Résumé Analyse II chapitre 16

Sami AS

17 mars 2021

CL séparées

$$\begin{cases} (\text{EDLH}) & L(y) := a_0 y'' + a_1 y' + a_2 = 0 \\ (\text{CLH}) & \begin{cases} (CL_a) & cl_a(y) := \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ (CL_b) & cl_b(y) := \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

- Conditions aux limites séparées = paire de combilis.
- On considère les coefficients des combili **non-nuls**, donc si les CL_{sep} sont **homogènes**, alors on a des choses sucrées.
  - Soient y_1 et y_2 deux fonctions qui satisfont à (CL_a) $(\in Cl_a)$

$$\Rightarrow \begin{cases} cl_a(y_1) = 0 \\ cl_a(y_2) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow W(y_1, y_2)_{|_a} = 0$$

$\Rightarrow$ Grosse propriété donc : le Wronskien de deux fonctions satisfaisant une des CL de CL_{sep} **est nul**.

- Plus concrètement, pour une CL_{sep}, on a

$$W(y_1, y_2)_{|_a} = W(y_1, y_2)_{|_b} = 0$$

Théorème de l'Alternative

Théorème de l'Alternative

$$(\text{PH}) \quad \begin{cases} L(y) = 0 \\ cl_1(y) = 0 \\ \quad\vdots \\ cl_n(y) = 0 \end{cases} \qquad (\text{PnH}) \quad \begin{cases} L(y) = f \\ cl_1(y) = d_1 \\ \quad\vdots \\ cl_n(y) = d_2 \end{cases}$$

- Le PnH admet une et une seule solution $\iff$ le PH n'a que la solution triviale $\iff$ $det(M_{Cl}) \neq 0$.
- Si le PH admet une autre solution que la solution triviale, alors soit le PnH a une infinité de solutions, soit aucune.

Avec $M_{Cl} = \begin{pmatrix} Cl_1(y_1) & \cdots & Cl_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cl_n(y_1) & \cdots & Cl_n(y_n) \end{pmatrix}$

Opérateur réduit et identité de Green

Opérateur différentiel réduit

Un opérateur réduit est un opérateur qui s'écrit sous la forme

$$L := -DpD + q$$

et tout opérateur différentiel $P(D) = PD^2 + QD + R$ peut s'écrire sous une forme réduite avec

$$p = e^{\int \frac{Q}{P}}, \qquad q = -\frac{R}{P} e^{\int \frac{Q}{P}}.$$

Identité de Green

L'identité de Green stipule que pour un opérateur **réduit** L, on a

$$\forall x \in [a, b] : \int_a^x (L(u)v - uL(v)) = [pW(u, v)]_a^x$$

Utile si u, v satisfont à des CL_{sep} !

Opérateur autoadjoint

<u>Définition</u> : F est autoadjoint dans $CL \iff \forall u, v \in CL : \langle Fu, v\rangle = \langle u, Fv\rangle$

Opérateur différentiel réduit autoadjoint

Si l'on restreint L réduit à la classe de fonctions Cl, alors l'opérateur L est **autoadjoint**. C'est dû à la remarque en bas du slide précédent : le Wronskien deux fonctions satisfaisant une Cl est nul, et donc le crochet de l'identité de Green est nul !

$$\boxed{\mathcal{L} \equiv L_{CL_{[a,b]}} \text{autoadj} : \quad \forall u, v : \int_a^b L(u)v = \int_a^b uL(v)}$$

Problème de Sturm-Liouville

Énoncé d'un problème de Sturm-Liouville

Le problème de **Sturm-Liouville** consiste à rechercher les solutions **non-triviales** (λ, y) de

$$\begin{cases} L(y) = \lambda y \\ cl_a(y) = 0 \\ cl_b(y) = 0 \end{cases}$$

Propriétés d'un problème de Sturm-Liouville

1. Les **valeurs propres** sont réelles, simples et admettent chacune une **fonction propre** réelle
2. Les fonctions propres associées à des valeurs propres différentes sont orthogonales.
3. Les λ_k forment une suite croissante vers $+\infty$
4. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est un système orthogonal complet dans CL