Séries de Potências

Uma **série de potências** é uma série da forma

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas **coeficientes** da série.

Em geral, a série da forma

$$\boxed{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

é chamada uma **série de potências em** $(x - a)$ ou uma **série de potências centrada em** $\boldsymbol{a}$ ou uma **série de potências em torno de** $\boldsymbol{a}$. Observe que, ao escrevermos o termo correspondente

EXEMPLO 1 Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ é convergente?

EXEMPLO 2 Para quais valores de x a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge?

EXEMPLO 3 Encontre o domínio da função de Bessel de ordem 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

3 **Teorema** Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.
(ii) A série converge para todo x.
(iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.

EXEMPLO 4 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

EXEMPLO 5 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

Representação de funções como Séries de Potências

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1}$$

EXEMPLO 1 Expresse $1/(1 + x^2)$ como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

EXEMPLO 2 Encontre uma representação em série de potências para $1/(x + 2)$.

EXEMPLO 3 Encontre uma representação em série de potências para $x^3/(x + 2)$.

Derivação e Integração de Séries de Potências

$\boxed{2}$ **Teorema** Se a série de potências $\sum c_n(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

$$\text{(i)} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$\text{(ii)} \quad \int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Os raios de convergência das séries de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R.

EXEMPLO 4 No Exemplo 3 da Seção 11.8, vimos que a função de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

EXEMPLO 5 Expresse $1/(1-x)^2$ como uma série de potências pela derivação da Equação 1. Qual é o raio de convergência?

EXEMPLO 6 Encontre uma representação em série de potências para $\ln(1+x)$ e seu raio de convergência.

EXEMPLO 7 Encontre uma representação em série de potências para $f(x) = \mathrm{tg}^{-1}x$.

EXEMPLO 8
(a) Calcule $\int [1/(1+x^7)]\,dx$ como uma série de potências.
(b) Use a parte (a) para aproximar $\int_0^{0,5} [1/(1+x^7)]\,dx$ com precisão de 10^{-7}.

Séries de Taylor e Maclaurin

Começaremos supondo que f seja qualquer função que possa ser representada por uma série de potências:

1 $$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

5 **Teorema** Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

6 $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

7 $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

EXEMPLO 1 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

8 Teorema Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a e

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - a| < R$.

9 **Desigualdade de Taylor** Se $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \qquad \text{para } |x-a| \leqslant d$$

Ao aplicar os Teoremas 8 e 9, muitas vezes é útil usar o fato a seguir.

10

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

Isso é verdade porque sabemos do Exemplo 1 que a série $\Sigma\, x^n/n!$ converge para todo x, e seu n-ésimo termo tende a 0.

EXEMPLO 2 Demonstre que e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para todo } x$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

EXEMPLO 3 Encontre a série de Taylor de $f(x) = e^x$ em $a = 2$.

EXEMPLO 4 Encontre a série de Maclaurin de sen x e demonstre que ela representa sen x para todo x.

EXEMPLO 5 Encontre a série de Maclaurin para cos x.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{para todo } x$$

EXEMPLO 11

(a) Calcule $\int e^{-x^2}\,dx$ como uma série infinita.

(b) Calcule $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ com precisão de 0,001.

EXEMPLO 12 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Multiplicação e Divisão de Séries de Potências

EXEMPLO 13 Encontre os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin de (a) $e^x \operatorname{sen} x$ e (b) $\operatorname{tg} x$.

EXEMPLO 6 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = x \cos x$.