11 Sequências e Séries Infinitas

Epic Stock/Shutterstock

Na última seção deste capítulo você será solicitado a usar uma série para obter uma fórmula para a velocidade de uma onda oceânica.

Sequências e séries infinitas foram introduzidas rapidamente em *Uma Apresentação do Cálculo* em conexão com os paradoxos de Zenon e a representação decimal de números. Sua importância em cálculo surge da ideia de Newton da representação de funções como somas de séries infinitas. Por exemplo, para encontrar áreas, ele frequentemente integrava uma função expressando-a primeiro como uma série e então integrando cada termo da série. Seguiremos sua ideia na Seção 11.10 para integrar funções como e^{-x^2}. (Lembre-se de que, anteriormente, fomos incapazes de fazer isso.) Muitas das funções que surgem em física-matemática e química, tais como as funções de Bessel, são definidas como somas de séries; assim, é importante nos familiarizarmos com os conceitos básicos de convergência de sequências e séries infinitas.

Os físicos também usam séries de outra maneira, como veremos na Seção 11.11. Em áreas de estudo diversas, como óptica, relatividade especial e eletromagnetismo, eles analisam fenômenos trocando uma função pelos primeiros termos da série que a representa.

11.1 Sequências

Pode-se pensar numa **sequência** como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n, \ldots$$

O número a_1 é chamado *primeiro termo*, a_2 é o *segundo termo* e, em geral, a_n é o *n-ésimo termo*. Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo a_n terá um sucessor a_{n+1}.

Observe que, para cada inteiro positivo n existe um número correspondente a_n e, dessa forma, uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas, geralmente, escrevemos a_n em vez da notação de função $f(n)$ para o valor da função no número n.

NOTAÇÃO A sequência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é também indicada por

$$\{a_n\} \qquad \text{ou} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

EXEMPLO 1 Algumas sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o n-ésimo termo. Nos exemplos seguintes, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência. Observe que não é necessário começar em 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\qquad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\qquad \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

(d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\qquad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0$ $\qquad \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

EXEMPLO 2 Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3.125}, \ldots\right\}$$

supondo que o padrão dos primeiros termos continue.

SOLUÇÃO Foi-nos dado que

$$a_1 = \frac{3}{5} \qquad a_2 = -\frac{4}{25} \qquad a_3 = \frac{5}{125} \qquad a_4 = -\frac{6}{625} \qquad a_5 = \frac{7}{3.125}$$

Observe que os numeradores dessas frações começam com 3 e são incrementados por 1 à medida que avançamos para o próximo termo. O segundo termo tem numerador 4; o terceiro, numerador 5; generalizando, o n-ésimo termo terá numerador $n + 2$. Os denominadores são a potência de 5, logo a_n tem denominador 5^n. Os sinais dos termos alternam entre positivo e negativo, assim, precisamos multiplicar por uma potência de -1. No Exemplo 1(b) o fator $(-1)^n$ significava que começamos com um termo negativo. Neste exemplo, queremos começar com um termo positivo e assim usamos $(-1)^{n-1}$ ou $(-1)^{n+1}$. Portanto

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$

EXEMPLO 3 Aqui estão algumas sequências que não têm uma equação de definição simples.
(a) A sequência $\{p_n\}$, onde p_n é a população do mundo no dia 1º de janeiro do ano n.
(b) Se fizermos a_n ser o algarismo na n-ésima casa decimal do número e, então $\{a_n\}$ é uma sequência bem definida cujos primeiros termos são

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

(c) A **sequência de Fibonacci** $\{f_n\}$ é definida recursivamente pelas condições

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada termo é a soma dos dois termos precedentes. Os primeiros termos são

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Essa sequência surgiu quando o matemático italiano conhecido como Fibonacci resolveu, no século XIII, um problema envolvendo a reprodução de coelhos (veja o Exercício 83).

Uma sequência como aquela no Exemplo 1(a), $a_n = n/(n+1)$, pode ser visualizada marcando seus termos na reta real, como na Figura 1, ou traçando seu gráfico, como na Figura 2. Observe que, como uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos, seu gráfico consiste em pontos isolados com coordenadas

$$(1, a_1) \qquad (2, a_2) \qquad (3, a_3) \qquad \ldots \qquad (n, a_n) \qquad \ldots$$

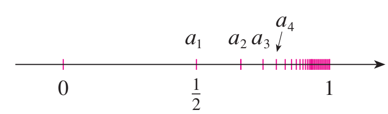


FIGURA 1

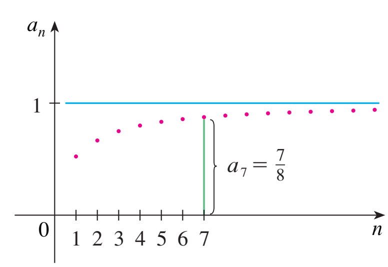


FIGURA 2

A partir da Figura 1 ou 2 parece que os termos da sequência $a_n = n/(n+1)$ estão se aproximando de 1 quando n se torna grande. De fato, a diferença

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

pode ficar tão pequena quanto se desejar, tornando n suficientemente grande. Indicamos isso escrevendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

significa que os termos da sequência $\{a_n\}$ aproximam-se de L quando n torna-se grande. Observe que a seguinte definição do limite de uma sequência é muito parecida com a definição do limite de uma função no infinito, dada na Seção 2.6, no Volume I.

1 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se pudermos tornar os termos a_n tão próximos de L quanto quisermos ao fazer n suficientemente grande. Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ existir, dizemos que a sequência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge** (ou é **divergente**).

A Figura 3 ilustra a Definição 1 mostrando os gráficos de duas sequências que têm limite L.

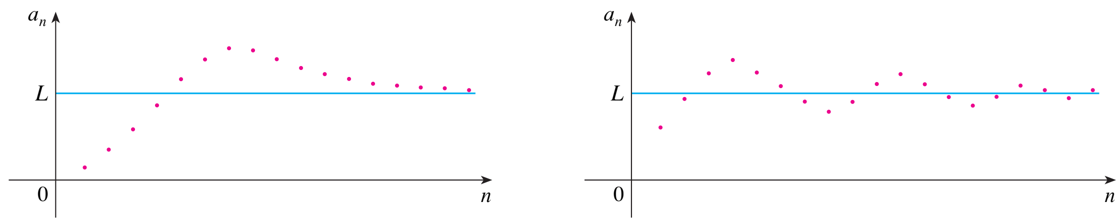


FIGURA 3
Gráficos de duas sequências com $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

Uma versão mais precisa da Definição 1 é a seguinte.

Compare esta definição com a Definição 2.6.7

2 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

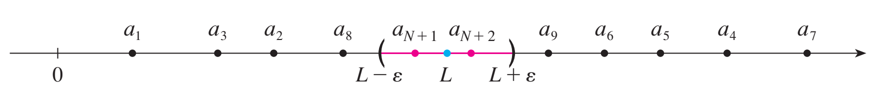
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se, para cada $\varepsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

A Definição 2 é ilustrada pela Figura 4, na qual os termos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são marcados na reta real. Não importa quão pequeno seja escolhido o intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe um N tal que todos os termos da sequência de a_{N+1} em diante devem estar naquele intervalo.

FIGURA 4



Outra ilustração de Definição 2 é dada na Figura 5. Os pontos no gráfico de $\{a_n\}$ devem estar entre as linhas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ se $n > N$. Esse quadro deve ser válido independentemente do quão pequeno ε é escolhido, mas geralmente um ε menor exige um N maior.

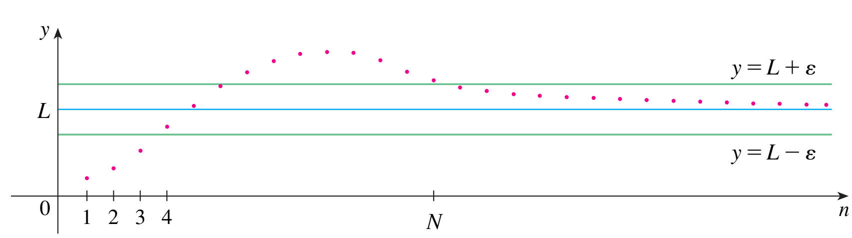


FIGURA 5

A comparação da Definição 2 com a Definição 2.6.7, no Volume 1, mostra que a única diferença entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ é que n precisa ser inteiro. Então, temos o seguinte teorema, que é ilustrado pela Figura 6.

3 Teorema Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

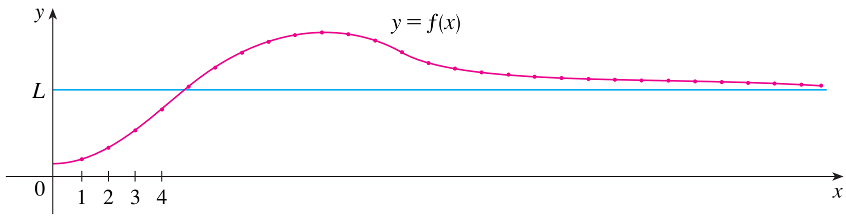


FIGURA 6

Em particular, como sabemos que $\lim_{x\to\infty} (1/x^r) = 0$ quando $r > 0$ (Teorema 2.6.5, no Volume I), temos

4
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{se } r > 0$$

Se a_n aumentar quando n aumentar, usaremos a notação $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. A seguinte definição precisa é similar à Definição 2.6.9, no Volume I.

5 Definição $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad a_n > M$$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, então a sequência $\{a_n\}$ é divergente, mas de maneira especial. Dizemos que $\{a_n\}$ diverge para ∞.

As Propriedades do Limite dadas na Seção 2. 3, no Volume I, também valem para os limites de sequências, e suas demonstrações são similares.

Propriedades do Limite para Sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{se } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

O Teorema do Confronto também pode ser adaptado para sequências como a seguir (veja a Figura 7).

Se $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n \geqslant n_0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

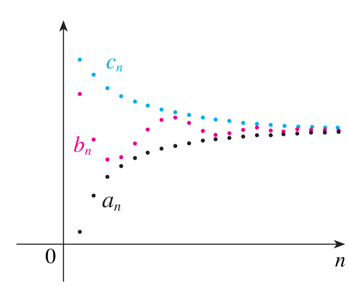


FIGURA 7
A sequência $\{b_n\}$ fica presa entre as sequências $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$

Outro fato útil sobre limites de sequências é dado pelo seguinte teorema, cuja demonstração é pedida no Exercício 87.

6 Teorema Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXEMPLO 4 Encontre $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

SOLUÇÃO O método é semelhante ao que foi utilizado na Seção 2.6, no Volume I: dividir o numerador e denominador pela maior potência de n que ocorre no denominador e depois usar as Leis de limite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

Aqui usamos a Equação 4 com $r = 1$.

EXEMPLO 5 A sequência $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{10+n}}$ é convergente ou divergente?

SOLUÇÃO Como no Exemplo 4, dividimos o numerador e o denominador por n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{10+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{10}{n^2} + \dfrac{1}{n}}} = \infty$$

porque o numerador é constante e o denominador se aproxima de 0. Então $\{a_n\}$ é divergente.

EXEMPLO 6 Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

SOLUÇÃO Observe que numerador e denominador se aproximam do infinito quando $n \to \infty$. Não podemos empregar a Regra de l'Hôspital diretamente, porque ela não se aplica a sequências, mas, sim, a funções de uma variável real. Contudo, podemos usar a Regra de l'Hôspital para a função relacionada $f(x) = (\ln x)/x$ e obter

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Temos, portanto, pelo Teorema 3,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

EXEMPLO 7 Determine se a sequência $a_n = (-1)^n$ é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO Se escrevermos os termos da sequência, obteremos

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

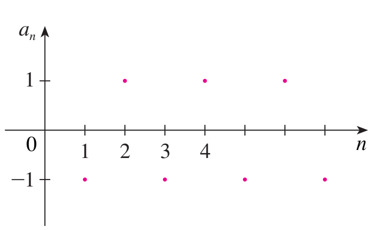


FIGURA 8

O gráfico desta sequência é mostrado na Figura 8. Uma vez que os termos oscilam entre 1 e -1 com frequência indefinida, a_n não se aproxima de nenhum número. Logo $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ não existe; ou seja, a sequência $\{(-1)^n\}$ é divergente.

O gráfico da sequência no Exemplo 8 é mostrado na Figura 9 e confirma a nossa resposta.

EXEMPLO 8 Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ se ele existir.

SOLUÇÃO Primeiro calculamos o limite do valor absoluto:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Portanto, pelo Teorema 6,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

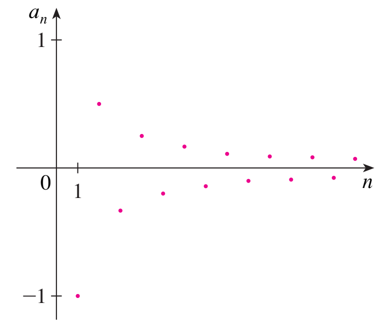


FIGURA 9

O seguinte teorema diz que se aplicarmos uma função contínua aos termos de uma sequência convergente, o resultado também será convergente. A demonstração é pedida no Exercício 88.

7 Teorema Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e se a função f for contínua em L, então

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n)$.

SOLUÇÃO Como a função seno é contínua em 0, o Teorema 7 nos permite escrever

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty} (\pi/n)\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

Criando Gráficos de Sequências
Alguns sistemas de computação algébrica têm comandos especiais que nos permitem criar sequências e traçá-las diretamente. Com a maioria das calculadoras gráficas, contudo, as sequências podem ser traçadas usando equações paramétricas. Por exemplo, a sequência no Exemplo 10 pode ser traçada inserindo-se as equações paramétricas

$$x = t \qquad y = t!/t^t$$

e fazendo o gráfico no modo pontual começando com $t = 1$ e tomando o passo t igual a 1. O resultado é exposto na Figura 10.

EXEMPLO 10 Discuta a convergência da sequência $a_n = n!/n^n$, onde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

SOLUÇÃO Numerador e denominador se aproximam do infinito quando $n \to \infty$, mas aqui não temos uma função correspondente para usar com a Regra de l'Hôspital ($x!$ não está definido quando x não é um inteiro). Vamos escrever alguns termos para pensar sobre o que acontece com a_n quando n cresce:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} \qquad a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

8 $$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}$$

Parece, a partir dessas expressões e do gráfico na Figura 10, que os termos estão decrescendo e talvez se aproximem de 0. Para confirmar isso, observe na Equação 8 que

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}\right)$$

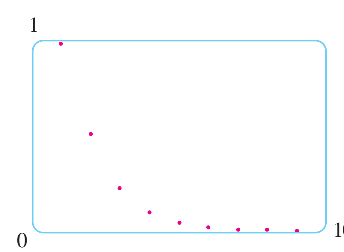


FIGURA 10

Observe que a expressão em parênteses é no máximo 1, porque o numerador é menor (ou igual) ao denominador. Logo,

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Sabemos que $1/n \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$ pelo Teorema do Confronto.

EXEMPLO 11 Para que valores de r a sequência $\{r^n\}$ é convergente?

SOLUÇÃO Sabemos da Seção 2.6 e dos gráficos das funções exponenciais na Seção 1.5, ambos do Volume I, que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ e $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Logo, colocando $a = r$ e usando o Teorema 3, temos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{se } r > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

É óbvio que

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} 0^n = 0$$

Se $-1 < r < 0$ então $0 < |r| < 1$ então

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

e, portanto, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ pelo Teorema 6. Se $r \leqslant -1$, então $\{r^n\}$ diverge como no Exemplo 7. A Figura 11 mostra os gráficos para vários valores de r. (O caso $r = -1$ é mostrado na Figura 8.)

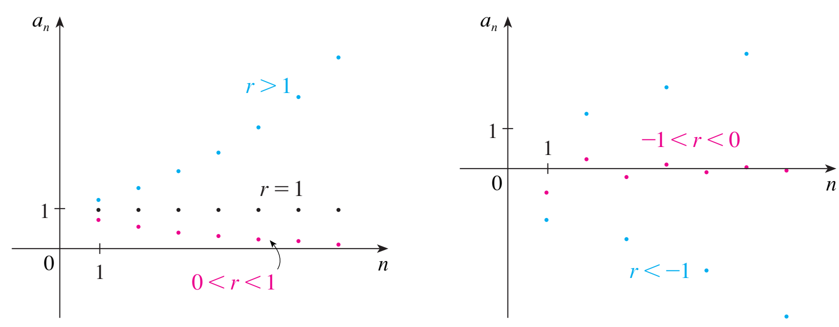


FIGURA 11
A sequência $a_n = r^n$

Os resultados do Exemplo 11 estão resumidos a seguir para uso futuro.

9 A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leqslant 1$ e divergente para todos os outros valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

10 **Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ é chamada **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$, isto é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamado **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$. Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

EXEMPLO 12 A sequência $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ é decrescente porque

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

O lado direito é menor porque tem um denominador maior.

e, portanto, $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$.

EXEMPLO 13 Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ é decrescente.

SOLUÇÃO 1 Devemos mostrar que $a_{n+1} < a_n$, isto é,

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

Essa desigualdade é equivalente àquela que obteríamos pela multiplicação cruzada:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} &\iff (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1] \\ &\iff n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n \\ &\iff 1 < n^2 + n \end{aligned}$$

Como $n \geqslant 1$, sabemos que a desigualdade $n^2 + n > 1$ é verdadeira. Portanto $a_{n+1} < a_n$ e $\{a_n\}$ é decrescente.

SOLUÇÃO 2 Considere a função $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} < 0 \qquad \text{sempre que } x^2 > 1$$

Assim, f é decrescente em $(1, \infty)$ e em $f(n) > f(n + 1)$. Portanto, $\{a_n\}$ é decrescente.

11 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Se ela for limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.

Por exemplo, a sequência $a_n = n$ é limitada inferiormente $(a_n > 0)$ mas não superiormente. A sequência $a_n = n/(n + 1)$ é limitada porque $0 < a_n < 1$ para todo n.

Sabemos que nem toda sequência limitada é convergente [por exemplo, a sequência $a_n = (-1)^n$ satisfaz $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$, mas é divergente, como mostrado no Exemplo 7], e que nem toda sequência monótona é convergente $(a_n = n \to \infty)$. Mas se uma sequência for limitada *e* monótona, então ela deve ser convergente. Este fato é provado no Teorema 12, mas intuitivamente você pode entender porque é verdadeiro, olhando para a Figura 12. Se $\{a_n\}$ está aumentando e $a_n \leqslant M$ para todo n, então os termos são forçados se aglomerar e se aproximar de algum número L.

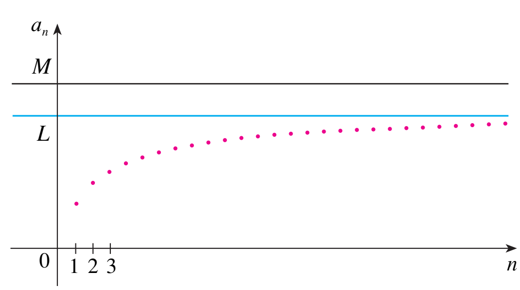


FIGURA 12

A demonstração do Teorema 12 é baseada no **Axioma de Completude** para o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, que diz que, se S é um conjunto não vazio de números reais, que tem um limitante superior M ($x \leqslant M$ para todo x em S), então S tem um **limitante superior mínimo** b. (Isto significa que b é um limite superior para S, mas se M é qualquer outro limitante superior, então $b \leqslant M$.) O Axioma de Completude é uma expressão do fato de que não há salto ou furo na reta do número real.

12 Teorema da Sequência Monótona Toda sequência monótona limitada é convergente.

DEMONSTRAÇÃO Suponha que $\{a_n\}$ seja uma sequência crescente. Como $\{a_n\}$ é limitada, o conjunto $S = \{a_n \mid n \geqslant 1\}$ tem um limitante superior. Pelo Axioma de Completude, existe um menor limitante superior L. Dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ não é um limitante superior para S (pois L é o limite superior mínimo). Portanto,

$$a_N > L - \varepsilon \qquad \text{para algum inteiro } N$$

Mas a sequência é crescente, logo $a_n \geqslant a_N$ para cada $n > N$. Assim, se $n > N$, temos

$$a_n > L - \varepsilon$$

então $$0 \leqslant L - a_n < \varepsilon$$

desde que $a_n \leqslant L$. Assim,

$$|L - a_n| < \varepsilon \qquad \text{sempre que } \; n > N$$

então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Uma demonstração similar (usando o maior limitante inferior) funciona se $\{a_n\}$ for decrescente.

Na demonstração do Teorema 12 vemos que uma sequência que é crescente e limitada superiormente é convergente. (Da mesma forma, uma sequência decrescente que é limitada inferiormente é convergente.) Este fato é usado muitas vezes quando lidamos com séries infinitas.

EXEMPLO 14 Investigue a sequência $\{a_n\}$ definida pela *relação de recorrência*

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \text{para } \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUÇÃO Começamos calculando os primeiros termos:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = \tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4 \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}(4 + 6) = 5$$

$$a_4 = \tfrac{1}{2}(5 + 6) = 5{,}5 \qquad a_5 = 5{,}75 \qquad a_6 = 5{,}875$$

$$a_7 = 5{,}9375 \qquad a_8 = 5{,}96875 \qquad a_9 = 5{,}984375$$

A indução matemática é frequentemente usada para trabalhar com sequências recursivas. Veja o fim do Caítulo 1 (Volumel) para consultar o Princípio da Indução Matemática.

Esses termos iniciais sugerem que a sequência é crescente e que os termos estão se aproximando de 6. Para confirmar que a sequência é crescente, usamos a indução matemática para mostrar que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geqslant 1$. Isto é verdade para $n = 1$ porque $a_2 = 4 > a_1$. Se assumirmos que isso é verdadeiro para $n = k$, então temos

$$a_{k+1} > a_k$$

então $$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

e $$\tfrac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \tfrac{1}{2}(a_k + 6)$$

Logo, $$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Deduzirmos que $a_{n+1} > a_n$ é verdadeiro para $n = k + 1$. Portanto, a desigualdade é verdadeira para todo n por indução matemática.

Em seguida, verificamos que $\{a_n\}$ é limitada mostrando que $a_n < 6$ para todo n. (Uma vez que a sequência é crescente, já sabemos que ela tem um limitante inferior: $a_n \geqslant a_1 = 2$ para todo n). Sabemos que $a_1 < 6$, assim a afirmação é verdadeira para $n = 1$. Suponha que isso seja verdadeiro para $n = k$. Então,

$$a_k < 6$$

então $$a_k + 6 < 12$$

e $$\tfrac{1}{2}(a_k + 6) < \tfrac{1}{2}(12) = 6$$

Logo, $$a_{k+1} < 6$$

Isso mostra, por indução matemática, que $a_n < 6$ para todo n.

Como a sequência $\{a_n\}$ é crescente e limitada, o Teorema 12 garante que ela tem um limite. O teorema não nos conta qual é o valor do limite. Mas agora que sabemos que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, podemos usar a relação de recorrência dada para escrever

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_n + 6) = \tfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Como $a_n \to L$, segue também que $a_{n+1} \to L$ (quando $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$, igualmente). Logo, temos

Uma demonstração desse fato é pedida no Exercício 70.

$$L = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Resolvendo essa equação para L, temos $L = 6$, como previsto.

11.1 Exercícios

1. (a) O que é uma sequência?
(b) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
(c) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) O que é uma sequência convergente? Dê dois exemplos.
(b) O que é uma sequência divergente? Dê dois exemplos.

3–12 Liste os cinco primeiros termos da sequência.

3. $a_n = \dfrac{2n}{n^2 + 1}$

4. $a_n = \dfrac{3^n}{1 + 2^n}$

5. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$

6. $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}$

7. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

8. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$

9. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 5a_n - 3$

10. $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$

11. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$

12. $a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

13–18 Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência, assumindo que o padrão dos primeiros termos continue.

13. $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots\right\}$

14. $\left\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right\}$

15. $\left\{-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \ldots\right\}$

16. $\{5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$

17. $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{9}{4}, -\frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \ldots\right\}$

18. $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$

19–22 Calcule, com quatro casas decimais, os primeiros 10 termos da sequência e use-os para traçar o gráfico da sequência com a mão. Esta sequência parece ter um limite? Se assim for, calcule-o. Se não, explique por quê.

19. $a_n = \dfrac{3n}{1 + 6n}$

20. $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

21. $a_n = 1 + (-\frac{1}{2})^n$

22. $a_n = 1 + \dfrac{10^n}{9^n}$

23–56 Determine se a sequência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

23. $a_n = 1 - (0{,}2)^n$

24. $a_n = \dfrac{n^3}{n^3 + 1}$

25. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

26. $a_n = \dfrac{n^3}{n + 1}$

27. $a_n = e^{1/n}$

28. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

29. $a_n = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2n\pi}{1 + 8n}\right)$

30. $a_n = \sqrt{\dfrac{n + 1}{9n + 1}}$

31. $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3 + 4n}}$

32. $a_n = e^{2n/(n+2)}$

33. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2 + 1}$

34. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$

35. $a_n = \cos(n/2)$

36. $a_n = \cos(2/n)$

37. $\left\{\dfrac{(2n - 1)!}{(2n + 1)!}\right\}$

38. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$

39. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\}$

40. $a_n = \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} n}{n}$

41. $\{n^2 e^{-n}\}$

42. $a_n = \ln(n + 1) - \ln n$

43. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

44. $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

45. $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

46. $a_n = 2^{-n}\cos n\pi$

47. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

48. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1 + \sqrt{n}}$

49. $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$

50. $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$

51. $a_n = \operatorname{arctg}(\ln n)$

52. $a_n = n - \sqrt{n + 1}\sqrt{n + 3}$

53. $\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$

54. $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

55. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

56. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

57–63 Use um gráfico da sequência para decidir se ela é convergente ou divergente. Se a sequência for convergente, conjecture o valor do limite a partir do gráfico e então demonstre sua conjectura.

57. $a_n = 1 + (-2/e)^n$

58. $a_n = \sqrt{n}\,\operatorname{sen}(\pi/\sqrt{n})$

59. $a_n = \sqrt{\dfrac{3 + 2n^2}{8n^2 + n}}$

60. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

61. $a_n = \dfrac{n^2 \cos n}{1 + n^2}$

62. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n!}$

63. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{(2n)^n}$

---

64. (a) Determine se a sequência definida a seguir é convergente ou divergente:

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = 4 - a_n \quad \text{para } n \geqslant 1$$

(b) O que acontece se o primeiro termo para $a_1 = 2$?

65. Se \$ 1.000 forem investidos a uma taxa de juros de 6%, contabilizados anualmente, depois de n anos o investimento valerá $a_n = 1.000(1{,}06)^n$ dólares.

(a) Encontre os cinco primeiros termos da sequência $\{a_n\}$.

(b) A sequência é convergente ou divergente? Explique.

66. Se você depositar \$ 100 no final de cada mês em uma conta que paga juros de 3% ao ano com capitalização mensal, o montante de juros acumulados após n meses é dado pela sequência

$$I_n = 100\left(\frac{1{,}0025^n - 1}{0{,}0025} - n\right)$$

(a) Encontre os seis primeiros termos da sequência.

(b) O quanto de juros você vai ter ganho depois de dois anos?

67. Um piscicultor possui 5.000 bagres em sua lagoa. O número de bagres aumenta 8% ao mês e o agricultor retira 300 bagres por mês.

(a) Mostre que a população de bagres P_n depois n meses é dada recursivamente por

$$P_n = 1{,}08P_{n-1} - 300 \qquad P_0 = 5.000$$

(b) Quantos bagres estão na lagoa depois de seis meses?

68. Calcule os primeiros 40 termos da sequência definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{se } a_n \text{ é um número par} \\ 3a_n + 1 & \text{se } a_n \text{ é um número impar} \end{cases}$$

e $a_1 = 11$. Faça o mesmo se $a_1 = 25$. Faça uma conjectura sobre este tipo de sequência.

69. Para quais valores de r a sequência $\{nr^n\}$ é convergente?

70. (a) Se $\{a_n\}$ for convergente, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

(b) Uma sequência $\{a_n\}$ é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$ para $n \geqslant 1$. Supondo que $\{a_n\}$ seja convergente, encontre seu limite.

71. Suponha que você saiba que $\{a_n\}$ é uma sequência decrescente e que todos os termos estão entre os números 5 e 8. Explique por que a sequência tem um limite. O que você pode dizer sobre o valor do limite?

72–78 Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monótona. A sequência é limitada?

72. $a_n = (-2)^{n+1}$

73. $a_n = \dfrac{1}{2n + 3}$

74. $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n + 4}$

75. $a_n = n(-1)^n$

76. $a_n = ne^{-n}$

77. $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$

78. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

---

79. Calcule o limite da sequência

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

80. Uma sequência $\{a_n\}$ é dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

(a) Por indução, ou de outra maneira, mostre que $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente por 3. Aplique o Teorema da Sequência Monótona para mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

(b) Encontre $\lim_{n\to\infty} a_n$.

81. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

é crescente e $a_n < 3$ para todo n. Deduza que $\{a_n\}$ é convergente e encontre seu limite.

82. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

satisfaz $0 < a_n \leqslant 2$ e é decrescente. Deduza que a sequência é convergente e encontre seu limite.

83. (a) Fibonacci colocou o seguinte problema: suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês? Mostre que a resposta é f_n, onde $\{f_n\}$ é a sequência de Fibonacci definida no Exemplo 3(c).

(b) Seja $a_n = f_{n+1}/f_n$ e mostre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Supondo que $\{a_n\}$ seja convergente, encontre seu limite.

84. (a) Sejam $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \ldots,$ $a_{n+1} = f(a_n)$, onde f é uma função contínua. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, mostre que $f(L) = L$.

(b) Ilustre a parte (a) tomando $f(x) = \cos x$, $a = 1$, e estimando o valor de L com precisão de cinco casas decimais.

85. (a) Use um gráfico para conjecturar o valor do limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Use um gráfico da sequência na parte (a) para encontrar os menores valores de N que correspondam a $\varepsilon = 0{,}1$ e $\varepsilon = 0{,}001$ na Definição 2.

86. Use a Definição 2 diretamente para demonstrar que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ quando $|r| < 1$.

87. Demonstre o Teorema 6.
[*Dica*: Use a Definição 2 ou o Teorema do Confronto.]

88. Demonstre o Teorema 7.

89. Demonstre que, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\{b_n\}$ for limitada, então $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$.

90. Seja $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(a) Mostre que, se $0 \leqslant a < b$, então

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n$$

(b) Deduza que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$.

(c) Use $a = 1 + 1/(n + 1)$ e $b = 1 + 1/n$ na parte (b) para mostrar que $\{a_n\}$ é crescente.

(d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte (b) para mostrar que $a_{2n} < 4$.

(e) Use as partes (c) e (d) para mostrar que $a_n < 4$ para todo n.

(f) Use o Teorema 12 para mostrar que $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$ existe. (O limite é e. Ver Equação 3.6.6, no Volume I).

91. Sejam a e b números positivos com $a > b$. Seja a_1 sua média aritmética e b_1, sua média geométrica:

$$a_1 = \frac{a + b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita esse procedimento de modo que, em geral,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Use a indução matemática para mostrar que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

(b) Deduza que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são ambas convergentes.

(c) Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss chamou o valor comum desses limites de **média aritmética-geométrica** dos números a e b.

92. (a) Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ e $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, então $\{a_n\}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(b) Se $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

encontre os oito primeiros membros da sequência $\{a_n\}$. Então use a parte (a) para mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Isso dá a **expansão em frações contínuas**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

93. O tamanho de uma população de peixes pode ser modelado pela fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

onde p_n é o tamanho da população de peixes depois de n anos e a e b são constantes positivas que dependem da espécie e de seu habitat. Suponha que a população no ano 0 seja $p_0 > 0$.

(a) Mostre que se $\{p_n\}$ é convergente, então os únicos valores possíveis para seu limite são 0 e $b - a$.

(b) Mostre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.

(c) Use o item (b) para mostrar que, se $a > b$, então $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$; em outras palavras, a população se extingue.

(d) Agora suponha que $a < b$. Mostre que, se $p_0 < b - a$, então $\{p_n\}$ é crescente e $0 < p_n < b - a$. Mostre também que, se $p_0 > b - a$, então $\{p_n\}$ é decrescente e $p_n > b - a$. Deduza que se $a < b$, então $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

PROJETO DE LABORATÓRIO SCA SEQUÊNCIAS LOGÍSTICAS

Uma sequência que aparece em ecologia como um modelo para o crescimento populacional é definida pela **equação de diferença logística**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

onde p_n mede o tamanho da população da n-ésima geração de uma única espécie. Para manter os números manejáveis, p_n é uma fração do tamanho máximo da população, e assim $0 \leqslant p_n \leqslant 1$. Observe que a forma dessa equação é similar à da equação diferencial logística na Seção 9.4. O modelo discreto – com sequências em vez de funções contínuas – é preferível para modelar populações de insetos, nas quais acasalamento e morte ocorrem de maneira periódica.

Um ecologista está interessado em prever o tamanho da população com o passar do tempo e faz as perguntas: ela vai estabilizar em um valor limite? Ela mudará de uma maneira cíclica? Ou ela exibirá comportamento aleatório?

Escreva um programa para calcular os n primeiros termos dessa sequência, começando com uma população inicial p_0, onde $0 < p_0 < 1$. Utilize este programa para fazer o seguinte.

1. Calcule 20 ou 30 termos da sequência para $p_0 = \frac{1}{2}$ e para dois valores de k tal que $1 < k < 3$. Faça um gráfico de casa sequência. As sequências parecem convergir? Repita para um valor diferente de p_0 entre 0 e 1. O limite depende da escolha de p_0? Depende da escolha de k?
2. Calcule termos da sequência para um valor de k entre 3 e 3,4 e faça seu gráfico. O que você nota sobre o comportamento dos termos?
3. Experimente com valores de k entre 3,4 e 3,5. O que acontece com os termos?
4. Para valores de k entre 3,6 e 4, calcule e trace pelo menos 100 termos e comente sobre o comportamento da sequência. O que acontecerá se você mudar p_0 por 0,001? Esse tipo de comportamento é chamado *caótico* e é exibido por populações de insetos sob certas condições.

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

11.2 Séries

O recorde atual (2011) de π foi calculado para mais de dez trilhões de casas decimais por Shigeru Kondo e Yee Alexander.

O que queremos dizer quando expressamos um número como um decimal infinito? Por exemplo, o que significa escrever

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288\ldots$$

A convenção por trás de nossa notação decimal é que qualquer número pode ser escrito como uma soma infinita. Aqui, isso significa que

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \cdots$$

onde os três pontos ($\cdots$) indicam que a soma continua para sempre, e quanto mais termos adicionarmos, mais nos aproximaremos do valor real de π.

Em geral, se tentarmos somar os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obteremos uma expressão da forma

$$\boxed{1} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que é denominada uma **série infinita** (ou apenas **série**) e é denotada, por simplicidade, pelo símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum a_n$$

Faz sentido falar sobre a soma de uma quantidade infinita de termos?

Seria impossível encontrar uma soma finita para a série

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

porque, se começarmos adicionando os termos, obteremos as somas cumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21,... e depois do n-ésimo termo, obtemos $n(n + 1)/2$, que se torna muito grande à medida que n aumenta.

Contudo, se começarmos a somar os termos da série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

n	Soma dos n primeiros termos
1	0,50000000
2	0,75000000
3	0,87500000
4	0,93750000
5	0,96875000
6	0,98437500
7	0,99218750
10	0,99902344
15	0,99996948
20	0,99999905
25	0,99999997

obtemos $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$. A tabela mostra que, quando adicionamos mais e mais termos, essas *somas parciais* se tornam cada vez mais próximas de 1. De fato, somando um número suficiente de termos da série, podemos fazer as somas parciais se tornarem tão próximas quanto quisermos de 1. Assim, parece razoável dizer que a soma dessa série infinita é 1 e escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Usamos uma ideia parecida para determinar se uma série geral $\boxed{1}$ tem uma soma ou não. Consideramos as **somas parciais**

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

e, em geral,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Essas somas parciais formam uma nova sequência $\{s_n\}$, que pode ou não ter um limite. Se $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir (como um número finito), então, como no exemplo anterior, o chamamos soma da série infinita $\Sigma\, a_n$.

2 Definição Dada uma série $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número real, então a série $\Sigma\, a_n$ é chamada **convergente**, e escrevemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

O número s é chamado a **soma** da série. Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada **divergente**.

Assim, a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais. Desse modo, quando escrevemos $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = s$, queremos dizer que, somando um número suficiente de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número s. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Compare com a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx$$

Para encontrarmos essa integral, integramos de 1 até t e então fazemos $t \to \infty$. Para uma série, somamos de 1 a n e então fazemos $n \to \infty$.

EXEMPLO 1 Suponhamos que se saiba que a soma dos primeiros n termos da série $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ seja

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2n}{3n+5}$$

Em seguida, a soma da série é o limite da sequência $\{s_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3 + \dfrac{5}{n}} = \frac{2}{3}$$

No Exemplo 1 foi nos *dada* uma expressão para a soma dos primeiros termos n, mas geralmente não é fácil *encontrar* tal expressão. No Exemplo 2, no entanto, olhamos para uma famosa série para a qual *podemos* encontrar uma fórmula explícita para s_n.

EXEMPLO 2 Um exemplo importante de uma série infinita é a **série geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Cada termo é obtido a partir do anterior, multiplicando-se pela **razão comum** r. (Já consideramos o caso especial onde $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$).

Se $r = 1$, então $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe, a série geométrica diverge nesse caso.

Se $r \neq 1$, temos

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

e

$$rs_n = \qquad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Subtraindo essas equações, obtemos

A Figura 1 fornece uma demonstração geométrica do resultado no Exemplo 2. Se os triângulos forem construídos como mostrado e s for a soma da série, então, por semelhança de triângulos,

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar} \quad \text{logo} \quad s = \frac{a}{1 - r}$$

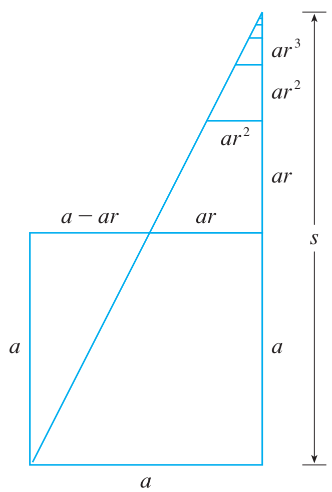


FIGURA 1

Em palavras: a soma de uma série geométrica convergente é

$$\frac{\text{primeiro termo}}{1 - \text{relação comum}}$$

O que realmente queremos dizer quando afirmamos que a soma da série no Exemplo 3 é 3? Claro, não podemos somar literalmente um número infinito de termos, um a um. Mas, de acordo com a Definição 2, a soma total é o limite da sequência de somas parciais. Então, fazendo a soma de um número suficiente de termos, podemos chegar tão próximo quanto gostaríamos do número. A tabela mostra as primeiras dez somas parciais e o gráfico da Figura 2 mostra como a sequência de somas parciais se aproxima de 3.

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

3 $$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Se $-1 < r < 1$, sabemos, a partir de (11.1.9), que $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$, assim

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Então, quando $|r| < 1$, a série geométrica é convergente, e sua soma é $a/(1 - r)$.

Se $r \leqslant -1$ ou $r > 1$, a sequência $\{r^n\}$ é divergente por (11.1.9); assim, pela Equação 3, $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe. Portanto, a série geométrica diverge naqueles casos.

Resumimos os resultados do Exemplo 2 como a seguir.

> **4** A série geométrica
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$
>
> é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r} \qquad |r| < 1$$
>
> Se $|r| \geqslant 1$, a série geométrica é divergente.

EXEMPLO 3 Encontre a soma da série geométrica

$$5 - \tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{9} - \tfrac{40}{27} + \cdots$$

SOLUÇÃO O primeiro termo é $a = 5$ e a razão comum é $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, a série é convergente por $\boxed{4}$ e sua soma é

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

n	s_n
1	5,000000
2	1,666667
3	3,888889
4	2,407407
5	3,395062
6	2,736626
7	3,175583
8	2,882945
9	3,078037
10	2,947975

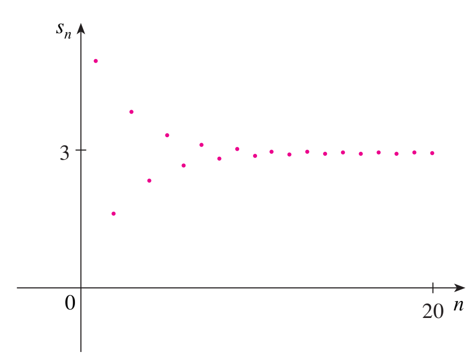


FIGURA 2

EXEMPLO 4 A série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$ é convergente ou divergente?

SOLUÇÃO Vamos reescrever o termo n-ésimo termo da série na forma ar^{n-1}:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Reconhecemos essa série como uma série geométrica com $a = 4$ e $r = \frac{4}{3}$. Como $r > 1$, a série diverge por $\boxed{4}$.

Outra maneira de identificar a e r é escrever os primeiros termos:

$$4 + \tfrac{16}{3} + \tfrac{64}{9} + \cdots$$

EXEMPLO 5 Escreva o número $2{,}3\overline{17} = 2{,}3171717\ldots$ como uma razão de inteiros.

SOLUÇÃO

$$2{,}3171717\ldots = 2{,}3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Depois do primeiro termo, temos uma série geométrica com $a = 17/10^3$ e $r = 1/10^2$. Portanto,

$$2{,}3\overline{17} = 2{,}3 + \frac{\dfrac{17}{10^3}}{1 - \dfrac{1}{10^2}} = 2{,}3 + \frac{\dfrac{17}{1.000}}{\dfrac{99}{100}}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1.147}{495}$$

EXEMPLO 6 Encontre a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ onde $|x| < 1$.

SOLUÇÃO Observe que esta série começa com $n = 0$, de modo que o primeiro termo é $x^0 = 1$. (Com a série, adotamos a convenção de que $x^0 = 1$ mesmo quando $x = 0$.) Assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Esta é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Uma vez que $|r| = |x| < 1$, que converge e $\boxed{4}$ resulta em

5 $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

TEC O *Module 11.2* explora uma série que depende de um ângulo θ em um triângulo e permite que você veja quão rapidamente a série converge quando θ varia.

EXEMPLO 7 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ é convergente e calcule sua soma.

SOLUÇÃO Essa não é uma série geométrica e, assim, voltamos à definição de uma série convergente e calculamos as somas parciais.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Podemos simplificar essa expressão se usarmos a decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

(veja a Seção 7. 4, no Volume I). Então, temos

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Observe que os termos se cancelam em pares. Este é um exemplo de uma **soma telescópica**: por causa de todos os cancelamentos, a soma retrai-se (como um antigo telescópio) em apenas dois termos.

A Figura 3 ilustra o Exemplo 7 mostrando os gráficos da sequência de termos $a_n = 1/[n(n+1)]$ e a sequência $\{s_n\}$ das somas parciais. Observe que $a_n \to 0$ e $s_n \to 1$. Veja os Exercícios 76 e 77 para duas interpretações geométricas do Exemplo 7.

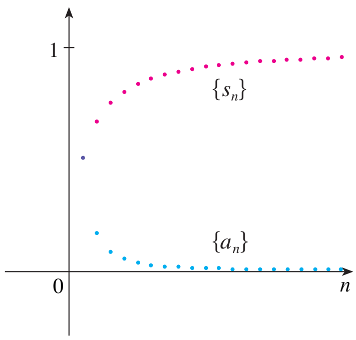


FIGURA 3

e, assim,
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

Portanto, a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

EXEMPLO 8 Mostre que a **série harmônica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

é divergente.

SOLUÇÃO Para essa série particular é conveniente considerar as somas parciais $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \ldots$ e mostrar que elas se tornam grandes.

$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{16} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2} \end{aligned}$$

Analogamente, $s_{32} > 1 + \tfrac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \tfrac{6}{2}$, e, em geral,

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

Isso mostra que $s_{2^n} \to \infty$ quando $n \to \infty$ e assim $\{s_n\}$ é divergente. Portanto, a série harmônica diverge.

O método usado no Exemplo 8 para mostrar que a série harmônica diverge deve-se ao estudioso francês Nicole Oresme (1323-1382).

6 Teorema Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Então, $a_n = s_n - s_{n-1}$. Como $\sum a_n$ é convergente, a sequência $\{s_n\}$ é convergente. Seja $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ quando $n \to \infty$, também temos $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= s - s = 0 \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 1 Com qualquer *série* $\sum a_n$ associamos duas *sequências*: a sequência $\{s_n\}$ de suas somas parciais e a sequência $\{a_n\}$ de seus termos. Se $\sum a_n$ for convergente, o limite da sequência $\{s_n\}$ é s (a soma da série) e, como o Teorema 6 afirma, o limite da sequência $\{a_n\}$ é 0.

OBSERVAÇÃO 2 A recíproca do Teorema 6 não é verdadeira, em geral. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, não podemos concluir que $\sum a_n$ é convergente. Observe que, para a série harmônica $\sum 1/n$, temos $a_n = 1/n \to 0$ quando $n \to \infty$, mas mostramos no Exemplo 8 que $\sum 1/n$ é divergente.

7 Teste de Divergência Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

O Teste para Divergência vem do Teorema 6, porque, se a série não for divergente, ela é convergente e, assim, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXEMPLO 9 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ diverge.

SOLUÇÃO

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Desse modo, a série diverge pelo Teste para Divergência.

OBSERVAÇÃO 3 Se descobrirmos que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, saberemos que $\Sigma\, a_n$ é divergente. Se acharmos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, não saberemos sobre a convergência ou divergência de $\Sigma\, a_n$. Lembre-se o aviso na Observação 2: se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a série $\Sigma\, a_n$ pode convergir ou divergir.

8 Teorema Se $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ forem séries convergentes, então também o serão as séries $\Sigma\, ca_n$ (onde c é uma constante), $\Sigma\,(a_n + b_n)$ e $\Sigma\,(a_n - b_n)$ e

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Essas propriedades de séries convergentes vêm das Propriedades do Limite para Sequências Convergentes na Seção 11.1. Por exemplo, aqui está como a parte (ii) do Teorema 8 é demonstrada.

Sejam:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

A n-ésima soma parcial para a série $\Sigma\,(a_n + b_n)$ é

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

e, usando a Equação 5.2.10, no Volume I, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t \end{aligned}$$

Portanto $\Sigma\,(a_n + b_n)$ é convergente e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

EXEMPLO 10 Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$.

SOLUÇÃO A série $\Sigma\, 1/2^n$ é uma série geométrica com $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$, assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

No Exemplo 7 encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Assim, pelo Teorema 8, a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$=3\cdot 1+1=4$$

OBSERVAÇÃO 4 Um número finito de termos não afeta a convergência ou divergência de uma série. Por exemplo: suponha que possamos mostrar que a série

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$$

é convergente. Uma vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{3}{28}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$$

segue que a série inteira $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3+1)$ é convergente. Analogamente, se soubermos que a série $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ converge, então a série completa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{N} a_n+\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

também é convergente.

11.2 Exercícios

1. (a) Qual é a diferença entre uma sequência e uma série?
   (b) O que é uma série convergente? O que é uma série divergente?

2. Explique o significado de se dizer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3–4 Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuja somas parciais são dadas.

3. $s_n = 2 - 3(0{,}8)^n$

4. $s_n = \dfrac{n^2-1}{4n^2+1}$

5–8 Calcule os oito primeiros termos da sequência de somas parciais corretas para quatro casas decimais. Parece que a série é convergente ou divergente?

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$

9–14 Calcule pelo menos dez somas parciais da série. Faça o gráfico de ambas as sequências de termos e de somas parciais na mesma tela. Parece que a série é convergente ou divergente? Se ela for convergente, calcule a soma. Se for divergente, explique por quê.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{(-5)^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n+1}}{10^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

15. Seja $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.
    (a) Determine se $\{a_n\}$ é convergente.
    (b) Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

16. (a) Explique a diferença entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

    (b) Explique a diferença entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

17–26 Determine se a série geométrica é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

17. $3+4+\frac{16}{3}-\frac{64}{9}+\cdots$

18. $\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1+\cdots$

19. $10-2+0{,}4-0{,}08+\cdots$

20. $1+0{,}4+0{,}16+0{,}064+\cdots$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}6(0{,}9)^{n-1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{3^{n-1}}$

27–42 Determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

27. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\cdots$

28. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{27}+\frac{2}{81}+\frac{1}{243}+\frac{2}{729}+\cdots$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

29. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$

30. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [(0{,}8)^{n-1} - (0{,}3)^n]$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

37. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^k$

38. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

43–48 Determine se a série é convergente ou divergente expressando s_n como uma soma telescópica (como no Exemplo 7). Se for convergente, calcule sua soma.

43. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n^2} - \cos\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)}\right)$

48. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$

49. Seja $x = 0{,}99999\ldots$.
(a) Você pensa que $x < 1$ ou $x = 1$?
(b) Some uma série geométrica para encontrar o valor de x.
(c) Quantas representações decimais o número 1 tem?
(d) Quais os números que têm mais de uma representação decimal?

50. Uma sequência de termos é definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_n = (5-n)a_{n-1}$$

Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

51–56 Expresse o número como uma razão de inteiros.

51. $0{,}\overline{8} = 0{,}8888\ldots$

52. $0{,}\overline{46} = 0{,}46464646\ldots$

53. $2{,}\overline{516} = 2{,}516516516\ldots$

54. $10{,}1\overline{35} = 10{,}135353535\ldots$

55. $1{,}53\overline{42}$

56. $7{,}\overline{12345}$

57–63 Encontre os valores de x para os quais a série converge. Calcule a soma da série para esses valores de x.

57. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^n x^n$

58. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n$

59. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$

60. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n (x-5)^n$

61. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^n}$

62. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n x}{3^n}$

63. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$

64. Vimos que a série harmônica é uma série divergente cujos termos tendem a 0. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

também é uma série com essa propriedade.

SCA **65–66** Use o comando de frações parciais em seu SCA para encontrar uma expressão conveniente para a soma parcial; então utilize essa expressão para encontrar a soma da série. Verifique sua resposta usando o SCA para somar a série diretamente.

65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}$

66. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 - 5n^3 + {}^4n}$

67. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$

encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

68. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é $s_n = 3 - n2^{-n}$, encontre a_n e$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

69. Um paciente toma 150 mg de um fármaco, ao mesmo tempo, todos os dias. Imediatamente antes de cada comprimido que é tomado, 5% da droga permanece no corpo.
(a) Qual quantidade do fármaco no corpo depois do terceiro comprimido? Após o n-ésimo comprimido?
(b) Qual quantidade da droga permanece no corpo, a longo prazo?

70. Depois da injeção de uma dose D de insulina, a concentração de insulina no sistema do paciente decai exponencialmente e por isso pode ser escrito como De^{-at}, onde t representa o tempo em horas e a é uma constante positiva.
(a) Se uma dose D é injetada a cada T horas, escreva uma expressão para a soma das concentrações residuais pouco antes da $(n+1)$-ésima injeção.
(b) Determine o limite de concentração pré-injeção.
(c) Se a concentração de insulina deve ser sempre igual ou superior a um valor crítico C, determine uma dose mínima D em termos de C, a e T.

71. Quando o dinheiro é gasto em produtos e serviços, aqueles que o recebem também gastam uma parte dele. As pessoas que recebem parte do dinheiro gasto duas vezes gastarão uma parte, e assim por diante. Os economistas chamam essa reação em cadeia de *efeito multiplicador*. Em uma comunidade hipotética isolada, o governo local começa o processo com gastando D dólares. Suponha que cada destinatário de dinheiro gasto gaste $100c$% e guarde $100s$% do dinheiro que ele ou ela recebe. Os valores c e s são denominados *propensão marginal a consumir* e *propensão marginal a economizar* e, é claro, $c + s = 1$.
(a) Seja S_n o gasto total que foi gerado depois de n transações. Encontre uma equação para S_n.
(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, onde $k = 1/s$. O número k é chamado *multiplicador*. Qual é o multiplicador se a propensão marginal para consumir for 80%?

Obs. O governo federal usa esse princípio para justificar o gasto deficitário. Os bancos usam esse princípio para justificar o empréstimo de uma grande porcentagem do dinheiro que recebem em depósitos.

72. Uma certa bola tem a seguinte propriedade: cada vez que cai a partir de uma altura h em uma superfície dura e nivelada, ela volta até uma altura rh, onde $0 < r < 1$. Suponha que a bola seja lançada de uma altura inicial de H metros.

(a) Supondo que a bola continua a pular indefinidamente, calcule a distância total que ela percorre.

(b) Calcule o tempo total que a bola pula. (Use o fato de que a bola cai $\frac{1}{2}gt^2$ metros em t segundos.)

(c) Suponha que, cada vez que a bola atingir a superfície com velocidade v, ela rebaterá com velocidade $-kv$, onde $0 < r < 1$. Quanto tempo levará para a bola parar?

73. Encontre o valor de c se

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1 + c)^{-n} = 2$$

74. Encontre o valor de c tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$$

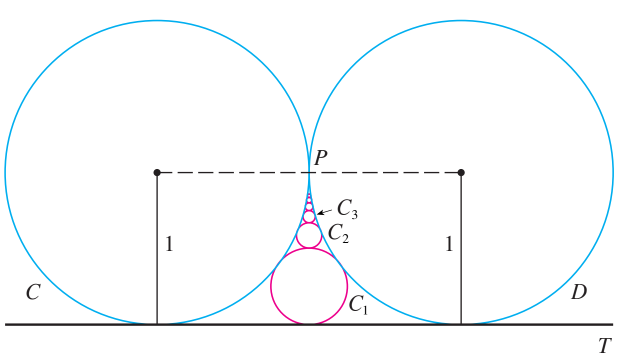
75. No Exemplo 8 mostramos que a série harmônica é divergente. Aqui, esboçamos outro método, que faz uso do fato de que $e^x > 1 + x$ para qualquer $x > 0$. (Veja o Exercício 4.3.78, no Volume I.)

Se s_n for a n-ésima soma parcial da série harmônica, mostre que $e^{s_n} > n + 1$. Por que isto implica que a série harmônica é divergente?

76. Trace as curvas $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ na mesma tela. Encontrando as áreas entre as curvas sucessivas, dê uma demonstração geométrica do fato, mostrado no Exemplo 7, de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

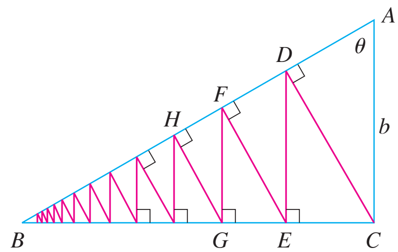
77. A figura mostra dois círculos C e D de raio 1 que se tocam em P. T é uma reta tangente comum; C_1 é o círculo que toca C, D e T; C_2 é o círculo que toca C, D e C_1; C_3 é o círculo que toca C, D e C_2. Esse procedimento pode continuar indefinidamente e produzir uma sequência infinita de círculos $\{C_n\}$. Encontre uma expressão para o diâmetro de C_n e então forneça outra demonstração geométrica do Exemplo 7.



78. Um triângulo retângulo ABC é dado com $\angle A = \theta$ e $|AC| = b$. CD é desenhado perpendicularmente a AB, DE é desenhado perpendicularmente a BC, $EF \perp AB$, e esse processo continua indefinidamente, como mostrado na figura. Calcule o comprimento total de todas as perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

em termos de b e θ.



79. O que está errado com o seguinte cálculo?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldo pensou que isso provava a existência de Deus, porque "alguma coisa tinha sido criada do nada".)

80. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \neq 0)$ seja uma série convergente. Demonstre que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ é uma série divergente.

81. Demonstre a parte (i) do Teorema 8.

82. Se $\sum a_n$ for divergente e $c \neq 0$, mostre que $\sum ca_n$ é divergente.

83. Se $\sum a_n$ for convergente e $\sum b_n$ divergente, mostre que a série $\sum (a_n + b_n)$ é divergente. [*Dica*: Argumente por contradição.]

84. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem ambas divergentes, $\sum (a_n + b_n)$ é necessariamente divergente?

85. Suponha que uma série $\sum a_n$ tenha termos positivos e suas somas parciais s_n satisfaçam a desigualdade $s_n \leqslant 1.000$ para todo n. Explique porque $\sum a_n$ deve ser convergente.

86. A sequência de Fibonacci foi definida na Seção 11.1 pelas equações

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Mostre que cada uma das afirmações a seguir é verdadeira.

(a) $\dfrac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1} f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

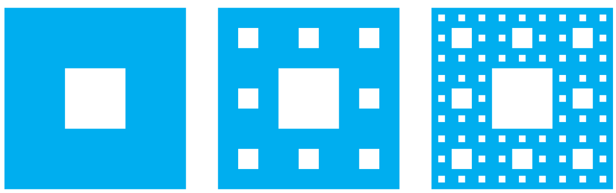
(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} f_{n+1}} = 2$

87. O **conjunto de Cantor**, cujo nome é uma homenagem ao matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), é construído como a seguir. Começamos com o intervalo fechado $[0, 1]$ e removemos o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Isso nos leva a dois intervalos, $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, e removemos cada terço intermediário aberto. Quatro intervalos permanecem, e novamente repetimos o processo. Continuamos esse procedimento indefinidamente, em cada passo removendo o terço do meio aberto de cada intervalo que permanece do passo anterior. O conjunto de Cantor consiste nos números em $[0, 1]$ que permanecem depois de todos estes intervalos terem sido removidos.

(a) Mostre que o comprimento total de todos os intervalos que foram removidos é 1. Apesar disso, o conjunto de Cantor contém infinitos números. Dê exemplos de alguns números no conjunto de Cantor.

(b) O **tapete de Sierpinski** é o correspondente bidimensional do conjunto de Cantor. Ele é construído pela remoção do subquadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em nove subquadrados. A etapa seguinte consiste em remover os subquadrados centrais dos oito quadrados menores que permaneceram, e assim por diante. (A figura mostra os três primeiros passos da construção.) Mostre que a soma das áreas dos quadrados removidos é 1. Isso implica que o tapete de Sierpinski tem área 0.



88. (a) Uma sequência $\{a_n\}$ é definida recursivamente pela equação $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ para $n \geqslant 3$, onde a_1 e a_2 podem ser quaisquer números reais. Experimente com vários valores de a_1 e a_2 e use sua calculadora para descobrir o limite da sequência.

(b) Encontre $\lim_{n\to\infty} a_n$ em termos de a_1 e a_2 expressando $a_{n+1} - a_n$ em termos de $a_2 - a_1$ e somando uma série.

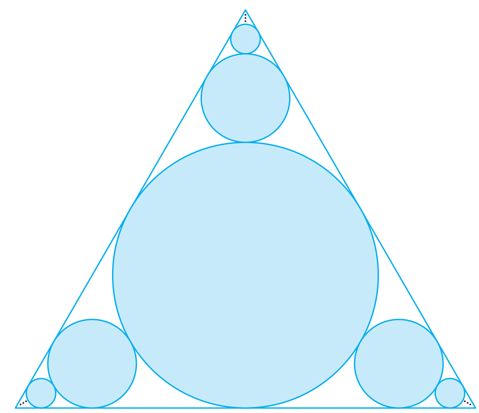
89. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n+1)!$.

(a) Encontre as somas parciais s_1, s_2, s_3 e s_4. Você reconhece os denominadores? Use o padrão para conjecturar uma fórmula para s_n.

(b) Use indução matemática para demonstrar sua conjectura.

(c) Mostre que a série infinita dada é convergente e calcule sua soma.

90. Na figura existem infinitos círculos se aproximando dos vértices de um triângulo equilátero. Cada círculo toca outros círculos e lados do triângulo. Se o triângulo tiver lados de comprimento 1, calcule a área total ocupada pelos círculos.



11.3 O Teste da Integral e Estimativas de Somas

Em geral é difícil encontrar a soma exata de uma série. Conseguimos fazer isso para as séries geométricas e a série $\Sigma\ 1/[n(n+1)]$ porque em cada um desses casos pudemos encontrar uma fórmula simples para a n-ésima soma parcial s_n. Mas geralmente não é fácil descobrir uma fórmula. Portanto, nas próximas seções, desenvolveremos vários testes que nos permitem determinar se uma série é convergente ou divergente sem encontrar sua soma explicitamente. (Em alguns casos, contudo, nossos métodos nos permitirão encontrar boas estimativas da soma.) Nosso primeiro teste envolve integrais impróprias.

Começamos investigando as séries cujos termos são os recíprocos dos quadrados de inteiros positivos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Não existe uma fórmula simples para a soma s_n dos primeiros termos n, mas a tabela de valores aproximados gerada por computador dada na margem sugere que as somas parciais estão se aproximando de um número próximo de 1,64 quando $n \to \infty$ e, assim, parece que a série é convergente.

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1,4636
10	1,5498
50	1,6251
100	1,6350
500	1,6429
1.000	1,6439
5.000	1,6447

Podemos confirmar essa impressão com um argumento geométrico. A Figura 1 mostra a curva $y = 1/x^2$ e retângulos colocados abaixo dela. A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1; a altura é igual ao valor da função $y = 1/x^2$ na extremidade direita do intervalo.

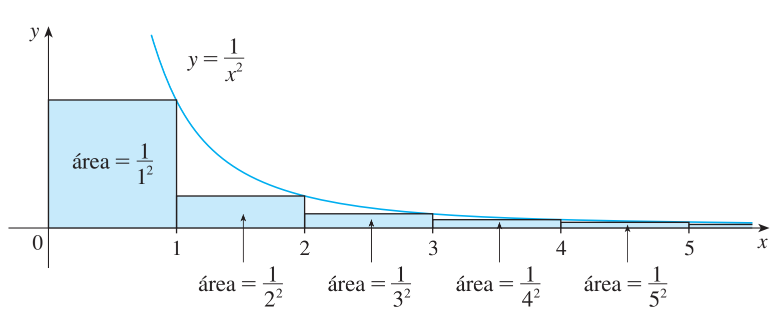


FIGURA 1

Dessa forma, a soma das áreas dos retângulos é

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Se excluirmos o primeiro retângulo, a área total dos retângulos remanescentes será menor que a área sob a curva $y = 1/x^2$ para $x \geqslant 1$, que é o valor da integral $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. Na Seção 7.8, no Volume I, descobrimos que essa integral imprópria é convergente e tem valor 1. Assim, a figura mostra que todas as somas parciais são menores que

$$\frac{1}{1^2}+\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

Então, as somas parciais são limitadas. Também sabemos que as somas parciais são crescentes (porque todos os termos são positivos). Portanto, as somas parciais convergem (pelo Teorema da Sequência Monótona) e, dessa maneira, a série é convergente. A soma da série (o limite das somas parciais) é também menor que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots<2$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3,2317
10	5,0210
50	12,7524
100	18,5896
500	43,2834
1.000	61,8010
5.000	139,9681

A soma exata dessa série encontrada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) é $\pi^2/6$, mas a demonstração desse fato é muito difícil. (Veja o Problema 6 em Problemas Quentes, no Capítulo 15.)

Agora vamos olhar para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots$$

A tabela de valores de s_n sugere que as somas parciais não estão se aproximando de um número; assim, suspeitamos que essa série possa ser divergente. Novamente usamos um desenho para a confirmação. A Figura 2 mostra a curva $y = 1/\sqrt{x}$, porém dessa vez utilizamos retângulos cujos topos estão *acima* da curva.

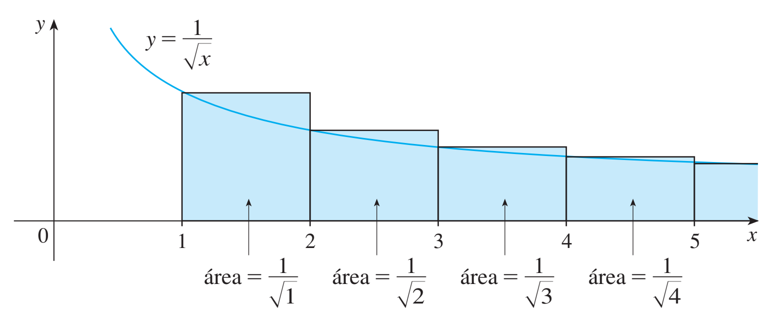


FIGURA 2

A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1. A altura é igual ao valor da função $y = 1/\sqrt{x}$ na extremidade *esquerda* do intervalo. Dessa forma, a soma de todas as áreas dos retângulos é

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Essa área total é maior que a área sob a curva $y = 1/\sqrt{x}$ para $x \geqslant 1$, que é igual à integral $\int_1^\infty \left(1/\sqrt{x}\right)dx$. Mas sabemos, a partir da Seção 7.8, no Volume I, que essa integral imprópria é divergente. Em outras palavras, a área sob a curva é infinita. Assim a soma da série deve ser infinita; isto é, a série é divergente.

O mesmo tipo de argumentação geométrica que usamos para essas duas séries pode ser usado para demonstrar o seguinte teste. (A demonstração é dada no fim desta seção.)

O Teste da Integral Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente. Em outras palavras:

(i) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ for divergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

OBSERVAÇÃO Quando você usar o Teste da Integral lembre-se de que não é necessário começar a série ou a integral em $n = 1$. Por exemplo, testando a série

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \qquad \text{usamos} \qquad \int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2}\, dx$$

Também não é necessário que f seja *sempre* decrescente. O importante é que f seja *decrescente* a partir de certo ponto, isto é, decrescente para x maior que algum número N. Então, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ é convergente, e assim $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente pela Observação 4 da Seção 11.2.

EXEMPLO 1 Teste a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ quanto à convergência ou divergência.

SOLUÇÃO A função $f(x) = 1/(x^2+1)$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e assim usamos o Teste da Integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}x \Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\operatorname{tg}^{-1}t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Então, $\int_1^{\infty} 1/(x^2+1)\, dx$ é uma integral convergente e, dessa forma, pelo Teste da Integral, a série $\sum 1/(n^2+1)$ é convergente.

EXEMPLO 2 Para que valores de p a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente?

SOLUÇÃO Se $p < 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$. Se $p = 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$. Em qualquer dos dois casos, $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$, e, assim, a série dada diverge pelo Teste de Divergência (11.2.7).

Se $p > 0$, então a função $f(x) = 1/x^p$ é claramente contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Encontramos no Capítulo 7, [veja (7.8.2, no Volume I)] que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx \ \text{ é convergente se } p > 1 \text{ e divergente se } p \leqslant 1$$

Para usarmos o Teste da Integral, precisamos ser capazes de calcular $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ e, portanto, precisamos ser capazes de encontrar uma antiderivada de f. Frequentemente é difícil ou impossível, por isso precisamos de outros testes de convergência também.

Segue do Teste da Integral que a série $\sum 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leqslant 1$. (Para $p = 1$, esta é a série harmônica discutida no Exemplo 8 da Seção 11.2).

A série no Exemplo 2 é chamada **série *p***. É importante para o restante deste capítulo; desse modo, resumimos os resultados do Exemplo 2 para referência futura como a seguir.

1 A série p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

EXEMPLO 3

(a) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

é convergente porque ela é uma série p com $p = 3 > 1$.

(b) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

é divergente porque ela é uma série p com $p = \frac{1}{3} < 1$.

OBSERVAÇÃO *Não* devemos inferir a partir do Teste da Integral que a soma da série é igual ao valor da integral. De fato,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{enquanto} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Portanto, em geral,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

EXEMPLO 4 Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO A função $f(x) = (\ln x)/x$ é positiva e contínua para $x > 1$ porque a função logaritmo é contínua. Mas não é óbvio se f é decrescente ou não; assim, calculamos sua derivada:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Então $f'(x) < 0$ quando $\ln x > 1$, isto é, $x > e$. Segue que f é decrescente quando $x > e$ e podemos aplicar o Teste da Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{2}\Bigg]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Como essa integral imprópria é divergente, a série $\Sigma\,(\ln n)/n$ também é divergente pelo Teste da Integral.

Estimando a Soma de uma Série

Suponha que possamos usar o Teste da Integral para mostrar que uma série $\Sigma\, a_n$ seja convergente e que queremos encontrar uma aproximação para a soma s da série. Claro, qualquer soma parcial s_n é uma aproximação para s porque $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Mas quão precisa é tal aproximação? Para descobrirmos, precisamos estimar o tamanho do **resto**

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

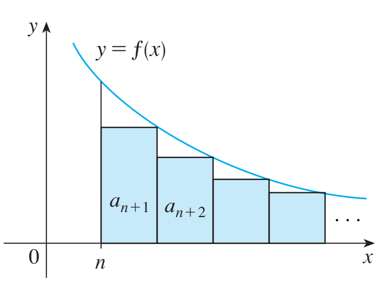


FIGURA 3

O resto R_n é o erro resultante de quando s_n, a soma dos n primeiros termos, é utilizada como uma aproximação para a soma total.

Usamos a mesma notação e ideias que no Teste da Integral, supondo que f seja decrescente em $[n, \infty)$. Comparando as áreas dos retângulos com a área sob $y = f(x)$ para $x > n$ na Figura 3, vemos que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leqslant \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$

De maneira semelhante, vemos, a partir da Figura 4, que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geqslant \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx$$

Assim, demonstramos a seguinte estimativa para o erro:

$\boxed{2}$ **Estimativa do Resto Para o Teste da Integral** Suponha que $f(k) = a_k$, onde f é uma função contínua, positiva, decrescente para $x \geqslant n$ e $\Sigma\, a_n$ é convergente. Se $R_n = s - s_n$, então

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

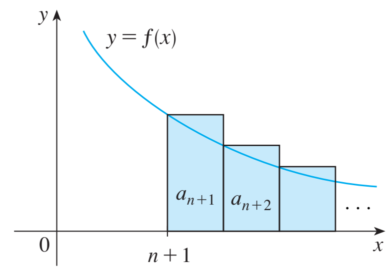


FIGURA 4

EXEMPLO 5

(a) Aproxime a soma da série $\Sigma\, 1/n^3$ usando a soma dos 10 primeiros termos. Estime o erro envolvido nessa aproximação.
(b) Quantos termos são necessários para garantir que a soma tenha precisão de 0,0005?

SOLUÇÃO Em ambas as partes, (a) e (b), precisamos conhecer $\int_n^\infty f(x)\,dx$. Com $f(x) = 1/x^3$, que satisfaz as condições do Teste da Integral, temos

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

(a) A aproximação da soma da série pela 10ª soma parcial, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{10^3} \approx 1{,}1975$$

De acordo com a estimativa do resto em $\boxed{2}$, temos

$$R_{10} \leqslant \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$$

Por conseguinte, o tamanho do erro é no máximo 0,005.
(b) A precisão de 0,0005 significa que temos de encontrar um valor de n tal que $R_n \leqslant 0{,}0005$. Uma vez que

$$R_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

queremos

$$\frac{1}{2n^2} < 0{,}0005$$

Resolvendo esta desigualdade, obtemos

$$n^2 > \frac{1}{0{,}001} = 1.000 \qquad \text{ou} \qquad n > \sqrt{1.000} \approx 31{,}6$$

Precisamos de 32 termos para garantir a precisão em 0,0005.

Se acrescentarmos s_n para cada lado das desigualdades em $\boxed{2}$, obtemos

$\boxed{3}$
$$s_n + \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_n^\infty f(x)\,dx$$

como $s_n + R_n = s$. As desigualdades em $\boxed{3}$ dão um limite inferior e um limite superior para s. Eles fornecem uma aproximação mais precisa para a soma da série do que a soma parcial s_n.

Embora Euler tenha sido capaz de calcular a soma exata da série p para $p = 2$, ninguém foi capaz de encontrar a soma exata por $p = 3$. No Exemplo 6, no entanto, vamos mostrar como estimativa essa soma.

EXEMPLO 6 Use $\boxed{3}$ com $n = 10$ para estimar a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

SOLUÇÃO As desigualdades em $\boxed{3}$ tornam-se

$$s_{10} + \int_{11}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx \leqslant s \leqslant s_{10} + \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$$

Do Exemplo 5, sabemos que

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

então
$$s_{10} + \frac{1}{2(11)^2} \leqslant s \leqslant s_{10} + \frac{1}{2(10)^2}$$

Usando $s_{10} \approx 1{,}197532$, obtemos

$$1{,}201664 \leqslant s \leqslant 1{,}202532$$

Se aproximarmos s pelo ponto médio desse intervalo, então o erro é no máximo metade do comprimento do intervalo. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1{,}2021 \qquad \text{com erro} < 0{,}0005$$

Se compararmos o Exemplo 6 com o Exemplo 5, veremos que a estimativa melhorada em $\boxed{3}$ pode ser muito melhor que a estimativa $s \approx s_n$. Para fazer um erro menor que 0,0005 tivemos de usar 32 termos no Exemplo 5, mas apenas dez termos no Exemplo 6.

Demonstração do Teste da Integral

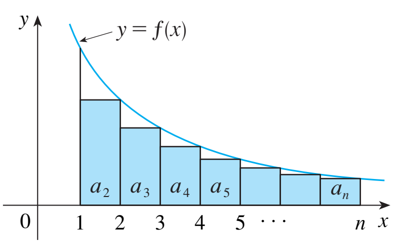


FIGURA 5

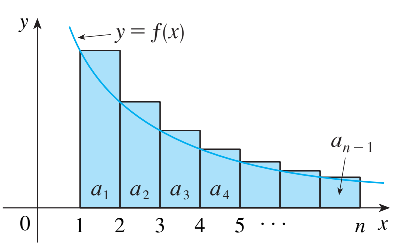


FIGURA 6

Já vimos a ideia básica por trás da demonstração do Teste da Integral nas Figuras 1 e 2 para as séries $\Sigma\, 1/n^2$ e $\Sigma\, 1/\sqrt{n}$. Para a série geral $\Sigma\, a_n$, olhe as Figuras 5 e 6. A área do primeiro retângulo sombreado na Figura 5 é o valor de f na extremidade direita de $[1, 2]$, isto é, $f(2) = a_2$. Assim, comparando as áreas dos retângulos sombreados com a área sob $y = f(x)$ de 1 até n, vemos que

$$\boxed{4} \qquad a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant \int_1^n f(x)\,dx$$

(Observe que essa desigualdade depende do fato de f ser decrescente.) Da mesma forma, a Figura 6 mostra que

$$\boxed{5} \qquad \int_1^n f(x)\,dx \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

(i) Se $\int_1^\infty f(x)\,dx$ for convergente, então $\boxed{4}$ dá a

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \int_1^\infty f(x)\,dx$$

já que $f(x) \geqslant 0$. Portanto,

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx = M, \text{ digamos}$$

como $s_n \leqslant M$ para todo n, a sequência $\{s_n\}$ é limitada superiormente. Também

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$$

já que $a_{n+1} = f(n + 1) \geqslant 0$. Então, $\{s_n\}$ é uma sequência crescente limitada, e assim, ela é convergente pelo Teorema da Sequência Monótona (11.1.12). Isso significa que $\Sigma\, a_n$ é convergente.

(ii) Se $\int_1^\infty f(x)\,dx$ for divergente, então $\int_1^n f(x)\,dx \to \infty$ quando $n \to \infty$ porque $f(x) \geqslant 0$. Mas $\boxed{5}$ dá a

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

e também $s_{n-1} \to \infty$. Isso implica que $s_n \to \infty$ e, assim, $\Sigma\, a_n$ diverge.

11.3 Exercícios

1. Faça um desenho para mostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1,3}} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1,3}}\,dx$$

O que você pode concluir sobre a série?

2. Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geqslant 1$ e $a_n = f(n)$. Desenhando uma figura, coloque em ordem crescente as três quantidades:

$$\int_1^6 f(x)\,dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3–8 Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

9–26 Determine se a série é convergente ou divergente

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0,85}}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1,4} + 3n^{-1,2})$

11. $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$

12. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

13. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$

14. $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

18. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-4}{n^2-2n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+13}$

21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n^3}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$

27–28 Explique por que o Teste da Integral não pode ser usado para determinar se a série é convergente.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{1+n^2}$

29–32 Encontre os valores de p para os quais a série é convergente.

29. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

30. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\,[\ln(\ln n)]^p}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

33. A função zeta de Riemann ζ é definida por

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

e é usada em teoria de números para estudar a distribuição de números primos. Qual é o domínio de ζ?

34. Leonhard Euler foi capaz de calcular a soma exata da série p com $p = 2$:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Utilize este fato para encontrar a soma de cada série.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

35. Euler também descobriu a soma da série p com $p = 4$:

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Use o resultado de Euler para encontrar a soma da série.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^4$ (b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{(k-2)^4}$

36. (a) Encontre a soma parcial s_{10} da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estime o erro cometido ao usar s_{10} como uma aproximação para a soma da série.
(b) Utilize $\boxed{3}$ com $n = 10$ para dar uma estimativa melhorada da soma.
(c) Compare sua estimativa da parte (b) com o valor exato dado no Exercício 35.
(d) Encontre um valor de n tal que s_n represente a soma com precisão de 0,00001.

37. (a) Use a soma dos dez primeiros termos para estimar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Quão boa é essa estimativa?
(b) Melhore essa estimativa usando $\boxed{3}$ com $n = 10$.
(c) Compare sua estimativa da parte (b) com o valor exato dado no Exercício 34.
(d) Encontre um valor de n que garanta que o erro na aproximação $s \approx s_n$ seja menor que 0,001.

38. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^5$ com precisão de três casas decimais.

39. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^{-6}$ com precisão de cinco casas decimais.

40. Quantos termos da série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ você precisaria somar para encontrar sua soma com precisão de 0,01?

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica   1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

41. Mostre que, se queremos aproximar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1,001}$ de maneira que o erro seja menor que 5 na nona casa decimal, então precisamos somar mais que $10^{11.301}$ termos!

SCA **42.** (a) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$ é convergente.

(b) Encontre um limitante superior para o erro na aproximação $s \approx s_n$.

(c) Qual é o menor valor de n tal que esse limitante superior seja menor que 0,05?

(d) Encontre s_n para esse valor de n.

43. (a) Use $\boxed{4}$ para mostrar que, se s_n é a n-ésima soma parcial da série harmônica, então

$$s_n \leqslant 1 + \ln n$$

(b) A série harmônica diverge, mas muito lentamente. Use a parte (a) para mostrar que a soma do primeiro milhão de termos é menor que 15 e a soma do primeiro bilhão de termos é menor que 22.

44. Use as seguintes etapas para mostrar que a sequência

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

tem um limite. (O valor do limite é denotado por γ e é chamado constante de Euler.)

(a) Desenhe uma figura como a Figura 6 com $f(x) = 1/x$ e interprete t_n como uma área [ou use $\boxed{5}$]para mostrar que $t_n > 0$ para todo n.

(b) Interprete

$$t_n - t_{n+1} = [\ln(n + 1) - \ln n] - \frac{1}{n + 1}$$

como uma diferença de áreas para mostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Portanto, $\{t_n\}$ é uma sequência decrescente.

(c) Use o Teorema da Sequência Monótona para mostrar que $\{t_n\}$ é convergente.

45. Encontre todos os valores positivos de b para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

46. Encontre todos os valores de c para os quais a seguinte série converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n + 1} \right)$$

11.4 Os Testes de Comparação

Nos testes de comparação, a ideia é comparar uma série dada com uma que sabemos ser convergente ou divergente. Por exemplo, a série

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

nos remete à série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, que é uma série geométrica com $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$ e é, portanto, convergente. Como a série $\boxed{1}$ é muito similar a uma série convergente, temos a impressão de que esta também deve ser convergente. Na verdade, é. A desigualdade

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

mostra que nossa série dada $\boxed{1}$ tem termos menores que aqueles da série geométrica e, dessa forma, todas as suas somas parciais são também menores que 1 (a soma da série geométrica). Isso significa que suas somas parciais formam uma sequência crescente limitada, que é convergente. Também segue que a soma da série é menor que a soma da série geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Argumentação semelhante pode ser usada para demonstrar o seguinte teste, que se aplica apenas a séries cujos termos são positivos. A primeira parte diz que, se tivermos uma série cujos termos são *menores* que aqueles de uma série que sabemos ser *convergente*, então nossa série também será convergente. A segunda parte diz que, se começarmos com uma série cujos termos são *maiores* que aqueles de uma série que sabemos ser *divergente*, ela também será divergente.

O Teste de Comparação Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será convergente.

(ii) Se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será divergente.

É importante ter em mente a diferença entre uma sequência e uma série. Uma sequência é uma lista de números, enquanto que uma série é uma soma. Com cada série $\Sigma\, a_n$ não estão associadas duas sequências: a sequência $\{a_n\}$ de termos e a sequência $\{s_n\}$ de somas parciais.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Seja $$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Como ambas as séries têm termos positivos, as sequências $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ são crescentes ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$). Também $t_n \to t$, portanto, $t_n \leqslant t$ para todo n. Como $a_i \leqslant b_i$, temos $s_n \leqslant t_n$. Assim, $s_n \leqslant t$ para todo n. Isso significa que $\{s_n\}$ é crescente e limitada superiormente e, portanto, converge pelo Teorema da Sequência Monótona. Por conseguinte, $\Sigma\, a_n$ converge.

(ii) Se $\Sigma\, b_n$ for divergente, então $t_n \to \infty$ (porque $\{t_n\}$ é crescente). Mas $a_i \geqslant b_i$, assim, $s_n \geqslant t_n$. Então, $s_n \to \infty$. Portanto, $\Sigma\, a_n$ diverge.

Séries padrão para usar no Teste de Comparação

Ao usarmos o Teste de Comparação, devemos, é claro, ter algumas séries conhecidas $\Sigma\, b_n$ para o propósito de comparação. Na maior parte do tempo usamos uma destas séries:

- Uma série p [$\Sigma\, 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$; veja (11.3.1)]
- Uma série geométrica [$\Sigma\, ar^{n-1}$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geqslant 1$; veja (11.2.4)]

EXEMPLO 1 Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO Para um n grande, o termo dominante no denominador é $2n^2$, assim, comparamos a série dada com a série $\Sigma\, 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

pois o lado esquerdo tem um denominador maior. (Na notação do Teste de Comparação, a_n é o lado esquerdo e b_n é o lado direito.) Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente porque é uma constante vezes uma série p com $p = 2 > 1$. Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

é convergente pela parte (i) do Teste de Comparação.

OBSERVAÇÃO 1 Embora a condição $a_n \leqslant b_n$ ou $a_n \geqslant b_n$ no Teste de Comparação seja dada para todo n, precisamos verificar apenas que ela vale para $n \geqslant N$, onde N é algum inteiro fixo, porque a convergência de uma série não é afetada por um número finito de termos. Isso é ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Teste a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ quanto à convergência ou divergência.

SOLUÇÃO Usamos o Teste da Integral para testar esta série no Exemplo 4 da Seção 11.3, mas também podemos testá-lo comparando-o com a série harmônica. Observe que $k > 1$ para $k \geqslant 3$ e assim

$$\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k} \qquad k \geqslant 3$$

Sabemos que $\Sigma\, 1/k$ é divergente (série p com $p = 1$). Então, a série dada é divergente pelo Teste de Comparação.

OBSERVAÇÃO 2 Os termos da série sendo testada devem ser menores que aqueles de uma série convergente ou maiores que aqueles de uma série divergente. Se os termos forem maiores que os de uma série convergente ou menores que os de uma série divergente, então o Teste de Comparação não se aplica. Considere, por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

A desigualdade

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

é inútil para ser usada com o Teste de Comparação, porque $\Sigma\, b_n = \Sigma \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente e $a_n > b_n$. Mesmo assim, temos a impressão de que $\Sigma\, 1/(2^n - 1)$ deve ser convergente, pois ela é muito parecida com a série geométrica convergente $\Sigma \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Em tais casos, o seguinte teste pode ser usado.

Os Exercícios 40 e 41 lidam com os casos $c = 0$ e $c = \infty$.

O Teste de Comparação de Limite Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos. Se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

DEMONSTRAÇÃO Sejam m e M números positivos tais que $m < c < M$. Uma vez que a_n/b_n está próximo de c para um n grande, existe um inteiro N tal que

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M \qquad \text{onde } n > N$$

e, assim,

$$mb_n < a_n < Mb_n \qquad \text{quando } n > N$$

Se $\Sigma\, b_n$ convergir, então $\Sigma\, Mb_n$ também converge. Então, $\Sigma\, a_n$ converge pela parte (i) do Teste de Comparação. Se $\Sigma\, b_n$ divergir, então $\Sigma\, mb_n$ também diverge, e a parte (ii) do Teste de Comparação mostra que $\Sigma\, a_n$ diverge.

EXEMPLO 3 Teste a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ quanto à convergência ou divergência.

SOLUÇÃO Usamos o Teste de Comparação no Limite com

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

e obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Como esse limite existe e $\Sigma\, 1/2^n$ é uma série geométrica convergente, a série dada converge pelo Teste de Comparação no Limite.

EXEMPLO 4 Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO A parte dominante do numerador é $2n^2$ e a parte dominante do denominador é $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Isso sugere tomar

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \qquad b_n = \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{2\sqrt{5 + n^5}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{2\sqrt{\dfrac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2 + 0}{2\sqrt{0 + 1}} = 1$$

Como $\Sigma\, b_n = 2\,\Sigma\, 1/n^{1/2}$ é divergente (série p com $p = \frac{1}{2} < 1$), a série dada diverge pelo Teste de Comparação de Limite.

Observe que ao testar muitas séries, encontramos uma série de comparação apropriada $\Sigma\, b_n$ mantendo apenas as potências mais altas no numerador e denominador.

Estimando Somas

Se tivéssemos usado o Teste de Comparação para mostrar que uma série $\Sigma\, a_n$ converge pela comparação com uma série $\Sigma\, b_n$, poderíamos ser capazes de estimar a soma $\Sigma\, a_n$ pela comparação dos restos. Como na Seção 11.3, consideramos o resto

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

Para a série de comparação $\Sigma\, b_n$ consideramos o resto correspondente

$$T_n = t - t_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

Como $a_n \leqslant b_n$ para todo n, temos $R_n \leqslant T_n$. Se $\Sigma\, b_n$ é uma série p, podemos estimar seu restante T_n como na Seção 11.3. Se $\Sigma\, b_n$ for uma série geométrica, então T_n é a soma de uma série geométrica e podemos somá-la exatamente (veja os Exercícios 35 e 36). Em qualquer dos dois casos, sabemos que R_n é menor que T_n.

EXEMPLO 5 Use a soma dos 100 primeiros termos para aproximar a soma da série $\Sigma\, 1/(n^3 + 1)$. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

SOLUÇÃO Uma vez que

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

a série dada é convergente pelo Teste de Comparação. O resto T_n para a série de comparação $\Sigma\, 1/n^3$ foi estimado no Exemplo 5 da Seção 11.3 usando a Estimativa do Resto para o Teste da Integral. Lá encontramos que

$$T_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2n^2}$$

Portanto, o resto R_n para a série dada satisfaz

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Com $n = 100$, temos

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0{,}00005$$

Usando uma calculadora programável ou um computador, encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3 + 1} \approx 0{,}6864538$$

com erro menor que 0,00005.

11.4 Exercícios

1. Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\Sigma\, b_n$ seja convergente.
   (a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?
   (b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?
2. Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\Sigma\, b_n$ seja divergente.
   (a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?
   (b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?

3–32 Determine se a série converge ou diverge.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+1}$
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4-1}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$
10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen} n}{10^n}$
11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3+4k+3}}$
12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(k^2-1)}{(k+1)(k^2+4)^2}$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^{1,2}}$
14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{3^n-2}$
16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n^4+1}}$
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$
19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$
20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4^n}{n+6^n}$
21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$
22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3}$
23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2n}{(1+n^2)^2}$
24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n}{n^3+n+1}$
25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n^2}$
26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$
27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$
28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$
29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$
30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$
32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

33–36 Use a soma dos dez primeiros termos para aproximar a soma da série. Estime o erro.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$
34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}$
35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n}\cos^2 n$
36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+4^n}$

37. O significado da representação decimal de um número $0,d_1d_2d_3\ldots$ (onde o algarismo d_i é um dos números 0, 1, 2, . . . , 9) é que

$$0,d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Mostre que essa série sempre converge.

38. Para quais valores de p a série $\Sigma_{n=2}^{\infty}\, 1/(n^p \ln n)$ converge?
39. Demonstre que, se $a_n \geqslant 0$ e $\Sigma\, a_n$ converge, então $\Sigma\, a_n^2$ também converge.
40. (a) Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\Sigma\, b_n$ seja convergente. Demonstre que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

então $\Sigma\, a_n$ também é convergente.
   (b) Use a parte (a) para mostrar que as séries convergem.
   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}\, e^n}$
41. (a) Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\Sigma\, b_n$ seja divergente. Demonstre que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

Então $\Sigma\, a_n$ também é divergente.
   (b) Use a parte (a) para mostrar que as séries divergem.
   (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
42. Dê um exemplo de um par de séries $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ com termos positivos para as quais $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$ e $\Sigma\, b_n$ diverge, mas $\Sigma\, a_n$ converge. (Compare com o Exercício 40.)
43. Mostre que, se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, então $\Sigma\, a_n$ é divergente.
44. Mostre que, se $a_n > 0$ e $\Sigma\, a_n$ for convergente, então $\Sigma \ln(1+a_n)$ é convergente.
45. Se $\Sigma\, a_n$ for uma série convergente com termos positivos, é verdade que $\Sigma \operatorname{sen}(a_n)$ também será convergente?
46. Se $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ forem ambas séries convergentes com termos positivos, é verdade que $\Sigma\, a_nb_n$ também será convergente?

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

11.5 Séries Alternadas

Os testes de convergência que estudamos até aqui se aplicam apenas a séries com termos positivos. Nesta seção e na próxima aprenderemos como lidar com séries cujos termos não são necessariamente positivos. De particular importância são as *séries alternadas*, cujos termos se alternam no sinal.

Uma **série alternada** é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Aqui estão dois exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\frac{n}{n+1}$$

Vemos desses exemplos que o n-ésimo termo de uma série alternada é da forma

$$a_n = (-1)^{n-1}b_n \qquad \text{ou} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

onde b_n é um número positivo. (De fato, $b_n = |a_n|$.)

O teste a seguir diz que, se os termos de uma série alternada decrescem para 0 em valor absoluto, então a série converge.

Teste da Série Alternada Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad b_n > 0$$

satisfaz

(i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para todo n

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

Antes de demonstrarmos, vamos olhar a Figura 1, que esboça a ideia por trás da demonstração. Primeiro traçamos $s_1 = b_1$ sobre a reta real. Para encontrarmos s_2, subtraímos b_2; assim s_2 está à esquerda de s_1. Então, para encontrarmos s_3, adicionamos b_3; assim, s_3 está à direita de s_2. Mas, como $b_3 < b_2$, s_3 está à esquerda de s_1. Continuando dessa maneira, vemos que as somas parciais oscilam de um lado para outro. Como $b_n \to 0$, as etapas subsequentes vão se tornando cada vez menores. As somas parciais pares $s_2, s_4, s_6, \ldots$ são crescentes e as somas parciais ímpares $s_1, s_3, s_5, \ldots$ são decrescentes. Então, parece plausível que ambas estejam convergindo para algum número s, que é a soma da série. Portanto, consideramos as somas parciais pares e ímpares separadamente na demonstração a seguir.

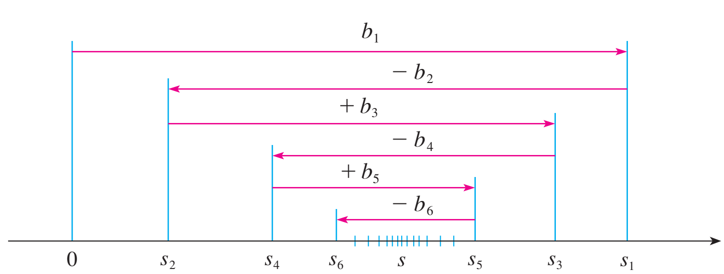


FIGURA 1

DEMONSTRAÇÃO DO TESTE DA SÉRIE ALTERNADA Primeiro consideramos as somas parciais pares:

$$s_2 = b_1 - b_2 \geqslant 0 \qquad \text{uma vez que } b_2 \leqslant b_1$$

$$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) \geqslant s_2 \qquad \text{uma vez que } b_4 \leqslant b_3$$

Em geral $$s_{2n} = s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geqslant s_{2n-2} \qquad \text{uma vez que } b_{2n} \leqslant b_{2n-1}$$

Logo $$0 \leqslant s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant \cdots$$

Mas podemos escrever também

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}$$

Cada termo entre parênteses é positivo, portanto $s_{2n} \leqslant b_1$ para todo n. Dessa forma, a sequência $\{s_{2n}\}$ de somas parciais pares é crescente e limitada superiormente. É, portanto, convergente pelo Teorema da Sequência Monótona. Vamos chamar esse limite de s, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$$

Agora, calculamos o limite das somas parciais ímpares:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + b_{2n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} \\ &= s + 0 \qquad \text{[pela condição (ii)]} \\ &= s\end{aligned}$$

Como ambas as somas parciais pares e ímpares convergem para s, temos $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ [veja o Exercício 92(a) na Seção 11.1] e, assim, a série é convergente.

A Figura 2 ilustra o Exemplo 1 mostrando os gráficos dos termos $a_n = (-1)^{n-1}/n$ e as somas parciais s_n. Observe como os valores de s_n. ziguezagueiam em torno de valor limite, o que parece ser cerca de 0,7. Na verdade, pode-se provar que a soma exata da série é $\ln 2 \approx 0{,}693$ (ver Exercício 36).

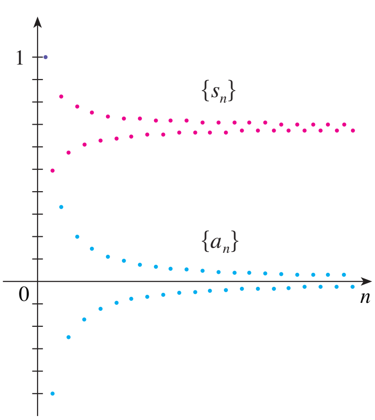


FIGURA 2

EXEMPLO 1 A série harmônica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisfaz

$$\text{(i)} \quad b_{n+1} < b_n \qquad \text{uma vez que} \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

logo, a série é convergente pelo Teste da Série Alternada.

EXEMPLO 2 A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n - 1}$ é alternada, mas

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \dfrac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

assim, a condição (ii) não é satisfeita. Em vez disto, olhamos para o limite do n-ésimo termo da série:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n - 1}$$

Este limite não existe, logo a série diverge pelo Teste da Divergência.

EXEMPLO 3 Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ quanto à convergência ou divergência.

SOLUÇÃO A série dada é alternada; assim, tentamos verificar as condições (i) e (ii) do Teste da Série Alternada.

Ao contrário da situação no Exemplo 1, não é óbvio que a sequência dada por $b_n = n^2/(n^3+1)$ seja decrescente. Contudo, se considerarmos a função associada $f(x) = x^2/(x^3+1)$, descobriremos que

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

Como estamos apenas considerando x positivo, vemos que $f'(x) < 0$ se $2 - x^3 < 0$, isto é, $x > \sqrt[3]{2}$. Então, f é decrescente no intervalo $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Isso significa que $f(n+1) < f(n)$ e, portanto, $b_{n+1} < b_n$ quando $n \geqslant 2$. (A desigualdade $b_2 < b_1$ pode ser verificada diretamente, mas o que realmente importa é que a sequência $\{b_n\}$ é eventualmente decrescente.)

A condição (ii) é prontamente verificada:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = 0$$

Então, a série dada é convergente pelo Teste da Série Alternada.

Em vez de verificarmos a condição (i) do Teste da Série Alternada calculando uma derivada, poderíamos verificar $b_{n+1} < b_n$ diretamente usando a técnica da Solução 1 do Exemplo 13 da Seção 11.1.

Estimando Somas

Uma soma parcial s_n de qualquer série convergente pode ser usada como uma aproximação para a soma total s, porém isso não é de muita utilidade, a menos que possamos estimar a precisão da aproximação. O erro envolvido usando $s \approx s_n$ é o resto $R_n = s - s_n$. O próximo teorema diz que, para séries que satisfazem as condições do Teste da Série Alternada, o tamanho do erro é menor que b_{n+1}, que é o valor absoluto do primeiro termo negligenciado.

Teorema da Estimativa de Séries Alternadas Se $s = \sum (-1)^{n-1} b_n$ for a soma de uma série alternada que satisfaz

$$\text{(i)}\ b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{e} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

então, $|R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$

DEMONSTRAÇÃO Sabemos pela demonstração do Teste da Série Alternada que s está entre duas somas parciais consecutivas quaisquer s_n e s_{n+1}. (Mostramos que s é maior que todas as somas até mesmo parciais. Um argumento similar mostra que s é menor que todas as somas ímpares.) Segue-se que

$$|s - s_n| \leqslant |s_{n+1} - s_n| = b_{n+1}$$

Por definição, $0! = 1$.

EXEMPLO 4 Encontre a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ com precisão de três casas decimais.

SOLUÇÃO Primeiro observamos que a série é convergente pelo Teste da Série Alternada, porque

$$\text{(i)} \qquad \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!\,(n+1)} < \frac{1}{n!}$$

$$\text{(ii)} \qquad 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{logo} \quad \frac{1}{n!} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty$$

Para termos uma ideia de quantos termos precisamos usar em nossa aproximação, vamos escrever os primeiros termos da série

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5.040} + \cdots$$

Observe que $$b_7 = \tfrac{1}{5.040} < \tfrac{1}{5.000} = 0{,}0002$$

e $$s_6 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} \approx 0{,}368056$$

Na Seção 11.10 demonstraremos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ para todo x, assim, o que obtivemos no Exemplo 4 é realmente uma aproximação para o número e^{-1}.

Pelo Teorema da Estimativa da Série Alternada, sabemos que

$$|s - s_6| \leqslant b_7 < 0{,}0002$$

Esse erro menor que 0,0002 não afeta a terceira casa decimal, assim, temos $s \approx 0{,}368$ com precisão de três casas decimais.

OBSERVAÇÃO A regra de que o erro (ao usar s_n para aproximar s) é menor que o primeiro termo negligenciado é, em geral, válida apenas para séries alternadas que satisfazem as condições do Teorema da Estimativa da Série Alternada. A regra não se aplica a outros tipos de séries.

11.5 Exercícios

1. (a) O que é uma série alternada?
(b) Sob que condições uma série alternada converge?
(c) Se essas condições forem satisfeitas, o que você pode dizer sobre o resto depois de n termos?

2–20 Teste a série quanto a convergência ou divergência.

2. $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \cdots$

3. $-\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \cdots$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}} - \cdots$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{2/n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{arctg} n$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\pi}{1+\sqrt{n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

21–22 Faça o gráfico de ambas as sequências de termos e de somas parciais na mesma tela. Use o gráfico para fazer uma estimativa aproximada da soma da série. Em seguida, use o Teorema de Estimativa de Séries Alternadas para estimar a soma correta para quatro casas decimais.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-0{,}8)^n}{n!}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{8^n}$

23–26 Mostre que a série é convergente. Quantos termos da série precisamos somar para encontrar a soma parcial com a precisão indicada?

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6} \quad (|\text{erro}| < 0{,}00005)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,5^n} \quad (|\text{erro}| < 0{,}0001)$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n!} \quad (|\text{erro}| < 0{,}000005)$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n} \quad (|\text{erro}| < 0{,}01)$

27–30 Aproxime a soma da série com a precisão de quatro casas decimais.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{10^n}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$

31. A 50ª soma parcial s_{50} da série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ é uma superestimativa ou uma subestimativa da soma total? Explique.

32–34 Para quais valores de f cada série é convergente?

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$

34. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

35. Mostre que a série $\Sigma\,(-1)^{n-1}b_n$, onde $b_n = 1/n$ se n for ímpar, e $b_n = 1/n^2$ se n for par, é divergente. Por que o Teste da Série Alternada não se aplica?

36. Use as seguintes etapas para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Sejam h_n e s_n as somas parciais das séries harmônica e harmônica alternada.

(a) Mostre que $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.

(b) Do Exercício 44 da Seção 11.3 temos

$$h_n - \ln n \to \gamma \qquad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e, portanto,

$$h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma \qquad \text{quando} \quad n \to \infty$$

Use esses fatos junto com a parte (a) para mostrar que $s_{2n} \to \ln 2$ quando $n \to \infty$.

11.6 Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

Dada qualquer série $\Sigma\, a_n$, podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original.

Temos testes de convergência para séries com termos positivos e para séries alternadas. Mas o que acontece se os sinais dos termos mudarem irregularmente? Veremos no Exemplo 3 que a ideia de convergência absoluta algumas vezes ajuda em tais casos.

1 Definição Uma série $\Sigma\, a_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\Sigma\,|a_n|$ for convergente.

Observe que, se $\Sigma\, a_n$ for uma série com termos positivos, então $|a_n| = a_n$ e, assim, a convergência absoluta é a mesma coisa que a convergência nesse caso.

EXEMPLO 1 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é uma série p convergente ($p = 2$).

EXEMPLO 2 Sabemos que a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é convergente (veja o Exemplo 1 da Seção 11.5), mas não é absolutamente convergente, porque a série de valores absolutos correspondente é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que é a série harmônica (série p com $p = 1$) e é, portanto, divergente.

2 Definição Uma série $\Sigma\, a_n$ é chamada **condicionalmente convergente** se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.

O Exemplo 2 mostra que a série harmônica alternada é condicionalmente convergente. Então, é possível uma série ser convergente, porém não absolutamente convergente. Contudo, o próximo teorema mostra que a convergência absoluta implica convergência.

3 Teorema Se uma série $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

DEMONSTRAÇÃO Observe que a desigualdade

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

é verdadeira porque $|a_n|$ é a_n ou $-a_n$. Se $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, então $\Sigma\, |a_n|$ é convergente, assim $\Sigma\, 2|a_n|$ é convergente. Portanto, pelo Teste da Comparação, $\Sigma\, (a_n + |a_n|)$ é convergente. Então,

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

é a diferença de duas séries convergentes e é, portanto, convergente.

EXEMPLO 3 Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

é convergente ou divergente.

A Figura 1 mostra os gráficos dos termos a_n e das somas parciais s_n da série no Exemplo 3. Observe que a série não é alternada, mas tem termos positivos e negativos.

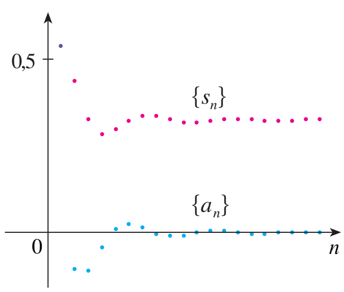


FIGURA 1

SOLUÇÃO Essa série tem termos positivos e negativos, mas não é alternada. (O primeiro termo é positivo, os próximos três são negativos e os três seguintes são positivos. Os sinais trocam irregularmente.) Podemos aplicar o teste de comparação com a série de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Uma vez que $|\cos n| \leqslant 1$ para todo n, temos

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Sabemos que $\Sigma\, 1/n^2$ é convergente (série p com $p = 2$) e, assim, $\Sigma\, |\cos n|/n^2$ é convergente pelo Teste da Comparação. Então a série dada $\Sigma\, (\cos n)/n^2$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente pelo Teorema 3.

O teste a seguir é muito útil para determinar se uma série dada é absolutamente convergente.

O Teste da Razão

(i) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ ou $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, o Teste da Razão é inconclusivo, ou seja, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\Sigma\, a_n$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) A ideia é comparar a série dada com uma série geométrica convergente. Como $L < 1$, podemos escolher um número r tal que $L < r < 1$. Uma vez que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \qquad \text{e} \qquad L < r$$

a razão $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será menor que r; isto é, existe um inteiro N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \qquad \text{sempre que } n \geqslant N$$

ou, de maneira equivalente,

$$\boxed{4} \qquad |a_{n+1}| < |a_n| r \qquad \text{sempre que } n \geqslant N$$

Colocando n sucessivamente igual a N, $N + 1$, $N + 2$, . . . em $\boxed{4}$, obtemos

$$|a_{N+1}| < |a_N| r$$

$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}| r < |a_N| r^2$$

$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}| r < |a_N| r^3$$

e, em geral,

$$\boxed{5} \qquad |a_{N+k}| < |a_N| r^k \qquad \text{para todo } k \geqslant 1$$

Agora, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_N| r^k = |a_N| r + |a_N| r^2 + |a_N| r^3 + \cdots$$

é convergente porque é uma série geométrica com $0 < r < 1$. Assim, a desigualdade $\boxed{5}$, junto com o Teste da Comparação, mostra que a série

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$$

também é convergente. Segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente. (Lembre-se de que um número finito de termos não afeta a convergência.) Portanto, $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$ ou $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, então a razão $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será maior que 1; isto é, existe um inteiro N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \qquad \text{sempre que } n \geqslant N$$

Isso significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ quando $n \geqslant N$, e assim

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$$

Portanto, $\sum a_n$ diverge pelo Teste da Divergência.

OBSERVAÇÃO A parte (iii) do Teste da Razão diz que, se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, o Teste da Razão não dá nenhuma informação. Por exemplo, para a série convergente $\sum 1/n^2$ temos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{quando } n \to \infty$$

enquanto para a série divergente $\sum 1/n$ temos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Portanto, se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, a série $\sum a_n$ pode convergir ou divergir. Nesse caso, o Teste da Razão falha e devemos usar outro teste.

O teste da razão é geralmente conclusivo se o n-ésimo termo da série contém um exponencial ou fatorial, como veremos nos Exemplos 4 e 5.

Estimando Somas

Nas últimas três seções, usamos vários métodos para estimar a soma de uma série – o método dependia de qual teste era usado para demonstrar a convergência. O que acontece com a série para a qual o Teste da Razão funciona? Existem duas possibilidades: se a série for alternada, como no Exemplo 4, então é melhor usar os métodos da Seção 11.5. Se os termos são todos positivos, então use os métodos especiais explicados no Exercício 38.

EXEMPLO 4 Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ quanto à convergência absoluta.

SOLUÇÃO Usamos o Teste da Razão com $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

Então, pelo Teste da Razão, a série dada é absolutamente convergente e, portanto, convergente.

EXEMPLO 5 Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

SOLUÇÃO Como os termos $a_n = n^n/n!$ são positivos, não precisamos dos símbolos de valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \text{quando } n \to \infty$$

(Veja a Equação 3.6.6, no Volume I). Uma vez que $e > 1$, a série dada é divergente pelo Teste da Razão.

OBSERVAÇÃO Embora o Teste da Razão funcione no Exemplo 5, um método mais simples é usar o Teste para Divergência. Uma vez que

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geqslant n$$

segue que a_n não tende a 0 quando $n \to \infty$. Portanto a série dada é divergente pelo Teste para Divergência.

O teste a seguir é conveniente para ser aplicado quando n-ésimas potências ocorrem. Sua demonstração é semelhante à demonstração do teste da razão e é deixada como Exercício 41.

O Teste da Raiz

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o Teste da Raiz não é conclusivo.

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, então a parte (iii) do Teste da Raiz diz que o teste não dá informação. A série $\sum a_n$ pode convergir ou divergir. (Se $L = 1$ no Teste da Razão, não tente o Teste da Raiz, porque L será novamente 1. E se $L = 1$ no Teste da Raiz, não tente o Teste da Razão, pois ele também falhará.)

EXEMPLO 6 Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

SOLUÇÃO

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2+\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Então, a série dada converge pelo Teste da Raiz.

Rearranjos

A questão de uma série ser absolutamente convergente ou condicionalmente convergente tem importância na questão sobre se somas infinitas se comportam ou não como somas finitas.

Se rearranjarmos a ordem dos termos em uma soma finita, então é claro que o valor da soma permanecerá inalterado. Mas esse não é sempre o caso para uma série infinita. Por um **rearranjo** de uma série infinita $\Sigma\, a_n$ queremos dizer uma série obtida simplesmente mudando a ordem dos termos. Por exemplo, um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ poderia começar como a seguir:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

Ocorre que

se $\Sigma\, a_n$ é uma série absolutamente convergente com soma s, então qualquer rearranjo de $\Sigma\, a_n$ tem a mesma soma s.

Contudo, qualquer série condicionalmente convergente pode ser rearranjada para dar uma soma diferente. Para ilustrarmos esse fato, vamos considerar a série harmônica alternada

$$\boxed{6} \qquad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2$$

(Veja o Exercício 36 na Seção 11.5.) Se multiplicarmos esta série por $\frac{1}{2}$, obtemos

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Inserindo zeros entre os termos dessa série, teremos

$$\boxed{7} \qquad 0 + \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} + 0 - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

A soma desses zeros não afeta a soma da série; cada termo na sequência de somas parciais é repetido, mas o limite é o mesmo.

Agora adicionamos as séries nas Equações 6 e 7 usando o Teorema 11.2.8:

$$\boxed{8} \qquad 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

Observe que a série em $\boxed{8}$ contém os mesmos termos que em $\boxed{6}$, mas rearranjados de modo que um termo negativo ocorra depois de cada par de termos positivos. As somas dessas séries, contudo, são diferentes. De fato, Riemann demonstrou que

se $\Sigma\, a_n$ for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ que tem uma soma igual a r.

Uma demonstração desse fato é delineada no Exercício 44.

11.6 Exercícios

1. O que você pode dizer sobre a série $\Sigma\, a_n$ em cada um dos seguintes casos?

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0{,}8$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2–30 Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\tfrac{2}{3}\right)^k$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1,1)^n}{n^4}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 4n}{4^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 2^n}{n!}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n^2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-\cos n}{n^{2/3}-2}$

17. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}100^n}{n!}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

27. $\displaystyle 1 - \frac{1\cdot 3}{3!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{5!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n-1)!} + \cdots$

28. $\displaystyle \frac{2}{5} + \frac{2\cdot 6}{5\cdot 8} + \frac{2\cdot 6\cdot 10}{5\cdot 8\cdot 11} + \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{5\cdot 8\cdot 11\cdot 14} + \cdots$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5\cdot 8\cdot 11\cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

---

31. Os termos de uma série são definidos de forma recursiva pelas equações

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3}a_n$$

Determine se $\Sigma\, a_n$ converge ou diverge.

32. Uma série $\Sigma\, a_n$ é definida pelas equações

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}}a_n$$

Determine se $\Sigma\, a_n$ converge ou diverge.

33–34 Seja $\{b_n\}$ uma sequência de números positivos que converge para $\frac{1}{2}$. Determine se a série dada é absolutamente convergente.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^n \cos n\pi}{n}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}$

---

35. Para quais das seguintes séries o Teste da Razão não é conclusivo (isto é, ele não dá uma resposta definida)?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

36. Para quais inteiros positivos k a série é convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

37. (a) Mostre que $\Sigma_{n=0}^{\infty}\, x^n/n!$ converge para todo x.

(b) Deduza que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para todo x.

38. Seja $\Sigma\, a_n$ uma série com termos positivos e seja $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponha que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, assim, $\Sigma\, a_n$ converge pelo Teste da Razão. Como habitualmente, faça R_n ser o resto depois de n termos, isto é,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

(a) Se $\{r_n\}$ for uma sequência decrescente e $r_{n+1} < 1$, mostre, pela soma de uma série geométrica, que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1-r_{n+1}}$$

(b) Se $\{r_n\}$ for uma sequência crescente, mostre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1-L}$$

39. (a) Encontre a soma parcial s_5 da série $\Sigma_{n=1}^{\infty}\, 1/(n2^n)$. Use o Exercício 38 para estimar o erro ao usar s_5 como uma aproximação da soma da série.

(b) Encontre um valor de n tal que s_n represente a soma com precisão de 0,00005. Use este valor de n para a soma aproximada da série.

40. Utilize a soma dos primeiros dez termos para aproximar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Use o Exercício 38 para estimar o erro.

41. Prove o teste de raiz. [*Dica para parte* (*i*): Tome qualquer número r tal que $L < r < 1$ e use o fato de que existe um inteiro N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ sempre que $n \geqslant N$.]

42. Por volta de 1910, o matemático indiano Srinivasa Ramanujan descobriu a fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9.801}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1.103+26.390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

William Gosper usou esta série em 1985 para calcular os primeiros 17 milhões de algarismos de π.

(a) Verifique que a série é convergente.

(b) Quantas casas decimais corretas de π você obtém se usar apenas o primeiro termo da série? E se usar dois termos?

43. Dada uma série qualquer $\Sigma\, a_n$, definimos uma série $\Sigma\, a_n^+$ cujos termos são todos termos positivos de $\Sigma\, a_n$ e uma série $\Sigma\, a_n^-$ cujos termos são todos termos negativos de $\Sigma\, a_n$. Para ser específico, seja

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

Observe que, se $a_n > 0$, então $a_n^+ = a_n$ e $a_n^- = 0$, ao passo que, se $a_n < 0$, então $a_n^- = a_n$ e $a_n^+ = 0$.

(a) Se $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, mostre que ambas as séries $\Sigma\, a_n^+$ e $\Sigma\, a_n^-$ são convergentes.

(b) Se $\Sigma\, a_n$ for condicionalmente convergente, mostre que ambas as séries $\Sigma\, a_n^+$ e $\Sigma\, a_n^-$ são divergentes.

44. Demonstre que se $\Sigma\, a_n$ for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ que tem uma soma r. [*Dicas*: Use a notação de Exercício 43. Tome apenas termos positivos suficientes a_n^+ de modo que a sua soma seja maior que r. Em seguida, adicione o menor número de termos negativos a_n^- de modo a que a soma seja menor que r. Continue assim e use o Teorema 11.2.6.]

45. Suponhamos que a série $\Sigma\, a_n$ seja condicionalmente convergente.
(a) Demonstre que a série $\Sigma\, n^2 a_n$ é convergente.
(b) A convergência condicional de $\Sigma\, a_n$ não é suficiente para determinar se $\Sigma\, na_n$ é convergente. Mostre isso dando um exemplo de uma série condicionalmente convergente tal que $\Sigma\, na_n$ converge e um exemplo em que $\Sigma\, na_n$ diverge.

11.7 Estratégia para Testes de Séries

Agora temos diversas maneiras de testar a convergência ou divergência de uma série; o problema é decidir qual teste usar em qual série. Nesse aspecto, testar séries é similar a integrar funções. Mais uma vez, não há regras certeiras e rápidas para determinar qual teste aplicar em cada série, mas você pode achar os conselhos a seguir proveitosos.

Não é uma boa estratégia aplicar uma lista de testes em uma ordem específica até que um deles finalmente funcione. Isso seria uma perda de tempo e esforço. Em vez disso, como na integração, a principal estratégia é classificar a série de acordo com sua *forma*.

1. Se a série for da forma $\Sigma\, 1/n^p$, ela é uma série p que sabemos ser convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

2. Se a série tiver a forma $\Sigma\, ar^{n-1}$ ou $\Sigma\, ar^n$, ela é uma série geométrica, que converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geqslant 1$. Algumas manipulações algébricas podem ser necessárias para deixar a série dessa forma.

3. Se a série tiver uma forma similar a uma série p ou a uma série geométrica, então um dos testes de comparação deve ser considerado. Em particular, se a_n for uma função racional ou uma função algébrica de n (envolvendo raízes de polinômios), a série deve ser comparada com uma série p. Observe que a maioria das séries nos Exercícios 11.4 tem essa forma. (O valor de p deve ser escolhido como na Seção 11.4, mantendo apenas as potências mais altas de n no numerador e denominador.) Os testes de comparação se aplicam apenas a séries com termos positivos, mas, se $\Sigma\, a_n$ tiver alguns termos negativos, então poderemos aplicar o Teste da Comparação em $\Sigma\, |a_n|$ e testar a convergência absoluta.

4. Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, o Teste para Divergência deve ser usado.

5. Se a série for da forma $\Sigma\, (-1)^{n-1} b_n$ ou $\Sigma\, (-1)^n b_n$, então o Teste da Série Alternada é uma possibilidade óbvia.

6. Séries que envolvem fatoriais ou outros produtos (incluindo uma constante elevada à n-ésima potência) são com frequência testadas convenientemente usando-se o Teste da Razão. Tenha em mente que $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ quando $n \to \infty$ para todas as séries p e, portanto, todas as funções racionais ou algébricas de n. Então, o Teste da Razão não deve ser usado para tais séries.

7. Se a_n for da forma $(b_n)^n$, o Teste da Raiz pode ser útil.

8. Se $a_n = f(n)$, onde $\int_1^\infty f(x)\, dx$ é facilmente calculada, então o Teste da Integral é eficaz (satisfeitas as hipóteses para este teste).

Nos próximos exemplos não faremos todos os cálculos, mas simplesmente indicaremos quais testes devem ser usados.

EXEMPLO 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

Como $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ quando $n \to \infty$, devemos usar o Teste para Divergência.

EXEMPLO 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$

Como a_n é uma função algébrica de n, comparamos a série dada com uma série p. A série de comparação para o Teste de Comparação de Limite é $\Sigma\, b_n$, onde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$

EXEMPLO 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Como a integral $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ é facilmente calculada, usamos o Teste da Integral. O Teste da Razão também funciona.

EXEMPLO 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4+1}$

Como a série é alternada, usamos o Teste da Série Alternada.

EXEMPLO 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Como a série envolve $k!$, usamos o Teste da Razão.

EXEMPLO 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

Como a série está intimamente relacionada à série geométrica $\Sigma\, 1/3^n$, usamos o Teste da Comparação.

11.7 Exercícios

1–38 Teste a série quanto a convergência ou divergência.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{(-5)^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n}\right)$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n}{1+2^n}$

15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}3^{k+1}}{k^k}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+2n^2+5}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(1/n^2)$

22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+\operatorname{sen} k}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(1/n)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}(1/n)$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$

30. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$

31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k+4^k}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n\cos^2 n}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

36. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$

11.8 Séries de Potências

Uma **série de potências** é uma série da forma

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas **coeficientes** da série. Para cada x fixado, a série $\boxed{1}$ é uma série de constantes que podemos testar quanto a convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros valores de x. A soma da série é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

cujo domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge. Observe que f se assemelha a um polinômio. A única diferença é que f tem infinitos termos.

Por exemplo, se tomarmos $c_n = 1$ para todo n, a série de potências se torna a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que converge quando $-1 < x < 1$ e diverge quando $|x| \geqslant 1$ (veja a Equação 11.2.5).

Em geral, a série da forma

$$\boxed{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

é chamada uma **série de potências em** $(x - a)$ ou uma **série de potências centrada em** $\boldsymbol{a}$ ou uma **série de potências em torno de** $\boldsymbol{a}$. Observe que, ao escrevermos o termo correspondente a $n = 0$ nas Equações 1 e 2, adotamos a convenção de que $(x - a)^0 = 1$, mesmo quando $x = a$. Observe também que, quando $x = a$, todos os termos são 0 para $n \geqslant 1$ e assim a série de potências $\boxed{2}$ sempre converge quando $x = a$.

Série trigonométrica
Uma série de potências é uma série em que cada termo é uma função de potência. Uma **série trigonométrica**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

é uma série cujos termos são funções trigonométricas.

EXEMPLO 1 Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ é convergente?

SOLUÇÃO Usamos o Teste da Razão. Se fizermos a_n, como habitualmente, denotar o n-ésimo termo da série, então $a_n = n!x^n$. Se $x \neq 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty$$

Observe que

$$(n+1)! = (n+1)n(n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= (n+1)n!$$

Pelo Teste da Razão, a série diverge quando $x \neq 0$. Então, a série dada converge apenas quando $x = 0$.

EXEMPLO 2 Para quais valores de x a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge?

SOLUÇÃO Seja $a_n = (x-3)^n/n$. Então,

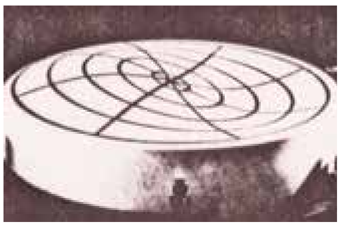
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right|$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} |x-3| \to |x-3| \qquad \text{quando } n \to \infty$$

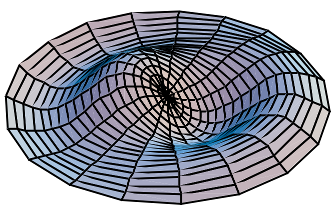
Pelo Teste da Razão, a série dada é absolutamente convergente e, portanto, convergente, quando $|x - 3| < 1$ e é divergente quando $|x - 3| > 1$. Agora

$$|x-3| < 1 \iff -1 < x - 3 < 1 \iff 2 < x < 4$$

de modo que a série converge quando $2 < x < 4$ e diverge quando $x < 2$ ou $x > 4$.

O Teste da Razão não fornece informação quando $|x - 3| = 1$; assim, devemos considerar $x = 2$ e $x = 4$ separadamente. Se colocarmos $x = 4$ na série, ela se tornará $\Sigma\, 1/n$, a série harmônica, que é divergente. Se $x = 2$, a série é $\Sigma\,(-1)^n/n$, que converge pelo Teste da Série Alternada. Então a série dada converge para $2 \leqslant x < 4$.


National Film Board of Canada



Observe quão bem o modelo gerado por computador (que envolve funções de Bessel e funções cosseno) se ajusta à fotografia de uma membrana de borracha vibrando.

Veremos que o principal uso de uma série de potências é que ela fornece uma maneira de representar algumas das mais importantes funções que aparecem na matemática, na física e na química. Em particular, a soma da série de potências no próximo exemplo é chamada **função de Bessel**, em homenagem ao astrônomo alemão Friedrich Bessel (1784-1846), e a função dada no Exercício 35 é outro exemplo de uma função de Bessel. De fato, essas funções surgiram primeiramente quando Bessel resolveu a equação de Kepler da descrição do movimento planetário. Desde aquela época, essas funções têm sido aplicadas em muitas situações físicas diferentes, incluindo a distribuição de temperatura em uma placa circular e a forma de uma membrana vibrante.

EXEMPLO 3 Encontre o domínio da função de Bessel de ordem 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

SOLUÇÃO Seja $a_n = (-1)^n x^{2n}/[2^{2n}(n!)^2]$. Então,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}$$

$$= \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1 \qquad \text{para todo } x$$

Assim, pelo Teste de Razão, a série dada converge para todos os valores de x. Em outras palavras, o domínio da função Bessel J_0 é $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Lembre-se de que a soma de uma série é igual ao limite da sequência das somas parciais. Assim, quando definimos a função de Bessel no Exemplo 3 como a soma de uma série, queremos dizer que, para todo número real x,

$$J_0(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \qquad \text{onde} \qquad s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}$$

As primeiras somas parciais são

$$s_0(x) = 1 \qquad s_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \qquad s_2(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

$$s_3(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2.304} \qquad s_4(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2.304} + \frac{x^8}{147.456}$$

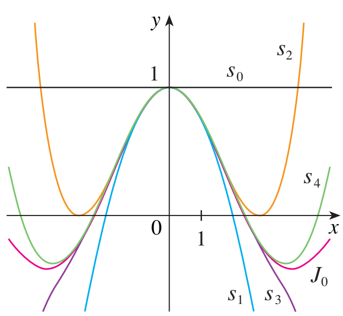


FIGURA 1
Somas parciais da função de Bessel J_0

A Figura 1 mostra os gráficos dessas somas parciais, que são polinômios. Todas são aproximações para a função J_0, mas observe que as aproximações se tornam melhores quando mais termos são incluídos. A Figura 2 mostra um gráfico mais completo da função de Bessel.

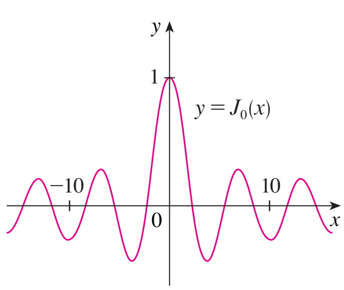


FIGURA 2

Para as séries de potências que vimos até agora, o conjunto de valores de x para os quais a série é convergente tem sempre sido um intervalo [um intervalo finito para a série geométrica e a série no Exemplo 2, o intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ no Exemplo 3 e um intervalo colapsado $[0, 0] = \{0\}$ no Exemplo 1]. O teorema a seguir, demonstrado no Apêndice F, diz que isso, em geral, é verdadeiro.

3 Teorema Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.
(ii) A série converge para todo x.
(iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

O número R no caso (iii) é chamado **raio de convergência** da série de potências. Por convenção, o raio de convergência é $R = 0$ no caso (i) e $R = \infty$ no caso (ii). O **intervalo de convergência** de uma série de potências é aquele que consiste em todos os valores de x para os quais a série converge. No caso (i) o intervalo consiste em apenas um único ponto a. No caso (ii) o intervalo é $(-\infty, \infty)$. No caso (iii) observe que a desigualdade $|x-a| < R$ pode ser reescrita como $a - R < x < a + R$. Quando x é uma *extremidade* do intervalo, isto é, $x = a \pm R$, qualquer coisa pode acontecer — a série pode convergir em uma ou ambas as extremidades ou divergir em ambas as extremidades. Então, no caso (iii) existem quatro possibilidades para o intervalo de convergência:

$$(a-R, a+R) \qquad (a-R, a+R] \qquad [a-R, a+R) \qquad [a-R, a+R]$$

A situação é ilustrada na Figura 3.

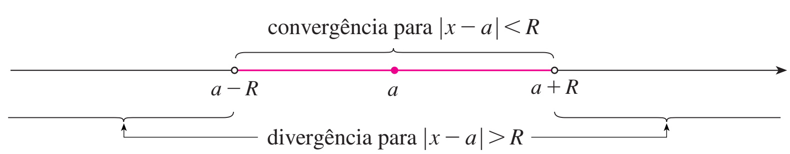


FIGURA 3

Resumimos aqui o raio e o intervalo de convergência para cada um dos exemplos já considerados nesta seção.

	Série	Raio de convergência	Intervalo de convergência
Série geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Exemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Exemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
Exemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$

Em geral, o Teste da Razão (ou algumas vezes o Teste da Raiz) deve ser usado para determinar o raio de convergência R. Os Testes da Razão e da Raiz sempre falham quando x é uma extremidade do intervalo de convergência; assim, as extremidades devem ser estudadas com outro teste.

EXEMPLO 4 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

SOLUÇÃO Seja $a_n = (-3)^n x^n / \sqrt{n+1}$. Então,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{1 + (1/n)}{1 + (2/n)}}\,|x| \to 3|x| \text{quando } n \to \infty$$

Pelo Teste da Razão, a série dada converge se $3|x| < 1$ e diverge se $3|x| > 1$. Então, ela converge se $|x| < \frac{1}{3}$ e diverge se $|x| > \frac{1}{3}$. Isso significa que o raio de convergência é $R = \frac{1}{3}$.

Sabemos que a série converge no intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, mas devemos agora testar a convergência nas extremidades desse intervalo. Se $x = -\frac{1}{3}$, a série torna-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

que diverge. (Use o Teste da Integral ou simplesmente observe que ela é uma série p com $p = \frac{1}{2} < 1$.) Se $x = \frac{1}{3}$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

que converge pelo Teste da Série Alternada. Portanto a série de potências dada converge quando $-\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3}$; assim, o intervalo de convergência é $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

EXEMPLO 5 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

SOLUÇÃO Se $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$, então

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Usando o Teste da Razão vemos que a série converge se $|x+2|/3 < 1$ e diverge se $|x+2|/3 > 1$. Assim ela converge se $|x+2| < 3$ e diverge se $|x+2| > 3$. Então, o raio de convergência é $R = 3$.

A desigualdade $|x+2| < 3$ pode ser escrita como $-5 < x < 1$, assim, testamos a série nas extremidades -5 e 1. Quando $x = -5$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

que diverge pelo Teste para Divergência [$(-1)^n n$ não converge para 0]. Quando $x = 1$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n$$

que também diverge pelo Teste para Divergência. Então, a série converge apenas quando $-5 < x < 1$, de modo que o intervalo de convergência é $(-5, 1)$.

11.8 Exercícios

1. O que é uma série de potências?

2. (a) O que é o raio de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?
(b) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?

3–28 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x+1)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n, \quad b > 0$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{\ln n} (x-a)^n, \quad b > 0$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$

26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

---

29. O fato de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ ser convergente implica que as séries a seguir são convergentes?
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$

30. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convirja quando $x = -4$ e divirja quando $x = 6$. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

31. Se k for um inteiro positivo, encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

32. Sejam p e q números reais com $p < q$. Encontre uma série de potências cujo intervalo de convergência seja
(a) (p, q) (b) $(p, q]$
(c) $[p, q)$ (d) $[p, q]$

33. É possível encontrar uma série de potências cujo intervalo de convergência seja $[0, \infty)$? Explique.

34. Trace na mesma tela as primeiras somas $s_n(x)$ da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, junto com a função-soma $f(x) = 1/(1-x)$, em uma tela comum. Em que intervalo essas somas parciais parecem estar convergindo para $f(x)$?

35. A função J_1 definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}$$

é denominada *função de Bessel de ordem* 1.
(a) Encontre seu domínio.
(b) Trace as primeiras somas parciais na mesma tela.
(c) Se seu SCA tiver funções de Bessel programadas, trace J_1 na mesma tela das somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais se aproximam de J_1.

36. A função A definida por

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

é chamada *função de Airy*, em homenagem ao matemático e astrônomo inglês sir George Airy (1801-1892).
(a) Encontre o domínio da função de Airy.
(b) Trace as primeiras somas parciais na mesma tela.
(c) Se seu SCA tiver funções de Airy programadas, trace A na mesma tela que as somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais aproximam A.

37. Uma função f é definida por

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

isto é, seus coeficientes são $c_{2n} = 1$ e $c_{2n+1} = 2$ para todo $n \geqslant 0$. Ache o intervalo de convergência da série e encontre uma fórmula explícita para $f(x)$.

38. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, onde $c_{n+4} = c_n$ para todo $n \geqslant 0$, encontre o intervalo de convergência da série e uma fórmula para $f(x)$.

39. Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c$, onde $c \neq 0$, então o raio de convergência da série de potências $\sum c_n x^n$ é $R = 1/c$.

40. Suponha que a série de potência $\sum c_n(x-a)^n$ satisfaça $c_n \neq 0$ para todo n. Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$ existir, então ele será igual ao o raio de convergência da série de potências.

41. Suponha que a série $\sum c_n x^n$ tenha raio de convergência 2 e que a série $\sum d_n x^n$ tenha raio de convergência 3. O que você pode dizer sobre o raio de convergência da série $\sum (c_n + d_n)x^n$?

42. Suponha que o raio de convergência da série de potências $\sum c_n x^n$ seja R. Qual é o raio da série de potências $\sum c_n x^{2n}$?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

11.9 Representações de Funções como Séries de Potências

Nesta seção aprenderemos como representar certos tipos de funções como somas de séries de potências pela manipulação de séries geométricas ou pela derivação ou integração de tais séries. Você pode estar se perguntando por que queremos expressar uma função conhecida como uma soma infinita de termos. Veremos mais tarde que essa estratégia é útil para integrar funções que não têm antiderivadas elementares, para resolver as equações diferenciais e para aproximar funções por polinômios. (Cientistas fazem isso para simplificar expressões que eles utilizam; cientistas que trabalham com computadores fazem isso para representar as funções em calculadoras e computadores.)

Começaremos com uma equação que vimos antes:

1
$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1}$$

Uma ilustração geométrica da Equação 1 é mostrada na Figura 1. Como a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais, temos

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

onde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

é a n-ésima soma parcial. Observe que à medida que n aumenta, $s_n(x)$ se torna uma aproximação cada vez melhor de $f(x)$ para $-1 < x < 1$.

Encontramos essa equação primeiro no Exemplo 6 da Seção 11.2, onde a obtivemos observando que ela é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Mas aqui nosso ponto de vista é diferente. Agora nos referiremos à Equação 1 como uma expressão da função $f(x) = 1/(1 - x)$ como uma soma de uma série de potências.

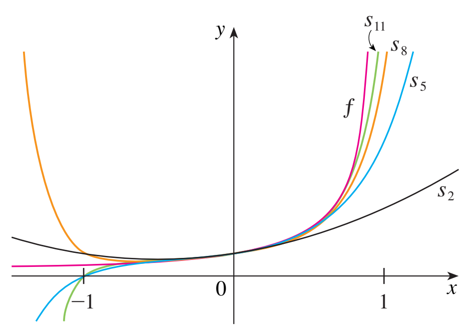


FIGURA 1
$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e algumas somas parciais

EXEMPLO 1 Expresse $1/(1 + x^2)$ como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

SOLUÇÃO Trocando x por $-x^2$ na Equação 1, temos

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Como essa é uma série geométrica, ela converge quando $|-x^2| < 1$, isto é, $x^2 < 1$, ou $|x| < 1$. Portanto, o intervalo de convergência é $(-1, 1)$. (É claro que poderíamos ter determinado o raio de convergência aplicando o Teste da Razão, mas todo aquele trabalho é desnecessário aqui.)

EXEMPLO 2 Encontre uma representação em série de potências para $1/(x + 2)$.

SOLUÇÃO Para colocarmos essa função na forma do lado esquerdo da Equação 1, primeiro fatoramos um 2 do denominador:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

A série converge quando $|-x/2| < 1$, isto é, $|x| < 2$. Assim, o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

EXEMPLO 3 Encontre uma representação em série de potências para $x^3/(x + 2)$.

SOLUÇÃO Como essa função é apenas x^3 vezes a função no Exemplo 2, tudo o que temos de fazer é multiplicar essa série por x^3:

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+3}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 - \tfrac{1}{16}x^6 + \cdots$$

É válido mover x^3 para dentro do sinal de somatória, porque ele não depende de n. [Use o Teorema 11.2.8(i) com $c = x^3$.]

Outra maneira de escrever essa série é a seguinte:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} x^n$$

Como no Exemplo 2, o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

Derivação e Integração de Séries de Potências

A soma de uma série de potências é uma função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Gostaríamos de poder derivar e integrar tais funções, e o teorema a seguir (que não demonstraremos) diz que podemos fazer isso por derivação ou integração de cada termo individual na série, como faríamos para um polinômio. Isso é chamado **derivação e integração termo a termo**.

2 Teorema Se a série de potências $\sum c_n(x - a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a - R, a + R)$ e

(i) $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

(ii) $$\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Os raios de convergência das séries de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R.

Na parte (ii), $\int c_0\,dx = c_0x + C_1$ é escrito como $c_0(x - a) + C$, onde $C = C_1 + ac_0$; assim, todos os termos da série têm a mesma forma.

OBSERVAÇÃO 1 As Equações (i) e (ii) no Teorema 2 podem ser reescritas na forma

(iii) $$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$$

(iv) $$\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n\,dx$$

Sabemos que, para somas finitas, a derivada de uma soma é a soma das derivadas, e que a integral de uma soma é a soma das integrais. As Equações (iii) e (iv) afirmam que o mesmo é verdadeiro para somas infinitas, desde que estejamos lidando com *séries de potências*. (Para outros tipos de séries de funções a situação não é tão simples; veja o Exercício 38.)

OBSERVAÇÃO 2 Embora o Teorema 2 diga que o raio de convergência permanece o mesmo quando uma série de potências é derivada ou integrada, isso não significa que o *intervalo* de convergência permaneça o mesmo. Pode acontecer de a série original convergir em uma extremidade enquanto a série derivada diverge nesse ponto (veja o Exercício 39).

OBSERVAÇÃO 3 A ideia de derivação de uma série de potências termo a termo é a base para um método poderoso para resolver as equações diferenciais. Discutiremos esse método no Capítulo 17.

EXEMPLO 4 No Exemplo 3 da Seção 11.8, vimos que a função de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

é definida para todo x. Então, pelo Teorema 2, J_0 é diferenciável para todo x, e sua derivada é encontrada pela derivação termo a termo, como a seguir:

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$$

EXEMPLO 5 Expresse $1/(1-x)^2$ como uma série de potências pela derivação da Equação 1. Qual é o raio de convergência?

SOLUÇÃO Derivando cada lado da equação

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

obtemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Podemos trocar n por $n+1$ e escrever a resposta como

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

De acordo com o Teorema 2, o raio de convergência da série derivada é o mesmo que o raio de convergência da série original, a saber, $R = 1$.

EXEMPLO 6 Encontre uma representação em série de potências para $\ln(1+x)$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Observamos que, a derivada desta função é $1/(1+x)$. Da Equação 1 temos

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad |x| < 1$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\ln\ (1+x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx = \int (1 - x + x^2 + \cdots)\,dx$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1$$

Para determinarmos o valor de C colocamos $x = 0$ nessa equação e obtemos $\ln(1+0) = C$.

Assim, $C = 0$ e

$$\ln(1 - x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

O raio de convergência é o mesmo que o da série original: $R = 1$.

EXEMPLO 7 Encontre uma representação em série de potências para $f(x) = \text{tg}^{-1}x$.

SOLUÇÃO Observamos que $f'(x) = 1/(1 + x^2)$ e encontramos a série pedida pela integração da série de potências para $1/(1 + x^2)$ encontrada no Exemplo 1.

$$\text{tg}^{-1}x = \int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Para encontrarmos C, colocamos $x = 0$ e obtemos $C = \text{tg}^{-1}\,0 = 0$. Portanto

$$\text{tg}^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}$$

Como o raio de convergência da série para $1/(1 + x^2)$ é 1, o raio de convergência dessa série para $\text{tg}^{-1}x$ é também 1.

A série de potência para $\text{tg}^{-1}x$ obtida no Exemplo 7 é chamada *série de Gregory* devido ao matemático escocês James Gregory (1638-1675), que antecipou algumas das descobertas de Newton. Mostramos que a série de Gregory é válida quando $-1 < x < 1$, mas verifica-se (embora não seja fácil de provar) que também é válida quando $x = \pm 1$. Observe que quando $x = 1$ a série se torna

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Esse belo resultado é conhecido como a fórmula de Leibniz para π.

EXEMPLO 8

(a) Calcule $\int [1/(1 + x^7)]\,dx$ como uma série de potências.

(b) Use a parte (a) para aproximar $\int_0^{0,5} [1/(1 + x^7)]\,dx$ com precisão de 10^{-7}.

SOLUÇÃO

(a) A primeira etapa é expressar o integrando, $1/(1 + x^7)$, como a soma de uma série de potências.

Como no Exemplo 1, começamos com a Equação 1 e trocamos x por $-x^7$:

$$\frac{1}{1 + x^7} = \frac{1}{1 - (-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Este exemplo ilustra uma maneira na qual as representações em séries de potência são úteis. Integrar $1/(1 + x^7)$ manualmente é incrivelmente difícil. Sistemas de computação algébrica devolvem formas diferentes da resposta, mas elas são todas extremamente complicadas. (Se você tem um SCA, tente você mesmo.) Na realidade é muito mais fácil lidar com a resposta em série infinita obtida no Exemplo 8(a) do que com a resposta finita dada por um SCA.

Agora integramos termo a termo:

$$\int \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n + 1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Essa série converge para $|-x^7| < 1$, isto é, para $|x| < 1$.

(b) Ao aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo, não importa qual antiderivada utilizamos; assim vamos usar a antiderivada da parte (a) com $C = 0$:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n + 1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Essa série infinita é o valor exato da integral definida, mas, como é uma série alternada, podemos aproximar a soma usando o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas. Se pararmos de somar depois do termo com $n = 3$, o erro é menor que o termo com $n = 4$:

$$\frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6{,}4 \times 10^{-11}$$

Logo, temos

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1 + x^7}\, dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0{,}49951374$$

11.9 Exercícios

1. Se o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ for 10, qual será o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$? Por quê?

2. Suponha que você saiba que a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < 2$. O que você pode dizer sobre a série a seguir? Por quê?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3–10 Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$

4. $f(x) = \dfrac{3}{1 - x^4}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{3 - x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x + 10}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{9 + x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + 1}$

9. $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3 - x^3}$

11–12 Expresse a função como a soma de uma série de potências usando primeiro frações parciais. Encontre o intervalo de convergência.

11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - x - 2}$

12. $f(x) = \dfrac{x + 2}{2x^2 - x - 1}$

13. (a) Use derivação para encontrar a representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x)^2}$$

Qual é o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x)^3}$$

(c) Use item (b) para achar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1 + x)^3}$$

14. (a) Use a Equação 1 para determinar uma representação em série de potências para $f(x) = \ln(1 + x)$. Qual é o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para $f(x) = x \ln(1 - x)$.

(c) Ao colocar $x = \frac{1}{2}$ no seu resultado da parte (a), expresse ln 2 como a soma de uma série infinita.

15–20 Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o raio de convergência.

15. $f(x) = \ln(5 - x)$

16. $f(x) = x^2 \operatorname{tg}^{-1}(x^3)$

17. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x - 2)^2}$

18. $f(x) = \left(\dfrac{x}{2 - x}\right)^3$

19. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x - 2)^2}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{(1 - x)^3}$

21–24 Encontre uma representação em série de potências para f, trace f e várias somas parciais $s_n(x)$ na mesma tela. O que acontece quando n cresce?

21. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 16}$

22. $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

23. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

24. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(2x)$

25–28 Calcule a integral indefinida como uma série de potências. Qual é o raio de convergência?

25. $\displaystyle\int \frac{t}{1 - t^8}\, dt$

26. $\displaystyle\int \frac{t}{1 + t^3}\, dt$

27. $\displaystyle\int x^2 \ln(1 + x)\, dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x}\, dx$

29–32 Use uma série de potências para aproximar a integral definida com precisão de seis casas decimais.

29. $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{1}{1 + x^5}\, dx$

30. $\displaystyle\int_0^{0,4} \ln(1 + x^4)\, dx$

31. $\displaystyle\int_0^{0,1} x \operatorname{arctg}(3x)\, dx$

32. $\displaystyle\int_0^{0,3} \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx$

33. Use o resultado do Exemplo 7 para calcular arctg 0,2 com precisão de cinco casas decimais.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

34. Demonstre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

35. (a) Mostre que J_0 (a função de Bessel de ordem 0 dada no Exemplo 4) satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

(b) Calcule $\int_0^1 J_0(x)\,dx$ com precisão de três casas decimais.

36. A função de Bessel de ordem 1 é definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

(a) Mostre que J_1 satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_1''(x) + xJ_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0$$

(b) Mostre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

37. (a) Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Mostre que $f(x) = e^x$.

38. Seja $f_n(x) = (\text{sen}\, nx)/n^2$. Mostre que a série $\Sigma f_n(x)$ converge para todos os valores de x, mas que a série de derivadas $\Sigma f_n'(x)$ diverge quando $x = 2n\pi$, n um inteiro. Para quais valores de x a série $\Sigma f_n''(x)$ converge?

39. Considere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Encontre os intervalos de convergência para f, f' e f''.

40. (a) Começando com a série geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad |x| < 1$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, \quad |x| < 1$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

41. Use a série de potências para $\text{tg}^{-1}x$ para demonstrar a seguinte expressão para π como a soma de uma série infinita:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

42. (a) Completando o quadrado, mostre que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Usando a fatoração de $x^3 + 1$ como uma soma de cubos, reescreva a integral no item (a). Depois expresse $1/(x^3 + 1)$ como a soma de uma série de potências e use-a para demonstrar a seguinte fórmula para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

11.10 Séries de Taylor e Maclaurin

Na seção anterior pudemos encontrar representações para uma certa classe restrita de funções. Aqui investigaremos problemas mais gerais: Quais as funções que têm representações de séries de potências? Como podemos achar tais representações?

Começaremos supondo que f seja qualquer função que possa ser representada por uma série de potências:

$$\boxed{1} \quad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \quad |x - a| < R$$

Vamos tentar determinar quais coeficientes c_n devem aparecer em termos de f. Para começar, observe que, se colocarmos $x = a$ na Equação 1, então todos os termos após o primeiro são 0 e obtermos

$$f(a) = c_0$$

Pelo Teorema 11.9.2, podemos derivar a série na Equação 1 termo a termo:

$$\boxed{2} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 2 fornece

$$f'(a) = c_1$$

Agora derivamos ambos os lados da Equação 2 e obtemos

$$\boxed{3} \quad f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Novamente colocamos $x = a$ na Equação 3. O resultado é

$$f''(a) = 2c_2$$

Vamos aplicar o procedimento mais uma vez. A derivação da série na Equação 3 fornece

$$\boxed{4} \quad f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 4 fornece

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Agora você pode ver o padrão. Se continuarmos a derivar e substituir $x = a$, obteremos

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Isolando o n-ésimo coeficiente c_n nessa equação, obteremos

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Essa fórmula permanecerá válida mesmo para $n = 0$ se adotarmos as convenções de que $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$. Assim, demonstramos o teorema a seguir.

$\boxed{5}$ **Teorema** Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Substituindo essa fórmula para c_n de volta na série, vemos que, se f tiver uma expansão em série de potências em a, então ela deve ser da seguinte forma:

$$\boxed{6} \quad \begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

A série na Equação 6 é chamada **série de Taylor da função *f* em *a*** (ou **em torno de *a*** ou **centrado em *a***). Para o caso especial $a = 0$, a série de Taylor torna-se

$$\boxed{7} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Esse caso surge com frequência e lhe foi dado o nome especial de **série de Maclaurin**.

Taylor e Maclaurin

A série de Taylor é assim chamada em homenagem ao matemático Inglês Brook Taylor (1685-1731) e da série de Maclaurin é assim denominada em homenagem ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746), apesar do fato de que a série de Maclaurin é realmente apenas um caso especial da série de Taylor. Mas a ideia de representar funções específicas como somas de séries de potências remonta a Newton, e a série geral de Taylor era conhecida pelo matemático escocês James Gregory, em 1668, e pelo matemático suíço John Bernoulli, na década de 1690. Taylor aparentemente ignorava a obra de Gregory e Bernoulli quando publicou suas descobertas sobre a série em 1715, em seu livro *Methodus incrementorum directa et inversa*. A série de Maclaurin é assim denominada devido a Colin Maclaurin porque ele a popularizou em seu livro de cálculo *Treatise of Fluxions* publicado em 1742.

OBSERVAÇÃO Mostramos que, *se* f puder ser representada como uma série de potências em torno de a, então f é igual à soma de sua série de Taylor. Mas existem funções que não são iguais à soma de suas séries de Taylor. Um exemplo de tal função é dado no Exercício 74.

EXEMPLO 1 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para todo n. Portanto, a série de Taylor para f em 0 (isto é, a série de Maclaurin) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para encontrarmos o raio de convergência fazemos $a_n = x^n/n!$. Então,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

de modo que, pelo Teste da Razão, a série converge para todo x e o raio de convergência é $R = \infty$.

A conclusão que podemos tirar do Teorema 5 e do Exemplo 1 é que *se* e^x tiver uma expansão em série de potências em 0, então

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Assim, como determinar se e^x *tem* uma representação em série de potências?

Vamos investigar a questão mais geral: sob quais circunstâncias uma função é igual à soma de sua série de Taylor? Em outras palavras, se f tiver derivadas de todas as ordens, quando é verdade que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Como com qualquer série convergente, isso significa que $f(x)$ é o limite da sequência das somas parciais. No caso da série de Taylor, as somas parciais são

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Observe que T_n é um polinômio de grau n chamado **polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a**. Por exemplo, para a função exponencial $f(x) = e^x$, o resultado do Exemplo 1 mostra que os polinômios de Taylor em 0 (ou polinômios de Maclaurin) com $n = 1$, 2 e 3 são

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

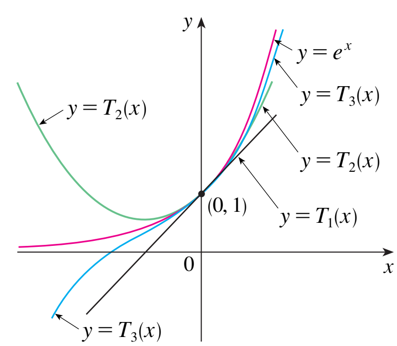


FIGURA 1

Quando n aumenta, $T_n(x)$ parece aproximar e^x na Figura 1. Isso sugere que e^x seja igual à soma de sua série de Taylor.

Os gráficos da função exponencial e desses três polinômios de Taylor estão desenhados na Figura 1.

Em geral, $f(x)$ é a soma da sua série de Taylor se

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Se considerarmos

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad \text{de modo que} \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

então, $R_n(x)$ é denominado **resto** da série de Taylor. Se pudermos de alguma maneira mostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, teremos mostrado que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

Assim, demonstramos o seguinte teorema:

8 Teorema Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a e

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - a| < R$.

Ao tentarmos mostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para uma função específica f, geralmente usamos o teorema a seguir.

9 Desigualdade de Taylor Se $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

Fórmulas para o Termo Restante de Taylor

Como alternativas para a desigualdade de Taylor, temos as seguintes fórmulas para resto. Se $f^{(n+1)}$ for contínua sobre um intervalo I e $x \in I$, então

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Essa é chamada forma integral do resto. Outra fórmula, chamada forma de Lagrange para o resto, afirma que existe um número z entre x e a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

Essa versão é uma extensão do Teorema do Valor Médio (que é o caso $n = 0$).

Para vermos por que isso é verdadeiro para $n = 1$, assumimos que $|f''(x)| \leqslant M$. Em particular, temos $f''(x) \leqslant M$, assim, para $a \leqslant x \leqslant a + d$ temos

$$\int_a^x f''(t)\,dt \leqslant \int_a^x M\,dt$$

Uma antiderivada de f'' é f', dessa forma, pela parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$f'(x) - f'(a) \leqslant M(x - a) \qquad \text{ou} \qquad f'(x) \leqslant f'(a) + M(x - a)$$

Logo,

$$\int_a^x f'(t)\,dt \leqslant \int_a^x [f'(a) + M(t - a)]\,dt$$

$$f(x) - f(a) \leqslant f'(a)(x - a) + M\frac{(x - a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \leqslant \frac{M}{2}(x - a)^2$$

Mas $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$. Portanto

$$R_1(x) \leqslant \frac{M}{2}(x - a)^2$$

Um argumento similar, usando $f''(x) \geqslant -M$, mostra que

$$R_1(x) \geqslant -\frac{M}{2}(x - a)^2$$

Então

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2}|x - a|^2$$

Embora tenhamos suposto que $x > a$, cálculos similares mostram que essa desigualdade é também verdadeira para $x < a$.

Isso demonstra a Desigualdade de Taylor para o caso onde $n = 1$. O resultado para um n qualquer é demonstrado de maneira similar pela integração $n + 1$ vezes. (Veja o Exercício 73 para o caso $n = 2$.)

OBSERVAÇÃO Na Seção 11.11 exploraremos o uso da Desigualdade de Taylor para aproximar funções. Nosso uso imediato é aplicá-la em conjunto com o Teorema 8.

Ao aplicar os Teoremas 8 e 9, muitas vezes é útil usar o fato a seguir.

10 $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

Isso é verdade porque sabemos do Exemplo 1 que a série $\Sigma\, x^n/n!$ converge para todo x, e seu n-ésimo termo tende a 0.

EXEMPLO 2 Demonstre que e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin.

SOLUÇÃO Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n. Se d é qualquer número positivo e $|x| \leqslant d$, então $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leqslant e^d$. Assim, a Desigualdade de Taylor, com $a = 0$ e $M = e^d$, diz que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| \leqslant d$$

Observe que a mesma constante $M = e^d$ serve para cada valor de n. Mas, pela Equação 10, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Decorre do Teorema do Confronto que $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos os valores de x. Pelo Teorema 8, e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin, isto é

11 $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para todo } x$$

Em 1748 Leonhard Euler usou a Equação 12 para achar o valor correto de e até 23 algarismos. Em 2007 Shigeru Kondo, novamente usaram a série em $\boxed{12}$, e calcularam e com 12 bilhões de casas decimais.

Em particular, se colocarmos $x = 1$ na Equação 11, obteremos a seguinte expressão para o número e como a soma de uma série infinita:

12 $$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

EXEMPLO 3 Encontre a série de Taylor de $f(x) = e^x$ em $a = 2$.

SOLUÇÃO Temos $f^{(n)}(2) = e^2$ e, assim, colocando $a = 2$ na definição de uma série de Taylor $\boxed{6}$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

Novamente pode ser verificado, como no Exemplo 1, que o raio de convergência é $R = \infty$. Como no Exemplo 2, podemos verificar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, assim

13 $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \qquad \text{para todo } x$$

Temos duas expansões em série de potência para e^x, a série Maclaurin na Equação 11 e da série de Taylor na Equação 13. A primeira é melhor, se estivermos interessados em valores de x próximos de 0, e a segunda é melhor se x é próximo de 2.

EXEMPLO 4 Encontre a série de Maclaurin de sen x e demonstre que ela representa sen x para todo x.

SOLUÇÃO Arranjamos nossos cálculos em duas colunas como a seguir:

A Figura 2 mostra o gráfico de sen x com seus polinômios de Taylor (ou Maclaurin)

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Observe que, quando n aumenta, $T_n(x)$ torna-se uma aproximação melhor para sen x.

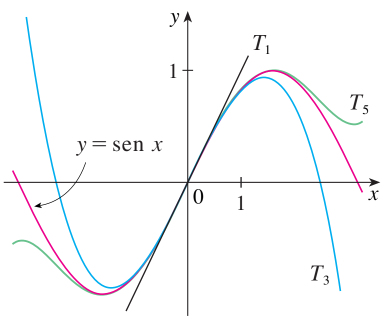


FIGURA 2

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen}\, x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\text{sen}\, x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \text{sen}\, x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Como as derivadas se repetem em um ciclo de quatro, podemos escrever a série de Maclaurin da seguinte forma:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Como $f^{(n+1)}(x)$ é $\pm$sen x ou $\pm\cos x$, sabemos que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant 1$ para todo x. Assim, podemos tomar $M = 1$ na Desigualdade de Taylor:

14 $$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pela Equação 10, o lado direito dessa desigualdade tende a 0 quando $n \to \infty$, dessa forma, $|R_n(x)| \to 0$ pelo Teorema do Confronto. Segue que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$, assim, sen x é igual à soma de sua série de Maclaurin pelo Teorema 8.

Destacamos o resultado do Exemplo 4 para referência futura.

15 $$\boxed{\begin{aligned} \text{sen}\, x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{para todo } x \end{aligned}}$$

EXEMPLO 5 Encontre a série de Maclaurin para $\cos x$.

SOLUÇÃO Poderíamos proceder diretamente como no Exemplo 4, mas é mais fácil derivar a série de Maclaurin de sen x dada pela Equação 15:

As séries de Maclaurin para e^x, sen x e $\cos x$ que encontramos nos Exemplos 2, 4, e 5 foram descobertas, utilizando diferentes métodos, por Newton. Essas equações são notáveis, porque dizem que saberemos tudo sobre cada uma destas funções, se conhecermos todos as suas derivadas no ponto 0.

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\text{sen}\, x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Como a série de Maclaurin de sen x converge para todo x, o Teorema 2 da Seção 11.9 nos diz que a série derivada para $\cos x$ também converge para todo x. Assim,

16 $$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{para todo } x \end{aligned}}$$

EXEMPLO 6 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = x\cos x$.

SOLUÇÃO Em vez de calcular derivadas e substituir na Equação 7, é mais fácil multiplicar a série para $\cos x$ (Equação 16) por x:

$$x \cos x = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

EXEMPLO 7 Represente $f(x) = \operatorname{sen} x$ como a soma de sua série de Taylor centrada em $\pi/3$.

SOLUÇÃO Arranjando nosso trabalho em colunas, temos

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

e esse padrão se repete indefinidamente. Portanto, a série de Taylor em $\pi/3$ é

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

Obtivemos duas representações em série diferentes para $\operatorname{sen} x$, isto é, a série de Maclaurin, no Exemplo 4, e a série de Taylor, no Exemplo 7. É melhor usarmos a série de Maclaurin para valores de x próximos de 0 e a série de Taylor para valores de x próximos de $\pi/3$. Observe que o terceiro polinômio de Taylor T_3 na Figura 3 é uma boa aproximação para $\operatorname{sen} x$ próximo de $\pi/3$, mas não tão boa para o próximo de 0. Compare-o com o terceiro polinômio de Maclaurin T_3 na Figura 2, na qual o oposto é verdadeiro.

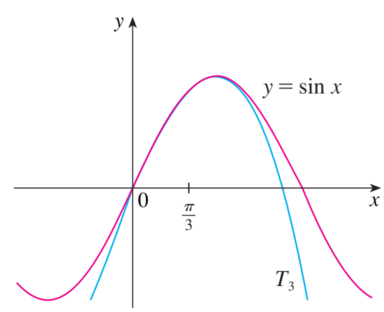


FIGURA 3

A demonstração de que essa série representa $\operatorname{sen} x$ para todo x é muito semelhante à feita no Exemplo 4. (Apenas troque x por $x - \pi/3$ em $\boxed{14}$.) Podemos escrever a série na notação sigma se separarmos os termos que contêm $\sqrt{3}$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{2(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$

A série de potências que obtivemos por métodos indiretos nos Exemplos 5 e 6 e na Seção 11.9 são realmente as séries de Taylor e de Maclaurin das funções dadas, porque o Teorema 5 afirma que, não importa como uma representação de série de potências $f(x) = \sum c_n(x - a)^n$ é obtida, é sempre verdade que $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Em outras palavras, os coeficientes são determinados unicamente.

EXEMPLO 8 Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$, onde k é um número real qualquer.

SOLUÇÃO Arranjando nosso trabalho em colunas, temos

$$f(x) = (1 + x)^k \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = k(1 + x)^{k-1} \qquad f'(0) = k$$

$$f''(x) = k(k - 1)(1 + x)^{k-2} \qquad f''(0) = k(k - 1)$$

$$f'''(x) = k(k - 1)(k - 2)(1 + x)^{k-3} \qquad f'''(0) = k(k - 1)(k - 2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = k(k - 1) \cdots (k - n + 1)(1 + x)^{k-n} \qquad f^{(n)}(0) = k(k - 1) \cdots (k - n + 1)$$

Portanto, a série de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k - 1) \cdots (k - n + 1)}{n!} x^n$$

Essa série é chamada **série binomial**. Observe que, se k é um inteiro não negativo, então os termos são, eventualmente, nulos, de modo que a série é finita. Para outros valores de k, nenhum dos termos é 0 e assim podemos tentar o Teste da Razão. Se o n-ésimo termo é a_n, então

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right|$$

$$= \frac{|k-n|}{n+1}|x| = \frac{\left|1-\dfrac{k}{n}\right|}{1+\dfrac{1}{n}}|x| \to |x| \quad \text{quando } n\to\infty$$

Logo, pelo Teste da Razão, a série binomial converge se $|x|<1$ e diverge se $|x|>1$.

A notação tradicional para os coeficientes na série binomial é

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

e esses números são chamados **coeficientes binomiais**.

O teorema a seguir afirma que $(1+x)^k$ é igual à soma de sua série de Maclaurin. É possível demonstrar isso mostrando que o resto $R_n(x)$ tende a 0, mas assim acaba sendo muito difícil. A demonstração delineada no Exercício 75 é muito mais simples.

17 A Série Binomial Se k for um número real qualquer e $|x|<1$, então

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Embora a série binomial sempre convirja quando $|x|<1$, a questão de ser ou não convergente nas extremidades, ± 1, depende do valor de k. Ocorre que a série converge em 1 se $-1<k\leqslant 0$ e em ambas as extremidades se $k\geqslant 0$. Observe que se k for um inteiro positivo e $n>k$, então a expressão para $\binom{k}{n}$ contém um fator $(k-k)$, de modo que $\binom{k}{n}=0$ para $n>k$. Isto significa que a série acaba e se reduz ao Teorema Binomial usual quando k for um inteiro positivo. (Veja a Página de Referência 1.)

EXEMPLO 9 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Escrevemos $f(x)$ em uma forma na qual podemos usar a série binomial:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\dfrac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Usando a série binomial com $k=-\frac{1}{2}$ e com x substituído por $-x/4$, temos

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{8}x + \frac{1 \cdot 3}{2!8^2}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!8^3}x^3 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!8^n}x^n + \cdots\right]$$

Sabemos de $\boxed{17}$ que essa série converge quando $|-x/4| < 1$, ou seja, $|x| < 4$, de modo que o raio de convergência é $R = 4$.

Listamos na tabela a seguir, para referência futura, algumas séries de Maclaurin importantes que deduzimos nesta seção e na precedente.

TABELA 1

Séries de Maclaurin importantes e seus raios de convergência

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$R = 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$	$R = \infty$
$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$	$R = \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$	$R = \infty$
$\operatorname{tg}^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$	$R = 1$
$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \dbinom{k}{n} x^n = 1 + kx + \dfrac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dfrac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$	$R = 1$

EXEMPLO 10 Calcule a soma da série $\dfrac{1}{1 \cdot 2} - \dfrac{1}{2 \cdot 2^2} + \dfrac{1}{3 \cdot 2^3} - \dfrac{1}{4 \cdot 2^4} + \ldots$

SOLUÇÃO Com a notação sigma podemos escrever a série dada como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n}$$

Em seguida, a partir da Tabela 1 podemos ver que esta série corresponde à entrada para $\ln(1 + x)$ com $x = \frac{1}{2}$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln(1 + \tfrac{1}{2}) = \ln \tfrac{3}{2}$$

TEC O *Module 11.10/11.11* permite que você veja como sucessivos polinômios de Taylor se aproximam da função original.

Uma razão pela qual as séries de Taylor são importantes é que elas nos permitem integrar funções com as quais não podíamos lidar anteriormente. De fato, na introdução deste capítulo mencionamos que Newton frequentemente integrava funções expressando-as inicialmente como uma série de potências e então integrando-as termo a termo. A função $f(x) = e^{-x^2}$ não pode ser integrada pelas técnicas discutidas até agora porque sua antiderivada não é uma função elementar (veja a Seção 7.5). No exemplo a seguir, usamos a ideia de Newton para integrar esta função.

EXEMPLO 11

(a) Calcule $\int e^{-x^2}\,dx$ como uma série infinita.
(b) Calcule $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ com precisão de 0,001.

SOLUÇÃO

(a) Primeiro encontramos a série de Maclaurin de $f(x) = e^{-x^2}$. Embora seja possível usar o método direto, vamos encontrá-la simplesmente trocando x por $-x^2$ na série para e^x dada na Tabela 1. Então, para todos os valores de x,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Agora integramos termo a termo:

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots$$

Essa série converge para tudo, porque a série original para e^{-x^2} converge para todo x.

(b) O Teorema Fundamental do Cálculo fornece

Podemos tomar $C = 0$ na antiderivada na parte (a).

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} \approx 0{,}7475$$

O Teorema da Estimativa da Série Alternada mostra que o erro envolvido nessa aproximação é menor que

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1.320} < 0{,}001$$

Outro uso da série de Taylor é ilustrado no próximo exemplo. O limite poderia ser encontrado com a Regra de l'Hôspital, mas, em vez disso, usamos uma série.

EXEMPLO 12 Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

SOLUÇÃO Usando a série de Maclaurin para e^x, temos

Alguns sistemas de computação algébrica calculam limites dessa maneira.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}$$

porque as séries de potências são funções contínuas.

Multiplicação e Divisão de Séries de Potências

Se as séries de potências forem somadas ou subtraídas, elas se comportarão como polinômios (o Teorema 11.2.8 mostra isso). De fato, como o próximo exemplo ilustra, elas também podem ser multiplicadas e divididas como polinômios. Encontramos apenas os primeiros termos, pois os cálculos para os termos posteriores tornam-se tediosos e os termos iniciais são os mais importantes.

EXEMPLO 13 Encontre os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin de (a) e^x sen x e (b) tg x.

SOLUÇÃO

(a) Usando a série de Maclaurin de e^x e sen x na Tabela 1, temos

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Multiplicamos essas expressões, juntando os termos semelhantes como nos polinômios:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
\times & x \qquad\qquad - \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
\hline
 & x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots \\
+ & \qquad\quad - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \cdots \\
\hline
 & x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots
\end{array}
$$

Logo, $$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots$$

(b) Usando as séries de Maclaurin da Tabela 1, obtemos

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Usamos um procedimento parecido com a divisão de polinômios:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
\hline
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots \\
 & x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots \\
\hline
 & \qquad \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\
 & \qquad \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots \\
\hline
 & \qquad\qquad \frac{2}{15}x^5 + \cdots
\end{array}
$$

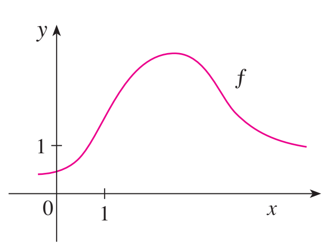
Logo, $$\operatorname{tg} x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots$$

Embora não tenhamos tentado justificar as manipulações formais usadas no Exemplo 13, elas são legítimas. Existe um teorema que afirma que, se $f(x) = \sum c_n x^n$ e $g(x) = \sum b_n x^n$ convergirem para $|x| < R$ e as séries forem multiplicadas como se fossem polinômios, então, a série resultante também convergirá para $|x| < R$ e representará $f(x)g(x)$. Para a divisão, necessitamos de $b_0 \neq 0$; a série resultante converge para $|x|$ suficientemente pequeno.

11.10 Exercícios

1. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para todo x, escreva uma fórmula para b_8.

2. É dado o gráfico de f.



(a) Explique por que a série

$$1{,}6 - 0{,}8(x-1) + 0{,}4(x-1)^2 - 0{,}1(x-1)^3 + \cdots$$

não é a série de Taylor de f centrada em 1.

(b) Explique por que a série

$$2{,}8 + 0{,}5(x-2) + 1{,}5(x-2)^2 - 0{,}1(x-2)^3 + \cdots$$

não é a série de Taylor de f centrada em 2.

3. Se $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre a série de Maclaurin de f e seu raio de convergência.

4. Encontre a série de Maclaurin de f centrada em 4 se

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

Qual é o raio de convergência da série de Taylor?

5–12 Encontre a série de Maclaurin de $f(x)$ usando a definição de uma série de Maclaurin. [Suponha que f tenha expansão em uma série de potências. Não mostre que $R_n(x) \to 0$.] Também encontre o raio de convergência associado.

5. $f(x) = (1-x)^{-2}$
6. $f(x) = \ln(1+x)$
7. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$
8. $f(x) = \cos 3x$
9. $f(x) = 2^x$
10. $f(x) = xe^x$
11. $f(x) = \operatorname{senh} x$
12. $f(x) = \cosh x$

13–20 Encontre a série de Taylor de $f(x)$ centrada no valor dado de a. [Suponha que f tenha expansão em uma série de potências. Não mostre que $R_n(x) \to 0$.] Também encontre o raio de convergência associado.

13. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad a = 1$

14. $f(x) = x - x^3, \quad a = -2$

15. $f(x) = \ln x, \quad a = 2$ **16.** $f(x) = 1/x, \quad a = -3$

17. $f(x) = e^{2x}, \quad a = 3$ **18.** $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/2$

19. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi$ **20.** $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 16$

21. Demonstre que a série obtida no Exercício 7 representa sen πx para todo x.

22. Demonstre que a série obtida no Exercício 18 representa sen x para todo x.

23. Demonstre que a série obtida no Exercício 11 representa senh x para todo x.

24. Demonstre que a série obtida no Exercício 12 representa cosh x para todo x.

25–28 Use a série binomial para expandir a função como uma série de potência. Diga o raio de convergência.

25. $\sqrt[4]{1 - x}$ **26.** $\sqrt[3]{8 + x}$

27. $\dfrac{1}{(2 + x)^3}$ **28.** $(1 - x)^{2/3}$

29–38 Use uma série de Maclaurin na Tabela 1 para obter a série de Maclaurin da função dada.

29. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ **30.** $f(x) = \cos(\pi x/2)$

31. $f(x) = e^x + e^{2x}$ **32.** $f(x) = e^x + 2e^{-x}$

33. $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ **34.** $f(x) = x^2 \ln(1 + x^3)$

35. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$ **36.** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2 + x}}$

37. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ $\left[\textit{Dica: } \text{Use } \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).\right]$

38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

39–42 Encontre a série de Maclaurin de f (por qualquer método) e seu raio de convergência. Trace f e seus primeiros polinômios de Taylor na mesma tela. O que você observa sobre a relação entre esses polinômios e f?

39. $f(x) = \cos(x^2)$ **40.** $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

41. $f(x) = xe^{-x}$ **42.** $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(x^3)$

43. Use a série de Maclaurin para cos x para calcular cos 5° com precisão de cinco casas decimais.

44. Use a série de Maclaurin para e^x para calcular $1/\sqrt[10]{e}$ com precisão de cinco casas decimais.

45. (a) Use a série binomial para expandir $1/\sqrt{1 - x^2}$.
(b) Use a parte (a) para encontrar a série de Maclaurin de sen^{-1}x.

46. (a) Expanda $1/\sqrt[4]{1 + x}$ como uma série de potências.
(b) Utilize a parte (a) para estimar $1/\sqrt[4]{1{,}1}$ com precisão de três casas decimais.

47–50 Calcule a integral indefinida como uma série infinita.

47. $\displaystyle\int x \cos(x^3)\, dx$ **48.** $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\cos x - 1}{x}\, dx$ **50.** $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x^2)\, dx$

51–54 Use séries para aproximar a integral definida com a precisão indicada.

51. $\displaystyle\int_0^{1/2} x^3 \operatorname{arctg} x\, dx$ (quatro casas decimais)

52. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x^4)\, dx$ (quatro casas decimais)

53. $\displaystyle\int_0^{0{,}4} \sqrt{1 + x^4}\, dx$ $\left(|\text{erro}| < 5 \times 10^{-6}\right)$

54. $\displaystyle\int_0^{0{,}5} x^2 e^{-x^2}\, dx$ $\left(|\text{erro}| < 0{,}001\right)$

55–57 Use séries para calcular o limite.

55. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1 + x)}{x^2}$ **56.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$

57. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

58. Use a série do Exemplo 13(b) para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$$

Encontramos esse limite no Exemplo 4 da Seção 4.4, no Volume I, usando a Regra de l'Hôspital três vezes. Qual método você prefere?

59–62 Use multiplicação ou divisão de séries de potências para encontrar os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin de cada função.

59. $y = e^{-x^2} \cos x$ **60.** $y = \sec x$

61. $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ **62.** $y = e^x \ln(1 - x)$

63–70 Encontre a soma da série.

63. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$ **64.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n\, 5^n}$ **66.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$

67. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n + 1)!}$

68. $1 - \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$

69. $3 + \dfrac{9}{2!} + \dfrac{27}{3!} + \dfrac{81}{4!} + \cdots$

70. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{3 \cdot 2^3} + \dfrac{1}{5 \cdot 2^5} + \dfrac{1}{7 \cdot 2^7} + \cdots$

71. Mostre que se p é um polinomio de n-ésimo grau, então

$$p(x + 1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(x)}{i!}$$

72. Se $f(x) = (1 + x^3)^{30}$, o que é $f^{(58)}(0)$?

73. Demonstre a Desigualdade de Taylor para $n = 2$, isto é, demonstre que, se $|f'''(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, então

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{6}|x - a|^3 \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

74. (a) Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é igual à sua série de Maclaurin.

(b) Trace a função na parte (a) e comente seu comportamento próximo da origem.

75. Use os seguintes passos para demonstrar $\boxed{17}$.

(a) Seja $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$. Derive esta série para mostrar que

$$g'(x) = \frac{kg(x)}{1 + x} \qquad -1 < x < 1$$

(b) Seja $h(x) = (1 + x)^{-k} g(x)$ e mostre que $h'(x) = 0$.

(c) Deduza que $g(x) = (1 + x)^k$.

76. No Exercício 53, na Seção 10.2, foi mostrado que o comprimento da elipse $x = a \text{ sen } \theta$, $y = b \cos \theta$, onde $a > b > 0$, é

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2 \theta} \, d\theta$$

onde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ é a excentricidade da elipse.

Expanda o integrando como uma série binomial e use o resultado do Exercício 50, na Seção 7.1, para expressar L como uma série de potências da excentricidade até os termos em e^6.

PROJETO DE LABORATÓRIO SCA UM LIMITE ELUSIVO

Este projeto envolve a função

$$f(x) = \frac{\text{sen}(\text{tg } x) - \text{tg}(\text{sen } x)}{\text{arcsen}(\text{arctg } x) - \text{arctg}(\text{arcsen } x)}$$

1. Use o seu sistema de álgebra computacional para avaliar $f(x)$ para $x = 1$, 0,1, 0,01, 0,001 e 0,0001. Parece que f tem um limite quando $x \to 0$?
2. Use o SCA para traçar f próximo de $x = 0$. Parece que f tem um limite quando $x \to 0$?
3. Tente calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$ pela Regra de l'Hôspital, usando seu SCA para encontrar as derivadas do numerador e do denominador. O que você descobriu? Quantas aplicações da Regra de l'Hôspital são necessárias?
4. Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$ usando seu SCA para encontrar quantos termos foram necessários da série de Taylor do numerador e do denominador. (Use o comando `taylor` no Maple ou `Series` no Mathematica.)
5. Use o comando de limite em seu SCA para encontrar o $\lim_{x \to 0} f(x)$ diretamente (A maioria dos sistemas de computação algébrica usa o método do Problema 4 para calcular limites.)
6. Tendo em vista as respostas aos Problemas 4 e 5, como você explica os resultados dos Problemas 1 e 2?

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

PROJETO ESCRITO COMO NEWTON DESCOBRIU A SÉRIE BINOMIAL

O Teorema Binomial, que dá a expansão de $(a + b)^k$, era conhecido pelos matemáticos chineses muitos séculos antes da época de Newton para o caso em que o expoente k é um inteiro positivo. Em 1665, quando tinha 22 anos, Newton foi o primeiro a descobrir a expansão em série infinita de $(a + b)^k$ quando k é um expoente fracionário (positivo ou negativo). Ele não publicou sua descoberta, mas enunciou-a e deu exemplos de como usá-la em uma carta (chamada hoje *epistola prior*) datada de 13 de junho de 1676, que ele enviou a Henry Oldenburg, secretário da Royal Society of London, para transmiti-la a Leibniz. Quando Leibniz respondeu, ele perguntou como Newton tinha descoberto a série binomial. Newton escreveu uma segunda carta, a *epistola posterior*, em 24 de outubro de 1676, na qual explicou detalhadamente como chegou à sua descoberta por uma rota muito indireta. Ele estava investigando as áreas sob as curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$ de 0 a x para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Essas são fáceis de calcular se n for par. Ao observar padrões e interpolação, Newton foi capaz de adivinhar as respostas para valores ímpares de n. Então, ele percebeu que poderia obter as mesmas respostas expressando $(1 - x^2)^{n/2}$ como uma série infinita.

Escreva um relatório sobre a descoberta de Newton da série binomial. Comece dando um enunciado da série binomial na notação de Newton. Explique por que a versão de Newton é equivalente ao Teorema 17. Então leia a *epistola posterior* de Newton e explique os padrões que Newton descobriu nas áreas sob as curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$. Mostre como ele pôde conjecturar as áreas conjecturar as áreas sob as curvas restantes e como verificou suas respostas. Finalmente, explique como essas descobertas levaram à série binomial. Os livros de Edwards [1] e Katz [3] contêm comentários sobre as cartas de Newton.

1. Edwards, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer-Verlag, 1979, p. 178–187.
2. Fauvel J.; Gray J. *The History of Mathematics*: *A Reader*. Londres: MacMillan Press, 1987.
3. Victor Katz. *A History of Mathematics*: *An Introduction*. Nova York: HarperCollins, 1993, p. 463–466.
4. Struik, D. J. *A Sourcebook in Mathematics*, 1200–1800. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969.

11.11 Aplicações dos Polinômios de Taylor

Nesta seção exploraremos dois tipos de aplicações de polinômios de Taylor. Primeiro, veremos como eles são usados para aproximar funções — os cientistas de computação gostam deles porque os polinômios são as mais simples das funções. Depois, investigaremos como físicos e engenheiros utilizam esses polinômios em campos como relatividade, óptica, radiações de corpos negros, dipolos elétricos, velocidade das ondas de água, e na construção de rodovias no deserto.

Aproximando Funções por Polinômios

Suponha que $f(x)$ seja igual à soma de sua série de Taylor em a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Na Seção 11.10 introduzimos a notação $T_n(x)$ para a n-ésima soma parcial dessa série, a que chamamos polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a. Assim,

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

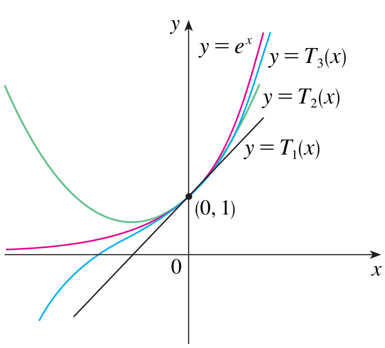


FIGURA 1

	$x = 0{,}2$	$x = 3{,}0$
$T_2(x)$	1,220000	8,500000
$T_4(x)$	1,221400	16,375000
$T_6(x)$	1,221403	19,412500
$T_8(x)$	1,221403	20,009152
$T_{10}(x)$	1,221403	20,079665
e^x	1,221403	20,085537

Como f é a soma de sua série de Taylor, sabemos que $T_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ e, assim, T_n pode ser usado como uma aproximação para f: $f(x) \approx T_n(x)$.

Observe que o polinômio de Taylor de primeiro grau

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

é o mesmo que a linearização de f até a que nós discutimos na Seção 3.10, no Volume I. Observe também que T_1 e seus derivados têm os mesmos valores em a que f e f' têm. Em geral, pode ser mostrado que as derivadas de T_n em a coincidem com as de f, incluindo até as derivadas de ordem n.

Para ilustrarmos essas ideias, vamos olhar novamente para os gráficos de $y = e^x$ e seus primeiros polinômios de Taylor, como mostrado na Figura 1. O gráfico de T_1 é a reta tangente a $y = e^x$ em (0, 1); essa reta tangente é a melhor aproximação linear para e^x próximo de (0, 1). O gráfico de T_2 é a parábola $y = 1 + x + x^2/2$, e o gráfico de T_3 é a curva cúbica $y = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$, que é uma aproximação melhor para a curva exponencial $y = e^x$ do que T_2. O próximo polinômio de Taylor T_4 seria uma aproximação ainda melhor, e assim por diante.

Os valores na tabela dão uma ilustração numérica da convergência dos polinômios de Taylor $T_n(x)$ para a função $y = e^x$. Vemos que, quando $x = 0{,}2$, a convergência é muito rápida, mas, quando $x = 3$, ela é um tanto mais lenta. De fato, quanto mais longe x está de 0, mais lentamente $T_n(x)$ converge para e^x.

Quando usamos um polinômio de Taylor T_n para aproximar uma função f, temos de fazer as seguintes pergunta: Quão boa é uma aproximação? Quão grande devemos deixar n para obter a precisão desejada? Para respondermos a tais questões, precisamos olhar os valores absolutos do resto:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$$

Existem três métodos possíveis para estimar o tamanho do erro:

1. Se uma ferramenta gráfica estiver disponível, podemos usá-la para traçar $|R_n(x)|$ e assim estimar o erro.
2. Se a série for alternada, podemos usar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas.
3. Em todos os casos podemos usar a Desigualdade de Taylor (Teorema 11.10.9), que diz que, se $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$, então

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

EXEMPLO 1

(a) Aproxime a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por um polinômio de Taylor de grau 2 em $a = 8$.
(b) Qual é a precisão dessa aproximação quando $7 \leqslant x \leqslant 9$?

SOLUÇÃO

(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{1/3} & f(8) &= 2 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{3}x^{-2/3} & f'(8) &= \tfrac{1}{12} \\ f''(x) &= -\tfrac{2}{9}x^{-5/3} & f''(8) &= -\tfrac{1}{144} \\ f'''(x) &= \tfrac{10}{27}x^{-8/3} \end{aligned}$$

Então, o polinômio Taylor de segundo grau é

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \\ &= 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2 \end{aligned}$$

A aproximação desejada é

$$\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2$$

(b) A série de Taylor não é alternada quando $x < 8$, assim, não podemos usar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas nesse exemplo. Mas podemos usar a Desigualdade de Taylor com $n = 2$ e $a = 8$

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{3!}|x-8|^3$$

onde $|f'''(x)| \leqslant M$. Como $x \geqslant 7$, temos $x^{8/3} \geqslant 7^{8/3}$ e, dessa forma,

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \leqslant \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{8/3}} < 0{,}0021$$

Portanto, podemos tomar $M = 0{,}0021$. Além disso, $7 \leqslant x \leqslant 9$, assim, $-1 \leqslant x - 8 \leqslant 1$ e $|x - 8| \leqslant 1$. Então, a Desigualdade de Taylor dá

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{0{,}0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0{,}0021}{6} < 0{,}0004$$

Logo, se $7 \leqslant x \leqslant 9$, a aproximação na parte (a) tem precisão de 0,0004.

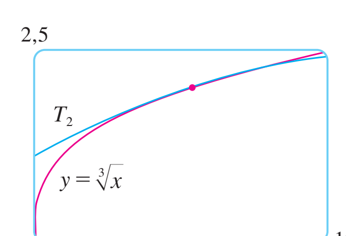


FIGURA 2

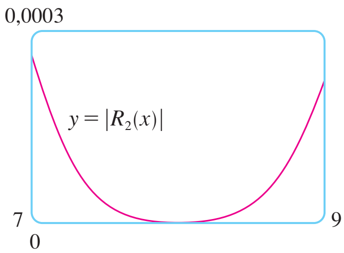


FIGURA 3

Vamos usar uma ferramenta gráfica para verificar os cálculos no Exemplo 1. A Figura 2 mostra que os gráficos de $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = T_2(x)$ estão muito próximos um do outro quando x está próximo de 8. A Figura 3 mostra o gráfico de $|R_2(x)|$ calculado a partir da expressão

$$|R_2(x)| = |\sqrt[3]{x} - T_2(x)|$$

Vemos a partir do gráfico que

$$|R_2(x)| < 0{,}0003$$

quando $7 \leqslant x \leqslant 9$. Então, a estimativa do erro a partir de métodos gráficos é ligeiramente melhor que a estimativa do erro a partir da Desigualdade de Taylor, nesse caso.

EXEMPLO 2

(a) Qual é o máximo erro possível ao usar a aproximação

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

quando $-0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}3$? Use essa aproximação para encontrar sen 12º com precisão de seis casas decimais.
(b) Para quais valores de x essa aproximação tem precisão de 0,00005?

SOLUÇÃO

(a) Observe que a série de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

é alternada para todos os valores de x diferentes de zero e os termos sucessivos são decrescentes, pois $|x| < 1$; dessa maneira, podemos usar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas. O erro na aproximação de sen x pelos três primeiros termos de sua série de Maclaurin é de no máximo

$$\left|\frac{x^7}{7!}\right| = \frac{|x|^7}{5.040}$$

Se $-0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}3$, então $|x| \leqslant 0{,}3$; assim, o erro é menor que

$$\frac{(0{,}3)^7}{5.040} \approx 4{,}3 \times 10^{-8}$$

Para encontrarmos sen 12º, primeiro convertemos para radianos:

$$\operatorname{sen} 12° = \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5 \frac{1}{5!} \approx 0{,}20791169$$

TEC O *Module 11.10/11.11* mostra graficamente os restos em aproximações polinomiais de Taylor.

Então, com precisão de seis casas decimais, sen $12° \approx 0{,}207912$.
(b) O erro será menor que 0,00005 se

$$\frac{|x|^7}{5.040} < 0{,}00005$$

Resolvendo essa inequação para x, temos

$$|x|^7 < 0{,}252 \qquad \text{ou} \qquad |x| < (0{,}252)^{1/7} \approx 0{,}821$$

Assim a aproximação dada tem precisão de 0,00005 quando $|x| < 0{,}82$.

O que acontecerá se usarmos a Desigualdade de Taylor para resolver o Exemplo 2? Como $f^{(7)}(x) = -\cos x$, obtemos $|f^{(7)}(x)| \leqslant 1$, logo

$$|R_6(x)| \leqslant \frac{1}{7!}|x|^7$$

Assim obtemos as mesmas estimativas que usando o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas.

E com métodos gráficos? A Figura 4 mostra o gráfico de

$$|R_6(x)| = \left|\text{sen } x - \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right)\right|$$

e vemos a partir dele que $|R_6(x)| < 4{,}3 \times 10^{-8}$ quando $|x| \leqslant 0{,}3$. Esta é a mesma estimativa que obtivemos no Exemplo 2. Para a parte (b) queremos $|R_6(x)| < 0{,}00005$, assim traçamos $y = |R_6(x)|$ e $y = 0{,}00005$ na Figura 5. Colocando o cursor no ponto de interseção à direita, descobrimos que a desigualdade é satisfeita quando $|x| < 0{,}82$. De novo, esta é a mesma estimativa que obtivemos na solução do Exemplo 2.

Se nos fosse pedido para aproximar sen 72º em vez de sen 12º no Exemplo 2, teria sido mais eficiente usar o polinômio de Taylor em $a = \pi/3$ (em vez de $a = 0$) porque ele é uma aproximação melhor para sen x para valores de x próximos de $\pi/3$. Observe que 72º está mais próximo de 60º (ou $\pi/3$ radianos) e as derivadas de sen x são fáceis de calcular em $\pi/3$.

A Figura 6 mostra os gráficos das aproximações por polinômios de Maclaurin

$$T_1(x) = x \qquad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

da curva seno. Você pode ver que, quando n aumenta, $T_n(x)$ é uma boa aproximação para sen x em um intervalo cada vez maior.

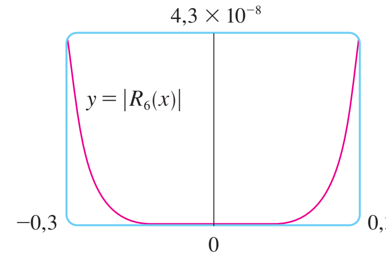


FIGURA 4

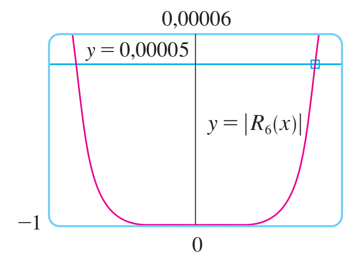


FIGURA 5

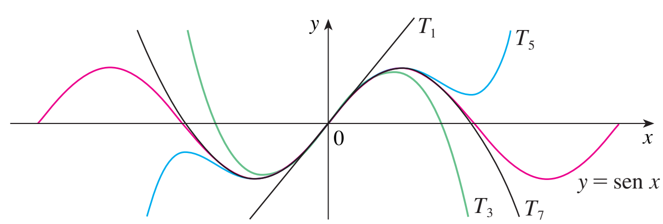


FIGURA 6

Um uso desse tipo de cálculo feito nos Exemplos 1 e 2 ocorre em calculadoras e computadores. Por exemplo, quando você pressiona as teclas sen ou e^x em sua calculadora, ou quando um programador de computador usa uma sub-rotina para uma função trigonométrica ou exponencial ou de Bessel, em muitas máquinas é calculada uma aproximação polinomial. O polinômio é com frequência um polinômio de Taylor que foi modificado de modo que o erro seja espalhado mais uniformemente por um intervalo.

Aplicações à Física

Os polinômios de Taylor são usados frequentemente na física. Para obter informações sobre uma equação, um físico muitas vezes simplifica uma função considerando apenas os primeiros dois ou três termos em sua série de Taylor. Em outras palavras, o físico usa um polinômio de Taylor como uma aproximação para a função. A Desigualdade de Taylor pode, então, ser usada para medir a precisão da aproximação. O exemplo a seguir mostra uma maneira na qual essa ideia é usada em relatividade especial.

EXEMPLO 3 Na teoria da relatividade especial de Einstein a massa de um objeto se movendo a uma velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. A energia cinética do objeto é a diferença entre sua energia total e sua energia em repouso:

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

(a) Mostre que, quando v for muito pequeno comparado a c, essa expressão para K coincide com a física clássica de Newton: $K = \frac{1}{2}m_0v^2$.
(b) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a diferença entre essas expressões para K quando $|v| \leqslant 100$ m/s.

SOLUÇÃO
(a) Usando as expressões dadas para K e m, obtemos

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2$$
$$= m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

Com $x = -v^2/c^2$, a série de Maclaurin para $(1 + x)^{-1/2}$ é calculada mais facilmente como uma série binomial com $k = -\frac{1}{2}$. (Observe que $|x| < 1$ porque $v < c$.) Por isso, temos

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \cdots$$

A curva superior na Figura 7 é o gráfico da expressão para a energia cinética K de um objeto com velocidade v na relatividade especial. A curva inferior mostra a função usada para K na física newtoniana clássica. Quando v é muito menor que a velocidade da luz, as curvas são praticamente idênticas.

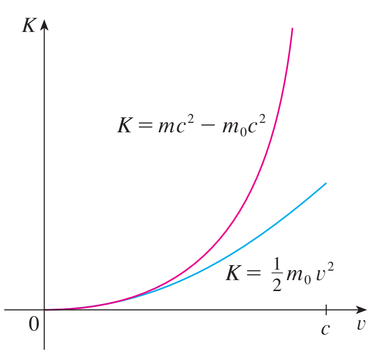


FIGURA 7

e

$$K = m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right) - 1\right]$$
$$= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right)$$

Se v for muito menor que c, todos os termos depois do primeiro são muito menores quando comparados com o primeiro termo. Se os omitirmos, obteremos

$$K \approx m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \tfrac{1}{2}m_0v^2$$

(b) Se $x = -v^2/c^2, f(x) = m_0c^2[(1 + x)^{-1/2} - 1]$, e M for um número tal que $|f''(x)| \leqslant M$, então podemos usar a Desigualdade de Taylor para escrever

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2!}x^2$$

Temos $f''(x) = \frac{3}{4}m_0c^2(1 + x)^{-5/2}$ e nos foi dado que $|v| \leqslant 100$ m/s, portanto

$$|f''(x)| = \frac{3m_0c^2}{4(1 - v^2/c^2)^{5/2}} \leqslant \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \quad (= M)$$

Logo, com $c = 3 \times 10^8$ m/s,

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \cdot \frac{100^4}{c^4} < (4{,}17 \times 10^{-10})m_0$$

Assim, quando $|v| \leqslant 100$ m/s, o módulo do erro ao usar a expressão newtoniana para a energia cinética é no máximo $(4{,}2 \times 10^{-10})m_0$.

Outra aplicação à física ocorre em óptica. A Figura 8 é adaptada a partir de *Optics*, 4. ed., de Eugene Hecht (São Francisco, 2002). Ela mostra uma onda de uma fonte pontual S encontrando uma interface esférica de raio R centrada em C. O raio SA é refratado em direção a P.

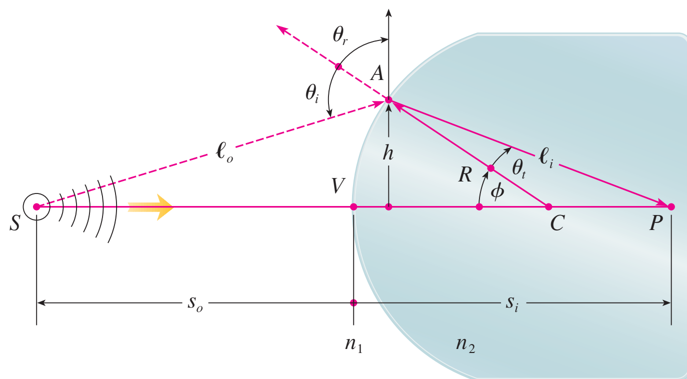


FIGURA 8

Refração em uma interface esférica

Hecht, Eugene, *Optics*, 4. ed., © 2002. Impresso e reproduzido eletronicamente com permissão da Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ

Usando o princípio de Fermat de que a luz viaja de modo a minimizar o tempo de percurso, Hecht deduz a equação

1 $$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o}\right)$$

onde n_1 e n_2 são índices de refração e ℓ_o, ℓ_i, s_o e s_i são as distâncias indicadas na Figura 8. Pela Lei dos Cossenos, aplicada aos triângulos ACS e ACP, temos

Aqui usamos a identidade

$$\cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$$

2 $$\ell_o = \sqrt{R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi}$$

$$\ell_i = \sqrt{R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi}$$

Como a Equação 1 é difícil para se trabalhar, Gauss, em 1841, a simplificou usando a aproximação linear $\cos\phi \approx 1$ para valores pequenos de ϕ. (Isso equivale a usar os polinômios de Taylor de grau 1.) Então, a Equação 1 se torna a equação mais simples a seguir [como lhe será solicitado demonstrar no Exercício 34(a)]:

3 $$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

A teoria óptica resultante é conhecida como *óptica gaussiana*, ou *óptica de primeira ordem*, e tornou-se a ferramenta teórica básica usada no projeto de lentes.

Uma teoria mais precisa é obtida aproximando $\cos\phi$ por seu polinômio de Taylor de grau 3 (que é o mesmo que o polinômio de Taylor de grau 2). Ela leva em consideração raios para os quais ϕ não é tão pequeno, isto é, raios que atingem a superfície a distâncias h maiores acima do eixo. No Exercício 34(b) lhe será pedido para que use essa aproximação para deduzir a equação mais precisa

4 $$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i}\right)^2\right]$$

A teoria óptica resultante é conhecida como *óptica de terceira ordem*.

Outras aplicações dos polinômios de Taylor à física são exploradas nos Exercícios 32, 33, 35, 36, 37 e 38, e no Projeto Aplicado *Radiação Proveniente das Estrelas*, neste capítulo.

11.11 Exercícios

1. (a) Encontre os polinômios de Taylor até o grau 6 de $f(x) = \cos x$ centrados em $a = 0$. Trace f e esses polinômios na mesma tela.
   (b) Calcule f e esses polinômios em $x = \pi/4$, $\pi/2$ e π.
   (c) Comente como os polinômios de Taylor convergem para $f(x)$.
2. (a) Encontre os polinômios de Taylor até o grau 3 de $f(x) = 1/x$ centrados em $a = 1$. Trace f e esses polinômios na mesma tela.
   (b) Calcule f e esses polinômios em $x = 0{,}9$ e $1{,}3$.
   (c) Comente como os polinômios de Taylor convergem para $f(x)$.

3–10 Encontre o polinômio de Taylor $T_3(x)$ da função f centradas no número a. Faça o gráfico de f e T_3 na mesma tela.

3. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$
4. $f(x) = x + e^{-x}, \quad a = 0$
5. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$
6. $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x, \quad a = 0$
7. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$
8. $f(x) = x \cos x, \quad a = 0$
9. $f(x) = xe^{-2x}, \quad a = 0$
10. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x, \quad a = 1$

SCA **11–12** Use um sistema de álgebra computacional para encontrar os polinômios de Taylor T_n centrados em a para $n = 2, 3, 4, 5$. Então trace os gráfico estes polinômios e f na mesma tela.

11. $f(x) = \operatorname{cotg} x, \quad a = \pi/4$
12. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}, \quad a = 0$

13–22

(a) Aproxime f por um polinômio de Taylor com grau n no número a.
(b) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a precisão da aproximação $f(x) \approx T_n(x)$ quando x estiver no intervalo dado.
(c) Verifique seu resultado na parte (b) traçando $|R_n(x)|$.

13. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad 4 \leqslant x \leqslant 4{,}2$
14. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1, \quad n = 2, \quad 0{,}9 \leqslant x \leqslant 1{,}1$
15. $f(x) = x^{2/3}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0{,}8 \leqslant x \leqslant 1{,}2$
16. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6, \quad n = 4, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$
17. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad -0{,}2 \leqslant x \leqslant 0{,}2$
18. $f(x) = \ln(1 + 2x), \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5$
19. $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 0{,}1$
20. $f(x) = x \ln x, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5$
21. $f(x) = x \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$
22. $f(x) = \operatorname{senh} 2x, \quad a = 0, \quad n = 5, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

---

23. Use a informação do Exercício 5 para estimar cos 80º com precisão de cinco casas decimais.
24. Use a informação do Exercício 16 para estimar sen 38º com precisão de cinco casas decimais.
25. Use a Desigualdade de Taylor para determinar o número de termos da série de Maclaurin de e^x que devem ser usados para estimar $e^{0,1}$ com precisão de 0,00001.
26. Quantos termos da série de Maclaurin de $\ln(1 + x)$ você precisa usar para estimar ln 1,4 com precisão de 0,001?

27–29 Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas ou a Desigualdade de Taylor para estimar a gama de valores de x para os quais a aproximação dada tem precisão dentro do erro estabelecido. Verifique sua resposta graficamente.

27. $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{6} \quad (|\text{erro}| < 0{,}01)$
28. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \quad (|\text{erro}| < 0{,}005)$
29. $\operatorname{arctg} x \approx x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \quad (|\text{erro}| < 0{,}05)$

---

30. Suponha que você saiba que
$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n + 1)}$$
e que a série de Taylor de f centrada em 4 converge para $f(x)$ para todo x no intervalo de convergência. Mostre que o polinômio de Taylor de grau 5 aproxima $f(5)$ com erro menor que 0,0002.
31. Um carro está se movendo com velocidade de 20 m/s e aceleração de 2 m/s^2 em um dado instante. Usando um polinômio de Taylor de grau 2, estime a distância que o carro percorre no próximo segundo. Seria razoável utilizar esse polinômio para estimar a distância percorrida durante o próximo minuto?
32. A resistividade ρ de um fio condutor é o recíproco da condutividade e é medida em unidades de ohm-metros (Ω-m). A resistividade de um dado metal depende da temperatura de acordo com a equação
$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$
onde t é a temperatura em ºC. Existem tabelas que listam os valores de α (o coeficiente de temperatura) e ρ_{20} (a resistividade a 20 ºC) para vários metais. Exceto a temperaturas muito baixas, a resistividade varia quase linearmente com a temperatura, e assim é comum aproximar a expressão para $\rho(t)$ por seu polinômio de Taylor de grau 1 ou 2 em $t = 20$.
   (a) Encontre expressões para estas aproximações linear e quadrática.
   (b) Para o cobre, a tabela fornece $\alpha = 0{,}0039$/°C e $\rho_{20} = 1{,}7 \times 10^{-8}$ Ω-m. Trace a resistividade do cobre e as aproximações linear e quadrática para $-250°\text{C} \leqslant t \leqslant 1000°\text{C}$.
   (c) Para quais valores de t a aproximação linear coincide com a expressão exponencial com precisão de 1%?
33. Um dipolo elétrico consiste em duas cargas elétricas de módulos iguais e sinais opostos. Se as cargas forem q e $-q$ e estiverem localizadas a uma distância d, então o campo elétrico E no ponto P na figura é
$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D + d)^2}$$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

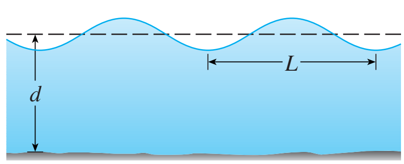
Expandindo essa expressão para E como uma série de potências de d/D, mostre que E é aproximadamente proporcional a $1/D^3$ quando P está muito distante do dipolo.

34. (a) Deduza a Equação 3 para a óptica gaussiana a partir da Equação 1 aproximando $\cos\phi$ na Equação 2 por seu polinômio de Taylor de grau 1.
(b) Mostre que se $\cos\phi$ for substituído por seu polinômio de Taylor de terceiro grau na Equação 2, então a Equação 1 se torna Equação 4 para terceira ordem óptica. [*Dica*: Use os dois primeiros termos da série binomial para ℓ_o^{-1} e ℓ_i^{-1}. Use, também, $\phi \approx \operatorname{sen}\phi$.]

35. Se uma onda de água com comprimento L se mover com velocidade v ao longo de um corpo de água com profundidade d, como na figura, então

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi}\operatorname{tgh}\frac{2\pi d}{L}$$

(a) Se a água for profunda, mostre que $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$.
(b) Se a água for rasa, use a série de Maclaurin para tgh para mostrar que $v \approx \sqrt{gd}$. (Então, em água rasa a velocidade de uma onda tende a ser independente do comprimento da onda.)
(c) Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas para mostrar que, se $L > 10d$, então a estimativa $v^2 \approx gd$ tem precisão de $0{,}014gL$.

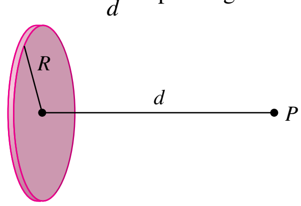


36. Um disco uniformemente carregado tem raio R e densidade de carga superficial σ como na figura. O potencial eléctrico V no ponto P a uma distância d ao longo do eixo perpendicular central do disco é

$$V = 2\pi k_e\sigma(\sqrt{d^2 + R^2} - d)$$

onde k_e é uma constante (chamada constante de Coulomb). Mostre que

$$V \approx \frac{\pi k_e R^2\sigma}{d} \quad \text{para } d \text{ grande}$$



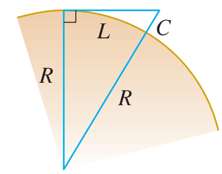
37. Se um topógrafo mede as diferenças nas elevações dos terrenos em um deserto, com a finalidade de construir uma rodovia, ele tem de fazer correções por causa da curvatura da Terra.
(a) Se R é o raio da Terra e L é o comprimento da rodovia, mostre que a correção a ser feita será

$$C = R\sec(L/R) - R$$

(b) Use um polinômio de Taylor para mostrar que

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}$$

(c) Compare as correções dadas pelas fórmulas em (a) e (b) para uma rodovia que tenha 100 km de percurso. (Tome o raio da Terra como 6.370 km.)



38. O período de um pêndulo com comprimento L que faz um ângulo máximo θ_0 com a vertical é

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2 x}}$$

onde $k = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ e g é a aceleração da gravidade. (No Exercício 42 da Seção 7.7, no Volume I, essa integral foi aproximada pela regra de Simpson.)
(a) Expanda o integrando como uma série binomial e use o resultado do Exercício 50 da Seção 7.1, no Volume I, para mostrar que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}k^6 + \cdots\right]$$

Se θ_0 não for muito grande, a aproximação $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$, obtida ao se usar o primeiro termo da série, é frequentemente utilizada. Uma aproximação melhor seria obtida pelos dois primeiros termos:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right)$$

(b) Observe que todos os termos da série, com exceção do primeiro, têm coeficientes que são, no máximo, $\frac{1}{4}$. Use esse fato para comparar esta série com a série geométrica e mostre que

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right) \leqslant T \leqslant 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,\frac{4 - 3k^2}{4 - 4k^2}$$

(c) Use as desigualdades em (b) para estimar o período de um pêndulo com $L = 1$ metro e $\theta_0 = 10°$. Como isso se compara com a estimativa $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$? E se $\theta_0 = 42°$?

39. Na Seção 4.8 no Volume I, consideramos o método de Newton para aproximar uma raiz r da equação $f(x) = 0$, e a partir de uma aproximação inicial x_1 obtivemos aproximações sucessivas $x_2, x_3, \ldots$, onde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Use a desigualdade de Taylor com $n = 1$, $a = x_n$ e $x = r$ para mostrar que, se $f''(x)$ existir em um intervalo I contendo r, x_n e x_{n+1}, e $|f''(x)| \leqslant M$, $|f'(x)| \geqslant K$ para todo $x \in I$, então

$$|x_{n+1} - r| \leqslant \frac{M}{2K}|x_n - r|^2$$

[Isso significa que, se x_n tem precisão de d casas decimais, então x_{n+1} terá precisão de cerca de $2d$ casas decimais. Mais precisamente, se o erro no estágio n for no máximo 10^{-m}, então o erro na etapa $n + 1$ será no máximo $(M/2K)10^{-2m}$.]

PROJETO APLICADO RADIAÇÃO PROVENIENTE DAS ESTRELAS

Luke Dodd/Photo Researchers, Inc.

Qualquer objeto emite radiação quando aquecido. Um *corpo negro* é um sistema que absorve toda a radiação que incide nele. Por exemplo, uma superfície preta não brilhante ou uma grande cavidade com um pequeno furo em sua parede (como uma fornalha siderúrgica) é um corpo negro e emite radiação de corpo negro. Até a radiação do Sol está próxima de ser a radiação de um corpo negro.

Proposta no fim do século XIX, a Lei de Rayleigh-Jeans expressa a densidade de energia da radiação do corpo negro de comprimento de onda λ como

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

onde λ é medido em metros, T é a temperatura em kelvins (K) e k é a constante de Boltzmann. A Lei de Rayleigh-Jeans coincide com as medidas experimentais para comprimentos de onda longos, mas diverge drasticamente para comprimentos de onda curtos. [A lei prediz que $f(\lambda) \to \infty$ quando $\lambda \to 0^+$, mas experiências mostraram que $f(\lambda) \to 0$.] Este fato é conhecido como a *catástrofe ultravioleta*.

Em 1900, Max Planck encontrou um modelo melhor (conhecido agora como a Lei de Planck) para a radiação do corpo negro:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

onde λ é medido em metros, T é a temperatura (em kelvins) e

$$h = \text{constante de Planck's} = 6{,}6262 \times 10^{-34}\ \text{J·s}$$

$$c = \text{velocidade da luz} = 2{,}997925 \times 10^{8}\ \text{m/s}$$

$$k = \text{constante de Boltzmann's} = 1{,}3807 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$$

1. Use a Regra de l'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$$

para a Lei de Planck. Assim, essa lei pode modelar melhor a radiação do corpo negro que a Lei de Rayleigh-Jeans para comprimentos de onda mais curtos.

2. Use um polinômio de Taylor para mostrar que, para comprimentos de onda longos, a Lei de Planck fornece aproximadamente os mesmos valores que a Lei de Rayleigh-Jeans.

3. Trace f dada por ambas as leis na mesma tela e comente as similaridades e diferenças. Use $T = 5.700$ K (a temperatura do Sol). (Você pode querer mudar de metros para unidade mais conveniente de micrômetros: $1\ \mu\text{m} = 10^{-6}$ m.)

4. Use seu gráfico no Problema 3 para estimar o valor de λ para o qual $f(\lambda)$ é um máximo na Lei de Planck.

5. Investigue como o gráfico de f muda quando T varia. (Use a Lei de Planck.) Em particular, trace f para as estrelas Betelgeuse ($T = 3\,400$ K), Procyon ($T = 6\,400$) e Sirius ($T = 9\,200$ K), e também o Sol. Como a radiação total emitida (a área sob a curva) varia com T? Use o gráfico para comentar por que Sirius é conhecida como uma estrela azul e Betelgeuse, como uma estrela vermelha.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

11 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) O que é uma sequência convergente?
   (b) O que é uma série convergente?
   (c) O que significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?
   (d) O que significa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$?
2. (a) O que é uma sequência limitada?
   (b) O que é uma sequência monótona?
   (c) O que você pode dizer sobre uma sequência monótona limitada?
3. (a) O que é uma série geométrica? Sob quais circunstâncias ela é convergente? Qual é sua soma?
   (b) O que é uma série p? Sob quais circunstâncias ela é convergente?
4. Suponha que $\Sigma\, a_n = 3$ e s_n seja a n-ésima soma parcial da série. O que é $\lim_{n\to\infty} a_n$? O que é $\lim_{n\to\infty} s_n$?
5. Enuncie o seguinte:
   (a) O Teste para Divergência.
   (b) O Teste da Integral.
   (c) O Teste da Comparação.
   (d) O Teste da Comparação no Limite.
   (e) O Teste da Série Alternada.
   (f) O Teste da Razão.
   (g) O Teste da Raiz.
6. (a) O que é uma série absolutamente convergente?
   (b) O que você pode dizer sobre estas séries?
   (c) O que é uma série condicionalmente convergente?
7. (a) Se uma série for convergente pelo Teste da Integral, como você estima sua soma?
   (b) Se uma série for convergente pelo Teste da Comparação, como você estima sua soma?
   (c) Se uma série for convergente pelo Teste da Série Alternada, como você estima sua soma?
8. (a) Escreva a forma geral de uma série de potências.
   (b) O que é o raio de convergência de uma série de potências?
   (c) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências?
9. Suponha que $f(x)$ seja a soma de uma série de potências com raio de convergência R.
   (a) Como você deriva f? Qual é o raio de convergência da série para f'?
   (b) Como você integra f? Qual é o raio de convergência da série para $\int f(x)\,dx$?
10. (a) Escreva uma expressão para a série de Taylor de n-ésimo grau de f centrada em a.
    (b) Escreva uma expressão para a série de Taylor de f centrada em a.
    (c) Escreva uma expressão para a série de Maclaurin de f.
    (d) Como você mostra que $f(x)$ é igual à soma de sua série de Taylor?
    (e) Enuncie a Desigualdade de Taylor.
11. Escreva a série de Maclaurin e o intervalo de convergência para cada uma das seguintes funções:
    (a) $1/(1-x)$ (b) e^x (c) $\operatorname{sen} x$
    (d) $\cos x$ (e) $\operatorname{tg}^{-1} x$ (f) $\ln(1+x)$
12. Escreva a expansão da série binomial de $(1+x)^k$. Qual é o raio de convergência desta série?

Quiz Verdadeiro-Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\Sigma\, a_n$ é convergente.
2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{sen} 1}$ é convergente.
3. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$.
4. Se $\Sigma\, c_n 6^n$ for convergente, então $\Sigma\, c_n(-2)^n$ é convergente.
5. Se $\Sigma\, c_n 6^n$ for convergente, então $\Sigma\, c_n(-6)^n$ é convergente.
6. Se $\Sigma\, c_n x^n$ diverge quando $x = 6$, então ela diverge quando $x = 10$.
7. O Teste da Razão pode ser usado para determinar se $\Sigma\, 1/n^3$ converge.
8. O Teste da Razão pode ser usado para determinar se $\Sigma\, 1/n!$ converge.
9. Se $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ e $\Sigma\, b_n$ divergir, então $\Sigma\, a_n$ diverge.
10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$
11. Se $-1 < \alpha < 1$, então $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.
12. Se $\Sigma\, a_n$ é divergente, então $\Sigma\, |a_n|$ é divergente.
13. Se $f(x) = 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ converge para todo x, então $f'''(0) = 2$.
14. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são ambas divergentes, então $\{a_n + b_n\}$ é divergente.
15. Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são ambas divergentes, então $\{a_n b_n\}$ é divergente.
16. Se $\{a_n\}$ é decrescente e $a_n > 0$ para todo n, então $\{a_n\}$ será convergente.
17. Se $a_n > 0$ e $\Sigma\, a_n$ converge, então $\Sigma\, (-1)^n a_n$ também converge.
18. Se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
19. $0{,}99999\ldots = 1$
20. Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, então $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+3} - a_n) = 0$.
21. Se um número finito de termos forem adicionados a uma série convergente, a nova série também é convergente.
22. Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = AB$.

Exercícios

1–8 Determine se a sequência é convergente ou divergente. Se ela for convergente, encontre seu limite.

1. $a_n = \dfrac{2 + n^3}{1 + 2n^3}$

2. $a_n = \dfrac{9^{n+1}}{10^n}$

3. $a_n = \dfrac{n^3}{1 + n^2}$

4. $a_n = \cos(n\pi/2)$

5. $a_n = \dfrac{n \operatorname{sen} n}{n^2 + 1}$

6. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

7. $\{(1 + 3/n)^{4n}\}$

8. $\{(-10)^n/n!\}$

9. Uma sequência é definida recursivamente pelas equações $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$. Mostre que $\{a_n\}$ é crescente e $a_n < 2$ para todo n. Deduza que $\{a_n\}$ é convergente e encontre seu limite.

10. Mostre que $\lim_{n\to\infty} n^4 e^{-n} = 0$ e use um gráfico para encontrar o menor valor de N que corresponde a $\varepsilon = 0{,}1$ na definição de limite.

11–22 Determine se a série é convergente ou divergente.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + 1}}$

15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{3n + 1}\right)$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{1 + (1{,}2)^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1 + 2n^2)^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{5^n n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n^2 9^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n + 1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}}{n}$

23–26 Determine se a série é condicionalmente convergente, absolutamente convergente ou divergente.

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1/3}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-3}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + 1) 3^n}{2^{2n+1}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$

27–31 Encontre a soma da série.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{3n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 3)}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{tg}^{-1}(n + 1) - \operatorname{tg}^{-1} n]$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{3^{2n}(2n)!}$

31. $1 - e + \dfrac{e^2}{2!} - \dfrac{e^3}{3!} + \dfrac{e^4}{4!} - \cdots$

32. Expresse a dízima periódica 4,17326326326... como uma fração.

33. Mostre que $\cosh x \geqslant 1 + \frac{1}{2}x^2$ para todo x.

34. Para quais valores de x a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$ converge?

35. Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ com precisão de quatro casas decimais.

36. (a) Encontre a soma parcial s_5 da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6$ e estime o erro ao usá-la como uma aproximação para a soma da série.
(b) Encontre a soma da série com precisão de cinco casas decimais.

37. Use a soma dos oito primeiros termos para aproximar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + 5^n)^{-1}$. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

38. (a) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ é convergente.

(b) Deduza que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

39. Demonstre que, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for absolutamente convergente, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + 1}{n}\right) a_n$$

é absolutamente convergente também.

40–43 Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 5^n}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 2)^n}{n\, 4^n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x - 2)^n}{(n + 2)!}$

43. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x - 3)^n}{\sqrt{n + 3}}$

44. Encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

45. Encontre a série de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = \pi/6$.

46. Encontre a série de Taylor de $f(x) = \cos x$ em $a = \pi/3$.

47–54 Encontre a série de Maclaurin de f e seu raio de convergência. Você pode usar o método direto (a definição de série de Maclaurin) ou séries conhecidas, como a série geométrica, a série binomial ou a série de Maclaurin de e^x, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{tg}^{-1} x$ e $\ln(1 + x)$.

47. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$

48. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(x^2)$

49. $f(x) = \ln(4 - x)$

50. $f(x) = xe^{2x}$

51. $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

52. $f(x) = 10^x$

53. $f(x) = 1/\sqrt[4]{16 - x}$

54. $f(x) = (1 - 3x)^{-5}$

55. Calcule $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\, dx$ como uma série infinita.

56. Use séries para aproximar $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$ com precisão de duas casas decimais.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

57–58

(a) Aproxime f por um polinômio de Taylor com n-ésimo grau no número a.

(b) Trace f e T_n na mesma tela.

(c) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a precisão da aproximação $f(x) \approx T_n(x)$ quando x estiver no intervalo dado.

(d) Verifique seu resultado na parte (c) traçando $|R_n(x)|$.

57. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0{,}9 \leqslant x \leqslant 1{,}1$

58. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/6$

59. Use séries para calcular o limite a seguir.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

60. A força da gravidade em um objeto de massa m a uma altura h acima da superfície da Terra é

$$F = \frac{mgR^2}{(R + h)^2}$$

onde R é o raio da Terra e g é a aceleração da gravidade para um objeto sobre a superfície da terra.

(a) Expresse F como uma série de potências em h/R.

(b) Observe que se nós aproximamos F pelo primeiro termo da série, temos a expressão $F \approx mg$, que é normalmente utilizada quando h é muito menor que R. Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas ou a Desigualdade de Taylor para estimar a gama de valores de h para os quais a aproximação $F \approx mg$ tem precisão dentro de um por cento. (Use $R = 6.400$ km.)

61. Suponha que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para todo x.

(a) Se f é uma função ímpar, mostre que

$$c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$$

(b) Se f for uma função par, mostre que

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

62. Se $f(x) = e^{x^2}$, mostre que $f^{(2n)}(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

Problemas Quentes

Antes de olhar a solução do exemplo, cubra-a e tente resolvê-lo você mesmo.

EXEMPLO 1 Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + 2)^n}{(n + 3)!}$.

SOLUÇÃO O princípio de resolução de problemas que é relevante aqui é *reconhecer algo familiar*. As séries dadas se parecem em alguma coisa com uma série que já conhecemos? Bem, ela tem alguns ingredientes em comum com a série de Maclaurin para a função exponencial:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Podemos fazer esta série parecer mais com a nossa série dada pela substituição de x por $x + 2$:

$$e^{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + 2)^n}{n!} = 1 + (x + 2) + \frac{(x + 2)^2}{2!} + \frac{(x + 2)^3}{3!} + \cdots$$

Mas aqui o expoente no numerador corresponde ao número no denominador cujo fatorial é tirado. Para que isso aconteça na série dada, vamos multiplicar e dividir por $(x + 2)^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + 2)^n}{(n + 3)!} = \frac{1}{(x + 2)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + 2)^{n+3}}{(n + 3)!}$$

$$= (x + 2)^{-3} \left[\frac{(x + 2)^3}{3!} + \frac{(x + 2)^4}{4!} + \cdots \right]$$

Vemos que a série entre parênteses é apenas a série para e^{x+2} com os três primeiros termos faltando. Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + 2)^n}{(n + 3)!} = (x + 2)^{-3} \left[e^{x+2} - 1 - (x + 2) - \frac{(x + 2)^2}{2!} \right]$$

Problemas

1. Se $f(x) = \text{sen}(x^3)$, encontre $f^{(15)}(0)$.

2. Uma função f é definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

Onde f é contínua?

3. (a) Mostre que $\text{tg}\,\frac{1}{2}x = \text{cotg}\,\frac{1}{2}x - 2\,\text{cotg}\,x$.
(b) Encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\text{tg}\,\frac{x}{2^n}$$

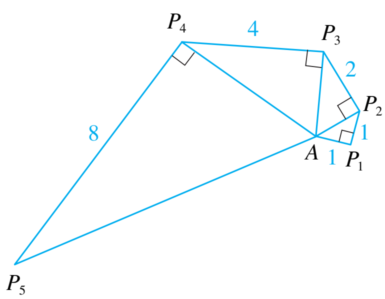


FIGURA PARA O PROBLEMA 4

4. Seja $\{P_n\}$ uma sequência de pontos determinados como na figura. Então $|AP_1| = 1$, $|P_nP_{n+1}| = 2^{n-1}$, e o ângulo AP_nP_{n+1} é um ângulo reto. Encontre $\lim_{n\to\infty} \angle P_nAP_{n+1}$.

5. Para construir a **curva floco de neve**, comece com um triângulo equilátero com lados 1 de comprimento. A Etapa 1 na construção é dividir cada lado em três partes iguais, construir um triângulo equilátero na parte do meio e então apagar a parte do meio (veja a figura). A Etapa 2 consiste em repetir a Etapa 1 para cada lado do polígono resultante. Esse processo é repetido a cada etapa seguinte. A curva floco de neve é aquela que resulta da repetição desse processo indefinidamente.
(a) Sejam s_n, l_n e p_n as representações do número de lados, do comprimento de um lado e do comprimento total da n-ésima curva de aproximação (a curva obtida depois da Etapa n de construção), respectivamente. Encontre fórmulas para s_n, l_n e p_n.
(b) Mostre que $p_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.
(c) Some uma série infinita para encontrar a área dentro da curva floco de neve.
Observação: As partes (b) e (c) mostram que a curva floco de neve é infinitamente longa, mas delimita apenas uma área finita.

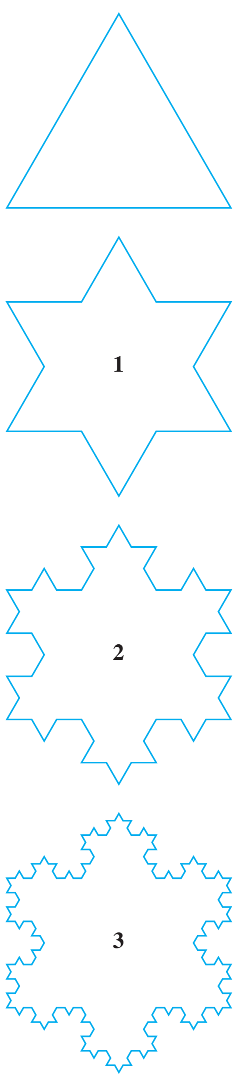


FIGURA PARA O PROBLEMA 5

6. Encontre a soma da série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$$

onde os termos são os recíprocos dos inteiros positivos cujos únicos fatores primos são 2 e 3.

7. (a) Mostre que, para $xy \neq -1$,

$$\text{arctg}\,x - \text{arctg}\,y = \text{arctg}\,\frac{x - y}{1 + xy}$$

se o lado esquerdo estiver entre $-\pi/2$ e $\pi/2$.
(b) Mostre que $\text{arctg}\,\frac{120}{119} - \text{arctg}\,\frac{1}{239} = \pi/4$.
(c) Deduza a seguinte fórmula de John Machin (1680–1751):

$$4\,\text{arctg}\,\tfrac{1}{5} - \text{arctg}\,\tfrac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(d) Use a série de Maclaurin para arctg para mostrar que

$$0{,}1973955597 < \text{arctg}\,\tfrac{1}{5} < 0{,}1973955616$$

(e) Mostre que

$$0{,}004184075 < \text{arctg}\,\tfrac{1}{239} < 0{,}004184077$$

(f) Deduza que, com precisão de sete casas decimais, $\pi \approx 3{,}1415927$.
Machin usou esse método em 1706 para encontrar π com precisão de 100 casas decimais. Recentemente, com a ajuda de computadores, o valor de π tem sido calculado com uma precisão cada vez maior. Em 2009, T. Daisuke e sua equipe calcularam o valor de π para mais de dois trilhões de casas decimais!

8. (a) Demonstre uma fórmula similar àquela no Problema 7(a), mas envolvendo arccotg em vez de arctg.

(b) Encontre a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arccotg}(n^2 + n + 1)$.

9. Encontre o intervalo de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ e sua soma.

10. Se $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_k\sqrt{n+k}\right) = 0$$

Se você não vê como demonstrar isso, tente a estratégia de resolução de problemas com *uso de analogias* (Capítulo 1 – Volume I). Tente os casos especiais $k = 1$ e $k = 2$ primeiro. Se você vir como demonstrar a asserção para esses casos, provavelmente verá como demonstrá--la no caso geral.

11. Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

12. Suponha que você tenha um grande suprimento de livros, todos do mesmo tamanho, e os empilhe na borda de uma mesa, com cada livro se estendendo mais longe da borda da mesa do que o livro embaixo dele. Mostre que é possível fazer isso de maneira que o livro no topo da pilha fique inteiramente além da mesa. De fato, mostre que o livro do topo pode se estender a qualquer distância além da borda da mesa se a pilha for alta o suficiente. Utilize o seguinte método de empilhamento: o livro do topo se estende por metade de seu comprimento além do segundo livro. O segundo livro se estende por um quarto de seu comprimento além do terceiro. O terceiro se estende por um sexto de seu comprimento além do quarto, e assim por diante. (Tente você mesmo com um baralho.) Considere centros de massa.

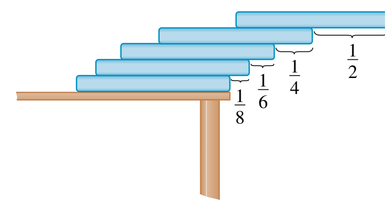


FIGURA PARA O PROBLEMA 12

13. Se a curva $y = e^{-x/10} \operatorname{sen} x$, $x \geqslant 0$, for girada em torno do eixo x, o sólido resultante se parece com uma sequência infinita de bolinhas decrescentes.

(a) Encontre o volume exato da n-ésima bolinha. (Use uma tabela de integrais ou um sistema de computação algébrica.)

(b) Encontre o volume total das bolinhas.

14. Se $p > 1$, calcule a expressão.

$$\frac{1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \cdots}{1 - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{4^p} + \cdots}$$

15. Suponha que círculos de diâmetros iguais sejam agrupados o mais junto possível em n fileiras dentro de um triângulo equilátero. (A figura ilustra o caso $n = 4$.) Se A for a área do triângulo e A_n for a área total ocupada pelas n fileiras de círculos, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

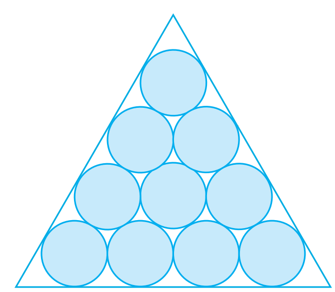


FIGURA PARA O PROBLEMA 15

16. Uma sequência $\{a_n\}$ é definida recursivamente pelas equações

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$$

Encontre a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

17. Tomando o valor de x^x em 0 igual a 1 e integrando uma série termo a termo, mostre que

$$\int_0^1 x^x\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

18. Começando com os vértices $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, 0)$, $P_4(0, 0)$ de um quadrado, construímos pontos adicionais conforme mostrado na figura: P_5 é o ponto médio de P_1P_2, P_6 é o ponto médio de P_2P_3, P_7 é o ponto médio de P_3P_4, e assim por diante. O caminho espiral poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7\ldots$ tende a um ponto P dentro do quadrado.

(a) Se as coordenadas de P_n forem (x_n, y_n), mostre que $\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$ e encontre uma equação similar para as coordenadas y.

(b) Encontre as coordenadas de P.

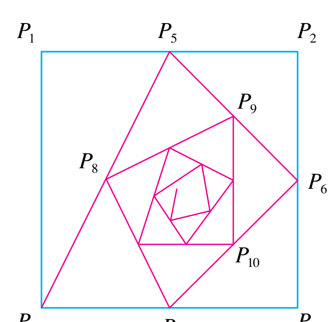


FIGURA PARA O PROBLEMA 18

19. Encontre a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

20. Efetue as seguintes etapas para mostrar que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots = \ln 2$$

(a) Use a fórmula para a soma de uma série geométrica finita (11.2.3) para obter uma expressão para

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2n-2} - x^{2n-1}$$

(b) Integre o resultado da parte (a) de 0 a 1 para obter uma expressão para

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

como uma integral.

(c) Deduza a partir da parte (b), que

$$\left| \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \right| < \int_0^1 x^{2n}\, dx$$

(d) Use a parte (c) para mostrar que a soma da série dada é ln 2.

21. Encontre todas as soluções da equação

$$1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} + \cdots = 0$$

Dica: Considere os casos $x \geqslant 0$ e $x < 0$ separadamente.

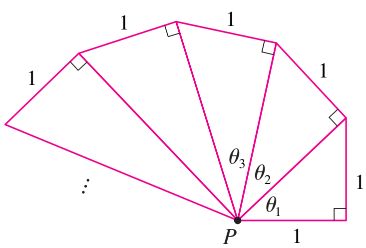


FIGURA PARA O PROBLEMA 22

22. Triângulos retângulos são construídos conforme a figura. Cada triângulo tem altura igual a 1 e sua base é a hipotenusa do triângulo anterior. Mostre que essa sequência faz um número ilimitado de voltas ao redor de P, demonstrando que $\sum \theta_n$ é uma série divergente.

23. Considere a série cujos termos são os recíprocos de inteiros positivos que podem ser escritos na base 10 sem usar o dígito 0. Mostre que essa série é convergente e a soma é menor que 90.

24. (a) Mostre que a série de Maclaurin da função

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \qquad \text{é} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

onde f_n é o n-ésimo número de Fibonacci, isto é, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geqslant 3$. [*Dica*: Escreva $x/(1-x-x^2) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ e multiplique ambos os lados desta equação por $1 - x - x^2$.]

(b) Ao escrever $f(x)$ como uma soma de frações parciais, portanto, obtendo a série de Maclaurin de uma maneira diferente, encontre uma fórmula explícita para o n-ésimo número de Fibonacci.

25. Considere

$$u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

$$w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Mostre que $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$.

26. Demonstre que se $n > 1$, a n-ésima soma parcial da série harmônica não é um inteiro. *Dica*: Seja 2^k a maior potência de 2 que é menor ou igual a n e seja M o produto de todos os inteiros ímpares que são menores ou iguais a n. Suponha que $s_n = m$, um inteiro. Então, $M2^k s_n = M2^k m$. O lado direito dessa equação é par. Demonstre que o lado esquerdo é ímpar, mostrando que cada um de seus termos é um inteiro par, com exceção do último.