Transformações Lineares

Definição

Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma *transformação linear* (aplicação linear) é uma função de V em W, $F: V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:

i) Quaisquer que sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V,

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$$

ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{v} \in V$,

$$F(k\mathbf{v}) = kF(\mathbf{v})$$

Exemplos

1) $V = W = \mathbf{R}$ e $Q: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto 0,2x$$

2) $V = \mathbf{R}$ e $W = \mathbf{R}$

$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $\mathbf{u} \mapsto \alpha\mathbf{u}$ ou $F(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}$

3) $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$\mathbf{u} \to \mathbf{u}^2$ ou $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^2$.

4) $V = \mathbf{R}^2$ e $W = \mathbf{R}^3$

$F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$

$(x, y) \mapsto (2x, 0, x + y)$ ou $F(x, y) = (2x, 0, x + y)$.

5) Sejam $V = W = P_n$ (polinômios de grau $\leqslant n$) e

$D: P_n \to P_n$, a aplicação derivada

$f \mapsto f'$

6) $V = \mathbf{R}^n$ e $W = \mathbf{R}^m$

Seja **A** uma matriz $m \times n$. Definimos

$L_{\mathbf{A}}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ por

$\mathbf{v} \mapsto A \cdot \mathbf{v}$

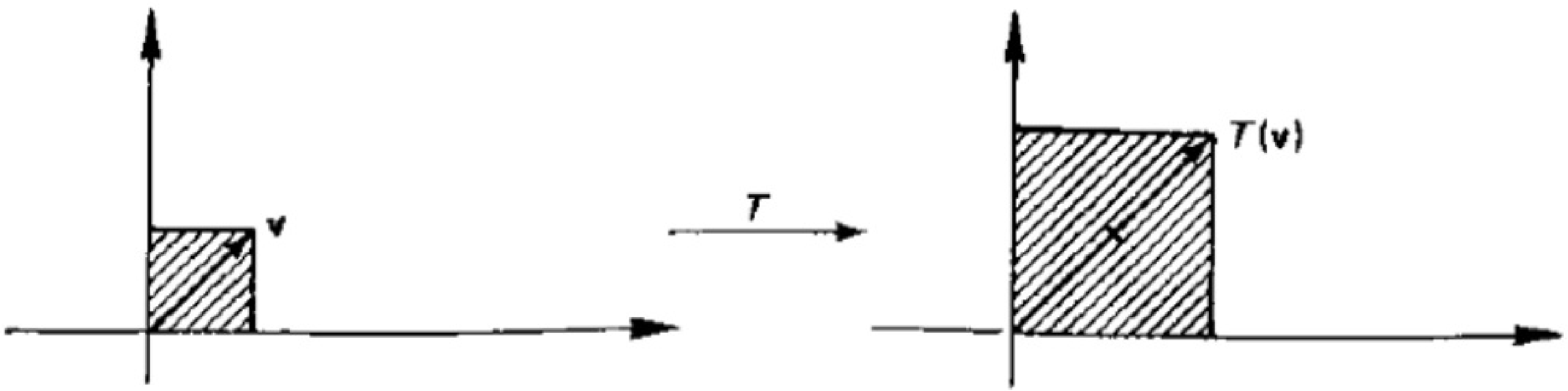
Transformações do Plano no Plano

Expansão ou Contração

$$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ \alpha \in \mathbf{R}$$
$$\mathbf{v} \mapsto \alpha \cdot \mathbf{v}$$

Por exemplo: $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

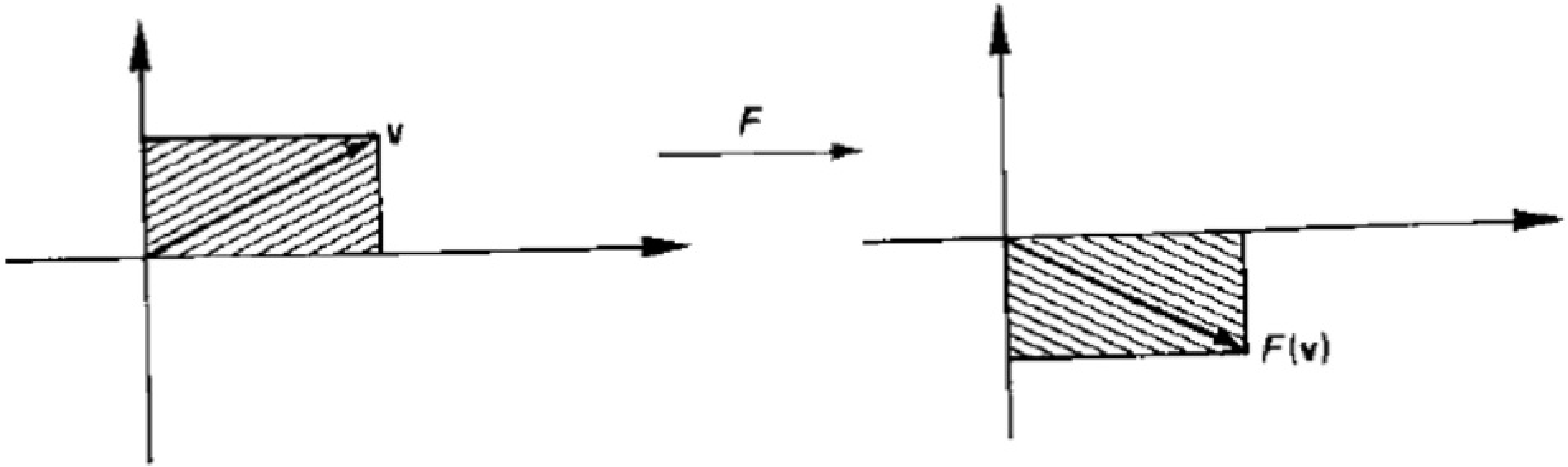
$$\mathbf{v} \mapsto 2\mathbf{v}, \quad \text{ou} \quad T(x, y) = 2(x, y)$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Reflexão em torno do eixo x

$F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x, -y)$

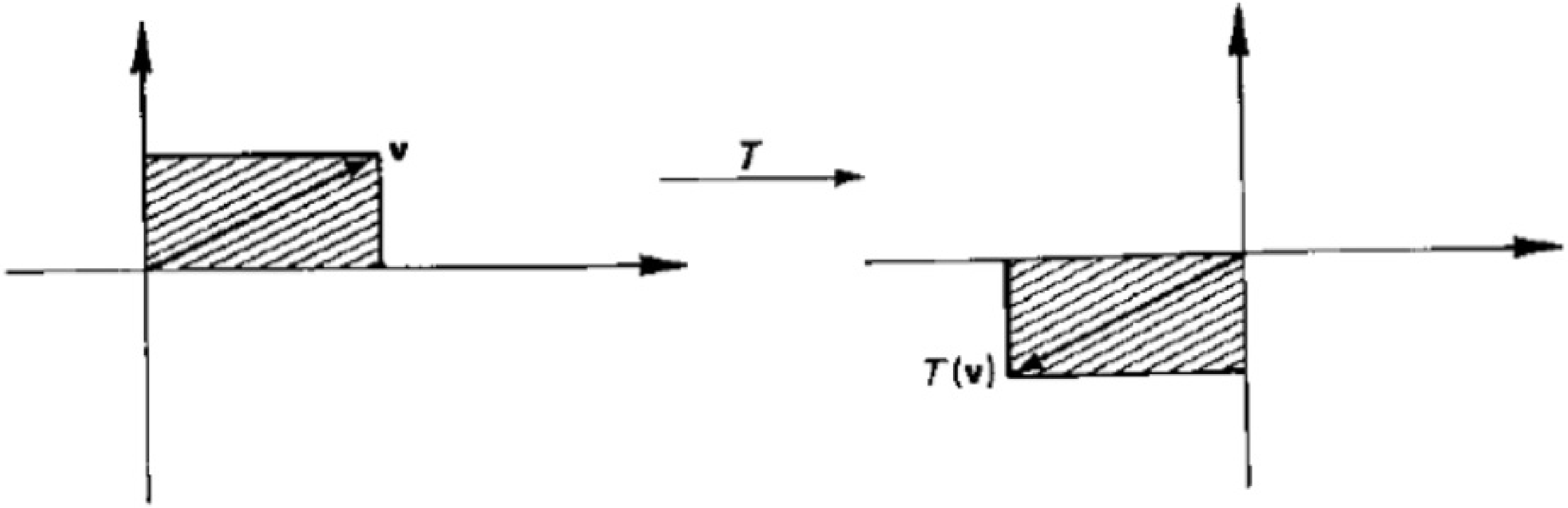


$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Reflexão em torno da origem

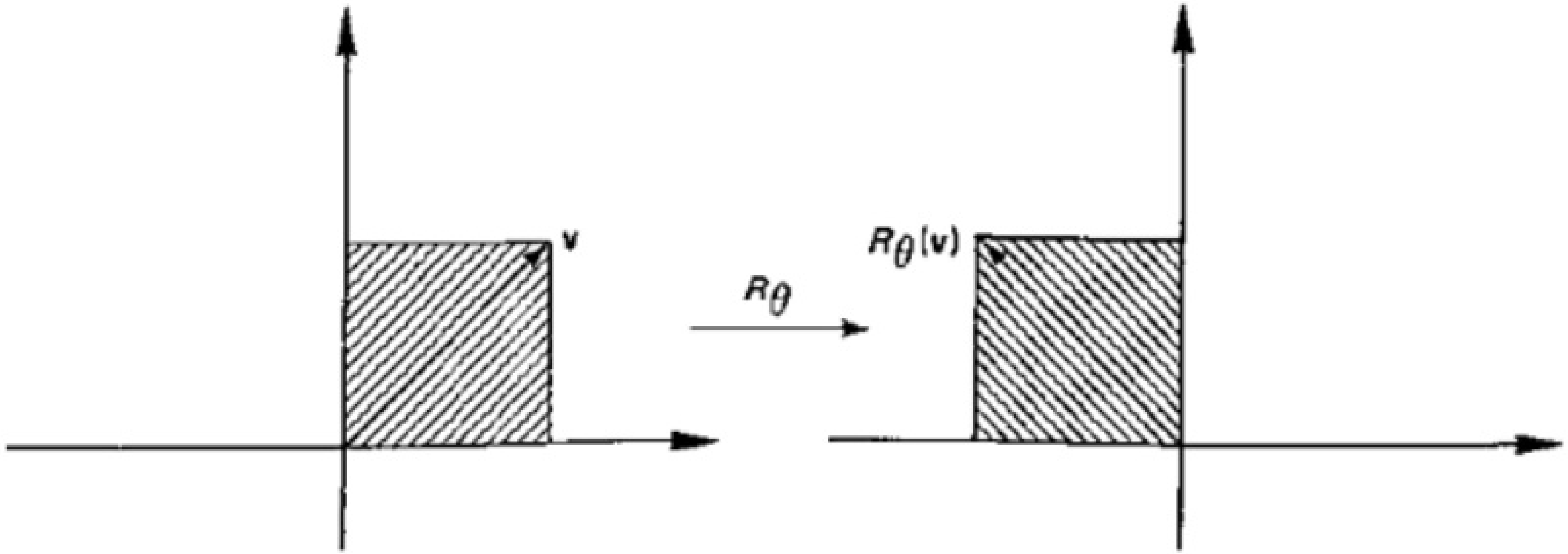
$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$, ou seja, $T(x, y) = (-x, -y)$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação de um Ângulo θ



$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta,\ y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta)$ ou na forma coluna,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Consideremos o caso particular onde $\theta = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, $\cos\theta = 0$ e $\operatorname{sen}\theta = 1$.

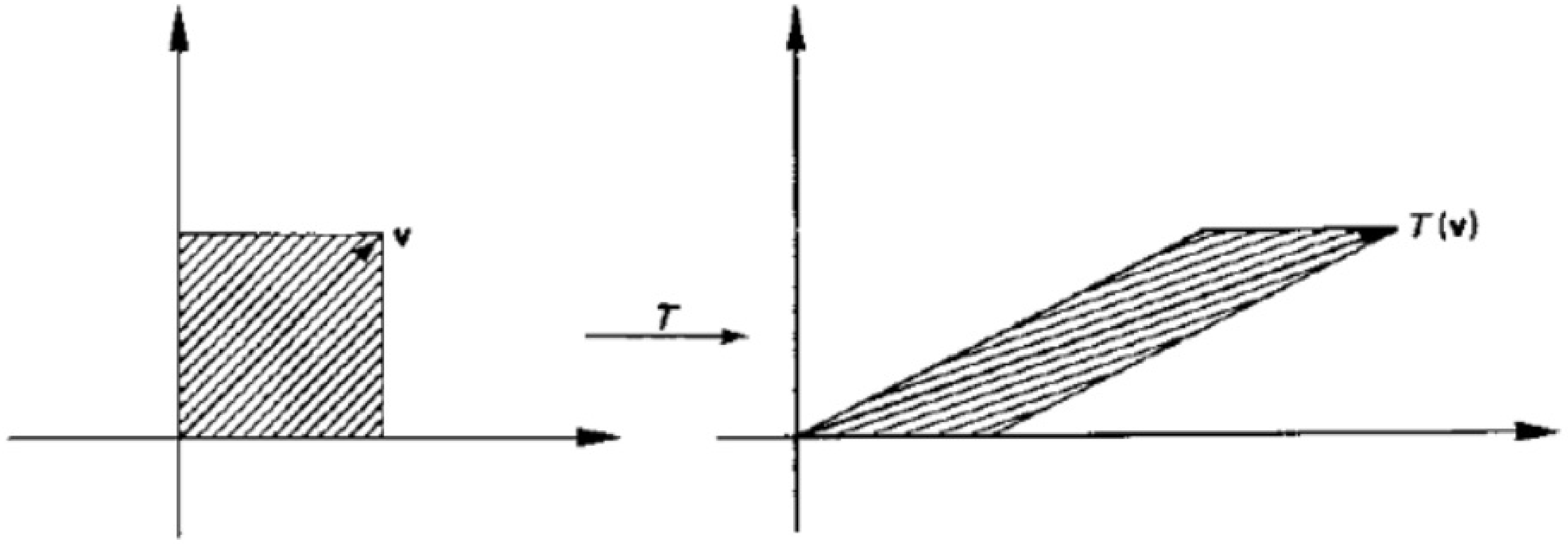
Então, $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Cisalhamento Horizontal

$T(x, y) = (x + \alpha y, y), \alpha \in \mathbb{R}$

Por exemplo: $T(x, y) = (x + 2y, y)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x + 2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Translação

$T(x, y) = (x + a, y + b)$

ou $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Esta é uma translação do plano segundo o vetor (a, b) e, a menos que $a = b = 0$, *T não é linear*.

Conceitos e Teoremas

Teorema

Dados dois espaços vetoriais reais V e W e uma base de V, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, sejam $\mathbf{w}_1 \ldots, \mathbf{w}_n$ elementos arbitrários de W. Então existe uma única aplicação linear $T: V \to W$ tal que $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \ldots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$. Esta aplicação é dada por:

se $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= a_1 T(\mathbf{v}_1) + \ldots + a_n T(\mathbf{v}_n) \\ &= a_1\mathbf{w}_1 + \ldots + a_n\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

Exemplo 1

Qual é a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(1, 0) = (2, -1, 0)$ e $T(0, 1) = (0, 0, 1)$?

Exemplo 2

Qual é a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?

Definição

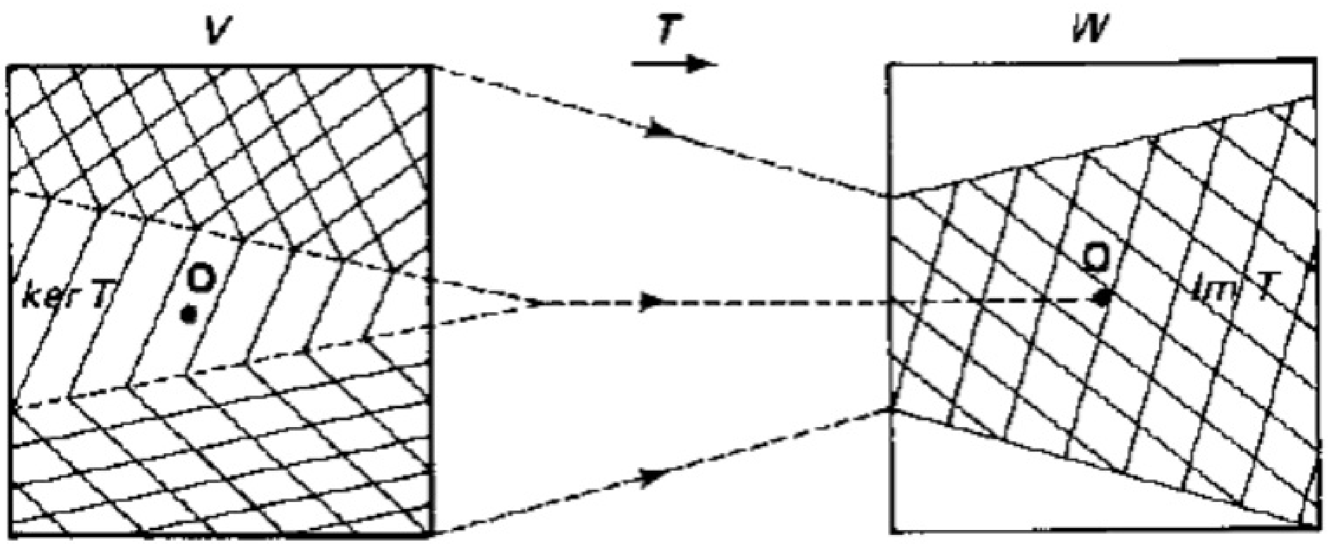
Seja $T: V \to W$ uma aplicação linear. A *imagem* de T é o conjunto dos vetores $\mathbf{w} \in W$ tais que existe um vetor $\mathbf{v} \in V$, que satisfaz $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ou seja

$$Im(T) = \{\mathbf{w} \in W;\ \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \ \text{ para algum } \ \mathbf{v} \in V\}$$

Definição

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ é chamado *núcleo* de T, sendo denotado por $ker(T)$. Isto é

$$ker(T) = \{\mathbf{v} \in V; \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$



Exemplo 1

$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$
$(x, y) \to x + y$
Neste caso temos $ker\, T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \quad x + y = 0\}$, isto é, $ker\, T$ é a reta $y = -x$. Podemos dizer ainda que $ker\, T = \{(x, -x); x \in \mathbf{R}\} = \{x(1, -1); x \in \mathbf{R}\} = [(1, -1)]$. $Im\, T = \mathbf{R}$, pois dado $w \in \mathbf{R}$, $w = T(w, 0)$.

Exemplo 2

$T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$.

Definição

Dada uma aplicação (ou função) $T: V \to W$, diremos que T é *injetora* se dados $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{v} \in V$ com $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ tivermos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Ou equivalentemente, T é injetora se dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, então $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$.

Definição

A aplicação $T: V \to W$ será *sobrejetora* se a imagem de T coincidir com W, ou seja $T(V) = W$.

Teorema

Seja $T: V \to W$, uma aplicação linear. Então $ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, se e somente se T é injetora.

Teorema

Seja $F: V \to W$ uma aplicação linear. Então $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$.

Corolário

Se $\dim V = \dim W$, então T linear é injetora se e somente se T é sobrejetora.

Corolário

Seja $T: V \to W$ uma aplicação linear injetora. Se $\dim V = \dim W$, então T leva base em base.

Quando uma transformação linear $T: V \to W$ for injetora e sobrejetora, ao mesmo tempo, dá-se o nome de *isomorfismo*. Quando há uma tal transformação entre dois espaços vetoriais dizemos que estes são *isomorfos*. Sob o ponto de vista de Álgebra Linear, espaços vetoriais isomorfos são, por assim dizer, idênticos. Observe que devido à proposição 5.3.9 espaços isomorfos devem ter a mesma dimensão. Portanto, pelo corolário 5.3.11, um isomorfismo leva base em base. Além disso, um isomorfismo $T: V \to W$ tem uma aplicação inversa $T^{-1}: W \to V$ que é linear, como você poderia provar, e também é um isomorfismo.

Exemplo

Seja $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$.
Vamos mostrar que T é um isomorfismo, e calcular sua inversa T^{-1}.

Aplicações Lineares e Matrizes

De um modo geral, fixadas as bases $\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $\beta' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$, à matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

podemos associar

$$T_{\mathbf{A}}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m.$$
$$\mathbf{v} \mapsto T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) \quad \text{como:}$$

Seja $\mathbf{X} = [\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Então, $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = y_1\mathbf{w}_1 + \dots + y_m\mathbf{w}_m$ onde $y_i = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{X}$ e $\mathbf{A}_i$ é a i-ésima linha de $\mathbf{A}$.

Em geral, dada uma matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$, ela é encarada como uma aplicação linear $T_{\mathbf{A}}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ em relação às bases canônicas de $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{R}^m$.

Exemplo 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \beta = \{(1, 0), (0, 1)\} \text{ e}$$

$\beta' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
$T_{\mathbf{A}}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$. Encontremos esta transformação linear.

Exemplo 2

Seja $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$.
Sejam $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e $\beta' = \{(1, 3), (1, 4)\}$.
Procuremos $[T]^{\beta}_{\beta'}$.

Exemplo 3

Seja T a transformação linear do Exemplo 1 e sejam $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Calculemos $[T]^{\beta}_{\beta'}$.

Exemplo 4

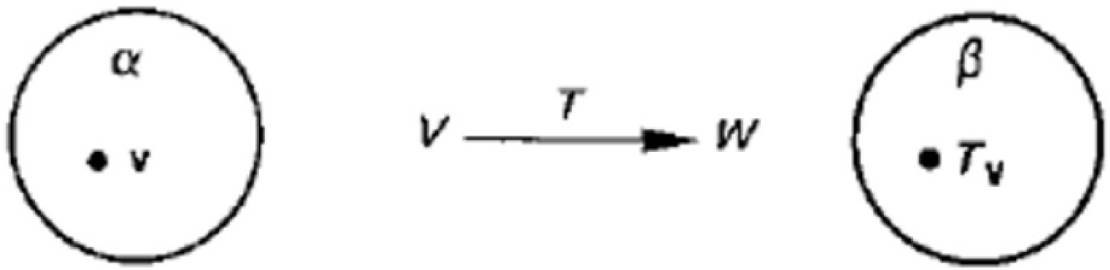
Dadas as bases $\beta = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de $\mathbf{R}^2$ e $\beta' = \{(0, 3, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ de $\mathbf{R}^3$, encontremos a transformação linear $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz é

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Teorema

Sejam V e W espaços vetoriais, α base de V, β base de W e $T: V \to W$ uma aplicação linear. Então, para todo $\mathbf{v} \in V$ vale:

$$[T(\mathbf{v})]_\beta = [T]^\alpha_\beta \cdot [\mathbf{v}]_\alpha,$$



Exemplo

Seja a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ dada por

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é base de $\mathbf{R}^2$, $\beta = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é base de $\mathbf{R}^3$. Queremos saber qual é a imagem do vetor $\mathbf{v} = (2, -3)$ pela aplicação T.

Teorema

Seja $T: V \to W$ uma aplicação linear e α e β bases de V e W respectivamente. Então

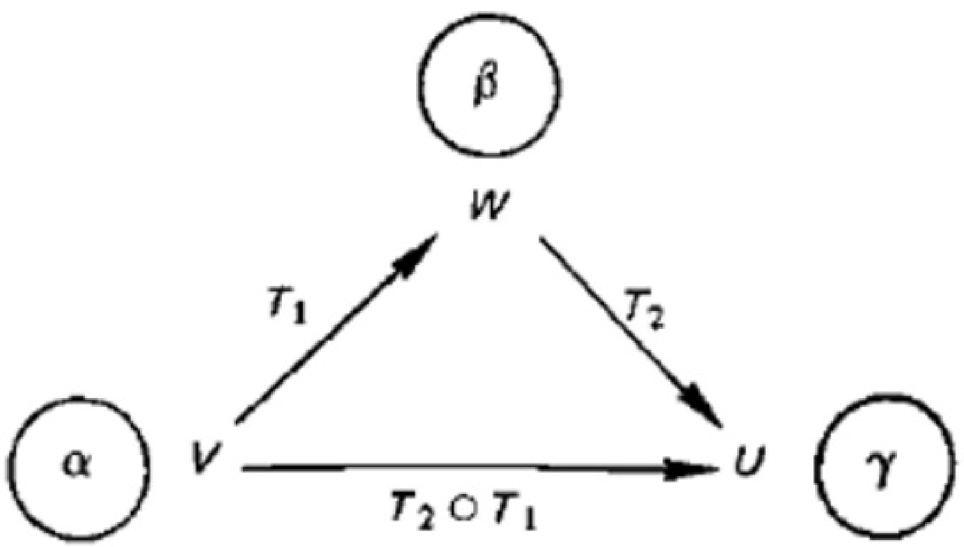
$$\dim Im(T) = \text{posto de } [T]^{\alpha}_{\beta}$$

$$\begin{aligned}\dim ker(T) &= \text{nulidade de } [T]^{\alpha}_{\beta} \\ &= \text{número de colunas} - \text{posto de } [T]^{\alpha}_{\beta}.\end{aligned}$$

Teorema

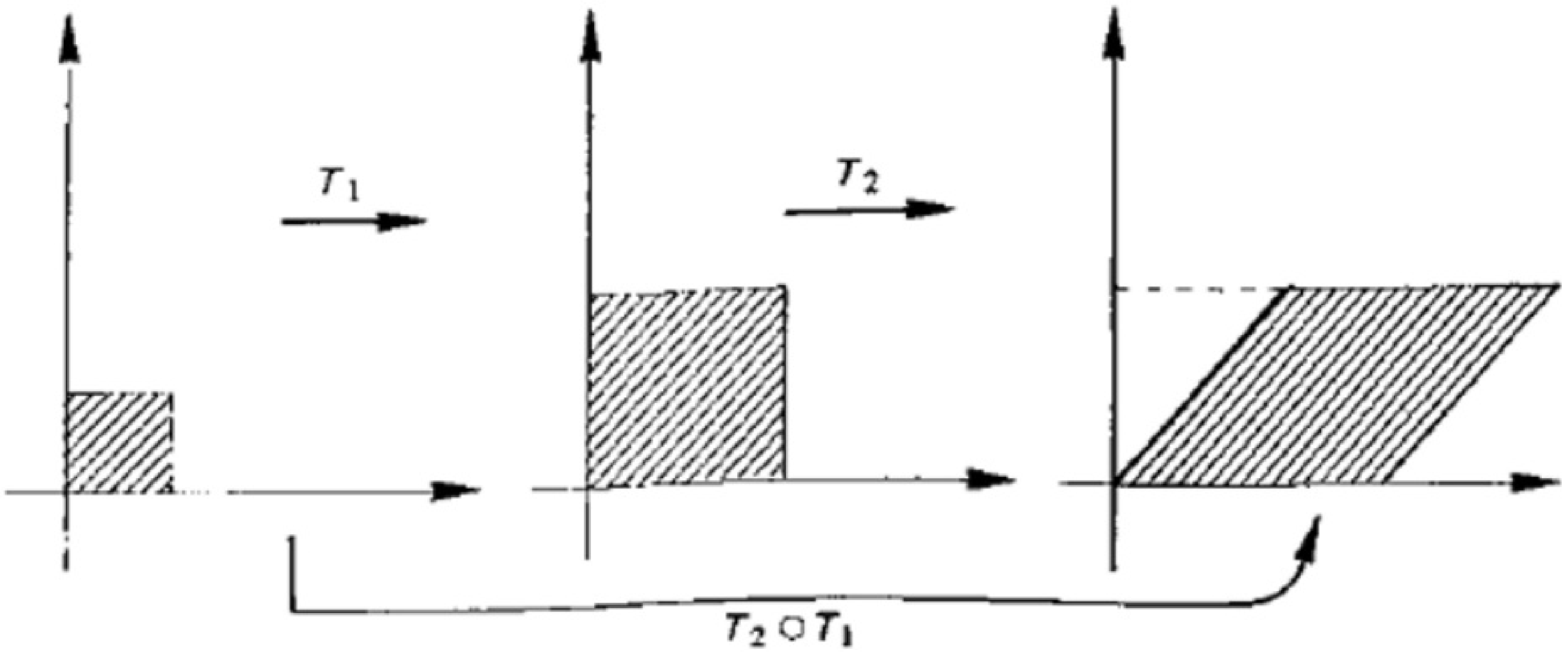
Sejam $T_1: V \to W$ e $T_2: W \to U$ transformações lineares e α, β, γ bases de V, W e U respectivamente. Então a composta de T_1 com T_2, $T_2 \circ T_1: V \to U$, é linear e

$$[T_2 \circ T_1]^{\alpha}_{\gamma} = [T_2]^{\beta}_{\gamma} \cdot [T_1]^{\alpha}_{\beta}$$



Exemplo 1

Consideremos uma expansão do plano $\mathbf{R}^2$ dada por $T_1(x, y) = 2(x, y)$, e um cisalhamento dado por $T_2(x, y) = (x + 2y, y)$. Ao efetuarmos primeiro a expansão e depois o cisalhamento, teremos a seqüência



Exemplo 2

Sejam as transformações lineares $T_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ e $T_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ cujas matrizes são

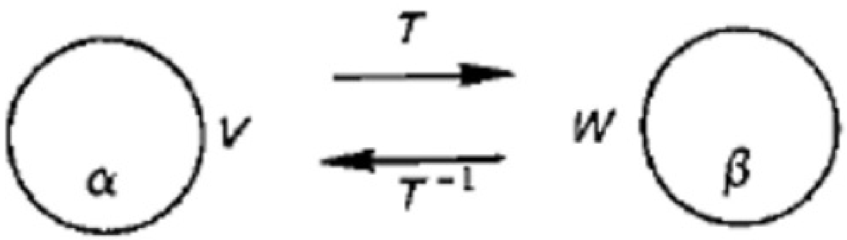
$$[T_1]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T_2]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação às bases $\alpha = \{(1, 0), (0, 2)\}$, $\beta = \{(\frac{1}{3}, 0, -3), (1, 1, 15), (2, 0, 5)\}$ e $\gamma = \{(2, 0), (1, 1)\}$. Queremos encontrar a transformação linear composta $T_2 \circ T_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, ou seja, precisamos achar $(T_2 \circ T_1)(x, y)$.

Corolário

Se $T: V \to W$ é uma transformação linear inversível (T é um isomorfismo) e α e β são as bases de V e W, então $T^{-1}: W \to V$ é um operador linear e

$$[T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} = ([T]^{\alpha}_{\beta})^{-1}$$



Corolário

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear e α e β bases de V e W. Então T é inversível se e somente se $\det [T]^{\alpha}_{\beta} \neq 0$.

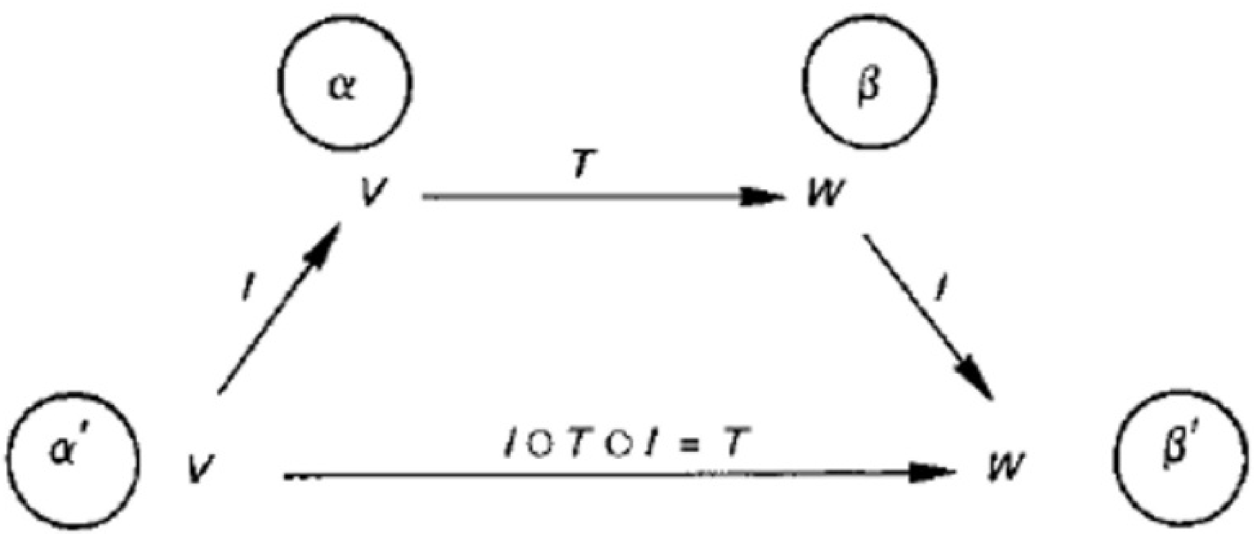
Exemplo

Seja $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ uma transformação linear dada por

$$[T]_{\xi}^{\xi} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde ξ é a base canônica de $\mathbf{R}^2$.

Corolário



$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [I \circ T \circ I]_{\beta'}^{\alpha'} = [I]_{\beta'}^{\beta} \, [T]_{\beta}^{\alpha} \, [I]_{\alpha}^{\alpha'}$$

Como caso particular da situação anterior temos:
Se $T: V \to V$ é uma transformação linear e α e β são bases de V, então

$$
\begin{tikzcd}
 & \overset{\alpha}{V} \arrow[r, "T"] & \overset{\alpha}{V} \arrow[dr, "I"] & \\
\beta \;\; V \arrow[ur, "I"] \arrow[rrr, "I \circ T \circ I = T"] & & & V \;\; \beta
\end{tikzcd}
$$

$$[T]^{\beta}_{\beta} = [I \circ T \circ I]^{\beta}_{\beta} = [I]^{\alpha}_{\beta}\,[T]^{\alpha}_{\alpha}\,[I]^{\beta}_{\alpha}.$$

Exemplo

Seja a transformação linear $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica ξ é

$$[T]^{\xi}_{\xi} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Calculemos a matriz desta transformação em relação à base $\beta = \{(0, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$.