Séries de Fourier : résumé

Sami AS

17 mars 2021

- Approximer une fonction C^1 globalement sur un intervalle I.
- Si l'on considère un espace **orthogonal** de fonctions $\Phi = \{\varphi_k ; k \in \mathbb{N}\}$, on peut écrire le développement de f selon l'espace Φ. C'est la projection de f sur Φ :

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(x) := S(x) \quad \forall x \in I \quad .$$

- On veut trouver un tel système de fonction *efficace*, i.e. qui minimise l'écart entre f et son développement en série.
- La série $S(x)$ converge-t-elle ? Si oui, converge-t-elle vers $f(x)$?

Espace $L^2([a,b],\mathbb{K})$

L'espace des fonctions de carré sommable/intégrable. L'appartenance à cette classe s'observe par la convergence de l'intégrale.

$$f \in L^2([a,b],\mathbb{K}) \iff \sqrt{\int_b^a |f|^2} < +\infty$$

L'espace C^0 est trop petit pour nos besoins.

Produit scalaire, norme

- $\langle f, g\rangle := \int_a^b fg^*$
- $\|f\|_2^2 := \int_b^a |f|^2$

Série de Fourier

- Les **coefficients de Fourier** de f relativement à $\Phi = \{\varphi_k\}_{k\geq 0}$, c_k, sont les scalaires
$$c_k = \frac{\langle f, \varphi_k\rangle}{\|\varphi\|^2}.$$
- Propriété : la série qui effectue la meilleure approximation en **moyenne quadratique** de f dans vect$\{\varphi_1, ...\varphi_n\}$ est celle où $a_k = c_k$ pour tous les k.
$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k \right\|_2 \text{ min} \iff a_k = c_k \forall k = 1, ..., n$$
- La série de Fourier de f relativement à $\Phi = \{\varphi_k\}_{k\geq 0}$ est
$$S(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(x).$$

Interprétation

- $\Phi = \{\varphi_k\}_{k \geq 0}$ est un espace de fonctions.
- Développer f sur l'espace Φ revient à projeter f sur chaque "axe" de l'espace, donc sur chaque sous-espace vect$\{\varphi_k\}$.
- La projection de f sur φ_k est très efficace (minimise la norme L^2 de l'écart) si elle est **orthogonale**, autrement dit si

$$\mathrm{proj}_{\varphi_k} f = \varphi_k \cdot \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi\|^2},$$

  où c_k est le coefficient de Fourier de f relativement à φ_k.
- La projection de f sur un espace engendré par les $\varphi_k := \Phi$ est la somme des projections de f sur chacun des axes de Φ.
- Comme chaque projection est orthogonale, on comprend aisément que la meilleure approximation en **moyenne quadratique** de f sur Φ est la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k. \qquad \text{Série de Fourier :} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k$$

Voici des systèmes complets dans l'espace $L^2([0, L], \mathbb{R})$

- Système trigonométriques classiques :
  1. $\Phi = \left\{ \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) \quad ; \quad k \in \mathbb{N}_0 \right\}$
  2. $\Phi = \left\{ \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) \quad ; \quad k \in \mathbb{N}_0 \right\}$
  3. $\Phi = \left\{ \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) \quad ; \quad k \in \mathbb{N}_0 \right\}$
- blabla

1. Convergence simple :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k \overset{C.S}{=} f \quad \forall x \in [a, b] \iff \left| \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k - f \right| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

2. Convergence en norme L^2 :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k \overset{L^2}{=} f \quad \forall x \in [a, b] \iff \lim_{n \to +\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right\|_2 \longrightarrow 0$$

3. Convergence uniforme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k \overset{C.U}{=} f \quad \forall x \in [a, b] \iff \sup_{x \in [a,b]} \left| \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k - f \right| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Attention, CU implique les deux autres, **et c'est tout** !

On considère Φ un système orthogonal, $f \in L^2([a,b], \mathbb{K})$.

Inégalité de Bessel

= Limite de l'inégalité de Pythagore.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2 \leq \|f\|_2^2}$$

Théorème de Parseval

Si Φ est un système orthogonal **complet**, i.e. que toute fonction f a sa série de Fourier qui converge en moyenne quadratique vers elle, alors l'inégalité de Bessel devient égalité.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k \overset{L^2}{=} f \Longrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2 = \|f\|_2^2}$$

La régularisée $\tilde{f}$ de f est une fonction similaire à f sauf qu'elle prend des valeurs différentes aux extrémités de l'intervalle $[a, b]$. Si $f(a) = f(b)$ alors la régularisée est continue, et $\tilde{f} = f$.

Théorème de Dirichlet

Si $f \in C^1_{\text{morc}}([a, b])$, alors sa série de Fourier **converge simplement** vers la régularisée de f sur I. Si on étend jusqu'à $\mathbb{R}$, la série converge simplement vers le prolongement périodique de la régularisée de f.

Attention, si $f(a) \neq f(b)$ la régularisée n'est pas continue. Donc si le développement de Fourier (série de fonctions continues) converge simplement vers quelque chose qui n'est pas continu sur l'intervalle, **on déduit qu'il n'y a pas de convergence uniforme** : c'est le phénomène de Gibbs.

La convergence uniforme s'obtient en adaptant le théorème de Dirichlet. En effet, si les hypothèses de Dirichlet sont vérifiées, alors on a $S(x) \overset{C.S}{=} \tilde{f}(x)$ en tout point de l'intervalle. De plus, si la régularisée est continue, alors on a une série de fonctions continues (les φ_k) qui converge vers une fonction continue : c'est une propriété de la convergence uniforme.

Convergence uniforme vers f

Si

- $f \in C^1_{\text{morc}}([a, b])$
- $f \in C^0([a, b])$
- $f(a) = f(b)$

Alors $S(x) \overset{C.U}{=} f(x)$ en tout point de l'intervalle $I = [a, b]$.

Convergence L^2 de la série de Fourier

Si la fonction est développée sur un système de fonctions orthogonal et complet, alors sa série de Fourier converge en norme L^2 vers f.

Convergence simple vers la régularisée

Si la fonction et sa dérivée sont continues par morceaux, alors sa série de Fourier converge simplement vers la régularisée sur l'intervalle. On peut prolonger sur $\mathbb{R}$ à la convergence vers le prolongement périodique de la régularisée de la fonction

Convergence uniforme vers la fonction

Si les hypothèses de Dirichlet sont validées, que la fonction est continue et donc égale à sa régularisée, alors la somme de la série de Fourier est égale à f.