Diagonalização de Operadores

Base de Autovetores

Dado um operador linear $T: V \to V$, nosso objetivo é conseguir uma base β de V na qual a matriz do operador nesta base ($[T]_{\beta}^{\beta}$) seja uma matriz diagonal,

Teorema

Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Corolário

Se V é um espaço vetorial de dimensão n e $T: V \to V$ é um operador linear que possui n autovalores distintos, então V possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T.

Exemplo 1

Seja $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$ cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Queremos encontrar uma base β de autovetores, se possível, e ainda observar de que tipo é a matriz $[T]_\beta^\beta$.

Exemplo 2

Seja $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Definição

Seja $T: V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um *operador diagonalizável* se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T.

Exemplo

Seja $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Polinômio Minimal

Seja $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio e $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada. Então $p(\mathbf{A})$ é a matriz

$$p(\mathbf{A}) = a_n \mathbf{A}^n + \ldots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}.$$

Quando $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, dizemos que o polinômio *anula* a matriz $\mathbf{A}$.

Exemplo

Sejam $p(x) = x^2 - 9$ e $q(x) = 2x + 3$.

Se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$p(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2 - 9\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $$q(\mathbf{A}) = 2\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Então, $p(x)$ anula $\mathbf{A}$ e $q(x)$ não anula $\mathbf{A}$.

Definição

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada. O *polinômio minimal* de $\mathbf{A}$ é um polinômio

$$m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_0$$

tal que

i) $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, isto é, $m(x)$ anula a matriz $\mathbf{A}$.
ii) $m(x)$ é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam $\mathbf{A}$.

Observe que o coeficiente do termo x^k do polinômio minimal é 1 ($a_k = 1$).

Teorema

Sejam $T: V \to V$ um operador linear e α uma base qualquer de V de dimensão n. Então T é diagonalizável se, e somente se o polinômio minimal de $[T]^{\alpha}_{\alpha}$ é da forma

$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_r)$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ distintos.

Teorema

Cayley-Hamilton: Seja $T: V \to V$ um operador linear, α uma base de V e $p(x)$ o polinômio característico de T. Então

$$p([T]^{\alpha}_{\alpha}) = 0$$

Teorema

As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes (distintas) do polinômio característico.

Exemplo

Seja $T: V \to V$ um operador linear e α uma base de V. Suponhamos que o polinômio característico de T seja $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 1)^3 (\lambda + 5)$. Então o seu polinômio minimal será um dos polinômios:

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= (x - 3)(x - 1)(x + 5) \\
p_2(x) &= (x - 3)^2 (x - 1)(x + 5) \\
p_3(x) &= (x - 3)(x - 1)^2 (x + 5) \\
p_4(x) &= (x - 3)(x - 1)^3 (x + 5) \\
p_5(x) &= (x - 3)^2 (x - 1)^2 (x + 5) \\
p_6(x) &= (x - 3)^2 (x - 1)^3 (x + 5).
\end{aligned}
$$

Teorema

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ os autovalores distintos de um operador linear T. Então T será diagonalizável se, e somente se o polinômio

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_r)$$

anular a matriz de T.

Exemplo

O operador linear $T: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definido por $T(x, y, z, t) =$
$= (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -t)$ é diagonalizável?

Seja $\alpha = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ a base canônica.
Então a matriz

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculemos o polinômio característico

$$p(\lambda) = \det([T]_\alpha^\alpha - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 \, (-1 - \lambda)^2.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, ambos com multiplicidade 2. Então, os condidatos para o polinômio minimal são

$$p_1(x) = (x - 3)(x + 1)$$
$$p_2(x) = (x - 3)^2 (x + 1)$$
$$p_3(x) = (x - 3)(x + 1)^2$$
$$p_4(x) = (x - 3)^2 (x + 1)^2$$