

# Pesquisa e análise teórica entre os Algoritmos de Kruskal e Prim em Grafos Esparsos e Densos

Lucas Rivetti

Lucas Campelo

Augusto Cezar

José Lopes

Bruno Henrique

UFSJ

16 de julho de 2025

**Palavras-chave:** árvore geradora mínima; algoritmo de Kruskal; algoritmo de Prim; grafos esparsos; grafos densos.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Conceito de Árvore Geradora Mínima (AGM) e propriedades fundamentais</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Explicação dos algoritmos de Kruskal e Prim</b>	<b>3</b>
3.1	Algoritmo de Kruskal . . . . .	3
3.2	Algoritmo de Prim . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Comparação conceitual e operacional entre Kruskal e Prim</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Estruturas de dados associadas</b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>Complexidade computacional dos algoritmos</b>	<b>4</b>
<b>7</b>	<b>Cenários ideais para uso de cada algoritmo</b>	<b>4</b>
<b>8</b>	<b>Aplicações reais de AGMs</b>	<b>4</b>
<b>9</b>	<b>Referências</b>	<b>5</b>

# 1 Introdução

As árvores geradoras mínimas (AGMs) são estruturas centrais na teoria dos grafos, amplamente aplicadas na otimização de redes e redução de custos em projetos de infraestrutura. Uma AGM conecta todos os vértices de um grafo ponderado com o menor peso total, formando uma rede sem ciclos. Essa propriedade torna as AGMs fundamentais em situações como o planejamento de redes de comunicação ou energia.

Para encontrar AGMs de modo eficiente, destacam-se os algoritmos de Kruskal e Prim. Kruskal adiciona arestas em ordem crescente de peso, evitando ciclos, enquanto Prim aumenta uma árvore a partir de um vértice inicial, sempre escolhendo a menor aresta disponível. Ambos visam encontrar a AGM, mas utilizam estratégias e estruturas de dados distintas.

Este trabalho compara Kruskal e Prim, demonstrando suas diferenças conceituais e de desempenho em grafos esparsos e densos. Também são apresentados os conceitos teóricos envolvidos, o funcionamento dos algoritmos, as estruturas de dados, além de exemplos práticos de aplicação das AGMs.

## 2 Conceito de Árvore Geradora Mínima (AGM) e propriedades fundamentais

Uma árvore geradora de um grafo não dirigido e conectado é um subgrafo acíclico e conexo que inclui todos os seus vértices. Ao atribuir pesos às arestas, define-se o peso de uma árvore como a soma de suas arestas. Uma árvore geradora mínima (AGM) é aquela que conecta todos os vértices com o menor custo total. Quando o grafo possui múltiplas formas de conexão com o mesmo custo mínimo, podem existir várias AGMs distintas; se todos os pesos forem diferentes, a AGM é única.

Duas propriedades fundamentais regem as AGMs:

- **Propriedade do Ciclo:** a aresta mais pesada de um ciclo não pertence a nenhuma AGM.
- **Propriedade do Corte:** a menor aresta que atravessa qualquer corte pertence a todas as AGMs.

Essas propriedades fundamentam os algoritmos gulosos de AGM.

## 3 Explicação dos algoritmos de Kruskal e Prim

### 3.1 Algoritmo de Kruskal

O algoritmo de Kruskal constrói a árvore geradora mínima adicionando arestas de menor peso, desde que não forme ciclos. Inicialmente, cada vértice está isolado, e as arestas são processadas em ordem crescente de peso. Cada nova aresta só é incluída se unir componentes diferentes, evitando ciclos. Para isso, utiliza-se a estrutura de dados união-encontro (Union-Find), que identifica se dois vértices já pertencem ao mesmo componente. O processo continua até que todos os vértices estejam conectados.

### 3.2 Algoritmo de Prim

O algoritmo de Prim inicia a partir de um vértice e adiciona sempre a aresta de menor peso que conecta um novo vértice à árvore em construção. Esse processo é repetido até que todos os vértices estejam incluídos. Para maior eficiência, é utilizada uma fila de prioridade, facilitando a escolha da próxima aresta a ser incorporada à árvore.

## 4 Comparação conceitual e operacional entre Kruskal e Prim

Ambos os algoritmos encontram árvores geradoras mínimas, porém Kruskal e Prim diferem em suas abordagens. Kruskal trabalha globalmente, ordenando todas as arestas e unindo componentes desconexos, enquanto Prim expande uma única árvore a partir de um vértice. Kruskal é mais eficiente em grafos esparsos, enquanto Prim se destaca em grafos densos, especialmente com matriz de adjacência. Ambos têm complexidade  $O(n \log n)$ , mas a eficiência prática depende do perfil do grafo.

## 5 Estruturas de dados associadas

A eficiência dos algoritmos de Kruskal e Prim depende fortemente das estruturas de dados utilizadas. Kruskal utiliza a estrutura união-encontro (Union-Find) para controlar componentes conectados, enquanto Prim usa uma fila de prioridade para selecionar rapidamente a próxima aresta de menor peso. A representação do grafo, seja em lista ou matriz de adjacência, também influencia o desempenho.

## 6 Complexidade computacional dos algoritmos

No pior caso, tanto Kruskal quanto Prim possuem complexidade assintótica  $O(n \log n)$ . Kruskal é vantajoso em grafos esparsos devido à ordenação eficiente das arestas, enquanto Prim é mais eficiente em grafos densos, especialmente com matriz de adjacência.

## 7 Cenários ideais para uso de cada algoritmo

Em grafos esparsos, Kruskal tende a ser mais eficiente pela simplicidade e pela ordenação rápida das arestas. Em grafos densos, Prim com matriz de adjacência é preferível, pois evita o custo da ordenação. A escolha entre Kruskal e Prim depende do formato da entrada e da facilidade de implementação.

## 8 Aplicações reais de AGMs

As Árvore Geradoras Mínimas (AGMs) têm ampla aplicação prática em diversas áreas da engenharia e da computação, principalmente em problemas que envolvem conectar pontos de forma eficiente, minimizando custos ou recursos.

Nas **redes de energia elétrica**, AGMs são usadas para planejar sistemas de transmissão e distribuição, conectando subestações e consumidores com a menor quantidade de fios ou cabos e minimizando as perdas de energia. O objetivo é garantir o fornecimento a todos os pontos da rede com o menor investimento em infraestrutura.

Em **redes de distribuição de água**, o uso de AGMs possibilita o planejamento de encanamentos de forma que todos os imóveis de uma região sejam abastecidos utilizando a menor extensão total de tubulações. Dessa forma, é possível reduzir o custo.

Já em **redes de transporte**, como rodovias, ferrovias ou linhas de metrô, AGMs auxiliam no desenho de trajetos para conectar cidades, bairros ou estações, de modo que todos os pontos sejam acessíveis pelo menor percurso total. Assim, otimiza-se o uso de materiais e reduz-se o custo das obras.

De forma geral, as AGMs são aplicadas sempre que se deseja conectar vários pontos de maneira eficiente, seja para transmitir dados, energia, água ou para permitir o deslocamento de pessoas e mercadorias, tornando-se uma ferramenta essencial no planejamento de infraestruturas.

## 9 Referências

### Referências

- [1] BHARGAVA, Aditya Y.; FAZAR, Ed. *Entendendo Algoritmos*. 1. ed. Rio de Janeiro: Novatec, 2018.
- [2] JESULIANA, Professora. *Slides de Grafos*. Material didático da disciplina de Grafos, Universidade UFSJ, 2025.
- [3] CORMEN, Thomas H.; LEISERSON, Charles E.; RIVEST, Ronald L.; STEIN, Clifford. *Algoritmos: Teoria e Prática*. 3. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.
- [4] ZIVIANI, Nivio. *Projeto de Algoritmos com Implementações em Pascal e C*. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.