Escolha e faça 16 exercícios abaixo

6.3 EXERCÍCIOS

1. Seja $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (y, 2y).$$

Mostre que $\lambda = 2$ é um autovalor de T e vetores da forma $(x, 2x)$ são os autovetores correspondentes.

Ache os autovalores e autovetores correspondentes das transformações lineares dadas:

2. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$

3. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

4. $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $(x, y, z) \mapsto (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$

5. $T : P_2 \to P_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

6. $T : M_2 \to M_2$ tal que $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}'$ (Isto é, T é a transformação que leva uma matriz na sua transposta.)

7. $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tal que $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$

8. Encontre a transformação linear $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.

Ache os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$

18. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

19. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quais são os autovalores e autovetores de **A** de um espaço vetorial:
   a) Real *b*) Complexo

20. Se λ é autovalor da transformação linear $T: V \to V$ e $\mathbf{v}$ é um autovetor associado a ele, mostre que
   a) $k\mathbf{v}$ é outro autovetor associado a λ se $k \neq 0$.
   b) O conjunto formado pelos autovetores associados a λ e o vetor nulo é subespaço de V.

21. Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos e diferentes de zero de $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Mostre que
   a) Os autovetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ correspondentes são LI.
   b) $T(\mathbf{v}_1)$ e $T(\mathbf{v}_2)$ são LI.

22. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   a) Ache os autovalores de **A** e de $\mathbf{A}^{-1}$.
   b) Quais são os autovetores correspondentes?

23. Suponha que λ seja autovalor de $T: V \to V$ com autovetor $\mathbf{v}$ e α um número não nulo. Ache os autovalores e autovetores de αT.

24. Suponha que $\mathbf{v} \in V$ seja autovetor de $T: V \to V$ e $S: V \to V$, ao mesmo tempo com autovalores λ_1 e λ_2 respectivamente. Ache autovetores e autovalores de
   a) $S + T$. *b*) $S \circ T$.

25. Seja $T: V \to V$ linear
   a) Se $\lambda = 0$ é autovalor de T, mostre que T não é injetora.
   b) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T?

26. Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrizes inversíveis.
   a) Calcule **AB** e **BA** e observe que estes produtos são distintos.
   b) Encontre os autovalores de **AB** e os de **BA**. O que você observa?

c) Encontre os autovetores de **AB** e os de **BA**. O que você nota?

d) Motivado pelos itens anteriores, mostre que: se **A** e **B** são matrizes inversíveis de mesma ordem, os autovalores de **AB** e **BA** são os mesmos. Mostre mais ainda: se λ_1 é um autovalor de **AB** com autovetor **v**, então λ_1 é autovalor de **BA** com autovetor **B**v. Da mesma forma, se λ_2 é um autovalor de **BA** com autovetor **w**, então λ_2 é autovalor de **AB** com autovetor **A**w.

6.3.1 Respostas

3. $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}, \mathbf{v}_1 = (x, \sqrt{2}x); \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}, \mathbf{v}_2 = (x, -\sqrt{2}x)$

5. $\lambda = 1, \mathbf{v} = ax^2 + bx + b$

7. $\lambda = 1, \mathbf{v} = (0, 0, 0, w)$

8. $T(x, y) = (-6y, -x + y)$

9. $\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = (x, 0); \lambda_2 = -1, \mathbf{v}_2 = (-y, y)$

11. $\lambda = 1, \mathbf{v} = (x, 0, 0)$

13. $\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = (-y, y, 0); \lambda_2 = -1, \mathbf{v}_2 = (x, 2x, -x); \lambda_3 = 3, \mathbf{v}_3 = (x, 0, x)$

16. $\lambda_1 = 4, \mathbf{v}_1 = (y - z, y, z); \lambda_2 = -2, \mathbf{v}_2 = (x, 0, x)$ ou $\lambda_1 = 4,$
$\mathbf{v}_1 = (y, y, 0); \lambda_2 = 4, \mathbf{v}_2 = (-z, 0, z); \lambda_3 = -2, \mathbf{v}_3 = (x, 0, x)$

17. $\lambda_1 = -3, \mathbf{v}_1 = (2y - 7z, y, z); \lambda_2 = 9, \mathbf{v}_2 = (x, x, x)$

18. $\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = (0, y, 0, -y); \lambda_2 = -1, \mathbf{v}_2 = (x, 0, -2x, 0); \lambda_3 = 6,$
$\mathbf{v}_3 = (x, 0, 4x, 0)$

19. *a*) $\lambda = -2, \mathbf{v} = (2x, x, -x)$
b) $\lambda_1 = -2, \mathbf{v}_1 = (2x, x, -x); \lambda_2 = i, \mathbf{v}_2 = [(-1 + i)y, y, (1 + i)y];$
$\lambda_3 = -i, \mathbf{v}_3 = [(-1 - i)y, y, (1 - i)y]$

22. *a*) Os de **A** são -1 e 2; os de $\mathbf{A}^{-1}$, -1 e $\frac{1}{2}$.
b) Os de **B** são $(-2y, y)$ e $(x, 2x)$; os de $\mathbf{A}^{-1}$, $(-2y, y)$ e (x, x)

23. Autovalor $\alpha\lambda$ com autovetor **v**.

25. *a*) Como $\lambda = 0$ é autovalor, existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $T\mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Então $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$ e $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Portanto, T não é injetora.
b) Como T não é injetora, existe $\mathbf{v} \neq w$ tal que $T\mathbf{v} = Tw$.
Então $T\mathbf{v} - Tw = T(\mathbf{v} - w) = \mathbf{0} = 0 \cdot (\mathbf{v} - w)$. Portanto, 0 é autovalor de T com autovetor $\mathbf{v} - w$.

26. *b*) São iguais. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$
c) São diferentes. $\mathbf{v}_1 = (x, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (\frac{1}{3}y, y, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (\frac{5}{4}z, -2z, z)$

Leituras Sugeridas e Referências

[1] Herstein, I. N.; *Tópicos de Álgebra*, Editora Polígono, São Paulo, 1970.
[2] Hoffman, K. e Kunze, R.; *Álgebra Linear*; Editora Polígono, São Paulo, 1971.