APLICAÇÕES DE DERIVAÇÃO

Esboço de Curvas

Problemas de Otimização

Esboço de Curvas

Até o momento, estudamos alguns aspectos particulares de funções que nos auxilia no esboço de curvas: domínio, imagem e simetria; limites, continuidade e assíntotas; derivadas e tangentes e valores extremos, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão e Regra de L'Hôspital.

Vamos agrupar todas essas informações para esboçar gráficos que revelem os aspectos importantes das funções.

Por que não usar simplesmente uma calculadora gráfica ou computador para traçar uma curva? Por que precisamos usar o cálculo?

O uso do cálculo nos possibilita descobrir os aspectos mais interessantes dos gráficos e, em muitos casos, calcular exatamente os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão.

Roteiro para Esboçar uma Curva

O roteiro fornece todas as informações necessárias para fazer um esboço que mostre os aspectos mais importantes da função.

A. Domínio É frequentemente útil começar determinando o domínio D de f, isto é, o conjunto dos valores de x para os quais $f(x)$ está definida.

B. Intersecções com os Eixos A intersecção com o eixo y é $f(0)$. Para encontrarmos as intersecções com o eixo x, fazemos $y = 0$ e isolamos x. (Você pode omitir esse passo se a equação for difícil de resolver.)

C. Simetria

(i) Se $f(-x) = f(x)$ para todo x em D, isto é, a equação da curva não muda se x for substituído por $-x$, então f é uma **função par**, e a curva é simétrica em relação ao eixo y. Isso significa que nosso trabalho fica cortado pela metade. Se soubermos como é a curva para $x \geqslant 0$, então precisaremos somente refletir em torno do eixo y para obter a curva completa. Alguns exemplos são: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = |x|$ e $y = \cos x$.

(ii) Se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em D, então f é uma **função ímpar** e a curva é simétrica em realação à origem. Novamente, podemos obter a curva completa se soubermos como ela é para $x \geqslant 0$. Gire 180° em torno da origem. Alguns exemplos simples de funções ímpares são $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ e $y = \operatorname{sen} x$.

(iii) Se $f(x + p) = f(x)$ para todo x em D, onde p é uma constante positiva, então f é chamada **função periódica**, e o menor desses números p é chamado **período**. Por exemplo, $y = \operatorname{sen} x$ tem o período 2π e $y = \operatorname{tg} x$ tem período π. Se soubermos como é o gráfico em um intervalo de comprimento p, então poderemos usar a translação para esboçar o gráfico inteiro.

D. Assíntotas

(i) *Assíntotas horizontais*. Lembre-se de que se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, então a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$. Se resultar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não temos uma assíntota à direita, o que também é uma informação, proveitosa no esboço da curva.

(ii) *Assíntotas verticais*. Lembre-se de que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical se pelo menos uma das seguintes afirmativas for verdadeira:

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

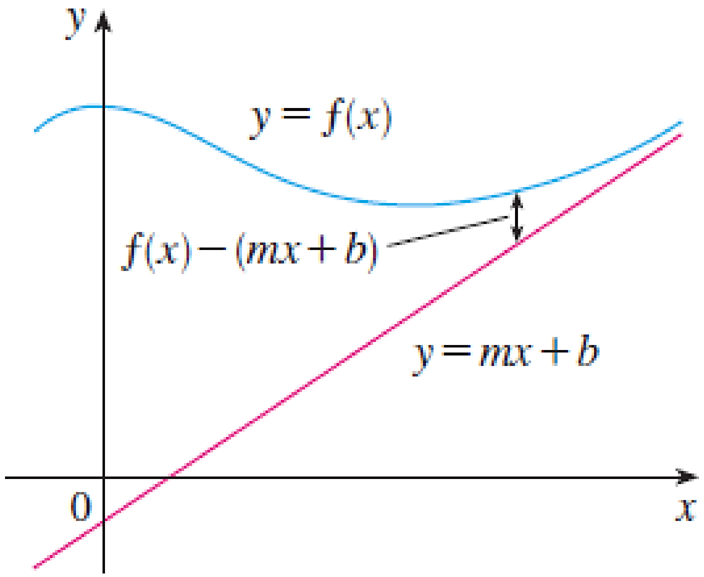
(Para as funções racionais, você pode localizar as assíntotas verticais igualando a zero o denominador, após ter cancelado qualquer fator comum. Mas para outras funções esse método não se aplica.) Além disso, ao esboçar a curva é muito útil saber exatamente qual das afirmativas em $\boxed{1}$ é verdadeira. Se $f(a)$ não estiver definida, mas a for uma extremidade do domínio de f, então você deve calcular $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x)$, seja esse limite infinito ou não.

(iii) *Assíntotas oblíquas*.

Algumas curvas têm assíntotas que são *oblíquas*, isto é, não são horizontais nem verticais. Se

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

onde $m \neq 0$, então a reta $y = mx + b$ é chamada **assíntota oblíqua**, pois a distância vertical entre a curva $y = f(x)$ e a linha $y = mx + b$ tende a 0, como na Figura. (Uma situação similar existe se $x \to -\infty$.) Para funções racionais, assíntotas oblíquas acorrem quando a diferença entre os graus do numerador e do denominador é igual a 1. Neste caso, a equação de uma assíntota oblíqua pode ser encontrada por divisão de polinômios.



E. Intervalos de Crescimento ou Decrescimento Use o Teste C/D. Calcule $f'(x)$ e encontre os intervalos nos quais $f'(x)$ é positiva (f é crescente) e os intervalos nos quais $f'(x)$ é negativa (f é decrescente).

F. Valores Máximos e Mínimos Locais Encontre os números críticos de f [os números c nos quais $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe]. Use então o Teste da Primeira Derivada. Se f' muda de positiva para negativa em um número crítico c, então $f(c)$ é um máximo local. Se f' muda de negativa para positiva em c, então $f(c)$ é um mínimo local. Apesar de ser usualmente preferível usar o Teste da Primeira Derivada, você pode usar o Teste da Segunda Derivada se $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$. Então $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ é um local mínimo, enquanto $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ é um máximo local.

G. Concavidade e Pontos de Inflexão Calcule $f''(x)$ e use o Teste da Concavidade. A curva é côncava para cima se $f''(x) > 0$, e côncava para baixo se $f''(x) < 0$. Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade.

H. Esboço da Curva Usando as informações nos itens A–G, faça o gráfico. Coloque as assíntotas como linhas tracejadas. Marque as intersecções com os eixos, os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão. Então, faça a curva passar por esses pontos, subindo ou descendo de acordo com E, com a concavidade de acordo com G e tendendo às assíntotas. Se precisão adicional for desejada próximo de algum ponto, você poderá calcular o valor da derivada aí. A tangente indica a direção na qual a curva segue.

Exemplos

1 Use o roteiro para esboçar a curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

A. O domínio é

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

B. As intersecções com os eixos x e y são ambas 0.

C. Uma vez que $f(-x) = f(x)$, a função f é par. A curva é simétrica em relação ao eixo y.

D. $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

Portanto, a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal.

Uma vez que o denominador é zero quando $x = \pm 1$, calculamos os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

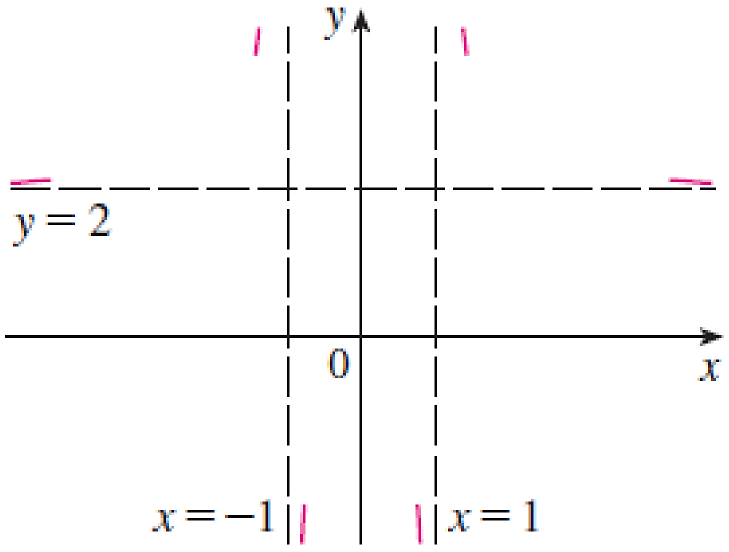


FIGURA 5

Consequentemente, as retas $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais. Essa informação sobre os limites e as assíntotas permite-nos traçar um esboço preliminar na Figura 5 mostrando as partes da curva próximas das assíntotas.

$$y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$$

E. $$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(4x) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Como $f'(x) > 0$ quando $x < 0$ $(x \neq -1)$ e $f'(x) < 0$ quando $x > 0$ $(x \neq 1)$, f é crescente em $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$ e decrescente em $(0, 1)$ e $(1, \infty)$.

F. O único número crítico é $x = 0$. Uma vez que f' muda de positiva para negativa em 0, $f(0) = 0$ é um máximo local pelo Teste da Primeira Derivada.

G. $$f''(x) = \frac{(x^2 - 1)^2(-4) + 4x \cdot 2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

Uma vez que $12x^2 + 4 > 0$ para todo x, temos

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

e $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Assim, a curva é côncava para cima nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$ e côncava para baixo em $(-1, 1)$. Não há ponto de inflexão, já que 1 e -1 não estão no domínio de f.

H. Usando a informação em E–G, finalizamos o esboço da Figura 6.

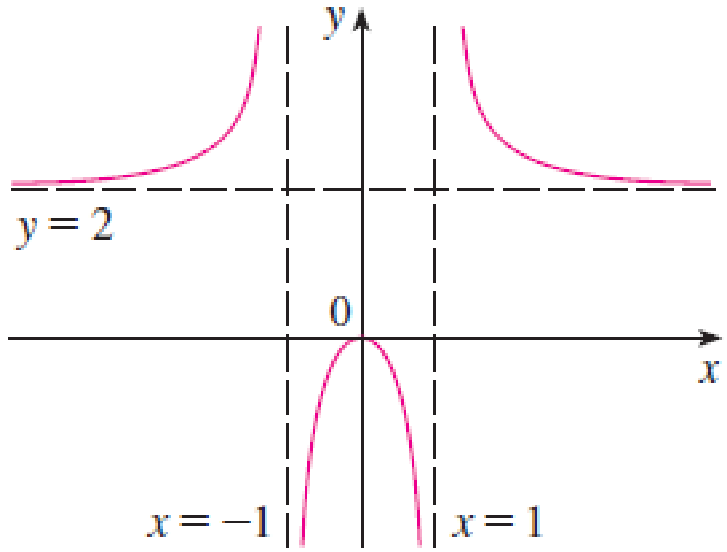


FIGURA 6 Esboço final de $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

Problemas de Otimização

- Os métodos estudados para encontrar os valores extremos têm aplicações práticas em muitas situações do dia a dia.
- Para resolver problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos.

Passos na Resolução dos Problemas de Otimização

1. **Compreendendo o Problema** A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja entendido claramente. Pergunte-se: O que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?

2. **Faça um Diagrama** Na maioria dos problemas, é útil fazer um diagrama e marcar as quantidades dadas e pedidas no diagrama.

3. **Introduzindo uma Notação** Atribua um símbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada (por ora vamos chamá-la Q). Selecione também símbolos (a, b, c, . . . , x, y) para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama. O uso de iniciais como símbolos poderá ajudá-lo – por exemplo, A para área, h para altura e t para tempo.

4. Expresse Q em termos de alguns dos outros símbolos da Etapa 3.

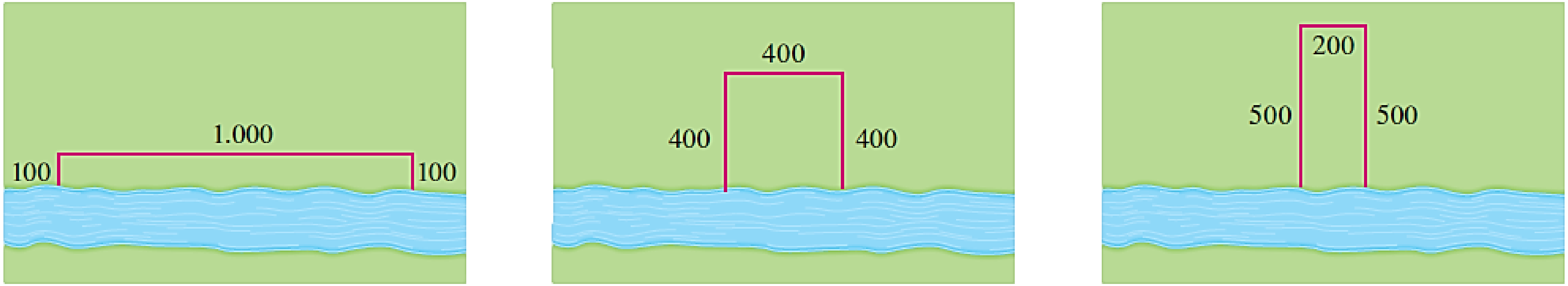
5. Se Q for expresso como uma função de mais de uma variável na Etapa 4, use a informação dada para encontrar as relações (na forma de equações) entre essas variáveis. Use então essas equações para eliminar todas menos uma das variáveis na expressão de Q. Assim, Q será expresso como uma função de *uma* variável x, digamos, $Q = f(x)$. Escreva o domínio dessa função.

6. Use os métodos para encontrar os valores máximo ou mínimo *absolutos* de f. Em particular, se o domínio de f é um intervalo fechado, então o Método de Intervalo Fechado pode ser usado.

Exemplos

1 Um fazendeiro tem 1 200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

A fim de percebermos o que está acontecendo neste problema, vamos fazer uma experiência com alguns casos especiais. A Figura 1, fora de escala, mostra três maneiras possíveis de estender os 1 200 m de cerca.



Área = $100 \cdot 1\,000 = 100\,000$ m^2 Área = $400 \cdot 400 = 160\,000$ m^2 Área = $500 \cdot 200 = 100\,000$ m^2

FIGURA 1

Vemos que, ao tentarmos os campos rasos e extensos ou profundos e estreitos, obtemos áreas relativamente pequenas. Parece plausível que exista alguma configuração intermediária que produza a maior área.

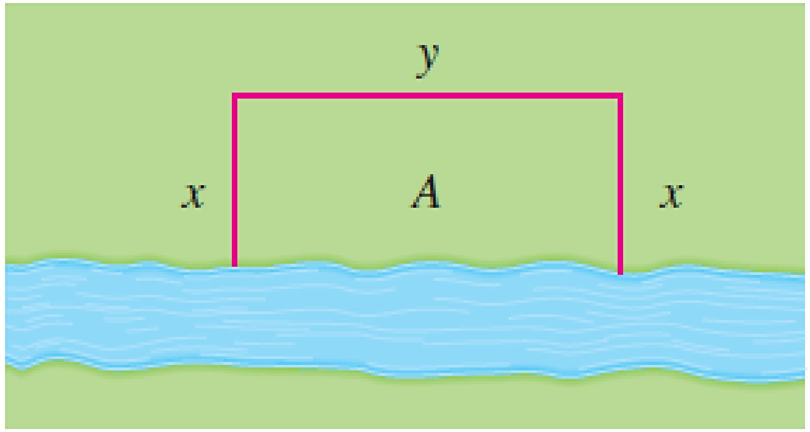


FIGURA 2

A Figura 2 ilustra o caso geral. Desejamos maximizar a área A do retângulo. Sejam x e y a profundidade e a largura do retângulo (em metros). Então, expressamos A em termos de x e y:

$$A = xy$$

Queremos expressar A como uma função de apenas uma variável; assim, eliminamos y expressando-o em termos de x. Para fazermos isso, usamos a informação dada de que o comprimento total da cerca é de 1 200 m. Logo,

$$2x + y = 1\,200$$

Dessa equação, temos $y = 1.200 - 2x$, resultando assim

$$A = x(1\,200 - 2x) = 1\,200x - 2x^2$$

Observe que $x \geqslant 0$ e $x \leqslant 600$ (de outra forma resultaria $A < 0$). Logo, a função que desejamos maximizar é

$$A(x) = 1\,200x - 2x^2, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 600$$

A derivada é $A'(x) = 1\,200 - 4x$; logo, para encontrarmos os números críticos, resolvemos a equação

$$1\,200 - 4x = 0$$

que nos fornece $x = 300$.

O valor máximo de A deve ocorrer ou nesse número crítico ou em uma extremidade do intervalo.

Uma vez que $A(0) = 0$, $A(300) = 180\,000$ e $A(600) = 0$, o Método do Intervalo Fechado nos fornece o valor máximo como $A(300) = 180\,000$.

[Alternativamente poderíamos ter observado que $A''(x) = -4 < 0$ para todo x; logo, A é sempre côncava para baixo, e o máximo local em $x = 300$ deve ser um máximo absoluto.]

Assim, o campo retangular deve ter 300 m de profundidade e 600 m de extensão.

2 Uma lata cilíndrica é feita para receber um 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

Fazemos o diagrama como na Figura 3, onde r é o raio e h é a altura (ambos em centímetros).

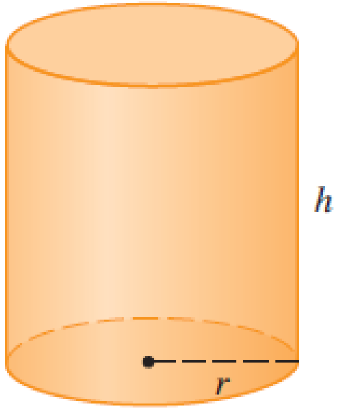


FIGURA 3

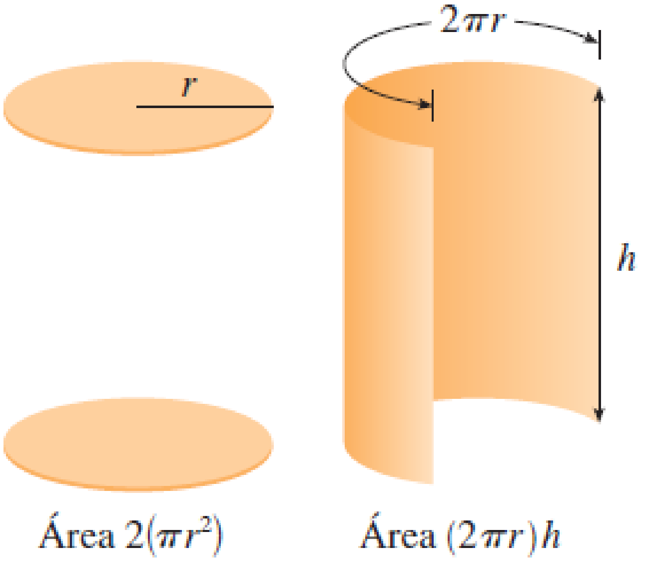


FIGURA 4

A fim de minimizar o custo do metal, minimizamos a área da superfície total do cilindro (tampa, base e lado). Da Figura 4, vemos que o lado é feito de uma folha retangular com dimensões $2\pi r$ e h.

Logo a área da superfície é $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Para eliminarmos h, usamos o fato de que o volume é dado como 1 L, que é igual a 1 000 cm³.

Logo,

$$\pi r^2 h = 1\,000$$

que nos fornece $h = 1\,000/(\pi r^2)$.

Substituindo na expressão para A, temos

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1\,000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$$

Portanto, a função que queremos minimizar é

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r} \qquad r > 0$$

Para acharmos os números críticos, derivamos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2\,000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Então $A'(r) = 0$ quando $\pi r^3 = 500$; logo, o número crítico é $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Uma vez que o domínio de A é $(0, \infty)$, não podemos usar o argumento do Exemplo 1 relativo às extremidades. Mas podemos observar que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ e $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, portanto, A está decrescendo para *todo* r à esquerda do número crítico e crescendo para *todo* r à direita. Assim, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ deve originar um *mínimo absoluto*.

[Alternativamente, poderíamos argumentar que $A(r) \to \infty$ quando $r \to 0^+$ e $A(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$; portanto, deve existir um valor mínimo de $A(r)$, que deve ocorrer no número crítico.

O valor de h correspondente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ é

$$h = \frac{1.000}{\pi r^2} = \frac{1.000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Dessa forma, para minimizar o custo da lata, o raio deve ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm e a altura, igual a duas vezes o raio, isto é, o diâmetro.

12. Considere o seguinte problema: uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 3 metros de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa poderá ter.

(a) Faça vários diagramas para ilustrar a situação, algumas caixas baixas com bases grandes e outras altas com base pequena. Encontre os volumes de várias dessas caixas. Parece existir um volume máximo? Se a resposta for sim, estime-o.

(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.

(c) Escreva uma expressão para o volume.

(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.

(e) Use a parte (d) para escrever o volume como uma função de uma só variável.

(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

32. Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo. (O diâmetro do semicírculo é igual à largura do retângulo. Veja o Exercício 62.)
Se o perímetro da janela for 10 m, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.