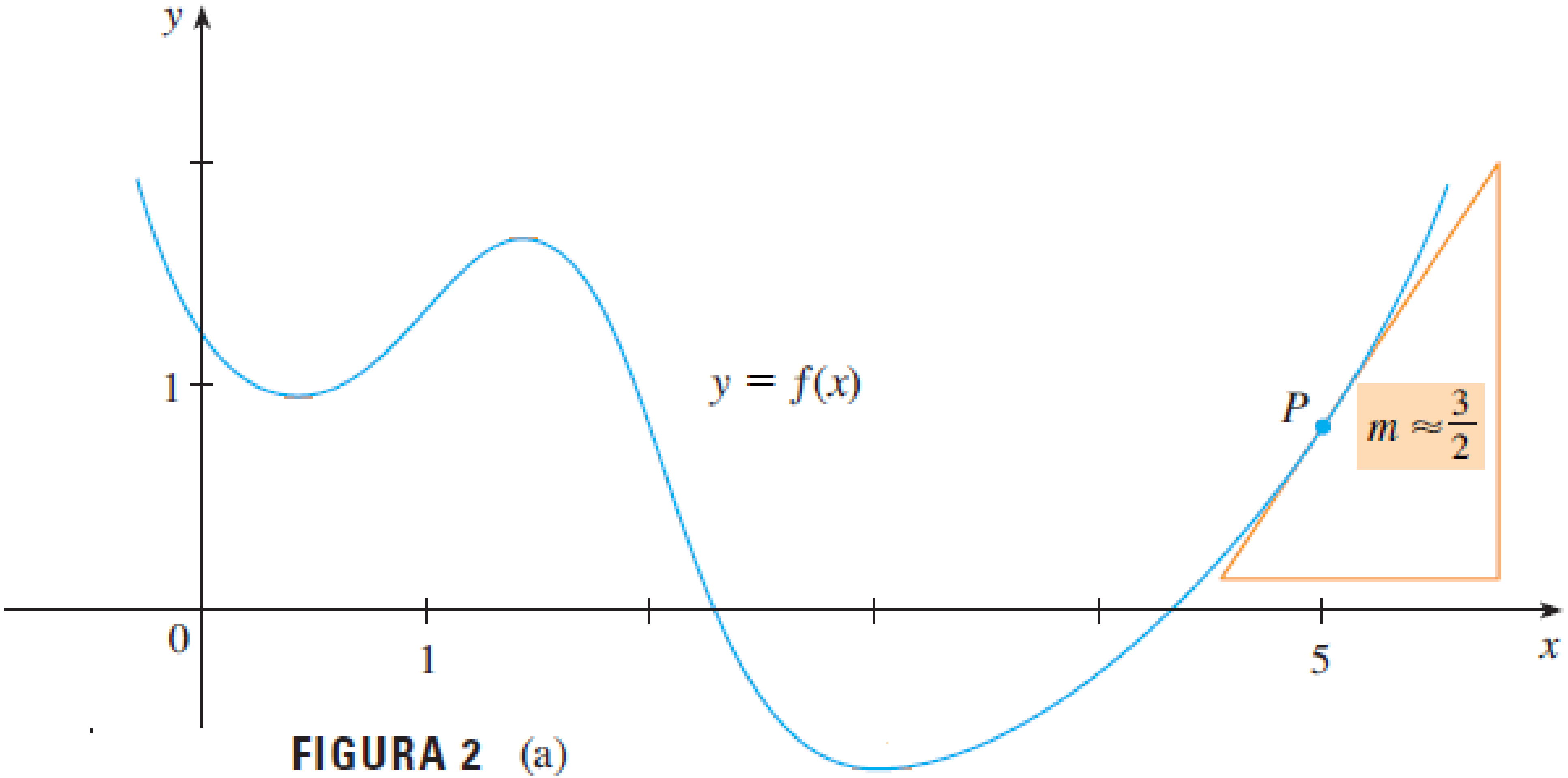


FIGURA 2 (a)

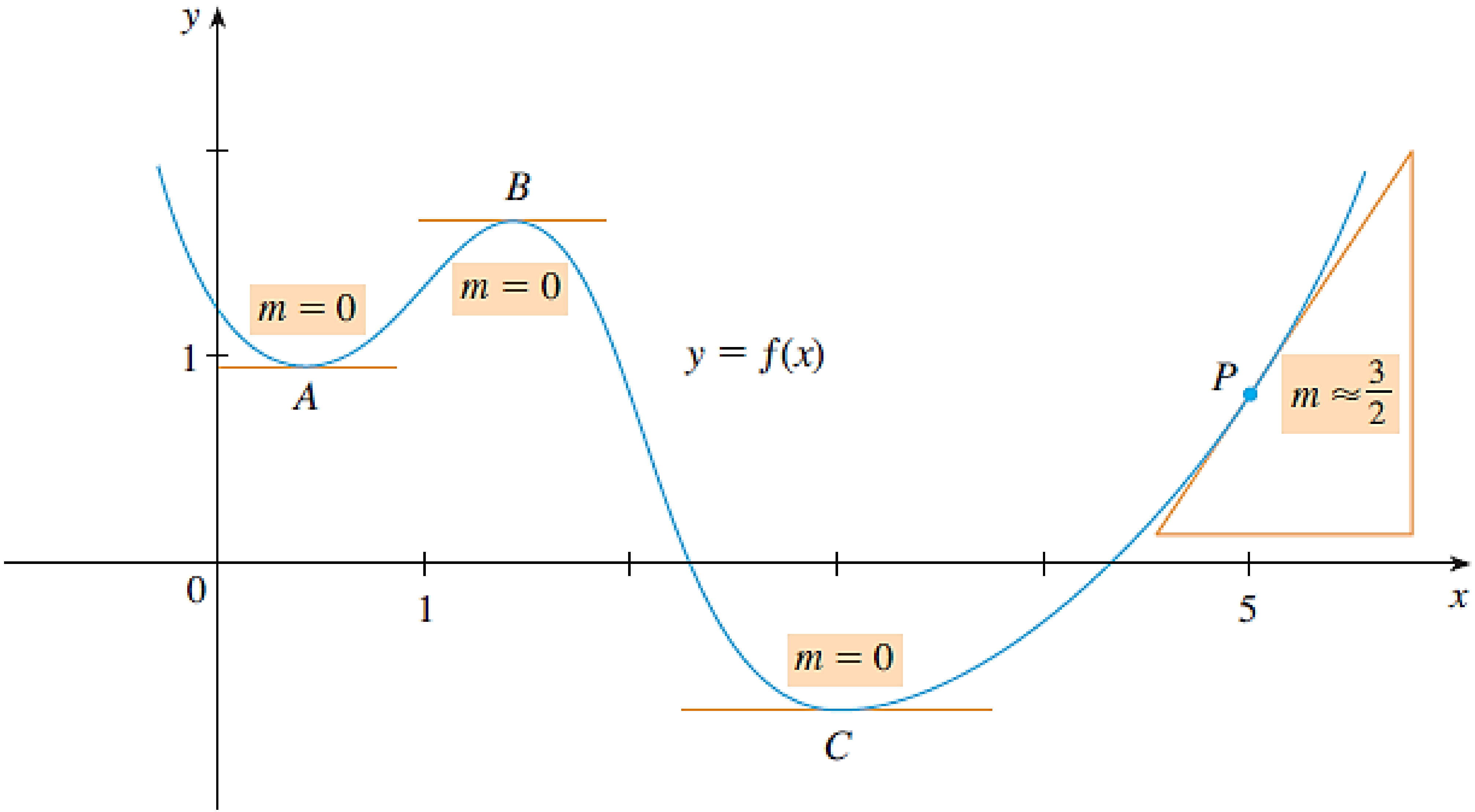


FIGURA 2 (a)

Isso nos permite desenhar o ponto sobre o gráfico de f' diretamente abaixo de P.

Repetindo esse procedimento em vários pontos, obteremos o gráfico ilustrado na Figura 2(b).

Observe que as tangentes em A, B e C são horizontais; logo, ali a derivada é 0 e o gráfico de f' cruza o eixo x nos pontos A', B' e C' diretamente abaixo de A, B e C.

Entre A e B, as tangentes têm inclinação positiva; logo, $f'(x)$ é positiva ali.

Mas entre B e C as tangentes têm inclinação negativa; logo, $f'(x)$ lá é negativa.

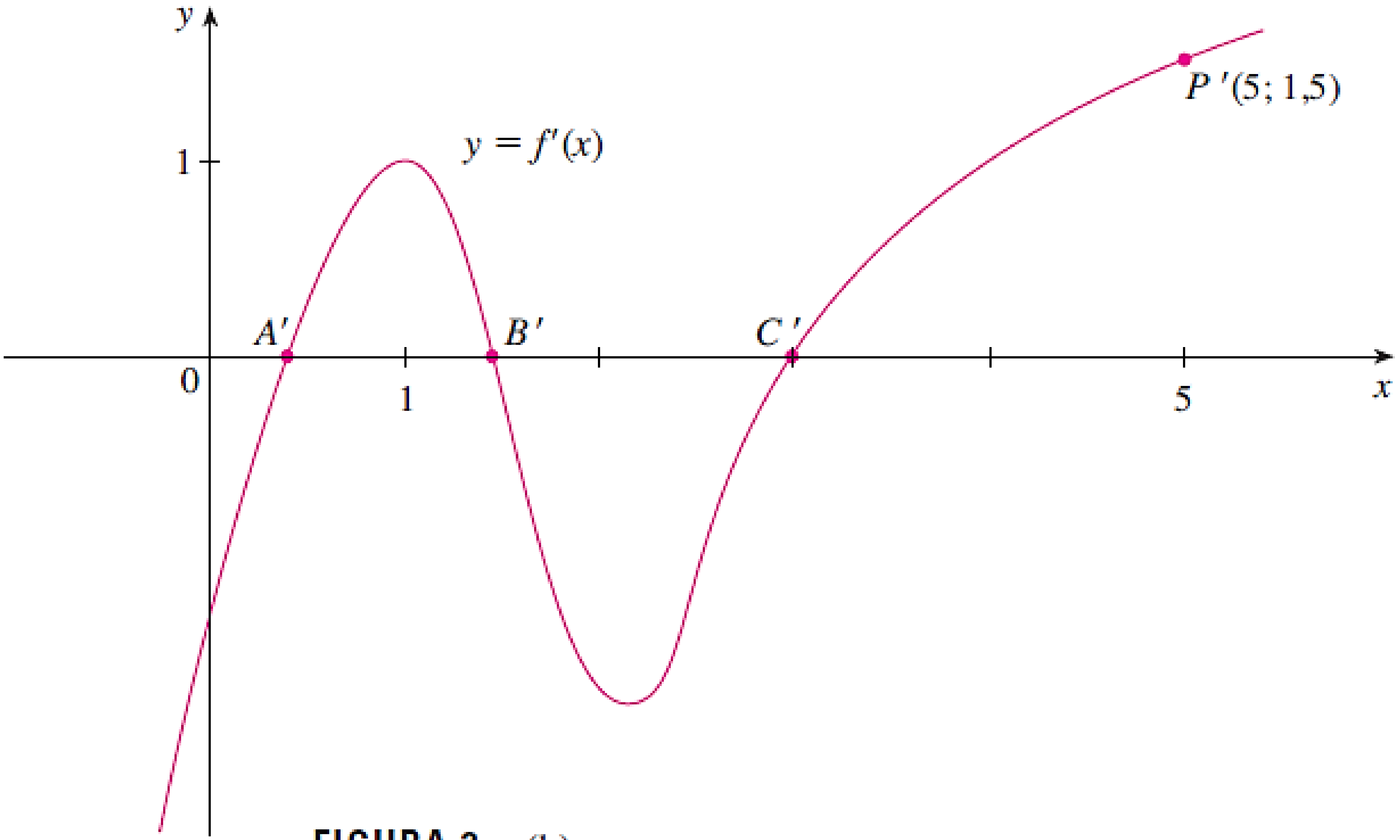


FIGURA 2 (b)

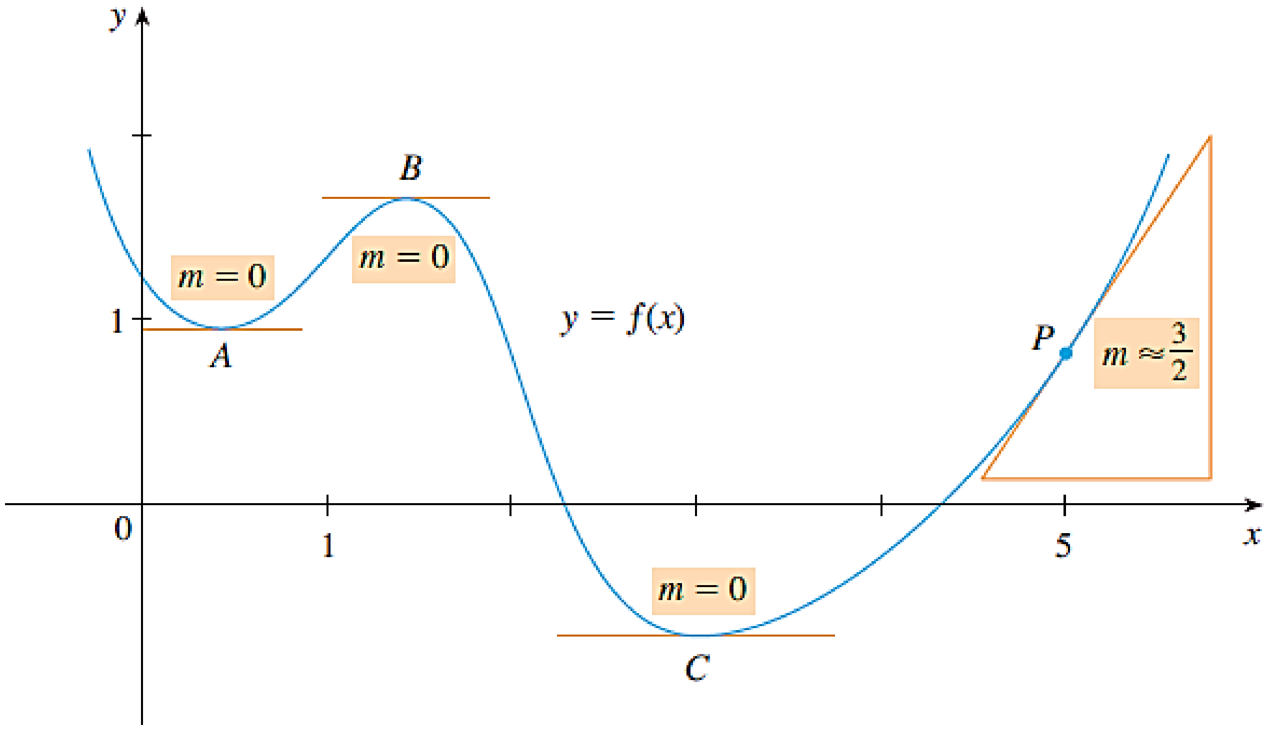


FIGURA 2 (a)

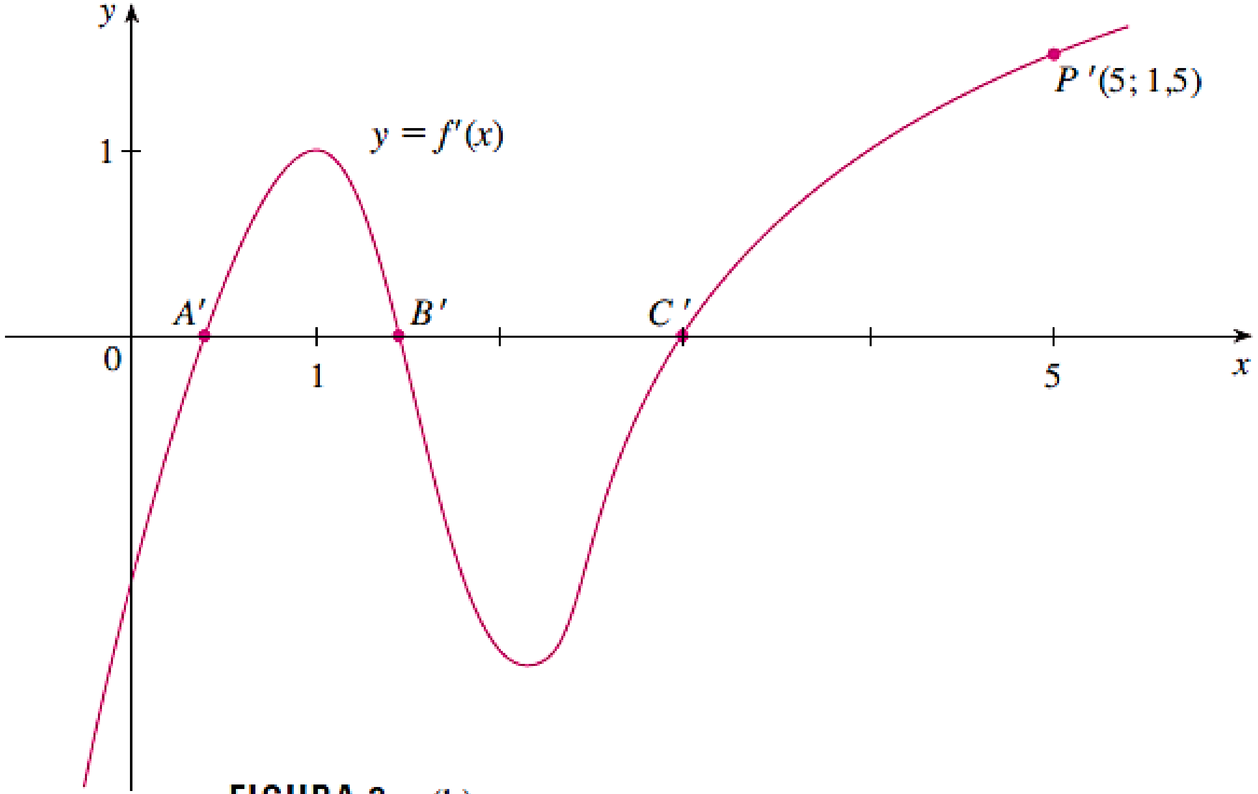


FIGURA 2 (b)

EXEMPLO 3

Se $f(x) = \sqrt{x}$, encontre a derivada de f. Diga qual é o domínio de f'.

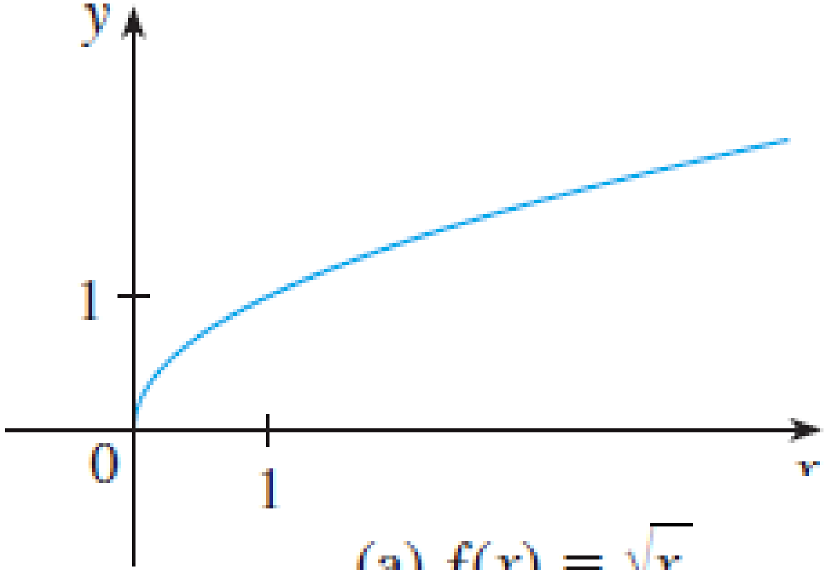
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

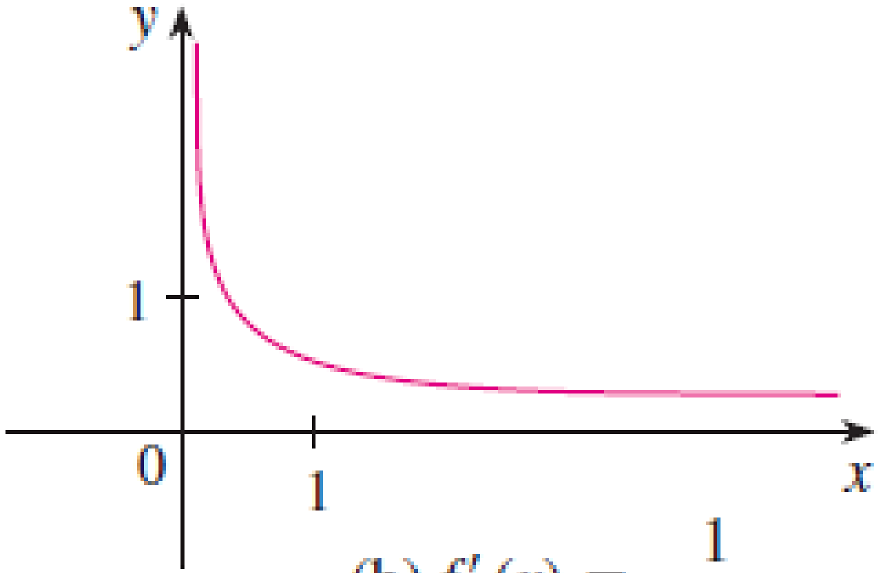
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Vemos que $f'(x)$ existe se $x > 0$; logo, o domínio de f' é $(0, \infty)$. Ele é menor que o domínio de f, que é $[0, \infty)$.



(a) $f(x) = \sqrt{x}$



(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Outras Notações

Se usarmos a notação tradicional $y = f(x)$ para indicar que a variável independente é x e a variável dependente é y, então algumas notações alternativas para a derivada são as seguintes:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

Os símbolos D e d/dx são chamados operadores diferenciais, pois indicam a operação de **diferenciação**, que é o processo de cálculo de uma derivada.

O símbolo dy/dx, introduzido por Leibniz, não deve ser encarado como um quociente (por ora); trata-se simplesmente de um sinônimo para $f'(x)$.

Todavia, essa notação é muito útil e proveitosa, especialmente quando usada em conjunto com a notação de incremento.

Podemos reescrever a definição de derivada como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Para indicar o valor de uma derivada dy/dx na notação de Leibniz em um número específico a, usamos a notação

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{ou} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que é um sinônimo para $f'(a)$.

Diferencial

$\boxed{3}$ **Definição** Uma função f é derivável ou **diferenciável em a**, se $f'(a)$ existir. É **derivável ou diferenciável em um intervalo aberto** (a, b) [ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$] se for diferenciável em cada número do intervalo.

Tanto a continuidade como a diferenciabilidade são propriedades desejáveis em uma função.

O seguinte teorema mostra como essas propriedades estão relacionadas.

$\boxed{4}$ **Teorema** Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

OBSERVAÇÃO

A recíproca do Teorema 4 é falsa, isto é, há funções que são contínuas, mas não são diferenciáveis.

Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em 0, pois

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

Mas, no Exemplo 5, mostraremos que f não é diferenciável em 0.

EXEMPLO 5

Onde a função $f(x) = |x|$ é diferenciável?

Se $x > 0$, então $|x| = x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para que $x + h > 0$ e, portanto, $|x + h| = x + h$.

Consequentemente, para $x > 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

e, dessa forma, f é diferenciável para qualquer $x > 0$.

Analogamente, para $x < 0$ temos $|x| = -x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para que $x + h < 0$, e assim $|x + h| = -(x + h)$.

Portanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

e, dessa forma, f é diferenciável para qualquer $x < 0$.

Para $x = 0$ temos de averiguar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \qquad \text{(se existir)}$$

Vamos calcular os limites à esquerda e à direita:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Uma vez que esses limites são diferentes, $f'(0)$ não existe.

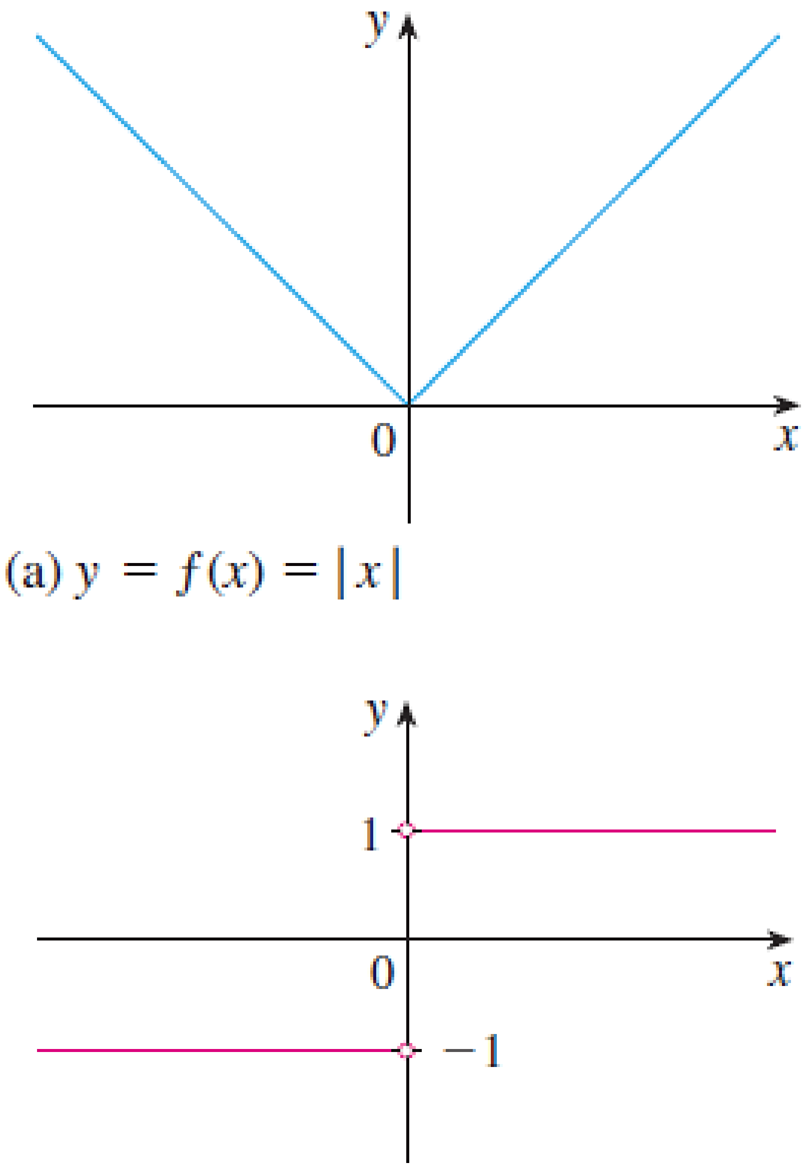
Logo, f é diferenciável para todo x, exceto 0.

Uma fórmula para f' é dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e seu gráfico está ilustrado na Figura 5(b).

O fato de que $f'(0)$ não existe está refletido geometricamente no fato de que a curva $y = |x|$ não tem reta tangente em $(0, 0)$. [Veja a Figura 5(a).]



(b) $y = f'(x)$ FIGURA 5

Como uma Função Pode Não Ser Diferenciável?

Vimos que a função $y = |x|$ do Exemplo 5 não é diferenciável em 0, e a Figura 5(a) mostra que em $x = 0$ a curva muda abruptamente de direção.

Em geral, se o gráfico de uma função f tiver uma "quina" ou uma "dobra", então o gráfico de f não terá tangente nesse ponto e f não será diferenciável ali. (Ao tentar calcular $f'(a)$, vamos descobrir que os limites à esquerda e à direita são diferentes.)

O Teorema 4 nos dá outra forma de uma função deixar de ter uma derivada. Ele afirma que se f não for contínua em a, então f não é diferenciável em a.

Então, em qualquer descontinuidade (por exemplo, uma descontinuidade de salto) f deixa de ser diferenciável.

Uma terceira possibilidade surge quando a curva tem uma **reta tangente vertical** quando $x = a$; isto é, f é contínua em a e

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$$

Isso significa que a reta tangente fica cada vez mais íngreme quando $x \to a$.

A Figura 6 mostra uma forma de isso acontecer, e a Figura 7(c), outra.

A Figura 7 ilustra as três possibilidades discutidas.

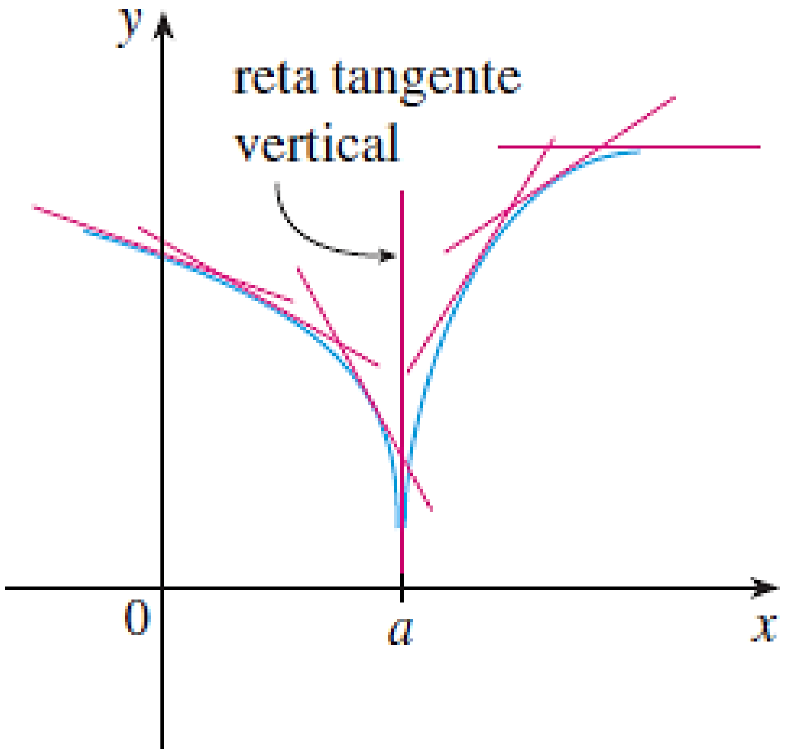
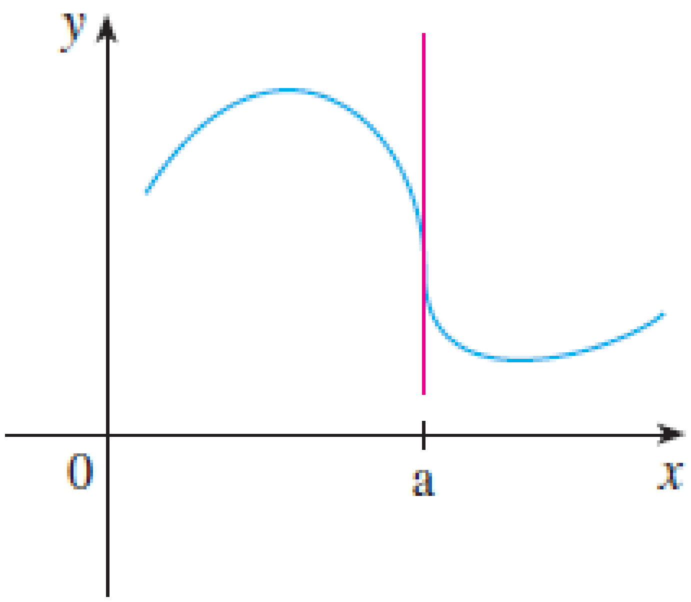
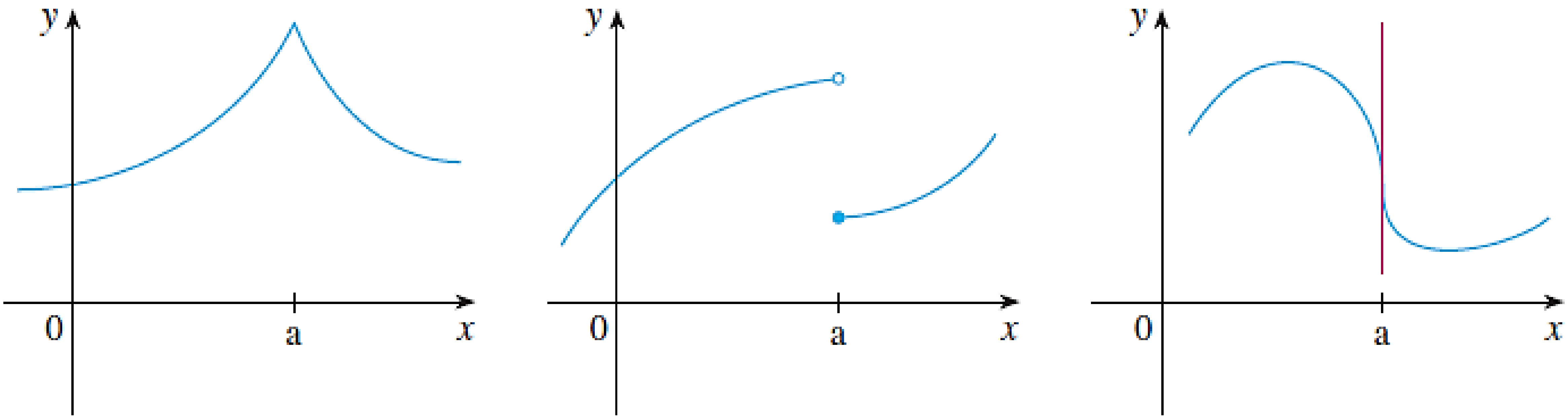


FIGURA 6



(c) Uma tangente vertical

FIGURA 7



(a) Uma quina (b) Uma descontinuidade (c) Uma tangente vertical

FIGURA 7

Três maneiras de f não ser diferenciável em a.

Derivadas de Ordem Superior

Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' também é uma função, de modo que f' pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$.

Esta nova função f'' é chamada de **segunda derivada** ou derivada de ordem dois de f.

Usando a notação de Leibniz, escrevemos a segunda derivada de $y = f(x)$ como

$$\underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{derivada de}} \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{\text{primeira derivada}} = \underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{segunda derivada}}$$

EXEMPLO 6

Se $f(x) = x^3 - x$, encontre e interprete $f''(x)$.

1- Encontramos a primeira derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

Encontramos que a primeira derivada é $f'(x) = 3x^2 - 1$.
Assim, a segunda derivada é

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x$$

Os gráficos de f, f' e f'' são mostrados na Figura 10.

$$f(x) = x^3 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f''(x) = 6x$$

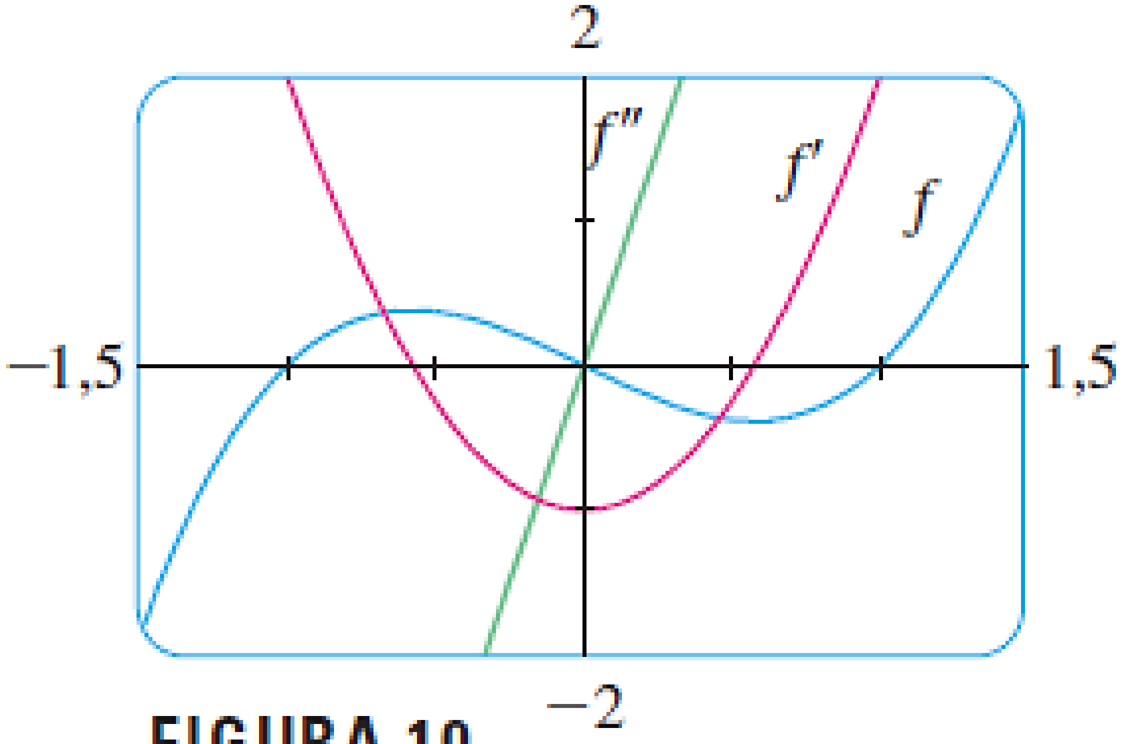


FIGURA 10

Podemos interpretar $f''(x)$ como a inclinação da curva $y = f'(x)$ no ponto $(x, f'(x))$.

Em outras palavras, é a taxa de variação da inclinação da curva original $y = f(x)$.

Observe pela Figura 10 que $f''(x)$ é negativa quando $y = f'(x)$ tem inclinação negativa e positiva quando $y = f'(x)$ tem inclinação positiva.

Assim, os gráficos servem como verificação de nossos cálculos.

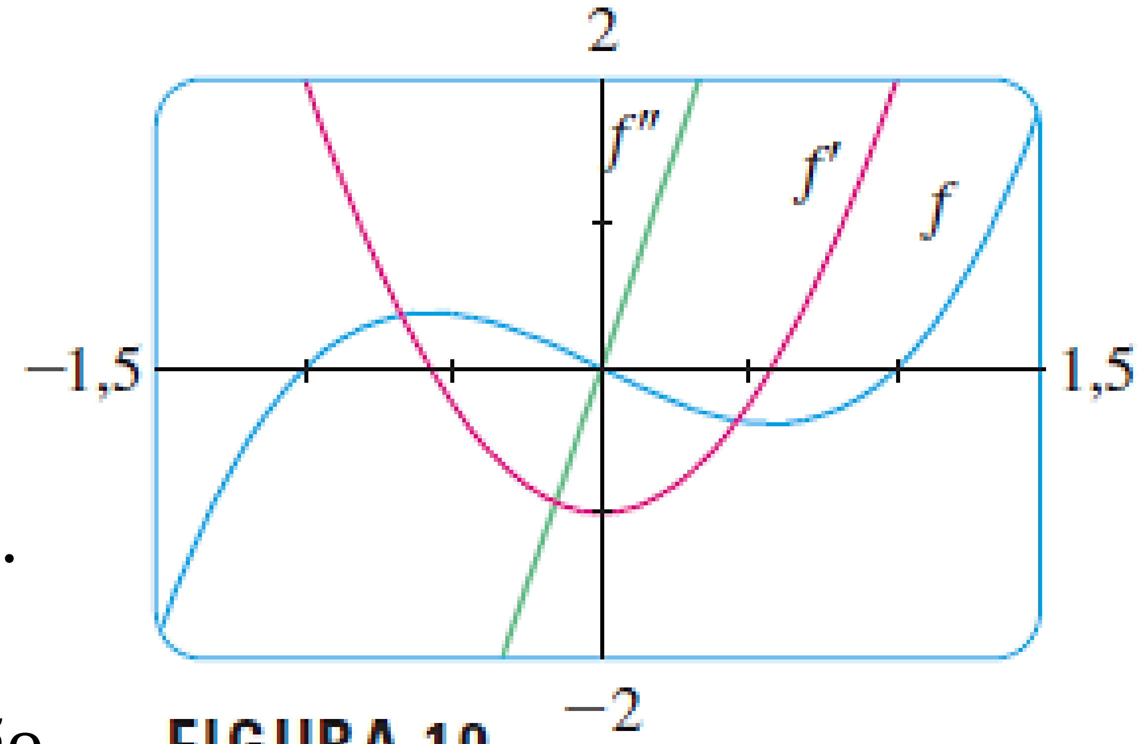


FIGURA 10

Em geral, podemos interpretar uma segunda derivada como uma taxa de variação de uma taxa de variação.

O exemplo mais familiar disso é a *aceleração*, que é definida desta maneira:

Se $s = s(t)$ for a função da posição de um objeto que se move em uma reta, sabemos que sua primeira derivada representa a velocidade $v(t)$ do objeto como uma função do tempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A taxa instantânea de variação da velocidade com relação ao tempo é chamada **aceleração** $a(t)$ do objeto.

Assim, a função aceleração é a derivada da função velocidade e, portanto, é a segunda derivada da função posição:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Ou, na notação de Leibniz,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

A aceleração é a variação na velocidade que você sente ao ir mais rápido ou mais devagar em um carro.

A **terceira derivada** f''' (ou derivada de terceira ordem) é a derivada da segunda derivada: $f''' = (f'')'$.

Assim, $f'''(x)$ pode ser interpretada como a inclinação da curva $y = f''(x)$ ou como a taxa de variação $f''(x)$.

Se $y = f(x)$, então as notações alternativas são

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

Podemos interpretar fisicamente a terceira derivada no caso em que a função é a função posição $s = (t)$ de um objeto que se move ao longo de uma reta.

Como $s''' = (s'')' = a'$, a terceira derivada da função posição é a derivada da função aceleração e é chamada **jerk**:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Assim, o *jerk* j é a taxa de variação da aceleração.

O nome é adequado (jerk, em português, significa solavanco, sacudida), pois um jerk grande significa uma variação súbita na aceleração, o que causa um movimento abrupto em um veículo.

O processo pode continuar. A quarta derivada f'''' (ou derivada de quarta ordem) é usualmente denotada por $f^{(4)}$.

Em geral, a n-ésima derivada de f é denotada por $f^{(n)}$ e é obtida a partir de f, derivando n vezes.

Se $y = f(x)$, escrevemos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

EXEMPLO 7

Se $f(x) = x^3 - x$, encontre $f'''(x)$ e $f^{(4)}(x)$.

No Exemplo 6 encontramos $f''(x) = 6x$.

O gráfico da segunda derivada tem equação $y = 6x$ e, portanto, é uma reta com inclinação 6.

Como a derivada $f'''(x)$ é a inclinação de $f''(x)$, temos

$$f'''(x) = 6$$

para todos os valores de x.

Assim, f''' é uma função constante e seu gráfico é uma reta horizontal. Portanto, para todos os valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Exercícios

Seções: 2.7 – Derivadas e Taxas de Variação

2.8 – A Derivada Como Uma Função.