Técnicas de Integração

A Regra da Substituição

Integração por Partes

Regra da Substituição

Por causa do Teorema Fundamental, é importante sermos capazes de encontrar primitivas.

Porém, nossas fórmulas de primitivação não mostram como calcular as integrais do tipo

$$\int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

Para encontrarmos essa integral usamos a estratégia de mudança da variável x para uma nova variável u.

$$\int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

Suponha $u = 1 + x^2$.

Então a diferencial de u é $du = 2xdx$.

Portanto, podemos escrever:

$$\int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \int \sqrt{1 + x^2}\, 2x\, dx = \int \sqrt{u}\, du$$

$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$$

Podemos verificar que temos a resposta correta usando a Regra da Cadeia para derivar a função final da Equação

$$\int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$$

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x = 2x\sqrt{x^2 + 1}$$

Em geral, esse método funciona sempre que temos uma integral que possa ser escrita na forma

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx.$$

Observe que se $F' = f$, então

$$\int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

pois, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))\, g'(x)$$

Se fizermos a "mudança de variável" ou "substituição" $u = g(x)$, então da Equação 3 temos

$$\int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\, du$$

ou, escrevendo $F' = f$, obtemos

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

Assim, demonstramos a regra a seguir.

$\boxed{4}$ **Regra da Substituição** Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

Observe que a Regra da Substituição para a integração foi demonstrada usando a Regra da Cadeia para a derivação. Note também que se $u = g(x)$, então $du = g'(x)\, dx$, portanto uma forma de recordar a Regra da Substituição é imaginar dx e du em $\boxed{4}$ como diferenciais.

Assim, a Regra de Substituição diz que: **é permitido operar com *dx* e *du* após sinais de integração como se fossem diferenciais.**

Exemplos

EXEMPLO 1 Encontre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx$.

SOLUÇÃO Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$ porque sua diferencial é $du = 4x^3\, dx$, que, à parte do fator constante 4, ocorre na integral. Assim, usando $x^3\, dx = \frac{1}{4}\, du$ e a Regra da Substituição, temos

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\, du = \tfrac{1}{4} \int \cos u\, du \\ &= \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} u + C \\ &= \tfrac{1}{4} \operatorname{sen}(x^4 + 2) + C\end{aligned}$$

Observe que no estágio final retornamos para a variável original x.

EXEMPLO 2 Calcule $\int \sqrt{2x + 1}\, dx$.

SOLUÇÃO 1 Seja $u = 2x + 1$. Então, $du = 2\, dx$, de modo que $dx = \frac{1}{2}\, du$. Nesse caso, a Regra da Substituição nos dá

$$\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \int \sqrt{u} \cdot \tfrac{1}{2}\, du = \tfrac{1}{2} \int u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \tfrac{1}{3}(2x + 1)^{3/2} + C$$

SOLUÇÃO 2 Outra substituição possível é $u = \sqrt{2x + 1}$. Então

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x + 1}}, \qquad \text{logo} \qquad dx = \sqrt{2x + 1}\, du = u\, du.$$

(Ou observe que $u^2 = 2x + 1$, de modo que $2u\, du = 2\, dx$.) Portanto,

$$\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \int u \cdot u\, du = \int u^2\, du$$

$$= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x + 1)^{3/2} + C$$

Integrais Definidas

Existem dois métodos para calcular uma integral *definida*, por substituição. Um deles consiste em se calcular primeiro a integral indefinida e então usar o Teorema Fundamental. Por exemplo, usando o resultado do Exemplo 2, temos

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{2x+1}\,dx\Big]_0^4$$

$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2}$$

$$= \tfrac{1}{3}(27-1) = \tfrac{26}{3}$$

Outro método, geralmente preferível, consiste em alterar os limites de integração ao mudar a variável.

$\boxed{6}$ **Regra da Substituição para as Integrais Definidas** Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

EXEMPLO 7 Calcule $\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\, dx$ usando $\boxed{6}$.

SOLUÇÃO Usando a substituição da Solução 1 do Exemplo 2, temos $u = 2x + 1$ e $dx = \frac{1}{2}\, du$. Para encontrarmos os novos limites de integração, observamos que

$$\text{quando } x = 0,\ u = 2(0) + 1 = 1 \qquad \text{e} \qquad \text{quando } x = 4,\ u = 2(4) + 1 = 9$$

Portanto,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$

$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

Observe que quando usamos $\boxed{6}$ *não* retornamos à variável x após a integração. Simplesmente calculamos a expressão em u entre os valores apropriados de u.

EXEMPLO 8 Calcule $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

SOLUÇÃO Seja $u = 3 - 5x$. Então $du = -5\,dx$, de modo que $dx = -\frac{1}{5}\,du$. Quando $x = 1$, $u = -2$, e quando $x = 2$, $u = -7$. Logo,

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\Bigg]_{-2}^{-7}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$

EXEMPLO 9 Calcule $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUÇÃO Vamos fazer $u = \ln x$, pois sua diferencial $du = dx/x$ ocorre na integral. Quando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; quando $x = e$, $u = \ln e = 1$. Logo,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Simetria

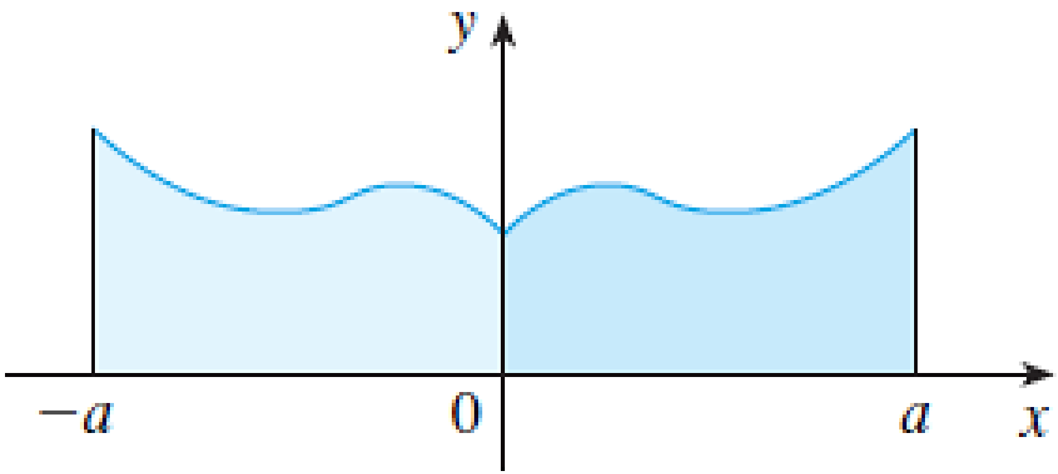
O próximo teorema usa a Regra da Substituição para Integrais Definidas $\boxed{6}$ para simplificar o cálculo de integrais de funções que possuam propriedades de simetria.

$\boxed{7}$ **Integrais de Funções Simétricas** Suponha que f seja contínua em $[-a, a]$.

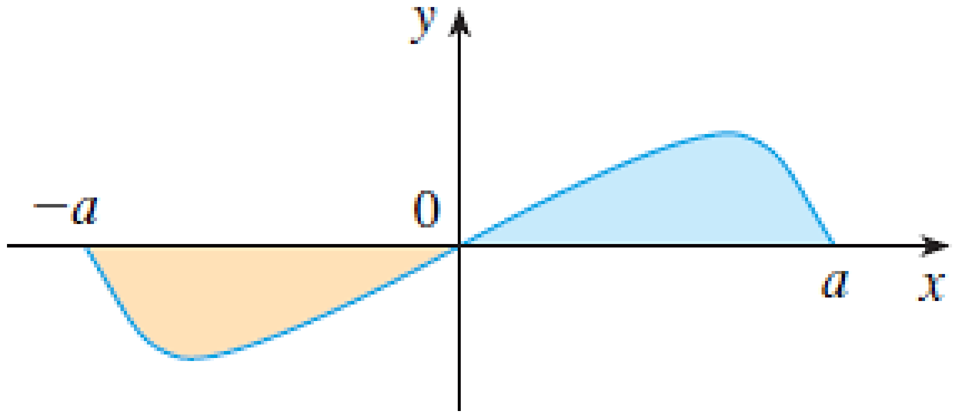
(a) Se f é par $[f(-x) = f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

(b) Se f é ímpar $[f(-x) = -f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

O Teorema 7 está ilustrado na Figura 3. Quando f é positiva e par, a parte (a) diz que a área sob $y = f(x)$ de $-a$ até a é o dobro da área de 0 até a em virtude da simetria. Lembre-se de que uma integral $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ pode ser expressa como a área acima do eixo x e abaixo de $y = f(x)$ menos a área abaixo do eixo x e acima da curva. Assim, a parte (b) diz que a integral é 0, pois as áreas se cancelam.



(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$



(b) f ímpar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 3

EXEMPLO 10 Uma vez que $f(x) = x^6 + 1$ satisfaz $f(-x) = f(x)$, ela é par, e portanto

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\, dx = 2 \int_{0}^{2} (x^6 + 1)\, dx$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$

EXEMPLO 11 Já que $f(x) = (\operatorname{tg} x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfaz $f(-x) = -f(x)$, ela é ímpar, e por conseguinte

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^4}\, dx = 0$$

Integração Por Partes

Cada regra de derivação tem outra correspondente de integração.

Por exemplo, a Regra de Substituição para a integração corresponde à Regra da Cadeia para a derivação.

Aquela que corresponde à Regra do Produto para a derivação é chamada **integração por partes**.

A Regra do Produto afirma que se f e g forem funções deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Na notação para integrais indefinidas, essa equação se torna

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

ou

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Podemos rearranjar essa equação como

$$\boxed{1} \qquad \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

$$\boxed{1} \qquad \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

A Fórmula 1 é chamada **fórmula para integração por partes.**

Talvez seja mais fácil lembrar com a seguinte notação.

Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então as diferenciais são

$$du = f'(x)\,dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x)\,dx$$

e, assim, pela Regra da Substituição, a fórmula para a integração por partes torna-se

$$\boxed{2} \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Exemplos

EXEMPLO 1 Encontre $\int x \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUÇÃO USANDO A FÓRMULA 1 Suponha que escolhamos $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Então $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$. (Para g, podemos escolher qualquer antiderivada de g'.) Assim, utilizando a Fórmula 1, temos

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen} x \, dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx \\
&= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx \\
&= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\
&= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C
\end{aligned}$$

SOLUÇÃO USANDO A FÓRMULA 2 Sejam

$$u = x \qquad\qquad dv = \text{sen}\, x\, dx$$

Então,

$$du = dx \qquad\qquad v = -\cos x$$

de modo que

$$\int x \,\text{sen}\, x\, dx = \int \underbrace{x}_{u}\; \underbrace{\text{sen}\, x\, dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\; \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v}\; \underbrace{dx}_{du}$$

$$= -x \cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x \cos x + \text{sen}\, x + C$$

OBSERVAÇÃO Nosso objetivo ao usarmos a integração por partes é obter uma integral mais simples que aquela de partida. Assim, no Exemplo 1, iniciamos com $\int x \operatorname{sen} x \, dx$ e a expressamos em termos da integral mais simples $\int \cos x \, dx$. Se tivéssemos escolhido $u = \operatorname{sen} x$ e $dv = x \, dx$, então $du = \cos x \, dx$ e $v = x^2/2$ e, assim, a integração por partes daria

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = (\operatorname{sen} x) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx$$

Embora isso seja verdadeiro, $\int x^2 \cos x \, dx$ é uma integral mais difícil que aquela com a qual começamos. Em geral, ao decidirmos sobre uma escolha para u e dv, geralmente tentamos escolher $u = f(x)$ como uma função que se torna mais simples quando derivada (ou ao menos não mais complicada), contanto que $dv = g'(x) \, dx$ possa ser prontamente integrada para fornecer v.

EXEMPLO 2 Avalie $\int \ln x \, dx$.

SOLUÇÃO Aqui não temos muita escolha para u e dv. Considere

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

Então,

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

Integrando por partes, temos

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x}$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

EXEMPLO 3 Encontre $\int t^2 e^t \, dt$.

EXEMPLO 4 Calcule $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

Se combinarmos a fórmula de integração por partes com a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, poderemos calcular integrais definidas por partes. Calculando ambos os lados da Fórmula 1 entre a e b, supondo f' e g' contínuas, e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\boxed{6} \qquad \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$$

EXEMPLO 5 Calcule $\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1} x \, dx$.

Exercícios

Seção 5.5 – pág. 374
Seção 7.1 – pág. 423