Modelos Matemáticos

- Lineares
- Polinômios
- Funções Potência
- Racionais
- Algébricas
- Trigonométricas
- Exponenciais e
- Logarítmicas.

Modelos Matemáticos

Um modelo matemático é a descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real, como:

- o tamanho de uma população,
- a demanda por um produto,
- a velocidade de um objeto caindo,
- a concentração de um produto em uma reação química,
- a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer
- o custo da redução de poluentes.

O propósito desses modelos é entender o fenômeno e talvez fazer previsões sobre seu comportamento futuro.

- Dado um problema do mundo real, nossa primeira tarefa é formular um modelo matemático por meio da identificação e especificação das variáveis dependentes e independentes e da formulação de hipóteses que simplifiquem o fenômeno o suficiente, tornando-o matematicamente tratável.
- Usamos nosso conhecimento da situação física e nossos recursos matemáticos para obter equações que relacionem as variáveis.
- Em situações em que não existe uma lei física para nos guiar, pode ser necessário coletar dados (de uma biblioteca, da Internet ou conduzindo nossas próprias experiências) e examiná-los na forma de uma tabela, a fim de perceber os padrões.

- Dessa representação numérica de uma função podemos obter sua representação gráfica marcando os dados. Esse gráfico pode até sugerir a fórmula algébrica apropriada, em alguns casos.
- O segundo estágio é aplicar a matemática que sabemos ao modelo matemático que formulamos, a fim de tirar conclusões matemáticas.
- Então, em um terceiro estágio, interpretamos essas conclusões matemáticas como informações sobre o fenômeno original e oferecemos explicações ou fazemos previsões.
- A etapa final é testar nossas previsões, comparando-as com novos dados reais. Se as previsões não se ajustam bem à realidade, precisamos refinar nosso modelo ou formular um novo, começando novamente o ciclo.

A Figura 1 ilustra o processo de modelagem matemática.

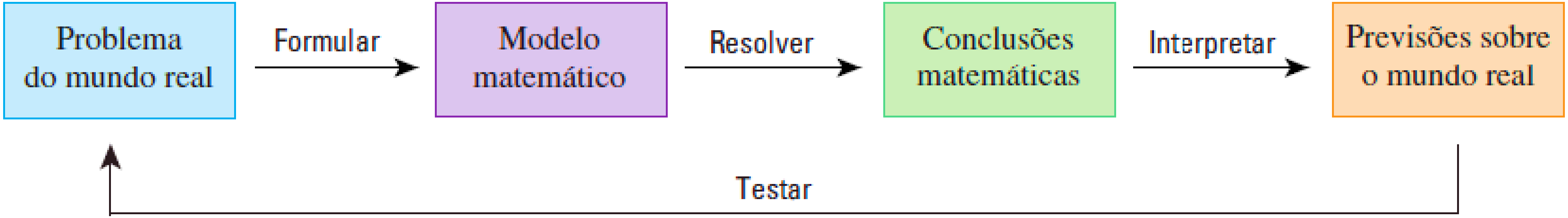


FIGURA 1 Processo de modelagem

Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física – é uma idealização.

Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, precisão suficiente para conclusões significativas.

É importante entender as limitações do modelo.

Existem vários tipos diferentes de funções que podem ser usados para modelar as relações observadas no mundo real.

A seguir, discutiremos o comportamento e os gráficos dessas funções e daremos exemplos de situações modeladas apropriadamente por elas.

Modelos Lineares

Quando dizemos que y é uma função linear de x, queremos dizer que o gráfico da função é uma reta; assim, podemos usar a forma inclinação-intersecção da equação de uma reta para escrever uma fórmula para a função, como

$$y = f(x) = mx + b$$

onde m é o coeficiente angular da reta e b é a intersecção com o eixo y.

Uma característica peculiar das funções lineares é que elas variam a uma taxa constante.

Por exemplo, a Figura 2 mostra o gráfico da função linear $f(x) = 3x - 2$ e uma tabela de valores amostrais.

Note que sempre que x aumenta 0,1, o valor de $f(x)$ aumenta em 0,3. Então, $f(x)$ aumenta três vezes mais rápido que x. Assim, a inclinação do gráfico $y = 3x - 2$, isto é 3, pode ser interpretada como a taxa de mudança de y com relação ao x.

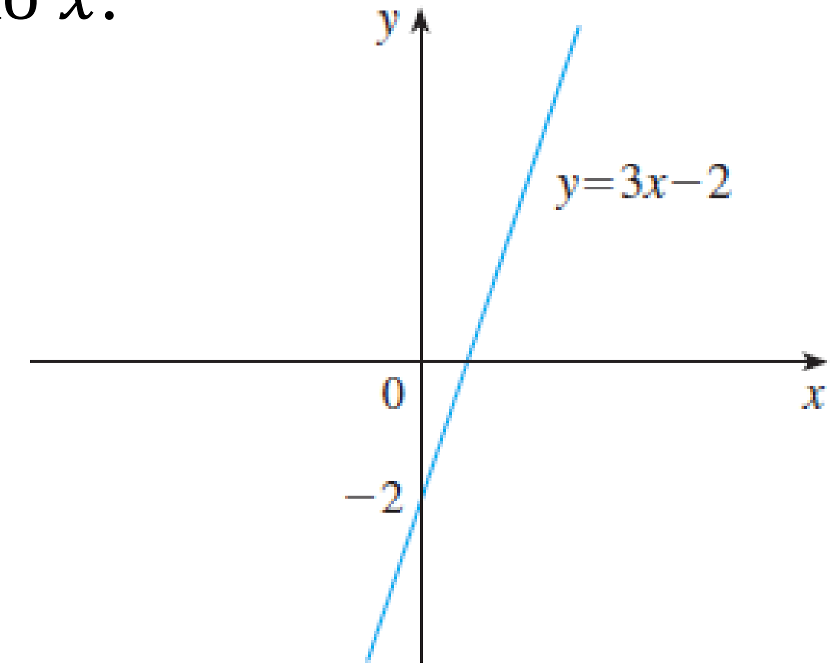


FIGURA 2

x	$f(x) = 3x - 2$
1,0	1,0
1,1	1,3
1,2	1,6
1,3	1,9
1,4	2,2
1,5	2,5

EXEMPLO

a) À medida que o ar seco move-se para cima, ele se expande e esfria. Se a temperatura do solo for de 20 °C e a temperatura a uma altitude de 1 km for de 10 ºC, expresse a temperatura T (em °C) como uma função da altitude h (em km), supondo que um modelo linear seja apropriado.

b) Faça um gráfico da função na parte (a). O que a inclinação representa?

c) Qual é a temperatura a 2,5 km de altura

a) Como estamos supondo que T é uma função linear de h, podemos escrever

$$T = mh + b$$

Também nos é dado que $T = 20$ quando $h = 0$, então

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

Em outras palavras, a intersecção com o eixo y é $b = 20$.

Também nos é dado que $T = 10$ quando $h = 1$, então

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

A inclinação da reta é, portanto, $m = 10 - 20 = -10$ e a função linear procurada é

$$T = -10h + 20$$

b) O gráfico está esboçado na Figura 3.

A inclinação é igual a $m = -10$ °C/km e representa a taxa de variação da temperatura em relação à altura.

c) A uma altitude de $h = 2{,}5$ km, a temperatura é

$$T = -10(2{,}5) + 20 = -5 \text{ °C}$$

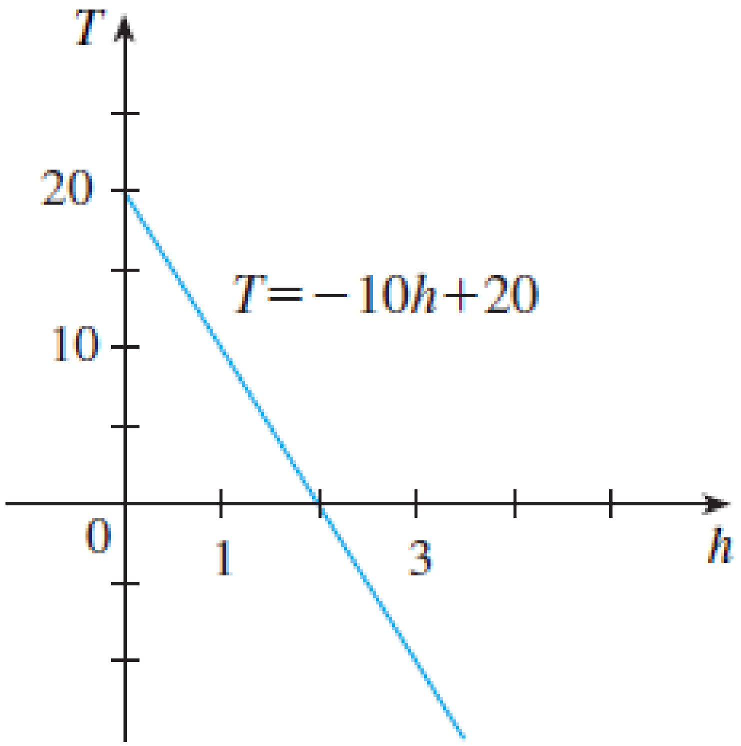


FIGURA 3

Polinômios

Uma função P é denominada polinômio se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo e os números $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ são constantes chamadas coeficientes do polinômio.

O domínio de qualquer polinômio é $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Se o coeficiente dominante $a_n \neq 0$, então o grau do polinômio é n.

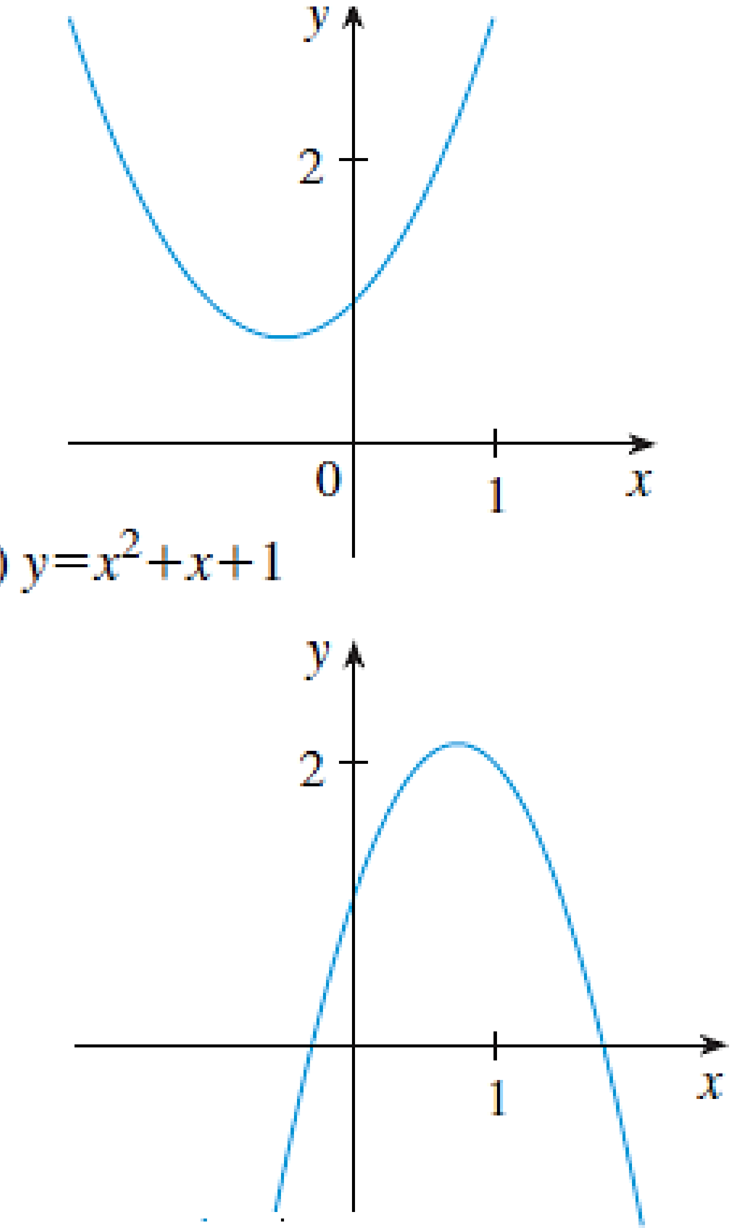
Por exemplo, a função $P(X) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$

é um polinômio de grau 6.

- Um polinômio de grau 1 é da forma $P(x) = mx + b$, portanto, é uma ***função linear*.**
- Um polinômio de grau 2 é da forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ e é chamado ***função quadrática*.**

Neste caso o gráfico de P é sempre uma parábola obtida por translações da parábola $y = ax^2$.

A parábola convexa para cima se $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$. (Veja a Figura 7.)



(a) $y = x^2 + x + 1$

(b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

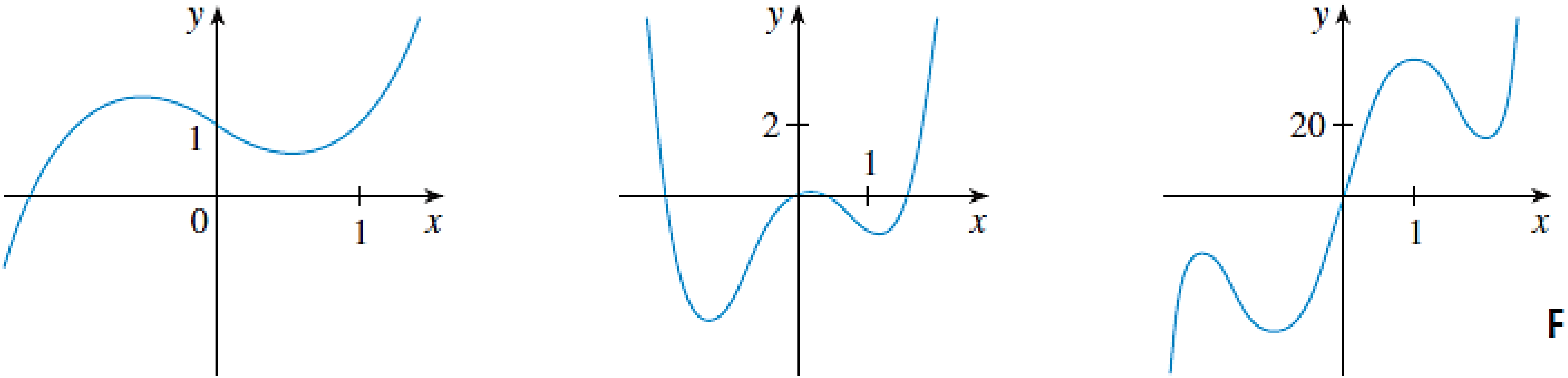
FIGURA 7

Um polinômio de grau 3 tem a forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \;\; a \neq 0$$

e é chamado ***função cúbica***.

A Figura 8 mostra o gráfico de uma função cúbica na parte (a) e os gráficos de polinômios de graus 4 e 5 nas partes (b) e (c).



(a) $y = x^3 - x + 1$

(b) $y = x^4 - 3x^2 + x$

(c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

FIGURA 8

Funções Potências

Uma função da forma $f(x) = x^a$, onde a é uma constante, é chamada ***função potência***. Vamos considerar vários casos.

i. $\boldsymbol{a = n}$**, em que** $\boldsymbol{n}$ **é um inteiro positivo**

- Os gráficos de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4,$ e 5 são indicados na Figura 11. São polinômios com somente um termo.
- Já conhecíamos os gráficos de $y = x$ (uma reta passando pela origem, com inclinação 1) e $y = x^2$ (uma parábola).

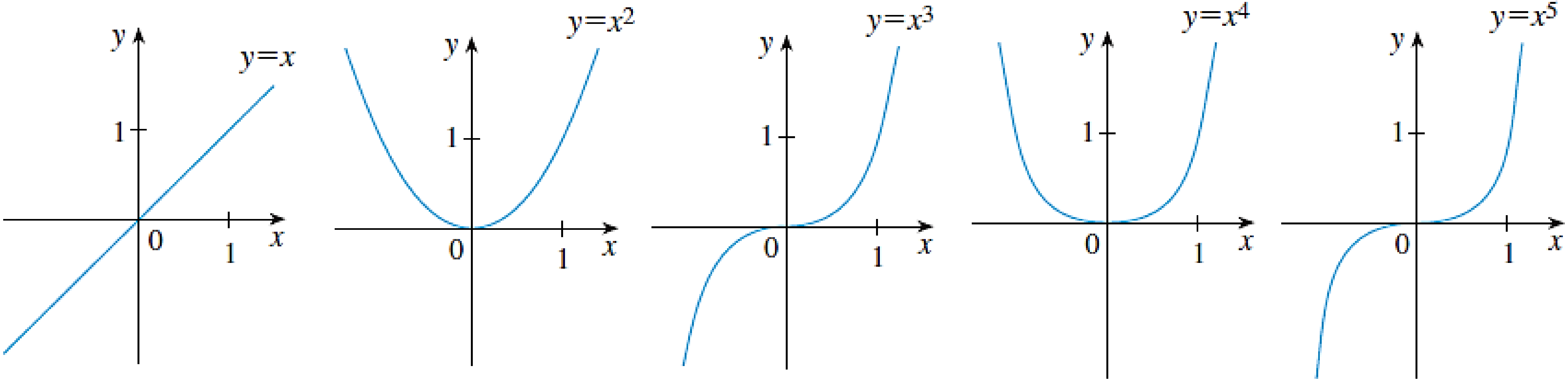


FIGURA 11 Gráficos de $f(x)=x^n$ para $n=1, 2, 3, 4, 5$

- A forma geral do gráfico de $f(x) = x^n$ depende de n ser par ou ímpar.
- Se n for par, então $f(x) = x^n$ será uma função par e seu gráfico será similar ao da parábola $y = x^2$.
- Se n for ímpar, então $f(x) = x^n$ será uma função ímpar e seu gráfico será similar ao de $y = x^3$.

Observe na Figura 12, porém, que à medida que n cresce, o gráfico de $y = x^n$ torna-se mais achatado quando próximo de zero e mais inclinado quando $|x| \geq 1$.

Se x for pequeno, então x^2 é menor; x^3 será ainda menor, x^4 será muito menor, e assim por diante.

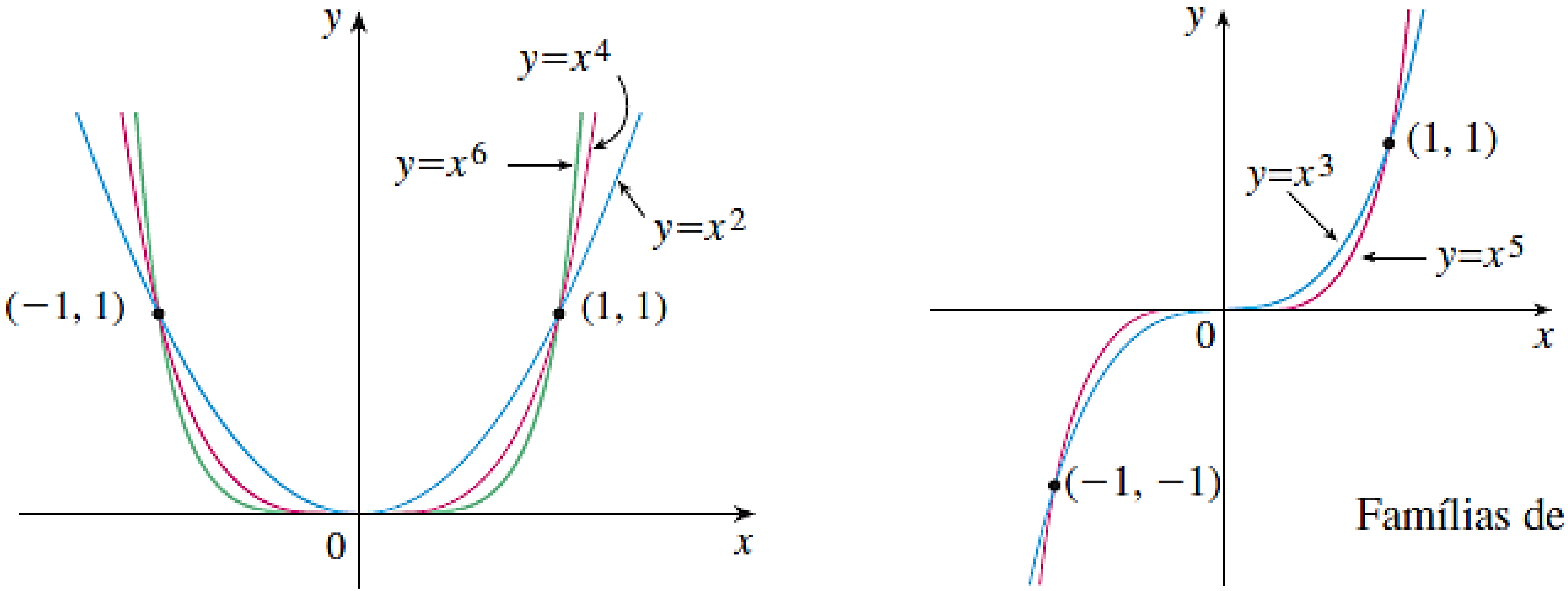


FIGURA 12
Famílias de funções potências

ii. $\boldsymbol{a = {}^{1}/_{n}}$, **onde $\boldsymbol{n}$ é um inteiro positivo**

- A função $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ é uma **função raiz**.
- Para $n = 2$, ela é a função raiz quadrada, $f(x) = \sqrt{x}$ cujo domínio é $[0, \infty)$ e cujo gráfico é a parte superior da parábola $x = y^2$. [Veja a Figura 13(a).]
- Para outros valores pares de n, o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ é similar ao de $y = \sqrt{x}$.

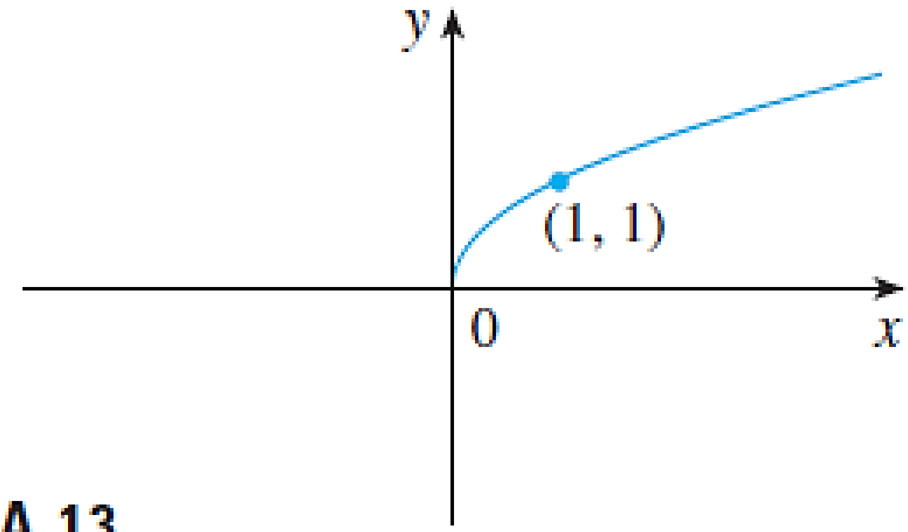


FIGURA 13
Gráficos das funções raízes

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

- Para $n = 3$, temos a função raiz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cujo domínio é $\mathbb{R}$. (lembre-se de que todo número real tem uma raiz cúbica) e cujo gráfico está na Figura 13(b).
- O gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ para n ímpar $(n > 3)$ é similar ao de $y = \sqrt[3]{x}$.

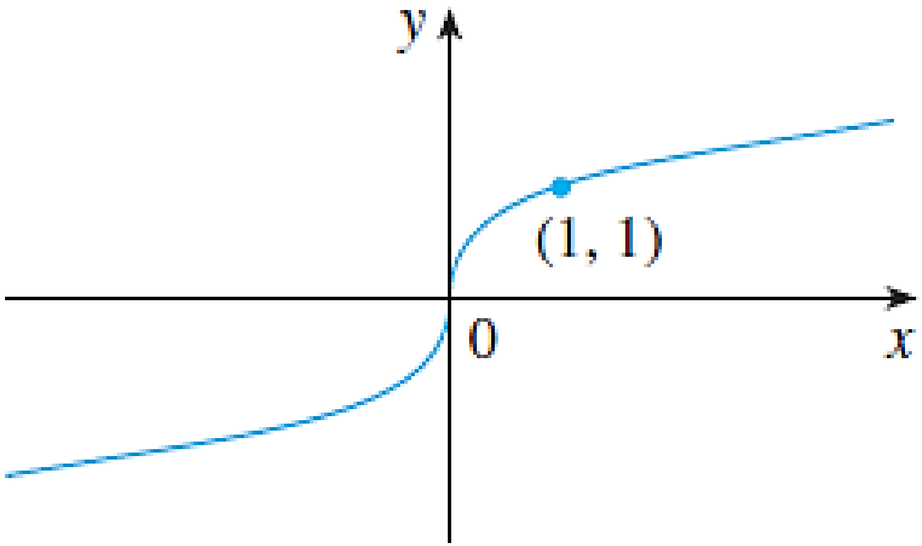


FIGURA 13
Gráficos das funções raízes

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

iii. ***a* = –1**

O gráfico de função recíproca $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ está na Figura 14.

Seu gráfico tem equação $y = \frac{1}{x}$, ou $xy = 1$, e é uma hipérbole com os eixos coordenados como suas assíntotas.

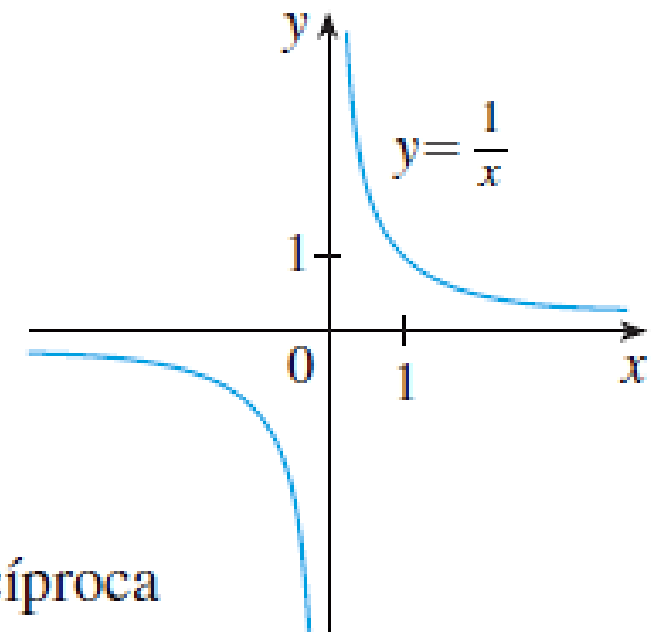


FIGURA 14
A função recíproca

Esta função aparece em física e química em conexão com a Lei de Boyle, que afirma que, sendo constante a temperatura, o volume de um gás V é inversamente proporcional à pressão P.

$$V = \frac{C}{P}$$

onde C é uma constante.

Assim, o gráfico de V como uma função de P (veja a Figura 15) tem o mesmo formato geral da metade direita da Figura 14.

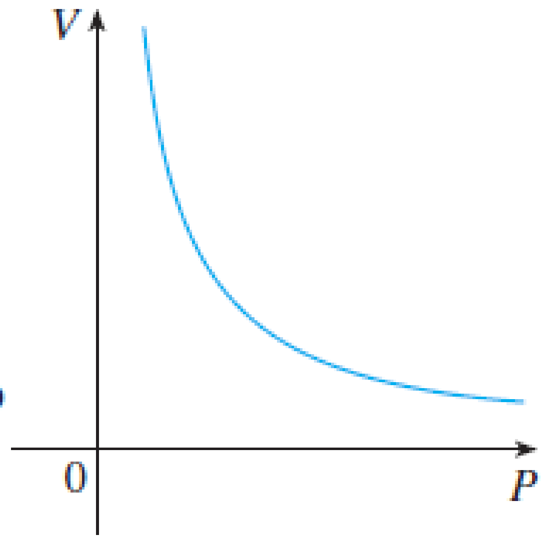


FIGURA 15
Volume como uma função da pressão à temperatura constante

Funções Racionais

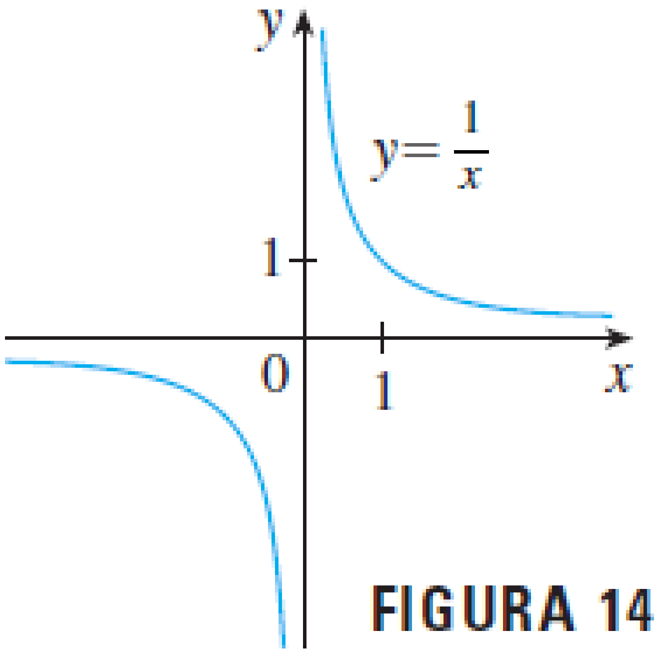


FIGURA 14

Uma **função racional** f é a razão de dois polinômios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios.

- O domínio consiste em todos os valores de x tais que $Q(x) \neq 0$.
- Um exemplo simples de uma função racional é a função $f(x) = \frac{1}{x}$, cujo domínio é $\{x; x \neq 0\}$.
- Esta é a função recíproca cujo gráfico está na Figura 14.

EXEMPLO

A função

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

é uma função racional com domínio:

$$\{x \mid x \neq \pm 2\}.$$

O gráfico é mostrado na Figura 16.

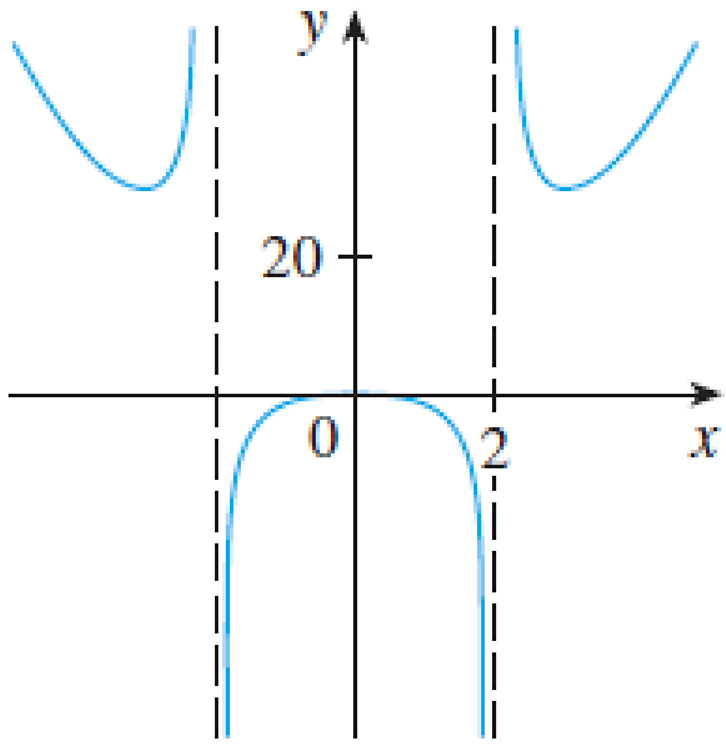


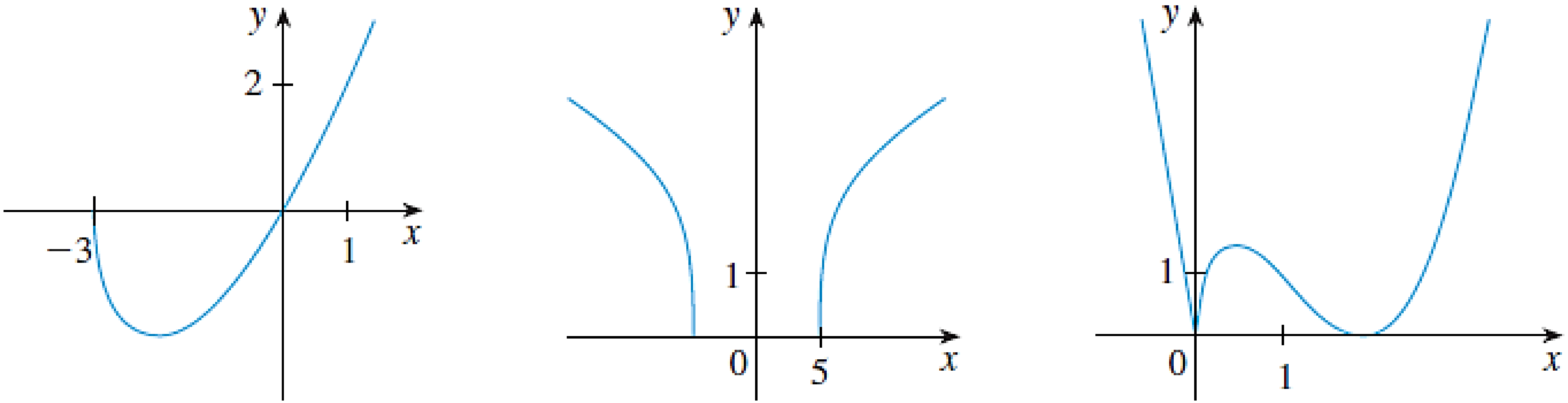
FIGURA 16

Funções Algébricas

Uma função f é chamada **função algébrica** se puder ser construída por meio de operações algébricas (como adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes) a partir de polinômios.
Toda função racional é automaticamente uma função algébrica. A seguir, alguns exemplos:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}.$$

Quando trabalharmos com funções algébricas, veremos que seus gráficos podem assumir diversas formas. A Figura 17 ilustra algumas dessas possibilidades.



(a) $f(x)=x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x)=\sqrt[4]{x^2-25}$ (c) $h(x)=x^{2/3}(x-2)^2$

FIGURA 17

EXEMPLO

Um exemplo de função algébrica ocorre na Teoria da Relatividade. A massa de uma partícula com uma velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula em repouso e $c = 3{,}0 \times 10^5$ km/s é a velocidade da luz no vácuo.

Funções Trigonométricas

Há uma revisão de trigonometria e de funções trigonométricas no Apêndice D.

Em cálculo, convenciona-se dar a medida de ângulos em radianos (exceto quando explicitamente mencionado).

- Por exemplo, quando utilizamos a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, entende-se que $\operatorname{sen} x$ seja o seno de um ângulo cuja medida em radianos é x.

Assim, os gráficos das funções seno e cosseno estão na Figura 18.

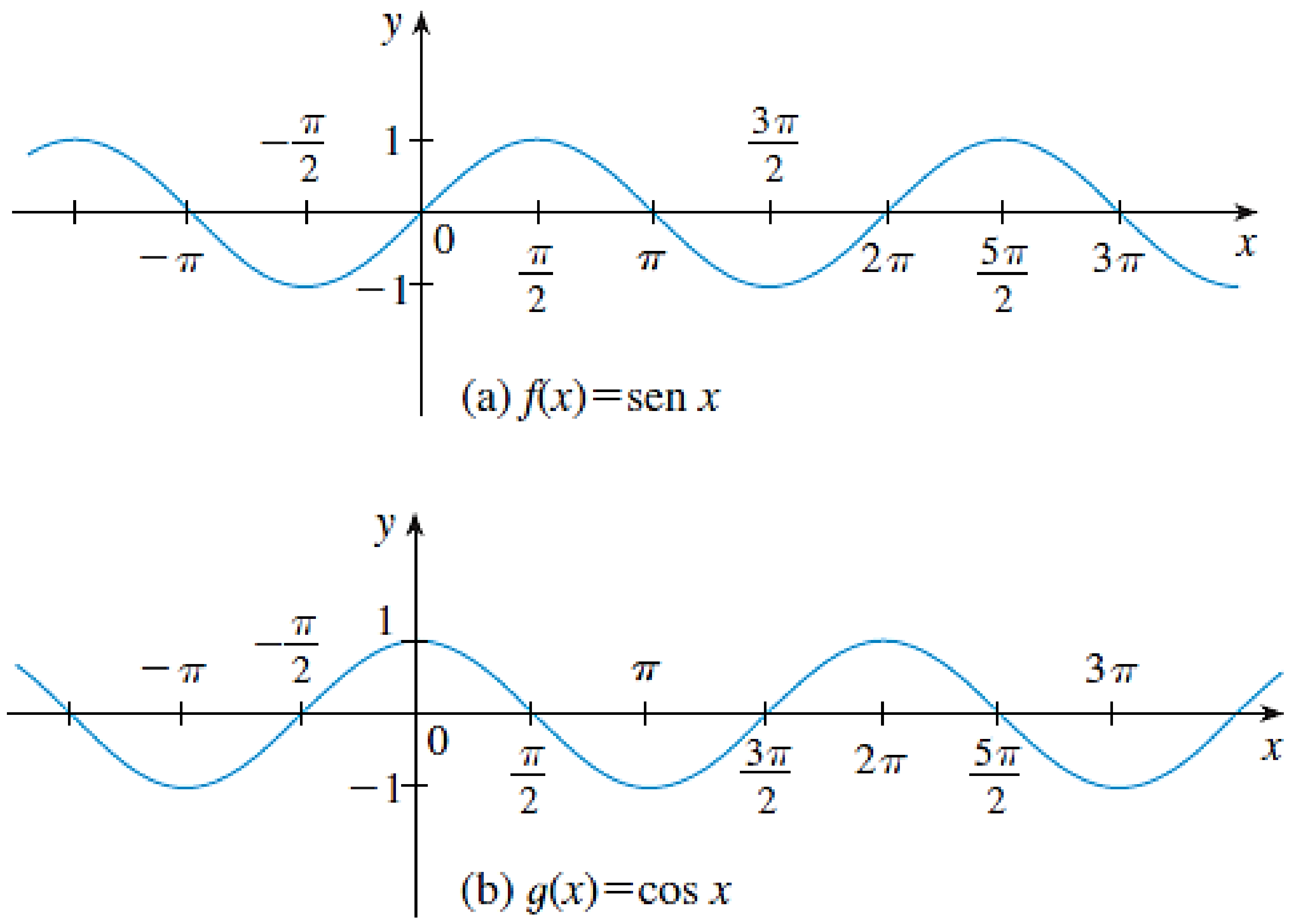


FIGURA 18

Observe que, tanto para a função seno, quanto para a função cosseno, o domínio é $(-\infty, \infty)$ e a imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$.
Dessa forma, para todos os valores de x, temos

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1$$

ou, em termos de valores absolutos,

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \quad \text{e} \quad |\cos x| \leq 1$$

Além disso, os zeros da função seno ocorrem nos múltiplos inteiros de π; isto é,

$$\operatorname{sen} x = 0 \ \text{ quando } \ x = n\pi, \quad n \text{ um inteiro.}$$

Uma propriedade importante das funções seno e cosseno é que elas são periódicas e têm um período 2π. Isso significa que, para todos os valores de x,

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

A função tangente relaciona-se com as funções seno e cosseno pela equação

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

e seu gráfico é ilustrado na Figura 19.

- Sua imagem é $(-\infty, \infty)$.
- Observe que a função tangente tem período π: $\tan(x + \pi) = \tan x$ para todo x.

As três funções trigonométricas remanescentes (cossecante, secante e cotangente) são as recíprocas das funções seno, cosseno e tangente.

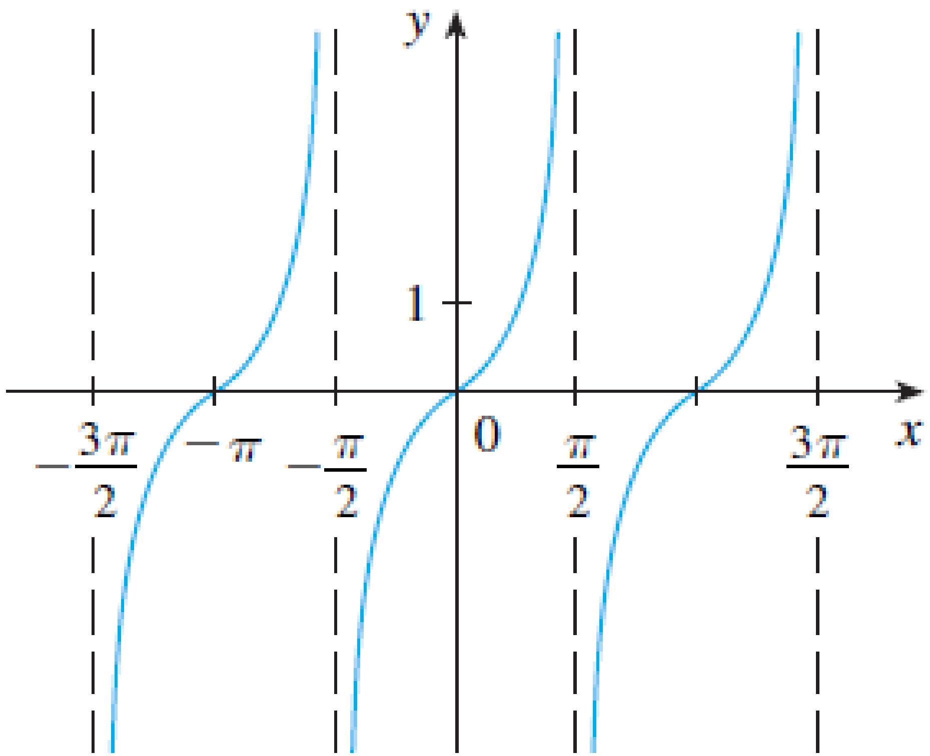


FIGURA 19 $y = \operatorname{tg} x$

Funções Exponenciais

Chamamos de função exponencial de base a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número real a^x, sendo a um número real, $0 < a \neq 1$, ou,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = a^x$$

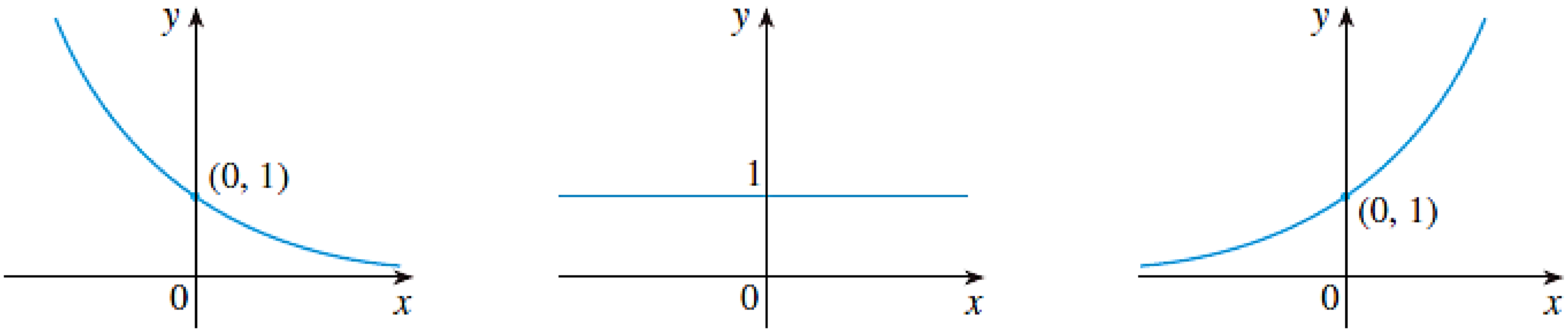
- O domínio da função exponencial é $D(f) = \mathbb{R}$.
- A imagem é $Im(f) = (0, \infty) = \mathbb{R}_+^*$.

Gráfico

Com relação ao gráfico da função $f(x) = a^x$ podemos afirmar:

1) A curva que o representa está toda acima do eixo das abcissas, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2) Corta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$.
3) $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$ e se $a = 1$ é uma constante.

Gráfico



(a) $y=a^x,\ 0<a<1$

(b) $y=1^x$

(c) $y=a^x,\ a>1$

Os gráficos dos membros da família de funções $y = a^x$ estão na Figura 3, para vários valores da base a. Observe que todos esses gráficos passam pelo mesmo ponto (0, 1) porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Observe que a função exponencial cresce mais rapidamente à medida que a fica maior (para $x > 0$).

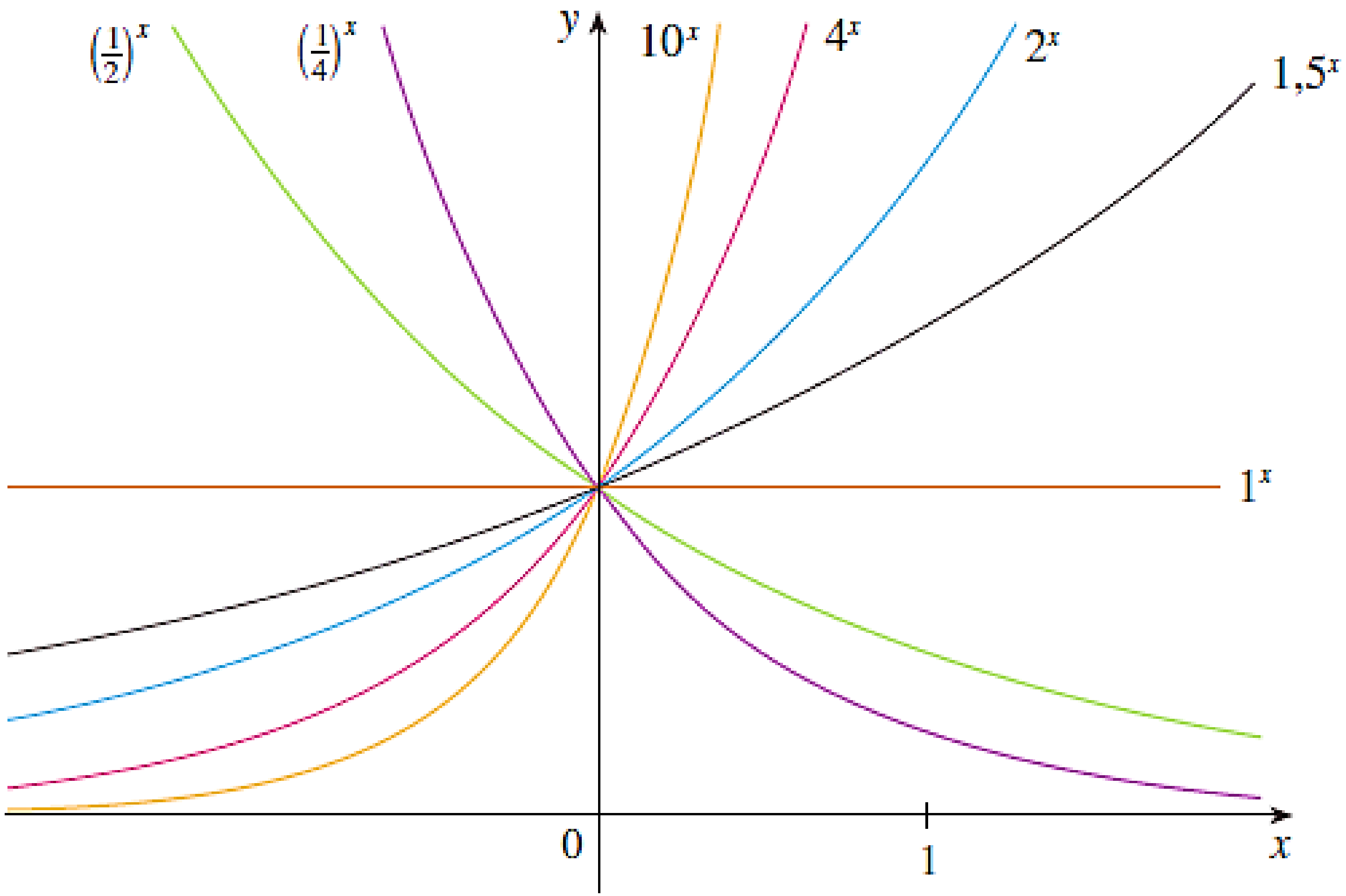


FIGURA 3

Propriedades dos Expoentes

Se a e b forem números positivos e x e y, quaisquer números reais, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$

2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

3. $(a^x)^y = a^{xy}$

4. $(ab)^x = a^x b^x$

Além dessas propriedades, sabemos que:

Se $x = n$, um inteiro positivo, então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Se $x = 0$, então $a^0 = 1$, e se $x = -n$, onde n é um inteiro positivo, então

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Se x for um número racional, $x = p/q$, onde p e q são inteiros e $q > 0$, então

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

EXEMPLO

Esboce o gráfico da função $y = 3 - 2^x$ e determine seu domínio e imagem.

Primeiro refletimos o gráfico de $y = 2^x$ [mostrado na Figura 5(a)] em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = -2^x$ na Figura 5(b). A seguir deslocamos o gráfico de $y = -2^x$ em 3 unidades para cima, para obter o gráfico de $y = 3 - 2^x$ na Figura 5(c). O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $(-\infty, 3)$.

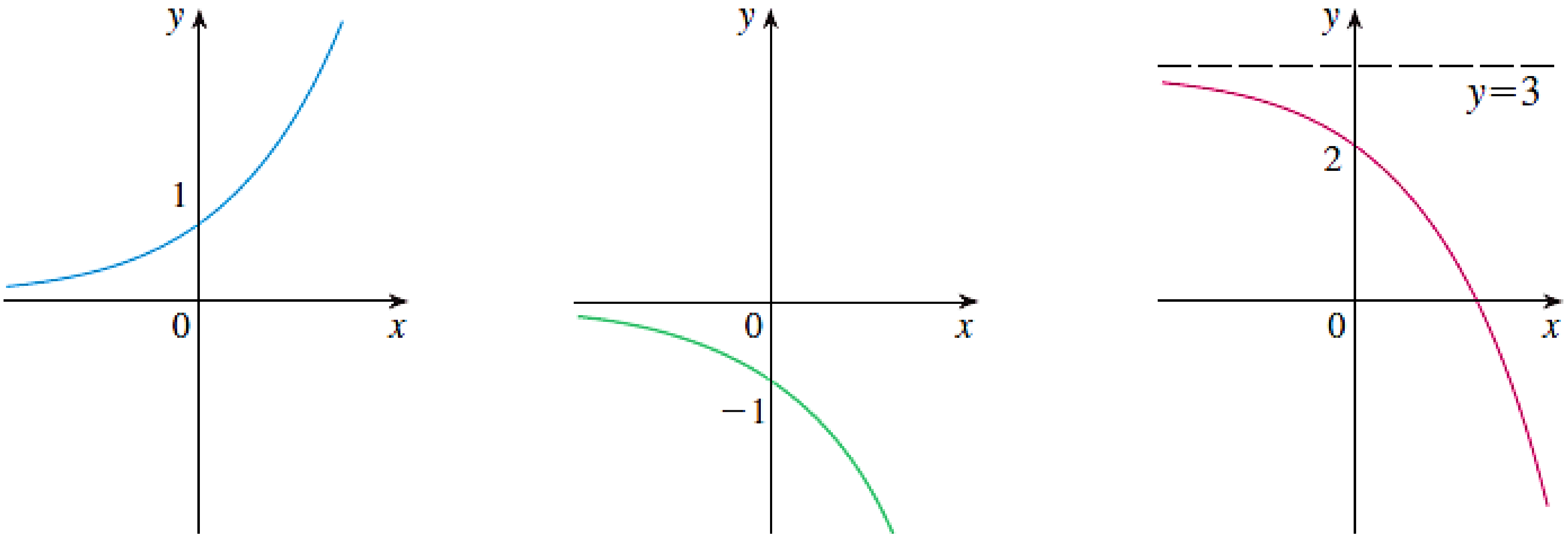


FIGURA 5 (a) $y=2^x$ (b) $y=-2^x$ (c) $y=3-2^x$

Aplicações de Funções Exponenciais

- A função exponencial ocorre frequentemente em modelos matemáticos da natureza e da sociedade.
- Vamos indicar brevemente aqui como eles surgem na descrição do crescimento populacional e do decaimento radioativo.

Vamos considerar primeiro uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo. Suponhamos que tomando amostras da população em certos intervalos de tempo fique determinado que a população dobra a cada hora. Se o número de bactérias no instante t for $p(t)$, onde t é medido em horas, e a população inicial for $p(0) = 1000$, então

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$

$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

Desse padrão parece que, em geral,

$$p(t) = 2^t \times 1\,000 = (1000)2^t$$

A função população é um múltiplo constante da função exponencial $y = 2^t$; logo, ela exibe o rápido crescimento que observamos nas Figuras 2 e 7. Sob condições ideais (espaço e alimentos ilimitados e ausência de doenças), esse crescimento exponencial é típico do que ocorre realmente na natureza.

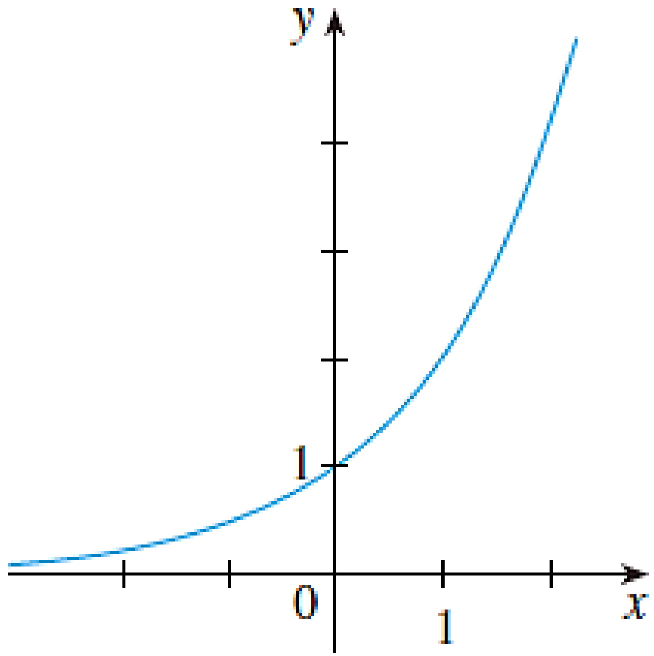


FIGURA 2 $y = 2^x$, x real

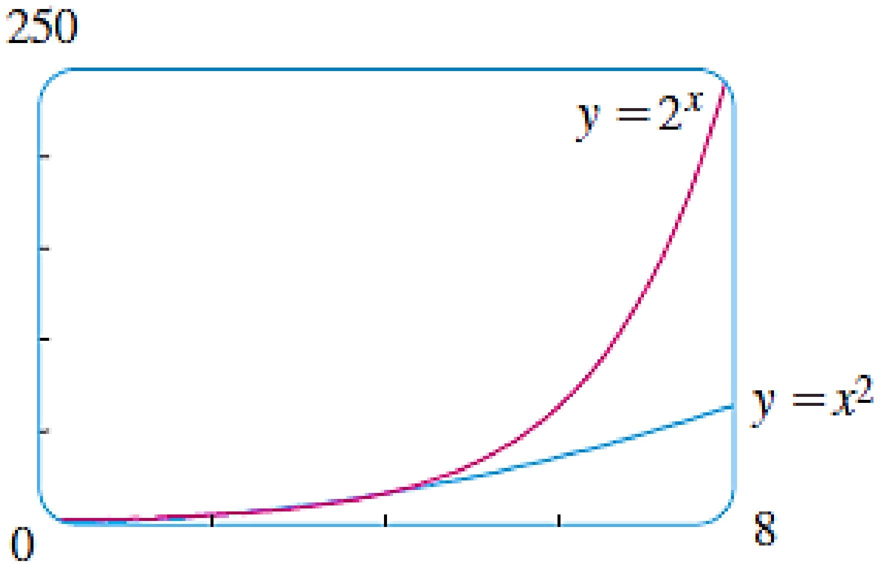


FIGURA 7

O que pode ser dito sobre a população humana? A Tabela 1 mostra os dados da população mundial do século XX, e a Figura 8 mostra o correspondente diagrama de dispersão.

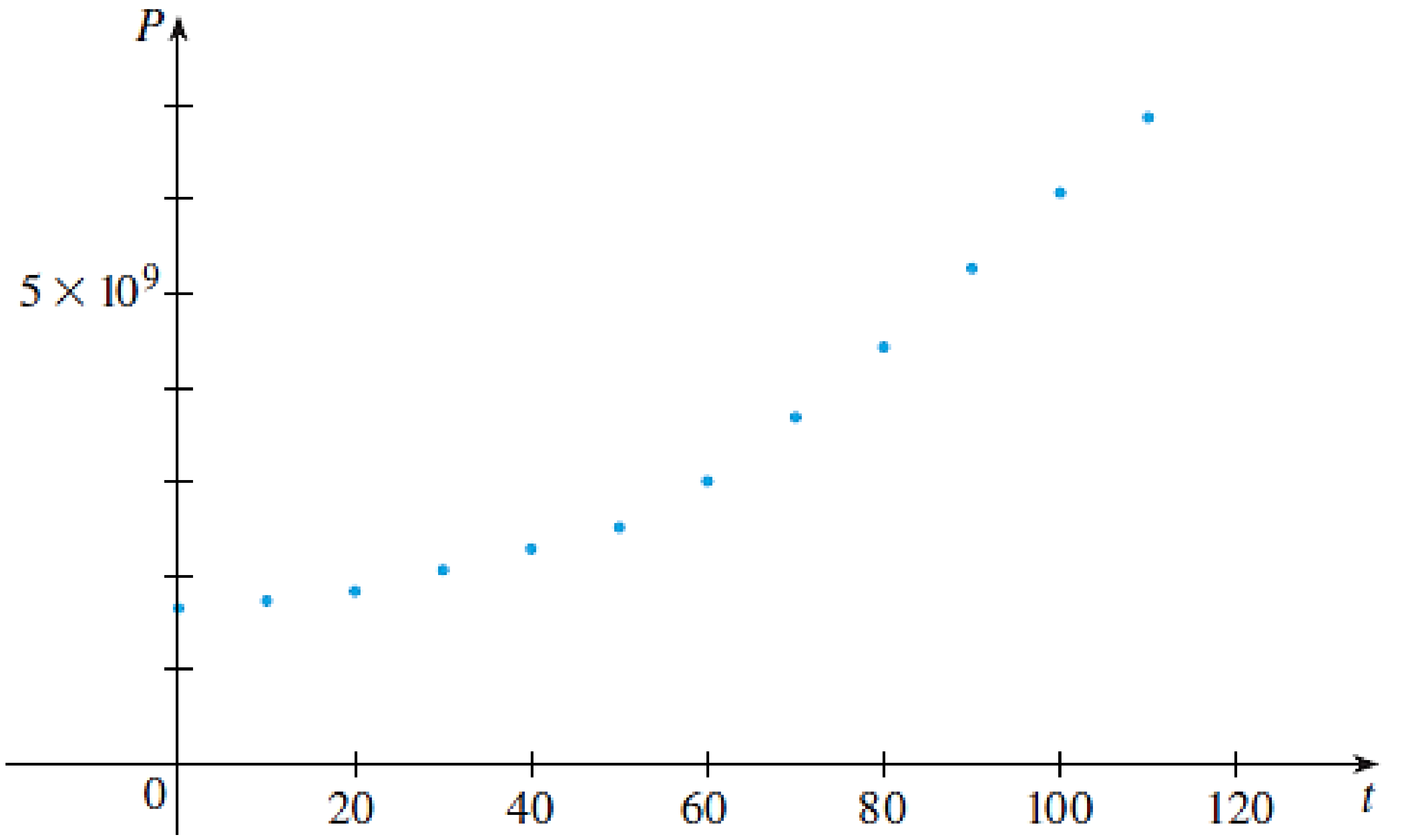


FIGURA 8 Diagrama de dispersão para o crescimento populacional mundial

TABELA 1

t	População (milhões)
0	1.650
10	1.750
20	1.860
30	2.070
40	2.300
50	2.560
60	3.040
70	3.710
80	4.450
90	5.280
100	6.080
110	6.870

O padrão dos dados da Figura 8 sugere um crescimento exponencial; assim, se usarmos uma calculadora gráfica com capacidade para regressão exponencial por mínimos quadrados, obteremos o seguinte modelo exponencial:

$$P = (1.436{,}53) \cdot (1{,}01395)^t$$

onde $t = 0$ corresponde a 1900. A Figura 9 mostra o gráfico dessa função exponencial junto com os pontos originais. Podemos ver que a curva exponencial se ajusta razoavelmente aos dados. Os períodos de crescimento populacional lento podem ser explicados pelas duas guerras mundiais e pela depressão dos anos 1930.

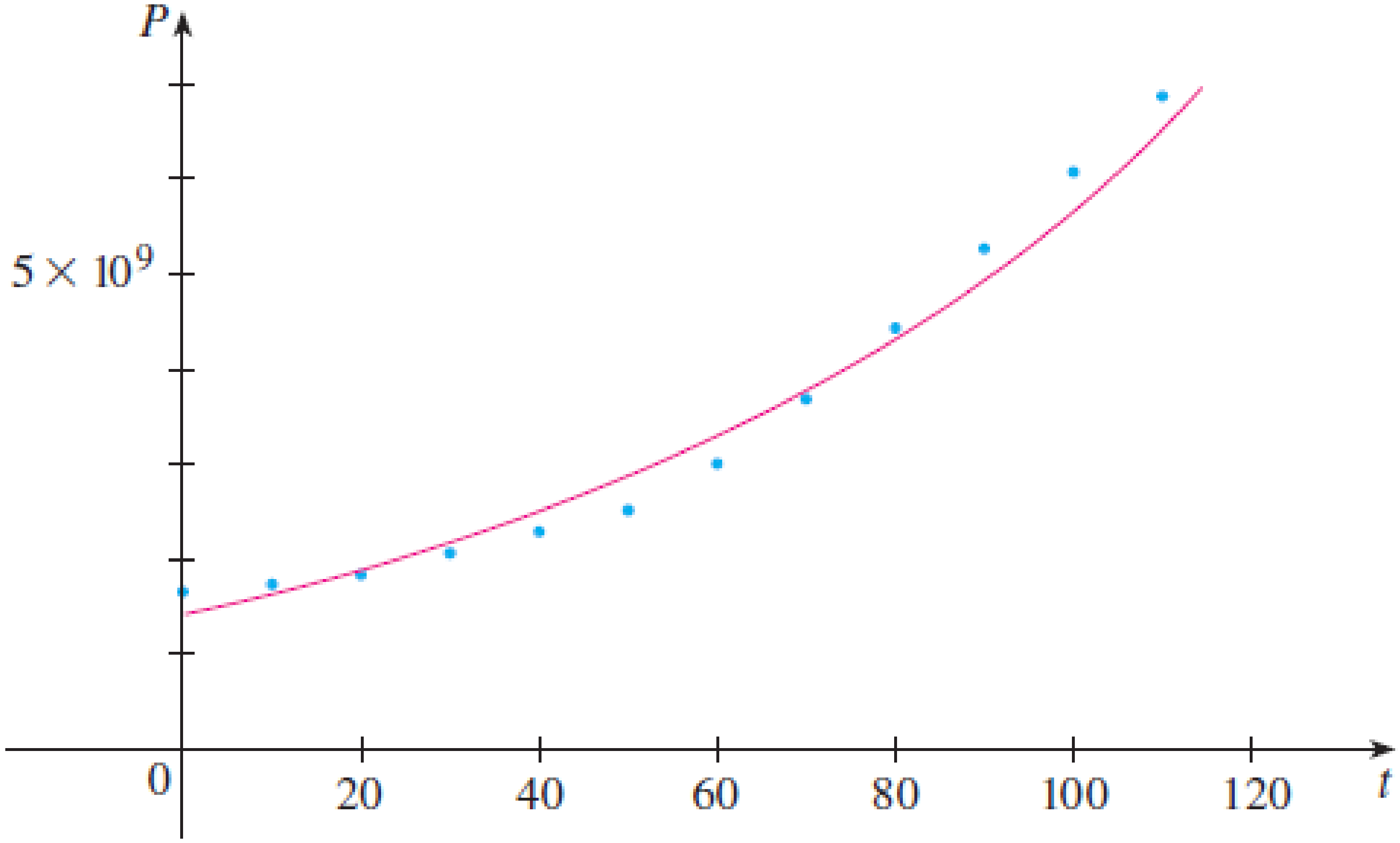


FIGURA 9
Modelo exponencial
para o crescimento populacional

O Número e

- Dentre todas as bases possíveis para uma função exponencial, há uma que é mais conveniente para os propósitos do cálculo.
- A escolha de uma base a é influenciada pela maneira que o gráfico de $y = a^x$ cruza o eixo y.
- As Figuras 10 e 11 mostram as retas tangentes para os gráficos de $y = 2^x$ e $y = 3^x$ no ponto $(0, 1)$.
- Se medirmos as inclinações dessas retas tangentes em $(0, 1)$, descobrimos que $m \approx 0{,}7$ para $y = 2^x$ e $m \approx 1{,}1$ para $y = 3^x$.

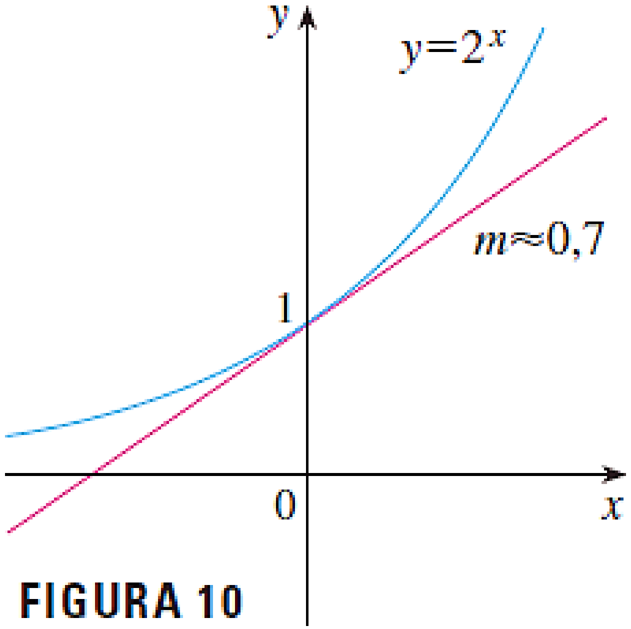


FIGURA 10

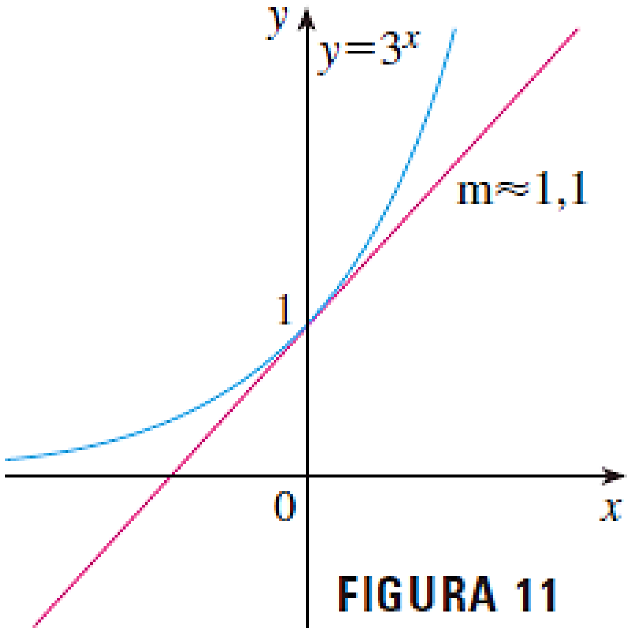


FIGURA 11

- Conforme será visto, as fórmulas do cálculo ficam muito simplificadas quando escolhemos como base a aquela para a qual resulta uma reta tangente a $y = a^x$ em $(0, 1)$ com uma inclinação de exatamente 1. (Veja a Figura 12.)

- De fato, existe um número assim e ele é denotado pelo caractere e.

- (Esta notação foi escolhida pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1727, provavelmente porque é o primeiro caractere da palavra exponencial.)

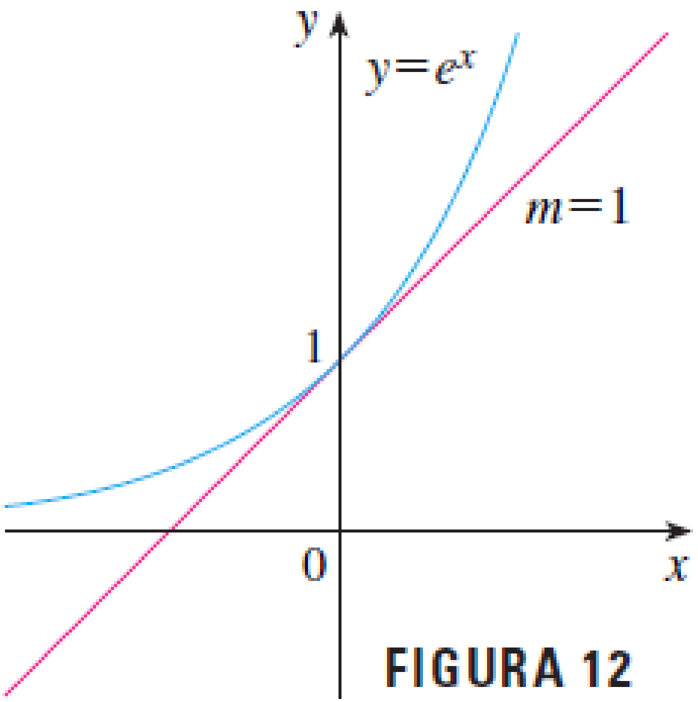


FIGURA 12

A função exponencial natural cruza o eixo y com uma inclinação igual a 1.

- Na visualização das Figuras 10 e 11, não surpreende que o número e está entre 2 e 3 e o gráfico de e^x esteja entre os gráficos $y = 2^x$ e $y = 3^x$. (Veja a Figura 13.)

- O valor de e correto até a quinta casa decimal é:

$$2{,}71828$$

- Podemos chamar a função $f(x) = e^x$ de **função exponencial natural.**

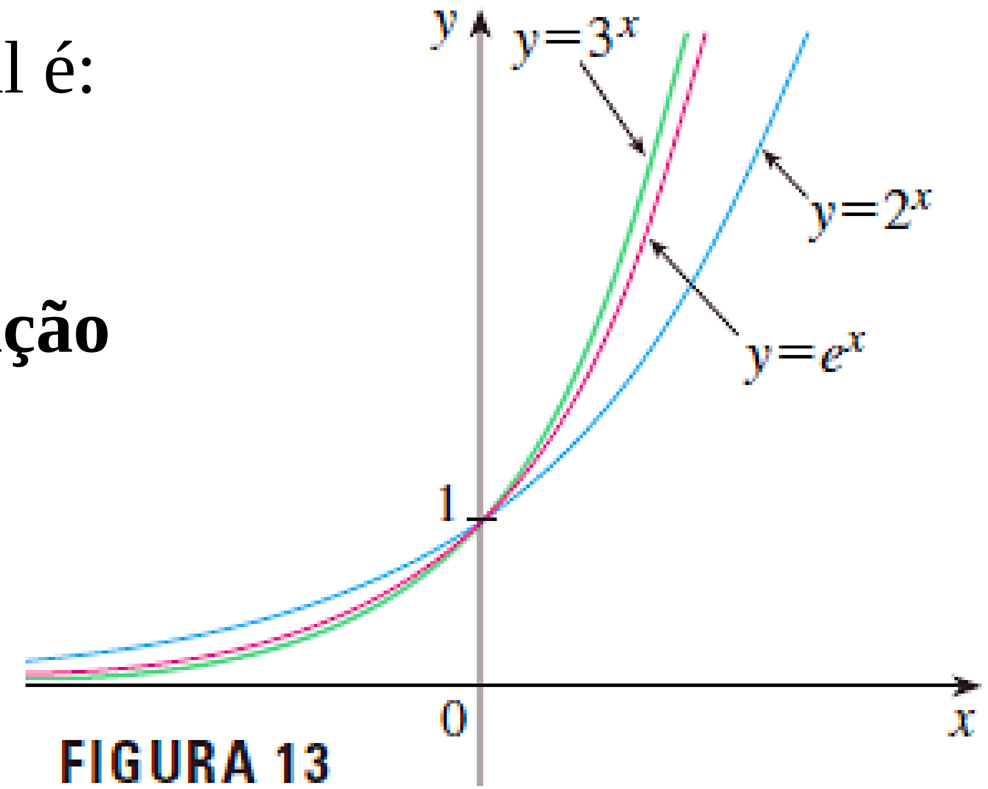


FIGURA 13

Funções Inversas

Uma função f é chamada **função injetora** se ela nunca assume o mesmo valor duas vezes; isto é,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 \neq x_2$$

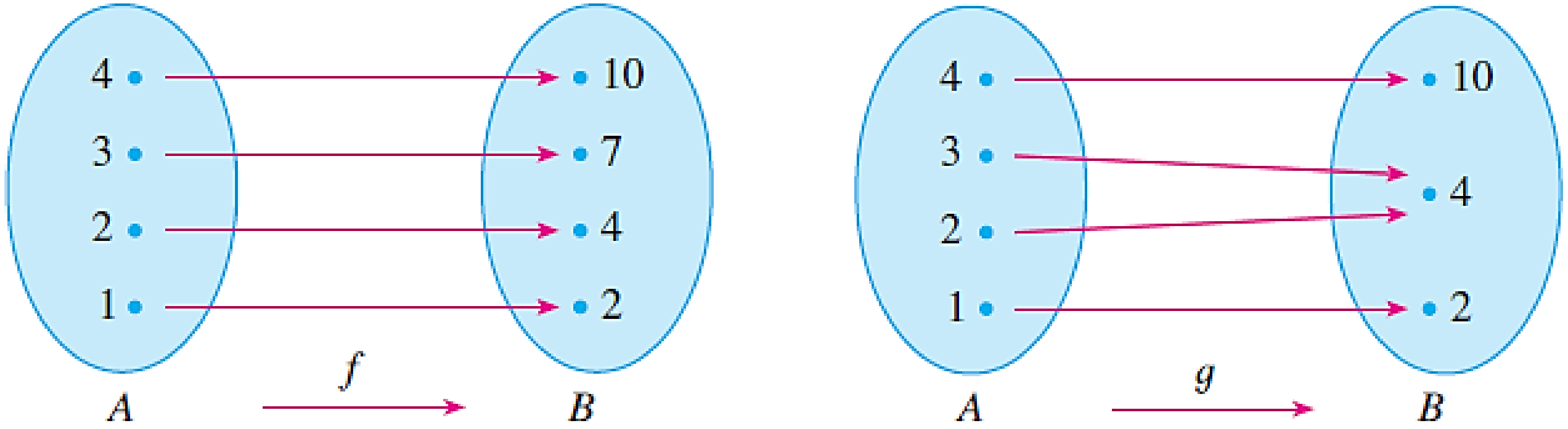


FIGURA 1

f é injetora; g não é

Se uma reta horizontal intercepta o gráfico de f em mais de um ponto, então vemos da Figura 2 que existem números x_1 e x_2 tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Isso significa que f não é uma função injetora. Portanto, temos o seguinte método geométrico para determinar se a função é injetora.

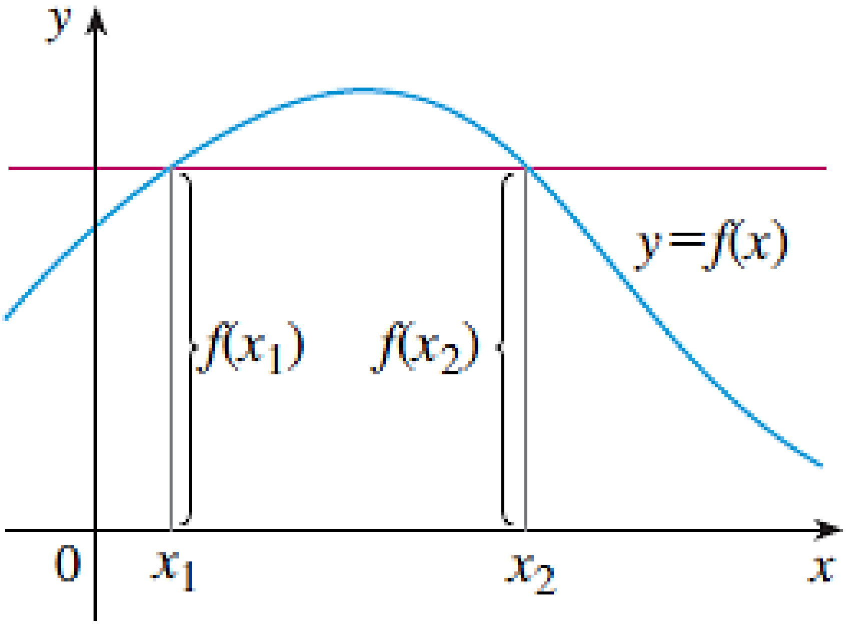


FIGURA 2

Esta função não é injetora, pois $f(x_1)=f(x_2)$.

Teste da Reta Horizontal Uma função é injetora se nenhuma reta horizontal intercepta seu gráfico em mais de um ponto.

EXEMPLO

A função $f(x) = x^3$ é injetora?

SOLUÇÃO 1 Se $x_1 \neq x_2$, então $x_1^3 \neq x_2^3$ (dois números diferentes não podem ter o mesmo cubo). Portanto, pela Definição 1, $f(x) = x^3$ é injetora.

SOLUÇÃO 2 Da Figura 3 vemos que nenhuma reta horizontal intercepta o gráfico de $f(x) = x^3$ em mais de um ponto. Logo, pelo Teste da Reta Horizontal, f é injetora.

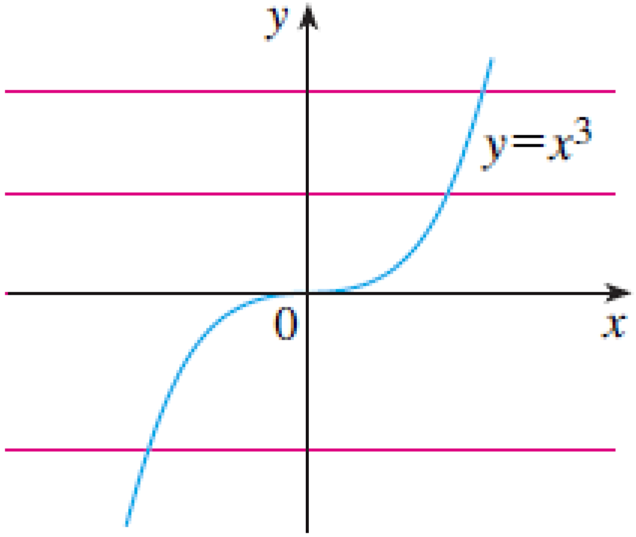


FIGURA 3

A função $g(x) = x^2$ é injetora?

SOLUÇÃO 1 Esta função não é injetora, pois, por exemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

e, portanto, 1 e -1 têm a mesma saída.

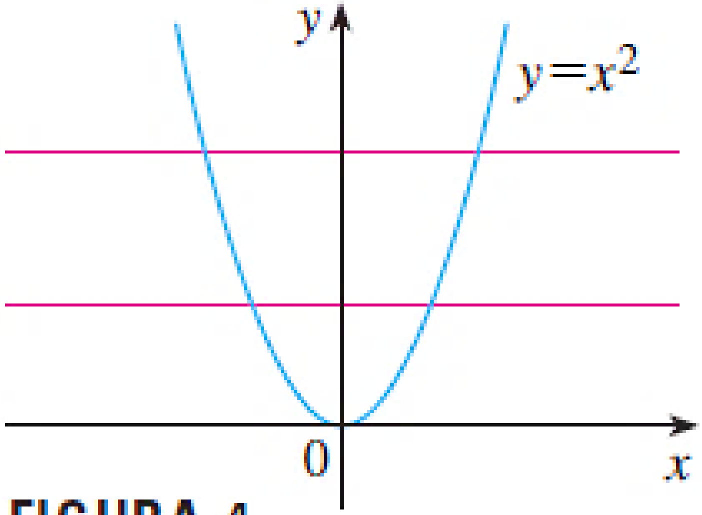


FIGURA 4

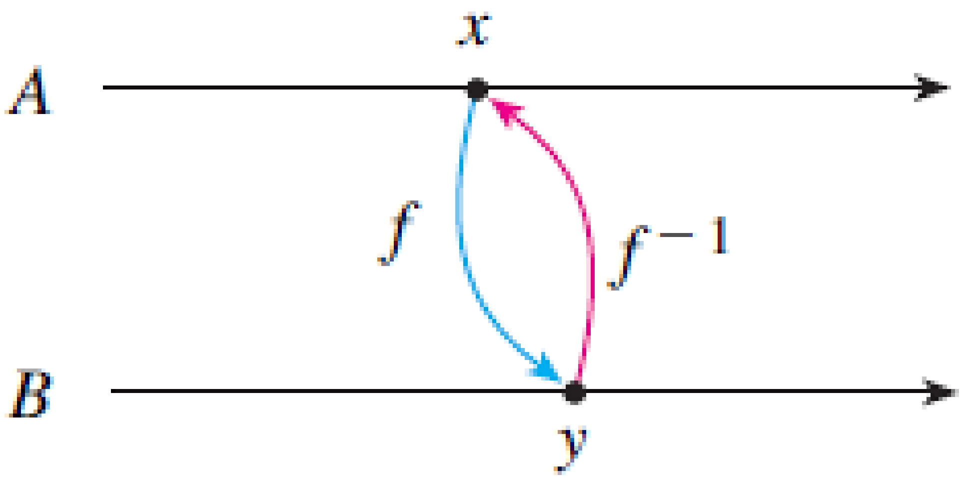
SOLUÇÃO 2 Da Figura 4 vemos que existem retas horizontais que interceptam o gráfico de g mais de uma vez. Assim, pelo Teste da Reta Horizontal, g não é injetora.

As funções injetoras são importantes, pois são precisamente as que possuem funções inversas, de acordo com a seguinte definição:

Definição Seja f uma função injetora com domínio A e imagem B. Então, a sua **função inversa** f^{-1} tem domínio B e imagem A e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para todo y em B.



Note que

domínio de f^{-1} = imagem de f

imagem de f^{-1} = domínio de f

Gráfico da função inversa

O princípio de trocar x e y para encontrar a função inversa também nos dá um método de obter o gráfico f^{-1} a partir de f. Uma vez que $f(a) = b$ se e somente se $f^{-1}(b) = a$, o ponto (a, b) está no gráfico de f se e somente se o ponto (b, a) estiver no gráfico de f^{-1}. Mas obtemos o ponto (b, a) de (a, b) refletindo-o em torno da reta $y = x$. (Veja a Figura 8.)

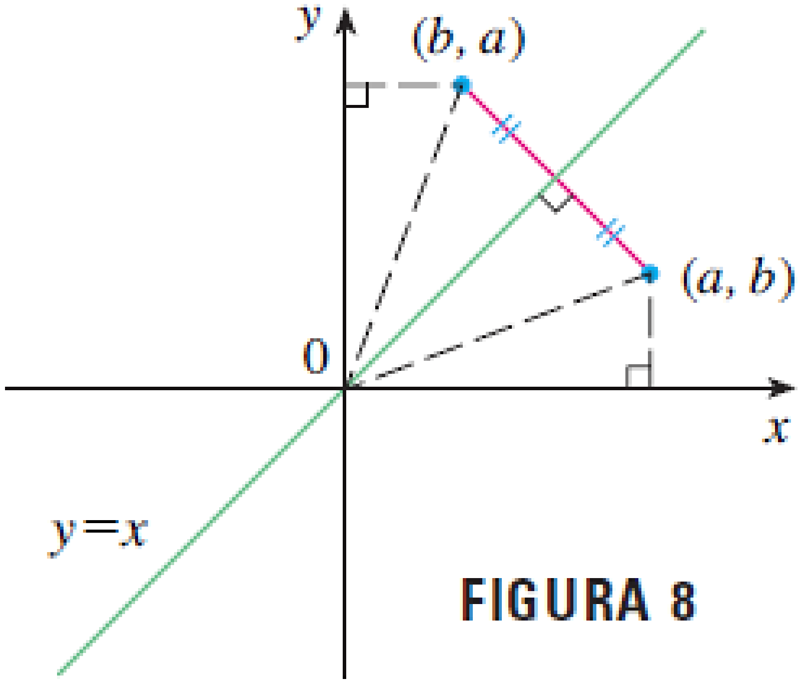


FIGURA 8

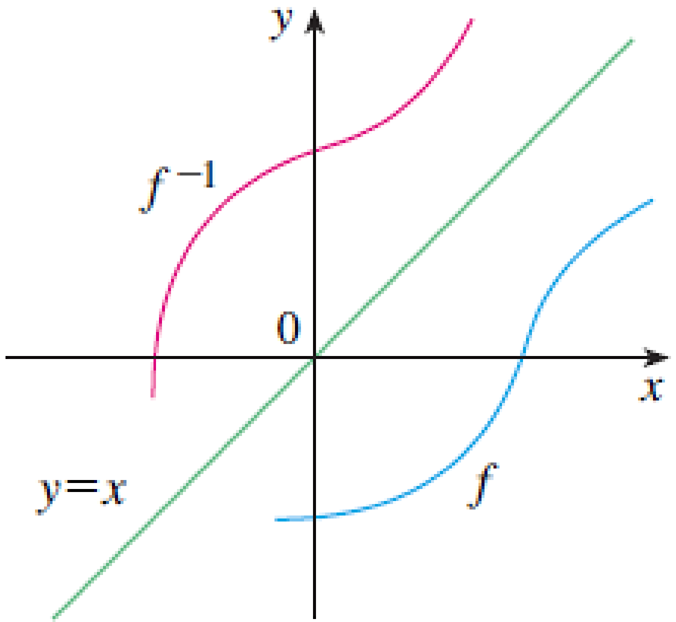


FIGURA 9

Portanto, conforme ilustrado na Figura 9:

O gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta $y = x$.

EXEMPLO

Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ e de sua função inversa usando o mesmo sistema de coordenadas.

SOLUÇÃO Esboçamos primeiro a curva $y = \sqrt{-1 - x}$ (a metade superior da parábola $y^2 = -1 - x$, ou $x = -y^2 - 1$), e então, refletindo em torno da reta $y = x$, obtemos o gráfico de f^{-1}. (Veja a Figura 10.)

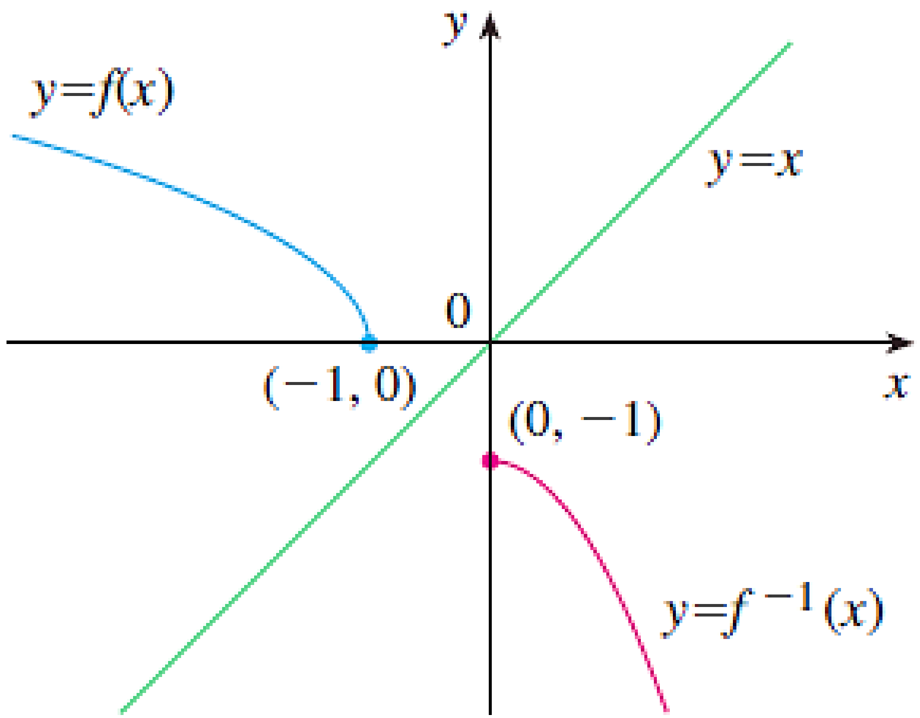


FIGURA 10

Como uma verificação de nosso gráfico, observe que a expressão para f^{-1} é $f^{-1}(x) = -x^2 - 1, x \geqslant 0$.

Assim, o gráfico de f^{-1} é a metade à direita da parábola $y = -x^2 - 1$, e isso parece razoável pela Figura 10.

Funções Logarítmicas

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente ou decrescente, e, portanto, injetora pelo Teste da Reta Horizontal. Assim, existe uma função inversa f^{-1}, chamada **função logarítmica com base *a*** denotada por $\log_a$. Se usarmos a formulação de função inversa dada por $\boxed{3}$

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

teremos

$$\boxed{6} \qquad \log_a x = y \iff a^y = x$$

As equações de cancelamento $\boxed{4}$, quando aplicadas a $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, ficam assim:

$$\boxed{7} \qquad \begin{aligned} \log_a(a^x) &= x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} &= x \quad \text{para todo } x > 0 \end{aligned}$$

Dado um número real a $(0 < a \neq 1)$, chamamos função logarítmica de base a a função de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que se associa a cada x o número $\log_a x$, isto é,

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\to y = \log_a x. \end{aligned}$$

As funções f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$; $0 < a \neq 1$, são inversas uma da outra.

Temos $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Gráfico da função Logarítmica

A função logarítmica $\log_a$ tem o domínio $(0, \infty)$ e a imagem $\mathbb{R}$. Seu gráfico é a reflexão do gráfico de $y = a^x$ em torno da reta $y = x$.

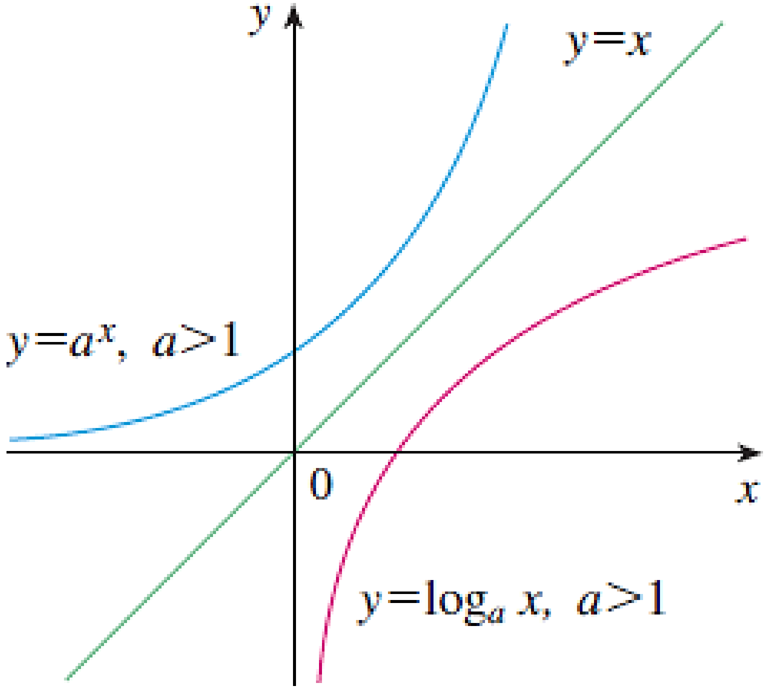


FIGURA 11

A Figura 11 mostra o caso em que $a > 1$. (As funções logarítmicas mais importantes têm base $a > 1$.) O fato de que $y = a^x$ é uma função que cresce muito rapidamente para $x > 0$ está refletido no fato de que $y = \log_a x$ é uma função de crescimento muito lento para $x > 1$.

A Figura 12 mostra os gráficos de $y = \log_a x$ com vários valores da base $a > 1$. Uma vez que $\log_a 1 = 0$, os gráficos de todas as funções logarítmicas passam pelo ponto $(1, 0)$.

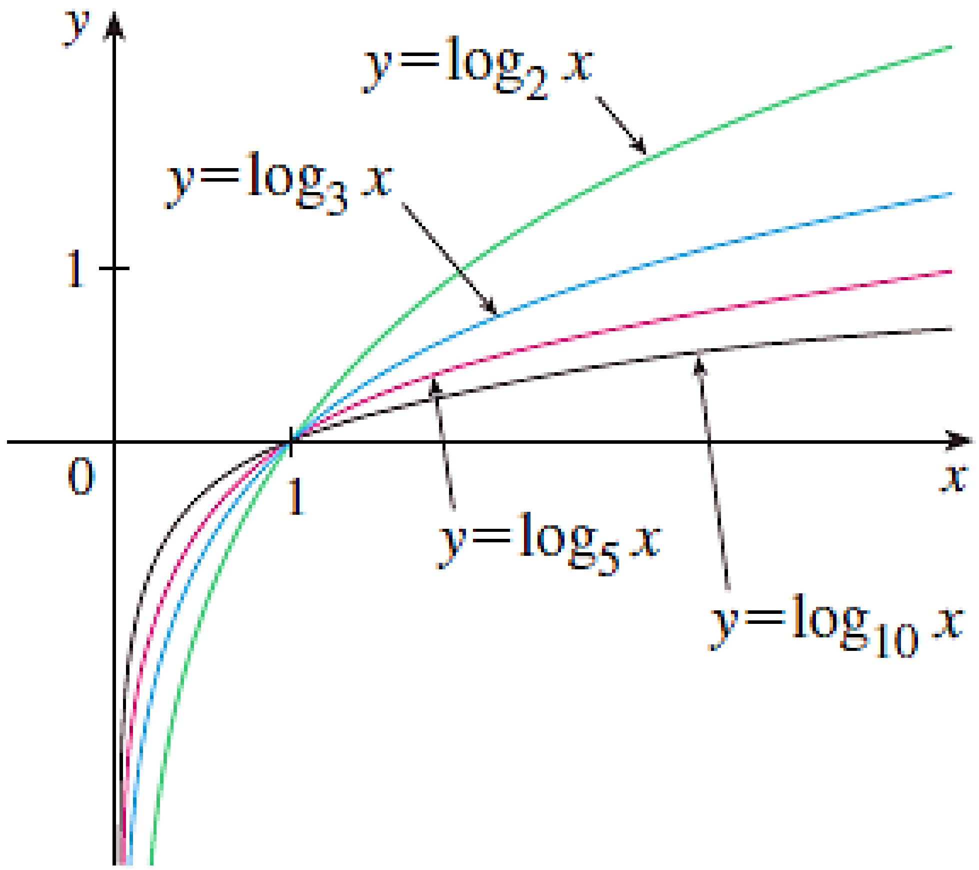


FIGURA 12

Propriedades da Função Logarítmica

Se x e y forem números positivos, então

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$ (onde r é qualquer número real)

EXEMPLO

Use as propriedades dos logaritmos para calcular $\log_2 80 - \log_2 5$.

Usando a Propriedade 2, temos

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

pois $2^4 = 16$.

Logaritmos Naturais

De todas as possíveis bases *a* para os logaritmos, a escolha mais conveniente para uma base é *e*. O logaritmo na base *e* é chamado **logaritmo natural** e tem uma notação especial:

$$\log_e x = \ln x$$

Se fizermos $a = e$ e substituirmos $\log_e$ por "ln" em $\boxed{6}$ e $\boxed{7}$,

$\boxed{6}$

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

$\boxed{7}$

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{para todo } x > 0$$

então as propriedades que definem a função logaritmo natural ficam

$$\boxed{8} \qquad \ln x = y \iff e^y = x$$

$$\boxed{9} \qquad \begin{aligned} \ln(e^x) &= x \qquad x \in \mathbb{R} \\ e^{\ln x} &= x \qquad x > 0 \end{aligned}$$

Em particular, se fizermos $x = 1$, obteremos

$$\ln e = 1$$

EXEMPLO

Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$.

Tomando-se o logaritmo natural de ambos os lados da equação e usando $\boxed{9}$:

$$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$$

$$5 - 3x = \ln 10$$

$$3x = 5 - \ln 10$$

$$x = \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10)$$

Uma vez que o logaritmo natural é encontrado em calculadoras científicas, podemos aproximar a solução: até quatro casas decimais, $x \approx 0{,}8991$.

EXEMPLO

Expresse $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ como um único logaritmo.

Usando as Propriedades 3 e 1 dos logaritmos, temos

$$\begin{aligned}
\ln a + \tfrac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2} \\
&= \ln a + \ln\sqrt{b} \\
&= \ln\left(a\sqrt{b}\right)
\end{aligned}$$

Fórmula de Mudança de Base

A fórmula a seguir mostra que os logaritmos com qualquer base podem ser expressos em termos de logaritmos naturais.

Para todo número positivo a $(a \neq 1)$, temos

$$\boxed{10} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

As calculadoras científicas têm uma tecla para os logaritmos naturais; assim, a Fórmula 10 nos capacita a usar a calculadora para calcular o logaritmo em qualquer base (conforme mostra o próximo exemplo). Analogamente, a Fórmula 10 nos permite fazer o gráfico de qualquer função logarítmica em calculadoras e computadores.

EXEMPLO

Calcule $\log_8 5$ com precisão até a sexta casa decimal.

A Fórmula 10 nos dá

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0{,}773976.$$

Gráfico e Crescimento do Logaritmo Natural

Os gráficos da função exponencial $y = e^x$ e de sua função invertida, a função logaritmo natural, são indicados na Figura 13. Em razão de a curva $y = e^x$ cruzar o eixo y com inclinação igual a 1, segue que a curva refletida $y = \ln x$ cruza o eixo x também com inclinação igual a 1.

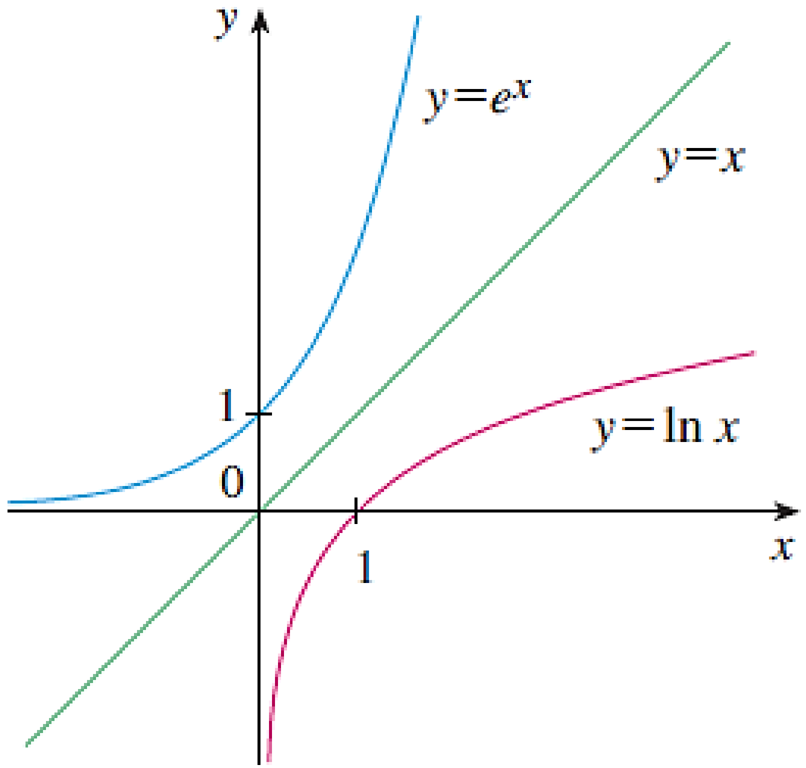
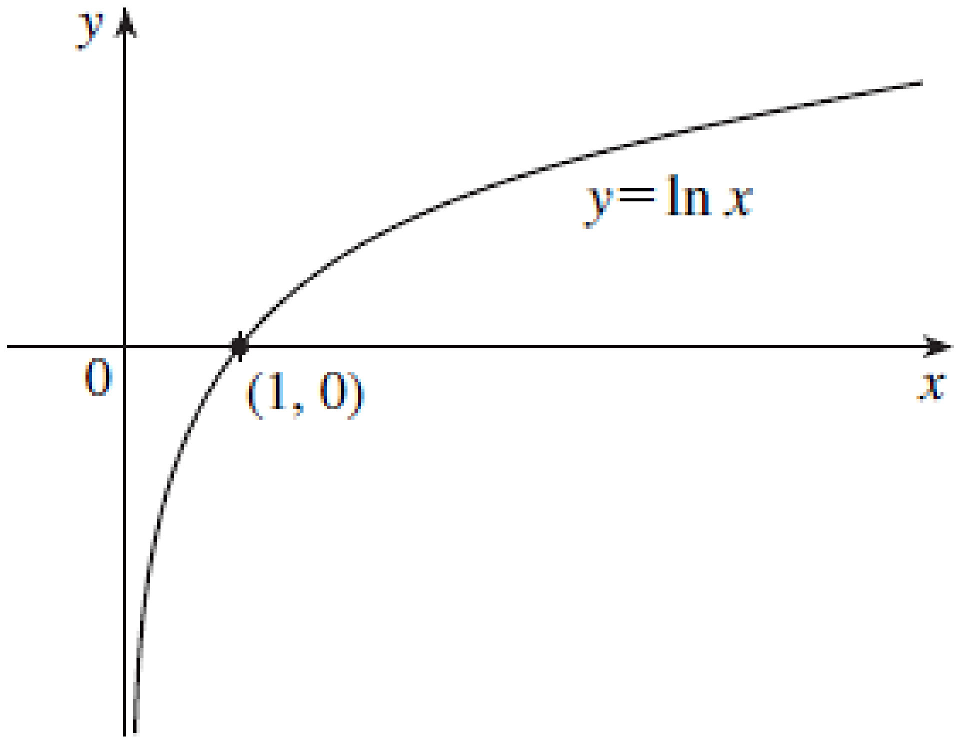
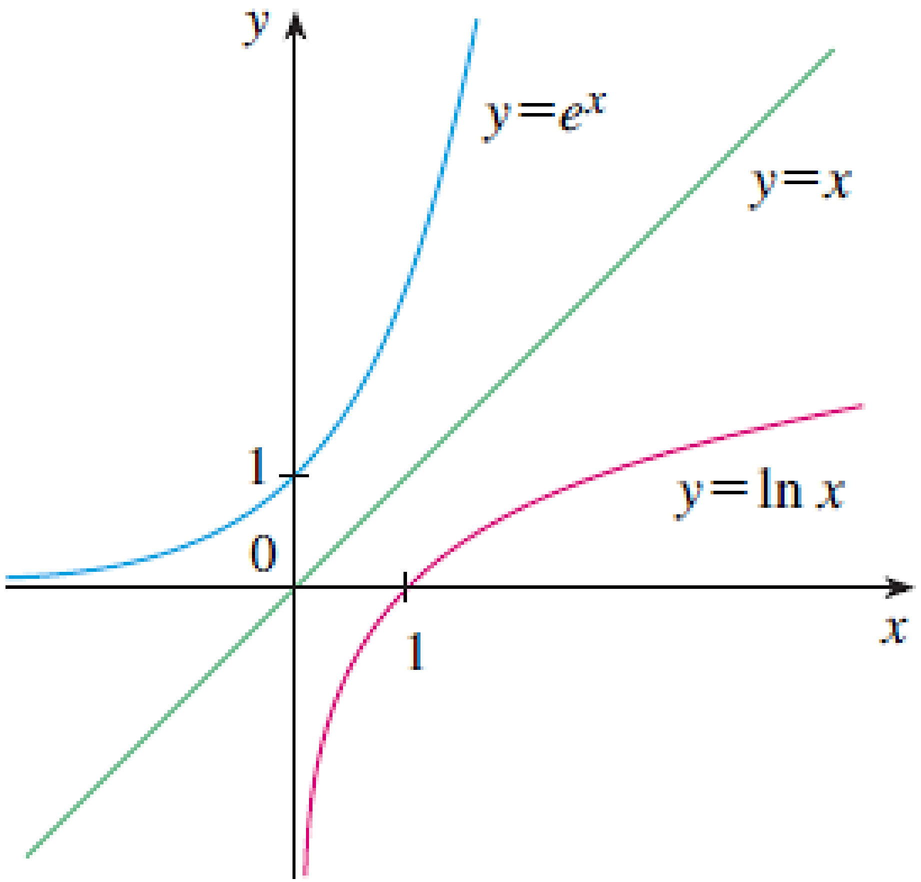


FIGURA 13
O gráfico de $y = \ln x$ é a reflexão do gráfico de $y = e^x$ em torno da reta $y = x$

Assim como todas as outras funções logarítmicas com base maior que 1, o logaritmo natural é uma função crescente definida em $(0, \infty)$ e com o eixo y como assíntota vertical. (Isto significa que os valores de $\ln x$ se tornam números negativos com valores absolutos muito grandes quando x tende a 0.)





EXEMPLO

Esboce o gráfico da função $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUÇÃO Inciaremos com o gráfico de $y = \ln x$ dado na Figura 13. Usando as transformações da Seção 1.3, o deslocamos duas unidades para a direita, obtendo o gráfico de $y = \ln(x - 2)$ e então o deslocamos uma unidade para cima, para obter o gráfico de $y = \ln(x - 2) - 1$. (Veja a Figura 14.)

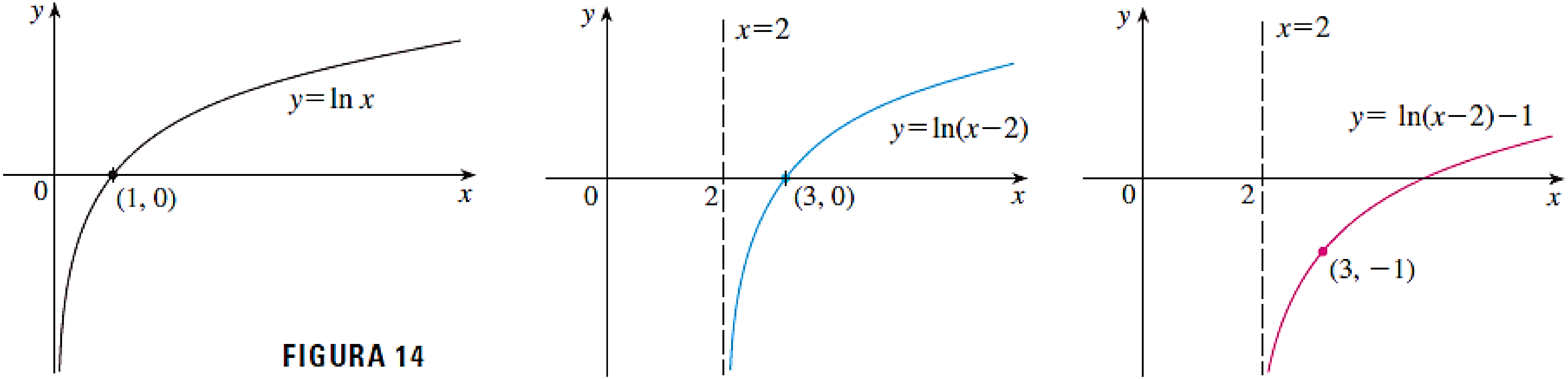


FIGURA 14

Funções Trigonométricas Inversas

Quando tentamos encontrar as funções trigonométricas inversas, temos uma pequena dificuldade: em razão de as funções trigonométricas não serem injetoras, elas não têm funções inversas. A dificuldade é superada restringindo-se os domínios dessas funções de forma a torná-las injetoras.

Você pode ver na Figura 17 que a função $y = \operatorname{sen} x$ não é injetora (use o Teste da Reta Horizontal). Mas a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, *é* injetora (veja a Figura 18). A função inversa dessa função seno restrita f existe e é denotada por sen^{-1}, ou arcsen. Ela é chamada **inversa da função seno, ou função arco-seno.**

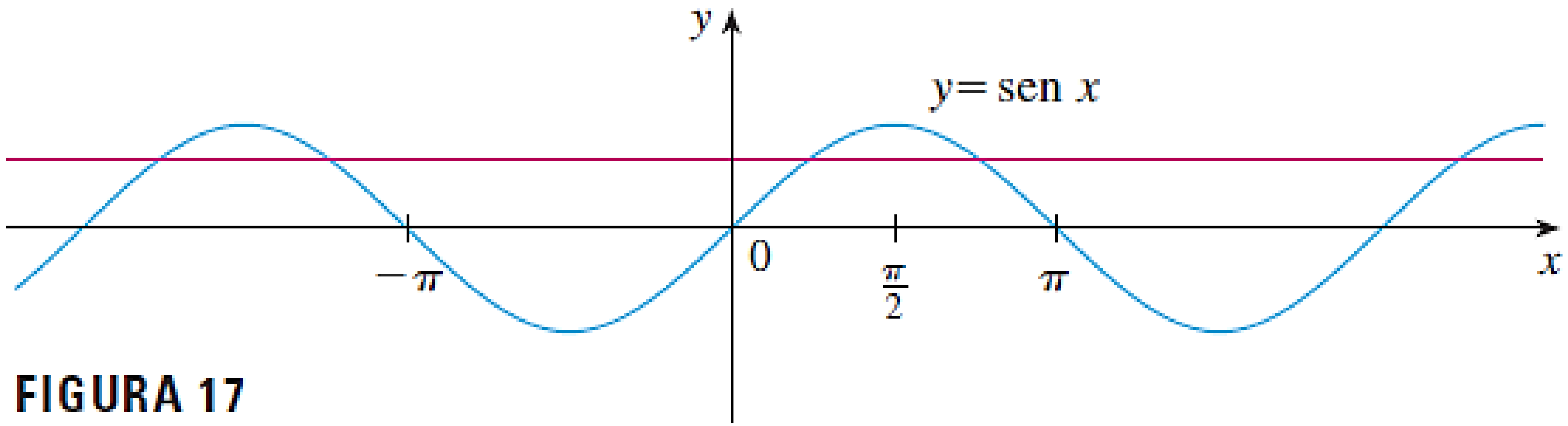


FIGURA 17

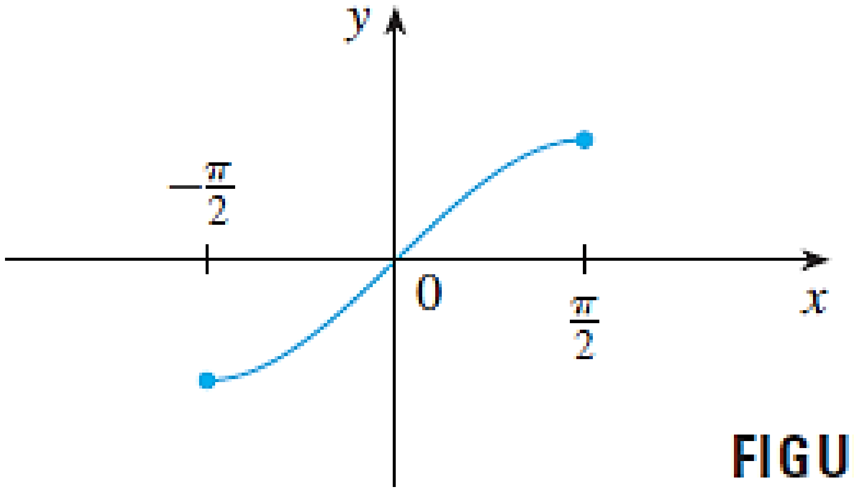


FIGURA 18 $y = \operatorname{sen} x,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Uma vez que a definição de uma função inversa diz

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

temos

$$\operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Assim, se $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\operatorname{sen}^{-1} x$ é o número entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ cujo seno é x.

$$\operatorname{sen}^{-1} x \neq \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen}^{-1} x = \operatorname{arc\,sen} x$$

As equações de cancelamento para as funções inversas tornam-se, nesse caso,

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1}x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

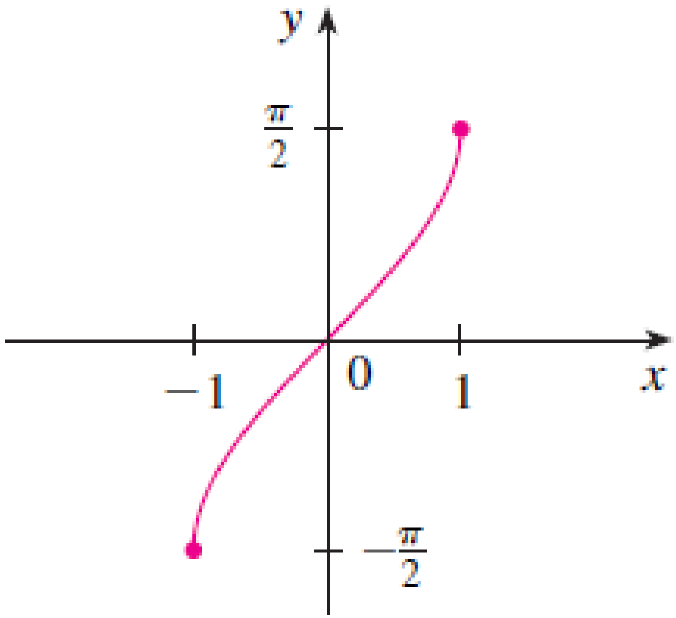


FIGURA 20
$y = \text{sen}^{-1} x = \text{arcsen} x$

A função inversa do seno, sen^{-1}, tem domínio $[-1, 1]$ e imagem $[-\pi/2, \pi/2]$, e seu gráfico, mostrado na Figura 20, é obtido daquela restrição da função seno (Figura 18) por reflexão em torno da reta $y = x$.

EXEMPLO

Calcule (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ e (b) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)$.

(a) Temos

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

pois $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ e $\pi/6$ se situa entre $-\pi/2$ e $\pi/2$.

(b) Seja $\theta = \operatorname{arcsen} \frac{1}{3}$, logo $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}$. Podemos desenhar um triângulo retângulo com o ângulo θ, como na Figura 19 e deduzir do Teorema de Pitágoras que o terceiro lado tem comprimento $\sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$. Isso nos possibilita interpretar a partir do triângulo que

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen} \tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

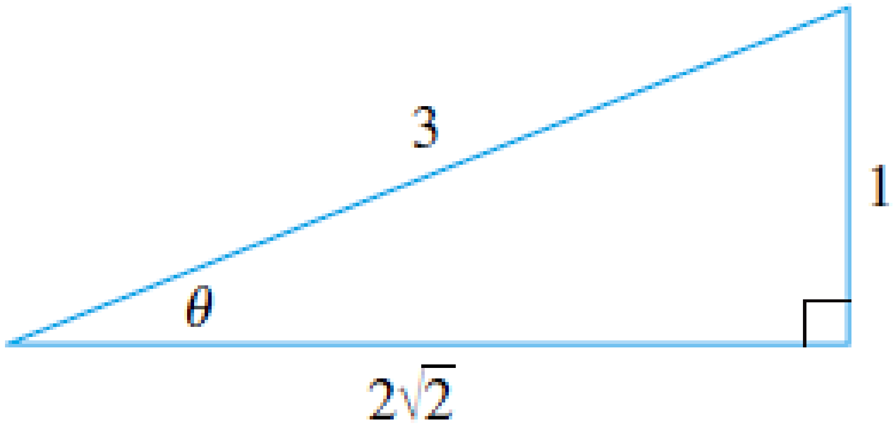


FIGURA 19

A **função inversa do cosseno** é tratada de modo similar. A função cosseno restrita $f(x) = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, é injetora (veja a Figura 21); logo, ela tem uma função inversa denotada por $\cos^{-1}$ ou arccos.

$$\cos^{-1}x = y \iff \cos y = x \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

As equações de cancelamento são

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$\cos(\cos^{-1}x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

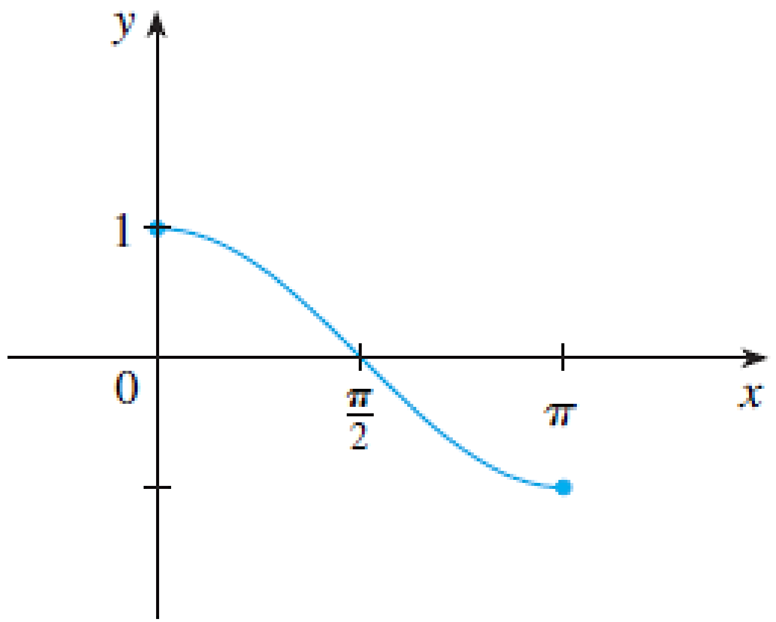


FIGURA 21
$y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$

A função inversa do cosseno, $\cos^{-1}$, tem domínio $[-1, 1]$ e imagem $[0, \pi]$. O gráfico está mostrado na Figura 22.

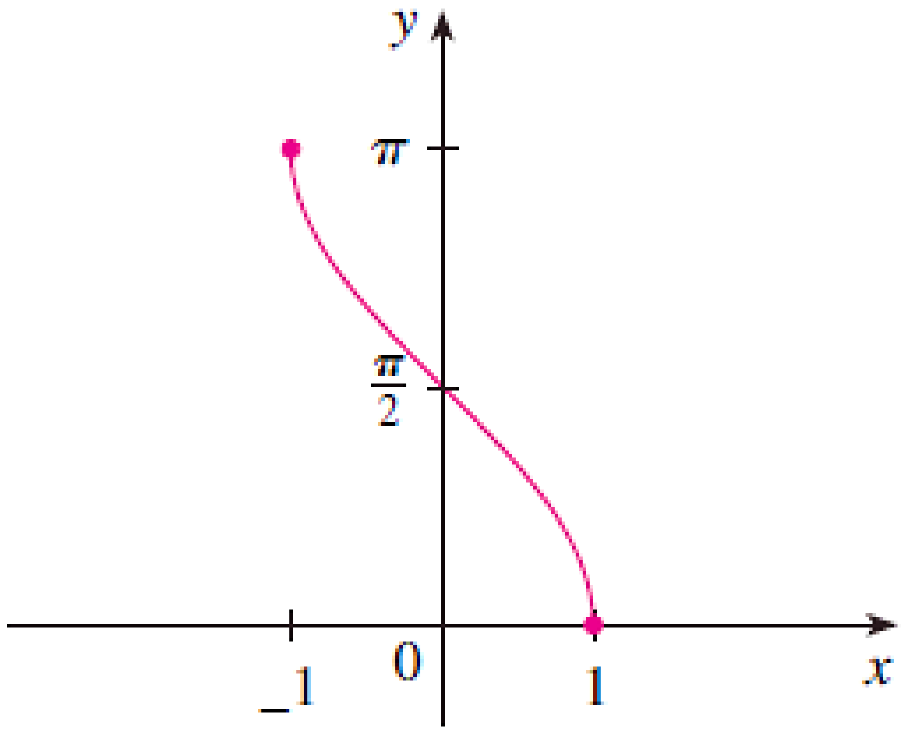


FIGURA 22
$y = \cos^{-1} x = \arccos x$

A função tangente se torna injetora quando restrita ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Assim, a **função inversa da tangente** é definida como a inversa da função $f(x) = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. (Veja a Figura 23.)

Ela é denotada por tg^{-1} ou arctg.

$$\operatorname{tg}^{-1}x = y \iff \operatorname{tg} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

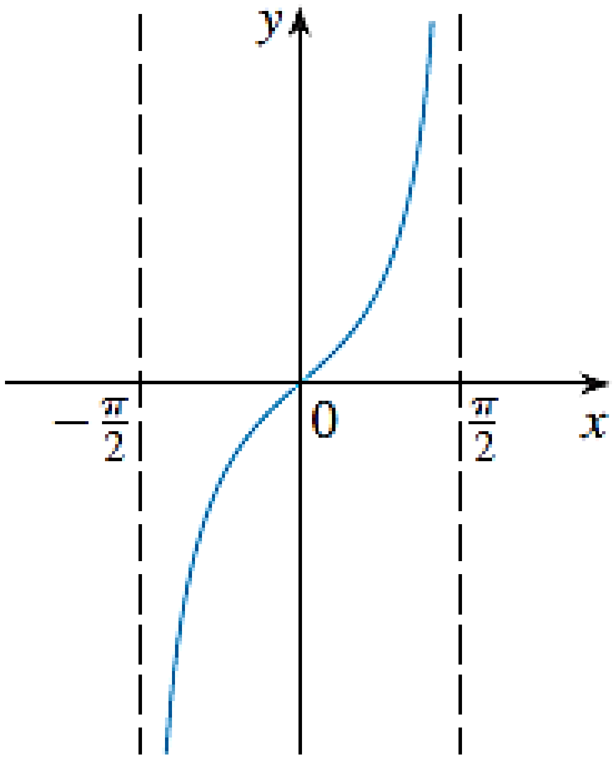


FIGURA 23

$y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

A função inversa da tangente, $\operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg}$, tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(-\pi/2, \pi/2)$. O gráfico está mostrado na Figura 25.

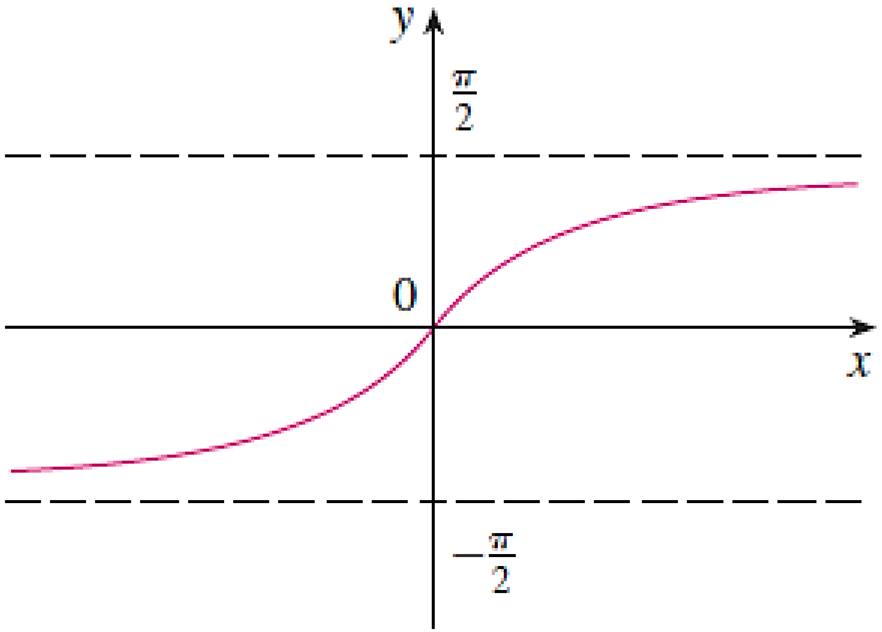


FIGURA 25
$y = \operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{arctg} x$

Sabemos que as retas $x = \pm\pi/2$ são assíntotas verticais do gráfico da tangente. Uma vez que o gráfico da tg^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico da função tangente restrita em torno da reta $y = x$, segue que as retas $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$ são assíntotas horizontais do gráfico de tg^{-1}.

EXEMPLO

Simplifique a expressão $\cos(\text{tg}^{-1}x)$.

SOLUÇÃO 1 Seja $y = \text{tg}^{-1}x$. Então $\text{tg}\, y = x$ e $-\pi/2 < y < \pi/2$. Queremos determinar $\cos y$ mas, uma vez $\text{tg}\, y$ é conhecida, é mais fácil determinar $\sec y$ primeiro:

$$\sec^2 y = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \quad \text{(uma vez que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2\text{)}$$

Assim,

$$\cos(\text{tg}^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

SOLUÇÃO 2 Em vez de usar as identidades trigonométricas como na Solução 1, talvez seja mais fácil fazer um diagrama. Se $y = \operatorname{tg}^{-1}x$, então $\operatorname{tg} y = x$, e podemos concluir da Figura 24 (que ilustra o caso $y > 0$) que

$$\cos(\operatorname{tg}^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

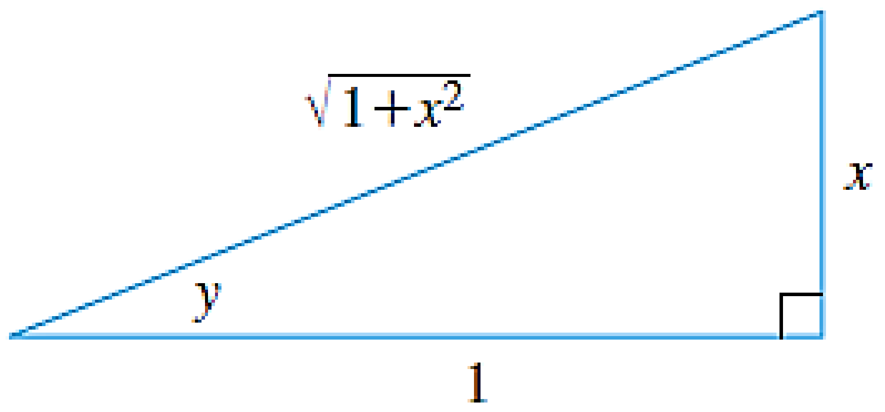


FIGURA 24

As funções inversas trigonométricas restantes não são usadas com tanta frequência e estão resumidas aqui.

$$\boxed{11} \quad y = \operatorname{cossec}^{-1}x \ (|x| \geqslant 1) \iff \operatorname{cossec} y = x \quad \text{e} \quad y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$$

$$y = \sec^{-1}x \ (|x| \geqslant 1) \iff \sec y = x \quad \text{e} \quad y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$$

$$y = \operatorname{cotg}^{-1}x \ (x \in \mathbb{R}) \iff \operatorname{cotg} y = x \quad \text{e} \quad y \in (0, \pi)$$

A escolha dos intervalos para y nas definições de $\operatorname{cossec}^{-1}$ e $\sec^{-1}$ não são de aceitação universal. Por exemplo, alguns autores usam $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ na definição de $\sec^{-1}$. (Você pode ver do gráfico da função secante na Figura 26 que esta escolha e a feita em $\boxed{11}$ são ambas válidas.)

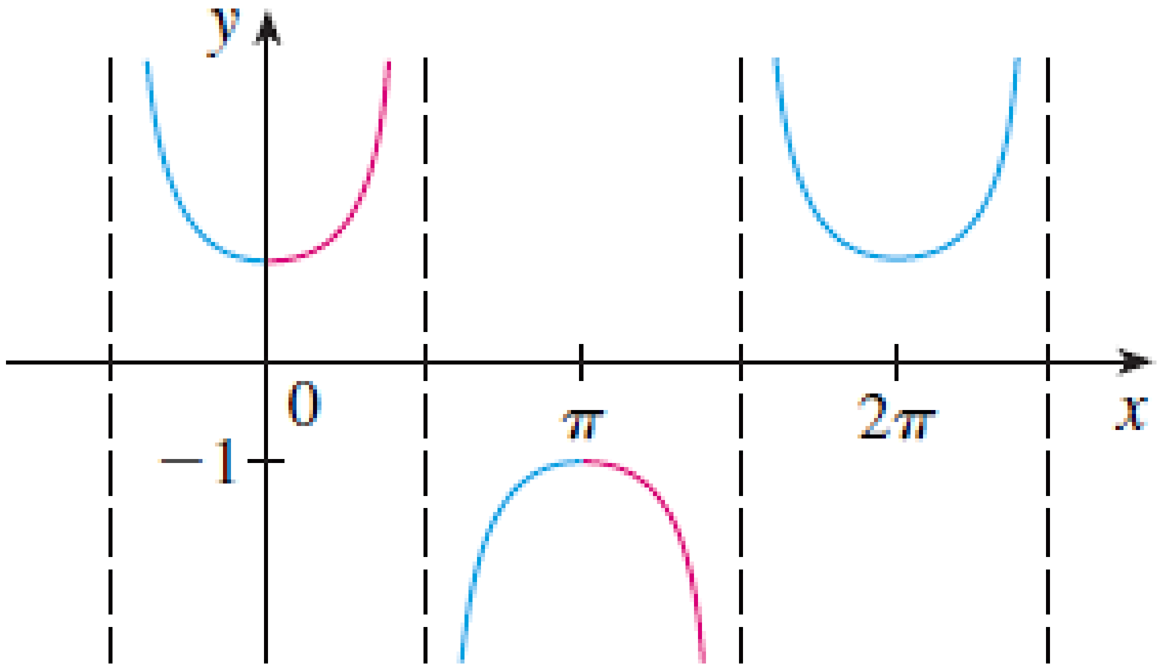


FIGURA 26

$y = \sec x$

Exercícios

Livro STEWART, J. Cálculo. Volume I. 7a edição

Seções: 1.2; 1.5 e 1.6