Geometria Analítica

NOTA À 2.ª EDIÇÃO

Nesta edição mantivemos o propósito que norteou a 1.ª edição tanto no sentido de que o texto seja adequado a estudantes de 1.° ano dos cursos da área de Ciências Exatas como no sentido de nos restringir apenas às idéias fundamentais de Geometria Analítica, sem a preocupação de esgotar o assunto. Desta forma, como na 1.ª edição, a leitura dos quatro capítulos iniciais requer apenas conhecimentos básicos de Álgebra e Geometria Elementar, em nível de 2.° grau. Somente no Capítulo 5, onde se explorou o conceito de tangência para curvas e superfícies no espaço, são necessários alguns conhecimentos de Cálculo Diferencial.

Novas questões, na forma de exercícios propostos, foram introduzidas nos Capítulos 3 e 5. O objetivo destas questões é oferecer ao estudante um material que, se devidamente trabalhado, proporcione uma melhor compreensão dos conceitos apresentados no texto e, em alguns casos, explorar fatos que não foram explicitados.

Agradecemos a todos os colegas e estudantes que, desde o aparecimento da 1.ª edição, têm nos passado suas críticas e impressões sobre o livro, contribuindo, assim, para que ele se aproxime da experiência de todos que o utilizamos.

Goiânia, agosto de 1995
Os autores.

PREFÁCIO

A idéia de se escrever este livro ocorreu por volta de 1972. A proposta era a de obter um texto de Geometria Analítica adequado aos estudantes dos cursos de Matemática, Física e Engenharia, recém-ingressados na Universidade, isto é, cuja leitura pressupusesse apenas conhecimentos básicos de Álgebra e Geometria Elementar, em nível colegial.

De maneira intuitiva e geométrica introduzimos a reta real no Capítulo 1. Em linguagem vetorial, apresentamos a Geometria Analítica no plano nos Capítulos 2 e 3, e no espaço, nos Capítulos 4 e 5. No plano, iniciamos com sistemas de coordenadas e concluímos com cônicas. Além das aplicações geométricas, apresentamos várias aplicações à Física, especialmente as relacionadas com movimento de partícula e resultante de forças. Para o estudante que esteja cursando Cálculo Diferencial, indicamos também as soluções com o emprego de derivadas, para o cálculo de velocidade e de tangentes. Na obtenção das formas canônicas, utilizamos rotação e translação de eixos. No espaço tridimensional (Capítulos 4 e 5), estudamos a reta, o plano e as superfícies quádricas na forma canônica. No Capítulo 6, introduzimos a Geometria Analítica no plano complexo. As várias formas de equações de curvas (cartesianas, paramétricas, complexas e polares) são aqui reunidas para destacar as vantagens de umas ou de outras, conforme a curva que se esteja estudando. No Capítulo 7 apresentamos o espaço de dimensão quatro. Este capítulo faz sentir a necessidade de uma teoria mais sólida para o estudo de espaços de dimensões superiores e serve como uma transição natural para um curso de Álgebra Linear. Aliás, frisamos que, ao introduzir o Cálculo Vetorial neste livro, o fizemos com o propósito de enriquecer as técnicas usadas em Geometria Analítica, sem preocupações diretas com a Álgebra Linear. Finalmente, o Capítulo 8, além de sugestões e respostas, contém comentários das questões propostas.

Em nenhum momento tivemos a pretensão de esgotar o assunto. Pelo contrário, propositadamente, procuramos nos restringir às idéias fundamentais e evitar excessos de nomenclatura que poderiam desviar a atenção dos alunos. Acreditamos, assim, que todo o conteúdo do livro pode ser abordado num curso semestral de quatro aulas semanais.

Por fim, não poderíamos deixar de agradecer a todos os colegas e estudantes que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste livro. Antecipadamente, agradecemos também àqueles que nos enviarem críticas construtivas.

Goiânia, novembro de 1993
Os autores.

SUMÁRIO

Geometria Analítica

CAPÍTULO 1

A RETA

1.1 NÚMEROS INTEIROS

Os números

$$0\,,1\,,2\,,3\,,\ldots$$

são chamados ***números naturais***. O símbolo **N** será usado para denotar o conjunto dos números naturais. Com o símbolo **Z** indicaremos o conjunto dos ***números inteiros***, que são:

$$\ldots,-3\,,-2\,,-1\,,0\,,1,2\,,3\,,\ldots$$

Os números inteiros podem ser convenientemente representados por pontos de uma reta, como mostra a Figura 1.1.

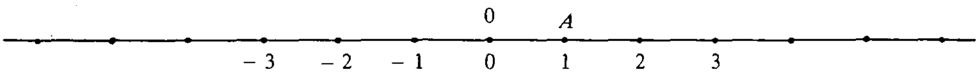


Fig. 1.1

Nesta figura o ponto O, chamado ***origem***, foi escolhido arbitrariamente. O segmento OA, de comprimento arbitrário, foi tomado como unidade de comprimento e convencionamos representar os números positivos por pontos à direita de O e os números negativos, por pontos à esquerda de O. Sempre que usarmos a reta com estas características, isto é, com uma origem, uma unidade de comprimento e um sentido (todos arbitrários), a indicaremos por **R**.

1.2 NÚMEROS RACIONAIS

Os números que podem ser escritos na forma

$$\frac{p}{q},$$

onde p e q são inteiros e $q \neq 0$, são chamados ***números racionais***. Como

$$4=\frac{4}{1},\quad 3{,}141=\frac{3141}{1000},\quad 0{,}33\ldots=\frac{1}{3},$$

concluímos que 4, 3,141, 0,33 . . . são todos números racionais. Em particular, os números inteiros são números racionais.

Usando o símbolo Q para indicar o conjunto dos números racionais, podemos escrever:

$$Q=\left\{x : x=\frac{p}{q},\ p,q \in Z \text{ e } q \neq 0\right\}.$$

Os números racionais também podem ser representados por pontos de uma reta. A seguir representaremos, na reta **R** da Figura 1.2, o número racional p/q.

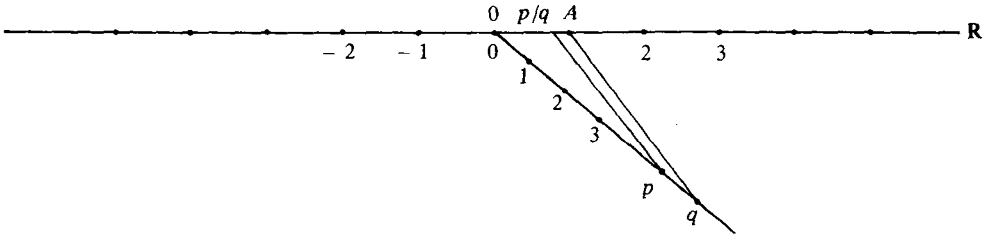


Fig. 1.2

O processo consiste em traçar uma semi-reta qualquer, com origem em O, formando com OA um ângulo agudo, e nela marcar p e q, utilizando-se uma unidade de comprimento qualquer. Traçando, pelo ponto correspondente a p, uma reta paralela à reta determinada pelo ponto A e o ponto correspondente a q, onde esta reta intercepta a reta **R**, temos o ponto correspondente ao número p/q. Se o número p/q for negativo, $-p/q$ será positivo e, usando o processo anterior, podemos marcar sobre a reta **R** o número $-p/q$; tomando seu simétrico em relação à origem O, temos o ponto sobre R correspondente a p/q.

A Figura 1.3 mostra os números

$$\frac{3}{5},\frac{9}{7},-\frac{3}{5}$$

representados por pontos na reta.

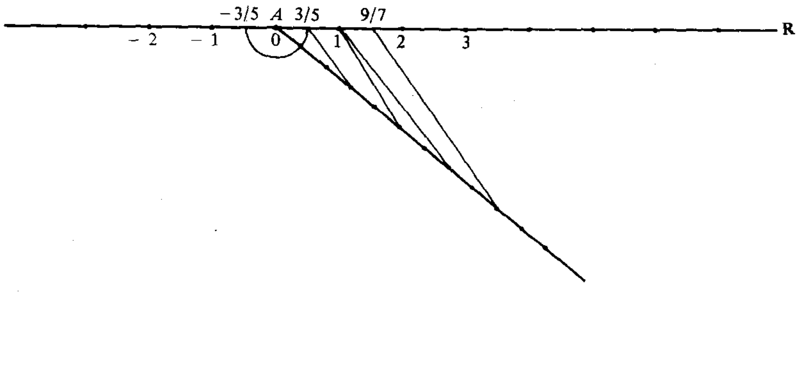


Fig. 1.3

1.3 NÚMEROS IRRACIONAIS

O comprimento da diagonal de um quadrado, cujo lado mede uma unidade, é um número que pode ser marcado na reta **R**, como mostra a Figura 1.4. Pelo teorema de Pitágoras, este número é $\sqrt{2}$. A seguir, vamos mostrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional. A prova consiste em supor que $\sqrt{2}$ seja racional e a partir daí obter uma contradição.

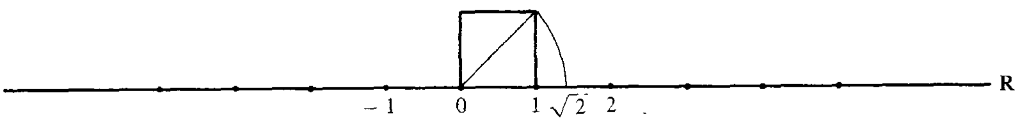


Fig. 1.4

Se $\sqrt{2}$ é racional, então existe uma fração p/q, com p e q inteiros, tal que

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

sendo p e q primos entre si. Temos, então,

$$2=\frac{p^2}{q^2} \quad \text{ou} \quad 2q^2=p^2.$$

Logo, p^2 é par e, portanto, p também é par (veja o Exercício 1.3). Conseqüentemente, podemos escrever $p = 2k$, sendo k inteiro. Temos, então,

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad ou \quad q^2 = 2k^2$$

Assim, vemos que q^2 também é par e, por conseguinte, q é par. Resulta que p e q são ambos pares, o que contradiz a hipótese de que p e q são primos entre si. Esta contradição surgiu por se supor $\sqrt{2}$ racional. Logo, $\sqrt{2}$ não é racional.

Números como $\sqrt{2}$, não-racionais, são chamados ***irracionais.***

A partir do número irracional $\sqrt{2}$, podemos construir uma infinidade de números irracionais. Com efeito, qualquer que seja o número inteiro n, não-nulo, $n\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}/n$ são números irracionais, como facilmente podemos mostrar. Realmente, se para algum n, $n\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}/n$ fosse racional, deveríamos ter:

$$n\sqrt{2}=\frac{p}{q} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{2}}{n}=\frac{p}{q}$$

sendo p e q inteiros. Se a primeira igualdade acima for verdadeira, também o é:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{nq},$$

mas esta igualdade diz que $\sqrt{2}$ é um número racional, o que é falso. Igualmente,

$$\frac{\sqrt{2}}{n}=\frac{p}{q}$$

também não pode ser, pois teríamos

$$\sqrt{2}=\frac{np}{q}.$$

Assim, já dispomos de seqüências infinitas de números irracionais, a saber,

$$\ldots,-3\sqrt{2},-2\sqrt{2},-\sqrt{2},2\sqrt{2},3\sqrt{2},\ldots$$
$$\ldots,-\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{3},\ldots$$

Na primeira seqüência figuram números irracionais arbitrariamente grandes, enquanto que na segunda temos números irracionais arbitrariamente pequenos. Outros exemplos clássicos de números irracionais são: o π da Geometria Elementar; o número e, base dos logaritmos neperianos; $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{2}$ etc. Em geral, se um número natural não é um quadrado perfeito, suas raízes quadradas são números irracionais. O mesmo argumento usado para mostrar que $n\sqrt{2}$ é irracional prova a seguinte afirmação:

O produto de um número racional não-nulo por um irracional é um número irracional (veja o Exercício 1.4).

1.4 NÚMEROS REAIS

O conjunto de todos os números, racionais e irracionais, é chamado conjunto dos números reais e indicado por **R**.

Vimos que a cada número racional podemos fazer corresponder um ponto sobre a reta. Esta correspondência pode ser feita usando-se apenas a régua e o compasso, pelo processo descrito anteriormente, na Figura 1.2. Vimos também como marcar um ponto na reta correspondente ao número irracional $\sqrt{2}$. A Figura 1.5 mostra como marcar na reta **R** o ponto correspondente ao número irracional $\sqrt{3}$.

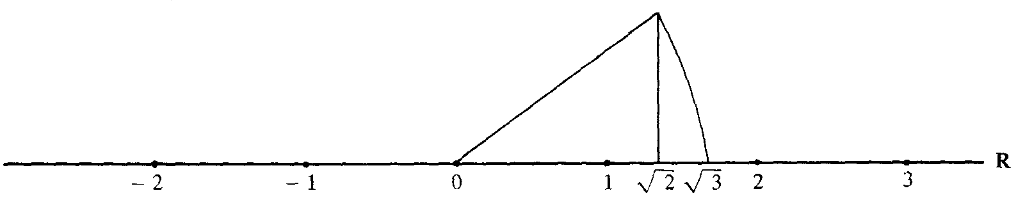


Fig. 1.5

Pontos sobre a reta **R**, correspondentes aos números da seqüência $2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2},\ldots$ ou da seqüência $\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/3, \sqrt{2}/4,\ldots$, podem facilmente ser marcados a partir do ponto correspondente a $\sqrt{2}$. Todavia, não dispomos de uma construção geométrica que nos permita marcar sobre **R** pontos correspondentes aos números irracionais e, π e outros e nem de argumentos que nos possibilitem provar que tais pontos existem. Isto se dá porque, a rigor, não definimos número irracional. A definição de número irracional, bem como sua construção, em geral, é apresentada nos livros de Análise Matemática. Para os propósitos da Geometria Analítica, é suficiente o seguinte resultado, que admitiremos como postulado.

*A cada ponto da reta **R** corresponde um único número (racional ou irracional).*

Os números cuja existência é garantida por este postulado são chamados ***números reais.***

Dizemos que a é um número menor que b se na reta **R** a estiver à esquerda de b. Indicamos isto assim

$$a<b$$

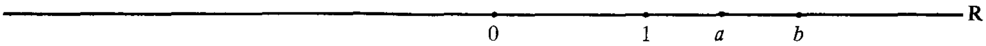


Fig. 1.6

A notação $a \leq b$ significa que a é um número que está à esquerda de b ou é o próprio b. Utiliza-se também a notação $b \geq a$, significando o mesmo que $a \leq b$.

Com respeito à relação $\leq$, dois fatos merecem ser destacados. O primeiro é a compatibilidade dessa relação com a operação de adição, a qual pode ser dita assim:

$$se\ a \leq b,\ então\ a + x \leq b + x,\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Em particular, para $x = -b$, obtemos

$$a \leq b \text{ é equivalente } a - b \leq 0.$$

O segundo fato diz que, em relação à operação de multiplicação, $\leq$ não se comporta tão bem como em relação à adição. De fato, se $a \leq b$, temos:

$$ax \leq bx \text{ se } x \geq 0 \quad \text{e} \quad ax \geq bx \text{ se } x < 0.$$

Exercícios

1.1. Justifique a construção feita na Figura 1.2.

1.2. Represente na reta **R** os números $\sqrt{5}, \sqrt{6}, -3\sqrt{2}$, 0,6 e $4\sqrt{3}/7$.

1.3. Demonstre que, se p é um número inteiro, então p e p^2 são ambos pares ou ambos ímpares.

1.4. Se a e b são números racionais e s irracional, prove que:

a) $a + b$ e ab são racionais;

b) $a + s$ e as são irracionais, se $a \neq 0$.

1.5. Dê exemplos de números irracionais s_1, s_2, s_3, s_4, tais que:

a) $s_1 s_2$ seja racional;

b) $s_3 s_4$ seja irracional.

1.6. Considere a figura abaixo

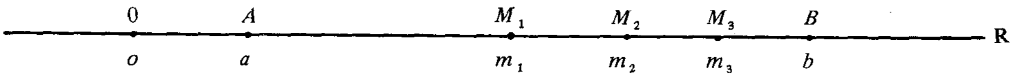


Fig. 1.7

a) Demonstre que, se M_1 é o ponto médio de AB, então m_1 é a média aritmética de a e b.
b) Seja m_2 o ponto médio de M_1B, m_3 o ponto médio de M_2 B e assim por diante. Calcule a soma:

$$(m_1 - a) + (m_2 - m_1) + (m_3 - m_2) + \ldots$$

1.7. Construa uma seqüência de números irracionais $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ satisfazendo $2 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{10} < 3$.
1.8. Se a e b são números reais positivos, mostre que

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

1.9. Usando o Exercício 1.8, mostre que a altura de um triângulo retângulo, relativamente à hipotenusa, é menor ou igual à metade da hipotenusa.
1.10. A Figura 1.8 mostra como estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos X do segmento AB e os pontos Y do segmento $A'B'$. Expresse o comprimento de OY em termos de OX, AB e $A'B'$.

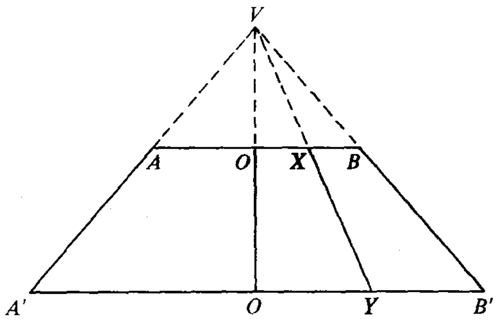


Fig. 1.8

1.5 VALOR ABSOLUTO

Se x é um número real, o módulo de x (ou valor absoluto de x) é o número $|x|$ definido por

$$|x| = x \text{ se } x \geq 0$$

$$|x| = -x \text{ se } x < 0.$$

Exemplo.

$$|5|=5 \text{ e } |-5|=-(-5)=5$$

Geometricamente $|x|$ pode ser interpretado como sendo a distância do ponto P, correspondente a x, à origem O, isto é, o comprimento do segmento OP.

Decorrem imediatamente, da definição de valor absoluto, as seguintes propriedades

$$|x| \geq 0,$$

$$|x|=0 \Leftrightarrow x=0,$$

$$|x|=|-x|.$$

Na proposição seguinte estão reunidas outras propriedades importantes do valor absoluto de um número real.

Proposição 1.1. Quaisquer que sejam os números reais a, b e x, tem-se

1) $|ab|=|a|\,|b|$,

2) $|a+b| \leq |a|+|b|$,

3) Se $a>0, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$,

4) $|x|=\sqrt{x^2}$.

Prova. Inicialmente, vamos mostrar que

$$|x|^2=|x^2|=x^2, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Sendo

$$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R},$$

temos que

$$|x^2|=x^2,$$

pela definição de valor absoluto. Resta mostrar que

$$|x|^2=x^2.$$

Se $x \geq 0$, temos

$$|x|=x$$

e, portanto,

$$|x|^2 = x^2;$$

se $x < 0$,

$$|x| = -x$$

e, portanto,

$$|x|^2 = (-x)^2 = x^2.$$

Usando estas propriedades, podemos provar a parte (1) da proposição assim:

$$|ab|^2 = (ab)^2 = a^2b^2 = |a|^2\,|b|^2 \Rightarrow |ab| = |a|\,|b|.$$

Parte (2). $|a+b| \leq |a| + |b|$ é chamada ***desigualdade triangular.*** Na sua prova, dada a seguir, faremos uso do fato

$$x \leq |x|, \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Temos

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \leq |a|^2+|b|^2+2|a|\cdot|b| = (|a|+|b|)^2.$$

Ou seja,

$$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2,$$

donde obtemos

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

Parte (3). Suponhamos que $|x| \leq a$. Se $x \geq 0$, temos

$$x = |x| \leq a.$$

Sendo $x \geq 0$, é claro que $x \geq -a$, de modo que, neste caso,

$$-a \leq x \leq a.$$

Se $x < 0$, então $x \leq a$ e

$$-x = |x| \leq a.$$

Mas $-x \leq a$ é equivalente a $x \geq -a$, de modo que

$$-a \leq x \leq a.$$

Portanto, provamos que

$$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a.$$

Para provarmos a recíproca, também distinguiremos os casos $x \geq 0$ e $x < 0$. Suponhamos que

$$-a \leq x \leq a.$$

Esta dupla desigualdade pode ser desdobrada em

$$x \leq a \text{ e } x \geq -a.$$

Se $x \geq 0, |x| = x$ e a primeira desigualdade nos dá

$$|x| \leq a.$$

Se $x < 0, |x| = -x$ e, da segunda desigualdade, temos

$$|x| \leq a.$$

Logo,

$$-a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a.$$

O segmento destacado na Figura 1.9 representa o intervalo de variação de x.

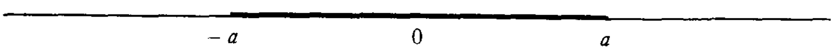


Fig. 1.9

Parte (4). Antes de provarmos esta parte, faremos uma observação sobre o símbolo $\sqrt{x}$, sendo x um número positivo. É comum usar $\sqrt{x}$ para indicar uma das raízes de x, sem especificar qual delas, ou seja, colocar

$$\sqrt{x^2} = x \cdot (?).$$

Tal notação pode conduzir a uma contradição, senão vejamos: usando a fórmula $\sqrt{x^2} = x$, temos

$$\sqrt{3^2} = 3 \text{ e } \sqrt{(-3)^2} = -3.$$

(Na primeira, temos $x = 3$ e na segunda, $x = -3$.) Mas

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9}.$$

Logo,

$$3 = -3, \quad \text{contradição!}$$

Para evitar este fato usaremos, sistematicamente, o símbolo $\sqrt{x}$ para indicar a raiz quadrada positiva de x. A raiz quadrada negativa de x será indicada por $-\sqrt{x}$. Isto posto, vamos à prova de (4).

$\sqrt{x^2}$ é a raiz quadrada positiva de x^2, isto é, é o número positivo cujo quadrado é x^2. O número $|x|$ satisfaz tais condições, ou seja,

$$|x| \geq 0 \text{ e } |x|^2 = x^2.$$

Logo,

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Na parte (2) da Proposição 1.1 ocorre a igualdade se, e somente se, a e b forem ambos ≥ 0 ou ambos ≤ 0 (veja o Exercício 1.11). Na parte (3) podemos, evidentemente, usar $<$ no lugar de $\leq$ e então obtemos

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

Dado um número positivo a, qualquer que seja o número real x, vale somente uma das duas alternativas:

$$|x| < a \text{ ou } |x| \geq a.$$

Como a primeira é equivalente a

$$-a < x < a,$$

segue que todo número real x que não satisfaz a condição

$$-a < x < a$$

é tal que

$$|x| \geq a.$$

Mas x não satisfaz a condição

$$-a < x < a$$

se, e somente se, $x \geq a$ ou $x \leq -a$. Desta forma demonstramos o seguinte resultado:

Proposição 1.2. Se a e x são números reais e $a > 0$, então

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \quad \text{ou} \quad x \leq -a.$$

Na Figura 1.10, o número x pode ser qualquer um dos pontos das semi-retas destacadas.

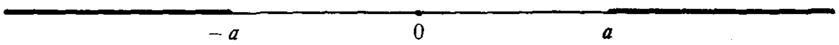


Fig. 1.10

Exemplo. Encontre os valores de x para os quais se tem

$$|3x+4| \leq 8.$$

Solução. Fazendo-se $3x + 4 = t$, a desigualdade acima se transforma em

$$|t| \leq 8$$

que, pela parte (3) da proposição 1.1, é equivalente a

$$-8 \leq t \leq 8$$

que, em termos de x, é

$$-8 \leq 3x + 4 \leq 8.$$

Somando -4 a cada membro desta desigualdade, temos

$$-12 \leq 3x \leq 4.$$

Multiplicando cada membro desta desigualdade por 1/3, obtemos

$$-4 \leq x \leq \frac{4}{3},$$

que é a resposta.

Exemplo. Encontre todos os valores de x que satisfaçam a desigualdade

$$|x^2 - 4| \leq 2.$$

Solução. A desigualdade é equivalente a

$$-2 \leq x^2 - 4 \leq 2,$$

ou

$$2 \leq x^2 \leq 6.$$

Como $x^2 = |x|^2$, a última desigualdade pode ser escrita assim

$$2 \leq |x|^2 \leq 6,$$

de onde temos

$$\sqrt{2} \leq |x| \leq \sqrt{6}.$$

A primeira parte desta dupla desigualdade é equivalente a

$$x \geq \sqrt{2} \text{ ou } x \leq -\sqrt{2} \text{ (Figura 1.11a)},$$

e a segunda a

$$-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6} \text{ (Figura 1.11b)}.$$

Na Figura 1.11c está indicado o conjunto solução de $|x^2 - 4| \leq 2$, que é a interseção do conjunto solução de $|x| \geq \sqrt{2}$ com o conjunto solução de $|x| \leq \sqrt{6}$.

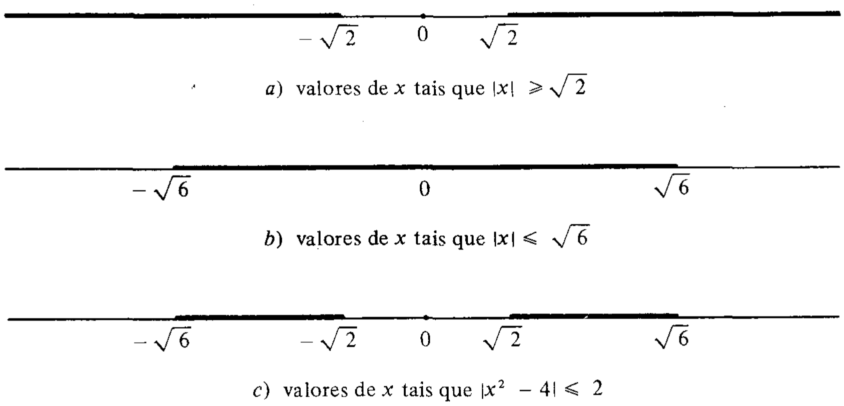


Fig. 1.11

Usando a notação $[a, b]$ para indicar o intervalo

$$\{x \in \mathbf{R}: a \leq x \leq b\},$$

podemos escrever o conjunto solução de $|x^2 - 4| \leq 2$ assim:

$$\left[-\sqrt{6}, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \sqrt{6}\right].$$

Exercícios

1.11. Mostre que $|a+b|=|a|+|b|$ se, e somente se, a e b forem ambos ≥ 0 ou ambos ≤ 0.

1.12. Encontre os valores de x que satisfaçam a cada uma das desigualdades:

a) $|x-2|<1$;
b) $|x-2|>1$;
c) $|x-2|=1$;
d) $|x^2-4|\geq 2$;
e) $|3-2x^2|\leq 9$;
f) $|x-1|<|x-2|$.

1.13. Determine b, para que se tenha:

a) $|2x-3|<b \Leftrightarrow 0<x<3$.
b) $|5x+b|\leq 2 \Leftrightarrow -1\leq x\leq -1/5$;
c) $|b-1|=|3b-4|$.

1.14. Justifique ou dê contra-exemplo para as implicações seguintes:

a) $a<b \Rightarrow a^2<b^2$;
b) $|a|<|b| \Rightarrow a^2<b^2$;
c) $a<b \Rightarrow a^3<b^3$;
d) $a\neq b \Rightarrow |a|\neq|b|$;
e) $|a|\neq|b| \Rightarrow a\neq b$.

1.15. Demonstre que para qualquer número real x se tem:

a) $|x|=|-x|$;
b) $-|x|\leq x\leq|x|$.

1.16. Demonstre que:

a) $|a|-|b|\leq|a-b|$;
b) $||a|-|b||\leq|a-b|$;

quaisquer que sejam os números a e b.

1.17. Sejam a e b números reais positivos. Mostre que:

a) $-b<x<a \Leftrightarrow |2x+b-a|<a+b$;
b) $-2b<x+a-b<2a \Leftrightarrow |x|<a+b$.

1.18. Encontre os valores de x que satisfaçam as seguintes desigualdades:

a) $3x+5<23$;
b) $(x-1)(x-3)<0$;
c) $x^2-5x<-6$;
d) $x^3+x^2\geq 0$;
e) $\dfrac{2x}{x-2}\geq 1$.

1.19. Prove que as raízes quadradas r_1 e r_2 de um número real positivo satisfazem:

a) $|r_1| = |r_2|$;
b) $r_1 + r_2 = 0$.

1.20. Que condições devem satisfazer a e b para que se tenha

$|a-b| = b-a$?

1.21. Resolva as seguintes equações:

a) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$;
b) $x^2 + |4x| - 21 = 0$;
c) $x^2 + 4|x| + 3 = 0$;
d) $|x^2 - 3x| = 2$;
e) $(|x|^5 + |18x^3| + 1)(x^2 - 1) = 0$.

CAPÍTULO 2

O PLANO

2.1 SISTEMA DE COORDENADAS

Consideremos o plano definido pelo par de retas perpendiculares x e y, tal como mostra a Figura 2.1. Tomemos a unidade OA igual à OA' e seja P um ponto qualquer do plano. Por P podemos traçar uma única paralela x' à reta x e uma única paralela y' à reta y. Como se vê, estas paralelas interceptam as retas x e y, respectivamente, nos pontos P_x e P_y. Seja x o número correspondente ao ponto P_x e y o número correspondente a P_y. Estes dois números x e y determinam o ponto P, no seguinte sentido: conhecendo x e y, podemos determinar os pontos P_x e P_y e traçar as paralelas x' e y'. A interseção destas paralelas é o ponto P. Os números x e y são chamados, respectivamente, ***abscissa*** e ***ordenada*** do ponto P; eles constituem as ***coordenadas*** de P. Para indicar que o ponto P tem abscissa x e ordenada y usamos a notação

$$P(x, y).$$

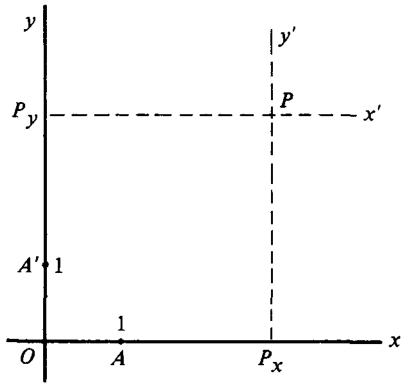


Fig. 2.1

A construção que acabamos de fazer nos permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto de pares ordenados de números reais (x, y).

Na prática, é comum omitirem-se vários elementos que aparecem na Figura 2.1, deixando-os apenas subentendidos, para se obter uma figura mais simples, como a 2.2.

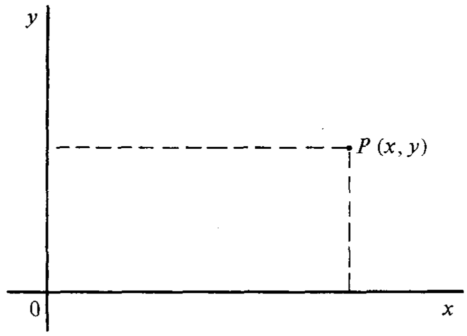


Fig. 2.2

2.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos do plano. Como mostra a Figura 2.3, a partir de P e Q, podemos construir o triângulo retângulo PSQ. Em termos das coordenadas de P e Q, as medidas dos catetos deste triângulo são $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$. Logo, a medida de sua hipotenusa é

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Este número é chamado ***distância*** de P a Q e indicado por $d(P,Q)$, isto é, por definição

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

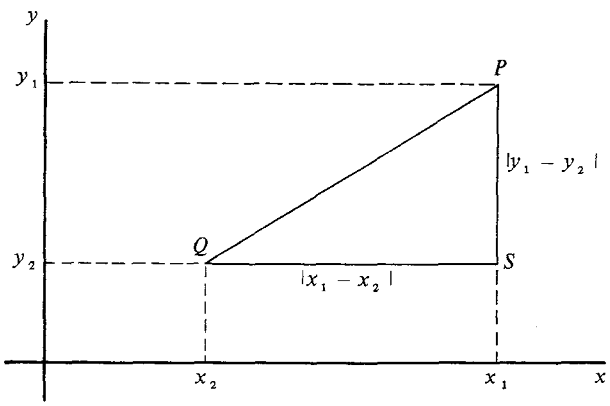


Fig. 2.3

Exercícios

2.1. a) Construa um sistema de coordenadas de modo que na Figura 2.4 se tenha $P(5, 2)$ e $Q(-4, -1)$.
b) Determine $d(P, Q)$.
c) $d(P, Q)$ depende do sistema de coordenadas?

Observação: Tome a unidade sobre os eixos igual a distância comum entre as paralelas da figura.

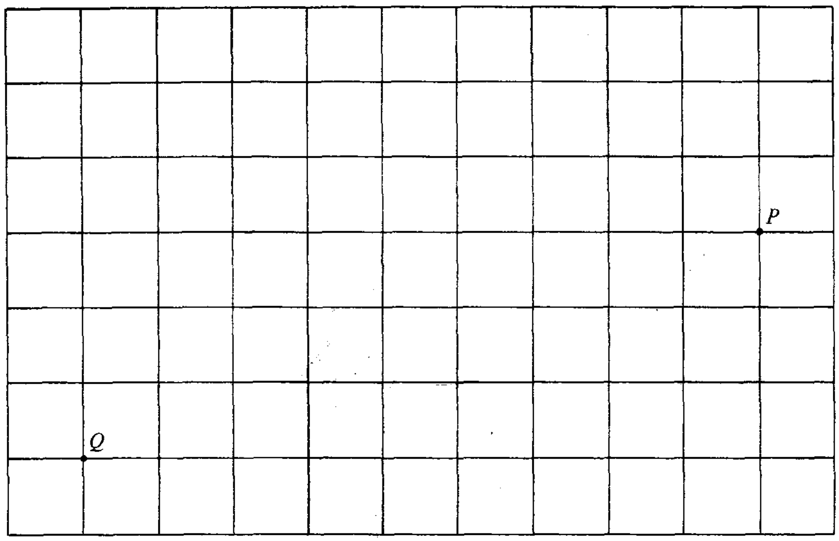


Fig. 2.4

2.2. Um campo de futebol tem 60 m de comprimento por 40 m de largura. Construa um sistema de coordenadas e dê as coordenadas dos seguintes pontos:
a) dos quatro cantos do campo;
b) do centro do campo.

2.3 VETORES NO PLANO

Vimos, na seção anterior, que a cada par ordenado (x, y) corresponde um ponto no plano. Se $(x, y) \neq (0, 0)$, além do ponto podemos também fazer corresponder ao par (x, y) uma seta, como mostra a Figura 2.5. Assim, um par ordenado $(x, y) \neq (0, 0)$ pode ser representado graficamente por um ponto ou por uma seta. Quando utilizamos seta para representar (x, y), podemos associar a este par ordenado direção, sentido e módulo. A direção e o sentido do par (x, y) são, respectivamente, a direção e o sentido da seta que o representa. O módulo do par (x, y) é o número

$$\sqrt{x^2 + y^2},$$

que é o comprimento da seta.

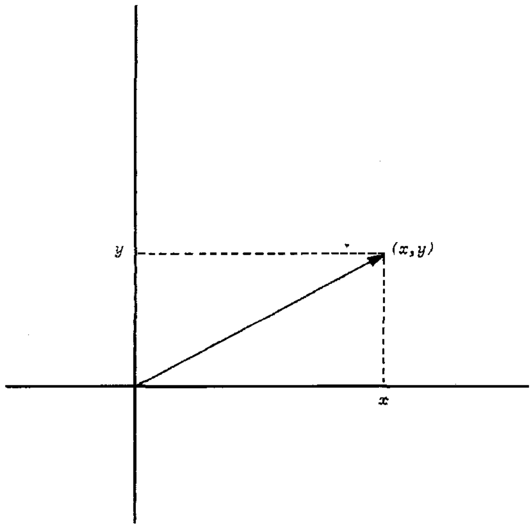


Fig. 2.5

Em geral, um objeto ao qual se pode associar os conceitos de direção, sentido e módulo é chamado um **vetor**. Assim, um par ordenado é um vetor. Por exemplo,

$$v = (3, 4)$$

é um vetor. A direção deste vetor é a direção da seta da Figura 2.6(a), ou seja, é a direção da reta definida pelos pontos $O(0, 0)$ e $P(3, 4)$. O sentido de v é o de O para P e o módulo de v é o comprimento da seta OP, ou seja, é

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Inversamente, uma seta no plano, como a da Figura 2.6(b) (que pode ser imaginada como uma força de intensidade igual a 4 unidades, aplicada ao ponto O), pode ser perfeitamente caracterizada por um par ordenado. No caso da seta F da Figura 2.6(b), o par ordenado é

$$(4 \cos 30°, 4 \text{ sen } 30°) = (2\sqrt{3}, 2).$$

Portanto, dar este par ordenado equivale a dar a direção, o sentido e o módulo de F, como se faz em Física.

Ao par ordenado (0, 0) não se podem associar os conceitos de direção e sentido, como no exemplo anterior. Contudo,

$$O = (0, 0)$$

é chamado ***vetor nulo.***

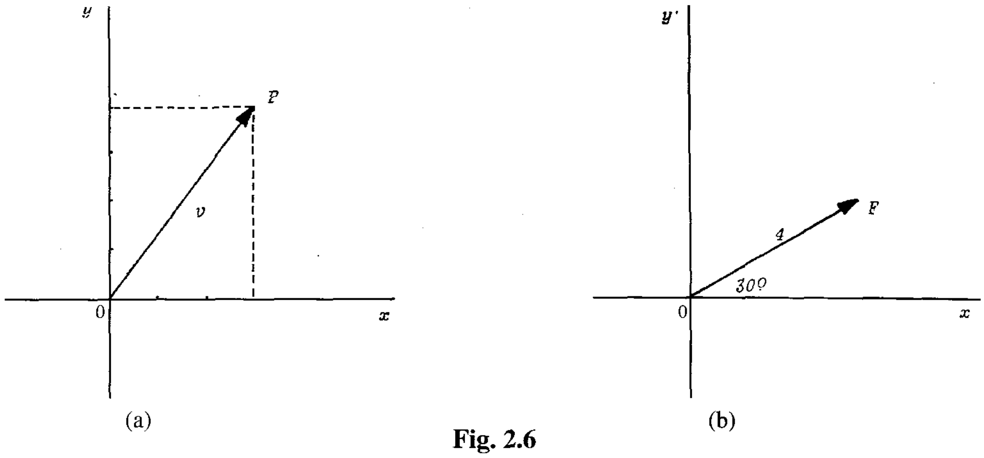


Fig. 2.6

Há casos em que representamos graficamente um vetor por uma seta que não parte necessariamente da origem. Por exemplo, os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ determinam o vetor

$$\vec{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Como mostra a Figura 2.7, a seta que representa o vetor $\vec{AB}$, partindo da origem, e a seta com origem em A e extremidade em B, têm o mesmo módulo, direção e sentido. Conforme a conveniência, utilizamos uma ou outra para representar o vetor $\vec{AB}$.

O movimento de uma partícula no plano é outra situação que ilustra a representação gráfica de um vetor por uma seta que não parte da origem. Neste caso, representamos o vetor posição P da partícula, num determinado instante, por uma seta que parte da origem; e o vetor velocidade v, por uma seta tangente à trajetória da partícula e com ponto inicial no lugar onde ela se encontra naquele instante. Veja a Figura 2.8.

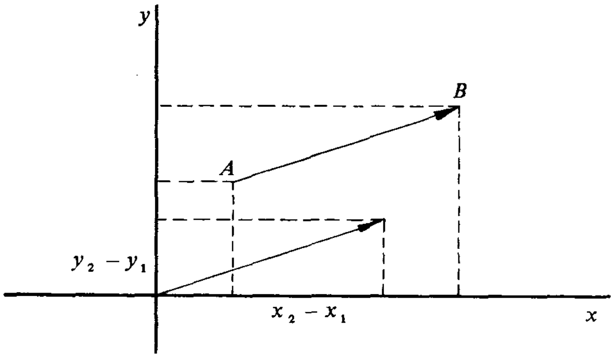


Fig. 2.7

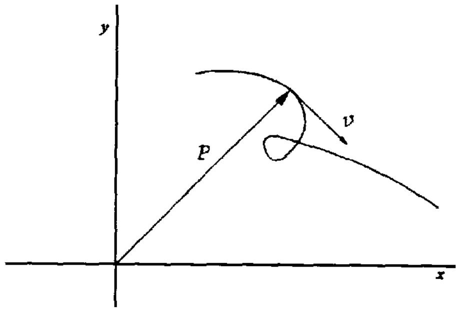


Fig. 2.8

Do que foi dito conclui-se que para representar graficamente um vetor usa-se uma seta. O lugar onde esta seta é colocada depende do problema que está sendo considerado.

2.4 OPERAÇÕES COM VETORES

Sejam $u = (x_1 , y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e k $\in$ **R**. Definimos:

a) $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

b) $ku = (kx_1, ky_1)$.

A operação que a cada par de vetores u e v faz corresponder o vetor $u + v$, definido acima, chama-se ***adição de vetores***. A lei de composição que ao par k e u, onde k é um número e u um vetor, faz corresponder o vetor ku, definido acima, é chamada ***multiplicação de um vetor por um número.***

A adição de vetores satisfaz as seguintes propriedades (u, v e w são vetores quaisquer):

(A_1) $u + v = v + u$,

(A_2) $u + (v + w) = (u + v) + w$,

(A_3) $u + O = u$, onde $O = (0,0)$ é o vetor nulo.

Se k_1 e k_2 são números reais quaisquer, verificam-se, para multiplicação de um vetor por um número, as propriedades:

(M_1) $k_1 (u + v) = k_1 u + k_1 v$,

(M_2) $(k_1 + k_2)u = k_1 u + k_2 u$,

(M_3) $k_1 (k_2 u) = (k_1 k_2)u$,

(M_4) $1 . u = u$ e $0 . u = 0$.

Na propriedade M_4, o primeiro zero da igualdade é o número zero e o segundo é o vetor nulo (0, 0).

As propriedades A_1, A_2, A_3, M_1, M_2, M_3 e M_4 são conseqüências imediatas das definições dadas. Sugerimos ao leitor demonstrá-las.

O vetor $(-1)u$ é indicado por $-u$ e chamado o **oposto** de u. Também, indicamos $v + (-u)$ por $v - u$. Na Figura 2.9 está representado um vetor u e seu oposto $-u$.

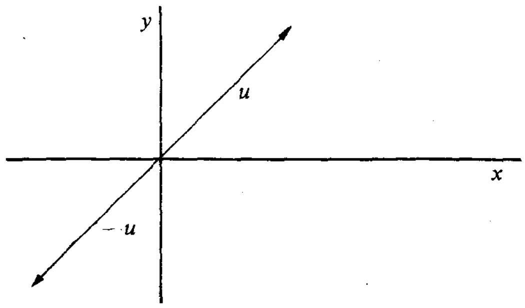


Fig. 2.9

O vetor ku tem a mesma direção de u, isto é, u e ku são representados por setas paralelas. Se $k > 0$, os sentidos de u e ku coincidem. Se $k < 0$, o sentido de ku é o oposto de u. Além disso, os módulos de u e ku estão relacionados por

$$\|ku\| = |k|\;\|u\|,$$

onde a barra dupla indica módulo de vetor e a simples, módulo de números reais.

De fato, se $u = (x, y)$, então $ku = (kx, ky)$ e

$$\|ku\| = \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{k^2}\sqrt{x^2 + y^2} = |k|\;\|u\|.$$

Para representar graficamente o vetor $u + v$, fazemos a construção indicada na Figura 2.10. A seta que representa $u + v$ é uma das diagonais do paralelogramo cujos lados são as setas

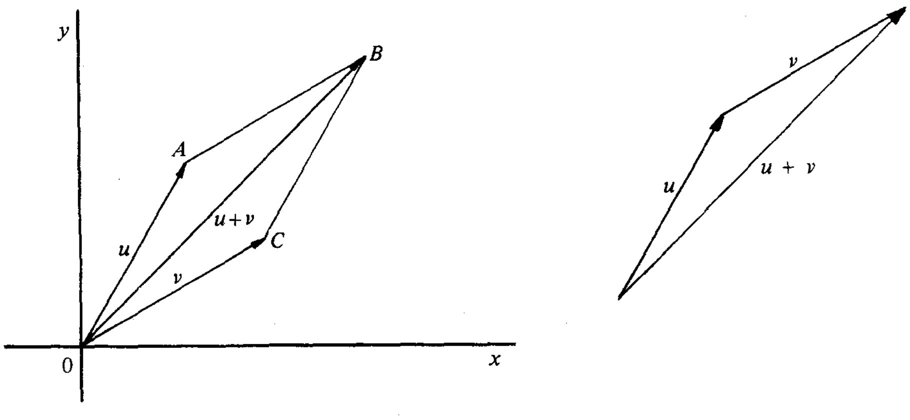


Fig. 2.10

que representam u e v. Veja no Exercício 2.3 uma indicação de como justificar esta representação.

Proposição 2.1. Sejam u e v vetores e k um número real. Então

a) $ku = 0 \Rightarrow k = 0$ ou $u = 0$;

b) $\|u\| \geq 0$ e $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Prova. Se $u = (x, y)$, então $ku = 0$ é o mesmo que

$$(kx, \ ky) = (0, 0).$$

Mas isto significa que

$$kx = 0 \ \text{ e } \ ky = 0.$$

Se $k \neq 0$, dividindo ambos os membros das igualdades acima por k, obtemos $x = 0$ e $y = 0$ e, portanto, $u = 0$. Se $u \neq 0$, então $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ e, das igualdades acima, obtemos $k = 0$.

Parte (b).

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

A parte (c) desta proposição é chamada **desigualdade triangular**. Ela expressa o conhecido fato da Geometria Elementar de que, em um triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados excede ao comprimento do terceiro lado. Sua prova será dada depois que introduzirmos o conceito de produto escalar, na Seção 2.6.

2.5 APLICAÇÕES

2.5.1 Vetor Deslocamento

Se uma partícula move-se de um ponto $A(x_1, y_1)$ para um ponto $B(x_2, y_2)$, o vetor

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

é chamado ***vetor deslocamento*** da partícula. A curva da Figura 2.11a indica a trajetória de uma partícula, do ponto A ao ponto B. O vetor deslocamento da partícula está indicado pela seta de A a B.

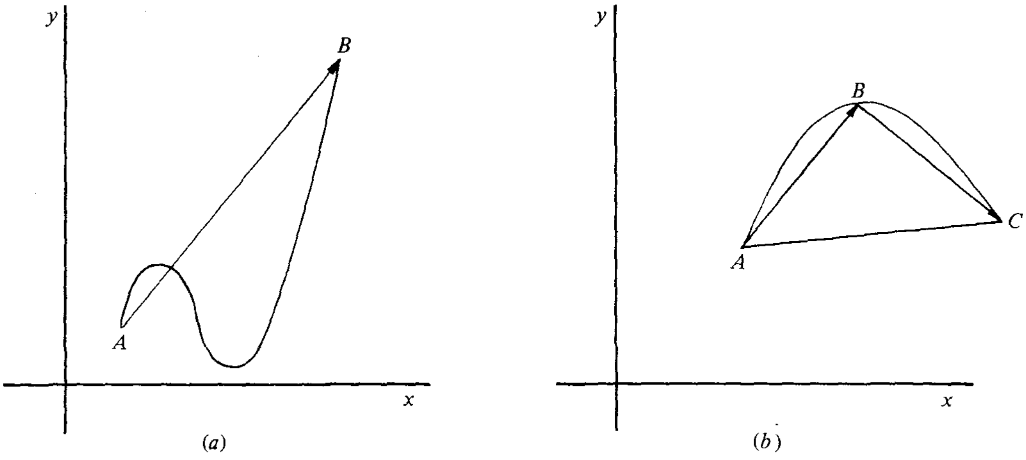


Fig. 2.11

Suponhamos que uma partícula mova-se do ponto $A(x_1, y_1)$ para o ponto $B(x_2, y_2)$ e depois para $C(x_3, y_3)$. Veja a Figura 2.11b. Então, o vetor deslocamento total da partícula é

$$\vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1).$$

Por outro lado, somando-se os vetores deslocamento parciais

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ e } \vec{BC} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2),$$

obtemos

$$\vec{AB} + \vec{BC} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) + (x_3 - x_2, y_3 - y_2) = \vec{AC},$$

isto é, o deslocamento total é a soma dos deslocamentos parciais.

Em geral, se A, B e C são três pontos quaisquer do plano (veja a Figura 2.12), então

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}.$$

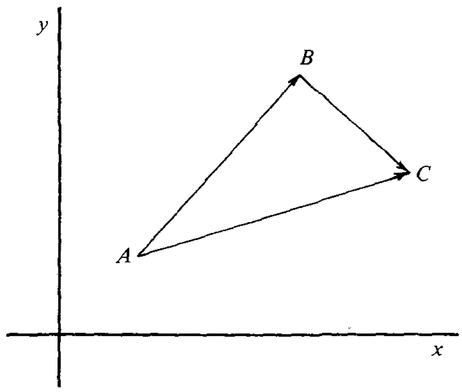


Fig. 2.12

Exemplo. Um carro move-se, em linha reta, 5 km na direção norte e, em seguida, também em linha reta, 5 km na direção leste. Qual foi o deslocamento do carro?

Solução. Consideramos, na Figura 2.13, um sistema de coordenadas com origem no ponto de partida do carro e os eixos y e x, respectivamente, nas direções norte e leste.

Em relação ao sistema acima, as coordenadas dos pontos O, A e B são:

$$O(0, 0), A(0, 5), B(5, 5).$$

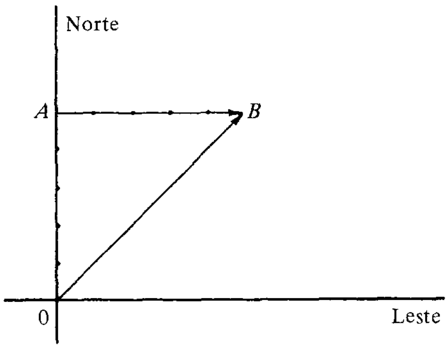


Fig. 2.13

Logo, o deslocamento do carro é

$$\vec{OB} = (5 - 0, 5 - 0) = (5, 5),$$

ou seja, $5\sqrt{2}$ km (aproximadamente 7,07 km) na direção nordeste, pois $\|\vec{OB}\| = 5\sqrt{2}$ e $\vec{OB}$ faz com a direção leste um ângulo de 45°.

2.5.2 Resultante

Na Figura 2.14*a* estão representadas duas forças F_1 e F_2, respectivamente, de 5 *kgf* e 3 *kgf*, atuando em um ponto de uma barra. A resultante de F_1 e F_2 é a força

$$F = F_1 + F_2.$$

Para calcular F, escolhemos um sistema de coordenadas e decompomos F_1 e F_2 como mostra a Figura 2.14*b*.

As componentes de F_1 são

$$x_1 = 5 \cos 30° = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_1 = 5 \operatorname{sen} 30° = 5 \cdot \frac{1}{2}$$

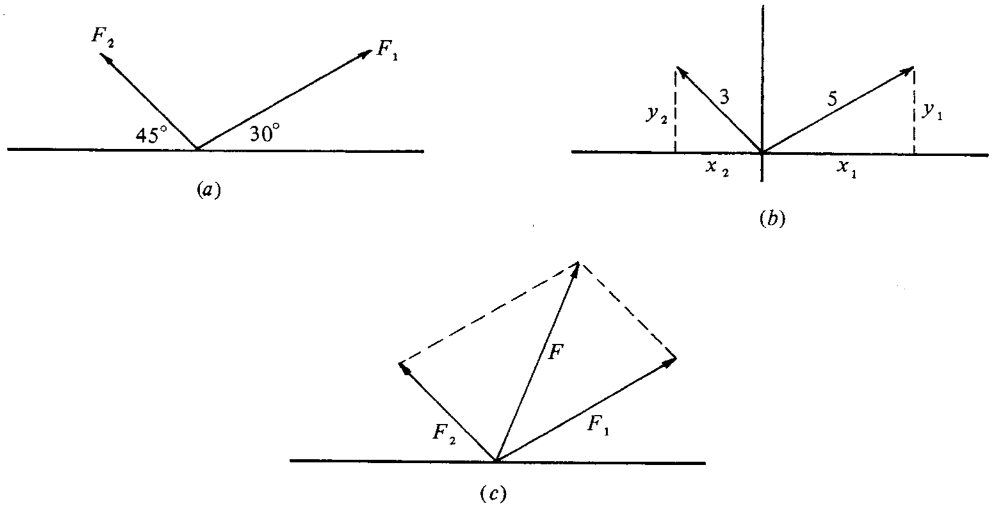


Fig. 2.14

e as de F_2 são

$$x_2 = -3 \cos 45^\circ = -3 \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$y_2 = 3 \text{ sen } 45^\circ = 3 \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto,

$$F_1 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ e } F_2 = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Logo, a resultante é

$$F = F_1 + F_2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{2}, \frac{5 + 3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Calculando o módulo de F, encontramos

$$\|F\| = \frac{1}{2}\sqrt{136 - 30(\sqrt{6} - \sqrt{2})},$$

que é aproximadamente igual a 5,12. A tangente do ângulo que F faz com a barra (o eixo x) é dada por

$$\frac{5 + 3\sqrt{2}}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}},$$

que corresponde a um ângulo de aproximadamente 64°27'. Portanto, como está indicado na Figura 2.14c, F é uma força de aproximadamente 5,12 *kgf* e sua linha de ação faz com a barra um ângulo próximo de 64°27'.

Observe que no problema anterior não se conheciam as componentes dos vetores F_1 e F_2. Estas componentes foram calculadas usando-se as relações,

$$x = \|v\| \cos \theta$$

$$y = \|v\| \operatorname{sen} \theta,$$

onde $v = (x, y)$ e θ é o ângulo entre v e o eixo x, como mostra a Figura 2.15.

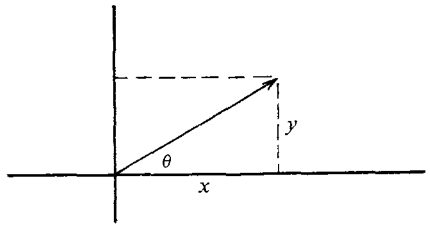


Fig. 2.15

2.5.3 Ponto Médio

Cálculo das coordenadas do ponto médio M do segmento AB em função das coordenadas de A e B.

Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $M(x, y)$. Queremos calcular x e y em função de x_1, y_1, x_2 e y_2. Veja a Figura 2.16.

Sendo M o ponto médio de AB, temos

$$2\vec{AM} = \vec{AB}.$$

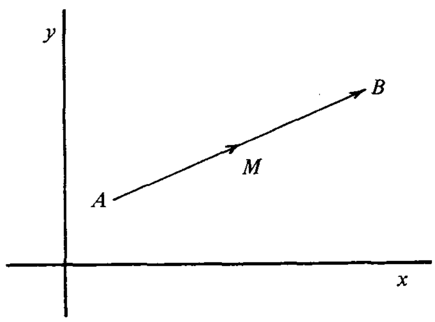


Fig. 2.16

Mas,

$$\vec{AM} = (x - x_1, y - y_1) \text{ e } \vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Logo,

$$2(x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ ou } (2x - 2x_1, 2y - 2y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

donde temos

$$2x - 2x_1 = x_2 - x_1 \text{ e } 2y - 2y_1 = y_2 - y_1.$$

Explicitando x e y, encontramos

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ e } y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Portanto,

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

de modo que as coordenadas do ponto médio de AB são as médias aritméticas das coordenadas de A e B.

2.5.4 Vetor Unitário

Um vetor de módulo 1 é chamado ***vetor unitário***. Por exemplo,

$$v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

é unitário, pois

$$\|v\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$$

Outros exemplos de vetores unitários são

$$u = (1, 0),$$
$$v = (0, 1),$$
$$-v = (0, -1),$$
$$w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ etc.}$$

No caso geral, qualquer que seja o vetor não-nulo v,

$$\frac{v}{\|v\|}$$

é unitário, pois

$$\left\|\frac{v}{\|v\|}\right\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1.$$

Assim, para se obter um vetor unitário é suficiente tomar um vetor não-nulo e multiplicá-lo pelo inverso de seu módulo.

Exercícios

2.3. Para justificar a construção feita na Figura 2.10, mostre que $OABC$ é um paralelogramo, ou seja, que $\vec{AB} = \vec{OC}$ e $\vec{OA} = \vec{CB}$.

2.4. Determine x para que se tenha $\vec{AB} = \vec{CD}$, sendo $A(x, 1)$, $B(4, x + 3)$, $C(x, x + 2)$ e $D(2x, x + 6)$.

2.5. Determine a extremidade da seta que representa o vetor $v = (3, -7)$, sabendo que sua origem é o ponto $A(2, 1)$.

2.6. Dados $A(2, y)$ e $B(3, 3)$, determine y para que o módulo do vetor $\vec{AB}$ seja $\sqrt{5}$.

2.7. Dado $B(3, 4)$ e sendo $\|\vec{AB}\| = 2$, qual é o valor máximo que a primeira coordenada de A pode assumir? E o mínimo?

2.8. Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ pontos do plano. Demonstre que

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\|.$$

2.9. Determine vetores u e v tais que

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u - v\|^2.$$

2.10. Represente graficamente os vetores
a) $u + 2v$;
b) $-u$;
c) $u - v$;
d) $3u - 2v + w$;
e) $-u - v + 2w$;
sendo $u = (2, 3)$, $v = (-1, 4)$ e $w = (-2, -1)$.

2.11. Dados os vetores $u = (2, -1)$ e $v = (1, 3)$, determine um vetor w tal que

a) $3(u + w) - 2(v - w) = 0$;

b) $\frac{1}{2}[3(u + w) - 4(v - w)] = 5\,[u - 3w + 4(3v - 2w)]$.

2.12. Dados os vetores u e v, determine os vetores z e w tais que

$$2(u + z) - 3(v + w) = u$$
$$5(u - z) + 2(v - w) = v.$$

2.13. Mostre que se os vetores u e v têm a mesma direção, então existe um número k tal que $v = ku$.

2.14. Encontre um vetor

a) com mesma direção e sentido do vetor (3, 4) e módulo igual a 6;

b) com mesma direção e sentido contrário ao do vetor (-1, 2) e módulo igual a 5.

2.15. Encontre números k_1 e k_2 tais que

$$v = k_1 u + k_2 w,$$

sendo $v = (2, 3)$, $u = (-1, 2)$ e $w = (1, 2)$.

2.16. Dados os pontos $A(2, 3)$ e $B(5, 4)$, determine um ponto C tal que $\vec{AC}$ seja paralelo ao vetor $u = (2, 1)$ e $\|\vec{AC}\| = \|\vec{AB}\|$.

2.17. Dados $A(-1, -1)$ e $B(3, 5)$, determine C tal que

a) $\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$;

b) $\vec{AC} = \frac{1}{4}\vec{AB}$;

c) $\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AB}$;

d) $\vec{AC} = \frac{3}{5}\vec{BA}$.

2.18. Dados os pontos A, B e C, exprima o vetor $\vec{CM}$ em função dos vetores $\vec{CA}$ e $\vec{CB}$, sendo M

a) o ponto médio de AB;

b) um ponto de AB tal que $3\vec{AM} = \vec{AB}$.

2.19. Dados $B(0, 4)$ e $C(8, 2)$, determine o vértice A do triângulo ABC, sabendo que o ponto médio de AB é $M(3, 2)$.

2.20. Escreva o vetor (7, -1) como soma de dois vetores, um paralelo ao vetor (1, -1) e o outro paralelo ao vetor (1, 1).

2.21. Represente graficamente os vetores da forma

$$(2, 4) + t(3, -1),$$

onde t é um número real.

2.22. Dados $A(1, 3)$ e $B(2, 2)$, determine x para que a reta definida pelo ponto médio de AB e o ponto $X(x, 0)$ seja paralela ao vetor $v = (1, 2)$.

2.23. Demonstre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

2.24. Se $ABCD$ é um quadrilátero e P, Q, R e S são os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, prove que $PQRS$ é um paralelogramo.

2.25. Os pontos $A(1, -5)$, $B(5, 2)$ e $C(3, 9)$ são três vértices de um paralelogramo. Ache três pontos, cada um dos quais podendo ser o seu quarto vértice.

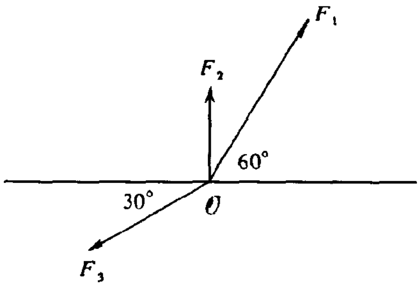
2.26. Calcule a resultante das forças aplicadas ao ponto O da Figura 2.17*a*, sabendo que $\|F_1\| = 3$, $\|F_2\| = 1$, $\|F_3\| = 2$.

2.27. Determine como deve variar o módulo e o sentido de F_1 e F_2 (isto é, por quais constantes se deve multiplicar F_1 e F_2) para que a resultante destas forças seja F, sendo $\|F\| = \sqrt{3}$, $\|F_1\| = 2$ e $\|F_2\| = 1$. Veja a Figura 2.17*b*.

2.28. Num ponto atuam três forças $F_1 = (-3, -4)$, $F_2 = (-1, 2)$ e $F_3 = (2, 1)$.

a) Elas estão em equilíbrio?

b) Mantendo a direção e o sentido de F_2 e F_3, como podemos modificá-las de modo que o sistema fique em equilíbrio?



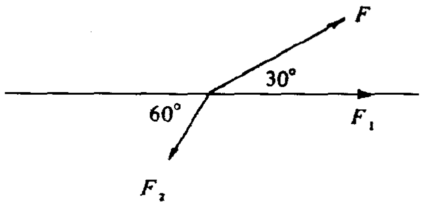


Fig. 2.17

c) É possível colocar o sistema em equilíbrio mantendo-se F_1 e F_3 fixas e variando apenas o módulo e o sentido de F_2?

2.29. Calcule a resultante das forças F_1, F_2 e F_3 sabendo que

i) $\|F_1\| = 1$ e F_1 é horizontal;

ii) $F_2 = F_1 + u_1$, onde $\|u_1\| = 1$ e u_1 é perpendicular a F_1;

iii) $F_3 = F_2 + u_2$, onde $\|u_2\| = 1$ e u_2 é perpendicular a F_2.

2.30. Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Demonstre que

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 = 2u \cdot v,$$

onde $u \cdot v$ indica o número $x_1x_2 + y_1y_2$.

2.6. PRODUTO ESCALAR E ÂNGULO ENTRE VETORES

Definimos o ***produto escalar*** dos vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ como sendo o número

$$u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Exemplo. Se $u = (2, 1)$ e $v = (3, -5)$, então

$$u \cdot v = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-5).$$

O símbolo $u \cdot v$ deve ser lido assim: "u escalar v".

Decorrem imediatamente da definição as seguintes propriedades do produto escalar:

1) $u \cdot u = \|u\|^2$;
2) $u \cdot v = v \cdot u$;
3) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$;
4) $(ku) \cdot v = u \cdot (kv) = k(u \cdot v)$.

Nessas propriedades, os vetores u, v e w são quaisquer e k é um número real. A demonstração da propriedade (4) pode ser feita como segue. Tomamos $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Então, de acordo com a definição de produto escalar, temos

$$(ku) \cdot v = (kx_1)x_2 + (ky_1)y_2$$

$$u \cdot (kv) = x_1(kx_2) + y_1(ky_2)$$

$$k(u \cdot v) = k(x_1x_2 + y_1y_2).$$

Como

$$(kx_1)x_2 + (ky_1)y_2 = x_1(kx_2) + y_1(ky_2) = k(x_1x_2 + y_1y_2),$$

segue que

$$(ku) \,.\, v = u \,.\, (kv) = k(u \,.\, v).$$

A desigualdade que aparece na proposição seguinte é chamada **desigualdade de *Cauchy-Schwarz*.**

Proposição 2.2. Sejam u e v vetores arbitrários. Então

$$|u \,.\, v| \leq \|u\|\,\|v\|.$$

Prova. Inicialmente vamos provar que se w e z são vetores unitários, então

$$\|w \,.\, z\| \leq 1.$$

Usando este resultado, faremos a prova da desigualdade de Cauchy-Schwarz no caso geral. Para provarmos o caso particular $|w \,.\, z| \leq 1$, observemos que

$$\|w - z\|^2 = (w - z) \,.\, (w - z) = w \,.\, w - w \,.\, z - z \,.\, w + z \,.\, z = \|w\|^2 - 2w \,.\, z + \|z\|^2$$

e que

$$|w - z|^2 \geq 0.$$

Logo,

$$\|w\|^2 - 2w \,.\, z + \|z\|^2 \;\geq\; 0 \quad \text{ou} \quad 2w \,.\, z \;\leq\; \|w\|^2 + \|z\|^2.$$

Como $\|w\|^2 = \|z\|^2 = 1$, temos

$$2w \,.\, z \leq 2 \quad \text{ou} \quad w \,.\, z \leq 1. \tag{1}$$

Analogamente, partindo de

$$\|w + z\|^2 = \|w\|^2 + 2w \,.\, z + \|z\|^2 \;\geq 0,$$

obtemos

$$-1 \leq w \,.\, z. \tag{2}$$

De (1) e (2), temos

$$|w \,.\, z| \leq 1.$$

Sejam, agora, u e v vetores arbitrários. Se $u \neq 0$ e $v \neq 0$, $\frac{u}{\|u\|}$ e $\frac{v}{\|v\|}$ são unitários e, portanto, valem

$$\left|\frac{u}{\|u\|} \cdot \frac{v}{\|v\|}\right| \leq 1 \text{ ou } \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \leq 1,$$

donde

$$|u \,.\, v| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

Como a desigualdade de Cauchy-Schwarz é verdadeira também para $u = 0$ ou $v = 0$, a prova da proposição está completa.

A seguir, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vamos definir o ângulo entre dois vetores.

Se u e v são vetores não-nulos, então

$$\|u\| \, \|v\| > 0$$

e, como

$$|u \,.\, v| \leq \|u\| \, \|v\|,$$

segue que

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1,$$

que é equivalente a

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1.$$

Estando o número

$$\frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$$

entre 1 e -1, existe um único ângulo θ (medido em radianos) entre 0 e π, tal que

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}. \qquad \text{(F)}$$

Este ângulo, por definição, é o ângulo entre os vetores u e v.

Exemplo. Se $u = (0, 2)$ e $v = (3, 3)$, o ângulo θ entre estes vetores é

$$\cos\theta = \frac{0.3+2.3}{\sqrt{0+2^2}\,\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ radianos. (Veja a Figura 2.18}a.)$$

Observe também que, a partir da fórmula (F), podemos escrever

$$u \,.\, v = \|u\|\,\|v\| \cos\theta.$$

Em algumas aplicações é mais conveniente calcular o produto escalar utilizando esta fórmula.

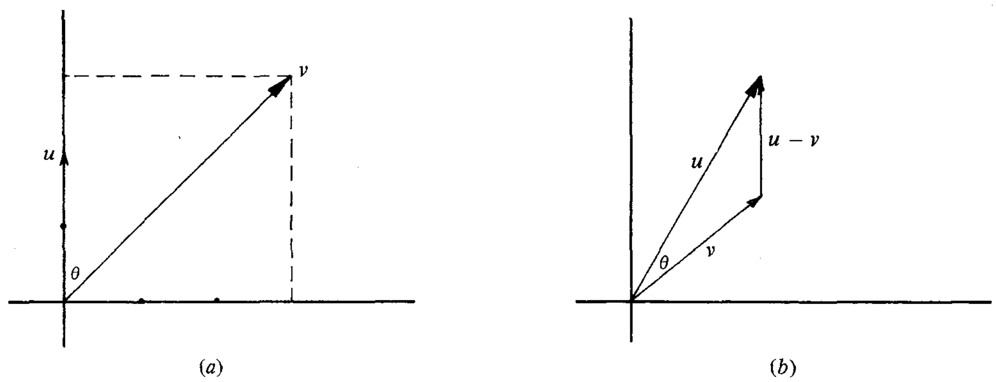


Fig. 2.18

Usando a lei dos co-senos, podemos mostrar que o ângulo θ, entre os vetores u e v, dado pela fórmula

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\;\|v\|},$$

é exatamente o menor ângulo formado pelas setas que representam u e v. (Figura 2.18*b*). De fato, a lei dos co-senos, aplicada ao triângulo cujos lados são as setas que representam u, v e $u - v$, nos dá

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\;\|v\| \cos\theta,$$

de onde temos

$$\cos\theta = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2}{2\|u\|\;\|v\|}.$$

Mas, conforme o Exercício 2.30, temos

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 = 2u \,.\, v,$$

de modo que

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\ \|v\|}.$$

Como no caso de retas, se o ângulo θ entre dois vetores é $\pi/2$ radianos, eles são ditos perpendiculares. Observe que, se u e v são perpendiculares, então

$$\frac{u \cdot v}{\|u\|\ \|v\|} = \cos \pi/2 = 0.$$

Mas $u \,.\, v/\|u\|\ \|v\| = 0$ implica que $u \,.\, v = 0$. Logo, se u e v são perpendiculares, então $u \,.\, v = 0$. Por outro lado, se $u \neq 0$ é $v \neq 0$ são tais que $u \,.\, v = 0$, então $\cos\theta = 0$ e, portanto, u é perpendicular a v. Assim, para vetores não-nulos, temos

$$u \text{ é perpendicular a } v \Leftrightarrow u \,.\, v = 0.$$

Ainda usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vamos demonstrar a parte (c) da Proposição 2.1, que é a desigualdade triangular

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Prova. Usando as propriedades do produto escalar, temos

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v)\,.\,(u + v) \\ &= u\,.\,u + u\,.\,v + v\,.\,u + v\,.\,v \\ &= \|u\|^2 + 2u\,.\,v + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$u\,.\,v \leq \|u\|\ \|v\|$$

de modo que

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\ \|v\| + \|v\|^2$$

ou

$$\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$$

e, finalmente,

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

2.7 PROJEÇÃO DE VETORES

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores não nulos e P a projeção ortogonal do ponto (x_1, y_1) sobre a reta definida por $(0, 0)$ e (x_2, y_2). Veja a Figura 2.19.

Se o ângulo θ entre os vetores u e v for menor que 90°, como é o caso da Figura 2.19, então

$$\vec{OP} = \left\|\vec{OP}\right\| \frac{v}{\|v\|}$$

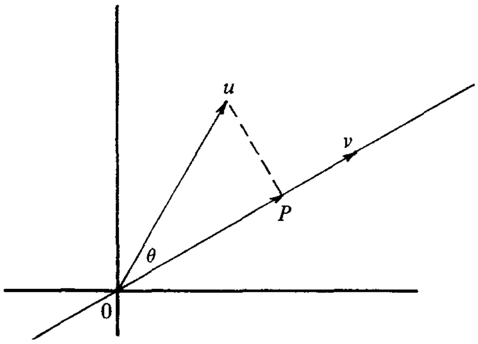


Fig. 2.19

e, como

$$\|\vec{OP}\| = \|u\| \cos\theta,$$

temos

$$\vec{OP} = \|u\| \cos\theta \frac{v}{\|v\|}$$

ou

$$\vec{OP} = \|u\| \frac{u \, . \, v}{\|u\| \, \|v\|} \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{u \, . \, v}{v \, . \, v} \right) v.$$

No caso de o ângulo θ entre os vetores u e v ser maior que 90°, conforme mostra a Figura 2.20, com um procedimento análogo ao anterior, podemos mostrar que também se tem

$$\vec{OP} = \left(\frac{u.v}{v.v} \right) v.$$

Observe também que, se $\theta = 90°$, então $\vec{O}P = 0$, mas mesmo assim a fórmula

$$\vec{OP} = \left(\frac{u.v}{v.v} \right) v$$

continua válida.

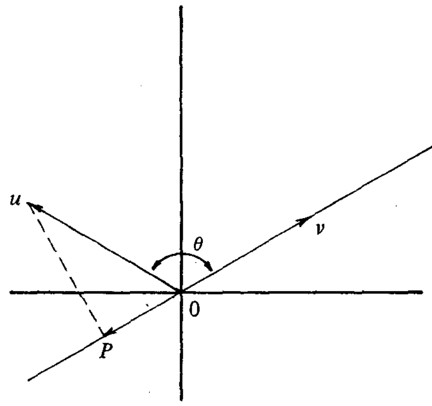


Fig. 2.20

Portanto, independentemente do ângulo entre os vetores u e v, o vetor $\vec{OP}$ é dado por

$$\left(\frac{u.v}{v.v}\right)v.$$

Este vetor é chamado ***projeção de u sobre*** v e será indicado por P_v^u.

Por exemplo, a projeção do vetor $u = (2, 1)$ sobre $v = (4, -1)$ é

$$P_v^u = \frac{(2,1).(4,-1)}{(4,-1).(4,-1)}(4,-1) = \frac{7}{17}(4,-1).$$

Exemplo.

a) Verifique que o triângulo cujos vértices são $A(3, 3)$, $B(0, 1)$ e $C(1, 6)$ é retângulo em A.
b) Calcule a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.
c) Determine o pé da altura do triângulo relativo ao vértice A.

Solução.

a) É suficiente verificar que

$$\vec{AB}.\vec{AC} = 0.$$

Como $\vec{AB} = (-3,-2)$ e $\vec{AC} = (-2,3)$, temos

$$\vec{AB}.\vec{AC} = (-3).(-2) + (-2)3 = 0.$$

b) A projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC é o módulo do vetor

$$P_{\vec{BC}}^{\vec{BA}}$$

Sendo $\vec{BA}=(3,2)$ e $\vec{BC}=(1,5)$, temos

$$P_{\vec{BC}}^{\vec{BA}} = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\vec{BC}\cdot\vec{BC}}\vec{BC} = \frac{13}{26}(1,5) = \frac{1}{2}(1,5).$$

Logo, a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC é

$$\left\|P_{\vec{BC}}^{\vec{BA}}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{26}.$$

c) Seja $P(x, y)$ o pé da altura relativa ao vértice A. Então,

$$\vec{BP} = P_{\vec{BC}}^{\vec{BA}}$$

ou

$$(x - 0, y - 1) = \frac{1}{2}(1, 5).$$

Logo,

$$x = \frac{1}{2} \text{ e } y - 1 = \frac{5}{2}.$$

Donde

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

Exemplo. Calcule o ângulo entre $u + v$ e $u - v$, sabendo que $\|u\| = \sqrt{3}$, $\|v\| = 1$ e que o ângulo entre u e v é 30°.

Solução. Seja θ o ângulo entre $u + v$ e $u - v$. Então,

$$\cos\theta = \frac{(u+v).(u-v)}{\|u+v\|\ \|u-v\|} = \frac{u.u - v.v}{\|u+v\|\ \|u-v\|}.$$

Mas

$$u \,.\, u = \|u\|^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$
$$v \,.\, v = \|v\|^2 = 1^2 = 1.$$

Logo,

$$\cos\theta = \frac{2}{\|u+v\|\ \|u-v\|}.$$

Para calcular $\|u + v\|$ e $\|u - v\|$, procedemos assim:

$$\|u + v\|^2 = (u + v) . (u + v) = u . u + 2u . v + v . v = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u . v = 4 + 2u . v.$$

Mas

$$u . v = \|u\| \|v\| \cos 30^\circ = \sqrt{3}.1.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Logo,

$$\|u + v\|^2 = 4 + 2 . \frac{3}{2} = 7.$$

Portanto,

$$\|u + v\| = \sqrt{7}.$$

Procedendo da mesma forma, encontramos

$$\|u - v\| = 1.$$

Portanto,

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{7}.1} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

e

$$\theta = \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Observe que $u + v$ e $u - v$ são as diagonais do paralelogramo definido pelos vetores u e v.

Exercícios

2.31. Sejam $u = (2, 4)$ e $v = (-3, 5)$. Determine:
   a) o produto escalar de u por v;
   b) o ângulo entre u e v;
   c) P^u_v
2.32. a) Dado o vetor $u = (x, y)$, mostre que os vetores $v = (-y, x)$ e $w = (y, -x)$ são perpendiculares a u e que $\|u\| = \|v\| = \|w\|$.
   b) Faça numa figura a representação dos vetores u, v e w.
2.33. a) Encontre um vetor de módulo 5 perpendicular ao vetor $(2, -1)$.
   b) Determine o valor de x para que o vetor $(2, x^2 - 1)$ seja perpendicular ao vetor $(-6, 4)$.
2.34. Dado o triângulo cujos vértices são $A(1, 1)$, $B(4, 0)$ e $C(3, 4)$, determine:
   a) os ângulos A, B e C;
   b) as projeções dos lados AC e BC sobre o lado AB;
   c) o pé da altura relativa ao vértice C;

d) a área do triângulo ABC;
e) a interseção da bissetriz do ângulo B com o lado AC.

2.35. Determine a altura (relativa ao lado AD) do paralelogramo cujos vértices são $A(1, 0)$, $B(2, 2)$, $C(5, 3)$ e $D(4, 1)$.

2.36. Calcule a área do paralelogramo cujos vértices são os pontos médios dos lados do quadrilátero $ABCD$, sendo $A(0, 1)$, $B(-4, -1)$, $C(5, -3)$ e $D(7, 0)$.

2.37. Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $u = (-2, 3)$ e $v = (5, 1)$.

2.38. Verifique que os pontos $A(2, 7)$, $B(2, -6)$ e $C(5, -6)$ são os vértices de um triângulo retângulo.

2.39. Seja $u = (3, 1)$. Determine as coordenadas de um vetor v, de módulo 2, e que faz com u um ângulo de 30°.

2.40. Escreva o vetor $(7, -1)$ como soma de dois vetores, um dos quais é paralelo e o outro é perpendicular ao vetor $(1, -1)$.

2.41. Sejam u e v vetores unitários e perpendiculares, $w = a_1u + b_1v$ e $z = a_2u + b_2v$. Calcule:
a) $\|w\|$ e $\|z\|$;
b) $w \cdot z$;
c) o ângulo entre w e z.

2.42. Sejam u e v vetores distintos. Mostre que, se $u + v$ é perpendicular a $u - v$, então $\|u\| = \|v\|$. A que teorema sobre quadriláteros corresponde este resultado?

2.43. Sejam $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ e $w = (x, y)$. Mostre que
a) $w = xe_1 + ye_2$;
b) $w = (w \cdot e_1, w \cdot e_2)$.

2.44. Calcule o ângulo entre os vetores v e w, sabendo que:

$$\|u\| = \|w\| = 5; \quad \|v\| = 1; \quad \|u - v + w\| = \|u + v + w\|$$

e que o ângulo entre u e v é $\pi/8$.

2.45. Se $u + v + w = 0$, $\|u\| = 5$, $\|v\| = 6$ e $\|w\| = 7$, calcule:
a) $u \cdot v$; b) $u \cdot w$; c) $v \cdot w$.

2.46. Se $P_u^v = (2, 1)$, $u = (4, 2)$ e $\|v\| = 6$, determine v.

2.47. Demonstre que todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto. (*Sugestão*: Demonstre que os vetores $\vec{PA}$ e $\vec{PB}$, da Figura 2.21 são perpendiculares.)

2.48. Sejam u e v vetores não-nulos. Demonstre que u é perpendicular a $v - P_u^v$.

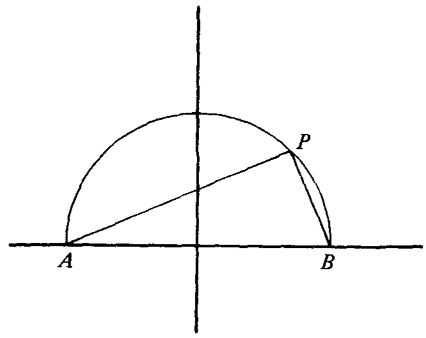


Fig. 2.21

2.8 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Seja $v = (a, b)$ um vetor não-nulo e $A(x_0, y_0)$ um ponto do plano. Da Geometria Elementar sabemos que existe uma única reta r com a direção de v e que contém A. Dizer que r tem a mesma direção de v significa que dois pontos quaisquer de r determinam um vetor com a mesma direção de v.

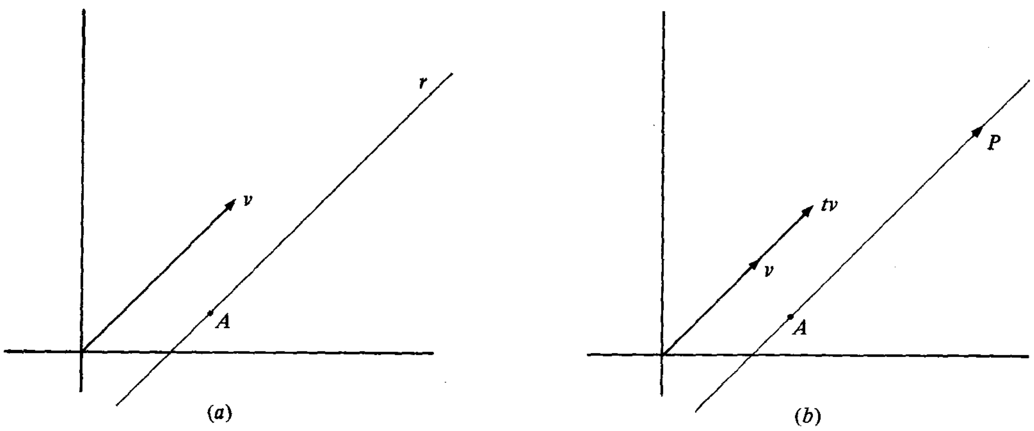


Fig. 2.22

Assim, um ponto $P(x, y)$ pertence à reta r se, e somente se,

$$\vec{AP} = tv,$$

para algum número real t. Ou, em termos de coordenadas,

$$(x - x_0, y - y_0) = t(a, b).$$

Esta equação é equivalente ao sistema de equações

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt,$$

chamadas **equações paramétricas** de r.

Exemplo.

$$x = 1 + 2t$$
$$y = 2 - 3t$$

são equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto (1, 2) e tem a direção do vetor (2, -3). Isto significa que, para cada valor do parâmetro t, o ponto

$$(1 + 2t, 2 - 3t)$$

pertence à reta r e também que todo ponto de r é da forma $(1 + 2t, 2 - 3t)$, para algum valor de t.

Exemplo. Uma partícula está animada de um movimento tal que, no instante t, ela se encontra no ponto

$$(x, y) = (2 + 3t, 1 + 4t).$$

a) Determine sua posição nos instantes $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$.
b) Determine o instante no qual a partícula atinge o ponto (11, 13).
c) A partícula passa pelo ponto (5, 6)?
d) Descreva sua trajetória.
e) Determine sua velocidade no instante t.

Solução. a) Como a posição da partícula é dada em função do tempo por

$$(x, y) = (2 + 3t, 1 + 4t),$$

suas posições nos instantes $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$ são, respectivamente,

$$(x, y) = (2 + 3.0, 1 + 4.0) = (2, 1),$$
$$(x, y) = (2 + 3.1, 1 + 4.1) = (5, 5),$$
$$(x, y) = (2 + 3.2, 1 + 4.2) = (8, 9).$$

b) Basta determinar t de modo que

$$(2 + 3t, 1 + 4t) = (11, 13),$$

ou

$$2 + 3t = 11$$
$$1 + 4t = 13.$$

Logo, $t = 3$, pois ambas as equações acima admitem esta solução.

c) Para que a partícula passe pelo ponto (5, 6) é necessário que para algum valor de t se tenha

$$(2 + 3t, 1 + 4t) = (5, 6),$$

o que não ocorre, pois as equações

$$2 + 3t = 5$$
$$1 + 4t = 6$$

são incompatíveis, isto é, não admitem solução comum.

d) A equação

$$(x, y) = (2 + 3t, 1 + 4t)$$

é equivalente a

$$x = 2 + 3t$$
$$y = 1 + 4t,$$

que são equações paramétricas da reta paralela ao vetor (3, 4) e que contém o ponto (2, 1). Logo, esta reta é a trajetória da partícula.

e) Vamos determinar a velocidade v da partícula no instante t_0. Se no instante t_0 a partícula se encontra em $P_0(2 + 3t_0, 1 + 4t_0)$, e no instante t se encontra em $P(2 + 3t, 1 + 4t)$, o vetor deslocamento no intervalo de tempo $\Delta t = t - t_0$ é

$$\overrightarrow{P_0P} = (2 + 3t, 1 + 4t) - (2 + 3t_0, 1 + 4t_0) = (t - t_0)(3, 4) = \Delta t(3, 4).$$

Logo, pela definição de velocidade, temos

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{P_0 P}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(3,4)}{\Delta t} = (3,4).$$

Como a velocidade, no instante t_0, independe de t_0, concluímos que a partícula tem velocidade constante. Observe que o número

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

expressa a velocidade escalar da partícula.

2.9 EQUAÇÃO CARTESIANA DA RETA

Vimos, na Seção 2.8, que as equações paramétricas de uma reta r paralela ao vetor não-nulo $v = (a, b)$ e que contêm o ponto (x_0, y_0) são dadas por

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt.$$

Podemos eliminar o parâmetro t destas equações efetuando as seguintes operações: multiplicando a primeira equação por b e a segunda por a, encontramos

$$bx = bx_0 + bat \qquad (1)$$

$$ay = ay_0 + abt; \qquad (2)$$

subtraindo (1) de (2), temos

$$ay - bx = ay_0 - bx_0.$$

Observemos que o segundo membro desta equação é constante. Chamando esta constante de c, obtemos a equação

$$ay - bx = c,$$

que é chamada **equação cartesiana da reta** r.

Se a primeira coordenada do vetor $v = (a, b)$ é zero, isto é, $a = 0$, r é paralela ao eixo y, como mostra a Figura 2.23a, e sua equação cartesiana reduz-se a $x = x_0$.

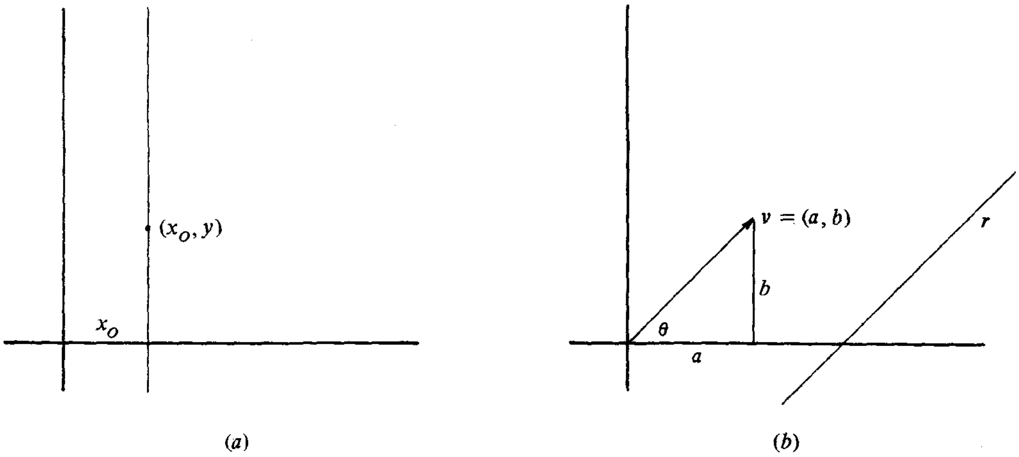


Fig. 2.23

Se $a \neq 0$, podemos dividir a equação cartesiana de r por a e obtermos

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}.$$

Fazendo, nesta equação, $b/a = m$ e $c/a = k$, temos

$$y = mx + k.$$

Como se vê na Figura 2.23b,

$$m = \frac{b}{a} = tg\theta,$$

onde θ é o ângulo que r faz com o eixo x. O número m é chamado ***declividade*** de r. A constante k é a ordenada do ponto de interseção de r com o eixo y, pois $(0, k)$ satisfaz a equação $y = mx + k$. Resumindo, demonstramos o seguinte:

Se r é uma reta paralela ao eixo y, sua equação cartesiana é da forma

$$x = x_0;$$

e se r não é paralela ao eixo y, sua equação é da forma

$$y = mx + k,$$

onde m é a tangente do ângulo que r faz com o eixo x.

Observe que o vetor $(1, m)$ é paralelo à reta r de equação $y = mx + k$. De fato, como

$$(1, m) = \left(1, \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a}(a, b),$$

(1, m) é múltiplo de (a, b) e, conseqüentemente, tem também a direção de r.

Exemplo. Determine as equações paramétricas e cartesiana da reta r definida pelos pontos $(1, 5)$ e $(2, 7)$.

Solução. Como as abscissas dos dois pontos dados são diferentes, a reta por eles definida não é paralela ao eixo y. Logo, sua equação cartesiana é da forma

$$y = mx + k. \qquad (1)$$

Para determinar m e k, substituímos os pontos $(1, 5)$ e $(2, 7)$ em (1) e obtemos

$$\begin{aligned} 5 &= m + k \\ 7 &= 2m + k. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, encontramos

$$m = 2 \text{ e } k = 3.$$

Logo, a equação procurada é

$$y = 2x + 3.$$

Para escrever as equações paramétricas de r, tomamos o ponto (x_0, y_0) como sendo $(1, 5)$ e $v = (2, 7) - (1, 5) = (1, 2)$ e obtemos

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 5 + 2t. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Uma mesma reta pode ser representada por pares de equações paramétricas diferentes. De fato, depende da escolha do ponto (x_0, y_0) e do vetor $v = (a, b)$. Por exemplo, a reta do exemplo anterior pode ser representada também pelas equações

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2t \\ y &= 7 + 4t. \end{aligned} \tag{II}$$

Embora o sistema (I) seja diferente do sistema (II), eles são equivalentes. Isto significa que, quando t varia sobre o conjunto dos números reais, o conjunto de pontos dados por (I) é exatamente o conjunto de pontos dados por (II).

Demonstramos anteriormente que toda reta r tem uma equação da forma

$$bx - ay = c,$$

onde (a, b) é um vetor paralelo a r. Fazendo $A = b$, $B = -a$ e $C = -c$, podemos escrever a equação de r assim

$$Ax + By + C = 0. \tag{III}$$

Observe que o vetor (A, B) é perpendicular à reta r, pois

$$(A, B) \cdot (a, b) = (b, -a) \cdot (a, b) = ab - ab = 0.$$

Logo, (A, B) é perpendicular a (a, b) e (a, b) é paralelo a r.

A recíproca também é verdadeira, isto é, toda equação da forma

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

tem como gráfico uma reta. Realmente, se (x_0, y_0) é um ponto tal que

$$Ax_0 + By_0 + C = 0, \tag{2}$$

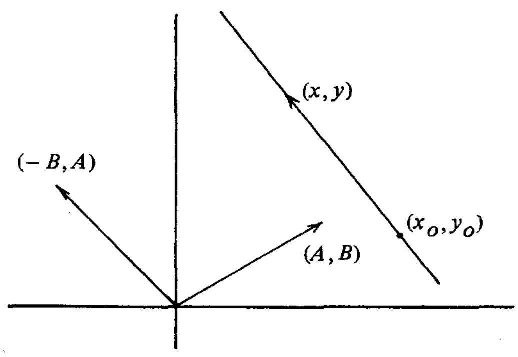


Fig. 2.24

subtraindo (2) de (1), encontramos

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Interpretando este resultado como o produto escalar dos vetores (A, B) e $(x - x_0, y - y_0)$, vemos que o conjunto solução de (III) é constituído de todos os pontos (x, y) tais que os vetores $(x - x_0, y - y_0)$ e (A, B) são perpendiculares. Isto significa que o gráfico de (III) é a reta que contém (x_0, y_0) e tem a direção do vetor $(-B, A)$.

2.10 ÂNGULOS ENTRE RETAS

Exemplo. Determine o menor dos ângulos entre as retas r e s, cujas equações são, respectivamente,

$$y = 2x - 2 \quad \text{e} \quad y = -x + 4.$$

Solução. O vetor $(1, 2)$ tem a direção de r, assim como o vetor $(1, -1)$ tem a direção de s. Veja a Figura 2.25.

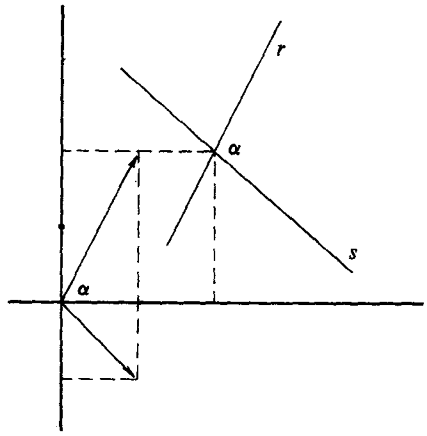


Fig. 2.25

O ângulo α entre os vetores $(1, 2)$ e $(1, -1)$ é um dos ângulos entre as retas r e s. Efetuando as contas, encontramos

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Logo,

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right), \quad 0 \leq \alpha \leq \pi .$$

Como cos $\alpha < 0$, encontramos o ângulo maior entre as duas retas. O ângulo menor entre r e s é, evidentemente, $\pi - \alpha$, cujo co-seno é

$$\frac{\sqrt{10}}{10}$$

pois,

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

2.11 DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA

A distância do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta r, de equação $y = mx + k$, é definida como sendo a distância de P a A, onde $A(x_1, y_1)$ é o pé da perpendicular baixada de P a r. Veja a Figura 2.26a.

Indicando por $d(P, r)$ a distância de P a r, temos

$$d(P,r) = \|\vec{PA}\|.$$

Como o vetor $(1, m)$ tem a direção da reta r, os vetores $\vec{PA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ e $(-m, 1)$ têm a mesma direção. Logo, existe um número real t tal que

$$\vec{PA} = t(-m, 1)$$

e, portanto,

$$d(P, r) = \|\vec{PA}\| = \|t(-m, 1)\| = |t|\sqrt{m^2 + 1}.$$

Desta forma, $d(P, r)$ estará determinada quando conhecermos t. A seguir, faremos o cálculo de t. De

$$\vec{PA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = t(-m, 1)$$

obtemos

$$x_1 = x_0 - tm$$
$$y_1 = y_0 + t.$$

Como (x_1, y_1) pertence à reta r, deve valer

$$y_0 + t = m(x_0 - tm) + k,$$

donde

$$t = \frac{-y_0 + mx_0 + k}{1 + m^2}.$$

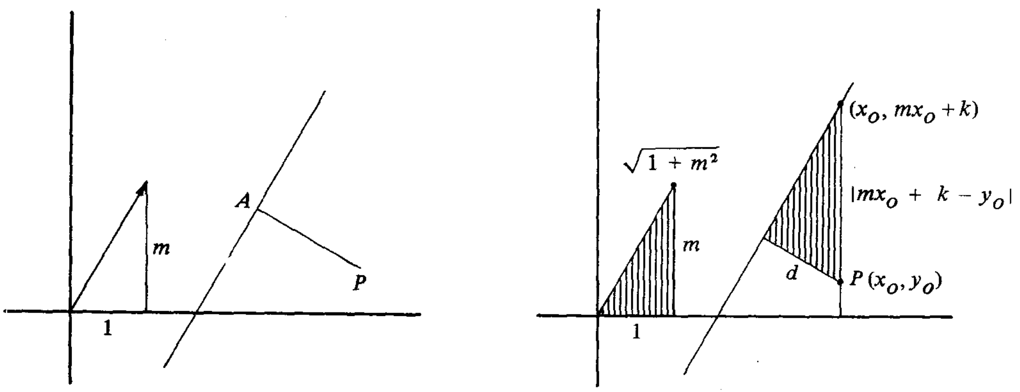
Sendo $d(P, r) = |t|\sqrt{1+m^2}$, temos, finalmente,

$$d(P,r)=\left|\frac{-y_0+mx_0+k}{1+m^2}\right|.\sqrt{1+m^2}$$

ou

$$d(P,r)=\frac{|y_0+mx_0+k|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Esta fórmula também pode ser obtida da Figura 2.26 *b* usando-se a semelhança dos triângulos hachurados.



(*a*) (*b*)

Fig. 2.26

$$\frac{d}{1}=\frac{|mx_0+k-y_0|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Se a equação de r é da forma $x = c$, a fórmula deduzida acima não se aplica. Neste caso, a distância de $P(x_0, y_0)$ a r é dada por $d(P, r) = |c - x_0|$. A fórmula enunciada no Exercício 2.58 aplica-se a todos os casos.

2.12 EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA

Na Figura 2.27 representamos uma circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r.

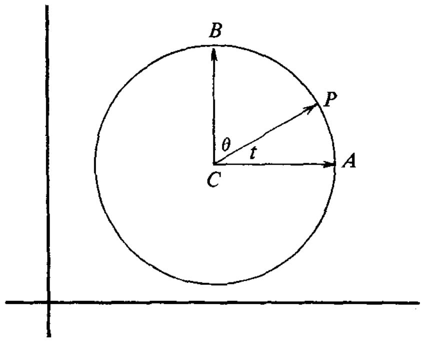


Fig. 2.27

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer desta circunferência e t o ângulo formado pelos vetores $\vec{CP}$ e $\vec{CA}$, onde $A(x_0 + r, y_0)$. Então.

$$\cos t = \frac{\vec{CP} \cdot \vec{CA}}{\|\vec{CP}\| \ \|\vec{CA}\|}.$$

Como $\vec{CP} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{CA} = (r, 0)$ e $\|\vec{CP}\| = \|\vec{CA}\| = r$, temos

$$\cos t = \frac{x - x_0}{r}$$

ou

$$x = x_0 + r \cos t.$$

Procedendo de maneira análoga com os vetores $\vec{CP}$ e $\vec{CB}$, onde B é o ponto $(x_0, y_0 + r)$, e levando em conta que o co-seno do ângulo θ, formado por estes vetores, é igual ao seno do ângulo t, obtemos

$$y = y_0 + r \operatorname{sen} t.$$

Reciprocamente, se um ponto $P(x, y)$ satisfaz as equações $x = x_0 + r \cos t$ e $y = y_0 + r \operatorname{sen} t$, então $P(x, y)$ pertence à circunferência, pois

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2 t} = r.$$

As equações

$$x = x_0 + r \cos t$$

$$y = y_0 + r \operatorname{sen} t$$

são chamadas **equações paramétricas da circunferência** de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r.

Como no caso da reta, eliminando t nas equações paramétricas, obtemos a equação cartesiana da circunferência. Aqui procedemos assim: das equações paramétricas obtemos

$$(x - x_0)^2 = r^2 \cos^2 t$$

$$(y - y_0)^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 t,$$

e daí

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

que é a **equação cartesiana da circunferência** de centro (x_0, y_0) e raio r.

Exemplo. Escreva uma equação cartesiana da circunferência definida pelos pontos $A(1, 1)$, $B(1, -2)$ e $C(2, 3)$.

Solução. A equação procurada é da forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

que também pode ser escrita assim:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Fazendo

$$-2x_0 = a, \quad -2y_0 = b \quad \text{e} \quad x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c,$$

obtemos

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

que é outra forma de se escrever a equação cartesiana da circunferência.

Esta última equação deve ser verificada pelas coordenadas de cada um dos pontos A, B e C. Substituindo, pois, as coordenadas destes pontos nesta equação, obtemos o sistema

$$a + b + c = -2$$

$$a - 2b + c = -5$$

$$2a + 3b + c = -13,$$

cuja solução é

$$a = -13, \quad b = 1 \quad \text{e} \quad c = 10.$$

Logo,

$$x^2 + y^2 - 13x + y + 10 = 0$$

é a equação procurada.

Por outro lado, sendo

$$a = -2x_0, \quad b = -2y_0 \quad \text{e} \quad c = x_0^2 + y_0^2 - r^2,$$

segue-se que

$$x_0 = \frac{13}{2}, y_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad r^2 = \frac{65}{2}.$$

Logo, a equação da circunferência pode também ser escrita na forma

$$\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}.$$

Observe que as equações paramétricas desta circunferência são

$$x = \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}}\cos t$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,t.$$

Exemplo. Descreva a trajetória de uma partícula animada de um movimento tal que, no instante t, ela se encontra no ponto

$$(x, y) = (2 \cos 3t, 2 \operatorname{sen} 3t).$$

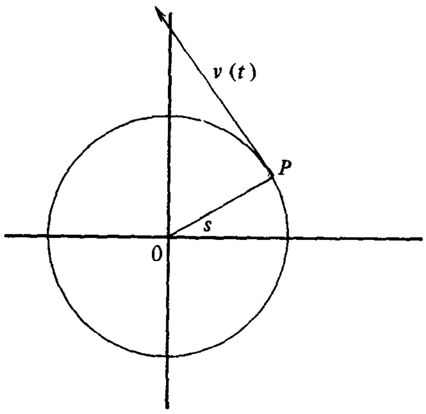


Fig. 2.28

Solução. A igualdade dada pode ser desdobrada em

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos 3t \\ y &= 2 \operatorname{sen} 3t \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} x &= 2 \cos s \\ y &= 2 \operatorname{sen} s, \end{aligned}$$

onde $s = 3t$. Comparando

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos s \\ y &= 2 \operatorname{sen} s \end{aligned}$$

com as equações paramétricas da circunferência de centro (x_0, y_0) e raio r, concluímos que a trajetória da partícula é a circunferência de centro na origem e raio 2. Observe que $s = 3t$ é o ângulo descrito pela partícula no tempo t. O número 3 é a velocidade angular da partícula. Observe, ainda, que o vetor

$$v(t) = (-6 \operatorname{sen} 3t, 6 \cos 3t)$$

é perpendicular ao vetor $\vec{OP} = (2 \cos 3t, 2 \operatorname{sen} 3t)$, pois $v(t) \cdot \vec{OP} = 0$. Usando a definição de velocidade e o conceito de derivada, podemos mostrar que $v(t)$ é, exatamente, a velocidade da partícula no instante t.

Exercícios

2.49. Escreva as equações da reta que

a) contém o ponto (-1, 1) e tem a direção do vetor (2, 3);

b) contém os pontos $A(3, 2)$ e $B(-3, 1)$.

2.50. Dados os vetores $u = (1, 5)$ e $v = (4, 1)$, escreva as equações paramétricas e cartesianas das retas que contêm as diagonais do paralelogramo definido por u e v.

2.51. a) Mostre que

$$x = 3 + 2t$$
$$y = 7 - 5t$$

são equações paramétricas da reta definida pelos pontos $A(3, 7)$ e $B(5, 2)$.

b) Que valores devem ser atribuídos a t para se obter os pontos A e B?

c) Que valores de t dão os pontos entre A e B?

d) Localize na reta os pontos para os quais $t > 1$ e $t < 0$.

2.52. Escreva as equações paramétricas da reta que contém o ponto (1, 2) e faz com a reta $y = -2x + 4$ um ângulo de 60°.

2.53. Determine a projeção ortogonal do ponto $P(2, 4)$ sobre a reta

$$x = 1 + 2t$$
$$y = -1 + 3t.$$

2.54. Dado o ponto $A(2, 3)$, ache o vetor $\vec{AP}$, onde P é o pé da perpendicular baixada de A à reta $y = 5x + 3$.

2.55. Determine a interseção da reta $y = 2x - 1$ com a reta definida pelos pontos (2, 1) e (0, 0).

2.56. Dados o ponto $P(2, -1)$ e a reta r de equação $y = 3x - 5$, escreva uma equação da reta que contém o ponto P e

a) seja paralela à reta r;

b) seja perpendicular à reta r.

2.57. Determine o ângulo menor entre as retas

a) $2x + 3y = 1$ e $y = -5x + 8$;

b) $x + y + 1 = 0$ e $x = 1 - 2t$, $y = 2 + 5t$.

2.58. Mostre que a distância do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $Ax + By + C = 0$ é dada por

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2.59. Mostre que, se a distância entre $P(a, b)$ e a origem é c, então a reta definida por P e $A(-c, 0)$ é perpendicular à reta definida por P e $B(c, 0)$.

2.60. Determine o comprimento do segmento OP da Figura 2.29, sabendo que $OADB$ é um retângulo.

2.61. Determine a distância entre as retas $2x - y = 6$ e $2x - y = -1$.

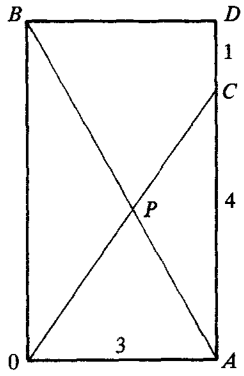


Fig. 2.29

2.62. Escreva uma equação da circunferência que contém os pontos de interseção das retas $y = x + 1$, $y = 2x + 2$ e $y = -2x + 3$.

2.63. Escreva as equações paramétricas das seguintes circunferências:

a) $x^2 + y^2 - 11 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - x + 3y - 2 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 6y = 0$;

d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

2.64. Deduza uma equação da circunferência de centro na origem e tangente à reta $3x - 4y + 20 = 0$.

2.65. Determine uma equação da circunferência tangente às retas $y = x$ e $y = -x$ nos pontos $(3, 3)$ e $(-3, 3)$.

2.66. Sejam C a circunferência de centro $(1, 2)$ e raio 3 e r a reta definida pelos pontos $A(6, 6)$ e $B(2, 10)$. Determine:

a) em C um ponto eqüidistante de A e B;

b) em r o ponto mais próximo de C.

2.67. a) Determine a interseção das circunferências

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0.$$

b) Escreva uma equação cartesiana da reta que contém a corda comum às circunferências do item (a).

2.68. a) Uma partícula percorre a reta definida pelos pontos $A(1, 2)$ e $B(3, -1)$ com velocidade constante. Sabendo que no instante $t = 0$ a partícula se encontra em A e que em $t = 2$ se encontra em B, determine sua posição no instante t.

b) Em que instante a partícula se encontra mais próxima do ponto $C(4, -2)$?

2.69. Num determinado instante t as posições de duas partículas P e Q são dadas, respectivamente, por

$$(1 + 2t,\ 1 + t) \quad \text{e} \quad (4 + t,\ -3 + 6t).$$

Elas se chocam?

2.70. Um móvel M_1 parte do ponto $A(0, 4)$ com velocidade $v = (1, -1)$ no mesmo instante em que um móvel M_2 parte de $O(0, 0)$, também com velocidade constante. Qual deve ser a velocidade de M_2 para que M_1 e M_2 se choquem uma unidade de tempo depois?

2.71. Uma partícula está animada de um movimento tal que, no instante t, ela se encontra no ponto

$$(x, y) = (1 + 2\cos t,\ 2 + 2\,\text{sen}\, t).$$

a) Descreva sua trajetória.
b) Verifique que sua velocidade no instante t é

$$v(t) = (-2\,\text{sen}\, t,\ 2\cos t).$$

2.72. Escreva as equações paramétricas da tangente à circunferência

$$x = x_0 + r\cos t$$
$$y = y_0 + r\,\text{sen}\, t,$$

no ponto (x_1, y_1).

2.73. A trajetória de uma partícula é dada por

$$x = 2 + 2\cos t$$
$$y = 1 + 2\,\text{sen}\, t,\ \frac{\pi}{8} \leq t \leq 2\pi.$$

Determine o menor valor de t para o qual a partícula se encontra a igual distância dos pontos $A(0, 4)$ e $B(1, 5)$.

2.74. Sejam r e s duas retas cujas equações são $Ax + By + C = 0$ e $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.
a) Mostre que, qualquer que seja λ,

$$Ax + By + C + \lambda(A_1x + B_1y + C_1) = 0 \qquad \text{(I)}$$

é a equação de uma reta que contém a interseção de r e s.
b) Se $A^2 + B^2 = A_1^2 + B_1^2$, mostre que, para $\lambda = \pm 1$, as retas dadas por (I) são as bissetrizes dos ângulos entre r e s.

CAPÍTULO 3

CÔNICAS

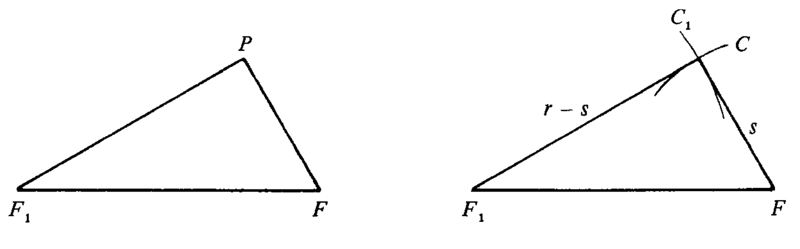
3.1 ELIPSE

Dados dois pontos F e F_1 e um número $r > d(F_1, F)$, o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$d(P,F) + d(P, F_1) = r$$

é chamado **elipse de focos** F_1 **e** F **e eixo maior** r.

Graficamente podemos obter um ponto da elipse fazendo a seguinte construção: centramos o compasso em um dos focos e com abertura igual a s ($s < r$) traçamos um arco C. Depois, centramos no outro foco e com abertura igual a $r - s$ traçamos o arco C_1. A interseção de C e C_1 é um ponto da elipse. Veja a Figura 3.1.



(a) (b)

Fig. 3.1

Utilizando esta construção, podemos obter tantos pontos da elipse quantos desejarmos. Ligando estes pontos, obtemos a representação gráfica da elipse (Figura 3.2).

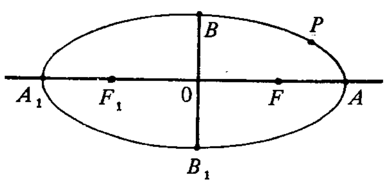


Fig. 3.2

Os pontos A_1 e A foram obtidos tomando-se $s = (r - d(F, F_1))/2$ e os pontos B e B_1, tomando-se $s = r/2$. Estes pontos são chamados **vértices da elipse**. Observe que a distância entre A_1 e A é igual ao eixo maior r da elipse e que o segmento BB_1 é perpendicular a A_1A. O ponto O, interseção de A_1A e BB_1, é o **centro da elipse.**

Na prática, podemos traçar uma elipse usando um laço completo de barbante e dois pregos. Fixamos os pregos em dois pontos (focos) e fazemos um lápis deslizar sobre o papel de modo que, apoiado nos pregos e na ponta do lápis, o laço de barbante se mantenha esticado.

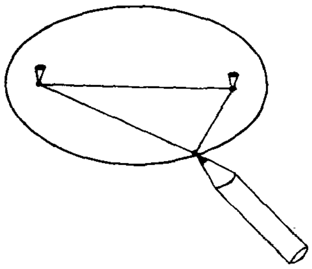


Fig. 3.3

A seguir, vamos deduzir uma equação da elipse na situação particular em que seu centro coincide com a origem do sistema e os focos estão sobre os eixos coordenados. Temos dois casos, conforme ilustra a Figura 3.4.

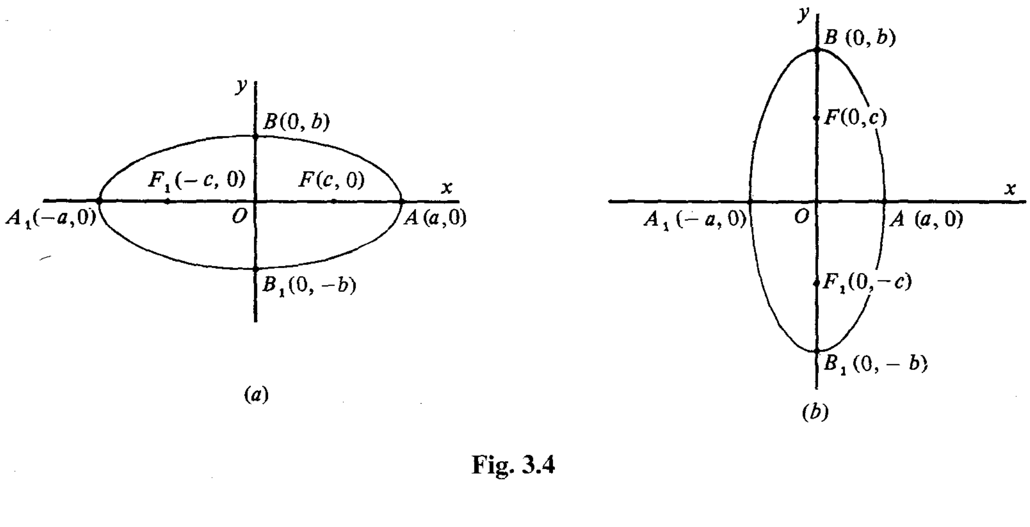


Fig. 3.4

Quando os focos estão sobre o eixo x, temos

$$d(P, F_1) + d(P, F) = d(A_1, A),$$

onde $P(x, y)$ é um ponto qualquer da elipse.

Para maior simplicidade nas contas vamos indicar o eixo maior por $2a$ e a distância focal $d(F_1, F)$ por $2c$. Com esta notação, em termos das coordenadas de F_1, F e P, temos

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Elevando ambos os membros desta equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos

$$xc-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Novamente, elevando esta equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \qquad (1)$$

Na Figura 3.4a, por definição do ponto B, temos

$$d(B, F)=a \text{ e } d(O, F)=c.$$

Logo, do triângulo OBF, deduzimos que $a^2-c^2=b^2$.

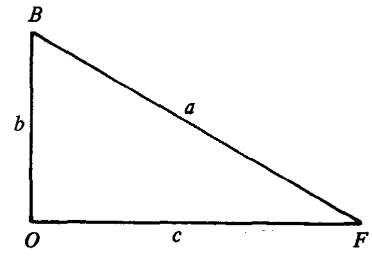


Fig. 3.5

Introduzindo este valor em (1), obtemos

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

que é a equação da elipse.

Observação. Na verdade, demonstramos apenas que um ponto $P(x, y)$ que satisfaz a equação

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (1)$$

também satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2}$$

Seguindo os passos da demonstração apresentada, no sentido inverso, podemos mostrar que todo ponto $P(x, y)$ que satisfaz (2) também satisfaz (1). Assim, as equações (1) e (2) são equivalentes e (2) é, de fato, uma equação da elipse.

Quando os focos da elipse estão sobre o eixo y, como na Figura 3.4b, sua equação é, também,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

sendo agora $2b$ o seu eixo maior. Neste caso, o vértice A é tal que $d(F, A) = b$ e, portanto, vale $b^2 - c^2 = a^2$ (Figura 3.6).

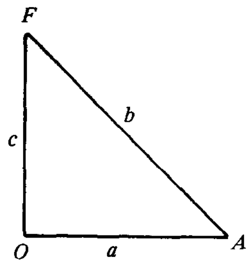


Fig. 3.6

Resumindo, temos: em ambos os casos, a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Se $a > b$, os focos da elipse estão no eixo x e são $F_1(-c, 0)$ e $F(c, 0)$, onde $c=\sqrt{a^2-b^2}$.
Se $a < b$, os focos da elipse estão no eixo y e são $F_1(0, -c)$ e $F(0, c)$, onde $c=\sqrt{b^2-a^2}$.

Exemplo. $9x^2 + 4y^2 = 36$, que também pode ser escrita assim

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,$$

é uma equação da elipse de vértices

$$A_1(-2, 0), A(2, 0), B\,(0, 3), B_1(0, -3)$$

e focos

$F(0,\sqrt{5})$ e $F_1(0,-\sqrt{5})$. (Veja a Figura 3.7*a*.)

Em geral, a equação de uma elipse é do segundo grau. Quando os vértices da elipse não estão sobre os eixos do sistema de coordenadas, além dos termos em x^2 e y^2, a equação apresenta também termos em xy, x e y.

Exemplo. Equação da elipse cujos focos são $F_1(-3, 0)$ e $F(0, 4)$ e o eixo maior é 7 (Figura 3.7*b*).

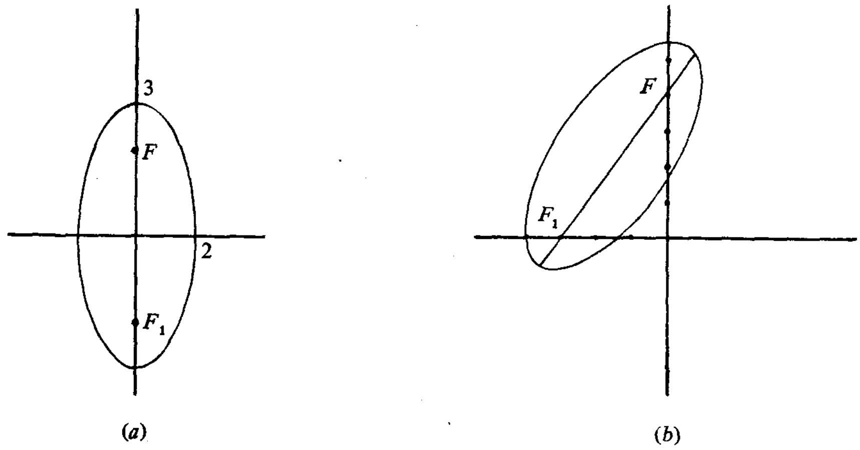


Fig. 3.7

Solução. Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse. Então, por definição,

$$d(P, F) + d(P, F_1) = 7$$

ou

$$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 7.$$

Na verdade, já obtivemos uma equação da elipse. Contudo, vamos transformar a equação acima a fim de eliminar os radicais que nela figuram. Transpondo o termo

$$\sqrt{x^2 + (y-4)^2}$$

para o segundo membro e elevando a equação resultante ao quadrado, obtemos

$$(x + 3)^2 + y^2 = 49 + x^2 + (y - 4)^2 - 14\sqrt{x^2 + (y-4)^2}\,,$$

que pode ser simplificada e escrita assim

$$3x + 4y - 28 = -7\sqrt{x^2 + (y-4)^2}\,.$$

Elevando ambos os membros desta equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos, finalmente,

$$40x^2 + 33y^2 - 24xy + 168x - 168y - 200 = 0,$$

que não contém radicais e é do segundo grau.

Exercícios

3.1. Determine os focos, os vértices e esboce as elipses cujas equações são:

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ b) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

c) $4x^2+9y^2=36$ d) $x^2+2y^2=1$.

3.2. Deduza uma equação da elipse
a) de focos $F(0, 1)$ e $F_1(0, -1)$ e eixo maior 4;
b) de focos $F(1, 1)$ e $F_1(-1,-1)$ e eixo maior $4\sqrt{2}$.

3.3. Escreva a equação da elipse que contém o ponto $\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$ e cujos focos são

$$F\left(\sqrt{7},0\right) \text{ e } F_1\left(-\sqrt{7},0\right).$$

3.4. Escreva a equação da elipse de focos $F(0, a)$ e $F_1(0, b)$ sabendo que um de seus vértices é a origem e que $b > a > 0$.

3.5. a) Mostre que se $P_1(x_0, y_0)$ satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

então os pontos $P_2(-x_0, y_0)$, $P_3(x_0, -y_0)$ e $P_4(-x_0, -y_0)$ também satisfazem.
b) Conclua, a partir do item a), que a elipse é simétrica em relação a cada um de seus eixos e em relação à origem.

3.6. Utilizando régua e compasso, construa uma elipse conhecendo
a) seus focos e o eixo maior;
b) seus focos e o eixo menor;
c) seus quatro vértices.

3.7. Mostre que
a) os gráficos das funções definidas por

$$f(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ e } f(x)=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \quad -a \le x \le a,$$

são semi-elipses;
b) se $-a < x_0 < a$ e $y_0 = f(x_0)$, a equação da reta que contém (x_0, y_0) e cuja declividade é $f'(x_0)$ é dada por

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Esta reta é chamada **tangente à elipse**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

no ponto (x_0, y_0).

3.8. Deduza a equação da reta perpendicular à tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

no ponto (x_0, y_0). Esta reta é chamada **normal à elipse** em (x_0, y_0).

3.9. Determine o valor de k para que a reta

$$\frac{2x}{9}+\frac{ky}{4}=1$$

seja tangente à elipse

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

3.10. Determine o ponto da elipse

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$$

mais próximo da reta $2x - 3y + 25 = 0$.

3.11. Considere uma semi-elipse e uma semi-reta como mostra a Figura 3.8. Se girarmos a semi-reta no sentido horário, em torno de P, em qual ponto da elipse ela tocará?

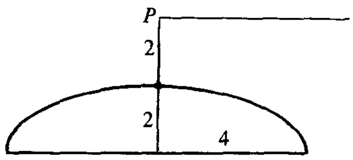


Fig. 3.8

3.12. Mostre que, qualquer que seja o valor de t, o ponto

$$(a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t)$$

pertence à elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Observação. Quando t varia de 0 a 2π, o ponto $(a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t)$ percorre a elipse, a partir do vértice $A(a, 0)$, uma vez.

$$x = a\cos t$$
$$y = b\,\mathrm{sen}\,t$$

são ***equações paramétricas da elipse.***

3.2 HIPÉRBOLE

Dados dois pontos F_1 e F e um número $r < d(F_1, F)$, o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$|d(F, P) - d(F_1, P)| = r$$

é chamado **hipérbole de focos F_1 e F e eixo r.**

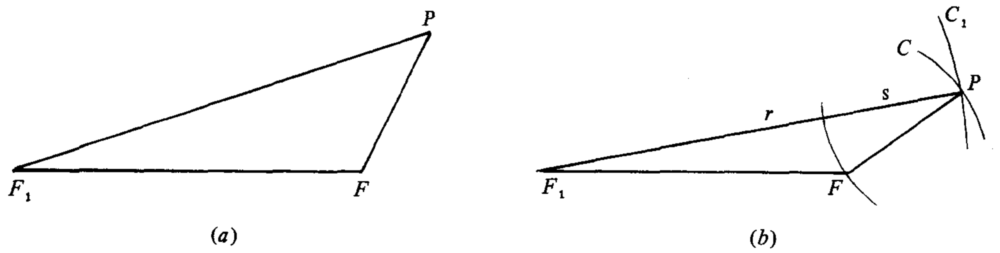


Fig. 3.9

Graficamente, para se obter um ponto da hipérbole é suficiente centrar o compasso em um dos focos e com abertura s traçar um arco C. Depois, centrar no outro foco e com abertura $s + r$ traçar o arco C_1. A interseção de C e C_1 é um ponto da hipérbole. Unindo os pontos assim obtidos, temos o traçado da hipérbole.

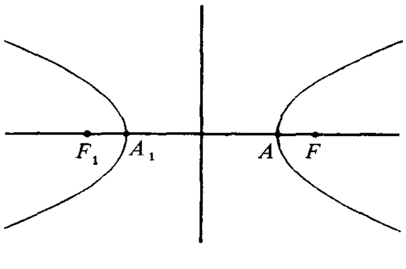


Fig. 3.10

Os pontos A_1 e A, chamados **vértices da hipérbole**, foram obtidos tomando-se $s = (d(F_1, F) - r)/2$. Observe que $d(A_1, A) = r$ e que, se $s < (d(F_1, F) - r)/2$, os arcos C e C_1 não se interceptam. Da construção, é fácil ver que a hipérbole é composta de dois ramos e simétrica em relação à reta que contém os focos e em relação à mediatriz do segmento F_1F.

Com o objetivo de obter uma equação mais simples para a hipérbole, vamos eleger um sistema de coordenadas onde um dos eixos contém os focos e a origem seja o ponto médio do segmento F_1F. Como para a elipse, temos, também, dois casos.

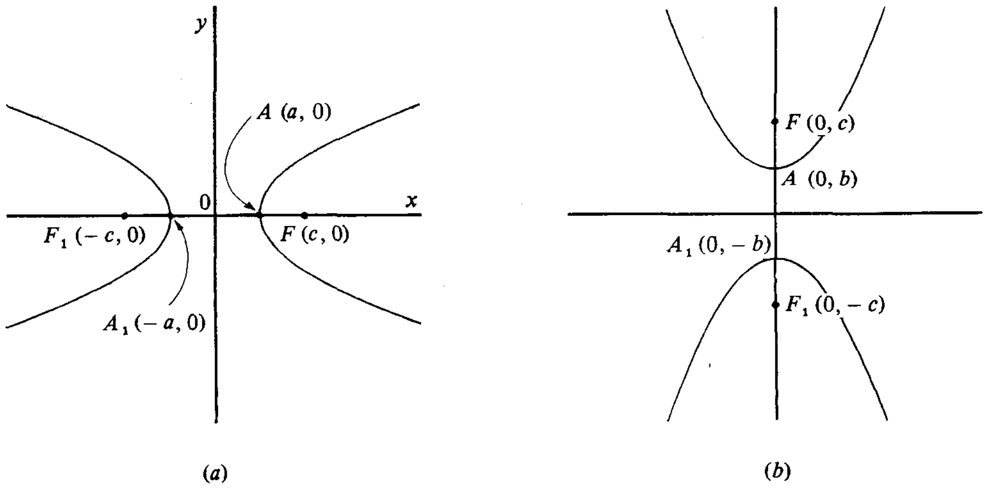


Fig. 3.11

Quando os focos estão sobre o eixo x, temos

$$|d(P, F_1) - d(P, F)| = d(A, A_1),$$

onde $P(x, y)$ é um ponto qualquer da hipérbole. Como mostra a Figura 3.10a, estamos chamando a distância focal $d(F_1, F)$ de $2c$ e a distância entre os vértices, de $2a$. Logo,

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \quad (1)$$

Depois de eliminarmos os radicais de (1), podemos escrevê-la assim

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Fazendo

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

obtemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

que é equivalente a (1) e, portanto, é uma equação da hipérbole.

Quando os focos da hipérbole estão sobre o eixo y, como na Figura 3.11b, sua equação é

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,$$

onde $2b$ é a distância entre os vértices e a é tal que

$$c^2 - b^2 = a^2.$$

Mesmo quando os focos da hipérbole não estão sobre os eixos, ou não são simétricos em relação à origem, sua equação é também do segundo grau. Por exemplo, uma equação da hipérbole de focos $F_1(-2, 1)$ e $F(1, 3)$ e eixo 2 é

$$20x^2 + 48xy - 76x + 24y - 79 = 0,$$

como o leitor pode verificar.

Exemplo. Determine condições sobre a, b e m para que a reta $y = mx$ intercepte a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Solução. Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto da interseção da reta com a hipérbole. Veja a Figura 3.12a. Então, devemos ter

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1,$$

$$y_0 = mx_0.$$

Destas duas equações, obtemos

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{m^2x_0^2}{b^2}=1,$$

que, resolvida em x_0, nos dá

$$x_0=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}=\pm\frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-m^2}}.$$

Para que x_0 tenha valor real, isto é, para que a reta intercepte a hipérbole, é necessário e suficiente que

$$\frac{b^2}{a^2}-m^2>0 \quad \text{ou} \quad m^2<\frac{b^2}{a^2}.$$

Sendo a e b números positivos, segue-se que

$$-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}.$$

Assim, a reta $y = mx$ intercepta a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se, e somente se, sua declividade estiver compreendida entre $-b/a$ e b/a. A parte (b) da Figura 3.12 mostra a hipérbole e as retas de declividade b/a e $-b/a$, que contém a origem.

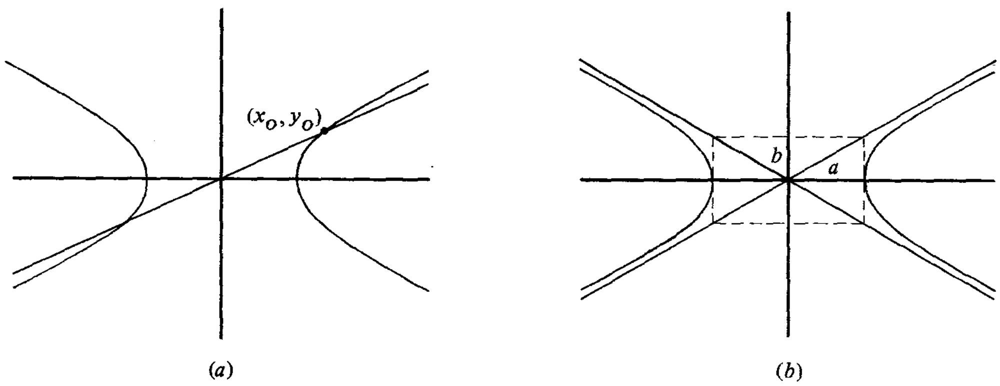


Fig. 3.12

Cada uma das retas

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$

é chamada **assíntota da hipérbole**. Portanto, as assíntotas são posições extremas das secantes à hipérbole, que contém a origem. Ainda mais, da expressão

$$x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - m^2}}$$

vemos que, quando a declividade da secante tende para b/a, a abscissa x_0 do ponto de interseção tende para mais ou menos infinito. Isto significa que a hipérbole (ambos os ramos) tende para as assíntotas, à medida que se afasta da origem. Esta interpretação geométrica sugere um procedimento cômodo para se esboçar uma hipérbole, a saber, primeiro traçamos as assíntotas e, depois, os ramos da hipérbole tendendo às assíntotas, como mostra a Figura 3.12b.

Procedendo de forma análoga, em relação à reta $y = mx$ e à hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

podemos deduzir que a reta intercepta a hipérbole se, e somente se, $m > b/a$ ou $m < -b/a$. Portanto, as retas

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{b}{a}x,$$

também ocupam as posições extremas das secantes à hipérbole, que contém a origem, isto é, a hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

tende ao par de retas $y = bx/a$ e $y = -bx/a$, que são as assíntotas.

Exemplo. As assíntotas da hipérbole

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

são (Figura 3.13a)

$$y = \frac{2}{3}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{2}{3}x$$

e as da hipérbole

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$$

são (Figura 3.13b)

$$y = 2x \quad \text{e} \quad y = -2x.$$

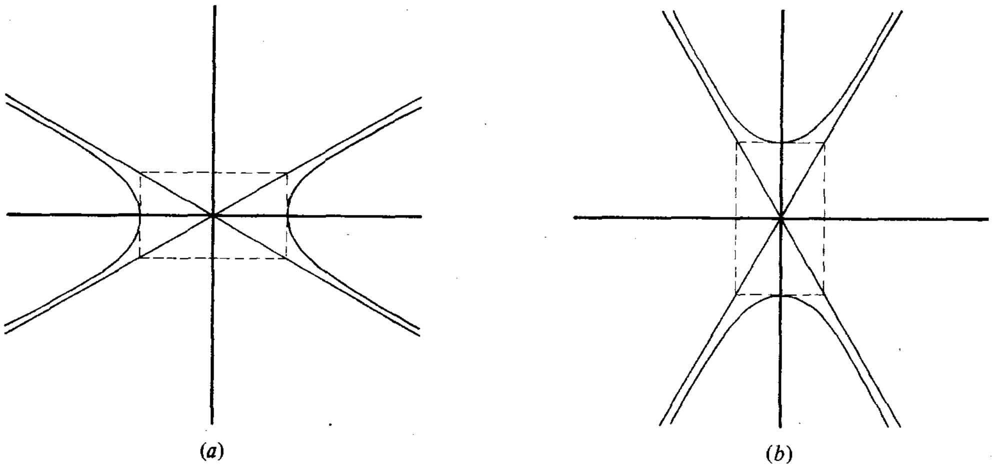


Fig. 3.13

Exercícios

3.13 Determine os focos, os vértices e esboce as hipérboles cujas equações são:

a) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$ b) $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{25}=1$

c) $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$ d) $x^2 - y^2 = 1$.

3.14. Deduza uma equação da hipérbole
a) de focos $F(3, 0)$ e $F_1(-3, 0)$ e vértices $A(2, 0)$ e $A_1(-2, 0)$;
b) de focos $F(2, 2)$ e $F_1(-2, -2)$ e vértices $A(1, 1)$ e $A_1(-1, -1)$.

3.15. Seja P o pé da perpendicular baixada do foco F da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

a uma das assíntotas. Demonstre que $\overline{PF}=b$ e $\overline{PO}=a$, onde O é a origem do sistema de coordenadas.

3.16. Mostre que
a) os gráficos das funções definidas por

$$f(x)=b\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} \text{ e } f(x)=-b\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}},\ x \in \mathbf{R}$$

são ramos de hipérbole;
b) se $y_0 = f(x_0)$, a equação da reta que contém (x_0, y_0) e cuja declividade é $f'(x_0)$ é dada por

$$\frac{y_0 y}{b^2}-\frac{x_0 x}{a^2}=1.$$

Esta reta é chamada **tangente à hipérbole**

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

no ponto (x_0, y_0).

3.17. Mostre que nenhuma tangente à hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

passa pela origem.

3.18. Deduza a equação da reta perpendicular à tangente à hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0). Esta reta é chamada **normal à hipérbole** no ponto (x_0, y_0).

3.19. Deduza as equações da tangente e da normal à hipérbole

$$y^2 - 2x^2 = 1$$

no ponto (2, 3).

3.20. Determine uma equação da hipérbole cujas assíntotas são $y = x$ e $y = -x$, sabendo que um de seus vértices é o ponto (2, 0).

3.3 PARÁBOLA

Dados um ponto F e uma reta r, chama-se **parábola de foco F e diretriz r** ao conjunto de pontos P do plano tais que

$$d(P, F) = d(P, r).$$

Construção. Pelo foco F traçamos a perpendicular à diretriz r e tomamos sobre esta perpendicular (chamada **eixo** da parábola) um ponto C. Por C traçamos uma paralela a r e com abertura igual a $d(C, r)$ e centro em F determinamos nesta paralela os pontos P e P' da parábola. Unindo os pontos assim construídos, obtemos a parábola (Figura 3.14).

Observe que se escolhermos o ponto C, sobre o eixo, de modo que $d(C, r) < d(C, F)$, o arco traçado com centro em F e raio $d(C, F)$ não intercepta a paralela à diretriz traçada por C. O ponto da parábola mais próximo de r é o ponto O (veja a Figura 3.14b) tal que $d(O, r) = d(O, F)$. Este ponto é chamado **vértice da parábola**.

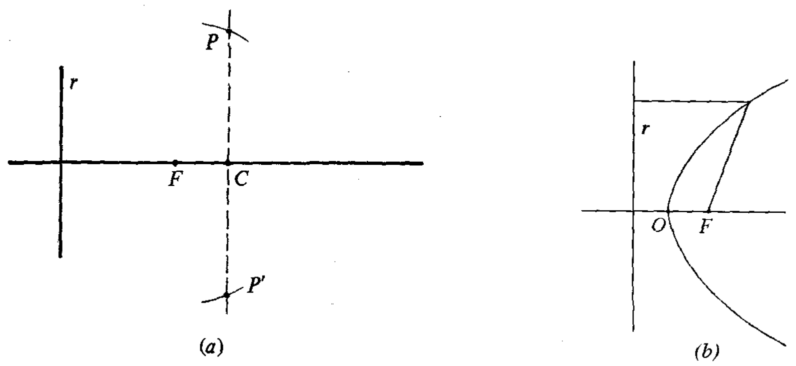


Fig. 3.14

Em geral, a equação de uma parábola é do segundo grau, isto é, contém termos em x^2, y^2, xy, x e y. Porém, quando o sistema de eixos é escolhido de modo que a origem coincide com o vértice e um dos eixos do sistema coincide com o eixo da parábola, como veremos, sua equação é muito simples. Existem quatro casos.

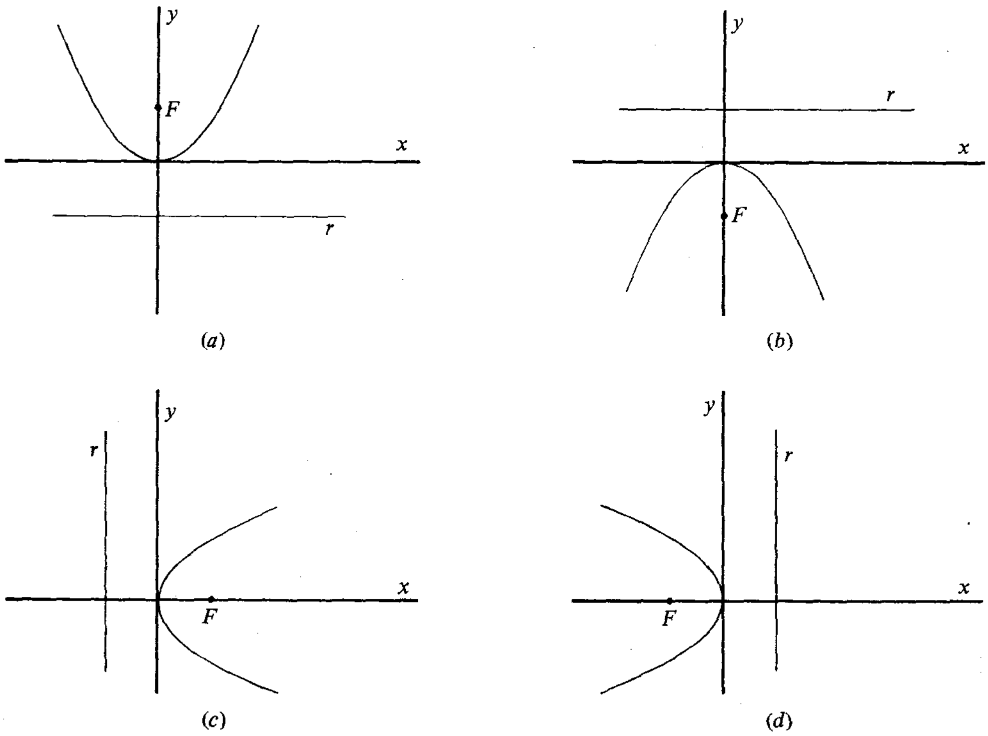


Fig. 3.15

Na Figura 3.15a o foco está sobre o eixo y e a diretriz é paralela ao eixo x. Se $d(F, r) = 2a$, então o foco é $F(0, a)$ e a equação da diretriz é

$$y = -a.$$

Um ponto $P(x, y)$ pertence à parábola se, e somente se,

$$d(P, F) = d(P, r)$$

ou

$$\sqrt{x^2 + (y-a)^2} = |y+a|.$$

Eliminando o radical desta equação e simplificando o resultado, obtemos a sua equivalente

$$4ay = x^2 \text{ ou } y = \frac{1}{4a}x^2,$$

que é a equação da parábola.

Nos demais casos, efetuando contas semelhantes, obtemos

$$y = -\frac{1}{4a}x^2$$

$$x = \frac{1}{4a}y^2$$

$$x = -\frac{1}{4a}y^2,$$

que são, respectivamente, as equações das parábolas das Figuras 3.15b, c e d. Em todos os casos

$$a = \frac{1}{2}d(F,r).$$

Exemplo. O gráfico da equação

$$x = -y^2$$

é a parábola de foco $F(-1/4, 0)$ e diretriz $x = 1/4$, pois, neste caso, $1/4a = 1$, donde $a = 1/4$. Veja a Figura 3.16.

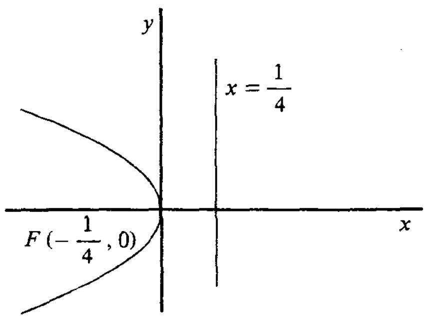


Fig. 3.16

Exercícios

3.21. Determine o foco, o vértice, a equação da diretriz e esboce as parábolas cujas equações são:

a) $y = \frac{1}{4}x^2$ b) $x = -\frac{1}{4}y^2$

c) $y = x^2$ d) $x = 2y^2$

3.22. Deduza uma equação da parábola
  a) de foco $F(0, -1)$ e diretriz $y = 1$;
  b) de foco $F(-1, 0)$ e vértice $(0, 0)$;
  c) de foco $F(1, 1)$ e vértice $(0, 0)$.

3.23. Deduza uma equação da parábola com vértice em $V(6, -3)$ e cuja diretriz é a reta $3x - 5y + 1 = 0$.

3.24. Prove que toda parábola cujo eixo é paralelo ao eixo y tem uma equação da forma

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Qual é a forma geral das equações cujo eixo é paralelo ao eixo x?

3.25. Deduza uma equação da parábola que contém o ponto $(1, 4)$, sabendo que seu eixo é paralelo ao eixo y e que seu vértice é o ponto $(2, 3)$.

3.26. Deduza uma equação da parábola que contém os pontos $(-1, 12)$, $(1, 2)$ e $(2, 0)$ e tem eixo paralelo ao eixo y.

3.27. Prove que numa parábola o comprimento da corda que contém o foco e é perpendicular ao eixo é duas vezes a distância do foco à diretriz.

3.28. a) Prove que a reta $x - 2ay_0y + x_0 = 0$ é tangente à parábola $x = ay^2$ no ponto $P(x_0, y_0)$.

b) Mostre que a perpendicular à tangente em $P(x_0, y_0)$ é bissetriz do ângulo formado por PF (onde F é o foco da parábola) e a paralela ao eixo da parábola, que contém $P(x_0, y_0)$.

3.29. Uma partícula se move de modo que no instante t seu vetor posição é

$$\vec{OP}(t) = (t, 4t - t^2).$$

Determine:

a) uma equação cartesiana da trajetória da partícula;

b) o instante em que a partícula se encontra mais próxima da reta $y = 5$.

3.30. Sejam a e b números reais tais que $b > a > 0$ e considere os pontos $B(0, 0)$, $B_1(0, a + b)$, $F(0, a)$ e $F_1(0, b)$.

a) Mostre que as equações da elipse de vértice B e B_1 e focos F e F_1 e da parábola de vértice B e foco F podem ser escritas, respectivamente, nas formas

$$y = \frac{1}{a+b}y^2 + \frac{1}{4a}\frac{a+b}{b}x^2$$

$$y = \frac{1}{4a}x^2.$$

b) Se os pontos (x, y_e) e (x, y_p) pertencem, respectivamente, à elipse e à parábola do item a), mostre que

$$\lim_{b\to\infty} y_e = y_p.$$

c) A partir dos itens a) e b), conclua que a parábola de vértice B e foco F pode ser imaginada como a posição limite da elipse de vértices B e B_1 e focos F e F_1 quando o foco F_1 tende para o infinito.

Observação. Veja na Seção 3.5 como a elipse pode ser obtida interceptando-se um cone com o plano. A posição limite descrita no item c) corresponde ao caso em que o plano é paralelo à geratriz do cone.

3.4 ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO DE EIXOS

Nos parágrafos anteriores vimos que a equação de uma cônica (elipse, hipérbole ou parábola) é sempre do segundo grau, isto é, é da forma

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Vimos, ainda, que quando o sistema de coordenadas é convenientemente escolhido, a equação da cônica reduz-se a uma das formas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{E}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{H}$$

$$y = \frac{1}{4a}x^2, y = -\frac{1}{4a}x^2, x = \frac{1}{4a}y^2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{4a}y^2. \tag{P}$$

Dizemos que estas equações estão na forma ***reduzida*** ou ***canônica.***

Na Seção 3.5 provaremos que, exceto em certos casos particulares, o gráfico de uma equação do segundo grau, em duas variáveis, é uma cônica. Em geral, a técnica utilizada para identificar e esboçar esta cônica consiste em simplificar sua equação efetuando-se mudanças no sistema de coordenadas. Estas mudanças são translação e rotação de eixos e serão introduzidas a seguir.

Translação de Eixos

Na Figura 3.17*a* estão representados dois sistemas de coordenadas: o sistema $x0y$, como de costume, e o sistema $x_1 0_1 y_1$, que pode ser imaginado como uma translação de $x0y$ em que a origem 0 coincide com o ponto 0_1. Se P é um ponto do plano, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas. Como mostra a Figura 3.17*b*, se (x, y) são as coordenadas de P em relação ao sistema $x0y$ e (x_1, y_1) são as coordenadas de P em relação ao sistema $x_1 0_1 y_1$, temos

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a \\ y &= y_1 + b, \end{aligned} \tag{s}$$

onde a e b são as coordenadas de 0_1 em relação ao sistema $x0y$. Explicitando x_1 e y_1 em (s), obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= x - a \\ y_1 &= y - b. \end{aligned}$$

Estas equações permitem passar das coordenadas de um ponto P, dadas no sistema $x0y$, para as coordenadas de P com relação ao sistema $x_1 0_1 y_1$.

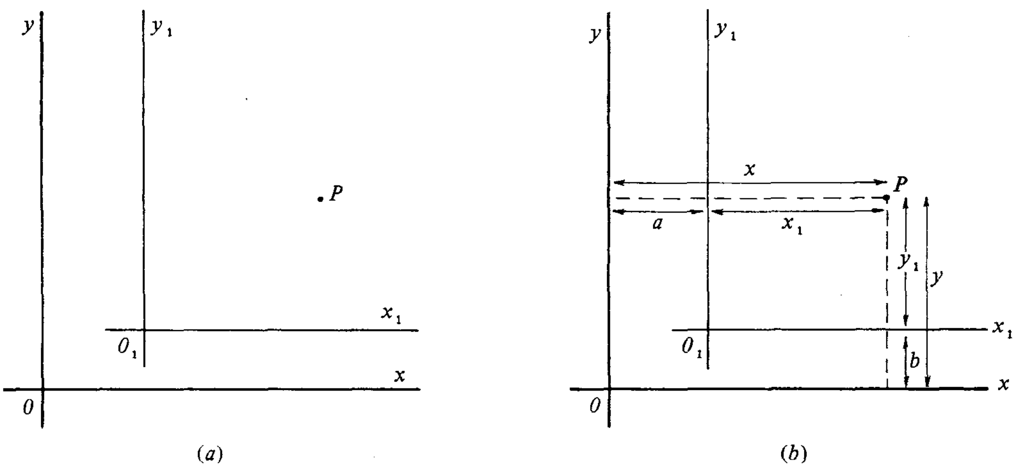


Fig. 3.17

Exemplo. Seja o ponto $P(4, -1)$. Efetuando-se uma translação em que a nova origem é $0_1(-2, 3)$, em relação ao novo sistema, as coordenadas de P passam a ser

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - (-2) = 6 \\ y_1 &= -1 - 3 = -4, \end{aligned}$$

ou seja, $P(6, -4)$. Veja a Figura 3.18.

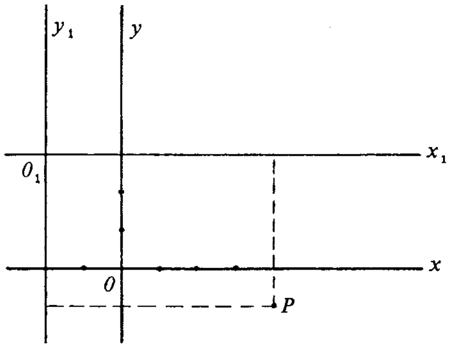


Fig. 3.18

Neste caso, as equações de mudanças de coordenadas são:

$$x_1 = x + 2 \qquad\qquad x = x_1 - 2$$
$$\text{ou}$$
$$y_1 = y - 3 \qquad\qquad y = y_1 + 3.$$

Se, relativamente ao sistema $x0y$, a equação de uma reta é

$$y = mx + b,$$

no sistema $x_1 0_1 y_1$ sua equação é

$$y_1 + 3 = m(x_1 - 2) + b \quad \text{ou} \quad y_1 = mx_1 + b - 2m - 3.$$

Observe que a declividade da reta não se alterou.

Exemplo. Usando uma translação conveniente, elimine os termos do primeiro grau da equação

$$4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0.$$

Solução. Completando os quadrados, em x e y, na equação dada, obtemos

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) + 4 = 4 \,.\, 1 + 9 \,.\, 4$$

ou

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36.$$

Observe que, para obtermos um quadrado perfeito no interior dos parênteses, somamos 1 no primeiro e 4 no segundo. Para mantermos a igualdade, estas mesmas parcelas, multiplicadas pelo coeficiente do parêntese, foram somadas no segundo membro. Depois disto, efetuamos a translação de eixos definida pelas equações

$$x_1 = x - 1$$
$$y_1 = y - 2$$

e escrevemos a equação

$$4(x-1)^2+9(y-2)^2=36$$

assim

$$4x_1^2+9y_1^2=36,$$

que é a solução do problema.

Escrevendo essa última equação na forma

$$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1,$$

vemos que seu gráfico é uma elipse cujos vértices, no sistema $x_1 0_1 y_1$, onde $0_1(1, 2)$, são

$$A_1(-3, 0), A(3, 0), B(0, 2) \text{ e } B_1(0, -2).$$

Esta elipse está mostrada na Figura 3.19.

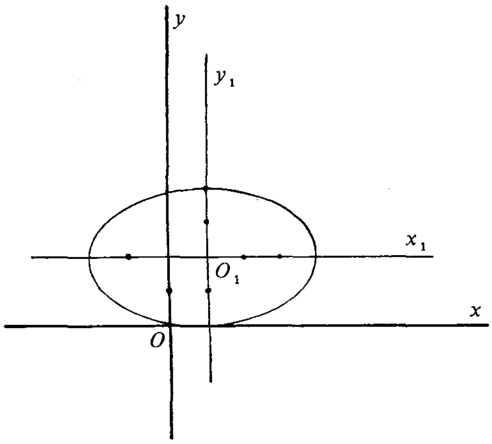


Fig. 3.19

Observe que a elipse acima é também o gráfico da equação

$$4x^2+9y^2-8x-36y+4=0,$$

em relação ao sistema $x0y$, pois quando se efetua uma translação a curva não se altera, apenas a equação muda.

Rotação de Eixos

Consideremos o sistema de coordenadas $x0y$, e seja $x_1 0 y_1$ o sistema de coordenadas obtido de $x0y$ por uma rotação de um ângulo θ, no sentido anti-horário, como mostra a Figura 3.20. Sejam

(x, y) e (x_1, y_1) as coordenadas de um ponto P do plano, em relação aos sistemas $x0y$ e x_10y_1, respectivamente. Nosso objetivo é escrever x_1 e y_1 em função de x, y e do ângulo θ. Uma rotação de um ângulo θ transforma os vetores

$$e_1 = (1, 0) \text{ e } e_2 = (0, 1)$$

nos vetores u_1 e u_2, onde

$$u_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2$$
$$u_2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = -\operatorname{sen}\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2.$$

Para o vetor $\vec{OP}$ temos

$$\vec{OP} = (x, y) = xe_1 + ye_2,$$

onde x e y são as coordenadas de P em relação ao sistema $x0y$. Por outro lado, como u_1 e u_2 são unitários e perpendiculares, temos também

$$\vec{OP} = (x_1, y_1) = x_1u_1 + y_1u_2,$$

sendo x_1 e y_1 as coordenadas de P em relação ao sistema x_10y_1.

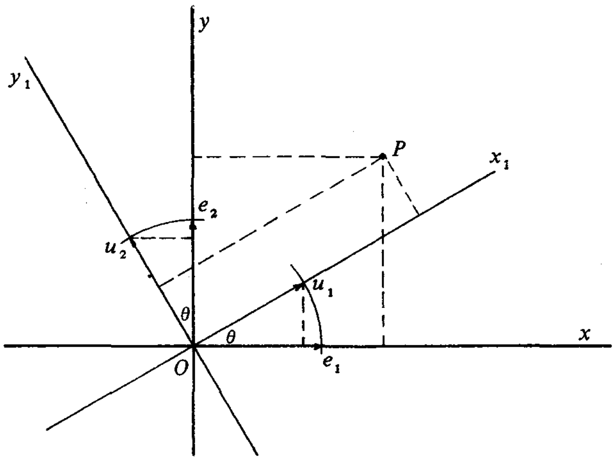


Fig. 3.20

Temos, então, a igualdade

$$xe_1 + ye_2 = x_1u_1 + y_1u_2$$

ou

$$xe_1 + ye_2 = x_1(\cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2) + y_1(-\operatorname{sen}\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2),$$

de onde obtemos

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta \qquad\qquad x_1 = x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta$$

ou

$$y = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta \qquad\qquad y_1 = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$$

Exemplo. Seja o ponto $P(6, 4)$. Efetuando -se uma rotação de um ângulo de $\pi/3$ radianos nos eixos, em relação ao novo sistema, suas coordenadas passam a ser

$$x_1 = 6.\frac{1}{2} + 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}$$

$$y_1 = -6\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\frac{1}{2} = -3\sqrt{3} + 2,$$

ou seja,

$$P(3+2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}+2).$$

Exemplo. Usando uma rotação de eixos convenientes, transforme a equação

$$4x^2 + y^2 + 4xy + x - 2y = 0$$

em uma que não contenha o termo em xy.

Solução. Substituindo x e y na equação dada por

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta$$
$$y = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta,$$

obtemos

$$\begin{gathered} 4(x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta)^2 + (x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta)^2 + \\ + 4(x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta)(x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta) + \\ + (x_1\cos\theta - y_1\operatorname{sen}\theta) - 2(x_1\operatorname{sen}\theta + y_1\cos\theta) = 0, \end{gathered}$$

que é a equivalente da equação inicial em relação ao sistema $x_1 0 y_1$, obtido do sistema $x0y$ por uma rotação de um ângulo θ. Desenvolvendo-a, obtemos

$$\begin{gathered} (4\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\,x_1^2 + (4\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,y_1^2 + \\ (-6\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta)x_1y_1 + (\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)x_1 + (-\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta)y_1 = 0. \quad (1) \end{gathered}$$

Como nosso objetivo é obter uma equação que não contenha o produto das variáveis, igualamos o coeficiente de x_1y_1 a zero, ou seja, impomos para θ a condição

$$-6\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta = 0.$$

Lembrando que $\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 1/2\operatorname{sen} 2\theta$ e que $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$, obtemos

$$-3\operatorname{sen}2\theta + 4\cos 2\theta = 0$$

e, portanto,

$$tg\,2\theta = \frac{4}{3}.$$

A partir desta igualdade deduzimos que

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(θ é aproximadamente 26°33′). Substituindo os valores de sen θ e cos θ na equação (1) e efetuando as contas, obtemos

$$y_1 = \sqrt{5}x_1^2$$

O gráfico desta equação, como já vimos, é uma parábola. Ela está representada, juntamente com os dois sistemas de coordenadas, na Figura 3.21.

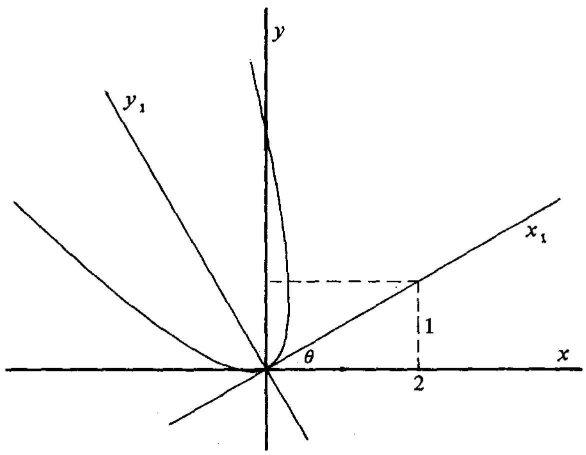


Fig. 3.21

Observe que esta parábola é também o gráfico da equação

$$4x^2 + y^2 + 4xy + x - 2y = 0$$

em relação ao sistema xy.

Como vimos no exemplo anterior, dada uma equação do segundo grau nas variáveis x e y, usando uma rotação de eixos podemos eliminar o termo em xy. O ângulo desta rotação é

$$\theta = \frac{1}{2} arctg \frac{c}{a-b},$$

onde c é o coeficiente de xy, a o coeficiente de x^2 e b o coeficiente de y^2, desde que $a \neq b$. Se $a = b$, θ é 45° (veja Exercício 3.40). Após eliminarmos o termo em xy, completamos os quadrados na equação resultante para determinarmos a translação que elimina os termos do primeiro grau. Vejamos mais um exemplo.

Considere a equação

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0.$$

Como o coeficiente de x^2 é igual ao de y^2, a rotação é de 45° e as equações de mudança de sistema são

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1.$$

Substituindo estes valores na equação dada e simplificando a equação resultante, obtemos

$$x_1^2 - 4y_1^2 - 4x_1 + 8y_1 - 16 = 0.$$

Depois de completarmos os quadrados em x_1 e y_1, podemos escrever esta última equação assim

$$\frac{(x_1 - 2)^2}{16} - \frac{(y_1 - 1)^2}{4} = 1,$$

que se transforma em

$$\frac{x_2^2}{16} - \frac{y_2^2}{4} = 1,$$

após efetuarmos a translação de eixos definida por

$$x_2 = x_1 - 2$$

$$y_2 = y_1 - 1.$$

O gráfico desta equação é uma hipérbole. Ela está representada na Figura 3.22, juntamente com os três sistemas de coordenadas. A construção da Figura 3.22 obedeceu à seguinte ordem: primeiro desenhamos o sistema de coordenadas xy; girando tal sistema de 45°, obtivemos o sistema x_1y_1; o sistema x_2y_2 foi obtido conforme a translação definida pelas equações

$$x_2 = x_1 - 2$$

$$y_2 = y_1 - 1,$$

isto é, é uma translação de x_1y_1, onde o ponto (2, 1), relativamente ao sistema x_1y_1, é a nova origem. O esboço da hipérbole foi feito no sistema x_2y_2.

Observe que, com a rotação, o eixo x_1 ficou paralelo ao eixo da hipérbole e, com a translação, a origem do novo sistema x_2y_2 coincidiu com o centro da hipérbole.

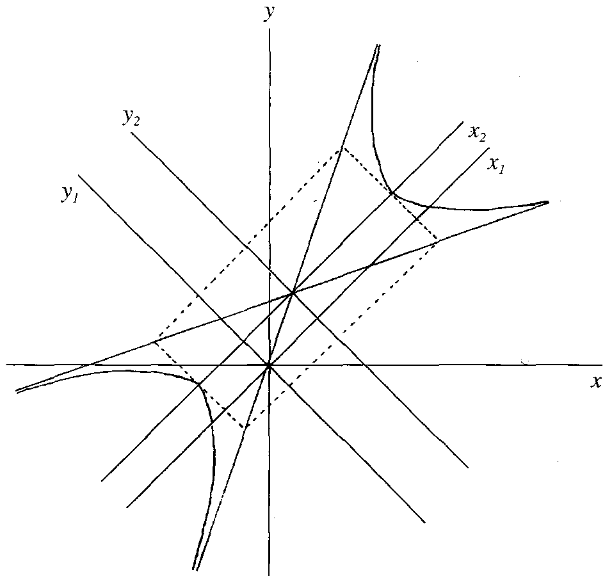


Fig. 3.22

Exercícios

3.31. Efetua-se uma translação de eixos de modo que a nova origem seja o ponto $(-2, 3)$.
a) Determine as coordenadas dos pontos $(3, 2)$ e $(5, 7)$ com respeito ao novo sistema.
b) Escreva uma equação da reta $y = 2x + 7$ com respeito ao novo sistema.

3.32. Efetue uma translação de eixos tal que, em relação ao novo sistema, as equações das retas $y = 2x - 1$ e $x + 3y = 11$ não contenham o termo constante. Escreva as equações destas retas em relação ao novo sistema.

3.33. Seja $x_1 0_1 y_1$ um sistema obtido de $x0y$ por uma translação. Determine a nova origem 0_1, sabendo que um determinado ponto tem coordenadas $(3, 4)$ no sistema $x0y$ e $(-2, 3)$ no sistema $x_1 0_1 y_1$.

3.34. Seja $x_1 0_1 y_1$ uma translação de $x0y$ cuja nova origem é $0_1(4, 1)$ e $x_2 0_2 y_2$ uma translação de $x_1 0_1 y_1$ cuja nova origem (no sistema $x_1 0_1 y_1$) é $0_2(1, 2)$.
a) Determine as coordenadas de $\overrightarrow{00_1}, \overrightarrow{0_1 0_2}$ e $\overrightarrow{00_2}$ em relação a cada um dos três sistemas.
b) Verifique que $\overrightarrow{00_2} = \overrightarrow{00_1} + \overrightarrow{0_1 0_2}$, em qualquer um dos três sistemas.

3.35. Mostre que, quando se efetua uma translação de eixos, as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{AB}$ (sendo A e B dois pontos quaisquer) não se alteram.

3.36. Efetua-se uma rotação de eixos de um ângulo θ no sistema $x0y$. Sabendo que, em relação ao sistema $x0y$, o ponto P é dado por $(5, \sqrt{3})$ e que, em relação ao novo sistema, é dado por $(4, -2\sqrt{3})$, determine o ângulo θ.

3.37. Determine as coordenadas do ponto $P(2, 5)$ em relação ao sistema obtido do sistema $x0y$ por uma rotação de um ângulo θ tal que $\operatorname{tg} \theta = 1/3$.

3.38. Seja $x_1 0 y_1$ o sistema obtido de $x0y$ por uma rotação de 30° no sentido anti-horário, e $x_2 0_2 y_2$ o sistema obtido de $x_1 0 y_1$ por uma translação em que a nova origem (no sistema $x_1 0 y_1$) é o ponto $0_2(3, 2)$.
a) Determine as coordenadas do ponto P nos sistemas $x0y$ e $x_2 0_2 y_2$, sabendo que no sistema $x_1 0 y_1$ ele é dado por $(2, 1)$.
b) Determine as coordenadas do ponto Q no sistema $x0y$, sabendo que no sistema $x_2 0_2 y_2$ ele é dado por $(1, 2)$.

3.39. Se $x0y$ e $x_1 0_1 y_1$ são os sistemas de coordenadas mostrados na Figura 3.23, determine as equações de mudança de $x0y$ para $x_1 0_1 y_1$.

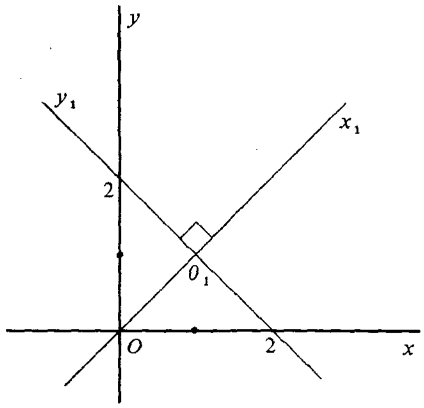


Fig. 3.23

3.40. Dada a equação

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

demonstre que se pode eliminar o termo em xy com uma rotação de eixos de um ângulo igual a $\pi/4$ radianos, se $a = b$, e igual a

$$\frac{1}{2}arctg\,\frac{c}{a-b}, \text{ se } a \neq b.$$

3.41. Esboce o gráfico das seguintes equações

a) $4(x-1)^2 + 9y^2 = 36$;
b) $x^2 - y^2 - 22x = 0$;
c) $x^2 - 16y^2 - 32y - 32 = 0$;
d) $16y = x^2 + 8x + 32$;
e) $xy = 1$;
f) $xy - 2y - 4x = 0$;
g) $x^2 + y^2 + xy = 3$;
h) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 12x - 6y = 0$;
i) $41x^2 + 41y^2 - 18xy - 384x - 384y + 1504 = 0$.

3.42. Calcule a área do triângulo formado pelas retas $x = 1$, $y = 2$ e a tangente à cônica

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$$

no ponto $\left(2, \frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.5. EQUAÇÃO GERAL DO SEGUNDO GRAU

Já vimos que as cônicas (elipse, hipérbole e parábola) são subconjuntos do plano cujas equações são do segundo grau. Nos exemplos seguintes apresentaremos outros subconjuntos do plano cujas equações são, também, do segundo grau.

Exemplo. Determine uma equação do segundo grau cujo gráfico seja o subconjunto constituído das retas

$$r: ax + by + c = 0$$

$$s: a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Solução. Indiquemos por r ∪ s o subconjunto constituído das retas r e s. Como um ponto (x_0, y_0) pertence a r ∪ s, se, e somente se,

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \qquad \text{ou} \qquad a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$$

e uma destas equações se anula se, e somente se,

$$(ax_0 + by_0 + c)(a_1x_0 + b_1y_0 + c) = 0,$$

segue que r ∪ s é o gráfico de

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0,$$

que, evidentemente, é uma equação do segundo grau em x e y. Por exemplo, o gráfico da equação

$$(x + y + 1)(2x - y + 4) = 0 \qquad \text{ou} \qquad 3x^2 - y^2 + xy + 6y + 3y + 4 = 0$$

é o par de retas mostrado na Figura 3.24a.

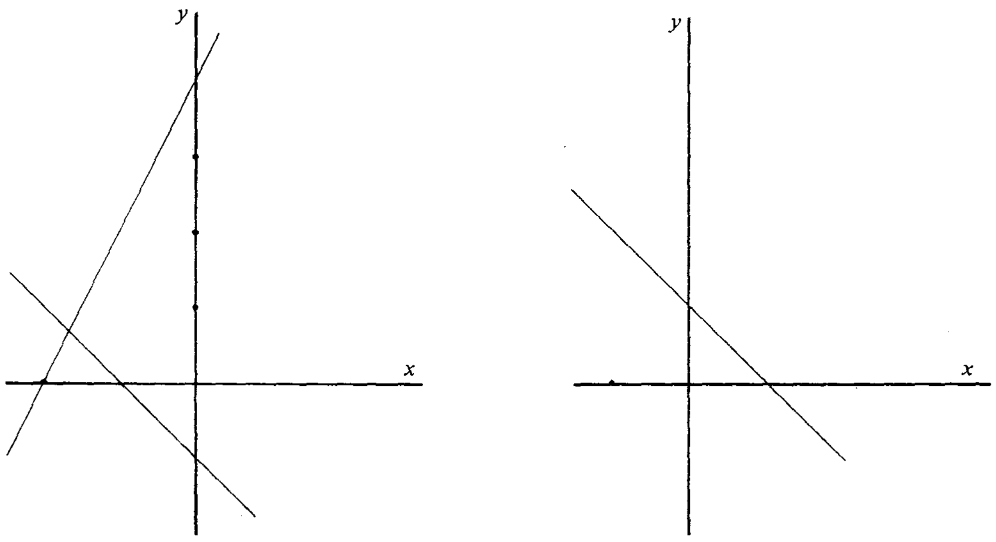
Observe que, se $ax + by + c = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ são equações da mesma reta, então

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

é uma equação do segundo grau cujo gráfico é uma única reta. Por exemplo, o gráfico de

$$(x + y - 1) \,.\, (2x + 2y - 2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 4x - 4y + 2 = 0$$

é a reta representada na Figura 3.24b



(*a*) (*b*)

Fig. 3.24

Pode também acontecer que o gráfico de uma equação do segundo grau seja um único ponto ou o conjunto vazio. Por exemplo, o gráfico de

$$(x-1)^2+(y+3)^2=0 \qquad \text{ou} \qquad x^2+y^2-2x+6y+10=0$$

é o ponto $(1, -3)$ e o gráfico de

$$4x^2+9y^2+5=0$$

é o conjunto vazio.

Portanto, até agora, vimos que o gráfico de uma equação do segundo grau pode ser

uma elipse,
uma hipérbole,
uma parábola,
um par de retas,
uma única reta,
um ponto ou
o conjunto vazio.

Nas páginas seguintes, demonstraremos que o gráfico de qualquer equação do segundo grau, com duas variáveis, é um destes subconjuntos. Eles, exceto o subconjunto vazio, são as possíveis interseções de um cone (veja Cone de Revolução, Seção 1, Capítulo 5) com um plano e, por isto, são chamados ***cônicas.*** Veja a Figura 3.25

No caso das Figuras. 3.25*d*, *e* e *f*, a cônica é dita degenerada.

Observação. O estudo das cônicas sob este ponto de vista, isto é, como interseção de um plano e um cone, data do século III a.C. e precede a própria Geometria Analítica, que só surgiu no século XVII.

Proposição 3.1. O gráfico de uma equação do segundo grau, isto é, o gráfico de uma equação da forma

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0, \qquad a,\ b \text{ ou } c \neq 0,$$

é uma cônica.

Demonstração. Inicialmente efetuamos uma rotação de eixos de um ângulo θ, onde

$$\theta=\frac{1}{2}arctg\frac{c}{a-b}, \text{ se } a \neq b,$$

$$\theta=45^\circ, \text{ se } a=b.$$

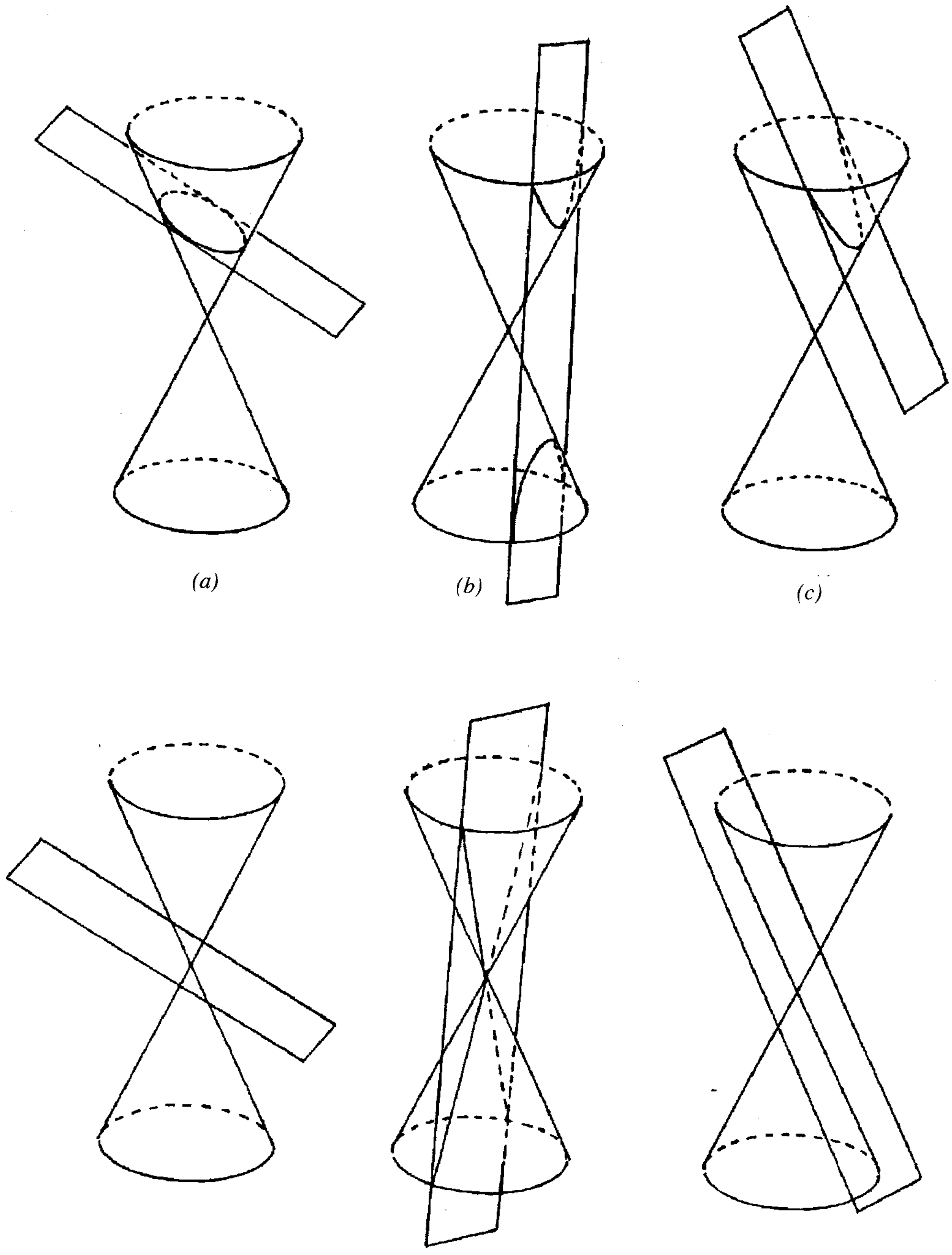
De acordo com o Exercício 3.40, após esta rotação a equação dada se transforma numa equação da forma

$$Ax_1^2+By_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0, \tag{I}$$

onde $A \neq 0$ ou $B \neq 0$.

Se $A \neq 0$ e $B=0$, temos

$$Ax_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0. \tag{II}$$



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Fig. 3.25

Neste caso, se $E = 0$, esta equação se reduz a

$$Ax_1^2 + Dx_1 + F = 0,$$

cujo gráfico é um par de retas paralelas ao eixo y_1, uma reta paralela ao eixo y_1 ou o conjunto vazio, conforme $D^2 - 4AF$ seja, respectivamente, maior, igual ou menor que zero. Se $E \neq 0$, temos, de (II),

$$y_1 = -\frac{A}{E}x_1^2 - \frac{D}{E}x_1 - \frac{F}{E},$$

cujo gráfico é (veja Exercício 3.24) uma parábola. Portanto, a proposição está provada no caso $A \neq 0$ e $B = 0$. A prova do caso $A = 0$ e $B \neq 0$ é análoga. Continuando, suponhamos A e B não-nulos. Completando os quadrados em x_1 e y_1 na Equação (I), obtemos

$$A\left(x_1^2 + \frac{D}{A}x_1 + \frac{D^2}{4A^2}\right) + B\left(y_1^2 + \frac{E}{B}y_1 + \frac{E^2}{4B^2}\right) = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}$$

ou

$$A\left(x_1 + \frac{D}{2A}\right)^2 + B\left(y_1 + \frac{E}{2B}\right)^2 = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}. \qquad (1)$$

Efetuando a translação de eixos definida pelas equações

$$x_2 = x_1 + \frac{D}{2A}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{E}{2B},$$

reduzimos a Equação (1) a

$$Ax_2^2 + By_2^2 = \Delta, \qquad (2)$$

onde

$$\Delta = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}.$$

Se $\Delta = 0$, o gráfico de (2) é um par de retas concorrentes se A e B tiverem sinais contrários, ou um ponto, se A e B tiverem o mesmo sinal. Se $\Delta \neq 0$, obtemos, de (2),

$$\frac{x_2^2}{\frac{\Delta}{A}} + \frac{y_2^2}{\frac{\Delta}{B}} = 1,$$

cujo gráfico é uma elipse, se A, B e Δ tiverem o mesmo sinal, ou uma hipérbole, se os sinais de A e B forem contrários.

Exercícios

3.43. a) Deduza uma equação do segundo grau cujo gráfico seja o subconjunto formado pelas retas r e s da Figura 3.26.

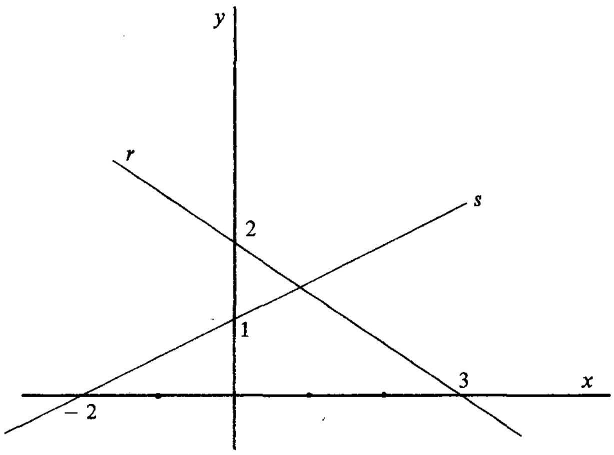


Fig. 3.26

b) Deduza duas equações do segundo grau, (E_1) e (E_2), cujos gráficos sejam, respectivamente, as retas r e s.

c) Multiplique (E_1) por (E_2) e obtenha uma equação do quarto grau em x e y cujo gráfico é o par de retas formado por r e s.

3.44. Dê exemplo de uma equação da forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, onde os coeficientes a, b, c, d, e e f sejam todos não-nulos, cujo gráfico seja o conjunto vazio.

3.45. Mostre que o gráfico de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

é o par de assíntotas da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3.46. Dada a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad \text{(I)}$$

demonstre que o número

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

é invariante por rotação ou translação, isto é, se

$$A_1x_1^2 + B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 = 0$$

é a equação que se obtém de (I) efetuando-se uma rotação ou translação de eixos, então

$$\Delta = B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC.$$

Demonstre, ainda, que conforme Δ seja menor, maior ou igual a zero, o gráfico de (I) é, respectivamente, uma elipse ou um ponto, uma hipérbole ou um par de retas concorrentes, uma parábola ou um par de retas paralelas ou uma única reta.

3.6 DEFINIÇÃO UNIFICADA DAS CÔNICAS

Exemplo. Dados uma reta d e um ponto F não pertencente a d, determine o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$d(P, F) = ed(P, d),$$

onde e é um número positivo.

Solução. Como mostra a Figura 3.27, introduzimos um sistema de coordenadas onde o eixo y coincide com a reta d e o eixo x é a perpendicular traçada de F à reta d. O ponto F tem coordenadas $(p, 0)$, onde $p = d(F, d)$. Relativamente a este sistema, o conjunto de pontos procurado é caracterizado pela equação

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x|,$$

que é equivalente a

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0. \tag{1}$$

O gráfico de (1), independentemente dos valores (positivos) de e e p, é uma cônica não degenerada (veja a Seção 3.5). Se $e < 1$, os coeficientes de x^2 e y^2 são ambos positivos e a cônica, cuja equação é (1), é uma elipse. Se $e = 1$, o coeficiente de x^2 é zero e o gráfico é uma parábola. Por último, se $e > 1$, os coeficientes de x^2 e y^2 têm sinais contrários e o gráfico é uma hipérbole.

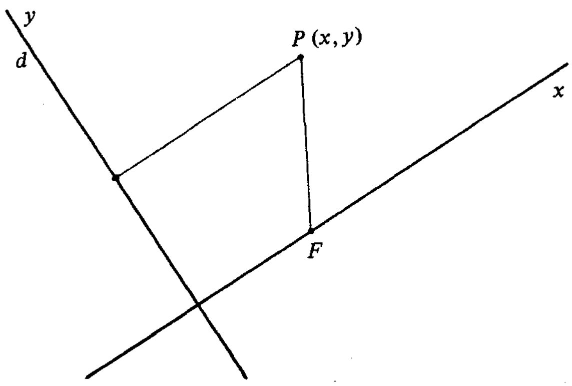


Fig. 3.27

Em vista desses resultados, podemos unificar a definição de cônica da seguinte forma:

Dados uma reta d e um ponto F não pertencente a d, e um número positivo e, chama-se cônica de diretriz d, foco F e **excentricidade** e o conjunto dos pontos P, do plano definido por d e F, tais que

$$d(P, F) = ed(P, d).$$

A cônica é uma elipse, hipérbole ou parábola, conforme o número e seja, respectivamente, menor, maior ou igual a 1.

Exemplo. Equação da cônica (elipse) de foco $F(1, 0)$, excentricidade 1/2 e que tem por diretriz a reta de equação $x = 4$.

Solução. Seja $P(x, y)$ um ponto da cônica. Aplicando a definição unificada, temos

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\frac{1}{2}|x-4|,$$

que é equivalente a

$$3x^2 + 4y^2 = 12,$$

que é a equação procurada. Observe que, reescrevendo a última equação assim

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,$$

vemos que a cônica é, de fato, uma elipse e que seu outro foco é $F_1(-1, 0)$. Veja a Figura 3.28. A reta d', de equação $x = -4$, é também uma diretriz da elipse.

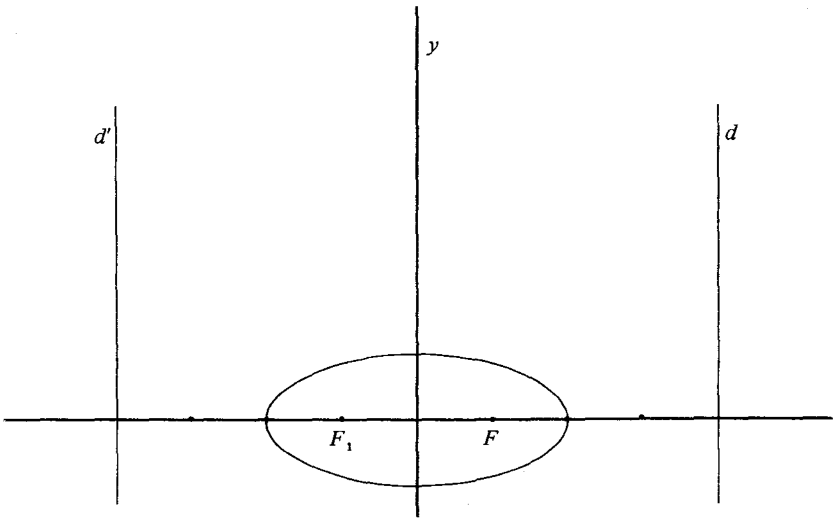


Fig. 3.28

Exercícios

3.47. Deduza uma equação da cônica de foco $F(2, 0)$ com excentricidade e diretriz

a) $e=\frac{1}{4}$, $x = 8$;

b) $e = 4, x = \frac{1}{2}$;

c) $e = 1, x = -2$.

3.48. Demonstre que a elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ b<a$$

é a cônica de foco $F(c, 0)$, excentricidade $e = c/a$ e diretriz $x = a/e$ ou a cônica de foco $F_1(-c, 0)$, excentricidade $e = c/a$ e diretriz $x = -a/e$, onde $c = \sqrt{a^2-b^2}$.

3.49. Demonstre que a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

é a cônica de foco $F(c, 0)$, excentricidade $e = c/a$ e diretriz $x = a/e$ ou a cônica de foco $F_1(-c, 0)$, excentricidade $e = c/a$ e diretriz $x = -a/e$, onde $c=\sqrt{a^2-b^2}$ ou $c=\sqrt{b^2-a^2}$.

3.50. Demonstre que a parábola

$$y=\frac{1}{4a}x^2$$

é a cônica de foco $F(0, a)$, excentricidade $e = 1$ e diretriz $y = -a$.

CAPÍTULO 4

O ESPAÇO

4.1 SISTEMA DE COORDENADAS

Inicialmente nosso objetivo é estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e as ternas ordenadas (x, y, z) de números reais. Para isto, tomamos três retas x, y e z perpendiculares entre si e concorrentes no ponto O, como mostra a Figura 4.1*a*.

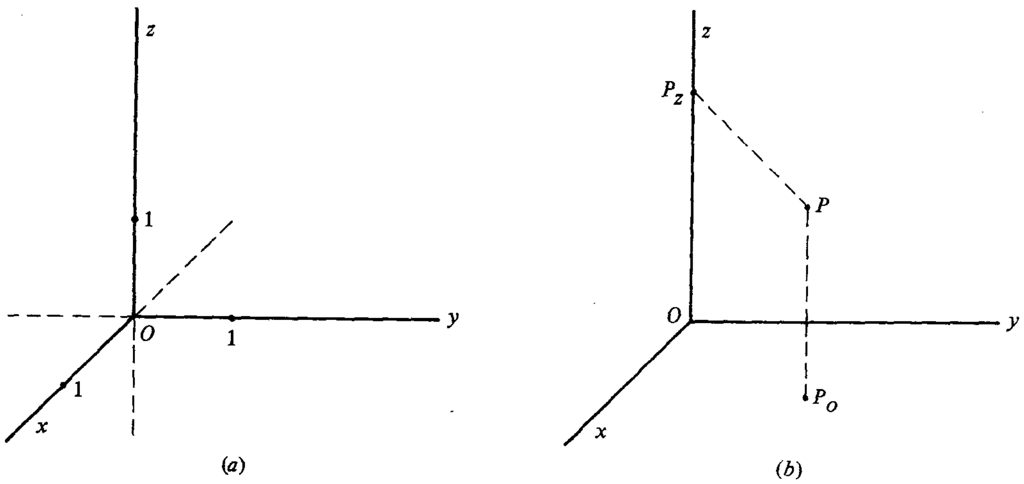


Fig. 4.1

Considerando O como origem, tomemos sobre x, y e z unidades iguais e arbitremos em cada uma um sentido positivo. Observe que os eixos x, y e z definem três planos, cada um munido de um sistema de coordenadas. Os eixos x e y, por exemplo, definem o plano horizontal xOy. Seja P um ponto qualquer do espaço. Traçando por P perpendiculares a z e ao plano horizontal xOy, determinamos os pontos P_z e P_o, (veja a Figura 4.1*b*). O ponto P_o, por sua vez, determina nos eixos x e y os pontos P_x e P_y, (veja a Figura 4.2a). Sejam x, y e z as coordenadas de P_x P_y e P_z. Ao ponto P associaremos a terna (x, y, z).

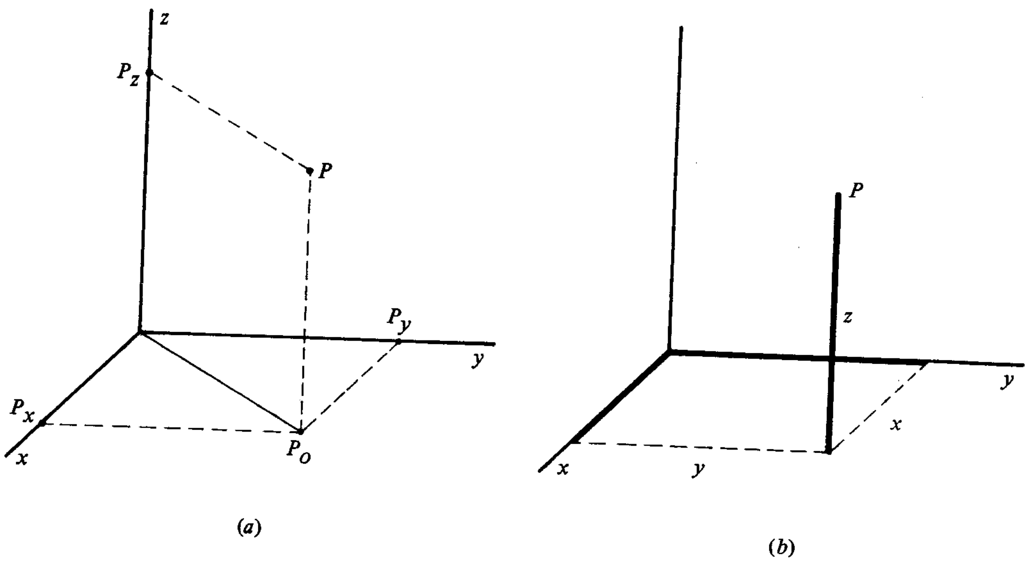


Fig. 4.2

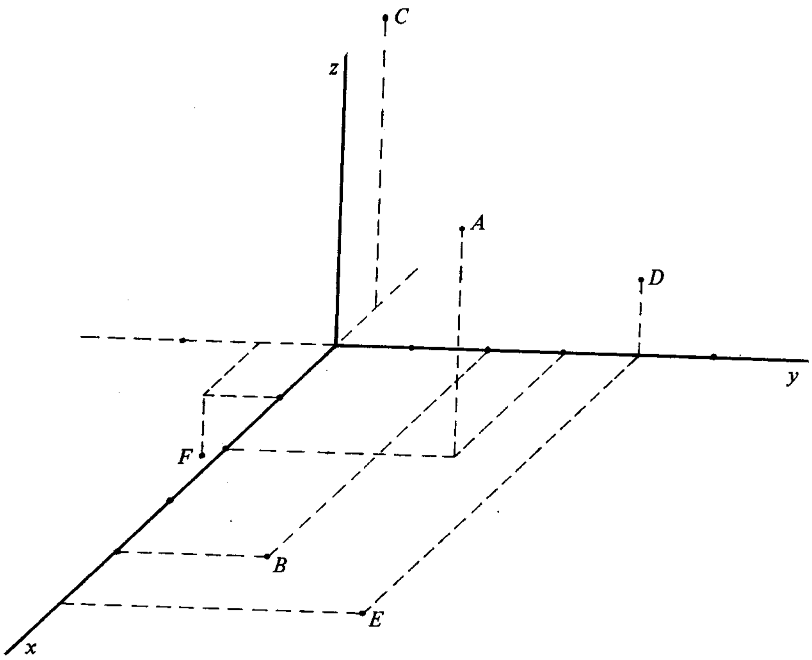


Fig. 4.3

Para indicarmos que P tem coordenadas x, y e z usaremos a notação

$$P(x, y, z).$$

Como a construção que acabamos de descrever pode ser feita no sentido inverso, isto é, a partir do terno ordenado determina-se o ponto, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e os ternos ordenados de números reais, como queríamos. A Figura 4.2*b* é uma simplificação da Figura 4.2a. Nela aparecem somente os elementos essenciais na representação de P. Na Figura 4.3, estão representados os pontos $A(2, 3, 4)$, $B(4, 2, 0)$, $C(-1, 0, 5)$, $D(0, 4, 1)$, $E(5, 4, 0)$ e $F(1, -1, -1)$.

Exemplo. Uma sala tem 6 m de largura por 8 m de comprimento e 4 m de altura. Estabeleça um sistema e dê as coordenadas dos seguintes pontos:

a) dos oito cantos da sala;

b) do ponto de interseção das diagonais do piso;

c) de um ponto situado a 2 m de altura e sobre a vertical que contém a interseção das diagonais do piso.

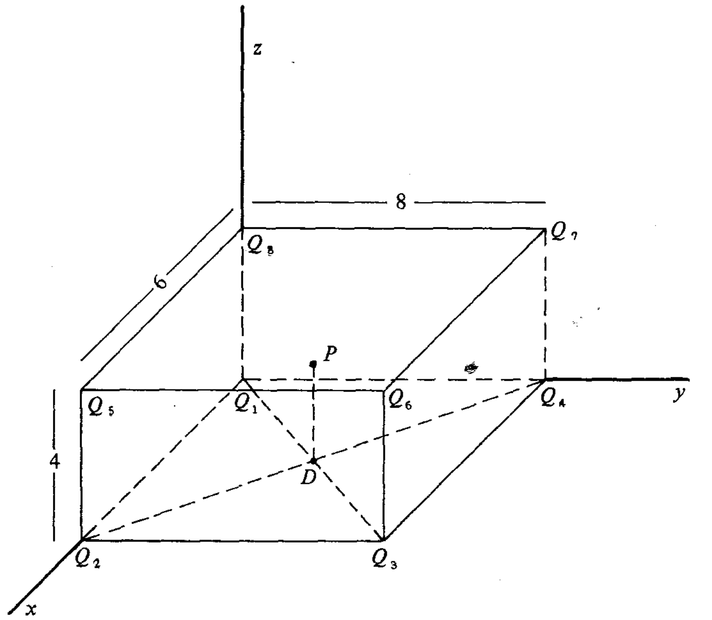


Fig. 4.4

Solução. a) Embora tenhamos total liberdade para eleger o sistema de coordenadas, por uma questão de simplicidade, nossa escolha deve recair sobre um que tenha um dos cantos da sala como origem. Outra condição, que também simplificará bastante as coordenadas, é que as arestas da sala coincidam com os eixos do sistema. Um sistema que satisfaz estas duas condições está mostrado na Figura 4.4. Em relação a tal sistema temos as seguintes coordenadas para os cantos da sala:

$Q_1(0, 0, 0)$, $Q_2(6, 0, 0)$, $Q_3(6, 8, 0)$, $Q_4(0, 8, 0)$, $Q_5(6, 0, 4)$,
$Q_6(6, 8, 4)$, $Q_7(0, 8, 4)$, $Q_8(0, 0, 4)$.

b) Como o ponto D pertence ao plano xy, sua terceira coordenada é nula, isto é, $z = 0$. As coordenadas x e y de D são, respectivamente, 3 e 4, como mostra a Figura 4.5. Logo, D (3, 4, 0).

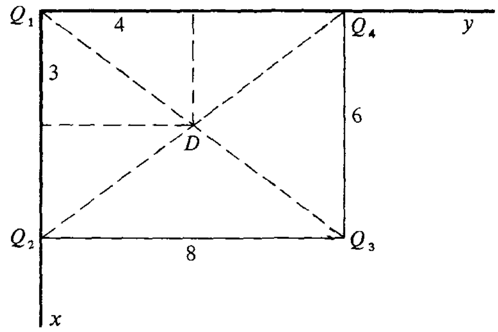


Fig. 4.5

c) As duas primeiras coordenadas de P coincidem com as de D, pois P e D estão numa mesma vertical. A terceira coordenada de P é 2 porque P está duas unidades acima do plano xy. Logo, $P(3, 4, 2)$.

Exercícios

4.1. Represente graficamente os seguintes pontos: $A(1, 3, 2)$, $B(0, -1, 0)$, $C(-1, -2, -3)$, $D(0, -3 -5)$ $E(0, 0, 8)$ e $F(-2, 0, 1)$.

4.2. Represente graficamente
a) a reta definida pelos pontos $A(2, 1, 3)$ e $B(4, 5, -2)$;
b) o plano definido pelos pontos $A(0, 0, 3)$, $B(2, 3, 1)$ e $C(0, 3, 4)$.

4.3. Descreva e represente graficamente os seguintes conjuntos de pontos:

$$A = \{(x, y, z) : x = y = 0\},$$
$$B = \{(x, y, z) : x = 2 \text{ e } y = 3\},$$
$$C = \{(x, y, z) : z = 1\},$$
$$D = \{(x, y, z) : x = 0\},$$
$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

4.4. Escreva na forma dos conjuntos A, B, C, ..., do Exercício 4.3, os pontos pertencentes
a) a um plano paralelo ao plano xOy e duas unidades acima deste;
b) a uma reta paralela ao eixo x e que intercepta o plano yOz no ponto (0, 2, 3).

4.5. Um tanque de base retangular tem, em metros, as seguintes dimensões: base 5×6, altura 3. Dois terços do volume do tanque são ocupados por água. Na superfície superior da água forma-se uma pequena bolha de ar. A bolha está a igual distância das superfícies das paredes de 5 m de base e, em relação às paredes de 6 m de base, sua posição é tal, que a distância a uma das paredes é o dobro da distância à outra. Estabeleça um sistema de coordenadas, tendo como origem um dos cantos inferiores do tanque e como um dos planos de coordenadas a parede, de base 6 m, mais próxima da bolha, e dê, em relação a este sistema, as coordenadas do ponto onde se encontra a bolha.

4.6. Determine as coordenadas dos pontos de interseção dos conjuntos
$$A = \{(x, y, z) : z = -1\} \text{ e } B = \{(x, y, z) : x = 2,\ y = -1\}.$$

4.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Sejam $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ pontos do espaço e P_0 e Q_0 suas projeções no plano xOy. Traçando por P o segmento PS paralelo a P_0Q_0, obtemos o triângulo retângulo PSQ. A hipotenusa $\overline{PQ}$ deste triângulo é dada por

$$\sqrt{\overline{SQ}^2 + \overline{SP}^2}. \tag{1}$$

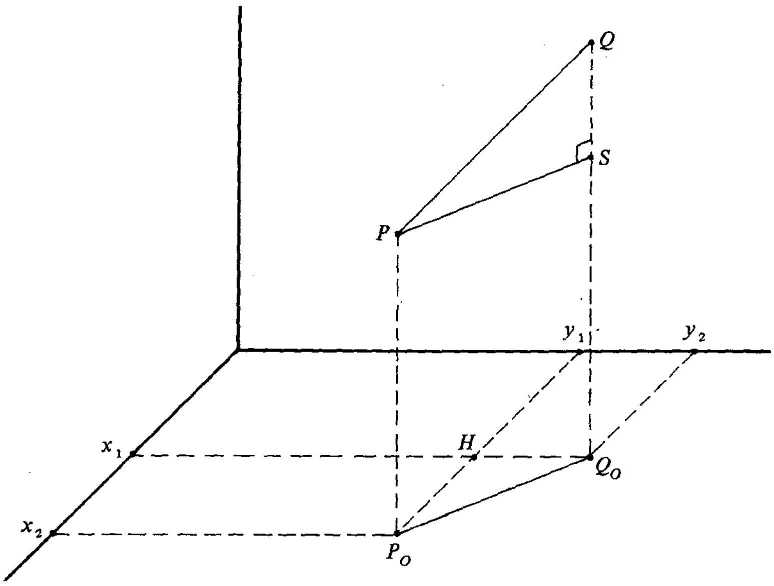


Fig. 4.6

Como o quadrilátero SQ_0P_0P é um retângulo, temos que

$$\overline{SQ}^2 = (z_2 - z_1)^2 \tag{2}$$

e que

$$\overline{SP}^2 = \overline{Q_0P_0}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \tag{3}$$

A última igualdade foi obtida aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo P_0HQ_0. Substituindo (2) e (3) em (1), obtemos

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Este número, que é a medida da hipotenusa do triângulo PSQ, é chamado **distância entre** P **e** Q e indicado por $d(P, Q)$. Isto é, por definição,

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Exemplo. A distância entre os pontos $P(2, -1, 0)$ e $Q(-3, 4, 2)$ é

$$d(P,Q)=\sqrt{(-3-2)^2+(4+1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{54}.$$

A distância entre o ponto $A(x, y, z)$ e a origem $O(0, 0, 0)$ é

$$d(A,O)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

4.3 ESFERA

Uma **esfera** de centro em $C(x_0, y_0, z_0)$ e raio $r > 0$ é o conjunto de pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que

$$d(P, C) = r.$$

Como

$$d(P,C) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

temos que um ponto $P(x, y, z)$ pertence à esfera de centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raio r se, e somente se,

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=r.$$

Esta igualdade é equivalente a

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2,$$

que é chamada **equação cartesiana da esfera** de centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raio r. Por exemplo, a equação da esfera de centro em (2, 1, -3) e raio 3 é

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9.$$

Inversamente, dada a equação de uma esfera, podemos determinar seu centro e seu raio. Por exemplo, dada a equação

$$x^2+y^2+z^2-2x-4z+1=0,$$

completando os quadrados em x, y e z, podemos escrevê-la na forma

$$(x-1)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=4$$

e, a partir daí, concluir que se trata da equação de uma esfera de centro em (1, 0, 2) e raio 2.

Exercícios

4.7. Sejam $A(0, 0, 1)$ e $B(x, 4, 1)$. Determine x para que se tenha $d(A, B) = 5$.

4.8. Determine o centro e o raio das seguintes esferas:
a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = 10$;
b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 10z = 27$;
c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 6y = 6$;
d) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$;
e) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y = 1$.

4.9. Determine uma equação da esfera que tem por diâmetro o segmento de extremos $A(8, 0, 3)$ e $B(-6, 2, 5)$.

4.10. Determine uma equação da esfera que:
a) é concêntrica com
$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y = 0$$
e contém o ponto $(1, 2, 3)$;
b) contém os pontos $(0, 0, 4)$, $(1, 2, 3)$ e $(0, 2, 6)$ e tem o centro no plano xy.

4.11. Mostre que o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ tais que
$$d(P, O) = 2d(P, A),$$
onde O é a origem e $A(0, 3, 0)$, é uma esfera. Determine o centro e o raio desta esfera.

4.12. Determine uma equação da esfera de raio 5 tangente aos três planos do sistema de coordenadas e situada no primeiro octante (região do espaço onde $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$).

4.13. Determine uma equação da esfera de centro na origem, sabendo que sua interseção com um plano paralelo ao plano xy e distante duas unidades da origem é uma circunferência de raio 3.

4.14. a) Mostre que toda esfera tem uma equação da forma
$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0. \qquad \text{(I)}$$
b) Dê exemplo de uma equação da forma (I) cujo gráfico não é uma esfera.
c) Dê condições necessárias e suficientes sobre os coeficientes a, b, c, e d para que a Equação (I) tenha como gráfico uma esfera.

4.15. Verifique que quaisquer que sejam os valores de θ e ϕ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$, o ponto
$$(r \operatorname{sen} \phi \cos \theta,\ r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,\ r \cos \phi)$$
pertence à esfera de raio r e centro na origem.

4.16. Determine t para que o ponto
$$(t, t + 1, t + 2)$$
pertença à esfera de centro $(0, 1, 2)$ e raio $\sqrt{12}$.

4.4 VETORES NO ESPAÇO

No Capítulo 2, definimos um vetor no plano como sendo um par ordenado de números reais. Esta definição foi motivada pelo fato de que a cada par (x, y) podemos fazer corresponder uma seta. Fato semelhante também se verifica no espaço. Como podemos ver na Figura 4.7, à terna (x, y, z) podemos fazer corresponder a seta de O a P.

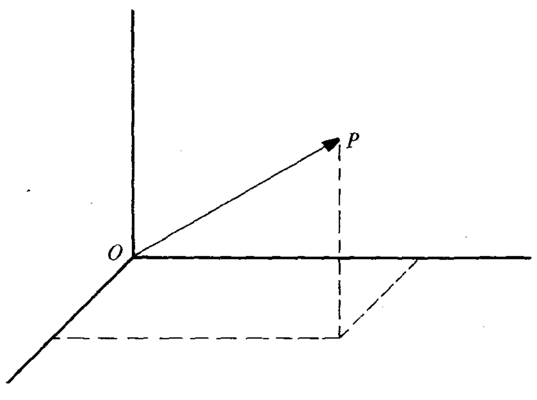


Fig. 4.7

Definimos um **vetor no espaço** como sendo uma terna ordenada de números reais (x, y, z) e interpretamos a seta OP como sendo sua representação gráfica. Indicaremos o conjunto dos vetores do espaço por $\mathbf{R}^3$.

O vetor

$$O = (0, 0, 0)$$

é o vetor nulo do espaço. Sua representação gráfica é a origem do sistema de coordenadas. Ainda como acontece no plano, em alguns casos, é mais conveniente indicar um vetor por uma seta que não parte necessariamente da origem. Um exemplo desta situação é o vetor

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

definido pelos pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, cuja representação mais natural é a indicada na Figura 4.8.

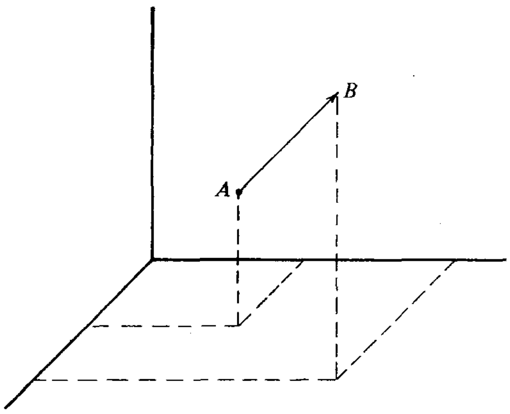


Fig. 4.8

O número

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

é chamado o **módulo** do vetor $v = (x, y, z)$ e é indicado por $\|v\|$. Observe que o módulo de um vetor é igual ao comprimento da seta que o representa.

Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ vetores e k um número real. Então,

$$u + v, \quad ku, \quad u \cdot v,$$

respectivamente, a soma de vetores, o produto de um número por um vetor e o produto escalar de dois vetores, são definidos como segue:

$$u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

$$ku = k(x_1, y_1, z_1) = (kx_1, ky_1, kz_1),$$
$$u \,.\, v = (x_1, y_1, z_1) \,.\, (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Como se vê, estas definições são análogas às suas correspondentes para vetores no plano. Todas as propriedades enunciadas no Capítulo 2, para estas operações, continuam válidas aqui. Confiamos ao leitor a verificação desta afirmação. Ressaltamos, de maneira especial, a validade da desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores no espaço, isto é, tem-se

$$|u \,.\, v| \leq \|u\| \, \|v\|,$$

quaisquer que sejam os vetores u e v do espaço (veja a Proposição 2.2).

Como fizemos no plano, aproveitamos esta propriedade para definir ângulo entre dois vetores, a saber:

se u *e* v *são vetores não-nulos do espaço, o único ângulo* θ *(medido em radianos) tal que*

a) $0 \leq \theta \leq \pi$

b) $\cos \theta = \dfrac{u.v}{\|u\| \, \|v\|}$

é chamado o **ângulo entre os vetores** u *e* v.

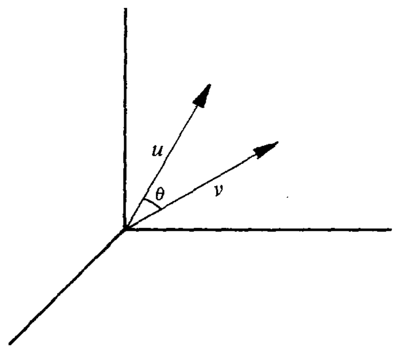


Fig. 4.9

Um exercício, que esperamos que o leitor faça, é provar que o ângulo entre os vetores u e v, definido acima, é exatamente o mostrado na Figura 4.9.

Se o ângulo entre os vetores u e v for $\pi/2$ radianos, dizemos que u e v são perpendiculares entre si. Da fórmula

$$\cos \theta = \frac{u.v}{\|u\| \, \|v\|}$$

deduzimos que

$$u \text{ e } v \textit{ são perpendiculares se, e somente se, } u \cdot v = 0.$$

4.5 PRODUTO VETORIAL

Nesta seção, nosso objetivo é determinar um vetor $w = (x, y, z)$ que seja simultaneamente perpendicular a dois vetores dados, $u = (a, b, c)$ e $v = (a_1, b_1, c_1)$. Logo, devemos ter $u \cdot w = 0$ e $v \cdot w = 0$, o que nos leva ao sistema

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema admite uma infinidade de soluções. Uma delas é

$$\begin{aligned} x &= bc_1 - b_1c \\ y &= a_1c - ac_1 \\ z &= ab_1 - a_1b, \end{aligned}$$

como pode ser verificado por substituição. Portanto, o vetor

$$w = (bc_1 - b_1c,\ a_1c - ac_1,\ ab_1 - a_1b)$$

é simultaneamente perpendicular a $u = (a, b, c)$ e $v = (a_1, b_1, c_1)$. Veja a Figura 4.10.

O vetor w é chamado ***produto vetorial*** de u por v e indicado por $u \times v$.

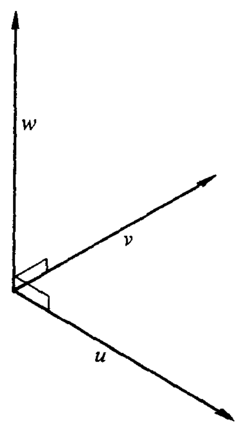


Fig. 4.10

A seguir, daremos um método para se calcular o produto vetorial de $u = (a, b, c)$ por $v = (a_1, b_1, c_1)$, sem o esforço de memória que a fórmula

$$u \times v = (bc_1 - b_1c,\ a_1c - ac_1,\ ab_1 - a_1b)$$

exige. Primeiro notamos que, se

$$\begin{aligned} i &= (1, 0, 0) \\ j &= (0, 1, 0) \\ k &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

então

$$(x, y, z) = xi + yj + zk.$$

Agora consideremos

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

como se fosse um determinante de terceira ordem sobre o conjunto dos números reais. Se resolvermos este determinante segundo os elementos da primeira linha, obtemos

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = (bc_1 - cb_1)i - (ac_1 - a_1c)j + (ab_1 - ba_1)k = (bc_1 - b_1c, a_1c - ac_1, ab_1 - a_1b) = u \times v$$

Exemplo. Se $u = (-1, 2, 4)$ e $v = (1, 3, 5)$, usando o método apresentado acima, temos

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2i + 9j - 5k = (-2, 9, -5).$$

Portanto, $u \times v = (-2, 9, -5)$.

Como se pode verificar, a partir da definição, o produto vetorial não é comutativo. De fato, se $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$, temos

$$\begin{aligned} u \times v &= (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1) \\ v \times u &= (b_2c_1 - b_1c_2, a_1c_2 - a_2c_1, a_2b_1 - a_1b_2), \end{aligned}$$

de modo que

$$u \times v = -v \times u.$$

Observe, todavia, que tanto o vetor $u \times v$ quanto o vetor $v \times u$ são, simultaneamente, perpendiculares a u e v. Veja a Figura 4.11*a*. Nas aplicações, identificamos o sentido de $u \times v$ como sendo aquele que um saca-rolha avança quando sua extremidade é colocada na origem comum de u e v e ele é girado no sentido de u para v (Figura 4.11*b*).

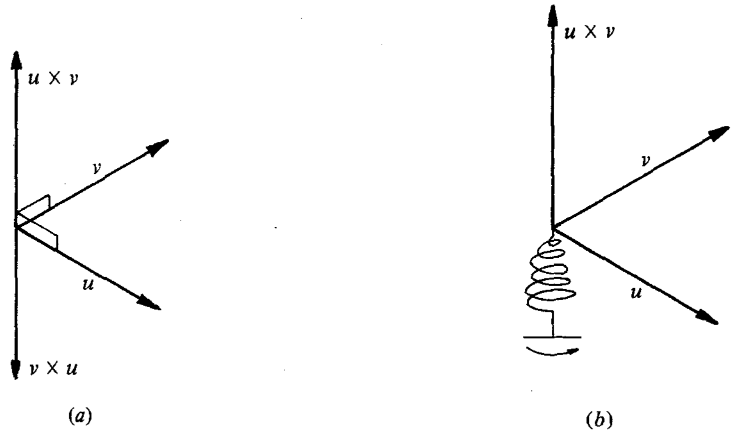


Fig. 4.11

Relativamente à adição, a operação produto vetorial é distributiva tanto à direita quanto à esquerda, isto é, tem-se

$$(u + v) \times w = u \times w + v \times w$$
$$w \times (u + v) = w \times u + w \times v,$$

quaisquer que sejam os vetores u, v e w de $\mathbf{R}^3$.

A multiplicação de um vetor por um escalar satisfaz

$$(ky) \times v = u \times (kv) = k(u \times v),$$

quaisquer que sejam os vetores u e v e o número k.

A propriedade associativa não se verifica para o produto vetorial. Pode-se mostrar que

$$u \times (v \times w) = (w \,.\, u)v - (u \,.\, v)w$$
$$(u \times v) \times w = (w \,.\, u)v - (w \,.\, v)u,$$

de modo que, em geral,

$$u \times (v \times w) \neq (u \times v) \times w.$$

Para se demonstrar as propriedades enunciadas anteriormente, é suficiente colocar coordenadas genéricas para u, v e w, realizar as contas indicadas em cada membro da igualdade e comparar os resultados. A título de exemplo, vamos provar que

$$w \times (u + v) = w \times u + w \times v.$$

Sejam $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$ e $w = (a, b, c)$. Então,

$$u + v = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2).$$

Usando a definição de produto vetorial, temos

$$w \times (u + v) = ((b(c_1 + c_2) - c(b_1 + b_2), c(a_1 + a_2) - a(c_1 + c_2), a(b_1 + b_2) - b(a_1 + a_2)) =$$
$$(bc_1 + bc_2 - b_1c - b_2c, a_1c + a_2c - ac_1 - ac_2, ab_1 + ab_2 - a_1b - a_2b). \quad \text{(I)}$$

Por outro lado, como

$$w \times u = (bc_1 - cb_1, a_1c - ac_1, ab_1 - a_1b)$$
$$w \times v = (bc_2 - b_2c, a_2c - ac_2, ab_2 - a_2b),$$

temos

$$w \times u + w \times v = (bc_1 + bc_2 - b_1c - b_2c, a_1c + a_2c - ac_1 - ac_2, ab_1 + ab_2 - a_1b - a_2b). \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), obtemos

$$w \times (u + v) = w \times u + w \times v.$$

Na demonstração da proposição seguinte utilizaremos a igualdade

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2,$$

cuja prova pode ser obtida escrevendo-se as expressões de

$$\|u \times v\|^2 \text{ e de } \|u\| \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$$

em termos das coordenadas de u e v e, em seguida, verificando-se a igualdade.

Proposição 4.1. *Quaisquer que sejam os vetores não-nulos* u *e* v *de* $\mathbf{R}^3$, *tem-se*

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta,$$

onde θ *é o ângulo entre* u e v.

Prova.

$$\begin{aligned} \|u \times v\|^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta. \end{aligned}$$

De

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta,$$

temos

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta.$$

Na Figura 4.12 representamos o paralelogramo definido pelos vetores u e v, isto é, o paralelogramo cujos lados são as setas que representam u e v.

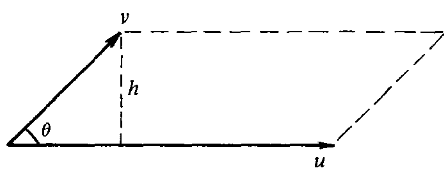


Fig. 4.12

A área deste paralelogramo, como se aprende em Geometria Elementar, é dada por

Área = base × altura.

No caso, a base é $\|u\|$ e a altura h é

$$h = \|v\| \operatorname{sen} \theta.$$

Logo, a área A é

$$A = \|u\|\,\|v\| \operatorname{sen} \theta = \|u \times v\|.$$

Assim, o vetor $u \times v$ é tal que seu módulo é numericamente igual à área do paralelogramo definido por u e v.

Exemplo. Calcule a área do triângulo cujos vértices são $A(3, 2, 1)$, $B(0, -2, 4)$ e $C(4, 1, 2)$.

Solução. A partir do triângulo ABC podemos construir o paralelogramo $ABDC$ (veja a Figura 4.13). A área do paralelogramo $ABDC$, que é o dobro da área do triângulo ABC, é dada por $\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$. Logo, a área do triângulo ABC é

$$A = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|.$$

Como $\vec{AB} = (-3, -4, 3)$ e $\vec{AC} = (1, -1, 1)$, efetuando o produto vetorial, encontramos

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-1, 6, 7).$$

Daí

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{86} \text{ e a área do triângulo é } \frac{\sqrt{86}}{2}.$$

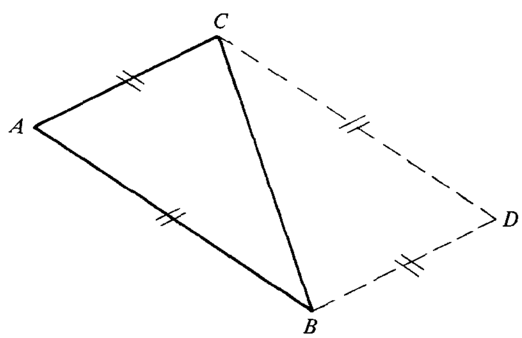


Fig. 4.13

4.6 PRODUTO MISTO

O número

$$(u \times v) \cdot w,$$

onde u, v e w pertencem ao $\mathbf{R}^3$, é chamado **produto misto** dos vetores u, v e w. Se $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$ e $w = (a_3, b_3, c_3)$, o produto misto de u, v e w é dado por

$$(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

De fato, aplicando a definição de produto vetorial, obtemos

$$u \times v = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Logo,

$$(u \times v) \cdot w = (b_1c_2 - b_2c_1)a_3 + (a_2c_1 - a_1c_2)b_3 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3.$$

O segundo membro desta expressão é igual ao determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

pois é o seu desenvolvimento segundo os elementos da terceira linha.

Várias propriedades do produto misto podem ser deduzidas a partir das propriedades do determinante de terceira ordem. Por exemplo, quando se permutam duas linhas de um determinante, este apenas muda de sinal. Logo, fazendo-se duas permutações, o determinante não se altera e, portanto, temos

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Desta igualdade deduzimos a seguinte propriedade do produto misto

$$(u \times v) \cdot w = (v \times w) \cdot u.$$

Lembrando que o produto escalar é comutativo, podemos ainda escrever

$$(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w),$$

de modo que no produto misto podemos permutar os sinais . e $\times$.

Na Figura 4.14 vê-se o paralelepípedo definido pelos vetores u, v e w. A base deste paralelepípedo é o paralelogramo definido pelos vetores u e v, cuja área é

$$\|u \times v\|.$$

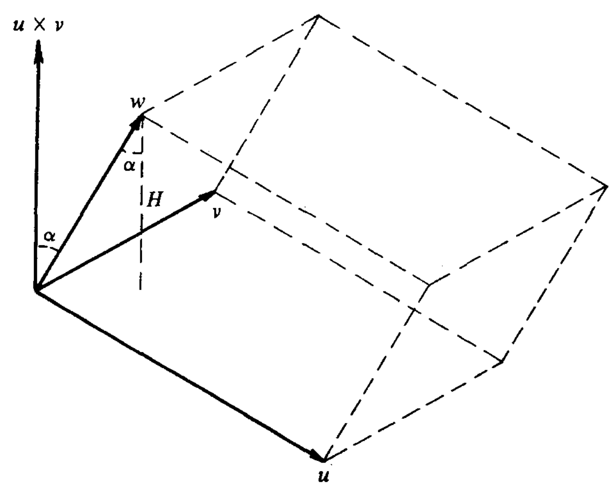


Fig. 4.14

A altura H é dada por

$$H = \|w\| \, |\cos\alpha| = \|w\| \left| \frac{(u \times v) \cdot w}{\|u \times v\| \, \|w\|} \right| = \frac{|(u \times v) \cdot w|}{\|u \times v\|}.$$

Como o volume do paralelepípedo, por definição, é

$$V = \text{área da base} \times \text{altura},$$

segue-se que

$$V = \|u \times v\| . \frac{|(u \times v) \cdot w|}{\|u \times v\|} = |(u \times v) \cdot w|.$$

Portanto, o módulo do produto misto dos vetores u, v e w é igual ao volume do paralelepípedo definido por estes vetores.

Exemplo. O produto misto de $u = (3, 5, 7)$, $v = (2, 0, -1)$ e $w = (0, 1, 3)$ é

$$(u \times v) . w = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -13.$$

O volume do paralelepípedo definido pelos vetores u, v e w é $|(u \times v) \,.\, w| = 13$.

Exercícios

4.17. Dados os vetores

$$u = (2, -3, 1),\ v = (2, 2, 0) \text{ e } w = (1, -3, 4).$$

Calcule:

a) $u \,.\, v$ e $v \,.\, u$;

b) $u \times v$ e $v \times u$;

c) $(u \times v) \,.\, w$ e $v \,.\, (v \times w)$;

d) $(u \times v) \times w$ e $u \times (v \times w)$;

e) $(u \times v) \times (u \times w)$;

f) $(u + v) \times (u + w)$;

g) o ângulo entre u e v.

4.18. Calcule a área do triângulo cujos vértices são:

a) $A(0, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$ e $C(0, 0, 5)$;

b) $A(2, -1, 1)$, $B(2, 1, -1)$ e $C(0, 3, -5)$.

4.19. Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $u = (2, 3, 1)$ e $v = (1, 5, -3)$.

4.20. Calcule o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $u = (2, -1, 1)$, $v = (1, 3, 2)$ e $w = (-1, 4, -3)$.

4.21. Sejam $u = (1, 1, 0)$, $v = (2, 0, 1)$, $w_1 = 3u - 2v$, $w_2 = u + 3v$ e $w_3 = i + j - 2k$. Determine o volume do paralelepípedo definido por w_1, w_2 e w_3.

4.22. Mostre que qualquer que seja o valor de a, o módulo do vetor $(1 - a, 1, a - 2)$ é igual à área do paralelogramo definido pelos vetores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, a, 1)$.

4.23. Sejam $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$. Mostre que

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j.$$

4.24. De um vértice de um cubo traçam-se uma diagonal do cubo e uma diagonal de uma face.

a) Calcule o ângulo entre as duas diagonais.

b) Calcule a área do triângulo definido por estas diagonais e uma aresta do cubo.

4.25. Determine os ângulos agudos que a reta definida pelos pontos $A(1, -3, 2)$ e $B(3, -9, 6)$ faz com os eixos do sistema de coordenadas.

4.26. Sejam $u = (2, 1, -3)$ e $v = (1, -2, 1)$.

a) Determine um vetor unitário simultaneamente perpendicular a u e v.

b) Determine um vetor w perpendicular a u e v e tal que $\|w\| = 5$.

4.27. Mostre que se u e v são vetores de direções diferentes e x, y, x_1 e y_1 são números tais que

$$xu + yv = x_1u + y_1v,$$

então $x = x_1$ e $y = y_1$.

4.28. Os ângulos α, β e γ que o vetor não-nulo $u = (x, y, z)$ faz, respectivamente, com os vetores

$$i = (1, 0, 0),\ j = (0, 1, 0) \text{ e } k = (0, 0, 1)$$

(veja a Figura 4.15) são chamados ***ângulos diretores*** do vetor u. Mostre que

a) $\cos\alpha = \dfrac{x}{\|u\|}, \cos\beta = \dfrac{y}{\|u\|}, \cos\gamma = \dfrac{z}{\|u\|}$;

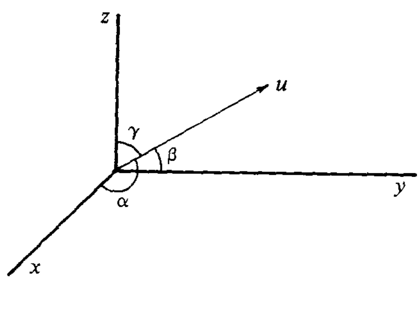


Fig. 4.15

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

4.29. Verifique que

a) $u \,.\, (v \times w) = -u \,.\, (w \times v)$;

b) $u \,.\, (u \times v) = 0$.

4.30. Sejam u e v vetores unitários e perpendiculares entre si. Demonstre que $\|u \times v\| = 1$.

4.31. Seja u um vetor perpendicular a v e w. Sabendo que v e w formam um ângulo de 30° e que $\|u\| = 6$, $\|v\| = 3$ e $\|w\| = 3$, calcule $u \,.\, (v \times w)$.

4.33. Seja α o plano gerado pelos vetores u e v, isto é, α é o conjunto dos pontos P de $\mathbf{R}^3$ tais que

$$\vec{OP} = xu + yv, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Mostre que, se u e v são unitários e perpendiculares, a projeção ortogonal de um vetor w de $\mathbf{R}^3$ sobre o plano α é dada por

$$w' = (w \,.\, u)u + (w \,.\, v)v.$$

4.34. Determine a projeção do vetor $w = (2, -1, 3)$ sobre o plano

a) yz;

b) definido pelos pontos $O(0, 0, 0)$, $A(2, 3, -1)$ e $B(-3, 2, 0)$.

4.35. Sejam $ABCD$ e $ACEF$ dois paralelogramos tais que $\vec{AF} = \vec{BD}$ (os lados de $ACEF$ são as diagonais de $ABCD$). Que relação existe entre as áreas destes dois paralelogramos?

4.7 EQUAÇÃO DO PLANO

Sejam $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do espaço e $v = (a, b, c)$ um vetor não-nulo. Passando por A, existe um único plano α perpendicular ao vetor v (veja a Figura 4.16). Isto significa que, qualquer que seja o ponto $P(x, y, z)$ de α, o vetor $\vec{AP}$ é perpendicular a v. Ou seja, o ponto P pertence a α se, e somente se,

$$\vec{AP} \,.\, v = 0.$$

Como $\vec{AP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, temos

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \tag{I}$$

que é a ***equação cartesiana do plano*** α.

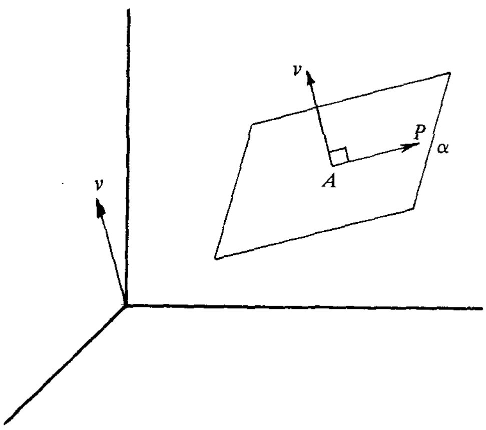


Fig. 4.16

Exemplo. Equação do plano que contém o ponto $A(3, 0, -4)$ e é perpendicular ao vetor $v = (5, 6, 2)$.

Solução. Sendo v perpendicular ao plano, segue que

$$v \cdot \vec{AP} = 0,$$

qualquer que seja o ponto $P(x, y, z)$ do plano. Portanto,

$$(5, 6, 2) \cdot (x - 3, y - 0, z + 4) = 0 \quad \text{ou} \quad 5x + 6y + 2z = 7,$$

que é a equação do plano.

Exemplo. Equação do plano definido pelos pontos

$$A(3, 1, -2), B(5, 2, 1) \text{ e } C(2, 0, 2).$$

Solução. Conforme vimos na dedução da Equação (I), para escrevermos a equação de um plano necessitamos de um ponto do plano e de um vetor perpendicular ao plano. Como mostra a Figura 4.17, o vetor $\vec{AB} \times \vec{AC} = (7, -11, -1)$ é perpendicular ao plano definido por A, B e C.

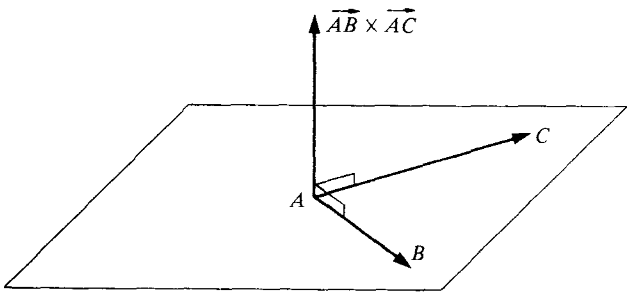


Fig. 4.17

Portanto, uma equação deste plano é

$$7(x - 3) - 11(y - 1) - 1(z + 2) = 0, \quad \text{ou} \quad 7x - 11y - z = 12.$$

Na dedução dessa equação utilizamos o ponto A como origem dos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. Se utilizarmos o ponto B ou C, vamos encontrar a mesma equação.

Exemplo. Equação do plano mediador do segmento AB, dados $A(1, 3, -2)$ e $B(3, 5, 4)$.

Solução. O ***plano mediador*** de AB é o plano perpendicular a AB e que contém o seu ponto médio. Um vetor perpendicular a este plano é $\vec{AB} = (2, 2, 6)$ e um ponto do plano é o próprio ponto médio de AB, a saber $(2, 4, 1)$. Logo, a equação procurada é

$$2(x - 2) + 2(y - 4) + 6(z - 1) = 0 \quad \text{ou} \quad x + y + 3z = 9.$$

Como vimos nos exemplos anteriores, é comum efetuar as operações indicadas na Equação (I) e apresentá-la na forma

$$ax + by + cz = d, \tag{II}$$

onde

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

Observe que o vetor (a, b, c), cujas coordenadas são os coeficientes das variáveis x, y e z, é perpendicular ao plano cuja equação é (II) e que a constante d depende somente de a, b e c e de um ponto conhecido (x_0, y_0, z_0) do plano. Assim, para se escrever a equação cartesiana de um plano, é necessário e suficiente conhecer um ponto deste plano e um vetor perpendicular a ele.

Exemplo. Interseção do plano α de equação

$$2x + 3y + z = 6$$

com os eixos do sistema de coordenadas.

Solução. Como todo ponto do eixo x é da forma $(x, 0, 0)$, basta fazer, na equação dada, $y = 0$ e $z = 0$, e calcular o correspondente valor de x. O ponto é $(3, 0, 0)$. Usando um argumento semelhante encontramos os pontos $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 6)$ que são, respectivamente, as interseções com os eixos y e z. O plano α pode ser representado pelo triângulo cujos vértices são as interseções com os eixos. Veja a Figura 4.18.

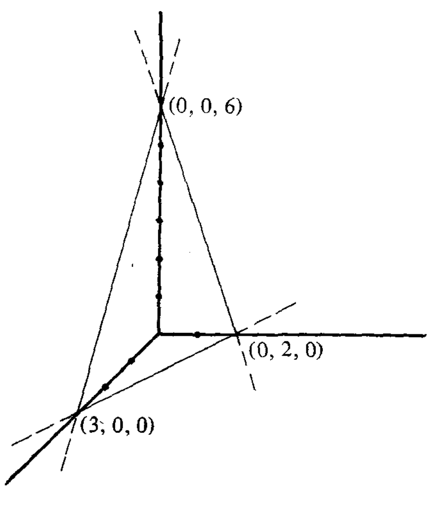


Fig. 4.18

Exemplo. A Figura 4.19 mostra um esboço do plano cuja equação é

$$2x + 4y = 8.$$

Este plano é paralelo ao eixo z, pois nenhum ponto da forma $(0, 0, z)$ satisfaz sua equação. Suas interseções com os eixos x e y são, respectivamente $(4, 0, 0)$ e $(0, 2, 0)$. Observe que um vetor perpendicular a este plano é $(2, 4, 0)$, pois sua equação pode ser escrita na forma

$$2x + 4y + 0z = 8.$$

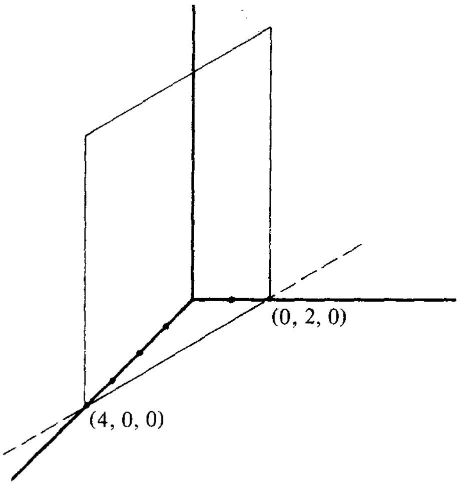


Fig. 4.19

Em geral, as equações da forma

$$ax + by = d$$

são equações de planos paralelos ao eixo z. Os planos paralelos ao eixo y têm equações da forma

$$ax + cz = d,$$

e os planos paralelos ao eixo x têm equações da forma

$$by + cz = d.$$

Exemplo. A equação

$$y = 2$$

pode ser reescrita assim

$$0(x - 0) + 1 \,.\, (y - 2) + 0(z - 0) = 0. \qquad (1)$$

Comparando (1) com a Equação (I), concluímos que $y = 2$ é a equação de um plano que contém o ponto $(0, 2, 0)$ e é perpendicular ao vetor $(0, 1, 0)$. Como o vetor $(0, 1, 0)$ é perpendicular ao plano xz, segue-se que $y = 2$ é a equação de um plano paralelo a xz. Veja a Figura 4.20.

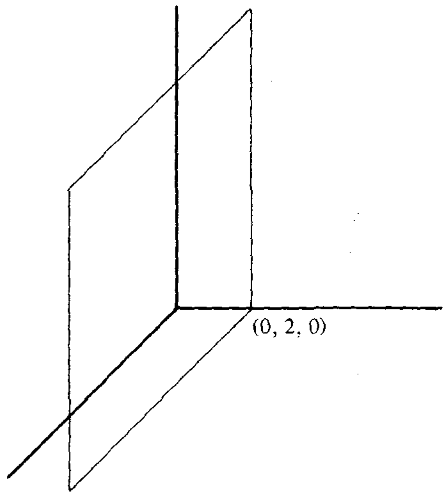


Fig. 4.20

Em geral, os planos cujas equações são da forma

$$y = k,$$

são paralelos a xz. Pode-se deduzir também que $x = k$ e $z = k$ são equações de planos, respectivamente, paralelos aos planos yz e xy.

Exemplo. Sejam u e v vetores de direções diferentes e A um ponto do espaço. Sejam r_1 e r_2 as retas que contêm A e são, respectivamente, paralelas a u e v. Se α é o plano definido por r_1 e r_2 (veja a Figura 4.21*a*), então

a) um ponto P pertence a α se, e somente se, existem números s e t tais que

$$\vec{AP} = su + tv;$$

b) $u \times v$ é perpendicular a α.

Solução. Consideremos um ponto P e por ele tracemos as retas r'_1 e r'_2, respectivamente, paralelas a r_1 e r_2(Figura 4.21*b*). P pertence a α se, e somente se, as retas r_1 e r'_2 e r_2 e r'_1 forem concorrentes. Sejam P_1 a interseção de r_1 com r'_2 e P_2 a interseção de r_2 com r'_1. Aplicando a regra do paralelogramo em AP_1PP_2, obtemos

$$\vec{AP} = \vec{AP_1} + \vec{AP_2}.$$

Como u e $\vec{AP_1}$ têm a mesma direção, existe um número s tal que

$$\vec{AP_1} = su.$$

Da mesma forma, como v e $\vec{AP_2}$ têm a mesma direção, existe um número t tal que

$$\vec{AP_2} = tv.$$

Logo,

$$\vec{AP} = \vec{AP_1} + \vec{AP_2} = su + tv.$$

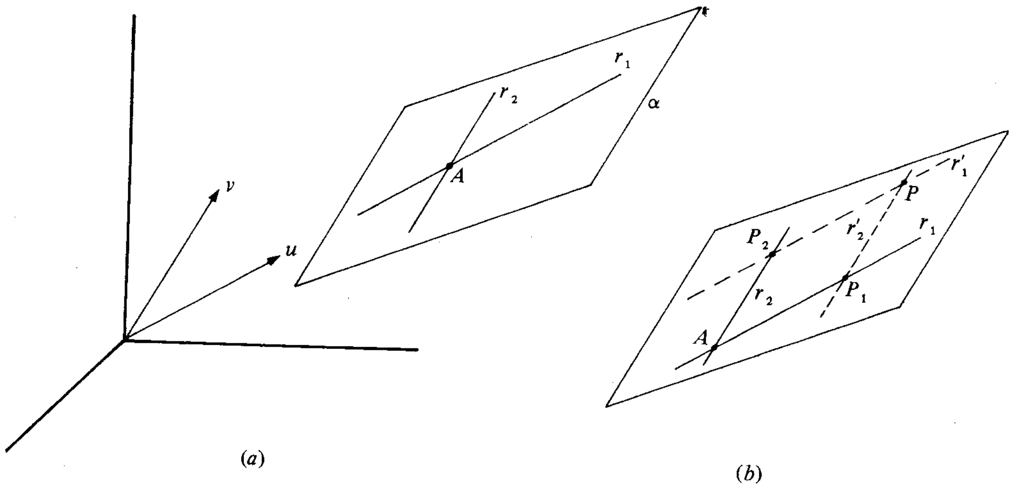


Fig. 4.21

Parte (b). Basta mostrarmos que

$$(u \times v) \,.\, \vec{AP} = 0,$$

qualquer que seja P pertencente a α. Como

$$\vec{AP} = su + tv,$$

temos

$$\begin{aligned}(u \times v) \,.\, \vec{AP} &= (u \times v) \,.\, (su + tv)\\ &= s(u \times v) \,.\, u + t(u \times v) \,.\, v\\ &= 0\end{aligned}$$

4.8 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO PLANO

Dizemos que um plano α é paralelo a um vetor u se existe em α uma reta com a direção de u. Sejam $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$ vetores com direções diferentes. Conforme vimos no exemplo anterior, um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao plano que contém $A(x_0, y_0, z_0)$ e é paralelo aos vetores u e v se, e somente se, existem números s e t tais que

$$\vec{AP} = su + tv.$$

Escrevendo esta igualdade em função das coordenadas de A, P, u e v, obtemos

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2).$$

ou

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y &= y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z &= z_0 + c_1 s + c_2 t, \end{aligned}$$

que são chamadas ***equações paramétricas*** do plano.

Exemplo. Equações paramétricas e cartesiana do plano que contém o ponto $A(2, 3, -1)$ e é paralelo aos vetores $u = (3, 4, 2)$ e $v = (2, -2, 6)$.

Solução. Equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3s + 2t \\ y &= 3 + 4s - 2t \\ z &= -1 + 2s + 6t. \end{aligned}$$

Equação cartesiana. Como $u \times v = (28, -14, -14)$ é um vetor perpendicular ao plano, a equação procurada é

$$28(x - 2) - 14(y - 3) - 14(z + 1) = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - y - z = 2.$$

4.9 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Seja r a reta que contém o ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $v = (a, b, c)$ (Figura 4.22). Um ponto $P(x, y, z)$ pertence à reta r se, e somente se,

$$\vec{AP} = tv,$$

onde t é um número real. Em termos de coordenadas, temos

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c),$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= x_0 + ct, \end{aligned}$$

que são chamadas ***equações paramétricas*** da reta r.

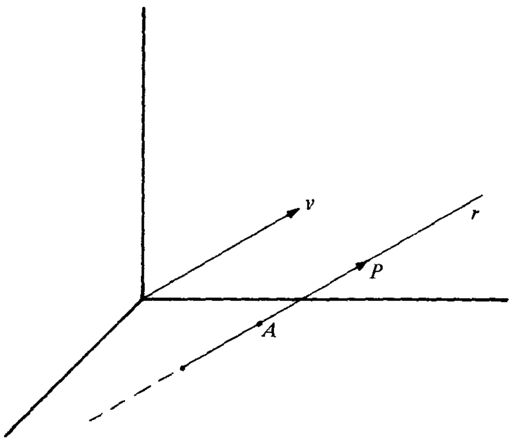


Fig. 4.22

Exemplo. As equações paramétricas da reta que contém o ponto $A(2, 1, -3)$ e é paralela ao vetor $v = (3, -2, 2)$ são

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -3 + 2t. \end{aligned}$$

Para se obter um ponto desta reta basta atribuir a t um valor particular. Por exemplo, para $t = 2$, temos

$$\begin{aligned} x &= 8 \\ y &= -3 \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, $(8, -3, 1)$ é um ponto da reta. O ponto $A(2, 1, -3)$ pode ser obtido atribuindo-se a t o valor zero. Já o ponto $(2, 3, 5)$ não pertence à reta, pois para nenhum valor de t se tem

$$\begin{aligned} 2 &= 2 + 3t \\ 3 &= 1 - 2t \\ 5 &= -3 + 2t, \end{aligned}$$

visto que o valor de t, que satisfaz a primeira equação, isto é, $t = 0$, não satisfaz as duas últimas.

Exemplo. *Reta Definida por dois Pontos.* Já sabemos que para se escrever as equações paramétricas de uma reta, é necessário e suficiente conhecer um ponto da reta e um vetor a ela paralelo. No caso de a reta ser definida por dois pontos, digamos $A(1, 1, 0)$ e $B(2, 3, 5)$, um vetor paralelo é

$$\vec{AB} = (1, 2, 5).$$

O ponto da reta pode ser escolhido como sendo A ou B. Escolhendo o ponto $A(1, 1, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= 0 + 5t. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Escolhendo o ponto $B(2, 3, 5)$, obtemos

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 5 + 5t. \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Tanto o sistema (I) quanto o (II) são formados pelas equações paramétricas da reta definida pelos pontos A e B. Embora eles sejam diferentes, são equivalentes no sentido que, em se atribuindo valores a t, obtemos pontos da mesma reta. Por exemplo, atribuindo a t o valor 1, no sistema (I), obtemos o ponto $P_1(2, 3, 5)$ e no sistema (II), obtemos o ponto $P'_1(3, 5, 10)$. Esses dois pontos pertencem à reta definida por A e B. Observe que o ponto P_1 pode ser obtido do sistema (II), atribuindo-se a t o valor zero; e o ponto P'_1 pode ser obtido do sistema (I), atribuindo-se a t o valor 2.

Exemplo. Determine o centro e o raio da circunferência, interseção do plano $2x + y + 2z = 5$ com a esfera $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$.

Solução. O centro da esfera é o ponto $O(1, 2, -1)$. Seja $C(x_0, y_0, z_0)$ o centro da circunferência. Então,

$$\vec{OC} = (x_0 - 1, y_0 - 2, z_0 + 1) = t(2, 1, 2),$$

onde t é algum número real, pois os vetores $(2, 1, 2)$ e $\vec{OC}$ têm a mesma direção, por serem ambos perpendiculares ao plano $2x + y + 2z = 5$.

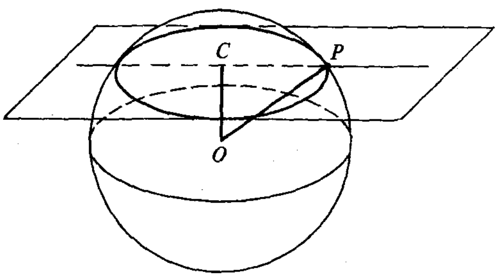


Fig. 4.23

Logo,

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 + 2t \\ y_0 &= 2 + t \\ z_0 &= -1 + 2t. \end{aligned}$$

Sendo $C(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do plano, podemos substituí-lo em sua equação. Isto nos dá

$$2(1 + 2t) + 2 + t + 2(-1 + 2t) = 5.$$

Logo,

$$t = \frac{1}{3}.$$

Portanto, as coordenadas do centro são

$$x_0 = 1 + 2.\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$y_0 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$z_0 = -1 + 2.\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Para calcularmos o raio r da circunferência, aplicamos o teorema de Pitágoras ao triângulo OCP da Figura 4.23. Neste triângulo, a hipotenusa é o raio da esfera e, portanto, igual a 2. Como

$$\overline{OC} = d(0, C) = 1,$$

temos

$$r^2 = 4 - 1 = 3 \text{ e } r = \sqrt{3}.$$

Exercícios

4.36. Escreva uma equação do plano que contém o ponto (1, 1, 1) e é perpendicular ao vetor (2, -1, 8).

4.37. Escreva uma equação do plano definido pelos pontos
- a) $A(2, -1, 3)$, $B(0, 2, 1)$ e $C(1, 3, 2)$;
- b) $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 0)$ e $C(1, 0, 0)$;
- c) $A(0, 0, 2)$, $B(1, 2, 2)$ e $C(1, 0, 2)$.

4.38. Escreva uma equação do plano definido pelo ponto (2, 1, 3) e a interseção do plano $2x - y - z = 2$ com o plano xy.

4.39. Escreva uma equação do plano
- a) paralelo ao eixo z e que contém os pontos (2, 0, 0) e (0, 3, 2);
- b) paralelo ao eixo y e que contém os pontos (2, 1, 0) e (0, 2, 1);
- c) paralelo ao plano yz e que contém o ponto (3, 4, -1);
- d) perpendicular ao eixo z e que contém o ponto (1, 1, 1).

4.40. Determine uma equação do plano cujas interseções com os eixos do sistema de coordenadas são os pontos (3, 0, 0), (0, -2, 0) e (0, 0, -3).

4.41. Deduza uma equação do plano definido pelo eixo z e pelo ponto (4, 4, 1).

4.42. Escreva as equações paramétricas da reta definida pelos pontos
- a) $A(2, 1, 3)$ e $B(1, 3, 7)$;
- b) $A(0, 0, 0)$ e $B(0, 5, 0)$;
- c) $A(1, 1, 0)$ e $B(2, 2, 0)$.

4.43. Escreva as equações paramétricas da reta que contém o ponto $A(2, 1, 0)$ e é perpendicular ao plano $2x - y + z = 0$.

4.44. Dados $A(2, 3, 6)$ e $B(4, 1, -2)$, escreva uma equação do plano mediador do segmento AB.

4.45. Determine o lugar geométrico dos pontos do espaço eqüidistantes de $A(2, 1, 3)$, $B(2, 0, 3)$ e $C(0, 3, -1)$.

4.46. Deduza as equações dos planos bissetores dos ângulos formados pelos planos xz e yz.

4.47. Escreva uma equação do plano tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, no ponto $P(1, 2, -1)$.

4.48. Dados a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e os pontos $P(1, 1, 1)$ e $Q(2, 2, 3)$,
a) verifique que P está no interior e que Q está no exterior da esfera;
b) determine as interseções da esfera com a reta definida pelos pontos P e Q.

4.49. a) Verifique que o ponto $A(2, 4, 1)$ pertence à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 21$.
b) Determine o ponto B tal que AB seja um diâmetro desta esfera.

4.50. Dados $A(2, 1, 3)$, $B(4, 1, 1)$ e $C(0, 0, 0)$, escreva as equações paramétricas da reta que contém a mediana, relativa ao lado AB, do triângulo ABC.

4.10 INTERSEÇÃO DE PLANOS

Exemplo. Interseção dos planos $2x + 3y + z = 1$ e $x - 2y + 3z = 0$.

Solução. Sabemos que a interseção de dois planos é uma reta. Para escrevermos as equações paramétricas desta reta, necessitamos conhecer dois de seus pontos ou um de seus pontos e um vetor a ela paralelo. Um ponto da interseção é um ponto que satisfaz simultaneamente as equações dos dois planos, isto é, é uma solução do sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x - 2y + 3z &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(s)}$$

Em termos de z, a solução do sistema (s) é

$$x = \frac{2}{7} - \frac{11}{7}z$$
$$y = \frac{1}{7} + \frac{5}{7}z.$$

Portanto, os pontos da interseção são da forma

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{7} - \frac{11}{7}z, \frac{1}{7} + \frac{5}{7}z, z\right). \qquad (1)$$

Atribuindo valores a z, encontramos soluções particulares do sistema (s) e, portanto, pontos da interseção dos planos dados. Por exemplo, para $z = 0$ temos o ponto $P_0(2/7, 1/7, 0)$ e para $z = 1$, o ponto $P_1(-9/7, 6/7, 1)$. Logo, a interseção dos planos dados é a reta definida pelos pontos P_0 e P_1. Suas equações paramétricas são

$$x = \frac{2}{7} - \frac{11t}{7}$$
$$y = \frac{1}{7} + \frac{5t}{7}$$
$$z = 0 + t.$$

Observe que estas equações podem ser obtidas diretamente de (1) fazendo-se $z = t$.

4.11 INTERSEÇÃO DE RETAS E PLANOS

Exemplo. Determine a interseção da reta

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= 2 + 3t \end{aligned}$$

com o plano $x - 4y + z = -2$.

Solução. Dizer que um ponto $I(x, y, z)$ pertence à interseção da reta com o plano dado significa que ele satisfaz simultaneamente as equações

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= 2 + 3t \\ x - 4y &+ z + 2 = 0. \end{aligned}$$

Substituindo as três primeiras equações do sistema na última, obtemos

$$3 - 2t - 4(1 + t) + 2 + 3t + 2 = 0,$$

e daí

$$t = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2 \,.\, 1 = 1 \\ y &= 1 + 1 = 2 \\ z &= 2 + 3 \,.\, 1 = 5. \end{aligned}$$

Portanto, $I(1, 2, 5)$ é o ponto de interseção.

Pode acontecer que o sistema formado pelas equações paramétricas da reta e a equação do plano não tenha solução. Neste caso, a reta é paralela ao plano. Quando o sistema admite infinitas soluções, a reta está contida no plano.

4.12 INTERSEÇÃO DE RETAS

Duas retas no espaço podem ser concorrentes, reversas ou paralelas. As retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4s \\ y = 2 + 2s \\ z = 8 - 6s, \end{cases}$$

por exemplo, são paralelas porque ambas são paralelas ao vetor (2, 1, -3). Já as retas

$$r': \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \qquad s': \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -3 + 2s \\ z = 1 + 2s \end{cases}$$

não são paralelas, visto que os vetores (1, -1, 4) e (1, 2, 2) não têm a mesma direção. Logo, r' e s' são concorrentes ou reversas. São concorrentes, se o sistema

$$\begin{aligned} x &= 3 + t \\ y &= 2 - t \\ z &= 1 + 4t \\ x &= 2 + s \\ y &= -3 + 2s \\ z &= 1 + 2s \end{aligned}$$

tiver solução, e reversas em caso contrário. Da primeira e quarta equações, obtemos

$$t - s = -1,$$

e da segunda e quinta equações obtemos

$$t + 2s = 5.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} t - s &= -1 \\ t + 2s &= 5, \end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned} t &= 1 \\ s &= 2. \end{aligned}$$

Substituindo estes valores nas equações

$$\begin{aligned} z &= 1 + 4t \\ z &= 1 + 2s, \end{aligned}$$

que não foram usadas no cálculo de t e s, encontramos

$$\begin{aligned} z &= 1 + 4 \,.\, 1 = 5 \\ z &= 1 + 2 \,.\, 2 = 5. \end{aligned}$$

Como os valores de z, dados por estas equações, coincidem, concluímos que r' e s' são concorrentes no ponto $I(4, 1, 5)$. Se os valores de $z = 1 + 4t$ e $z = 1 + 2s$ não coincidissem, as retas r' e s' seriam reversas.

4.13 DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM PLANO

Na Figura 4.24, r é a reta que contém o ponto P e é perpendicular ao plano α e I é a interseção de r com α. O ponto I é chamado ***projeção ortogonal*** de P sobre α

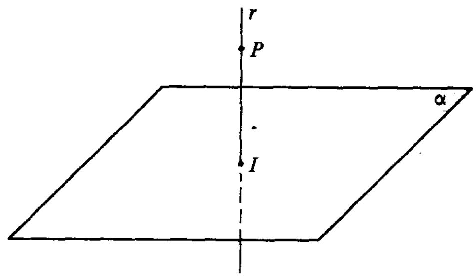


Fig. 4.24

A distância de P a I, $d(P, I)$, é a distância de P a α, que será indicada por $d(P, \alpha)$.

Vamos mostrar que, se $ax + by + cz + d = 0$ é a equação de α, então a distância de $P_0(x_0, y_0, z_0)$ a α é dada por

$$d(P,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Por exemplo, a distância do ponto $P(2, 4, 1)$ ao plano α de equação $x + 5y + 3z - 13 = 0$ é

$$d(P,\alpha)=\frac{|2+5.4+3.1-13|}{\sqrt{1^2+5^2+3^2}}=\frac{12}{\sqrt{35}}=\frac{12\sqrt{35}}{35}.$$

Para deduzir a fórmula acima, inicialmente observamos que

$$d(P,I)=\|\vec{PI}\|$$

e que $\vec{PI} = t(a, b, c)$ para algum número t, pois $\vec{PI}$ e (a, b, c) têm a mesma direção, por serem ambos perpendiculares ao plano α. Logo,

$$d(P,I)=\|t(a,b,c)\|=|t|\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \qquad (1)$$

Por outro lado, sendo (x_1, y_1, z_1) as coordenadas de I, temos

$$\vec{PI} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = t(a, b, c).$$

Logo,

$$x_1 = x_0 + at$$
$$y_1 = y_0 + bt$$
$$z_1 = z_0 + ct$$

e como $I(x_1, y_1, z_1)$ pertence ao plano α, temos

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0.$$

Resolvendo esta equação, encontramos

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos finalmente

$$d(P, I) = \left| -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

4.14 DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA

Para determinar a distância de um ponto P a uma reta r, procedemos assim: primeiro, traçamos por P um plano perpendicular a r e, em seguida, determinamos o ponto I de interseção deste plano com r. É fácil de se ver que $d(P, I)$ é a menor distância do ponto P à reta r. Veja a Figura 4.25.

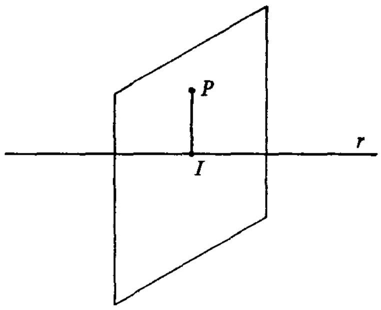


Fig. 4.25

Exemplo. Calcular a distância do ponto $P(1, 2, -1)$ à reta

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$$

Solução. A equação do plano que contém o ponto $P(1, 2, -1)$ e é perpendicular à reta r é

$$2(x - 1) - (y - 2) + 3(z + 1) = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - y + 3z + 3 = 0,$$

pois $(2, -1, 3)$ é um vetor perpendicular ao plano, por ser paralelo à reta r. A interseção deste plano com r é o ponto

$$I\left(\frac{13}{7}, \frac{32}{7}, -\frac{5}{7}\right).$$

Logo,

$$d(P,r)=d(P,I)=\sqrt{\left(1-\frac{13}{7}\right)^2+\left(2-\frac{32}{7}\right)^2+\left(-1+\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{91}}{7}.$$

Outra Solução. A distância de $P(1, 2, -1)$ a um ponto qualquer de r $(1 + 2t, 5 - t, -2 + 3t)$, é dada por

$$\sqrt{(2t)^2+(-3+t)^2+(1-3t)^2}=\sqrt{14t^2-12t+10}.$$

A distância de P a r é, portanto, a raiz quadrada do mínimo da função

$$f(t) = 14t^2 - 12t + 10.$$

Para determiná-la, podemos utilizar derivadas ou observar que o gráfico desta função é uma parábola e que seu mínimo é a ordenada do vértice. Utilizando um destes procedimentos, obtemos

$$t=\frac{3}{7}.$$

Substituindo este valor de t em

$$\sqrt{14t^2-12t+10},$$

encontramos

$$\frac{2\sqrt{91}}{7},$$

que é a distância de P a r.

4.15 DISTÂNCIA ENTRE RETAS REVERSAS

Dadas as retas reversas r e s, tracemos por um ponto P de uma delas, s por exemplo, uma reta s' paralela a r. O plano α definido por s e s' é, então, paralelo a r. Portanto, a distância de um ponto qualquer de r a α é constante. Esta constante é a *menor distância* entre r e s (veja a Figura 4.26).

De fato, seja r' a projeção de r sobre α e I um ponto de r. Por I tracemos uma perpendicular a r' que a intercepta em Q. Se P é um ponto qualquer de s, temos

$$\overline{IP}^2=\overline{IQ}^2+\overline{QP}^2,$$

pois o triângulo IQP é retângulo em Q. Logo,

$$\overline{IP}^2\geq\overline{IQ}^2 \text{ ou } \overline{IP}\geq\overline{IQ}.$$

Como $\overline{IQ}$ é a distância de r a α, segue da última desigualdade que a distância da reta r ao plano α é menor do que ou igual à distância entre dois pontos quaisquer I de r e P de s.

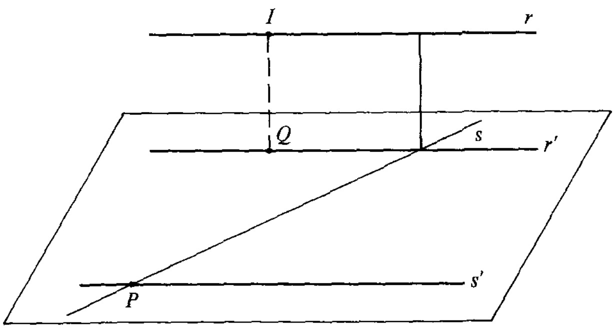


Fig. 4.26

Exemplo. Determine a distância entre as retas reversas

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + 2t. \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 6 - 5t \\ z = 4 + 3t. \end{cases}$$

Solução. Primeiro, por um ponto de s, $(-5, 6, 4)$, por exemplo, tracemos a reta s' paralela a r. Como o vetor

$$(1, -3, 2) \times (4, -5, 3) = (1, 5, 7)$$

é perpendicular ao plano α definido por s e s', uma equação de α é

$$1(x + 5) + 5(y - 6) + 7(z - 4) = 0 \quad \text{ou} \quad x + 5y + 7z = 53.$$

Tomemos agora um ponto qualquer de r, $P(2 + t,\ 1 - 3t,\ 1 + 2t)$. Aplicando a fórmula da distância de um ponto a um plano, obtemos

$$d(P,\alpha) = \frac{|2 + t + 5(1 - 3t) + 7(1 + 2t) - 53|}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 7^2}} = \frac{39}{\sqrt{75}},$$

que é a menor distância entre as retas r e s.

Exercícios

4.51. Escreva equações paramétricas da interseção dos planos
 a) $2x + y - z = 0$ e $x + y + z = 1$;
 b) $x + 2y = 1$ e $z = 2$.

4.52. Determine o ponto de interseção da reta

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= -2 \\ z &= 4 + 2t \end{aligned}$$

com cada um dos seguintes planos;
a) $x - 2y + 3z = 8$;
b) $2x + z = 5$;
c) $x = 2$.

4.53. Verifique que a reta

$$\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 5t \end{aligned}$$

está contida no plano $2x + y - z = 0$.

4.54. Verifique que a reta

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= 2 + 3t \end{aligned}$$

não intercepta o plano $x + y - z = 3$.

4.55. Determine os valores de a e b para que as retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2 + bt \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + bt \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

sejam:
a) paralelas;
b) concorrentes;
c) reversas.

4.56. Determine os valores de a, b e d para que o plano $ax + by + 3z = d$ seja
a) paralelo ao plano $2x + y - 5z = 4$;
b) represente o mesmo plano que $2x + y - 5z = 4$.

4.57. Verifique que as retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 5 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

são concorrentes e determine uma equação do plano por elas definido.

4.58. Determine a distância do ponto (2, 1, 3) a cada um dos planos
a) $x - 2y + z = 1$;
b) $x + y - z = 0$;
c) $x - 5z = 8$.

4.59. Determine:
a) a distância do ponto (5, 4, -7) à reta

$$s: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - t \\ z = t; \end{cases}$$

b) a distância do ponto (2, 3, 5) a cada um dos eixos do sistema de coordenadas.

4.60. Escreva uma equação do plano que contém o ponto (1, -2, 3) e é perpendicular a cada um dos planos $2x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$.

4.61. Escreva as equações paramétricas do plano paralelo ao eixo z e que contém a interseção dos planos $x + 2y + 3z = 4$ e $2x + y + z = 2$.

4.62. a) Determine as equações paramétricas da projeção da reta

$$r: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

sobre o plano

$$\alpha: 2x - y + 2z = 1.$$

b) Determine o ângulo da reta r com o plano α.

4.63. Escreva as equações paramétricas e cartesiana do plano que contém a reta

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

e é perpendicular ao plano α de equação $3x + 2y - z = 5$. Este plano é chamado ***plano projetante*** de r sobre α.

4.64. Determine o ângulo agudo entre as retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + t \\ z = 5 + t. \end{cases}$$

4.65. Determine o ângulo agudo entre os planos $2x - y + 3z = 0$ e $x + y - 8y = 1$.

4.66. a) Verifique que qualquer ponto da reta

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

é eqüidistante de $A(1, 2, 1)$, $B(1, 4, 3)$ e $C(3, 2, 1)$.

b) Determine o ponto de r mais próximo destes pontos.

4.67. a) Dados os pontos $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ e $C(3, -2, 4)$, determine no plano $2x - y + 5z = 2$ um ponto eqüidistante dos vértices do triângulo ABC.

b) Determine o circuncentro do triângulo ABC.

4.68. Dados $A(2, 1, 3)$, $B(4, -1, 1)$ e o plano α de equação $2x - y + 2z = 3$, determine as equações paramétricas de uma reta r de α tal que todo ponto de r é eqüidistante de A e B.

4.69. Escreva as equações paramétricas da bissetriz do ângulo menor das retas

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

4.70. Determine o simétrico do ponto $P(2, 1, 3)$ em relação

a) ao ponto $O(3, -1, 1)$;

b) à reta

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2 + t; \end{cases}$$

c) ao plano $2x - 2y + 3z = 2$.

4.71. Escreva as equações paramétricas da simétrica da reta

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

em relação ao plano $x - 2y + 3z = 1$.

4.72. Escreva as equações paramétricas da reta que contém o ponto $P(1, 3, 5)$ e é concorrente com as retas

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 - 5t. \end{cases}$$

4.73. Dadas as retas reversas

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = t \\ y = 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

determine:

a) a menor distância entre r e s;

b) as equações paramétricas da perpendicular comum às retas r e s.

4.74. Prove que o vetor $(a, b, c) \times (a_1, b_1, c_1)$ é paralelo à interseção dos planos $ax + by + cz = d$ e $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$.

4.75. Demonstre que se (a, b, c) é unitário, então a distância do plano $ax + by + cz = d$ à origem é $|d|$.

4.76. Determine o ponto do plano $ax + by + cz = d$ mais próximo da origem.

4.77. a) Determine a distância de uma diagonal de um cubo a cada uma de suas arestas.

b) Unindo-se o centro de uma face de um cubo com os vértices da face oposta, obtém-se uma pirâmide de base quadrada. Determine os ângulos entre os planos das faces da pirâmide.

4.78. Escreva uma equação do plano paralelo a $2x - y + 6z = 4$ e tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$.

4.79. Determine o centro e o raio da circunferência da interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ com o plano $2x + y + z = 4$.

4.80. O movimento de uma partícula é tal, que no instante t sua posição é

$$P(t) = (1 + t, 1 - 2t, t).$$

a) Em que instante a partícula está mais próxima da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

b) Qual é o ponto desta esfera mais próxima da trajetória da partícula?

CAPÍTULO 5

QUÁDRICAS

No Capítulo 3 estudamos gráficos de equações quadráticas com duas variáveis. Vimos que através de mudanças de coordenadas (rotação e translação) é possível colocar uma tal equação numa das formas canônicas e identificar a cônica que ela representa. Neste capítulo, nosso objetivo é, também, estudar gráficos de equações quadráticas, só que, agora, com três variáveis. Mais precisamente, equações da forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz = R. \qquad \text{(I)}$$

Os gráficos de tais equações, se diferentes do conjunto vazio, são superfícies chamadas ***quádricas.***

O estudo que a seguir apresentaremos consistirá em identificar e esboçar uma quádrica, conhecida sua equação. Como motivação, vamos iniciar introduzindo alguns exemplos especiais nos quais se deduz a equação da quádrica.

5.1 SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Exemplo. *Elipsóide de Revolução.* A superfície gerada pela rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos chama-se ***elipsóide de revolução***.

Para deduzirmos uma equação desta superfície, vamos supor que a equação da elipse, no plano yz, seja

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$$

e que a rotação se dê em torno do eixo z.

Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da superfície. Então, P pertence a uma circunferência descrita por um ponto Q da elipse, ao girar em torno do eixo z. Se R é o centro de tal circunferência, em função das coordenadas de $P(x, y, z)$, as coordenadas de R e Q são $R(0, 0, z)$ e $Q(0, y_1, z)$, onde

$$\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (1)$$

pois o ponto $Q(0, y_1, z)$ pertence à elipse. Como

$$\overline{PR}^2 = \overline{QR}^2$$

segue-se que

$$y_1^2 = x^2 + y^2,$$

que, introduzido em (1), produz a equação procurada:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

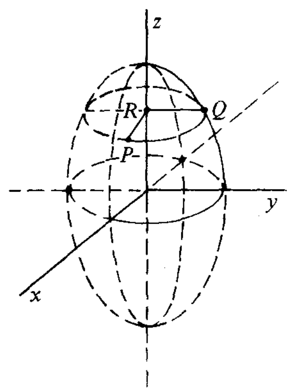


Fig. 5.1

Se a elipse tivesse sido girada em torno do eixo y, a equação do elipsóide seria

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

como o leitor pode verificar. Observe ainda que, se $b = c$, a elipse reduz-se a uma circunferência e o elipsóide a uma esfera.

Em geral, uma superfície gerada pela rotação de uma curva plana C em torno de um eixo chama-se ***superfície de revolução.***

Como no exemplo que acabamos de examinar, na Figura 5.2 estamos supondo que a curva C está contida no plano yz e que o eixo de rotação é o eixo z do sistema de coordenadas. Na maioria dos casos, a equação de C pode ser escrita assim

$$F(y, z) = 0, x = 0$$

(no exemplo, $F(y, z) = y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1$).

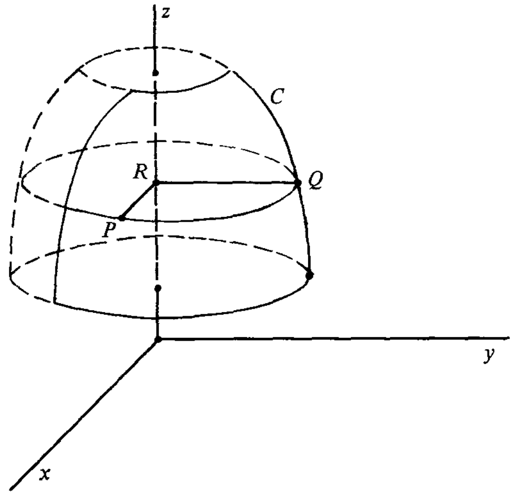


Fig. 5.2

Para deduzirmos uma equação da superfície gerada pela rotação de C em torno do eixo z, vamos seguir os mesmos passos do exemplo anterior. Primeiro, tomamos um ponto $P(x, y, z)$ da superfície. O fato de a superfície ser de revolução significa que $P(x, y, z)$ pertence a uma circunferência descrita por um ponto Q de C, ao girar em torno do eixo z. Na figura indicamos o centro desta circunferência por R. O segundo passo é determinar as coordenadas de Q e R em função de x, y e z. Como a circunferência descrita por Q está contida num plano paralelo ao plano xy, as terceiras coordenadas de P, Q e R são iguais. Estando R no eixo z, segue que $R(0, 0, z)$. A primeira coordenada de Q é zero porque C está contida no plano yz. Da relação

$$\overline{PR} = \overline{QR}$$

deduzimos que a segunda coordenada y_1 de Q satisfaz

$$y_1^2 = x^2 + y^2. \tag{1}$$

Como $Q(0, y_1, z)$ pertence à curva C, segue que

$$F(y_1, z) = 0. \tag{2}$$

Introduzindo em (2) o valor de y_1, dado por (1), obtemos uma relação em x, y e z que se verifica para todos os pontos $P(x, y, z)$ da superfície gerada pela rotação de C em torno do eixo z. Segue-se, portanto, que

$$F(y_1, z) = 0, \quad \text{onde} \quad y_1^2 = x^2 + y^2$$

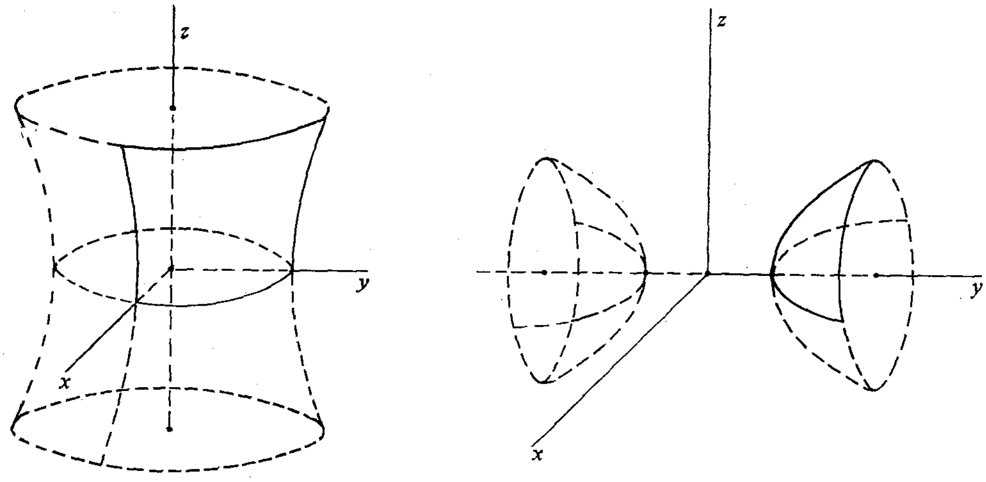
é uma equação desta superfície.

Exemplo. Equações das superfícies geradas pela rotação da hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0,$$

em torno de um de seus eixos de simetria.

Veja na Figura 5.3 o esboço e os nomes destas superfícies.



hiperbolóide de uma folha

hiperbolóide de duas folhas

Fig. 5.3

Como demonstramos, uma equação da superfície gerada pela rotação da curva

$$F(y, z)=0, \quad x=0$$

em torno do eixo z é dada por

$$F(y_1, z)=0, \text{ onde } y_1^2 = y^2+x^2.$$

Por analogia, conclui-se que uma equação da superfície gerada pela rotação desta mesma curva, em torno do eixo y, é

$$F(y, z_1)=0, \text{ onde } z_1^2 = x^2+z^2.$$

Neste exemplo,

$$F(y,z)=\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1.$$

Logo, uma equação do hiperbolóide de revolução de uma folha é

$$\frac{y^2+x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

e uma equação do hiperbolóide de revolução de duas folhas é

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Se a curva C está contida no plano xy, sua equação é da forma

$$F(x, y)=0, \quad z=0.$$

Neste caso, como o leitor pode verificar, uma equação da superfície gerada pela rotação de C em torno do eixo x é

$$F(x, y_1)=0, \text{ onde } y_1^2=y^2+z^2.$$

Exemplo. Uma equação da superfície gerada pela rotação da parábola

$$x=y^2, \; z=0,$$

em torno do eixo x é

$$F(x, y_1)=0, \text{ sendo } y_1^2=y^2+z^2.$$

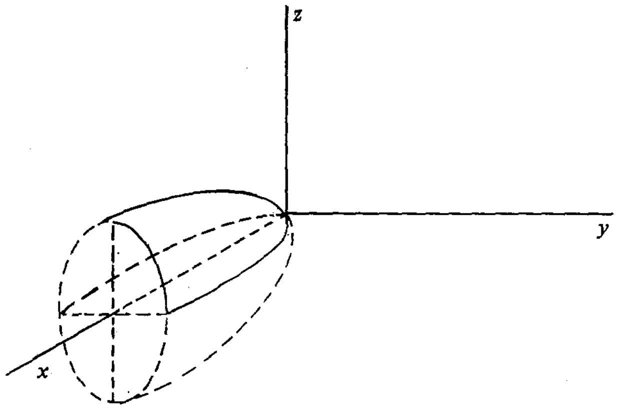


Fig. 5.4

Aqui, $F(x, y)=x-y^2$, de modo que

$$F(x, y_1)=x-y_1^2.$$

Logo, a equação procurada é

$$x - y^2 - z^2 = 0 \text{ ou } x = y^2 + z^2.$$

Esta superfície chama-se ***parabolóide de revolução.*** Veja a Figura 5.4.

Cone de Revolução. Chama-se ***cone de revolução*** a superfície gerada pela rotação de uma reta em torno de outra que a intercepta. Na Figura 5.5*a*, consideramos a reta *r* girando em torno da reta *s*. O ponto *I*, interseção de *r* e *s*, é o ***vértice do cone*** e a reta *s* é chamada ***eixo do cone.***

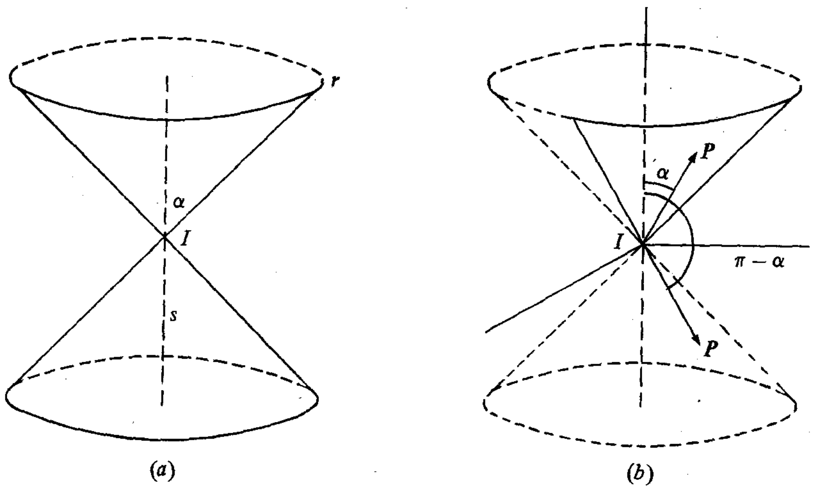


Fig. 5.5

Para deduzirmos a equação do cone vamos estabelecer um sistema de coordenadas em que o eixo z coincide com o eixo do cone e o plano yz contém a reta r. Portanto, no plano yz, uma equação de r é

$$y = mz, \quad x = 0,$$

onde m é a tangente do ângulo α formado pelas retas r e s. Assim, temos

$$F(y, z) = y - mz = 0.$$

Como a rotação se dá em torno do eixo z, a equação do cone é

$$F(y_1, z) = y_1 - mz = 0,$$

sendo

$$y_1^2 = x^2 + y^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 = m^2z^2.$$

Outra solução. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do cone. Então, o ângulo entre os vetores $\vec{IP}$ e $\vec{S}$, onde $\vec{S}$ é qualquer vetor paralelo ao eixo do cone, é α ou $\pi - \alpha$, conforme P esteja acima ou abaixo do vértice I. Veja a Figura 5.5*b*. Como

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

escolhendo $\vec{S}$ como sendo (0, 0, 1), temos

$$\frac{\vec{IP}\cdot\vec{S}}{\|\vec{IP}\|\,\|\vec{S}\|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \pm\cos\alpha, \qquad (1)$$

pois

$$\vec{IP} = (x, y, z).$$

Mas

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad (2)$$

porque $(0, m, 1)$ é um vetor paralelo a r e $(0, 0, 1)$ é paralelo a s. Introduzindo (2) em (1) e eliminando os radicais, obtemos

$$x^2 + y^2 = m^2z^2.$$

Observação. A segunda solução apresentada aplica-se também ao caso em que o ponto de concorrência das retas r e s não coincide com a origem. Veja Exercício 5.6.

Cilindro de Revolução. A superfície gerada pela rotação de uma reta r em torno de uma reta s, sendo r e s paralelas, é chamada ***cilindro de revolução*** ou ***cilindro circular.***

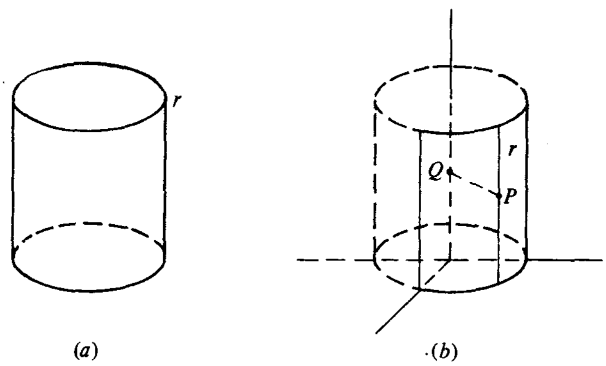


Fig. 5.6

Vamos deduzir uma equação do cilindro, em relação a um sistema de coordenadas que contém s como eixo z. Seja R a distância entre r e s. Então, um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao cilindro se, e somente se,

$$d(P, s) = R.$$

Mas, $d(P, s) = d(P, Q)$, onde $Q(0, 0, z)$. Logo, $P(x, y, z)$ pertence ao cilindro se, e somente se,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = R^2,$$

que é a equação procurada.

Observe que a variável z não aparece nesta equação. Isto significa que, independentemente do valor de z, um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao cilindro se, e somente se, as suas duas primeiras coordenadas satisfazem a equação $x^2 + y^2 = R^2$. Ora, a projeção do ponto $P(x, y, z)$ sobre o plano xy é o ponto $(x, y, 0)$. Portanto, $P(x, y, z)$ pertence ao cilindro se, e somente se, a sua projeção pertence à circunferência

$$x^2 + y^2 = R^2, \; z = 0.$$

Observe também que, se tivéssemos escolhido o sistema de coordenadas de modo que o eixo y coincidisse com a reta s, a equação do cilindro seria

$$x^2 + z^2 = R^2,$$

ou ainda,

$$y^2 + z^2 = R^2$$

se a reta s fosse o eixo x.

Exercícios

5.1. Determine as coordenadas do centro da circunferência descrita pelo ponto $P(x, y, z)$ ao girar em torno do eixo *a)* x, *b)* y, *c)* z.

5.2. Determine as coordenadas de um ponto genérico da circunferência descrita por $Q(2, 3, 5)$ ao girar em torno do eixo y.

5.3. Determine a interseção do plano $x = 2$ com a circunferência descrita pela rotação do ponto $Q(-2, -1, 4)$ ao girar em torno do eixo z.

5.4. Escreva uma equação da superfície gerada pela rotação

a) da elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = 0$$

em torno de seu eixo maior ;

b) da elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$$

em torno do eixo z;

c) da parábola $x = y^2$, $z = 0$ em torno de seu eixo;

d) da parábola $z = 4x^2$, $y = 0$ em torno do eixo z;

e) da hipérbole

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1, \quad x = 0$$

em torno do eixo z.

5.5. Deduza uma equação da esfera de centro na origem e raio r, girando a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$ em torno do eixo x.

5.6. Escreva uma equação do cone gerado pela rotação da reta r em torno da reta s, onde

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -4 + 5t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

5.7. a) Deduza uma equação da superfície gerada pela rotação da curva

$$z = y^2 - 4y, \quad x = 0 \;\text{ e }\; y \geq 0$$

em torno do eixo z.

b) Descreva a interseção da superfície obtida em (a) com o plano yz.

c) Descreva a interseção da superfície obtida em (a) com o plano $z = k$. Discuta os casos $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$.

5.8. Deduza uma equação do cilindro de revolução gerado pela rotação da reta r em torno da reta s, sendo

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = t. \end{cases}$$

5.9. Deduza uma equação da superfície gerada pela rotação da curva

$$z = \operatorname{sen} y, \quad 0 \leq y \leq 2\pi,$$

em torno do eixo y.

5.2 FORMAS CANÔNICAS

Como o leitor deve ter observado, as equações das quádricas deduzidas nos exemplos anteriores são casos particulares da equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz = R \qquad \text{(I)}$$

Outro caso particular desta equação, já estudado, ocorre quando os coeficientes A, B, C, D, E e F são nulos. Nestas condições, (I) reduz-se a

$$Gx + Hy + Jz = R$$

e seu gráfico é, como já vimos, um plano. Pode também acontecer de o gráfico de (I) reduzir-se a um ponto. Por exemplo, na equação

$$2x^2 + 4y^2 + z^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 0$$

isto se dá.

Antes, ainda, de analisarmos o caso geral, passemos às equações do tipo (I) que possuem como particularidade o fato de que todos os termos que contêm uma determinada variável têm coeficientes nulos. Tais equações ficam, assim, reduzidas a duas variáveis. Por exemplo, se os coeficientes da variável z são todos nulos, a equação toma a forma

$$f(x, y) = 0.$$

Neste caso, z é livre, isto é, (x_0, y_0, z_0) satisfaz $f(x, y) = 0$ se, e somente se,

$$f(x_0, y_0) = 0.$$

Isto significa que se o ponto $(x_0, y_0, 0)$ satisfaz a equação

$$f(x, y) = 0$$

a reta

$$(x_0, y_0, z), \quad z \text{ qualquer},$$

está contida no seu gráfico. Portanto, tal gráfico é o conjunto de todas as retas

$$(x_0, y_0, z),$$

onde

$$f(x_0, y_0) = 0.$$

Observe também que, sendo o conjunto dos pontos $(x_0, y_0, 0)$ tais que $f(x_0, y_0) = 0$ [que é o mesmo que o conjunto dos pontos (x, y, z) tais que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ z &= 0], \end{aligned}$$

uma cônica C no plano xy, o gráfico de $f(x, y) = 0$ pode ser imaginado como sendo a superfície gerada deslocando-se uma das retas

$$(x_0, y_0, z)$$

sobre C, paralelamente ao eixo z.

Exemplo. Gráfico de

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Neste caso, temos

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0,$$

e a cônica C é a elipse mostrada na Figura 5.7*a*.

Na Figura 5.7*b* temos o gráfico de

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

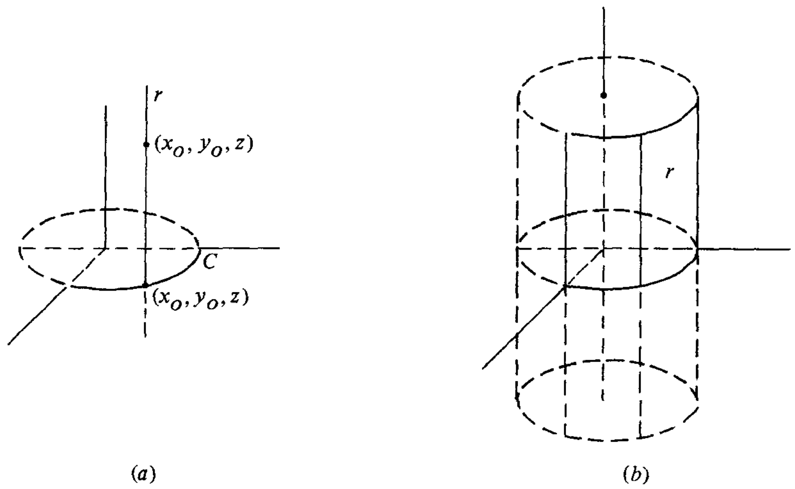


Fig. 5.7

Imagine esta superfície como sendo gerada deslocando-se a reta r sobre C, paralelamente ao eixo z.

Quando a variável ausente na Equação (I) é x ou y, a análise é análoga. No primeiro caso, temos equações da forma

$$f(y, z) = 0,$$

e o gráfico é a superfície constituída das retas

$$(x, y_0, z_0),$$

onde

$$f(y_0, z_0) = 0.$$

Neste caso,

$$f(y, z) = 0, \quad z = 0$$

é uma curva no plano yz e o gráfico de $f(y, z) = 0$ é a superfície descrita por uma reta que se desloca sobre esta curva paralelamente ao eixo x.

Exemplo. Gráfico de $y = z^2$.

Aqui temos

$$f(x, z) = y - z^2 = 0.$$

No plano yz,

$$f(y, z) = 0, \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad y = z^2, \quad x = 0$$

é uma parábola e o gráfico de

$$y = z^2$$

é a superfície esboçada na Figura 5.8. Esta superfície chama-se ***cilindro parabólico reto.***

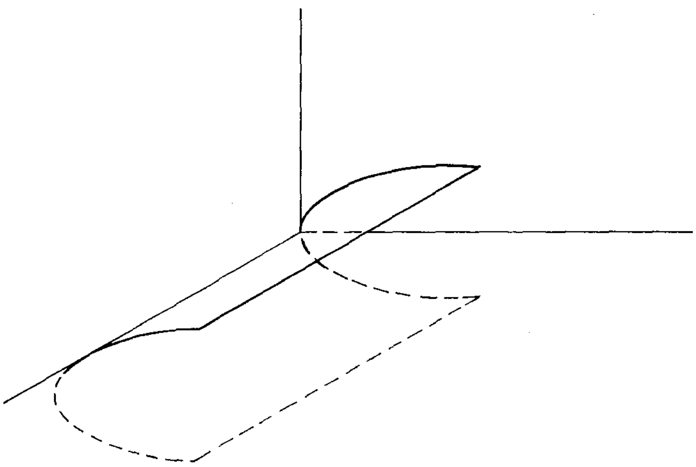


Fig. 5.8

A superfície esboçada na Figura 5.9 é o gráfico de

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1.$$

Ela se chama ***cilindro hiperbólico reto.*** Observe que a equação

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$$

é do tipo (I), onde os coeficientes de y são todos nulos.

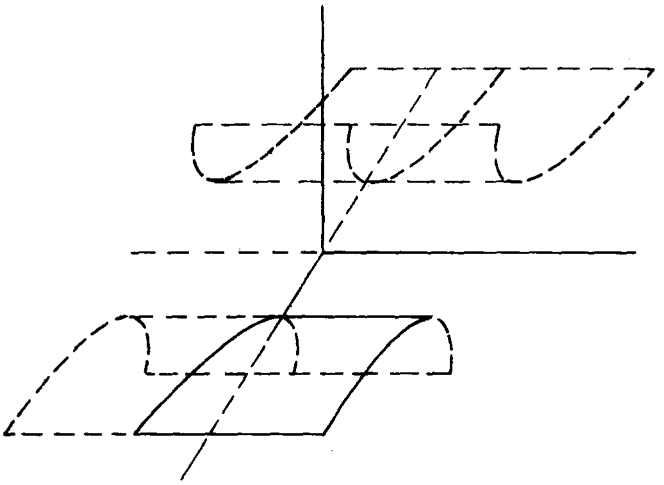


Fig. 5.9

Em geral, os gráficos das equações do tipo (I), cujos coeficientes de uma das variáveis são todos nulos, são superfícies chamadas ***cilindros retos***. A cônica que se obtém fazendo-se a interseção deste cilindro com o plano

$$t = 0,$$

sendo t a variável ausente na equação do cilindro, é chamada ***diretriz do cilindro***. Conforme a diretriz seja uma elipse, parábola ou hipérbole, o cilindro é chamado ***elíptico, parabólico*** ou ***hiperbólico.***

Exemplo. Nas Figuras 5.10 e 5.11 estão esboçados os cilindros cujas equações são

$$2y^2 + z^2 - 4y - 6z + 7 = 0, \qquad (1)$$
$$x^2 = y^2. \qquad (2)$$

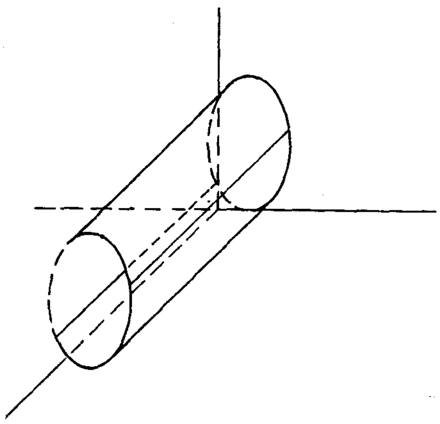


Fig. 5.10

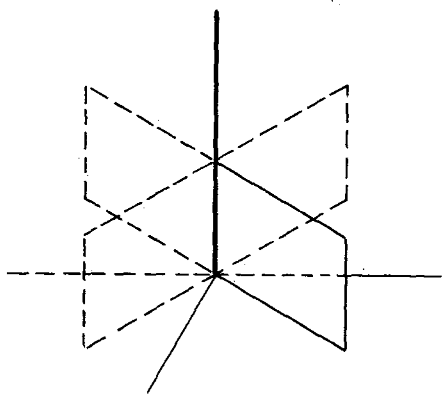


Fig. 5.11

No esboço do gráfico de (1), inicialmente, completamos os quadrados em y e z e reescrevemos a equação dada na forma

$$\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(z-2)^2}{4}=1.$$

A partir desta forma, concluímos que se trata de um cilindro elíptico com diretriz contida no plano yz.

Como a equação $x^2 = y^2$ não contém termos em z, seu gráfico é um cilindro com diretriz no plano xy. Esta diretriz é constituída do par de retas

$$x = y$$
$$x = -y,$$

contidas no plano xy. Este cilindro não possui denominação especial.

Proposição 5.1 - *Se o gráfico da equação*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz = R \qquad \text{(I)}$$

não é o conjunto vazio, um ponto, um plano, ou um cilindro, usando mudanças de sistemas de coordenadas convenientes, podemos reduzi-la a uma das formas constantes dos grupos seguintes.

GRUPO (E)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

GRUPO (H1)

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

GRUPO (H2)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

GRUPO (PE)

$$x=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$
$$y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$$
$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

GRUPO (PH)

$$x=\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$$
$$y=\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$$
$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

$$x=-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$
$$y=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$$
$$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

GRUPO (C)

$$x^2=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$
$$y^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$$
$$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

Observação. A demonstração desta proposição segue os mesmos caminhos da demonstração da Proposição 3.1, referente a cônicas. Primeiro, efetuamos uma mudança de sistema de coordenadas com o objetivo de eliminar os termos que envolvem o produto de variáveis diferentes. No caso das cônicas, esta questão foi resolvida com uma rotação. Aqui, a rotação é mais complexa e envolve alguns resultados sobre autovetores de matrizes, que, geralmente, só são apresentados nos cursos de introdução à Álgebra Linear. A outra mudança de sistema de coordenadas é uma translação de eixos no espaço, em tudo parecida com as translações no plano.

Outro ponto que o leitor deve ter em mente é que, para chegarmos às equações escritas no enunciado da proposição, fizemos mudanças de coordenadas. Daí, a rigor, deveríamos usar símbolos tais como x_1, y_1 e z_1 ou x_2, y_2, e z_2, para denotar as variáveis. Mas, por comodidade, continuaremos a usar x, y e z.

As equações que compõem os vários grupos, constantes do enunciado da Proposição 5.1, são chamadas ***formas canônicas***. Conforme a forma canônica pertença ao grupo (E), (H1), (H2), (PE), (PH) ou (C), a quádrica que ela representa chama-se (na mesma ordem):

Elipsóide
Hiperbolóide de uma folha
Hiperbolóide de duas folhas
Parabolóide elíptico
Parabolóide hiperbólico
Cone quádrico.

As figuras seguintes, construídas sem preocupação com o sistema de coordenadas, dão idéia da forma geométrica de cada uma destas superfícies.

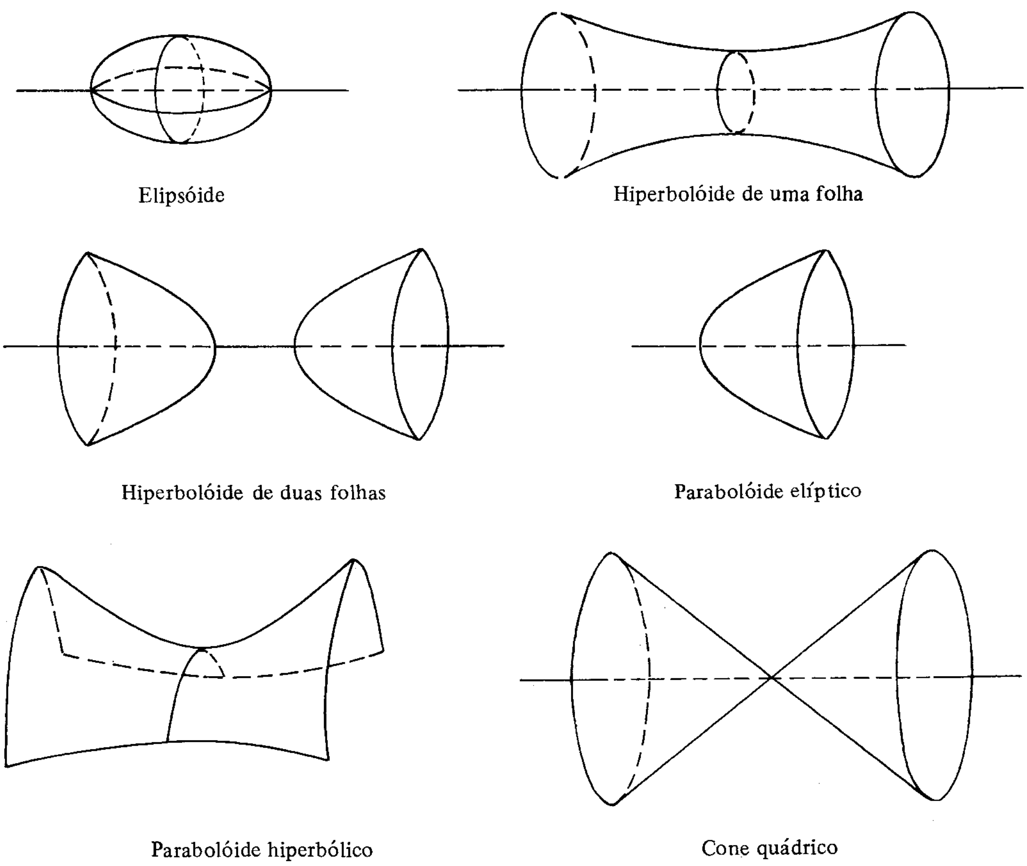


Fig. 5.12

Como se vê nessas figuras, exceto o parabolóide hiperbólico, cada quádrica possui pelo menos um eixo de simetria. Interceptando a quádrica por um plano perpendicular ao seu eixo de simetria, obtemos uma elipse. Quando a quádrica é de revolução, esta elipse reduz-se a uma circunferência.

Exemplo. Identifique e esboce as quádricas cujas equações são:

a) $4x^2 - y^2 + 8z^2 = 16$;

b) $4x^2 + y^2 - 8z^2 = 16$;

c) $x^2 + 2y^2 - z = 0$;

d) $x^2 + y + z^2 = 0$;

e) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$;

f) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{16} = 1$;

g) $z = -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.

Solução. A primeira providência é colocar a equação dada numa forma canônica. No item (a), dividindo ambos os membros da equação por 16, obtemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2} = 1.$$

Esta equação se identifica com uma das formas canônicas apresentadas no grupo (H1) da Proposição 5.1. Logo, a quádrica que ela representa é um hiperbolóide de uma folha. Feita a identificação da quádrica, resta o seu esboço. Como já conhecemos a forma geométrica desta superfície, na verdade, falta-nos apenas decidir sobre sua disposição em relação ao sistema de coordenadas. Resolvemos esta questão fazendo a interseção do hiperbolóide com os planos coordenados.

Interseção com o plano xy, isto é, com o plano cuja equação é $z = 0$. Substituindo $z = 0$ em

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2} = 1,$$

obtemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1,$$

que é a equação de uma hipérbole no plano xy. Isto significa que o gráfico de

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2} = 1$$

intercepta o plano xy segundo uma hipérbole.

Interseção com o plano yz ($x = 0$). É suficiente fazer $x = 0$ na equação dada. O resultado é

$$-\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2} = 1.$$

Significa que a quádrica intercepta yz, também, segundo uma hipérbole.

Interseção com o plano xz. Como a equação do plano xz é $y = 0$, temos que a interseção deste plano com o hiperbolóide é a elipse

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1.$$

Logo, o gráfico de

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{2}=1$$

é um hiperbolóide de uma folha que intercepta os planos xy e yz segundo hipérbole e o plano xz segundo uma elipse. Estas informações são suficientes para o esboço da quádrica, mostrado na Figura 5.13.

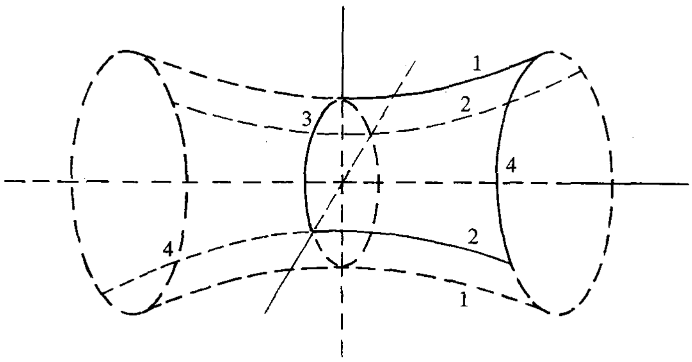


Fig. 5.13

Os dois ramos da hipérbole

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$$

estão assinalados na figura com o número 2. As curvas assinaladas com o número 1 são os ramos de.

$$-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{2}=1.$$

O número 3 indica a elipse

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1.$$

As elipses indicadas com o número 4 podem ser obtidas atribuindo-se a y um valor $y_0 \neq 0$, isto é, interceptando o hiperbolóide por planos de equação da forma $y = y_0$.

Nos itens seguintes vamos adotar o mesmo procedimento descrito na solução de (a), ou seja, primeiro, escrevemos a equação na forma canônica. A partir da forma canônica, identificamos a quádrica e, após fazermos sua interseção com os planos coordenados, a esboçamos.

Item (b). Forma canônica

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{2}=1.$$

Quádrica: hiperbolóide de uma folha. Esboço

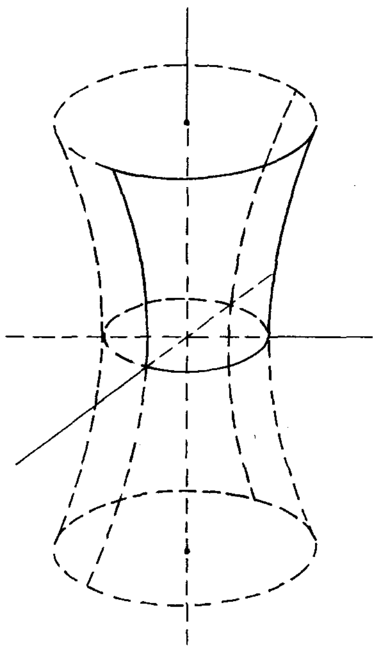


Fig. 5.14

Item (c). A equação

$$x^2 + 2y^2 - z = 0$$

pode ser reescrita na forma

$$z = x^2 + \frac{y^2}{1/2}.$$

Logo (veja o grupo PE), seu gráfico é um parabolóide elíptico. A interseção deste parabolóide com o plano xy ($z = 0$) é o ponto (0, 0, 0) e com os planos xz e yz são, respectivamente, as parábolas

$$z = x^2 \text{ e } z = \frac{y^2}{1/2}.$$

Na Figura 5.15, a parábola $z = y^2/1/2$ está assinalada com o número 1 e $z = x^2$, com o número 2. Observe que, para cada valor $z_0 > 0$, o parabolóide intercepta o plano $z = z_0$ segundo a elipse

$$z_0 = x^2 + \frac{y^2}{1/2} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{z_0} + \frac{y^2}{\frac{z_0}{2}} = 1.$$

Uma destas elipses está representada na figura (indicada com o número 3).

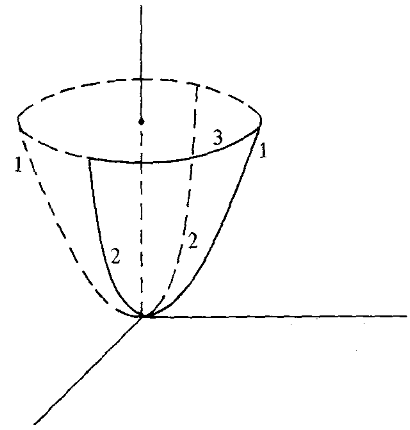


Fig. 5.15

Item (d)

$$x^2 + y + y^2 = 0 \quad \text{ou} \quad -y = x^2 + z^2.$$

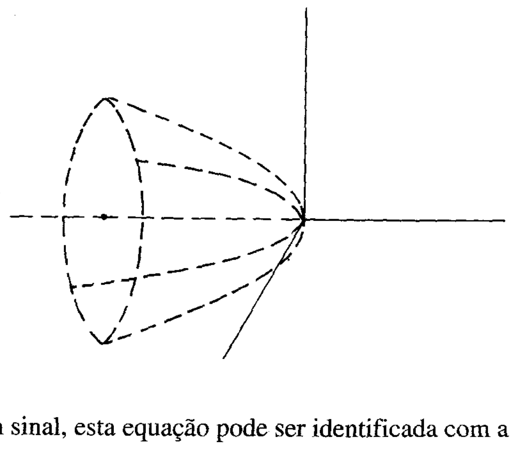


Fig. 5.16

A menos de um sinal, esta equação pode ser identificada com a forma canônica

$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

do grupo (PE). O sinal de menos, que pode ser eliminado com uma mudança de coordenadas, indica apenas que o gráfico desta equação é o simétrico do parabolóide

$$y = x^2 + z^2,$$

em relação ao plano $y = 0$. Veja a Figura 5.16

Item (e)

$$x^2 + 2y^2 - z^2 = 0.$$

Forma canônica

$$z^2 = x^2 + \frac{y^2}{1/2}.$$

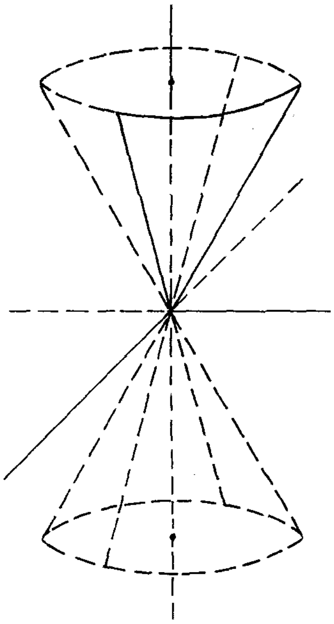


Fig. 5.17

Esta equação se identifica com

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

do grupo (C). Seu gráfico é um cone. A interseção deste cone com o plano xy é o ponto (0, 0, 0), que é o *vértice.* A interseção com os outros planos coordenados são retas. Por exemplo, com o plano $y = 0$ é o par de retas

$$z = \frac{x}{a} \qquad\qquad z = -\frac{x}{a}.$$

Item (f)

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{2}=1.$$

Neste item, a equação já se encontra na forma canônica. A quádrica que ela representa é um hiperbolóide de duas folhas.

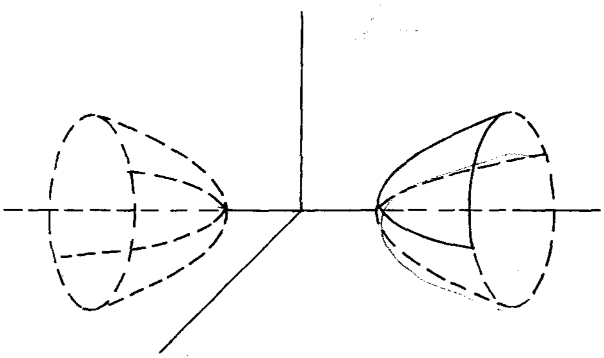


Fig. 5.18

Observe que o plano xz não intercepta esta superfície. De fato, fazendo $y = 0$ em

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{2}=1,$$

obtemos

$$-\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{2}=1,$$

que não admite solução. Na verdade, qualquer que seja o valor y_0, tal que $|y_0| < 4$, o plano $y = y_0$ não intercepta o hiperbolóide. Para $|y_0| > 4$, a interseção do hiperbolóide com o plano $y = y_0$ é a elipse

$$-\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{2}=1-\frac{y_0^2}{16} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{4(\frac{y_0^2}{16}-1)}+\frac{z^2}{2(\frac{y_0^2}{16}-1)}=1,$$

cujos eixos crescem com $|y_0|$. Para $|y_0| = 4$ temos os pontos

$$(0, 4, 0) \ \text{e} \ (0, -4, 0),$$

que são os *vértices* do hiperbolóide.

Item (g)

$$z = -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

A quádrica é um parabolóide hiperbólico. Fazendo sua interseção com os planos coordenados, obtemos:

a) interseção com $x = 0$,

$$z = \frac{y^2}{9}.$$

Uma parábola no plano yz, com concavidade para cima;

b) interseção com $y = 0$,

$$z = -\frac{x^2}{4}.$$

Uma parábola no plano xz, com concavidade para baixo;

c) interseção com $z = 0$,

$$y = \pm\frac{3}{2}x.$$

Um par de retas no plano xy;

d) interseção com planos paralelos ao plano xy, isto é, planos de equações da forma $z = k$, $k \neq 0$,

$$\frac{y^2}{9k} - \frac{x^2}{4k} = 1.$$

Hipérbole com o eixo que contém os focos paralelos ao eixo y, se $k > 0$, e paralelo ao eixo x, se $k < 0$.

Juntando as informações acima, obtemos o esboço da superfície.

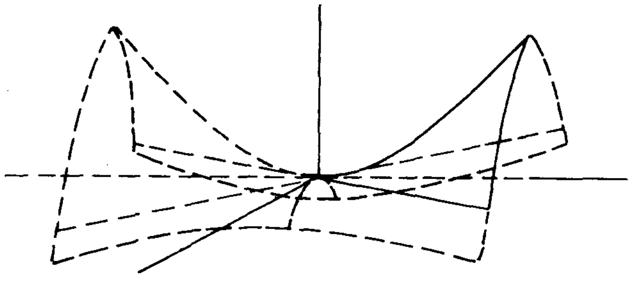


Fig. 5.19

Exemplo. Seccionando um parabolóide por um plano perpendicular a seu eixo e a três unidades do vértice, encontramos uma elipse de eixos iguais a 6 e 12 unidades. Escreva uma equação do parabolóide.

Solução.

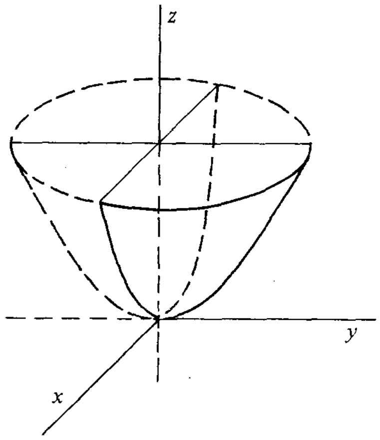


Fig. 5.20

Em relação a um sistema cuja origem é o vértice do parabolóide e o eixo z coincide com o eixo do parabolóide, a equação procurada é da forma

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \tag{1}$$

Fazendo $z = 3$ em (1), obtemos a equação da interseção do parabolóide com o plano $z = 3$:

$$3 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \text{ ou } \frac{x^2}{3a^2} + \frac{y^2}{3b^2} = 1. \tag{2}$$

Segundo o enunciado, (2) é uma equação da elipse de semi-eixos iguais a 3 e 6, cuja equação é, portanto, da forma

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 \text{ ou } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1, \ (z = 3).$$

Logo, (2) é uma das equações acima e, conseqüentemente, temos

$$3a^2 = 9 \text{ e } 3b^2 = 36 \text{ ou } 3a^2 = 36 \text{ e } 3b^2 = 9.$$

Calculando os valores de a e b e introduzindo-os na Equação (1), temos as soluções

$$z=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12} \text{ ou } z=\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}.$$

A resposta deste problema depende do sistema de coordenadas adotado. Soluções semelhantes às encontradas podem ser obtidas fazendo-se o eixo x (ou y), do sistema, coincidir com o eixo do parabolóide. Sugerimos ao leitor deduzir a equação do parabolóide em relação a tais sistemas e também em relação ao sistema tal, que o plano da seção seja um dos planos coordenados e que a origem coincida com o centro da elipse.

Exemplo. Escreva a equação de uma superfície sabendo que sua interseção com os planos $x = 0$ e $y = 0$ são as hipérboles

$$-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1 \text{ e } -\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1.$$

Solução.

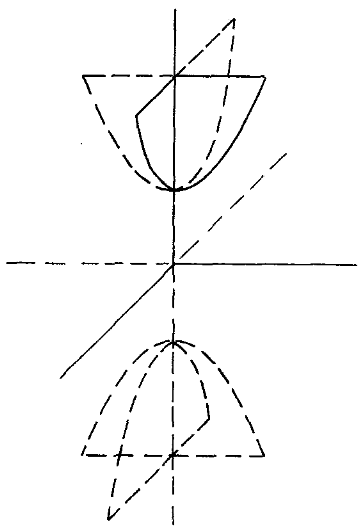


Fig. 5.21

Esboçamos na Figura 5.21 as hipérboles dadas no enunciado. Tal figura sugere que uma superfície que satisfaz as condições do problema é o hiperbolóide de duas folhas, de equação

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{I}$$

Comparando (I) com as equações dadas no enunciado, conclui-se que

$$-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$$

é uma solução. Existem outras soluções?

Exercícios

5.10. Mostre que o gráfico de cada uma das equações seguintes reduz-se a um único ponto.
a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 6 = 0$;
b) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 2yz = 0$;
c) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - x - y + 1 = 0$.

5.11. Mostre que o gráfico de

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 8 = 0$$

é o conjunto vazio.

5.12. Esboce os cilindros dados pelas equações
a) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; d) $x + y = 0$;
b) $z = y^2 + 2$; e) $z = \cos y$;
c) $z = x^2 + 2$; f) $xy = 1$.

5.13. Faça um esboço do sólido delimitado inferiormente pelo plano xy, superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e lateralmente pelo cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

5.14. Determine a interseção da reta

$$x = 1$$
$$y = 2 + t$$
$$z = 4,$$

com o cilindro $y = x^2$.

5.15. Reduza cada uma das equações seguintes à forma canônica e identifique e esboce a quádrica que ela representa.
a) $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$; e) $z = 4x^2 + y^2$;
b) $36x^2 + y^2 + 9z^2 = 9$; f) $16z = 4x^2 - y^2$;
c) $3x^2 - 8y^2 + 4z^2 = 1$; g) $y^2 = x^2 + z^2$;
d) $3x^2 - 8y^2 - 4z^2 = 1$; h) $z^2 = x^2 + 2y^2$.

5.16. Encontre uma superfície tal, que sua interseção com planos da forma $x = k$ dá a elipse

$$\frac{z^2}{4}+\frac{y^2}{9}=k^2,$$

com planos da forma $y = k$, dá a hipérbole

$$9x^2-\frac{9z^2}{4}=k^2,$$

e, com planos da forma $z = k$, dá a hipérbole

$$4x^2-\frac{4y^2}{9}=k^2.$$

5.17. Deduza uma equação do parabolóide de revolução, de vértice na origem, sabendo que sua interseção com o plano $z = 1$ é a circunferência de centro (0, 0, 1) e raio 3.

5.18. Deduza uma equação do parabolóide, de vértice na origem, que contém a elipse cujos vértices são $A(\sqrt{6},0,3)$, $A_1(-\sqrt{6},0,3)$, $B(0,3,3)$ e $B_1(0, -3, 3)$.

5.19. Escreva uma equação do elipsóide que intercepta o plano xy segundo a elipse

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1, \quad z=0,$$

e que contém o ponto (1, 1, 1).

5.20. Escreva uma equação do hiperbolóide de uma folha que intercepta o plano xy segundo a elipse

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \quad z=0,$$

e o plano yz segundo hipérbole

$$\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1, \quad x=0.$$

5.21. Determine os focos e os vértices da elipse

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$
$$y=2.$$

5.22. Determine o centro da circunferência dada pela interseção das superfícies

$z=x^2+y^2$
$x^2+y^2+z^2=1.$

5.23. Determine os focos da cônica obtida pela interseção do plano $z=2$ com o cone gerado pela rotação da reta r em torno da reta s, sendo

$$r: \begin{array}{l} x=0 \\ y=2z \end{array} \qquad s: \begin{array}{l} x=0 \\ y=t \\ z=t. \end{array}$$

5.24. Determine m para que o cone gerado pela rotação da reta $y=mz$, $x=0$, em torno da reta $y=z$, $x=0$, intercepte o plano $x=1$ segundo a cônica $2yz=1$.

5.3 CURVAS NO ESPAÇO

No estudo das superfícies, apresentado nos parágrafos anteriores, algumas vezes mencionamos curvas no espaço. As cônicas, por exemplo, surgiram ao fazermos interseções das quádricas com os planos coordenados. Em todos os casos, elas ficavam determinadas por pares de equações cartesianas. De modo geral, o gráfico de uma equação cartesiana no espaço é uma superfície, e uma curva no espaço não fica determinada por uma única equação. Determina-se, então, uma curva no espaço pela interseção de duas superfícies. O sistema constituído pelas equações das duas superfícies dá as equações cartesianas da curva.

Exemplo. Focos e vértices da cônica

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$$

$$z=2.$$

A cônica é dada pela interseção de um hiperbolóide de uma folha e um plano.

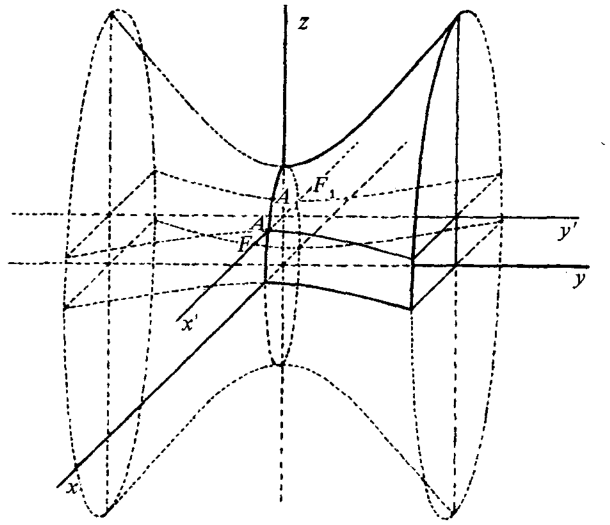


Fig. 5.22

Fazendo $z = 2$ na equação do hiperbolóide, obtemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{4}{16} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{3} - \frac{y^2}{\frac{27}{4}} = 1. \tag{1}$$

Da Figura 5.22 ou da Equação (1), concluímos que a cônica é uma hipérbole. Embora a Equação (1) esteja nas variáveis x e y, a hipérbole está no plano $z = 2$, representado, na figura, pelas retas x' e y', concorrentes em (0, 0, 2). Contudo, sendo o plano $z = 2$ paralelo a xy, tudo se passa como se a curva estivesse contida no plano xy. Da Equação (1), vemos que

$$a^2 = 3 \text{ e } b^2 = \frac{27}{4}.$$

Logo,

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{39}{4}.$$

Portanto, os focos são

$$F\left(\frac{\sqrt{39}}{2}, 0, 2\right) \text{ e } F_1\left(-\frac{\sqrt{39}}{2}, 0, 2\right),$$

e os vértices são

$$A(\sqrt{3},0,2) \text{ e } A_1(-\sqrt{3},0,2).$$

Outra maneira conveniente de se escrever equações de uma curva no espaço consiste em resolver o sistema formado pelas equações das superfícies que definem a curva e dar sua solução geral em função de uma das variáveis. Utilizamos esta técnica quando estudamos equações de reta no espaço. As equações, assim obtidas, são chamadas ***equações paramétricas.***

Exemplo. Equações paramétricas da curva definida pela interseção do parabolóide $x = y^2 + z^2$ com o plano $y = z$.

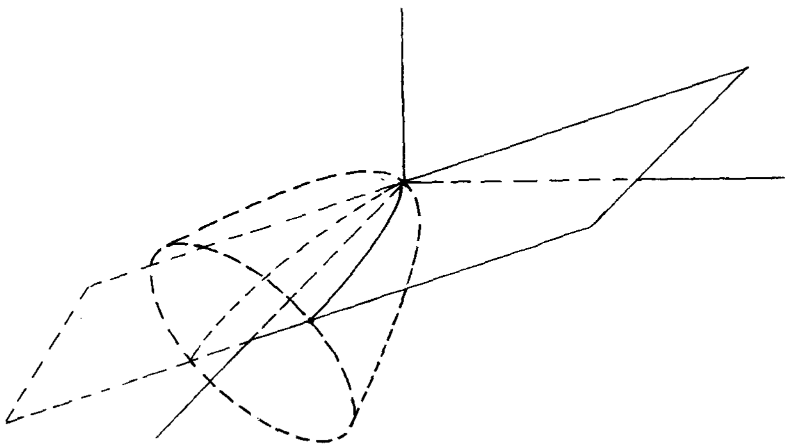


Fig. 5.23

Solução. Das equações dadas, obtemos

$$x = z^2 + z^2 = 2z^2.$$

Logo, os pontos da interseção das duas superfícies são da forma

$$\begin{aligned} &x = 2z^2 \\ &y = z \\ &z, \text{ qualquer.} \end{aligned}$$

Fazendo $z = t$ (parâmetro que pode assumir qualquer valor real), obtemos

$$\begin{aligned} x &= 2t^2 \\ y &= t \\ z &= t, \end{aligned}$$

que são equações paramétricas da curva dada.

As equações paramétricas de uma curva no espaço não são únicas. No exemplo acima, fazendo $z = 2s - 1$, por exemplo, obtemos

$$x = 2(2s - 1)^2$$
$$y = 2s - 1$$
$$z = 2s - 1,$$

que também são equações paramétricas da curva dada. No entanto, os dois sistemas de equações são equivalentes. Isto quer dizer que quando t e s percorrem o conjunto dos números reais, utilizando qualquer um dos dois sistemas, obtemos o mesmo conjunto de pontos do espaço.

Exemplo. Parametrização do arco de circunferência definido pela interseção das superfícies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$
$$x + y = 3$$

e situado acima do plano xy.

Solução. As superfícies dadas, conforme se vê na Figura 5.24, é uma esfera de centro na origem e raio 3 e um plano paralelo ao eixo z. Da equação do plano temos

$$x = 3 - y.$$

Substituindo este valor na equação da esfera e resolvendo, em z, a equação resultante, obtemos

$$z = \pm\sqrt{6y - 2y^2}.$$

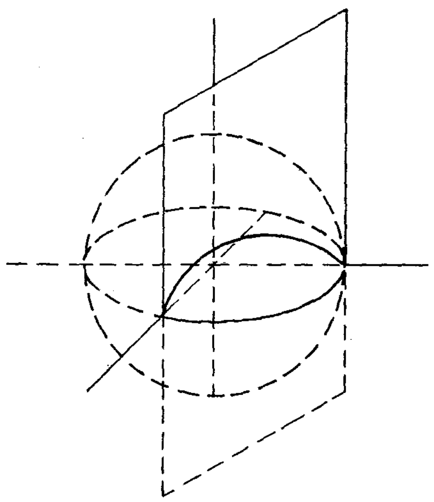


Fig. 5.24

Examinando o radical

$$\sqrt{6y - 2y^2},$$

ou a Figura 5.24, vemos que o valor de z só está definido para y entre 0 e 3. Neste intervalo, a cada valor de y correspondem dois valores de z. O valor positivo de z, isto é,

$$z = \sqrt{6y - 2y^2}$$

corresponde ao arco situado acima do plano xy. Logo, os pontos (x, y, z) da interseção das duas superfícies, situados acima do plano xy, são tais que

$$\begin{aligned} &x = 3 - y \\ &y, \text{ qualquer valor entre } 0 \text{ e } 3 \\ &z = \sqrt{6y - 2y^2}. \end{aligned}$$

Fazendo $y = t$, temos

$$\begin{aligned} &x = 3 - t \\ &y = t \qquad\qquad 0 \leq t \leq 3 \\ &z = \sqrt{6t - 2t^2} \end{aligned}$$

que é uma parametrização, em t, do arco.

Em geral, as equações paramétricas de uma curva no espaço são da forma

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t), \end{aligned}$$

onde $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são funções da variável t, definidas em algum intervalo da reta. A cada valor t_0 deste intervalo corresponde o ponto

$$P(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$$

da curva. Assim, a curva cujas equações paramétricas são

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

pode ser imaginada como sendo a trajetória de um ponto M que se move no espaço e cuja posição no instante t é

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Com esta interpretação, podemos imaginar o vetor

$$P(t) - P(t_0)$$

como sendo o deslocamento do ponto M no intervalo de tempo $t - t_0$. Daí, o vetor velocidade média de M ao deslocar-se de $P(t_0)$ a $P(t)$ é

$$\frac{P(t)-P(t_0)}{t-t_0}=\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0},\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\right)$$

e o vetor velocidade de M em $t = t_0$ é

$$V(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{P(t)-P(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0},\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\right),$$

caso este limite exista. Pode-se demonstrar que se as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ tiverem derivadas em $t = t_0$, então

$$V(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Na Figura 5.25 as setas tracejadas indicam vetores velocidades médias

$$\frac{P(t)-P(t_0)}{t-t_0}.$$

Quando t tende para t_0, estes vetores tendem para o vetor velocidade $V(t_0)$, que é tangente à curva em $P(t_0)$.

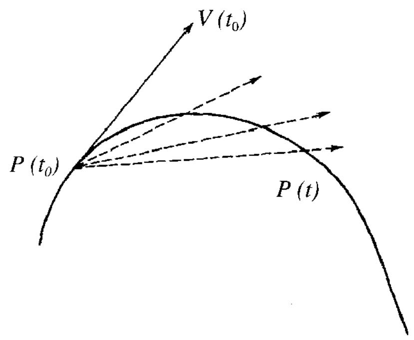


Fig. 5.25

Exemplo. Um vetor tangente à curva cujas equações paramétricas são

$$x = 2t^2$$
$$y = t$$
$$z = t$$

no ponto genérico $P(t) = (2t^2, t, t)$ é

$$V(t) = (4t, 1, 1).$$

Para $t = 0$, temos

$$V(0) = (0, 1, 1),$$

que é um vetor tangente no ponto $(0, 0, 0)$.

A curva do exemplo anterior é a parábola mostrada na Figura 5.23. Já observamos que

$$\begin{aligned} x &= 2(2s - 1)^2 \\ y &= 2s - 1 \\ z &= 2s - 1 \end{aligned}$$

também são equações paramétricas desta mesma parábola. Utilizando esta parametrização, temos que

$$V(s) = (8(2s - 1), 2, 2)$$

é um vetor tangente à parábola no ponto $P(s)$. Para $s = 1/2$, temos

$$P(½) = (0, 0, 0) \text{ e } V(½) = (0,2,2).$$

Como

$$(0, 2, 2) = 2(0, 1, 1),$$

vemos que o vetor velocidade calculado usando a segunda parametrização é o dobro do vetor velocidade dado pela primeira parametrização. Em geral, o vetor velocidade depende da parametrização, o que é compreensível, pois a mesma trajetória pode ser percorrida com velocidades diferentes. No entanto, a direção do vetor velocidade não muda por ser tangente à curva.

A partir das equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

de uma curva podemos deduzir as equações da reta tangente a esta curva no ponto $P(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. De fato, se o vetor velocidade

$$V(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

não for o vetor nulo, as equações paramétricas da reta tangente em $P(t_0)$ são dadas por

$$\begin{aligned} x &= x(t_0) + x'(t_0)t \\ y &= y(t_0) + y'(t_0)t \\ z &= z(t_0) + z'(t_0)t. \end{aligned}$$

Exemplo. Reta tangente à curva

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ &y = 2 \end{aligned}$$

no ponto $(1, 2, \frac{3\sqrt{2}}{2})$.

Solução. Neste caso, a curva é dada pela interseção de duas superfícies, a saber, de um elipsóide e de um plano. Veja a Figura 5.26

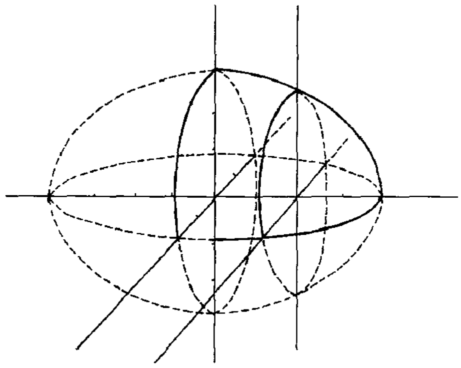


Fig. 5.26

Conforme vimos anteriormente, as equações paramétricas desta curva são da forma

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t).$$

Como a curva está contida tanto no elipsóide quanto no plano, devemos ter

$$\frac{x(t)^2}{4}+\frac{y(t)^2}{16}+\frac{z(t)^2}{9}=1 \quad \text{e} \quad y(t)=2,$$

qualquer que seja o ponto $(x(t), y(t), z(t))$ da curva. Logo, $y(t)$ é a função constante

$$y(t) = 2$$

e $x(t)$ e $z(t)$ são tais que

$$\frac{x(t)^2}{4}+\frac{4}{16}+\frac{z(t)^2}{9}=1. \tag{1}$$

Derivando esta equação em relação a t, obtemos

$$\frac{x(t)x'(t)}{2}+\frac{2z(t)z'(t)}{9}=0. \tag{2}$$

Como o ponto $(1, 2, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ pertence à curva, para algum valor t_0 de t devemos ter

$$x(t_0) = 1$$

$$y(t_0) = 2$$

$$z(t_0) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Substituindo este valor de t em (2), obtemos

$$\frac{1x'(t_0)}{2} + \frac{2.\frac{3\sqrt{2}}{2}z'(t_0)}{9} = 0 \text{ ou } x'(t_0) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}z'(t_0).$$

Portanto, o vetor velocidade

$$V(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

no ponto $(1, 2, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ é tal que

$$V(t_0) = (-\frac{2\sqrt{2}}{3}z'(t_0), 0, z'(t_0)) = (-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, 1)z'(t_0).$$

Logo,

$$(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, 1)$$

é um vetor tangente à curva em

$$(1, 2, \frac{3\sqrt{2}}{2})$$

e as equações paramétricas da reta tangente são

$$x = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}t$$

$$y = 2$$

$$z = \frac{3\sqrt{2}}{3} + t.$$

No último exemplo, determinamos o vetor tangente sem explicitar as equações paramétricas da curva. Outra alternativa seria, a partir da Equação (1), determinar uma parametrização particular da curva e, em seguida, obter o vetor tangente. Seguindo o método utilizado no exemplo, pode-se verificar que um vetor tangente à curva dada pela interseção do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

com o plano

$$y = y_0,$$

no ponto (x_0, y_0, z_0), é

$$V_y = (-a^2z_0, 0, x_0c^2)$$

e que um vetor tangente à interseção do mesmo elipsóide com o plano

$$x = x_0,$$

também no ponto (x_0, y_0, z_0), é

$$V_x = (0, -b^2z_0, c^2y_0).$$

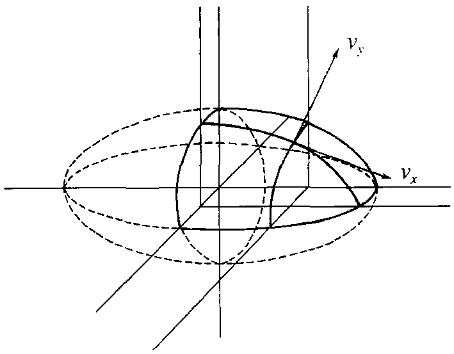


Fig. 5.27

Portanto, o produto vetorial

$$V_y \times V_x = (b^2c^2x_0y_0,\ a^2c^2y_0z_0,\ a^2b^2z_0^2) = z_0a^2b^2c^2\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)$$

é perpendicular tanto a V_y quanto a V_x. Na verdade, o vetor $V_y \times V_x$ ou o vetor

$$N=\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)$$

é perpendicular ao vetor velocidade, em (x_0, y_0, z_0), de qualquer curva contida no elipsóide e que passa por (x_0, y_0, z_0). De fato, se

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

é uma curva contida no elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

e tal que para o valor t_0 de t

$$(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0),$$

então

$$\frac{x(t)^2}{a^2}+\frac{y(t)^2}{b^2}+\frac{z(t)}{c^2}=1.$$

Derivando esta equação em relação a t e fazendo $t = t_0$, obtemos

$$\frac{x(t_0)x'(t_0)}{a^2}+\frac{y(t)y'(t_0)}{b^2}+\frac{z(t_0)z'(t_0)}{c^2}=0$$

ou

$$\frac{x_0x'(t_0)}{a^2}+\frac{y_0y'(t_0)}{b^2}+\frac{z_0z'(t_0)}{c^2}=0,$$

que reescrita na forma

$$\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)\cdot(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))=0$$

mostra que o vetor N é perpendicular ao vetor velocidade

$$V(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Um vetor, como N, perpendicular a todo vetor tangente no ponto (x_0, y_0, z_0) é dito ***normal*** ao elipsóide no ponto (x_0, y_0, z_0). O plano que contém (x_0, y_0, z_0) e é perpendicular a N é chamado ***plano tangente*** ao elipsóide em (x_0, y_0, z_0). A equação do plano tangente é, pois,

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

ou

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=1.$$

A noção de plano tangente introduzida para o elipsóide pode ser estendida às demais quádricas. Caso exista, o plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0) é o plano que contém este ponto e é perpendicular ao vetor $V_y \times V_x$, onde V_y e V_x são, respectivamente, vetores tangentes em (x_0, y_0, z_0) às curvas que se obtêm pela interseção da quádrica com os planos de equações $y = y_0$ e $x = x_0$.

Ao interpretarmos a curva cujas equações paramétricas são

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

como a trajetória de um ponto que se move no espaço, associamos a cada ponto $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ desta curva o vetor velocidade

$$V(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Se $V(t)$ e $V(t_0)$ indicam as velocidades, respectivamente, nos pontos $P(t)$ e $P(t_0)$, o vetor

$$\frac{V(t)-V(t_0)}{t-t_0}=\left(\frac{x'(t)-x'(t_0)}{t-t_0},\frac{y'(t)-y'(t_0)}{t-t_0},\frac{z'(t)-y'(t_0)}{t-t_0}\right)$$

dá a variação média da velocidade no intervalo $t - t_0$. A variação instantânea da velocidade no ponto t_0 é dada pelo vetor

$$A(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{V(t)-V(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\left(\frac{x'(t)-x'(t_0)}{t-t_0},\frac{y'(t)-y'(t_0)}{t-t_0},\frac{z'(t)-z'(t_0)}{t-t_0}\right),$$

que é chamado vetor aceleração no ponto $P(t_0)$.

Pode-se demonstrar que se as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ tiverem derivadas segundas em $t = t_0$, então

$$A(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0)).$$

O vetor aceleração pode também ser calculado em função da velocidade escalar, ou seja, em função de $v(t)$, onde

$$v(t) = \|V(t)\|.$$

Neste caso, obtemos $A(t)$ derivando a expressão

$$V(t) = v(t)\,\frac{V(t)}{v(t)} = v(t)\,T(t),$$

onde

$$T(t) = \frac{V(t)}{v(t)}$$

é um vetor unitário e tangente à curva em $P(t)$. Temos

$$A(t) = V'(t) = v(t)\, T'(t) + v'(t)\, T(t). \tag{3}$$

Sendo $T(t)$ um vetor unitário, temos que

$$T(t).\, T(t) = 1$$

e daí que

$$T(t)\, .\, T'(t) + T'(t)\, .\, T(t) = 0.$$

Como $T(t)\, .\, T'(t) = T'(t)\, .\, T(t)$, segue que

$$2\, T(t)\, .\, T'(t) = 0 \;\text{ ou }\; T(t)\, .\, T'(t) = 0,$$

que mostra que $T'(t)$ é perpendicular a $T(t)$.

Combinando este resultado com (3), vemos que o vetor aceleração no ponto $P(t)$ é a soma de dois vetores perpendiculares, a saber,

$$v'(t)\, T(t) \quad \text{e} \quad v(t)\, T'(t).$$

$v'(t)\, T(t)$ é tangente à trajetória (componente tangencial da aceleração) e $v(t)\, T'(t)$ é perpendicular à trajetória (componente normal da aceleração). Veja a Figura 5.28

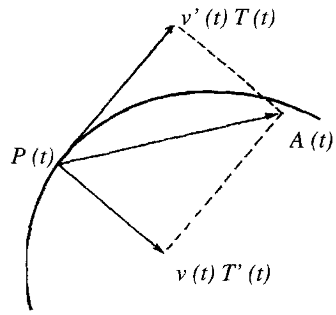


Fig. 5.28

O plano que contém o ponto $P(t)$ e é paralelo aos vetores $T(t)$ e $T'(t)$ é chamado plano ***osculador*** no ponto $P(t)$.

Exemplo. Equação cartesiana do plano osculador da curva

$$x = \cos t$$
$$y = \operatorname{sen} t$$
$$z = t$$

no ponto $P(0) = (1, 0, 0)$.

Solução. Neste caso, temos

$$V(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$$

e

$$T(t) = \frac{V(t)}{\|V(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1).$$

Logo,

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0).$$

Para $t = 0$, temos

$$T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \text{ e } T'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0).$$

Como o plano osculador é paralelo tanto a $T(0)$ quanto a $T'(0)$, segue que o produto vetorial

$$T(0) \times T'(0) = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

é perpendicular a este plano. Daí, sua equação cartesiana é

$$0(x-1) - \frac{1}{2}(y-0) + \frac{1}{2}(z-0) = 0 \text{ ou } y - z = 0.$$

Quando uma curva está contida em um plano α, os vetores $T(t)$ e $T'(t)$ são ambos paralelos a α e o plano osculador, em qualquer ponto da curva, é o próprio plano α. No caso de curvas não planas, isto é, não-contidas em um plano, o plano osculador em um ponto $T(t_0)$ da curva é o plano que melhor se ajusta à curva neste ponto, no seguinte sentido: se $P(t_0)$, $P(t_1)$ e $P(t_2)$ são pontos da curva, o plano definido por $P(t_0)$, $P(t_1)$ e $P(t_2)$ tende ao plano osculador em $P(t_0)$ quando t_1 e t_2 tendem a t_0.

Exemplo. Um ponto move-se no espaço de modo que no instante t sua posição é

$$P(t) = (1 + t,\ t,\ -t^2 + 4t).$$

a) Escreva as equações paramétricas da trajetória descrita pelo ponto no intervalo de tempo 0 a 5.

b) Mostre que o movimento da projeção do ponto no plano xy é retilíneo e uniforme.

c) Em que instante a projeção do ponto no eixo z atinge a altura máxima?

Solução.

a) $x = 1 + t$
$y = t$
$z = -t^2 + 4t, \quad 0 \leq t \leq 5.$

b) Como a projeção de $(1 + t, t, -t^2 + 4t)$ no plano xy é

$$(1 + t,\ t,\ 0),$$

segue que, no instante t, a posição da projeção do ponto no plano xy é dada por

$$P_0(t) = (1 + t,\ t,\ 0).$$

Daí, temos que a trajetória da projeção é

$$x = 1 + t$$
$$y = t$$
$$z = 0,$$

que é a reta que contém o ponto $(1, 0, 0)$ e é paralela ao vetor $(1, 1, 0)$. Isto significa que o movimento da projeção se inicia no ponto $(1, 0, 0)$ e tem velocidade constante $v = (1, 1, 0)$, sendo, portanto, retilíneo e uniforme.

c) O movimento da projeção do ponto no eixo z é dado por

$$P_z(t) = (0,\ 0,\ -t^2 + 4t).$$

Sua altura será máxima quando o valor de

$$z = -t^2 + 4t$$

for máximo. Utilizando o cálculo diferencial, vemos que isto se dá quando

$$z' = -2t + 4 = 0, \quad \text{ou seja, para } t = 2.$$

Como

$$(x(t), y(t), z(t)) = (x(t), y(t), 0) + (0, 0, z(t)),$$

em qualquer caso, o movimento do ponto cuja posição no instante t é $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ pode ser decomposto num componente horizontal

$$P_0(t) = (x(t), x(t), 0)$$

e num componente vertical

$$P_z(t) = (0, 0, z(t)),$$

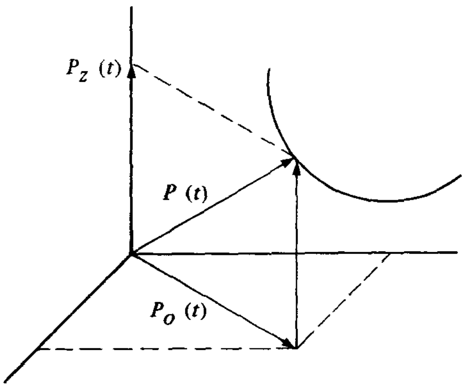


Fig. 5.29

O componente horizontal

$$P_o(t) = (x(t), y(t), 0)$$

dá a posição, no instante t, da projeção do ponto no plano xy, e o componente vertical

$$P_z(t) = (0, 0, z(t))$$

determina a projeção do ponto no eixo z, no instante t.

O movimento do ponto é retilíneo e uniforme se, e somente se, os movimentos de suas projeções, no plano xy e no eixo z, são, também, retilíneos e uniformes.

A seguir, vamos examinar a trajetória de um ponto, que se move no espaço, de modo que os movimentos de suas projeções no plano xy e no eixo z, são, respectivamente, circular uniforme e retilíneo uniforme. Primeiro notemos que, sendo o movimento da projeção horizontal circular, é claro que o movimento do ponto se dá sobre um cilindro circular. Para maior simplicidade, vamos supor que o eixo do cilindro seja o eixo z e que, no instante $t = 0$, a posição do ponto seja $(1, 0, 0)$.

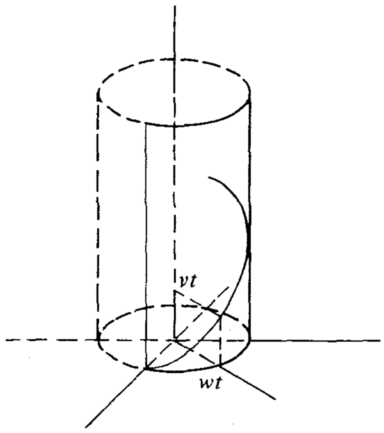


Fig. 5.30

Nesta condição, se w é a velocidade angular da projeção horizontal do ponto, wt é o ângulo descrito no intervalo de tempo t. Logo, o componente horizontal do movimento é

$$P_o(t) = (R \cos wt,\ R \operatorname{sen} wt,\ 0),$$

onde R é o raio do cilindro. Analogamente, se v é a velocidade escalar da projeção do ponto no eixo z, vt é o espaço percorrido no intervalo de tempo t e

$$P_z(t) = (0,\ 0,\ vt)$$

é o componente vertical do movimento. Logo,

$$P(t) = P_o(t) + P_z(t) = (R \cos wt,\ R \operatorname{sen} t,\ vt).$$

Portanto, em termos de t, as equações paramétricas da trajetória do ponto são:

$$\begin{aligned} x &= R \cos wt \\ y &= R \operatorname{sen} wt \\ z &= vt. \end{aligned}$$

Se no instante $t = 0$ a posição do ponto é $(x_o,\ y_o,\ z_o)$, as equações paramétricas de sua trajetória são:

$$\begin{aligned} x &= R \cos (\theta + wt) \\ y &= R \operatorname{sen} (\theta + wt) \\ z &= z_o + vt, \end{aligned}$$

onde θ é o ângulo entre $P_o(0) = (x_o,\ y_o,\ 0)$ e $(1, 0, 0)$. Esta trajetória (veja a Figura 5.31) é uma curva chamada ***hélice.***

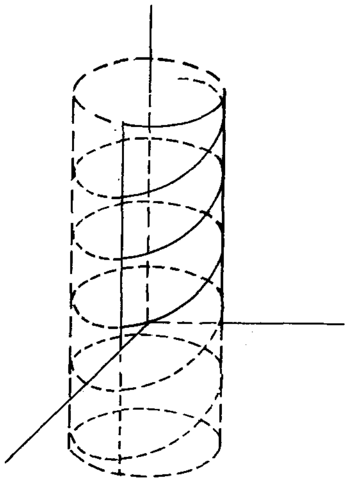


Fig. 5.31

Exercícios

5.25. Escreva equações paramétricas da curva dada pela interseção das superfícies
a) $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
b) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ e $y = x^2 + 2$.

5.26. Mostre que a curva dada pela interseção das superfícies

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

não é plana.

5.27. Verifique que a curva cuja equações paramétricas são

$$x = \cos t$$
$$y = \text{sen } t$$
$$z = t$$

intercepta o plano $x - y = 0$ numa infinidade de pontos.

5.28. Deduza equações paramétricas da interseção
a) do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$;
b) dos cilindros $x = z^2$ e $x = 1 - y^2$.

5.29. Mostre que a tangente à curva

$$x = 6t$$
$$x = 3t^2$$
$$z = t^3$$

faz um ângulo constante com o vetor (1, 0, 1).

5.30. a) Escreva as equações da reta tangente à curva dada pela interseção do parabolóide

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

com o plano $x = 2$, no ponto (2, 3, 2).

b) Escreva a equação cartesiana do plano tangente ao parabolóide

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

no ponto (x_o, y_o, z_o).

5.31. Escreva a equação cartesiana do plano osculador da curva

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= e^t \\ z &= \cos t, \end{aligned}$$

no ponto (0, 1, 1).

CAPÍTULO 6

NÚMEROS COMPLEXOS E COORDENADAS POLARES

6.1 NÚMEROS COMPLEXOS

Ao se resolver a **equação** $x^2 - 4x + 13 = 0$, aplicando a fórmula de Báskara, obtêm-se as raízes

$$\frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2},$$

que não são **números reais**. Admitindo-se que se possa escrever

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36.(-1)} = 6\sqrt{-1},$$

as raízes são

$$2 \pm 3\sqrt{-1}.$$

A resolução de equações algébricas como esta motivou a criação dos ***números complexos***, isto é, números da forma $a + bi$, em que a e b são números reais e $i = \sqrt{-1}$ é a ***unidade imaginária***. No entanto, a aceitação dos números complexos pelos matemáticos foi difícil e lenta. Por exemplo, no tempo de Cardono (1501-1576) e Tartaglia (1499-1557), a quem devemos a fórmula

$$x = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}} + \sqrt[3]{q/2 - \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}}$$

para a resolução da equação $x^3 + px = q$, ainda não se admitiam os números complexos. Pela fórmula de Tartaglia, a resolução da equação

$$x^3 - 15x = 4$$

leva a

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Ora, como se vê por substituição direta, $x = 4$ é uma raiz da equação. Isto significa que a expressão de x, acima, deve conter também o número real 4, ou seja,

$$4 = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Isto mostra a necessidade de se considerar os números complexos, mesmo que se concordasse em só aceitar raízes reais.

Um número complexo $a + bi$ fica determinado pelo par (a, b), formado pelas suas ***partes real*** a e ***imaginária*** b. Desta maneira, podemos representá-lo por um ponto ou um vetor no plano. Na Figura 6.1, estão representados alguns números complexos.

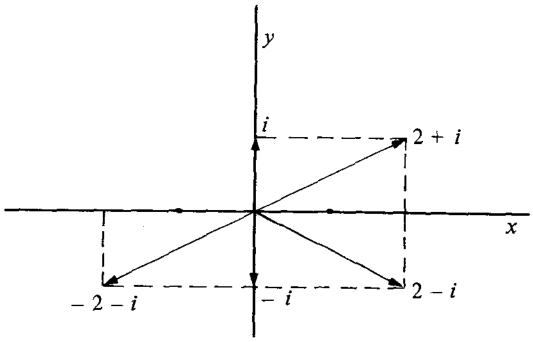


Fig. 6.1

Esta interpretação dos números complexos sugere as seguintes definições:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c,\ b = d;$$
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$
$$k(a + bi) = (ka) + (kb)i;$$

sendo k um número real e $a + bi$, $c + di$ números complexos. Podemos definir também uma ***multiplicação de números complexos***

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Observe que, de acordo com esta definição, temos que

$$i^2 = -1, \quad bi = ib.$$

Da maneira como essas operações foram definidas, são válidas as propriedades comutativa, associativa e distributiva.

Um número real a pode ser considerado como número complexo da forma $a + 0i$. Deste modo, a notação $a + bi$ ganha novo sentido: soma do número real a, visto como complexo, com o produto bi. Assim, as operações com números complexos podem ser efetuadas utilizando-se as propriedades comutativa, associativa e distributiva, e a igualdade $i^2 = -1$. Exemplos:

$$(-2-3i) + (7 + i) = 5 - 2i$$
$$(3 - 2i)(2 + i) = 6 + 3i - 4i - 2i^2 = 6 - i + 2 = 8 - i.$$

O ***oposto*** do número complexo $z = a + bi$ é o número $-z = (-1)z = -a - bi$, enquanto que o seu ***conjugado*** é $\bar{z} = a - bi$. Na Figura 6.1, aparecem o número $2 + i$, o seu oposto $-2 - i$ e o seu conjugado $2 - i$.

A ***diferença*** de números complexos é dada por

$$(a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i.$$

Se $z = a + bi \neq 0$, o número $z^{-1} = x + yi$ tal que

$$zz^{-1} = 1$$

é chamado ***inverso*** de z. Da igualdade

$$(a + bi)(x + yi) = 1$$

obtém-se

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2},\ y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Portanto,

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

O *quociente* de $z = a + bi$ por $w = c + di \neq 0$ é definido por zw^{-1}, e pode ser calculado assim:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Exercícios

6.1. Prove que
   a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
   b) $\overline{zw} = \bar{z}\ \bar{w}$;
   c) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$;
   d) $\bar{\bar{z}} = z$.

6.2. Calcule: i^3, i^4, i^5, i^{241}.

6.3. Efetue:
   a) $(1 + i)^3 + (1 - i)^3$;
   b) $(1 + i)^3(1 - i)^3$;
   c) $\frac{(1 + i)^3}{(1 - i)^3}$.

6.4. Seja $z = 3 + 2i$. Represente no plano os números z, $\bar{z}$, $1/z$, $1/\bar{z}$, zi, $-z$. Observe que z e $1/\bar{z}$ têm a mesma direção, e que zi é perpendicular a z.

6.5. Efetue:

$$\frac{(3+3i)+(0{,}4-5{,}6i)}{5-2i}.(2{,}1+3{,}6i).$$

6.2 GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO COMPLEXO

A Geometria Analítica no plano, estudada no Capítulo 2, pode ser refeita, com certas vantagens, utilizando-se a estrutura mais rica dos números complexos.

O ***módulo*** do número complexo $z = x + yi$ é dado por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Observe que

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

A *distância* entre os números complexos $z = x + yi$ e $z_0 = x_0 + y_0 i$ é dada por

$$d(z, z_0) = |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

de modo que uma *equação da circunferência* de centro z_0 e raio r é (veja a Figura 6.2)

$$|z - z_0| = r.$$

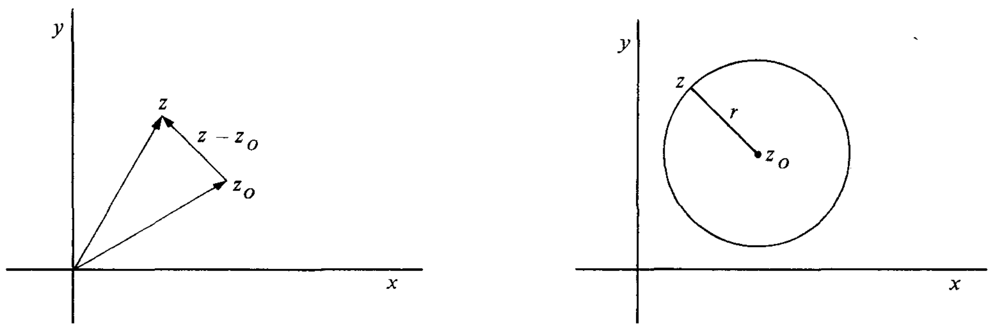


Fig. 6.2

Dados os números complexos z_0 e $w \neq 0$, uma *equação paramétrica da reta* que passa por z_0 e tem a direção de w é (veja a Figura 6.3)

$$z = z_0 + wt,$$

onde t é um parâmetro real.

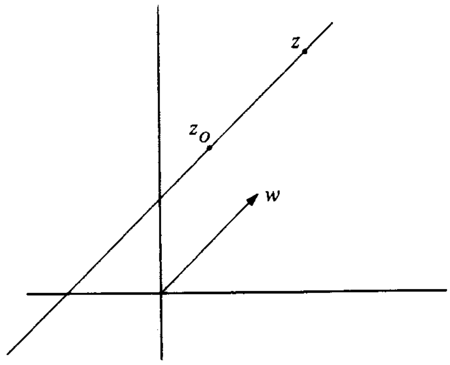


Fig. 6.3

Exemplo. Reta que passa por $z_0 = 2 + 3i$ e é paralela a $w = -3 + i$.

Solução. A equação paramétrica é

$$z = z_0 + wt$$

ou

$$x + yi = 2 + 3i + (-3 + i)t = 2 - 3t + (3 + t)i.$$

Observe que, igualando as partes real e imaginária desta equação, obtemos

$$x = 2 - 3t$$
$$y = 3 + t,$$

que são as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto (2, 3) e é paralela ao vetor (-3, 1), como na Seção 2.8 do Capítulo 2.

Exemplo. Como vimos na Seção 2.9 do Capítulo 2, toda reta tem uma equação cartesiana da forma $Ax + By + C = 0$. Escreva a equivalente desta equação usando variável complexa.

Solução. Primeiro, observemos que as partes real e imaginária do número $z = x + yi$ podem ser escritas em função de z e $\bar{z} = x - yi$, como segue:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Substituindo estes valores na equação dada, obtemos

$$A\frac{z + \bar{z}}{2} + B\frac{z - \bar{z}}{2i} + C = 0$$

ou

$$(A - Bi)z + (A + Bi)\bar{z} + 2C = 0,$$

que é a equação pedida.

Em geral, uma equação da forma

$$az + b\bar{z} + c = 0,$$

onde a, b, c e z são complexos, pode representar uma reta, um ponto ou o conjunto vazio. Para ver isto, basta o leitor observar que esta equação complexa é equivalente a um sistema de duas equações com duas incógnitas, reais.

Interpretando os números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$ como pares ordenados, definimos seu ***produto escalar***, de modo natural, como sendo o número

$$x_1x_2 + y_1y_2.$$

Para evitar confusões com o produto, usaremos a notação $< z_1, z_2 >$ para indicar o produto escalar de números complexos. Temos, portanto,

$$<z_1, z_2> = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Observe que se θ é o ângulo entre as setas que representam z_1 e z_2, então

$$<z_1, z_2> = |z_1|\,|z_2| \cos\theta.$$

Observe, ainda, que, como

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 z_2 &= x_1x_2 + y_1y_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)i, \\ z_1\bar{z}_2 &= x_1x_2 + y_1y_2 - (x_1y_2 - x_2y_1)i \end{aligned}$$

vale

$$<z_1, z_2> = \mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = \frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2)$$

onde "**Re**" significa "parte real de".

Usando esta notação, é fácil ver que, qualquer que seja o número complexo w, temos

$$<w, wi> = 0,$$

ou seja, que wi é perpendicular a w. Também, se $w \neq 0$, w e $1/\bar{w}$ têm a mesma direção (veja a Figura 6.4).

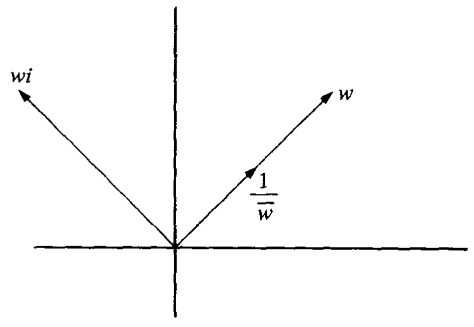


Fig. 6.4

De fato, como

$$< w, wi > = \mathrm{Re}(\overline{w}wi) = \mathrm{Re}(|w|^2 i) = 0,$$

temos que w e wi são perpendiculares. De modo análogo, temos

$$< w, \frac{1}{\overline{w}} > = \mathrm{Re}(\overline{w}\,\frac{1}{\overline{w}}) = \mathrm{Re}(1) = 1,$$

o que mostra que o ângulo entre w e $1/\overline{w}$ é $0°$. Este último resultado pode também ser deduzido da igualdade

$$w = \frac{w\overline{w}}{\overline{w}} = |w|^2 \frac{1}{\overline{w}},$$

que, em particular, mostra que $w = 1/\overline{w}$, se $|w| = 1$.

Exemplo. Equação da mediatriz do segmento de extremos w e $1/\overline{w}$, $w \neq 0$ e $|w| \neq 1$.

Solução. Um ponto da mediatriz é

$$\frac{w + \frac{1}{\overline{w}}}{2} = \frac{|w|^2 + 1}{2\overline{w}},$$

que é o ponto médio do segmento de extremos w e $1/\overline{w}$. Como wi tem a direção da mediatriz por ser perpendicular a w, temos

$$z = \frac{|w|^2 + 1}{2\overline{w}} + twi,$$

que é a equação paramétrica procurada.

Para escrever a equação desta reta em termos de z e $\overline{z}$ basta eliminar t no sistema

$$z = \frac{|w|^2 + 1}{2\overline{w}} + twi$$

$$\overline{z} = \frac{|w|^2 + 1}{2w} - t\overline{w}i,$$

onde a última equação foi obtida da primeira utilizando-se as propriedades de conjugado. Adicionando as duas equações e simplificando o resultado, obtemos

$$\overline{w}z + w\overline{z} - |w|^2 - 1 = 0.$$

Exemplo. Mostre que todas as circunferências que passam por w e $1/\overline{w}$ interceptam a circunferência $|z| = 1$ em ângulos retos.

Solução. Sejam z_0 e r o centro e o raio de uma circunferência C que passa por w e $1/\overline{w}$, e seja z um ponto da interseção com a circunferência $|z| = 1$. Devemos mostrar que os raios z e $z - z_0$ são perpendiculares (Figura 6.5), ou seja, que é zero o produto escalar

$$<z, z-z_0>=\frac{1}{2}[\bar{z}(z-z_0)+z(\overline{z-z_0})]=\frac{1}{2}(|z|^2-\bar{z}z_0+|z|^2-\bar{z}z_0)=\frac{1}{2}(2-\bar{z}z_0-\bar{z}z_0).$$

Vamos mostrar que $2 - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 = 0$. Como z_0 está na mediatriz do segmento de extremos w e $1/\overline{w}$, pelo exemplo anterior, temos

$$\overline{w}z_0 + w\bar{z}_0 - |w|^2 - 1 = 0.$$

Além disso,

$$|z_0 - w| = r.$$

Como esta última equação é equivalente a

$$(z_0 - w)(\bar{z}_0 - \overline{w}) = r^2 \quad \text{ou} \quad |z_0|^2 - \overline{w}z_0 - w\bar{z}_0 + |w|^2 = r^2,$$

obtemos

$$|z_0|^2 = r^2 + 1. \tag{1}$$

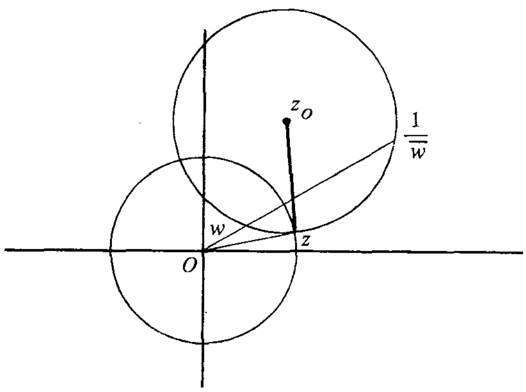


Fig. 6.5

O ponto z de interseção das duas circunferências satisfaz

$$|z|^2 - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + |z_0|^2 = r^2,$$
$$|z| = 1,$$

que, juntamente com (1), produz

$$2 - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 = 0,$$

como queríamos.

Exercícios

6.6. Mostre que

a) $|\bar{z}| = |z|$;
b) $|zw| = |z|\,|w|$;
c) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$
d) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w}$,
$|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w}$.

6.7. Prove a identidade

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2),$$

e enuncie a propriedade geométrica do paralelogramo que ela exprime.

6.8. Prove que, se z está na circunferência $|z| = 1$, então o número

$$\frac{z - w}{1 - \bar{z}w}$$

também está, qualquer que seja $w \neq z$.

6.9. Determine os números reais a e b para que a equação

$$(1 + i)z + (a + bi)\bar{z} + 1 + 2i = 0$$

represente:
a) uma reta;
b) um único ponto;
c) o conjunto vazio.

6.10. Dados os três vértices 2, $2i$ e $2 + 4i$ de um quadrado, determine o quarto vértice.

6.11. Dados os três vértices z_1, z_2 e z_3 de um paralelogramo, determine o quarto vértice.

6.12. Sendo a e c números complexos tais que $|a| \leq |c|$, determine alguns números complexos z que satisfaçam a equação

$$|z - a| + |z + a| = 2|c|.$$

O que acontece quando $|a| > |c|$?

6.13. Escreva a equação de uma hipérbole na forma complexa.

6.3 COORDENADAS POLARES

O produto e o quociente de números complexos têm uma interpretação muito simples quando se usa a forma polar.

As ***coordenadas polares*** de um ponto z do plano são constituídas do par (r, θ) em que r é a distância de z à origem e θ é o ângulo que o vetor z faz com o eixo Ox (veja a Figura 6.6*a*). Por exemplo, $(2, \pi/3)$ está representado na Figura 6.6*b* pelo ponto z_1. Às vezes, permitem-se valores negativos para r convencionando-se, neste caso, marcar a distância $|r|$ na semi-reta oposta, como o ponto z_2 de coordenadas polares $(-1, \pi/3)$ da Figura 6.6*b*.

O par (r, θ) determina, de maneira única, um ponto no plano. No entanto, um ponto no plano pode ter várias coordenadas polares distintas. O ponto z_1, além das coordenadas $(2, \pi/3)$, admite as coordenadas $(2, \pi/3 + 2\pi)$, $(-2, \pi/3 + \pi)$ etc., enquanto que z_2 terá também as coordenadas $(1, \pi/3 + \pi)$. A própria origem tem coordenadas $(0, \theta)$ para θ qualquer. Assim, para obter uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano (exceto a origem) e as coordenadas polares é necessário restringir os intervalos de variação de r e de θ. Por exemplo, pode-se tomar $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

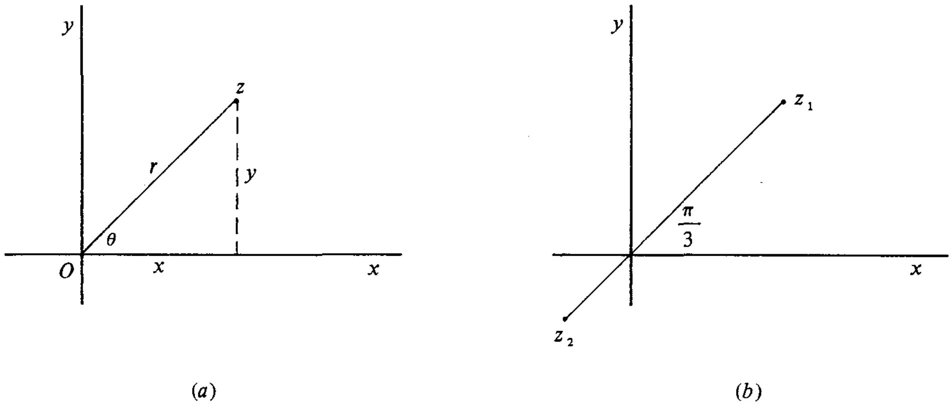


Fig. 6.6

Se as coordenadas polares de $z = x + iy$ são (r, θ), com $r > 0$, temos (veja a Figura 6.6 *a*)

$$x = r\cos\theta,\ y = r \operatorname{sen}\theta,\ r = |z|,$$

donde

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

que é a ***representação polar*** de z. θ denomina-se ***argumento*** de z.

Com a representação polar, o produto de dois números complexos

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2),$$

se escreve

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1)] \\ &= r_1 r_2[(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Uma notação muito utilizada é a seguinte

$$z_1 = r_1 \underline{|\theta_1}, \quad z_2 = r_2 \underline{|\theta_2} \quad \text{e} \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 \underline{|\theta_1 + \theta_2}.$$

A interpretação geométrica do produto é óbvia: o módulo do produto é o produto dos módulos dos fatores, enquanto que o argumento é a soma dos argumentos.

Obtêm-se também as seguintes expressões:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

e

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\,sen\, n\theta).$$

Se $r = 1$ e $z = \cos\theta + i$ sen θ, a última expressão pode ser escrita assim:

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta,$$

denominada ***fórmula de Moivre.***

As ***raízes n-ésimas*** de um número complexo w são os números complexos z que satisfazem a equação

$$z^n = w.$$

Escrevendo

$$w = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \quad \text{e} \quad z = p(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi),$$

temos

$$p^n(\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi) = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta),$$

que é equivalente às equações reais

$$p^n \cos n\phi = r\cos\theta \;\; \text{e} \;\; p^n\,\text{sen}\,n\phi = r\,\text{sen}\,\theta$$

ou, ainda, a

$$p^n = r,\; n\phi = \theta + 2k\pi,$$

donde

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),$$

a qual produz n números distintos, quando se atribui a k os valores $0, 1, \ldots, n - 1$.

Exemplo. *Raízes n-ésimas da unidade.* A forma polar do número 1 é

$$1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0),$$

e, daí, as raízes n-ésimas da unidade são dadas pela expressão

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, ..., n - 1.$$

Por exemplo, as raízes cúbicas de 1 são:

$$\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1,$$
$$\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Representando por w a raiz n-ésima da unidade correspondente a $k = 1$, isto é,

$$w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n},$$

observamos que todas as outras raízes podem ser obtidas a partir de w, pois

$$w^k = \cos k\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen} k\frac{2\pi}{n}.$$

Os pontos

$$w^0, w, w^2, ..., w^{n-1}$$

dividem a circunferência $|z| = 1$ em n partes iguais. A Figura 6.7 mostra as raízes cúbicas da unidade.

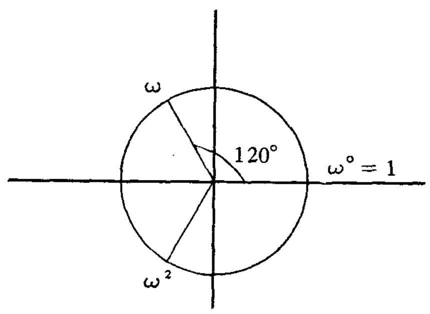


Fig. 6.7

Exemplo. Para determinar as raízes da equação $x^3 - 15x = 4$, citada na Seção 6.1, devemos calcular

$$z = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}.$$

A forma polar de $2 + 11i$ é, em números aproximados,

$$11{,}18(\cos 79{,}7° + i \operatorname{sen} 79{,}7°).$$

Logo, as raízes cúbicas de $2 + 11i$ são

$$\sqrt[3]{11{,}18}\left(\cos\frac{79{,}7°+k.360°}{3} + i\operatorname{sen}\frac{79{,}7°+k.360°}{3}\right), k=0,1,2.$$

Obtemos,

para $k = 0$: $2 + i$
para $k = 1$: $-1{,}87 + 1{,}23i$
para $k = 2$: $-0{,}13 - 2{,}23i$.

Da mesma maneira, obtemos as raízes cúbicas de $2 - 11i$:

para $k = 0$: $2 - i$
para $k = 1$: $-0{,}13 + 2{,}23i$
para $k = 2$: $1{,}87 - 1{,}23i$.

A dedução da fórmula de Tartaglia indica o seguinte procedimento para determinar as raízes: escolhe-se uma raiz cúbica z_1 de $2 + 11i$ e uma raiz cúbica z_2 de $2 - 11i$ tais que

$$z_1 z_2 = -\frac{p}{3} = -\frac{-15}{3} = 5.$$

Escolhemos,

$$z_1 = 2 + i,\ z_2 = 2 - i.$$

Depois disto, as raízes são determinadas assim:

$$z_1 + z_2 = 4,$$
$$z_1 w + z_2 w^2 = (-1{,}87 + 1{,}23i) + (-1{,}87 - 1{,}23i) = -3{,}74,$$
$$z_1 w^2 + z_2 w = (-0{,}13 - 2{,}23i) + (-0{,}13 + 2{,}23i) = -0{,}26.$$

Exercícios

6.14. Mostre que as raízes n-ésimas de um número z são da forma

$$z_1 w^k,\quad k = 0, 1, \ldots, n - 1,$$

em que z_1 é uma raiz n-ésima de z, e

$$w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}.$$

6.15. Utilizando a notação $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, mostre que a multiplicação de $e^{i\theta}$ por z provoca uma rotação de um ângulo θ. Isto é, mostre que $ze^{i\theta}$ forma com z um ângulo θ. Em particular, a multiplicação por $i = e^{i\pi/2}$, provoca uma rotação de um ângulo reto.

6.16. Calcule:

a) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^5$;

b) as raízes de ordem 4 da unidade;

c) as raízes de ordem 4 de -1;

d) as raízes cúbicas de $2 + 2i$.

6.17. Formule equações cujas raízes são:

a) $2 + 3i$, $2 - 3i$;

b) 3,$1 + 2i$, $1 - 2i$;

c) 1,$1 + 2i$, $1 + 3i$.

6.18. Prove que, se z é uma raiz da equação de coeficientes reais

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

então o seu conjugado $\bar{z}$ também o é. Admitindo o fato de que uma equação de grau n tem exatamente n raízes, prove que uma equação do terceiro grau com coeficientes reais tem, pelo menos, uma raiz real.

6.19. Resolva as equações

a) $x^3 - 2x + 4 = 0$;

b) $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$.

6.4 CURVAS EM COORDENADAS POLARES

As equações de algumas curvas do plano têm as suas formas mais simples quando expressas em coordenadas polares.

Exemplo. A equação da circunferência, que na forma complexa é

$$|z| = 1$$

e, na forma cartesiana, é

$$x^2 + y^2 = 1,$$

escreve-se, na forma polar, simplesmente

$$r = 1,$$

já que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

De modo geral, r = constante > 0 é equação de uma circunferência de centro na origem. Já a equação θ = constante representa uma reta que contém a origem. Por exemplo, $\theta = \pi/4$ é a equação da bissetriz do 1.º quadrante.

Exemplo. Como vimos na Seção 3.6 do Capítulo 3, uma cônica de diretriz d, foco F e excentricidade e é o conjunto dos pontos P do plano tais que $d(P,F) = e\, d(P,d)$

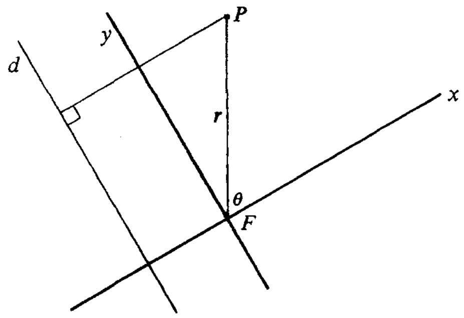


Fig. 6.8

Introduzindo um sistema de coordenadas xy, onde os eixos x e y são, respectivamente, a perpendicular e a paralela a d, traçadas por F (veja a Figura 6.8), temos

$$d(P, F) = r$$
$$d(P, d) = r \cos\theta + p,$$

onde $p = d(F, d)$. Logo, em coordenadas polares, a equação da cônica é

$$r = e(r \cos\theta + p)$$

ou

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta},$$

desde que $1 - e \cos\theta \neq 0$.

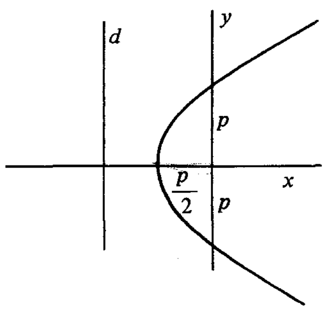


Fig. 6.9

Quando $e = 1$, a cônica é uma parábola e sua equação reduz-se a

$$r = \frac{p}{1 - \cos\theta},$$

onde p, como já dissemos, é a distância do foco à diretriz. Observe que, para $\theta = 0$, r não está definido. Isto significa que a cônica não intercepta a parte positiva do eixo x. Para θ próximo de zero, r é grande, vindo a decrescer à medida que θ cresce (de 0 a $\pi/2$). O valor de r em $\theta = \pi/2$ é p. Quando θ varia de $\pi/2$ até π, r varia de p até $p/2$. Da mesma forma, r varia de $p/2$ a p quando θ vai de π a $3\pi/2$. Por fim, quando θ vai de $3\pi/2$ a 2π, r varia de $p/2$ a ∞ (para $\theta = 2\pi$, r não está definido). Veja a Figura 6.9.

Exemplo. A ***lemniscata*** é uma curva plana definida como sendo o conjunto dos pontos cujo produto das distâncias a dois pontos fixos de coordenadas cartesianas $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ tem o valor constante a^2. No plano complexo, a sua equação se exprime assim

$$|z - a|\,|z + a| = a^2$$

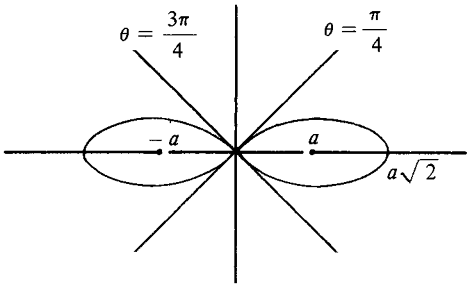


Fig. 6.10

e, em coordenadas cartesianas,

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

obtida ao se fazer $z = x + iy$ na equação complexa. Passando para coordenadas polares, através das relações

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r \operatorname{sen}\theta,$$

obtemos

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta,$$

que é a equação da lemniscata em coordenadas polares. Para esboçar o gráfico, observamos que $\cos 2\theta$ é negativo nos intervalos

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \quad \text{e} \quad \frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}$$

e, portanto, a lemniscata não corta a região compreendida entre as bissetrizes dos quadrantes, como mostra a Figura 6.10. É útil fazer um quadro com alguns valores de θ e de r, como o seguinte.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$3\pi/6$	$5\pi/6$	π	$5\pi/4$	$7\pi/4$	$11\pi/4$	π
r	$\pm a\sqrt{2}$	$\pm a$	0	0	$\pm a$	$\pm a\sqrt{2}$	0	0	$\pm a$	$\pm a\sqrt{2}$

Exemplo. A ***epiciclóide*** é a curva gerada por um ponto P de uma circunferência que roda externamente, sem deslizar, sobre outra circunferência, como mostra a Figura 6.11.

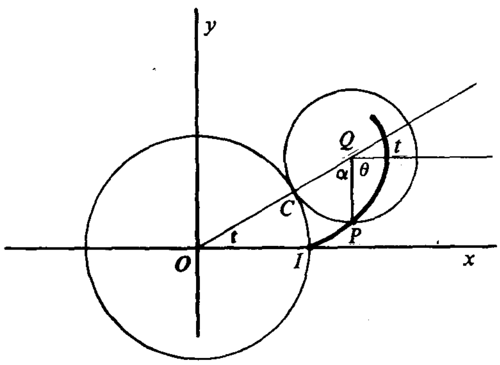


Fig. 6.11

Inicialmente, vamos deduzir as equações paramétricas da epiciclóide relativamente ao sistema de coordenadas xOy, onde O é o centro da circunferência fixa. Se Q é o centro da circunferência móvel e $P(x, y)$ é um ponto qualquer da curva, temos

$$\vec{OP}=\vec{OQ}+\vec{QP}. \tag{1}$$

Denotando por t o ângulo que $\vec{OP}$ faz com o eixo x, temos

$$\vec{OQ} = [(a + b) \cos t, (a + b) \operatorname{sen} t], \tag{2}$$

onde a e b são, respectivamente, os raios das circunferências fixa e móvel. Por outro lado, como $\|\vec{QP}\| = b$, temos

$$\vec{QP}= (b \cos \theta, -b \operatorname{sen} \theta),$$

sendo θ o ângulo que $\vec{QP}$ faz com o eixo x. Se a posição inicial do ponto P é $(a, 0)$, da definição da epiciclóide, temos que os arcos CI e CP (veja a Figura 6.11) são iguais. Logo,

$$b\alpha = at \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{a}{b}t.$$

Mas

$$\alpha + \theta + t = \pi,$$

de modo que

$$\theta = \pi - t - \alpha = \pi - t - \frac{a}{b}t = \pi - \frac{a+b}{b}t.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \vec{QP} &= (b\cos\theta,\ -b\,\text{sen}\theta) \\ &= [b\cos(\pi - \frac{a+b}{b}t), -b\,\text{sen}(\pi - \frac{a+b}{b}t)] \\ &= (-b\cos\frac{a+b}{b}t, -b\,\text{sen}\frac{a+b}{b}t). \end{aligned} \tag{3}$$

Substituindo (2) e (3) em (1), temos

$$\vec{OP} = [(a+b)\cos t - b\cos\frac{a+b}{b}t, (a+b)\,\text{sen}\,t - b\,\text{sen}\frac{a+b}{b}t)],$$

donde tiramos

$$\begin{aligned} x &= (a+b)\cos t - b\cos\frac{a+b}{b}t \\ y &= (a+b)\,\text{sen}\,t - b\,\text{sen}\frac{a+b}{b}t, \end{aligned} \tag{I}$$

que são as *equações paramétricas da epiciclóide.*

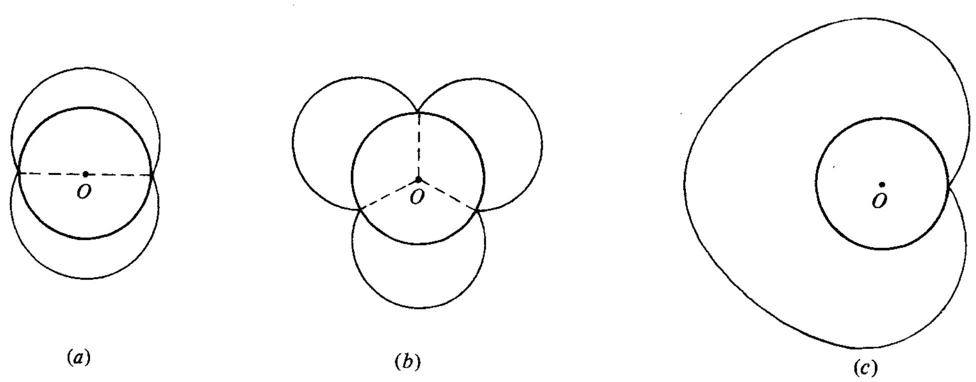


Fig. 6.12

Na Figura 6.12 apresentamos alguns casos particulares da epiciclóide. Em 6.12*a*, tomamos o raio da circunferência fixa igual ao dobro do raio da circunferência móvel, ou seja, $a = 2b$. Em 6.12*b* tomamos $a = 3b$ e em 6.12*c*, $a = b$. A epiciclóide obtida com duas circunferências de raios iguais (Figura 6.12*c*) é chamada ***cardióide***. Fazendo $a = b$ nas equações (I), obtemos

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t$$
$$y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t,$$

que são as *equações paramétricas da cardióide.*

A seguir, vamos deduzir uma equação da cardióide em coordenadas polares. Para obtermos uma expressão mais simples, vamos utilizar o sistema de coordenadas xy mostrado na Figura 6.13. Observe que neste sistema as equações paramétricas da cardióide são

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t - a$$
$$y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t,$$

onde o parâmetro t é o ângulo entre o vetor $\overrightarrow{OQ}$ e o eixo x, sendo O e Q, respectivamente, os centros das circunferências fixa e móvel. Quando estas duas circunferências têm raios iguais, o ângulo t é igual ao ângulo polar θ que o vetor $\overrightarrow{IP}$ faz com o eixo x. Logo, em função do ângulo polar θ, as equações paramétricas da cardióide são

$$x = 2a \cos \theta - a \cos 2\theta - a$$
$$y = 2a \operatorname{sen} \theta - a \operatorname{sen} 2\theta.$$

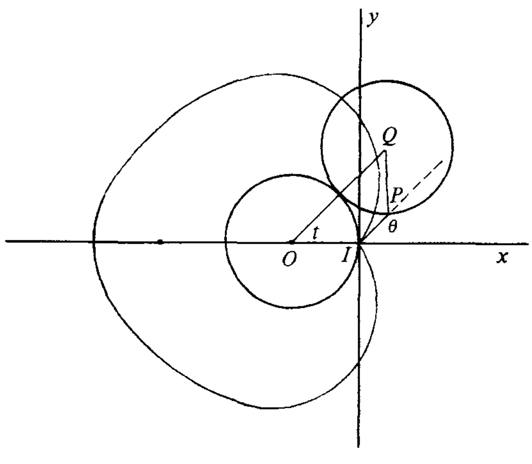


Fig. 6.13

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta,$$

podemos transformar estas equações em

$$x = 2a \cos\theta(1 - \cos\theta)$$
$$y = 2a \operatorname{sen}\theta(1 - \cos\theta).$$

Elevando estas equações ao quadrado, obtemos

$$x^2 = 4a^2 \cos^2\theta\,(1 - \cos\theta)^2$$
$$y^2 = 4a^2 \operatorname{sen}^2\theta\,(1 - \cos\theta)^2,$$

que somadas dão

$$x^2 + y^2 = 4a^2(1 - \cos\theta)^2.$$

Como $x^2 + y^2 = r^2$, temos

$$r^2 = 4a^2(1 - \cos\theta)^2$$

ou

$$r = 2a(1 - \cos\theta), \qquad \text{(II)}$$

que é a *equação polar da cardióide.*

Substituindo r por $\sqrt{x^2 + y^2}$ e cos θ por

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

em (II), obtemos

$$x^2 + y^2 = 4a^2\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2,$$

que é uma *equação cartesiana da cardióide.*

Exemplo. Quando a circunferência móvel do exercício anterior roda internamente, como mostra a Figura 6.14, a curva descrita por um de seus pontos é chamada ***hipociclóide.***

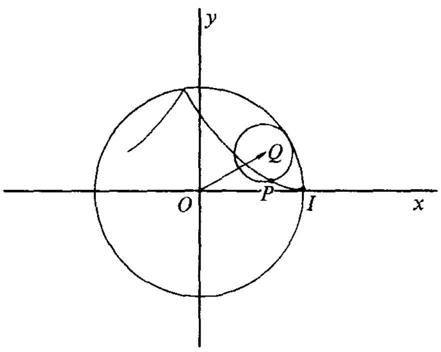


Fig. 6.14

As equações da hipociclóide, como o leitor pode verificar, são

$$x=(a-b)\cos t+b\cos\frac{a-b}{b}t$$
$$y=(a-b)\operatorname{sen} t+b\operatorname{sen}\frac{a-b}{b}t,$$

sendo a e b os raios das circunferências fixa e móvel, respectivamente, e t o ângulo que $\vec{OQ}$ faz com o eixo x(Q é o centro da circunferência móvel e O, o centro da circunferência fixa).

Exercícios

6.20. Deduza uma fórmula para a distância entre dois pontos dados pelas suas coordenadas polares (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2).

6.21. Esboce o gráfico das equações:

a) $r = \cos\theta$;
b) $r = 2(1 - \operatorname{sen}\theta)$;
c) $r = \cos n\theta$, para $n = 2$ e $n = 3$;
d) $r = \theta$, $\theta \geqslant 0$;
e) $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$;
f) $r = 5$;
g) $\theta = \dfrac{5\pi}{2}$.

6.22. Esboce as cônicas dadas pelas equações:

a) $r = \dfrac{4}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$;
b) $r = \dfrac{4}{1-2\cos\theta}$;
c) $r = \dfrac{4}{1-\cos\theta}$.

6.23. Mostre que

$$x = a + b\cos t$$
$$y = a\operatorname{tg} t + b\operatorname{sen} t, \quad a > 0,\ b > 0$$

são equações paramétricas da curva cuja equação polar é

$$r = \frac{a}{\cos t} + b, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Esta curva é chamada ***conchóide de Nicodemos***.

6.24. Seja C a circunferência de raio a e centro $(0, a)$ e s uma reta que contém a origem. Sejam A e B, respectivamente, os pontos de interseção de s com C e com a reta $y = 2a$. Por A trace uma paralela ao eixo x e por B, uma paralela ao eixo y. Seja P o ponto de interseção destas paralelas. Quando s varia, P descreve uma curva conhecida pelo nome de ***feiticeira***. Deduza suas equações paramétrica e cartesiana.

CAPÍTULO 7

O ESPAÇO DE QUATRO DIMENSÕES

Nos capítulos anteriores apresentamos um estudo da Geometria Analítica no plano e no espaço, isto é, em duas e três dimensões. Neste capítulo estudaremos uma Geometria Analítica em quatro dimensões. Além da reta e do plano, que serão mencionados como "variedades lineares" de uma e duas dimensões, aparecem aqui as variedades lineares de três dimensões: os hiperplanos. Alguns fatos surpreendentes, para o leitor que está acostumado a pensar em três dimensões, podem acontecer no espaço de quatro dimensões. Por exemplo, a interseção de dois planos pode ser um único ponto. Outro exemplo: como sabemos, um cubo separa o espaço tridimensional em duas partes, uma limitada (o seu interior) e outra ilimitada (o seu exterior). No espaço de quatro dimensões isto não acontece, isto é, é possível retirar um ponto de seu "interior" sem atravessar as suas paredes. Mas o espaço de quatro dimensões não é apenas uma curiosidade. A própria teoria da relatividade de Einstein se assenta sobre um espaço de quatro dimensões. Na verdade, muita pesquisa matemática é feita atualmente em espaços de dimensões superiores.

7.1 O ESPAÇO $\mathbf{R}^4$

Denotaremos por $\mathbf{R}^4$ o conjunto das quadras de números reais (x, y, z, w). A quadra $O = (0, 0, 0, 0)$ é denominada ***origem*** de $\mathbf{R}^4$. Assim como acontece com uma terna (x, y, z) em $\mathbf{R}^3$, uma quadra (x, y, z, w) pode ser imaginada como um ponto ou um vetor. Como vetor, pode ser representada por uma seta com ponto inicial na origem e final no ponto (x, y, z, w). O leitor pode imaginar um sistema de eixos coordenados formado por quatro eixos perpendiculares entre si: os eixos x, y, z e w, formados por pontos da forma $(x, 0, 0, 0)$, $(0, y, 0, 0)$, $(0, 0, z, 0)$ e $(0, 0, 0, w)$, respectivamente. Na Figura 7.1, o leitor deve imaginar todos os eixos perpendiculares entre si.

A adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar são definidas como em $\mathbf{R}^3$:

$$(x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$$

$$k(x, y, z, w) = (kx, ky, kz, kw).$$

Estas operações gozam das mesmas propriedades (comutatividade, associatividade etc.) que as correspondentes em $\mathbf{R}^3$.

O produto escalar ou interno de dois vetores também se generaliza para o $\mathbf{R}^4$:

$$(x_1, y_1, z_1, w_1) \cdot (x_2, y_2, z_2, w_2) = x_1x_2 + y_1, y_2 + z_1, z_2 + w_1, w_2.$$

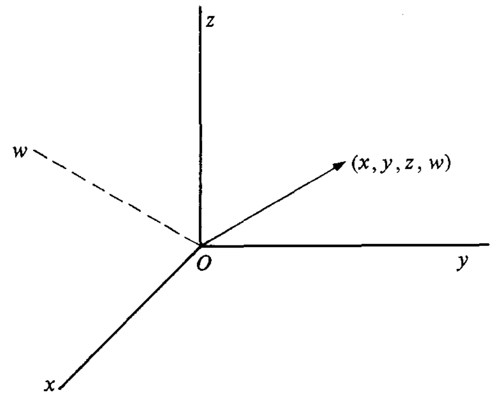


Fig. 7.1

O ângulo entre dois vetores não-nulos u e v de $\mathbf{R}^4$ também é definido como em $\mathbf{R}^3$, e vale a relação

$$u \,.\, v = \|u\|\,\|v\| \cos \theta.$$

Assim, dois vetores u e v de $\mathbf{R}^4$ são perpendiculares (formam ângulos de 90°) se, e somente se, $u \,.\, v = 0$. Por exemplo, os vetores

$$e_1 = (1, 0, 0, 0),\ \ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ \ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ \ e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

são dois a dois perpendiculares, pois

$$e_i \,.\, e_j = 0 \ \text{ se } \ i \neq j.$$

Além disso, são unitários, já que

$$\|e_i\|^2 = e_i \,.\, e_i = 1,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Da identidade

$$(x, y, z, w) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4,$$

segue que qualquer vetor (x, y, z, w) de $\mathbf{R}^4$ pode ser escrito como "combinação linear" de e_1, e_2, e_3 e e_4.

Em particular, os vetores da forma $(x, 0, 0, 0)$ podem ser escritos como múltiplos do vetor e_1:

$$(x, 0, 0, 0) = xe_1.$$

Isto significa que o eixo x tem a direção do vetor e_1. Analogamente, os eixos y, z e w têm a direção dos vetores e_2, e_3 e e_4, respectivamente.

A ***distância*** entre dois pontos $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$ e $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$ de $\mathbf{R}^4$ é definida como sendo o número

$$d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 + (b_4 - a_4)^2}.$$

7.2 A RETA EM R⁴

Como em dimensões inferiores, uma reta r em $\mathbf{R}^4$ fica determinada por um ponto $A(x_0, y_0, z_0, w_0)$ por onde ela passa e um vetor $v = (a, b, c, d)$, que dá a sua direção (Figura 7.2). Para escrever as suas equações paramétricas, observamos que um ponto $P(x, y, z, w)$ está em r se, e somente se, o vetor $\vec{AP}$ tem a direção de v, isto é, se, para algum $t \in \mathbf{R}$,

$$\vec{AP} = tv \text{ ou } \vec{OP} = \vec{OA} + tv.$$

Em termos de coordenadas, temos

$$(x, y, z, w) = (x_0, y_0 z_0 w_0) + t(a, b, c, d),$$

donde obtemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \\ w &= w_0 + dt, \end{aligned}$$

que são as *equações paramétricas* da reta r.

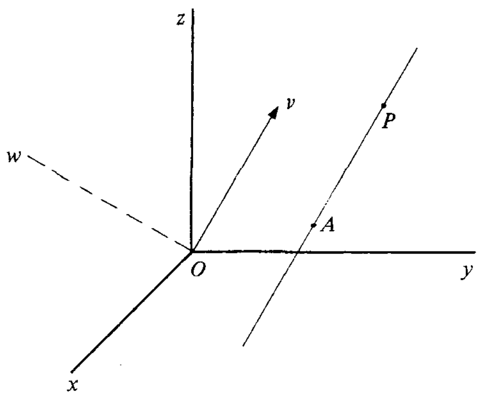


Fig. 7.2

Por exemplo, o eixo w, que tem a direção do vetor $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ e passa pelo ponto $O = (0, 0, 0, 0)$, tem as equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \\ w &= t. \end{aligned}$$

Ou seja, um ponto do eixo w é da forma $(0, 0, 0, t)$, como já vimos. Já a reta r, que é paralela ao eixo w e passa pelo ponto $A(1, 1, 1, 0)$, tem as equações

$$r: \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \\ w &= t. \end{aligned}$$

Um ponto desta reta é, pois, da forma $(1, 1, 1, t)$ (Figura 7.3).

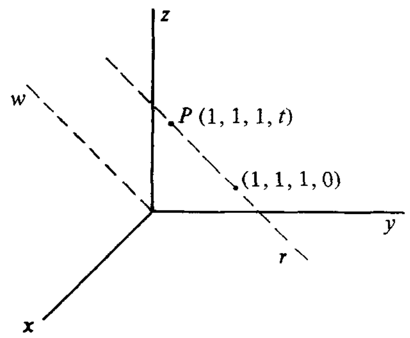


Fig. 7.3

O leitor deve comparar este exemplo com o da reta em $\mathbf{R}^3$ paralela ao eixo z, passando pelo ponto $(1, 1, 0)$ (Figura 7.4).

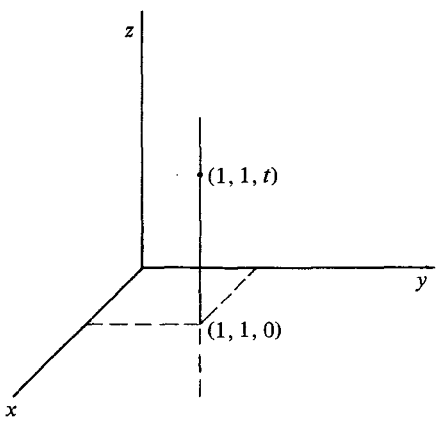


Fig. 7.4

7.3 O PLANO EM $\mathbf{R}^4$

As equações paramétricas de um plano em $\mathbf{R}^4$ são deduzidas da mesma maneira que em $\mathbf{R}^3$. Um plano fica definido por um ponto A e por dois vetores v_1 e v_2 que determinam a sua "direção". Os vetores v_1, v_2 (quando um não é múltiplo do outro) "geram" um plano que passa pela origem. Um ponto Q está neste plano se, e somente se,

$$\vec{OQ} = sv_1 + tv_2,$$

onde s e t são números reais. Um ponto $P(x, y, z, w)$ está no plano que passa por $A(x_0, y_0, z_0, w_0)$ e é paralelo ao plano α se, e somente se,

$$\vec{AP} = sv_1 + tv_2 \quad \text{ou} \quad \vec{OP} = \vec{OA} + sv_1 + tv_2$$

(veja a Figura 7.5). Se $v_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ e $v_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, obtemos as equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y &= y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z &= z_0 + c_1 s + c_2 t \\ w &= w_0 + d_1 s + d_2 t. \end{aligned}$$

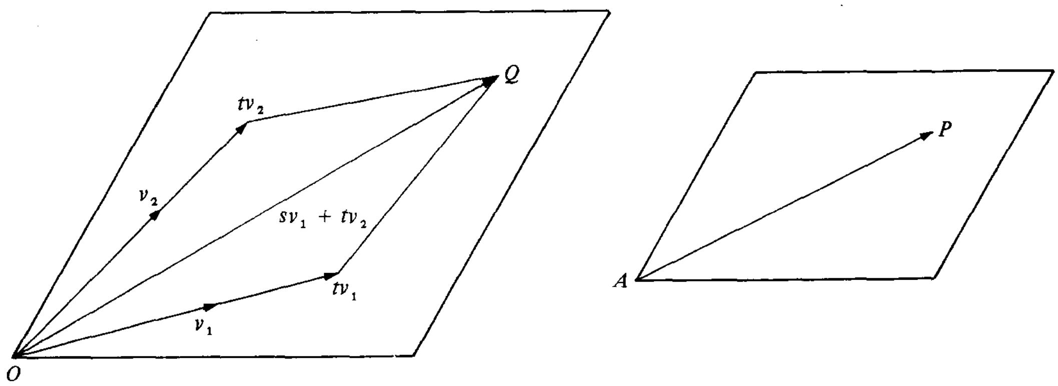


Fig. 7.5

Por exemplo, tomando $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 0, 0)$, as equações paramétricas do plano que tem a direção de v_1, v_2 e passa pela origem, isto é, o plano xy, são

$$\begin{aligned} x &= s \\ y &= t \\ z &= 0 \\ w &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, os pontos do plano xy são da forma $(s, t, 0, 0)$. Já o plano que passa pelo ponto $A(0, 0, 0, 1)$ e é paralelo ao plano xy tem equações

$$\begin{aligned} x &= s \\ y &= t \\ z &= 0 \\ w &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, os pontos deste plano são da forma $(s, t, 0, 1)$.

7.4 O HIPERPLANO EM R³

A reta e o plano são chamados ***variedades lineares*** do $\mathbf{R}^4$. O termo "linear" refere-se ao fato de que as equações dessas variedades são do primeiro grau em termos dos parâmetros. A reta tem uma dimensão e o plano tem duas dimensões. O $\mathbf{R}^4$ contém também variedades lineares de três dimensões, os ***hiperplanos.*** O prefixo "hiper" indica, aqui, uma dimensão a menos que a do espaço. Assim, num espaço de dimensão n um hiperplano tem dimensão $n - 1$. No $\mathbf{R}^3$, por exemplo, um hiperplano é o que usualmente denominamos plano.

Um hiperplano fica determinado por um ponto e por três vetores que dão a sua direção. Estes vetores não devem ser paralelos a um mesmo plano. Um ponto P pertence ao hiperplano definido pelo ponto A e os vetores v_1, v_2 e v_3 se, e somente se,

$$\vec{AP} = rv_1 + sv_2 + tv_3 \quad \text{ou} \quad \vec{OP} = \vec{OA} + rv_1 + sv_2 + tv_3,$$

onde r, s e t são números reais, os parâmetros. O leitor não terá dificuldade em, introduzindo coordenadas, escrever equações paramétricas para o hiperplano. Por exemplo, o hiperplano determinado pela origem e os vetores $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ é constituído pelos pontos Q tais que

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= r(1, 0, 0, 0) + s(0, 1, 0, 0) + t(0, 0, 1, 0) \\ &= (r, 0, 0, 0) + (0, s, 0, 0) + (0, 0, t, 0) \\ &= (r, s, t, 0). \end{aligned}$$

Este hiperplano é o espaço tridimensional xyz contido em $\mathbf{R}^4$. Ele é constituído dos pontos de $\mathbf{R}^4$ que têm a quarta coordenada $w = 0$. A sua equação cartesiana é, portanto, $w = 0$. Outro exemplo, o hiperplano que contém o ponto $A(0, 0, 0, 2)$ e é paralelo ao hiperplano xyz, isto é, tem a direção dos vetores e_1, e_2 e e_3, é formado pelos pontos P de $\mathbf{R}^4$ tais que

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + re_1 + se_2 + te_3 \\ &= (0, 0, 0, 2) + (r, s, t, 0) \\ &= (r, s, t, 2). \end{aligned}$$

As três primeiras coordenadas são quaisquer, enquanto que a quarta é constante e igual a 2. A sua equação cartesiana é $w = 2$. O leitor deve comparar este exemplo com o do plano em $\mathbf{R}^3$ que passa pelo ponto $(0, 0, 2)$ e é paralelo ao plano xy. Neste caso, os pontos têm coordenadas $(x, y, 2)$ e a equação cartesiana é $z = 2$.

7.5 INTERSEÇÕES DE VARIEDADES LINEARES

Seja, por exemplo, determinar a interseção do plano xy com a reta constituída pelos pontos $(1, 1, 0, t)$. Ora, os pontos do plano xy são da forma $(x, y, 0, 0)$. Na interseção deveremos ter

$$(1, 1, 0, t) = (x, y, 0, 0),$$

donde $x = 1$, $y = 1$, $t = 0$. A interseção é, portanto, o ponto $(1, 1, 0, 0)$.

Agora aparece uma primeira surpresa: a reta r da Figura 7.3 não intercepta o plano xy. Com efeito, na interseção deveríamos ter

$$(1, 1, 1, t) = (x, y, 0, 0),$$

o que não acontece, pois a terceira coordenada do primeiro ponto é 1, enquanto que a do segundo é 0.

Surpresa maior: a mesma reta r intercepta o espaço tridimensional xyz somente em A. De fato, na interseção devemos ter

$$(1, 1, 1, t) = (x, y, z, 0),$$

donde $x = y = z = 1$ e $t = 0$; ou seja, a interseção é o ponto $A(1, 1, 1, 0)$.

Daremos a seguir um exemplo de dois planos cuja interseção é um único ponto. Um dos exemplos mais simples é o dos planos xy e zw. Os pontos de xy são da forma $(x, y, 0, 0)$, enquanto que os de zw são da forma $(0, 0, z, w)$, de modo que na interseção devemos ter

$$(x, y, 0, 0) = (0, 0, z, w),$$

donde $x = y = z = w = 0$, isto é, a interseção é somente a origem.

7.6 COMO RETIRAR UM PONTO DE UMA CAIXA TRIDIMENSIONAL FECHADA

Consideremos o cubo de aresta de comprimento 2, contido no hiperplano xyz do $\mathbf{R}^4$, como mostra a Figura 7.6. O seu centro é o ponto $A(1, 1, 1, 0)$. Exibiremos um trajeto que deve percorrer o ponto A para ser colocado "fora" do cubo, sem atravessar as suas faces. O problema análogo, em $\mathbf{R}^3$, consiste em retirar o centro do quadrado de lado 2, contido no plano xy, sem atravessar os lados do quadrado. A Figura 7.7 mostra um trajeto para isto.

Para o caso tetradimensional, o trajeto está indicado na Figura 7.8. Nesta figura, os segmentos AB, BC e CD são tracejados para indicar o fato de que eles não estão contidos no espaço tridimensional xyz. De fato, o segmento AB está na reta r da Figura 7.3 que, como já vimos, não tem ponto em comum com o espaço xyz, exceto o ponto A; portanto, ela não intercepta as faces do cubo. O segmento BC está na reta

$$(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1) + t(0, 1, 0, 0) = (1, 1 + t, 1, 1)$$

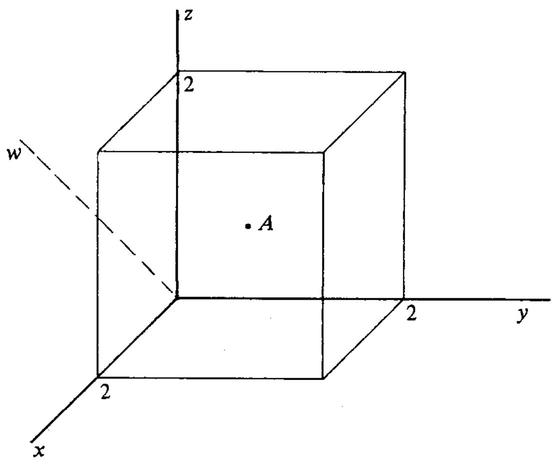


Fig. 7.6

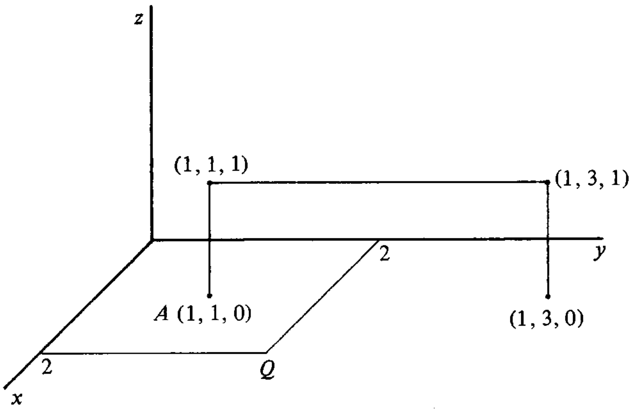


Fig. 7.7

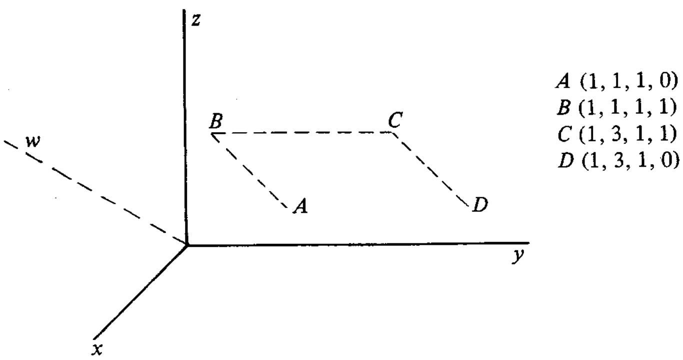


Fig. 7.8

que não intercepta o espaço xyz, pois a quarta coordenada de seus pontos nunca é zero. Quanto a CD, a sua reta suporte é

$$(x, y, z, w) = (1, 3, 1, 1) + t(0, 0, 0, -1) = (1, 3, 1, 1 - t).$$

Esta reta intercepta xyz quando $1 - t = 0$, ou seja, no ponto $D(1, 3, 1, 0)$. Resumindo, os três segmentos são:

$$\begin{aligned} AB &= \{(1, 1, 1, t),\ \ 0 \leq t \leq 1\}, \\ BC &= \{(1, 1 + t, 1, 1),\ \ 0 \leq t \leq 2\}, \\ CD &= \{(1, 3, 1, 1 - t),\ \ 0 \leq t \leq 1\}. \end{aligned}$$

Portanto, seguindo o trajeto $ABCD$, o ponto A vai ocupar a posição de D, que está no espaço xyz, sem atravessar as faces do cubo.

7.7 POR QUE O ESQUEMA DA SEÇÃO ANTERIOR FUNCIONA

Como o leitor sabe, um cubo no espaço $\mathbf{R}^3$ separa o espaço em duas partes: uma interior, limitada, e a outra exterior, ilimitada. Entretanto, da mesma maneira que o quadrado $OPQR$ da Figura 7.7 não separa o $\mathbf{R}^3$, o cubo da Figura 7.6 não separa o $\mathbf{R}^4$. É por esta razão que se tem acesso ao centro A do cubo da Figura 7.6.

Então que tipo de figura separa o $\mathbf{R}^4$? Observemos que se transladamos, no sentido do semi-eixo positivo z, o quadrado $OPQR$ da Figura 7.7 até que ele fique contido no plano $z = 2$, obtemos um cubo em $\mathbf{R}^3$. De modo análogo, se transladamos o cubo da Figura 7.6. no sentido do semi-eixo positivo w, até que ele fique contido no hiperplano $w = 2$, obtemos um objeto de $\mathbf{R}^4$ que chamamos de ***hipercubo.*** Este, com o seu interior, é constituído dos pontos (x, y, z, w) de $\mathbf{R}^4$ tais que $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z$ 2, $0 \leq w \leq 2$. O hipercubo separa o $\mathbf{R}^4$.

Outro objeto que separa o $\mathbf{R}^4$ é a ***hiperesfera.*** A hiperesfera de centro na origem e raio 1 é o conjunto dos pontos (x, y, z, w) de $\mathbf{R}^4$ cuja distância à origem é 1. A sua equação é

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1.$$

7.8 A RESPEITO DO PRODUTO VETORIAL

O produto vetorial de dois vetores definido no $\mathbf{R}^3$ é caracterizado pelas seguintes propriedades:

$$\begin{array}{ll} PV1) & u \times v = -v \times u \\ PV2) & u \times (v + w) = u \times v + u \times w \\ & (v + w) \times u = v \times u + w \times u \\ PV3) & (tu) \times v = t(u \times v) = u \times (tv) \\ PV4) & (u \times v) \times w = (u \,.\, w)v - (v \,.\, w)u \\ PV5) & u \times v \text{ é perpendicular a } u \text{ e a } v, \end{array}$$

quaisquer que sejam os vetores u, v, w e o número real t. O ponto na propriedade $PV4$ indica produto escalar.

É curioso que, além de $\mathbf{R}^3$, apenas em $\mathbf{R}^7$ é possível definir um produto vetorial de dois vetores satisfazendo as propriedades PV1), PV2), ..., PV5). No artigo de B. Walsh (veja Bibliografia), aparece uma demonstração deste fato utilizando apenas conceitos elementares de Álgebra Linear.

Em $\mathbf{R}^4$, o correspondente do produto vetorial de dois vetores de $\mathbf{R}^3$ é um produto de três vetores definido de maneira análoga àquele, através de um determinante. Se $v_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $v_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, $v_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$, definimos

$$v_1 \times v_2 \times v_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Aqui, $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Desenvolvendo o determinante segundo os elementos da primeira linha, obtemos

$$v_1 \times v_2 \times v_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} e_3 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} e_4.$$

Por exemplo,

$$e_1 \times e_2 \times e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} e_4 = e_4.$$

Como acontece neste exemplo, o produto $v_1 \times v_2 \times v_3$ é um vetor perpendicular a cada um dos vetores v_1, v_2, v_3. O seu módulo é igual ao volume do paralelepípedo determinado pelos vetores v_1, v_2, v_3, tal como acontece com o módulo do produto vetorial de dois vetores em $\mathbf{R}^3$ em relação à área do paralelogramo determinado por eles.

Exemplo. *Equação cartesiana do hiperplano.* Assim como os hiperplanos de $\mathbf{R}^2$ (retas) e $\mathbf{R}^3$ (planos), um hiperplano de $\mathbf{R}^4$ pode ser determinado por um ponto $A(x_0, y_0, z_0, w_0)$ e um vetor normal $v = (a, b, c, d)$. Dizer que v é normal ao hiperplano significa que v é perpendicular a qualquer vetor paralelo ao hiperplano. Portanto, $P(x, y, z, w)$ pertence ao hiperplano se, e somente se, $\overrightarrow{AP} \, . \, v = 0$ ou, em coordenadas,

$$(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0,\ w - w_0) \, . \, (a, b, c, d) = 0,$$

donde obtemos a equação cartesiana

$$ax + by + cz + dw - (ax_0 + by_0 + cz_0 + dw_0) = 0.$$

Observemos que, aqui também, os coeficientes de x, y, z, w são as coordenadas do vetor normal.

Se o hiperplano é dado por um ponto A e os vetores v_1, v_2 e v_3, um vetor normal é $v = v_1 \times v_2 \times v_3$.

Exercícios

7.1. Determine equações paramétricas para a reta que passa pelo ponto A e tem a direção do vetor v, sendo

a) $A(1, 1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 0, 0)$;

b) $A(1, 1, 1, 0)$, $v = (1, 1, 0, 0)$;

c) $A(-1, 1, 2, 1)$, $v = (1, 2, 6, 8)$.

7.2. Determine equações paramétricas para o plano que passa pelo ponto A e tem a direção dos vetores v_1 e v_2, sendo

a) $A(1, 1, 1, 1)$, $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, 0)$;

b) $A(1, 1, 1, 0)$, $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$;

c) $A(-1, 1, 0, 0)$, $v_1 = (1, 2, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 3, 4)$.

7.3. Mostre que a reta do Exercício 7.1*a* está contida no plano do Exercício 7.2*a*.

7.4. Mostre que a reta do Exercício 7.1*c* é paralela ao plano do Exercício 7.2*c*.

7.5. Dê as equações de duas retas perpendiculares ao plano do Exercício 7.2*b*, pelo ponto $A(1, 1, 1, 0)$. Verifique que este plano intercepta o plano definido por estas duas retas somente em A.

7.6. Determine equações paramétricas para o hiperplano que passa pelo ponto A e tem a direção dos vetores v_1, v_2, v_3, sendo

a) $A(-3, 1, 2, 0)$, $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1, 1)$;

b) $A(0, 0, 0, 2)$, $v_1 = (-1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 0, 0)$, $v_3 = (0, 2, 0, 0)$;

c) $A(0, 0, 0, 0)$, $v_1 = (1, 2, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 2, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, 2)$.

7.7. A partir das equações paramétricas dos hiperplanos do Exercício 7.6, escreva as suas equações cartesianas, eliminando os parâmetros.

7.8. Determine as equações cartesianas dos hiperplanos do Exercício 7.6, utilizando o produto $v_1 \times v_2 \times v_3$.

7.9. Determine a equação cartesiana do hiperplano que passa por A e é normal ao vetor v, sendo

a) $A(0, 0, 0, 2)$, $v = (0, 0, 0, 1)$;

b) $A(1, 1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 1, 1)$;

c) $A(0, 0, 0, 0)$, $v = (1, 1, 1, 1)$.

7.10. Determine a interseção do hiperplano $x + y + z + w + 1 = 0$ com

a) a reta determinada pelos pontos $A(1, 3, -1, 1)$, $B(0, 1, 2, -1)$;

b) o plano do Exercício 7.2*c*;

c) o hiperplano do Exercício 7.6*a*.

7.11. As circunferências C_1 e C_2 da Figura 7.9 representam elos entrelaçados de uma corrente. Mostre como separar os dois elos sem cortá-los. A circunferência C_1 está no plano xy e C_2 no plano yz.

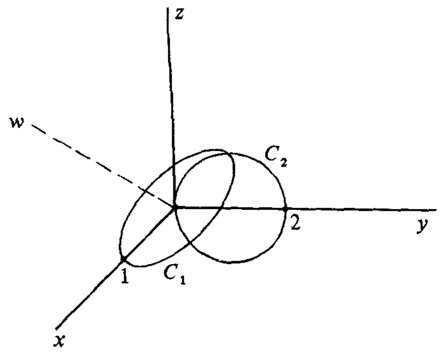


Fig. 7.9

7.12. Mostre que qualquer reta que passa pelo centro da hiperesfera $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ de $\mathbf{R}^4$ a intercepta.

7.13. Determine a interseção da hiperesfera $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ com o hiperplano $w = k$, sendo

a) $k = 0$;

b) $k = 1/2$;

c) $k = 1$;

d) $k = 2$.

7.14. O bordo do cubo é uma superfície bidimensional constituída de vértices (v), arestas (a) e faces quadradas (f) satisfazendo a fórmula de Euler $v - a + f = 2$. O bordo do hipercubo, que é tridimensional, é constituído de vértices (v), arestas (a), faces quadradas (f) e faces cúbicas (c). Determine o número de cada um desses elementos e verifique que $v - a + f - c = 0$.

7.15. Os conceitos introduzidos neste capítulo se generalizam para o espaço $\mathbf{R}^n$ dos pontos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ com n coordenadas, sendo n um inteiro positivo qualquer. Descreva a equação cartesiana de um hiperplano de $\mathbf{R}^n$.

Capítulo 8

SUGESTÕES E RESPOSTAS

Nosso objetivo neste capítulo é, além de fornecer respostas das questões propostas, destacar algumas idéias que, no texto, ficaram implícitas ou foram apresentadas sem maior realce.

Quanto aos exercícios propostos propriamente, entendemos que o procedimento correto é tentar uma solução própria, sem nenhuma preocupação com a resposta ou indicação fornecida. Os problemas foram elaborados não só com o objetivo de fixar o conteúdo do texto mas, principalmente, desenvolver a imaginação e criatividade do estudante. Assim, o importante não é apenas a resposta, mas sim o desenvolvimento da questão. As sugestões dadas, para a solução de certas questões, não implicam preferência por tal solução. Cabe ao estudante a crítica e a escolha da solução que mais lhe agrade.

CAPÍTULO 1

1.1. Use semelhança de triângulos.

1.2. Observe que $\sqrt{n+1}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são $\sqrt{n}$ e 1. Portanto, a partir de $\sqrt{2}$, você pode representar na reta **R** o número $\sqrt{n}$, qualquer que seja n. Tente também representar os números da forma $\sqrt{n+k}$, onde n e k são inteiros positivos, usando um triângulo retângulo cujos catetos são $\sqrt{n}$ e $\sqrt{k}$.

1.3. Lembre-se de que um número p é par se, e somente se, é da forma $p = 2k$, e ímpar se, e somente se, é da forma $p = 2k + 1$, onde $k \in \mathbf{Z}$. Logo, a demonstração consiste em verificar que p e p^2 são ambos da forma $2k$ ou $2k + 1$.

1.4. *b*) Suponha $a + s$ ou as racional, use 1.4*a* e obtenha uma contradição.

Este método de demonstração é muito utilizado. Você nega a proposição que quer provar e, operando corretamente, obtém uma contradição. Isto significa que a negação da proposição é falsa, pois conduz à contradição. Logo, a proposição é verdadeira. Para ilustrar, vamos apresentar uma demonstração de que as é irracional. Suponhamos que as seja racional (esta é a negação da proposição). Então, $as = p$, onde $p \in Q$. Como $a \neq 0$, temos $s = p/a$. Por 1.4*a*, s é racional, pois é o produto de p pelo racional $1/a$, o que é uma contradição, pois, por hipótese, s é irracional.

1.6. a) Parta de

$$m_1 = a + \frac{b-a}{2}.$$

b) Uma soma como esta, com um número infinito de parcelas, é chamada uma série. Observe que, para um número finito n de parcelas, o valor da soma é m_n - a, e que M_n tende para B. *Resposta: b - a.*

1.8. Os números $(a + b)/2$ e $\sqrt{ab}$ são chamados, respectivamente, ***média aritmética*** e ***média geométrica*** de a e b. A proposição afirma que a média aritmética é maior que ou igual à média geométrica. Para prová-la, parta de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

1.9. Usando o Exercício 1.8, escreva

$$\frac{m+n}{2} \geq \sqrt{mn},$$

onde m e n são as projeções dos catetos do triângulo sobre a hipotenusa. e use as relações métricas do triângulo retângulo.

1.10. Este problema mostra que é falsa a idéia de que, entre dois segmentos, o que tiver maior comprimento tem mais pontos. O fato de existir uma correspondência biunívoca entre AB e $A'B'$ significa, no sentido usual de contagem, que eles têm a mesma quantidade de pontos. (Não se esqueça de que esta quantidade é infinita.) Para resolvê-lo, basta comparar os triângulos semelhantes da figura. *Resposta:*

$$\overline{OY} = \frac{\overline{O'B'}}{\overline{OB}}\overline{OX}.$$

1.12. a) (1, 3).
b) $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.
c) $\{1, 3\}$.
d) $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{6}, \infty)$.
e) $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$.
f) $(-\infty, 3/2)$.

As respostas deste exercício foram dadas na notação usual de intervalos, cujas definições são:

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$
$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} : x < a\}$
$(b, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > b\}$
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} : x \leqslant a\}$
$[b, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant b\}$,

onde a e b são números reais e $a \leqslant b$.

1.13. a) 3.
b) 3.
c) 3/2 ou 5/4.

1.14. Quando desejamos provar que uma proposição é falsa, apresentamos um caso particular onde ela não se verifica. A isto é que se dá o nome de contra-exemplo. Uma proposição verdadeira, evidentemente, não tem contra-exemplo. As letras (a) e (b) admitem contra-exemplos (são falsas); as demais podem ser demonstradas.

1.16. a) Faça na desigualdade $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, $x = b$ e $y = a - b$.
b) Observe que a desigualdade dada é equivalente a

$$-|a - b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a - b|,$$

e use o item (a).

1.18. a) $(-\infty, 6)$.
b) Veja o primeiro membro como o produto de dois números, a saber, $x - 1$ e $x - 3$. Tal produto será menor que zero se os fatores tiverem sinais contrários, isto é, $x - 1 > 0$ e $x - 3 < 0$ ou $x - 1 < 0$ e $x - 3 > 0$. De $x - 1 > 0$ e $x - 3 < 0$ temos o intervalo $(1, 3)$, que é a resposta, pois não existe x que satisfaça a $x - 1 < 0$ e $x - 3 > 0$.
c) A desigualdade dada é equivalente a $x^2 - 4x + 6 < 0$. Fatore o primeiro membro e proceda como foi feito no item (b). *Resposta:* $(2, 3)$.
d) Fatore o primeiro membro. *Resposta:* $[-1, \infty)$.
e) Primeiro, faça a hipótese $x - 2 > 0$, e elimine o denominador do primeiro membro sem alterar a desigualdade. Observe que, ao eliminar o denominador, você está multiplicando a desigualdade por um número, daí a necessidade de saber se este número é positivo ou negativo. *Resposta:* $(-\infty, -2] \cup (2, \infty)$.

1.19. Parta de $r_1^2 = r_2^2$ e obtenha $(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 0$, tirando daí as conclusões.

1.20. $b \geqslant a$.

1.21. a) Como $x^2 = |x|^2$, a equação dada é equivalente a $|x|^2 - 5|x| + 6 = 0$, que é uma equação do segundo grau em $|x|$. As raízes desta equação são 2 e 3. Logo, $|x| = 2$ ou $|x| = 3$ e, portanto, os valores de x são 2, -2, 3 e -3.
b) Proceda como no item (a). *Resposta:* $x = 3$ ou $x = -3$.
c) Não tem raiz.
d) A equação dada é equivalente ao par de equações $x^2 - 3x = 2$ e $x^2 - 3x = -2$. Suas raízes são: $1, 2, (3 + \sqrt{17})/2$ e $(3 - \sqrt{17})/2$.
e) O primeiro membro da equação é o produto de dois fatores, onde o primeiro é estritamente positivo. Logo, $x^2 - 1 = 0$ e, portanto, $x = 1$ ou $x = -1$.

CAPÍTULO 2

2.1. b) $\sqrt{90}$.
c) Não.

2.4. $x = 2$.

2.5. Seja $B(x, y)$ a extremidade da seta que representa o vetor v. Então, $(3, -7) = (x - 2, y - 1)$. *Resposta:* $(5, -6)$.

2.6. $y = 1$ ou $y = 5$.

2.7. Valor máximo, 5. Valor mínimo, 1.

2.8. Escreva cada um dos lados da igualdade usando suas respectivas definições e compare os resultados.

2.9. Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Primeiro, mostre que

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u - v\|^2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2).$$

Conclua, então, que

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u - v\|^2$$

desde que $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. A partir deste fato você pode determinar vetores u e v satisfazendo as condições do problema. Por exemplo, $u = (x, y)$ e $v = (-y, x)$, quaisquer que sejam x e y. *Outra solução.* Construa o triângulo cujos lados são as setas que representam os vetores u, v e $u - v$. Se as setas que representam u e v forem perpendiculares, pelo teorema de Pitágoras, teremos

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u - v\|^2.$$

Logo, quaisquer vetores cujas setas que os representam são perpendiculares satisfazem o problema.

2.10. Na teoria, foi explicado como determinar graficamente a soma $u + v$. Veja a Figura 2.10. No item (a), primeiro construa a seta que representa $2v$, depois efetue a soma.
b) Veja a Figura 2.9.
c) Observe que $u - v = u + (-v)$.
Nos itens (d) e (e) use a associatividade, isto é, efetue graficamente a soma de duas das parcelas; em seguida, some o resultado com a terceira parcela.

2.11. a) Efetuando-se as operações indicadas, encontra-se

$$3u + 3w - 2v + 2w = 0 \text{ ou } 5w + 3u - 2v = 0.$$

Logo,

$$w = \frac{2}{5}v - \frac{3}{5}u = \frac{2}{5}(1,3) - \frac{3}{5}(2,-1) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right).$$

b) Proceda como em (a). Resposta: $\frac{1}{117}$ (138, 365).

2.12. Efetue as operações indicadas e obtenha

$$2z - 3w = -u + 3v$$
$$5z + 2w = 5u + v.$$

Este é um sistema de duas equações e duas incógnitas (vetoriais). Use as técnicas de eliminação, comparação ou substituição, utilizadas em sistemas lineares, e determine os valores de z e w. *Resposta:*

$$z = \frac{1}{19}(13u + 9v)$$

$$w = \frac{1}{19}(15u - 13v).$$

2.13. Use semelhança de triângulos. O número k (em módulo) é a razão entre os módulos de v e u.

2.14. a) $\frac{6}{5}(3,4) = (\frac{18}{5}, \frac{24}{5})$.

b) $-\sqrt{5}(-1,2) = (\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

2.15. Substitua os valores de u, v e w na equação $v = k_1u + k_2w$. Efetuando as operações indicadas, você vai obter a igualdade de dois pares ordenados. Lembre-se de que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Use este fato e obtenha um sistema de duas equações nas incógnitas k_1 e k_2. Resolva este sistema e obtenha $k_1 = -1/4$ e $k_2 = 7/4$.

2.16. Existem duas soluções: $(2 + 2\sqrt{2}, 3 + \sqrt{2})$ e $(2 - 2\sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$. Para determiná-las, lembre-se de que o vetor $\vec{AC}$ ser paralelo a u significa que $\vec{AC} = ku$. Para determinar k use o fato

$$\|\vec{AC}\| = \|ku\| = |k| \, \|u\|.$$

2.17. a) $(1,2)$; b) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; c) $\left(\frac{5}{3}, 3\right)$; d) $\left(-\frac{17}{5}, -\frac{23}{5}\right)$.

2.18. a) Orientando convenientemente os lados do triângulo ABC, podemos escrever $\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{AM}$. Como M é o ponto médio de AB, vale $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. Mas $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$. Logo,

$$\vec{CM} = \vec{CA} + \frac{1}{2}(\vec{CB} - \vec{CA}) = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}).$$

b) Proceda como no item (a). *Resposta:*

$$\vec{CM} = \frac{1}{3}(\vec{CB} + 2\vec{CA}).$$

2.19. $(6, 0)$.

2.20. Deve-se ter

$$(7, -1) = k_1(1, -1) + k_2(1, 1).$$

Donde

$$\begin{matrix} k_1 + k_2 = 7 \\ -k_1 + k_2 = -1 \end{matrix} \Leftrightarrow k_1 = 4 \text{ e } k_2 = 3.$$

Resposta: $(7, -1) = (4, -4) + (3, 3)$.

2.21. Atribua a t vários valores: 0, 1, 2 etc., e marque os pontos correspondentes. Conclua que, quando t varia sobre o conjunto dos números reais, estes pontos descrevem a reta que contém $(2, 4)$ e é paralela ao vetor $(3, -1)$.

2.22. 1/4.

2.23. Atribua coordenadas genéricas aos vértices do triângulo e determine, em função destas coordenadas, o vetor definido pelos pontos médios de dois lados do triângulo. Compare este vetor com o vetor determinado pelos vértices do terceiro lado do triângulo e obtenha a prova desejada.

2.24. Mostre que $\vec{PQ} = \vec{SR}$ e $\vec{SP} = \vec{RQ}$ e conclua que os lados opostos do quadrilátero $PQRS$ são iguais e paralelos.

2.25. (-1, 2), (3, -12) e (7, 16).

2.26. Estabeleça um sistema de coordenadas com origem em O e os eixos com a disposição usual. Em relação a tal sistema, escreva as forças F_1, F_2 e F_3 como pares ordenados e some-as (como se somam vetores). *Resposta:*

$$\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

2.27. Como no Exercício 2.26, primeiro estabelecemos um sistema de coordenadas e escrevemos F, F_1 e F_2 como pares ordenados. Obtemos

$$F = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ F_1 = (2{,}0) \text{ e } F_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Equacionando o problema, temos

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = k_1(2{,}0) + k_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Resolvendo esta equação, encontramos $k_1 = \frac{1}{2}$ e $k_2 = -1$. Portanto, devemos multiplicar F_1 por $\frac{1}{2}$ e F_2 por -1.

2.28. a) Não, pois a resultante $F_1 + F_2 + F_3$ não é nula.

b) A direção e o sentido de uma força não mudam quando a multiplicamos por um número positivo. Portanto, devemos encontrar constantes positivas k_2 e k_3 tais que

$$F_1 + k_2 F_2 + k_3 F_3 = 0.$$

Fazendo as contas, encontramos $k_2 = 1$ e $k_3 = 2$.

c) A pergunta é equivalente a: existe um número k tal que $F_1 + kF_2 + F_3 = 0$? A resposta é não.

2.29. A resultante é

$$F_1 + F_2 + F_3 = F_1 + F_2 + (F_2 + u) = F_1 + 2\,F_2 + u_2 =$$
$$= F_1 + 2(F_1 + u_1) + u_2 = 3\,F_1 + 2\,u_1 + u_2.$$

Estabelecendo-se o sistema de coordenadas onde $F_1 = (1, 0)$ e $u_1 = (0, 1)$, deduz-se que

$$u_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ou } u_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Resposta: $\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $\left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

conforme a escolha de u_2.

2.30. Escreva cada um dos membros da igualdade em termos das coordenadas de u e v e compare-os.

2.31. a) 14.

b) $\arccos \frac{7\sqrt{170}}{170}$.

c) $\frac{7}{17}(-3,5) = (-\frac{21}{17}, \frac{35}{17})$.

2.32. a) Mostre que $u \,.\, v = u \,.\, w = 0$.

2.33. a) $\sqrt{5}(1,2)$ ou $-\sqrt{5}(1,2)$.

b) $x = 2$ ou $x = -2$.

2.34. a) $(A$, ângulo entre $\vec{AC}$ e $\vec{AB}) = \arccos \frac{3}{\sqrt{130}}$

$(B$, ângulo entre $\vec{BA}$ e $\vec{BC}) = \arccos \frac{7}{\sqrt{170}}$

$(C$, ângulo entre $\vec{CA}$ e $\vec{CB}) = \arccos \frac{10}{\sqrt{221}}$.

b) $\left\|P_{\vec{AB}}^{\vec{AC}}\right\| = \frac{3}{10}\sqrt{10}$, $\left\|P_{\vec{AB}}^{\vec{BC}}\right\| = \frac{7}{10}\sqrt{10}$.

c) Seja $P(x, y)$ o pé da altura. Escreva $\vec{AP} = k\,\vec{AB}$ e daí $\|\vec{AP}\| = \|P_{\vec{AB}}^{\vec{AC}}\| = k\|\vec{AB}\|$, donde se tira que $k = 3/10$. De $\vec{AP} = \frac{3}{10}\vec{AB}$ deduz-se que $P\left(\frac{19}{10}, \frac{7}{10}\right)$.

d) $\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\left\|\vec{AB}\right\| \; \left\|\vec{CP}\right\|}{2} = \frac{11}{2}$

c) Seja $Q(x, y)$ o ponto procurado. Escreva

$$\frac{\vec{BC}.\vec{BQ}}{\|\vec{BC}\|\,\|\vec{BQ}\|} = \frac{\vec{BQ}.\vec{BA}}{\|\vec{BQ}\|\,\|\vec{BA}\|}.$$

Simplifique esta igualdade e obtenha uma equação do primeiro grau em x e y. O ponto Q também satistaz

$$\vec{AQ} = t\,\vec{AC},$$

que leva a duas equações nas incógnitas x, y e t. Resolvendo-se o sistema formado pelas três equações acima, determinam-se x e y. *Resposta:*

$$\left(\frac{23\sqrt{17}-4\sqrt{10}}{3\sqrt{17}+10\sqrt{10}}, \frac{33\sqrt{71}-11\sqrt{10}}{3\sqrt{17}+10\sqrt{10}}\right).$$

2.35. Faça uma figura e conclua que a altura é dada por

$$\sqrt{\|AB\|^2 - \left\|P_{\vec{AD}}^{\vec{AB}}\right\|}.$$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

2.36. Determine a altura como no exercício anterior. A área é base $\times$ altura. *Resposta:* $\dfrac{37}{4}$.

2.37. Proceda como no Exercício 2.36. *Resposta:* 17.

2.38. Mostre que $\vec{BA}\cdot\vec{BC} = 0$.

2.39. Seja $v = (x, y)$, então

$$x^2 + y^2 = 4$$

e

$$\frac{3x+y}{\sqrt{10}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Resolva o sistema formado por estas duas equações. *Resposta:*

$$\left(\frac{3\sqrt{30}+\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{30}-3\sqrt{10}}{10}\right) \text{ ou } \left(\frac{3\sqrt{30}-\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{30}+3\sqrt{10}}{10}\right).$$

2.40. $(7, -1) = k_1(1, -1) + k_2(1, 1) = (3, -3) + (4, 4)$.

2.41. a) Para calcular $\|w\|$ use a propriedade $\|w\|^2 = w \,.\, w$.

Resposta: $\|w\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ *e* $\|z\| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$.

b) $a_1a_2 + b_1b_2$.

c) $\arccos \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

2.42. $u + v$ perpendicular a $u - v$ implica $(u + v) . (u - v) = 0$. Desta igualdade deduz-se que $\|u\| = \|v\|$. Todo paralelogramo cujas diagonais são perpendiculares entre si é um losango.

2.44. De $\|u - v + w\|^2 = \|u + v + w\|^2$ obtenha $v . w = -u . v$ e observe que

$$\frac{v.w}{\|v\|\ \|w\|} = \frac{u.v}{\|u\|\ \|v\|}.$$

Desta igualdade conclua que $\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{8}$, onde θ é o ângulo entre v e w. *Resposta:* $\frac{7\pi}{8}$.

2.45. De $u + v + w = 0$ obtenha

$$\begin{array}{lcl} u.u + u.v + u.w = 0 & & u.v + u.w = -25 \\ v.u + v.v + v.w = 0 & \text{ou} & u.v + v.w = -36 \\ w.u + w.v + w.w = 0 & & u.w + v.w = -49. \end{array}$$

Resolva este sistema, cujas incógnitas são $u . v$, $u . w$ e $v . w$, e obtenha:

$$u.v = -6,\ u.w = -19,\ v.w = -30.$$

2.46. $\left(2 + \frac{\sqrt{620}}{10}, 1 - \frac{\sqrt{620}}{5}\right)$ *ou* $\left(2 - \frac{\sqrt{620}}{10}, 1 + \frac{\sqrt{620}}{5}\right)$.

2.47. Escreva P_u^v em termos de v e u e verifique que

$$(v - P_u^v).u = 0.$$

2.49. a) Equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2t \\ y &= 1 + 3t; \end{aligned}$$

equação cartesiana: $2y - 3x = 5$.

b) Equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 3 - 6t \\ y &= 2 - t; \end{aligned}$$

equação cartesiana: $6y - x = 9$.

2.50. Equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 5t & \qquad x &= 4 - 3t \\ y &= 6t, & \qquad y &= 1 + 4t; \end{aligned}$$

equações cartesianas: $6x - 5y = 0$ e $4x + 3y = 19$.

2.51. b) Ponto A, $t = 0$; ponto B, $t = 1$.

c) $0 < t < 1$.

d) $t > 1$, pontos à direita de B; $t < 0$, pontos à esquerda de A (estamos considerando A à esquerda de B).

2.52. As equações procuradas são da forma

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 + mt, \end{aligned}$$

onde m é a declividade da reta procurada. Como o ângulo entre $(1, m)$ e $(1, -2)$ é 60° ou 120°, temos

$$\frac{1-2m}{\sqrt{5}\sqrt{1+m^2}} = \pm\frac{1}{2}.$$

Resolvendo esta equação determinamos m. *Resposta:*

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + \dfrac{8+5\sqrt{3}}{11}t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + \dfrac{8-5\sqrt{3}}{11}t. \end{cases}$$

2.53. $\left(\frac{47}{13}, \frac{38}{13}\right)$.

2.54 $\left(-\frac{25}{13}, \frac{5}{13}\right)$.

2.55. Escreva as equações, paramétricas ou cartesiana, da reta definida pelos pontos (2, 1) e (0, 0) e resolva o sistema formado por estas equações e a equação $y = 2x - 1$. *Resposta:* $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

2.56. a) Como as duas retas têm declividades iguais, a equação procurada é da forma $y = 3x + k$. Substitua o ponto $P(2, -1)$ nesta equação e determine k. *Resposta:* $y = 3x - 7$.

b) Primeiro mostre que se duas retas são perpendiculares o produto de suas declividades é -1. Para tal, suponha que as retas tenham equações $y = mx + k$ e $y = m_1x + k_1$. Então, os vetores $(1, m)$ e $(1, m_1)$ são perpendiculares de modo que $(1, m) . (1, m_1) = 0$. Donde, $mm_1 = -1$. *Resposta:* $y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}$.

2.57. a) 45°.

b) $\arccos\frac{7\sqrt{58}}{58}$.

2.58. Escreva a equação $Ax + By + C = 0$ na forma $y = mx + k$, isto é, isole y, e aplique a fórmula de distância de um ponto a uma reta deduzida no texto. Considere separadamente o caso $B = 0$.

2.59. Mostre que o triângulo APB satisfaz o teorema de Pitágoras.

2.60. Estabeleça um sistema de coordenadas e determine as equações das retas definidas por A e B e O e C. Faça a interseção destas retas e ache as coordenadas de P. *Resposta:* $\frac{25}{9}$.

2.61. Calcule a distância de um ponto qualquer de uma das retas à outra reta. *Resposta:* $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

2.62. Determine os três pontos de interseção das retas dadas e proceda como no exemplo do texto. ***Outra solução:*** determine as equações de duas das mediatrizes dos segmentos determinados pelas interseções das retas dadas. A interseção destas mediatrizes é o centro da circunferência e a distância deste ponto à interseção de duas das retas dadas é o raio. *Resposta:* $12x^2 + 12y^2 + 19x - 35y + 7 = 0$.

2.63. a) $x = \sqrt{11}\cos t$ b) $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2}\cos t$

$y = \sqrt{11}\,\text{sen}\, t$; $y = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2}\,\text{sen}\, t$;

c) $x = 3\cos t$ d) $x = 1 + \cos t$

$y = 3 + 3\,\text{sen} t$; $y = 1 + \text{sen} t$.

2.64. A distância da origem à reta é o raio da circunferência. ***Outra solução:*** imponha que o sistema formado pela equação da reta e a equação da circunferência, que é da forma $x^2 + y^2 = r^2$, tenha solução única. *Resposta:* $x^2 + y^2 = 16$.

2.65. $x^2 + (y - 6)^2 = 18$.

2.66. a) Resolva o sistema formado pela equação da circunferência e a equação da mediatriz de AB. *Resposta:* (-2, 2) ou (1, 5).

b) Determine em r o ponto mais próximo do centro de C. *Resposta:* $\left(\frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

2.67. a) Resolva o sistema

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 4x + 9 = 0.$$

Resposta: (1, 2) e (3, 4).

b) É suficiente subtrair uma equação da outra. *Resposta:* $y = x + 1$.

2.68. a) A velocidade da partícula é dada por $\frac{1}{2}\vec{AB}$ (deslocamento sobre tempo).

Resposta: $\left(1 + t, 2 - \frac{3}{2}t\right)$.

b) Determine a interseção da trajetória da partícula com a perpendicular que contém $C(4, -2)$. *Resposta:* 36/13.

2.69. As trajetórias de P e Q se interceptam no ponto (5, 3). P passa por este ponto no instante $t = 2$ e Q no instante $t = 1$. Logo, não se chocam.

2.70. Suponha que a velocidade de M_2 seja (a, b). Escreva as equações paramétricas das trajetórias de M_1 e M_2 e faça $t = 1$. *Resposta:* (1, 3).

2.71. a) Uma circunferência de centro (1, 2) e raio 2.

b) Use derivadas ou proceda como no texto.

2.72. Observe que o vetor $(y_0 - y_1, x_1 - x_0)$ é perpendicular ao raio no ponto de contato. *Resposta:*

$$x = x_1 + (y_0 - y_1)t$$
$$y = y_1 + (x_1 - x_0)t.$$

2.73. Este problema é semelhante ao 2.66, pois a trajetória da partícula é um arco de circunferência. *Resposta:* $\pi/2$.

2.74. a) Mostre que a equação é da forma $ax + by + c = 0$.
b) Para $\lambda = 1$, temos $(A + A_1)x + (B + B_1)y + (C + C_1) = 0$. Um vetor paralelo a esta reta é $(B + B_1, - A - A_1)$. Mostre que o ângulo entre $(B, - A)$ e $(B + B_1, - A - A_1)$ é igual ao ângulo entre $(B_1, - A_1)$ e $(B + B_1, - A - A_1)$. Mesmo procedimento para o caso $\lambda = -1$. Observe que $(B, - A)$ e $(B_1, - A_1)$ são, respectivamente, paralelos a $Ax + By + C = 0$ e $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

CAPÍTULO 3

3.1. a) Focos: (4, 0) e (-4, 0); vértices: (5, 0), (-5, 0), (0, 3) e (0, -3).
b) Focos: (0, 4) e (0, -4); vértices: (3, 0), (-3, 0), (0, 5) e (0, -5)
c) Focos: $(\sqrt{5}, 0)$ e $(-\sqrt{5}, 0)$; vértices: (3, 0), (-3, 0), (0, 2) e (0, -2).
d) Focos: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$; vértices: (1, 0), (-1, 0), $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

3.2. a) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$
b) $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 48 = 0.$

3.3. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

3.4. $(a + b)^2 x^2 + 4ab\, y^2 - 4ab(a + b)y = 0.$

3.5. a) Substitua $P_2(-x_0, y_0)$, $P_3(x_0, -y_0)$ e $P_4(-x_0, -y_0)$ na equação dada.

3.7. a) Faça $f(x) = y$ nas equações dadas e elimine os radicais.
b) A equação da reta de declividade $f'(x_0)$ e que contém o ponto (x_0, y_0) é da forma

$$y = f'(x_0)x + k.$$

De

$$y_0 = f'(x_0)x_0 + k$$

obtenha

$$k = y_0 - f'(x_0)x_0.$$

Logo,

$$y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0.$$

Substitua nesta equação o valor de $f'(x_0)$ e simplifique a expressão resultante para obter a equação desejada.

3.8. $\frac{y_0x}{b^2} - \frac{x_0y}{a^2} = x_0y_0\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2b^2}\right).$

3.9. Use o Exercício 3.7b. *Resposta:* $k = \pm\frac{\sqrt{20}}{3}$.

3.10. Seja (x_0, y_0) o ponto procurado. A equação da tangente à elipse neste ponto é

$$\frac{xx_0}{18}+\frac{yy_0}{8}=1.$$

Sendo esta tangente paralela à reta $2x - 3y + 25 = 0$, suas declividades são iguais. Daí, temos a equação

$$-\frac{4x_0}{9y_0}=\frac{2}{3}. \qquad (1)$$

Temos também

$$\frac{x_0^2}{18}+\frac{y_0^2}{8}=1. \qquad (2)$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), encontramos a solução (-3, 2).

3.11. Escolha o sistema de coordenadas com origem no centro da elipse e o eixo x coincidindo com o eixo maior da elipse. Em relação a tal sistema, temos $P(0, 4)$ e o ponto procurado (x_0, y_0), de acordo com o Exercício 3.7*b*, satisfaz

$$\frac{x_0x}{16}+\frac{y_0y}{4}=1$$

$$\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{4}=1.$$

Introduza $P(0, 4)$ na primeira equação e determine y_0. Substitua y_0 na segunda equação e determine x_0. *Resposta:* $(2\sqrt{3},\ 1)$.

3.13. a) Focos: $(\sqrt{34},\ 0)$, $(-\sqrt{34},\ 0)$; vértices: (5, 0) e (-5, 0).
b) Focos: $(0,\ \sqrt{34})$, $(0,\ -\sqrt{34})$; vértices: (0, 3) e (0, -3).
c) Focos: $(0,\ \sqrt{13})$, $(0,\ -\sqrt{13})$; vértices: (0, 2) e (0, -2).
d) Focos: $(\sqrt{2},\ 0)$, $(-\sqrt{2},\ 0)$; vértices: (1, 0) e (-1, 0).

3.14. a) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1.$

b) $x^2+y^2+4xy-6=0.$

3.16. Veja a sugestão do Exercício 3.7.

3.17. Use o Exercício 3.16b.

3.18. $\dfrac{y_0x}{b^2}+\dfrac{x_0y}{a^2}=x_0y_0\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}.$

3.19. Use os Exercícios 3.16b e 3.18. *Resposta:*
equação da tangente: $3y - 4x = 1$;
equação da normal: $3x + 4y = 18$.

3.20. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1.$

3.21 a) Foco (0, 1); vértice (0, 0); diretriz $y = -1$.
b) Foco (-1, 0); vértice (0, 0); diretriz $x = 1$.
c) Foco $(0, \frac{1}{4})$; vértice (0, 0) diretriz $y = -1/4$.
d) Foco (- 1/8, 0); vértice (0, 0); diretriz $x = -1/8$.

3.22. a) $y = -\frac{1}{4}x^2$; b) $x = -\frac{1}{4}y^2$; c) $x^2 + y^2 - 8x - 8y = 0$.

3.23. O eixo da parábola é a reta que contém o vértice $V(6, -3)$ e é perpendicular à diretriz. Sua equação é

$$y = -\frac{5}{3}x + 7.$$

A interseção do eixo com a diretriz é o ponto $A(3, 2)$. Sendo o vértice o ponto médio do segmento AF, onde F é o foco da parábola, deduzimos que $F(9, -8)$. Conhecendo o foco e a diretriz, é suficiente aplicarmos a definição de parábola para obter sua equação.

Resposta: $25x^2 + 9y^2 + 30xy - 618x + 554y + 4929 = 0$.

3.24. A forma geral das equações das parábolas cujo eixo é paralelo ao eixo x é

$$x = ay^2 + by + c, \quad a \neq 0.$$

3.25. A equação procurada é da forma

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Os pontos (2, 3) e (1, 4) pertencem à parábola. O ponto (3, 4) também pertence à parábola por ser simétrico de (1, 4) em relação ao eixo da parábola. Logo, temos o sistema

$$\begin{aligned} 3 &= 4a + 2b + c \\ 4 &= a + b + c \\ 4 &= 9a + 3b + c. \end{aligned}$$

Resposta: $y = x^2 - 4x + 7$

3.26. Proceda como no Exercício 3.25. *Resposta:* $y = x^2 - 5x + 6$.

3.27. Em relação a um sistema de coordenadas adequado, a equação da parábola é da forma $y = \frac{1}{4a}x^2$, onde $2a$ é a distância do foco à diretriz. Os extremos da corda que contém o foco e é perpendicular ao eixo da parábola são $(-2a, a)$ e $(2a, a)$. Logo, o comprimento da corda é $4a$, que é o dobro da distância do foco à diretriz.

3.28. a) Use derivadas.
b) Do resultado do item a), deduz-se que um vetor paralelo à perpendicular à parábola em P é $v = (1, -2ay_0)$. Mostre que o ângulo definido por v e $\vec{PF}$ é igual ao ângulo definido por v e (1, 0).

3.29. a) Faça $x = t$ e $y = 4t - t^2$ e elimine t. *Resposta:* $y = 4x - x^2$.
b) 2.

3.30. a) Obtenha as equações a partir das definições de elipse e parábola.
b) Substitua o ponto (x, y_e) na equação da elipse deduzida no item a) e tome o limite com b tendendo para o infinito.

3.31. a) (5, -1) e (7, 4).
b) Substitua x e y na equação $y = 2x + 7$, por $x = x_1 - 2$ e $y = y_1 + 3$. *Resposta:* $y_1 = 2x_1$.

3.32. A equação de uma reta não contém o termo constante se, e somente se, ela contiver a origem do sistema de coordenadas. Portanto, a origem do novo sistema deve ser o ponto de interseção das retas dadas. *Resposta:* a translação definida pelas equações

$$x_1 = x - 2$$
$$y_1 = y - 3.$$

3.33. (5, 1)

3.34. a) $\vec{00_1} = (4,1)$, $\vec{0_10_2} = (1,2)$, $\vec{00_2} = (5,3)$.
b) Veja Exercício 3.35.

3.35. Tome dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ e efetue a translação

$$x_1 = x - a$$
$$y_1 = y - b.$$

Calcule as coordenadas do vetor $\vec{AB}$ usando os pontos A e B nos dois sistemas e compare os resultados.

3.36. Resolva o sistema

$$4\cos\theta + 2\sqrt{3}\ \text{sen}\ \theta = 5$$
$$4\ \text{sen}\theta - 2\sqrt{3}\ \cos\theta = \sqrt{3}.$$

Resposta: $\theta = \pi/3$ radianos.

3.37. $\left(\dfrac{11}{\sqrt{10}}, \dfrac{13}{\sqrt{10}}\right)$.

3.38. a) No sistema xOy: $\left(\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$; no sistema $x_2O_2y_2$ (-1, -1).

b) $\left(2\sqrt{3} - 2, 2 + 2\sqrt{3}\right)$.

3.39. Efetuando uma rotação de 45° no sistema xOy, obtemos o sistema $x'Oy'$, onde

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$$
$$(s_1)$$
$$y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y.$$

Efetuando no sistema $x'Oy'$ a translação cuja nova origem é o ponto O_1, obtemos o sistema $x_1O_1y_1$. Como, no sistema $x'Oy'$, o ponto O_1 é $(\sqrt{2}, 0)$, temos que

$$\begin{cases} x_1 = x' + \sqrt{2} \\ y_1 = y' + O. \end{cases} \quad (s_2)$$

Substituindo (s_1) em (s_2), obtemos

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \sqrt{2}$$

$$y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y,$$

que é a resposta.

3.40. Faça na equação dada

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta$$
$$y = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta,$$

efetue as operações indicadas e coloque os termos x_1^2, y_1^2, x_1y_1, x_1 e y_1 em evidência. Iguale o coeficiente de x_1y_1 a zero e resolva a equação trigonométrica resultante.

3.42. Completando os quadrados em x e y, verifique que a cônica dada é uma elipse de centro $O_1(1, 2)$. Em relação ao sistema $x_1O_1y_1$, obtido do sistema xOy por translação, a equação desta cônica é

$$\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1.$$

Resolva o problema no sistema $x_1O_1y_1$ [não se esqueça de passar o ponto $\left(2, \frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)$ para o sistema $x_1O_1y_1$]. *Resposta:* $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

3.43. a) $(3y + 2x - 6)(2y - x - 2) = 0$ ou $6y^2 - 2x^2 + xy - 18y + 2x + 12 = 0$.
b) (E_1): $(3y + 2x - 6)^2 = 0$ ou $9y^2 + 4x^2 + 12xy - 36y - 24x + 36 = 0$;
(E_2): $(2y - x - 2)^2 = 0$ ou $4y^2 + x^2 - 4xy + 4x - 8y + 4 = 0$.

3.44. $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = -2$ ou $x^2 + y^2 - xy - x - y + 2 = 0$.

3.45. Deve-se mostrar que todo ponto que satisfaz as equações das assíntotas da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

satisfaz também à equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

e reciprocamente. Se (x, y) pertence às assíntotas da hipérbole, temos

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{ou} \qquad y = -\frac{b}{a}x.$$

Logo,

$$\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{y}{b}+\frac{x}{a}=0.$$

Multiplicando estas equações, obtemos

$$\left(\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{x}{a}\right)=0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Logo, se (x, y) pertence a uma das assíntotas, ele satisfaz à equação

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Para mostrar a recíproca, fatore a equação

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

e obtenha

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0.$$

A partir desta igualdade, conclua que um ponto que satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

pertence a uma das assíntotas.

3.46. Para mostrar que Δ é invariante por rotação, substitua x e y na equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ por

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta$$
$$y = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta.$$

Calcule o valor de $B_1^2 - 4A_1C_1$ (onde B_1, A_1 e C_1 são, respectivamente, os coeficientes de x_1y_1, x_1^2 e y_1^2) na equação resultante e verifique que este valor independe de θ e vale exatamente $B^2 - 4AC$. Para a translação proceda de maneira semelhante.

Para demonstrar a última parte do problema, calcule Δ nas equações das cônicas reduzida à forma canônica.

3.47. a) $15x^2 + 16y^2 - 48x = 0$.
b) $y^2 - 15x^2 + 12x = 0$.
c) $y^2 - 8x = 0$.

3.48. Demonstre que todo ponto da cônica satisfaz a equação dada e reciprocamente.

3.49. Veja o Exercício 3.48.

3.50. Veja o Exercício 3.48.

CAPÍTULO 4

4.2. b) Represente o plano pelo triângulo definido por A, B e C ou por um paralelogramo tendo A, B e C como vértices.

4.3. A - eixo z;
B - reta que contém o ponto (2, 3, 0) e é paralela ao eixo z;
C - plano paralelo a xOy e a uma unidade acima deste;
D - plano yOz;
E - cilindro circular reto de raio 1 e eixo coincidindo com o eixo z.

4.4. a) $\{(x, y, z) : z = 2\}$.
b) $\{(x, y, z) : y = 2 \text{ e } z = 3\}$.

4.5. $\left(\frac{5}{3}, 3, 2\right)$ ou $\left(3, \frac{5}{3}, 2\right)$, dependendo da escolha do sistema.

4.6. O conjunto A é um plano e B é uma reta. Sugerimos ao leitor fazer a figura.
Resposta: (2, -1, -1).

4.7. $x = 3$ ou $x = -3$.

4.8. Complete os quadrados em x, y e z e compare a equação resultante com $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$. ***Resposta:*** a) (1, 2, 1) e raio 4; b) (0, -1, 5) e raio $\sqrt{53}$; c) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$ e raio $\sqrt{22}/2$; d) (0, 0, 0) e raio $\sqrt{3}$; e) $\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$ e raio $\frac{3}{2}$.

4.9. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 51$.

4.10. a) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = \frac{101}{4}$.

b) Como o centro da esfera pertence ao plano xy, ele é da forma $(x_0, y_0, 0)$. Logo, a equação procurada é da forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = r^2.$$

Substituindo os pontos dados nesta equação, obtemos o sistema

$$x_0^2 + y_0^2 + 16 = r^2$$
$$(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 + 9 = r^2$$
$$x_0^2 + (y_0 - 2)^2 + 36 = r^2,$$

cuja solução é: $x_0 = -13$, $y_0 = 6$ e $r^2 = 221$. *Resposta:* $(x + 13)^2 + (y - 6)^2 + z^2 = 221$.

4.11. Centro (0, 4, 0), raio 2.

4.12 $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2 = 5^2$.

4.13. $x^2 + y^2 + y^2 = 13$.

4.14. a) Desenvolva a equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

e faça

$$-2x_0 = a,\ -2y_0 = b,\ -2z_0 = c \text{ e } x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = d.$$

b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = -1$ ou $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 4 = 0$

c) $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$.

4.15. Substitua o ponto $(r \operatorname{sen}\phi \cos\theta,\ r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta,\ r\cos\phi)$ na equação da esfera, que é $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

4.16. Escreva a equação da esfera e substitua nela o ponto $(t, t+1, t+2)$. *Resposta:* $t = 2$ ou $t = -2$.

4.17. a) $u \cdot v = v \cdot u = -2$.
b) $u \times v = (-2, 2, 10)$, $v \times u = (2, -2, -10)$.
c) $(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w) = 32$.
d) $(u \times v) \times w = (38, 18, 4)$, $u \times (v \times w) = (32, 24, 8)$.
e) $(u \times v) \times (u \times w) = (64, -96, 32)$.
f) $(u + v) \times (u + w) = (1, -17, -21)$.
g) $\arccos -\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

4.18. a) $\dfrac{\sqrt{325}}{2}$.
b) $2\sqrt{3}$.

4.19. $7\sqrt{6}$.

4.20. 28.

4.21. Efetue as operações indicadas e escreva w_1, w_2 e w_3 como ternas. *Resposta:* 44.

4.22. Observe que $u \times v = (1 - a, 1, a - 2)$.

4.24. a) Desenhe um cubo e estabeleça um sistema de coordenadas com origem em um dos vértices do cubo e eixos coincidindo com as arestas. Oriente as diagonais e escreva-as como vetores.

Resposta: $\arccos \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

b) $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

4.25. Com o eixo x: $\arccos \dfrac{2}{\sqrt{56}}$; com o eixo y: $\arccos \dfrac{6}{\sqrt{56}}$; com o eixo z: $\arccos \dfrac{4}{\sqrt{56}}$.

4.26. a) $\dfrac{u \times v}{\|u \times v\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$.

b) $\dfrac{u \times v}{\|u \times v\|} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$.

4.27. De $xu + yv = x_1u + y_1v$ tire que $(x - x_1)\, u = (y_1 - y)\, v$. Como u e v têm direções diferentes, conclua que $x - x_1 = 0$ e $y_1 - y = 0$, ou $x = x_1$ e $y = y_1$.

4.30. Use a propriedade $\|u \times v\| = \|u\|\,\|v\| \operatorname{sen} \theta$.

4.31. $u \cdot (v \times w) = \|u\| \cdot \|v \times w\| \cos\alpha$, onde α (ângulo entre u e $v \times w$) é 0° ou 180°. Logo,

$$u \cdot (v \times w) = \pm\, 6\, \|v \times w\| = \pm\, 6\, \|v\|\,.\, \|w\| \operatorname{sen} 30^\circ = \pm\, 6 \cdot 3 \cdot 3 \frac{1}{2} = \pm\, 27.$$

4.32. $\|v \times u - v\|^2 = (v \times u - v)\,.\,(v \times u - v) = (v \times u)\,.\,(v \times u) - (v \times u)\,.\,v - v.(v \times u) + v\,.\,v = \|v \times u\|^2 + \|v\|^2 = 4 + 1 = 5$. Portanto, $\|v \times u - v\| = \sqrt{5}$.

4.33. Use o fato de que qualquer vetor **de** $\mathbf{R}^3$ pode ser escrito na forma

$$w = xu + yv + zu \times v,$$

onde $x = w \cdot u$, $y = w \cdot v$ e $z = w \cdot (u \times v)$.

4.34. a) O plano yz é definido pelos vetores $u = (0, 1, 0)$ e $v = (0, 0, 1)$. Logo,

$$w' = (w\,.\,u)u + (w\,.\,v)v = (0, -1, 3).$$

b) O plano definido pelos pontos O, A e B é o plano definido pelos vetores $\vec{OA} = (2,3,-1)$ e $\vec{OB} = (-3,2,0)$, que são perpendiculares. Tome $u = \dfrac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}$ e $v = \dfrac{\vec{OB}}{\|\vec{OB}\|}$ e aplique o Exercício 4.33. *Resposta:* $(\frac{142}{91}, -\frac{151}{91}, \frac{13}{91})$.

4.35. A área do paralelogramo $ACEF$ é dada por

$$\|\vec{AC} \times \vec{AF}\| = \|\vec{AC} \times \vec{BD}\| = \|(\vec{AD} + \vec{AB}) \times (\vec{AD} - \vec{AB})\| = 2\|\vec{AB} \times \vec{AD}\|.$$

Logo, a área de $ACEF$ é o dobro da área de $ABCD$.

4.36. $2(x - 1) - 1(y - 1) + 8(z - 1) = 0$ ou $2x - y + 8z = 9$.

4.37. a) $x - z + 1 = 0$.
b) $z = 0$.
c) $z = 2$.

4.38. Como a equação do plano xy é $z = 0$, os pontos da interseção do plano $2x - y - z = 2$ com xy satisfazem ao sistema

$$2x - y - z = 2$$
$$z = 0.$$

Duas soluções deste sistema são: $(0, -2, 0)$ e $(1, 0, 0)$. Logo, o plano definido por $(0, -2, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(2, 1, 3)$ é a solução. *Resposta:* $6x - 3y - z = 6$.

4.39. a) $3x + 2y = 6$.
b) $x + 2z = 2$.
c) $x = 3$.
d) $z = 1$.

4.40. $2x - 3y - 2z = 6$.

4.41. $x - y = 0$.

4.42. a) $x = 2 - t$
$y = 1 + 2t$
$z = 3 + 4t$.
b) $x = 0$
$y = t$
$z = 0$.
c) $x = 1 + t$
$y = 1 + t$
$z = 0$.

4.43. $x = 2 + 2t$
$y = 1 - t$
$z = t$.

4.44. O plano mediador de AB é perpendicular a $\vec{AB} = (2, -2, -8)$ e contém o ponto médio de AB. *Resposta:* $x - y - 4z + 7 = 0$.

4.45. Os planos mediadores dos segmentos AB, AC e BC se interceptam segundo uma reta que é o lugar geométrico procurado. A interseção de dois destes planos é, pois, a solução do problema. A seção seguinte trata da questão de interseção de planos. Sem recorrer a ela, você pode proceder como segue: $\vec{AB} \times \vec{AC}$ é paralelo à interseção, e um ponto que satisfaça simultaneamente às equações de dois dos planos mediadores pertence à interseção deles, que é o lugar geométrico. Conhecendo um vetor paralelo e um ponto, podemos escrever as equações paramétricas do lugar geométrico. *Resposta:*

$$x = \frac{3}{2} - 2t$$
$$y = \frac{1}{2}$$
$$z = t.$$

4.46. Os planos bissetores contêm o eixo z. Um deles contém o ponto $(1, 1, 0)$ e o outro contém o ponto $(1, -1, 0)$. *Resposta:* $x + y = 0$ e $x - y = 0$.

4.47. O próprio ponto de tangência $P(1, 2, -1)$ pertence ao plano tangente. Um vetor perpendicular a este plano é $(1, 2, -1)$, pois o raio é perpendicular ao plano tangente no ponto de contato.
Resposta: $x + 2y - z = 6$.

4.48. a) O centro da esfera é $O(0, 0, 0)$. Mostre que $d(O, P)$ é menor que o raio e que $d(O, Q)$ é maior que o raio da esfera.
b) Resolva o sistema formado pelas equações paramétricas da reta definida por P e Q e a equação da esfera. *Resposta:*

$$\left(\frac{2+\sqrt{52}}{6}, \frac{2+\sqrt{52}}{6}, \frac{-2+2\sqrt{52}}{6}\right), \left(\frac{2-\sqrt{52}}{6}, \frac{2-\sqrt{52}}{6}, \frac{-2-2\sqrt{52}}{6}\right).$$

4.49. b) $B(-2, -4, -1)$.

4.50. A mediana contém o vértice C e o ponto médio de AB. *Resposta:*
$x = 3t$
$y = t$
$z = 2t$.

4.51. a) $x = -1 + 2t$
$y = 2 - 3t$
$z = t$.

b) $x = 1 + 2t$
$y = -t$
$z = 2$.

4.52. a) $\left(-\frac{2}{7}, -2, \frac{10}{7}\right)$.
b) $\left(\frac{3}{4}, -2, \frac{7}{2}\right)$.
c) $(2, -2, 6)$.

4.53 Mostre que qualquer ponto da reta satisfaz a equação do plano. Para isto substitua na equação do plano um ponto genérico da reta, isto é, um ponto da forma $(-1 + t, 2 + 3t, 5t)$.

4.54. Mostre que o sistema formado pelas equações paramétricas da reta e a equação cartesiana do plano não tem solução.

4.55. a) $a = 1$ e b qualquer;
b) impossível;
c) $a \neq 1$ e b qualquer.

4.56. a) Os vetores $(a, b, 3)$ e $(2, 1, -5)$ devem ser paralelos. *Resposta:* $a = -\frac{6}{5}$, $b = -\frac{3}{5}$ e d qualquer.
b) $a = -\frac{6}{5}$, $b = -\frac{3}{5}$ e $d = -\frac{12}{5}$.

4.57. O ponto de interseção de r e s é $I(2, 1, 6)$. Para escrever uma equação do plano definido por r e s, use o ponto $I(2, 1, 6)$ e o vetor $(1, -1, 1) \times (2, 3, 2)$. *Resposta:* $x - z + 4 = 0$.

4.58. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
b) 0.
c) $\frac{21}{\sqrt{26}}$.

4.59. a) $\frac{\sqrt{47034}}{27}$.
b) Escreva as equações paramétricas de cada eixo e proceda como no item (a). ***Outra solução***. Examine os triângulos com vértices no ponto dado e nas projeções sobre os ei-

xos e planos coordenados. *Resposta:* distância ao eixo x: $\sqrt{34}$; distância ao eixo y: $\sqrt{29}$; distância ao eixo z: $\sqrt{13}$.

4.60. O plano procurado é perpendicular à interseção dos planos dados. *Resposta:* $2x - y + 3z = 13$.

4.61. Dois vetores paralelos ao plano são (0, 0, 1) e (1, 2, 3) $\times$ (2, 1, 1) = (-1, 5, -3). Um ponto do plano é (1/3, 1/3, 1). *Resposta:*

$$x = \frac{1}{3} - t$$

$$y = \frac{1}{3} + 5t$$

$$z = 1 - 3t + s.$$

4.62. a) Tome dois pontos da reta e projete-os sobre o plano α. A reta definida pelas projeções é a solução. *Resposta:*

$$x = 3 + t$$
$$y = -1 + 2t$$
$$z = -3.$$

b) O ângulo entre a reta e o plano α é um dos ângulos entre a reta e sua projeção sobre o plano α. *Resposta:* menor ângulo: arccos $5/\sqrt{70}$.

4.63. O vetor (2, -3, 2) $\times$ (3, 2, -1) é perpendicular ao plano procurado. Para se obter um ponto do plano, atribua a t, nas equações paramétricas de r, um valor qualquer.
Resposta: Equação cartesiana: $x - 8y - 13z + 9 = 0$; equações paramétricas:
$x = 1 + 2t + 3s$
$y = -2 - 3t + 2s$
$z = 2 + 2t - s$.

4.64. O ângulo agudo entre r e s é igual ao ângulo agudo entre os vetores (2, -1, 1) e (1, 1, 1), que é arccos $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

4.65. O ângulo θ entre os vetores (2, -1, 3) e (1, 1, -8) é um dos ângulos entre os planos dados. Como $\cos\theta < 0$, θ é o ângulo maior. O ângulo agudo é, pois,

$$\arccos\frac{23}{\sqrt{924}}.$$

4.66. a) Tome um ponto $P(2, 2 + t, 3 - t)$ de r e mostre que $d(P, A) = d(P, B) = d(P, C)$, qualquer que seja t.
b) É a interseção de r com o plano definido por A, B e C. Compare este exercício com o de número 4.45. *Resposta:* (2, 3, 2).

4.67. a) O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de A, B e C é uma reta. A interseção desta reta com o plano dado é a solução do problema. *Resposta:*

$$\left(-\frac{103}{74}, -\frac{309}{74}, \frac{9}{74}\right).$$

b) É a interseção do lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de A, B e C com o plano definido por A, B e C. *Resposta:*

$$\left(-\frac{23}{154}, -\frac{69}{154}, \frac{529}{154}\right).$$

4.68. r é a interseção de α com o plano mediador de AB. *Resposta:*
$x = 2 - 3t$
$y = 1 - 4t$
$z = t.$

4.69. Um ponto da bissetriz é (3, 4, -2), que é a interseção de r e s. O ângulo menor de r e s é o ângulo definido pelos vetores (1, 1, -1) e (-1, 2, -1) ou pelos vetores $u = (1/\sqrt{3})(1, 1, -1)$ e $v = (1/\sqrt{6})(-1, 2, -1)$. Como u e v têm o mesmo módulo,

$$u + v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

é paralelo à bissetriz. Logo, a solução é:

$$x = 3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)t$$

$$y = 4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right)t$$

$$z = -2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)t.$$

4.70. a) Seja P' o simétrico de P em relação a O. Então, O é o ponto médio do segmento PP'. *Resposta:* (4, -3, -1).
b) Determine o ponto de interseção do plano que contém P e é perpendicular à reta dada, com esta reta e proceda como no item (a). *Resposta:* (0, -1, 1).
c) Determine a interseção da reta que contém P e é perpendicular ao plano dado, com o plano dado e proceda como no item (a). *Resposta:* (-2/17, 53/17, -15/17).

4.71 $x = \frac{25}{11} + 3t$

$y = \frac{34}{11} + t$

$z = \frac{48}{11} - 26t.$

4.72. Seja Q o ponto onde a reta s intercepta o plano definido por P e r. A reta definida por P e Q é a solução do problema. Dependendo de P, r e s, este problema pode não admitir solução. *Resposta:*
$x = 1 + 5t$
$y = 3 - 64t$
$z = 5 - 32t.$

4.73. a) $\dfrac{7}{\sqrt{90}}$.

b) Determine a projeção r' de r sobre o plano α que contém s e é paralelo a r. Seja I a interseção de r' com s. A reta que contém I e é perpendicular a α é a solução. *Resposta:*

$$x = \frac{109}{90} + 5t$$
$$y = \frac{436}{90} + 4t$$
$$z = \frac{507}{90} - 7t$$

4.74. O vetor $(a, b, c) \times (a_1, b_1, c_1)$ é paralelo a cada um dos planos dados. Logo, é paralelo à interseção desses planos. (Uma reta paralela a dois planos que se interceptam é também paralela a sua interseção. Você se lembra deste teorema da Geometria Elementar?)

4.76. Determine a interseção do plano dado com a reta que contém a origem e é perpendicular a ele. *Resposta:*

$$\left(\frac{ad}{a^2+b^2+c^2}, \frac{bd}{a^2+b^2+c^2}, \frac{cd}{a^2+b^2+c^2}\right).$$

4.77. a) zero ou $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

b) $\arccos \dfrac{1}{5}$ e arctg 2.

4.78. Fazendo-se a interseção da reta que contém o centro da esfera e é perpendicular ao plano dado, com a esfera, obtém-se o ponto de tangência. *Resposta:*

$$2x - y + 6z = 5 + \frac{123}{\sqrt{41}} \quad \text{ou} \quad 2x - y + 6z = 5 - \frac{123}{\sqrt{41}}.$$

4.79. Centro $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, raio $\dfrac{\sqrt{210}}{3}$.

4.80. a) A partícula está mais próxima da esfera no instante que estiver mais próxima de seu centro. A distância de um ponto da trajetória da partícula ao centro da esfera é dada por

$$\sqrt{(1+t)^2 + (1-2t)^2 + t^2}.$$

O mínimo desta distância ocorre quando

$$\frac{d}{dt}[(1 + t)^2 + (1 - 2t)^2 + t^2] = 0.$$

Resposta: $t = \dfrac{1}{6}$.

b) É o ponto de interseção da esfera com a reta definida por $O(0, 0, 0)$ e $P(7/6, 2/3, 1/6)$.

Resposta: $\frac{1}{\sqrt{66}}(7,4,1)$.

CAPÍTULO 5

5.1. a) $(x, 0, 0)$; b) $(0, y, 0)$; c) $(0, 0, z)$.

5.2 $(x_1, 3, y_1)$, onde $x_1^2 + y_1^2 = 29$.

5.3. $(2, 1, 4)$ e $(2, -1, 4)$.

5.4. a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$.

b) $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

c) $x = y^2 + z^2$.

d) $z = 4(x^2 + y^2)$.

e) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$.

5.5. Parta de $\cos\theta = \pm\cos\alpha$, onde α é o menor ângulo entre r e s e θ é o ângulo entre $v = (2, -1, 1)$ e $\vec{VP}$, sendo $V(3, 1, 4)$ o vértice e $P(x, y, z)$ um ponto genérico do cone. *Resposta:* $104x^2 + 23y^2 + 23z^2 - 108xy + 108xz - 54yz - 948x + 494y - 454z + 2083 = 0$.

5.7. a) Neste caso, para $0 \le y \le 4$, a reta que contém o raio de rotação intercepta a curva dada em dois pontos. Considerando cada um dos raios de rotação, obtém-se as equações

$$\left(2+\sqrt{4+z}\right)^2 = x^2+y^2 \text{ e } \left(2-\sqrt{4+z}\right)^2 = x^2+y^2,$$

onde $z \ge -4$ em ambas e $z \le 0$, na segunda. Portanto, a superfície que se obtém é constituída de todos os pontos P(x, y, z) que satisfaz

$$\left(2+\sqrt{4+z}\right)^2 = x^2+y^2, -4 \le z, \text{ ou } \left(2-\sqrt{4+z}\right)^2 = x^2+y^2, -4 \le z \le 0.$$

b) A curva cuja equação é

$$z = y^2 - 4|y|.$$

Esta curva compõe-se dos arcos de parábolas cujas equações são

$$z = y^2 - 4y,\ y \ge 0 \text{ e } z = y^2 + 4y,\ y \le 0.$$

c) $k > 0$, uma circunferência;
$k = 0$, uma circunferência mais o seu centro;
$-4 < k < 0$, duas circunferências;
$k = -4$, uma circunferência;
$k < -4$, não há interseção.

5.8. $(x - 3)^2 + y^2 = 10$.

5.9. $x^2 + z^2 - \text{sen}^2 y = 0,\ 0 \le y \le 2\pi$.

5.10. a) Fatorando a equação, obtemos

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 0,$$

cuja única solução é (1, 2, -1).

b) Fatorando a equação, obtemos

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + 3z^2 = 0.$$

Donde se conclui que o gráfico reduz-se ao ponto (0, 0, 0).

c) Fatorando a equação, obtemos

$$(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 2z^2 = 0.$$

O gráfico reduz-se ao ponto (1, 1, 0).

5.11. Fatorando a equação, encontramos

$$(x + y)^2 + (x + z)^2 + (y + z)^2 + 3z^2 = -8.$$

Como o primeiro membro é uma soma de termos não-negativos e o segundo membro é um número negativo, a equação não tem solução, ou seja, seu gráfico é o conjunto vazio.

5.14. (1, 1, 4).

5.15 a) $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{1}+\dfrac{z^2}{4}=1$, elipsóide de revolução.

b) $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{1}=1$, elipsóide.

c) $\dfrac{x^2}{\frac{1}{3}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{8}}+\dfrac{z^2}{\frac{1}{4}}=1$, hiperbolóide de uma folha.

d) $\dfrac{x^2}{\frac{1}{3}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{8}}-\dfrac{z^2}{\frac{1}{4}}=1$, hiperbolóide de duas folhas.

e) $z=\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{1}$, parabolóide elíptico.

f) $z=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}$, parabolóide hiperbólico.

g) $y^2 = x^2 + z^2$, cone de revolução.

h) $z^2 = x^2 + \dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}$, cone quádrico.

5.16. $x^2 = \dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}$.

5.17. A equação procurada é da forma

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}.$$

Para $z = 1$, temos

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$$

que, segundo o enunciado, é uma circunferência de raio 3. Logo, $a^2 = 9$. *Resposta:*

$$z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9}.$$

5.18. Proceda como no Exercício 5.17. *Resposta*:

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}.$$

5.19. A equação procurada é da forma

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad \text{(E)}$$

Para determinar c, substitua x, y e z em (E) pelas coordenadas do ponto (1, 1, 1). *Resposta:*

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

5.20. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1.$

5.21. Focos: $F\left(0,2,\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $F_1\left(0,2,-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$; vértices: $A\left(0,2,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$A_1\left(0,2,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \quad B(\sqrt{3},2,0), \quad B_1(-\sqrt{3},2,0).$$

5.22. $\left(0,0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

5.23. Determine a equação do cone e proceda como no Exercício 5.21. *Resposta:* $F\left(0,\frac{5+\sqrt{5}}{2},2\right)$ e $F_1\left(0,\frac{5-\sqrt{5}}{2},2\right)$.

5.24. $m = 0$.

5.25. a) Substituindo a primeira equação na segunda e resolvendo a equação resultante, obtemos

$$z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Substituindo este valor de z na primeira equação (ou na segunda) e resolvendo a equação resultante em x, obtemos

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - y^2}.$$

Fazendo, pois, $y = t$, temos

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - t^2}$$

$$y = t \qquad\qquad -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \le t \le \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Outra solução. Como foi dito no Exercício 5.22, a interseção é uma circunferência. O centro desta circunferência é $(0,0,(\sqrt{5}-1)/2)$ e ela está contida em um plano paralelo a xy. Seu raio é $\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}$. Logo, pode ser parametrizada também assim:

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\cos t$$

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\operatorname{sen} t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

b) Substituindo a segunda equação na primeira e resolvendo a equação resultante, obtemos $x = 0$. Introduzindo este valor na segunda equação, obtemos $y = 2$. Logo,

$x = 0$
$y = 2$
z, qualquer

é uma parametrização da reta interseção.

5.26. Escolha quatro pontos da interseção e mostre que um deles não está contido no plano definido pelos outros três.

5.27. Os pontos da forma

$$(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$$

Para $t = \pi/4 + 2k\pi$, pertencem simultaneamente à curva e ao plano.

5.28. a) $x = \cos t$
$y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$
$z = 1 - \cos t - \operatorname{sen} t$,
b) $x = \cos^2 t$
$y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$
$z = \cos t$.

5.29. O vetor tangente à curva no ponto $P(t) = (6t, 3t^2, t^3)$ é $P'(t) = (6, 6t, 3t^2)$.
O ângulo definido por este vetor e $(1, 0, 1)$ não varia, pois seu co-seno

$$\frac{6+3t^2}{\sqrt{36+36t^2+9t^2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

é constante.

5.30. a) $x = 2$
$y = 3 + t$
$z = 2 + \frac{2}{3}t.$

b) $\frac{2x_0x}{a^2} + \frac{2y_0y}{b^2} - z = z_0.$

5.31. $x - y - z + 2 = 0.$

CAPÍTULO 6

6.1. Escreva z e w na forma $x + yi$, aplique a definição de conjugado e efetue as operações indicadas.

6.2. $-i$, 1, i, i.

6.3. a) -4 b) 8 c) $-i$.

6.5. 2,37 - 2,31i (em números aproximados).

6.6. Escreva z e w na forma $x + yi$, aplique a definição de módulo e efetue as operações indicadas. Utilize (b) na solução de (c).

6.7. Interprete os números complexos z e w como vetores e construa o paralelogramo definido por z e w . $z + w$ e $w - z$ são as diagonais do paralelogramo. A soma dos quadrados das diagonais é igual ao dobro da soma dos quadrados dos lados.

6.8. Mostre que

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|^2 = 1.$$

Para tal, escreva

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|^2 = \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{w}}{1-z\bar{w}}.$$

Faça a multiplicação do segundo membro e use o fato de que $z\bar{z} = 1$.

6.9. a) $a = 1/5$, $b = 7/5$.
b) $a^2 + b^2 \neq 2$.
c) $a^2 + b^2 = 2$, $a \neq 1/5$ e $b \neq 7/5$.

6.10. $4 + 2i$.

6.11. $z_3 + z_2 - z_1$ ou $z_2 + z_1 - z_3$ ou $z_1 + z_3 - z_2$.

6.12. $|z - a| + |z + a| = 2|c|$ é a equação de uma elipse de focos a e $-a$ e eixo maior $2|c|$. Os vértices desta elipse são pontos fáceis de serem determinados. Se $|a| > |c|$, não existe z que satisfaça a equação.

6.13. Sejam a e c complexos tais que $|c| \leq |a|$. Então

$$||z + a| - |z - a|| = 2|c|$$

é uma equação da hipérbole cujos focos são a e $-a$.

6.14. Observe que

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\,\text{sen}\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{n}\right)^k$$

6.15 Calcule o ângulo entre z e $ze^{i\theta}$.

6.16. a) -1. b) $1, i, -1, -i$.

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}$.

d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i, -1 + i$.

6.17. a) $[x - (2 + 3i)][(x - (2 - 3i)] = 0$ ou $x^2 - 4x + 13 = 0$.

b) $(x - 3)[x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)] = 0$ ou $x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = 0$.

c) $(x - 1)[x - (1 + 2i)][(x - (1 + 3i)] = 0$ ou $x^3 - (3 + 5i)x^2 - (3 - 10i)x + 5 - 5i = 0$.

6.18. Substitua x por z na equação e tome o conjugado de ambos os membros. Usando o fato de que o conjugado da soma é a soma dos conjugados e que o conjugado do produto é o produto dos conjugados, mostre que $\bar{z}$ satisfaz a equação dada. Para provar que uma equação do terceiro grau tem pelo menos uma raiz real, use o resultado anterior e mostre que uma raiz da equação é a conjugada dela mesma e, portanto, é real.

6.19. a) Use a fórmula de Tartaglia. *Resposta:* $-2, 1 + i, 1 - i$.

b) Faça $x = y + h$, substitua na equação e determine h de modo que a equação resultante não contenha o termo em y^2. Resolva a equação resultante em y, usando a fórmula de Tartaglia, e determine as raízes da equação original usando a relação $x = y + h$. *Respostas:* $1/2, 2 + i, 2 - i$.

6.20. Parta da forma da distância em coordenadas cartesianas. *Resposta:*

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

6.21. Os gráficos dão as seguintes curvas:

a) circunferência; b) cardióide; c) rosácea de quatro pétalas, para $n = 2$ e rosácea de três pétalas, para $n = 3$; d) espiral; e) lemniscata; f) circunferência; g) reta.

6.23. Das equações paramétricas deduza que

$$x^2 + y^2 = a^2\sec^2 t + 2ab\sec t + b^2$$

e daí que

$$r^2 = (a\sec t + b)^2.$$

6.24. Use o ângulo t formado pelo eixo x e a reta OB como parâmetro. Faça uma figura e tire x em função de t diretamente dela. Para obter y em função de t use potência do ponto B em relação à circunferência C. *Resposta:*

$$x = 2a \text{ cotg } t$$
$$y = 2a \text{ sen}^2 t.$$

Equação cartesiana: substitua $\text{sen}^2 t = \dfrac{y}{2a}$ em

$$x^2 = 4a^2 \frac{1 - \text{sen}^2 t}{\text{sen}^2 t}$$

Resposta: $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$.

CAPÍTULO 7

7.1 a) $x = 1 + t$, $y = 1$, $z = 1$, $w = 1.$

b) $x = 1 + t$, $y = 1 + t$, $z = 1$, $w = 0.$

c) $x = -1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 2 + 6t$, $w = 1 + 8t.$

7.2 a) $x = 1 + s$, $y = 1 + t$, $z = 1$, $w = 1.$

b) $x = 1 + s$, $y = 1 - s$, $z = 1 + t$, $w = t.$

c) $x = -1 + s$, $y = 1 + 2s$, $z = 3t$, $z = 4t.$

7.3. Mostre que dois pontos da reta satisfazem as equações paramétricas do plano.

7.4. Mostre que o sistema formado pelas equações paramétricas da reta e do plano não admite solução.

7.5. Observe que qualquer vetor u, tal que $u \cdot v_1 = u \,.\, v_2 = 0$, é perpendicular ao plano que contém A e é paralelo a v_1 e v_2.

7.6. a) $x = -3 + r$, $y = 1 + r + s$, $z = 2 + s + t$, $w = t.$

b) $x = -r - s$, $y = r + 2t$, $z = r$, $w = 2.$

c) $x = r + s + t$, $y = 2r$, $z = 2s$, $w = 2t.$

7.7. a) $x - y + z - w = -2$

b) $w = 2$

c) $2x - y - z - w = 0.$

7.8. Veja as respostas no Exercício 7.7.

7.9. a) $w = 2.$

b) $x + y + x + w = 2.$

c) $x + y + z + w = 0.$

7.10. a) $\left(-\frac{3}{2},-2,\frac{13}{2},-4\right)$.

b) Resolva o sistema formado pelas quatro equações paramétricas do plano e a equação cartesiana do hiperplano. Este sistema tem seis incógnitas. Resolva-o em função de uma das incógnitas (t, por exemplo). A interseção é a reta cujas equações paramétricas são

$$x = -\frac{4}{3} - \frac{7}{3}t$$

$$y = \frac{1}{3} - \frac{14}{3}t$$

$$z = 3t$$

$$w = 4t.$$

c) $x = -\frac{3}{2} - t$

$$y = \frac{1}{2} - s$$

$$z = t$$

$$w = s.$$

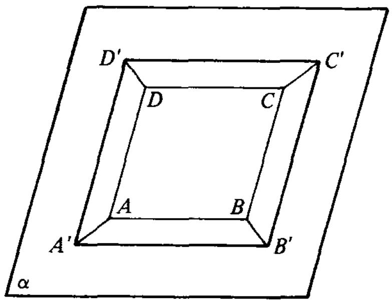
7.11. As retas paralelas ao eixo w passando pelos pontos de C_1 determinam um cilindro cuja interseção com o espaço tridimensional xyz é C_1. Portanto, o cilindro não intercepta C_2. Ao se deslizar qualquer distância ao longo do cilindro, C_1 sai do hiperplano xyz e, portanto, desentrelaça-se de C_2. Use agora qualquer trajeto para retornar C_1 para uma posição conveniente do espaço xyz.

7.12. O centro da hiperesfera é a origem. A direção de uma reta qualquer que passa pela origem pode ser determinada por um vetor unitário (a, b, c, d). (Portanto, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.) As suas equações paramétricas são $x = at$, $y = bt$, $z = ct$, $w = dt$ que, juntamente com $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, formam um sistema que admite solução $t = \pm 1$. A reta intercepta a hiperesfera nos pontos $\pm (a, b, c, d)$.

7.13. A interseção é $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - k^2$, $w = k$, que é: a) esfera de centro (0, 0, 0, 0) e raio 1; b) esfera de centro (0, 0, 0, 1/2) e raio 1/2; c) o ponto (0, 0, 0, 1); d) o conjunto vazio.

7.14. Primeiramente, mostramos um esquema que pode ser usado para a contagem dos vértices, arestas e faces do cubo. Este esquema será limitado para o caso do hipercubo. O estratagema consiste em desenhar no plano uma figura que de certa maneira contenha os elementos do cubo que se quer contar. No plano α da Figura 8.1a, o quadrado interior $ABCD$ representa a face inferior do cubo da Figura 8.1b, assim como $ABB'A'$, $BCC'B'$ etc. representam as faces laterais indicadas com as mesmas letras no cubo. O quadrado exterior $A'B'C'D'$ na Figura 8.1a corresponde à face superior do cubo da Figura 8.1b.

Para o hipercubo, a figura correspondente à Figura 8.1a é a Figura 8.2. Os cubos interior $ABCDEFGH$ e exterior $A'B'C'D'E'F'G'H'$ correspondem às faces cúbicas inferior e superior do hipercubo. Os 6 cubos $ABFEA'B'F'E'$, $BCGFB'C'G'F'$ etc. correspondem às faces cúbicas laterais do hipercubo (elas são geradas pela translação das faces quadradas do cubo inferior, da mesma maneira que os lados do quadrado *ABCD* geram as faces laterais do cubo da Figura 8.1b). Portanto, $c = 8$. Uma simples contagem na Figura 8.2 mostra que $v = 16$, $a = 32$, $f = 24$.



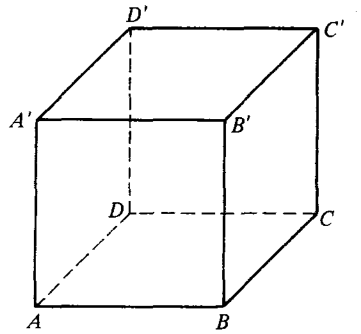


Fig. 8.1.

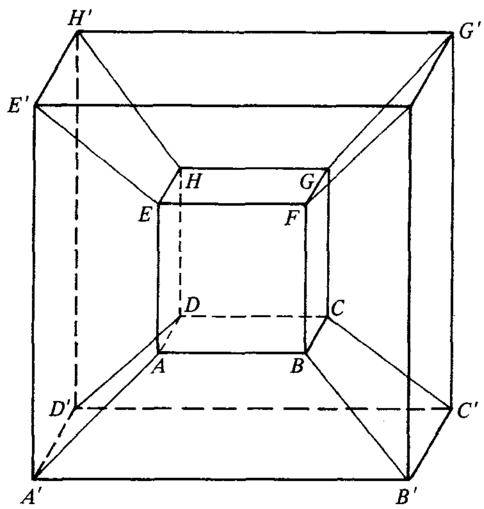


Fig. 8.2.

BIBLIOGRAFIA

SUGESTÕES PARA LEITURA

1. T. M. Apostol. *Cálculos.* Editora Reverté, 1973. Os Capítulos 9, 12 e 13 tratam de números complexos e Geometria Analítica.
2. G. S. S. Ávila. *Funções de uma Variável Complexa.* LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1977. O Cap. 1 apresenta o plano complexo.
3. R. L. Eisenman. An Easy Way from a Point to a Line. *Math. Magazine*, vol. 42 (1969), 40-41. Dá uma dedução simples da fórmula da distância de um ponto a uma reta, usando semelhança de triângulos.
4. A. Gonçalves. *Introdução à Álgebra.* IMPA - Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979. A introdução do livro apresenta uma dedução da fórmula de Tartaglia.
5. D. Hilbert & S. Cohn-Vossen. *Geometry and the Imagination.* Chelsea Publ. Co., N. Y., 1952. Na Seção 23 aparece uma descrição dos poliedros regulares em três e quatro dimensões.
6. D. C. Murdoch. *Geometria Analítica.* LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1971. É um texto de Geometria Analítica com uma introdução à Álgebra Linear. Utilizando diagonalização de matrizes, faz a redução das quádricas à forma canônica.
7. N. M. Santos. *Vetores e Matrizes.* Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1972. É uma introdução à Álgebra Linear contendo Geometria Analítica no Espaço.
8. B. Walsh. The Scarcity of cross Productos on Euclidean Spaces. *Amer. Math. Monthly,* vol. 74 (1967), 188-194. Usando apenas Álgebra Linear elementar, prova que o produto vetorial de dois vetores existe apenas em $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^7$.

CAPÍTULO 1

ÍNDICE ALFABÉTICO