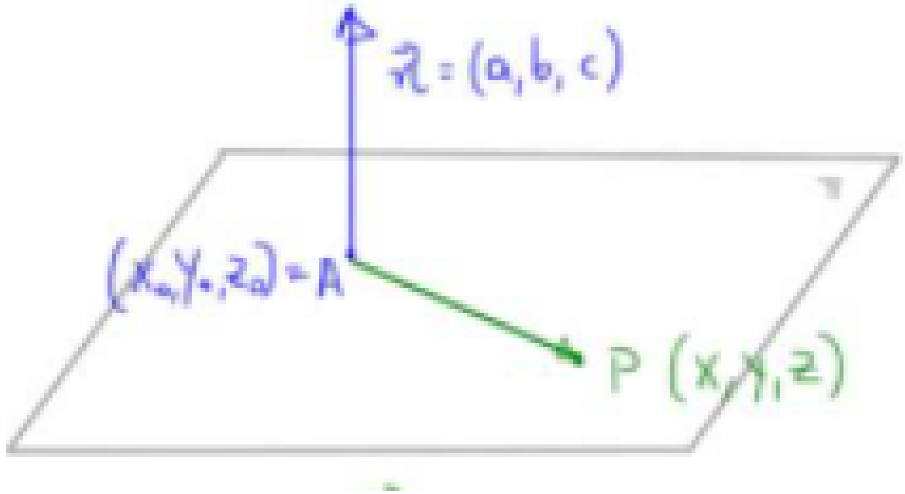
PLANO

PROFESSORA FABIANA PIMENTA DE SOUZA

EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

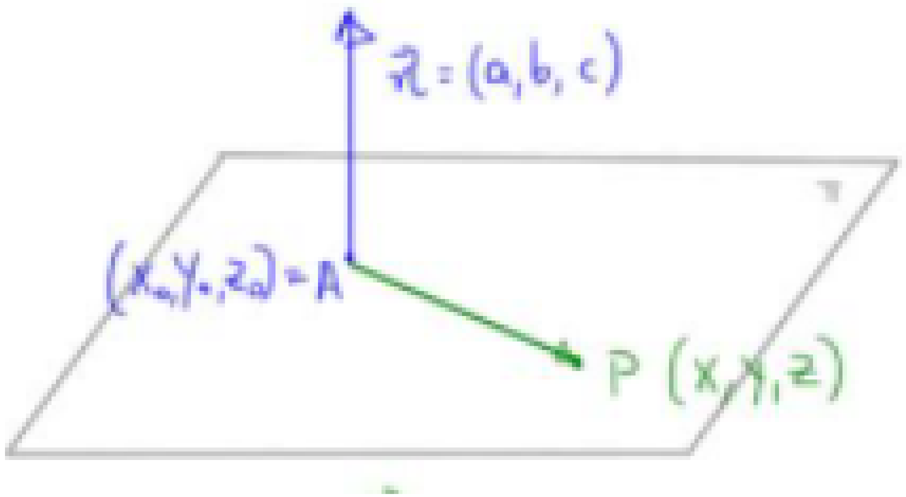
- Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente ao plano π e $\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}$, um vetor normal (ortogonal) ao plano.

- Logo, $\vec{n}.\overrightarrow{AP} = 0$, onde $P(x, y, z)$ pertence a π.



EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

- Logo, $\vec{n}.\overrightarrow{AP} = 0$, onde $P(x, y, z)$ pertence a π.
- $(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$
- $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \ = 0$
- $ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$
- $ax + by + cz \underbrace{- ax_0 - cz_0 - by_0}_{\text{d}} = 0$



$$\boldsymbol{Portanto, ax + by + cz + d = 0}$$

EXEMPLO 1

- Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto A(2,-1,3) e tem $\vec{n} = (3,2,-4)$ como um vetor normal.
- **SOLUÇÃO:**

$$3x + 2y - 4z + d = 0$$

$$3.2 + 2.(-1) - 4.3 + d = 0$$

$$d = 8$$

$$3x + 2y - 4z + 8 = 0$$

EXEMPLO 2

- Escreva uma equação geral do plano π que passa pelo ponto A(2,1,3) e é paralelo ao plano $\pi_1: 3x - 4y - 2z + 5 = 0$.

- **SOLUÇÃO:**

$$3x - 4y - 2z + d = 0$$

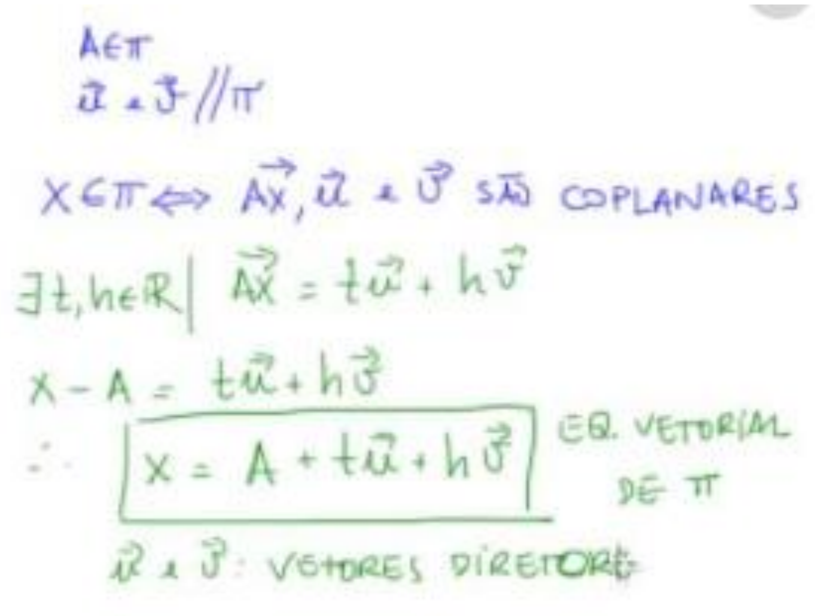
$$3.2 - 4.1 - 2.3 + d = 0$$

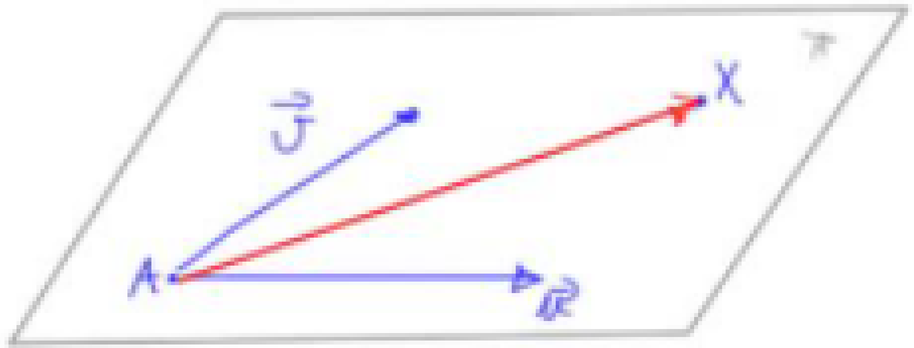
$$d = 4$$

$$3x - 4y - 2z + 4 = 0$$

EQUAÇÃO VETORIAL

- Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a π.





EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO PLANO

- Sabemos que

$$X = A + t\vec{u} + h\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, b_1, c_1) + h(a_2, b_2, c_2)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 + ha_2 \\ y = y_0 + tb_1 + hb_2 \text{, onde } h, t \in R. \\ z = z_0 + tc_1 + hc_2 \end{cases}$$

EXEMPLO 3

- Seja o plano π que passa pelo ponto A(2,2,-1) e é paralelo aos vetores

$\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 5, -3)$. Obter uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

SOLUÇÃO:

$X = (2,2,-1) + t(2, -3, 1) + h(-1, 5, -3)$ **EQUAÇÃO VETORIAL**

$$\begin{cases} x = 2 + 2t - h \\ y = 2 - 3t + 5h \\ z = -1 + t - 3h \end{cases}$$ **EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS**

EXEMPLO 3

- Seja o plano π que passa pelo ponto A(2,2,-1) e é paralelo aos vetores

$\vec{u} = (2, -3,1)$ e $\vec{v} = (-1,5, -3)$. Obter uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

SOLUÇÃO:

Seja $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (4,5,7)$

Logo, $4x + 5y + 7z + d = 0$, como A pertence ao plano, então:

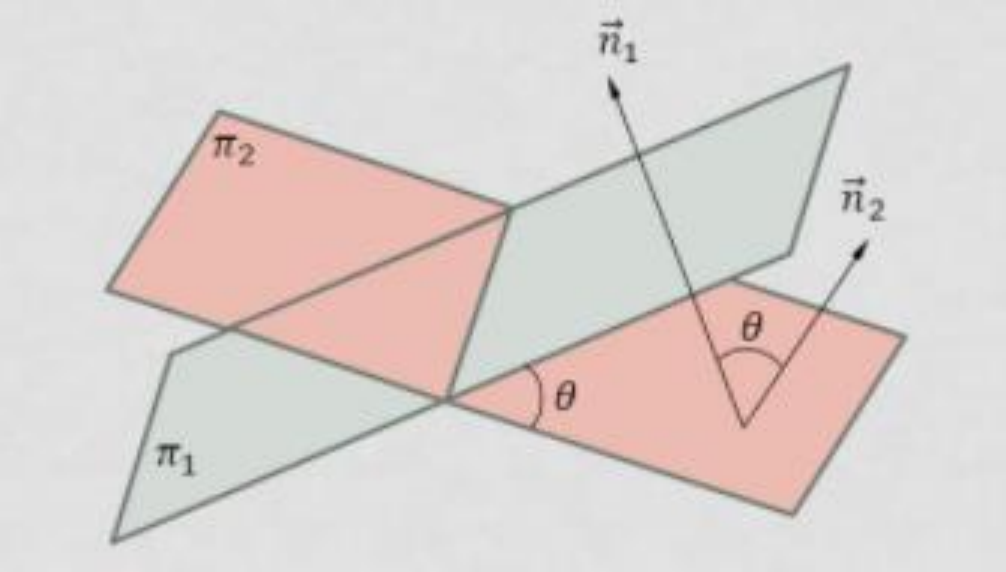
$4.2 + 5.2 + 7.(-1) + d = 0 \Longrightarrow d = -11 \Rightarrow 4x + 5y + 7z - 11 = 0$

ÂNGULO DE DOIS PLANOS

Sejam os planos π_1 e π_2 com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, respectivamente

Chama-se ângulo de dois planos π_1 e π_2 o menor ângulo que um vetor normal a π_1 forma com um vetor normal a π_2. Sendo θ este ângulo, tem-se

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \text{ com } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}}$$



EXEMPLO 4

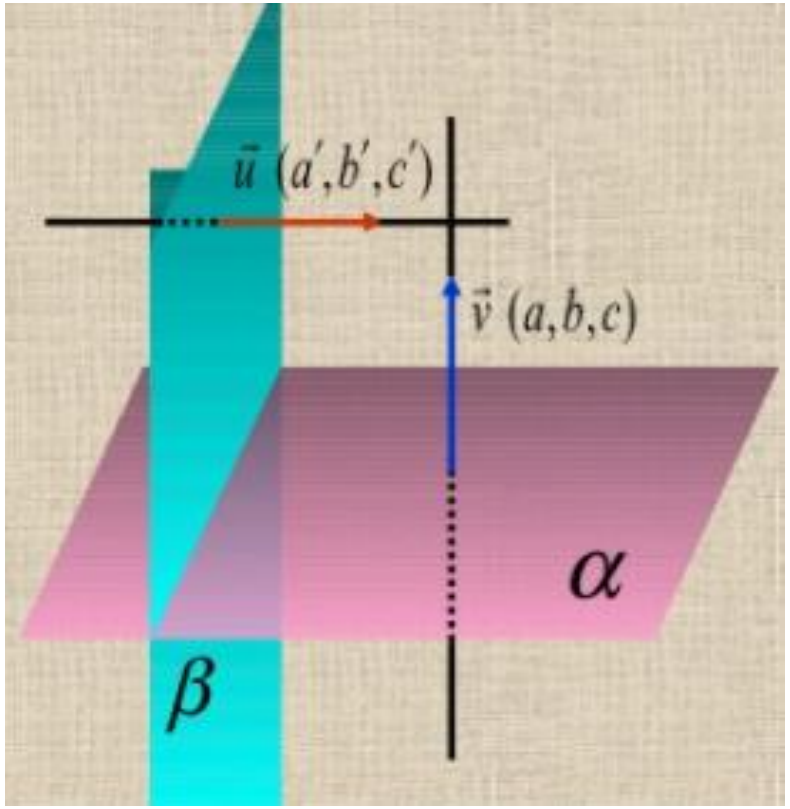
- Determinar o ângulo entre os planos

$$\pi_1: 2x + y - z + 3 = 0 \text{ e } \pi_2: x + y - 4 = 0.$$

SOLUÇÃO:

PLANOS PERPENDICULARES

- Sejam os planos $\alpha\ e\ \beta$ com vetores normais $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente.



- $\alpha\ \perp\ \beta \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0.$

EXEMPLO 5

- Verificar se os referidos planos são perpendiculares:

$a) \, \pi_1: 3x + y - 4z + 2 = 0$ e $\pi_2: 2x + 6y + 3z = 0$

SOLUÇÃO:

EXEMPLO 6

- Verificar se os referidos planos são perpendiculares:

- b) $\pi_1: x + y - 4 = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = h + t \\ z = t \end{cases}$

- **SOLUÇÃO:**