APLICAÇÕES DA DERIVAÇÃO

Máximos e Mínimos Locais e Absoluto

Teorema do Valor Médio

Teste da primeira derivada

Teste da segunda derivada

Aplicações da Derivação

- Já estudamos algumas das aplicações das derivadas; agora, porém, com o auxílio das regras de derivação, estamos em posição de estudar as aplicações da derivação em maior profundidade.
- Muitos problemas práticos requerem minimizar um custo ou maximizar uma área, ou, de alguma forma, encontrar a melhor saída de uma situação.
- Algumas das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os problemas de otimização, em que devemos encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa.

Valores Máximo e Mínimo

Observe o gráfico:

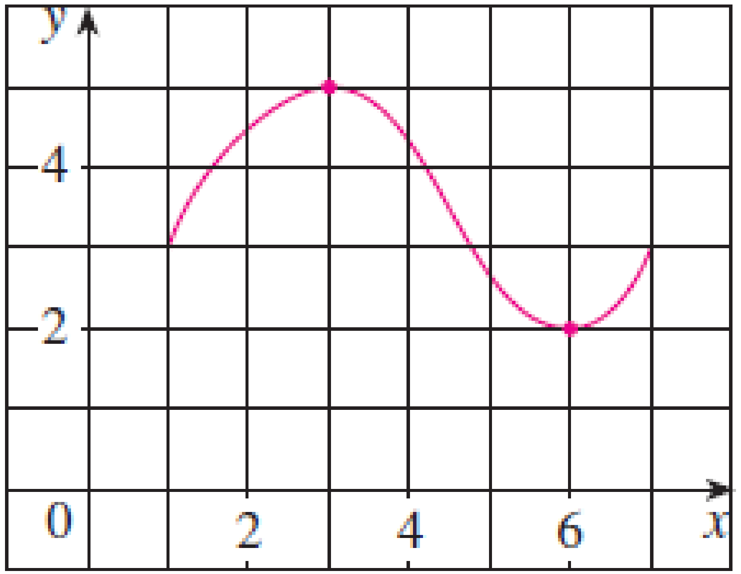


FIGURA 1

Qual é o ponto mais alto no gráfico da função f? E qual é o menor valor que a função assume?

Vemos que o ponto mais alto no gráfico da função f na Figura 1 é o ponto $(3, 5)$.

Em outras palavras, o maior valor de f é $f(3) = 5$.

Da mesma forma, o menor valor é $f(6) = 2$.

Dizemos que $f(3) = 5$ é o máximo absoluto de f e $f(6) = 2$ é o mínimo absoluto.

Definição

Seja c um número no domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o

- valor **máximo absoluto** de f em D se $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x em D.
- valor **mínimo absoluto** de f em D se $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x em D.

Um máximo ou mínimo absoluto às vezes é chamado de máximo ou mínimo **global**. Os valores máximos e mínimos de f são chamados de **valores extremos** de f.

Máximos e Mínimos Locais

A Figura 2 mostra um gráfico de uma função f com máximo absoluto em d e mínimo absoluto em a. Observe que $(d, f(d))$ é o ponto mais alto no gráfico e $(a, f(a))$ é o menor ponto.

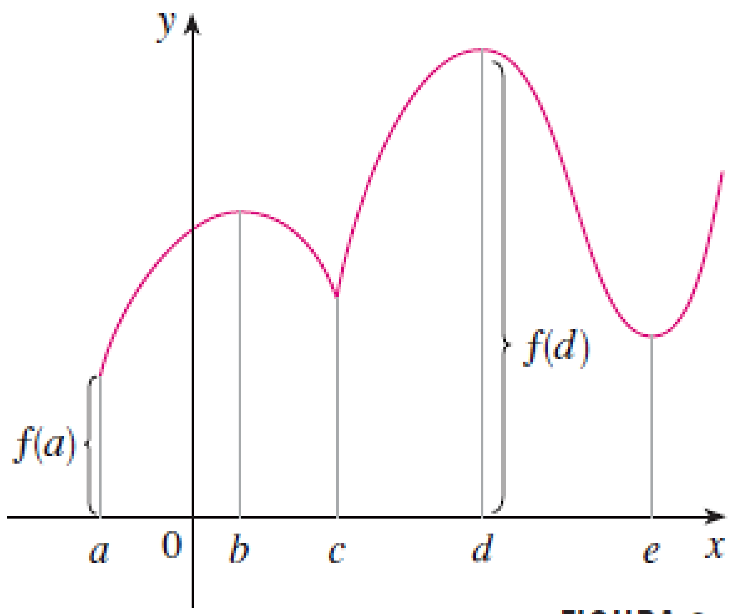


FIGURA 2

Na Figura 2, se considerarmos apenas os valores de x próximos b [por exemplo, se restringirmos nossa atenção ao intervalo (a, c), então $f(b)$ é o maior destes valores de $f(x)$ e é chamado de *valor máximo local* de f.

Da mesma forma, $f(c)$ é chamado de *valor mínimo local* de f, pois $f(c) \leqslant f(x)$ para x próximo de c [no intervalo (b, d), por exemplo]. A função f também tem um mínimo local em e.

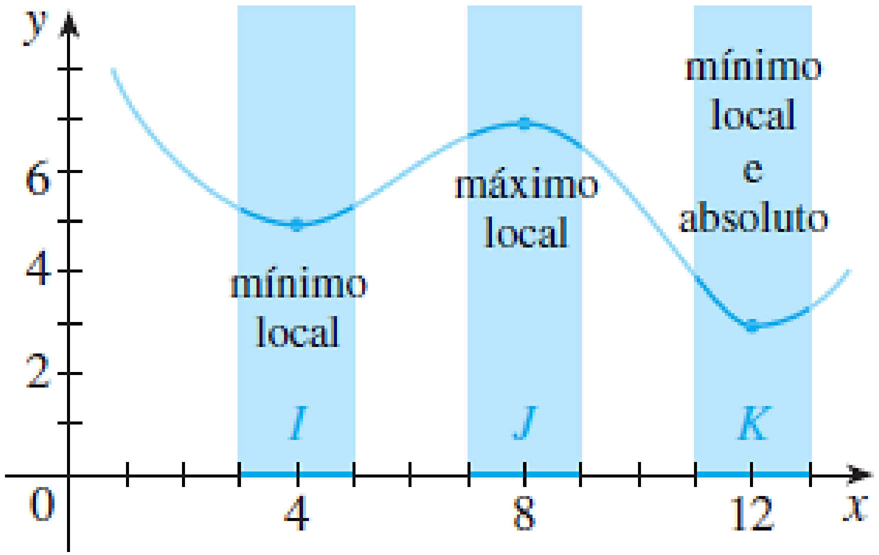
Definição

O número $f(c)$ é um

- **valor máximo local** de f se $f(c) \geqslant f(x)$ quando x está próximo de c.
- **valor mínimo local** de f se $f(c) \leqslant f(x)$ quando x está próximo de c.

Na Definição (e em outras situações), se dissermos que algo é verdadeiro **próximo a** c, queremos dizer que é verdadeiro em algum intervalo aberto contendo c.

Por exemplo, na Figura 3 vemos que $f(4) = 5$ é um valor mínimo local, pois é o menor valor de f no intervalo I.



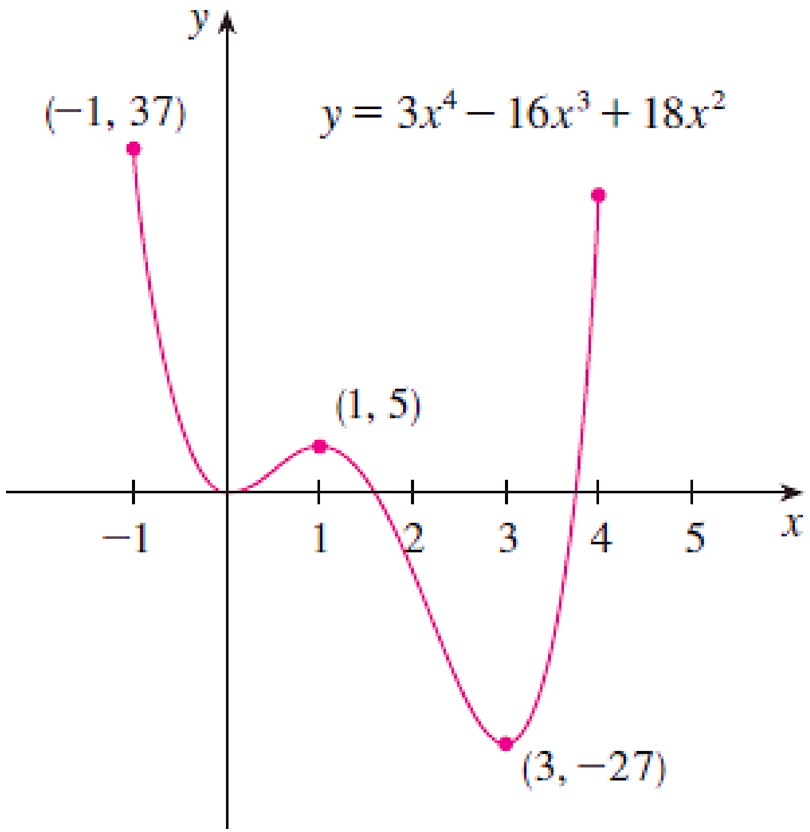
Não é o mínimo absoluto porque $f(x)$ tem valores menores quando x está próximo de 12 (no intervalo K, por exemplo).

Na verdade, $f(12) = 3$ é tanto o mínimo local quanto o mínimo absoluto.

De forma análoga, $f(8) = 7$ é o máximo local, mas não é o máximo absoluto porque f tem valores maiores perto de 1.

Exemplos

1. O gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$ está mostrado na Figura.

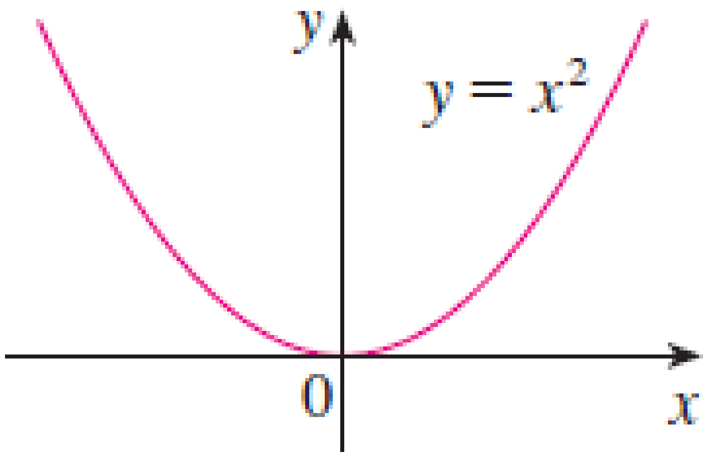


Você pode ver que $f(1) = 5$ é um máximo local, enquanto o máximo absoluto é $f(-1) = 37$. (Este máximo absoluto não é um máximo local, pois ele ocorre em extremo do intervalo.)

Além disso, $f(0) = 0$ é um mínimo local e $f(3) = -27$ é um mínimo local tanto quanto absoluto.

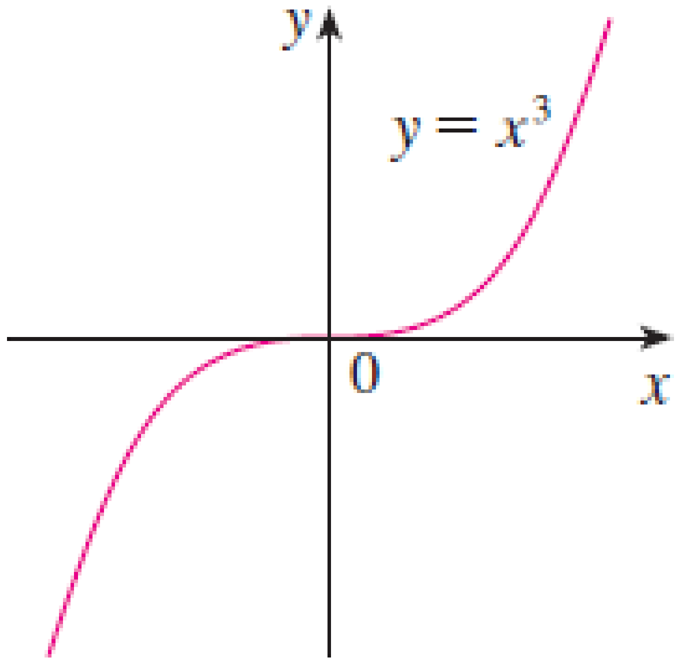
Observe que f não tem um máximo local nem um máximo absoluto em $x = 4$.

2. Se $f(x) = x^2$, então, $f(x) \geqslant f(0)$, pois $x^2 \geqslant 0$ para todo x.



Consequentemente, $f(0) = 0$ é o valor mínimo absoluto (e local) de f.
Isso corresponde ao fato de que a origem é o menor ponto na parábola $y = x^2$.
Porém, não há um ponto mais alto sobre a parábola e, dessa forma, a função não tem um valor máximo.

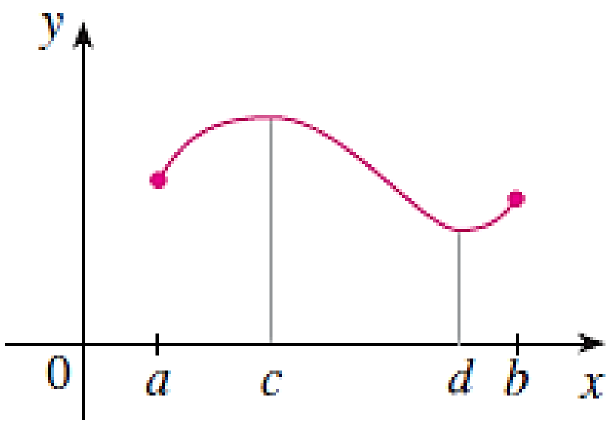
3. $f(x) = x^3$

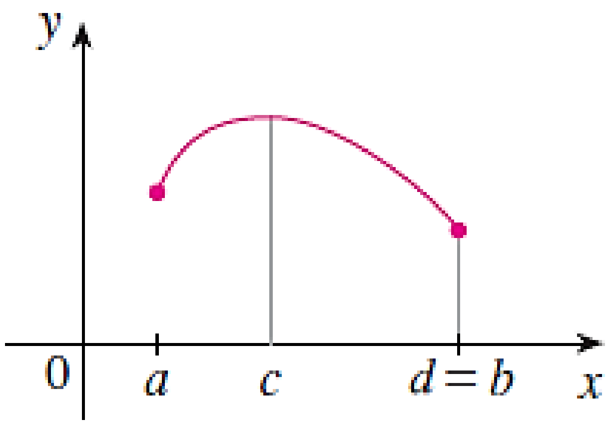


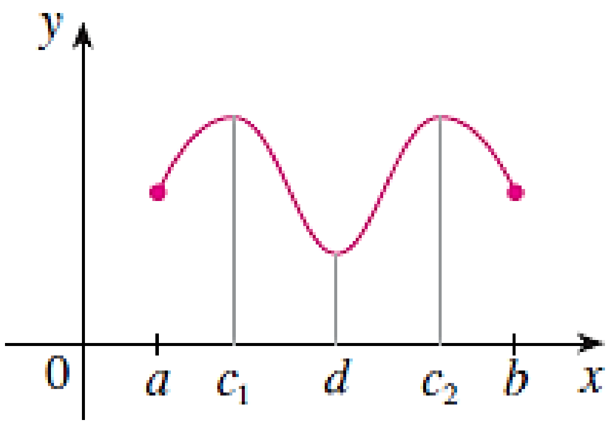
Do gráfico da função $f(x) = x^3$, vemos que essa função não tem um valor máximo absoluto, nem um valor mínimo absoluto. De fato, ela também não tem nenhum valor extremo local.

Teoremas

$\boxed{3}$ **O Teorema do Valor Extremo** Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.







As Figuras 8 e 9 mostram que uma função pode não possuir valores extremos se for omitida uma das duas hipóteses (continuidade ou intervalo fechado) do Teorema do Valor Extremo.

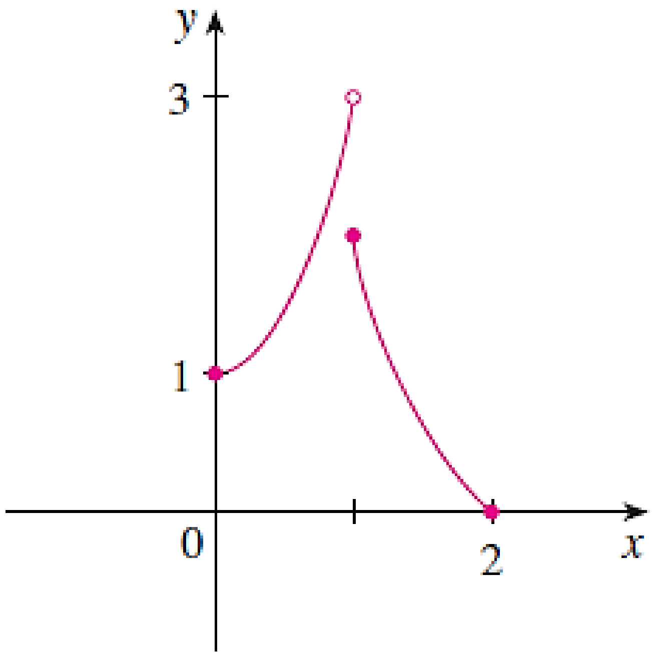


FIGURA 8

Esta função tem valor mínimo $f(2) = 0$, mas nenhum valor máximo.

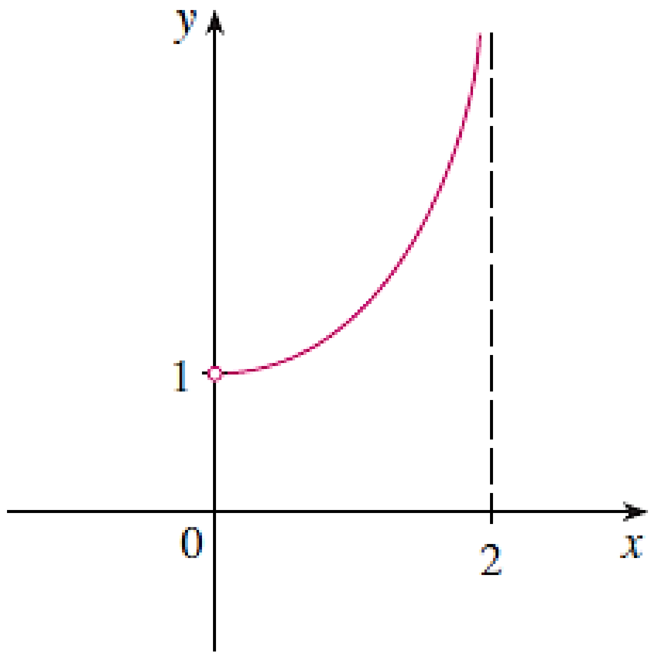
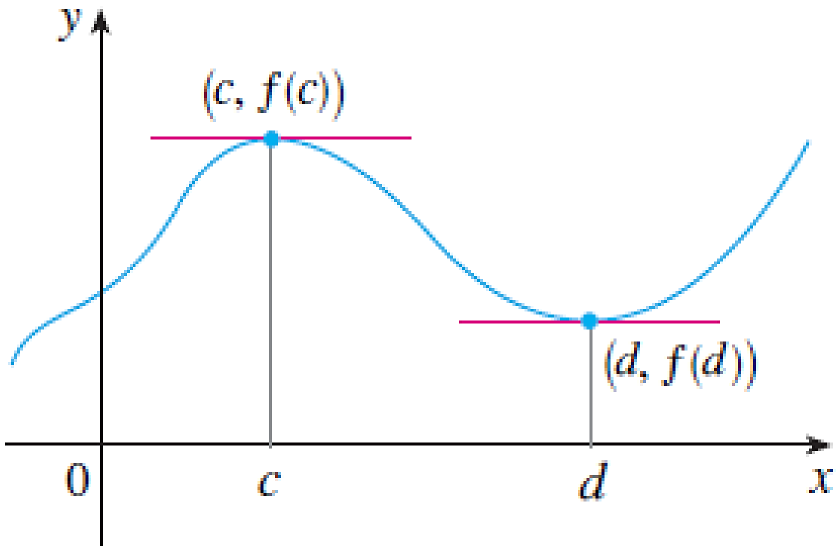


FIGURA 9

Essa função contínua g não tem valor mínimo nem máximo.

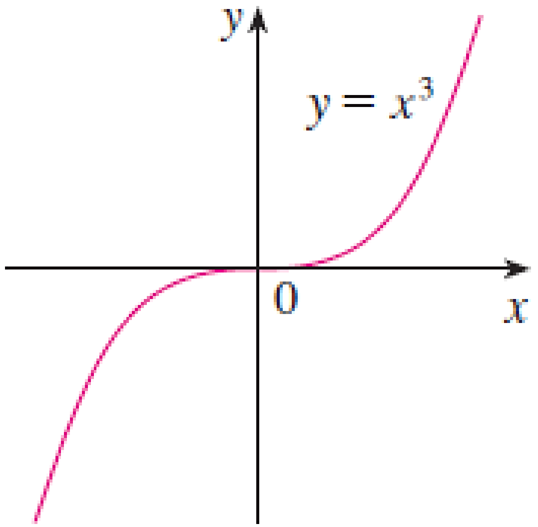
O Teorema do Valor Extremo afirma que uma função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo; contudo, não diz como encontrar esses valores extremos.



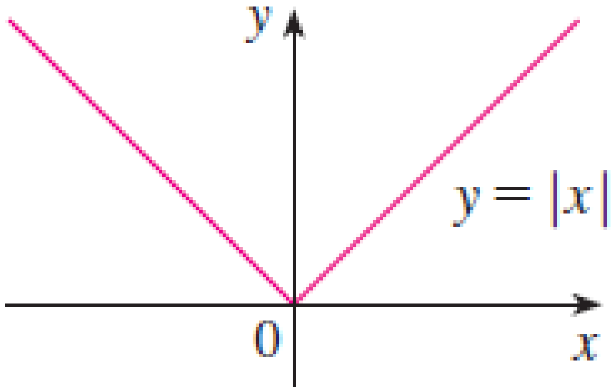
A Figura mostra o gráfico de uma função f com máximo local em c e mínimo local em d. Parece que nos pontos de máximo e de mínimo as retas tangentes são horizontais e, portanto, cada uma tem inclinação 0. Sabemos que a derivada é a inclinação da reta tangente; assim, parece que $f'(c) = 0$ e $f'(d) = 0$. O teorema a seguir afirma que isso é sempre verdadeiro para as funções diferenciáveis.

$\boxed{4}$ **Teorema de Fermat** Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Os seguintes exemplos nos previnem sobre não esperar demais do Teorema de Fermat: não podemos esperar a locação de valores extremos simplesmente considerando $f'(x) = 0$ e isolando x.



Se $f(x) = x^3$, então $f'(0) = 0$, mas f não tem mínimo ou máximo.



Se $f(x) = |x|$, então $f(0) = 0$ é um valor mínimo, mas $f'(0)$ não existe.

O Teorema de Fermat sugere que devemos pelo menos *começar* procurando por valores extremos de f nos números c onde $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe. Esses números têm um nome especial.

$\boxed{6}$ **Definição** Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f tal que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

$\boxed{7}$ Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, então c é um número crítico de f.

O Método do Intervalo Fechado Para encontrar os valores máximo e mínimo *absolutos* de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.
3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Exemplo

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

Uma vez que f é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, podemos usar o Método do Intervalo Fechado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

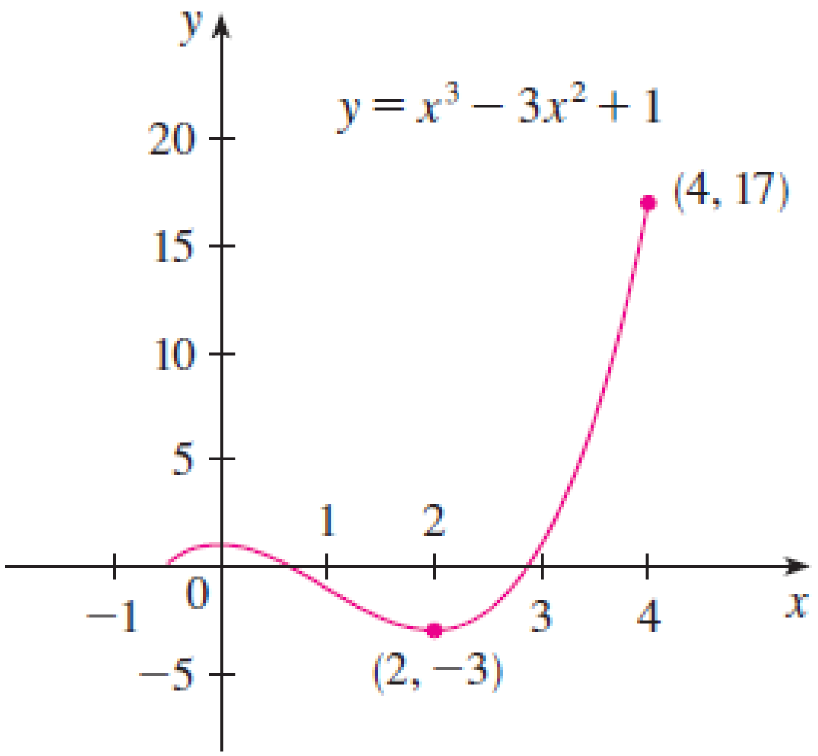
Uma vez que $f'(x)$ existe para todo x, os únicos números críticos de f ocorrem quando $f'(x) = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = 2$. Observe que cada um desses números críticos está no intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Os valores de f nestes números críticos são

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

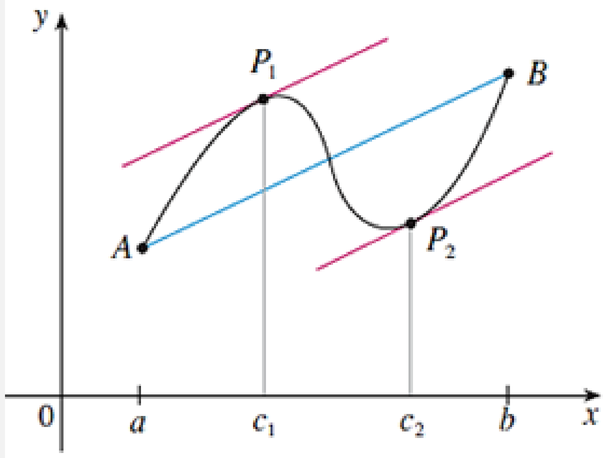
Os valores de f nas extremidades do interval são

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparando esses quatro números, vemos que o valor máximo absoluto é $f(4) = 17$ e o valor mínimo absoluto, $f(2) = -3$.



Teorema do Valor Médio

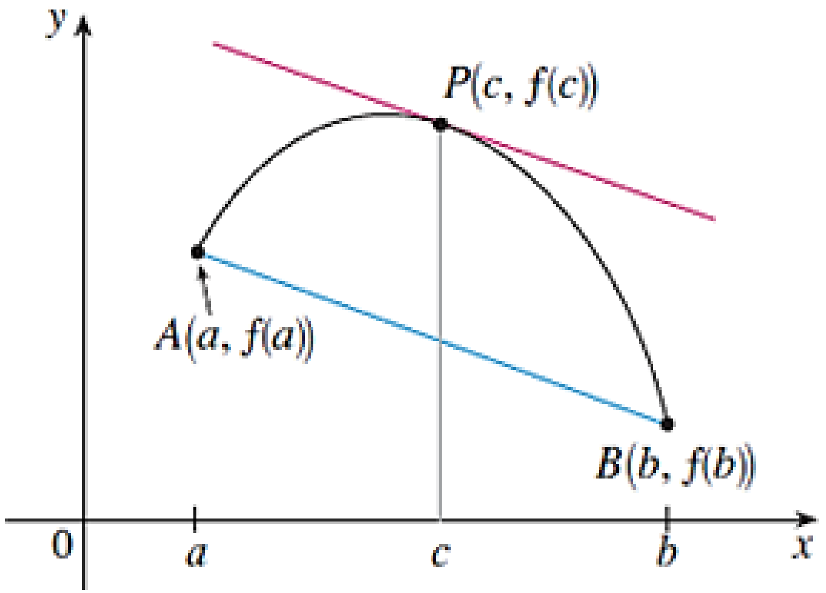


O Teorema do Valor Médio Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.

2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).

Então, existe um número c em (a, b) tal que



$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Exemplo

Para ilustrarmos o Teorema do Valor Médio com uma função específica, vamos considerar $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$.

Uma vez que f é uma função polinomial, então ela é contínua e derivável para todo x;

logo, é certamente contínua em $[0, 2]$ e derivável em $(0, 2)$.

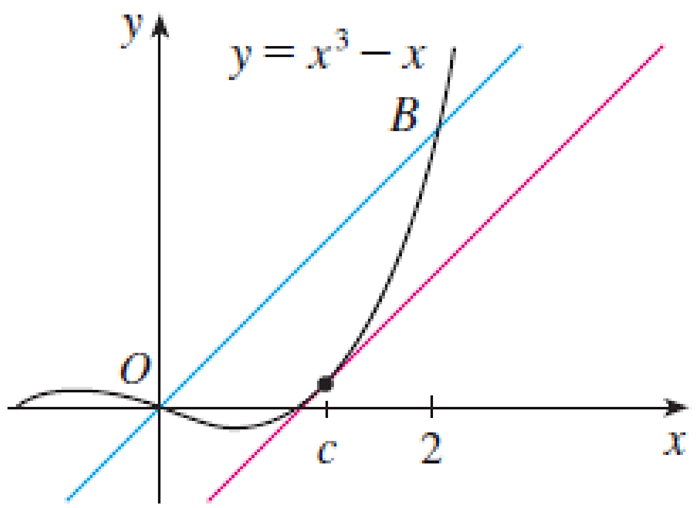
Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c em $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Agora $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ e $f'(x) = 3x^2 - 1$, e essa equação fica

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

o que dá $c^2 = \frac{4}{3}$, isto é, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Mas c deve estar em $(0, 2)$, então, $c = 2/\sqrt{3}$.



O Teorema do Valor Médio pode ser usado para estabelecer alguns dos fatos básicos do cálculo diferencial. Um deles é o teorema a seguir. Outros serão encontrados nas seções seguintes.

$\boxed{5}$ **Teorema** Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).

$\boxed{7}$ **Corolário** Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b), então $f - g$ é constante em (a, b); isto é, $f(x) = g(x) + c$, em que c é uma constante.

Como as Derivadas Afetam a Forma de um Gráfico

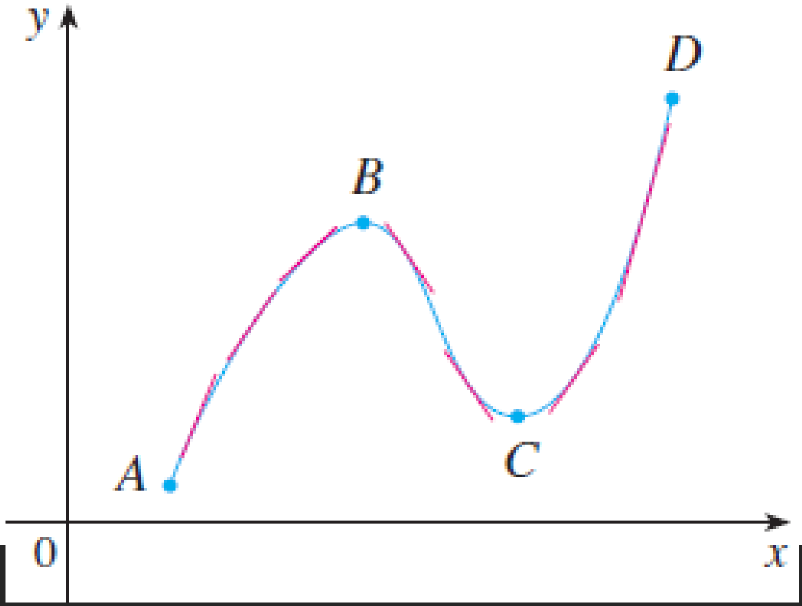
Teste Crescente/Decrescente

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

Entre A e B e entre C e D, as retas tangentes têm inclinação positiva e, portanto, $f'(x) > 0$.

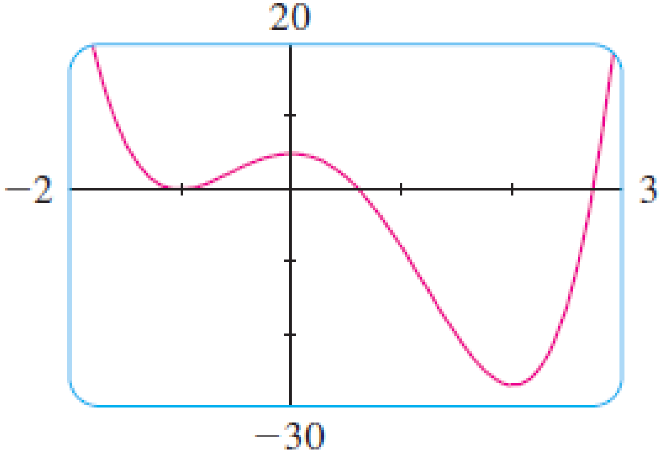
Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa e, portanto, $f'(x) < 0$.



Exemplo

Encontre onde a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e onde ela é decrescente

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$$



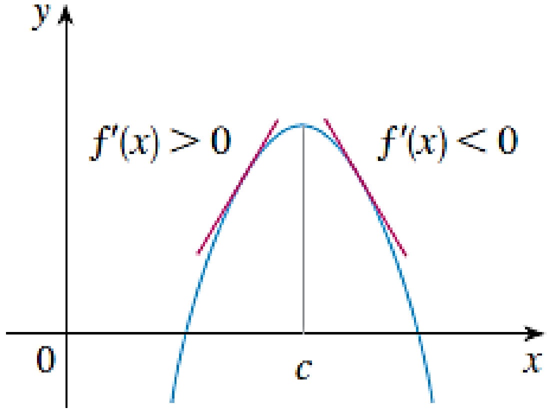
Intervalo	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente em $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	crescente em $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(2, \infty)$

Teste da Primeira Derivada Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

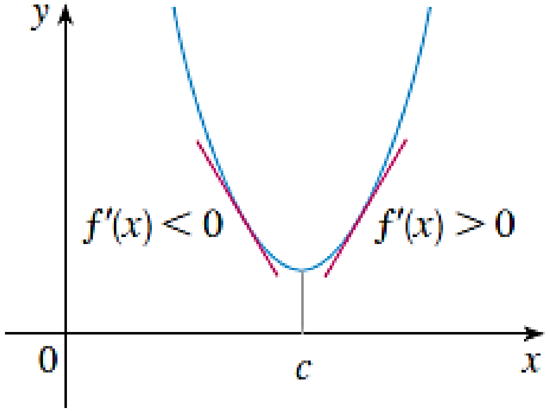
(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

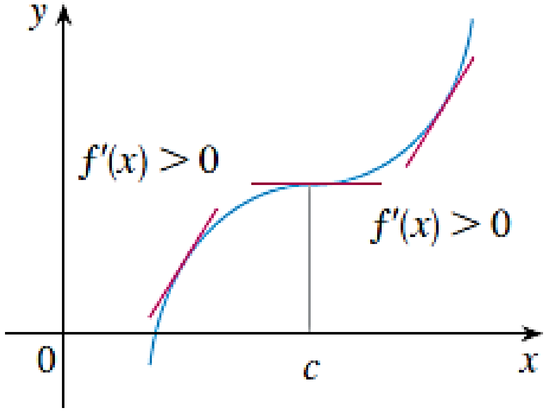
(c) Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c.



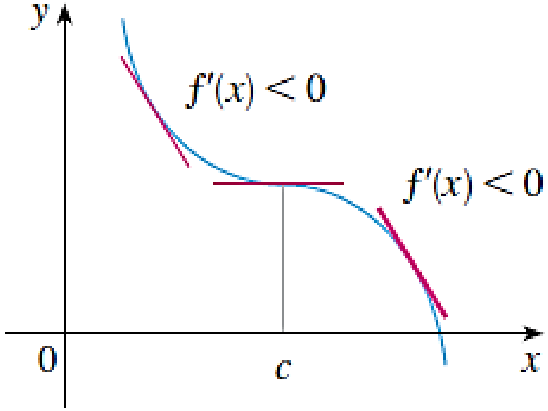
(a) Máximo local



(b) Mínimo local



(c) Nem máximo, nem mínimo



(d) Nem mínimo, nem máximo

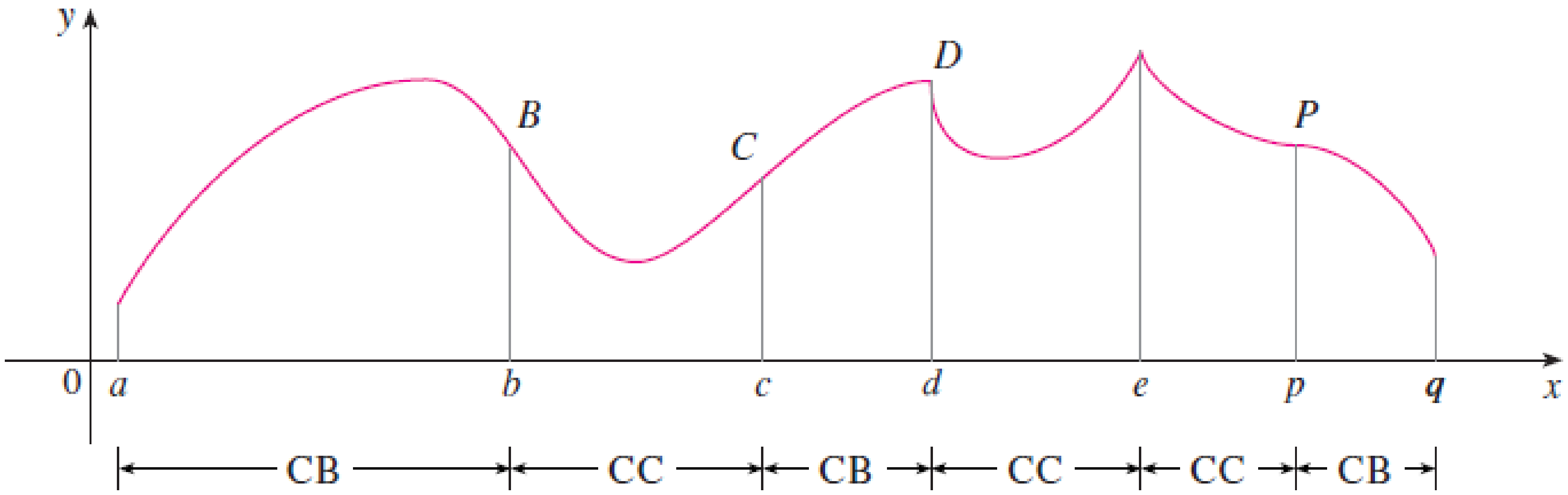
Exemplo

Encontre os valores de máximos e mínimos locais da função f do Exemplo 1.

Intervalo	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente em $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	crescente em $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(2, \infty)$

SOLUÇÃO Da tabela na solução do Exemplo 1, vemos que o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo em -1, então $f(-1) = 0$ é um valor mínimo local pelo Teste da Primeira Derivada. Analogamente, o sinal de f' muda de negativo para positivo em 2; portanto, $f(2) = -27$ é também um valor mínimo local. Como observado anteriormente, $f(0) = 5$ é um valor máximo local, pois o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0.

Definição Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então f é chamada **côncava para cima** em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, então f é chamada **côncava para baixo** em I.



A Figura mostra o gráfico de uma função que é côncava para cima (abrevia-se CC) nos intervalos (b, c), (d, e) e (e, p), e côncava para baixo (CB) nos intervalos (a, b), (c, d) e (p, q).

Teste da Concavidade

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

Definição Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

Teste da Segunda Derivada Suponha que f'' seja contínua na proximidade de c.

(a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

(b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Exemplo

Examine a curva $y = x^4 - 4x^3$ em relação à concavidade, aos pontos de inflexão e mínimos e máximos locais. Use essa informação para esboçar a curva.

Se $f(x) = x^4 - 4x^3$, então

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Para encontrarmos os números críticos, fazemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = 0$ e $x = 3$. Para usar o Teste da Segunda Derivada, calculamos f'' nesses pontos críticos:

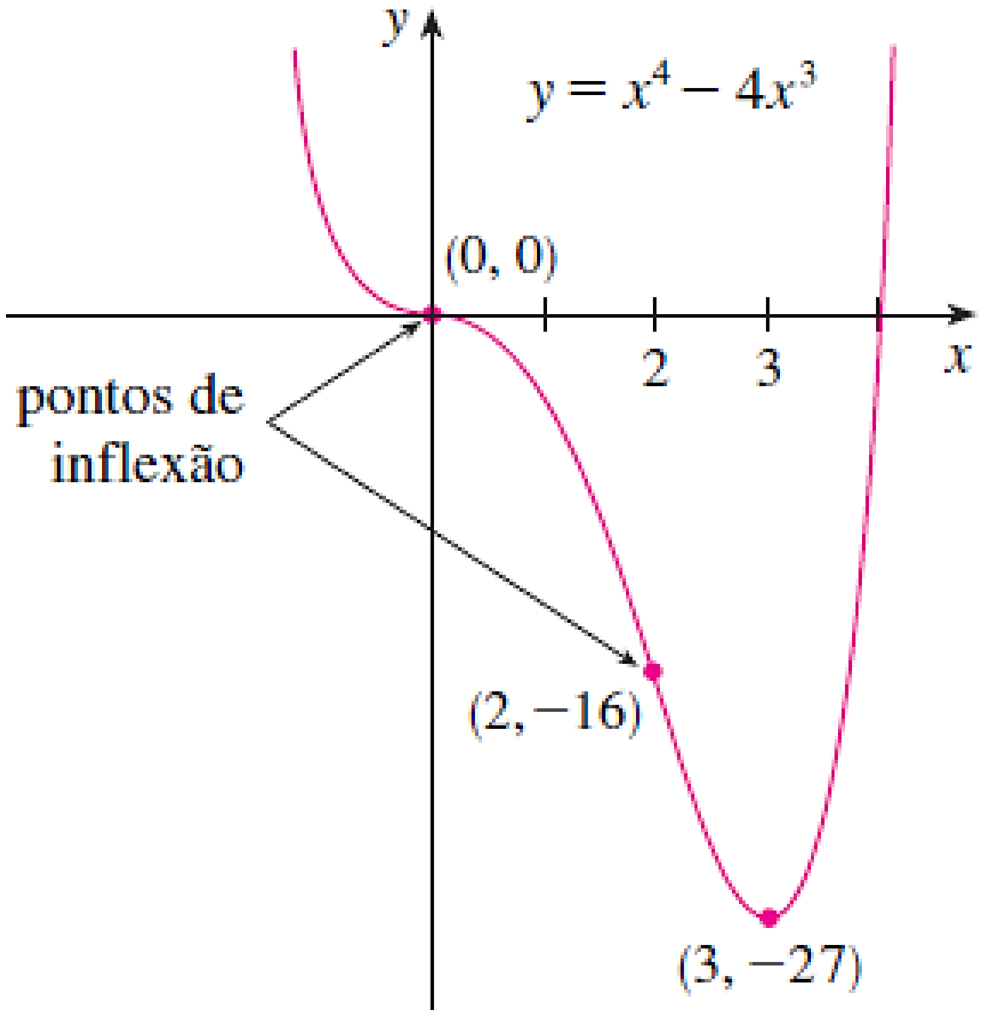
$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Uma vez que $f'(3) = 0$ e $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ é um mínimo local. Uma vez que $f''(0) = 0$, o Teste da Segunda Derivada não fornece informações sobre o número crítico 0. Mas, uma vez que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ e também para $0 < x < 3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que f não tem um máximo ou mínimo local em 0. [De fato, a expressão para $f'(x)$ mostra que f decresce à esquerda de 3 e cresce à direita de 3.]

Como $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou 2, dividimos a reta real em intervalos com esses números como extremidades e completamos a seguinte tabela.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x - 2)$	Concavidade
$(-\infty, 0)$	$+$	para cima
$(0, 2)$	$-$	para baixo
$(2, \infty)$	$+$	para cima

O ponto $(0, 0)$ é um ponto de inflexão, uma vez que a curva muda de côncava para cima para côncava para baixo aí. Também $(2, -16)$ é um ponto de inflexão, uma vez que é ali que a curva muda de côncava para baixo para côncava para cima.



y
$y = x^4 - 4x^3$
(0, 0)
2
3
x
pontos de
inflexão
(2, −16)
(3, −27)