Autovalores e Autovetores

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo, $T: V \to V$ gostaríamos de saber que vetores seriam levados neles mesmos por esta transformação. Isto é, dada $T: V \to V$, quais são os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$? ($\mathbf{v}$ é chamado *vetor fixo*).

Exemplo 1

$I: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (Aplicação identidade)
$(x, y) \mapsto (x, y)$
Neste caso, todo $\mathbf{R}^2$ é fixo uma vez que $I(x, y) = (x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Exemplo 2

$r_x: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (Reflexão no eixo-x)
$(x, y) \mapsto (x, -y)$

Exemplo 3

$N: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (Aplicação nula)
$(x, y) \mapsto (0, 0)$

Passaremos agora para o seguinte problema: Dada uma transformação linear de um espaço vetorial $T: V \to V$, estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor $\mathbf{v} \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbf{R}$ tais que

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$$

Neste caso $T(\mathbf{v})$ será um vetor de mesma "direção" que $\mathbf{v}$. Por vetores de mesma "direção" estaremos entendendo vetores sobre a mesma reta suporte.

Como $\mathbf{v} = 0$ satisfaz a equação para todo λ, estaremos interessados em determinar vetores $\mathbf{v} \neq 0$ satisfazendo a condição acima. O escalar λ será chamado *autovalor* ou *valor característico de* T e o vetor $\mathbf{v}$ um *autovetor* ou *vetor característico de* T. Vamos formalizar este conceito.

Passaremos doravante a dar a designação usual de *operador* linear para uma transformação linear $T: V \to V$ (de um espaço vetorial nele mesmo).

Definição

Seja $T: V \to V$ um operador linear. Se existirem $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq 0$, e $\lambda \in \mathbf{R}$ tais que $T\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, λ é um *autovalor* de T e $\mathbf{v}$ um *autovetor* de T associado a λ.

Exemplo 1

$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
$\mathbf{v} \mapsto 2\mathbf{v}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

De um modo geral toda transformação

$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
$\mathbf{v} \mapsto \alpha\mathbf{v}, \ \alpha \neq 0$

tem α como autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ como autovetor correspondente. Observe que $T(\mathbf{v})$ é sempre um vetor de mesma direção que $\mathbf{v}$. Ainda mais, se:

i) $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor.
ii) $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor.
iii) $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor.
iv) $\alpha = 1$, T é a identidade.

Exemplo 2

$r_x : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (Reflexão no eixo-x)
$(x, y) \mapsto (x, -y)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Os vetores da forma $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ são tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3

$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (Rotação de 90° em torno da origem)
$(x, y) \mapsto (-y, x)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Exemplo 4

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Então $\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ y \end{bmatrix}$

e $T_{\mathbf{A}}(x, y) = (2x + 2y, y)$.

Para procurar os autovetores e autovalores de $T_{\mathbf{A}}$ resolvemos a equação $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ ou

$$\begin{bmatrix} 2x + 2y \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

Teorema

Dada uma transformação $T : V \to V$ e um autovetor $\mathbf{v}$ associado a um autovalor λ, qualquer vetor $w = \alpha \mathbf{v}$ $(\alpha \neq 0)$ também é autovetor de T associado a λ.

Definição

O subespaço $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$ é chamado o *subespaço associado ao autovalor* λ.

Autovalores e Autovetores de uma matriz

Dada uma matriz quadrada, **A**, de ordem n, estaremos entendendo por *autovalor e autovetor de* **A** autovalor e autovetor da transformação linear $T_{\mathbf{A}} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, associada à matriz **A** em relação à base canônica, isto é, $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ (na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbf{R}$ de **A**, e um autovetor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, são soluções da equação $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq 0$.

Exemplo

Dada a matriz diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e dados os vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 0, 1)$, temos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11}\mathbf{e}_1$$

Polinômio Característico

Exemplo 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Exemplo 4

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6

Seja $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$. Procuremos seus autovalores e autovetores.