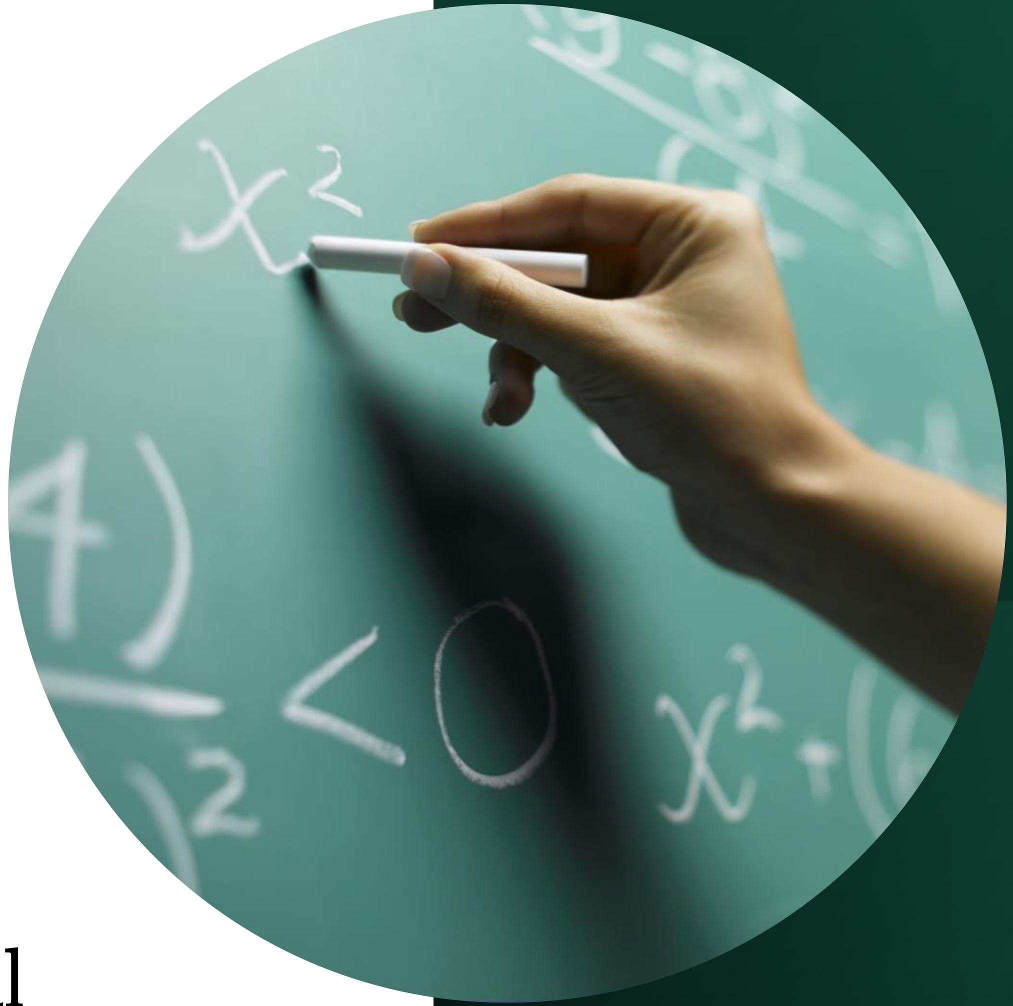
Teorema Fundamental do Cálculo e Integral Indefinida



- Teorema Fundamental do Cálculo
- Integrais Indefinidas
- Teorema da Variação Total

O Teorema Fundamental do Cálculo

- O nome Teorema Fundamental do Cálculo é apropriado, pois ele estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral.
- O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área.
- O mentor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descobriu que esses dois problemas estão, na verdade, estreitamente relacionados. Ele percebeu que a derivação e a integração são processos inversos.

- O Teorema Fundamental do Cálculo dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral. Foram Newton e Leibniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático.
- Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas.

O Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1 Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

A primeira parte do Teorema Fundamental lida com funções definidas por uma equação da forma

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

onde f é uma função contínua de $[a, b]$ e x varia entre a e b.

Observe que g depende somente de x, que aparece como o limite superior variável da integral. Se x for um número fixado, então a integral $\int_a^x f(t)\, dt$ é um número definido. Se variamos x, o número $\int_a^x f(t)\, dt$ também varia e define uma função de x denotada por $g(x)$.

Se f for uma função positiva, então $g(x)$ pode ser interpretada como a área sob o gráfico de f de a até x, onde x pode variar de a até b. (Imagine g como a função "área até aqui"; veja a Figura 1.)

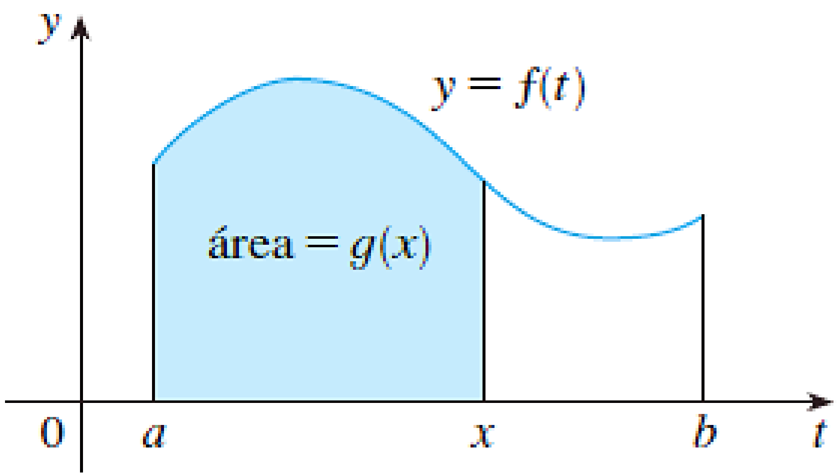


FIGURA 1

$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$

Observamos que $g'(x) = f(x)$ da Parte 1 pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

o que quer dizer que se f for integrada e o resultado, derivado, obteremos de volta a função original f.

Exemplos

1. Encontre a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

Uma vez que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ é contínua, a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo fornece

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

2. Encontre $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\, dt$.

Aqui, devemos usar a Regra da Cadeia com o TFC1.

Seja $u = x^4$. Então

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\,dt = \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\,dt$$

$$= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\,dt\right]\frac{du}{dx} \qquad \text{(pela Regra da Cadeia)}$$

$$= \sec u\,\frac{du}{dx} \qquad \text{(por TFC1)}$$

$$= \sec(x^4)\cdot 4x^3$$

Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2 Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

A Parte 2 do Teorema Fundamental afirma que se conhecermos uma primitiva F de f, então poderemos calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ simplesmente subtraindo os valores de F nas extremidades do intervalo $[a, b]$.

Como $F'(x) = f(x)$, a Parte 2 pode ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Essa versão afirma que se tomarmos uma função F, a derivarmos e depois integrarmos o resultado, chegaremos de volta à função original F, mas na forma $F(b) - F(a)$. Juntas, as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo mostram que a derivação e a integração são processos inversos. Cada um desfaz o que o outro fez.

Notações:

Frequentemente usamos a notação

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Logo, a equação do TFC2 pode ser escrita como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{onde} \qquad F' = f$$

Outras notações comuns são $F(x)\,\big|_a^b$ e $[F(x)]_a^b$.

Exemplos

1. Calcule a integral $\int_1^3 e^x\,dx$.

A função $f(x) = e^x$ é contínua em toda parte e sabemos que uma primitiva é $F(x) = e^x$,

logo, pela Parte 2 do Teorema Fundamental, temos

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

2. Encontre a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.

Uma primitiva de $f(x) = x^2$ é $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.

A área A pedida é encontrada usando-se a Parte 2 do Teorema Fundamental:

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Diferenciação e Integração como Processos Inversos

Teorema Fundamental do Cálculo Suponha que f seja contínua em $[a, b]$.

1. Se $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Integrais Indefinidas

Ambas as partes do Teorema Fundamental estabelecem conexões entre as primitivas e as integrais definidas. A Parte 1 diz que se f é contínua, então $\int_a^x f(t)\,dt$ é uma primitiva de f. A Parte 2 diz que $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser encontrado calculando-se $F(b) - F(a)$, onde F é uma primitiva de f.

Precisamos de uma notação conveniente para primitivas que torne fácil trabalhar com elas. Em virtude da relação dada pelo Teorema Fundamental entre primitivas e integrais, a notação $\int f(x)\,dx$ é tradicionalmente usada para a primitiva de f e é chamada **integral indefinida**. Logo,

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x).$$

Por exemplo, podemos escrever

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

Portanto, podemos olhar uma integral indefinida como representando toda uma *família* de funções (uma primitiva para cada valor da constante C).

Uma integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um *número*, enquanto uma integral indefinida $\int f(x)\,dx$ é uma *função* (ou uma família de funções).

A eficiência do Teorema Fundamental depende de termos um suprimento de primitivas de funções.

Portanto, vamos apresentar de novo a Tabela de Fórmulas de Primitivação, com algumas outras, na notação de integrais indefinidas.

Cada fórmula pode ser verificada derivando-se a função do lado direito e obtendo-se o integrando.

Por exemplo,

$$\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x + C) = \sec^2 x$$

1 Tabelas de Integrais Indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\, dx = -\operatorname{cossec} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x + C$$

Lembre-se de que, pelo Teorema1, a primitiva mais geral sobre um dado intervalo é obtida adicionando-se uma constante a uma dada primitiva.

Adotamos a convenção de que quando uma fórmula para uma integral indefinida geral é dada, ela é válida somente em um intervalo.

Assim, escrevemos

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

subentendendo que isso é válido no intervalo $(0, \infty)$ ou no intervalo $(-\infty, 0)$. Isso é verdadeiro apesar do fato de que a primitiva geral da função $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, é

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{se } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

EXEMPLO 1 Encontre a integral indefinida geral

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx$$

Usando nossa convenção e a Tabela 1, temos

$$\begin{aligned}\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx &= 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx\\ &= 10\,\frac{x^5}{5} - 2\operatorname{tg} x + C\\ &= 2x^5 - 2\operatorname{tg} x + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule $\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$.

SOLUÇÃO Essa integral indefinida não é imediatamente reconhecível na Tabela 1, logo, usamos identidades trigonométricas para reescrever a função antes de integrá-la:

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$

$$= \int \operatorname{cossec}\theta\ \operatorname{cotg}\theta\ d\theta = -\operatorname{cossec}\theta + C$$

EXEMPLO 3 Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

Usando o TFC2 e a Tabela 1, temos

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx &= \frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2}\Bigg]_0^3 \\ &= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right) \\ &= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6{,}75\end{aligned}$$

Aplicações

A Parte 2 do Teorema Fundamental diz que se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f. Isso significa que $F' = f$, de modo que a equação pode ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sabemos que $F'(x)$ representa a taxa de variação de $y = F(x)$ em relação a x e $F(b) - F(a)$ é a variação em y quando x muda de a para b. [Observe que y pode, por exemplo, crescer, decrescer e, então, crescer novamente. Embora y possa variar nas duas direções, $F(b) - F(a)$ representa a *variação total* em y.] Logo, podemos reformular o TFC2 em palavras da forma a seguir.

Teorema da Variação Total A integral de uma taxa de variação é a variação total:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esse princípio pode ser aplicado para todas as taxas de variação nas ciências naturais e sociais. Aqui estão alguns exemplos dessa ideia:

- Se $V(t)$ for o volume de água em um reservatório no instante t, então sua derivada $V'(t)$ é a taxa segundo a qual a água flui para dentro do reservatório no instante t. Logo,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

é a variação na quantidade de água no reservatório entre os instantes de tempo t_1 e t_2.

- Se $[\mathrm{C}](t)$ for a concentração do produto de uma reação química no instante t, então a taxa de reação é a derivada $d[\mathrm{C}]/dt$. Logo,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}\,dt = [\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)$$

é a variação na concentração de C entre os instantes t_1 e t_2.

- Se a massa de uma barra medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x for $m(x)$, então a densidade linear é $\rho(x) = m'(x)$. Logo,

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

é a massa do segmento da barra que está entre $x = a$ e $x = b$.

- Se a taxa de crescimento populacional for dn/dt, então

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

é a alteração total da população no período de tempo de t_1 a t_2. (A população cresce quando ocorrem nascimentos e decresce quando ocorrem óbitos. A variação total leva em conta tanto nascimentos quanto mortes.)

- Se $C(x)$ é o custo de produzir x unidades de uma mercadoria, então o custo marginal é a derivada de $C'(x)$. Logo,

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

é o crescimento do custo quando a produção está aumentando de x_1 a x_2 unidades.

- Se um objeto se move ao longo de uma reta com a função de posição $s(t)$, então sua velocidade é $v(t) = s'(t)$, logo

2 $$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = s(t_2) - s(t_1)$$

é a mudança de posição, ou *deslocamento*, da partícula durante o período de tempo de t_1 a t_2. Na Seção 5.1 conjecturamos que isso era verdadeiro para o caso onde o objeto move-se no sentido positivo, mas agora demonstramos que é sempre verdade.

Se quisermos calcular a distância percorrida durante o intervalo de tempo, teremos de considerar os intervalos quando $v(t) \geqslant 0$ (a partícula move-se para a direita) e também os intervalos quando $v(t) \leqslant 0$ (a partícula move-se para a esquerda). Em ambos os casos a distância é calculada integrando-se $|v(t)|$, a velocidade escalar. Portanto,

3 $$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = \text{distância total percorrida.}$$

$$\text{Deslocamento} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{Distância} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$$

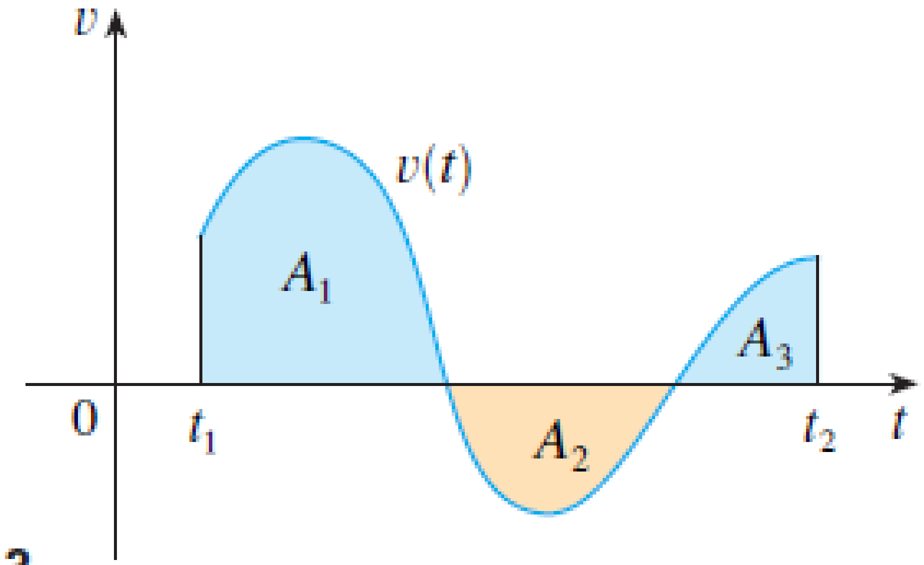


FIGURA 3

A Figura 3 mostra como o deslocamento e a distância percorrida podem ser interpretados em termo de áreas sob uma curva velocidade.

- A aceleração do objeto é $a(t) = v'(t)$, logo

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt = v(t_2) - v(t_1)$$

é a mudança na velocidade do instante t_1 até t_2.

EXEMPLO 6 Uma partícula move-se ao longo de uma reta de tal forma que sua velocidade no instante t é $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida em metros por segundo).

(a) Encontre o deslocamento da partícula durante o período de tempo $1 \leqslant t \leqslant 4$.

(b) Encontre a distância percorrida durante esse período de tempo.

(a) Pela Equação 2, o deslocamento é

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Isso significa que a partícula moveu-se 4,5 m para a esquerda.

(b) Observe que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$, logo, $v(t) \leqslant 0$ no intervalo $[1, 3]$ e $v(t) \geqslant 0$ em $[3, 4]$. Assim, da Equação 3, a distância percorrida é

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt = \int_1^3 [-v(t)]\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt$$

$$= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\,dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4$$

$$= \frac{61}{6} \approx 10{,}17 \text{ m}$$

Exercícios

Seção 5.3 – pág. 357

Seção 5.4 – pág. 365