Regra da Cadeia e Derivação Implícita

Regra da cadeia, derivação implícita, derivada das funções trigonométricas inversas, derivada da função exponencial e logarítmica. Aplicações: Taxas relacionadas. Aproximações Lineares e Diferenciais

A Regra da Cadeia

As fórmulas de derivação que você aprendeu anteriormente não lhe permitem calcular derivadas de uma função composta.

Por exemplo, considere a função $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Observe que F é uma função composta. Na realidade, se assumirmos $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$, então poderemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$. Sabemos como derivar ambas, f e g, então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de $F = f \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

O resultado é que a derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de f e g. Esse fato é um dos mais importantes das regras de derivação e é chamado *Regra da Cadeia*.

A Regra da Cadeia Se g for derivável em x e f for derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$ definida por $F(x) = f(g(x))$ é derivável em x e F' é dada pelo produto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Exemplo 1

Encontre $F'(x)$ se $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

F é uma função composta. $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, onde $g(x) = x^2 + 1$.

temos

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Se fizermos $u = x^2 + 1$ e $y = \sqrt{u}$, então

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Regra da Potência Combinada com a Regra da Cadeia

$\boxed{4}$ **A Regra da Potência Combinada com a Regra da Cadeia** Se n for qualquer número real e $u = g(x)$ for derivável, então

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Alternativamente, $$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Exemplos

1. Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

Primeiro reescreva f: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$.

Logo,
$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$
$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

2. Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

Aqui a função de dentro é $g(x) = \operatorname{sen} x$, e a função de fora é a função exponencial $f(x) = e^x$.

Logo, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$

Derivada da Função Exponencial para qualquer $\boldsymbol{a > 0}$

Podemos usar a Regra da Cadeia para derivar uma função exponencial com qualquer base $a > 0$.

Lembre-se que $a = e^{\ln a}$. Logo

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

e a Regra da Cadeia dá

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x = e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

Portanto, temos a fórmula

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Em particular, se $a = 2$, obteremos

$$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

A estimativa $\dfrac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x$

é consistente com a fórmula exata, pois $\ln 2 \approx 0{,}693147$.

Derivação Implícita

As funções encontradas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outra – por exemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{ou} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

ou, em geral, $y = f(x)$.

Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y, tais como

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad \text{ou} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

Felizmente, não precisamos resolver uma equação para y em termos de x para encontrar a derivada de y. Em vez disso, podemos usar o método de **derivação implícita**. Isso consiste na derivação de ambos os lados da equação em relação a x e, então, na resolução da equação isolando y'.

Exemplo

(a) Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, 4)$.

(a) Derive ambos os lados da equação $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Lembrando que y é uma função de x e usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Logo,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Agora isole dy/dx nessa equação:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, 4)$.

No ponto $(3, 4)$, temos $x = 3$ e $y = 4$, logo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Uma equação da reta tangente ao círculo em $(3, 4)$ é, portanto,

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad 3x + 4y = 25$$

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

1- Derivada do arco seno

Lembre-se de que a função inversa da função seno foi definida por:

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{significa} \qquad \operatorname{sen} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Derivando $\operatorname{sen} y = x$ implicitamente em relação a x, obtemos

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Agora, $\cos y \geqslant 0$, uma vez que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, então

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2. Derivada do arco tangente

A fórmula para a derivada da função arco tangente é deduzida de maneira análoga. Se $y = \operatorname{tg}^{-1}x$, então $\operatorname{tg} y = x$. Derivando essa última equação implicitamente em relação a x, temos

$$\sec^2 y \, \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

As funções trigonométricas inversas que ocorrem com mais frequência são aquelas que acabamos de discutir. As derivadas das quatro funções remanescentes estão dadas na tabela a seguir.

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotg}^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Derivadas de Funções Logarítmicas

Nesta seção vamos usar a derivação implícita para achar as derivadas das funções logarítmicas $y = \log_a x$ e, em particular, da função logarítmica natural $y = \ln x$.

Seja $y = \log_a x$. Então

$$a^y = x$$

Derivando essa equação implicitamente em relação a x, obtemos

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

e assim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Se pusermos $a = e$ na Fórmula 1, então o fator $\ln a$ no lado direito torna-se $\ln e = 1$, e obtemos a fórmula para a derivada da função logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Exemplo

Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

Para usarmos a Regra da Cadeia, vamos fazer $u = x^3 + 1$. Então, $y = \ln u$, logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3 + 1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

De forma geral, $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Aplicações da Derivada

1. Taxas Relacionadas

Em um problema de taxas relacionadas, a ideia é calcular a taxa de variação de uma grandeza em termos da taxa de variação da outra (que pode ser medida mais facilmente).

O procedimento é achar uma equação que relacione as duas grandezas e então usar a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados em relação ao tempo.

Estratégia de Solução de Problemas

1. Leia cuidadosamente o problema.
2. Se possível, faça um diagrama.
3. Introduza uma notação. Atribua símbolos para todas as grandezas que são funções do tempo.
4. Expresse a informação dada e a taxa pedida em termos das derivadas.
5. Escreva uma equação que relacione as várias grandezas do problema. Se necessário, use a geometria da situação para eliminar uma das variáveis por substituição.
6. Use a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados da equação em relação a t.
7. Substitua a informação dada na equação resultante e resolva-a para determinar a taxa desconhecida.

Exemplos

1. Um tanque de água possui o formato de um cone circular invertido, com base de raio de 2 m e altura igual a 4 m. Se a água está sendo bombeada para o tanque a uma taxa de 2 m^3/ min, encontre a taxa na qual o nível de água está aumentando quando a água estiver 3 m de profundidade.

Primeiro vamos esboçar o cone e colocar legendas, como na Figura 3.

Sejam V, r, e h o volume da água, o raio da superfície e a altura no instante t, onde t é medido em minutos.

Foi-nos dado que $dV/dt = 2\ \text{m}^3/\text{min}$ e nos foi pedido para encontrar dh/dt quando h for 3 m.

As quantidades V e h são relacionadas pela equação $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

mas é muito útil expressar V como uma função apenas de h.

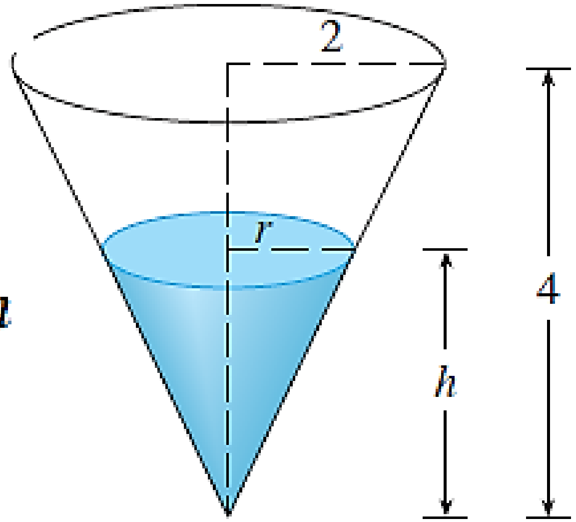

FIGURA 3

Para eliminar r, usamos os triângulos similares na Figura 3 para escrever

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

e a expressão para $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ se torna

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

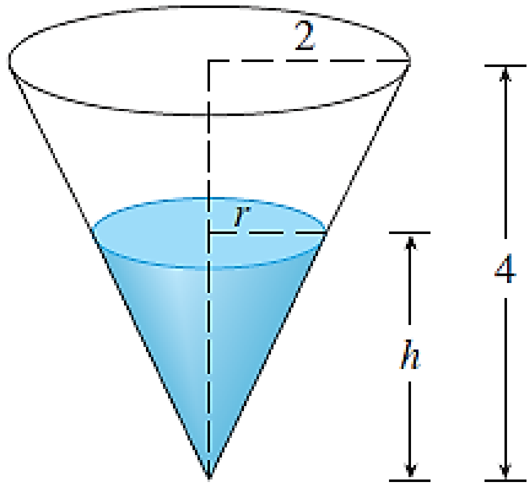

FIGURA 3

Agora podemos derivar cada lado em relação a t: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\pi}{4}h^2\dfrac{dh}{dt}$

então

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Substituindo $h = 3$ m e $dV/dt = 2$ m^3/min, temos $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{4}{\pi(3)^2} \cdot 2 = \dfrac{8}{9\pi}$

O nível da água estará subindo a uma taxa de $8/(9\pi) \approx 0{,}28$ m/min.

2. O carro A está se movimentando para o oeste a 90 km/h e o carro B está se movimentando para o norte a 100 km/h. Ambos vão em direção à intersecção de duas estradas.
A que taxa os carros se aproximam um do outro quando o carro A está a 60 m e o carro B está a 80 m da intersecção?

Desenhamos a Figura 4, onde C é a intersecção das estradas.

Em um dado instante t, seja x a distância do carro A a C, seja y a distância do carro B a C, e seja z a distância entre os carros, em que x, y e z são medidos em quilômetros.

Foi-nos dado que $dx/dt = -90$ km/h e $dy/dt = -100$ km/h.

(As derivadas são negativas porque x e y são decrescentes.)

Foi-nos pedido para encontrar dz/dt.

A equação que relaciona x, y e z é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

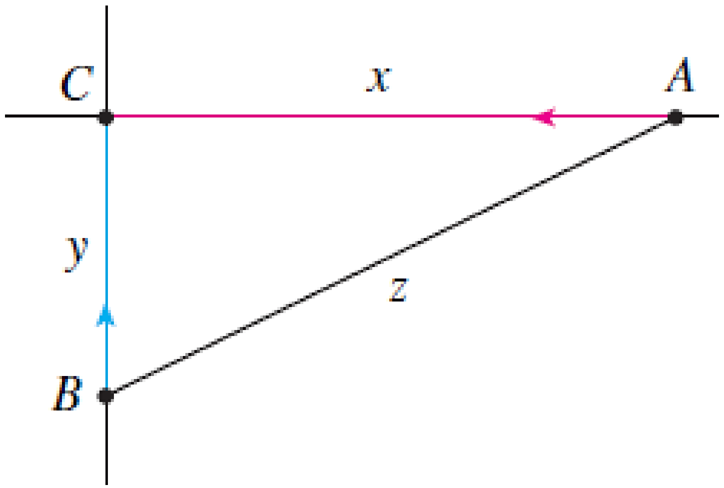

FIGURA 4

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Derivando cada lado em relação a t, temos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Quando $x = 0{,}06$ km e $y = 0{,}08$ km, o Teorema de Pitágoras nos dá $z = 0{,}1$ km, portanto

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0{,}1}[0{,}06(-90) + 0{,}08(-100)]$$

$$= -134 \text{ km/h}$$

Os carros aproximam-se um do outro a uma taxa de 134 km/h.

Aproximações Lineares

A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

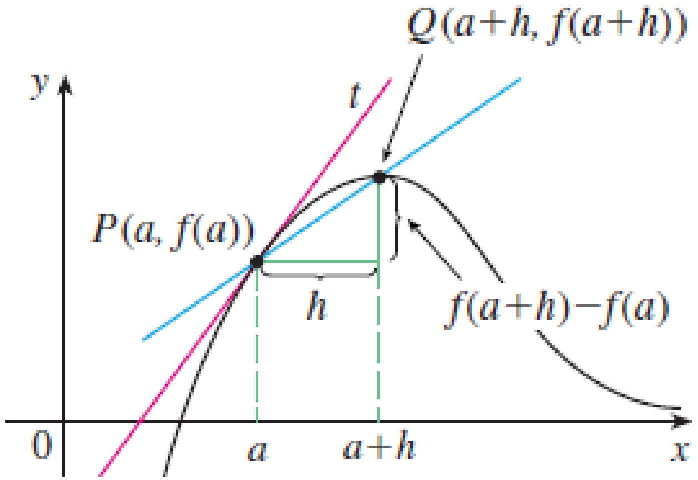

FIGURA 3

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

Algumas vezes nos referimos à inclinação da reta tangente como a **inclinação da curva** no ponto. A ideia por detrás disso é que, se dermos *zoom* (suficiente) em direção ao ponto, a curva parecerá quase uma reta. A Figura 2 ilustra esse procedimento para a curva $y = x^2$. Quanto maior for o *zoom*, mais indistinguível da reta tangente será a parábola. Em outras palavras, a curva se torna quase indistinguível de sua reta tangente.

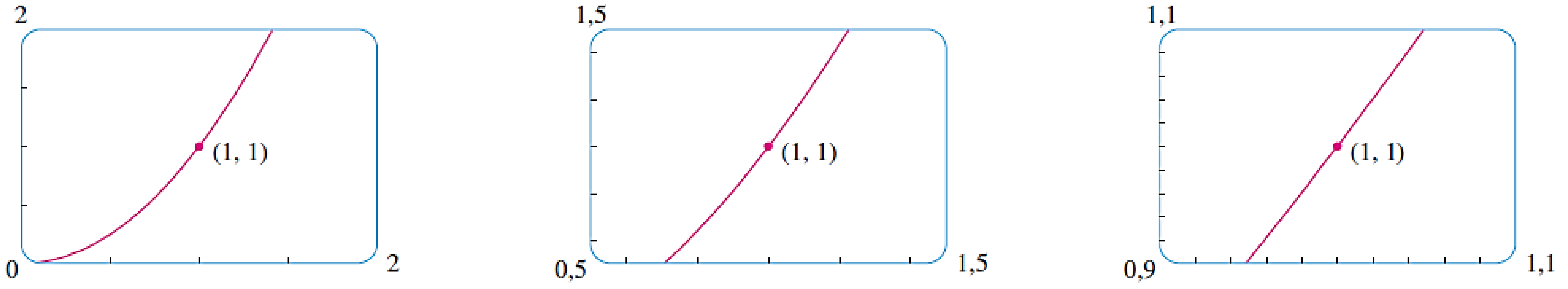

FIGURA 2 Um *zoom* cada vez maior da parábola $y=x^2$ em torno do ponto $(1, 1)$.

A ideia é que pode ser fácil calcular um valor $f(a)$ de uma função, mas difícil (ou mesmo impossível) calcular os valores de f em pontos próximos. Assim, nos contentamos com os valores facilmente calculados da função linear L, cujo gráfico é a reta tangente a f em $(a, f(a))$ (veja a Figura 1).

Em outras palavras, usamos a reta tangente em $(a, f(a))$ como uma aproximação para a curva $y = f(x)$ quando x estiver próximo de a.

Uma equação dessa reta tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

e a aproximação

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

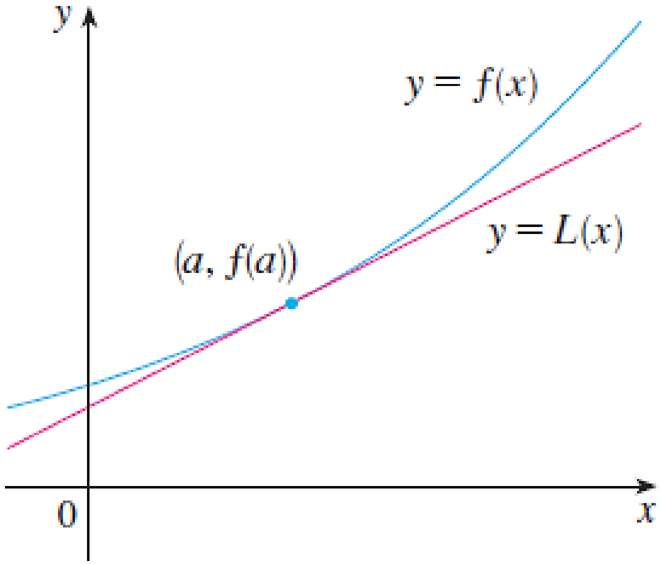

FIGURA 1

é denominada **aproximação linear** ou **aproximação pela reta tangente** f em a. A função linear cujo gráfico é essa reta tangente, ou seja,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é denominada **linearização** de f em a.

Exemplo

Encontre a linearização da função $f(x) = \sqrt{x + 3}$ em $a = 1$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{3{,}98}$ e $\sqrt{4{,}05}$. Essas aproximações estão superestimadas ou subestimadas?

A derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ é

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

e assim temos $f(1) = 2$ e $f'(1) = \frac{1}{4}$.

Colocando esses valores na Equação $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, vemos que a linearização é

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

A aproximação linear correspondente $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ é

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(quando } x \text{ estiver próximo a 1)}$$

Em particular, temos

$$\sqrt{3{,}98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0{,}98}{4} = 1{,}995 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{4{,}05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1{,}05}{4} = 2{,}0125$$

A aproximação linear está ilustrada na Figura 2.

Vemos que, realmente, a aproximação pela reta tangente é uma boa aproximação para a função dada quando x está próximo de 1.

Vemos também que nossas aproximações são superestimadas, pois a reta tangente está acima da curva.

Naturalmente, uma calculadora nos daria aproximações para $\sqrt{3{,}98}$ e $\sqrt{4{,}05}$, mas a aproximação linear funciona *em todo um intervalo*.

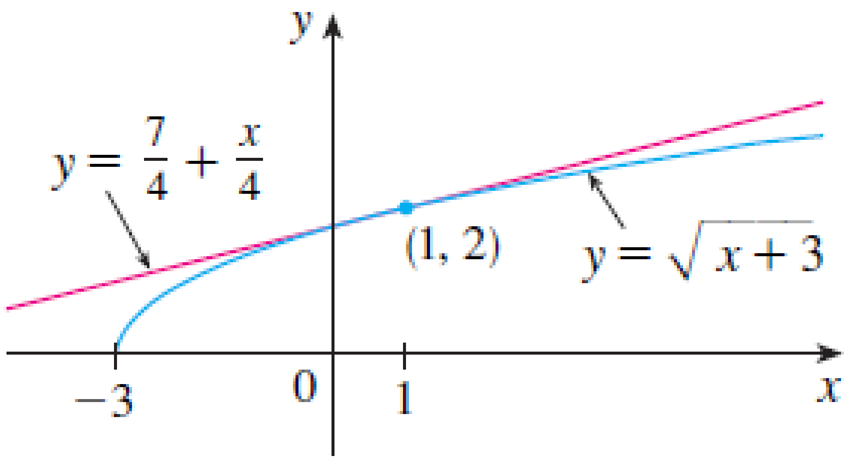

FIGURA 2

Diferenciais

As ideias por trás das aproximações lineares são algumas vezes formuladas na terminologia e notação de *diferenciais*. Se $y = f(x)$, onde f é uma função derivável, então a **diferencial** dx é uma variável independente, ou seja, a dx pode ser dado um valor qualquer. A **diferencial** dy é então definida em termos de dx pela equação

$$dy = f'(x)\,dx$$

Assim dy é uma variável dependente; depende dos valores de x e dx. Se a dx for dado um valor específico e x for algum número específico no domínio de f, então o valor numérico de dy está determinado.

O significado geométrico das diferenciais é mostrado na Figura 5. Sejam $P(x, f(x))$ e $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ pontos sobre o gráfico de f e seja $dx = \Delta x$. A variação correspondente em y é

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

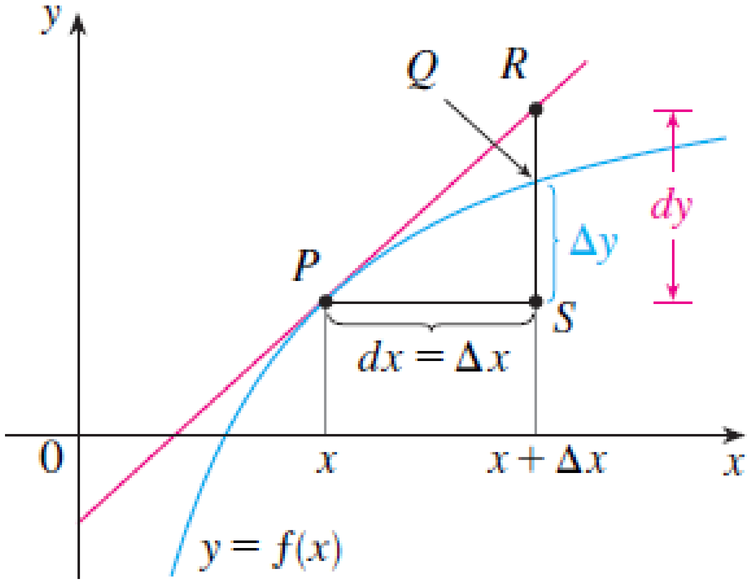

FIGURA 5

A inclinação da reta tangente PR é a derivada $f'(x)$. Assim, a distância direta de S to R é $f'(x)\,dx = dy$. Consequentemente, dy representa a distância que a reta tangente sobe ou desce (a variação na linearização), enquanto Δy representa a distância que a curva $y = f(x)$ sobe ou desce quando x varia por uma quantidade dx.

Exemplo

Compare os valores de Δy e dy se $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ e x varia (a) de 2 para 2,05 e (b) de 2 para 2,01.

(a) Temos $\quad f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$

$$f(2{,}05) = (2{,}05)^3 + (2{,}05)^2 - 2(2{,}05) + 1 = 9{,}717625$$

$$\Delta y = f(2{,}05) - f(2) = 0{,}717625$$

Em geral, $\quad dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}05 = 0{,}7$$

Quando $x = 2$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, torna-se

(b) $\quad f(2{,}01) = (2{,}01)^3 + (2{,}01)^2 - 2(2{,}01) + 1 = 9{,}140701$

$$\Delta y = f(2{,}01) - f(2) = 0{,}140701$$

Quando $dx = \Delta x = 0{,}01$, $\; dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}01 = 0{,}14$