Integração de Funções Racionais por Frações Parciais e Integrais Impróprias

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Nesta seção veremos como integrar qualquer função racional (um quociente de polinômios) expressando-a como uma soma de frações mais simples, chamadas frações parciais, que já sabemos como integrar.

Para ilustrarmos o método, observe que, levando as frações

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

a um denominador comum, obtemos

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Se agora revertermos o procedimento, veremos como integrar a função no lado direito desta equação:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Para vermos como o método de frações parciais funciona em geral, consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios.

É possível expressar f como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de P seja menor que o grau de Q. Essa função racional é denominada *própria*.

Lembre-se de que se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde $a_n \neq 0$, então o grau de P é n e escrevemos $\text{gr}(P) = n$.

Se f for *imprópria*, isto é, $\text{gr}(P) \geqslant \text{gr}(Q)$, então devemos fazer uma etapa preliminar, dividindo Q por P (por divisão de polinômios) até o resto $R(x)$ ser obtido com $\text{gr}(R) < \text{gr}(Q)$. O resultado da divisão é

$$\boxed{1} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

onde S e R também são polinômios.

EXEMPL0 1

Encontre $\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\, dx.$

Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, primeiro devemos realizar a divisão. Isso nos permite escrever

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\, dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x - 1| + C$$

A próxima etapa é fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível. É possível demonstrar que qualquer polinômio Q pode ser fatorado como um produto de fatores lineares (da forma $ax + b$) e fatores quadráticos irredutíveis (da forma $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$). Por exemplo, se $Q(x) = x^4 - 16$, poderíamos fatorá-lo como

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

A terceira etapa é expressar a função racional própria $R(x)/Q(x)$ (da Equação 1) como uma soma das **frações parciais** da forma

$$\frac{A}{(ax + b)^i} \qquad \text{ou} \qquad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^j}$$

Um teorema na álgebra garante que é sempre possível fazer isso. Explicamos os detalhes para os quatro casos que ocorrem.

CASO I: O denominador Q(x) é um produto de fatores lineares distintos.

Isso significa que podemos escrever

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

onde nenhum fator é repetido (e nenhum fator é múltiplo constante do outro). Nesse caso, o teorema das frações parciais afirma que existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tais que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Essas constantes podem ser determinadas como no exemplo seguinte.

EXEMPL0 2

Calcule $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} \, dx.$

SOLUÇÃO Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir. Fatoramos o denominador como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Como o denominador tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais do integrando $\boxed{2}$ tem a forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Para determinarmos os valores de A, B e C, multiplicamos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores, $x(2x - 1)(x + 2)$, obtendo

$$\boxed{4} \qquad x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Expandindo o lado direito da Equação 4 e escrevendo-a na forma padrão para os polinômios, temos

Os polinômios na Equação 5 são idênticos, então seus coeficientes devem ser iguais. O coeficiente x^2 do lado direito, $2A + B + 2C$, deve ser igual ao coeficiente de x^2 do lado esquerdo, ou seja, 1. Do mesmo modo, os coeficientes de x são iguais e os termos constantes também. Isso resulta no seguinte sistema de equações para A, B e C:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A \qquad\qquad &= -1 \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$, e assim

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x-1| - \tfrac{1}{10}\ln|x+2| + K$$

Ao integrarmos o termo do meio, fizemos mentalmente a substituição $u = 2x - 1$, que resulta em $du = 2\,dx$ e $dx = du/2$.

OBSERVAÇÃO

Podemos usar um método alternativo para encontrar os coeficientes A, B e C no Exemplo 2. A Equação 4 é uma identidade; é verdadeira para cada valor de x. Vamos escolher valores de x que simplificam a equação.

$\boxed{4}$ $$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Se colocarmos $x = 0$ na Equação 4, então o segundo e terceiro termos do lado direito desaparecerão, e a equação será $-2A = -1$, ou $A = \frac{1}{2}$.

Da mesma forma, $x = \frac{1}{2}$ dá $5\,B/4 = \frac{1}{4}$ e $x = -2$ resulta em $10C = 1$, assim, $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$.

(Você pode argumentar que a Equação 3 não é válida para $x = 0, \frac{1}{2}$ ou $x = -2$, então, por que a Equação 4 deveria ser válida para aqueles valores? Na verdade, a Equação 4 é válida para todos os valores de x, até para $x = 0, \frac{1}{2}$ e -2.

CASO II: Q(x) é um produto de fatores lineares, e alguns dos fatores são repetidos.

Suponha que o primeiro fator linear $(a_1x + b_1)$ seja repetido r vezes; isto é, $(a_1x + b_1)^r$ ocorre na fatoração de $Q(x)$. Então, em vez de um único termo $A_1/(a_1x + b_1)$ na Equação 2, usaríamos

$$\boxed{7} \qquad \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

Para ilustrarmos, poderíamos escrever

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

mas é preferível detalhar um exemplo mais simples.

EXEMPLO 4

Encontre $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$.

A primeira etapa é dividir. O resultado da divisão de polinômios é

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

A segunda etapa é fatorar o denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Como $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ é um fator e obtemos

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 1) \\ &= (x - 1)^2(x + 1) \end{aligned}$$

Como o fator linear $x - 1$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicando pelo mínimo denominador comum, $(x-1)^2(x+1)$, temos

$$\boxed{8} \qquad 4x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$

$$= (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)$$

Agora igualamos os coeficientes:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B - 2C = 4 \\ -A + B + C = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos $A = 1$, $B = 2$ e $C = -1$; assim

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + K$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K$$

CASO III: Q(x) contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete.

Se $Q(x)$ tiver o fator $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, além das frações parciais nas Equações 2 e 7, a expressão para $R(x)/Q(x)$ terá um termo da forma

$$\boxed{9} \qquad \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Por exemplo, a função dada por $f(x) = x/[(x-2)(x^2+1)(x^2+4)]$ tem uma decomposição em frações parciais da forma

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{x^2+4}$$

O termo dado em $\boxed{9}$ pode ser integrado completando o quadrado (se necessário) e usando a fórmula

$$\boxed{10} \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

EXEMPL0 5

Calcule $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$.

Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ não pode ser mais fatorado, escrevemos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, temos

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$$
$$= (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Então $A = 1$, $B = 1$ e $C = -1$ e, assim,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

Para integrarmos o segundo termo, o dividimos em duas partes:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

Fazemos a substituição $u = x^2 + 4$ na primeira das integrais de modo que $du = 2x\,dx$. Calculamos a segunda integral usando a Fórmula 10 com $a = 2$:

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K$$

CASO IV Q(x) contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.

Se $Q(x)$ tiver um fator $(ax^2 + bx + c)^r$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, em vez de uma única fração parcial $\boxed{9}$, a soma

$$\boxed{11} \qquad \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

ocorre na decomposição em frações parciais de $R(x)/Q(x)$. Cada um dos termos de $\boxed{11}$ pode ser integrado usando uma substituição ou completando primeiramente o quadrado, se necessário.

EXEMPLO 8

Calcule $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx$.

A forma da decomposição em frações parciais é

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, temos

$$\begin{aligned} -x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x \\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\ &= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A. \end{aligned}$$

Se igualarmos os coeficientes, obteremos o sistema

$$A + B = 0, \qquad C = -1, \qquad 2A + B + D = 2, \qquad C + E = -1, \qquad A = 1,$$

que tem a solução $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ e $E = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx \\
&= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} \\
&= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{tg}^{-1}x - \frac{1}{2(x^2+1)} + K
\end{aligned}$$

Substituições Racionalizantes

Algumas funções não racionais podem ser transformadas em funções racionais por meio de substituições apropriadas.

Em particular, quando um integrando contém uma expressão da forma $\sqrt[n]{g(x)}$, então a substituição $u = \sqrt[n]{g(x)}$ pode ser eficaz.

Outros exemplos aparecem nos exercícios.

EXEMPLO 9

Calcule $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx\,dx.$

SOLUÇÃO Seja $u = \sqrt{x+4}$. Então $u^2 = x + 4$, de modo que, $x = u^2 - 4$ e $dx = 2u\,du$. Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2-4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\,du$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2-4}\right) du$$

Podemos calcular essa integral fatorando $u^2 - 4$ em $(u - 2)(u + 2)$ e usando as frações parciais ou usando a Fórmula 6 com $a = 2$:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2 - 4}$$

$$= 2u + 8 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{u - 2}{u + 2} \right| + C$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln \left| \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2} \right| + C$$

Integrais Impróprias

Na definição de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, trabalhamos com uma função f definida em um intervalo limitado $[a, b]$ e presumimos que f não tenha uma descontinuidade infinita.

Nessa seção, estenderemos o conceito de integral definida para o caso em que o intervalo é infinito e também para o caso onde f tem uma descontinuidade infinita em $[a, b]$.

Em ambos os casos, a integral é chamada **integral imprópria**.

Uma das aplicações mais importantes dessa ideia, distribuições de probabilidades.

Tipo 1: Intervalos Infinitos

Considere a região infinita S que está sob a curva $y = 1/x^2$, acima do eixo x e à direita da reta $x = 1$. Você poderia pensar que, como S tem extensão infinita, sua área deve ser infinita, mas vamos olhar mais de perto. A área da parte de S que está à esquerda da reta $x = t$ (sombreada na Figura 1) é

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

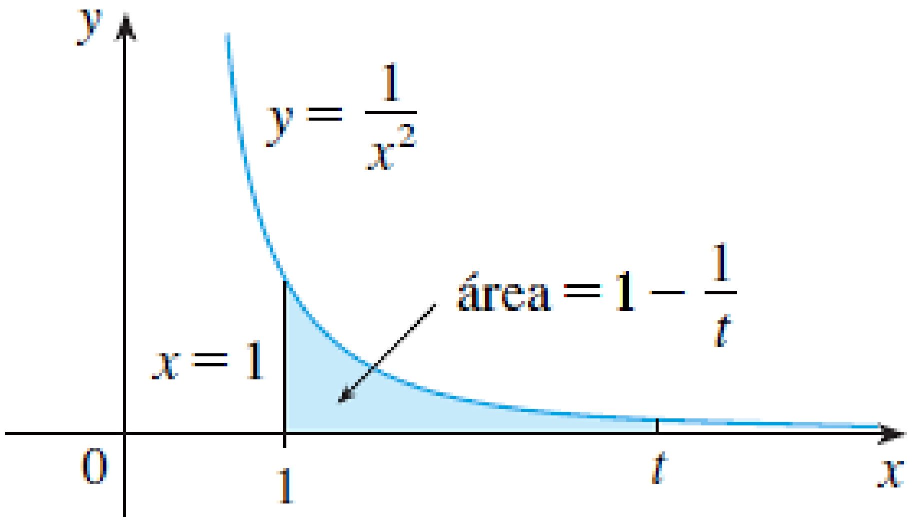

FIGURA 1

Observe que $A(t) < 1$ independentemente de quão grande t seja escolhido.

Também observamos que

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

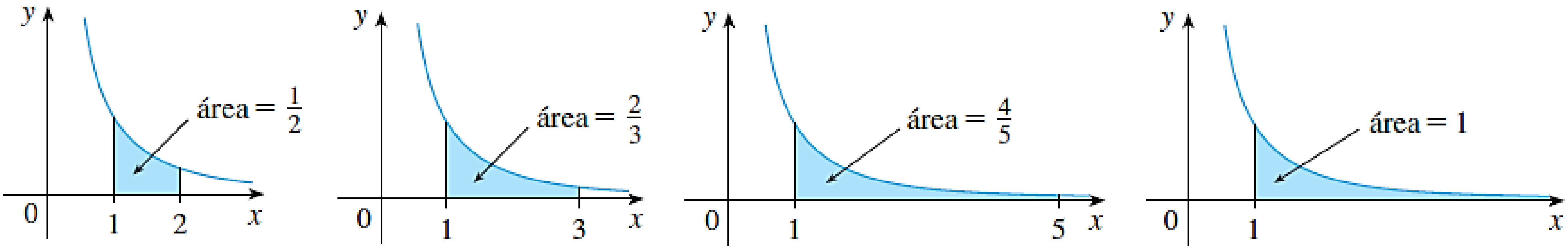

FIGURA 2

A área da região sombreada se aproxima de 1 quando $t \to \infty$ (veja a Figura 2), assim, dizemos que a área da região infinita S é igual a 1 e escrevemos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Usando esse exemplo como um guia, definimos a integral de f (não necessariamente uma função positiva) sobre um intervalo infinito como o limite das integrais sobre os intervalos finitos.

[I] Definição de uma Integral Imprópria do Tipo 1

(a) Se $\int_a^t f(x)\,dx\,dx$ existe para cada número $t \geqslant a$, então

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

desde que o limite exista (como um número).

(b) Se $\int_t^b f(x)\,dx\,dx$ existe para cada número $t \leqslant b$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

desde que o limite exista (como um número).

As integrais impróprias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ são chamadas **convergentes** se os limites correspondentes existem e **divergentes** se os limites não existem.

(c) Se ambas $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ são convergentes, então definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Na parte (c), qualquer número real a pode ser usado (veja o Exercício 74).

Qualquer uma das integrais impróprias na Definição 1 pode ser interpretada como uma área, desde que f seja uma função positiva. Por exemplo, no caso (a), se $f(x) \geqslant 0$ e a integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ for convergente, então definimos a área da região $S = \{(x, y) \mid x \geqslant a, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ na Figura 3 como

$$A(S) = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Isso é apropriado porque $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é o limite quando $t \to \infty$ da área sob o gráfico de f de a a t.

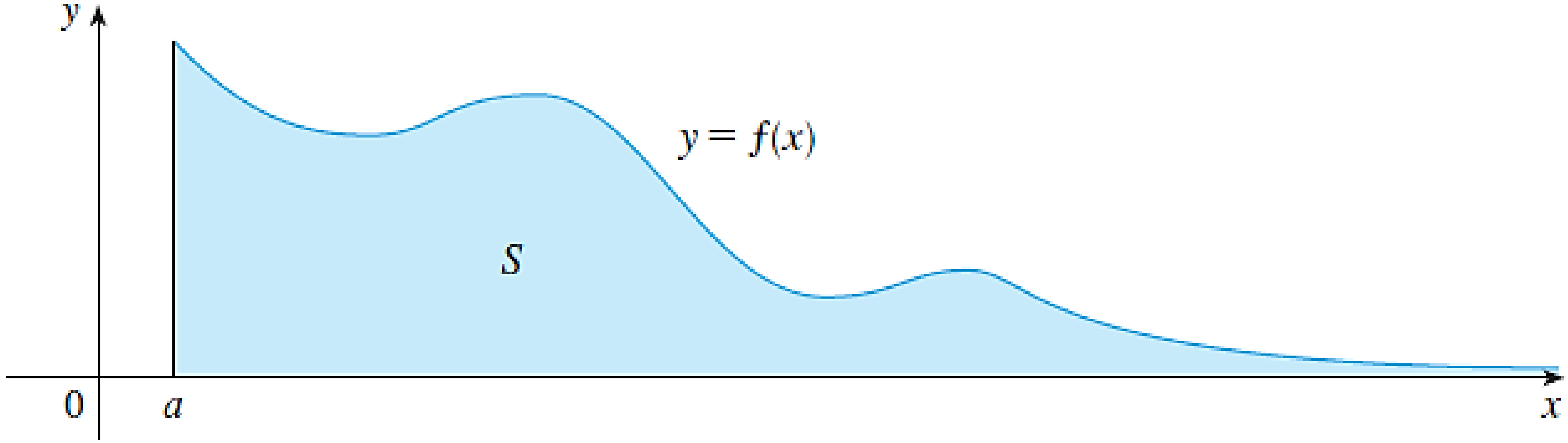

FIGURA 3

EXEMPLO 1

Determine se a integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é convergente ou divergente.

De acordo com a parte (a) da Definição 1, temos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

O limite não existe como um número finito e, assim, a integral imprópria $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é divergente.

EXEMPLO 2

Calcule $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$.

Usando a parte (b) da Definição 1, temos

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} xe^x\,dx$$

Integramos por partes com $u = x$, $dv = e^x dx$, de modo que $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_{t}^{0} xe^x\,dx = xe^x\Big]_{t}^{0} - \int_{t}^{0} e^x\,dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

Sabemos que $e^t \to 0$ quando $t \to -\infty$ e, pela Regra de L'Hôspital, temos

$$\lim_{t \to -\infty} te^t = \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{-e^{-t}}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} (-e^t) = 0$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t \to -\infty} (-te^t - 1 + e^t)$$

$$= -0 - 1 + 0 = -1$$

EXEMPLO 3

Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

É conveniente escolher $a = 0$ na Definição 1(c):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Precisamos calcular as integrais no lado direito separadamente:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\operatorname{tg}^{-1}t - \operatorname{tg}^{-1}0) = \lim_{t\to\infty}\operatorname{tg}^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(\operatorname{tg}^{-1}0 - \operatorname{tg}^{-1}t)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Como ambas as integrais são convergentes, a integral dada é convergente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Como $1/(1+x^2) > 0$, a integral imprópria dada pode ser interpretada como a área da região infinita sob a curva $y = 1/(1+x^2)$ e acima do eixo x (veja a Figura 6).

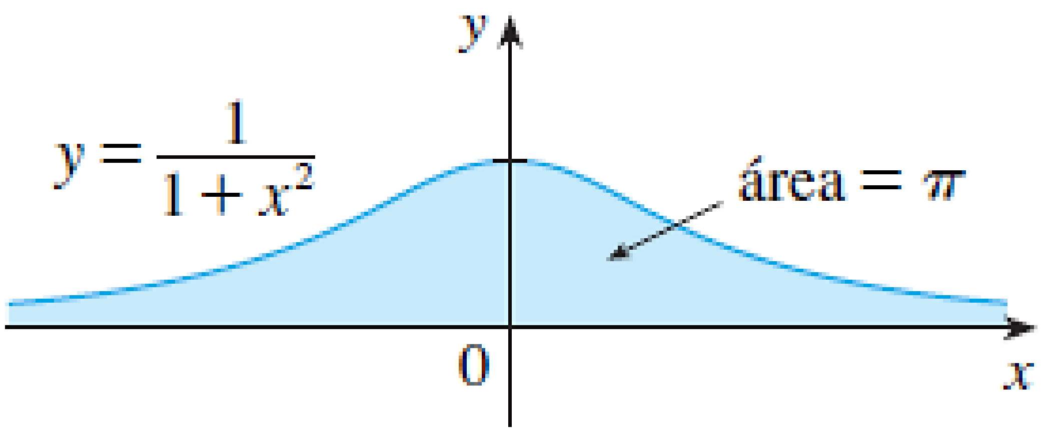

FIGURA 6

EXEMPLO 4

Para quais valores de p a integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

é convergente?

Sabemos do Exemplo 1 que se $p = 1$, então a integral é divergente; assim, vamos supor que $p \neq 1$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}\,dx\\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg]_{x=1}^{x=t}\\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]\end{aligned}$$

Se $p > 1$, então $p - 1 > 0$; assim, quando $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ e $1/t^{p-1} \to 0$. Portanto,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{se } p > 1$$

e, nesse caso, a integral converge. Mas se $p < 1$, então $p - 1 < 0$, de modo que

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \qquad \text{quando } t \to \infty$$

e a integral diverge.

Resumimos o resultado do Exemplo 4 para referência futura:

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

Tipo 2: Integrandos Descontínuos

Suponha que f seja uma função contínua positiva em um intervalo finito $[a, b)$, mas tenha uma assíntota vertical em b. Seja S a região delimitada sob o gráfico de f e acima do eixo x entre a e b. (Para as integrais Tipo 1, as regiões se estendem indefinidamente em uma direção horizontal. Aqui a região é infinita em uma direção vertical.) A área da parte de S entre a e t (a região sombreada na Figura 7) é

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

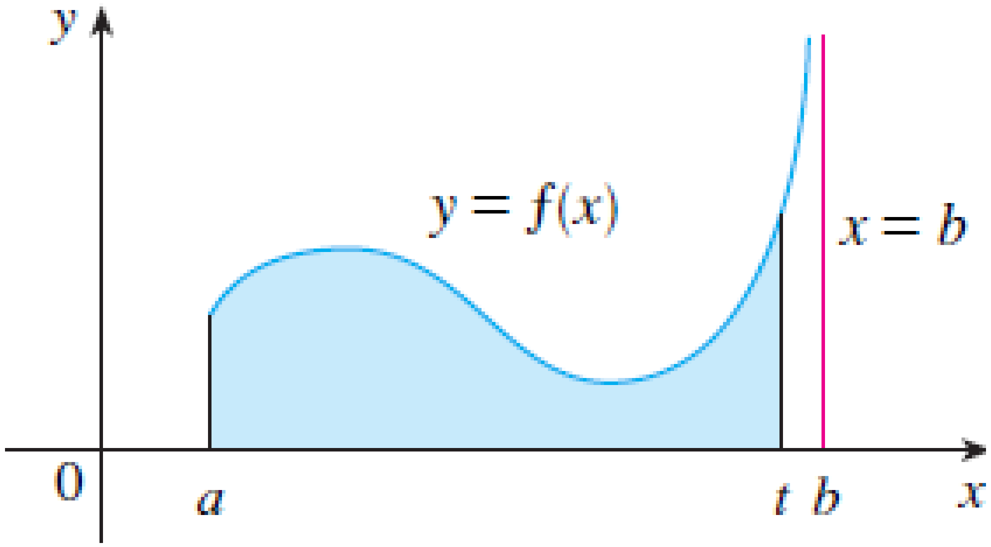

FIGURA 7

Se acontecer de $A(t)$ se aproximar de um número A quando $t \longrightarrow b^-$, então dizemos que a área da região S é A e escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Usamos essa equação para definir uma integral imprópria do Tipo 2, mesmo quando f não for uma função positiva, não importando o tipo de descontinuidade que f tenha em b.

3 Definição de uma Integral Imprópria do Tipo 2

(a) Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

se esse limite existir (como um número).

(b) Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

se esse limite existir (como um número).

A integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ é chamada **convergente** se o limite correspondente existir e **divergente** se o limite não existir.

(c) Se f tiver uma descontinuidade em c, onde $a < c < b$, e ambas as integrais impróprias $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ forem convergentes, então definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

As partes (b) e (c) da Definição 3 são mostradas nas Figuras 8 e 9 para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e f tiver uma assíntota vertical em a e c, respectivamente.

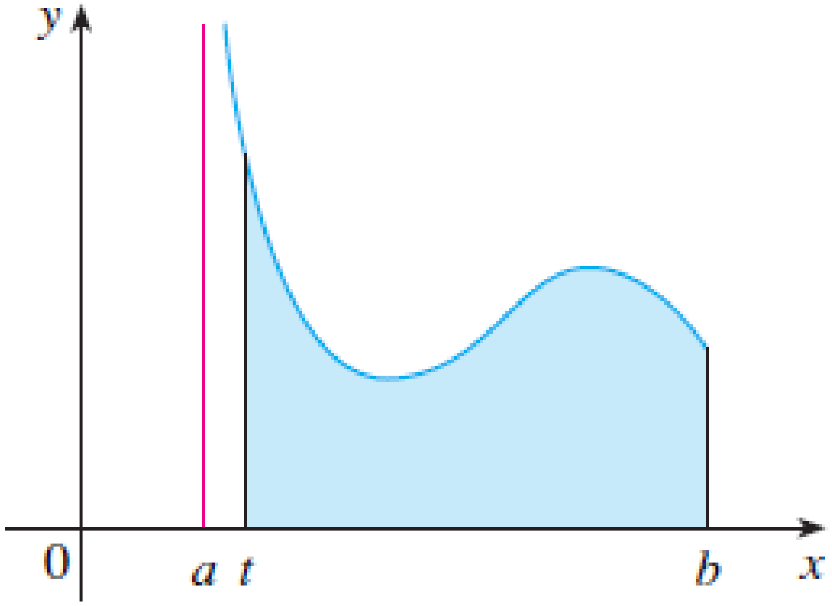

FIGURA 8

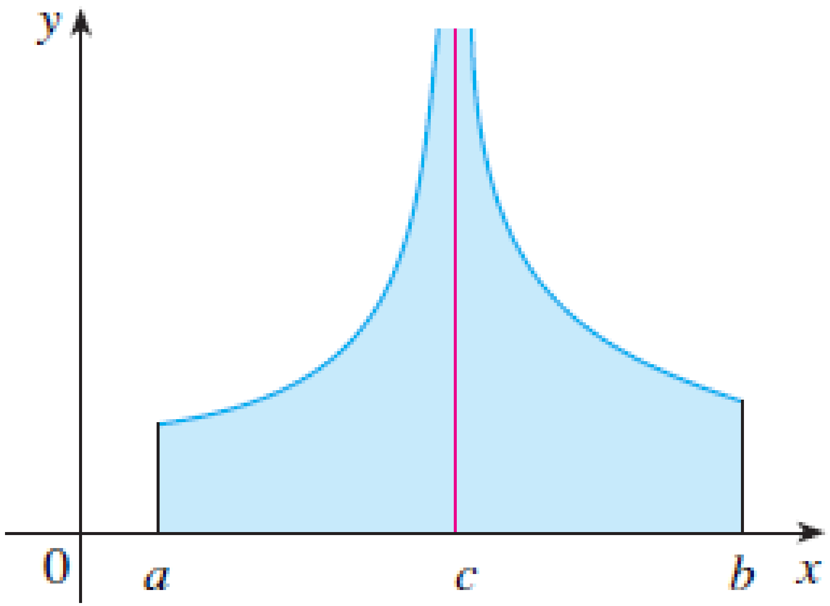

FIGURA 9

EXEMPLO 5

Encontre $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

Observamos primeiro que a integral dada é imprópria, porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tem a assíntota vertical $x = 2$. Como a descontinuidade infinita ocorre no extremo esquerdo de $[2,5]$, usamos a parte (b) da Definição 3:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5$$

$$= \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) = 2\sqrt{3}$$

Então, a integral imprópria dada é convergente e, como o integrando é positivo, podemos interpretar o valor da integral como a área da região sombreada na Figura 10.

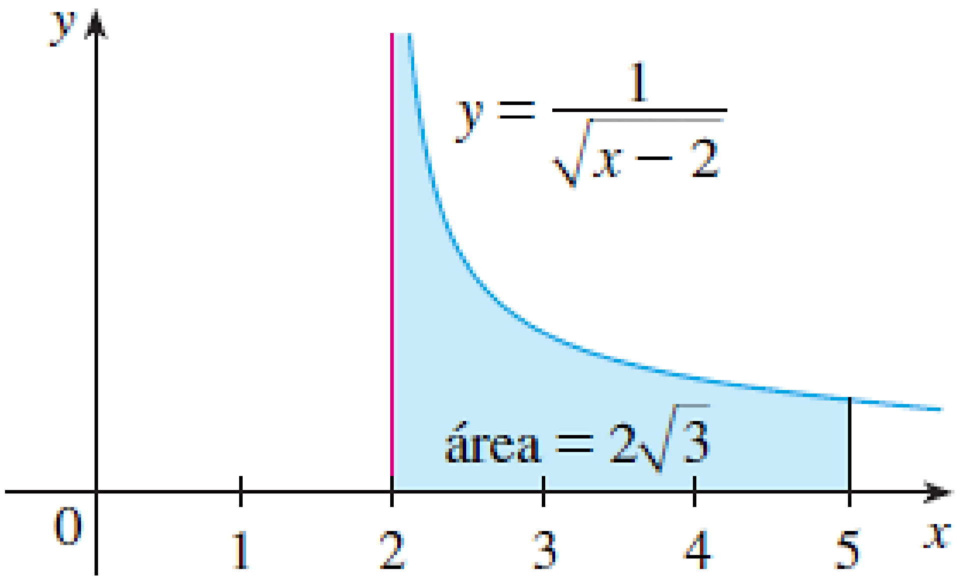

FIGURA 10

EXEMPLO 6

Determine se $\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx$ converge ou diverge.

Observe que a integral dada é imprópria, porque $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \sec x = \infty$.

Usando a parte (a) da Definição 3 e a Fórmula 14 da Tabela de Integrais, temos

$$\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx = \lim_{t \to (\pi/2)^-} \int_0^t \sec x \, dx = \lim_{t \to (\pi/2)-} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \Big]_0^t$$

$$= \lim_{t \to (\pi/2)-} [\ln(\sec t + \operatorname{tg} t) - \ln 1] = \infty$$

pois $\sec t \to \infty$ e $\operatorname{tg} t \to \infty$ quando $t \to (\pi/2)^-$. Então, a integral imprópria dada é divergente.

EXEMPLO 7

Calcule $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ se for possível.

Observe que a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical do integrando. Como ela ocorre no meio do intervalo $[0, 3]$, devemos usar a parte (c) da Definição 3 com $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

onde
$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\Big]_0^t$$
$$= \lim_{t\to 1^-} \left(\ln|t-1| - \ln|-1|\right)$$
$$= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

porque $1 - t \to 0^+$ quando $t \to 1^-$. Então $\int_0^1 dx/(x-1)$ é divergente.

Isso implica que $\int_0^3 dx/(x-1)$ é divergente.

[Não precisamos calcular $\int_1^3 dx/(x-1)$.]

Exercícios

Seção 7.4 pág. 445
Seção 7.8 pág. 477