TRABALHO 2

Métodos Numéricos de Otimização

03 de junho de 2025

1 Modelo matemático

1.1 Contexto

Os engenheiros químicos (bem como outros especialistas como os engenheiros mecânicos ou civis) enfrentam frequentemente o problema geral de desenvolver contêineres para transportar líquidos. Suponha que lhe seja pedido para determinar as dimensões de um pequeno tanque cilíndrico para transportar resíduos tóxicos que será montado na carroceria de uma camionete. Seu objetivo geral será minimizar o custo do tanque. Entretanto, além do custo, você deve assegurar que o tanque armazene a quantidade requerida de líquido e que não exceda as dimensões do leito da camionete. Observe que, pelo fato de o tanque carregar resíduos tóxicos, a sua espessura é especificada por normas.

Um esquema do tanque e do leito é mostrado na Figura 1. Como pode ser visto, o tanque consiste em um cilindro com duas placas soldadas em cada extremidade.

O custo de um tanque envolve duas componentes: (1) custo do material, o qual é baseado no peso, e (2) custo da soldagem, baseado no comprimento da solda. Observe que o último envolve tanto o cordão interior quanto o exterior onde as placas se conectam com o cilindro. Os dados necessários para o problema estão resumidos na Tabela 1.

1.2 Problema e objetivos

O objetivo aqui é construir o tanque com um custo mínimo. O custo está relacionado com as variáveis de projeto (comprimento e diâmetro), já que elas afetam a massa do tanque e o comprimento dos cordões de solda. Ademais, o problema tem restrições porque o tanque deve (1) encaixar-se na carroceria da camionete e (2) carregar o volume requerido de material.

O custo consiste no material do tanque e nos custos de soldagem. Portanto, a função objetivo pode ser escrita como minimizando

$$C = c_m m + c_w \ell_w \tag{1}$$

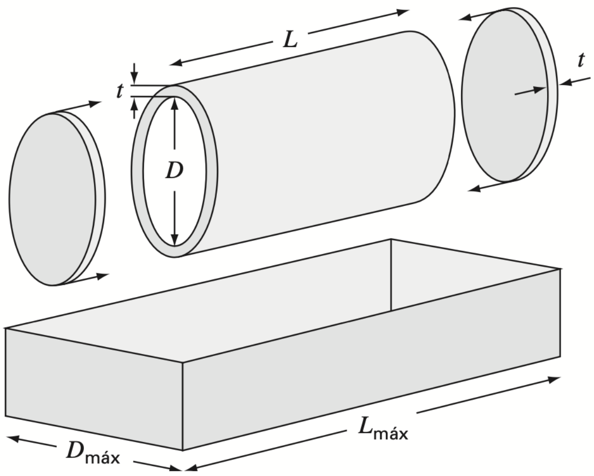

Figura 1: Parâmetros para determinar as dimensões ótimas de um tanque cilíndrico.

Tabela 1: Parâmetros para determinar as dimensões ótimas de um tanque cilíndrico usado para transportar resíduos tóxicos.

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidades
Volume requerido	V_0	0,8	m^3
Espessura	t	3	cm
Densidade	ρ	8.000	kg/m^3
Comprimento do leito	L_{max}	2	m
Largura do leito	D_{max}	1	m
Custo do material	c_m	4,5	\$/kg
Custo da soldagem	c_w	20	\$/m

onde C é o custo (\$), m é a massa (kg), ℓ_w é o comprimento da solda (m), e c_m e c_w são os fatores de custo para massa (\$/kg) e comprimento da solda (\$/m), respectivamente.

Em seguida, formula-se como a massa e o comprimento da solda estão relacionados às dimensões do tanque. Primeiro, a massa pode ser calculada como o volume de material vezes a densidade. O volume de material usado para criar as paredes laterais (isto é, o cilindro) pode ser calculado por

$$V_{\text{cilindro}} = L\pi \left[\left(\frac{D}{2} + t \right)^2 - \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right]$$

Para cada placa circular nas extremidades, tem-se

$$V_{\text{placa}} = \pi \left(\frac{D}{2} + t \right)^2 t$$

Portanto, a massa calculada é

$$m = \rho \left\{ L\pi \left[\left(\frac{D}{2} + t \right)^2 - \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right] + 2\pi \left(\frac{D}{2} + t \right)^2 t \right\} \tag{2}$$

onde ρ é a densidade $\left(kg/m^3\right)$.

O comprimento da solda para prender cada placa é igual à circunferência interna mais a externa do cilindro. Para as duas placas, o comprimento total da solda é

$$\ell_w = 2 \left[2\pi \left(\frac{D}{2} + t \right) + 2\pi \frac{D}{2} \right] = 4\pi (D + t) \tag{3}$$

Dados os valores de D e L (lembre-se, a espessura t é fixada por normas), as Equações (1) a (3) fornecem um meio de calcular o custo. Perceba também que, quando as Equações (2) e (3) são substituídas na Equação (1), a função objetivo resultante é não-linear nas incógnitas.

Em seguida, pode-se formular as restrições. Primeiro, calcula-se qual o volume que pode ser armazenado dentro do tanque,

$$V = \frac{\pi D^2}{4} L$$

Esse volume deve estar atender à tolerância de $\pm 10\%$ de V_0. Assim, uma restrição é

$$0{,}9 V_0 \leq \frac{\pi D^2 L}{4} \leq 1{,}1 V_0$$

onde V_0 é o volume desejado $\left(\mathrm{m}^3\right)$. As restrições restantes se destinam a garantir que o tanque caiba nas dimensões do leito da carroceria da camionete.

$$L \leq L_{\max}$$
$$D \leq D_{\max}$$

O problema está agora especificado. Substituindo os valores da Tabela 1, o problema pode ser resumido como

$$\text{Minimize } C = 4,5m + 20\ell_w$$

sujeito a

$$0{,}9 V_0 \leq \frac{\pi D^2 L}{4} \leq 1{,}1 V_0$$
$$L \leq 2$$
$$D \leq 1$$

2 Tarefas

Considere os métodos de otimização multidimensional baseados em derivadas abordados na disciplina: **Steepest Descent**, **Newton** e **Davidon-Fletcher-Powell (DFP)**.

As seguintes atividades devem ser realizadas:

- Desenvolver uma **interface gráfica interativa** capaz de resolver o problema proposto utilizando todos os métodos citados anteriormente;
- A interface deve permitir que o usuário configure todos os parâmetros necessários para o funcionamento dos métodos, incluindo:
  - Tamanho do passo para a derivada numérica (quando aplicável);
  - Critérios de parada;
  - Estimativa inicial das variáveis.
- As saídas numéricas devem ser exibidas diretamente na interface, abrangendo, no mínimo:
  - Número total de iterações realizadas;
  - Quantidade de avaliações da função objetivo;
  - Evolução dos valores das variáveis ao longo das iterações.
- A interface deve apresentar, obrigatoriamente, dois gráficos:
  - As **curvas de nível** da função objetivo, com sobreposição das trajetórias das iterações realizadas;
  - A evolução do **erro** (ou critério de parada) em função do número de iterações.

Ressalta-se que os itens descritos representam os requisitos mínimos. A interface e suas funcionalidades podem ser estendidas, desde que mantenham, no mínimo, os elementos especificados.

3 Regras

- O código-fonte pode ser implementado em qualquer linguagem de programação.
- Não é permitido o uso de bibliotecas que contenham implementações de nenhum dos métodos de otimização.

Prazo para envio do código-fonte: 08 de julho de 2024.

Entregas devem ser feitas ***somente pelo Moodle***.