

## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e  
variáveis

Tabela-  
verdade

AND, OR e  
NOT

Descrição  
algébrica,  
saída e imple-  
mentação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade  
de NAND e  
NOR

Representações

# Aula 03 - Portas Lógicas e Álgebra Booleana

Hugo Vinícius Leão e Silva

[hugovlsilva@gmail.com](mailto:hugovlsilva@gmail.com), [hugo.vinicius.16@gmail.com](mailto:hugo.vinicius.16@gmail.com), [hugovinicius@ifg.edu.br](mailto:hugovinicius@ifg.edu.br)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás  
Campus Anápolis  
Curso de Bacharelado em Ciência da Computação

16 de setembro de 2021



# Visão geral

## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e  
variáveis

Tabela-  
verdade

AND, OR e  
NOT

Descrição  
algébrica,  
saída e imple-  
mentação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade  
de NAND e  
NOR

Representações

- 1 Introdução
- 2 Constantes e variáveis
- 3 Tabela-verdade
- 4 Portas lógicas AND, OR e NOT
- 5 Descrevendo algebricamente, determinando o valor da saída e implementando circuitos lógicos
- 6 Portas lógicas NOR e NAND
- 7 Teoremas da Álgebra Booleana
- 8 Universalidade de NAND e NOR
- 9 Representações alternativas



# Introdução

## Aula 03

Hugo Silva

### Introdução

Constantes e  
variáveis

Tabela-  
verdade

AND, OR e  
NOT

Descrição  
algébrica,  
saída e imple-  
mentação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade  
de NAND e  
NOR

Representações

- Os circuitos lógicos são digitais e binários – os estados válidos para os sinais são 0 e 1;
- Isso permite utilizarmos a Álgebra Booleana para analisar, descrever, projetar e implementar circuitos digitais;
- A álgebra booleana permite descrever a relação entre entrada e saída de um circuito através de uma equação – expressão booleana, e é mais fácil que a álgebra convencional.



# Constantes e variáveis

## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e variáveis

Tabela-verdade

AND, OR e NOT

Descrição algébrica, saída e implementação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade de NAND e NOR

Representações

- Constantes e variáveis assumem apenas dois valores 0 e 1;
- Os valores booleanos 0 e 1 não são números, são estados, são o nível lógico;
- $\{0, 1\} == \{\text{BAIXO}, \text{ALTO}\} == \{\text{FALSO}, \text{VERDADEIRO}\};$
- Não há frações, valores negativos, raízes, logaritmos, números complexos;
- As operações lógicas básicas são AND, OR e NOT.



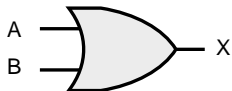
- A tabela-verdade descreve a relação entre todas as combinações da(s) entrada(s) e a(s) saída(s) de um circuito lógico;
- Uma tabela-verdade possui  $2^n$  linhas, onde  $n$  é o número de entradas;
- As combinações das entradas segue a mesma lógica da contagem binária.

**Tabela:** Um exemplo de tabela-verdade de um circuito de  $N = 3$  entradas

A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

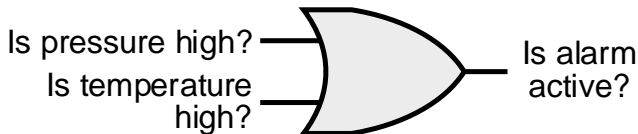
- É representada pelo símbolo +;
- É semelhante à operação regular de adição. A diferença é que  $1 + 1 + \dots + 1 = 1$ ;
- Sempre que houver um 1 na entrada, a saída será 1.

A	B	X = A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1





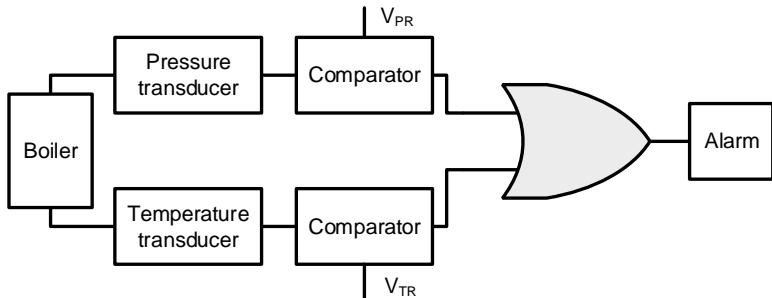
- Exemplo de uso – monitoramento de caldeiras usando a porta OR:



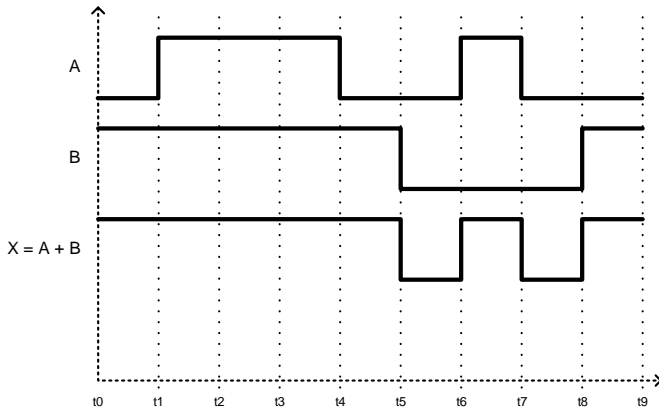
- Tabela-verdade?
- Qual a expressão booleana para essa operação?
- E como descrevê-la em *português*?



**Figura:** Exemplo expandido de um circuito lógico para monitoramento de pressão e temperatura de uma caldeira usando a porta OR.



**Figura:** Diagrama do sinal de saída em função dos sinais de entrada de uma porta OR





## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e  
variáveis

Tabela-  
verdade

AND, OR e  
NOT

Descrição  
algébrica,  
saída e imple-  
mentação

NOR e NAND

Teoremas

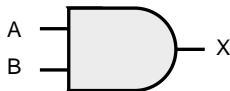
Universalidade  
de NAND e  
NOR

Representações

Exemplos 3-1, 3-2, 3-3A e 3-3B do livro do Tocci nas pp. 66–68.

- É representada pelo símbolo  $\cdot$  e pode ser omitido na expressão booleana;
- É igual à operação regular de multiplicação com 0's e 1's;
- Sempre que houver um 0 na entrada, a saída será 0.

A	B	$X = A \cdot B = AB$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1





# Porta lógica AND

## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e  
variáveis

Tabela-  
verdade

AND, OR e  
NOT

Descrição  
algébrica,  
saída e imple-  
mentação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade  
de NAND e  
NOR

Representações

- Que aplicações podemos imaginar em que usamos a porta AND?
- Como seria o diagrama do sinal resultante para o exemplo mostrado para a porta OR?



# Porta lógica AND

Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e  
variáveis

Tabela-  
verdade

AND, OR e  
NOT

Descrição  
algébrica,  
saída e imple-  
mentação

NOR e NAND

Teoremas

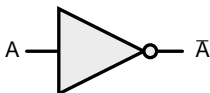
Universalidade  
de NAND e  
NOR

Representações

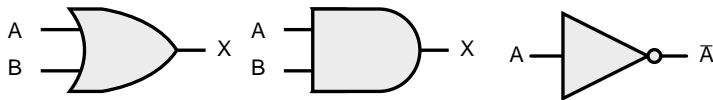
Exemplos 3-4, 3-5A e 3-5B do livro do Tocci nas pp. 69–70.

- É conhecida também como inversor;
- É uma operação unária – opera sobre apenas uma entrada;
- Sempre inverte (ou nega) um valor;
- É representada pelo barra sobreposta ao valor *negado*.

A	X = $\bar{A}$
0	1
1	0



- *Todo* circuito lógico pode ser descrito usando uma expressão algébrica com os operadores lógicos descritos anteriormente;
- Quais as expressões algébricas e as tabelas-verdade para os circuitos abaixo?







# Descrevendo algebricamente, determinando o valor da saída e implementando circuitos lógicos

Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e  
variáveis

Tabela-  
verdade

AND, OR e  
NOT

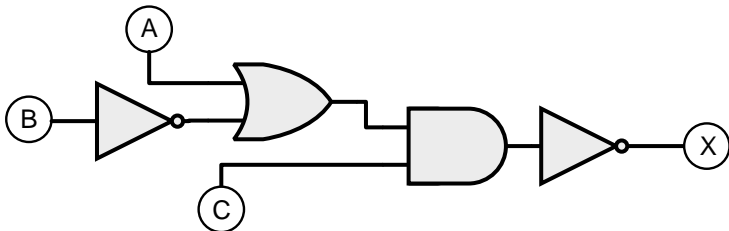
Descrição  
algebrica,  
saída e imple-  
mentação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade  
de NAND e  
NOR

Representações





# Descrevendo algebricamente, determinando o valor da saída e implementando circuitos lógicos

Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e variáveis

Tabela-verdade

AND, OR e NOT

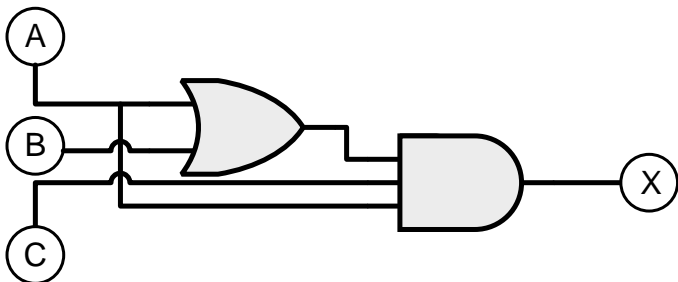
Descrição algébrica, saída e implementação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade de NAND e NOR

Representações



# Descrevendo algebricamente, determinando o valor da saída e implementando circuitos lógicos

Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e variáveis

Tabela-verdade

AND, OR e NOT

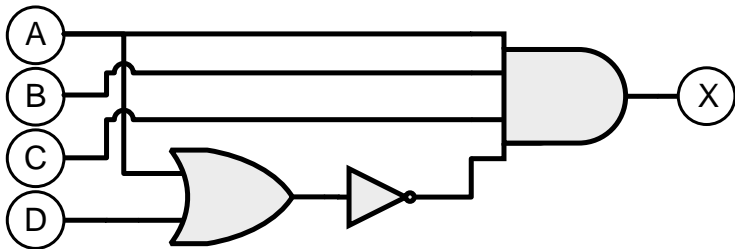
Descrição algébrica, saída e implementação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade de NAND e NOR

Representações





# Descrevendo algebricamente, determinando o valor da saída e implementando circuitos lógicos

Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e variáveis

Tabela-verdade

AND, OR e NOT

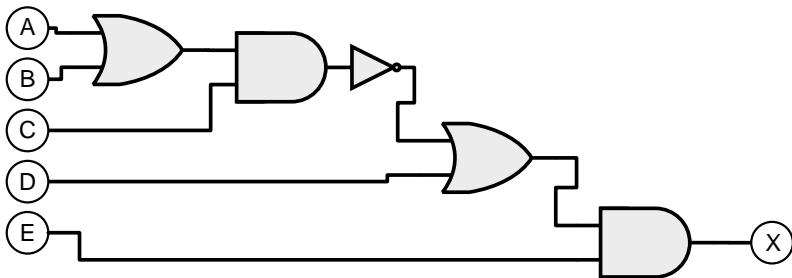
Descrição algébrica, saída e implementação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade de NAND e NOR

Representações





# Descrevendo algebricamente, determinando o valor da saída e implementando circuitos lógicos

## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e variáveis

Tabela-verdade

AND, OR e NOT

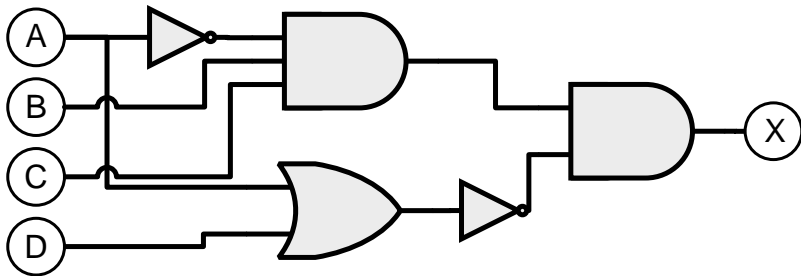
Descrição algébrica, saída e implementação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade de NAND e NOR

Representações





# Descrevendo algebricamente, determinando o valor da saída e implementando circuitos lógicos

Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e variáveis

Tabela-verdade

AND, OR e NOT

Descrição algébrica, saída e implementação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade de NAND e NOR

Representações

- Quais as implementações e as respectivas tabelas-verdade para as seguintes expressões algébricas usando apenas as portas lógicas AND, OR e NOT?

- $X = (\overline{A} + \overline{B})$ ;

- $X = (\overline{A + B})$ ;

- $X = \overline{A} + B$ ;

- $X = (\overline{A \cdot B})$ ;

- $X = (\overline{A \cdot B})$ ;

- $X = AC + B\overline{C} + \overline{A}BC$ ;

- $X = \overline{[(A + B)C + AD]}BC$ ;

- $X = \overline{AB(C + D)}$ .

## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e variáveis

Tabela-verdade

AND, OR e NOT

Descrição algébrica, saída e implementação

NOR e NAND

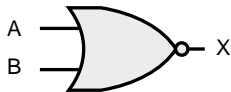
Teoremas

Universalidade de NAND e NOR

Representações

- NOR é a junção das operações = OR e NOT, nesta ordem;
- Ou seja:  $\text{NOR}(X) = \overline{A + B}$ ;

A	B	$X = \overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



- NAND é a junção das operações = AND e NOT, nesta ordem;
- Ou seja:  $\text{NAND}(X) = \overline{A \cdot B}$ ;

A	B	$X = \overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0





## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e variáveis

Tabela-verdade

AND, OR e NOT

Descrição algébrica, saída e implementação

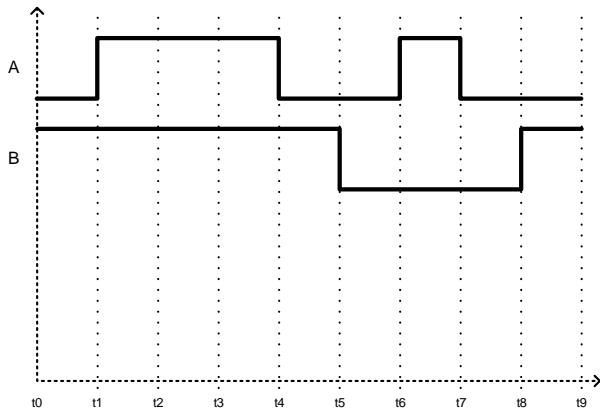
**NOR e NAND**

Teoremas

Universalidade de NAND e NOR

Representações

**Figura:** Quais os sinais de saída em função de  $\overline{A + B}$  e  $\overline{AB}$ ?



## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e  
variáveis

Tabela-  
verdade

AND, OR e  
NOT

Descrição  
algébrica,  
saída e imple-  
mentação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade  
de NAND e  
NOR

Representações

- Implemente as expressões algébricas abaixo usando apenas portas NAND, NOR e NOT.
  - $X = (\overline{A} + \overline{B});$
  - $X = \overline{A + B};$
  - $X = \overline{A} + B;$
  - $X = \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B})};$
  - $X = \overline{(A \cdot B)};$
  - $X = AC + B\overline{C} + \overline{A}BC;$
  - $X = \overline{[(A + B)C + AD]BC};$
  - $X = \overline{AB(\overline{C} + \overline{D})}.$



# Teoremas da Álgebra Booleana

## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e variáveis

Tabela-verdade

AND, OR e NOT

Descrição algébrica, saída e implementação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade de NAND e NOR

Representações

- Os teoremas podem ajudar a simplificar as expressões algébricas (e, conseqüentemente, os circuitos lógicos);
- Teoremas de uma variável:
  - 1  $x \cdot 0 = 0$  – Lembre-se de que  $\cdot$  pode ser omitido!
  - 2  $x \cdot 1 = x$ ;
  - 3  $x \cdot x = x$ ;
  - 4  $x \cdot \bar{x} = 0$ ;
  - 5  $x + 0 = x$ ;
  - 6  $x + 1 = 1$ ;
  - 7  $x + x = x$ ;
  - 8  $x + \bar{x} = 1$ .

## ■ Teoremas com mais de uma variável:

**9**  $x + y = y + x$  – Comutatividade;

**10**  $xy = yx$  – Comutatividade;

**11**  $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$  – Associatividade;

**12**  $x(yz) = (xy)z = xyz$  – Associatividade;

**13**  $x(y + z) = xy + xz$  – Distributividade<sup>1</sup>;

**14**  $(x + y)(w + z) = xw + xz + yw + yz$  – Distributividade;

**15**  $x + xy = x$ ;

**16**  $x + \bar{x}y = x + y$ .

## ■ Implementações dos circuitos lógicos e tabela-verdade?

---

<sup>1</sup>Lembre-se da fatoração!



# Teoremas da Álgebra Booleana

Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e variáveis

Tabela-verdade

AND, OR e NOT

Descrição algébrica, saída e implementação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade de NAND e NOR

Representações

## ■ Simplifique as expressões algébricas abaixo:

- $X = ABC + ABD;$
- $X = \overline{A}BC + \overline{A}BC;$
- $X = \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C};$
- $X = (\overline{A} + B)(A + B);$
- $X = ACD + \overline{A}BCD;$
- $X = AC + \overline{B}C + \overline{A}BC;$
- $X = [(A + B)C + AD]BC.$



# Teoremas da Álgebra Booleana

## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e  
variáveis

Tabela-  
verdade

AND, OR e  
NOT

Descrição  
algébrica,  
saída e imple-  
mentação

NOR e NAND

**Teoremas**

Universalidade  
de NAND e  
NOR

Representações

### ■ Teoremas de DeMorgan:

$$\boxed{17} \quad \overline{(A + B)} = \bar{A} \cdot \bar{B};$$

$$\boxed{18} \quad \overline{(A \cdot B)} = \bar{A} + \bar{B}.$$

### ■ Implementações dos circuitos lógicos e tabela-verdade?

## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e  
variáveis

Tabela-  
verdade

AND, OR e  
NOT

Descrição  
algébrica,  
saída e imple-  
mentação

NOR e NAND

Teoremas

Universalidade  
de NAND e  
NOR

Representações

- Aplique os teoremas de DeMorgan e simplifique, se possível, as expressões algébricas abaixo:

- $X = \overline{A + B + C};$

- $X = \overline{ABC};$

- $X = \overline{(AB + C)};$

- $X = \overline{(\overline{A} + C)(B + \overline{D})};$

- $X = \overline{A + \overline{BC}};$

- $X = \overline{(A + BC)(D + EF)};$

- $X = \overline{AB + \overline{CD} + \overline{EF}};$

- $X = \overline{(A + B)\overline{C}};$

- $X = \overline{A\overline{BC} + \overline{D}};$

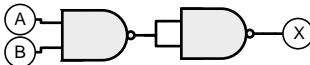
- $X = \overline{A + \overline{B} + \overline{CD}};$

- Sabemos que *todo* circuito lógico pode ser implementado usando portas AND, OR e NOT;
- Pode-se projetar circuitos lógicos utilizando *apenas* portas NAND:

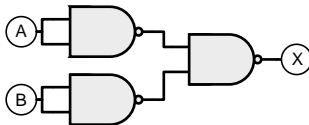
**19**  $X = \bar{A}$  – porta lógica NOT:



**20**  $X = AB$  – porta lógica AND:



**21**  $X = A + B$  – porta lógica OR:



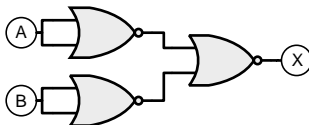


- Ou *apenas* portas NOR:

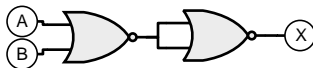
22  $X = \bar{A}$  – porta lógica NOT:



23  $X = AB$  – porta lógica AND:



24  $X = A + B$  – porta lógica OR:



## Aula 03

Hugo Silva

Introdução

Constantes e variáveis

Tabela-verdade

AND, OR e NOT

Descrição algébrica, saída e implementação

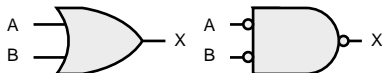
NOR e NAND

Teoremas

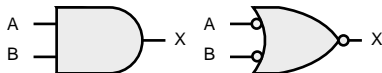
Universalidade de NAND e NOR

Representações

### ■ OR:



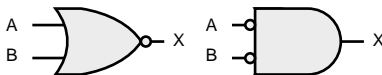
### ■ AND:



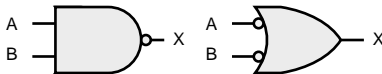
### ■ NOT:



## ■ NOR:



## ■ NAND:



- Ou tem ainda as representações do IEEE/ANSI (pág. 90 do livro do Tocci)!