Sequências

Pode-se pensar numa **sequência** como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Equivalentemente, a toda função com domínio $\mathbb{N}$ podemos associar uma sequência pela lei $a_n = f(n)$. Deste modo, a definição de sequência pode ser formalizada por meio de função.

NOTAÇÃO A sequência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é também indicada por

$$\{a_n\} \qquad \text{ou} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Exemplos

1) Naturais

2) Pares

3) Impares

4) Quadrados Perfeitos

5) Triangulares

7) Primos

8) Finitas

9) Infinitas

10) Crescentes

11) Decrescentes

12) Monótonas

13) Alternadas

14) PA

15) PG

6) Fibonacci

Tempo	Casais Adultos	Casais Não Adultos	Total de Casais
	1	0	1
1º mês	1	1_0	2
2º mês	1	$1_1 + 1_0 = 2$	3
3º mês	2	$1_1 + 2_0 = 3$	5
4º mês	3	$2_1 + 3_0 = 5$	8
5º mês	5	$3_1 + 5_0 = 8$	13
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12º mês	144	233	377

Termo Geral

EXEMPLO 1 Algumas sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o n-ésimo termo. Nos exemplos seguintes, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência. Observe que não é necessário começar em 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\qquad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

EXEMPLO 2 Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3.125}, \ldots\right\}$$

supondo que o padrão dos primeiros termos continue.

1 **Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se pudermos tornar os termos a_n tão próximos de L quanto quisermos ao fazer n suficientemente grande. Se $\lim_{n \to \infty} a_n$ existir, dizemos que a sequência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge** (ou é **divergente**).

2 **Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se, para cada $\varepsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

3 **Teorema** Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n \to \infty} a_n = L$.

5 **Definição** $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad a_n > M$$

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{se } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

Se $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n \geqslant n_0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

6 **Teorema** Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXEMPLO 4 Encontre $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

EXEMPLO 5 A sequência $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{10+n}}$ é convergente ou divergente?

EXEMPLO 6 Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

EXEMPLO 7 Determine se a sequência $a_n = (-1)^n$ é convergente ou divergente.

EXEMPLO 8 Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ se ele existir.

7 Teorema Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e se a função f for contínua em L, então

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n)$.

EXEMPLO 10 Discuta a convergência da sequência $a_n = n!/n^n$, onde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

9 A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leqslant 1$ e divergente para todos os outros valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

10 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ é chamada **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamado **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$. Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

EXEMPLO 12 A sequência $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ é decrescente porque

EXEMPLO 13 Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ é decrescente.

11 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Se ela for limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.

12 Teorema da Sequência Monótona Toda sequência monótona limitada é convergente.

Séries

Em geral, se tentarmos somar os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obteremos uma expressão da forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

que é denominada uma **série infinita** (ou apenas **série**) e é denotada, por simplicidade, pelo símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum a_n$$

2 Definição Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número real, então a série $\sum a_n$ é chamada **convergente**, e escrevemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

O número s é chamado a **soma** da série. Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada **divergente**.

EXEMPLO 1 Suponhamos que se saiba que a soma dos primeiros n termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2n}{3n + 5}$$

EXEMPLO 2 Um exemplo importante de uma série infinita é a **série geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

4 A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r} \qquad |r| < 1$$

Se $|r| \geqslant 1$, a série geométrica é divergente.

EXEMPLO 3 Encontre a soma da série geométrica

$$5 - \tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{9} - \tfrac{40}{27} + \cdots$$

EXEMPLO 4 A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ é convergente ou divergente?

EXEMPLO 5 Escreva o número $2{,}3\overline{17} = 2{,}3171717\ldots$ como uma razão de inteiros.

EXEMPLO 6 Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ onde $|x| < 1$.

EXEMPLO 7 Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e calcule sua soma.

EXEMPLO 8 Mostre que a **série harmônica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

é divergente.

6 **Teorema** Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

7 **Teste de Divergência** Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

EXEMPLO 9 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$ diverge.

8 **Teorema** Se $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ forem séries convergentes, então também o serão as séries $\Sigma\, ca_n$ (onde c é uma constante), $\Sigma\,(a_n + b_n)$ e $\Sigma\,(a_n - b_n)$ e

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

1) Da primeira propriedade observe que também podemos concluir que, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for divergente e c um número real não nulo, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ também será divergente.

2) Já a segunda propriedade não nos permite concluir nada quando à convergência de $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ quando as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ forem divergentes. E, realmente, neste caso aquela série tanto pode ser convergente quanto divergente.

De fato,

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ é divergente.

também é divergente a serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1).$$

No entanto, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

é convergente. Por outro lado, é divergente a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2.$$

EXEMPLO 10 Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

é convergente

Teste da Integral

O Teste da Integral Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for convergente. Em outras palavras:

(i) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for convergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for divergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

EXEMPLO 1 Teste a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ quanto à convergência ou divergência.

EXEMPLO 2 Para que valores de p a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente?

1 A série p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

EXEMPLO 3

(a) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

EXEMPLO 4 Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge.

2 Estimativa do Resto Para o Teste da Integral Suponha que $f(k) = a_k$, onde f é uma função contínua, positiva, decrescente para $x \geqslant n$ e $\Sigma\, a_n$ é convergente. Se $R_n = s - s_n$, então

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

EXEMPLO 5

(a) Aproxime a soma da série $\Sigma\, 1/n^3$ usando a soma dos 10 primeiros termos. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

(b) Quantos termos são necessários para garantir que a soma tenha precisão de 0,0005?

$\boxed{3}$

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

EXEMPLO 6 Use $\boxed{3}$ com $n = 10$ para estimar a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Teste da Comparação

O Teste de Comparação Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\Sigma\, b_n$ for convergente e $a_n \leqslant b_n$ para todo n, então $\Sigma\, a_n$ também será convergente.

(ii) Se $\Sigma\, b_n$ for divergente e $a_n \geqslant b_n$ para todo n, então $\Sigma\, a_n$ também será divergente.

EXEMPLO 1 Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ converge ou diverge.

EXEMPLO 2 Teste a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ quanto à convergência ou divergência.

EXEMPLO 3 A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 3}$ é divergente.

EXEMPLO 4 A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n + 5}{8n^3 + 5n^2}$ converge.

O Teste de Comparação de Limite Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos. Se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

EXEMPLO 1 Teste a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ quanto à convergência ou divergência.

EXEMPLO 2 Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ converge ou diverge.

EXEMPLO 3 Use a soma dos 100 primeiros termos para aproximar a soma da série $\sum 1/(n^3 + 1)$. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

Séries Alternadas

Teste da Série Alternada Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad b_n > 0$$

satisfaz

$$\text{(i)} \quad b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{para todo } n$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

então a série é convergente.

EXEMPLO 1 A série harmônica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

EXEMPLO 2 A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n - 1}$

EXEMPLO 3 Teste a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 1}$ quanto à convergência ou divergência.

Teorema da Estimativa de Séries Alternadas Se $s = \Sigma\, (-1)^{n-1} b_n$ for a soma de uma série alternada que satisfaz

$$\text{(i)}\ \ b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{e} \qquad \text{(ii)}\ \ \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

então, $|R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$

EXEMPLO 4 Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ com precisão de três casas decimais.

Convergência Absoluta

Dada qualquer série $\sum a_n$, podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original.

$\boxed{1}$ **Definição** Uma série $\sum a_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

EXEMPLO 1 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

EXEMPLO 2 Sabemos que a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

2 **Definição** Uma série $\sum a_n$ é chamada **condicionalmente convergente** se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.

3 **Teorema** Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

EXEMPLO 3 Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

é convergente ou divergente.

Teste da Razão

O Teste da Razão

(i) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, o Teste da Razão é inconclusivo, ou seja, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\sum a_n$.

EXEMPLO 4 Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^3}{3^n}$ quanto à convergência absoluta.

EXEMPLO 5 Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$.

Teste da Raiz

O Teste da Raiz

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o Teste da Raiz não é conclusivo.

EXEMPLO 6 Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

EXEMPLO 7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$

EXEMPLO 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n}$