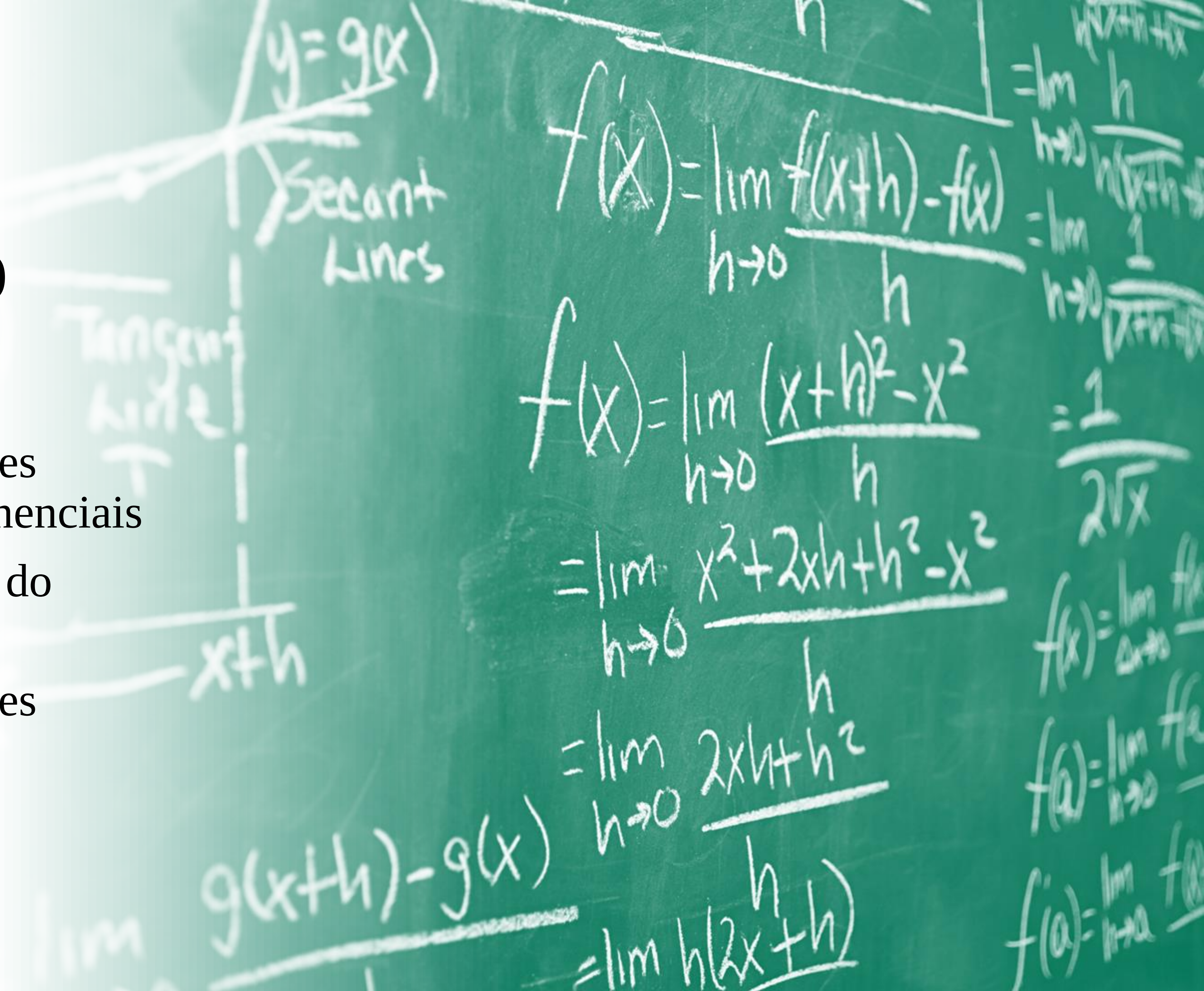
Regras de Derivação

- Derivadas de funções polinomiais e exponenciais
- Regra do produto e do quociente
- Derivadas de funções trigonométricas.



Introdução

Vimos que as derivadas são interpretadas como inclinações e taxas de variação.

Usamos a definição de derivada para calcular as derivadas de funções definidas por fórmulas. Mas seria tedioso se sempre usássemos a definição. Estudaremos regras para encontrar as derivadas sem usar diretamente a definição.

Essas regras de derivação nos permitem calcular com relativa facilidade as derivadas de:

- ✓ polinômios
- ✓ funções racionais
- ✓ funções algébricas
- ✓ funções exponenciais e logarítmicas
- ✓ funções trigonométricas e trigonométricas inversas.

Derivadas de Funções Polinomiais

1. Função Constante: $f(x) = c$

O gráfico é a reta horizontal $y = c$, cuja inclinação é 0.

Logo, devemos ter $f'(x) = 0$

Essa regra, na notação de Leibniz, é escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

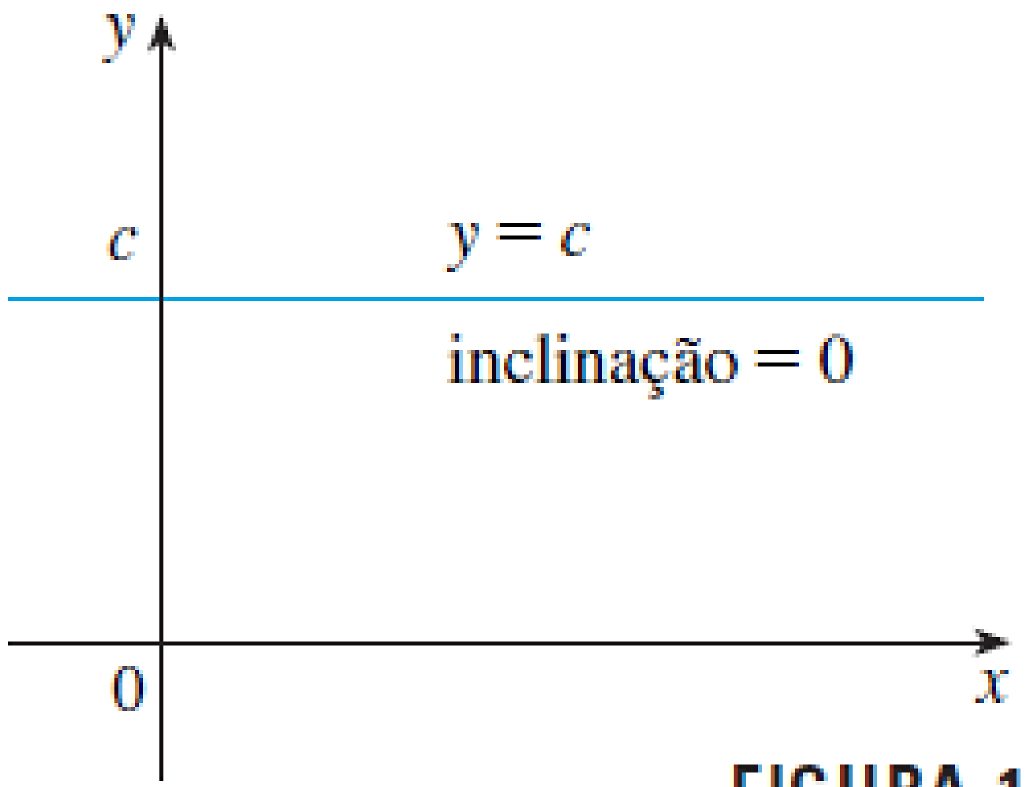


FIGURA 1

Uma demonstração formal

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

2. Funções Potências

Vamos olhar as funções $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro positivo.

Se $n = 1$, o gráfico de $f(x) = x$ é a reta $y = x$, cuja inclinação é 1. (veja a Figura 2).

Então

$$\boxed{1} \qquad \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Os casos $n = 2$ e $n = 3$, a partir da definição de derivada determinamos que

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

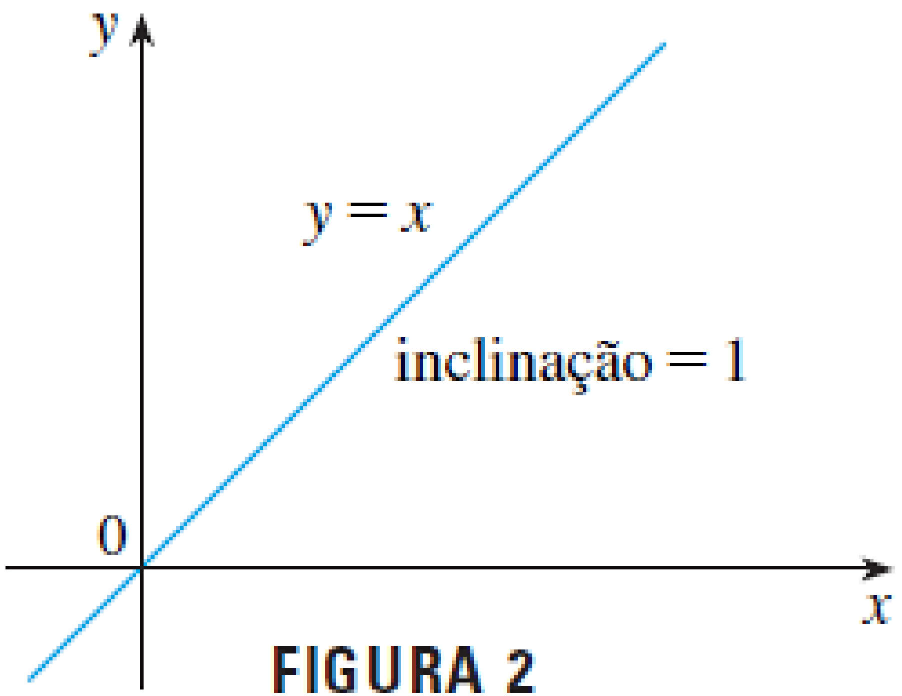


FIGURA 2

Para $n = 4$ achamos a derivada de $f(x) = x^4$ a seguir:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

Logo,

$$\boxed{3} \qquad \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Comparando as equações em [1], [2] e [3], temos:

A Regra da Potência Se n for um inteiro positivo, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

EXEMPLO 1

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6x^5$.

(b) Se $y = x^{1.000}$, então $y' = 1.000x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\frac{dy}{dt} = 4t^3$.

(d) $\frac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$.

O que dizer sobre as funções potências com os expoentes negativos?

Podemos verificar que, a partir da definição de uma derivada, se

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Podemos reescrever essa equação como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

de modo que a Regra da Potência é verdadeira quando $n = -1$.

E se o expoente for uma fração?

A partir da definição de uma derivada, encontramos que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Isso mostra que a Regra da Potência é verdadeira, mesmo quando $n = \frac{1}{2}$.

A Regra da Potência (Versão Geral) Se n for um número real qualquer, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

EXEMPLO 2

Derive:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

Em cada caso reescrevemos a função como potência de x.

(a) Uma vez que $f(x) = x^{-2}$, usamos a Regra da Potência com $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

Novas Derivadas a Partir de Conhecidas

Quando novas funções são formadas a partir de outras por adição, subtração, multiplicação ou divisão, suas derivadas podem ser calculadas em termos das derivadas das funções originais.

A Regra da Multiplicação por Constante

Se c for uma constante e f, uma função derivável, então

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

A Regra da Soma

Se f e g forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

A Regra da Subtração

Se f e g forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

EXEMPLO 5

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$

$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

Derivadas de Funções Exponenciais

Vamos calcular a derivada da função exponencial $f(x) = a^x$ usando a definição de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

O fator a^x não depende de h, logo podemos colocá-lo adiante do limite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Observe que o limite é o valor da derivada de f em 0, isto é,

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

Portanto, mostramos que se a função exponencial $f(x) = a^x$ for derivável em 0, então é derivável em toda parte e

$$\boxed{4} \qquad f'(x) = f'(0)a^x$$

Essa equação diz que *a taxa de variação de qualquer função exponencial é proporcional à própria função.* (A inclinação é proporcional à altura.)

Uma evidência numérica para a existência de $f'(0)$ é dada na tabela à esquerda para os casos $a = 2$ e $a = 3$. (Os valores são dados com precisão até a quarta casa decimal.) Aparentemente, os limites existem e

$$\text{para } a = 2, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0{,}69$$

$$\text{para } a = 3, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1{,}10$$

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
0,1	0,7177	1,1612
0,01	0,6956	1,1047
0,001	0,6934	1,0992
0,0001	0,6932	1,0987

Na realidade, pode ser demonstrado que estes limites existem e, com precisão até a sexta casa decimal, seus valores são

$$\frac{d}{dx}(2^x)\bigg|_{x=0} \approx 0{,}693147 \qquad\qquad \frac{d}{dx}(3^x)\bigg|_{x=0} \approx 1{,}098612$$

Assim, da Equação 4, temos

5 $$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x \qquad\qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1{,}10)3^x$$

Em vista das estimativas de $f'(0)$ para $a = 2$ e $a = 3$, parece plausível que haja um número a entre 2 e 3 para o qual $f'(0) = 1$. É tradição denotar esse valor pela letra e. Desse modo, temos a seguinte definição.

Definição do Número e

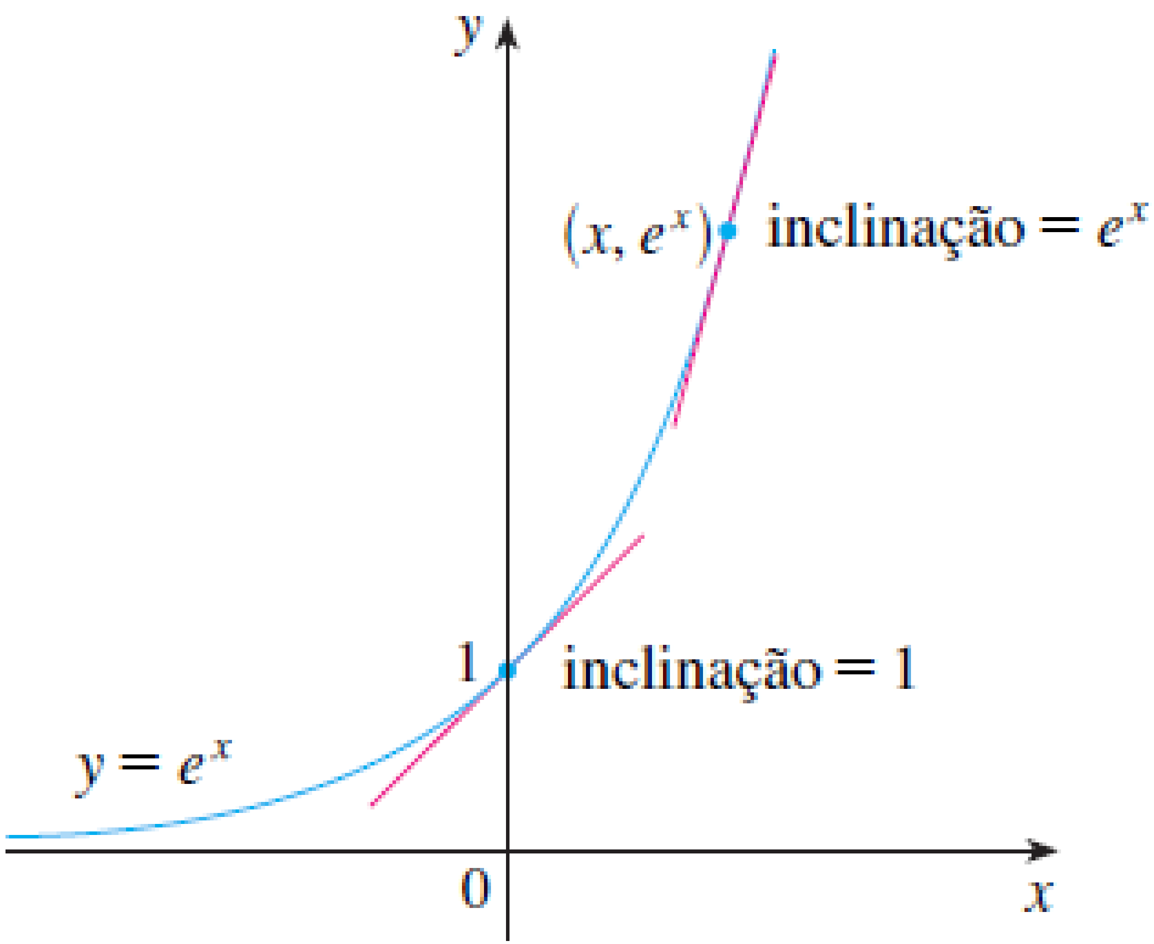
$$e \text{ é um número tal que } \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

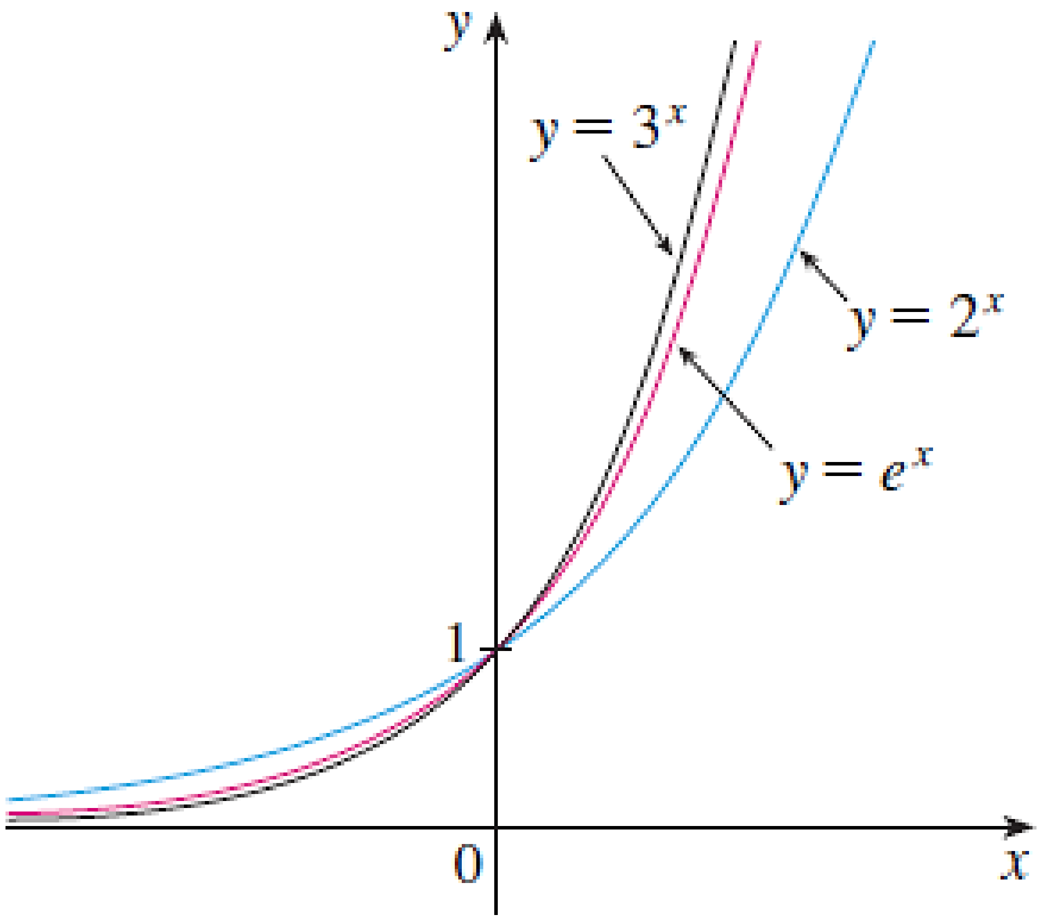
Se pusermos $a = e$, e consequentemente, $f'(0) = 1$ na Equação 4, teremos a seguinte importante fórmula de derivação:

Derivada da Função Exponencial Natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Assim, a função exponencial $f(x) = e^x$ tem a propriedade de ser sua própria derivada. O significado geométrico desse fato é que a inclinação da reta tangente à curva $y = e^x$ é igual à coordenada y do ponto.





A Regra do Produto

A Regra do Produto Se f e g são ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Em outras palavras, a Regra do Produto diz que *a derivada de um produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a segunda função vezes a derivada da primeira função.*

Na notação "linha":

$$(fg)' = fg' + gf'$$

EXEMPLO 1

(a) Se $f(x) = xe^x$, encontre $f'(x)$.
(b) Encontre a n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

(a) Pela Regra do Produto, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) = xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x$$

(b) Usando a Regra do Produto uma segunda vez, obtemos

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{d}{dx}[(x+1)e^x] &= (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1) = (x+1)e^x + e^x \cdot 1 \\ &= (x+2)e^x \end{aligned}$$

Aplicações subsequentes da Regra do Produto nos dão

$$f'''(x) = (x + 3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x + 4)e^x$$

Na realidade, cada derivação sucessiva adiciona outro termo e^x, logo

$$f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$$

EXEMPLO 2

Se $f(x) = \sqrt{x}\, g(x)$, onde $g(4) = 2$ e $g'(4) = 3$, encontre $f'(4)$.

Aplicando a Regra do Produto, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\, g(x)\right] = \sqrt{x}\ \frac{d}{dx}\left[g(x)\right] + g(x)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right] \\ &= \sqrt{x}\, g'(x) + g(x) \cdot \tfrac{1}{2} x^{-1/2} \\ &= \sqrt{x}\, g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Logo

$$f'(4) = \sqrt{4}\, g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2 \cdot 3 + \frac{2}{2 \cdot 2} = 6{,}5$$

A Regra do Quociente

A Regra do Quociente Se f e g são deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Em outros termos, a Regra do Quociente diz que *a derivada de um quociente é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador.*

Na notação "linha":

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

EXEMPLO 3

Seja $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$.

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

Tabela de Fórmulas de Derivação

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$(cf)' = cf'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = fg' + gf'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

Antes de começar é importante lembrar-se de que quando falamos sobre a função f definida para todo número real x por

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

entende-se que significa que o seno do ângulo cuja medida em radianos é x.

Uma convenção similar é adotada para as outras funções trigonométricas cos, tg, cossec, sec e cotg.

Lembre-se de que todas as funções trigonométricas são contínuas em todo número em seus domínios.

Derivadas de Funções Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen } x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{cossec } x) = -\text{cossec } x \text{ cotg } x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \text{ tg } x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{cotg } x) = -\text{cossec}^2 x$$

EXEMPLO 4

Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}$. Para quais valores de x o gráfico de f tem reta tangente horizontal?

A Regra do Quociente dá

$$f'(x) = \frac{(1 + \operatorname{tg} x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \operatorname{tg} x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{tg} x)\sec x \operatorname{tg} x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$$

usando a identidade $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$.

$$= \frac{\sec x(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} = \frac{\sec x(\operatorname{tg} x - 1)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$$

Uma vez que $\sec x$ nunca é 0, vemos que $f'(x) = 0$ quando $\operatorname{tg} x = 1$, e isso ocorre quando $x = n\pi + \pi/4$, onde n é um inteiro.

Exercícios

Exercícios da Lista de Derivadas das seguintes seções:

- Seção 3.1
- Seção 3.2
- Seção 3.3