INTEGRAL DEFINIDA

Integral Definida

Cálculo de Integrais

Propriedades da Integral Definida

Integral Definida

$\boxed{2}$ **Definição de Integral Definida** Se f é uma função contínua definida em $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0 (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n (= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ **pontos amostrais arbitrários** nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a **integral definida de f de a a b** é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é **integrável** em $[a, b]$.

Observações

OBSERVAÇÃO 1 O símbolo $\int$ foi introduzido por Leibniz e é denominado **sinal de integral**. Ele é um S alongado e foi assim escolhido porque uma integral é um limite de somas. Na notação $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ é chamado **integrando**, a e b são ditos **limites de integração**, a é o **limite inferior**, b, o **limite superior**. Por enquanto, o símbolo dx não tem significado sozinho; $\int_a^b f(x)\,dx$ é apenas um símbolo. O dx simplesmente indica que a variável dependente é x. O procedimento de calcular a integral é chamado **integração**.

OBSERVAÇÃO 2 A integral definitiva $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número; ela não depende de x. Na verdade, podemos usar qualquer letra para substituir x sem alterar o valor da integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

OBSERVAÇÃO 3 A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que ocorre na Definição 2 é chamada **soma de Riemann**, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866). Assim, a Definição 2 diz que a integral definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma soma de Riemann.

Sabemos que se f for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes (veja a Figura 1). Comparando a Definição 2 com a definição de área, vemos que a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b (veja a Figura 2).

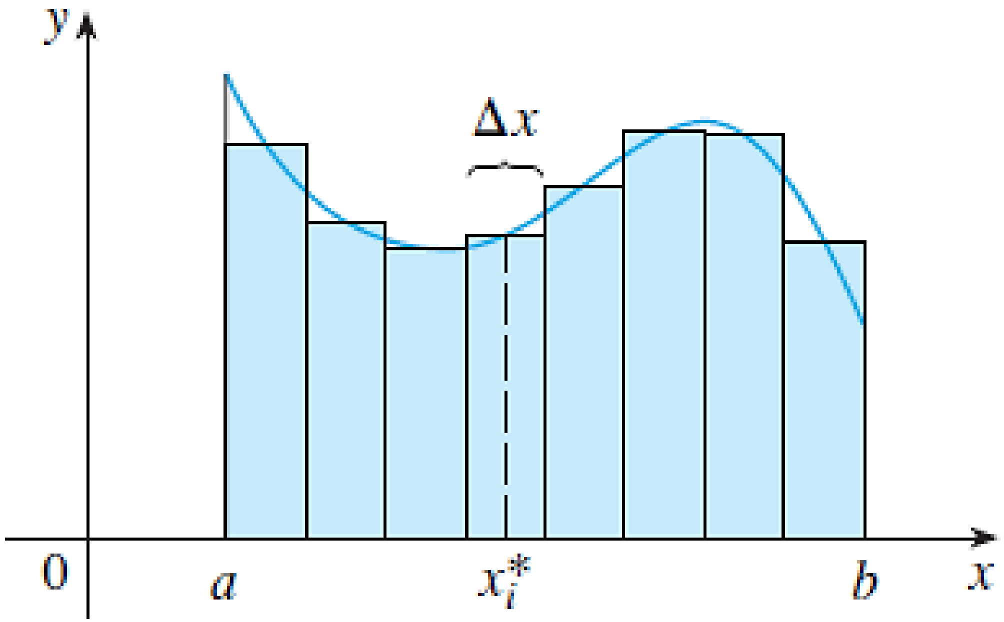


FIGURA 1

Se $f(x) \geqslant 0$, a soma de Riemann $\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ é a soma das áreas de retângulos.

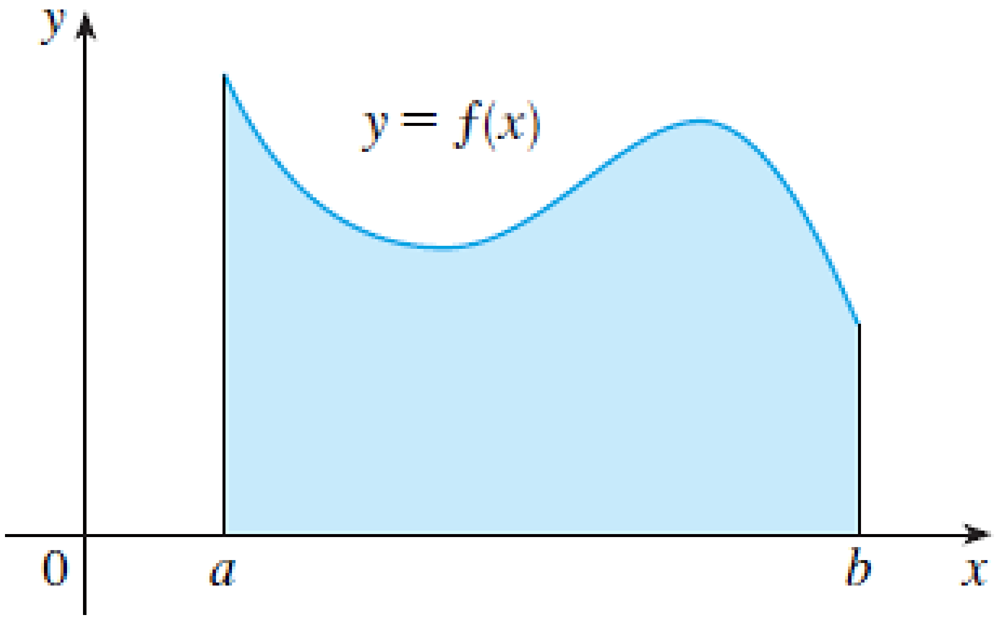


FIGURA 2

Se $f(x) \geqslant 0$, a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b.

Se f assumir valores positivos e negativos, como na Figura 3, então a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e do *oposto* das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x (as áreas dos retângulos azuis *menos* as áreas dos retângulos amarelos).

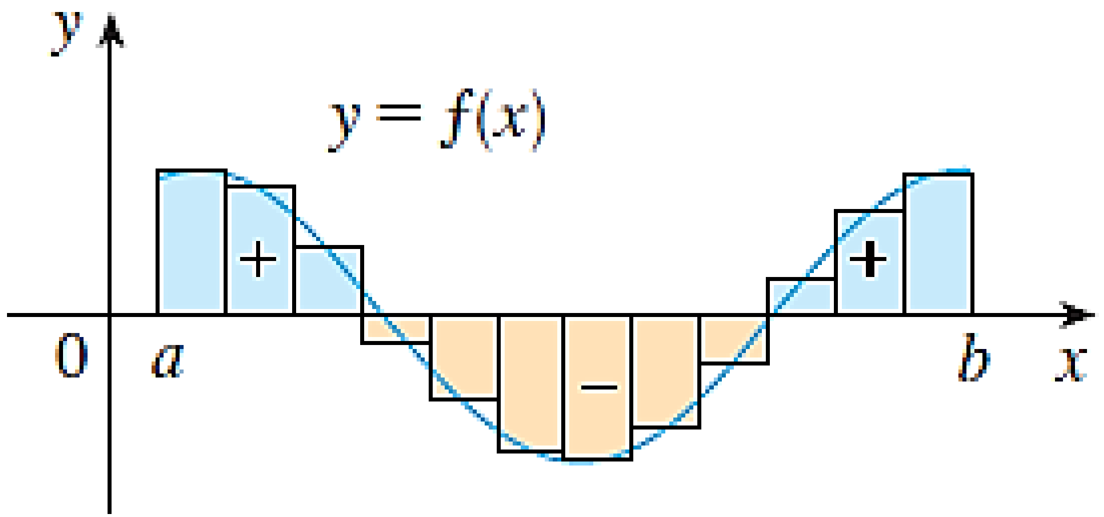


FIGURA 3

$\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ é uma aproximação para a área resultante.

Quando tomamos o limite dessas somas de Riemann, obtemos a situação ilustrada na Figura 4. Uma integral definida pode ser interpretada como **área resultante**, isto é, a diferença das áreas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

onde A_1 é a área da região acima do eixo x e abaixo do gráfico de f, e A_2 é a área da região abaixo do eixo x e acima do gráfico de f.

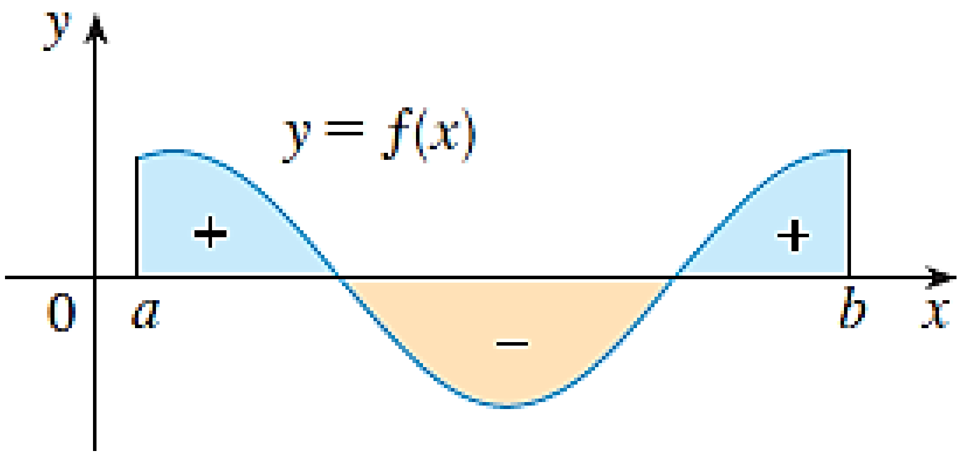


FIGURA 4

$\int_a^b f(x)\,dx$ é a área resultante.

OBSERVAÇÃO 4 Embora tenhamos definido $\int_a^b f(x)\,dx$ dividindo $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento, há situações nas quais é vantajoso trabalhar com intervalos de comprimentos diferentes.

Se os comprimentos dos subintervalos forem $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, teremos de garantir que todos esses comprimentos tendem a 0 no processo de limite. Isso acontece se o maior comprimento, $\max \Delta x_i$, tender a 0. Portanto, nesse caso a definição de integral definida fica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

OBSERVAÇÃO 5 Estabelecemos a integral definida para uma função integrável, mas nem todas as funções são integráveis. O teorema seguinte mostra que a maioria das funções que ocorrem comumente são de fato integráveis. Esse teorema é demonstrado em cursos mais avançados.

$\boxed{3}$ **Teorema** Se f for contínua em $[a, b]$, ou f tiver apenas um número finito de descontinuidades de saltos, então f é integrável em $[a, b]$; ou seja, a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Se f for integrável em $[a, b]$, então o limite na Definição 2 existe e dá o mesmo valor, não importa como escolhamos os pontos amostrais x_i^*. Para simplificarmos o cálculo da integral, com frequência tomamos como pontos amostrais as extremidades direitas. Então, $x_i^* = x_i$ e a definição de integral se simplifica como a seguir.

$\boxed{4}$ **Teorema** Se f for integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

onde $\qquad \Delta x = \dfrac{b - a}{n} \qquad$ e $\qquad x_i = a + i\,\Delta x$

Exemplo

Expresse

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\, \Delta x$$

como uma integral no intervalo $[0, \pi]$.

Comparando o limite dado com o limite do Teorema 4, vemos que eles são idênticos se escolhermos $f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x$. São dados $a = 0$ e $b = \pi$. Temos, portanto, pelo Teorema 4,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\, \Delta x = \int_0^{\pi} (x^3 + x \operatorname{sen} x)\, dx.$$

Quando Leibniz escolheu a notação para a integral, ele optou por ingredientes que lembrassem o processo de limite. Em geral, quando escrevemos

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

substituímos $\lim \Sigma$ por $\int$, x_i^* por x e Δx por dx.

Cálculo de Integrais

Quando usamos a definição para calcular uma integral definida, precisamos saber como trabalhar com somas. As três equações a seguir dão fórmulas para as somas de potências de inteiros positivos.

$$\boxed{5} \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\boxed{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\boxed{7} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

As fórmulas remanescentes são regras simples para trabalhar com a notação de somatória:

$\boxed{8}$ $$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$\boxed{9}$ $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$\boxed{10}$ $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$\boxed{11}$ $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

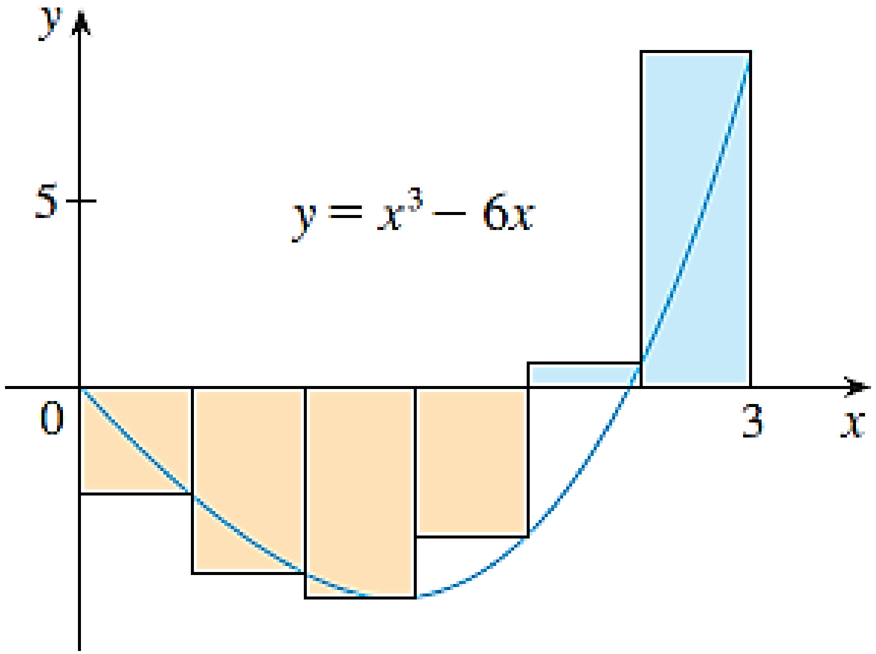
Exemplo

(a) Calcule a soma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$ tomando como pontos amostrais as extremidades direitas e $a = 0$, $b = 3$ e $n = 6$.

(b) Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

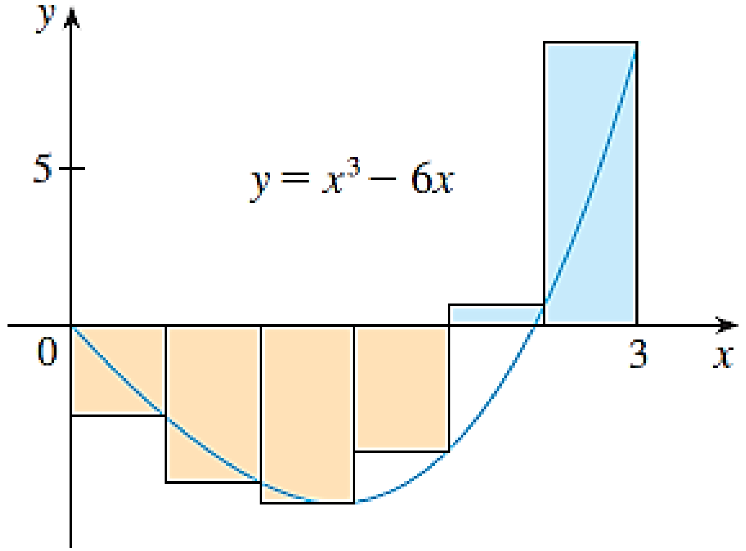
(a) Com $n = 6$, o comprimento dos intervalos é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$



e as extremidades direitas são $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}0$, $x_3 = 1{,}5$, $x_4 = 2{,}0$, $x_5 = 2{,}5$ e $x_6 = 3{,}0$.

Logo, a soma de Riemann é



$$R_6 = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= f(0{,}5)\,\Delta x + f(1{,}0)\,\Delta x + f(1{,}5)\,\Delta x + f(2{,}0)\,\Delta x + f(2{,}5)\,\Delta x + f(3{,}0)\,\Delta x$$

$$= \tfrac{1}{2}(-2{,}875 - 5 - 5{,}625 - 4 + 0{,}625 + 9)$$

$$= -3{,}9375$$

Observe que f não é uma função positiva e, portanto, a soma de Riemann não representa uma soma de áreas de retângulos. Mas ela representa a soma das áreas dos retângulos azuis (acima do eixo x) menos a soma das áreas dos retângulos amarelos (abaixo do eixo x) na Figura 5.

(b) Com n subintervalos, temos

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{3}{n}$$

Assim, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$ e, em geral, $x_i = 3i/n$. Uma vez que estamos utilizando as extremidades direitas, podemos usar a Equação 3:

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] \qquad \text{(Equação 9 com } c = 3/n\text{)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \right] \qquad \text{(Equações 11 e 9)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{81}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{54}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right\} \qquad \text{(Equações 7 e 5)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{81}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - 27 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6{,}75$$

Essa integral não pode ser interpretada como uma área, pois f assume valores positivos e negativos. Porém, ela pode ser interpretada como a diferença de áreas $A_1 - A_2$, em que A_1 e A_2 estão na Figura 6.

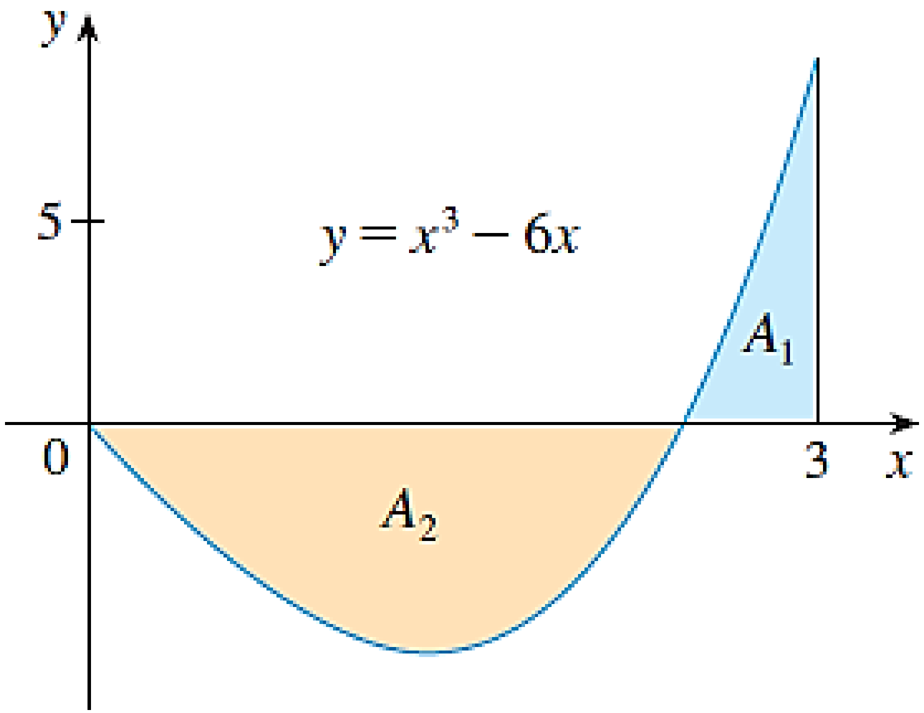


FIGURA 6

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6{,}75$$

A Figura 7 ilustra o cálculo mostrando os termos positivos e negativos na soma de Riemann direita R_n para $n = 40$. Os valores na tabela mostram as somas de Riemann tendendo ao valor exato da integral, $-6{,}75$, quando $n \to \infty$.

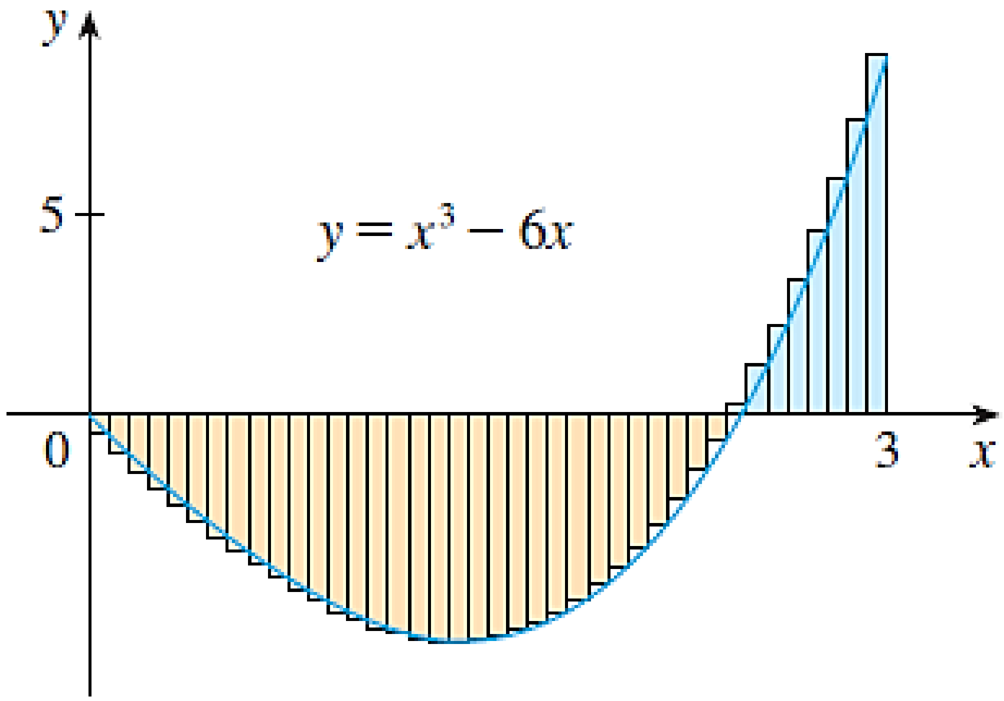


FIGURA 7
$R_{40} \approx -6{,}3998$

n	R_n
40	$-6{,}3998$
100	$-6{,}6130$
500	$-6{,}7229$
1000	$-6{,}7365$
5000	$-6{,}7473$

Exercício

26. (a) Encontre uma aproximação para a integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx$ usando uma soma de Riemann com as extremidades direitas e $n = 8$.

(b) Faça um diagrama como a Figura 3 para ilustrar a aproximação da parte (a).

(c) Use o Teorema 4 para calcular $\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx$.

(d) Interprete a integral da parte (c) como uma diferença de áreas e ilustre com diagramas como o da Figura 4.

(a) $\Delta x = (4-0)/8 = 0.5$ and $x_i^* = x_i = 0.5i$.

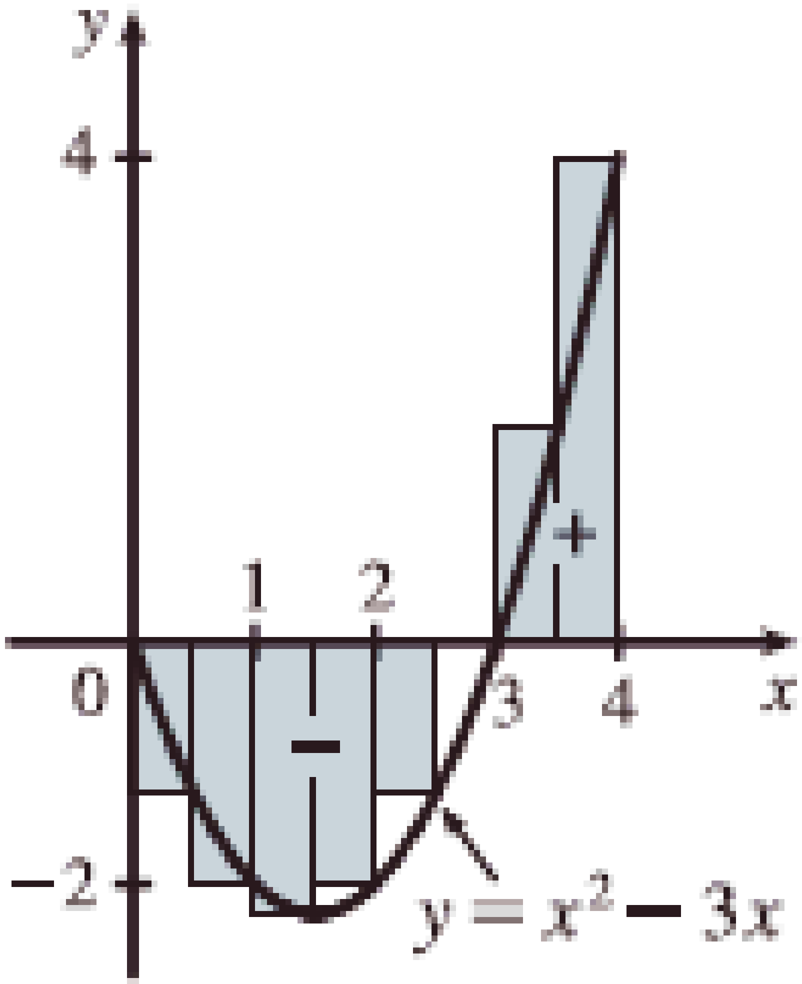
$$\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{8} f(x_i^*)\,\Delta x$$

$$= 0.5\{[0.5^2 - 3(0.5)] + [1.0^2 - 3(1.0)] + \cdots$$

$$+ [3.5^2 - 3(3.5)] + [4.0^2 - 3(4.0)]\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{5}{4} - 2 - \tfrac{9}{4} - 2 - \tfrac{5}{4} + 0 + \tfrac{7}{4} + 4\right) = -1.5$$

(b)



$$\text{(c)} \int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{4i}{n}\right)^2 - 3\left(\frac{4i}{n}\right) \right] \left(\frac{4}{n}\right)$$

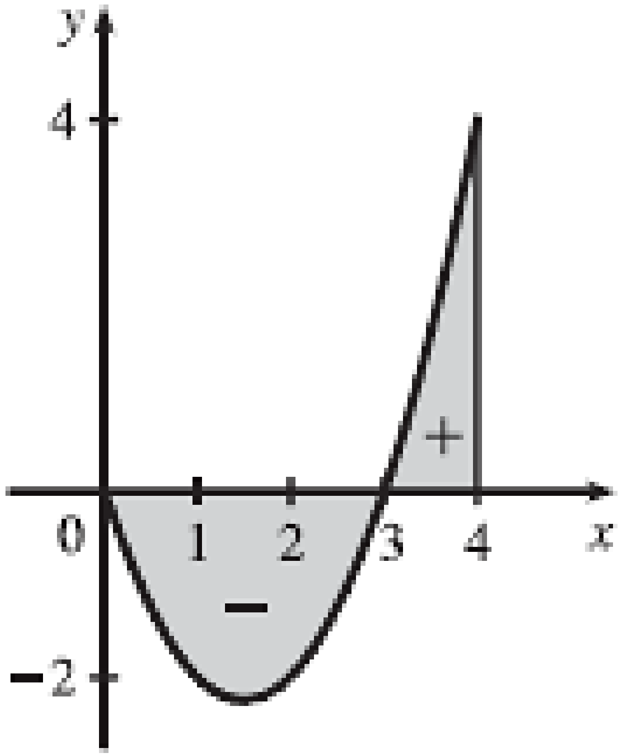
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left[\frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{12}{n} \sum_{i=1}^{n} i \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{48}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{32}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 24\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \tfrac{32}{3} \cdot 2 - 24 = -\tfrac{8}{3}$$

(d) $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx = A_1 - A_2$, where A_1 is the area marked $+$ and A_2 is the area marked $-$.



Propriedades da Integral Definida

Quando definimos a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, implicitamente assumimos que $a < b$. Mas a definição como o limite de somas de Riemann faz sentido mesmo que $a > b$. Observe que se invertermos a e b, então Δx mudará de $(b - a)/n$ para $(a - b)/n$. Portanto,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

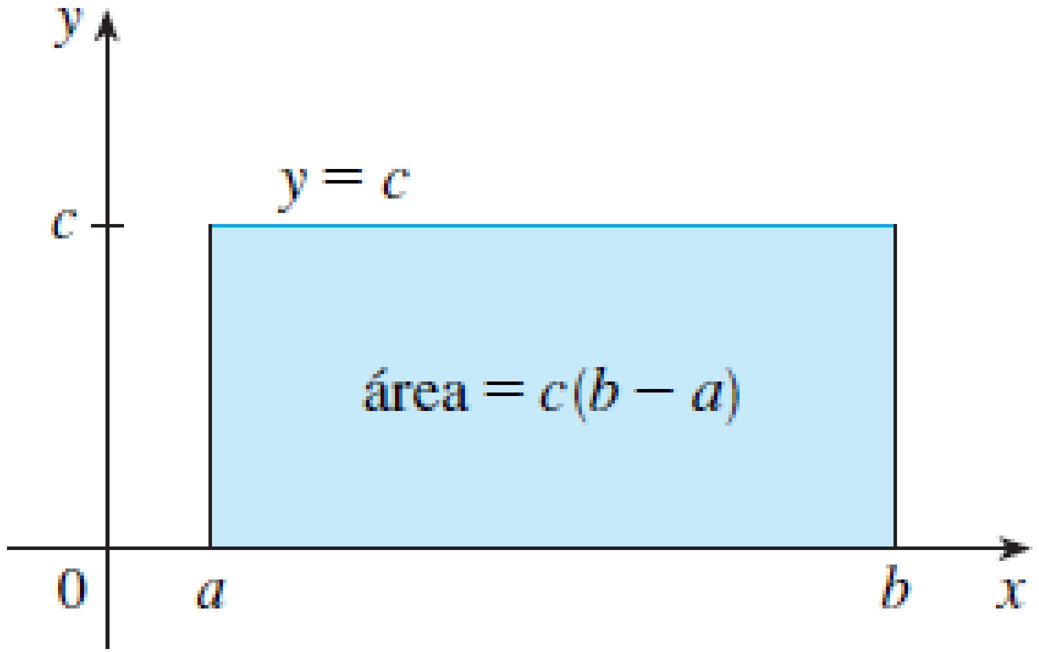
Se $a = b$, então $\Delta x = 0$, de modo que

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

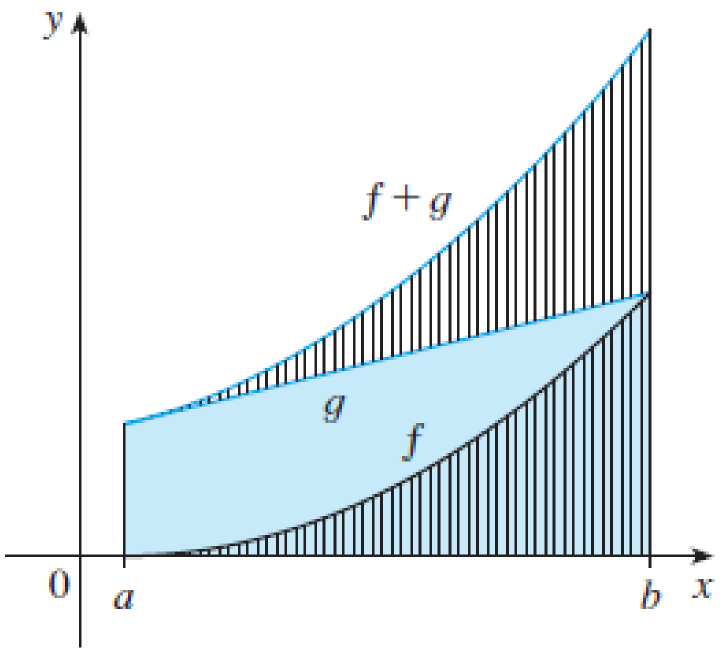
Vamos desenvolver agora algumas propriedades básicas das integrais que nos ajudarão a calcular as integrais de forma mais simples. Vamos supor que f e g sejam funções contínuas.

Propriedades da Integral Definida

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, onde c é qualquer constante



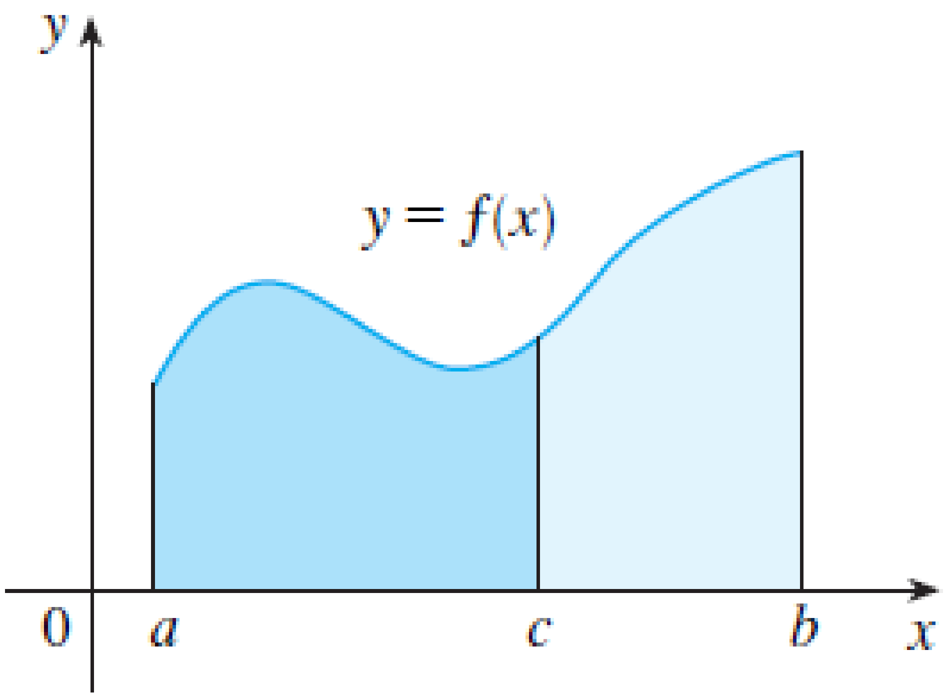
2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$



3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$ onde c é qualquer constante

4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

5. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

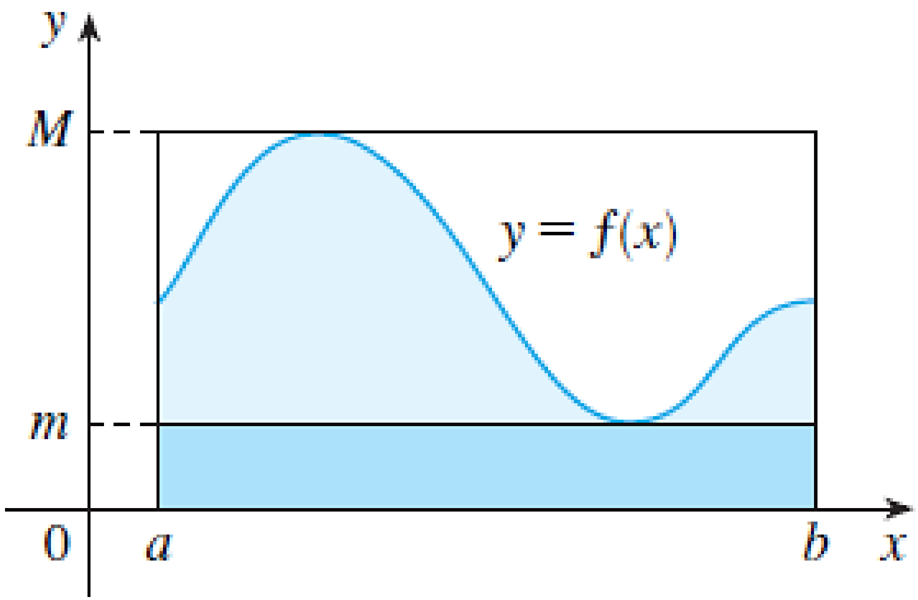


Propriedades Comparativas da Integral

6. Se $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Se $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$



Exercícios

Seção 5.2 – pág. 346