TRATAMENTO ALGÉBRICO DE VETORES

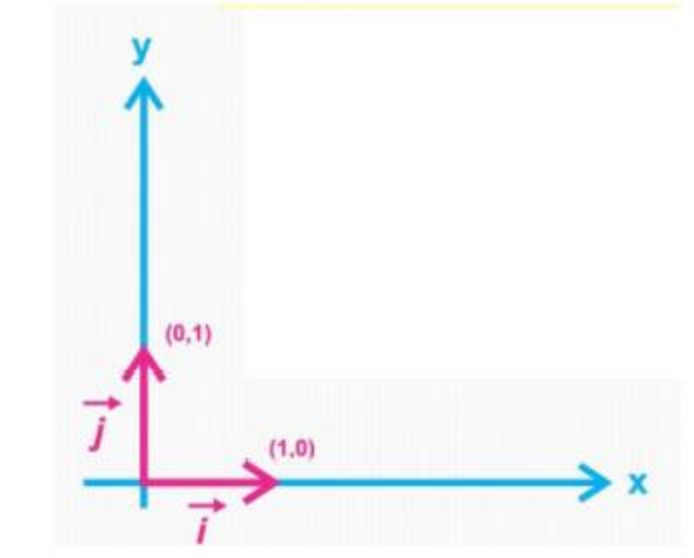
PROFESSORA FABIANA PIMENTA

BASE CANÔNICA DO PLANO

No plano R^2, a base é formada pelos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$

Onde,

$$\vec{i} = (1,0) \text{ e } \vec{j} = (0,1) \; .$$



Essa base é chamada de base canônica.

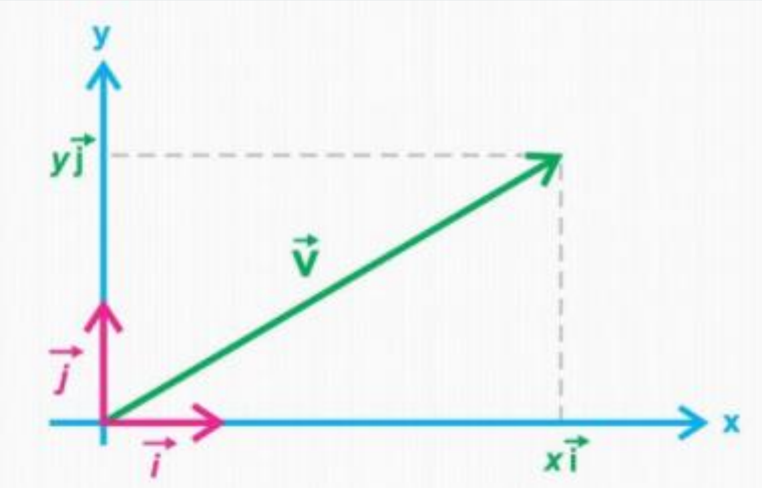
VETORES NO PLANO

Dado um vetor $\vec{v}$ no plano cartesiano R^2, podemos representá-lo das seguintes maneiras:

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{v} = (x, y)$$

Ideia geométrica:



EXEMPLOS

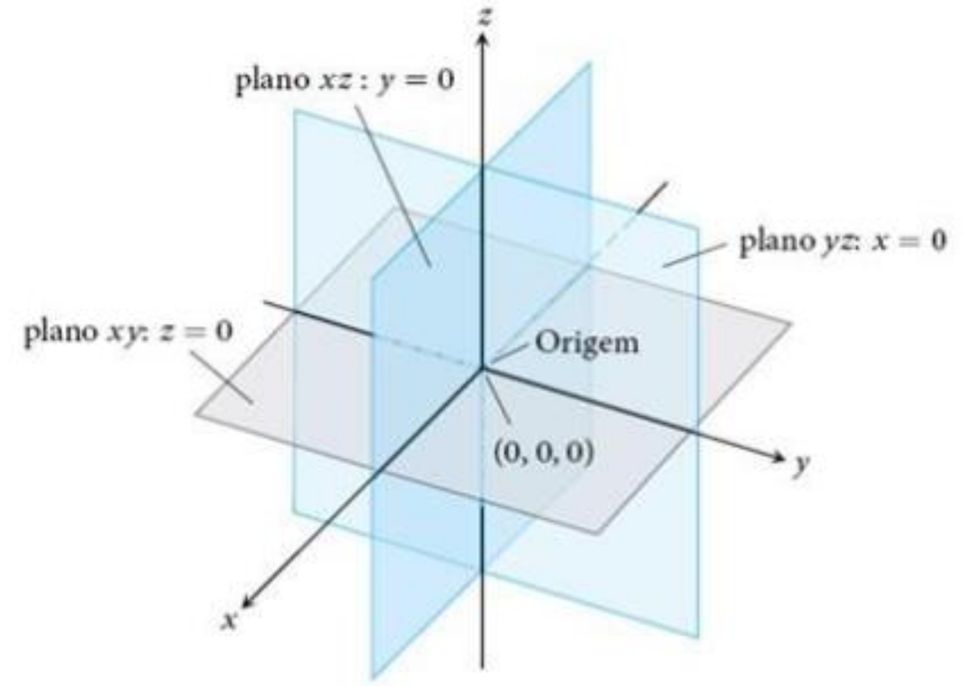
- $3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} = (3, -5)$;
- $3\vec{\jmath} = (0,3)$
- -4$\vec{\imath} = (-4,0)$
- $\vec{0} = (0,0)$

O ESPAÇO

Um ponto no R^3 é representado por uma terna ordenada

$P = (x, y, z)$.

Os eixos do sistema cartesiano do espaço são denominados: OX: eixo das abscissas, OY: eixo das ordenadas e OZ: eixo das cotas.



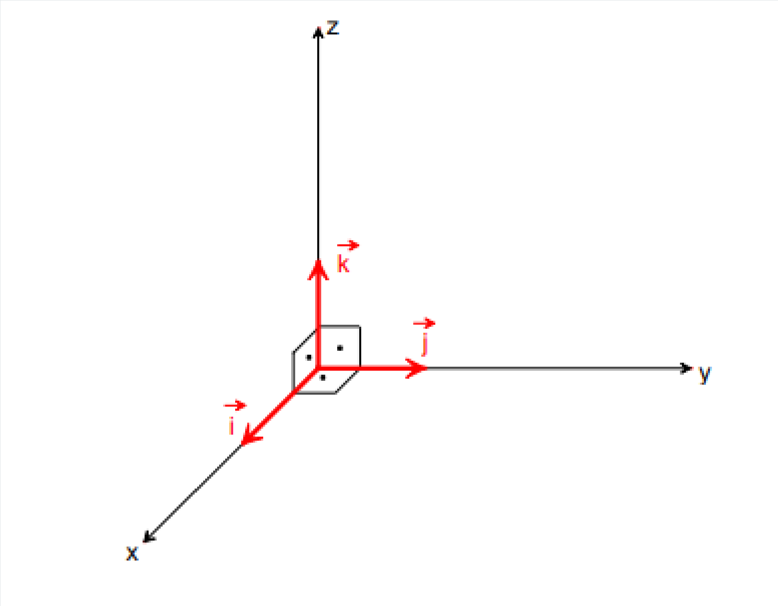
Os planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ dividem o espaço em oito octantes.

VETORES NO ESPAÇO

No plano R^3, a base é formada pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$

Onde,

$\vec{i} = (1{,}0{,}0)$, $\vec{j} = (0{,}1{,}0)$ e $\vec{k} = (0{,}0{,}1)$.

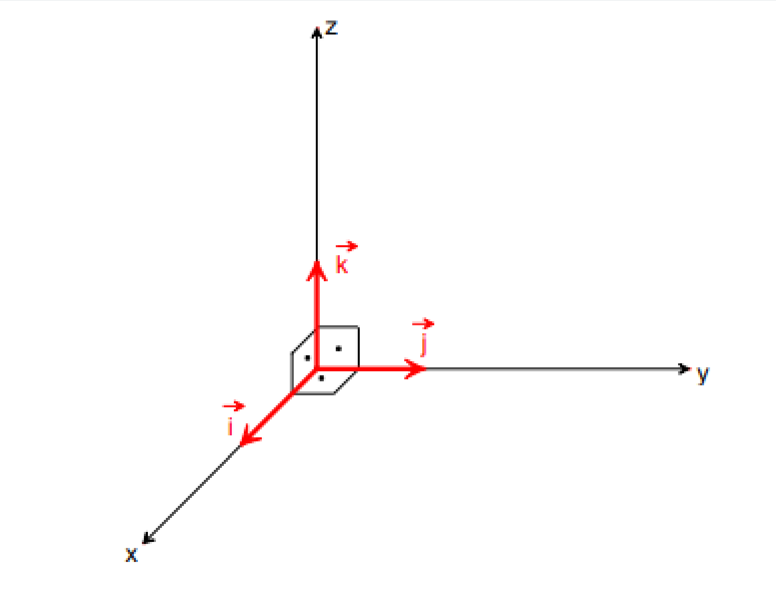


Essa base é chamada de base canônica.

VETORES NO ESPAÇO

Desta maneira, um vetor no espaço é uma terna ordenada

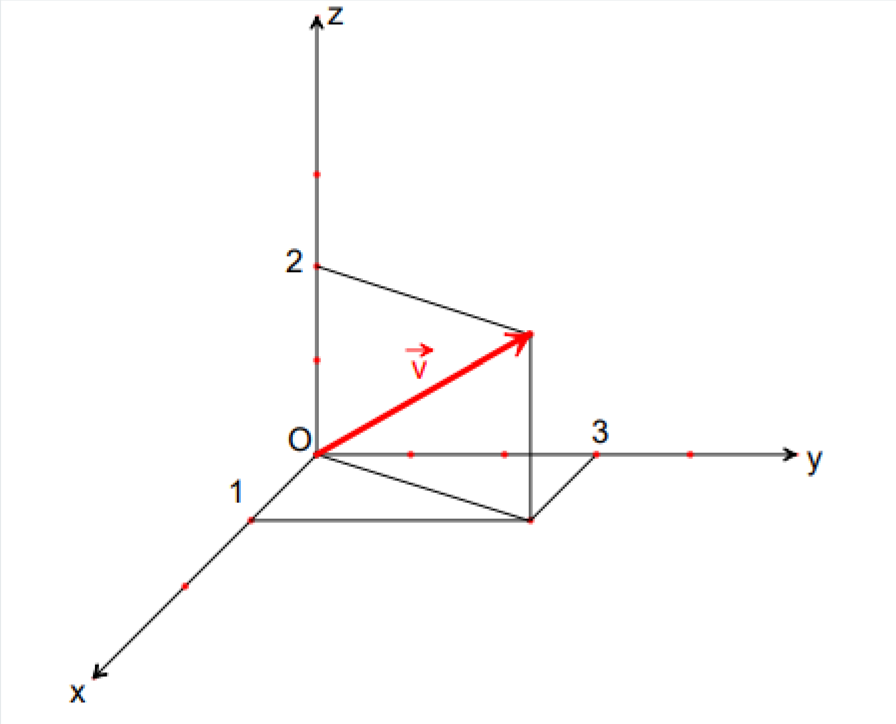
$(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



EXEMPLO

O vetor

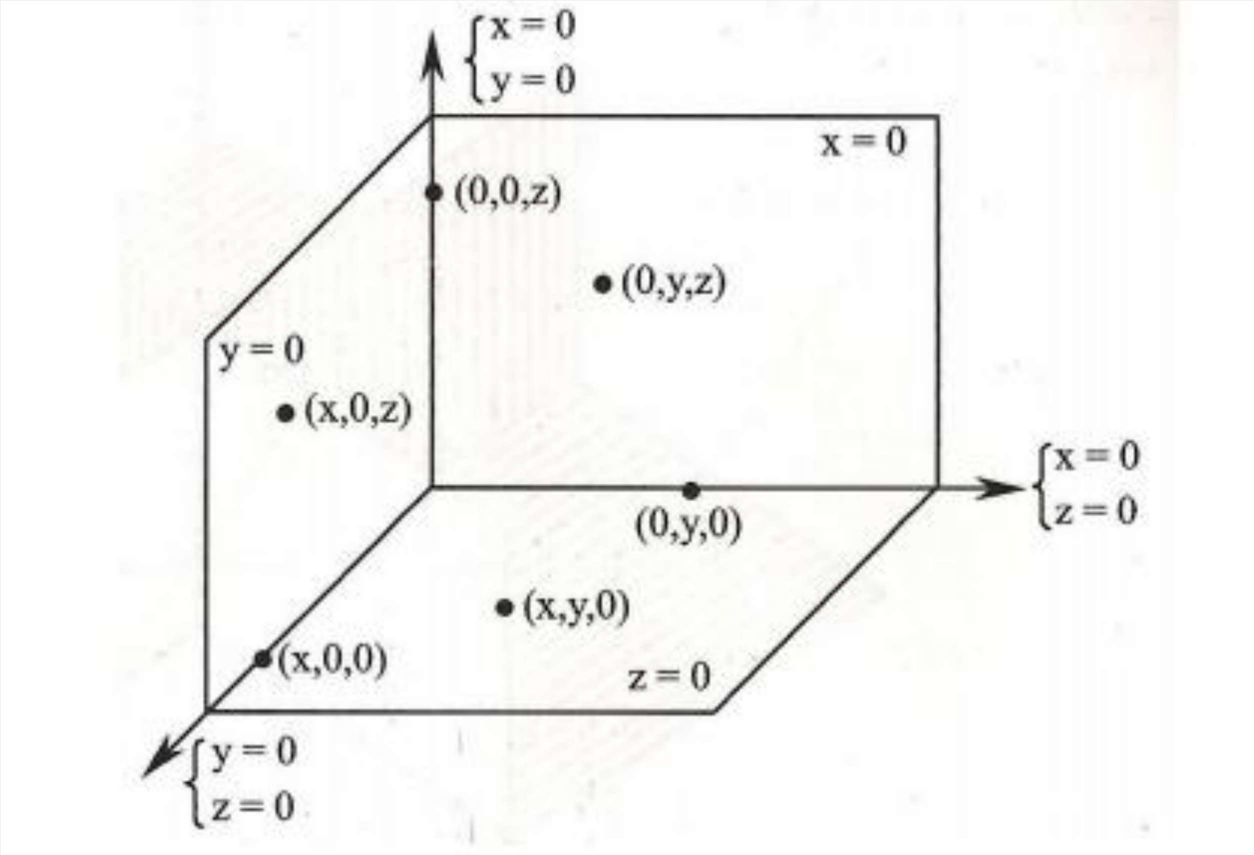
$$(1,3,2) = 1\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$



CASOS PARTICULARES NO ESPAÇO

Os pontos posicionados nos eixos cartesianos têm duas de suas coordenadas iguais a zero.

Os pontos que estão posicionados nos planos coordenados, tem uma de suas coordenadas nula.



IGUALDADE DE VETORES

NO PLANO

Sejam $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (a, b)$. Dizemos que $\vec{u} = \vec{v}$ se, e somente se, $x = a\ e\ y = b$.

NO ESPAÇO

Sejam $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$. Dizemos que $\vec{u} = \vec{v}$ se, e somente se, $x = a, y = b\ e\ z = c$.

EXEMPLO

O vetor $\vec{u} = (x + 1{,}4)$ é igual ao vetor $\vec{v} = (5{,}2y - 6)$. Determine $x \ e \ y$.

Solução:

$$\begin{cases} x + 1 = 5 \\ 4 = 2y - 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

OPERAÇÕES COM VETORES

NO PLANO

Sejam $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (a, b)$ e $k \in R$

$1)\vec{u} + \vec{v} = (x + a, y + b)$

$2)\vec{u} - \vec{v} = (x - a, y - b)$

$3)k\vec{u} = (kx, ky)$

NO ESPAÇO

Sejam $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (a, b, c)$ e $k \in R$

$1)\vec{u} + \vec{v} = (x + a, y + b, z + c)$

$2)\vec{u} - \vec{v} = (x - a, y - b, z - c)$

$3)k\vec{u} = (kx, ky, kz)$

EXEMPLO

Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-1,4)$, determine:

i. $3\vec{u} + 2\vec{v} = (6, -9) + (-2,8) = (4, -1)$

ii. $3\vec{u} - 2\vec{v} = (6, -9) - (-2,8) = (8, -17)$

EXEMPLO

Determine o vetor $\vec{x}$ na igualdade $3\vec{x} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{x}$, onde $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2,4)$

Solução:

$$3\vec{x} - \vec{x} = \frac{1}{2}\vec{v} - 2\vec{u} \Longrightarrow \vec{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{v} - 2\vec{u}\right)$$

$$\vec{x} = \frac{1}{4}\vec{v} - \vec{u} = \left(\frac{-1}{2}, 1\right) - (3, -1) = \left(\frac{-7}{2}, 2\right)$$

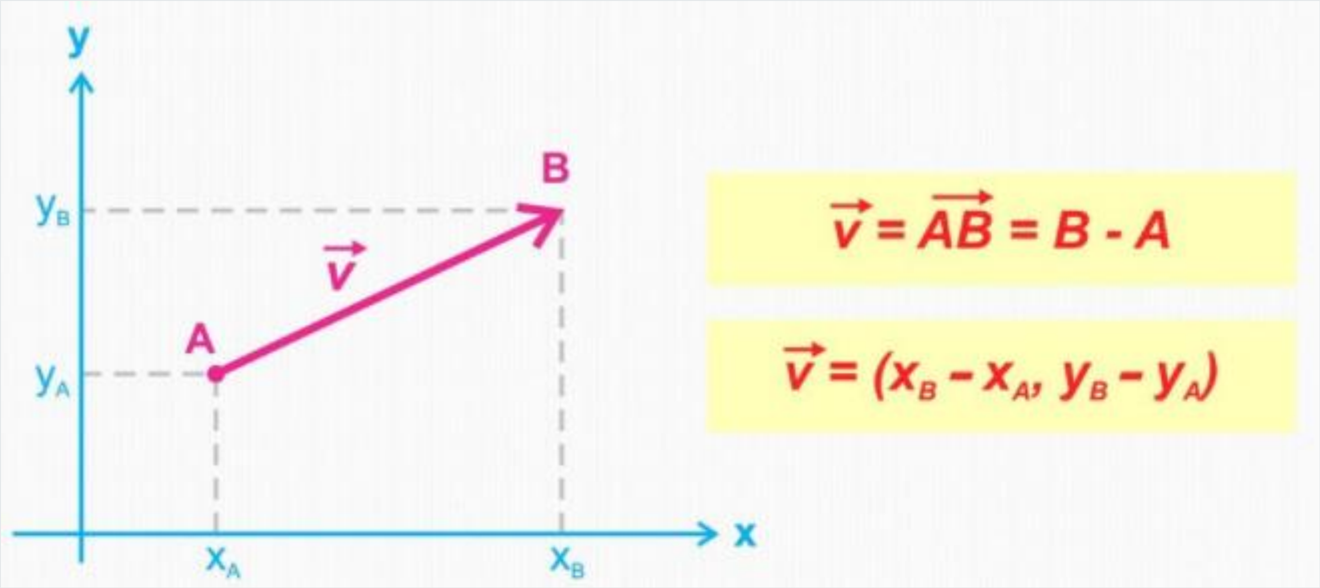
VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS

NO PLANO

Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B\ )$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\vec{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$



VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS

NO ESPAÇO

Sejam $A(x_A, y_A, z_A)$ e B(x_B, y_B, z_B)

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\vec{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

EXEMPLO

Dados os pontos A(-1,2), B(3,-1) e C(-2,4), determine o ponto D de modo que

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Solução:

$$D - C = \frac{1}{2}(B - A) \Longrightarrow (x + 2, y - 4) = \left(2, \frac{-3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2 = 2 \\ y - 4 = \frac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(0, \frac{5}{2}\right)$$

PARALELISMO DE VETORES

Considere os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, dizemos que $\vec{u} \parallel \vec{v}$, se existe um número real k, tal que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemplo: Verifique se os vetores são paralelos:

i) $\vec{u} = (-2,3)$ e $\vec{v} = (-4,6)$ **são paralelos**

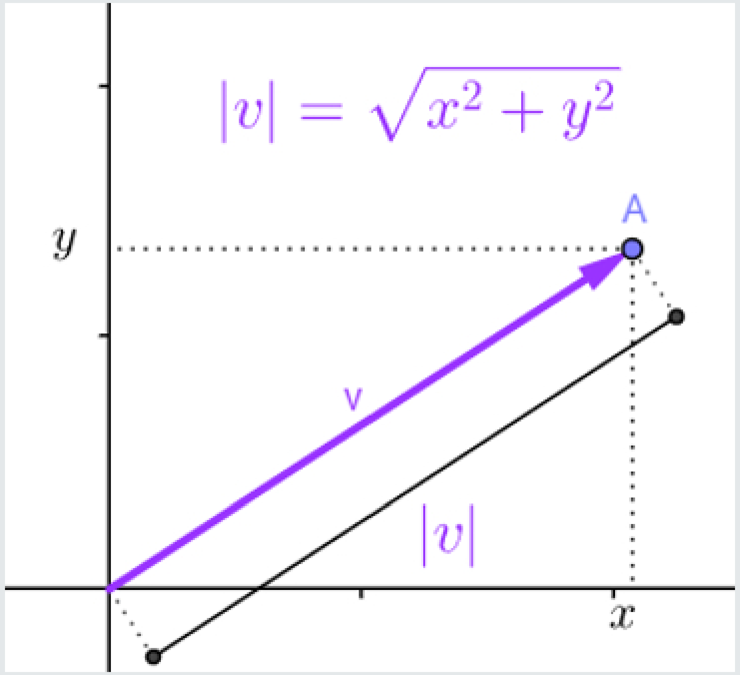
ii) $\vec{u} = (1,-2)$ e $\vec{v} = (4,-6)$ **não são paralelos**

MÓDULO DE UM VETOR

NO PLANO

Considere os vetores $\vec{v} = (x, y)$, o módulo do vetor $\vec{v}$ é dado por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



MÓDULO DE UM VETOR

NO ESPAÇO

Considere os vetores $\vec{v} = (x, y, z)$, o módulo do vetor $\vec{v}$

É dado por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

VERSOR

Cada vetor $\vec{v}, \vec{v} \neq 0$, é possível associar dois vetores unitários paralelos a $\vec{v}$:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \text{ (é o versor de } \vec{v}\text{)} \quad \text{e seu oposto } -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Observação: Versor é um vetor unitário sobre o vetor dado, possuido mesma direção e sentido.

EXEMPLO

Dados os pontos A(2,-1) e B(-1,4) e os vetores $\vec{u} = (-1,3)$ e $\vec{v} = (-2,-1)$, determine:

i) $|\vec{u}|$;

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10};$$

ii) $|\vec{u} + \vec{v}|$;

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13};$$

EXEMPLO

Dados os pontos A(2,-1) e B(-1,4) e os vetores $\vec{u} = (-1,3)$ e $\vec{v} = (-2,-1)$, determine:

iii) A distância entre os pontos A e B;

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34};$$

iv) O versor do vetor $\vec{v}$.

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-2,-1)}{\sqrt{5}}.$$