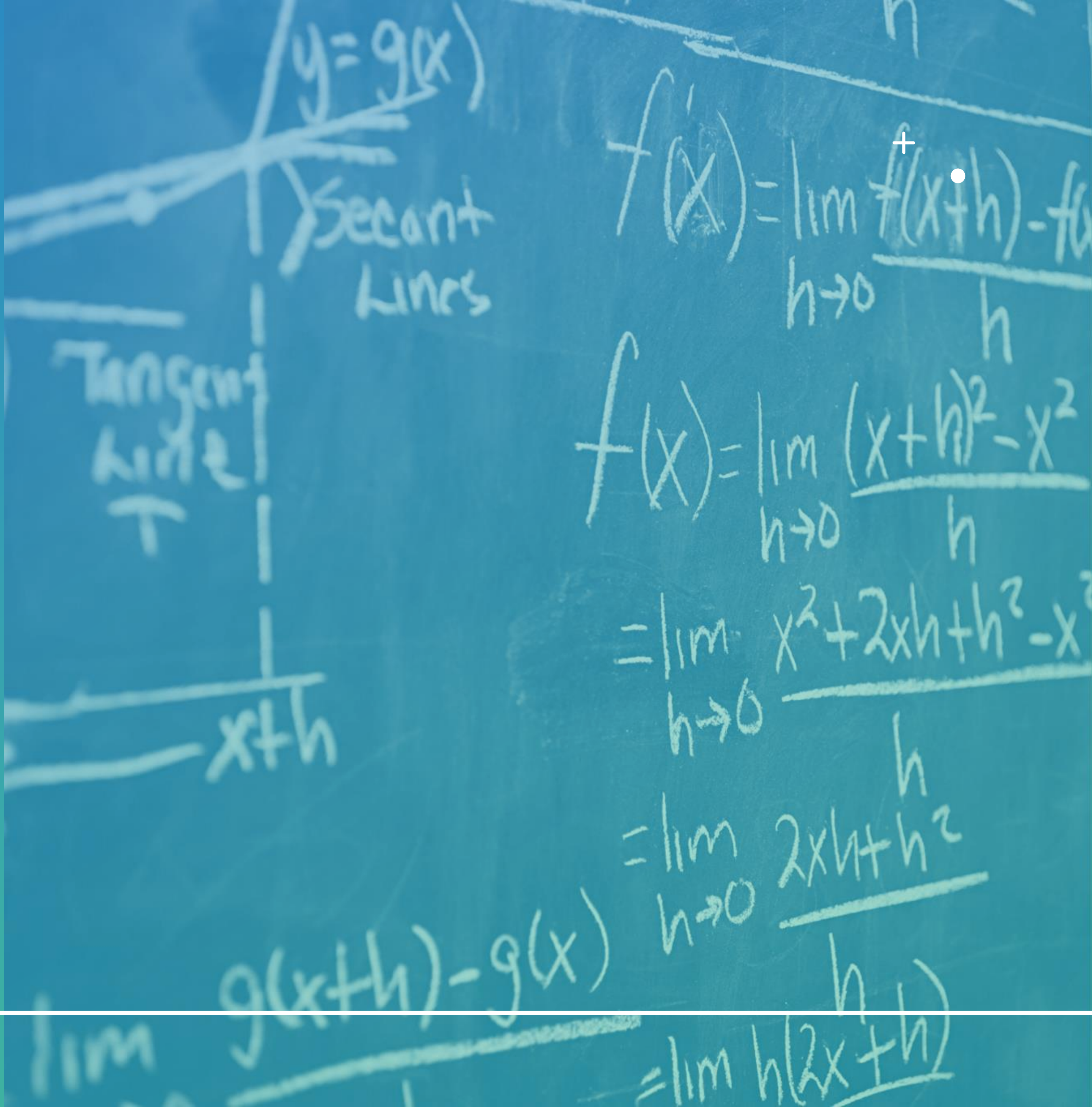
LIMITES CONTINUAÇÃO

- Continuidade
- Propriedades das Funções Contínuas
- O Teorema do Valor Intermediário
- Limites no Infinito
- Assíntota Horizontal



Continuidade

Percebemos pela propriedade da substituição direta que o limite de uma função quando x tende a a pode muitas vezes ser encontrado simplesmente calculando o valor da função em a.

Funções com essa propriedade são chamadas de **contínuas em $\boldsymbol{a}$**.

Veremos que a definição matemática de continuidade tem correspondência bem próxima ao significado da palavra continuidade no uso comum.

(Um processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas.)

1 **Definição** Uma função f é **contínua em um número** a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Observe que a Definição 1 implicitamente requer três coisas para a continuidade de f em a:

1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

A definição diz que f é contínua em a se $f(x)$ tende a $f(a)$ quando x tende a a.

Assim, uma função contínua f tem a propriedade de que uma pequena mudança em x produz somente uma pequena alteração em $f(x)$.

De fato, a alteração em $f(x)$ pode ser mantida tão pequena quanto desejarmos, mantendo-se a variação em x suficientemente pequena.

Se f está definida próximo de a (em outras palavras, f está definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a), dizemos que f é descontínua em a (ou que f tem uma descontinuidade em a) se f não é contínua em a.

Os fenômenos físicos são geralmente contínuos. Por exemplo, o deslocamento ou a velocidade de um veículo variam continuamente com o tempo, como a altura das pessoas.

Mas descontinuidades ocorrem em situações tais como a corrente elétrica.

Geometricamente, você pode pensar em uma função contínua em todo número de um intervalo como uma função cujo gráfico não se quebra.

O gráfico pode ser desenhado sem remover sua caneta do papel.

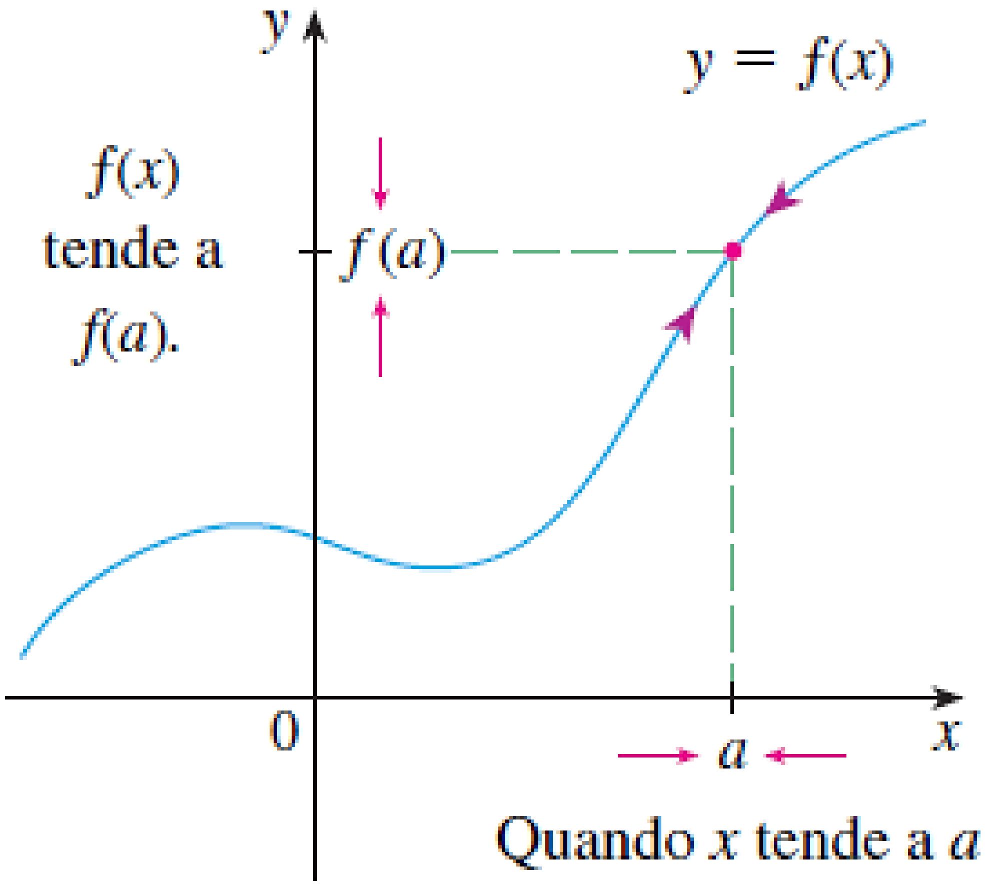


FIGURA 1

EXEMPLO 1

A Figura 2 mostra o gráfico da função f. Em quais números f é descontínua? Por quê?

- ✓ Parece haver uma descontinuidade quando $a = 1$, pois aí o gráfico tem um buraco.

  A razão oficial para f ser descontínua em 1 é que $\boldsymbol{f(1)}$ ***não está definida.***

- ✓ O gráfico também tem uma quebra em $a = 3$, mas a razão para a descontinuidade é diferente.

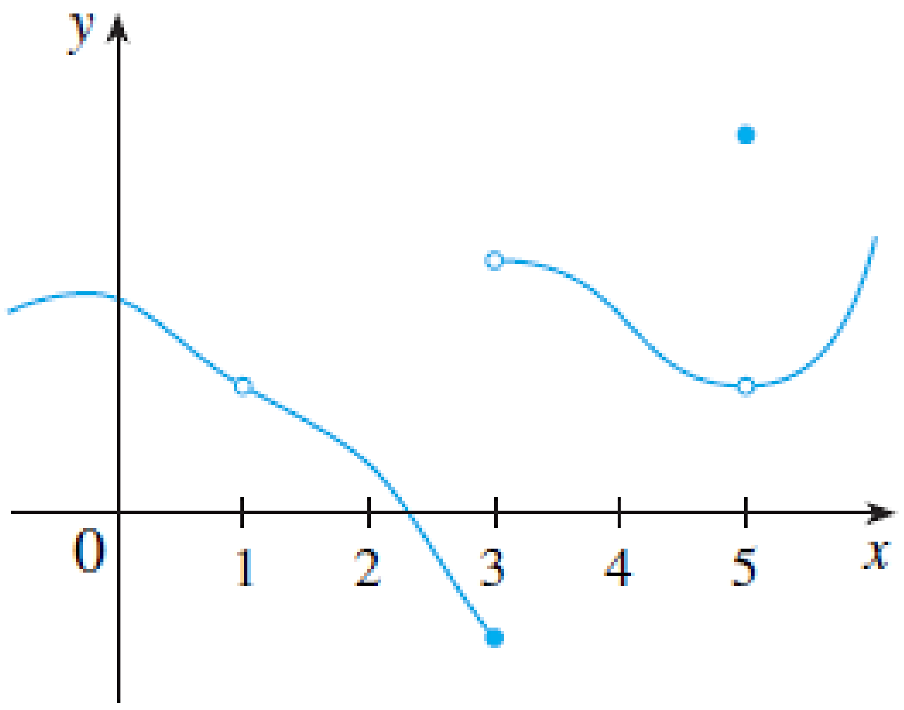


FIGURA 2

Aqui, $f(3)$ está definida, mas $\boldsymbol{\lim_{x\to 3} f(x)}$ ***não existe*** (pois o limites esquerda e direita são diferentes). Logo f é descontínua em 3.

- ✓ E $a = 5$?

Aqui $f(5)$ está definida e $\lim_{x\to 5} f(x)$ existe (pois o limite esquerda e o direita são iguais). Mas

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5)}$$

Logo, f é descontínua em 5.

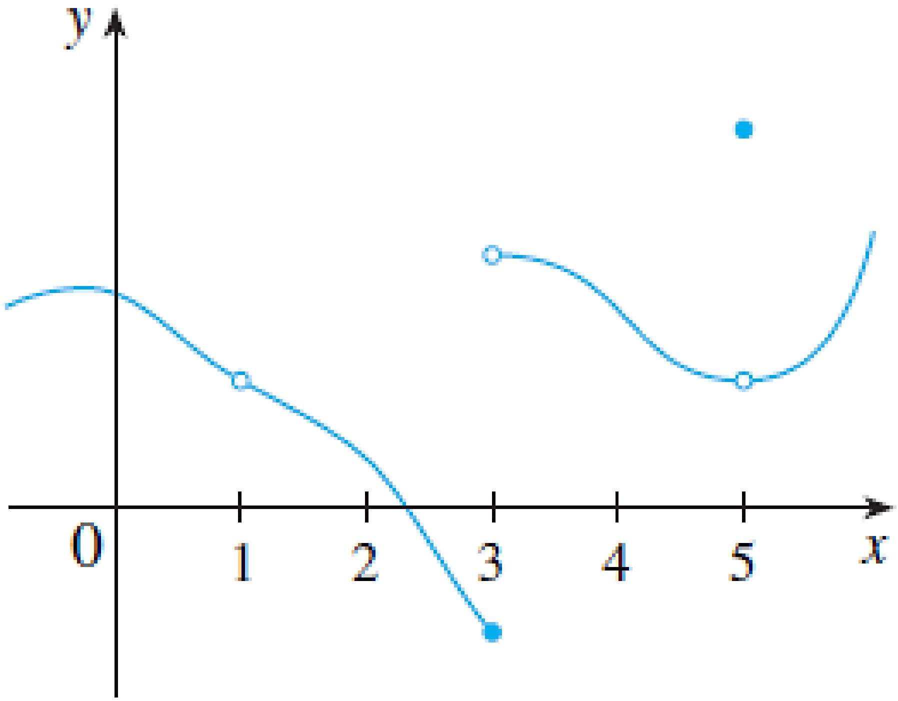


FIGURA 2

EXEMPLO 2

Onde cada uma das seguintes funções é descontínua?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Observe que $f(2)$ não está definida; logo, f é descontínua em 2.

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Aqui $f(0) = 1$ está definida, mas $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$

não existe.

Então f é descontínua em 0.

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

Aqui $f(2) = 1$ está definida e

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$$

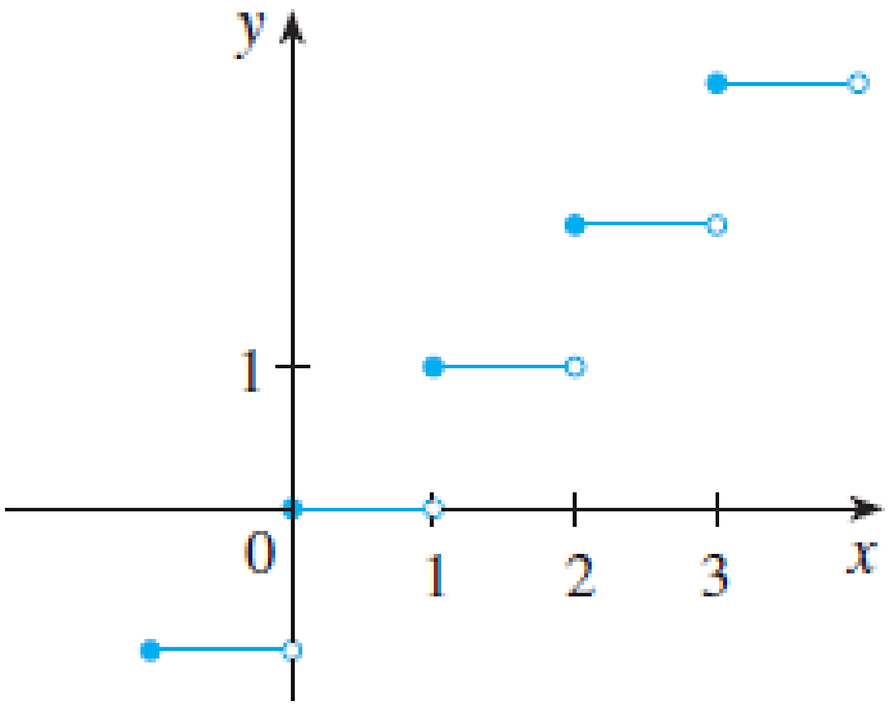
existe. Mas

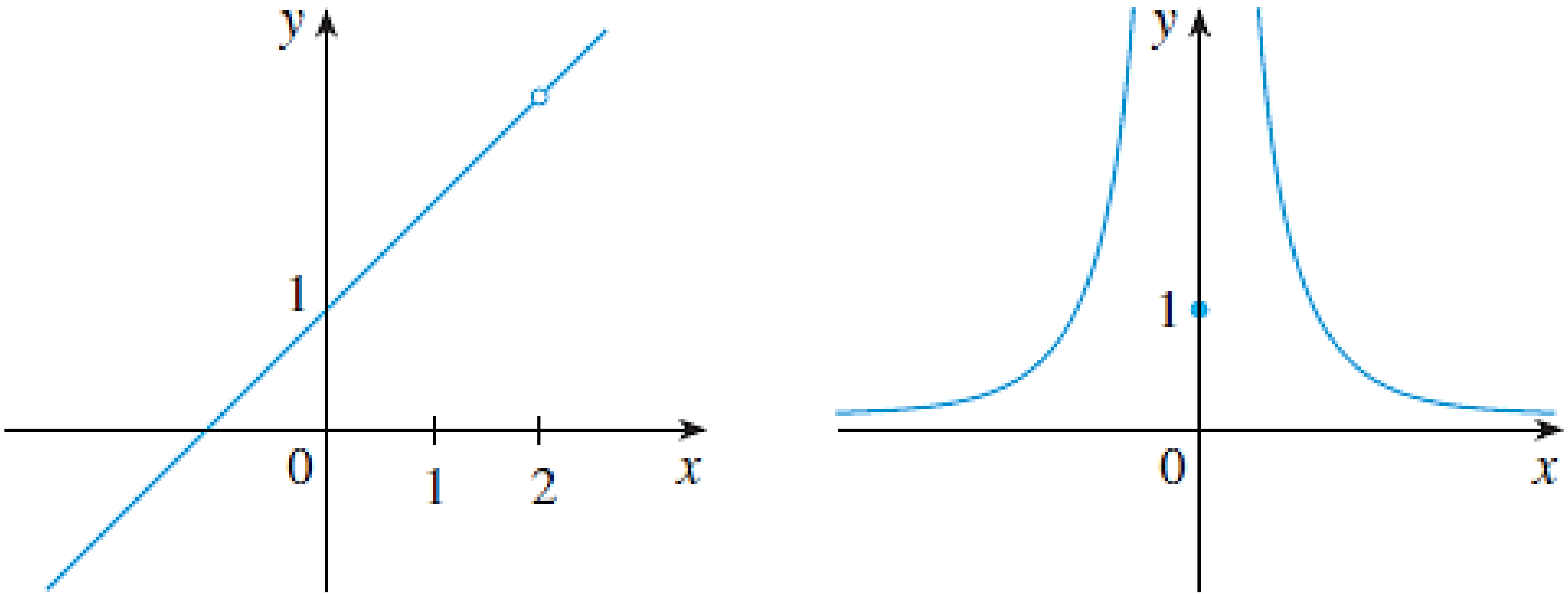
$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

logo, f não é contínua em 2.

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

A função maior inteiro $f(x) = [\![x]\!]$ tem descontinuidades em todos os inteiros, pois $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ não existe se n for um inteiro.



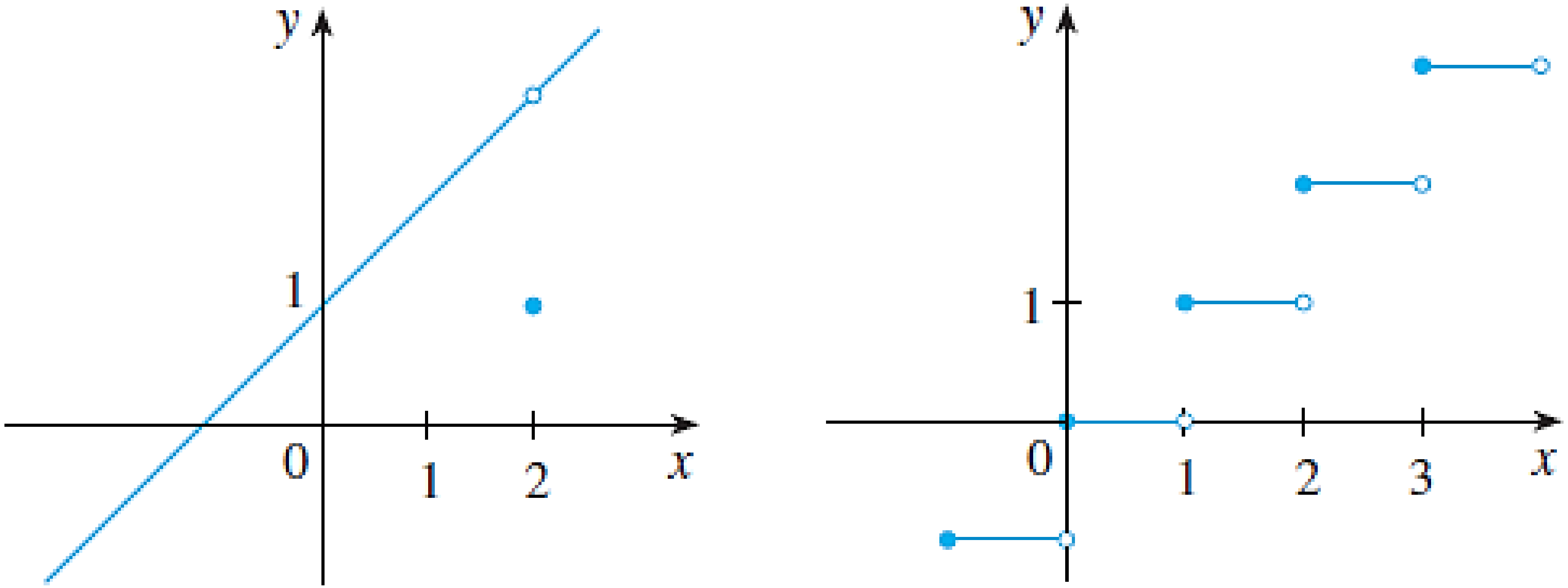


(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

FIGURA 3

Gráficos das funções do Exemplo 2



(c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURA 3

Gráficos das funções do Exemplo 2

A Figura 3 mostra os gráficos das funções no Exemplo 2. Em cada caso o gráfico não pode ser feito sem levantar a caneta do papel, pois um buraco, uma quebra ou salto ocorrem no gráfico.

- As descontinuidades ilustradas nas partes (a) e (c) são chamadas **removíveis**, pois podemos removê-las redefinindo f somente no número 2. [A função $g(x) = x + 1$ é contínua.]
- A descontinuidade da parte (b) é denominada **descontinuidade infinita**.
- As descontinuidades da parte (d) são ditas **descontinuidades em saltos**, porque a função "salta" de um valor para outro.

$\boxed{2}$ **Definição** Uma função f é **contínua à direita em um número** a se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e f é **contínua à esquerda em** a se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

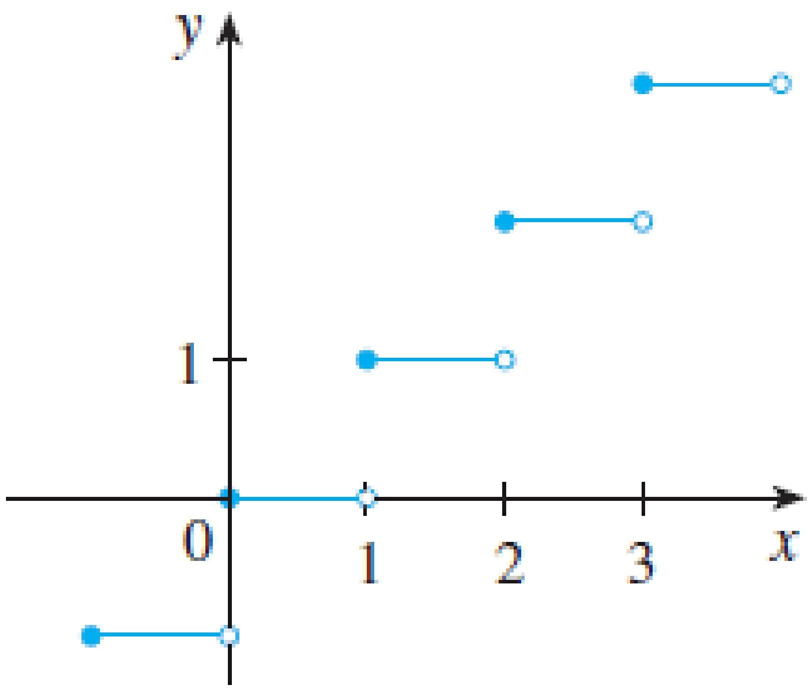
$\boxed{3}$ **Definição** Uma função f é **contínua em um intervalo** se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado da extremidade do intervalo, entendemos *continuidade* na extremidade como *continuidade à direita* ou *à esquerda*.)

EXEMPLO 3

Em cada inteiro n, a função $f(x) = [\![x]\!]$ [veja a Figura 3(d)] é contínua à direita, mas descontínua à esquerda, pois

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

mas $$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$



EXEMPLO 4

Mostre que a função $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

Se $-1 < a < 1$, então, usando as Propriedades dos Limites, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)$$

$$= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{(pelas Propriedades 2 e 7)}$$

$$= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} \qquad \text{(pela Propriedade 11)}$$

$$= 1 - \sqrt{1 - a^2} \quad = f(a) \qquad \text{(pelas Propriedades 2, 7 e 9)}$$

Assim, pela Definição 1, f é contínua em a se $-1 < a < 1$.

Cálculos análogos mostram que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

logo, f é contínua à direita em -1 e contínua à esquerda em 1.

Consequentemente, de acordo com a Definição 3, f é contínua em $[-1, 1]$.

O gráfico de f está esboçado na Figura 4. É a metade inferior do círculo

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

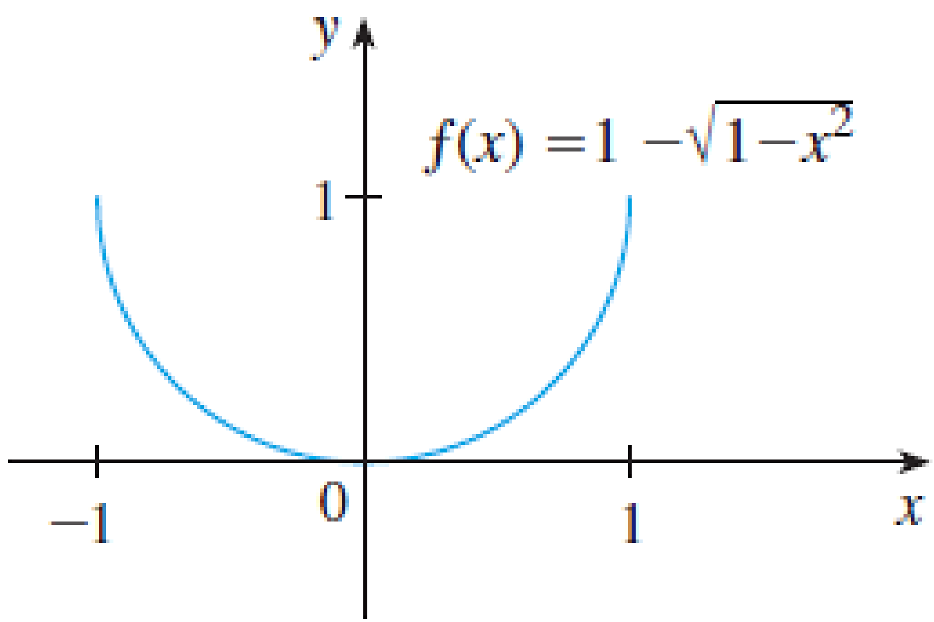


FIGURA 4

Propriedades das Funções Contínuas

Ao invés de sempre usar as Definições 1, 2 e 3 para verificar a continuidade de uma função como no Exemplo 4, muitas vezes é conveniente usar o próximo teorema, que mostra como construir as funções contínuas complicadas a partir de simples.

$\boxed{4}$ **Teorema** Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. cf
4. fg
5. $\dfrac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$

Segue do Teorema 4 e da Definição 3 que se f e g forem contínuas em um intervalo, então $f + g, f - g, cf, fg$ e (se g nunca for 0) f/g também o são.

O seguinte teorema foi enunciado como a Propriedade da Substituição Direta.

5 Teorema

(a) Qualquer polinômio é contínuo em toda a parte; ou seja, é contínuo em $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

(b) Qualquer função racional é contínua sempre que estiver definida; ou seja, é contínua em seu domínio.

O conhecimento de quais funções são contínuas nos permite calcular muito rapidamente alguns limites, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 5

Encontre $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

A função

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} \qquad \text{é racional;}$$

assim, pelo Teorema 5, é contínua em seu domínio, que é $\left\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\right\}$.

Logo

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

Resulta que as funções familiares são contínuas em todos os números de seus domínios.

Por exemplo, a Propriedade dos Limites é exatamente a afirmação que as funções raízes são contínuas.

Pela forma dos gráficos das funções seno e cosseno iríamos certamente conjecturar que elas são contínuas.

Sabemos das definições de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$, que as coordenadas do ponto P na Figura 5 são $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

À medida que $\theta \to 0$, vemos que P tende ao ponto $(1, 0)$ e, portanto, $\cos\theta \to 1$ e $\operatorname{sen}\theta \to 0$. Assim,

$$\boxed{6} \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}\theta = 0$$

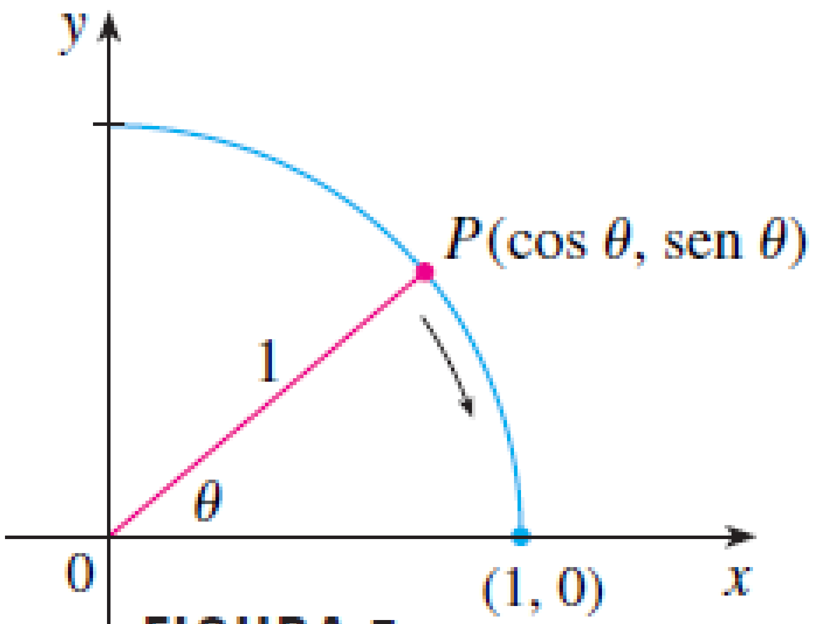


FIGURA 5

Uma vez que e , as equações em [6] asseguram que as funções seno e cosseno são contínuas em 0. As fórmulas de adição para seno e cosseno podem, então, ser usadas para deduzir que essas funções são contínuas em toda a parte.

Segue da parte 5 do Teorema 4 que

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

é contínua, exceto onde $\cos x = 0$.

Isso acontece quando x é um múltiplo inteiro ímpar de $\pi/2$, portanto $y = \operatorname{tg} x$ tem descontinuidades infinitas quando $x = \pm\pi/2\,, \pm 3\pi/2\,, \pm 5\pi/2$, e assim por diante (veja a Figura 6)

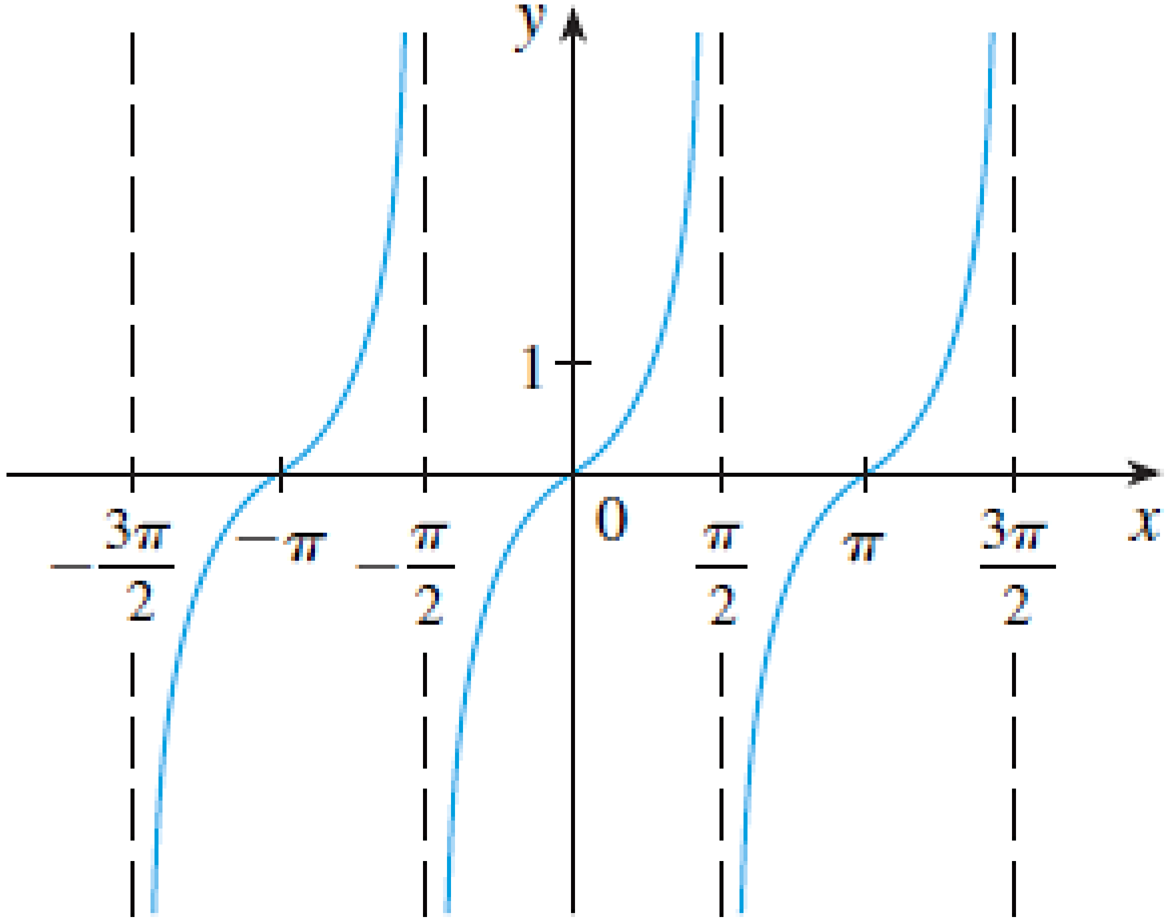


FIGURA 6 $y = \operatorname{tg} x$

A função inversa de qualquer função contínua é também contínua.

(geometricamente: o gráfico de f^{-1} é obtido refletindo o gráfico de f em torno da reta $y = x$. Então, se o gráfico de f não possui quebras, o gráfico de f^{-1} tampouco possui.)

Assim, as funções trigonométricas inversas são contínuas.

Definimos a função exponencial $y = a^x$ de forma a preencher os buracos no gráfico de $y = a^x$, onde x é racional.

Em outras palavras, a própria definição de $y = a^x$ torna-a uma função contínua em $\mathbb{R}$. Portanto, sua função inversa $y = \log_a x$ é contínua em $(0, \infty)$.

$\boxed{7}$ **Teorema** Os seguintes tipos de funções são contínuas para todo o número de seus domínios:

polinômios	funções racionais	funções raízes
funções trigonométricas	funções trigonométricas inversas	
funções exponenciais	funções logarítmicas	

Outra forma de combinar as funções contínuas f e g para obter novas funções contínuas é formar a função composta $f \circ g$. Esse fato é uma consequência do seguinte teorema.

$\boxed{8}$ **Teorema** Seja f contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. Em outras palavras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

Intuitivamente, o Teorema 8 é razoável, pois se x está próximo de a, então $g(x)$ está próximo de b, e como f é contínua em b, se $g(x)$ está próxima de b, então $f(g(x))$ está próxima de $f(b)$.

$\boxed{9}$ **Teorema** Se g for contínua em a e f for contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

Esse teorema é, com frequência, expresso informalmente dizendo que "uma função contínua de uma função contínua é uma função contínua".

EXEMPLO 8

Calcule $\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$.

Uma vez que arcsen é uma função contínua, podemos aplicar o Teorema 8:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

EXEMPLO 9

Onde as seguintes funções são contínuas?

(a) $h(x) = \text{sen}(x^2)$

(b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

(a) Temos $h(x) = f(g(x))$, onde

$$g(x) = x^2 \qquad \text{e} \qquad f(x) = \text{sen}\, x$$

Agora, g é contínua em $\mathbb{R}$, pois é um polinômio, e f também é contínua em toda parte.

(b) Sabemos do Teorema 7 que $f(x) = \ln x$ é contínua e $g(x) = 1 + \cos x$ é contínua (pois ambas, $y = 1$ e $y = \cos x$, são contínuas).

Portanto, pelo Teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ é contínua sempre que estiver definida.

Agora, $\ln(1 + \cos x)$ está definida quando $1 + \cos x > 0$.

Dessa forma, não está definida quando $\cos x = -1$, e isso acontece quando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$

Logo, F tem descontinuidades quando x é um múltiplo ímpar de π e é contínua nos intervalos entre esses valores (veja a Figura 7).

O Teorema do Valor Intermediário

Uma propriedade importante das funções contínuas está expressa pelo teorema a seguir, cuja demonstração é encontrada em textos mais avançados de cálculo.

$\boxed{10}$ **Teorema do Valor Intermediário** Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, em que $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.

O Teorema do Valor Intermediário afirma que uma função contínua assume todos os valores intermediários entre os valores da função $f(a)$ e $f(b)$.

Isso está ilustrado na Figura 8.

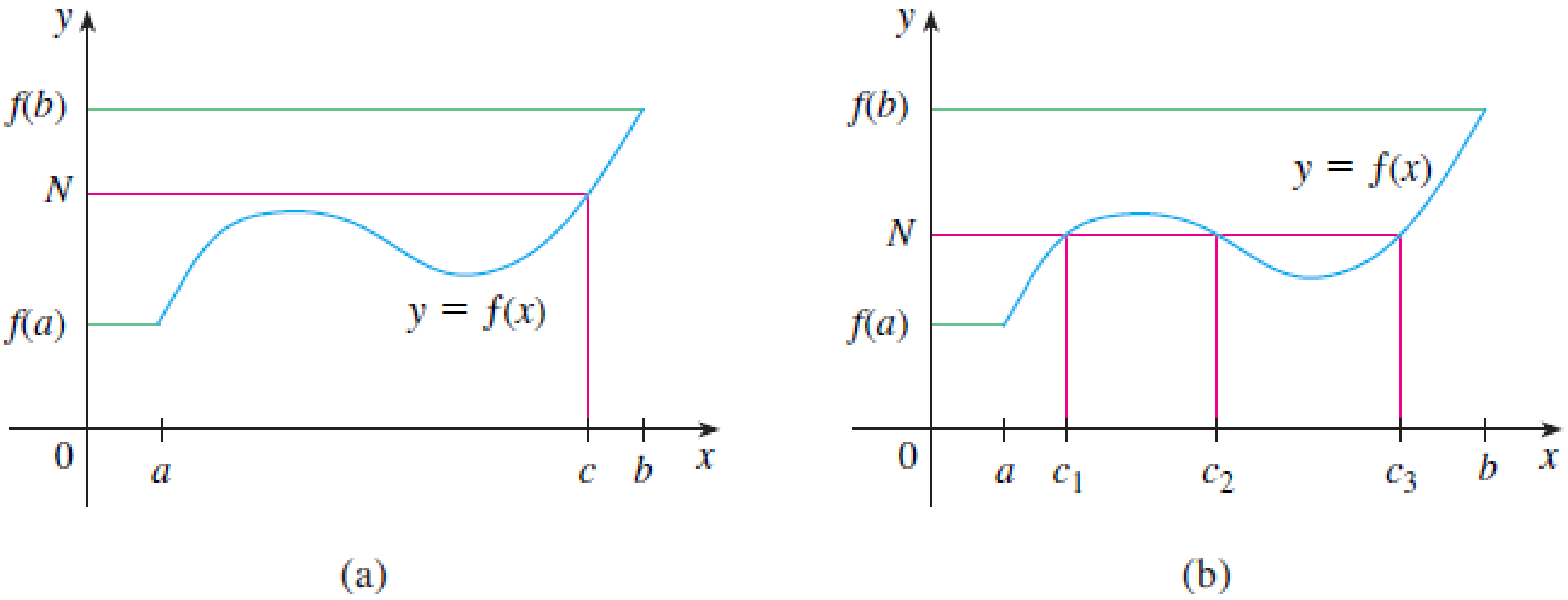


FIGURA 8

Observe que o valor N pode ser assumido uma vez [como na parte (a)] ou mais [como na parte (b)].

Se pensarmos em uma função contínua como aquela cujo gráfico não tem nem saltos nem quebras, então é fácil acreditar que o Teorema do Valor Intermediário é verdadeiro.

Em termos geométricos, ele afirma que, se for dada uma reta horizontal qualquer $y = N$ entre $y = f(a)$ e $y = f(b)$, como na Figura 9, então o gráfico de f não poderá saltar a reta. Ele precisará interceptar $y = N$ em algum ponto.

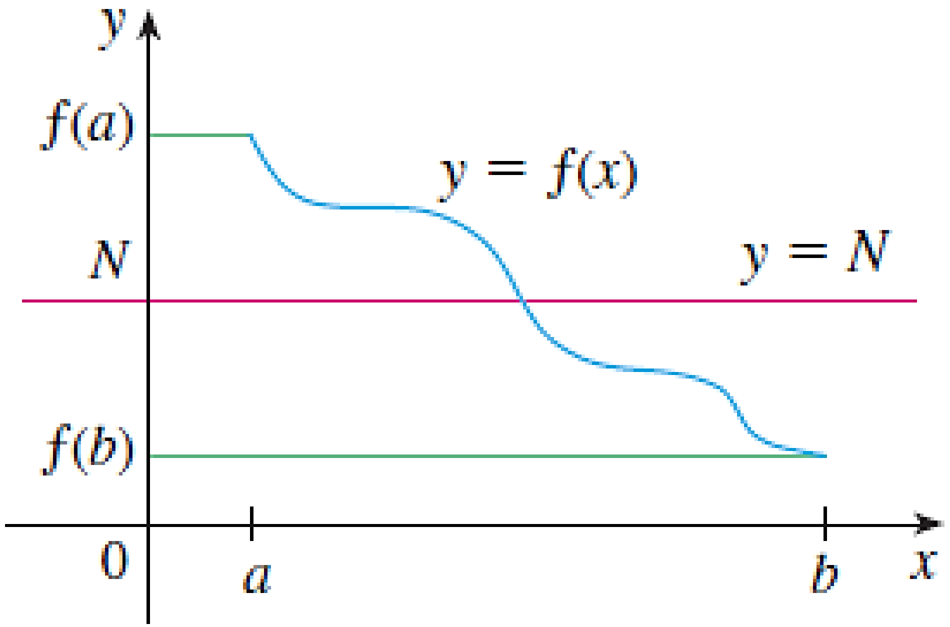


FIGURA 9

É importante que a função f do Teorema 10 seja contínua. O Teorema do Valor Intermediário não é verdadeiro em geral para as funções descontínuas.

Uma das aplicações do Teorema do Valor Intermediário é a localização das raízes de equações, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 10

Mostre que existe uma raiz da equação $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ entre 1 e 2.

Seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$.

Estamos procurando por uma solução da equação dada, isto é, um número c entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$.

Portanto, tomamos $a = 1$, $b = 2$ e $n = 0$ no Teorema 10. Temos

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Logo, $f(1) < 0 < f(2)$, isto é, $N = 0$ é um número entre $f(1)$ e $f(2)$.

A função f é contínua, por ser um polinômio, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número c entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$.

Em outras palavras, a equação $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tem pelo menos uma raiz c no intervalo $(1, 2)$.

De fato, podemos localizar mais precisamente a raiz usando novamente o Teorema do Valor Intermediário.

Uma vez que

$$f(1,2) = -0{,}128 < 0 \quad \text{e} \quad f(1,3) = 0{,}548 > 0$$

uma raiz deve estar entre 1,2 e 1,3.

Uma calculadora fornece, por meio de tentativa e erro,

$$f(1{,}22) = -0{,}007008 < 0 \quad \text{e} \quad f(1{,}3) = 0{,}548 > 0$$

assim, uma raiz está no intervalo $(1{,}22; 1{,}23)$.

Limites no Infinito

Nas aulas anteriores, estudamos os limites infinitos e as assíntotas verticais. Lá tomávamos x tendendo a um número e, como resultado, os valores de y ficavam arbitrariamente grandes (positivos ou negativos).

Agora vamos tornar x arbitrariamente grande (positivo ou negativo) e ver o que acontece com y.

Vamos começar pela análise do comportamento da função f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

quando x aumenta.

A tabela ao lado fornece os valores dessa função, com precisão de seis casas decimais, e o gráfico de f feito por um computador está na Figura 1.

Observe-se que, quanto maiores os valores de x, mais próximos de 1 se tronam os valores de $f(x)$.

x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0,600000
±3	0,800000
±4	0,882353
±5	0,923077
±10	0,980198
±50	0,999200
±100	0,999800
±1000	0,999998

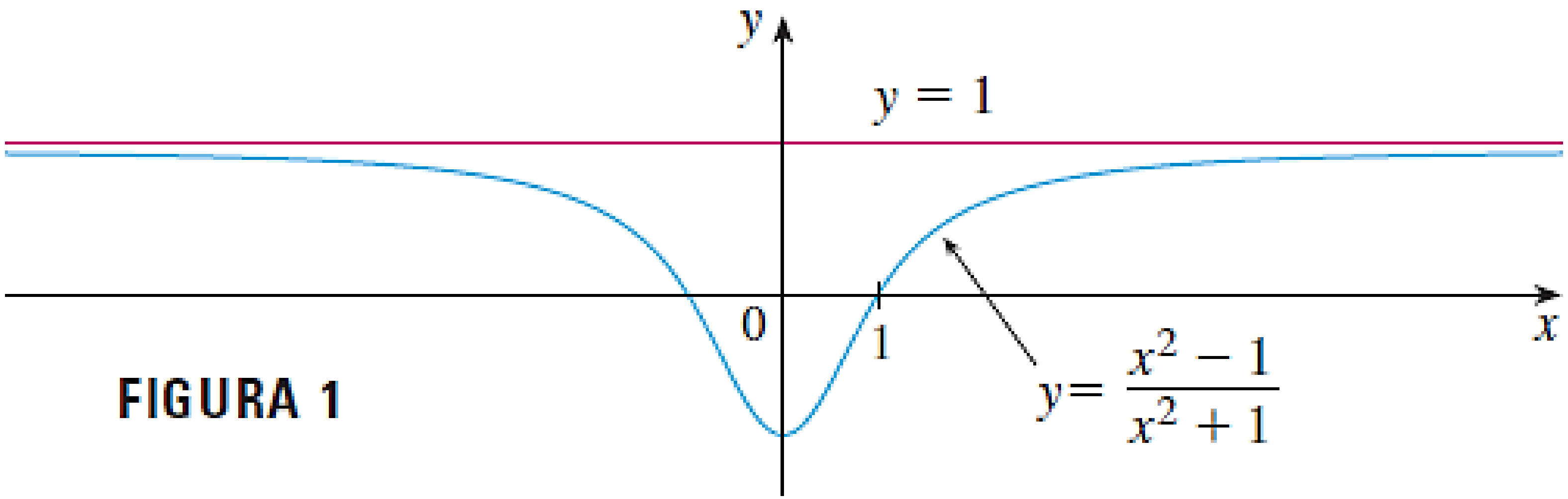


FIGURA 1

De fato, temos a impressão de que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 1 quanto quisermos se tornarmos um x suficientemente grande. Essa situação é expressa simbolicamente escrevendo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Com relação ainda à Figura 1, vemos que para os valores negativos de x com grande valor absoluto, os valores de $f(x)$ estão próximos de 1.

Fazendo x decrescer ilimitadamente para valores negativos, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 1 quanto quisermos. Isso é expresso escrevendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de L à medida que x fica maior.

$\boxed{1}$ **Definição** Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grande.

As ilustrações geométricas da Definição 1 estão na Figura 2.

Observe que existem muitas formas de o gráfico de f aproximar-se da reta $y = L$ (chamada assíntota horizontal) quando olhamos para a extremidade direita de cada gráfico.

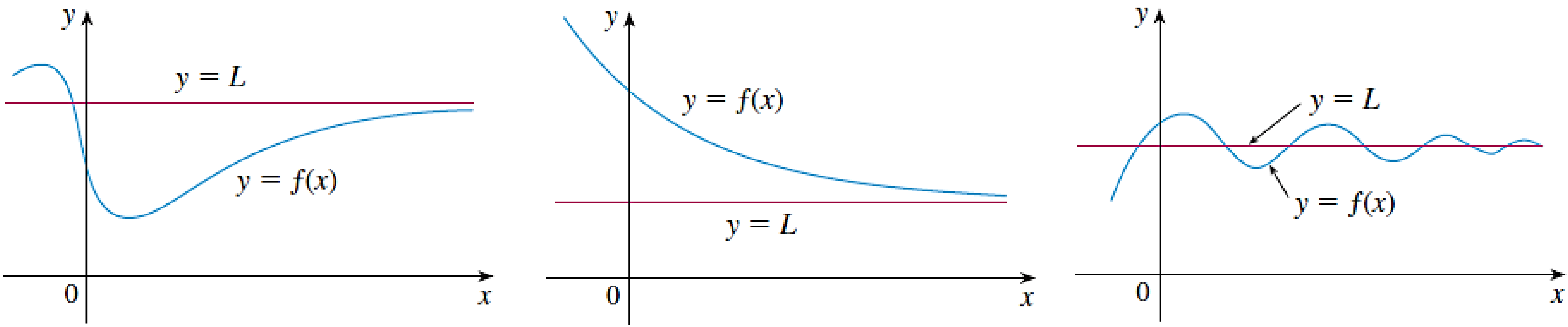


FIGURA 2 Exemplos ilustrando $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

$\boxed{2}$ **Definição** Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L, tomando-se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.

A Definição 2 está ilustrada na Figura 3. Observe que o gráfico aproxima-se da reta $y = L$ quando olhamos para a extremidade esquerda de cada gráfico.

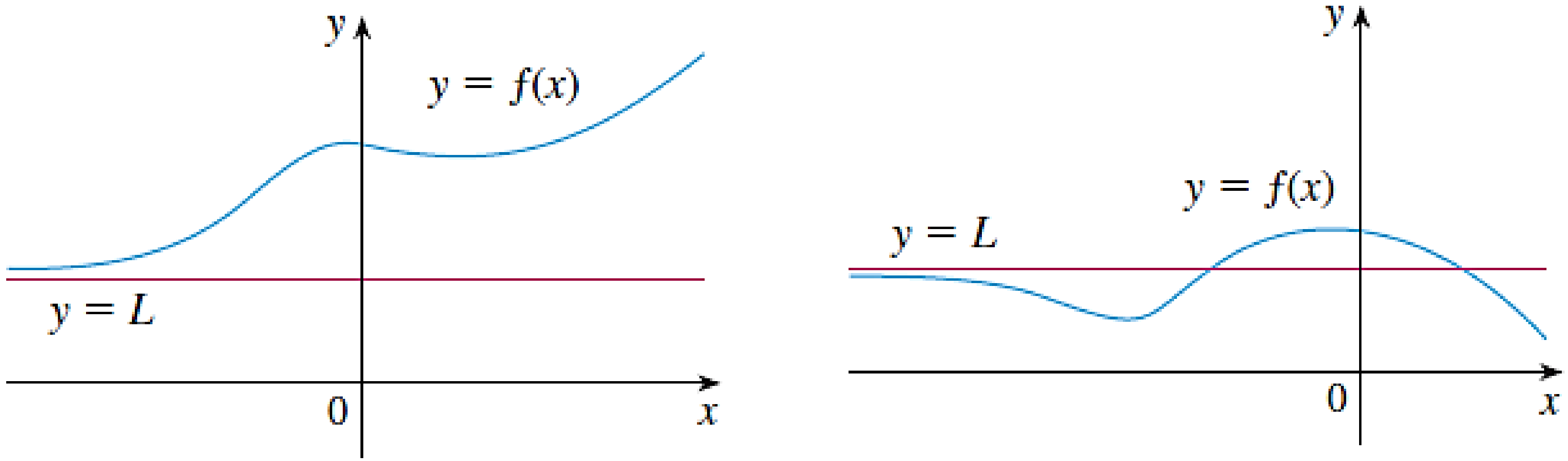


FIGURA 3
Exemplos ilustrando $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

$\boxed{3}$ **Definição** A reta $y = L$ é chamada **assíntota horizontal** da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Por exemplo, a curva ilustrada na Figura 1 tem a reta $y = 1$ como uma assíntota horizontal, pois

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

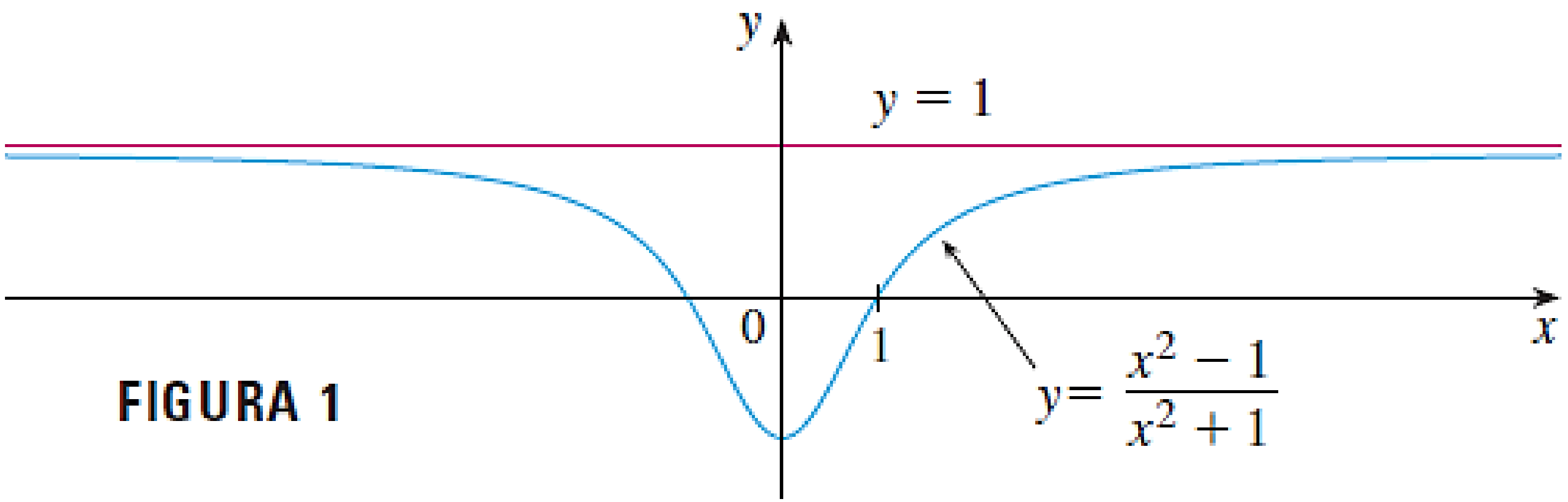


FIGURA 1

Um exemplo de curva com duas assíntotas horizontais é $y = \text{tg}^{-1} x$. (veja a Figura 4). Na verdade,

$$\boxed{4} \qquad \lim_{x \to -\infty} \text{tg}^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \text{tg}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

logo, ambas as retas $y = -\pi/2$ e $y = \pi/2$ são assíntotas horizontais. (Isso segue do fato de que as retas $x = \pm\pi/2$ são assíntotas verticais do gráfico da função tangente.)

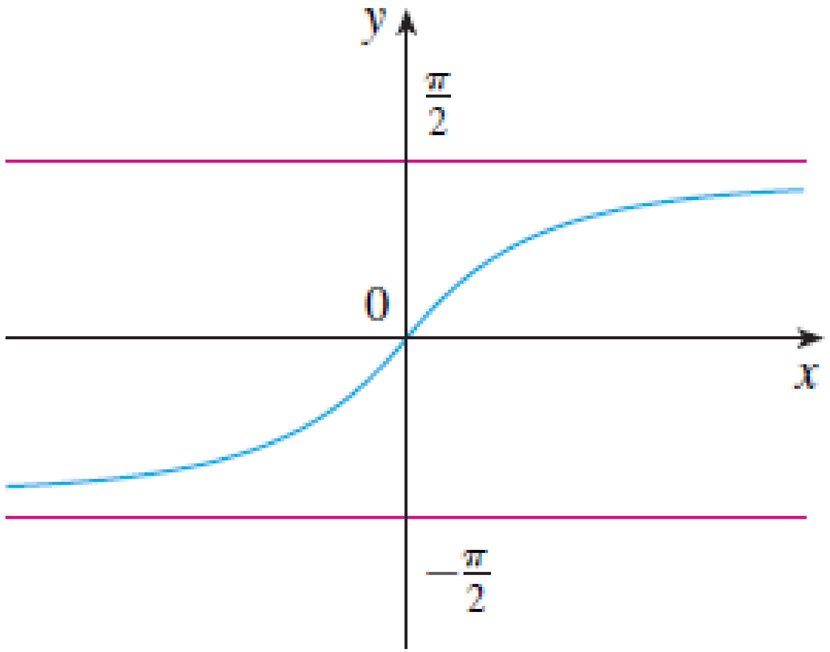


FIGURA 4
$y = \text{tg}^{-1} x$

EXEMPLO 1

Encontre os limites infinitos, limites no infinito e assíntotas para a função f cujo gráfico está na Figura 5.

Vemos que os valores de $f(x)$ ficam grandes por ambos os lados quando $x \to -1$, então

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

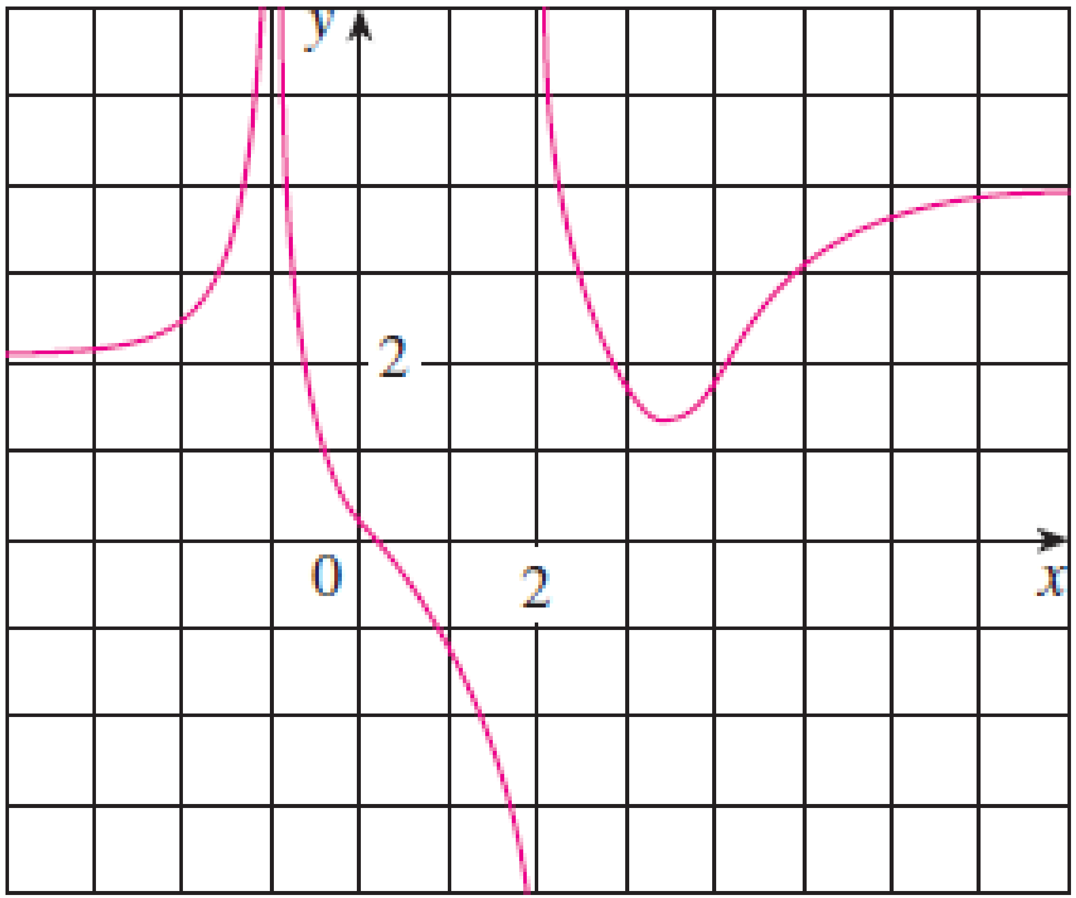


FIGURA 5

Observe que $f(x)$ se torna grande em valor absoluto (porém negativo) quando x tende a 2 à esquerda; porém torna-se grande e positivo quando x tende a 2 à direita. Logo,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$$

Assim, ambas as retas $x = -1$ e $x = 2$ são assíntotas verticais.

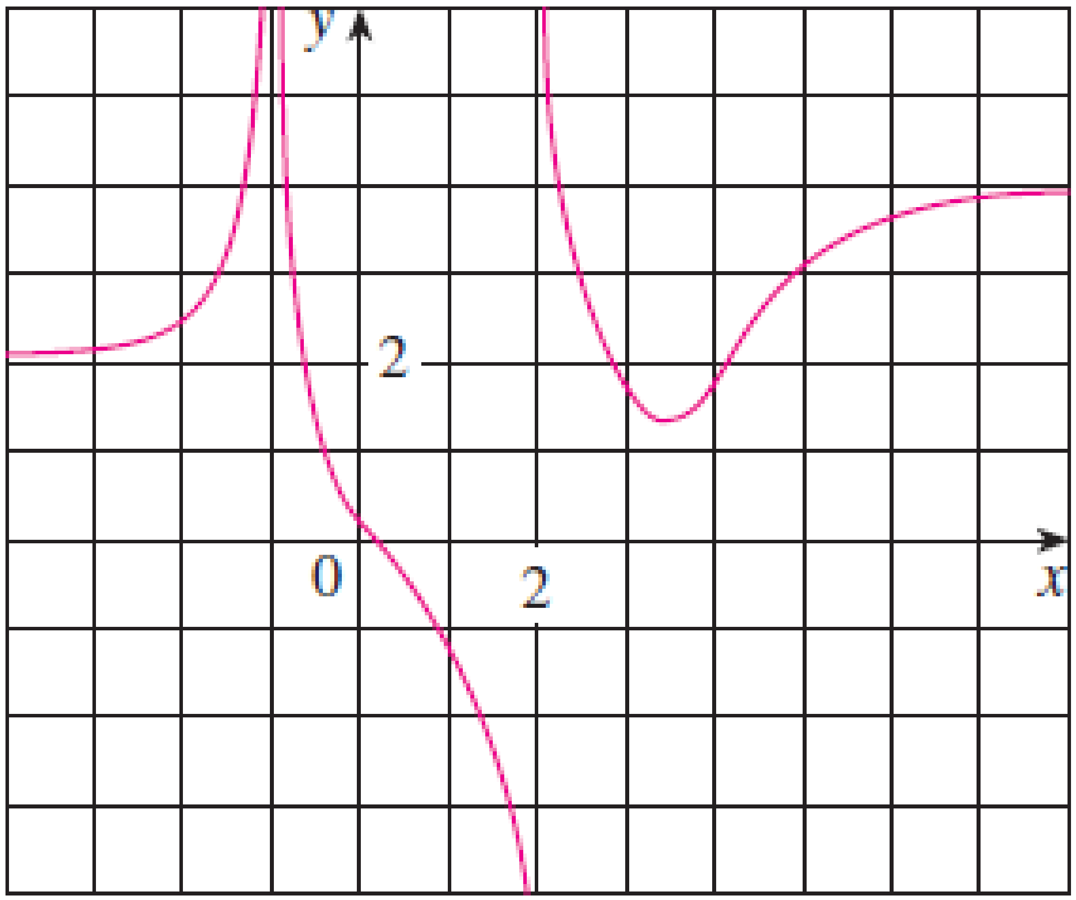


FIGURA 5

Quando x se torna grande, vemos que $f(x)$ tende a 4. Mas quando x decresce para valores negativos, $f(x)$ tende a 2. Logo,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Isso significa que $y = 4$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais.

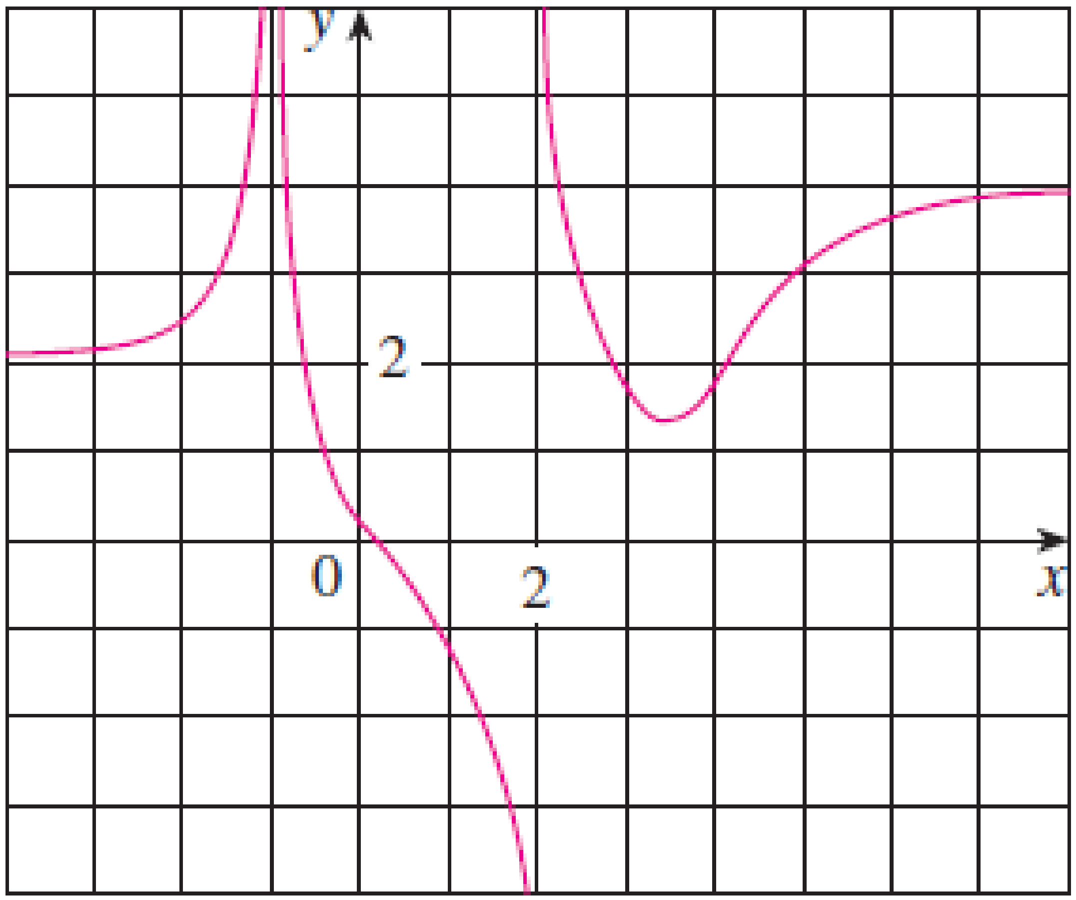


FIGURA 5

EXEMPLO 2

Encontre $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$.

Observe que quando x é grande, $1/x$ é pequeno.

Por exemplo,

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000001$$

De fato, tomando x grande o bastante, podemos fazer $1/x$ tão próximo de 0 quanto quisermos.

Portanto, conforme a Definição 1, temos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Um raciocínio análogo mostra que, quando x é grande em valor absoluto (porém negativo), $1/x$ é pequeno em valor absoluto (mas negativo); logo, temos também

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Segue que a reta $y = 0$ (o eixo x) é uma assíntota horizontal da curva $y = 1/x$. (Esta é uma hipérbole equilátera; veja a Figura 6.)

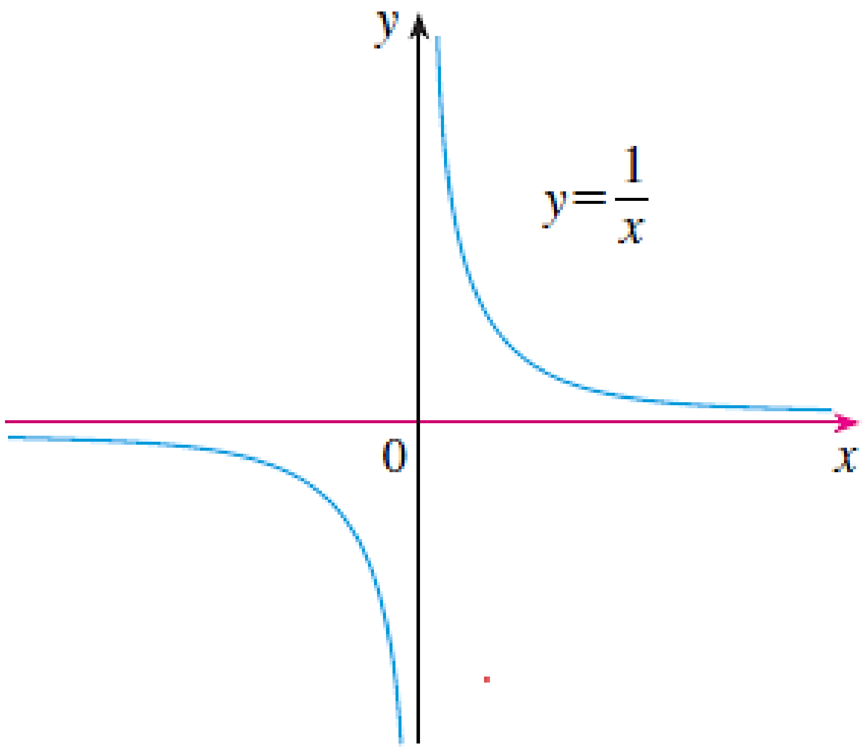


FIGURA 6

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Calculando Limites no Infinito

A maioria das Propriedades dos Limites que foram estudadas também são válidas para os limites no infinito. Em particular, temos a seguinte regra importante no cálculo de limites.

$\boxed{5}$ **Teorema** Se $r > 0$ for um número racional, então

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Se $r > 0$ for um número racional tal que x^r seja definida para todo x, então

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

EXEMPLO 3

Calcule

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

e indique quais propriedades de limites foram usadas em cada etapa.

Quando x cresce, o numerador e o denominador também crescem, logo, não fica óbvio o que ocorre com a razão entre eles.

Para eliminar essa indeterminação, precisaremos antes manipular algebricamente a expressão.

Para calcular o limite no infinito de uma função racional, primeiro dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador. (Podemos assumir que $x \neq 0$, uma vez que estamos interessados apenas em valores grandes de x.)

Nesse caso a maior potência de no denominador é x^2; logo, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$ (pela Propriedade dos Limites 5)

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} - 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 5 + 4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}$$ (pelas Propriedades 1, 2 e 3)

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}$$ (pela Propriedade 7 e pelo Teorema 5)

Um cálculo análogo mostra que o limite quando $x \to -\infty$ também é $\frac{3}{5}$.

A Figura 7 ilustra o resultado destes cálculos mostrando como o gráfico da função racional dada aproxima-se da assíntota horizontal $y = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

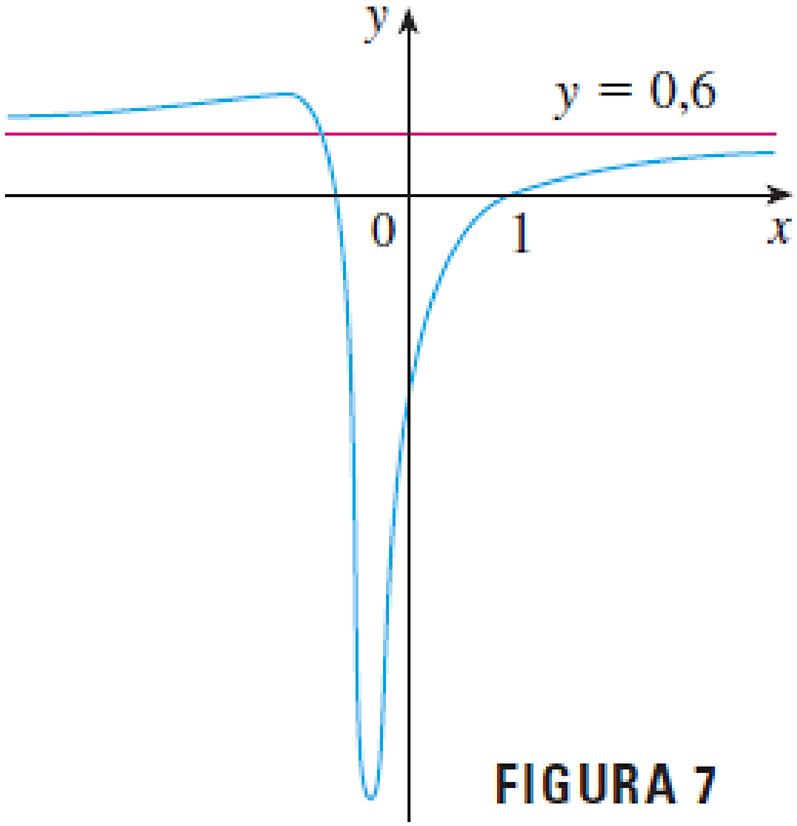


FIGURA 7

Limites Infinitos no Infinito

A notação

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

é usada para indicar que os valores de $f(x)$ tornam-se grandes quanto x se torna grande.

Significados análogos são dados aos seguintes símbolos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

EXEMPLO 9

Encontre $\lim_{x \to \infty} x^3$ e $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

Quando x torna-se grande, x^3 também fica grande. Por exemplo,

$$10^3 = 1.000 \qquad 100^3 = 1.000.000 \qquad 1000^3 = 1.000.000.000$$

Na realidade, podemos fazer x^3 ficar tão grande quanto quisermos tomando x grande o suficiente. Portanto, podemos escrever

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

Analogamente, quando x é muito grande em módulo, porém negativo, x^3 também o é. Assim,

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Essas afirmações sobre limites também podem ser vistas no gráfico de $y = x^3$ da Figura 11.

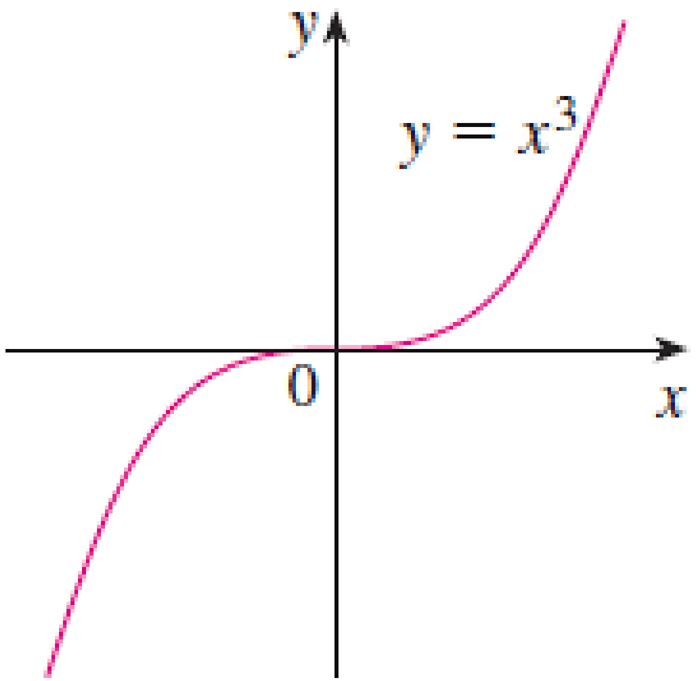


FIGURA 11

$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

EXEMPLO 10

Encontre $\lim_{x \to \infty} (x^2 - x)$.

Seria errado escrever

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x^2 - \lim_{x \to \infty} x = \infty - \infty$$

As Propriedades dos Limites não podem ser aplicadas para os limites infinitos, pois ∞ não é um número (não podemos definir $\infty - \infty$).

Contudo, podemos escrever

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x(x - 1) = \infty$$

porque, como x e $x - 1$ tornam-se arbitrariamente grandes, o mesmo acontece com seu produto.

Exercícios

Seções: 2.2 – O Limite de uma Função

2.3 – Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais