Integrais Trigonométricas

Integrais Trigonométricas

Substituição Trigonométrica

Integrais Trigonométricas

Nesta seção usaremos as identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas. Começaremos com as potências de seno e cosseno.

EXEMPLO 1 Calcule $\int \cos^3 x \, dx$.

SOLUÇÃO A simples substituição de $u = \cos x$ não ajuda, porque assim $du = -\text{sen}\, x \, dx$. Para integramos potências de cosseno, necessitaríamos de um fator extra sen x. De forma semelhante, uma potência de seno pediria um fator extra cos x. Portanto, aqui podemos separar um fator cosseno e converter o fator $\cos^2 x$ restante em uma expressão envolvendo o seno, usando a identidade $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x$$

Podemos então calcular a integral, substituindo $u = \operatorname{sen} x$, de modo que $du = \cos x\, dx$ e

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx \\
&= \int (1 - u^2)\, du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\
&= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C
\end{aligned}$$

Em geral, tentamos escrever um integrando envolvendo as potências de seno e cosseno em uma forma onde tenhamos somente um fator seno (e o restante da expressão em termos de cosseno) ou apenas um fator cosseno (e o restante da expressão em termos de seno). A identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ nos permite a interconversão de potências pares de seno e cosseno.

EXEMPLO 2 Encontre $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.

SOLUÇÃO Poderíamos converter $\cos^2 x$ para $1 - \operatorname{sen}^2 x$, mas obteríamos uma expressão em termos de $\operatorname{sen} x$ sem nenhum fator extra $\cos x$. Em vez disso, separamos um único fator de seno e reescrevemos o fator $\operatorname{sen}^4 x$ restante em termos de $\cos x$:

$$\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x$$

Substituindo $u = \cos x$, temos $du = -\operatorname{sen} x \, dx$ e, assim,

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du$$

$$= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

EXEMPLO 3 Calcule $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx$.

SOLUÇÃO Se escrevermos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, a integral não é mais simples de calcular. Usando a fórmula do ângulo-metade para $\operatorname{sen}^2 x$, contudo, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx \\
&= \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Encontre $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

Como $\cos^2 2x$ ocorre, precisamos usar outra fórmula do ângulo-metade

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Isso fornece

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + C$$

Para resumirmos, listamos as regras que devem ser seguidas ao calcular integrais da forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, em que $m \geqslant 0$ e $n \geqslant 0$ são inteiros.

ESTRATÉGIA PARA CALCULAR $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$

(a) Se a potência do cosseno é ímpar ($n = 2k + 1$), guarde um fator cosseno e use $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de seno:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x \, dx &= \int \operatorname{sen}^m x \, (\cos^2 x)^k \cos x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^m x \, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx\end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \operatorname{sen} x$.

(b) Se a potência do seno é ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator seno e use $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de cosseno:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx\end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \cos x$. [Observe que se ambas as potências de seno e cosseno forem ímpares, podemos usar (a) ou (b).]

(c) Se as potências de seno e cosseno forem pares, utilizamos as identidades dos ângulos-metade

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algumas vezes é útil usar a identidade

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Podemos empregar uma estratégia semelhante para calcular integrais da forma $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$. Como $(d/dx) \operatorname{tg} x = \sec^2 x$, podemos separar um fator $\sec^2 x$ e converter a potência (par) da secante restante em uma expressão envolvendo a tangente, utilizando a identidade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Ou, como $(d/dx) \sec x = \sec x \operatorname{tg} x$, podemos separar um fator $\sec x \operatorname{tg} x$ e converter a potência (par) da tangente restante para a secante.

EXEMPLO 5 Calcule $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx$.

SOLUÇÃO Se separarmos um fator $\sec^2 x$, poderemos expressar o fator $\sec^2 x$ em termos de tangente, usando a identidade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Podemos então calcular a integral, substituindo $u = \operatorname{tg} x$, de modo que $du = \sec^2 x \, dx$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^6 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\
&= \int \operatorname{tg}^6 x \, (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x \, dx \\
&= \int u^6 (1 + u^2) \, du = \int (u^6 + u^8) \, du \\
&= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C \\
&= \tfrac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x + \tfrac{1}{9} \operatorname{tg}^9 x + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Encontre $\int \operatorname{tg}^5\theta \sec^7\theta \, d\theta$.

SOLUÇÃO Se separarmos um fator $\sec^2\theta$ como no exemplo anterior, ficaremos com um fator $\sec^5\theta$, que não é facilmente convertido para tangente. Contudo, se separarmos um fator $\sec\theta \operatorname{tg}\theta$, poderemos converter a potência restante de tangente em uma expressão envolvendo apenas a secante, usando a identidade $\operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta - 1$. Poderemos então calcular a integral substituindo $u = \sec\theta$, de modo que $du = \sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^5\theta \sec^7\theta \, d\theta &= \int \operatorname{tg}^4\theta \sec^6\theta \sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta \\
&= \int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec^6\theta \sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^6 \, du = \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C = \tfrac{1}{11}\sec^{11}\theta - \tfrac{2}{9}\sec^9\theta + \tfrac{1}{7}\sec^7\theta + C
\end{aligned}$$

ESTRATÉGIA PARA CALCULAR $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$

(a) Se a potência da secante é par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), guarde um fator de $\sec^2 x$ e use $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de $\operatorname{tg} x$:

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x \, dx = \int \operatorname{tg}^m x \, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^m x \, (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx$$

A seguir, substitua $u = \operatorname{tg} x$.

(b) Se a potência da tangente for ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ e use $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressar os fatores restantes em termos de $\sec x$:

$$\int \operatorname{tg}^{2k+1} x \sec^n x \, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \; \sec x \; \operatorname{tg} x \, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \; \sec x \; \operatorname{tg} x \, dx$$

A seguir, substitua $u = \sec x$.

Para outros casos as regras não são tão simples. Talvez seja necessário usar identidades, integração por partes e, ocasionalmente, um pouco de engenhosidade. Algumas vezes precisaremos conseguir integrar $\operatorname{tg} x$ usando a fórmula estabelecida em (5.5.5):

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln |\sec x| + C$$

Também precisaremos da integral indefinida de secante:

$$\boxed{1} \qquad \int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

EXEMPLO 7 Encontre $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

EXEMPLO 8 Encontre $\int \sec^3 x \, dx$.

2 Para calcular as integrais (a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx$, (b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx$ ou (c) $\int \cos mx \cos nx \, dx$, use a identidade correspondente:

$$\text{(a) } \operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)\right]$$

$$\text{(b) } \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}\left[\cos(A - B) - \cos(A + B)\right]$$

$$\text{(c) } \cos A \cos B = \tfrac{1}{2}\left[\cos(A - B) + \cos(A + B)\right]$$

EXEMPLO 9 Calcule $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x \, dx$.

SOLUÇÃO Essa integral poderia ser calculada utilizando integração por partes, mas é mais fácil usar a identidade na Equação 2(a) como a seguir:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x \, dx &= \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\, dx \\
&= \tfrac{1}{2} \int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\, dx \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x\right) + C
\end{aligned}$$

Substituição Trigonométrica

Para encontrar a área de um círculo ou uma elipse, uma integral da forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ aparece, onde $a > 0$. Se ela fosse $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, a substituição $u = a^2 - x^2$ poderia ser eficaz, mas, como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dx$ é mais difícil. Se mudarmos a variável de x para θ pela substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$, então a identidade $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permitirá que nos livremos da raiz, porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\left|\cos\theta\right|$$

Observe a diferença entre a substituição $u = a^2 - x^2$ (na qual a nova variável é uma função da antiga) e a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$ (a variável antiga é uma função da nova).

Em geral, podemos fazer uma substituição da forma $x = g(t)$, usando a Regra da Substituição ao contrário. Para simplificarmos nossos cálculos, presumimos que g tenha uma função inversa, isto é, g é injetora. Nesse caso, se substituirmos u por x e x por t na Regra de Substituição (Equação 5.5.4), obteremos

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Esse tipo de substituição é chamado de *substituição inversa*.

Podemos fazer a substituição inversa $x = a \operatorname{sen}\theta$ desde que esta defina uma função injetora. Isso pode ser conseguido pela restrição de θ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Na tabela a seguir listamos as substituições trigonométricas que são eficazes para as expressões radicais dadas em razão de certas identidades trigonométricas. Em cada caso, a restrição de θ é imposta para assegurar que a função que define a substituição seja injetora.

Tabela de Substituições Trigonométricas

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{tg} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \operatorname{tg}^2\theta$

EXEMPLO 1 Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx$.

EXEMPLO 3 Encontre $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}\,dx$.

EXEMPLO 4 Encontre $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\,dx$.

EXEMPLO 5 Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, onde $a > 0$.

Exercícios

Seção 7.2 pág. 430
Seção 7.3 pág. 436