PROFESSORA FABIANA PIMENTA DE SOUZA

PRODUTO ESCALAR, VETORIAL E MISTO

PRODUTO ESCALAR

Chama-se produto escalar de dois vetores $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$, e se representa por $\vec{u}.\vec{v}$, ao número real

$$\vec{u}.\vec{v} = xa + yb + zc$$

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ também é indicado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e se lê "$\vec{u}$ escalar $\vec{v}$".

EXEMPLO 1

Sejam os vetores $\vec{u} = (3,2,1)$ e $\vec{v} = (-1,-4,-1)$, calcule:

i. $(\vec{u} + \vec{v}).(2\vec{u} - \vec{v}) =$

$$(\vec{u} + \vec{v}).(2\vec{u} - \vec{v}) = (2,-2,0).(7,8,3) = 14 - 16 + 0 = -2$$

ii. $\vec{u}.\vec{u} =$

$$\vec{u}.\vec{u} = 9 + 4 + 1 = 14$$

iii. $\vec{0}.\vec{u} =$

$$\vec{0}.\vec{u} = 0$$

EXEMPLO 2

Dados os vetores $\vec{u} = (4, a, -1)$ e $\vec{v} = (a, 2{,}3)$ e os pontos A(4,-1,2) e B(3,2,-1), determine o valor de a tal que $\vec{u}.\left(\vec{v} + \overrightarrow{BA}\right) = 5$.

- **SOLUÇÃO:**

i. $\overrightarrow{BA} = A - B = (1, -3{,}3);$

ii. $\vec{v} + \overrightarrow{BA} = (\mathrm{a} + 1, -1{,}6);$

iii. $\vec{u}.\left(\vec{v} + \overrightarrow{BA}\right) = 5 \Longrightarrow 4a + 4 - a - 6 = 5 \Longrightarrow a = \frac{7}{3}$

PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR

Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$ e o número real k, temos:

i. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (comutatividade)

ii. $\vec{u}.(\ \vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$

iii. $k(\vec{u}.\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v})$

iv. $\vec{u}.\vec{u} > 0$ se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u}.\vec{u} = 0$ se $\vec{u} = \vec{0}$

v. $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$

EXEMPLO 3

Sendo $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$ e $\vec{u}.\vec{v} = 3$, calcule $(3\vec{u} - 2\vec{v}).(-\vec{u} + 4\vec{v})$.

- **SOLUÇÃO:**

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}).(-\vec{u} + 4\vec{v}) = -3\,\vec{u}.\vec{u} + 12\,\vec{u}.\vec{v} + 2\,\vec{u}.\vec{v} - 8\vec{v}.\vec{v}$$

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}).(-\vec{u} + 4\vec{v}) = -3.4^2 + 14.3 - 8.2^2$$

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}).(-\vec{u} + 4\vec{v}) = -48 + 42 - 32 = -38$$

EXEMPLO 4

1. Mostre que $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + |\vec{v}|^2$;

- **SOLUÇÃO:**

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v};$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + |\vec{v}|^2.$$

2. Mostre que $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + |\vec{v}|^2$; RESOLVER

3. Mostre que $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$. RESOLVER

EXERCÍCIOS

1) Sendo $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e 120º o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcule:

$a)$ $\vec{u}.\vec{v}$ b) $|\vec{u} + \vec{v}|$ c) $|\vec{u} - \vec{v}|$

2) Sabendo que o vetor $\vec{v} = (2,1,-1)$ forma ângulo de 60º com o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos A(3,1,-2) e B(4,0,m), calcule m.

3) Determine os ângulos internos ao triângulo ABC, sendo A(3,-3,3), B(2,-1,2) e C(1,0,2).

4) Mostre que os seguintes pares de vetores são ortogonais:

$a)$ $\vec{u} = (1,-2,3)$ e $\vec{v} = (4,5,2)$

$b)$ $\vec{i}$ e $\vec{j}$

DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DE PRODUTO ESCALAR

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos e θ o ângulo entre eles, então

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|cos\,\theta.$$

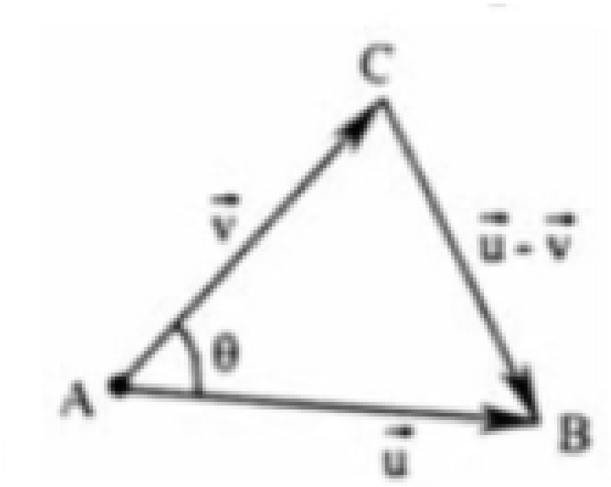
Pela Lei dos co-senos e do produto escalar, temos:

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$$

$$\cancel{|\vec{u}|^2} + \cancel{|\vec{v}|^2} - \cancel{2}|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = \cancel{|\vec{u}|^2} + \cancel{|\vec{v}|^2} - \cancel{2}\vec{u}.\vec{v}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$



EXEMPLO 5

Calcule o ângulo entre os vetores

$$\vec{u} = (1,1,4)\ e\ \vec{v} = (-1,2,2)$$

- **SOLUÇÃO:**

$i.$ $\vec{u}.\vec{v} = -1 + 2 + 8 = 9;$

ii. $|\vec{u}| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$

iii. $|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3;$

$iv.$ $cos\ \theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{9}{3\sqrt{2}.3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \theta = 45^{o}.$

PRODUTO VETORIAL

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, chama-se produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, ao **vetor**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Maneira prática

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

EXEMPLO 6

Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$, onde $\vec{u} = (5,4,3)$ e $\vec{v} = (1,0,1)$.

- **SOLUÇÃO:**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4-0, 3-5, 0-4)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (4, -2, -4);$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = (-4,2,4).$$

PROPRIEDADES DO PRODUTO VETORIAL

Para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos:

i. $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$.

ii. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

iii. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$.

iv. $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$.

CARACTERÍSTICA DO PRODUTO VETORIAL

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

i. Direção de $\vec{u} \times \vec{v}$

O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

ii. O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ pode ser determinado utilizando-se a "regra da mão direita".

CARACTERÍSTICA DO PRODUTO VETORIAL

iii. O comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$

Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, então:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sen\ \theta$$

Esse resultado é imediato quando se conhece a identidade de Lagrange.

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$$

CARACTERÍSTICA DO PRODUTO VETORIAL

Sabemos a identidade de Lagrange

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$$

Além disso, $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| cos\ \theta$

Logo, $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (|\vec{u}||\vec{v}| cos\ \theta)^2$

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (1 - cos^2\theta)|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$$

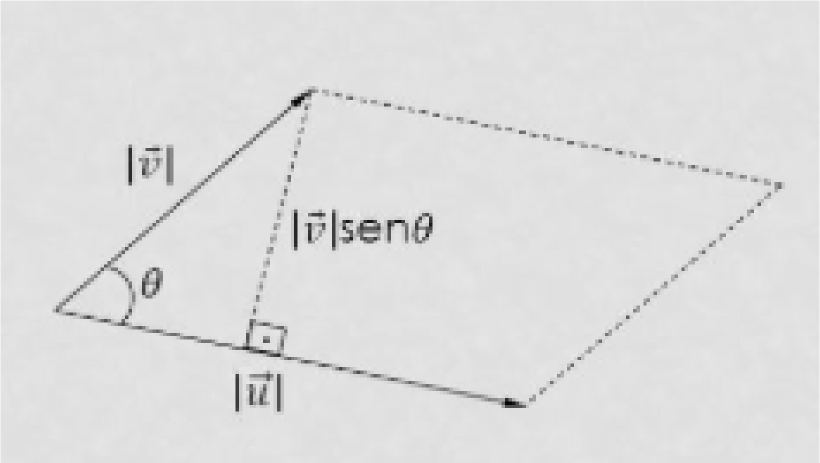
$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2\ sen^2\theta$$

Portanto, $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| sen\ \theta$.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DO PRODUTO VETORIAL

Observando que no paralelogramo determinado pelos vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

A área A do paralelogramo é



$$A = (\text{base}).(\text{altura}) = |\vec{u}||\vec{v}|sen\ \theta = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

EXERCÍCIOS

1) Determine o vetor $\vec{x}$, tal que $\vec{x}$ seja ortogonal ao eixo do y e $\vec{u} = \vec{x} \times \vec{v}$, sendo $\vec{u} = (1,1,-1)$ e $\vec{v} = (2,-1,1)$.

2) Sejam os vetores $\vec{u} = (1,-1,4)$ e $\vec{v} = (3,2,-2)$. Determine um vetor que seja ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e unitário.

3) Seja um triângulo equilátero ABC de lado 10. Calcule $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

4) Dados os vetores $\vec{u} = (2,1,-1)$ e $\vec{v} = (1,-1,a)$, calcule o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $\sqrt{62}$.

PRODUTO MISTO

Chama-se produto misto dos vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ ao número real

$$\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Método Prático

$$\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

EXEMPLO 7

Calcule o produto misto dos vetores

$$\vec{u} = (2,3,5)\ ,\ \vec{v} = (-1,3,3)\ \text{e}\ \vec{w} = (4,-3,2).$$

- **SOLUÇÃO:**

$$\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = 12 + 36 + 15 - 60 + 18 + 6 = 27$$

PROPRIEDADES DO PRODUTO MISTO

Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$ e o número real k, temos:

- $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w};$
- $(\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{x}, \vec{v}, \vec{w})$
- $(k\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, k\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, k\vec{w}) = k(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ se, e somente se, os três vetores forem coplanares.

EXEMPLO 8

Verifique se são coplanares os vetores $\vec{u} = (2,-1,1)$, $\vec{v} = (1,0,-1)$ e $\vec{w} = (2,-1,4)$.

- **SOLUÇÃO:**

$$\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 1 - 0 - 2 + 4 = 3 \neq 0$$

Os vetores não são coplanares.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DO PRODUTO MISTO

Considere os vetores não coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

O volume V do paralelepípedo é

V = (área da base) x altura

V = $|\vec{u} \times \vec{v}|.\,|\vec{w}||cos\ \theta|$

V = $|\vec{u}|.\,|\vec{v} \times \vec{w}|.\,|cos\ \theta|$

V = $|\vec{u}.\,(\vec{v} \times \vec{w})|$.