3.10 EXERCÍCIOS

1. Dê o número de inversões das seguintes permutações de 1, 2, 3, 4, 5:

   a) 3 5 4 1 2
   b) 2 1 4 3 5
   c) 5 4 3 2 1
   d) No determinante de uma matriz 5 × 5, que sinal (negativo ou positivo) precederia os termos $a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}$ e $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$?

2. Quantas inversões tem a permutação (n $n-1$ ... 2 1) dos números 1, 2, ..., $n-1$, n?

3. Calcule $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

   a) pela definição
   b) em relação à segunda coluna, usando o desenvolvimento de Laplace.

4. Dadas as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule

   a) $\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}$
   b) $\det (\mathbf{A} + \mathbf{B})$

5. Sejam **A** e **B** matrizes do tipo $n \times n$. Verifique se as colocações abaixo são verdadeiras ou falsas.

   a) $\det (\mathbf{AB}) = \det (\mathbf{BA})$
   b) $\det (\mathbf{A}') = \det \mathbf{A}$
   c) $\det (2\mathbf{A}) = 2 \det \mathbf{A}$
   d) $\det (\mathbf{A}^2) = (\det \mathbf{A})^2$
   e) $\det \mathbf{A}_{ij} < \det \mathbf{A}$
   f) Se **A** é uma matriz 3 × 3, então
   $a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23}$

6. Dada $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ calcule

   a) $\mathbf{A}_{23}$
   b) $|\mathbf{A}_{23}|$
   c) Δ_{23}
   d) $\det \mathbf{A}$

7. *Propriedade*: O determinante de uma matriz triangular $A_{n \times n}$ é igual ao produto dos elementos de sua diagonal.

   a) Prove esta propriedade no caso em que A é uma matriz triangular superior (genérica) 5×5. (Sugestão: Use e abuse do desenvolvimento de Laplace.)

   b) O que você pode dizer sobre o número de soluções dos sistemas abaixo?

$$(i)\ \left\{\begin{array}{rrrrl} 5x_1 & + 2x_2 & - 3x_3 & + 9x_4 & = 0 \\ & -3x_2 & + 9x_3 & - \frac{1}{3}x_4 & = 0 \\ & & -2x_3 & + x_4 & = 0 \\ & & & x_4 & = 1 \end{array}\right.$$

$$(ii)\ \left\{\begin{array}{rrrrrl} 3x_5 & + 2x_4 & & & + x_1 & = 0 \\ & & - x_3 & + x_2 & - x_1 & = 5 \\ & & - 9x_3 & - x_2 & + 9x_1 & = 0 \\ & & & -3x_2 & + x_1 & = 0 \\ & & & & x_1 & = 0 \end{array}\right.$$

8. Calcule det A, onde

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} i & 3 & 2 & -i \\ 3 & -i & 1 & i \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -i & i & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

9. Encontre A^{-1}, onde

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

~~*b*)~~ $A = \begin{bmatrix} 0 & -i & -2 & i \\ 1 & -1 & i & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

~~*c*)~~ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{bmatrix}$

10. Se **A** ou **B** é uma matriz não inversível, então **A** · **B** também não é. Prove isto, sem usar determinantes.

11. Mostre que

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 0 & 2 & 3x^2 \\ 0 & x & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe atentamente a igualdade acima e enuncie a propriedade que ela ilustra.

12. Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ calcule

a) adj **A**
b) det **A**
c) $\mathbf{A}^{-1}$

13. Mostre que $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

14. Dizemos que **A** e **B** são matrizes semelhantes se existe uma matriz **P** tal que $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$. Mostre que det **A** = det **B** se **A** e **B** são semelhantes.

15. Verdadeiro ou falso?

a) Se det **A** = 1, então $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.
b) Se **A** é uma matriz triangular superior e $\mathbf{A}^{-1}$ existe, então também $\mathbf{A}^{-1}$ será uma matriz triangular superior.
c) Se **A** é uma matriz escalar $n \times n$ da forma $k\mathbf{I}_n$, então $\det \mathbf{A} = k^n$.
d) Se **A** é uma matriz triangular, então $\det \mathbf{A} = a_{11} + \dots + a_{nn}$.

16. Resolva o sistema, usando a Regra de Cramer:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \\ y - 5z = 4 \end{cases}$$

17. Dado o sistema

$$\begin{cases} x + y \quad\quad - w = 0 \\ x \quad\quad - z + w = 2 \\ \quad y + z - w = -3 \\ x + y \quad\quad -2w = 1 \end{cases}$$

a) Calcule o posto da matriz dos coeficientes.
b) Calcule o posto da matriz ampliada.
c) Descreva a solução deste sistema.
d) Considere um sistema homogêneo **AX** = **0**, onde **A** é uma matriz $n \times n$. Que condição você deve impor sobre **A**, para que o sistema admita soluções diferentes da solução trivial (**X** = **0**)? Compare com 3.6 e o Exercício 18 do Capítulo 2.

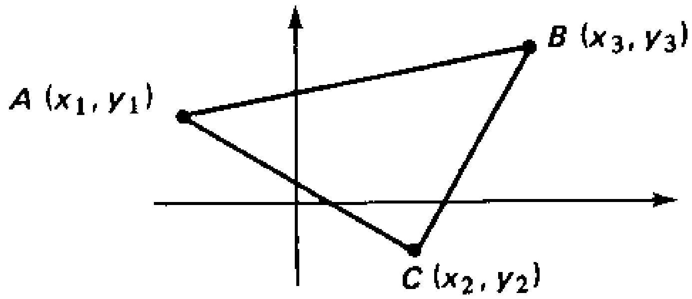
18. Prove que: Uma matriz **A**, com ordem n, tem posto n se, e somente se **A** é inversível.

19. A partir do exercício acima, você pode concluir que uma matriz **A**, de ordem n, possui determinante diferente de zero se, e somente se **A** tem n linhas linearmente independentes. Por quê? (Veja o final da secção 2.4.)

20. Agora prove a propriedade 3.7.1, usando o exercício anterior.

21. Mostre que a área do triângulo na figura é dada pelo determinante

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



22. *a*) Mostre que $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$

b) Se $a_1, a_2, ..., a_n$ são números, mostre por indução finita que

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

O símbolo à direita significa o produto de todos os termos $x_j - x_i$ com $i < j$ e i, j inteiros variando de 1 a n.

Sugestão: Para efetuar facilmente a indução, multiplique cada coluna por x_1 e subtraia o mesmo da coluna imediatamente à direita, partindo do lado esquerdo, obtendo, então: $V_n = (x_n - x_1) \dots (x_2 - x_1) V_{n-1}$.
Tal determinante é chamado determinante de Vandermonde.

23) Uma maneira de codificar uma mensagem é através de multiplicação por matrizes. Vamos associar as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Suponhamos que a nossa mensagem seja "PUXA VIDA". Podemos formar uma matriz 3 X 3 assim:

$$\begin{bmatrix} P & U & X \\ A & - & V \\ I & D & A \end{bmatrix}, \text{ que usando a}$$

correspondência numérica fica:

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 23 \\ 1 & 0 & 21 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}$$

Agora seja **C** uma matriz qualquer 3 X 3 *inversível*, por exemplo:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos nossa matriz da mensagem por **C**, obtendo **M** · **C**.

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 23 \\ 1 & 0 & 21 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 83 & 58 \\ 1 & 21 & 22 \\ 5 & 13 & 14 \end{bmatrix}$$

Transmitimos esta nova matriz (na prática, envia-se a cadeia de números -5 83 58 1 21 22 5 13 14). Quem recebe a mensagem decodifica-a através da multiplicação pela inversa ($(\mathbf{M} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{M}$) e posterior transcrição dos números para letras. **C** é chamada *matriz chave* para o código.

a) Você recebeu a mensagem:
-12 48 23 -2 42 26 1 42 29
Utilizando a mesma chave traduza a mensagem.

b) Aconteceu que o inimigo descobriu sua chave. O seu comandante manda você substituir a matriz chave por $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Você transmite a mensagem "CRETINO..." a ele (codificada, naturalmente!). Por que não será possível a ele decodificar sua mensagem?

c) Escolha uma matriz-chave que dê para codificar palavras até 16 letras. Codifique e descodifique à vontade!

3.10.1 Respostas

1. *a*) 5 *b*) 2 *c*) 10 *d*) - e +

3. *a*) 21 *b*) 21

5. *a*) V *b*) V *c*) F *d*) V *e*) F *f*) V

7. *a*) Seja **A** uma matriz triangular superior e desenvolva-se o determinante através da primeira coluna.
$|\mathbf{A}| = a_{11}|\mathbf{A}_{11}|$ mas $\mathbf{A}_{11}$ é triangular superior também $|\mathbf{A}_{11}| = a_{22}|\mathbf{A}_{11\,11}|$ etc.
Então $|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$.

b) (*i*) única, (*ii*) nenhuma.

9. *a*) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 12 & -6 \\ 11 & 14 & -43 & 22 \\ 10 & 14 & -41 & 21 \end{bmatrix}$

b) $\dfrac{-1}{2+i}\begin{bmatrix} -1-i & -1 & -1 & -1-i \\ -i & i & 1-i & -i \\ 1+2i & 1-i & i & -1+i \\ 3-i & -2-i & 3-\text{i} & 2+i \end{bmatrix}$

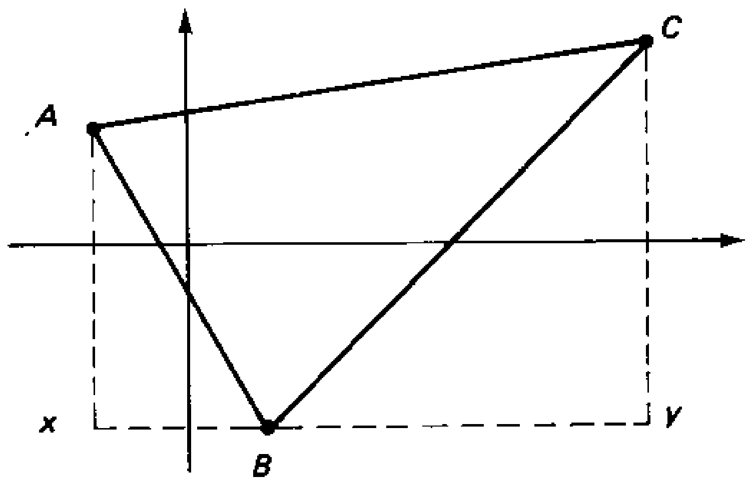
c) $\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-2}{x} & \dfrac{1}{x} \\ -1 & \dfrac{-1+2}{x} & \dfrac{1-1}{x} \\ 1 & \dfrac{2}{x^2} & \dfrac{-1}{x^2} \end{bmatrix}$

11. A derivada do determinante é a soma dos determinantes das matrizes obtidas da original, diferenciando as linhas, uma por uma.

15. *a*) F *b*) V *c*) V *d*) F

17. *a*) 3
b) 3
c) Possível e indeterminado.
d) As linhas de A como vetores são LD.

21. Considere as áreas do trapézio $AXYC$ e dos triângulos AXB e CYB.



23. *b*) A matriz-chave não tem inversa.

Leituras Sugeridas e Referências

[1]Herstein, T.N.; *Tópicos de Álgebra*, Editora Polígono, São Paulo, 1970.
[2]Hoffman, K. e Kunze, R.; *Álgebra Linear*, Editora Polígono, São Paulo, 1971.
[3]Lipschutz, S.; *Álgebra Linear*; McGraw-Hill do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 1971.